



HAL
open science

Réseau de neurones artificiels quantiques pour un diagnostic rapide et précis de quatre maladies tropicales

Jean-Pierre Tchapet Njafa

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Tchapet Njafa. Réseau de neurones artificiels quantiques pour un diagnostic rapide et précis de quatre maladies tropicales. Physique Quantique [quant-ph]. Université de Ngaoundéré (Cameroun), 2017. Français. NNT : . tel-01995840

HAL Id: tel-01995840

<https://hal.science/tel-01995840>

Submitted on 21 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

**UNITÉ DE FORMATION DOCTORALE PHYSIQUE APPLIQUÉE ET
INGÉNIERIE**

**Réseau de neurones artificiels quantiques pour un diagnostic
rapide et précis de quatre maladies tropicales**

THESE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT/Ph.D.**
Parcours/Spécialité : Photonique

Par

TCHAPET NJAFA Jean-Pierre

Master en Sciences et Technologies mention Science de la Matière parcours Atomes,
Molécules et Interactions

Matricule : 04I197FS

Le 15 novembre 2017

Jury :

KWATO NJOCK Moïse Godfroy	Professeur	Université de Douala	Président
MOTAPON Ousmanou	Maître de Conférences	Université de Douala	Rapporteur
NSANGO Mama	Maître de Conférences	Université de Ngaoundéré	Rapporteur
EFFA Joseph Yves	Maître de Conférences	Université de Ngaoundéré	Rapporteur
DOKA YAMIGNO Serge	Maître de Conférences	Université de Ngaoundéré	Examineur
WOAFO Paul	Professeur	Université de Yaoundé I	Directeur
NANA ENGO Serge Guy	Maître de Conférences	Université de Ngaoundéré	Co-directeur

Année 2017

LISTE DES ENSEIGNANTS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES



ADMINISTRATION

DOYEN :	MVONDO AWONO Jean Pierre	<i>Maître de Conférences</i>
VICE-DOYEN DPAA :	NDJONKA Dieudonné	<i>Maître de Conférences</i>
VICE-DOYEN DSSSE :	NUKENINE NCHIWAN Elias	<i>Maître de Conférences</i>
VICE-DOYEN DRC :	TCHUENGUEM FOHOUE Fernand Nestor	<i>Professeur</i>

I. Département de Chimie (7)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	NOUMI Guy Bertrand	MC
2	TALLA Emmanuel	MC
3	HAROUNA MASSAÏ	MC
4	MOMENI Jean	CC
5	TCHAMANGO Serge Raoul	CC
6	ABIA Daouda	Ass
7	KOM Blaise	Ass

II. Département de Mathématique et Informatiques (11)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	NTYAM Achille	MC
2	BEKOLLE David	PR
3	HOUPA DANGA Duplex Elvis	MC
4	DAMAKOA Irépran	CC

5	DAYANG Paul	CC
6	NLONG II Jean Miche	CC
7	SIGNING Lazarus	CC
8	TCHAKOUNTE Franklin	CC
9	TCHOUA Paul	CC
10	GUIDANA GAZAWA	Ass
11	ZONGO MEYO	Ass

III. Département de Physique (12)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	EFFA Joseph Yves	MC
2	BEDA TIBI	PR
3	DJONGYANG Noël	MC
4	DOKA YAMIGNO Serge	MC
5	HAMAN DJALO	MC
6	NANA ENGO Serge Guy	MC
7	NSANGOU Mama	MC
8	NTSAMA ELOUNDOU Pascal	MC
9	DJONDINE Philipe	CC
10	FIFEN Jean Jules	CC
11	KENMOE FANKEM Eric	CC
12	NTAMACK Guy Edgar	CC
13	MOUBEKE Claude Armand	Ass

IV. Département des Sciences de la Terre(14)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	TCHAMENI Rigobert	MC
2	NGOUNOUNO Ismaïla	PR
3	NGUETNKAM Jean Pierre	PR
4	GANWA Alembert Alexandre	MC
5	NGOUNOU NGATCHA Benjamin	MC
6	EKENGELE NGA Léopold	CC
7	NKOUANDOU OUMAROU Faarouk	CC
8	NTSAMA ATANGANA Jacqueline	CC
9	BALLA ONDOA Augustin	Ass
10	MAMDEM Lionelle Épse BITOM	Ass
11	SIMENI Nicole Armelle	Ass
12	TAMONKEM ADZEH Roger	Ass
13	YAMGOUOT NGOUNOUNO Fadimatou	Ass

V. Département de Biologie (36)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	MEGUENI Clautilde	MC
2	AMVAM ZOLLO Paul Henri	PR
3	NGO BUM Elisabeth	PR
4	TCHUENGUEM FOHOUE Fernand Nestor	PR
5	MAPONGMETSEM Pierre Marie	PR
6	NGAMO TINKEU Léonard	PR
7	NJINTANG YANOUE Nicolas	PR
8	NUKENINE NCHIWAN Elias	PR
9	IBRAHIMA ADAMOU	MC
10	NDJONKA Dieudonné	MC
11	NGAKOU Albert	MC
12	NJAN NLOGA Alexandre Michel	MC
13	NOUBISSIE TCHIAGAM Jean Baptiste	MC
14	SOKENG DONGMO Sélestin	MC
15	BITJA NYOM Arnold	CC
16	DONGOCK NGUEMO Delphine	CC
17	KINGHA TEKOMBO Bernice M.	CC
18	MEBANGA SASSA Aristide	CC
19	NOIHA NOUMI Valery	CC
20	NTCHAPDA Fidèle	CC
21	TCHOBSALA	CC
22	TCHUENTEUE TATCHUM Lucien	CC
23	VROUMSIA TOUA	CC
24	DJITIE KOUATCHO F.	CC
25	FOKAM TAGNE Michel Ange	CC
26	GALANI TIETCHEUE Borris Rosnay	CC
27	MAZI SANDA	CC
28	MOKAM DIDI Gaëlle	CC
29	MWEUGANG Nathalie	CC
30	TEMDIE GUEMMOGNE Roméo J.	CC
31	ADAMOU Moïse	Ass
32	DONGMO Faustin	Ass
33	KEMETA AZAMBOUE David R.	Ass
34	MAÏMOUNA ABBA Epse KATCHALA	Ass
35	NJAPDOUNKE KAMENI Jacqueline S.	Ass
36	NKANTCHOUE NKAMGUIE Gisèle C.	Ass

VI. Département des Sciences Biomédicales (10)

N°	Noms et Prénoms	GRADE
1	MBO AMVEME Jérémie	CC
2	NEOSI GUENA Mathurin	CC
3	NGAROUA	CC
4	NWABO KAMDJE Armel Hervé	CC
5	PANCHA MBOUEMBOUE Olivier	CC
6	TEPONGNING NZANGUE Roselyne	CC
7	FODOUOP CHEGAING Siméon Pierre	CC
8	TAGNE SIMO Richard	CC
9	TALOM TANGUE Benjamin	CC
10	TSAGUE Marthe Valentine	Ass

Ass = Assistant ; **CC** = Chargé de Cours ; **MC** = Maître de Conférences ; **PR** = Professeur.

DÉDICACES

À nos feus pères NJAFA Emmanuel et NGASSAM Emmanuel

REMERCIEMENTS

J'exprime mes remerciements au Professeur P. WOAF0 qui a assuré la direction de ce travail en restant attentif et disponible malgré ses multiples responsabilités.

Un merci tout particulier au Professeur S. G. NANA ENGO, pour son soutien multiforme, ses conseils et dont l'exigence de la qualité du travail n'a d'égale que sa patience. Je lui dois mon immersion dans le domaine de l'information quantique depuis le Master.

Ce travail ne saurait être défendu s'il n'y avait pas les membres du jury. J'exprime donc ma profonde gratitude au Professeur KWATO NJOCK Moïse Godfroy, le Président du jury, aux Professeurs MOTAPON Ousmanou, NSANGOU Mama et EFFA Joseph Yves, les Rapporteurs et au Professeur DOKA YAMIGNO Serge, l'Examineur, qui me font l'honneur d'examiner ce travail.

Je ne pourrais porter le qualificatif de physicien s'il n'y avait pas eu mes enseignants. Mes plus grands remerciements vont à cet effet à l'endroit de tous les enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Ngaoundéré, particulièrement à ceux du Département de Physique.

Comment oublier d'exprimer ma gratitude à l'endroit des membres du laboratoire de photonique que sont TCHODIMOU, TEMGA, NGASSEU, ALHADJI et les autres, avec qui nous avons maintenu vivant le laboratoire malgré les obstacles. A eux je dois associer mes camarades de la toute première promotion de AMI (MAÏMOUNATOU, DJORWE, MBOGNING, ...).

Malgré la distance, mes amies de toujours, DJOMMOU et DIBAM, je dis infiniment merci.

Mes remerciements sont également adressés à mes amis ASSOGO, EWONDO et NZALI pour leur soutien et disponibilité.

À mon père, Mr. J-P. KAMGNA, qui m'a soutenu tout au long de mes études universitaires, en dépit de leur longueur, merci beaucoup.

À mon père de Ngaoundéré le Professeur A. A. GANWA, et toute sa famille, qui m'a accueilli et toujours soutenu depuis 2004, je vous dis merci du plus profond de mon cœur.

Comment ne pas remercier la famille NGUETNKAM, dans laquelle j'ai rencontré mon épouse, pour son soutien multiforme, ses conseils et ses encouragements.

À ma mère YANGHU Victorine, qui m'a inculqué le sens du travail, la persévérance et qui ne supportait pas mes échecs, gros merci.

À ma belle-mère YANGO Émilienne, toujours à m'encourager à terminer ces travaux de thèse avec des conseils avisés, soit remerciée.

Merci mes petits chéris, Marc Emmanuel et Urielle Émilienne, qui me soutiennent avec leurs sourires, bien que ne passant pas beaucoup de temps avec vous, votre papa vous remercie.

À mon épouse adorée, WANDJI NGASSAM Fernande, merci de me soutenir depuis le début de cette entreprise jusqu'à maintenant, par tes conseils et ton réconfort.

A tous ceux qui, de près comme de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, je dis infiniment merci.

RÉSUMÉ

Cette thèse présente un modèle de Mémoire Associative Quantique (QAM pour Quantum Associative Memory en Anglais), que nous appellerons QAMDiagnos et qui se veut un outil d'aide à la décision dans le diagnostic de quatre maladies tropicales (paludisme, fièvre typhoïde, fièvre jaune et dengue) qui ont de nombreux signes et symptômes similaires. La mémoire peut distinguer une simple infection d'une co-infection ou polyinfection. Notre modèle est une combinaison des versions améliorées de l'algorithme quantique linéaire originel mis au point par Ventura pour la QAM et l'algorithme quantique de recherche non linéaire proposé par Abrams et Llyod. Pour l'algorithme linéaire, nous introduisons deux modifications de la requête qui optimisent la restitution correcte de données de plusieurs patrons simultanément, quel que soit le nombre d'états de patrons par rapport au nombre total d'états de base. Pour l'algorithme non linéaire, nous proposons une version simplifiée et améliorée de celui de Rigui Zhou et *al.*, qui intègre des matrices quantiques avec le diagramme de décision binaire de David Rosenbaum, dans l'algorithme quantique de recherche non linéaire d'Abrams et Llyod. Notre modèle a l'avantage de donner la possibilité de restituer un des états souhaités, lors d'une restitution de plusieurs patrons, lorsqu'une mesure est effectuée sur le premier registre avec une complexité qui vaut $\mathcal{O}(c - r)$. Ceci est meilleur que l'algorithme de Grover et ses versions modifiées qui ont besoin de $\mathcal{O}(\sqrt{\frac{2^n}{m}})$ étapes lorsqu'ils sont utilisés comme algorithme de restitution dans une QAM. n est le nombre de qubits du premier registre et m le nombre de valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$; f est une fonction calculée par l'oracle, qui prend une valeur entre 0 et $2^n - 1$ et retourne les valeurs 0 ou 1. Puisque la non linéarité rend le système hautement susceptible au bruit, une analyse de l'influence des canaux bruités à un qubit sur notre modèle d'algorithme de recherche non linéaire de la QAM montre une fidélité de l'ordre de 0.70 quel que soit le nombre de qubits existant dans le premier registre, démontrant ainsi la robustesse de notre modèle.

La base de données de l'application QAMDiagnos est constituée des signes et symptômes des quatre maladies tropicales retenues. Une interface graphique utilisateur multiplateforme (Android, Linux, MS Windows) a été développée afin de rendre conviviale QAMDiagnos. Des résultats de simulation, il apparaît que l'efficacité de reconnaissance est bonne lorsque des signes et symptômes spécifiques à une maladie sont insérés, sachant que l'algorithme principal est l'algorithme linéaire. L'algorithme non linéaire aide à confirmer ou corriger le diagnostic ou à suggérer des conseils de traitement au personnel médical. Ainsi, l'application QAMDiagnos est un outil d'aide au diagnostic médical sensible et peu coûteux, permettant une rapide et précise détection de ces quatre maladies tropicales, et donc une prise en charge rapide et efficace.

Mots-clés : Mémoire associative quantique, Diagnostic des maladies tropicales, Algorithme de recherche quantique, Algorithme quantique de recherche linéaire, Algorithme quantique de recherche non linéaire, Outils d'aide au diagnostic médical assisté par ordinateur

ABSTRACT

This thesis presents a model of Quantum Associative Memory (QAM), that we will call QAMDiagnos and that can be a helpful tool for physicians for the diagnosis of four tropical diseases (malaria, typhoid fever, yellow fever and dengue) which have several similar signs and symptoms. The memory can distinguish between a single infection from a polyinfection. Our model is a combination of improved versions of the original linear quantum search algorithm made by Ventura for QAM and the non-linear quantum search algorithm of Abrams and Lloyd. For the linear algorithm, we introduce two modifications of the query that optimized data retrieval of correct multi-patterns simultaneously for any rate of the number of the recognition pattern states on the total basis states. For the non-linear algorithm, we propose a simplified and generalised version of Rigui Zhou et *al.* which includes the quantum matrix with the binary decision diagram put forth by David Rosenbaum in the Abrams and Lloyd's non-linear search quantum algorithm. Our model has the advantage to give the possibility to retrieve one of the sought states in multi-values retrieving scheme when a measurement is done on the first register in $\mathcal{O}(c-r)$ time complexity. It is better than the Grover's algorithm and its modified form which need $\mathcal{O}(\sqrt{\frac{2^n}{m}})$ steps when they are used as the retrieval algorithm in a QAM. n is the number of qubits of the first register and m the number of x values for which $f(x) = 1$; f is a function computed by the oracle, which takes a value between 0 and $2^n - 1$ and returns values 0 or 1. As the nonlinearity makes the system highly susceptible to the noise, an analysis of the influence of the single qubit noise channels on the Nonlinear Search Algorithm of our model of QAM shows a fidelity of about 0.7 whatever the number of qubits existing in the first register, thus demonstrating the robustness of our model.

The database of the QAMDiagnos application contains signs and symptoms of the four retained tropical diseases. A multi-platform graphical user interface (Android, Linux, MS Windows) has been developed to make QAMDiagnos user-friendly. From the given simulation results, it appears that the efficiency of recognition is good when particular signs and symptoms of a disease are inserted given that the linear algorithm is the main algorithm. The non-linear algorithm helps confirm or correct the diagnosis or suggest some treatment advice to the physician. So, the application QAMDiagnos is a tool for medical diagnosis sensitive and a low-cost that enables rapid and accurate detection of the four tropical diseases, and therefore a rapid and effective medical care.

Keywords : Quantum associative memory, Diagnosis of tropical diseases, Quantum search algorithm, Quantum linear search algorithm, Quantum non-linear search algorithm, Computer assisted medical diagnosis assist tools

TABLE DES MATIÈRES

Liste des enseignants de la Faculté des Sciences	i
Dédicaces	v
Remerciements	vi
Résumé	vii
Abstract	viii
Table des figures	xii
Liste des tableaux	xiv
Liste des abréviations et des symboles	xviii
Introduction générale	1
1 Revue de la littérature	6
1.1 Introduction	6
1.2 Quatre maladies tropicales aux signes et symptômes similaires	6
1.2.1 Paludisme ou malaria	7
1.2.2 Fièvre jaune	10
1.2.3 Dengue	13
1.2.4 Fièvre typhoïde	15
1.3 Outils d'aide au diagnostic médical assisté par ordinateur	17
1.3.1 Outils basés sur les réseaux de neurones artificiels	17
1.3.2 Outils basés sur d'autres approches computationnelles	18
1.4 Quelques concepts de mémoire associative	20
1.4.1 Description des réseaux de neurones artificiels	20
1.4.2 Modes d'apprentissage des ANN	20
1.4.3 Notions de mémoire associative	21

1.4.4	Notions de mémoire associative quantique	21
1.5	Conclusion	26
2	Amélioration d'un algorithme de recherche quantique linéaire	27
2.1	Introduction	27
2.2	Algorithmes d'apprentissage : Diagramme quantique superposé de décision binaire	28
2.2.1	Principe	28
2.2.2	Étapes de construction	28
2.3	Algorithme de recherche avec requête distribuée	31
2.4	Mémoire associative quantique avec requête distribuée améliorée	37
2.4.1	Amélioration de la mémoire associative quantique avec requête distribuée	37
2.4.2	Test de performance de l'Algorithme 2.2	39
2.4.3	Détermination du nombre d'itérations pour les algorithmes C1 et C2	41
2.4.4	Tests de performance de l'Algorithme 2.3	47
2.5	Conclusion	49
3	Algorithme de recherche non linéaire robuste pour mémoires associatives quantiques	51
3.1	Introduction	51
3.2	Algorithme de recherche non linéaire	52
3.2.1	Principe de l'algorithme	52
3.2.2	Description de l'algorithme	53
3.3	Mémoire associative quantique avec algorithme de recherche non linéaire	60
3.4	Prise en compte du bruit quantique dans la QAM-NLSA	68
3.4.1	Canaux bruités quantiques à un qubit	69
3.4.2	QAM-NLSA avec bruit quantique	69
3.4.3	Détails du bit flip	72
3.5	Langage de programmation utilisé	75
3.6	Conclusion	75
4	Résultats et discussion	77
4.1	Introduction	77
4.2	Description de la base de données et de la QAM	77
4.2.1	Ensemble des signes et symptômes	77
4.2.2	Structure de la QAM	79
4.3	Simulations, résultats et interprétation	81
4.3.1	Cas où $a = 0.0001$	82
4.3.2	Cas où $a = 0.4999$	89
4.3.3	Spécificité, sensibilité, valeurs prédictive et rapports de vraisemblance de QAMDiagnos	96
4.4	Interface graphique utilisateur pour ordinateur et smartphone	99
4.4.1	Procédure d'utilisation de QAMDiagnos	99
4.4.2	Modification de la structure de QAMDiagnos	103
4.5	Conclusion	105

Conclusion générale	106
Bibliographie	108
A Quelques concepts de la théorie de l'information quantique	113
A.1 Bit quantique et état superposé	113
A.2 Intrication quantique	114
A.3 Parallélisme quantique et décohérence	115
A.4 Portes quantiques élémentaires	115
B Algorithme d'initialisation des amplitudes quantiques	117
C Algorithme de Grover	121
D Amplification d'amplitude	123
D.1 Cas de l'algorithme de Grover	123
D.2 Cas de l'algorithme de recherche avec requête distribuée	125
E Distribution binomiale	126
Liste des publications	128
Index	132

TABLE DES FIGURES

1.2.1	Zones à risque du paludisme dans le monde [CMI16].	8
1.2.2	Zone à risque de la fièvre jaune dans le monde [Bac11].	11
1.2.3	Zone à risque de la dengue dans le monde [car12].	14
1.4.1	Neurone artificiel	20
2.2.1	BSQDD non simplifié pour un registre à quatre qubits.	29
2.2.2	Fusion de nœuds pour obtenir le BSQDD final.	29
2.2.3	Circuit quantique généré par le BSQDD final.	30
2.2.4	BSQDD permettant d'obtenir l'état $ \psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(000\rangle + 001\rangle + 010\rangle + 101\rangle + 110\rangle)$	30
2.3.1	Diagramme de Brikman et circuit quantique associé de l'algorithme de recherche avec requête distribuée	33
2.4.1	Diagramme de Brickman et circuit quantique associé de l'Algorithme 2.2.	38
2.4.2	Évolution de la probabilité en fonction du nombre d'itérations pour une mémoire à 7 qubits. La valeur arbitraire qui règle la largeur de la distribution est $a = 0.15$	42
2.4.3	Évolution de la probabilité en fonction du nombre d'itérations pour une mémoire à 7 qubits. La valeur arbitraire qui règle la largeur de la distribution est $a = 0.40$	43
3.2.1	Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16a).	55
3.2.2	Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16b).	56
3.2.3	Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16c).	56
3.3.1	Structure schématique de la QAM-NLSA.	62
3.3.2	Structure schématique de la QAM-NLSA de l'Exemple 3.1.	63
3.3.3	Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.3.18).	67
3.4.1	Structure schématique du NLSA avec bruit quantique.	70
3.4.2	Évolution de la fidélité dans le cas où l'état recherché n'existe pas dans le premier registre.	74

3.4.3	Évolution de la fidélité dans le cas où l'état recherché existe dans le premier registre.	75
4.2.1	Moyens de diagnostic des maladies infectieuses aux différents niveaux de la pyramide sanitaire [CMI12].. . . .	78
4.2.2	Structure schématique de l'application QAMDiagnos.	81
4.3.1	Probabilité P_c des états de la requête distribuée en fonction de a et de la distance de Hamming.	82
4.3.2	Valeurs prédictives en fonction de la prévalence $P_{re}(\%)$	98
4.4.1	Interface graphique utilisateur (GUI) de l'application QAMDiagnos	100
4.4.2	GUI de QAMDiagnos avec résultat de diagnostic lorsque le paludisme est associé à la plus grande probabilité par l'algorithme de recherche linéaire. . . .	101
4.4.3	GUI de QAMDiagnos avec le résultat du diagnostic dans le cas d'une co-infection.	102
4.4.4	Structure schématique de QAMDiagnos avec des qubits supplémentaires. . . .	103
4.4.5	GUI de QAMDiagnos avec le résultat du diagnostic dans le cas du paludisme. . . .	104
A.1.1	Sphère de Bloch	114
C.0.1	Diagramme de Brikman de l'algorithme de Grover	122



LISTE DES TABLEAUX

1.2.1	Signes et symptômes du paludisme [msf16, CMI16, F ⁺ 13, who15, CMI12].. . .	9
1.2.2	Signes et symptômes de la fièvre jaune [msf16, CMI16, F ⁺ 13, who15, CMI12].	12
1.2.3	Signes et symptômes de la dengue [msf16, CMI16, F ⁺ 13, who15, CMI12]. . . .	15
1.2.4	Signes et symptômes de la fièvre typhoïde [msf16, CMI16, F ⁺ 13, who15, CMI12].	16
1.4.1	Correspondances ANN et QNN.	22
2.4.1	Paramètres importants des algorithmes C0 , C1 et C2 pour la mémoire à 3 qubits de l'Exemple 2.2. Λ est le nombre d'itérations et $P_c(\%)$ est la probabilité de restitution du bon résultat.	40
2.4.2	Paramètres importants pour les algorithmes C0 , C1 et C2 pour des données d'une mémoire à 7 qubits ($P_c(\%)$).	41
2.4.3	Paramètres importants des algorithmes C0 , C1 et C2 pour la mémoire à 3 qubits de l'Exemple 2.2. Λ est le nombre d'itérations et $P_c(\%)$ est la probabilité de restitution du bon résultat. Le nombre d'itérations dépend de l'algorithme.	48
2.4.4	Paramètres importants pour les algorithmes C0 , C1 et C2 pour des données d'une mémoire à 7 qubits. Le nombre d'itérations dépend de l'algorithme ($P_c(\%)$).	48
2.4.5	Paramètres importants pour les algorithmes C0 et C1 pour 1 à 7 qubits pour un patron (valeur la plus grande) dont la distance de Hamming est la plus grande avec le centre de la requête $ 0\rangle$. Le nombre d'itérations est Λ et $P_c(\%)$ est la probabilité d'obtention du bon résultat.. . . .	49
2.4.6	Paramètres importants pour l'algorithme C2 pour 1 à 7 qubits pour un patron (valeur la plus grande) dont la distance de Hamming est la plus grande avec le centre de la requête $ 0\rangle$. Le nombre d'itérations est Λ et $P_c(\%)$ est la probabilité d'obtention du bon résultat.. . . .	50
3.4.1	Canaux bruités quantiques à un qubit..	69
4.2.1	Signes et symptômes de la base de données	78
4.2.1	Signes et symptômes de la base de données	79

4.2.2	Groupes de maladies et leurs codes binaires pour l'algorithme linéaire.	80
4.3.1	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	83
4.3.2	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	83
4.3.3	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	84
4.3.4	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	85
4.3.5	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	85
4.3.6	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	86
4.3.7	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	86
4.3.8	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	87
4.3.9	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	87
4.3.10	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	88
4.3.11	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	88
4.3.12	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	89
4.3.13	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	90
4.3.14	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	90
4.3.15	Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire. . .	91
4.3.16	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	92
4.3.17	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	92

4.3.18	Cas d'une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	93
4.3.19	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	93
4.3.20	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	94
4.3.21	Cas d'une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	94
4.3.22	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C0 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	95
4.3.23	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C1 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	95
4.3.24	Cas d'une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme C2 pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.	96
4.3.25	Spécificité de QAMDiagnos.	97

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SYMBOLES

=	Bit classique
–	Bit quantique ou qubit
	Mesure
	Porte quantique A
$ x\rangle$	État quantique x
\mathbb{I}	Matrice ou opérateur identité
\mathcal{H}	Espace de Hilbert
\otimes	Produit tensoriel
Σ	Sommation
$RV+$	Rapport de Vraisemblance positif
$RV-$	Rapport de Vraisemblance négatif
ADN	Acide désoxyribonucléique
AM	Associative Memories
AMBC	Associative Memory Base Classifier
ANN	Artificial Neural Networks
ARN	Acide ribonucléique
ASVM	Adaptive Support Vector Machines
BSQDD	Binary Superposed Quantum Decision Diagram

ECG Électrocardiogramme

Eq. Équation

FFANN Feed Forward Artificial Neural Networks

Fig. Figure

GUI Graphical User Interface

HySMID Hybrid System for Myocardial Ischemia Diagnosis

IA Intelligence Artificielle

LSQ Least significant qubit

MalDANN Malaria Diagnosis by ANN

MSQ Most significant qubit

NLSA NonLinear Search Algorithm

OMS Organisation Mondiale de la Santé

PCR Polymerase chain reaction

QAM Quantum Associative Memory

QAM-NLSA Quantum Associative Memory with Non-Linear Search Algorithm

QAMDiagnos Quantum Associative Memory for the Diagnosis

QXCI Quantum Xrroid Interface System

Ref. Référence

RT-PCR Reverse transcriptase-polymerase chain reaction

Tab. Table

TDR Tests de Diagnostic Rapide

VPN Valeur Prédictive Négative

VPP Valeur Prédictive Positive

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le diagnostic est l'identification d'une situation, d'une difficulté ou d'un phénomène par l'interprétation des signes ou des lésions. Dans le domaine de la médecine, le diagnostic consiste à identifier des conditions anormales qui affectent un patient spécifique en se basant sur des manifestations cliniques. Si le diagnostic final est adapté à la maladie dont souffre le patient, le processus de diagnostic est correct ; sinon un mauvais diagnostic survient. Le diagnostic médical est un processus permettant au praticien de faire des prédictions par rapport aux caractéristiques de situations cliniques et de déterminer l'ensemble des actions appropriées. Pour parvenir au diagnostic, le praticien accumule généralement des informations, dont certaines lui sont spontanément livrées par le patient (le motif de la consultation, les symptômes), d'autres doivent être recherchées mais sont disponibles immédiatement (les signes physiques), d'autres enfin sont d'obtention plus ou moins difficile et coûteuse (résultats d'examen complémentaires). Le diagnostic est donc l'implémentation d'un processus de décisions complexes qui implique beaucoup d'imprécisions et un savoir-faire incertain, spécialement lorsque la maladie possède plusieurs signes et symptômes ou a des signes et symptômes non spécifiques. Il va de soi que la complexité du processus du diagnostic est encore plus importante dans le cas des maladies ayant des signes et symptômes similaires et dans le cas de co-infection ou polyinfection par ces maladies.

Du point de vue de la statistique, la procédure de diagnostic implique des tests de classification. Autrement, les tâches sont effectuées sur la base des caractéristiques mesurées afin d'assigner un patient à un des petits ensembles de classes [DG07]. C'est pourquoi, les réseaux de neurones artificiels (ANN pour Artificial Neural Networks en Anglais) fournissent de puissants outils d'aide à la décision permettant aux praticiens d'éviter les mauvais diagnostics en analysant, en modélisant et en donnant un sens à des données cliniques complexes à travers une vaste gamme d'applications médicales. En effet, les ANN possèdent non seulement une habileté de prédiction, mais ils peuvent effectuer des calculs parallèles et sont adaptables. C'est ainsi qu'ils sont largement utilisés comme outils d'aide à la décision assistée par ordinateur parmi les nombreuses techniques de diagnostic médical automatisé proposées dans la littérature [FAM⁺13, AGK12]. Les ANN sont par exemple utilisés pour le diagnostic du cancer colorectal, les lésions de la sclérose en plaques, le cancer du colon, la tuberculose, la maladie du pancréas, les maladies gynécologiques et le diabète précoce [FAM⁺13].

Les mémoires associatives (AM pour Associative Memories en Anglais), qui sont une

classe de ANN spécialisée dans la reconnaissance de patrons d'informations, ont attiré l'attention de plusieurs groupes de recherche de part le monde à cause de nombreuses propriétés. Au rang de ces propriétés on trouve la rapidité d'exécution, une meilleure correspondance et une tolérance intrinsèque au bruit. Aldape-Pérez et *al.* donnent dans la Ref [MCOA12] un bon résumé de l'évolution des AM, du premier modèle, le Lernmatrix développé par Karl Steinbuch en 1961, au modèle plus récent proposé entre 1982 et 1984 par Hopfield [Hop82, Hop84]. Le modèle de Hopfield est une AM qui utilise la règle d'apprentissage hebbienne et est capable de restituer des patrons à partir de représentations partielles et/ou bruitées.

Depuis les trois dernières décennies, les possibilités d'amélioration des capacités des mémoires de stockage (comme le codage super dense) et d'accélération du temps de calcul suscitent un intérêt grandissant dans le domaine de l'information quantique. Trois propriétés sont à l'origine de cet intérêt : (i) le *parallélisme quantique* qui s'exprime dans le principe de superposition et fournit un avantage dans le traitement d'un grand ensemble de données ; (ii) l'*intrication quantique*, l'étrange phénomène qui lie des qubits quelle que soit la distance qui les sépare et permet de mesurer dans un registre, l'état de tous les qubits dont les valeurs sont interdépendantes ; (iii) l'*unitarité* des portes quantiques qui assure la réversibilité et permet de s'affranchir de la perte d'énergie par dissipation des composants physiques.

En considérant que l'information quantique est une information stockée sous forme de propriété quantique d'un système, par exemple le spin d'un électron, plusieurs approches de mémoire associative quantique ont été proposées.

Perus et *al.* ont travaillé avec un algorithme basé sur le modèle des ondes quantiques de Hopfield et ont effectué avec succès des tests de simulation sur ordinateurs dans le domaine du traitement d'images par la reconnaissance de patrons [PB03b, PB03a, PBL04].

Le modèle proposé par Trugenberger fait le lien entre les ANN et les portes logiques de la reconnaissance de patrons quantiques. Le modèle est conçu sur le fait qu'un cas spécial de stockage de mémoire hebbienne est équivalent à l'implémentation quantique de la porte NOT XOR [Tru02].

Ventura et Martinez ont construit, au début des années 2000, un modèle de mémoire associative quantique où les patrons stockés sont considérés comme étant les états de base des états de la mémoire quantique (méthode *inclusive* de la superposition quantique). Les opérateurs unitaires accroissent la probabilité de restitution d'un état de base associé à un patron d'entrée [VM00, Ven01, Ven02]. L'algorithme de restitution est basé sur le célèbre algorithme de recherche quantique dans une base de données désordonnée qu'est l'algorithme de Grover. Cet algorithme est aussi une amplification d'amplitudes quantiques [Gro97a]. Dans le but de surmonter la limitation de ce modèle à ne résoudre que des problèmes de complétion en restituant les patrons à partir de données bruitées, Ezhov et *al.* ont utilisé la méthode *exclusive* de la superposition quantique et l'algorithme de Grover avec requêtes distribuées [ENV00b]. Toutefois, lors des classifications, leur modèle donne à des états non souhaités (non pertinents) des probabilités élevées.

Plus récemment, Zhou et Ding ont présenté une nouvelle méthode de multi-reconnaissance quantique de patrons, basée sur une amélioration de l'algorithme de Grover proposé par Li et Li [LL07], qui peut reconnaître plusieurs patrons simultanément avec une probabilité de 100% [ZD08]. La méthode introduit une nouvelle conception d'initialisation des états quantiques et l'encodage quantique de l'ensemble des patrons. **Cependant, il existe une contrainte importante qui voudrait que le nombre d'états de patrons à restituer**

soit supérieur au tiers du nombre total d'états de base de la mémoire.

Dans cette thèse, comme première innovation nous suggérons, à travers un opérateur d'oracle \mathcal{I}_M , deux modifications de la requête permettant d'optimiser la restitution correcte et simultanée de plusieurs patrons dans le modèle d'Ezhov de la mémoire associative quantique ; ceci sans aucune contrainte.

L'algorithme de recherche non linéaire (NLSA pour NonLinear Search Algorithm en Anglais) est basé sur le fait qu'il a été suggéré que dans certaines circonstances, le principe de superposition quantique peut être violé. En d'autres termes, un système quantique peut avoir une évolution temporelle non linéaire. C'est ainsi qu'Abrams et Llyod pensent dans la Ref [AL98] qu'un calculateur quantique non linéaire peut résoudre les problèmes NP-complet¹ et #P² en temps polynomial.

Rappelons que le NLSA d'Abrams et Llyod utilise la prescription de Weinberg. De plus ces auteurs basent leur argument sur une propriété générale d'évolution non linéaire dans un espace de Hilbert. Cette évolution non linéaire est le produit scalaire non conservatif entre les solutions non linéaires d'une équation de Schrödinger. On appelle cet effet le *phénomène de mobilité*. Dans le but de s'affranchir du fait que le formalisme de Weinberg implique une transmission plus rapide que la lumière [Pol91], Czachor [Cza98] propose une autre description basée quant à elle sur le formalisme de Polchinski. Dans ce mémoire nous adoptons la description de Czachor. Meyer et Wong donnent dans [MW13] une autre raison pouvant également justifier l'utilisation du formalisme non linéaire en théorie quantique :

“[...] An obvious question is whether a modest, physically motivated nonlinearity can still produce a computational advantage. In particular, consider Bose-Einstein condensates (BECs). [...] In general, describing such many-body systems is difficult because of the many interaction terms. But under certain conditions, one can assume that only two-body contact interactions contribute and the s-wave scattering length a is much less than the interparticle spacing. Then using mean field theory, one finds that the system is approximately described by a nonlinear Schrödinger equation [...]”

Ceci peut être traduit par :

“[...] Une question évidente est de savoir si une non linéarité modeste, motivée physiquement peut encore produire un avantage de calcul. Considérons en particulier les condensats de Bose-Einstein (BEC). [...] En général, la description de ces systèmes à plusieurs corps est difficile en raison des nombreux termes d'interaction. Mais sous certaines conditions, on peut supposer que seules les interactions de contact à deux corps contribuent et que la longueur de diffusion a de l'onde s est beaucoup plus faible que l'espace inter particules. Ensuite, en utilisant la

¹Un problème NP-complet (c'est-à-dire un problème complet pour la classe NP) est un problème de décision vérifiant les propriétés suivantes : (1) Il est possible de vérifier une solution efficacement (en temps polynomial) ; la classe des problèmes vérifiant cette propriété est notée NP. (2) Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale ; cela signifie que le problème est au moins aussi difficile que tous les autres problèmes de la classe NP.

²La classe #P peut être définie comme l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe une machine de Turing M non déterministe en temps polynomial, telle que pour tout x , $f(x)$ est égale au nombre de chemins acceptants pour M sur l'entrée x .

théorie des champs moyens, on constate que le système est approximativement décrit par une équation de Schrödinger non linéaire [...]"

Toutefois, Meyer et Wong utilisent plutôt l'équation de Gross-Pitaevskii pour construire leur algorithme de recherche non linéaire.

Dans le domaine des mémoires associatives, Rigui *et al.* [Rig12] ont récemment proposé un modèle de mémoire associative de Ventura qui utilise le diagramme quantique superposé de décision binaire (BSQDD pour Binary Superposed Quantum Decision Diagram) proposé par Rosenbaum [Ros10]. Ils ont également utilisé l'algorithme de recherche non linéaire quantique d'Abrams et Lloyd comme algorithme de restitution de plusieurs patrons simultanément. Bien que le processus d'apprentissage de leur modèle soit bon, **il subsiste des ambiguïtés sur la manière dont évolue la mémoire et sur la manière dont se déroule le processus de restitution multiple. Il n'y a également aucune indication sur la manière dont une mesure donnera un état souhaité** parce que l'algorithme de recherche non linéaire laisse le premier registre dans un état superposé.

Dans cette thèse, comme seconde innovation, **nous proposons un NLSA pour une mémoire associative quantique avec une méthode concise pour restituer un des états souhaités, spécialement dans le cas d'une restitution multiple lorsque nous effectuons la mesure uniquement sur le premier registre.** La complexité est $\mathcal{O}(c-r)$. *Ainsi, notre modèle simplifie et généralise celui de Rigui et al.* [Rig12].

Cependant, si la non linéarité assure un grand avantage calculatoire, elle rend aussi le système hautement susceptible au bruit quantique. Ce qui apparaît comme étant un obstacle qui limite l'efficacité du NLSA.

Comme troisième innovation dans cette thèse, **nous analysons l'effet du bruit quantique sur le NLSA** en considérant le canal bruité quantique bit-flip qui modélise le bruit quantique induit par l'environnement. Nous considérons qu'au plus une seule erreur bit-flip survient par qubit de données. Il est à noter que le problème de l'influence du bruit quantique sur l'algorithme linéaire de recherche de Grover a été largement étudié par plusieurs chercheurs [Sal08, GKW12].

Dans le domaine des maladies tropicales, plusieurs outils d'aide à la décision médicale assistée par ordinateur ont été conçus et certains utilisent des ANN, mais sont surtout spécialisés dans le paludisme [OO97, APA12, AES13, ARFB⁺10, FAM⁺13]. Ceci peut se justifier par le fait que le paludisme est la maladie parasitaire la plus répandue dans le monde. Plus de 40% de la population mondiale est exposée à cette maladie, particulièrement celle des zones tropicales. Au Cameroun, tout comme dans la plupart des pays d'Afrique Subsaharienne, c'est un problème de santé publique car toute la population est exposée à la maladie. Pour diagnostiquer le paludisme, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) [who15] recommande l'utilisation de tests de diagnostic rapide (TDR). Mais, ces derniers nécessitent que certaines conditions de conservation soient satisfaites. Malheureusement, ces conditions sont difficiles à satisfaire dans les zones rurales et semi-urbaines des pays en voie de développement. Par conséquent, la technique la plus utilisée pour déterminer le stade de développement du paludisme reste l'évaluation microscopique au Giemsa d'une lame de frottis sanguin. Cependant, ceci est une tâche répétitive et longue et qui requiert un opérateur bien formé. De plus, des erreurs de diagnostic du paludisme surviennent à cause de la confusion entre ses signes et symptômes et ceux d'autres maladies tropicales telles que la fièvre typhoïde, la fièvre jaune et la dengue, ou à cause du manque d'expérience du

personnel médical.

Dans le but de permettre un diagnostic rapide et précis des quatre maladies tropicales que sont le paludisme, la fièvre typhoïde, la fièvre jaune et la dengue, et qui ont des signes et symptômes similaires, nous proposons dans ce mémoire le modèle *QAMDiagnos* (Quantum Associative Memory for the Diagnosis en Anglais) associé à une interface graphique conviviale multiplateforme (Android, Linux, MS Windows). Ce modèle qui utilise les deux algorithmes de recherche sus-mentionnés, ambitionne :

- 1. d'agir comme un outil d'aide à la décision du diagnostic médical dans les centres de santé ruraux et sémi-urbains qui ne disposent pas de laboratoire et/ou ayant un nombre limité de médecins expérimentés et permettre une prise en charge clinique rapide et efficace des patients ;**
- 2. de faciliter le traitement et la prévention de potentielles pandémies sachant qu'aujourd'hui l'augmentation du trafic aérien, le tourisme dans les régions tropicales et les migrations humaines ont des conséquences sur l'émergence des maladies tropicales (d'autant plus qu'il n'existe pas de vaccins pour la plupart des maladies tropicales majeures).**

Notre modèle, qui est plus robuste que celui d'Agarkar et Ghathol [AA10] utilisant un algorithme de retroprogration avec apprentissage supervisé (FFANN pour Feed Forward Artificial Neural Networks en Anglais) pour le diagnostic du paludisme, de la fièvre typhoïde et de la dengue, peut être étendu à plusieurs maladies tropicales.

Dans le Chapitre 1, consacré à la revue de la littérature, nous présentons les quatre maladies tropicales autour desquelles l'application *QAMDiagnos* est conçue ; Par la suite, nous passons en revue quelques outils de diagnostic automatisés. Enfin, nous présentons respectivement quelques concepts de mémoire associative, de mémoire associative quantique et un aperçu de différentes conceptions de mémoires associatives quantiques.

Les deux algorithmes de recherche utilisés dans l'application *QAMDiagnos* sont présentés en détail dans les Chapitres 2 et 3 réservés aux outils et méthodes.

Le Chapitre 4 est consacré aux résultats de simulations et leur interprétation. Nous y apprécions les effets de nos contributions à travers les résultats fournis par l'application *QAMDiagnos*.

Cette thèse s'achève par une conclusion générale où nous résumons notre étude et nos résultats et suggérons quelques perspectives.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Sommaire

1.1 Introduction	6
1.2 Quatre maladies tropicales aux signes et symptômes similaires	6
1.3 Outils d'aide au diagnostic médical assisté par ordinateur . . .	17
1.4 Quelques concepts de mémoire associative	20
1.5 Conclusion	26

1.1 Introduction

Les **maladies tropicales** sont des maladies ou infections que l'on rencontre en générale en zone tropicale, c'est-à-dire principalement en Afrique sub-saharienne, en Amérique Centrale, en Amérique du Sud et en Asie. Ces régions ont en commun des températures toujours élevées dont la moyenne se situe autour de 18°C par mois. Les conditions naturelles de la zone tropicale sont favorables à la propagation de certaines maladies, leur pérennisation et même la prolifération des vecteurs de maladies. Plusieurs de ces maladies tropicales présentent des signes et symptômes similaires, rendant le diagnostic difficile.

Dans ce chapitre, nous présentons à la Section 1.2 quatre maladies tropicales ayant des signes et symptômes similaires. Dans la Section 1.3, nous passons en revue quelques outils de diagnostic automatisés. Enfin, dans la Section 1.4 nous présentons respectivement quelques concepts de mémoire associative, de mémoire associative quantique et un aperçu de différentes conception de mémoire associative quantique.

1.2 Quatre maladies tropicales aux signes et symptômes similaires

Des maladies tropicales, notre attention s'est portée sur quatre (04) d'entre elles présentant de nombreux signes et symptômes similaires. Il s'agit du *paludisme* qui, lorsqu'il est diagnostiqué, est traité en même temps que la *fièvre typhoïde* dans les centres de santé sans

équipements adéquats. C'est aussi le cas des deux arboviroses que sont la *fièvre jaune* qui, bien qu'ayant un vaccin présente de nombreux cas cliniques chaque année, et la *dengue* ou "*grippe tropicale*", classée par l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) parmi les maladies tropicales négligées. Il peut arriver de plus que l'on ait des cas de co-infection ou de polyinfection de plusieurs de ces quatre maladies.

1.2.1 Paludisme ou malaria

Répartition mondiale du paludisme

Le paludisme est la maladie parasitaire la plus importante chez l'Homme [F⁺13]. Près de 3,2 milliards de personnes, soit 43,24% de la population mondiale, sont exposées au risque d'infection au paludisme [who15] (voir la Fig. 1.2.1). Dans son rapport annuel sur le paludisme de l'année 2016, l'OMS fait état de 212 millions de cas de paludisme dans le monde auxquels sont associés 429 mille décès. L'Afrique subsaharienne à elle seule enregistre 90% de cas et 92% des décès dus à cette maladie¹[who16]. Dans le cas du Cameroun, le paludisme est un problème de santé public, car la totalité de la population est exposée à la maladie. Entre 3,4 millions et 7,5 millions de cas de paludisme pour 5,2 à 14 mille décès ont été rapportées au courant de l'année 2013 [who15]. D'après l'Institut National de la Statistique [II12] le paludisme était responsable de 24% des décès dans les formations sanitaires, de 40 à 45% des consultations médicales et 30% des hospitalisations en 2016.

Agent infectieux et vecteur du paludisme

Le paludisme est une infection due à un hématozoaire du genre *Plasmodium* transmis par un moustique infecté du genre *Anopheles*, l'anophèle femelle. Ce moustique est un hématoophage à activité nocturne. La transmission se fait principalement en zone forestière, en savane (Afrique), en zone rurale, à la lisière des forêts et dans les périphéries des grandes villes (Amérique Latine et Asie). La transmission du paludisme ne peut se faire à une température inférieure 16°C ou supérieure à 33°C et à une altitude supérieure à 2000 m [F⁺13].

On distingue principalement cinq espèces de *Plasmodium* infectieuses pour l'Homme [CMI12, CMI16] :

- *Plasmodium malariae*, espèce dont le temps d'incubation minimal est de dix à quinze jours pour un maximal de plus de dix ans. Elle ne pose pas de problème majeur de santé public.
- *Plasmodium knowlesi*, seule espèce à réservoir non humain qui se retrouve en Malaisie et en Indonésie. Cette espèce a un temps d'incubation minimal de dix à quinze jours pour un maximal de trois ans.
- *Plasmodium ovale* est l'espèce que l'on retrouve principalement en Afrique de l'Ouest. Celle-ci a un temps d'incubation minimal de dix à quinze jours pour un maximal de trois ans.

¹Rapport OMS décembre 2016.

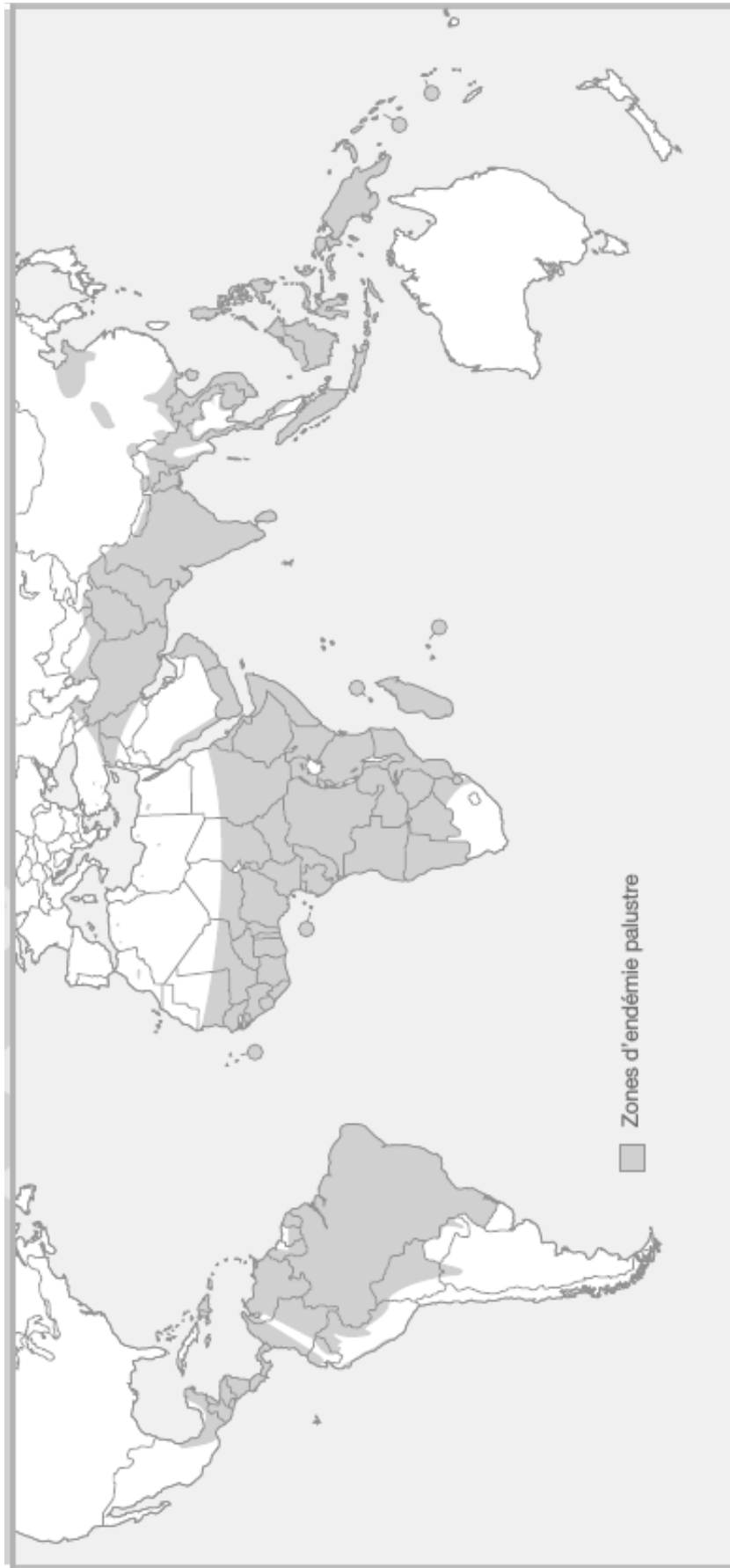


Figure 1.2.1 – Zones à risque du paludisme dans le monde [CMI16].

- *Plasmodium falciparum* est l'espèce prédominante en Afrique et la principale espèce qui tue car conduisant à la forme grave du paludisme. Le temps minimal d'incubation est de sept jours et le temps maximal d'incubation est de trois mois. C'est aussi l'espèce capable de résister aux antipaludiques. De plus, au Cameroun, elle est la seule espèce rapportée dans tous les cas de paludisme.
- *Plasmodium vivax* se rencontre surtout en Asie, en Amérique Centrale et Sud. Celle-ci a un temps d'incubation minimal de dix à quinze jours pour un maximal de trois ans. Ces deux dernières espèces de *Plasmodium* contribuent à la mortalité néonatale en diminuant le poids de naissance [F⁺13].

Diagnostic du paludisme

Cliniquement, le paludisme se manifeste par une fièvre et des frissons, un ictère et une splénomégalie. La Tab. 1.2.1 donne la liste des signes et symptômes du paludisme.

Table 1.2.1 – Signes et symptômes du paludisme [msf16, CMI16, F⁺13, who15, CMI12].

Niveau de gravité	Signes et symptômes		
		Présent chez :	
Simple	Fièvre	Associés à la fièvre	Tout le monde
	Frissons		
	Sueurs		
	Céphalées		
	Myalgies		
	Malaise		
	Anorexie		
	Nausées		
	Signes d'hémolyse (pâleur, sub-ictère, hépatosplénomégalie)		
	Douleurs abdominales		
	Diarrhées		Enfant
	Vomissements		Enfant et femme enceinte
	Anémie		
Sévère	Altération de la conscience (délire ou coma)		
	Convulsions généralisées ou focales		
	Détresse respiratoire		
	Prostration		
	Choc		
	Ictère		
	Hémoglobinurie		
	Hémorragies		
	Insuffisance rénale		
	Anémie sévère		

En plus de l'identification des symptômes et signes cliniques, le diagnostic du paludisme se fait aussi de manière biologique. On a pour cela les “**gold standards**” que sont le frottis sanguin et la goutte épaisse qui permettent à la suite d'un prélèvement de sang d'identifier l'espèce (ou les espèces) de *Plasmodium* en cause. Ils permettent aussi de quantifier et de suivre l'évolution de la parasitémie. Ces deux méthodes de diagnostic, qui sont les plus utilisées au Cameroun et en Afrique, nécessitent du matériel spécifique et un personnel qualifié pour être exécutées.

À côté de celles-ci l'OMS préconise également l'utilisation de tests de diagnostic rapide (TDR). Ils permettent de détecter dans un prélèvement de sang des antigènes spécifiques au paludisme. Ceux-ci ne nécessitent pas une formation spécifique et ont une sensibilité qui peut atteindre 95%. Toutefois, ces tests peuvent rester positif plusieurs jours après la guérison du patient (on parle alors de faux positif).

La *polymerase chain reaction* (PCR) est également une autre méthode de diagnostic biologique, plus sensible et plus spécifique, utilisée pour le diagnostic du paludisme. Elle se base sur la détection de l'ADN et de l'ARN du *Plasmodium*. Toutefois, c'est une méthode coûteuse qui nécessite un matériel spécifique plus important et élaboré et qui reste réservée aux laboratoires de recherche [msf16, CMI16, F⁺13, who15, CMI12].

1.2.2 Fièvre jaune

Répartition mondiale de la fièvre jaune

La fièvre jaune est une **arbovirose** causée par le **virus amarile**, qui est un *Flavivirus* de la famille des *Flaviviridae*. Le virus de la fièvre jaune est endémique en Afrique tropicale, en Amérique Centrale et en Amérique du Sud comme le montre la Fig. 1.2.2. L'Afrique a le plus fort taux de cas de fièvre jaune grave et de décès liés à cette maladie. L'OMS a estimé en 2013 qu'en Afrique entre 84 mille et 170 mille cas graves de fièvre jaune sont recensés chaque année et le nombre de décès est compris entre 29 mille et 60 mille en Afrique [Cen16b]. Dans le même temps, seuls 200 cas sont recensés en Amérique avec un taux de décès de 65% [CMI12].

Vecteur et cycle de la fièvre jaune

La fièvre jaune est transmise par des moustiques du genre *Aedes* en Afrique et *Haemagogus* en Amérique du Sud. La fièvre jaune se caractérise par trois types de cycles de transmission [CMI12, Cen16b] :

- Dans la forêt tropicale, on a un **cycle primaire selvatique**. L'infection se transmet entre singes via des piqûres diurnes de moustiques du genre *Aedes*. La transmission aux humains a lieu lorsque ceux-ci sont amenés à travailler ou à se déplacer en forêt. C'est le cas le plus répandu en Amérique du Sud.
- En zone rurale, c'est le **cycle intermédiaire** qui prévaut via la présence de moustiques semi-domestiques. Ces moustiques étant capables de se reproduire en forêt tout comme aux alentours des habitations, infectent à la fois les êtres humains et les singes.

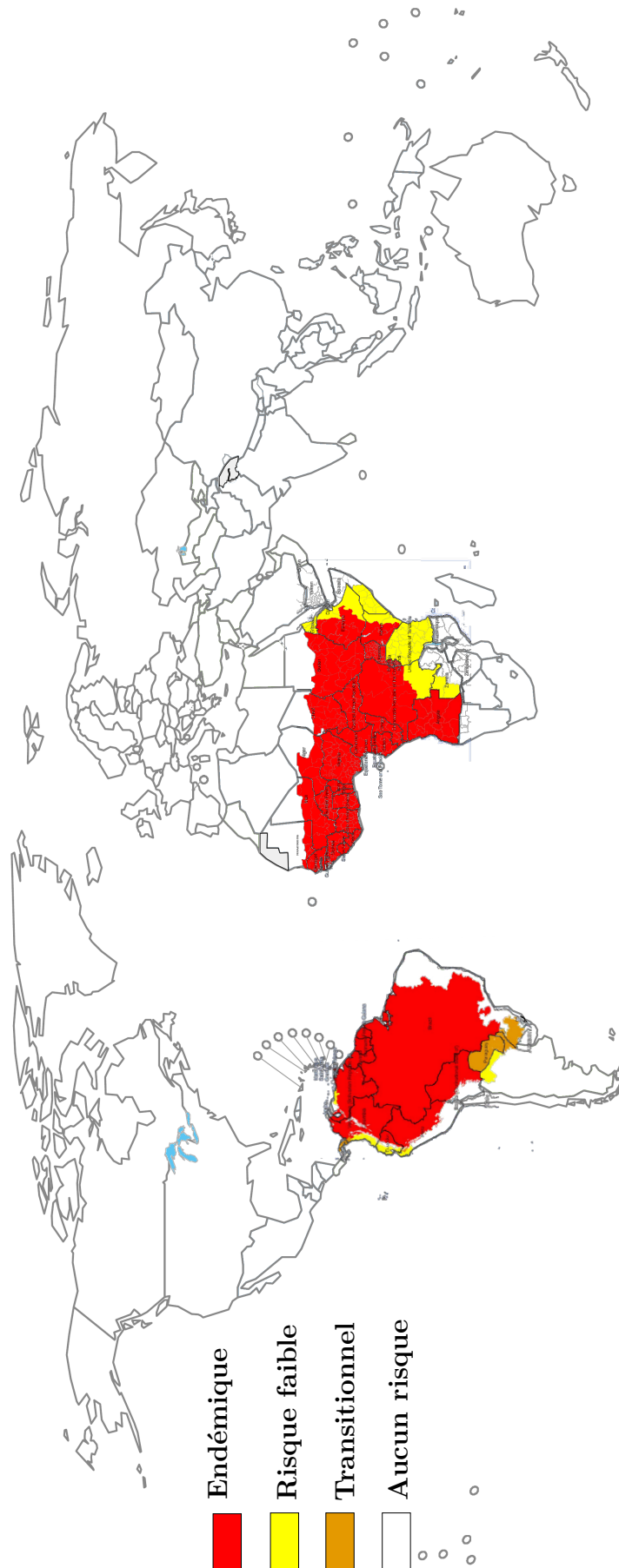


Figure 1.2.2 – Zone à risque de la fièvre jaune dans le monde [Bac11].

- En zone urbaine, on a à faire au **cycle urbain**. La transmission fait suite à la présence d'un sujet infecté dans une population dense. La présence d'une forte densité de moustiques, principalement *Aedes aegypti*, ainsi que la faible immunisation de la population contribuent à l'émergence d'une épidémie. La transmission se fait d'*humain à humain* uniquement.

Diagnostic de la fièvre jaune

La période d'incubation de la fièvre jaune est de trois à six jours. Dans 50% des cas, la maladie reste asymptomatique, mais les symptômes en cas de maladie sont la fièvre, les céphalées, une perte d'appétit, des nausées ou vomissements. Ces symptômes disparaissent au bout de trois jours. Mais dans certains cas, les malades peuvent entrer dans une phase toxique de la maladie et mourir au bout de sept à dix jours. La Tab. 1.2.2 donne la liste des signes et symptômes de la fièvre jaune.

Table 1.2.2 – Signes et symptômes de la fièvre jaune [msf16, CMI16, F⁺13, who15, CMI12].

Niveau de gravité	Signes et symptômes
Bénin	Fièvre
	Céphalées
	Myalgies
	Lombalgie
	Protéinurie légère
Sévère	Forte fièvre
	Céphalées sévères
	Nausées
	Vomissements
	Douleur abdominale
	Douleur dans le dos
	Douleur dans les reins
	Douleur dans les membres
	Déshydratation
	Haleine fétide
	Rachialgie
	Troubles digestifs
	Fatigue
	Somnolence
	Hémorragies
	Myocardite
	Ictère
	Défaillance rénale
	Défaillance hépatique
Acidose	
Choc infectieux	
Coma terminal	

Le diagnostic biologique de la fièvre jaune se fait par l'isolation dans un prélèvement de sang du virus responsable de la maladie. Ceci n'est possible que pendant les trois premiers jours de la maladie. Le diagnostic biologique peut également se faire par la capture d'antigènes ou encore la détection *post-mortem* du virus dans le foie par immuno-fluorescence, hybridation ou culture.

Une autre méthode consiste à utiliser la *Reverse transcriptase-polymerase chain reaction* (RT-PCR), pour identifier l'ARN du virus amarile.

Ces méthodes de diagnostic biologique nécessitent des laboratoires de référence et un personnel qualifié compte tenu des précautions à prendre pour le prélèvement et le transport de l'échantillon de sang [msf16, F⁺13, CMI12].

1.2.3 Dengue

Répartition mondiale de la dengue

Tout comme la fièvre jaune, la dengue, également appelée "grippe tropicale" et parfois "petit palu", est une **arbovirose**. Le virus de la dengue est un *Flavivirus* de la famille des *Flaviviridae* dont la souche est répartie en quatre sérotypes distincts (DEN-1, DEN-2, DEN-3 et DEN-4). La dengue est l'infection virale transmise par les moustiques la plus répandue chez l'être humain [F⁺13]. Selon l'OMS près de 3,9 milliards de personnes dans 128 pays, soit 52,70% de la population mondiale, sont exposées au risque d'infection au virus de la dengue [Cen16a]. Par an, on compterait 390 millions de cas de dengue dans le monde, dont 500 mille sous la forme sévère de la maladie, desquels environ 2,5% décèdent. La dengue constitue également la seconde cause de fièvre tropicale, après le paludisme, au retour d'une zone d'endémie [CMI16].

La dengue, qui est une maladie tropicale négligée [Pro12, Cen16a, Mph16], est endémique surtout en zone tropicale et subtropicale. Mais elle s'est propagée rapidement dans toutes les régions du monde. La Fig. 1.2.3 montre les zones à risque de la dengue.

Vecteur de la dengue

Les vecteurs de la maladie sont les femelles des moustiques *Aedes polynesiensis*, *Aedes aegypti* et accessoirement *Aedes albopictus*. La transmission de la maladie est interhumaine car facilitée par la proximité entre les êtres humains et les moustiques *Aedes aegypti*, principaux vecteurs, se nourrissant le jour.

Diagnostic de la dengue

Le temps d'incubation de la dengue est de trois à sept jours. Le sujet infecté peut présenter, ou pas, des symptômes. La majorité des cas d'infections est asymptomatique ou présente une légère fièvre. Dans sa forme bénigne, la dengue se traduit par des symptômes de céphalées sévères, des douleurs rétro-orbitales, musculaires, articulaires, des nausées et des vomissements. La forme sévère de la maladie, qui est une complication potentiellement mortelle, est due à une fuite plasmique ou une accumulation liquidienne. La liste des signes et symptômes de la dengue est donnée dans la Tab. 1.2.3.

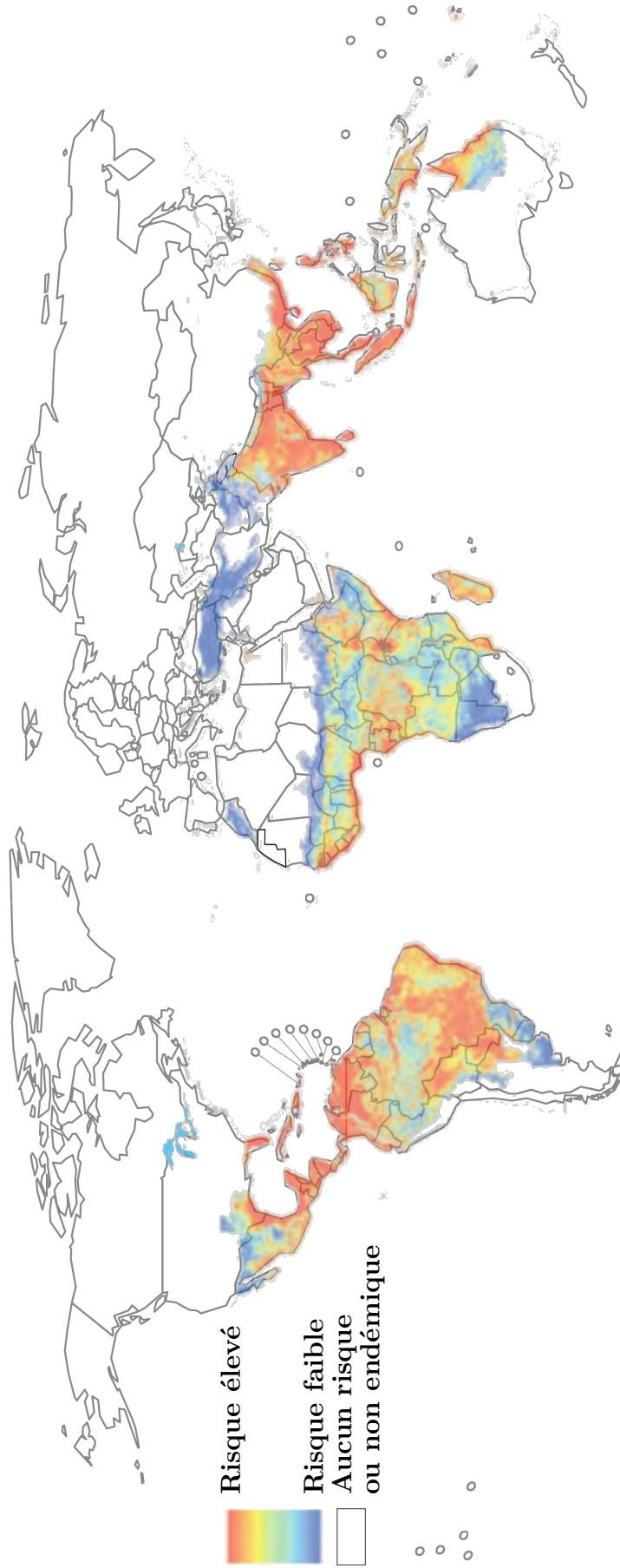


Figure 1.2.3 – Zone à risque de la dengue dans le monde [car12].

Table 1.2.3 – Signes et symptômes de la dengue [msf16, CMI16, F⁺13, who15, CMI12].

Niveau de gravité	Signes et symptômes	
Sans signe d'alerte	Fièvre	Associés à la fièvre
	Nausées	
	Éruption cutanée	
	Céphalées	
	Douleur rétro-orbitaire	
	Myalgies	
	Arthralgies	
	Saignement cutané ou muqueux bénin	
Leucopénie		
Avec signes d'alerte	Douleur abdominale	
	Vomissements persistants	
	Accumulation de liquide	
	Saignement des muqueuses	
	Hépatomégalie (> 2 cm	
	Agitation ou léthargie	
	Hypothermie brutale	
	Chute tensorielle	
	Purpura vasculaire	
	Somnolence	
	Augmentation de l'hématocrite et baisse rapide des plaquettes	
Sévère	Fuite plasmique	Accumulation de liquide
		Choc compensé
		Choc décompensé
	Saignement cutané ou muqueux sévère	
	Atteinte organique sévère	

Le diagnostic biologique de la dengue dépend du stade de la maladie. À la phase fébrile, le diagnostic le plus rapide consiste à mettre en évidence la protéine non-structurale 1 (NS1) de la dengue. La RT-PCR permet également d'effectuer un diagnostic rapide et d'identifier le sérotype responsable de la maladie. À la phase suivante, le diagnostic peut être effectué par capture des anticorps IgM par MAC-Elisa ou des tests rapides IgG IgM en chromatographie. Ce dernier diagnostic permet de distinguer la phase fébrile de la maladie de la phase suivante. Les IgG augmentent rapidement chez un patient au stade critique de la maladie. Toutefois, les anticorps IgM, qui permettent de distinguer la dengue des autres arboviroses, restent présents même pendant la convalescence du patient [msf16, F⁺13, CMI12].

1.2.4 Fièvre typhoïde

Répartition mondiale de la fièvre typhoïde

Des quatre maladies évoquées dans ce mémoire, la fièvre typhoïde est la seule n'ayant pas pour vecteurs les moustiques. C'est une maladie infectieuse qu'on retrouve principalement

dans les pays en voie de développement et dans les zones où l'hygiène est précaire. Il s'agit en générale de la zone tropicale, l'Afrique du Nord et l'Asie du Sud-Est [CMI16]. Ces zones se superposent à la zone à risque du paludisme de la Fig. 1.2.1. L'OMS estime à 17 millions le nombre de cas par an de fièvre typhoïde. Le taux de mortalité est de 1% lorsque la maladie est bien traitée et de 10 à 25% en l'absence d'un traitement approprié [CMI12].

Vecteur et agent infectieux de la fièvre typhoïde

La fièvre typhoïde est une maladie dont le réservoir est strictement humain. La contamination peut être directe interhumaine, mais plus généralement indirecte par ingestion d'aliments ou d'eau contaminés par un porteur. L'agent pathogène de la fièvre typhoïde est la bactérie *Salmonella enterica* de sérotype *typhi*. En cas d'infection aux sérotypes *paratyphi A, B et C*, on parle de **fièvre paratyphoïde**. Les symptômes sont identiques dans les deux cas, mais moins graves dans le cas de la fièvre paratyphoïde.

Diagnostic de la fièvre typhoïde

Après une incubation qui dure une à deux semaines, les signes cliniques de la maladie sont une fièvre prolongée, des céphalées, une asthénie, des insomnies, une anorexie et des épistaxis. Notons que l'évolution naturelle de la maladie se décrit en trois phases : invasion (décrite par les signes précédents), état et complication [CMI12, CMI16, msf16]. Les signes et les symptômes des différentes phases sont donnés dans la Tab. 1.2.4.

Table 1.2.4 – Signes et symptômes de la fièvre typhoïde [msf16, CMI16, F⁺13, who15, CMI12].

Phase	Signes et symptômes
Invasion	Fièvre
	Céphalées
	Asthénie
	Insomnie
	Anorexie
	Épistaxis
	Douleur ou lourdeur abdominale
	Gargouillements
État	Diarrhée ou constipation
	Tuphos
	Splénomégalie modérée
	Bradycardie relative
	Hémorragies ou perforations digestives
Compilation	Péritonite
	Septicémie
	Myocardite
	Encéphalite
	Coma

Le diagnostic biologique de la fièvre typhoïde requiert l'isolement par hémoculture de la bactérie responsable de la maladie dans le sang dans la première semaine de la maladie, ou dans les selles, après une semaine de maladie. Toutefois, pour augmenter la sensibilité des hémocultures, il est nécessaire de prélever 5 à 10 ml de sang. De plus, plusieurs hémocultures peuvent être nécessaires, mais leur positivité décroît au fur et à mesure que les semaines d'infection avancent. La traditionnelle sérologie de Widal-Felix est désormais peu recommandée car générant beaucoup de faux positifs. Elle reste malgré tout le diagnostic le plus répandu dans les petits laboratoires qu'on trouve dans les pays en voie de développement. D'autres méthodes de diagnostic, permettant de détecter les anticorps IgM ou IgG spécifiques au sérotype *typhi* de la bactérie, existent. Bien qu'ils soient utiles en absence de laboratoire, leurs résultats doivent être confirmés par des tests en laboratoire [CMI16, msf16, F⁺13, CMI12].

À l'issue de cette brève présentation des quatre maladies tropicales qui nous intéressent, il apparaît que la totalité de ces maladies nécessite le plus souvent un diagnostic biologique coûteux et qui requiert un personnel qualifié.

1.3 Outils d'aide au diagnostic médical assisté par ordinateur

Les quatre maladies tropicales sus-mentionnées sont diagnostiquées à la suite d'échanges entre le patient et le médecin. En plus de ces échanges, il y a également des examens ou tests de laboratoire. Rappelons que le diagnostic médical est un processus permettant au médecin de faire des prédictions par rapport aux caractéristiques de situations cliniques et de déterminer l'ensemble des actions appropriées. La complexité du diagnostic médical peut alors nécessiter l'utilisation d'outils d'aide à la décision, qui dans certains cas peuvent être assistés par ordinateur.

Les outils d'aide au diagnostic assisté par ordinateur font intervenir la notion d'**Intelligence Artificielle** (IA). L'IA est un domaine scientifique dont le but est de faire faire à des machines ce que l'Homme sait faire. Notons qu'outre la médecine, l'IA est appliquée à divers domaines tels que les jeux vidéo, l'éducation et la chimie analytique, pour ne citer que ceux-là.

1.3.1 Outils basés sur les réseaux de neurones artificiels

Les outils d'aide à la décision qui nous intéressent sont ceux basés sur les **réseaux de neurones artificiels**, particulièrement les **mémoires associatives**, dont la description est donnée à la Section 1.4. Parmi ces outils, nous pouvons citer **MalDANN** (Malaria Diagnosis by ANN), basé sur le perceptron multicouches et développé en 2010 par une équipe brésilienne en utilisant la librairie ANN de MATLAB [ARFB⁺10]. MalDANN permet d'effectuer le diagnostic du paludisme avec cependant de faibles performances. Toujours en 2010, une équipe indienne a proposé un algorithme basé sur **FFANN** (Feed Forward ANN) qui utilise aussi le perceptron multicouches pour le diagnostic de trois maladies tropicales aux signes et symptômes similaires que sont le paludisme, la fièvre jaune et la fièvre typhoïde [AA10]. L'apprentissage est cependant basé sur l'expérience du médecin, ce qui limite son efficacité. MalDANN et FFANN utilisent des données épidémiologiques et cliniques afin d'effectuer le diagnostic. Ces équipes justifient l'utilisation du perceptron multicouches par

le fait qu'il soit indiqué dans la reconnaissance des patrons et fournit des solutions aux problèmes non séparables linéairement. De même que les équipes brésilienne et indienne, dans les Refs. [APA12, Sob03], des réseaux de neurones à rétro-propagation d'erreurs sont utilisés pour aider au diagnostic du paludisme. Ces derniers font la reconnaissance intracellulaire du plasmodium sur des lames de frottis sanguin. L'algorithme de rétro-propagation utilisé est celui de Levenberg-Marquardt. Cet algorithme est très efficace lorsqu'un ANN ne comporte que quelques centaines de connexions à ajuster. La rétro-propagation consiste à rétro-propager l'erreur commise par un neurone à ses synapses et aux neurones qui y sont reliés. L'algorithme de Levenberg-Marquardt permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'une fonction, souvent non linéaire et dépendant de plusieurs variables. Il trouve une solution, c'est-à-dire la maladie correspondante, lors d'un diagnostic, même s'il est démarré très loin d'un minimum. En 2012, une équipe espagnole propose **AMBC** (Associative Memory Base Classifier), qui est un classificateur basé sur les mémoires associatives [MCOA12]. Celui-ci aide au diagnostic de sept problèmes différents dans le domaine de la médecine. La particularité de AMBC est qu'il est centré autour de trois phases, au lieu de deux comme les autres mémoires associatives. Avant la phase de restitution, est insérée une phase de renforcement de l'apprentissage. Grâce à cela, l'algorithme AMBC est meilleur, dans trois des sept problèmes, que les vingt autres algorithmes effectuant les mêmes tâches que lui. Les Refs. [FAM⁺13] et [AGK12] dressent une liste plus exhaustive d'outils d'aide au diagnostic médical basés sur les réseaux de neurones. D'après Erdem Alkim et *al.* [AGK12], la raison pour laquelle les réseaux de neurones artificiels sont largement utilisés en médecine comme outils d'aide à la décision est due à leur habilité de prédiction, d'effectuer des calculs parallèles et leur adaptabilité.

1.3.2 Outils basés sur d'autres approches computationnelles

Dans le domaine de la médecine, le premier outil d'aide au diagnostic assisté par ordinateur est **MYCIN**² [Sho76]. Il a été conçu entre 1972 et 1974 à l'Université de Stanford pour diagnostiquer et proposer des traitements pour des maladies bactériennes. Il est basé sur les *systèmes experts* qui sont des programmes informatiques conçus à partir des connaissances d'un domaine précis et capables de raisonner comme un expert humain pour apporter des solutions à un problème dudit domaine. MYCIN a permis de proposer lors des tests à l'école de médecine de Stanford, une thérapie acceptable dans 69% des cas. Ce qui était supérieur à celui des experts en maladies infectieuses jugés selon les mêmes critères que ceux utilisés pour MYCIN. Cependant, MYCIN n'a pas été utilisé en pratique pour des raisons d'éthique. À coté de ces raisons, il y avait des difficultés technologiques liées à l'époque de sa conception. Le temps d'une session avec MYCIN pouvait mettre plus de 30 minutes, ce qui est long pour effectuer un diagnostic. Comme autre exemple d'outil d'aide au diagnostic basé sur les systèmes experts, nous avons **TROPIX** [OO97]. Conçu en 1997 par le nigérian Sunny Ochi-Okorie, TROPIX est un outil de validation du diagnostic de vingt-deux maladies tropicales, basé en plus des systèmes experts, sur le raisonnement statistique associatif. Il propose en plus une thérapie pour la maladie diagnostiquée. Les tests de laboratoire du prototype ont donné 95% de bons diagnostics. Cependant, TROPIX n'a pas pu être utilisé par une personne inexpérimentée.

²Le nom MYCIN vient du fait que la plupart des antibiotiques ont le suffixe *-mycin*.

À côté des outils basés sur les systèmes experts on trouve ceux basés sur les **algorithmes génétiques**. Les algorithmes génétiques sont des procédures d'optimisation stochastiques inspirés de l'évolution naturelle. Ils peuvent fournir une solution globale et optimale sans requérir des connaissances spécifiques du problème à résoudre. Comme exemple d'outil basé sur les algorithmes génétiques nous avons **HySMID** (Hybrid System for Myocardial Ischemia Diagnosis) [PGF⁺03]. Celui-ci aide au diagnostic de l'ischémie. Le système procède en quatre étapes dans son algorithme. La première consiste en un prétraitement du signal ECG (électrocardiogramme) reçu afin de séparer le signal caractéristique utile du bruit, lequel sera utilisé dans la classification des impulsions. La seconde étape consiste à classer chaque impulsion en impulsion normale ou en ischémie. Les informations fournies par la deuxième étape sont utilisées dans la troisième étape où, toutes les 30 secondes la fenêtre ECG est classée en ischémie ou non. La dernière étape consiste à identifier le début et la fin de chaque épisode d'ischémie en utilisant une concaténation des fenêtres d'ischémie consécutives. HySMID a une spécificité et une sensibilité de 91%, mais il faut noter que les résultats fournis par le système dépendent de la qualité des signaux ECG utilisés. Le bruit peut en effet avoir une incidence sur la détection des épisodes d'ischémie.

D'autres outils d'aide à la décision sont basés sur les **machines à vecteurs de support**. Celles-ci constituent une méthode permettant de créer des fonctions à partir d'un ensemble particulier de données d'apprentissage. Les fonctions pouvant être des fonctions de classification ou de régression. En médecine, un exemple d'outil d'aide au diagnostic du cancer du sein est **ASVM** (Adaptive Support Vector Machines) [PK11].

Dans le domaine de la théorie quantique, comme outil d'aide à la décision nous avons **QXCI** (Quantum Xrroid Interface System) inventé par William Bill C. Nelson, fugitif américain, accusé de fraude et escroquerie en relation avec QXCI et résidant en Hongrie. C'est un appareil utilisé en *médecine énergétique*, branche de la médecine alternative, basée sur une croyance pseudo-scientifique qui voudrait que le médecin puisse transférer de l'énergie à un patient et le mener vers la guérison. QXCI est supposé mesurer les signaux électromagnétiques de toutes les cellules du corps humain en moins d'une minute, et libérer ce qui bloque les énergies afin de stimuler le fonctionnement immunitaire du corps humain pour le guérir. D'après son inventeur "l'effet de cohérence quantique s'effectue en faisant correspondre le modèle de signature photonique et voltamique virtuelle d'une substance réactive dans le corps du patient, puis en regardant les changements de résistance de la tension qui se produisent chez le patient en réponse à l'élément. S'il existe une cohérence, un modèle positif ou négatif peut être induit". Le système fonctionne par utilisation d'un harnais de tête, des sangles de cheville et des poignets afin de relier le patient à une boîte numérique connectée à un ordinateur. Après l'étalonnage, l'équipement surveille, interprète les réactions du patient à de petites impulsions électriques générées par la boîte et conseille les produits à prendre. En dehors du prix extrêmement élevé de QXCI qui est de \$20 000 US (11 661 975,91 F CFA au 22 mai 2017), il y a une ambiguïté quant à la possibilité d'obtenir des signaux électromagnétiques des milliards de cellules du corps humain en moins d'une minute en utilisant un faible voltage électrique à travers la peau ; lequel voltage provoquerait plutôt des blessures. De plus, la technologie actuelle ne permet pas de mettre des systèmes macroscopiques dans des états cohérents. Le site internet Quackwatch [Bar09] présente une étude détaillée de QXCI. Dans ses travaux de Master [Sau04], le Dr Brenda-Anne Saunders conclut qu'il n'y a aucune relation statistique entre les résultats fournis par QXCI et les tests conventionnels dans le pré-diagnostic du paludisme, de la tuberculose et du diabète. Elle recommande d'amples

investigations afin de vérifier si les résultats ne sont pas dus à une recherche aléatoire issue des informations données par le patient et insérées dans l'ordinateur.

1.4 Quelques concepts de mémoire associative

Les réseaux de neurones biologiques réalisent avec une très grande facilité, des applications telles que la reconnaissance des formes, l'apprentissage et la mémorisation pour ne citer que ceux là. Ces applications restent malgré tout très difficiles à réaliser en informatique et en intelligence artificielle. C'est de l'hypothèse selon laquelle le comportement intelligent est issu de la structure et du comportement des éléments de base du cerveau que les **réseaux de neurones artificiels** ont vu le jour.

1.4.1 Description des réseaux de neurones artificiels

Un réseau de neurones, précisément un réseau de neurones artificiels (ANN pour Artificial Neural Network), est un ensemble de calculateurs appelés **neurones**, interconnectés, qui agissent comme des unités élémentaires. Ils sont une tentative pour simuler tout ou une partie des caractéristiques du cerveau. Chaque neurone possède des caractéristiques qui lui sont propres, en particulier un seuil de déclenchement, dont le dépassement conduit à une décharge du neurone, c'est-à-dire une transmission de l'information à la sortie (voir Fig. 1.4.1).

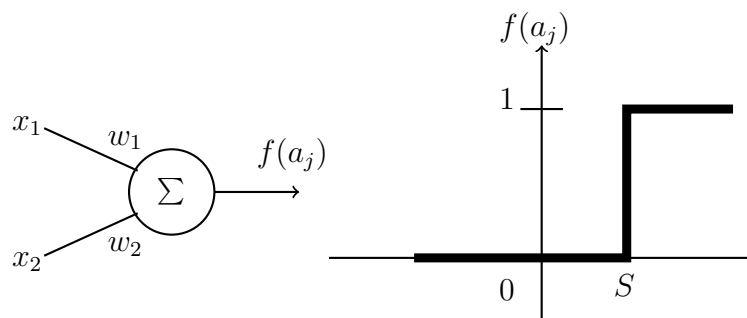


Figure 1.4.1 – Neurone artificiel. La somme pondérée $a_j = x_1w_1 + x_2w_2$ permet de calculer la valeur de f . $\{x_1; x_2\} = \{0; 1\}$ et w_1 et w_2 représentent les poids de connexions. Si a_j est supérieure au seuil S f vaut 1. Dans le cas contraire f vaut 0.

La dynamique du réseau ainsi que les poids d'interconnexion entre les neurones sont gouvernés par la règle d'apprentissage du réseau. De manière générale l'une des caractéristiques les plus importantes des ANN est leur aptitude à apprendre et à mémoriser les informations issues de leur apprentissage. Cet apprentissage s'effectue à la suite d'un ajustement des paramètres internes que sont les poids de connexions et le nombre de neurones.

1.4.2 Modes d'apprentissage des ANN

La procédure d'ajustement est décrite par un algorithme dépendant du type d'apprentissage qu'on souhaite inculquer au réseau. On distingue deux modes d'apprentissage.

L'**apprentissage non supervisé** est un mode d'apprentissage dans lequel on ne détermine pas au préalable les variables de sortie. On présente au système les variables d'entrée et il va de lui même déterminer les bonnes variables de sortie. Celles-ci s'obtiennent généralement par expérience, à la suite d'échecs et de succès et correspondent à des états stables du réseau.

L'**apprentissage supervisé** quant à lui est le mode d'apprentissage dans lequel en déterminant au préalable les variables que l'on souhaite obtenir en sortie, on fait apprendre au réseau, par itérations successives, à modifier ses paramètres internes de façon à reconnaître ces variables. Pour ce faire, on présente au réseau un exemple auquel est associée une réponse attendue. La sortie va produire une réponse qui sera comparée à celle que l'on souhaite. On se sert de la différence entre les deux réponses, c'est-à-dire l'erreur, pour adapter les paramètres du réseau de façon à corriger son comportement. Le processus est répété de façon itérative jusqu'à l'obtention du comportement désiré, ce qui marque la fin de l'apprentissage.

1.4.3 Notions de mémoire associative

Un exemple d'ANN utilisant l'apprentissage supervisé est le réseau de Hopfield à mémoire adressable par contenu, ou **mémoire associative**, qui utilise le concept d'état attractif. Ce modèle présente une apparente similitude avec la mémoire épisodique humaine : il est capable de restituer des patrons ou informations apprises par la règle de l'apprentissage hebbien³, et est capable de restituer un patron à partir de données partielles et/ou bruitées. En somme, la différence entre les mémoires associatives et les autres types d'ANN est que celles-ci permettent de restituer à la suite d'un stimuli de patron incomplet, corrompu ou incomplet et corrompu, le patron correspondant.

Une mémoire associative est un réseau de neurones centré autour de deux algorithmes. Le premier algorithme sert à mémoriser les informations ou patrons et est donc l'**algorithme d'apprentissage**. Le second algorithme, l'**algorithme de restitution**, sert à restituer les informations ou patrons à partir de données bruitées ou incomplètes.

Les différents outils d'aide au diagnostic médical assisté par ordinateur que nous avons présenté brièvement à la Section 1.3, présentent certains inconvénients. Pour la plupart, ils sont spécialisés dans le diagnostic d'une seule maladie ou d'un nombre limité de maladies. Ils ont parfois une sensibilité inférieure à celle des tests biologiques et ont dans certains cas un temps d'exécution assez important, surtout lorsque la base de données est importante. À ceci on peut ajouter les limitations de stockage. Une mémoire associative ne peut par exemple apprendre plus de $0.5n$ patrons (n étant le nombre de neurones). Le recours à la théorie quantique, notamment dans le domaine des mémoires associatives, est alors motivé par la nécessité de construire un outil d'aide au diagnostic, capable de prendre en compte un nombre important de maladies par leurs signes et symptômes, rapide d'exécution et de sensibilité meilleure que celle des outils existants.

1.4.4 Notions de mémoire associative quantique

Un ANN basé sur les concepts de théorie quantique, donnés en Annexe A, est appelé **réseau de neurones quantiques** (QNN pour Quantum Neural Network en Anglais). Une **mémoire**

³L'apprentissage hebbien est issu de la loi de Hebb : "si deux neurones sont activés en même temps alors la force de la connexion augmente."

associative quantique (QAM pour Quantum Associative Memory en Anglais) est donc une mémoire associative dans laquelle les algorithmes d'apprentissage et de restitution sont des **algorithmes quantiques**. Notons cependant que, dans un réseau de Hopfield classique, l'existence de symétrie et de connexions hebbiennes garantissent la stabilité d'un patron unique appris. De manière similaire, dans la version quantique du réseau de Hopfield, la stabilité d'un patron appris est due à l'intrication. La Tab. 1.4.1 résume les analogies utilisées pour construire une QAM telle que décrite dans la Ref. [ENV00a] où les patrons sont les états de base de la mémoire quantique [VM00].

Table 1.4.1 – Correspondance des concepts entre les domaines des réseaux de neurones classiques et les mémoires associatives quantiques.

Réseau de neurones classique	Mémoire associative quantique
État du neurone $x_i \in \{0, 1\}$	Qubit $ x\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
Connexions $\{w_{ij}\}_{i,j=1}^{p-1}$	Intrication $ x_0 x_1 \dots x_{p-1}\rangle$
Règle d'apprentissage $\sum_{s=1}^p x_i^s x_j^s$	Superposition d'états intriqués $\sum_{s=1}^p \alpha_s x_0 x_1 \dots x_{p-1}\rangle$
Vainqueur de la recherche $n = \max_i \arg(f_i)$	Transformation unitaire $U \psi\rangle = \psi'\rangle$
Résultat de sortie n	Décohérence $\sum_{s=1}^p \alpha_s x^s\rangle \Rightarrow x^k\rangle$

Kak est le premier en 1995 à avoir introduit la notion de QNN [Kak95]. Il unit le concept de ANN avec celui de calculateur quantique. Les recherches dans ce sens ont été motivées par l'unité que semble posséder la conscience. Kak montre en effet que l'information n'est pas une variable additive dans un calcul quantique. Ainsi, cette propriété peut être utilisée pour examiner la nature des structures d'information biologique desquelles découlent conscience et intelligence. En effet, beaucoup d'informaticiens considèrent que l'intelligence émerge de la complexité des interconnexions entre les neurones. Mais, en considérant l'assertion de Schrödinger et d'autres physiciens, qui voudrait que l'intelligence découle de la conscience de soi et est unité ou indivisible, l'intelligence devrait être décrite par une fonction d'onde de la théorie quantique. Or, aucun ANN ne peut modéliser une fonction d'onde quantique. Il n'y a donc d'autres choix que de modéliser de manière quantique la conscience, si celle-ci est considérée comme indivisible.

Plus tard en 2001, par une approche analogique, Altaisky montre que, bien qu'il soit difficile d'implémenter une fonction seuil sur un QNN, la mise à jour des poids de connexions d'un ANN peut être construite de manière analogique sur un QNN [Alt01, AKK14]. Un QNN a donc les mêmes capacités de traitement qu'un ANN. En remplaçant dans le ANN la fonction seuil par un opérateur inconnu F , qui peut être implémenté par le réseau, et les poids de connexion w_{ij} par des matrices carrées W_{ij} qui agissent dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on a

$$|x_j(t)\rangle = F \sum_{i=1}^n W_{ij}(t) |x_i\rangle, \quad (1.4.1)$$

avec t , le temps discret.

Dans le cas d'un perceptron classique par exemple, la mise à jour des poids de connexion est donnée par

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta (d - x_j(t)) x_i, \quad (1.4.2)$$

où d est la valeur souhaité et η le taux d'apprentissage.

On a donc par analogie

$$W_{ij}(t+1) = W_{ij}(t) + \eta(|d\rangle - |x_j(t)\rangle) \langle x_i|. \quad (1.4.3)$$

L'équation (1.4.3) permet d'obtenir l'état désiré $|d\rangle$ si nous nous mettons par exemple dans le cas particulier où $F = \mathbb{I}$. Donc $|x_j(t)\rangle = \sum_{i=1}^n W_{ij}(t) |x_i\rangle$. Calculons le module au carré de la différence entre l'état souhaité et le nouvel état du neurone $|x_j(t+1)\rangle$.

$$||d\rangle - |x_j(t+1)\rangle|^2 = \left| |d\rangle - \sum_{i=1}^n W_{ij}(t+1) |x_i\rangle \right|^2 \quad (1.4.4a)$$

$$= \left| |d\rangle - \sum_{i=1}^n [W_{ij}(t) + \eta(|d\rangle - |x_j(t)\rangle) \langle x_i|] |x_i\rangle \right|^2 \quad (1.4.4b)$$

$$= \left| |d\rangle - \sum_{i=1}^n W_{ij}(t) |x_i\rangle - \sum_{i=1}^n \eta(|d\rangle - |x_j(t)\rangle) \right|^2 \quad (1.4.4c)$$

$$= ||d\rangle - |x_j(t)\rangle - n\eta(|d\rangle - |x_j(t)\rangle)|^2 \quad (1.4.4d)$$

$$||d\rangle - |x_j(t+1)\rangle|^2 = (1 - n\eta)^2 ||d\rangle - |x_j(t)\rangle|^2. \quad (1.4.4e)$$

L'équation (1.4.4e) nous montre que pour des états $|x_i\rangle$ normalisés ($\langle x_i | x_i \rangle = 1$) et pour η très petit, par exemple $0 < \eta < \frac{1}{n}$, on finira par obtenir l'état désiré.

Perus *et al.* ont travaillé avec un algorithme basé sur le modèle des ondes quantiques de Hopfield et ont effectué avec succès des tests de simulation sur ordinateur dans le domaine de la reconnaissance de patrons (images) [PB03b, PB03a, PBL04, LPB03]. Leur modèle, réalisé en utilisant l'holographie quantique au travers de techniques modernes d'optique quantique, a permis d'implémenter une version quantique du réseau de Hopfield.

Le modèle proposé par Trugenberger fait le lien entre les ANN et les portes logiques de la reconnaissance de patrons quantiques. Ce modèle est conçu sur le fait qu'un cas spécial de stockage de mémoire hebbienne est équivalent à l'implémentation quantique de la porte NOT XOR [Tru02].

Ventura et Martinez ont construit un modèle de mémoire associative quantique où les patrons stockés sont considérés comme étant les états de base des états de la mémoire quantique (méthode *inclusive* de la superposition quantique). Les opérateurs unitaires accroissent la probabilité de restitution d'un état de base associé à un patron d'entrée [VM00, Ven01, Ven02]. L'algorithme de restitution est basé sur le célèbre algorithme de recherche quantique dans une base de données désordonnée qu'est l'Algorithme de Grover. Cet algorithme est aussi une amplification d'amplitude [Gro97a]. Il s'applique sur un registre en superposition de quelques états et non pas de tous les états possibles. L'algorithme est donné par l'Algorithme 1.1.

Le nombre d'itérations T de l'Algorithme 1.1 s'obtient comme il suit. Supposons que nous connaissons les b premiers bits du patron qu'on souhaite restituer. L'opérateur $\mathbf{0}$ agira sur tous les états ayant les mêmes b premiers bits, idem pour l'opérateur \mathbf{I}_φ . Les étapes 7 et

Algorithme 1.1 Algorithme de recherche pour mémoire associative quantique de Ventura et Martinez

1 : $|\psi\rangle = A|z\rangle$ {Initialisation et construction de l'état $|\psi\rangle$ ne contenant que quelques états. $|z\rangle$ étant un état de base quelconque et l'opérateur A , le BSQDD utilisé pour l'apprentissage (voir Sec. 2.2).}

2 : Appliquer l'opérateur O au registre (voir Annexe C)

3 : Appliquer l'opérateur D au registre (voir Annexe C)

4 : Appliquer l'opérateur I_φ au registre. {Cet opérateur agira sur tous les éléments mémorisés et son action est similaire à celle de O }

5 : Appliquer à nouveau l'opérateur D au registre

6 : **for** $1 \leq i \leq T$ **do**

7 : Appliquer l'opérateur O au registre

8 : Appliquer l'opérateur D au registre

9 : **end for**

10 : Observer le système

8 sont répétées T fois, avec [VM00]

$$T = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}} \sqrt{\frac{r_0+r_1}{N-r_0-r_1}}\right)}{\arccos\left(1 - 2\frac{r_0+r_1}{N}\right)}, \quad (1.4.5)$$

où

- $N = 2^n$ est le nombre d'états possibles.
- r_1 est le nombre d'états dont les b premiers bits sont connus et font partie des exemples appris.
- r_0 est le nombre d'états dont les b premiers bits sont connus et ne font pas partie des exemples appris.
- \bar{k} est l'amplitude moyenne de tous les états dont les b premiers bits sont connus après exécution des 4 premières étapes de l'Algorithme 1.1.
- \bar{l} est l'amplitude moyenne des autres états après l'exécution des 4 premières étapes de l'Algorithme 1.1.

Dans le but de surmonter la limitation de ce modèle à ne résoudre que des problèmes de complétion en restituant les patrons à partir de données bruitées, Ezhov et *al.* ont utilisé la méthode *exclusive* de la superposition quantique et l'Algorithme de Grover avec requêtes distribuées [ENV00b]. Toutefois, lors des classifications, leur modèle donne à des états non souhaités (non pertinents) des probabilités élevées.

Plus récemment, Zhou et Ding ont présenté une nouvelle méthode de multi-reconnaissance quantique de patrons, basée sur une amélioration de l'Algorithme de Grover proposé par Li et Li [LL07], qui peut reconnaître plusieurs patrons simultanément avec une probabilité de 100% [ZD08]. La méthode introduit une nouvelle conception d'initialisation des états quantiques et l'encodage quantique de l'ensemble des patrons. Cependant, il existe une contrainte

importante qui voudrait que le nombre d'états de patrons à restituer soit supérieur au tiers du nombre total d'états de base de la mémoire. En effet, en considérant un registre de n qubits et posant $\frac{1}{3}2^n < m < 2^n$ le nombre de patrons à mémoriser, on choisit aléatoirement le même nombre d'états non désirés de sorte qu'à la fin de l'apprentissage, le registre soit dans l'état (1.4.6).

$$|\rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m (|x_j^M\rangle + |x_j^S\rangle), \quad (1.4.6)$$

avec $|x_j^M\rangle$ l'état d'un patron et $|x_j^S\rangle$ un état non désiré. La restitution des patrons se fait donc suivant les cinq étapes suivantes :

Étape 1 Deux cas doivent être considérés pour construire l'état (1.4.6) :

1. si $m < 2^{n-1}$, effectivement n qubits sont nécessaires pour construire l'état (1.4.6) ;
2. si $2^{n-1} < m < 2^n$, il faut dans ce cas $n + 1$ qubits pour construire l'état (1.4.6).

Étape 2 Appliquer l'opérateur d'oracle unitaire \mathbf{O}_m sur le système, avec

$$\mathbf{O}_m = \mathbb{I} - (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) \sum_{j=1}^m |x_j^M\rangle \langle x_j^M|. \quad (1.4.7)$$

L'opérateur \mathbf{O}_m fait roter la phase des états des patrons d'un angle de $\frac{\pi}{2}$, mais n'agit pas sur les phases des autres états.

Étape 3 Appliquer l'opérateur de diffusion unitaire \mathbf{D}_ρ sur le système, avec

$$\mathbf{D}_\rho = (1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) |\rho\rangle \langle \rho| - e^{i\frac{\pi}{2}} \mathbb{I}. \quad (1.4.8)$$

L'opérateur \mathbf{D}_ρ inverse l'amplitude de probabilité de tous les états par rapport à l'amplitude de probabilité moyenne.

Étape 4 Le processus de restitution s'achève une fois que les Étapes 2 et 3 sont appliquées $T \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2^n}{m}} - \frac{1}{2}$.

Étape 5 Observer le système. On obtient, avec une probabilité de 100% un des états de patrons.

Ce résultat était prévisible, car

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\rho \mathbf{O}_m |\rho\rangle &= \left[(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) |\rho\rangle \langle \rho| - e^{i\frac{\pi}{2}} \mathbb{I} \right] \left[\mathbb{I} - (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) \sum_{j=1}^m |x_j^M\rangle \langle x_j^M| \right] \frac{1}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m (|x_j^M\rangle + |x_j^S\rangle) \\ &= \left[(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) |\rho\rangle \langle \rho| - e^{i\frac{\pi}{2}} \mathbb{I} \right] \frac{i}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m |x_j^M\rangle + \frac{1}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m |x_j^S\rangle \\ &= i |\rho\rangle + \frac{1}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m |x_j^M\rangle - \frac{i}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m |x_j^S\rangle \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2m}} \sum_{j=1}^m |x_j^M\rangle. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Après une seule itération, le résultat souhaité est obtenu. Ajoutons également que, le nombre d'itérations T , qui correspond à celui de l'Algorithme de Grover pour m patrons, ne peut qu'être pris égal à 1. En effet, dès que $m \geq 2^{n-2}$, $T \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 1$.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les quatre maladies tropicales aux signes et symptômes similaires autour desquelles le modèle d'outil d'aide à la décision médicale que nous proposons sera construit. Nous avons présenté quelques outils d'aide à la décision mis sur pied afin d'aider les médecins dans leur diagnostic. De ces outils d'aide à la décision, il ressort que ceux basés sur les réseaux de neurones artificiels sont largement utilisés en médecine du fait de leur habilité de prédiction, d'effectuer des calculs parallèles et leur adaptabilité. Nous avons présenté quelques notions d'ANN et porté notre attention sur les mémoires associatives. Ces dernières sont différentes des autres types d'ANN en ceci qu'elles permettent de restituer à la suite d'un stimuli de patron incomplet, corrompu ou incomplet et corrompu, le patron correspondant. Les limites des mémoires associatives nous ont conduit à présenter quelques concepts de la théorie de l'information quantique. L'utilisation de la théorie quantique de l'information permettrait d'améliorer les performances des mémoires associatives. Le modèle d'outil d'aide à la décision médicale que nous proposons étant basé sur les mémoires associatives, nous devons donc le construire autour d'un algorithme d'apprentissage et particulièrement d'un algorithme de restitution.

CHAPITRE 2

AMÉLIORATION D'UN ALGORITHME DE RECHERCHE QUANTIQUE LINÉAIRE

Sommaire

2.1	Introduction	27
2.2	Algorithmes d'apprentissage : Diagramme quantique superposé de décision binaire	28
2.3	Algorithme de recherche avec requête distribuée	31
2.4	Mémoire associative quantique avec requête distribuée améliorée	37
2.5	Conclusion	49

2.1 Introduction

La construction d'une mémoire associative nécessite l'utilisation de deux algorithmes. Le premier, l'algorithme d'apprentissage, permet de mémoriser les patrons et le second, l'algorithme de restitution, permet de les restituer. Dans ce chapitre, nous présentons les algorithmes linéaires qui seront utilisés pour construire QAMDiagnos.

Dans la Section 2.2, nous présentons l'algorithme d'apprentissage qui servira à la fois pour la méthode par inclusion et pour la méthode par exclusion.

L'algorithme linéaire de restitution est présenté à la Section 2.3. C'est un algorithme de recherche qui est une modification de l'algorithme de Grover.

Nos contributions à cet algorithme de recherche sont données à la Section 2.4, lorsque celui-ci est utilisé dans une QAM.

Ce chapitre se veut volontairement très détaillée et agrémentée d'exemples afin de faciliter la compréhension.

2.2 Algorithmes d'apprentissage : Diagramme quantique superposé de décision binaire

La QAMDiagnos que nous souhaitons construire est basée sur le même principe de stockage des patrons d'apprentissage que celle de Ventura et Martinez. Les patrons d'apprentissage sont stockés sous forme d'états quantiques superposés. En effet, lorsque le nombre de patrons est une puissance de 2, à chacun des nombres allant de 0 à $2^n - 1$ on associe un patron ; n étant le nombre de qubits. Ainsi, en appliquant l'opérateur de Walsh-Hadamard sur chaque qubit, initialement dans l'état $|0\rangle$, on construit l'état $|\mathcal{U}\rangle$ qui contient les 2^n valeurs possibles avec chacune la même amplitude de probabilité :

$$|\mathcal{U}\rangle = \mathbb{W}^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle. \quad (2.2.1)$$

Ceci n'est plus possible dès que le nombre de patrons n'est pas une puissance de 2. Pour y remédier, Ventura et Martinez ont mis au point l'*algorithme d'initialisation des amplitudes quantiques* [VM99] qui est présenté à l'Annexe B. Pour mettre un registre de n qubits dans une superposition d'états souhaitée, cet algorithme a comme contraintes l'utilisation de $2n+1$ qubits et la nécessité que tous les qubits soient dès le départ dans l'état $|0\rangle$.

2.2.1 Principe

Le diagramme quantique superposé de décision binaire (BSQDD pour Binary Superposed Quantum Decision Diagram en Anglais) proposé en 2010 par Rosenbaum [Ros10], permet d'obtenir à partir de n'importe quel état de base de départ $|z\rangle$, de l'espace de Hilbert de dimension 2^n , l'état superposé souhaité ; n étant le nombre de qubits du registre considéré. C'est-à-dire, ne faire que l'apprentissage des états de patrons qu'on souhaite. Autrement, il s'agit à partir du BSQDD, de représenter un état superposé comme un diagramme de décision où chaque nœud correspond à une porte quantique. Le nombre de couches correspond au nombre de qubits du registre. L'ensemble des nœuds d'une couche correspond aux portes quantiques appliquées sur le qubit correspondant. En commençant par la racine du diagramme de décision, le chemin suivi pour atteindre une porte, qui correspond à un nœud sur chaque branche du BSQDD, contrôle ladite porte quantique.

2.2.2 Étapes de construction

Ainsi, nous avons besoin de trois étapes pour construire un BSQDD.

1. **Recherche du BSQDD non simplifié par utilisation des portes de Walsh-Hadamard, de Feymann et des inverseurs** (voir la Fig. 2.2.1 pour le cas d'un registre à quatre qubits). Le nombre de nœud du BSQDD non simplifié correspond à la limite supérieure du nombre de portes nécessaires dont a besoin le réseau quantique pour construire le BSQDD.
2. **Réduire le BSQDD non simplifié pour obtenir le BSQDD final.** Le but est d'obtenir le plus petit nombre de portes quantiques. Pour se faire nous avons besoin de fusionner certains nœuds (portes) en accord avec les liens qui peuvent survenir entre

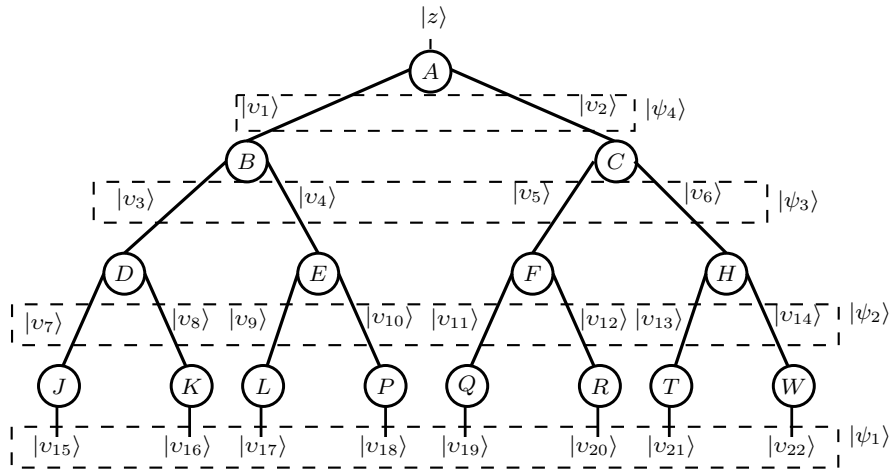


Figure 2.2.1 – BSQDD non simplifié pour un registre à quatre qubits. Chaque couche correspond à un ensemble de portes agissant chacune sur un qubit spécifique. Par exemple, la porte A agit sur le qubit le plus significatif tandis que les portes J et W agissent sur le qubit le moins significatif. L'état $|v_i\rangle$ est un état non normalisé obtenu quand une porte spécifique agit sur un qubit spécifique. L'état $|\psi_i\rangle$, somme des états non normalisés, est l'état normalisé obtenu après action des portes de la couche i sur le qubit i . L'état $|z\rangle$ est l'état de base utilisé comme état de départ et $|\psi_1\rangle$ est l'état superposé quantique souhaité.

les qubits (comme un qubit de contrôle et un qubit cible). La Fig. 2.2.2 montre des BSQDDs avec des nœuds fusionnés (Fig. 2.2.2a et Fig. 2.2.2b) et le BSQDD final (Fig. 2.2.2c). Les trois BSQDDs de la Fig. 2.2.2 sont équivalents.

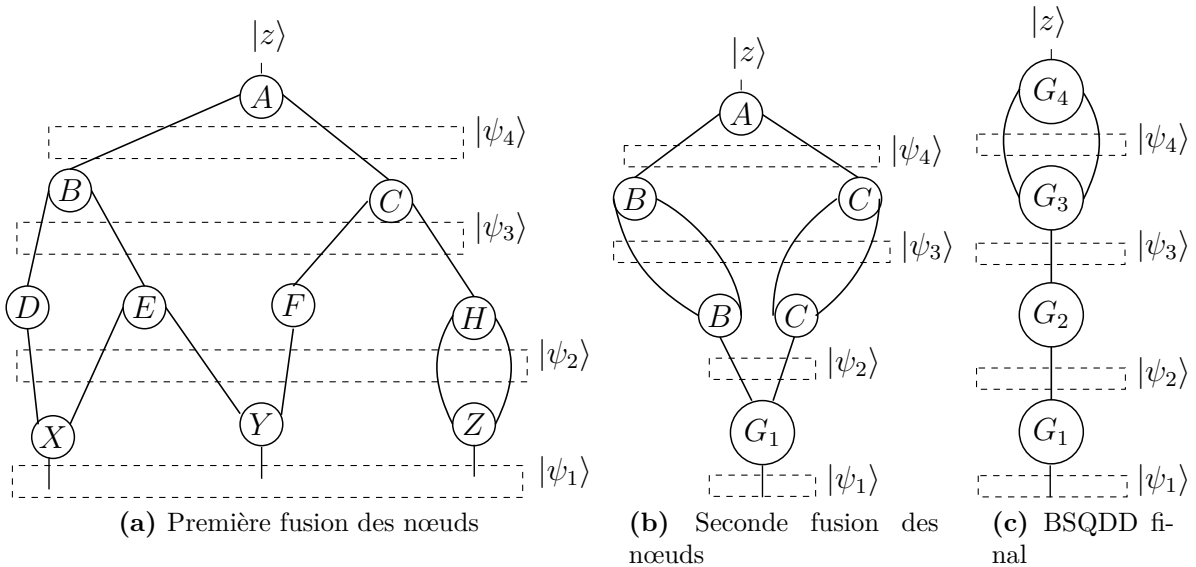


Figure 2.2.2 – Fusion de nœuds pour obtenir le BSQDD final. On utilise les deux règles suivantes pour obtenir le BSQDD final. (i) Si deux branches issues de nœuds différents ont leurs nœuds suivants identiques, ces derniers fusionnent. (ii) Des branches identiques fusionnent, c'est-à-dire celles ayant des nœuds de départ identiques et des nœuds d'arrivée identiques.

3. Convertir le BSQDD final en circuit quantique qui génère l'état quantique souhaité (voir la Fig. 2.2.3).

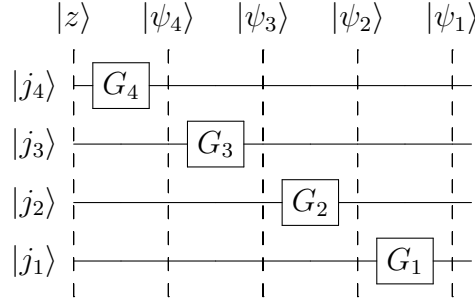


Figure 2.2.3 – Circuit quantique généré par le BSQDD final. Le circuit est obtenu en additionnant les portes qui correspondent aux nœuds de chaque couche du BSQDD final. Le point de départ est la dernière couche et on place chaque nouvelle porte à la droite de la précédente. Ainsi la première porte est G_4 tandis que la dernière est G_1 .

Exemple 2.1. *Tout comme à l'Exemple B.1 (voir l'Annexe B), on désire construire l'état $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$ à partir de l'état $|000\rangle$. Les états $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|010\rangle$, $|101\rangle$ et $|110\rangle$ représentent les états associés aux patrons d'apprentissage. La Fig. 2.2.4 donne les trois étapes permettant de construire l'état $|\Psi\rangle$. Les portes quantiques élémentaires utilisées sont respectivement $R(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$, $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$, la porte de Walsh-Hadamard W et la porte X . Ainsi, $|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|100\rangle$ et $|\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|110\rangle$.*

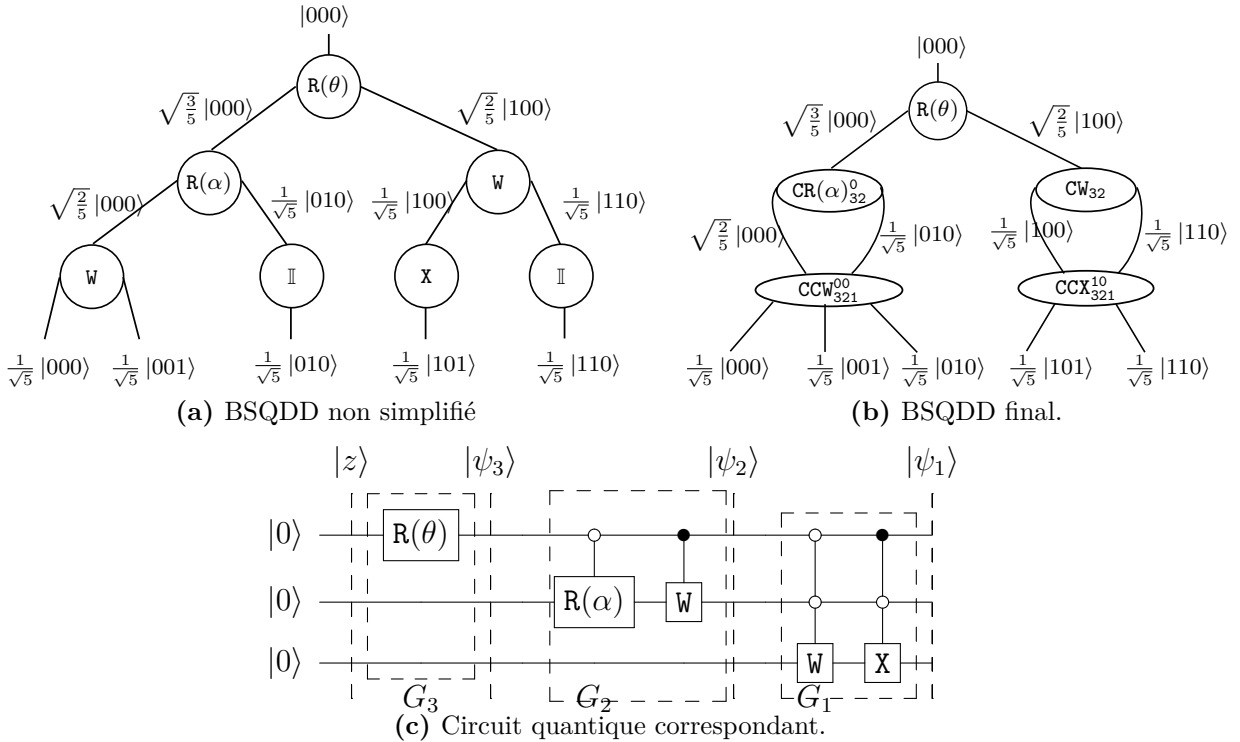


Figure 2.2.4 – BSQDD permettant d'obtenir l'état $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$.

2.3 Algorithme de recherche avec requête distribuée

Dans la présente section, nous présentons l'algorithme de recherche linéaire utilisé pour la construction de QAMDiagnos.

Pour remédier aux manquements de l'algorithme de Grover, présenté à l'Annexe C, dans le cas des QAMs, Ezhov et *al.* [ENV00a] ont mis au point une version modifiée de cet algorithme en utilisant une requête distribuée qui permet de restituer un patron appris à partir de données partielles et bruitées ou uniquement bruitées. Les principales étapes de l'approche de ce modèle sont [Ven02] :

- la construction d'un système de classification quantique qui se rapproche de la fonction à partir de laquelle l'ensemble des patrons M (les états de la mémoire) a été construit ;
- la classification des instances en utilisant l'algorithme de recherche quantique de Grover approprié ;
- l'observation du système.

Avec cet algorithme, que nous dénommerons **C0**, la méthode d'apprentissage est l'*approche d'apprentissage par exclusion* où le système est dans une superposition de tous les états possibles, excepté des états correspondant aux patrons. n est le nombre de qubits, $N = 2^n$ est le nombre d'états possibles, M est l'ensemble des patrons et m est le nombre de patrons,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-m}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \notin M}}^{N-1} |x\rangle. \quad (2.3.1)$$

En d'autres termes, l'approche d'apprentissage par exclusion des patrons inclut tous les états n'appartenant pas à M avec des amplitudes de probabilité non nulles. Dans le même temps, les amplitudes de probabilité des états appartenant à M sont nulles. Par exemple, avec $n = 3$ qubits, si l'ensemble des états de patrons est $M = \{|010\rangle, |100\rangle\}$, $m = 2$ et que **A** est l'opérateur qui permet de construire la superposition équiprobable de ces états, nous avons

$$|\psi\rangle = \mathbf{A}|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|000\rangle + |001\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle). \quad (2.3.2)$$

Afin d'obtenir comme résultat un patron appris (en réalité un patron non appris), on utilise une *requête distribuée* de la forme

$$|Req^p\rangle = \sum_{x=0}^{N-1} Req_x^p |x\rangle, \quad (2.3.3)$$

où Req_x^p obéit à la distribution binomiale (voir l'Annexe E)

$$\|Req_x^p\|^2 = a^{d_H(p,x)} (1-a)^{n-d_H(p,x)}. \quad (2.3.4)$$

et les amplitudes de probabilité sont telles que

$$\sum_{x=0}^{N-1} \|Req_x^p\|^2 = 1. \quad (2.3.5)$$

Dans l'Eq. (2.3.4),

- p indique l'état $|p\rangle$ sur lequel est centrée la distribution ;
- $0 < a < \frac{1}{2}$ est une valeur arbitraire qui règle la largeur de la distribution ;
- $d_H(p, x) = |p - x|$ est la *distance de Hamming* entre $|x\rangle$ et $|p\rangle$ et est un élément important qui évalue la corrélation entre l'entrée et la sortie.

L'Algorithme 2.1 nous donne l'algorithme correspondant, tandis que la Fig. 2.3.1 donne le diagramme de Brikman et le circuit quantique associés qui permettent d'avoir une vue schématique.

Algorithme 2.1 Algorithme de recherche avec requête distribuée (Ref. [ENV00a])

- 1 : $|\psi\rangle = \mathbf{A}|z\rangle$ {Initialisation et construction de l'état (2.3.1). $|z\rangle$ étant un état de base quelconque, le BSQDD est utilisé pour l'apprentissage.}
 - 2 : **for** $1 \leq i \leq \Lambda$ **do**
 - 3 : Appliquer l'opérateur d'oracle \mathbf{O} au registre
 - 4 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
 - 5 : **end for**
 - 6 : Observer le système
-

Dans l'Algorithme 2.1 ou dans le diagramme de Brikman et le circuit quantique associés de la Fig. 2.3.1,

- \mathbf{O} est l'opérateur d'oracle qui inverse l'amplitude de probabilité de tous les états par rapport à l'amplitude de probabilité moyenne des états de la requête 2.3.3,

$$\mathbf{O} = \mathbb{I} - (1 - e^{i\pi}) |\text{Req}^p\rangle \langle \text{Req}^p|, \quad (2.3.6a)$$

$$\mathbf{O} : a_x \mapsto a_x - 2\text{Req}_x^p \left(\sum_{x=0}^{N-1} (\text{Req}_x^p)^* a_x \right), \quad (2.3.6b)$$

où a_x est l'amplitude de probabilité de l'état $|x\rangle$.

- \mathbf{D} est l'opérateur de diffusion qui inverse les amplitudes de probabilité des états de l'Eq. (2.3.1) par rapport à leur amplitude moyenne et pour les autres par rapport à 0,

$$\mathbf{D} = (1 - e^{i\pi}) |\psi\rangle \langle \psi| - \mathbb{I}, \quad (2.3.7a)$$

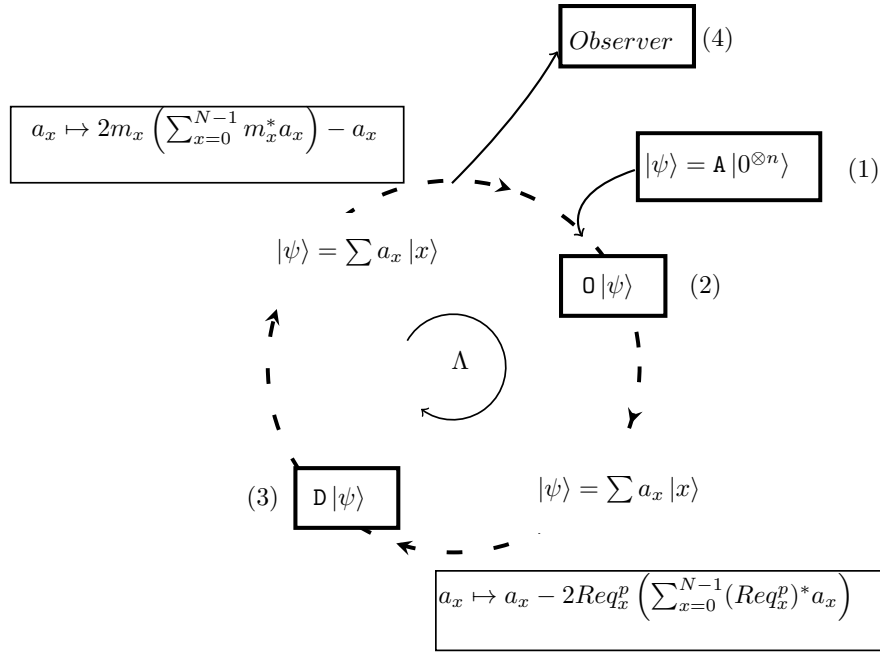
$$\mathbf{D} : a_x \mapsto 2m_x \left(\sum_{x=0}^{N-1} m_x^* a_x \right) - a_x, \quad (2.3.7b)$$

où m_x est l'amplitude de probabilité d'un état de l'Eq. (2.3.1).

- **Le nombre d'itérations Λ se détermine comme il suit :**

Soit $|\tau\rangle$ l'état d'un patron. Pour retrouver cet état il faut appliquer Λ fois l'opérateur \mathbf{DO} sur l'état de départ $|\psi\rangle$, c'est-à-dire

$$(\mathbf{DO})^\Lambda |\psi\rangle = |\tau\rangle, \quad (2.3.8a)$$



(a) Diagramme de Brikman.

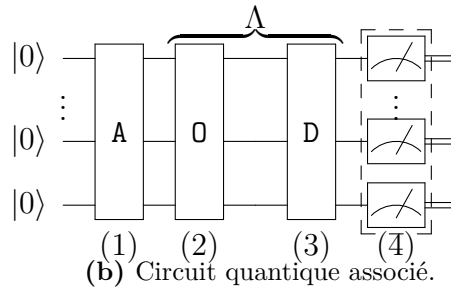


Figure 2.3.1 – Diagramme de Brikman et circuit quantique associé de l'algorithme de recherche avec requête distribuée (Algorithme 2.1). (1) Le registre est mis dans une superposition équiprobable de tous les états possibles à l'exception de ceux correspondant aux patrons par le biais de l'opérateur A . Tous les états ont la même amplitude de probabilité a_x de départ. (2) L'opérateur d'oracle O inverse les amplitudes de probabilité de tous les états par rapport à l'amplitude moyenne de la requête en changeant a_x en $a_x - 2Req_x^p \left(\sum_{x=0}^{N-1} (Req_x^p)^* a_x \right)$. (3) L'opérateur de diffusion D inverse les amplitudes de probabilité des états de l'Eq. (2.3.1) par rapport à leur amplitude moyenne et pour les autres par rapport à 0 en changeant l'amplitude de probabilité a_x en $2m_x \left(\sum_{x=0}^{N-1} m_x^* a_x \right) - a_x$. (4) Après Λ applications des étapes (2) et (3) le système est observé afin d'obtenir un résultat.

avec

$$\begin{aligned} DO &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{I})(\mathbb{I} - 2|Req^p\rangle\langle Req^p|) \\ &= 2|\psi\rangle\langle\psi| + 2|Req^p\rangle\langle Req^p| - 4|\psi\rangle\langle\psi|Req^p\rangle\langle Req^p| - \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (2.3.8b)$$

Sachant que les amplitudes de $|\psi\rangle$ et $|Req^p\rangle$ sont des réels, posons $\langle\psi|Req^p\rangle = \langle Req^p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \notin M}}^{N-1} Req_x^p = B$. Nous avons

$$DO = 2|\psi\rangle\langle\psi| + 2|Req^p\rangle\langle Req^p| - 4B|\psi\rangle\langle Req^p| - \mathbb{I}. \quad (2.3.8c)$$

– Itération 0 :

$$(\text{DO})^0 |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (2.3.8d)$$

– Itération 1 :

$$\begin{aligned} (\text{DO})^1 |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| + 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| - 4B |\psi\rangle \langle Req^p| - \mathbb{I}) |\psi\rangle \\ &= (1 - 4B^2) |\psi\rangle + 2B |Req^p\rangle \\ &= U_1 |\psi\rangle + V_1 |Req^p\rangle \end{aligned} \quad (2.3.8e)$$

– Itération 2 :

$$\begin{aligned} (\text{DO})^2 |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| + 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| - 4B |\psi\rangle \langle Req^p| - \mathbb{I})(U_1 |\psi\rangle + V_1 |Req^p\rangle) \\ &= [(1 - 4B^2)U_1 - 2BV_1] |\psi\rangle + [2BU_1 + V_1] |Req^p\rangle \\ &= U_2 |\psi\rangle + V_2 |Req^p\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.8f)$$

– Itération 3 :

$$\begin{aligned} (\text{DO})^3 |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| + 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| - 4B |\psi\rangle \langle Req^p| - \mathbb{I})(U_2 |\psi\rangle + V_2 |Req^p\rangle) \\ &= [(1 - 4B^2)U_2 - 2BV_2] |\psi\rangle + [2BU_2 + V_2] |Req^p\rangle \\ &= U_3 |\psi\rangle + V_3 |Req^p\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.8g)$$

– Itérations n :

$$(\text{DO})^n |\psi\rangle = U_n |\psi\rangle + V_n |Req^p\rangle. \quad (2.3.8h)$$

Les suites U_n et V_n sont telles que

$$\begin{cases} U_n = (1 - 4B^2)U_{n-1} - 2BV_{n-1} \\ V_n = 2BU_{n-1} + V_{n-1} \end{cases}, \quad (2.3.9a)$$

où, au vu de ce qui précède,

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 0 \end{cases}. \quad (2.3.9b)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(n) &= \langle\psi| (\text{DO})^n |\psi\rangle \\ &= U_n + BV_n \\ &= \cos(n\omega + \Phi), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

la valeur moyenne de l'opérateur $(\text{DO})^n$ dans l'état $|\psi\rangle$.

Pour $n = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0) = 1 &\implies \cos(\Phi) = 1, \\ \Phi &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Pour } k = 0, &\quad \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Donc $\mathcal{M}(n) = \langle \psi | (D0)^n | \psi \rangle = \cos(n\omega)$.

Pour $n = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}\cos(\omega) &= (1 - 4B^2) + 2B^2 \\ &= 1 - 2B^2 \\ \cos(\omega) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

Par identification

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = B.\tag{2.3.13}$$

La pulsation de Grover est donc

$$\omega = 2 \arcsin B, \quad B = \frac{1}{\sqrt{N-m}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \notin M}}^{N-1} Req_x^p.\tag{2.3.14}$$

Remarque 2.3.1. *Comme généralement $N \gg m$, l'approximation*

$$B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} Req_x^p,\tag{2.3.15}$$

peut être appliquée à B .

Pour $n = \Lambda$ nous avons $\mathcal{M}(\Lambda) = \cos(\Lambda\omega) = 0$. Il vient que

$$\begin{aligned}\Lambda\omega &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Pour } k = 0, \quad \Lambda &= \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}.\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

Le nombre d'itérations Λ doit être le plus proche possible d'un entier, il est alors défini par

$$\Lambda = T \left(\frac{1}{4} + \alpha \right), \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}.\tag{2.3.17}$$

Exemple 2.2. *Considérons un registre à 3 qubits où les patrons qu'on souhaite mémoriser sont $|010\rangle = |2\rangle$ et $|100\rangle = |4\rangle$, et la requête distribuée est centrée sur $|011\rangle = |3\rangle$. Pour $a = \frac{1}{4}$,*

$$|Req^3\rangle = \frac{\sqrt{3}}{8} |0\rangle + \frac{3}{8} |1\rangle + \frac{3}{8} |2\rangle + \frac{3\sqrt{3}}{8} |3\rangle + \frac{1}{8} |4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{8} |5\rangle + \frac{\sqrt{3}}{8} |6\rangle + \frac{3}{8} |7\rangle,\tag{2.3.18a}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2^3-2}} \sum_{x=0, x \neq 2, x \neq 4}^7 Req_x^3 = \frac{6+6\sqrt{3}}{8\sqrt{6}},\tag{2.3.18b}$$

$$\omega = 2 \arcsin \frac{6+6\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = 0.63\pi \Leftrightarrow T = 3.17 \implies \text{pour } \alpha = 1, \Lambda = 4.\tag{2.3.18c}$$

Les étapes 3 et 4 de l'Algorithme 2.1 seront donc répétées 4 fois.

L'opérateur d'oracle (2.3.6a) est

$$\mathbf{0} = \mathbb{I} - \frac{1}{32} \left(\sqrt{3} |0\rangle + 3 |1\rangle + 3 |2\rangle + 3\sqrt{3} |3\rangle + |4\rangle + \sqrt{3} |5\rangle + \sqrt{3} |6\rangle + 3 |7\rangle \right) \\ \times \left(\sqrt{3} \langle 0| + 3 \langle 1| + 3 \langle 2| + 3\sqrt{3} \langle 3| + \langle 4| + \sqrt{3} \langle 5| + \sqrt{3} \langle 6| + 3 \langle 7| \right). \quad (2.3.18d)$$

Puisqu'après la mémorisation le système se trouve dans l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|0\rangle + |1\rangle + |3\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle), \quad (2.3.18e)$$

l'opérateur de diffusion (2.3.7a) est

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} (|0\rangle + |1\rangle + |3\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle) (\langle 0| + \langle 1| + \langle 3| + \langle 5| + \langle 6| + \langle 7|) - \mathbb{I}. \quad (2.3.18f)$$

Le système évolue alors comme il suit :

Itération 1 On applique une première fois l'opérateur $\mathbf{0}$:

$$|\psi^{10}\rangle = -0.21 (3 |2\rangle + |4\rangle) - 0.22(|1\rangle + |7\rangle) - 0.68 |3\rangle \\ + 0.05 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18ga)$$

– Puis on applique l'opérateur \mathbf{D} :

$$|\psi^{11}\rangle = 0.21 (3 |2\rangle + |4\rangle) - 0.11(|1\rangle + |7\rangle) + 0.35 |3\rangle \\ - 0.37 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18gb)$$

Itération 2 On applique une seconde fois l'opérateur $\mathbf{0}$:

$$|\psi^{20}\rangle = 0.17 (3 |2\rangle + |4\rangle) - 0.23(|1\rangle + |7\rangle) + 0.03 |3\rangle \\ - 0.45 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18ha)$$

– Puis on applique à nouveau l'opérateur \mathbf{D} :

$$|\psi^{21}\rangle = -0.17 (3 |2\rangle + |4\rangle) - 0.36(|1\rangle + |7\rangle) - 0.62 |3\rangle \\ - 0.14 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18hb)$$

Itération 3 On applique une troisième fois l'opérateur $\mathbf{0}$:

$$|\psi^{30}\rangle = 0.07 (3 |2\rangle + |4\rangle) + 0.36(|1\rangle + |7\rangle) + 0.63 |3\rangle + 0.28 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18ia)$$

– Puis on applique à nouveau l'opérateur \mathbf{D} :

$$|\psi^{31}\rangle = -0.07 (3 |2\rangle + |4\rangle) + 0.37(|1\rangle + |7\rangle) + 0.10 |3\rangle \\ + 0.45 (|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \quad (2.3.18ib)$$

Itération 4 On applique une quatrième et dernière fois l'opérateur $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} |\psi^{40}\rangle = & -0.21 (3|2\rangle + |4\rangle) - 0.05(|1\rangle + |7\rangle) - 0.63|3\rangle \\ & + 0.21(|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \end{aligned} \quad (2.3.18\text{ja})$$

– Puis on applique à nouveau l'opérateur \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} |\psi^{41}\rangle = & 0.21 (3|2\rangle + |4\rangle) + 0.02(|1\rangle + |7\rangle) + 0.60|3\rangle \\ & - 0.24(|0\rangle + |5\rangle + |6\rangle). \end{aligned} \quad (2.3.18\text{jb})$$

À la fin des 4 itérations le système se trouve dans l'état

$$\begin{aligned} |\psi^{41}\rangle = & -0.257|0\rangle + 0.031|1\rangle + 0.683|2\rangle + 0.531|3\rangle + 0.228|4\rangle - 0.257|5\rangle \\ & - 0.257|6\rangle + 0.031|7\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.18\text{k})$$

Les probabilités de trouver les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$, qui sont les patrons appris est 51.85%. Les probabilités respectives sont 46.65% et 5.20%. Comme attendu, le patron le plus proche du centre de la requête (dont la distance de Hamming est la plus petite), $|2\rangle$, présente la meilleure probabilité (46.65%).

Remarque 2.3.2. Il est à noter qu'à la fin de l'algorithme les amplitudes de probabilité des états des patrons sont sensiblement dans les mêmes proportions que les amplitudes de probabilité des états de la requête.

2.4 Mémoire associative quantique avec requête distribuée améliorée

Nous proposons ici, à travers un opérateur d'oracle \mathcal{I}_M , deux modifications de la requête qui permettent d'optimiser la restitution de données de plusieurs patrons simultanément dans le modèle d'Ezhov et *al.* de la QAM sans aucune contrainte. En effet, dans leur modèle, à la suite d'une classification, des données non pertinentes ont toujours une probabilité forte. Dans la première modification, \mathcal{I}_M inverse seulement les amplitudes de probabilité des états de patrons comme dans le modèle de Ventura [VM00]. Dans la seconde modification, \mathcal{I}_M inverse les amplitudes de probabilité de tous les états par rapport à l'amplitude moyenne de la requête centrée sur les m patrons apprentissage. Ces modifications ont conduit à la publication de l'article [TNNEW12].

2.4.1 Amélioration de la mémoire associative quantique avec requête distribuée

Dans l'optique d'améliorer la QAM avec requête distribuée de sorte qu'elle puisse optimiser la restitution de patrons appris, même lorsque la distance de Hamming est grande, nous proposons l'Algorithme 2.2 et le diagramme de Brickman ainsi que le circuit quantique associés de la Fig. 2.4.1, avec un opérateur d'oracle \mathcal{I}_M .

Algorithme 2.2 Mémoire associative quantique améliorée avec requête distribuée

- 1 : $|\psi\rangle = A|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-m}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \notin M}}^{N-1} |x\rangle$ {Apprentissage des patrons par la méthode d'exclusion.
 $|z\rangle$ étant un état de base quelconque, le BSQDD est utilisé pour l'apprentissage.}
- 2 : Appliquer l'opérateur d'oracle $\mathbf{0}$ au registre
- 3 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
- 4 : Appliquer l'opérateur \mathcal{I}_M au registre
- 5 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
- 6 : **for** $1 \leq i \leq \Lambda - 2$ **do**
- 7 : Appliquer l'opérateur d'oracle $\mathbf{0}$ au registre
- 8 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre { Λ étant le nombre d'itérations}
- 9 : **end for**
- 10 : Observer le système.

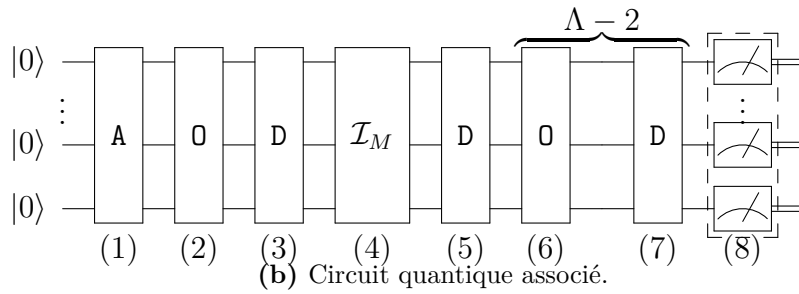
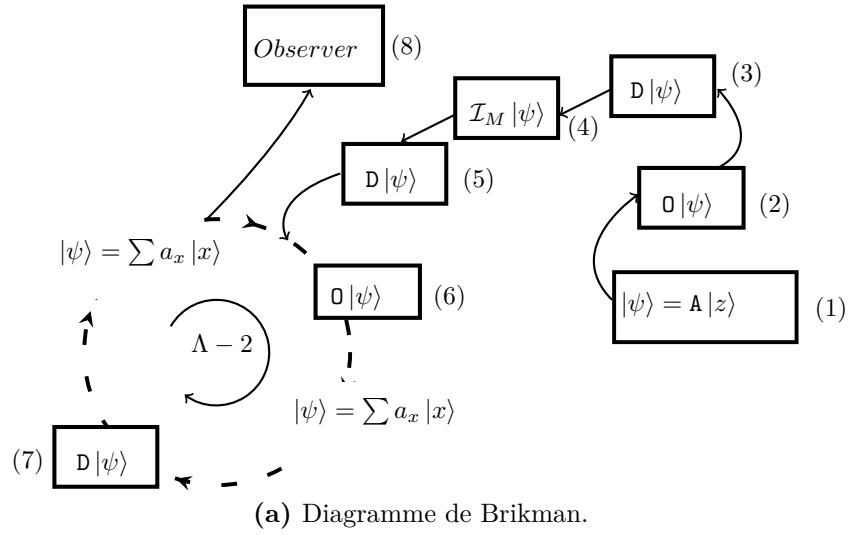


Figure 2.4.1 – Diagramme de Brickman et circuit quantique associé de l'Algorithme 2.2. Les étapes ici sont formellement identiques à celles de la Fig. 2.3.1 avec cependant deux modifications : (4) Le nouvel opérateur \mathcal{I}_M agit comme l'opérateur d'oracle ; (3) et (5) l'opérateur de diffusion \mathbf{D} est appliqué 2 fois avant les $\Lambda - 2$ itérations.

Les deux cas que nous considérons pour l'opérateur \mathcal{I}_M sont :

C1 : \mathcal{I}_M inverse seulement les amplitudes de probabilité des patrons comme dans le modèle

de Ventura [VM00],

$$\mathcal{I}_M = \mathbb{I} - (1 - e^{i\pi}) |\varphi\rangle \langle\varphi|, |\varphi\rangle \langle\varphi| = \sum_{y \in M} |y\rangle \langle y|, \quad (2.4.1a)$$

$$\mathcal{I}_M : a_x \mapsto \begin{cases} -a_y \text{ si } |y\rangle \in M \\ a_y \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.4.1b)$$

$\forall y \in M$, nous avons

$$\begin{aligned} D\mathcal{I}_M |y\rangle &= (2|\psi\rangle \langle\psi| - \mathbb{I} + 2|\varphi\rangle \langle\varphi|) |y\rangle \\ &= 2|\psi\rangle \langle\psi|y\rangle - |y\rangle + 2|\varphi\rangle \langle\varphi|y\rangle = |y\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.1c)$$

Donc $\forall x$,

$$D\mathcal{I}_M : a_x \mapsto 2m_x \left(\sum_{x=0}^{N-1} m_x^* a_x \right) + 2a_x \left(\sum_{x \in M} a_x^* \right) - a_x, \quad (2.4.1d)$$

où m_x est l'amplitude de probabilité d'un état de l'Eq. (2.3.1).

C2 : \mathcal{I}_M est formellement identique à l'opérateur d'oracle $\mathbf{0}$ de Eq. (2.3.6a),

$$\mathcal{I}_M : a_x \mapsto a_x - 2REQ_x \left(\sum_{x=0}^{N-1} (REQ_x)^* a_x \right), \quad (2.4.2a)$$

avec

$$\|REQ_x\|^2 = \frac{1}{k} \sum_p a_b^{d_H(b,x)} (1 - a_b)^{n-d_H(b,x)}, \quad (2.4.2b)$$

où nous considérons que la requête a k centres¹ et $0 < a_b < \frac{1}{2}$ est la valeur arbitraire qui régule la largeur de la distribution autour du centre b . Mais dans la suite nous considérons que

$$\|REQ_x\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{b \in M} a'^{d_H(b,x)} (1 - a')^{n-d_H(b,x)}. \quad (2.4.2c)$$

où m est le nombre de patrons, b un élément de l'ensemble M des patrons et nous choisissons le cas où $a' = a_b$ est le même pour tous les patrons.

2.4.2 Test de performance de l'Algorithme 2.2

Considérons les mêmes données que celles de l'Exemple 2.2 où $\Lambda = 4$. Les étapes 7 et 8 de l'Algorithme 2.2 sont donc répétées $\Lambda - 2 = 2$ fois. Les lignes grisées de la Tab. A.0.2² donnent les résultats attendus pour l'algorithme **C0** (Algorithme 2.1) et les modifications **C1** et **C2**. Cette table donne également les résultats attendus en fonction du centre de la requête et des valeurs de deux patrons.

¹C'est-à-dire la requête n'est pas centrée uniquement autour d'un état, mais répartie autour de deux ou plusieurs.

²Disponible à l'adresse https://www.researchgate.net/profile/Jean-Pierre_Tchapet_Njafa/publication/311843957_Tableaux_de_simulation_These_Reseau_de_Neurones_artificiels_Quantiques_pour_un_diagnostic_rapide_et_precis_du_paludisme.

Pour l'algorithme **C1**,

$$\mathcal{I}_M = \mathbb{I} - 2(|2\rangle\langle 2| + |4\rangle\langle 4|) \quad (2.4.3)$$

et à la fin, le système se trouve dans l'état

$$\begin{aligned} |\psi^4\rangle = & 0.27895 |0\rangle + 0.0802359 |1\rangle + 0.784611 |2\rangle - 0.263947 |3\rangle + 0.261537 |4\rangle \\ & + 0.27895 |5\rangle + 0.27895 |6\rangle + 0.0802359 |7\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

La probabilité de retrouver les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$ est $0.784611^2 + 0.261537^2 = 68.4016\%$.

Pour l'algorithme **C2**, en choisissant $a' = 0.1$, nous avons

$$\begin{aligned} |REQ\rangle = & 0.284605 |0\rangle + 0.0948683 |1\rangle + 0.607454 |2\rangle + 0.202485 |3\rangle \\ & + 0.607454 |4\rangle + 0.202485 |5\rangle + 0.284605 |6\rangle + 0.0948683 |7\rangle, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_M = & \mathbb{I} - (0.284605 |0\rangle + 0.0948683 |1\rangle + 0.607454 |2\rangle + 0.202485 |3\rangle \\ & + 0.607454 |4\rangle + 0.202485 |5\rangle + 0.284605 |6\rangle + 0.0948683 |7\rangle) \\ & \times (0.284605 \langle 0| + 0.0948683 \langle 1| + 0.607454 \langle 2| + 0.202485 \langle 3| \\ & + 0.607454 \langle 4| + 0.202485 \langle 5| + 0.284605 \langle 6| + 0.0948683 \langle 7|). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

et à la fin des itérations le système se trouve dans l'état

$$\begin{aligned} |\psi^4\rangle = & -0.10739 |0\rangle - 0.0238165 |1\rangle + 0.772191 |2\rangle + 0.358168 |3\rangle \\ & + 0.477618 |4\rangle - 0.152047 |5\rangle - 0.10739 |6\rangle - 0.0238165 |7\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

La probabilité de retrouver les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$ est $0.772191^2 + 0.477618^2 = 82.4398\%$

La Tab. 2.4.1 résume les résultats obtenus. Bien que les algorithmes **C1** et **C2** aient des résultats meilleurs que celui de **C0**, l'algorithme **C2** semble avoir la meilleure efficacité de restitution des patrons mémorisés. On remarque qu'il y a un gap important entre la probabilité de restitution de l'algorithme **C2** avec les algorithmes **C0** et **C1**.

Table 2.4.1 – Paramètres importants des algorithmes **C0**, **C1** et **C2** pour la mémoire à 3 qubits de l'Exemple 2.2. Λ est le nombre d'itérations et $P_c(\%)$ est la probabilité de restitution du bon résultat.

Algorithme	Λ	P_c
C0	4	51.8473
C1	4	68.4016
C2	4	82.4398

Pour une meilleure comparaison entre les algorithmes **C1** et **C2**, considérons une mémoire à 7 qubits dont les états de patrons d'apprentissage sont $|23\rangle$, $|59\rangle$, $|61\rangle$ et $|110\rangle$, l'état du centre de la requête étant $|60\rangle$. Les Figs. 2.4.2 et 2.4.3 présentent les probabilités de restitution du bon résultat en fonction du nombre d'itérations pour $a = 0.15$ et $a = 0.40$ respectivement. La Tab. 2.4.2 présente les résultats obtenus.

Table 2.4.2 – Paramètres importants pour les algorithmes **C0**, **C1** et **C2** pour des données d’une mémoire à 7 qubits ($P_c(\%)$).

Algorithme	a	a'	Λ	P_c
C0		-	33	08.7457
C1	0.15	-	33	55.7559
C2		0.10	33	43.0457
C2		0.40	33	06.4804
C0		-	21	37.1564
C1	0.40	-	21	17.2664
C2		0.10	21	27.2308
C2		0.40	21	47.3887

Les Figs. 2.4.2 et 2.4.3 nous permettent de constater l’effet de la modification apportée à l’algorithme **C0** dès la deuxième itération pour les algorithmes **C1** et **C2**. **De plus, on constate que les périodicités des courbes obtenues par les algorithmes C1 et C2 ne sont pas identiques à celles obtenues par l’algorithme C0. Les modifications apportées à l’algorithme C0 doivent être vues comme des perturbations dans le processus d’amplification de l’amplitude.** Autrement dit, comme des facteurs externes au système qui créent des interférences constructives. La conséquence est que la période ainsi que le nombre d’itérations nécessaires sont modifiés. Ceci est observable quand le nombre d’itérations de l’algorithme d’Ezhov est supérieur à un. Dans le cas de l’algorithme **C1**, l’effet de la perturbation est d’annuler l’action de l’opérateur de diffusion sur les états des patrons lors de la deuxième itération (voir l’Eq. (2.4.1c)). Quant à l’algorithme **C2**, l’effet de la perturbation doit être perçu comme une correction sur l’opérateur d’oracle.

2.4.3 Détermination du nombre d’itérations pour les algorithmes C1 et C2

Dans la Ref. [TNNEW12] nous avons remarqué que les périodicités des algorithmes **C1** et **C2** étaient différentes de celles de l’algorithme **C0**. **Mais, nous n’avons pas déterminé le nombre d’itérations nécessaire pour chaque algorithme.**

Afin de déterminer ce nombre d’itérations Γ nécessaire après l’action de l’opérateur $D\mathcal{I}_M$, nous considérons l’Algorithme 2.3 et nous procédons comme à la Section 2.3. Pour $|\tau\rangle$ un état de patrons, nous avons après Γ itérations

$$(\text{DO})^\Gamma D\mathcal{I}_M(\text{DO}) |\psi\rangle = |\tau\rangle. \quad (2.4.8)$$

Cas de l’algorithme C1 : En suivant l’évolution du système itération après itération nous avons :

- Itération 1 :

$$\begin{aligned} (\text{DO}) |\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| + 2|\text{Req}^p\rangle\langle\text{Req}^p| - 4B|\psi\rangle\langle\text{Req}^p| - \mathbb{I}) |\psi\rangle \\ &= (1 - 4B^2) |\psi\rangle + 2B |\text{Req}^p\rangle \end{aligned} \quad (2.4.9a)$$

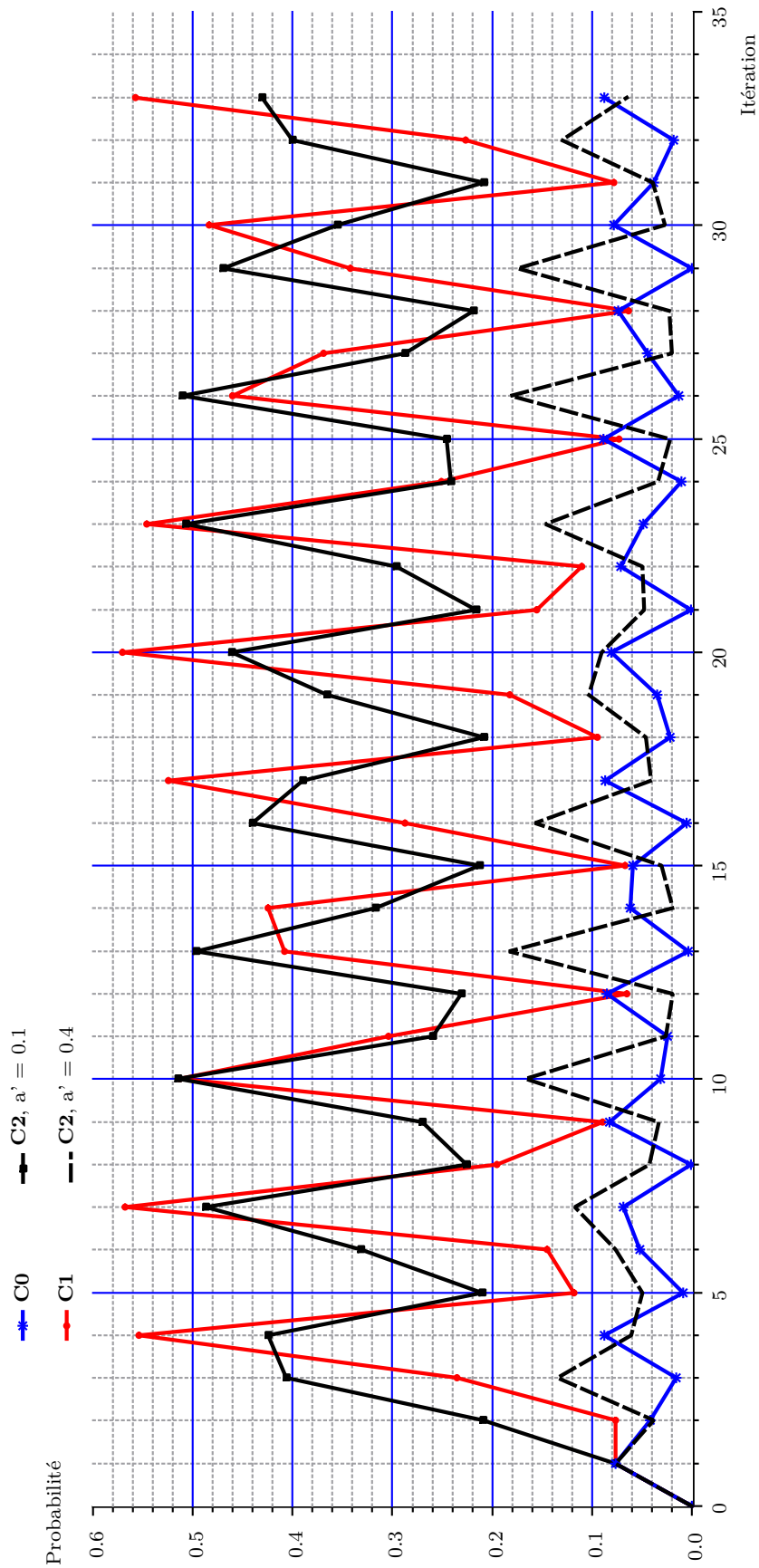


Figure 2.4.2 – Évolution de la probabilité en fonction du nombre d'itérations pour une mémoire à 7 qubits. La valeur arbitraire qui règle la largeur de la distribution est $a = 0.15$.

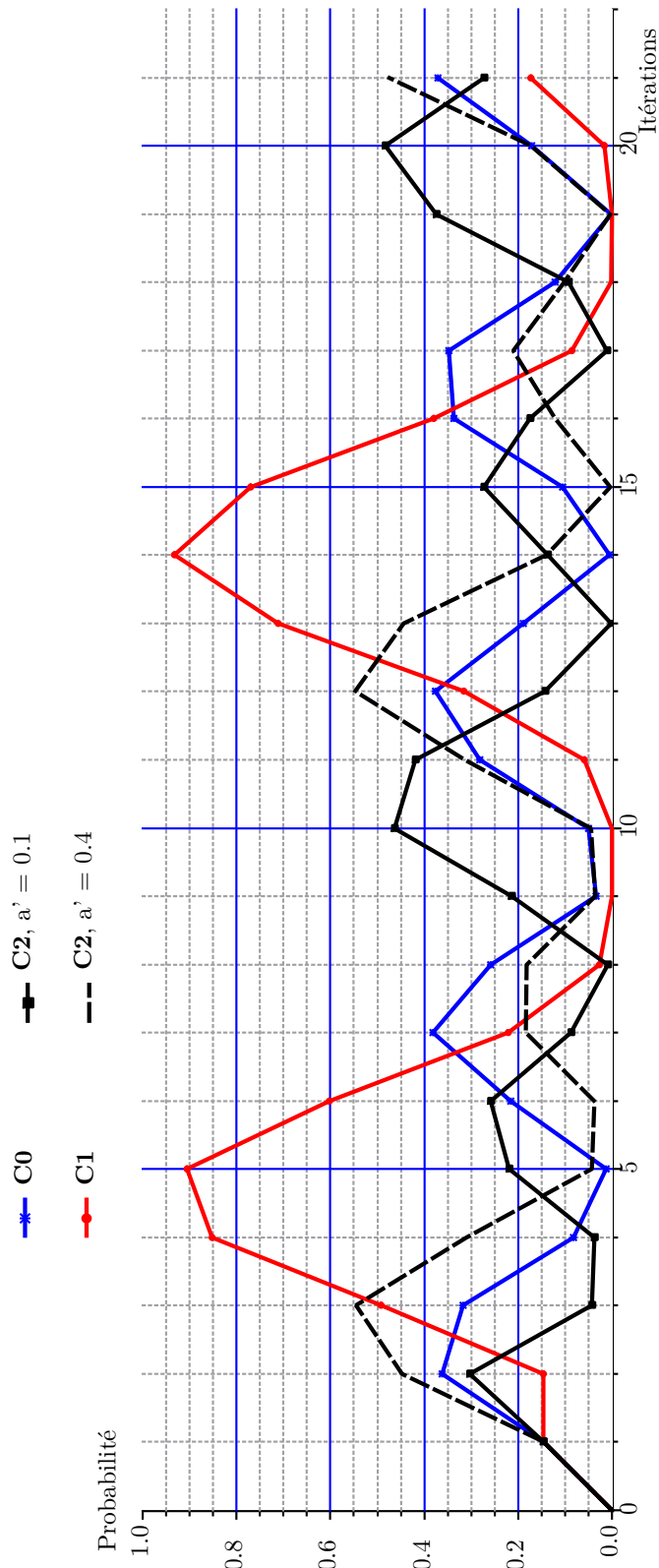


Figure 2.4.3 – Évolution de la probabilité en fonction du nombre d'itérations pour une mémoire à 7 qubits. La valeur arbitraire qui règle la largeur de la distribution est $a = 0.40$.

Algorithme 2.3 Mémoire associative quantique améliorée avec requête distribuée avec nombre d'itérations correcte

1 : $|\psi\rangle = A|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-m}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \notin M}}^{N-1} |x\rangle$ {Apprentissage des patrons par la méthode d'exclusion.
 $|z\rangle$ étant un état de base quelconque, le BSQDD est utilisé pour l'apprentissage.}
2 : Appliquer l'opérateur d'oracle $\mathbf{0}$ au registre
3 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
4 : **if** $\Lambda > 1$ **then**
5 : Appliquer l'opérateur \mathcal{I}_M au registre
6 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
7 : **for** $1 \leq i \leq \Gamma$ **do**
8 : Appliquer l'opérateur d'oracle $\mathbf{0}$ au registre
9 : Appliquer l'opérateur de diffusion \mathbf{D} au registre
10 : **end for**
11 : **end if**
12 : Observer le système.

- Itération 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathcal{I}_M(\mathbf{D}\mathbf{0})|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbb{I} + 2|\varphi\rangle\langle\varphi|) \left((1 - 4B^2)|\psi\rangle + 2B|\text{Req}^p\rangle \right) \\ &= (1 - 4B^2)|\psi\rangle + 2B|\text{Req}^p\rangle \\ &= I_0|\psi\rangle + J_0|\text{Req}^p\rangle \end{aligned} \quad (2.4.9b)$$

- Itération 3 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}\mathbf{0})^1\mathbf{D}\mathcal{I}_M(\mathbf{D}\mathbf{0})|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| + 2|\text{Req}^p\rangle\langle\text{Req}^p| - 4B|\psi\rangle\langle\text{Req}^p| - \mathbb{I}) \\ &\quad \times (I_0|\psi\rangle + J_0|\text{Req}^p\rangle) \\ &= \left[(1 - 4B^2)I_0 - 2BJ_0 \right] |\psi\rangle + [2BI_0 + J_0] |\text{Req}^p\rangle \\ &= I_1|\psi\rangle + J_1|\text{Req}^p\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.9c)$$

- Itération 4 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}\mathbf{0})^2\mathbf{D}\mathcal{I}_M(\mathbf{D}\mathbf{0})|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| + 2|\text{Req}^p\rangle\langle\text{Req}^p| - 4B|\psi\rangle\langle\text{Req}^p| - \mathbb{I}) \\ &\quad \times (I_1|\psi\rangle + J_1|\text{Req}^p\rangle) \\ &= \left[(1 - 4B^2)I_1 - 2BJ_1 \right] |\psi\rangle + [2BI_1 + J_1] |\text{Req}^p\rangle \\ &= I_2|\psi\rangle + J_2|\text{Req}^p\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.9d)$$

- Itération $2 + n$:

$$(\mathbf{D}\mathbf{0})^n\mathbf{D}\mathcal{I}_M(\mathbf{D}\mathbf{0})|\psi\rangle = I_n|\psi\rangle + J_n|\text{Req}^p\rangle. \quad (2.4.9e)$$

Les suites I_n et J_n sont telles que

$$\begin{cases} I_n = (1 - 4B^2)I_{n-1} - 2BJ_{n-1} \\ J_n = 2BI_{n-1} + J_{n-1} \end{cases}, \quad (2.4.9f)$$

où, au vu de ce qui précède,

$$\begin{cases} U_0 = 1 - 4B^2 \\ V_0 = 2B \end{cases} . \quad (2.4.9g)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'(n) &= \langle \psi | (\text{DO})^n \text{D}\mathcal{I}_M(\text{DO}) | \psi \rangle \\ &= I_n + BJ_n \\ &= \cos(n\omega' + \Phi') \end{aligned} \quad (2.4.9h)$$

la valeur moyenne de l'opérateur $(\text{DO})^n \text{D}\mathcal{I}_M(\text{DO})$ dans l'état $|\psi\rangle$.

Pour $n = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'(0) &= \cos(\Phi') \\ &= I_0 + BJ_0 \\ &= 1 - 4B^2 + 2B^2 \\ &= 1 - 2B^2 \end{aligned} \quad (2.4.9i)$$

$$\cos(\Phi') = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\Phi'}{2}\right) \implies \Phi' = 2 \arcsin B = \omega.$$

Donc $\mathcal{M}'(n) = \langle \psi | (\text{DO})^n \text{D}\mathcal{I}_M(\text{DO}) | \psi \rangle = \cos(n\omega' + \omega)$, où ω est la pulsation de Grover obtenue à la Section 2.3.

Pour $n = 1$ nous avons

$$\begin{aligned} \cos(\omega' + \omega) &= I_1 + BJ_1 \\ &= 1 - 8B^2 + 8B^4 \\ \cos(\omega' + \omega) &= \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) \\ &= \cos(2\omega) \implies \omega' = \omega. \end{aligned} \quad (2.4.9j)$$

Pour $n = \Gamma$ nous avons $\mathcal{M}'(\Gamma) = \cos((\Gamma + 1)\omega) = 0$. Il vient que

$$\begin{aligned} (\Gamma + 1)\omega &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Pour } k = 0, (\Gamma + 1) &= \frac{\pi}{2\omega} = \Lambda \implies \Gamma = \Lambda - 1. \end{aligned} \quad (2.4.9k)$$

Le nombre d'itérations $\Gamma = \Lambda - 1$ stipule que le nombre d'itérations total de l'algorithme **C1** est $\Lambda + 1$, soit une itération supplémentaire.

Cas de l'algorithme C2 : Ici nous posons $\gamma = \langle \psi | REQ_x \rangle = \langle REQ_x | \psi \rangle$ et $\zeta = \langle Req^p | REQ_x \rangle = \langle REQ_x | Req^p \rangle$. Comme dans le cas de l'algorithme **C1**, en suivant le système itération par itération nous avons :

- Itération 1 :

$$\begin{aligned} (\text{DO}) | \psi \rangle &= (2 | \psi \rangle \langle \psi | + 2 | Req^p \rangle \langle Req^p | - 4B | \psi \rangle \langle Req^p | - \mathbb{I}) | \psi \rangle \\ &= (1 - 4B^2) | \psi \rangle + 2B | Req^p \rangle \end{aligned} \quad (2.4.10a)$$

- Itération 2 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DI}_M(\text{DO}) |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| - \mathbb{I} + 2 |REQ_x\rangle \langle REQ_x| - 4\gamma |\psi\rangle \langle REQ_x|) \\
 &\quad \times \left((1 - 4B^2) |\psi\rangle + 2B |Req^p\rangle \right) \\
 &= \left\{ 1 - 4\gamma [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta] \right\} |\psi\rangle - 2B |Req^p\rangle \\
 &\quad + 2 [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta] |REQ_x\rangle \\
 &= K_0 |\psi\rangle + L_0 |Req^p\rangle + W_0 |REQ_x\rangle
 \end{aligned} \tag{2.4.10b}$$

- Itération 3 :

$$\begin{aligned}
 (\text{DO})^1 \mathcal{DI}_M(\text{DO}) |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| + 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| - 4B |\psi\rangle \langle Req^p| - \mathbb{I}) \\
 &\quad \times (K_0 |\psi\rangle + L_0 |Req^p\rangle + W_0 |REQ_x\rangle) \\
 &= \left[(1 - 4B^2)K_0 - 2BL_0 - (4B\zeta - 2\gamma) \right] |\psi\rangle \\
 &\quad + [2BK_0 + L_0 + 2\zeta W_0] |Req^p\rangle - W_0 |REQ_x\rangle \\
 &= K_1 |\psi\rangle + L_1 |Req^p\rangle + W_1 |REQ_x\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.4.10c}$$

- Itération 4 :

$$\begin{aligned}
 (\text{DO})^2 \mathcal{DI}_M(\text{DO}) |\psi\rangle &= (2 |\psi\rangle \langle\psi| + 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| - 4B |\psi\rangle \langle Req^p| - \mathbb{I}) \\
 &\quad \times (K_1 |\psi\rangle + L_1 |Req^p\rangle + W_1 |REQ_x\rangle) \\
 &= \left[(1 - 4B^2)K_1 - 2BL_1 - (4B\zeta - 2\gamma) \right] |\psi\rangle \\
 &\quad + [2BK_1 + L_1 + 2\zeta W_1] |Req^p\rangle - W_1 |REQ_x\rangle \\
 &= K_2 |\psi\rangle + L_2 |Req^p\rangle + W_2 |REQ_x\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.4.10d}$$

- Itération 2 + n :

$$(\text{DO})^n \mathcal{DI}_M(\text{DO}) |\psi\rangle = K_n |\psi\rangle + L_n |Req^p\rangle + W_n |REQ_x\rangle. \tag{2.4.10e}$$

Les suites K_n , L_n et W_n sont telles que

$$\begin{cases} K_n = (1 - 4B^2)K_{n-1} - 2BL_{n-1} - (4B\zeta - 2\gamma)W_{n-1} \\ L_n = 2BK_{n-1} + V_{n-1} + 2\zeta W_{n-1} \\ W_n = -W_{n-1}, \end{cases} \tag{2.4.10f}$$

où, au vu de ce qui précède,

$$\begin{cases} K_0 = \{1 - 4\gamma [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta]\} = 1 - 2\gamma W_0 \\ L_0 = -2B \\ W_0 = 2 [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta]. \end{cases} \tag{2.4.10g}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}''(n) &= \langle\psi| (\text{DO})^n \mathcal{DI}_M(\text{DO}) |\psi\rangle \\
 &= K_n + L_n + \gamma W_n \\
 &= \cos(n\omega'' + \Phi'')
 \end{aligned} \tag{2.4.10h}$$

la valeur moyenne de l'opérateur $(\mathbb{D}\mathbb{O})^n \mathbb{D}\mathcal{I}_M(\mathbb{D}\mathbb{O})$ dans l'état $|\psi\rangle$.

Pour $n = 0$ nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{M}''(0) &= \cos(\Phi'') \\ &= K_0 + BL_0 + \gamma W_0 \\ &= 1 + BL_0 - \gamma W_0 \\ &= 1 - 2B^2 - 2\gamma [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta] \\ \Phi'' &= \arccos \left\{ 1 - 2B^2 - 2\gamma [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta] \right\}.\end{aligned}\tag{2.4.10i}$$

Pour $n = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}\cos(\omega'' + \Phi'') &= K_1 + BL_1 + \gamma W_1 \\ &= 1 - 2 [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta]^2 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\omega'' + \Phi''}{2} \right).\end{aligned}\tag{2.4.10j}$$

Par identification nous obtenons

$$\omega'' = 2 \arcsin [\gamma(1 - 4B^2) + 2B\zeta] - \Phi''\tag{2.4.10k}$$

Pour $n = \Gamma$ nous avons $\mathcal{M}''(\Gamma) = \cos(\Gamma\omega'' + \Phi'') = 0$. Il vient que

$$\begin{aligned}\Gamma\omega'' + \Phi'' &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Pour } k = 0, \Gamma &= \frac{\pi}{2\omega''} - \frac{\Phi''}{\omega''} = T'' \left(\frac{1}{4} - \frac{\Phi''}{2\pi} \right).\end{aligned}\tag{2.4.10l}$$

Ce nombre d'itérations Γ doit être le plus proche possible d'un entier positif, il est alors défini par

$$\Gamma = T'' \left(\frac{1}{4} - \frac{\Phi''}{2\pi} + \varrho \right), \quad T'' = \frac{2\pi}{\omega''} \text{ et } \varrho \in \mathbb{N}.\tag{2.4.10m}$$

2.4.4 Tests de performance de l'Algorithme 2.3

Nous considérons toujours les données de l'Exemple 2.2 où $\Lambda = 4$. Les lignes grisées de la Tab. A.0.3³ donne les résultats attendus pour l'algorithme **C0** et les modifications **C1** et **C2** en tenant compte des nouvelles itérations. Cette table donne également les résultats attendus en fonction du centre de la requête et des valeurs de deux patrons.

Pour l'Algorithme **C1**, le nombre d'itérations $\Gamma = 3$. Le système se trouve dans l'état

$$\begin{aligned}|\psi^5\rangle &= -0.404751 |0\rangle - 0.0802428 |1\rangle - 0.486979 |2\rangle + 0.481822 |3\rangle \\ &\quad - 0.162326 |4\rangle - 0.404751 |5\rangle - 0.404751 |6\rangle - 0.0802428 |7\rangle.\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

³disponible à l'adresse https://www.researchgate.net/profile/Jean-Pierre_Tchapet_Njafa/publication/311843957_Tableaux_de_simulation_These_Reseau_de_Neurones_artificiels_Quantiques_pour_un_diagnostic_rapide_et_precis_du_paludisme.

La probabilité de retrouver les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$ est $0.486979^2 + 0.162326^2 = 26.3498\%$.

Pour l'Algorithme **C2**⁴, nous obtenons comme données $\gamma = 0.475167$ et $\zeta = 0.673472$. Donc $\Phi'' = 2.28884$ et $\omega'' = 4.54508 = 1.45\pi \Leftrightarrow T'' = 4.34 \Rightarrow$ pour $\varrho = 3$, $\Gamma = 4$. Le système se trouve dans l'état

$$\begin{aligned} |\psi^6\rangle = & 0.532093 |0\rangle + 0.173488 |1\rangle - 0.274015 |2\rangle - 0.210403 |3\rangle \\ & + 0.128883 |4\rangle + 0.487436 |5\rangle + 0.532093 |6\rangle + 0.173488 |7\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La probabilité de retrouver les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$ est $0.274015^2 + 0.128883^2 = 09.1695\%$.

La Tab. 2.4.3 résume les résultats obtenus.

Table 2.4.3 – Paramètres importants des algorithmes **C0**, **C1** et **C2** pour la mémoire à 3 qubits de l'Exemple 2.2. Λ est le nombre d'itérations et $P_c(\%)$ est la probabilité de restitution du bon résultat. Le nombre d'itérations dépend de l'algorithme.

Algorithme	Λ	P_c
C0	4	51.7635
C1	5	26.3498
C2	6	09.1695

Les résultats des algorithmes **C1** et **C2** sont cette fois moins bons que celui de **C0**, mais en observant la Tab. A.0.3 nous constatons que les résultats des algorithmes **C1** et **C2** sur les autres combinaisons possibles sont meilleurs. En considérant les paramètres précédents du système à 7 qubits les résultats obtenus sont donnés par le Tab. 2.4.4.

Table 2.4.4 – Paramètres importants pour les algorithmes **C0**, **C1** et **C2** pour des données d'une mémoire à 7 qubits. Le nombre d'itérations dépend de l'algorithme ($P_c(\%)$).

Algorithme	a	a'	Λ	P_c
C0		-	33	08.7457
C1	0.15	-	34	12.3187
C2		0.10	10	51.4554
C2		0.40	8	04.2864
C0		-	21	37.1564
C1	0.40	-	22	53.4237
C2		0.10	18	09.3396
C2		0.40	40	49.6630

⁴Nous ne considérons que les valeurs positives de Φ'' et ω'' afin que le nombre d'itérations soit positif.

Table 2.4.5 – Paramètres importants pour les algorithmes **C0** et **C1** pour 1 à 7 qubits pour un patron (valeur la plus grande) dont la distance de Hamming est la plus grande avec le centre de la requête $|0\rangle$. Le nombre d'itérations est Λ et $P_c(\%)$ est la probabilité d'obtention du bon résultat.

Nombre de qubits	$a = 0.1$					$a = 0.4$				
	C0		C1			C0		C1		
	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c		
1	46	94.1599	47	94.1599	8	99.8395	9	99.8395		
2	1	03.0000	1	03.0000	17	90.4354	18	96.1197		
3	1	00.2268	1	00.2268	3	73.8041	4	99.7091		
4	1	00.0173	1	00.0173	3	43.7813	4	65.9344		
5	52	$1.50093e - 03$	53	00.0105	3	18.3258	4	31.3478		
6	13	$1.3602e - 04$	14	$1.8661e - 04$	3	06.7892	4	13.2992		
7	28	$1.2653e - 05$	29	$4.6857e - 05$	3	02.4011	4	05.4067		

En combinant les résultats donnés par les Tabs. 2.4.4-2.4.6, il en ressort que les algorithmes **C1** et **C2** doivent effectivement être vus comme des perturbations dans le processus d'amplification de l'amplitude. La distance de Hamming entre le centre de la requête, ainsi que la valeur de a (et a'), influencent les résultats obtenus lorsque ces deux algorithmes sont utilisés. Ainsi, en dépit de la distance de Hamming qui puisse exister entre le centre de la requête et l'état recherché, les résultats obtenus des algorithmes **C1** et **C2** sont meilleurs dans la majorité des cas que ceux de l'algorithme **C0**.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux algorithmes. Le premier, le BSQDD, permet de construire n'importe quelle superposition d'états souhaitée, ceci à partir de n'importe quel état de base. Cet algorithme servira d'algorithme d'apprentissage dans la QAM permettant d'effectuer le diagnostic.

Le second algorithme est un algorithme de recherche linéaire, dû à Ezhov et *al.* [ENV00a] auquel nous avons apporté deux améliorations **C1** et **C2** qui sont à l'origine de l'article [TNNEW12]. **Celles-ci apparaissent comme étant des perturbations qui augmentent les interférences constructives. Nous avons également déterminé le nombre d'itérations associé à chacune des améliorations.**

Table 2.4.6 – Paramètres importants pour l'algorithme **C2** pour 1 à 7 qubits pour un patron (valeur la plus grande) dont la distance de Hamming est la plus grande avec le centre de la requête $|0\rangle$. Le nombre d'itérations est Λ et $P_c(\%)$ est la probabilité d'obtention du bon résultat.

Nombre de q- bits	a	$a' = 0.05$		$a' = 0.1$		$a' = 0.15$		$a' = 0.2$		$a' = 0.25$		$a' = 0.3$		$a' = 0.35$		$a' = 0.4$		$a' = 0.45$	
		Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c	Λ	P_c
1		56	14.036	5	87.6096	5	95.7433	5	99.4248	5	99.8066	5	97.5839	5	93.2464	5	87.1766	14	32.9775
2		1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268
3		1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268
4	0.1	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268	1	00.2268
5		2	01.0366	2	01.0743	2	00.6078	2	00.1633	2	1.5058e-07	2	00.1420	2	00.4748	2	00.8405	7	01.2716
6		2	2.2046e-03	2	00.0849	2	00.3418	2	00.7506	2	01.2082	2	01.5910	2	01.8051	2	01.8119	8	01.6298
7		8	00.6040	2	01.4525	2	02.2367	2	02.7796	2	03.0008	2	02.9049	2	02.5805	2	02.0839	3	01.5406
1		89	39.4434	3	74.9150	3	86.7421	3	94.3134	3	98.5458	3	99.9923	3	99.0422	3	96.0000	3	91.1224
2		6	06.6162	89	61.5297	11	69.4834	8	86.7586	5	89.0004	5	93.1983	5	13.6365	9	94.5517	6	58.6019
3		5	87.2073	5	60.6338	12	81.8285	375	77.6810	13	76.8272	9	01.7760	3	72.0832	2	96.7951	2	91.3259
4	0.4	5	17.8322	6	05.3514	8	00.0287	3	74.1795	2	97.942	258	20.3282	3	98.1198	115	00.0457	18	56.9290
5		30	09.2531	7	09.3951	3	72.6646	2	90.3415	73	73.0195	27	46.6556	14	34.6008	17	72.6921	48	08.3393
6		6	05.3864	8	39.4037	3	73.1850	107	79.9256	20	76.0298	29	69.2088	19	57.3874	10	07.1216	10	00.9511
7		6	13.2154	9	54.3619	3	64.1305	41	68.1823	30	63.6343	7	47.6595	6	37.1575	9	07.8343	6	12.0039

CHAPITRE 3

ALGORITHME DE RECHERCHE NON LINÉAIRE ROBUSTE POUR MÉMOIRES ASSOCIATIVES QUANTIQUES

Sommaire

3.1 Introduction	51
3.2 Algorithme de recherche non linéaire	52
3.3 Mémoire associative quantique avec algorithme de recherche non linéaire	60
3.4 Prise en compte du bruit quantique dans la QAM-NLSA	68
3.5 Langage de programmation utilisé	75
3.6 Conclusion	75

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons à la Section 3.2 l'algorithme non linéaire, qui servira aussi d'algorithme de restitution et également utilisé pour construire QAMDiagnos. C'est un algorithme exploitant les possibilités de non linéarité de la théorie quantique.

Nos contributions à cet algorithme de recherche sont données à la Section 3.3, lorsque celui-ci est utilisé dans une QAM. Enfin, dans la Section 3.4 nous présentons l'effet du bruit quantique sur QAMDiagnos utilisant l'algorithme non linéaire et dans la Section 3.5, le langage de programmation utilisé pour les simulations.

Ce chapitre se veut également très détaillée et agrémentée d'exemples afin de faciliter la compréhension, d'une part, et d'apprécier **les modifications que nous avons apporté à cet algorithme**, d'autre part. Soulignons que le formalisme que nous adoptons ici **permet de lever certaines ambiguïtés constatées dans les travaux des autres auteurs**.

3.2 Algorithme de recherche non linéaire

L'algorithme de recherche non linéaire (NLSA pour NonLinear Search Algorithm en anglais) est basée sur le fait qu'il a été suggéré que dans certaines circonstances, le principe de superposition quantique peut être violé. En d'autres termes, un système quantique peut avoir une évolution temporelle non linéaire. C'est pourquoi Abrams et Llyod pensent dans la Ref. [AL98] qu'un ordinateur quantique non linéaire peut résoudre les problèmes NP-complet et #P en temps polynomial. Dans cette Section et la suivante, de même qu'à la Section 3.4, les descriptions que nous présentons sont celles que nous avons utilisé dans notre article [NE16].

3.2.1 Principe de l'algorithme

Supposons qu'il existe une transformation unitaire U_f , qui est l'oracle ou une *boîte noire*, qui agit comme il suit : pour un ensemble de données comprises entre 0 et $2^n - 1$, il y a au plus un x pour lequel $f(x) = 1$ et 0 pour les autres valeurs. Considérons deux registres ; le premier qui est un système à n qubits est là pour implémenter les entrées et le second, qui est un système à un qubit ou qubit drapeau, pour implémenter le résultat de l'oracle. Nous pouvons définir la fonction f comme il suit :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{H}^{\otimes n} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ |y\rangle &\longmapsto |\delta_{xy}\rangle \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où $\mathcal{H}^{\otimes n}$ est l'espace de Hilbert de dimension 2^n .

L'Algorithme 3.1 qui présente l'algorithme non linéaire d'Abrams et Llyod vise à *dés-intriquer* le qubit drapeau du premier registre avant qu'une mesure ne soit effectuée sur ce qubit drapeau. Cette mesure permettra de savoir s'il y a au plus une valeur x pour laquelle $f(x) = 1$. Pour cela, il transforme la partie du qubit drapeau qui est $|0\rangle$ en $|1\rangle$ avant la mesure. Abrams et Llyod déclarent que ceci n'est pas faisable si l'on utilise uniquement les opérateurs linéaires de l'information quantique.

Algorithme 3.1 Algorithme de recherche non linéaire (Ref. [AL98])

- 1 : Mettre le premier registre dans une superposition équiprobable de tous les N états possibles et mettre le qubit drapeau dans l'état $|0\rangle$
 - 2 : Appliquer l'opérateur d'oracle U_f
 - 3 : **for** pour chaque qubit du premier registre avec le qubit drapeau **do**
 - 4 : Appliquer l'opérateur unitaire U
 - 5 : 1. appliquer l'opérateur non linéaire NL^-
 2. appliquer l'opérateur non linéaire NL^+
 - 6 : Appliquer la porte de Walsh-Hadamard W sur le qubit du premier registre et la porte X sur le qubit drapeau
 - 7 : **end for**
 - 8 : Observer le qubit drapeau
-

3.2.2 Description de l'algorithme

Considérons que $|\psi\rangle$ soit l'état qui décrit tout le système et supposons que toutes les $N = 2^n$ entrées possibles soient implémentées dans le premier registre avec des amplitudes de probabilité égales :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_y^N |y\rangle |0\rangle. \quad (3.2.2)$$

L'application de l'opérateur d'oracle U_f produit

$$\begin{aligned} U_f |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_y^N |y\rangle |f(y)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{y \neq x}^N |y\rangle |0\rangle + |x\rangle |1\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Pour décrire l'algorithme de désintrication, nous considérons la forme binaire des valeurs et considérons qu'il y a au plus une valeur x pour laquelle $f(x) = 1$. Considérons que $|j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle$ et $|i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle$ soient les formes binaires des états $|y\rangle$ et $|x\rangle$ respectivement, avec $j_k, i_k \in \{0, 1\}$. Ainsi, on peut réécrire les Eq. (3.2.2) et (3.2.3) comme il suit :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\left(\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_1=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_1 \neq i_n i_{n-1} \dots i_1}}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle \right) + |i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle \right] |0\rangle, \quad (3.2.4)$$

et

$$U_f |\psi\rangle = |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\left(\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_1=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_1 \neq i_n i_{n-1} \dots i_1}}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle |0\rangle \right) + |i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle |1\rangle \right]. \quad (3.2.5)$$

En mettant en évidence le qubit le moins significatif (LSQ pour least significant qubit) du premier registre, l'Eq. (3.2.5) peut être réécrite comme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\left(\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_1=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_2 \neq i_n i_{n-1} \dots i_2}}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle |0\rangle \right) + |i_n i_{n-1} \dots (1 - i_1)\rangle |0\rangle + |i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle |1\rangle \right]. \quad (3.2.6)$$

On doit voir l'état (3.2.6) comme la forme binaire générale du système après l'action de l'opérateur d'oracle. **Il résume tous les états particuliers donnés par Czachor dans [Cza98] et ôte toutes ambiguïtés données par sa notation.** En fait, son équation

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j_n j_{n-1} \dots j_2=0}^1 [|j_n j_{n-1} \dots 0_1\rangle |1\rangle + |j_n j_{n-1} \dots 1_1\rangle |0\rangle] \quad (3.2.7)$$

suggère qu'il y a 2^{n-1} valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$, et non $s = 1$ tel qu'il le prétend.

Considérons uniquement le sous-système du LSQ du premier registre $|\ell\rangle$ et du qubit drapeau $|k\rangle$; $k, \ell \in \{0, 1\}$; le sous-système doit être dans l'un des états suivants où les constances de normalisation ont été ignorées :

$$|00\rangle + |10\rangle, \quad (3.2.8a)$$

$$|10\rangle + |01\rangle, \quad (3.2.8b)$$

$$|00\rangle + |11\rangle. \quad (3.2.8c)$$

La partie gauche de l'Eq. (3.2.6) suggère que l'état (3.2.8a) apparaît avec la plus grande probabilité tandis que l'état $|01\rangle + |11\rangle$ n'apparaît pas parce que x est supposée être unique.

L'évolution non linéaire (NLE pour nonlinear evolution en Anglais), étapes 4-6 de l'Algorithme 3.1 vise à transformer les états (3.2.8b) et (3.2.8c) en $|01\rangle + |11\rangle$ tout en laissant l'état (3.2.8a) inchangé. La partie NLE de l'algorithme agit ainsi comme il suit :

Étape 4. Appliquer l'opérateur à deux qubits

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

sur les états (3.2.8) :

$$U(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle), \quad (3.2.10a)$$

$$U(|10\rangle + |01\rangle) = \sqrt{2}|01\rangle, \quad (3.2.10b)$$

$$U(|00\rangle + |11\rangle) = \sqrt{2}|00\rangle. \quad (3.2.10c)$$

Étape 5.1. Appliquer l'opérateur non linéaire à un qubit NL^- sur le qubit drapeau :

$$NL^- \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \right] = \sqrt{2}|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle), \quad (3.2.11a)$$

$$NL^-(\sqrt{2}|01\rangle) = \sqrt{2}|00\rangle, \quad (3.2.11b)$$

$$NL^-(\sqrt{2}|00\rangle) = \sqrt{2}|00\rangle, \quad (3.2.11c)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Comme nous le voyons sur l'état (3.2.11a), l'action de l'opérateur à un qubit non linéaire NL^- sur l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ est non spécifiée. Ceci donne une certaine flexibilité quant au choix de la porte non linéaire NL^- [AL98]. Sur les états (3.2.11b) et (3.2.11c), l'opérateur NL^- change le qubit drapeau des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ en l'état $|0\rangle$. Ainsi, l'opérateur NL^- doit être vu comme la porte X dans le cas de l'état (3.2.11b) et comme la porte identité I dans le cas de l'état (3.2.11c).

Étape 5.2. Appliquer le second opérateur non linéaire à un qubit NL^+ sur le qubit drapeau :

$$NL^+[\sqrt{2}|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)] = \sqrt{2}|01\rangle, \quad (3.2.12a)$$

$$NL^+(\sqrt{2}|00\rangle) = \sqrt{2}|00\rangle. \quad (3.2.12b)$$

L'opérateur non linéaire NL^+ agit comme la porte identité \mathbb{I} sur l'état $|0\rangle$. La forme générale de la matrice unitaire NL^+ qui change l'état générique d'un qubit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ en $|1\rangle$ est

$$M = \begin{pmatrix} \mp\gamma\beta & \pm\gamma\alpha \\ \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}, \quad \gamma = \pm i \text{ ou } \pm 1 \quad (i^2 = -1), \quad (3.2.13)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Il est à noter que cette matrice (3.2.13) corrige celle de Rigui et *al.* [Rig12] qui prétendent que cette matrice M doit être

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} \\ 0 & -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.2.14)$$

Cette matrice V n'est cependant pas unitaire comme la matrice (3.2.13) telle que requise par la théorie quantique de l'information. De plus, la matrice V produit un mauvais résultat :

$$V[\sqrt{2}|0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)] = \sqrt{2}|0\rangle[(\alpha+1)|0\rangle - \alpha|1\rangle], \quad (3.2.15)$$

et non $\sqrt{2}|01\rangle$ comme souhaité.

Étape 6. Appliquer la porte X sur le qubit drapeau et la porte de Walsh-Hadamard W sur le qubit du premier registre.

Nous résumons ci-dessous l'évolution non linéaire des états (3.2.8) et donnons leurs circuits quantiques correspondants :

$$|00\rangle + |10\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{NL^-} \sqrt{2}|0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{NL^+} \sqrt{2}|01\rangle \xrightarrow{W \otimes X} |00\rangle + |10\rangle. \quad (3.2.16a)$$

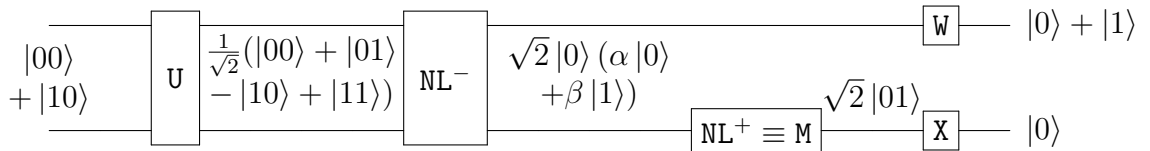


Figure 3.2.1 – Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16a).

$$|10\rangle + |01\rangle \xrightarrow{U} \sqrt{2}|01\rangle \xrightarrow{NL^-} \sqrt{2}|00\rangle \xrightarrow{NL^+} \sqrt{2}|00\rangle \xrightarrow{W \otimes X} |01\rangle + |11\rangle. \quad (3.2.16b)$$

$$|00\rangle + |11\rangle \xrightarrow{U} \sqrt{2}|00\rangle \xrightarrow{NL^-} \sqrt{2}|00\rangle \xrightarrow{NL^+} \sqrt{2}|00\rangle \xrightarrow{W \otimes X} |01\rangle + |11\rangle. \quad (3.2.16c)$$

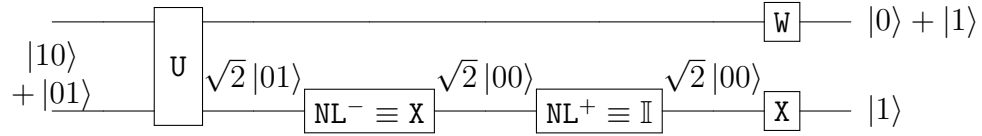


Figure 3.2.2 – Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16b).

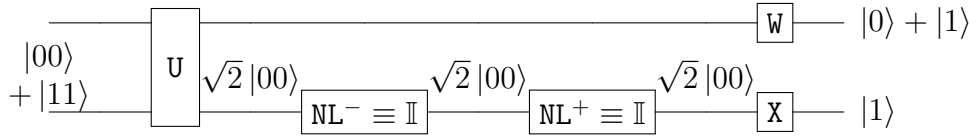


Figure 3.2.3 – Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.2.16c).

Exemple 3.1. *Pour une meilleure compréhension, considérons le cas simple d'un registre à quatre qubits dans un état superposé des 16 valeurs possibles plus un qubit drapeau. L'état marqué est $|2\rangle = |0010\rangle$. Nous commençons avec*

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle = \frac{1}{4} & (|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle \\
 & + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle \\
 & + |1110\rangle + |1111\rangle) |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.2.17a}$$

L'action de l'opérateur d'oracle U_f produit

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle = \frac{1}{4} & (|0000\rangle |0\rangle + |0001\rangle |0\rangle + |0010\rangle |1\rangle + |0011\rangle |0\rangle + |0100\rangle |0\rangle \\
 & + |0101\rangle |0\rangle + |0110\rangle |0\rangle + |0111\rangle |0\rangle + |1000\rangle |0\rangle + |1001\rangle |0\rangle \\
 & + |1010\rangle |0\rangle + |1011\rangle |0\rangle + |1100\rangle |0\rangle + |1101\rangle |0\rangle + |1110\rangle |0\rangle \\
 & + |1111\rangle |0\rangle).
 \end{aligned} \tag{3.2.17b}$$

À présent nous allons décrire l'évolution comme dans [Cza98], mais avec les détails sur l'état du système quand la porte NLE est appliquée. W_x agit sur le qubit significatif et X_f agit sur le qubit drapeau.

Nous commençons en considérant le LSQ du premier registre

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle = \frac{1}{4} & (|000\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |000\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |001\boxed{0}\rangle |\boxed{1}\rangle + |001\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle \\
 & + |010\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |010\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |011\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |011\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle \\
 & + |100\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |100\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |101\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |101\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle \\
 & + |110\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |110\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |111\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |111\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle) \\
 = \frac{1}{4} & [(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)(|00\rangle + |10\rangle) \\
 & + |001\rangle (|01\rangle + |10\rangle)].
 \end{aligned} \tag{3.2.18a}$$

L'application de la porte NLE la première fois produit

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r \mathbf{X}_f) \mathbf{NL}^+ \mathbf{NL}^- \mathbf{U} [(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle \\
&\quad + |111\rangle)(|00\rangle + |10\rangle) + |001\rangle (|10\rangle + |01\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r \mathbf{X}_f) \mathbf{NL}^+ \mathbf{NL}^- [(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle \\
&\quad + |111\rangle) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |001\rangle (\sqrt{2}|01\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r \mathbf{X}_f) \mathbf{NL}^+ [(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle \\
&\quad + |111\rangle) \times (\sqrt{2}|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)) + |001\rangle (\sqrt{2}|00\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r \mathbf{X}_f) [(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle \\
&\quad + |111\rangle) \times (\sqrt{2}|00\rangle) + |001\rangle (\sqrt{2}|00\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(|000\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |000\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |001\boxed{0}\rangle |\boxed{1}\rangle + |001\boxed{1}\rangle |\boxed{1}\rangle \\
&\quad + |010\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |010\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |011\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |011\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |100\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |100\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |101\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |101\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |110\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |110\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle + |111\boxed{0}\rangle |\boxed{0}\rangle + |111\boxed{1}\rangle |\boxed{0}\rangle).
\end{aligned} \tag{3.2.18b}$$

Ensuite, considérant le second LSQ

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{4}(|00\boxed{0}0\rangle |\boxed{0}\rangle + |00\boxed{1}0\rangle |\boxed{1}\rangle + |00\boxed{0}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |00\boxed{1}1\rangle |\boxed{1}\rangle \\
&\quad + |01\boxed{0}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |01\boxed{1}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |01\boxed{0}0\rangle |\boxed{0}\rangle + |01\boxed{1}0\rangle |\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |10\boxed{0}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |10\boxed{1}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |10\boxed{0}0\rangle |\boxed{0}\rangle + |10\boxed{1}0\rangle |\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |11\boxed{0}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |11\boxed{1}1\rangle |\boxed{0}\rangle + |11\boxed{0}0\rangle |\boxed{0}\rangle + |11\boxed{1}0\rangle |\boxed{0}\rangle) \\
&= \frac{1}{4}[(|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)(|00\rangle + |10\rangle) \\
&\quad + (|000\rangle + |001\rangle)(|00\rangle + |11\rangle)].
\end{aligned} \tag{3.2.18c}$$

L'application de la porte NLE une seconde fois produit

$$\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+\mathbf{NL}^-\mathbf{U}[(|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \\
&\quad \times (|00\rangle + |10\rangle) + (|000\rangle + |001\rangle)(|00\rangle + |11\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+\mathbf{NL}^- [(|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \\
&\quad \times (\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + (|000\rangle + |001\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+ [(|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \\
&\quad \times (\sqrt{2}|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)) + (|000\rangle + |001\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle)] \tag{3.2.18d} \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f) [(|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle) \\
&\quad + (|000\rangle + |001\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(|00\overline{0}0\rangle |\overline{1}\rangle + |00\overline{1}0\rangle |\overline{1}\rangle + |00\overline{0}1\rangle |\overline{1}\rangle + |00\overline{1}1\rangle |\overline{1}\rangle \\
&\quad + |01\overline{0}1\rangle |\overline{0}\rangle + |01\overline{1}1\rangle |\overline{0}\rangle + |01\overline{0}0\rangle |\overline{0}\rangle + |01\overline{1}0\rangle |\overline{0}\rangle \\
&\quad + |10\overline{0}1\rangle |\overline{0}\rangle + |10\overline{1}1\rangle |\overline{0}\rangle + |10\overline{0}0\rangle |\overline{0}\rangle + |10\overline{1}0\rangle |\overline{0}\rangle \\
&\quad + |11\overline{0}1\rangle |\overline{0}\rangle + |11\overline{1}1\rangle |\overline{0}\rangle + |11\overline{0}0\rangle |\overline{0}\rangle + |11\overline{1}0\rangle |\overline{0}\rangle).
\end{aligned}$$

Maintenant, en considérant le troisième qubit

$$\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{4}(|0\overline{0}00\rangle |\overline{1}\rangle + |0\overline{1}00\rangle |\overline{0}\rangle + |0\overline{0}01\rangle |\overline{1}\rangle + |0\overline{1}01\rangle |\overline{0}\rangle \\
&\quad + |0\overline{0}10\rangle |\overline{1}\rangle + |0\overline{1}10\rangle |\overline{0}\rangle + |0\overline{0}11\rangle |\overline{1}\rangle + |0\overline{1}11\rangle |\overline{0}\rangle \\
&\quad + |1\overline{0}01\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{1}01\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{0}11\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{1}11\rangle |\overline{0}\rangle \\
&\quad + |1\overline{0}00\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{1}00\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{0}10\rangle |\overline{0}\rangle + |1\overline{1}10\rangle |\overline{0}\rangle) \tag{3.2.18e} \\
&= \frac{1}{4} [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle)(|10\rangle + |01\rangle) + (|100\rangle + |101\rangle \\
&\quad + |110\rangle + |111\rangle)(|00\rangle + |10\rangle)].
\end{aligned}$$

La troisième application de la porte NLE produit

$$\begin{aligned}
|\Psi_3\rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+\mathbf{NL}^{-\mathbf{U}}[(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle)(|10\rangle + |01\rangle) \\
&\quad + (|100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)(|00\rangle + |10\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+\mathbf{NL}^- [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle)(\sqrt{2}|01\rangle) \\
&\quad + (|100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle))] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f)\mathbf{NL}^+ [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle) + (|100\rangle + |101\rangle \\
&\quad + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle))] \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{W}_r\mathbf{X}_f) [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle) + (|100\rangle + |101\rangle \\
&\quad + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|0\rangle(\sqrt{2}|00\rangle))] \\
&= \frac{1}{4}(|0\boxed{0}00\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}00\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{0}10\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}10\rangle|\boxed{1}\rangle \\
&\quad + |0\boxed{0}01\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}01\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{0}11\rangle|\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}11\rangle|\boxed{1}\rangle \\
&\quad + |1\boxed{0}01\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{1}01\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{0}11\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{1}11\rangle|\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |1\boxed{0}00\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{1}00\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{0}10\rangle|\boxed{0}\rangle + |1\boxed{1}10\rangle|\boxed{0}\rangle).
\end{aligned} \tag{3.2.18f}$$

Finalement nous considérons le qubit le plus significatif

$$\begin{aligned}
|\Psi_3\rangle &= \frac{1}{4}(|\boxed{0}000\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}000\rangle|\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}001\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}001\rangle|\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |\boxed{0}010\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}010\rangle|\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}011\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}011\rangle|\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |\boxed{0}100\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}100\rangle|\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}101\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}101\rangle|\boxed{0}\rangle \\
&\quad + |\boxed{0}110\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}110\rangle|\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}111\rangle|\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}111\rangle|\boxed{0}\rangle) \\
&= \frac{1}{4}[(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \\
&\quad \times (|10\rangle + |01\rangle)].
\end{aligned} \tag{3.2.18g}$$

L'application de la porte *NLE* une dernière fois produit

$$\begin{aligned}
 |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{4}(\mathbb{W}_r \mathbb{X}_f) \text{NL}^+ \text{NL}^- \text{U} [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle \\
 &\quad + |110\rangle + |111\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)] \\
 &= \frac{1}{4}(\mathbb{W}_r \mathbb{X}_f) \text{NL}^+ \text{NL}^- [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle \\
 &\quad + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|01\rangle)] \\
 &= \frac{1}{4}(\mathbb{W}_r \mathbb{X}_f) \text{NL}^+ [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle \\
 &\quad + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle)] \tag{3.2.18h} \\
 &= \frac{1}{4}(\mathbb{W}_r \mathbb{X}_f) [(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle \\
 &\quad + |110\rangle + |111\rangle)(\sqrt{2}|00\rangle)] \\
 &= \frac{1}{4}(|\boxed{0}000\rangle + |\boxed{1}000\rangle + |\boxed{0}001\rangle + |\boxed{1}001\rangle + |\boxed{0}010\rangle + |\boxed{1}010\rangle \\
 &\quad + |\boxed{0}011\rangle + |\boxed{1}011\rangle + |\boxed{0}100\rangle + |\boxed{1}100\rangle + |\boxed{0}101\rangle + |\boxed{1}101\rangle \\
 &\quad + |\boxed{0}110\rangle + |\boxed{1}110\rangle + |\boxed{0}111\rangle + |\boxed{1}111\rangle) |\boxed{1}\rangle.
 \end{aligned}$$

Une mesure sur le qubit drapeau nous permet de savoir qu'il y a une valeur x (ici $x = 2$) pour laquelle $f(x) = 1$.

3.3 Mémoire associative quantique avec algorithme de recherche non linéaire

À la suite de la Section 3.2 il apparaît qu'il faille appliquer n fois la porte *NLE*. Ainsi, si nous connaissons la valeur de t qubits du premier registre (c'est-à-dire que t qubits ont soit été déjà mesurés, soit ils sont désintriqués des autres, ou bien que l'oracle agit uniquement dans le sous-espace de $(n - t)$ qubits), nous appliquerons la porte *NLE* $(n - t)$ fois. L'Exemple 3.2, où sont considérées les mêmes données qu'à l'Exemple 3.1, nous donne un aperçu de cette assertion.

Exemple 3.2. *L'état du qubit le plus significatif est connue (MSQ pour most significant qubit) et est $|0\rangle$ (le MSQ a déjà été mesuré ou bien la porte de Walsh-Hadamard a été appliquée sur lui). Le système se retrouve dans l'état*

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle) |0\rangle \\
 &= |0\rangle \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \right] |0\rangle. \tag{3.3.1a}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur d'oracle agit sur trois qubits et donne 1 pour l'état $|010\rangle$ qui est une partie des valeurs 2 et 10 dans leurs formes binaires (0010 et 1010). Le système peut être vu comme

étant dans l'état

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \right] |0\rangle. \quad (3.3.1b)$$

Si le MSQ des quatre qubits est désigné par a ($|a\rangle = |0\rangle$ dans l'Eq. (3.3.1a) et $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$ dans l'Eq. (3.3.1b)), l'application de l'opérateur d'oracle donne

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |a\rangle (|000\rangle |0\rangle + |001\rangle |0\rangle + |010\rangle |0\rangle + |011\rangle |1\rangle + |100\rangle |0\rangle + |101\rangle |0\rangle + |110\rangle |0\rangle + |111\rangle |0\rangle). \quad (3.3.1c)$$

Ensuite, en procédant exactement comme dans l'Exemple 3.1, mais sans autant de détails, chaque application de la porte *NLE* sur le système donne

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |a\rangle (&|010\rangle |1\rangle + |011\rangle |1\rangle \\ &+ |000\rangle |0\rangle + |001\rangle |0\rangle \\ &+ |100\rangle |0\rangle + |101\rangle |0\rangle \\ &+ |110\rangle |0\rangle + |111\rangle |0\rangle), \end{aligned} \quad (3.3.1d)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |a\rangle (&|001\rangle |1\rangle + |011\rangle |1\rangle \\ &+ |000\rangle |1\rangle + |010\rangle |1\rangle \\ &+ |100\rangle |0\rangle + |101\rangle |0\rangle \\ &+ |110\rangle |0\rangle + |111\rangle |0\rangle), \end{aligned} \quad (3.3.1e)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |a\rangle (&|111\rangle |1\rangle + |011\rangle |1\rangle \\ &+ |100\rangle |1\rangle + |000\rangle |1\rangle \\ &+ |101\rangle |1\rangle + |001\rangle |1\rangle \\ &+ |110\rangle |1\rangle + |010\rangle |1\rangle) \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} |a\rangle (&|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) |1\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.1f)$$

Une mesure du qubit drapeau donne l'information recherchée.

Description de l'évolution de la QAM avec algorithme de recherche non linéaire

Nous décrivons ici tout le processus d'évolution de la mémoire associative quantique avec algorithme de recherche non linéaire (QAM-NLSA pour Quantum Associative Memory with Non-Linear Search Algorithm en Anglais). Comme dans l'article de Rigui et *al.* [Rig12], le processus d'apprentissage ou de stockage des patrons est issu du BSQDD. L'opérateur correspondant est appelé BDD.

Le NLSA quantique permet d'obtenir l'information souhaitée après une mesure du qubit drapeau et non du premier registre. Cependant, il serait utile de mesurer le premier registre, particulièrement dans les cas où plusieurs valeurs satisfont la condition $f(x) = 1$. Mais, à la suite de la Section 3.2, il ressort que les 2^n valeurs possibles ont la même probabilité de

mesure. Dans la méthode proposée par Rigui et *al.* [Rig12] **il y a une ambiguïté quant à l'évolution du système.** Premièrement, il n'y a aucune description exacte de l'opérateur U_1 qui relie le premier registre au second registre. Deuxièmement, l'utilisation d'un diagramme de décision binaire simple pour représenter l'état $|\Phi\rangle$ (voir l'étape 2 à la section 3.2 dans [Rig12]) montre uniquement le moyen d'obtenir l'état souhaité. Plus encore, l'opérateur U_3 est utilisé sur un état particulier et non sur un état superposé (voir l'étape 3 à la Section 3.3 et la Section 4.2 dans [Rig12]). **De plus il n'est pas non plus évident de voir comment une mesure donnera un des patrons après le processus de restitution.**

La Fig. 3.3.1 résume notre modèle de QAM-NLSA. Il y est possible de restituer un des états recherchés, dans le cas d'une recherche de plusieurs valeurs, lorsqu'une mesure est effectuée sur le premier registre.

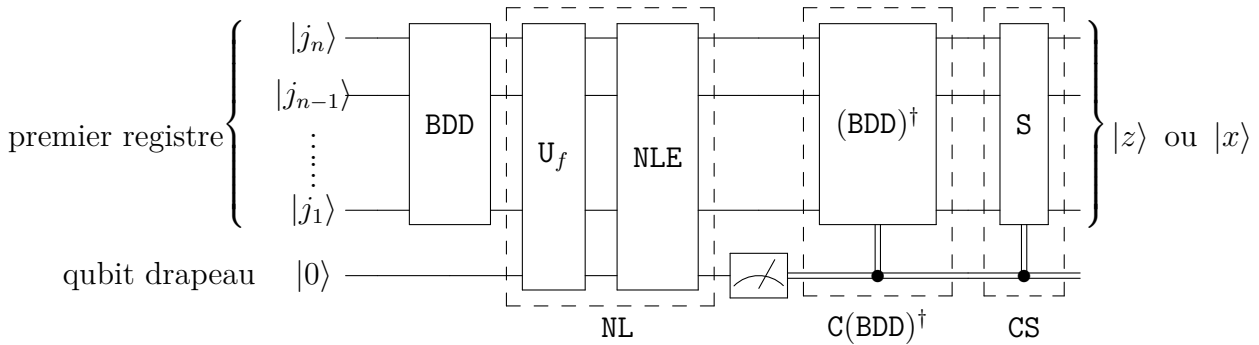


Figure 3.3.1 – Structure schématique du QAM-NLSA. La porte BDD simule le processus d'apprentissage. Les portes U_f , NLE, $C(BDD)^\dagger$ et CS simulent quant à elles le processus de restitution. La porte U_f marque les états recherchés. La porte NLE simule de manière répétitive l'évolution non linéaire. La porte conditionnelle $C(BDD)^\dagger$ fait retourner le premier registre dans son état initial $|z\rangle$. La porte conditionnelle CS change le premier registre en l'état recherché $|x\rangle$.

1. L'opérateur BDD simule le **processus d'apprentissage**.
2. Les opérateurs suivants simulent le **processus de restitution** :
 - (a) L'opérateur NL simule l'opérateur U_f , qui marque l'état recherché, et simule de manière répétitive l'évolution non linéaire NLE sur le système. Il désintrique le premier registre du qubit drapeau ;
 - (b) L'opérateur conditionnel $C(BDD)^\dagger$ agit sur le premier registre et le fait retourner à son état initial $|z\rangle$ quand le qubit drapeau est $|1\rangle$;
 - (c) L'opérateur

$$CS = \mathbb{I}_{2^n} \otimes |0\rangle\langle 0| + (\mathbb{I}_{2^n} - (|z\rangle\langle z| + |x\rangle\langle x|) + |x\rangle\langle z| + |z\rangle\langle x|) \otimes |1\rangle\langle 1| \quad (3.3.2)$$

qui est opérateur conditionnel de dimension $(2^{n+1}) \times (2^{n+1})$ change l'état du premier registre en l'état recherché $|x\rangle$ quand le qubit drapeau est dans l'état $|1\rangle$. En d'autres termes,

- si le qubit drapeau est dans l'état $|0\rangle$ on ne fait rien ;

- si le qubit drapeau est dans l'état $|1\rangle$ nous appliquons l'opérateur de dimension $(2^n) \times (2^n)$

$$S = \mathbb{I}_{2^n} - (|z\rangle\langle z| + |x\rangle\langle x|) + |x\rangle\langle z| + |z\rangle\langle x| \quad (3.3.3)$$

sur le premier registre.

Il est à noter que dans le cas d'une restitution à plusieurs patrons, l'état recherché $|x\rangle$ est une superposition équiprobable de tous les états recherchés (par exemple $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0010\rangle + |1010\rangle)$) dans l'Exemple 3.1).

- (d) À la fin, l'observation du système se fait en mesurant le premier registre, et/ou le qubit drapeau pour effacer toute ambiguïté.

Remarquons que le BSQDD peut construire n'importe quel état recherché. Il peut être utile pour construire l'opérateur CS. Ainsi, dans le cas d'un état recherché complexe $|x\rangle$ où les portes de Walsh-Hadamard et les autres méthodes sont inadéquates, la méthode par BSQDD peut nous permettre de construire l'opérateur approprié S.

Exemple 3.3. L'Exemple 3.1 suggère que l'opérateur $S = \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 \otimes X \otimes \mathbb{I}_2$. Donc, la porte CX agit uniquement sur le second qubit, tandis que les autres qubits restent inchangés. La Fig. 3.3.2 présente l'évolution du système.

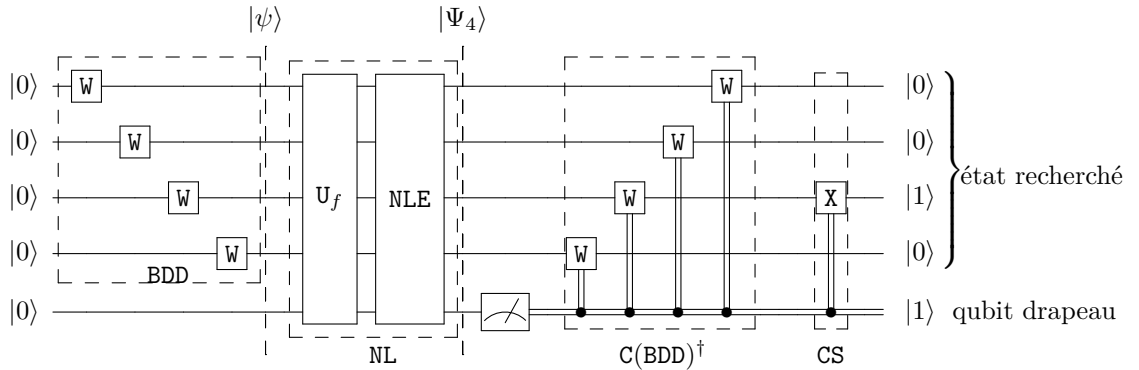


Figure 3.3.2 – Structure schématique de la QAM-NLSA de l'Exemple 3.1. W est la porte de Walsh-Hadamard qui met (respectivement fait retourner à son état initial) le premier registre dans une superposition équiprobable d'état avant (respectivement après) que la porte NL ne simule l'action de l'algorithme non linéaire. Notons que l'Eq. (3.2.17a) et l'Eq. (3.2.18h) donnent respectivement les états $|\psi\rangle$ et $|\Psi_4\rangle$.

Analyse de la complexité de l'algorithme non linéaire

Toute la description présentée ci-dessus a été faite en admettant qu'il y a au plus une valeur x pour laquelle $f(x) = 1$. Considérons à présent le cas où il y a plus d'une valeur satisfaisant la condition $f(x) = 1$. Dans le cas le plus simple où il y a deux valeurs satisfaisant $f(x) = 1$,

l'état (3.2.6) doit être réécrit comme il suit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_1=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_2 \neq i_n i_{n-1} \dots i_2 \\ j_n j_{n-1} \dots j_2 \neq e_n e_{n-1} \dots e_2}}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle |0\rangle + |i_n i_{n-1} \dots (1 - i_1)\rangle |0\rangle + |i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle |1\rangle \right. \\ \left. + |e_n e_{n-1} \dots (1 - e_1)\rangle |0\rangle + |e_n e_{n-1} \dots e_1\rangle |1\rangle \right]. \quad (3.3.4)$$

En mettant en avant le LSQ du premier registre et le qubit drapeau, la seconde partie de l'état (3.3.4) doit être dans l'un des états suivants :

- si $i_n i_{n-1} \dots i_2 \neq e_n e_{n-1} \dots e_2$,

$$|10\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |01\rangle, \quad (3.3.5a)$$

$$|10\rangle + |01\rangle + |00\rangle + |11\rangle, \quad (3.3.5b)$$

$$|00\rangle + |11\rangle + |10\rangle + |01\rangle, \quad (3.3.5c)$$

$$|00\rangle + |11\rangle + |00\rangle + |11\rangle, \quad (3.3.5d)$$

- ou si $i_n i_{n-1} \dots i_2 = e_n e_{n-1} \dots e_2$,

$$|01\rangle + |11\rangle, \quad (3.3.6)$$

parce qu'aucune valeur ne se répète.

L'action de la porte NLE sur les états (3.3.5) est la même que celle décrite à la Section 3.2. En regardant attentivement l'état (3.3.5), il en ressort que la porte NLE a déjà été appliquée une fois; ceci suggère que la porte NLE sera appliquée $(n - 1)$ fois. L'état (3.3.6) suppose également que la porte NLE a déjà été appliquée. Par conséquent la porte NLE sera appliquée à partir du second LSQ et ceci $(n - 1)$ fois. Ainsi, s'il y a au plus deux valeurs x satisfaisant la condition $f(x) = 1$, le nombre d'itérations de la QAM-NLSA est

$$\mathcal{O}(n - 1), \quad (3.3.7a)$$

où la porte NLE est appliquée à partir du second LSQ. Nous constatons également que, dans le cas où il y a au plus trois valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$, en commençant l'action répétitive de la porte NLE dès le second LSQ du premier registre, le nombre d'itérations de la QAM-NLSA est aussi

$$\mathcal{O}(n - 1). \quad (3.3.7b)$$

En accord avec l'observation faite ci-dessus, si il y a au plus m valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$, l'action répétitive de la porte NLE commencera sur le $(r + 1)^e$ LSQ du premier registre. Son action sera répétée $(n - r)$ fois. $r = \text{int}(\log_2 m)$ est la partie entière de $\log_2 m$. Par conséquent, le nombre d'itérations de la QAM-NLSA est

$$\mathcal{O}(n - r). \quad (3.3.8)$$

Exemple 3.4. *En vue de mieux mettre en évidence le résultat (3.3.8), considérons les paramètres de l'Exemple 3.1. Les états marqués ou recherchés sont $|2\rangle = |0010\rangle$, $|5\rangle = |0101\rangle$, $|8\rangle = |1000\rangle$, $|10\rangle = |1010\rangle$, $|11\rangle = |1011\rangle$, $|13\rangle = |1101\rangle$, et $|15\rangle = |1111\rangle$. Le nombre d'états marqués est $m = 7$ et $\log_2 m = 2.807$. Donc, $r = 2$ et l'action répétitive de la porte *NLE* commence au troisième LSQ du premier registre. Plus en détails, et comme dans l'Exemple 3.1, nous commençons avec*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle) |0\rangle. \quad (3.3.9a)$$

L'action de l'opérateur d'oracle U_f produit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{4}(|0000\rangle |0\rangle + |0001\rangle |0\rangle + |0010\rangle |1\rangle + |0011\rangle |0\rangle + |0100\rangle |0\rangle + |0101\rangle |1\rangle + |0110\rangle |0\rangle + |0111\rangle |0\rangle + |1000\rangle |1\rangle + |1001\rangle |0\rangle + |1010\rangle |1\rangle + |1011\rangle |1\rangle + |1100\rangle |0\rangle + |1101\rangle |1\rangle + |1110\rangle |0\rangle + |1111\rangle |1\rangle). \quad (3.3.9b)$$

En mettant en avant le troisième qubit,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = \frac{1}{4} & (|0\boxed{0}00\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{1}00\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{0}01\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{1}01\rangle |\boxed{1}\rangle \\ & + |0\boxed{0}10\rangle |\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}10\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{0}11\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{1}11\rangle |\boxed{0}\rangle \\ & + |1\boxed{0}01\rangle |\boxed{0}\rangle + |1\boxed{1}01\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{0}11\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}11\rangle |\boxed{1}\rangle \\ & + |1\boxed{0}00\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}00\rangle |\boxed{0}\rangle + |1\boxed{0}10\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}10\rangle |\boxed{0}\rangle), \end{aligned} \quad (3.3.10a)$$

et en appliquant la porte *NLE* la première fois nous avons

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle = \frac{1}{4} & (|0\boxed{0}00\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{1}00\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{0}01\rangle |\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}01\rangle |\boxed{1}\rangle \\ & + |0\boxed{0}10\rangle |\boxed{1}\rangle + |0\boxed{1}10\rangle |\boxed{1}\rangle + |0\boxed{0}11\rangle |\boxed{0}\rangle + |0\boxed{1}11\rangle |\boxed{0}\rangle \\ & + |1\boxed{0}01\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}01\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{0}11\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}11\rangle |\boxed{1}\rangle \\ & + |1\boxed{0}00\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}00\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{0}10\rangle |\boxed{1}\rangle + |1\boxed{1}10\rangle |\boxed{1}\rangle). \end{aligned} \quad (3.3.10b)$$

Finalemment, en considérant le MSQ, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle = \frac{1}{4} & (|\boxed{0}000\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{1}000\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{0}001\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}001\rangle |\boxed{0}\rangle \\ & + |\boxed{0}010\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}010\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}011\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{1}011\rangle |\boxed{1}\rangle \\ & + |\boxed{0}100\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{1}100\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{0}101\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}101\rangle |\boxed{0}\rangle \\ & + |\boxed{0}110\rangle |\boxed{1}\rangle + |\boxed{1}110\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{0}111\rangle |\boxed{0}\rangle + |\boxed{1}111\rangle |\boxed{1}\rangle), \end{aligned} \quad (3.3.10c)$$

et en appliquant une deuxième et dernière fois la porte *NLE* nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = \frac{1}{4} & (|\boxed{0}000\rangle + |\boxed{1}000\rangle + |\boxed{0}001\rangle + |\boxed{1}001\rangle \\ & + |\boxed{0}010\rangle + |\boxed{1}010\rangle + |\boxed{0}011\rangle + |\boxed{1}011\rangle \\ & + |\boxed{0}100\rangle + |\boxed{1}100\rangle + |\boxed{0}101\rangle + |\boxed{1}101\rangle \\ & + |\boxed{0}110\rangle + |\boxed{1}110\rangle + |\boxed{0}111\rangle + |\boxed{1}111\rangle) |\boxed{1}\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.10d)$$

Il apparaît effectivement que nous avons répété l'action de la porte NLE $(n - r) = 4 - 2 = 2$ fois.

Si nous connaissons les valeurs de t qubits du premier registre (c'est-à-dire que t qubits ont été déjà mesurés ou sont désintriqués des autres, ou bien l'opérateur d'oracle agit dans le sous-espace de $(n - t)$ qubits) et s'il y a au plus m valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$, l'opérateur NLE sera appliqué de manière répétitive $((n - t) - r)$ fois en commençant par $(r + 1)^e$ LSQ. Comme les t qubits sont déjà connus ceux-ci doivent être ignorés, il apparaît que $m \leq 2^{n-t}$. Par conséquent, le nombre d'itérations de la QAM-NLSA est

$$\mathcal{O}((n - t) - r). \quad (3.3.11)$$

À présent, si dans le premier registre, qui est un système à n qubits, le nombre de patrons est $p \leq 2^n$, la porte NLE sera appliquée de manière répétitive $(b - r)$ fois. Ici nous posons que $b = \text{ceil}(\log_2 p)$ (c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2 p$) et $r = \text{int}(\log_2 m)$ où m est le nombre de valeurs x satisfaisant la condition $f(x) = 1$. Ainsi, le nombre d'itérations QAM-NLSA est

$$\mathcal{O}(b - r), \quad (3.3.12)$$

pour lequel la limite supérieure est donnée par l'Eq. (3.3.8). Notons que le point de départ de l'action de la porte NLE sera toujours le $(r + 1)^e$ LSQ.

Si nous connaissons les valeurs de t qubits du premier registre, ceci suppose que nous devons voir le système en termes de $q \leq p \leq 2^n$ patrons. Par conséquent le nombre m de valeurs pour lesquelles $f(x) = 1$ est $m \leq q$. Pour $c = \text{ceil}(\log_2 q)$, la porte NLE agira de manière répétitive $(c - r)$ fois. Ainsi, le nombre d'itérations de la QAM-NLSA prend la forme générale

$$\mathcal{O}(c - r). \quad (3.3.13)$$

Exemple 3.5. • Si nous considérons à nouveau les paramètres de l'Exemple 3.1, nous trouvons que $p = 16$. Le nombre de qubits connus est $t = 0$. La conséquence est que $q = p = 16$ et $\log_2 q = \log_2 16 = 4.0$. Donc $c = 4$, $m = 1$, et $r = 0$. La porte NLE agit de manière répétitive $(c - r) = 4 - 0 = 4$ fois.

- Dans l'Exemple 3.2, $t = 1$. Par conséquent, $q = 8$ en accord avec l'hypothèse de cet exemple. $\log_2 q = \log_2 8 = 3.0$. Donc, $c = 3$, $m = 1$, alors $r = 0$. La porte NLE agira de manière répétitive $(c - r) = 3 - 0 = 3$ fois.
- Dans l'Exemple 3.4, $t = 0$ et $q = 16$ mais $m = 7$. Ainsi, $\log_2 m = 2.807$. Il vient que $r = 2$. La porte NLE agira donc de manière répétitive $(c - r) = 4 - 2 = 2$ fois.

Il est à noter que lorsque l'état $|01\rangle + |11\rangle$ apparaît à la fin, la porte NLE agit sur l'état $|01\rangle + |11\rangle$ sans le faire évoluer. L'évolution non linéaire de ce dernier état est similaire à celle de l'état (3.2.8a). Ainsi nous décrivons l'évolution non linéaire de l'état $|01\rangle + |11\rangle$ comme il suit :

Étape 4. Appliquer l'opérateur U :

$$U(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle). \quad (3.3.14)$$

Étape 5.1. Appliquer l'opérateur non linéaire NL^- :

$$NL^- \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \right] = \sqrt{2} |0\rangle (\delta |0\rangle + \epsilon |1\rangle), \quad (3.3.15)$$

où $\delta, \epsilon \in \mathbb{C}$, $|\delta|^2 + |\epsilon|^2 = 1$. Nous constatons sur l'état (3.3.15) que l'action de l'opérateur non linéaire NL^- n'est pas spécifiée tout comme sur l'état (3.2.11a).

Étape 5.2. Appliquer le second opérateur non linéaire NL^+ :

$$NL^+ [\sqrt{2} |0\rangle (\delta |0\rangle + \epsilon |1\rangle)] = \sqrt{2} |00\rangle. \quad (3.3.16)$$

La forme générale de la matrice NL^+ qui change l'état générique à un qubit $\delta |0\rangle + \epsilon |1\rangle$ en $|0\rangle$ est

$$\Pi = \begin{pmatrix} \delta^* & \epsilon^* \\ \mp \gamma \epsilon & \pm \gamma \delta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \pm i \text{ ou } \pm 1 \quad (i^2 = -1), \quad (3.3.17)$$

où $\delta, \epsilon \in \mathbb{C}$, $|\delta|^2 + |\epsilon|^2 = 1$.

Étape 6. Appliquer la porte X sur le qubit drapeau et la porte de Walsh-Hadamard W sur le premier qubit.

Nous résumons dans ce qui suit l'évolution non linéaire de l'état $|01\rangle + |11\rangle$ et donnons le circuit quantique correspondant (voir la Fig. 3.3.3).

$$|01\rangle + |11\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \xrightarrow{NL^-} \sqrt{2} |0\rangle (\delta |0\rangle + \epsilon |1\rangle) \xrightarrow{NL^+} \sqrt{2} |00\rangle \xrightarrow{W \otimes X} |01\rangle + |11\rangle. \quad (3.3.18)$$

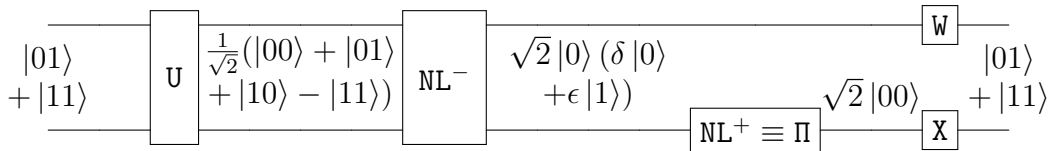


Figure 3.3.3 – Circuit quantique équivalent de l'évolution non linéaire (3.3.18).

Dans l'Algorithme 3.2 décrivant la QAM-NLSA :

- n est le nombre de qubits du premier registre ;
- $p \leq 2^n$ le nombre de patrons stockés ;
- $q \leq p$ le nombre de patrons stockés si nous connaissons la valeur de t qubits (c'est-à-dire, soit t qubits ont déjà été mesurés, soit ils sont désintriqués des autres, ou encore l'opérateur d'oracle agit dans le sous-espace de $(n - t)$ qubits) ;
- $c = \text{ceil}(\log_2 q)$ (c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égale à $\log_2 q$) ;
- $m \leq q$ le nombre des valeurs x pour lesquelles $f(x) = 1$;

Algorithme 3.2 Algorithme de la QAM-NLSA

-
- 1 : Stocker les patrons en utilisant l'opérateur BDD et mettre le qubit drapeau dans l'état $|0\rangle$
 - 2 : Appliquer l'opérateur d'oracle U_f
 - 3 : **répéter** $(c - r)$ fois les étapes (4)-(6) (c'est-à-dire une fois par qubit du premier registre à partir du $(r + 1)^e$ qubit avec le qubit drapeau)
 - 4 : Appliquer l'opérateur unitaire U
 - 5 :
 1. Appliquer l'opérateur non linéaire NL^-
 2. Appliquer l'opérateur non linéaire NL^+
 - 6 : Appliquer l'opérateur de Walsh-Hadamard W sur le qubit du premier registre et l'opérateur X sur le qubit drapeau
 - 7 : Observer le qubit drapeau
 - 8 : **si** le qubit drapeau est dans l'état $|0\rangle$
 - 9 : Conclure
 - 10 : **sinon**
 1. Appliquer l'opérateur conditionnel $C(\text{BDD})^\dagger$ pour faire retourner le premier registre à son état initial
 2. Appliquer l'opérateur conditionnel CS pour changer le premier registre en l'état recherché
 3. Observer le premier registre
-

- et $r = \text{int}(\log_2 m)$ est la partie entière de $\log_2 m$.

Remarque 3.3.1. *Le but du NLA est de déterminer s'il existe ou non un état désiré dans le premier registre. La porte conditionnelle agit uniquement si l'état désiré existe dans le premier registre. Ainsi, la porte S ne peut construire que les états mémorisés, même dans un problème de complétion.*

3.4 Prise en compte du bruit quantique dans la QAM-NLSA

Nous décrivons dans la présente Section l'évolution de la QAM-NLSA en présence de bruit quantique. Rappelons que, bien que la non linéarité assure un grand avantage calculatoire, elle rend aussi le système hautement susceptible au bruit quantique. Ceci apparaît alors comme étant un obstacle qui limite l'efficacité du NLSA. Puisque le NLSA évolue qubit par qubit, nous ne considérons que les canaux bruités à un qubit tels que décrits dans les Refs. [NC00, WC98]. Ici, ce sont les densités de probabilité qui seront considérées en lieu et place des vecteurs d'état.

3.4.1 Canaux bruités quantiques à un qubit

Si $\rho_{in} = |\psi\rangle\langle\psi|$ est la matrice densité de l'état $|\psi\rangle$, l'effet de l'environnement conduit à la représentation de Kraus suivante :

$$\rho_{out} = \mathcal{K}(\rho_{in}) = \sum_i E_i \rho_{in} E_i^\dagger, \quad \sum_i E_i^\dagger E_i = \mathbb{I}, \quad (3.4.1)$$

où les E_i sont les *opérateurs d'erreur* ou *opérateurs de Kraus* qui décrivent complètement les canaux bruités à un qubit présentés à la Tab. 3.4.1.

Table 3.4.1 – Canaux bruités quantiques à un qubit. $X_{i=0,1,2,3} = \mathbb{I}$, X, Y, Z sont les matrices de Pauli et $\eta \in [0, 1]$ est la probabilité qu'un état soit affecté par le bruit. Il est à noter que $X_{i=1,2,3}^0 = \mathbb{I}$ n'est pas un opérateur d'erreur. Ainsi, la valeur $1 - \eta$ associée à cet opérateur représente la probabilité qu'aucune erreur ne survienne.

Canal bruité	Description	Ensemble des opérateurs de Kraus $\{E_i\}$
Bit flip	Induit par la dissipation, il change l'état $ k\rangle$ en $ \bar{k}\rangle$, $k = 0, 1$.	$\{\sqrt{1-\eta}X^0, \sqrt{\eta}X\}$
Phase flip	Induit par la décohérence, il change l'état $ k\rangle$ en $(-1)^k k\rangle$, $k = 0, 1$.	$\{\sqrt{1-\eta}Z^0, \sqrt{\eta}Z\}$
Bit-phase flip	Il correspond à l'action collective du bit flip et du phase flip.	$\{\sqrt{1-\eta}Y^0, \sqrt{\eta}Y\}$
Amplitude damping	Il transforme l'état $ 1\rangle$ en l'état $ 0\rangle$ mais laisse l'état $ 0\rangle$ inchangé. Il doit être vu comme de la dissipation d'énergie.	$\{ 0\rangle\langle 0 + \sqrt{1-\eta} 1\rangle\langle 1 , \sqrt{\eta} 0\rangle\langle 1 \}$
Phase damping	Il concerne la perte d'information vis-à-vis de la phase relative dans un état quantique.	$\{ 0\rangle\langle 0 + \sqrt{1-\eta} 1\rangle\langle 1 , \sqrt{\eta} 1\rangle\langle 1 \}$
Canal dépolarisant	Il transforme n'importe quel état en un état complètement mélangé.	$\{\sqrt{1-\eta}\mathbb{I}, \sqrt{\frac{\eta}{3}}X, \sqrt{\frac{\eta}{3}}Y, \sqrt{\frac{\eta}{3}}Z\}$

3.4.2 QAM-NLSA avec bruit quantique

Nous supposons que durant l'évolution non linéaire (NLE), les étapes 4 à 6 de l'Algorithme 3.1, le bruit quantique survient avec une probabilité $\eta \in [0, 1]$ après l'action de chaque porte contenue dans la porte NLE (voir la Fig. 3.4.1). Nous posons que :

- Chaque porte agit avant que l'erreur ne survienne et c'est le même type de bruit quantique qui en est la cause ;
- Le premier registre est un système à n qubits et la probabilité η qu'un état d'être affecté par le bruit est indépendante du nombre total de qubits du système ;
- Enfin, les erreurs sont localisées à chaque étape dans le réseau et n'affectent que $|\ell\rangle$ et $|k\rangle$.

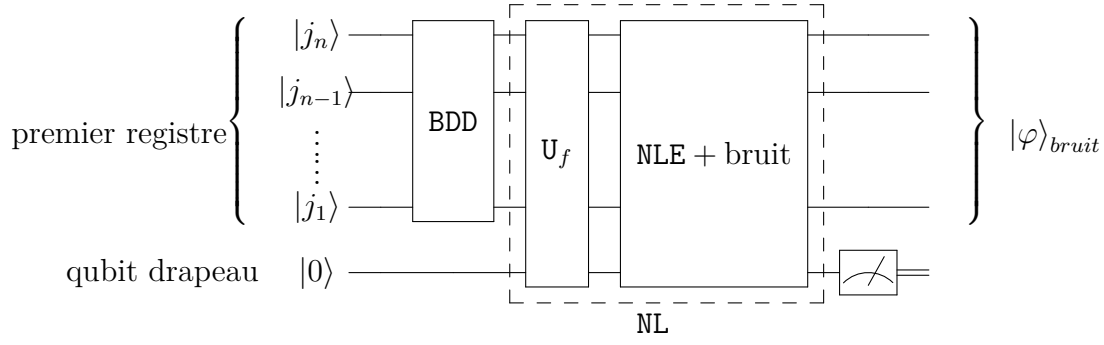


Figure 3.4.1 – Structure schématique du NLSA avec bruit quantique.

À présent, analysons l'effet du canal bruité durant l'évolution non linéaire de l'état (3.2.6). Lorsque nous réduisons le système aux deux qubits $|\ell\rangle$ et $|k\rangle$ nous avons

$$\rho_{out} = \sum_i E_i \left(\mathbb{W} \otimes \mathbb{X} \left[\sum_i E_i \left(\text{NL}^+ \left[\sum_i E_i \left(\text{NL}^- \left[\sum_i E_i \left(\text{U}\rho_{in}\text{U}^\dagger \right) E_i^\dagger \right] (\text{NL}^-)^\dagger \right) E_i^\dagger \right] (\text{NL}^+)^\dagger \right) E_i^\dagger \right] \mathbb{W}^\dagger \otimes \mathbb{X}^\dagger \right) E_i^\dagger. \quad (3.4.2)$$

Du fait que pour chaque étape du NLE nous considérons un système à deux qubits, l'opérateur d'erreur à appliquer doit être le produit tensoriel de deux opérateurs d'erreur à un qubit.

- **Cas du bit flip** : le produit tensoriel

$$\{\mathbb{I}_r, \mathbb{X}_r\} \otimes \{\mathbb{I}_f, \mathbb{X}_f\} \quad (3.4.3)$$

donne la liste des opérateurs suivants, où r est l'indexe du qubit du premier registre et f celui du qubit drapeau.

$$E_1 = \sqrt{1 - \eta_r} \sqrt{1 - \eta_f} \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{I}_f, \quad (3.4.4a)$$

$$E_2 = \sqrt{1 - \eta_r} \sqrt{\eta_f} \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{X}_f, \quad (3.4.4b)$$

$$E_3 = \sqrt{\eta_r} \sqrt{1 - \eta_f} \mathbb{X}_r \otimes \mathbb{I}_f, \quad (3.4.4c)$$

$$E_4 = \sqrt{\eta_r} \sqrt{\eta_f} \mathbb{X}_r \otimes \mathbb{X}_f. \quad (3.4.4d)$$

- **Cas du bit-phase flip** : le produit tensoriel $\{\mathbb{I}_r, \mathbb{Z}_r\} \otimes \{\mathbb{I}_f, \mathbb{Z}_f\}$ donne la liste des opérateurs qui suivent.

$$E_1 = \sqrt{1 - \eta_r} \sqrt{1 - \eta_f} \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{I}_f, \quad (3.4.5a)$$

$$E_2 = \sqrt{1 - \eta_r} \sqrt{\eta_f} \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{Y}_f, \quad (3.4.5b)$$

$$E_3 = \sqrt{\eta_r} \sqrt{1 - \eta_f} \mathbb{Y}_r \otimes \mathbb{I}_f, \quad (3.4.5c)$$

$$E_4 = \sqrt{\eta_r} \sqrt{\eta_f} \mathbb{Y}_r \otimes \mathbb{Y}_f. \quad (3.4.5d)$$

- **Cas de l'amplitude damping** : à la suite du produit tensoriel

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \eta_r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \eta_f} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}, \quad (3.4.6)$$

on a

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_f} \end{pmatrix}, \quad (3.4.7a)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.7b)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_f} \end{pmatrix}, \quad (3.4.7c)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta_f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.7d)$$

- **Cas du phase damping** : le produit tensoriel à effectuer est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_r} \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_f} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_f} \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.4.8)$$

Les opérateurs qui s'en suivent sont

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_f} \end{pmatrix}, \quad (3.4.9a)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_f} \end{pmatrix}, \quad (3.4.9b)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta_f} \end{pmatrix}, \quad (3.4.9c)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_f} \end{pmatrix}. \quad (3.4.9d)$$

- **Cas du canal dépolarisant** : ici nous avons seize opérateurs qui sont, sans les probabilités et le signe du produit tensoriel :

$$\{\mathbb{I}_r \mathbb{I}_f; \mathbb{I}_r X_f; \mathbb{I}_r Y_r; \mathbb{I}_r Z_f; X_f \mathbb{I}_r; Y_f \mathbb{I}_r; Z_f \mathbb{I}_r; X_f X_r; X_f Y_r; X_f Z_r; Y_f X_r; Y_f Y_r; Y_f Z_r; Z_f X_r; Z_f Y_r; Z_f Z_r\} \quad (3.4.10)$$

Notons qu'à la suite de l'Eq. (3.4.2), ρ_{out} est la somme de 256 matrices pour les cas du bit flip, du phase flip, du bit-phase flip, de l'amplitude damping et du phase damping. Pour le canal dépolarisant, ρ_{out} est la somme de 65 536 matrices.

À cause de l'intrication le système doit être observé complètement. Ainsi, sans les constantes de normalisation, la matrice d'entrée est

$$\begin{aligned} \rho_{in} &= |\psi\rangle \langle \psi| \\ &= \left[\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_2=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_2 \neq i_n i_{n-1} \dots i_2}}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_2 0\rangle |0\rangle + |j_n j_{n-1} \dots j_2 1\rangle |0\rangle + |i_n i_{n-1} \dots (1-i_1)\rangle |0\rangle + |i_n i_{n-1} \dots i_1\rangle |1\rangle \right] \\ &\quad \left[\sum_{\substack{j_n j_{n-1} \dots j_2=0 \\ j_n j_{n-1} \dots j_2 \neq i_n i_{n-1} \dots i_2}}^1 \langle j_n j_{n-1} \dots j_2 0| \langle 0| + \langle j_n j_{n-1} \dots j_2 1| \langle 0| + \langle i_n i_{n-1} \dots (1-i_1)| \langle 0| + \langle i_n i_{n-1} \dots i_1| \langle 1| \right], \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

tandis que la matrice de sortie est

$$\Omega = \left(\left[\sum_{j_n j_{n-1} \dots j_1=0}^1 |j_n j_{n-1} \dots j_1\rangle \right] \left[\sum_{j_n j_{n-1} \dots j_1=0}^1 \langle j_n j_{n-1} \dots j_1| \right] \right) \otimes |1\rangle \langle 1|. \quad (3.4.12)$$

Afin d'évaluer l'effet du bruit quantique sur l'efficacité du NLSA, nous devons calculer la *fidélité* entre l'état recherché en sortie et l'état obtenu en sortie. Soit σ la matrice densité de l'état recherché en sortie. La fidélité est

$$\mathcal{F}_1(\sigma, \Gamma) = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\sigma} \Gamma \sqrt{\sigma}}, \quad (3.4.13)$$

avec $0 \leq \mathcal{F}_1(\sigma, \Gamma) \leq 1$. $\mathcal{F}_1(\sigma, \Gamma) = 0$ si σ et Γ sont orthogonaux et $\mathcal{F}_1(\sigma, \Gamma) = 1$ si $\sigma = \Gamma$.

Si nous nous concentrons uniquement sur l'effet du bruit sur l'évolution non linéaire NLE, c'est-à-dire avant la procédure de restitution, nous pouvons considérer que l'état recherché est l'état pur $|\psi\rangle = \sum_x |x\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle$, $|\phi_j\rangle = \alpha_j |0\rangle + \beta_j |1\rangle$ ($|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = 1$), et nous pouvons réécrire l'Eq. (3.4.13) comme il suit

$$\mathcal{F}_0(|\psi\rangle, \rho_{out}) = \sqrt{\langle \psi | \rho_{out} | \psi \rangle}. \quad (3.4.14)$$

3.4.3 Détails du bit flip

Pour la simulation nous supposons que

$$\text{NL}^- = \text{C}X_{fr}^1 \text{C}W_{rf}^0 \text{C}W_{rf}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.15)$$

et en accord avec l'Eq. (3.4.15), nous pouvons choisir $\mathbf{M} = \mathbf{W}$. Nous considérons également que $\eta_r = \eta_f = \epsilon$ parce que l'opérateur d'erreur est appliqué simultanément sur les états $|\ell\rangle$ et $|k\rangle$ (c'est-à-dire que l'erreur survient au niveau de ces qubits au même instant). Nous pouvons alors considérer que la probabilité d'erreur est identique pour les deux qubits. De plus, puisque nous effectuons la mesure sur le qubit drapeau, nous extrayons uniquement sa matrice densité ρ_{out} afin d'évaluer la fidélité.

L'ensemble des opérateurs à considérer est à présent

$$\begin{aligned} E_1 &= (1 - \epsilon) \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{I}_f, \\ E_2 &= \sqrt{\epsilon(1 - \epsilon)} \mathbb{I}_r \otimes \mathbf{X}_f, \\ E_3 &= \sqrt{\epsilon(1 - \epsilon)} \mathbf{X}_r \otimes \mathbb{I}_f, \\ E_4 &= \epsilon \mathbf{X}_r \otimes \mathbf{X}_f. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Cas où l'état recherché n'existe pas dans le premier registre

Dans ce cas, l'état de sortie du qubit drapeau est $|0\rangle$. Si le premier registre a n qubits,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^{3n} - 1] & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^{3n} - 1] \end{pmatrix}, \quad (3.4.17a)$$

donc

$$\mathcal{F}_0(|0\rangle, \rho_{out}) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^{3n} - 1]}. \quad (3.4.17b)$$

En effet,

- si le premier registre a uniquement un qubit,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^3 - 1] & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^3 - 1] \end{pmatrix}. \quad (3.4.18)$$

- Si le premier registre a trois qubits,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^9 - 1] & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^9 - 1] \end{pmatrix}. \quad (3.4.19)$$

Comme nous le voyons sur la Fig. 3.4.2 et en accord avec l'Eq. (3.4.17b), lorsque $\epsilon < 0.5$ la fidélité est plus grande que 0.7. Mais celle-ci décroît pour $\epsilon \geq 0.5$ si n est un nombre impair et croît plutôt si n est un nombre pair. Pour n comme nombre impair (voir la Fig. 3.4.2a pour un qubit), la zone entre 0.4 et 0.6 peut être vue comme une zone de stabilité. C'est-à-dire la zone où la fidélité est maintenue autour de 0.7. Lorsque n est un nombre pair (voir la Fig. 3.4.2b pour six qubits), cette zone de stabilité augmente avec le nombre de qubits. Cependant, si l'état recherché n'existe pas dans le premier registre, la QAM-NLSA est plus résistante au bruit quantique quand le nombre n de qubits est pair.

Cas où l'état recherché existe dans le premier registre

Ici l'état de sorti du qubit drapeau est $|1\rangle$. Si le premier registre a n ($n > 1$) qubits,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{f(\epsilon^{4n})}{2^{2n-3}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2} \frac{f(\epsilon^{4n})}{2^{2n-3}} \end{pmatrix}, \quad (3.4.20a)$$

où f est une fonction polynomiale qui croît avec ϵ^{4n} . Ainsi,

$$\mathcal{F}_0(|1\rangle, \rho_{out}) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^4 - 1]}, \text{ pour } n = 1, \quad (3.4.20b)$$

ou

$$\mathcal{F}_0(|1\rangle, \rho_{out}) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{f(\epsilon^{4n})}{2^{2n-3}}}, \text{ pour } n > 1. \quad (3.4.20c)$$

En effet,

- si le premier registre a un seul qubit,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^4 - 1] & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}[(1 - 2\epsilon)^4 - 1] \end{pmatrix}. \quad (3.4.21)$$

- Si le premier registre a deux qubits,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{1}{2}[(1-2\epsilon)^8-1] + \frac{1}{2}[(1-2\epsilon)^7-1]}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\frac{1}{2}[(1-2\epsilon)^8-1] + \frac{1}{2}[(1-2\epsilon)^7-1]}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.4.22)$$

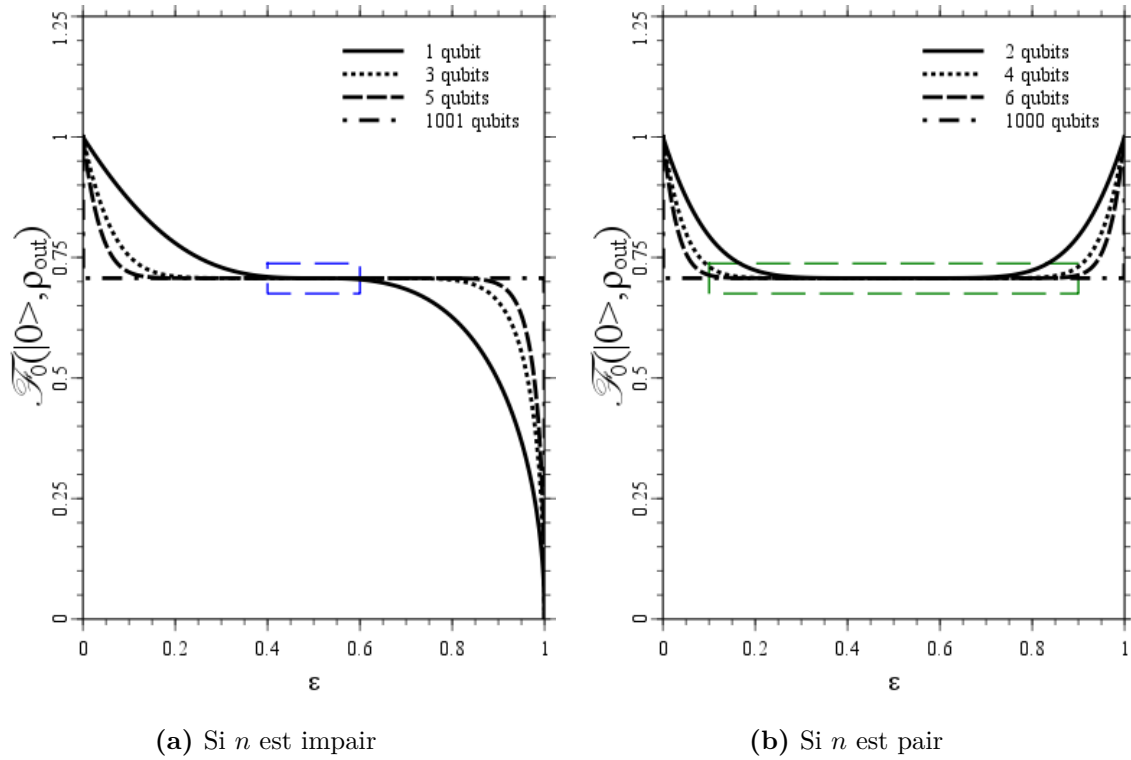


Figure 3.4.2 – Évolution de la fidélité $\mathcal{F}_0(|0\rangle, \rho_{out})$ à la fin des étapes NLE lorsque l'état recherché n'existe pas dans le premier registre. (a) pour 1, 3, 5 et 1001 qubits. (b) pour 2, 4, 6 et 1000 qubits. Les rectangles bleu et vert mettent en évidence la zone de stabilité.

- Si le premier registre a quatre qubits,

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} ((1-2\epsilon)^{16}-1) + 5((1-2\epsilon)^{15}-1) \\ +15((1-2\epsilon)^{14}-1) + 13((1-2\epsilon)^{13}-1) \\ +0((1-2\epsilon)^{12}-1) - 6((1-2\epsilon)^{11}-1) \\ +5((1-2\epsilon)^{10}-1) - ((1-2\epsilon)^9-1) \\ -((1-2\epsilon)^8-1) + ((1-2\epsilon)^7-1) \end{array} \right] \\ 0 \\ 1 + \frac{0}{2^5} \left[\begin{array}{c} ((1-2\epsilon)^{16}-1) + 5((1-2\epsilon)^{15}-1) \\ +15((1-2\epsilon)^{14}-1) + 13((1-2\epsilon)^{13}-1) \\ +0((1-2\epsilon)^{12}-1) - 6((1-2\epsilon)^{11}-1) \\ +5((1-2\epsilon)^{10}-1) - ((1-2\epsilon)^9-1) \\ -((1-2\epsilon)^8-1) + ((1-2\epsilon)^7-1) \end{array} \right] \end{array} \right). \quad (3.4.23)$$

Comme le montre la Fig. 3.4.3 et en accord avec Eq. (3.4.20c), quelle que soit la valeur de ϵ , la fidélité est plus grande que 0.7. En d'autres termes, si l'état recherché existe dans le premier registre, le QAM-NLSA est résistant au bruit quel que soit le nombre de qubits. Nous voyons également que la zone de stabilité, mise en évidence par le rectangle vert en trait interrompu sur la Fig. 3.4.3, s'élargit avec le nombre de qubits. Cette zone de stabilité est la même que celle présentée à la Fig. 3.4.2.

À la suite des détails précédents, il apparaît que le canal bruité bit flip, ainsi que tous les canaux quantiques bruités en général, affecte le QAM-NLSA durant son implémentation. Dans le cas particulier du canal bit flip, la fidélité entre le système affecté et le système non

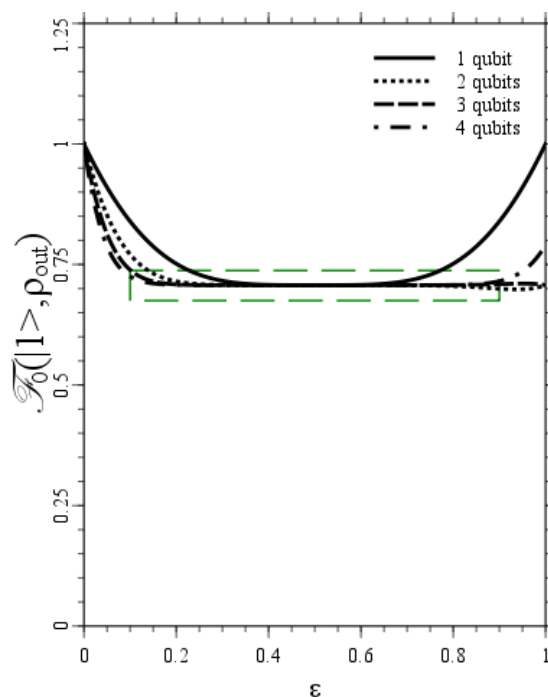


Figure 3.4.3 – Évolution de la fidélité $\mathcal{F}_0(|1\rangle, \rho_{out})$ à la fin des étapes NLE pour 1, 2, 3 et 4 qubits dans le cas où l'état recherché existe dans le premier registre.

affecté est de l'ordre de 70% et cette valeur ne change pas même si le nombre de qubits augmente.

3.5 Langage de programmation utilisé

Toutes les simulations et les résultats de QAMDiagnos ont été obtenus en écrivant les algorithmes en langage de programmation C++. Nous avons considéré que nous travaillons avec un registre de 16 qubits. Le registre d'entrée est constitué des 6 premiers qubits et permet de simuler les signes et symptômes. Le registre de sortie est constitué des 10 derniers qubits dont 4 pour l'algorithme de recherche linéaire et 6 pour l'algorithme de recherche non linéaire (voir la base de données indiquée en Section 4.2). Une interface graphique utilisateur (GUI pour Graphical User Interface en Anglais) multi-plateforme de QAMDiagnos a été mise au point pour faciliter son utilisation (voir la Fig. 4.4.1). Elle a été développée avec la version open source de la librairie Qt5 du langage de programmation C++.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'algorithme de recherche non linéaire d'Abrams et Lloyd [AL98]. Nous avons décrit cet algorithme en utilisant **une notation qui lève l'ambiguïté due à la notation de Rigui et *al.* ainsi qu'à celle de Czachor [Cza98]**. Nous avons également décrit notre modèle de QAM-NLSA. Ce modèle est similaire à celui proposé par Rigui et *al.* [Rig12], **mais avec la possibilité d'obtenir un des états désirés lors**

d'une recherche de plusieurs valeurs à la suite d'une mesure sur le premier registre. Enfin, nous avons analysé l'influence du bruit quantique, particulièrement le bit flip, sur la QAM-NLSA lorsque l'état recherché est présent ou non dans la base de données. Ces travaux ont conduit à la publication de l'article [NE16].

Dans QAMDiagnos nous utiliserons les deux algorithmes de recherche de manière collaborative. L'algorithme de recherche linéaire sera l'algorithme principal et l'algorithme non linéaire permettra de compléter ou corriger le résultat fourni par le linéaire. Le langage de programmation utilisé à cet effet a été présenté en dernier lieu dans ce chapitre.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Sommaire

4.1 Introduction	77
4.2 Description de la base de données et de la QAM	77
4.3 Simulations, résultats et interprétation	81
4.4 Interface graphique utilisateur pour ordinateur et smartphone .	99
4.5 Conclusion	105

4.1 Introduction

Au Chapitre 1, nous avons présenté les quatre maladies tropicales aux signes et symptômes similaires qui devront faire l'objet d'un diagnostic par l'application QAMDiagnos. Les algorithmes associés ont été présentés aux Chapitres 2 et 3.

Nous décrivons à la Section 4.2 comment est structurée la base de données. Les simulations et résultats, selon les valeurs de a qui régule la largeur de la distribution binomiale, sont donnés à la Section 4.3, de même que l'interprétation de ces résultats.

Enfin, à la Section 4.4, nous présentons l'interface graphique utilisateur conçu afin de faciliter l'utilisation de QAMDiagnos.

4.2 Description de la base de données et de la QAM

4.2.1 Ensemble des signes et symptômes

La base de données est constituée des signes et symptômes des quatre maladies tropicales que sont le paludisme, la fièvre typhoïde, la fièvre jaune et la dengue (voir la Tab. 4.2.1). On constate que

- trois d'entre eux sont communs aux quatre maladies ;
- quatre sont communs au paludisme, à la fièvre jaune et à la dengue ;

- le paludisme a en commun avec la fièvre typhoïde, trois signes et symptômes et quatre avec la fièvre jaune ;
- enfin, la fièvre jaune possède en commun avec la fièvre typhoïde, deux signes et symptômes et avec la dengue cinq signes et symptômes.

On distingue alors dix-sept signes et symptômes spécifiques au paludisme, dix-sept signes à la fièvre jaune, dix-huit à la fièvre typhoïde et vingt-deux à la dengue. La base de données comporte donc un total de quatre-vingt-quinze signes et symptômes. Ces signes et symptômes ont été constitués à la suite d'échanges avec des médecins de l'Hôpital Général de Douala et de la consultation des Refs. [msf16, CMI16, F⁺13, CMI12]. Ces échanges ont conduit à faire une distinction entre “*signe*” et “*symptôme*” puis à les classer autant que faire se peut selon la pyramide sanitaire ci-dessous (voir la Fig. 4.2.1) et par ordre de fréquence. De ce fait, les signes de sévérité ou faisant suite à des résultats de laboratoire sont placés bien après les signes et symptômes les plus accessibles dans l'interface graphique utilisateur.

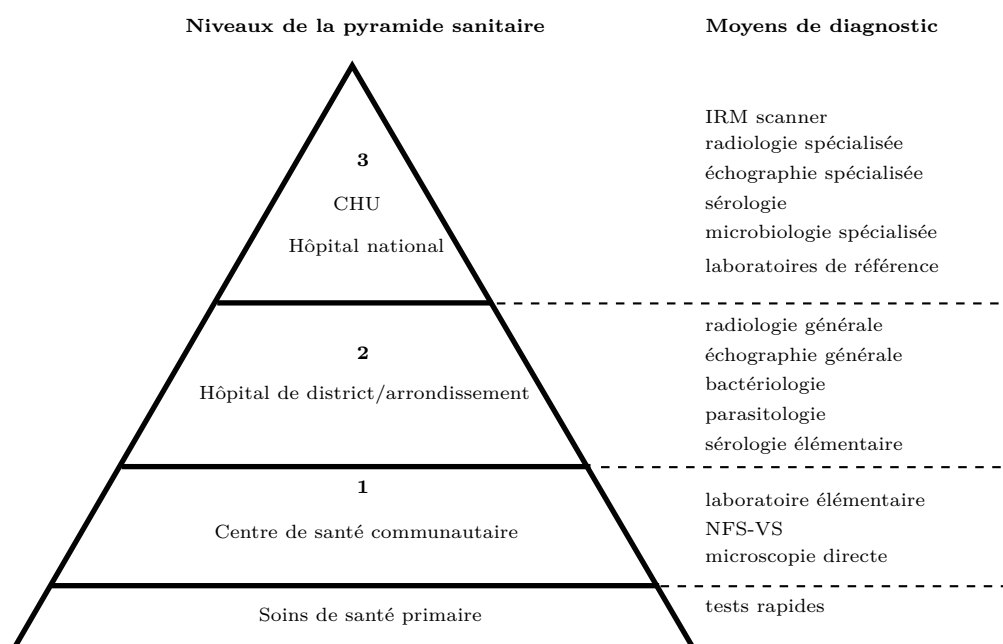


Figure 4.2.1 – Moyens de diagnostic des maladies infectieuses aux différents niveaux de la pyramide sanitaire [CMI12].

Table 4.2.1 – Signes et symptômes de la base de données [msf16, CMI16, F⁺13, CMI12]. (1) symptôme ; (2) signe ; (3) résultat de laboratoire ou test clinique.

Paludisme	Fièvre typhoïde	Fièvre jaune	Dengue
Céphalées ⁽¹⁾	Céphalées ⁽¹⁾	Céphalées ⁽¹⁾	Céphalées ⁽¹⁾
Douleurs abdominales ⁽¹⁾⁽²⁾	Douleurs abdominales ⁽¹⁾⁽²⁾	Douleurs abdominales ⁽¹⁾⁽²⁾	Douleurs abdominales ⁽¹⁾⁽²⁾
Fièvre ⁽¹⁾⁽²⁾	Fièvre ⁽¹⁾⁽²⁾	Fièvre ⁽¹⁾⁽²⁾	Fièvre ⁽¹⁾⁽²⁾
Myalgies ⁽¹⁾⁽²⁾		Myalgie ⁽¹⁾⁽²⁾	Myalgies ⁽¹⁾⁽²⁾
Insuffisance rénale ⁽²⁾⁽³⁾		Insuffisance rénale ⁽²⁾⁽³⁾	Insuffisance rénale ⁽²⁾⁽³⁾
Nausées ⁽¹⁾		Nausées ⁽¹⁾	Nausées ⁽¹⁾
Vomissements ⁽¹⁾		Vomissements ⁽¹⁾	Vomissements ⁽¹⁾
Frissons ⁽¹⁾		Frissons ⁽¹⁾	

Table 4.2.1 – Signes et symptômes de la base de données [msf16, CMI16, F+13, CMI12]. (1) symptôme ; (2) signe ; (3) résultat de laboratoire ou test clinique.

Paludisme	Fièvre typhoïde	Fièvre jaune	Dengue
Hémorragies ⁽¹⁾⁽²⁾		Hémorragies ⁽¹⁾⁽²⁾	
Ictère ⁽¹⁾⁽²⁾		Ictère ⁽¹⁾⁽²⁾	
Oligurie ⁽²⁾⁽³⁾		Oligurie ⁽²⁾⁽³⁾	
Anorexie ⁽¹⁾⁽²⁾	Anorexie ⁽¹⁾⁽²⁾		
Coma ⁽²⁾	Coma ⁽²⁾		
Prostration ⁽²⁾	Prostration ⁽²⁾		
	Épistaxis ⁽¹⁾	Épistaxis ⁽¹⁾	
	Myocardite ⁽²⁾⁽³⁾	Myocardite ⁽²⁾⁽³⁾	
		Rachialgies ⁽¹⁾⁽²⁾	Rachialgies ⁽¹⁾⁽²⁾
		Défaillance cardiaque ⁽²⁾⁽³⁾	Défaillance cardiaque ⁽²⁾⁽³⁾
		Défaillance hépatique ⁽²⁾⁽³⁾	Défaillance hépatique ⁽²⁾⁽³⁾
		Injonction conjonctivale ⁽²⁾	Injonction conjonctivale ⁽²⁾
		Somnolence ⁽¹⁾⁽²⁾	Somnolence ⁽¹⁾⁽²⁾
Anémie ⁽²⁾⁽³⁾	Asthénie ⁽¹⁾⁽²⁾	Acidose ⁽³⁾	Accumulation de liquide et détresse respiratoire ⁽²⁾⁽³⁾
Choc ⁽²⁾	Angine de Duguet (Ulcération indolore sur le pilier antérieur du voile du palais) ⁽²⁾	Bradycardie en relation avec la température ⁽²⁾⁽³⁾	Adénopathies généralisées ⁽¹⁾⁽²⁾
Convulsions généralisées ou focales ⁽²⁾	Bradycardie relative ⁽²⁾⁽³⁾	Choc infectieux ⁽²⁾⁽³⁾	Agitation ou léthargie ⁽²⁾
Convulsions multiples ⁽²⁾	Constipation ⁽¹⁾⁽²⁾	Coma terminal ⁽²⁾	Arthralgies ⁽¹⁾⁽²⁾
Courbatures ⁽¹⁾	Diarrhée jaunâtre ⁽¹⁾⁽²⁾	Déshydratation ⁽²⁾	Asthénie prolongée ⁽¹⁾⁽²⁾
Délire ⁽²⁾	Encéphalite ⁽²⁾⁽³⁾	Douleur dans le dos ⁽¹⁾	Augmentation de l'hématocrite et baisse rapide des plaquettes ⁽³⁾
Détresse respiratoire ⁽²⁾	Exanthème lenticulaire du tronc ⁽²⁾	Douleur dans les membres ⁽¹⁾	Choc compensé ⁽²⁾
Diarrhées ⁽¹⁾⁽²⁾	Gargouillements de la fosse iliaque droite ⁽²⁾	Douleur dans les reins ⁽¹⁾	Choc décompensé ⁽²⁾
Hémoglobinurie ⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾	Hémorragie ou perforation digestive ⁽³⁾	Douleur épigastrique ⁽¹⁾⁽²⁾	Chute tensorielle ⁽²⁾⁽³⁾
Hépto-splénomégalie ⁽²⁾	Insomnie ⁽¹⁾	Fatigue ⁽¹⁾	Desquamation de l'éruption maculeuse ⁽²⁾
Hypoglycémie ⁽²⁾⁽³⁾	Langue saburale ⁽²⁾	Haleine fétide ⁽²⁾	Douleur rétro-orbitaire ⁽¹⁾
Malaise ⁽¹⁾	Lourdeur abdominale ⁽¹⁾	Hypotension ⁽²⁾⁽³⁾	Encéphalopathie ⁽²⁾⁽³⁾
Œdème pulmonaire ⁽³⁾	Péritonite ⁽²⁾⁽³⁾	Lombalgie ⁽¹⁾⁽²⁾	Éruption maculeuse ⁽¹⁾⁽²⁾
Pâleur ⁽¹⁾⁽²⁾	Pouls dissocié ⁽²⁾	Prolongation des intervalles PR et QT à l'électrocardiographie ⁽³⁾	Exanthème maculo-papuleux ⁽¹⁾⁽²⁾
Sub-ictère ⁽²⁾	Septicémie ⁽³⁾	Protéinurie légère ⁽³⁾	Hépatomégalie (> 2cm) ⁽²⁾
Sueurs profuses ⁽¹⁾⁽²⁾	Splénomégalie franche ⁽²⁾	Purpura ⁽²⁾	Hypothermie brutale ⁽²⁾⁽³⁾
Troubles de la conscience ⁽²⁾	Splénomégalie modérée ⁽²⁾	Vomito negro ⁽¹⁾⁽²⁾	Leucopénie ⁽³⁾
	Tuphos ⁽²⁾		Obnubilation ⁽²⁾
			Purpura vasculaire ⁽²⁾⁽³⁾
			Saignement cutané ou muqueux bénin ⁽²⁾
			Saignement cutané ou muqueux sévère ⁽²⁾
			Vomissements persistants ⁽¹⁾⁽²⁾

4.2.2 Structure de la QAM

Pour la construction de la QAM, nous utilisons quatorze qubits répartis comme il suit :

- Six qubits pour coder les signes et symptômes. Dans chaque sous-espace correspondant

aux maladies, les signes et symptômes sont codés sous la forme décimale en partant de 0 jusqu'à $N-1$, N étant le nombre de signes et symptômes.

- Quatre qubits utilisés par l'algorithme linéaire pour coder les maladies tel que présenté au Tab 4.2.2 en vertu du Tab 4.2.1. Ces quatre qubits sont utilisés comme qubits de sortie pour l'algorithme linéaire.

Table 4.2.2 – Groupes de maladies et leurs codes binaires pour l'algorithme linéaire. La distance de Hamming entre deux codes est égale à 1 si les signes et symptômes sont communs aux deux groupes et égale à 2 sinon. Le groupe N° 10 est utilisé pour les signes et symptômes communs aux quatre maladies étant donné qu'on ne peut les associer à une maladie particulière et qu'ils peuvent également apparaître dans d'autres maladies.

N°	Groupe de maladies	Code
1	Paludisme	0001⟩
2	Fièvre typhoïde	0010⟩
3	Fièvre jaune	0100⟩
4	Dengue	1000⟩
5	Paludisme + Fièvre typhoïde	0011⟩
6	Paludisme + Fièvre jaune	0101⟩
7	Fièvre typhoïde + Fièvre jaune	0110⟩
8	Fièvre jaune + Dengue	1100⟩
9	Paludisme + Fièvre jaune + Dengue	1101⟩
10	Autres maladies	1111⟩

Notons également que nous considérons qu'en plus de |1111⟩, les autres possibilités non mentionnées dans le Tab 4.2.2 sont aussi considérées comme "*Autres maladies*".

- Quatre qubits utilisés par l'algorithme non linéaire comme qubits de sortie. À chaque qubit est associé une des quatre maladies. Ce qubit permet alors de savoir si au moins un signe ou symptôme propre à ladite maladie a été choisi. En d'autres termes, si l'état du qubit est |0⟩ ceci signifie qu'aucun signe ou symptôme spécifique à la maladie n'a été choisi, tandis que l'état |1⟩ signifie que c'est le cas. De plus, si l'état des quatre qubits est |0⟩, ceci signifie qu'aucun signe ou symptôme spécifique à une maladie n'a été choisi.

Remarque 4.2.1. *Nous utilisons deux groupes de qubits en sortie car la méthode d'apprentissage pour les deux algorithmes de recherche est différente. Pour l'algorithme linéaire nous utilisons l'approche par exclusion, où les états qui correspondent aux signes et symptômes recherchés sont exclus de tous les états possibles. Pour l'algorithme non linéaire nous n'excluons aucun état, et nous utilisons plutôt une superposition d'états de tous les signes et symptômes. Ainsi, en indexant les quatorze qubits $|q_1\rangle$ à $|q_{14}\rangle$, le codage utilisé dans l'application QAMDiagnos est représenté par la Fig. 4.2.2. Pour l'algorithme non linéaire, $|q_{11}\rangle$ est associé au paludisme, $|q_{12}\rangle$ est associé à la fièvre typhoïde, $|q_{13}\rangle$ est associé à la fièvre jaune et $|q_{14}\rangle$ est associé à la dengue.*

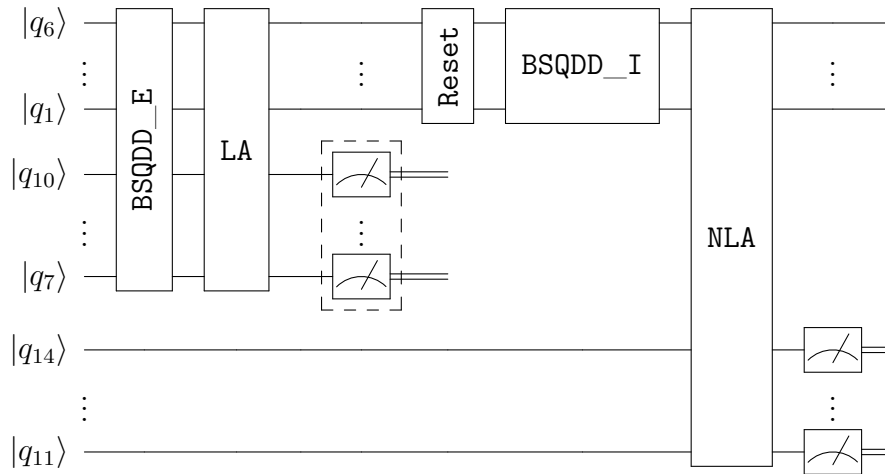


Figure 4.2.2 – Structure schématique de l’application QAMDiagnos. BSQDD_E simule l’apprentissage pour l’algorithme linéaire de QAMDiagnos, tandis que, après réinitialisation grâce à la porte **Reset**, BSQDD_I simule l’apprentissage pour l’algorithme non linéaire de QAMDiagnos. LA est l’ensemble des opérateurs simulant l’algorithme de recherche linéaire de QAMDiagnos. NLA est l’ensemble des opérateurs simulant quatre fois l’algorithme de recherche non linéaire de la QAMDiagnos ; une fois par maladie. Les qubits $|q_{11}\rangle$ à $|q_{14}\rangle$ sont chacun associés à une maladie pour la partie non linéaire.

4.3 Simulations, résultats et interprétation

Nous présentons dans les Tabs. 4.3.1-4.3.24 les résultats obtenus, où P_c en % est la probabilité moyenne de restitution du bon résultat pour l’algorithme de recherche linéaire. Les hypothèses faites sont les suivantes :

1. six signes et symptômes au plus peuvent être choisis ;
2. pour la partie non linéaire, l’apprentissage consiste à mettre le registre de six qubits dans une superposition des quatre-vingt-quinze états possibles qui correspondent aux signes et symptômes ;
3. concernant la partie linéaire
 - la valeur de a qui régle la largeur de la distribution binomiale (la requête) sera choisie d’abord égale à 0.0001, puis égale à 0.4999 ;
 - le centre de la requête est $|0^{\otimes 10}\rangle$, car nous supposons que les signes et symptômes ne donnent pas de prime abord des indications sur la ou les maladies associées ;
 - nous présentons les résultats obtenus en utilisant les algorithmes **C0**, **C1** et **C2** ;
 - pour l’algorithme **C2**, les k centres de $|REQ_x\rangle$ seront les signes et symptômes exclus durant le processus d’apprentissage. $a' = 0.0001$ si le k ème centre est un signe ou symptôme autre que ceux communs aux quatre maladies et $a' = 0.4999$ si non ;
4. le nombre d’itérations pour l’algorithme **C0** est calculé tel que défini à la Section 2.3 et pour les algorithmes **C1** et **C2** tels que définis à la Section 2.4.

Dans les Tabs. 4.3.1-4.3.3 et 4.3.13-4.3.15, qui concernent une infection simple, les symptômes communs sont les trois signes et symptômes que l'on retrouve à la fois dans les quatre maladies et qui ne peuvent n'être associés qu'à l'une d'elles. Dans les Tabs. 4.3.4-4.3.12 et 4.3.16-4.3.24, qui concernent une co-infection au paludisme et à la fièvre typhoïde, les symptômes communs sont ceux que l'on retrouve à la fois dans les deux maladies uniquement.

Remarque 4.3.1. *La valeur de la largeur de la distribution binômiale a doit être vue comme étant la certitude avec laquelle on connaît l'élément qu'on recherche. Plus a est proche de 0, plus grande est la certitude et plus a est proche de 0.5, plus faible est la certitude. La Fig. 4.3.1 illustre cette situation. Comme le montre la Tab. 2.4.4, lorsque a est proche de 0 et que la distance de Hamming à l'élément recherché est la plus grande, la probabilité P_c est faible. Elle est meilleure lorsque a est proche de 0.5.*

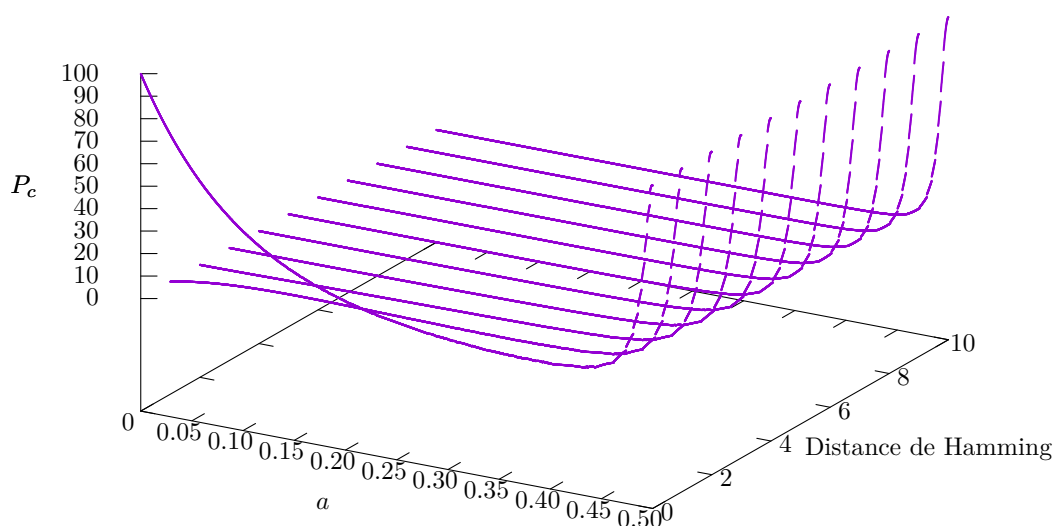


Figure 4.3.1 – Probabilité $P_c(\%)$ des états de la requête distribuée en fonction de a et de la distance de Hamming pour un registre de dix qubits dont le centre est $|0\rangle$. Lorsque $a = 0.0001$, la probabilité de $|0\rangle$ est très proche de 100, alors que lorsque $a = 0.4999$ toutes les probabilités ont sensiblement la même valeur.

4.3.1 Cas où $a = 0.0001$

Cette situation correspond à celle où la certitude qu'on a est que les signes et symptômes choisis correspondent à une “*autre maladie*”, vu que le centre de la requête est $|0^{\otimes 10}\rangle$.

Cas d'une simple infection

Table 4.3.1 – Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme **C0** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	00.0146	00.0141	00.0148	00.0149	00.0158	00.0154	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0146	00.0141	00.0148	00.0149	00.0158	00.0154		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0146	00.0141	00.0148	00.0149	00.0158	00.0154		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0144	00.0140	00.0147	00.0148	00.0157	00.0151		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0140	00.0147	00.0148	00.0158	00.0152	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0140	00.0147	00.0148	00.0158	00.0152	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0140	00.0147	00.0148	00.0158	00.0152	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0140	00.0146	00.0148	00.0158	00.0150	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0145	00.0148	00.0159	0.0150	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0145	00.0148	00.0159	0.0150	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0145	00.0148	00.0159	0.0150	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0144	00.0148	00.0159	00.0148	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0149	00.0160	00.0149	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0149	00.0160	00.0149	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0149	00.0160	00.0149	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0149	00.0160	00.0148	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Table 4.3.2 – Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme **C1** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	00.0858	00.0859	00.0812	00.0809	00.0762	00.0766	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0858	00.0859	00.0812	00.0809	00.0762	00.0766		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0858	00.0859	00.0812	00.0809	00.0762	00.0766		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0866	00.0860	00.0822	00.0810	00.0762	00.0766		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0874	00.0835	00.0822	00.0773	00.0785	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0874	00.0835	00.0822	00.0773	00.0785	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0874	00.0835	00.0822	00.0773	00.0785	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0874	00.0854	00.0822	00.0787	00.0789	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0855	00.0832	00.0782	00.0801	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0855	00.0832	00.0782	00.0801	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0855	00.0832	00.0782	00.0801	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0857	00.0831	00.0781	00.0803	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	00.0840	00.0790	00.0818	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.0840	00.0790	00.0818	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.0840	00.0790	00.0818	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.0839	00.0789	00.0817	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Table 4.3.3 – Cas d’une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	00.1058	00.0399	00.1478	00.3023	00.4600	00.6263	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	00.1058	00.0399	00.1478	00.3023	00.4600	00.6263		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	00.1058	00.0399	00.1478	00.3023	00.4600	00.6263		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	00.1066	00.0375	00.1482	00.3152	00.4862	00.6575		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	99.4269	89.0859	76.1093	63.8951	56.2701	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	99.4269	89.0859	76.1093	63.8951	56.2701	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	99.4269	89.0859	76.1093	63.8951	56.2701	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	99.4267	89.0853	76.1091	63.9013	56.2067	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	88.9945	99.3295	95.5722	88.8976	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	88.9945	99.3295	95.5722	88.8976	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	88.9945	99.3295	95.5722	88.8976	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	88.9925	99.3292	95.5718	88.8974	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	75.9927	95.5634	99.2315	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	75.9927	95.5634	99.2315	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	75.9927	95.5634	99.2315	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	75.9908	95.5602	99.2311	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Les Tabs. 4.3.1 et 4.3.2 qui donnent les résultats des algorithmes **C0** et **C1**, montrent que la partie linéaire de QAMDiagnos est incapable de reconnaître avec une bonne probabilité la maladie correspondante aux signes et symptômes choisis et ceci quel que soit le nombre de signes et symptômes spécifiques choisis. Ceci est principalement dû à la distance de Hamming qu’il y a entre le centre de la requête et les états correspondants aux signes et symptômes choisis et aussi à la valeur de a .

Dans une telle configuration, seule la partie non linéaire de QAMDiagnos est capable de donner le résultat attendu. Toutefois, si seuls sont choisis des signes et symptômes communs à deux ou trois maladies, QAMDiagnos dans son ensemble n’est pas capable de donner avec une probabilité satisfaisante le bon résultat.

La Tab. 4.3.3 donne les résultats obtenus avec l’algorithme **C2**. Dans ce cas, en dehors de la situation où aucun symptôme commun n’est choisi, la partie linéaire de QAMDiagnos donne avec une bonne probabilité le résultat attendu. Ce résultat est dû au fait qu’en présence des signes et symptômes communs, la modification de l’algorithme **C2** est vue comme une correction de la requête.

Des trois algorithmes linéaires, seul l’algorithme **C2** donne des résultats satisfaisants et qui concordent avec ceux donnés par la partie non linéaire de QAMDiagnos.

Cas d’une co-infection

- Avec un symptôme commun

Table 4.3.4 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	00.0138	00.0145	00.0146	00.0155	00.0152	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0138	00.0145	00.0146	00.0155	00.0151	
Paludisme + F. typh.	00.0057	00.0065	00.0066	00.0077	00.0072	
Paludisme	00.0145	00.0146	00.0154	00.0151	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0146	00.0146	00.0154	00.0151	-	
Paludisme + F. typh.	00.0065	00.0066	00.0076	00.0071	-	
Paludisme	00.0145	00.0155	00.0151	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0146	00.0155	00.0151	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0066	00.0077	00.0071	-	-	
Paludisme	00.0155	00.0151	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0156	00.0152	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0077	00.0072	-	-	-	
Paludisme	00.0151	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0152	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0072	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.5 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	00.0893	00.0854	00.0841	00.0795	0.0798	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0880	00.0854	00.0854	00.0819	00.0837	
Paludisme + F. typh.	00.0714	00.0689	00.0689	00.0656	00.0674	
Paludisme	00.0866	00.0854	00.0808	00.0811	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0840	00.0841	00.0808	00.0824	-	
Paludisme + F. typh.	00.0688	00.0689	00.0657	00.0674	-	
Paludisme	00.0867	00.0819	00.0569	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0828	00.0795	00.0557	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0689	00.0656	00.0503	-	-	
Paludisme	00.0830	00.0837	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0781	00.0798	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0654	00.0674	-	-	-	
Paludisme	00.0849	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0784	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0672	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.6 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	00.0203	00.1800	00.4608	00.7063	00.9233	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0246	00.1800	00.4635	00.7188	00.9548	
Paludisme + F. typh.	00.0159	00.1800	00.4702	00.7294	00.9690	
Paludisme	00.1537	00.4635	00.7666	01.0407	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.1591	00.4608	00.7666	01.0528	-	
Paludisme + F. typh.	00.1549	00.4702	00.7852	01.0801	-	
Paludisme	00.3539	00.7188	01.0528	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.3539	00.7063	01.0407	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.3576	00.7294	01.0801	-	-	
Paludisme	00.5575	00.9548	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.5399	00.9233	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.5612	00.9690	-	-	-	
Paludisme	00.7573	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.7203	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.7610	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

- Avec deux symptômes communs

Table 4.3.7 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	00.0144	00.0143	00.0154		Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0145	00.0143	00.0153		
Paludisme + F. typh.	00.0064	00.0062	00.0074	-	
Paludisme	00.0153	00.0149	-	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0154	00.0149	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0074	00.0069	-	-	
Paludisme	00.0153	00.0149			Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0154	00.0150			
Paludisme + F. typh.	00.0074	00.0069	-	-	
Paludisme	00.0149	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0150	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0069	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.8 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	00.0869	00.0865	00.0813	00.0818	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0856	00.0865	00.0826	00.0844	
Paludisme + F. typh.	00.0679	00.0688	00.0651	00.0669	
Paludisme	00.0878	00.0826	00.0831	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0852	00.0813	00.0831	-	
Paludisme + F. typh.	00.0688	00.0651	00.0669	-	
Paludisme	00.0837	00.0844	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0800	00.0818	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0650	00.0669	-	-	
Paludisme	00.0857	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0805	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	0.0668	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.9 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	00.1173	00.3536	00.6288	00.8789	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.1194	00.3536	00.6340	00.8979	
Paludisme + F. typh.	00.1194	00.3567	00.6367	00.9007	
Paludisme	00.3156	00.6340	00.9389	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.3150	00.6288	00.9389	-	
Paludisme + F. typh.	00.3178	00.6367	00.9519	-	
Paludisme	00.5381	00.8979	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.5252	00.8789	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.5366	00.9007	-	-	
Paludisme	00.7535	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.7242	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.7485	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

- Avec trois symptômes communs

Table 4.3.10 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	00.0139	00.0152	00.0148	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh	00.0140	00.0152	00.0148	
Paludisme + F. typh.	00.0057	00.0071	00.0066	
Paludisme	00.0152	00.0147	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0152	00.0148	-	
Paludisme + F. typh.	00.0071	00.0065	-	
Paludisme	00.0065	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0148	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0066	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.11 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	00.0892	00.0832	00.0839	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh	00.0879	00.0832	00.0852	
Paludisme + F. typh.	00.0690	00.0646	00.0665	
Paludisme	00.0844	00.0300	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0819	00.0297	-	
Paludisme + F. typh.	0.0645	00.0214	-	
Paludisme	00.0311	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.0297	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.0217	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.12 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.0001$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	00.1762	00.4572	00.7567	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	00.1778	00.4572	00.7640	
Paludisme + F. typh.	00.1778	00.4564	00.7576	
Paludisme	00.4192	00.7640	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.4135	00.7567	-	
Paludisme + F. typh.	00.4160	00.7576	-	
Paludisme	00.6635	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	00.6450	-	-	
Paludisme + F. typh.	00.6518	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Les Tabs. 4.3.4-4.3.12 donnent les résultats obtenus pour les parties linéaire et non linéaire de QAMDiagnos. Quel que soit l’algorithme linéaire utilisé, la probabilité d’obtention du bon résultat reste inférieure à 01.1%. La conséquence de tels résultats est une contradiction entre le diagnostic fourni par la partie linéaire de QAMDiagnos et celui de la partie non linéaire.

Dans la situation où l’on est certain que les signes et symptômes choisis correspondent à une “*autre maladie*”, aucun des algorithmes linéaires ne permet de généraliser le diagnostic. En effet les algorithmes **C0** et **C1** sont incapables d’identifier une simple infection et une co-infection, tandis que l’algorithme **C2** distingue une simple infection sans parvenir à identifier une co-infection. Ainsi, QAMDiagnos utilisant l’algorithme **C2** est utile dans une structure hospitalière spécialisée, c’est-à-dire une structure accueillant des patients souffrant spécifiquement d’une maladie, mais à condition de tenir compte des signes et symptômes communs.

4.3.2 Cas où $a = 0.4999$

Cette situation correspond à celle où l’on n’a aucune certitude sur le fait que les signes et symptômes choisis correspondent à une “*autre maladie*”, bien que le centre de la requête soit $|0^{\otimes 10}\rangle$.

Cas d'une simple infection

Table 4.3.13 – Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme **C0** pour $\alpha = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	93.8871	94.5025	97.5377	96.4812	99.9031	96.5938	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	93.8871	94.5025	97.5377	96.4812	99.9031	96.5938		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	93.8871	94.5025	97.5377	96.4812	99.9031	96.5938		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	93.8864	94.5018	97.5372	96.4812	99.9030	96.5932		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	47.4389	65.0890	72.4273	79.9340	80.5385	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	47.4389	65.0890	72.4273	79.9340	80.5385	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	47.4389	65.0890	72.4273	79.9340	80.5385	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	47.4382	65.0883	72.4266	79.9336	80.5378	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	32.6289	48.3668	59.9597	64.4806	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	32.6289	48.3668	59.9597	64.4806	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	32.6289	48.3668	59.9597	64.4806	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	32.6283	48.3661	59.9592	64.4798	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	24.3002	39.9802	48.4199	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	24.3002	39.9802	48.4199	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	24.3002	39.9802	48.4199	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	24.2998	39.9797	48.4192	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Table 4.3.14 – Cas d'une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l'algorithme **C1** pour $\alpha = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l'algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	93.8911	94.5059	97.5402	96.4843	99.9043	96.5960	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	93.8911	94.5059	97.5402	96.4843	99.9043	96.5960		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	93.8911	94.5059	97.5402	96.4843	99.9043	96.5960		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	93.8904	94.5052	97.5397	96.4837	99.9041	96.5954		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	47.4418	65.0912	72.4296	79.9350	80.5407	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	47.4418	65.0912	72.4296	79.9350	80.5407	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	47.4418	65.0912	72.4296	79.9350	80.5407	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	47.4411	65.0905	72.4289	79.9346	80.5400	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	32.6307	48.3689	59.9605	64.4826	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	32.6307	48.3689	59.9605	64.4826	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	32.6307	48.3689	59.9605	64.4826	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	32.6302	48.3683	59.9600	64.4819	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	24.3022	39.9808	48.4219	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	24.3022	39.9808	48.4219	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	24.3022	39.9808	48.4219	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	24.3018	39.9803	48.4213	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Table 4.3.15 – Cas d’une simple infection : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes							États des qubits drapeau			
	1	2	3	4	5	6		$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$
Paludisme	37.6623	44.8496	39.3757	48.4901	56.7039	56.1919	Sans symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	37.6623	44.8496	39.3757	48.4901	56.7039	56.1919		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	37.6623	44.8496	39.3757	48.4901	56.7039	56.1919		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	37.6617	44.8446	39.3658	48.4743	56.6830	68.7698		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	97.6199	76.3629	19.6431	13.9213	07.4938	-	Avec 1 symptôme commun	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	97.6199	76.3629	19.6431	13.9213	07.4938	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	97.6199	76.3629	19.6431	13.9213	07.4938	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	97.6199	76.3636	19.6448	13.9231	07.4958	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	04.7097	95.1950	82.7780	16.2350	-	-	Avec 2 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	04.7097	95.1950	82.7780	16.2350	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	04.7097	95.1950	82.7780	16.2350	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	04.7102	95.1952	82.7789	16.2370	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Paludisme	05.2395	97.0296	92.7635	-	-	-	Avec 3 symptômes communs	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre typh.	05.2395	97.0296	92.7635	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
Fièvre jaune	05.2395	97.0296	92.7635	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
Dengue	05.2398	97.0296	92.7639	-	-	-		$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$

Ici, comme le montrent les Tabs. 4.3.13 et 4.3.14 pour les algorithmes **C0** et **C1**, plus il y a de signes et symptômes spécifiques à la maladie, meilleure est la probabilité d’obtention du bon résultat pour la partie linéaire de QAMDiagnos. Bien que le nombre de signes et symptômes communs soit augmenté, et que la probabilité d’obtention du bon résultat diminue, les résultats donnés par les deux algorithmes restent conformes avec ceux de l’algorithme non linéaire au moins à 47% lorsque le nombre de signes et symptômes spécifiques est égale à celui des signes et symptômes communs. Toutefois, les résultats de l’algorithme **C1** sont meilleurs que ceux de l’algorithme **C0**.

Quant à l’algorithme **C2**, dont la Tab. 4.3.15 donne les résultats, en l’absence de signes et symptômes communs, la probabilité d’obtention du bon résultat évolue avec le nombre de signes et symptômes spécifiques. Mais, contrairement aux résultats des algorithmes **C0** et **C1**; cette probabilité ne dépasse pas 90%. Cependant, la présence de signes et symptômes communs montre qu’il n’est pas nécessaire qu’il y ait un grand nombre de signes et symptômes spécifiques pour que la partie linéaire de QAMDiagnos effectue un bon diagnostic. La correction apportée à la requête donne dans ce cas à QAMDiagnos utilisant l’algorithme **C2** la même utilité que celle mentionnée à la Sous-section 4.3.1.

Cas d’une co-infection

- Avec un symptôme commun

Table 4.3.16 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	00.3522	32.6158	48.3531	59.9427	64.4685	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	47.4256	32.6158	24.2898	19.9844	16.2825	
Paludisme + F. typh.	47.4444	32.6267	24.3000	19.9877	16.2904	
Paludisme	00.1562	24.2898	39.9635	48.4065	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	65.0753	48.3531	39.9635	32.3445	-	
Paludisme + F. typh.	32.6267	24.3000	19.9877	16.2904	-	
Paludisme	00.2264	19.9844	32.3445	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	72.4164	59.9427	48.4065	-	-	
Paludisme + F. typh.	24.3000	19.9877	16.2904	-	-	
Paludisme	00.0052	15.9990	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	79.9218	63.3891	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	19.9877	16.0066	-	-	-	
Paludisme	00.2023	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	79.1858	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	16.0066	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.17 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	00.3546	32.6176	48.3553	59.9435	64.4706	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	47.4284	32.6176	24.2918	19.9848	16.2845	
Paludisme + F. typh.	47.4445	32.6270	24.3001	19.9878	16.2904	
Paludisme	00.1578	24.2918	39.9642	48.4085	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	65.0775	48.3553	39.9642	32.3465	-	
Paludisme + F. typh.	32.6270	24.3001	19.9878	16.2904	-	
Paludisme	00.2283	19.9848	32.3465	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	72.4188	59.9435	48.4085	-	-	
Paludisme + F. typh.	24.3001	19.9878	16.2904	-	-	
Paludisme	00.0055	16.2845	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	79.9228	64.4706	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	19.9878	16.2904	-	-	-	
Paludisme	00.2224	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	80.5326	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	16.2904	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.18 – Cas d’une co-infection avec un symptôme commun : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme					
	0	1	2	3	4	
Paludisme	03.6534	15.7865	25.9082	35.1068	56.7495	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	24.2370	15.7865	14.6651	13.6202	14.9653	
Paludisme + F. typh.	24.2593	15.7974	14.6705	13.6209	14.9683	
Paludisme	04.0271	14.6651	24.3550	43.0533	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	27.5665	25.9082	24.3550	29.0377	-	
Paludisme + F. typh.	15.8048	14.6705	13.6185	15.0226	-	
Paludisme	03.4233	13.6202	29.0377	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	37.1885	35.1068	43.0533	-	-	
Paludisme + F. typh.	14.6788	13.6209	15.0226	-	-	
Paludisme	02.8789	14.9653	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	45.8993	56.7495	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	13.6281	14.9683	-	-	-	
Paludisme	01.5674	-	-	-	-	Avec 5 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	64.0620	-	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	14.0776	-	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

- Avec deux symptômes communs

Table 4.3.19 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	00.1562	24.2892	39.9627	48.4058	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	32.6148	24.2892	19.9840	16.2823	
Paludisme + F. typh.	65.0880	48.3650	39.9682	32.3537	
Paludisme	00.2264	19.9840	32.3441	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	48.3521	39.9627	32.3441	-	
Paludisme + F. typh.	48.3650	39.9682	32.3537	-	
Paludisme	00.0052	16.2823	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	59.9414	48.4058	-	-	
Paludisme + F. typh.	39.9682	32.3537	-	-	
Paludisme	00.2205	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	64.4676	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	32.3537	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.20 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	00.1577	24.2913	39.9633	48.4079	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh	32.6167	24.2913	19.9844	16.2842	
Paludisme + F. typh.	65.0886	48.3653	39.9685	32.3538	
Paludisme	00.2283	19.9844	32.3460	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	48.3543	39.9633	32.3460	-	
Paludisme + F. typh.	48.3653	39.9685	32.3538	-	
Paludisme	00.0055	16.2842	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	59.9422	48.4079	-	-	
Paludisme + F. typh.	39.9685	32.3538	-	-	
Paludisme	00.2224	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	64.4697	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	32.3538	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.21 – Cas d’une co-infection avec deux symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme				
	0	1	2	3	
Paludisme	04.0188	14.6673	24.3651	42.5094	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh	15.7973	14.6673	13.6188	14.8927	
Paludisme + F. typh.	27.6061	25.9401	24.3795	28.6982	
Paludisme	03.4168	13.6188	28.8884	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	25.9313	24.3651	28.8884	-	
Paludisme + F. typh.	25.9506	24.3795	28.8843	-	
Paludisme	02.8737	14.8927	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	35.1369	42.5094	-	-	
Paludisme + F. typh.	24.3927	28.6982	-	-	
Paludisme	01.5142	-	-	-	Avec 4 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	52.1193	-	-	-	
Paludisme + F. typh.	26.8192	-	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

- Avec trois symptômes communs

Table 4.3.22 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C0** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	00.2263	19.9835	32.3436	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	24.2887	19.9835	16.2820	
Paludisme + F. typh.	72.4291	59.9479	48.4166	
Paludisme	00.0052	16.2820	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	32.3436	31.7948	-	
Paludisme + F. typh.	59.9479	48.4166	-	
Paludisme	00.2205	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	48.4051	-	-	
Paludisme + F. typh.	48.4166	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.23 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C1** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	00.2282	19.9840	32.3456	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	24.2907	19.9840	16.2840	
Paludisme + F. typh.	72.4295	59.9484	48.4168	
Paludisme	00.0055	08.4877	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	39.9625	34.0054	-	
Paludisme + F. typh.	59.9484	50.8571	-	
Paludisme	00.3237	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	42.1702	-	-	
Paludisme + F. typh.	50.8565	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Table 4.3.24 – Cas d’une co-infection avec trois symptômes communs : probabilité $P_c(\%)$ dans le cas de l’algorithme **C2** pour $a = 0.4999$ et états des qubits drapeau pour l’algorithme non linéaire.

Maladie	Nombre de signes et symptômes du paludisme			
	0	1	2	
Paludisme	03.4072	13.6219	27.8687	Avec 1 symptôme de la F. typh.
Fièvre typh.	14.6768	13.6219	14.5740	
Paludisme + F. typh.	37.2614	35.1692	41.1522	
Paludisme	02.8660	14.5740	-	Avec 2 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	24.3871	27.8687	-	
Paludisme + F. typh.	35.1802	41.1522	-	
Paludisme	01.9239	-	-	Avec 3 symptômes de la F. typh.
Fièvre typh.	36.6265	-	-	
Paludisme + F. typh.	36.6187	-	-	
$ q_{11}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	États des qubits drapeau
$ q_{12}\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
$ q_{13}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	
$ q_{14}\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	

Les Tabs. 4.3.16-4.3.24 donnent les résultats obtenus pour les parties linéaires et non linéaire de QAMDiagnos. Quel que soit l’algorithme linéaire utilisé, le résultat obtenu est corrélé au nombre de signes et symptômes relatifs à une maladie. C’est-à-dire que la probabilité la plus forte est celle qui correspond à la maladie ayant le plus grand nombre de signes et symptômes et la plus faible à celle ayant le moins de signes et symptômes. La partie non linéaire de QAMDiagnos vient alors confirmer ou compléter le résultat donné par la partie linéaire. Par exemple, si les signes et symptômes communs à deux maladies sont plus nombreux, et qu’au moins un signe ou symptôme spécifique à l’une des deux maladies est présent, la partie non linéaire complétera le résultat de la partie linéaire en orientant le diagnostic vers la maladie dont le signe ou symptôme spécifique est présent (voir les première colonnes des Tabs. 4.3.16-4.3.24).

Des trois algorithmes, les résultats de l’algorithme **C1** sont les meilleurs en ce sens que les probabilités d’obtention du bon résultat sont les plus fortes.

4.3.3 Spécificité, sensibilité, valeurs prédictive et rapports de vraisemblance de QAMDiagnos

Lorsque $a = 0.4999$, QAMDiagnos avec l’algorithme linéaire **C1** est adaptée à une structure hospitalière spécialisée, où les signes et symptômes choisis sont forcément spécifiques à une maladie. QAMDiagnos avec l’algorithme linéaire **C1** est également adaptée à une structure hospitalière quelconque où, sur la base du nombre de signes et symptômes relatifs, la partie linéaire donne un résultat complété par la partie non linéaire. Afin d’évaluer la qualité de nos résultats et d’étayer les assertions précédentes, sur la base de la probabilité P_c de restitution du bon résultat pour l’algorithme de recherche linéaire, nous calculons ici quatre paramètres qui permettent de valider un test de diagnostic, et partant, l’outil d’aide à la décision médicale que nous avons conçu.

Spécificité

La *spécificité* est la probabilité conditionnelle pour laquelle on a une reconnaissance correcte d'une maladie si celle-ci n'est pas présente. En d'autres termes, c'est la capacité de QAM-Diagnos à distinguer un patient malade d'un patient non malade. Pour obtenir la spécificité nous utilisons des signes et symptômes n'ayant aucun rapport avec les quatre maladies et prenons la probabilité moyenne du résultat "Autres maladies". Ainsi, en choisissant les signes et symptômes parmi les 448 possibilités (ceux dont les codes binaires de maladies sont $|0111\rangle$, $|1110\rangle$, $|1001\rangle$, $|1010\rangle$, $|1011\rangle$, $|1111\rangle$ et $|0000\rangle$), nous obtenons la Tab. 4.3.25 pour au plus trois signes et symptômes.

Table 4.3.25 – Spécificité par rapport au nombre de signes et symptômes pour la partie linéaire de QAMDiagnos. Pour la partie non linéaire, chaque qubit drapeau est dans l'état $|0\rangle$. QAMDiagnos n'associe aucun de ces signes et symptômes avec une des quatre maladies.

Maladie	Nombre de signes et symptômes		
	1	2	3
Autre maladie	96.38	96.73	98.53

Comme le montre la Tab. 4.3.25, la spécificité croît avec le nombre de signes et symptômes. En choisissant la plus petite valeur, nous définissons la spécificité de QAMDiagnos à **96.38%**.

Sensibilité

La *sensibilité* est quant à elle la probabilité conditionnelle d'avoir un diagnostic correct si la maladie est effectivement présente. Or, puisque les Tabs. 4.3.14, 4.3.17, 4.3.20 et 4.3.23 donnent les probabilités P_c de reconnaissance de la partie linéaire de QAMDiagnos, nous pouvons dire que ces probabilités représentent la sensibilité en fonction du nombre de signes et symptômes. Pour une maladie spécifique, la sensibilité est de **93.89%** (valeur obtenue pour un signe ou symptôme).

Valeurs prédictives

Les valeurs prédictives permettent à un praticien qui reçoit le résultat (positif ou négatif) d'un test pratiqué sur un de ses patients, de savoir quelle est la probabilité que son patient soit malade ou non. Ces valeurs dépendent fortement de la prévalence (P_{re}) de la maladie qui est une donnée indépendante de la qualité du test et partant de l'outil d'aide au diagnostic médical.

Ainsi la **valeur prédictive positive** (VPP) correspond à la proportion de cas effectivement positifs parmi les résultats positifs détectés par l'outil d'aide au diagnostic médical. Pour chacune des quatre maladies, la VPP est

$$VPP = \frac{\text{Sensibilité} * P_{re}}{\text{Sensibilité} * P_{re} + (100 - \text{Spécificité})(100 - P_{re})} = \frac{93.89P_{re}}{93.89P_{re} + 3.62(100 - P_{re})}. \quad (4.3.1)$$

Quant à la **valeur prédictive négative** (VPN), elle correspond à la proportion de cas effectivement négatifs parmi les résultats négatifs détectés par l'outil d'aide au diagnostic médical. Sa valeur est

$$VPN = \frac{\text{Spécificité} * (100 - P_{re})}{\text{Spécificité} * (100 - P_{re}) + (100 - \text{Sensibilité})P_{re}} = \frac{96.38(100 - P_{re})}{96.38(100 - P_{re}) + 6.11P_{re}}. \quad (4.3.2)$$

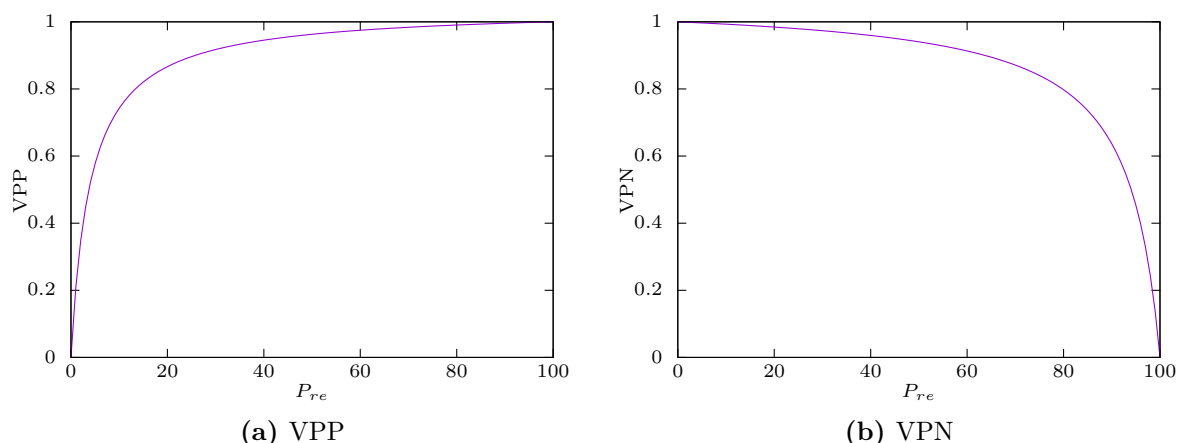


Figure 4.3.2 – Valeurs prédictives en fonction de la prévalence P_{re} (%).

La Fig. 4.3.2 nous donne l'évolution des valeurs prédictives en fonction de la valeur de la prévalence. Pour QAMDiagnos, nous constatons que pour une maladie, il y a 50% de chance qu'un patient soit réellement atteint de la maladie lorsque le diagnostic est positif dès que la prévalence est égale à 03.72%. Pour cette même valeur de la prévalence, il y a 99.76% de chance que le patient ne soit effectivement pas malade lorsque le diagnostic est négatif. Il n'est donc pas nécessaire que la prévalence à une maladie soit élevée pour que l'aide au diagnostic médical effectué par QAMDiagnos soit acceptable.

Rapports de vraisemblance

Ces rapports sont obtenus à partir de la sensibilité et de la spécificité uniquement. Grâce à la sensibilité et à la spécificité de QAMDiagnos, nous sommes donc en mesure de les évaluer.

Le **rapport de vraisemblance positif** ($RV+$) indique à quel point un individu a plus de chance d'être positif en réalité, si un test est positif. Dans le cas des quatre maladies tropicales sur lesquelles notre attention s'est portée, le $RV+$ de QAMDiagnos est

$$RV+ = \frac{\text{Sensibilité}}{100 - \text{Spécificité}} \approx 25.9365. \quad (4.3.3)$$

La valeur de $RV+$ nous permet de dire qu'il y a approximativement vingt-six fois plus de chance que le diagnostic médical effectué avec QAMDiagnos soit positif lorsqu'un patient présente effectivement une des maladies (vrai positif) que lorsqu'il n'en présente aucune (faux positif).

De même, le **rapport de vraisemblance négatif** ($RV-$) qui indique à quel point un individu a plus de chance d'être positif en réalité, si le test est négatif, vaut

$$RV- = \frac{100 - \text{Sensibilité}}{\text{Spécificité}} \approx 0.0634. \quad (4.3.4)$$

Il en résulte qu'il y a approximativement seize¹ fois plus de chance que le diagnostic médical

¹ $1/RV-$

effectué avec QAMDiagnos soit négatif lorsqu'un patient ne présente effectivement aucune des maladies (vrai négatif) que lorsqu'il en présente (faux négatif).

4.4 Interface graphique utilisateur pour ordinateur et smartphone

Une GUI (Graphical User Interface en Anglais) a été développée avec la version open source de la librairie Qt5 du langage de programmation C++ afin de faciliter l'utilisation de QAM-Diagnos.

4.4.1 Procédure d'utilisation de QAMDiagnos

Pour utiliser l'application, le praticien doit, après discussion avec le patient et/ou observation, introduire les signes et symptômes en fonction des réponses du patient ou de ses observations (au moins un signe ou symptôme et au plus six). Ceci se fait en appuyant sur les boutons ou touches correspondants aux signes et aux symptômes ou en les écrivant dans la zone de saisie. Il y a six onglets pour les signes et symptômes des quatre maladies (S1-S6). Le résultat du diagnostic et une suggestion de traitement sont donnés dans la zone de texte intitulée "Treatment suggestion" pour l'interface pour ordinateur ou dans la seule zone de texte pour l'interface pour smartphone (voir la Fig. 4.4.1). Précisons que, bien que l'âge et la masse soient importants pour une suggestion adéquate du traitement, QAMDiagnos ne tient pas compte de ces données car il peut arriver que le praticien oublie de les prendre en compte ou ne peut les prendre en compte. Ainsi, dans la zone de texte "Treatment suggestion" est suggéré un traitement qui n'est pas directement lié à l'âge ou la masse dans la version actuelle de l'application.

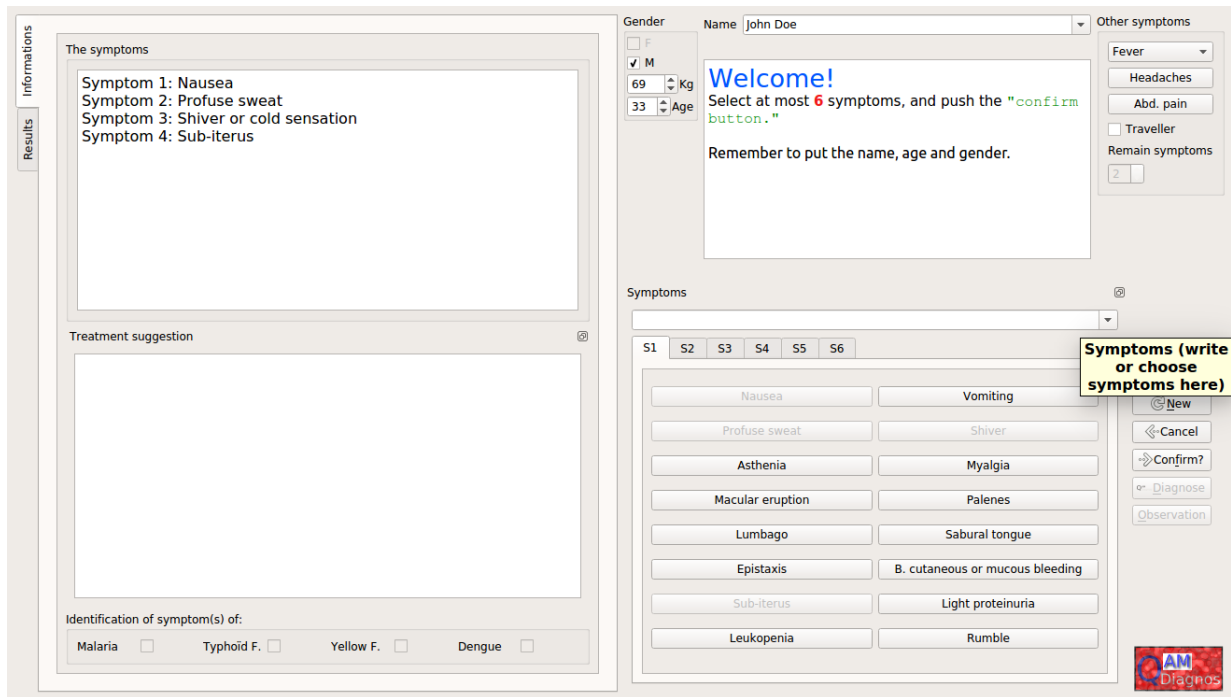
Nous avons effectué les simulations sur un *ordinateur classique*, ainsi nous pouvions obtenir toutes les probabilités. De plus, chaque étape de la simulation peut être suivie et examinée, et l'efficacité de reconnaissance calculée. Ainsi, le praticien peut comparer l'efficacité de reconnaissance de la partie linéaire de QAMDiagnos pour chaque maladie dans l'onglet "Results"² ou en appuyant sur le bouton "Prob. results"³. Donc, la maladie ayant la plus grande probabilité associée peut être vue comme étant la maladie dont souffre le patient.

Afin que les résultats reflètent le caractère probabiliste de la théorie quantique, nous avons utilisé pour les simulations la fonction `grand()` de la librairie Qt5. Celle-ci nous permet de choisir arbitrairement une des maladies en accord avec la probabilité qui lui est associée. Puisque l'algorithme de recherche principal est l'algorithme linéaire, la maladie associée à la plus grande probabilité sera donnée en résultat ainsi que la suggestion de traitement associée⁴. Avant cela, l'algorithme non linéaire identifie la présence ou non d'un signe ou symptôme spécifique à une maladie particulière et change l'état du qubit drapeau correspondant. Les résultats des algorithmes linéaire et non linéaire sont donnés ensemble afin d'aider le praticien dans sa prise de décision médicale.

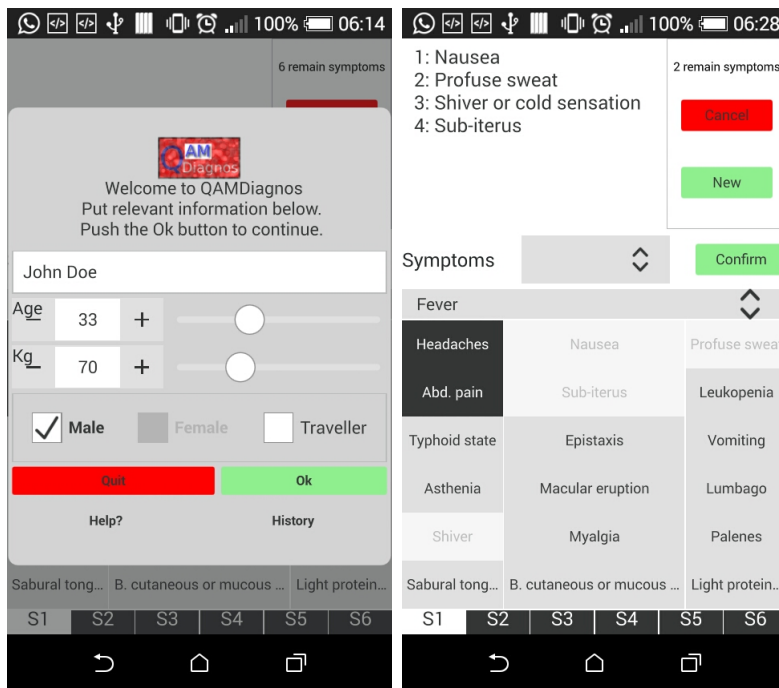
²Voir à gauche sur la Fig. 4.4.1a pour l'interface pour ordinateur.

³Voir en bas à droite sur la Fig. 4.4.2b pour l'interface pour smartphone

⁴Voir la zone de texte "Treatment suggestion" de la Fig. 4.4.2a ou l'unique zone de texte de la Fig. 4.4.2b.

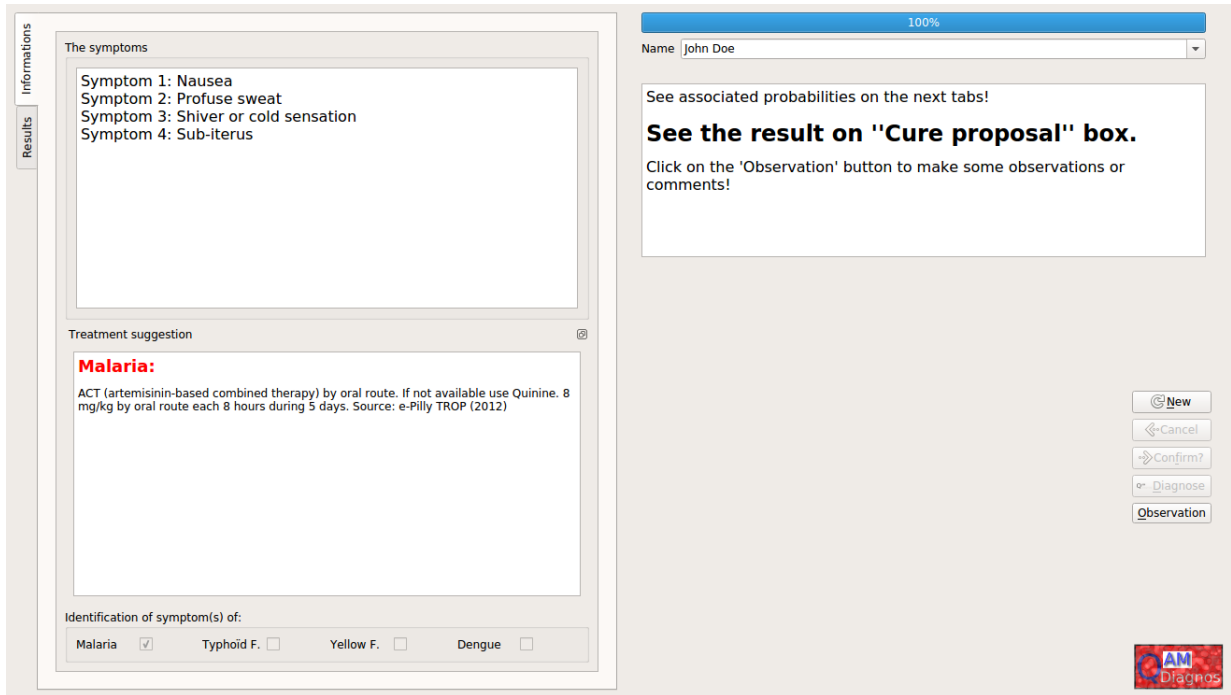


(a) GUI ordinateur

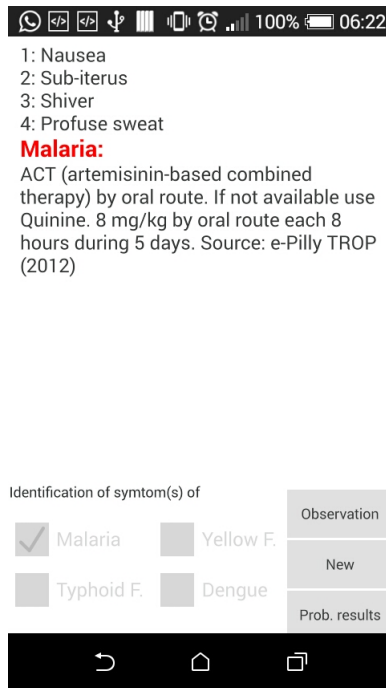


(b) GUI smartphone

Figure 4.4.1 – Interface graphique utilisateur (GUI) de l'application QAMDiagnos. Celle-ci a une zone de texte qui donne les informations sur les actions menées et sur ce qu'il faut faire. Dans une autre zone de texte les résultats de diagnostic sont donnés (l'interface smartphone a une seule zone de texte). Il y a des zones de saisie pour le nom du patient et pour les signes et symptômes. À ces derniers sont associés des boutons permettant d'introduire les signes et symptômes. En plus des zones permettant d'introduire l'âge, la masse et le sexe, il y a un ensemble de boutons ou touches permettant de lancer la simulation et d'obtenir le diagnostic.

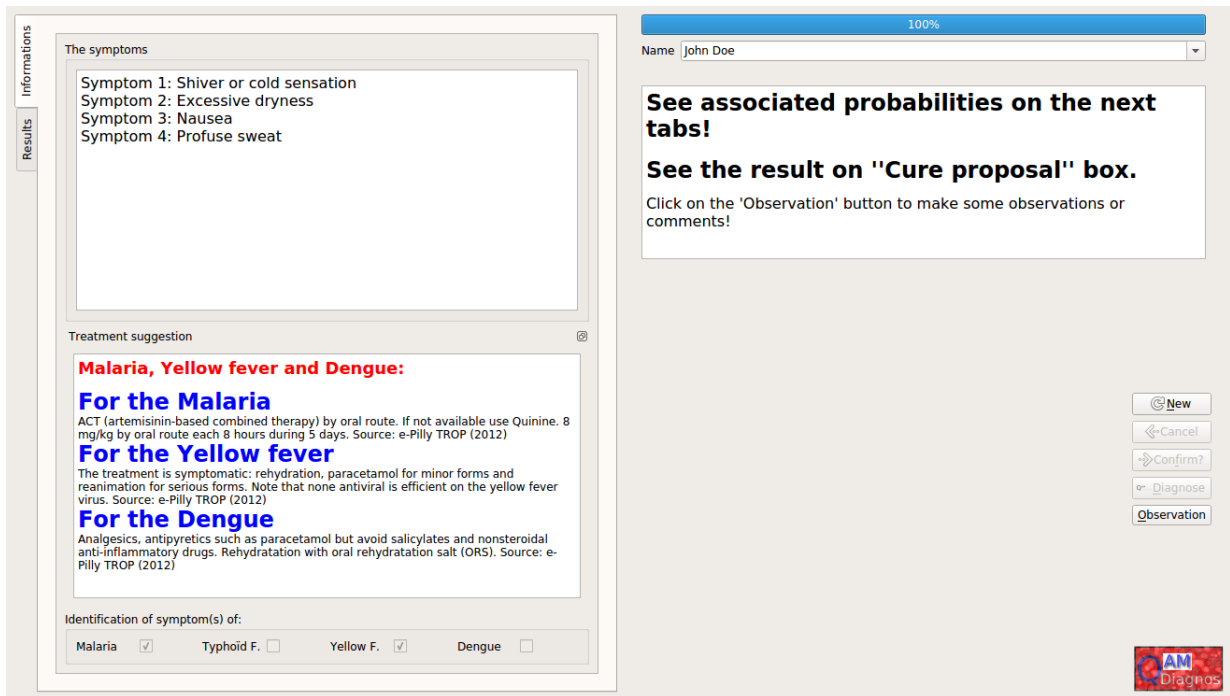


(a) GUI ordinateur

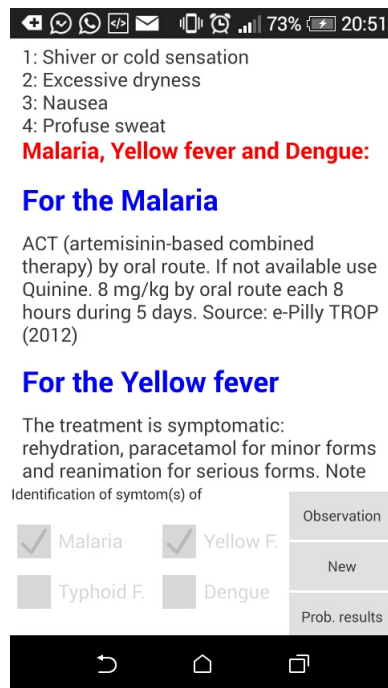


(b) GUI smartphone

Figure 4.4.2 – GUI de QAMDiagnos avec résultat de diagnostic lorsque le paludisme est associé à la plus grande probabilité par l’algorithme de recherche linéaire. Le box “Identification of symptom(s) of” donne le résultat de l’algorithme de recherche non linéaire (voir en bas à gauche sur les figures).



(a) GUI ordinateur



(b) GUI smartphone

Figure 4.4.3 – GUI de QAMDiagnos avec le résultat du diagnostic dans le cas où l’algorithme linéaire identifie le paludisme, la fièvre jaune et la dengue. Le résultat de l’algorithme linéaire est dû à la présence d’un signe ou symptôme commun aux trois maladies. Le box “Identification of symptom(s) of” donne le résultat de l’algorithme non linéaire et identifie que seuls des signes et symptômes spécifiques au paludisme et à la fièvre jaune ont été insérés.

La complémentarité des deux algorithmes est mieux mise en évidence dans le cas d'une co-infection. À la Fig. 4.4.3 nous voyons que, dans la zone de texte "The Symptoms", un signe ou symptôme (nausées) commun à la fois au paludisme, à la fièvre jaune et à la dengue a été inséré. Des signes et symptômes spécifiques au paludisme (sueurs profuses) et spécifiques à la fièvre jaune (déshydratation) ont également été insérés. L'algorithme linéaire identifie cette combinaison comme étant une co-infection aux trois maladies. Mais, l'algorithme non linéaire identifie la présence de signes et symptômes spécifiques au paludisme et spécifiques à la fièvre jaune. Ainsi, le praticien a la possibilité de se focaliser uniquement sur les deux maladies que sont le paludisme et la fièvre jaune, au lieu des trois maladies.

4.4.2 Modification de la structure de QAMDiagnos

En présence de certains signes et symptômes, le paludisme et la dengue ne doivent plus être considérés comme simple. Dans ce cas, le traitement doit être adapté. Afin d'identifier ces signes et symptômes de gravité, nous avons ajouté deux qubits drapeau $|q_{15}\rangle$ associé au paludisme, et $|q_{16}\rangle$ associé à la dengue. La Fig. 4.4.4 présente la version modifiée de la Fig. 4.2.2.

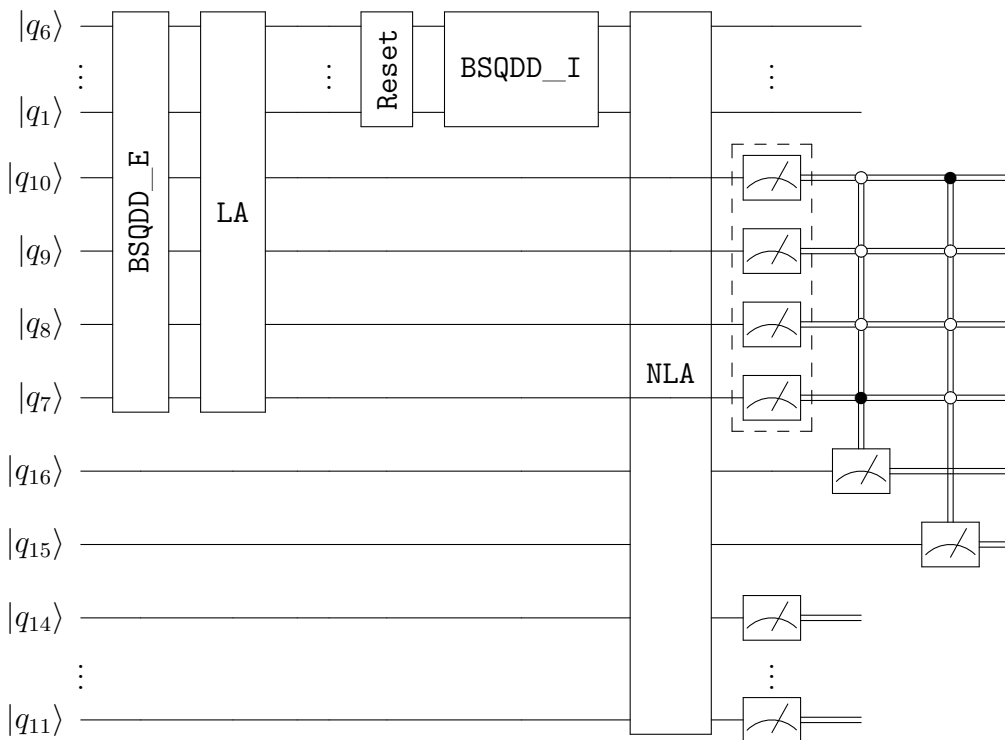
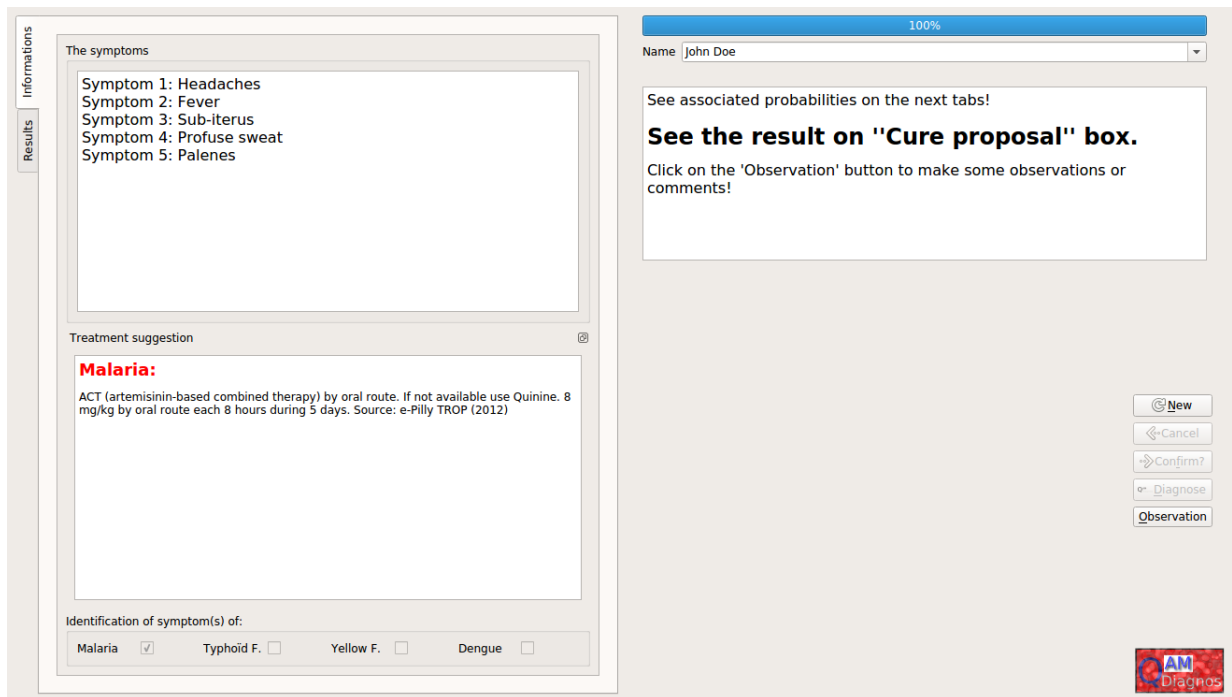
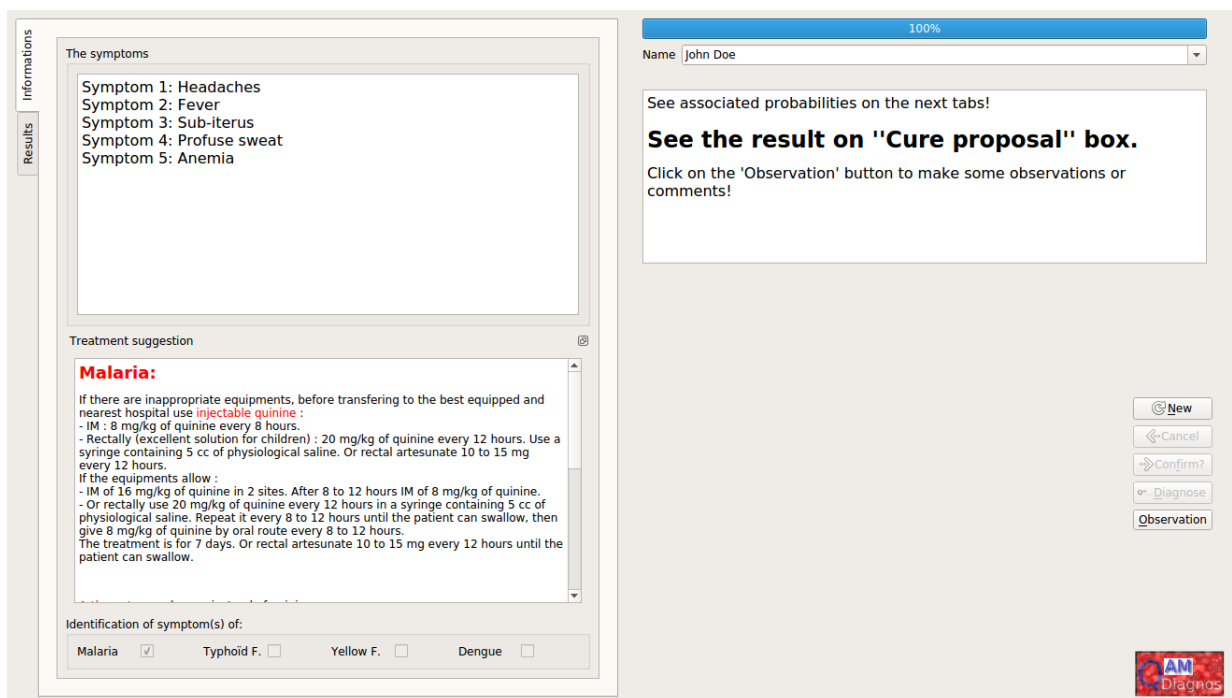


Figure 4.4.4 – Structure schématique de QAMDiagnos avec des qubits supplémentaires pour la détection de signes et symptômes de gravité du paludisme ($|q_{15}\rangle$) et de la dengue ($|q_{16}\rangle$). Dans ce cas, NLA est l'ensemble des opérateurs simulant six fois l'algorithme de recherche non linéaire de QAMDiagnos.

Les qubits $|q_{15}\rangle$ et $|q_{16}\rangle$ sont lus si le résultat fournis par les qubits $|q_7\rangle$ à $|q_{10}\rangle$ correspond au paludisme ou à la dengue. Ainsi, ces deux qubits permettent d'adapter la proposition de diagnostic comme le montre la Fig. 4.4.5.



(a) Paludisme simple



(b) Paludisme sévère

Figure 4.4.5 – GUI de QAMDiagnos avec le résultat du diagnostic dans le cas du paludisme. La proposition de traitement dans le cas du paludisme simple diffère de celle du paludisme sévère.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord décrit la base de données que nous avons utilisée ainsi que le codage choisi. L'obtention de cette base de données résulte de notre interaction avec des médecins de l'Hôpital Général de Douala. Il en est ressorti que notre modèle d'outil d'aide à la décision médicale nécessitait l'utilisation de 16 qubits dont 6 pour coder les signes et symptômes, 4 utilisés en sortie par l'algorithme linéaire et 6 utilisés en sortie par l'algorithme non linéaire. Par la suite, nous avons effectué des simulations pour deux valeurs de a (0.0001 et 0.4999) qui régule la largeur de la distribution binomiale afin d'évaluer les efficacités des algorithmes linéaires que sont l'algorithme **C0**, l'algorithme **C1** et l'algorithme **C2**. Il ressort de ces simulations que les meilleurs résultats de QAMDiagnos sont obtenus en considérant $a = 0.4999$ et l'algorithme **C1**. Celle-ci est adaptée à une structure hospitalière spécialisée, où les signes et symptômes choisis sont forcément spécifiques à une maladie et rendant ainsi sa prévalence élevée. QAMDiagnos est également adaptée à une structure hospitalière quelconque, où sur la base du nombre de signes et symptômes relatifs, la partie linéaire donne un résultat complété par la partie non linéaire, ceci quelle que soit la valeur de la prévalence. Ces assertions sont renforcées par l'évaluation de la spécificité, la sensibilité, les valeurs prédictives et les rapports de vraisemblance de QAMDiagnos. Nous avons achevé le chapitre par la présentation de l'interface graphique utilisateur multiplateforme et intuitif conçu pour les ordinateurs (Linux et MS Windows) et les smartphones (Android). Cette interface peut être utilisée par un personnel de santé à la suite d'une formation très élémentaire. Notons enfin que, ces travaux ont conduit à la production d'un article [NE18]⁵.

⁵Une ancienne version de cet article se trouve à l'adresse <https://arxiv.org/pdf/1309.0042>.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons présenté dans cette thèse une Mémoire Associative Quantique qui peut être utilisée comme outil d'aide à la décision dans le cas du diagnostic de maladies tropicales.

Nous avons présenté les quatre maladies tropicales pour lesquelles la QAM devra être utilisée pour aider au diagnostic. À ceci nous avons ajouté des concepts de mémoire associative qui sous-tendent la construction d'une QAM.

Nous avons par la suite présenté trois algorithmes. Le premier, le BSQDD, permet de construire n'importe quelle superposition d'états souhaitée, ceci à partir de n'importe quel état de base. Cet algorithme sert d'algorithme d'apprentissage dans la QAM, permettant d'effectuer le diagnostic.

Le second algorithme est un algorithme de recherche linéaire dû à Ezhov et *al.* [ENV00a]. Après l'avoir décrit, **nous avons présenté notre contribution à son amélioration à travers l'opérateur \mathcal{I}_M que nous avons introduit. Celui-ci agit comme l'opérateur d'oracle et deux cas doivent être considérés : le cas C1 où \mathcal{I}_M inverse uniquement la phase des patrons mémorisés ; le cas C2 où \mathcal{I}_M inverse les amplitudes de probabilités de tous les états par rapport à l'amplitude moyenne de la requête centrée sur les m patrons appris. Ces deux améliorations apparaissent comme étant des perturbations qui augmentent les interférences constructives. Nous avons également déterminé le nombre d'itérations associé à chacun des deux cas. Des exemples d'utilisations des algorithmes C1 et C2 dans le cadre d'une QAM ont été présentés afin de comparer leur efficacité par rapport à l'algorithme d'origine.**

Le troisième algorithme est un algorithme de recherche non linéaire. Celui-ci est dû à Abrams et Lloyd [AL98]. **Nous avons premièrement décrit cet algorithme en utilisant une notation qui lève l'ambiguïté due à la notation de Rigui et *al.* ainsi qu'à celle de Czachor [Cza98]. La description s'accompagne à chaque étape d'un circuit quantique équivalent. La forme générale de la matrice unitaire NL^+ qui agit sur l'état générique $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ du qubit drapeau a également été donnée. Celle-ci vient corriger la forme donnée à cette matrice par Rigui et *al.* Deuxièmement, nous avons décrit notre modèle de QAM-NLSA. Ce modèle est similaire à celui proposé par Rigui et *al.* [Rig12], mais avec la possibilité d'obtenir un des états désirés lors d'une recherche de plusieurs valeurs à la suite d'une mesure sur le premier registre. Nous avons introduit l'opérateur conditionnel $(2^{n+1}) \times (2^{n+1})$ CS. Cet opérateur met le**

premier registre dans l'état désiré $|x\rangle$ lorsque le qubit drapeau est dans l'état $|1\rangle$. La complexité de notre algorithme est $\mathcal{O}(c - r)$. Cette complexité est meilleure que celle de l'algorithme de Grover et de ses formes modifiées qui ont besoin de $\mathcal{O}(\sqrt{\frac{2^n}{m}})$ lorsqu'ils sont utilisés comme algorithme de restitution. Notons de plus que notre algorithme **permet de mesurer le qubit drapeau pour effacer toute ambiguïté faisant suite à une mesure sur le premier registre. Ceci est possible grâce à l'introduction de deux opérateurs conditionnels qui n'affectent pas le qubit drapeau après l'évolution non linéaire. Enfin, **nous avons analysé l'influence du bruit quantique, particulièrement le bit flip, sur la QAM-NLSA**. Nous avons montré que le canal quantique bruité bit flip n'affecte pas la QAM-NLSA à 70% si l'état recherché est présent dans la base de données ou si le premier registre a un nombre pair de qubits lorsque l'état recherché n'existe pas. Mais, lorsque le premier registre a un nombre impair de qubits et que l'état recherché n'existe pas, le canal quantique bit flip est destructif lorsque la probabilité $\epsilon > 0.5$. Notre analyse montre la robustesse de la QAM-NLSA contre le bruit quantique, particulièrement lorsque l'état recherché existe dans le premier registre.**

Dans la QAM permettant d'effectuer le diagnostic, nous avons utilisé ces deux algorithmes de recherche de manière collaborative. L'algorithme de recherche linéaire étant l'algorithme principal et l'algorithme non linéaire permettant de compléter ou corriger le résultat fournit par le linéaire.

La QAM permettant d'effectuer le diagnostic, que nous avons construit peut distinguer une infection simple d'une polyinfection. Elle n'a pas besoin de beaucoup de données afin d'effectuer le diagnostic. Elle a besoin de peu de signes et symptômes d'une maladie et des signes et symptômes communs. Comme le montrent les tableaux de résultats, l'inversion de phase introduite dans l'Algorithme d'Ezhov, c'est-à-dire l'Algorithme **C1**, augmente la capacité de la mémoire à effectuer un bon diagnostic. Cette QAM est une alternative pour aider les médecins inexpérimentés ou manquant d'équipements de laboratoire à diagnostiquer rapidement et efficacement le paludisme, la fièvre typhoïde, la fièvre jaune et la dengue. Ces 4 maladies tropicales possèdent des signes et symptômes similaires, occasionnant ainsi des confusions lors de leur diagnostic. La QAM que nous avons construit, dont l'interface utilisateur se dénomme QAMDiagnos, n'utilise que des signes et symptômes cliniques (certains signes et symptômes sont cliniques tandis que d'autres sont biologiques et nécessitent un matériel de laboratoire). Les personnels de santé peuvent être entraînés à l'utilisation de la QAMDiagnos en juste une journée. Les résultats obtenus à la suite de l'utilisation de QAMDiagnos ont fait l'objet d'une publication [NE18].

Pour les travaux futurs, nous prévoyons construire un dispositif physique permettant d'acquérir des paramètres physiologiques d'un patient et de les transférer au QAMDiagnos avant que le diagnostic ne soit effectué. Nous prévoyons également d'approfondir l'étude de l'effet du bruit quantique sur QAM-NLSA à travers les autres canaux bruités.

BIBLIOGRAPHIE

- [AA10] A.M.Agarkar and Dr. A.A.Ghatol. FFANN Based Cost Effective Major Infant Disease Management. *International Journal of Computer Applications*, 7(11) :29–33, October 2010. Published By Foundation of Computer Science.
- [AES13] Khalda F. Ali, Amir Mohamed Elamir, and Riza. M. Suliman. Article : A Comparative Study of Three Intelligent Techniques for Malaria in Africa Continent. *International Journal of Computer Applications*, 67(2) :1–5, April 2013. Published by Foundation of Computer Science, New York, USA.
- [AGK12] Erdem Alkim, Emre Gürbüz, and Erdal Kiliç. A fast and adaptive automated disease diagnosis method with an innovative neural network model. *Neural Networks*, 33 :88–96, 2012.
- [AKK14] M. V. Altaisky, N. E. Kaputkina, and V. A. Krylov. Quantum neural networks : Current status and prospects for development. *Physics of Particles and Nuclei*, 45(6) :1013–1032, 2014.
- [AL98] Daniel S. Abrams and Seth Lloyd. Nonlinear quantum mechanics implies polynomial-time solution for NP-complete and #P problems. *Phys.Rev.Lett.* 81 (1998) 3992-3995, January 1998.
- [Alt01] M. V. Altaisky. Quantum neural network, July 2001.
- [APA12] Neetu Ahirwar, Sapnojit Pattnaik, and Bibhudendra Acharya. Advanced image analysis based system for automatic detection and classification of malarial parasite in blood images. *International Journal of Information Technology and Knowledge Management*, 5(1) :59–64, January-June 2012.
- [ARFB⁺10] Bruno Andrade, Antonio Reis-Filho, Austeclino Barros, Sebastiao Souza-Neto, Lucas Nogueira, Kiyoshi Fukutani, Erney Camargo, Luis Camargo, Aldina Barral, Angelo Duarte, and Manoel Barral-Netto. Towards a precise test for malaria diagnosis in the Brazilian Amazon : comparison among field microscopy, a rapid diagnostic test, nested PCR, and a computational expert system based on artificial neural networks. *Malaria Journal*, 9(1) :117, 2010.

- [Bac11] *Background for the Consultation on Yellow Fever and International Travel, 2010*. World Health Organisation, February 2011.
- [Bar09] Stephen Barrett. Some Notes on the Quantum Xrroid (QXCI) and William C. Nelson. <http://www.quackwatch.org/01QuackeryRelatedTopics/Tests/xrroid.html>, 2009.
- [BCS04] Giuliano Benenti, Giulio Casati, and Giuliano Strini. *Principles of Quantum Computation and Information : Basic Concepts*, volume 1. World Scientific, 2004.
- [BHL⁺05] K.-A. Brickman, P. C. Haljan, P. J. Lee, M. Acton, L. Deslauriers, and C. Monroe. Implementation of Grover's Quantum Search Algorithm in a Scalable System. *Phys. Rev. A*, 72 :050306, 2005.
- [car12] *Global strategy for dengue prevention and control 2012-2020*. World Health Organisation, 2012.
- [Cen16a] Centre des médias de l'OMS. Dengue et dengue sévère Aide-mémoire N°117, August 2016.
- [Cen16b] Centre des médias de l'OMS. Fièvre jaune Aide-mémoire N°100, June 2016.
- [CMI12] CMIT. *e-Pilly TROP, Maladies infectieuses et tropicales*. Alinéa Plus, October 2012.
- [CMI16] CMIT. *ECN.PILLY, Maladies infectieuses et tropicales*. Alinéa Plus, 4e édition, 2016.
- [Cza98] Marek Czachor. Notes on nonlinear quantum algorithms. *Acta Phys. Slov.*, 48(157), February 1998.
- [DG07] Richard Dybowski and Vanya Gant, editors. *Clinical Applications of Artificial Neural Networks*. Cambridge University Press, december 2007.
- [ENV00a] A. A. Ezhov, A. V. Nifanova, and Dan Ventura. Quantum associative memory with distributed queries. *Inf. Sci. Inf. Comput. Sci.*, 128(3-4) :271–293, October 2000.
- [ENV00b] A.A. Ezhov, A. Nifanova, and D. Ventura. Distributed Queries for Quantum Associative Memory. *Information Sciences*, 3-4 :271–293, 2000.
- [F⁺13] Jeremy Farrar et al. *Manson's Tropical Infectious Diseases*. Saunders Ltd, 23 edition, 2013.
- [FAM⁺13] Amato Filippo, López Alberto, Peña-Méndez Eladia María, Vaňhara Petr, Hampl Aleš, and Havel Josef. Artificial neural networks in medical diagnosis. *Journal of Applied Biomedicine*, 11 :47, 2013.

- [GKW12] Piotr Gawron, Jerzy Klamka, and Ryszard Winiarczyk. Noise effects in the quantum search algorithm from the viewpoint of computational complexity. *Applied Mathematics and Computer Science*, 22(2) :493–499, 2012.
- [Gro97a] Lov K. Grover. Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation. *Phys.Rev.Lett.* 80 :4329-4332,1998, December 1997.
- [Gro97b] Lov K. Grover. Quantum Mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys.Rev.Lett.* 79 :325-328,1997, July 1997.
- [Gro05] Lov K. Grover. A different kind of quantum search, March 2005.
- [Hop82] J. J. Hopfield. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79 :2554–2558, 1982.
- [Hop84] J. J. Hopfield. Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two-state Neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81 :3088–3092, 1984.
- [II12] Institut National de la Statistique (INS) and ICF International. *Enquête Démographique et de Santé et à Indicateurs Multiples du Cameroun 2011*. Calverton, Maryland, USA, September 2012.
- [Kak95] Subhash Kak. On Quantum Neural Computing. *Inf. Sci. Intell. Syst.*, 83(3-4) :143–160, March 1995.
- [LL07] P. Li and S. Li. Phase matching in Grover’s algorithm. *Physics Letters A*, 366(1-2) :42–46, 2007.
- [Lov06] Lov K. Grover, Apoorva Patel, Tathagat Tulsi. Quantum algorithms with fixed points : The case of database search, 2006.
- [LPB03] Kiong Loo Chu, Mitja Peruš, and Horst Bischof. Computer Simulations of Quantum Image Recognition. 2003.
- [MCOA12] Aldape-Pérez Mario, Yáñez-Márquez Cornelio, Camacho-Nieto Oscar, and J.Argüelles-Cruz Amadeo. An associative memory approach to medical decision support systems. *Comput Methods Programs Biomed*, 106(3) :287–307, jun 2012.
- [Mph16] Fingani Annie Mphande. *Infectious Diseases and Rural Livelihood in Developing Countries*. Springer Singapore, 1 edition, 2016.
- [msf16] *Guide clinique et thérapeutique*. Médecins Sans Frontières, August 2016.
- [MW13] David A Meyer and Thomas G Wong. Nonlinear quantum search using the Gross–Pitaevskii equation. *New Journal of Physics*, 15(6), 2013.

- [NC00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge Series on Information and the Natural Sciences)*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10 edition, jan 2000.
- [NE16] J.-P. Tchapet Njafa and S.G. Nana Engo. Concise quantum associative memories with nonlinear search algorithm. *Fortschr. Phys.*, 64(2-3) :250–268, jan 2016.
- [NE18] J.-P. Tchapet Njafa and S.G. Nana Engo. Quantum associative memory with linear and non-linear algorithms for the diagnosis of some tropical diseases. *Neural Networks*, 97 :1 – 10, January 2018.
- [OO97] A.Sunny Ochi-Okorie. Combining medical records with case-based reasoning in a mixed paradigm design — TROPIX architecture & implementation. In David B. Leake and Enric Plaza, editors, *Case-Based Reasoning Research and Development*, volume 1266 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 94–103. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [PB03a] Mitja Peruš and Horst Bischof. A neural-network-like quantum information processing system, May 13 2003. Comment : 9 pages, an introductory summary of essentials.
- [PB03b] Mitja Peruš and Horst Bischof. Quantum-wave pattern recognition : From simulations towards implementation. In *Proceedings 7th Joint Conf. Information Sciences 2003*, pages 1536–1539, Cary, NC, USA, March 27 2003. Comment : 4 pages, 10pt, condensed presentation - essentials, index typo. corr.
- [PBL04] Mitja Peruš, Horst Bischof, and Chu Kiong Loo. Quantum-implemented selective reconstruction of high-resolution images. *Appl. Opt.*, 43(33) :6134–6138, January 2004. Comment : 4 pages, 15 figures, essentials.
- [PGF+03] C. Papaloukas, Y. Goletsis, D. I. Fotiadis, A. Likas, and L. K. Michalis. HySMID : an ischemia diagnosis system using genetic algorithms and multicriteria decision analysis. pages 343–346, Sept 2003.
- [PK11] J. Palanivel and N. Kumaravel. An Efficient Breast Cancer Screening System Based on Adaptive Support Vector Machines with Fuzzy C-Means Clustering. *European Journal of Scientific Research*, 51 :115, 2011.
- [Pol91] Joseph Polchinski. Weinberg’s Nonlinear Quantum Mechanics and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Phys. Rev. Lett.*, 66(4), 1991.
- [Pro12] Professor David W T Crompton, editor. *Accelerating work to overcome the global impact of neglected tropical diseases – A roadmap for implementation*. World Health Organisation, 2012.
- [Rig12] Huian Wang Qian Wu and Yang Shi Rigui Zhou. Quantum Associative Neural Network with Nonlinear Search Algorithm. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(3-4) :705–723, March 2012.

- [Ros10] David Rosenbaum. Binary superposed quantum decision diagrams. *Quantum Information Processing*, 9(4) :463–496, August 2010.
- [Sal08] P. J. Salas. Noise effect on Grover algorithm. *The European Physical Journal D*, 46(2) :365–373, feb 2008.
- [Sau04] Brenda-Anne Saunders. CORRELATIVE COMPARISON OF PREDIAGNOSED MALARIA, DIABETES MELLITUS AND TUBERCULOSIS PATIENTS WITH QUANTUM XXROID CONSCIOUSNESS. Master’s thesis, Faculty of Health Sciences, Technikon Witwatersrand, April 2004.
- [Sho76] Edward Hance Shortliffe, editor. *Computer-Based Medical Consultation, MYCIN*. Artificial intelligence series, 2. Elsevier, North Holland, New York, 1976.
- [Sob03] Nadira Dharshani Karunaweera Shyam Fernando Supun R Perera R P Asanga S Rajapaksha Sobath Pradeepa Premaratne. A Neural Network Architecture for Automated Recognition of Intracellular Malaria Parasites in Stained Blood Films, 2003.
- [TNNEW12] J.-P. Tchapet Njafa, S. G. Nana Engo, and Paul Wofo. Quantum Associative Memory with Improved Distributed Queries. *International Journal of Theoretical Physics*, 52(6) :1787–1801, jun 2012.
- [Tru02] C.A. Trugenberger. Quantum Pattern Recognition. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :277903, 2002.
- [Ven01] D. Ventura. On the Utility of Entanglement in Quantum Neural Computing. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, pages 1565–1570, July 2001.
- [Ven02] D. Ventura. Pattern Classification Using a Quantum System. In *Proceedings of the Joint Conference on Information Sciences*, pages 537–640, March 2002.
- [VM99] D. Ventura and T.R. Martinez. Initializing the Amplitude Distribution of a Quantum State. *Foundations of Physics Letters*, 6 :547–559, December 1999.
- [VM00] D. Ventura and T.R. Martinez. Quantum Associative Memory. *Inf. Sci. Inf. Comput. Sci.*, 124(1-4) :273–296, 2000.
- [WC98] Colin P. Williams and Scott H. Clearwater. *Explorations in Quantum Computing*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 1998.
- [who15] *World Malaria Report 2015*. World Health Organisation, 2015.
- [who16] *World Malaria Report 2016*. World Health Organisation, 2016.
- [ZD08] Rigui Zhou and Qiulin Ding. Quantum Pattern Recognition with Probability of 100%. *International Journal of Theoretical Physics*, 47(5) :1278–1285, 2008.

ANNEXE A

QUELQUES CONCEPTS DE LA THÉORIE DE L'INFORMATION QUANTIQUE

Nous présentons dans cette partie quelques concepts de base ayant conduit à la mise en place de la théorie de l'information quantique. De manière formelle, on définit l'informatique classique comme étant la science du traitement de l'information dans les domaines scientifique, technique, économique et social. À partir de cette définition, la théorie de l'information quantique peut se concevoir comme une science qui se sert de la théorie quantique pour traiter l'information. En d'autres termes, l'information quantique a pour but de tirer partie des possibilités offertes par la théorie quantique, afin de pouvoir traiter l'information.

A.1 Bit quantique et état superposé

En information quantique, on utilise comme unité fondamentale de l'information, en lieu et place du bit classique, le bit quantique ou **qubit** de l'anglais "*quantum bit*". Le qubit peut être un quanton, une molécule ou un atome ayant la capacité d'être dans un **état superposé** (énergie ou spin par exemple). Tout comme le bit classique, le qubit peut prendre deux états particuliers notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$ qui sont les états de base d'un espace de Hilbert \mathcal{H} à 2 dimensions. Ces deux états de base orthogonaux sont généralement représentés par deux vecteurs définis par

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.1})$$

La différence fondamentale entre le bit classique et le qubit réside dans le fait que ce dernier est capable de se retrouver simultanément dans les deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Ainsi, l'état du qubit peut être représenté par l'**état superposé** suivant :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (\text{A.1.2a})$$

avec

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.1.2b})$$

α et β sont respectivement les **amplitudes de probabilité** associés aux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ sont les probabilités de trouver respectivement le qubit $|\psi\rangle$ dans l'état $|0\rangle$ ou l'état $|1\rangle$ après une mesure.

Pour illustrer la superposition d'états, considérons par exemple le spin d'un électron qui est une propriété physique pouvant être illustrée par une sphère de rayon unité appelée **sphère de Bloch**. Sur la sphère de Bloch de la Fig. A.1.1, pour les angles θ et ϕ quelconques, un état superposé de qubit est représenté par

$$|\psi\rangle = \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) |0\rangle + \exp(i\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) |1\rangle, \quad (\text{A.1.3a})$$

avec les amplitudes de probabilité $\alpha = \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})$ et $\beta = \exp(i\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})$. On vérifie que

$$\left| \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \right|^2 + \left| \exp(i\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \right|^2 = 1. \quad (\text{A.1.3b})$$

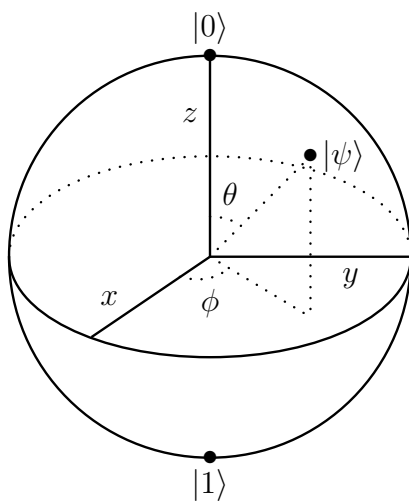


Figure A.1.1 – Sphère de Bloch représentant un électron dans un état superposé de spin, $|\psi\rangle = \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) |0\rangle + \exp(i\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) |1\rangle$. À la surface de la sphère, l'extrémité du spin est repérée par ψ , les angles θ et ϕ étant les angles polaire et azimutal. Lorsque le spin est “**up**”, c'est-à-dire quand son extrémité est confondue avec le point au dessus de la sphère, le qubit est dans l'état classique $|0\rangle$. Le spin est “**down**” lorsque son extrémité est confondue avec le point en dessous de la sphère. Le qubit est alors dans l'état classique $|1\rangle$.

Notons que la superposition d'états laisse suggérer qu'un registre de n qubits peut dans un sens exister dans une superposition des 2^n états possibles au même moment. Ainsi nous avons

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle, \quad \sum_{x=0}^{2^n-1} |a_x|^2 = 1, \quad (\text{A.1.4})$$

où a_x est l'amplitude de probabilité de l'état $|x\rangle$.

A.2 Intrication quantique

L'utilisation d'un seul qubit ne permet pas de mettre en évidence la puissance de l'information quantique. Cette puissance est mise en évidence par un phénomène purement quantique,

sans équivalence classique, appelée **intrication quantique**.

On parle d'intrication quantique lorsque deux qubits (quantons) au moins présentent une corrélation quantique forte. Ceci signifie que toute interaction sur l'un des qubits affecte instantanément l'autre quelle que soit la distance qui les sépare. Ceci met en évidence le caractère non-local de la théorie quantique. Les deux qubits forment de ce fait un système physique unique et non deux systèmes physiques séparés. Les considérations de probabilité classique ne peuvent pas rendre compte de l'état de chaque qubit.

Les états intriqués les plus connus sont les états EPR donnés par

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (\text{A.2.1a})$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle), \quad (\text{A.2.1b})$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (\text{A.2.1c})$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (\text{A.2.1d})$$

qui ne peuvent pas être écrits comme produit d'états de deux sous-systèmes physiques séparés.

A.3 Parallélisme quantique et décohérence

La superposition d'états et l'intrication permettent l'exécution simultanée de plusieurs calculs. On parle alors de **parallélisme quantique** par opposition au calcul séquentiel des bits classiques. Toutefois, l'observation ou la mesure d'un système quantique détruit sa superposition d'états et celui-ci prend une de ses valeurs classiques possibles. Ce phénomène est la **décohérence**, qui doit être vu comme l'interaction entre le qubit et son environnement. Un challenge en information quantique est donc d'accroître la probabilité d'observer un état souhaité avant que la décohérence n'intervienne.

A.4 Portes quantiques élémentaires

En information quantique l'évolution d'un qubit d'un état à un autre s'effectue par le biais de l'utilisation d'**opérateurs unitaires** ou **portes logiques quantiques** lorsque ceux-ci sont utilisés dans des circuits quantiques. Contrairement à la plupart des portes logiques classiques, les portes logiques quantiques sont réversibles et permettent ainsi d'éviter la perte d'information par dissipation d'énergie [BCS04].

Rappelons qu'un opérateur U est unitaire si

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \quad (\text{A.4.1a})$$

où \mathbb{I} est l'opérateur identité et U^\dagger la transposée du conjugué complexe de U . Tout opérateur unitaire peut également s'écrire

$$U = \exp(-iG), \quad (\text{A.4.1b})$$

où \mathbf{G} est un opérateur hermitien, c'est-à-dire $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\dagger$.

Dans cette thèse la porte identité \mathbb{I} , la porte rotation de phase $\mathbf{R}(\theta)$, la porte NON \mathbf{X} et la porte de Walsh-Hadamard \mathbf{W} seront les portes logiques à un qubit les plus utilisées. Leurs représentations symboliques et matricielles sont les suivantes :

$$|x\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbb{I}} \text{ --- } |x\rangle \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.2a})$$

$$|x\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbf{R}(\theta)} \text{ --- } (-1)^x \cos(\theta) |x\rangle + \sin(\theta) |1-x\rangle \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.2b})$$

$$|x\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbf{X}} \text{ --- } |1-x\rangle \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.2c})$$

$$|x\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbf{W}} \text{ --- } \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)^x |x\rangle + |1-x\rangle) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.2d})$$

où $x \in \{0, 1\}$. La porte de Walsh-Hadamard joue un rôle important dans la création des états supposés comme par exemple les états maximalelement intriqués (Eqs. (A.2.1a-A.2.1d)).

La porte logique à deux qubits qui sera la plus utilisée dans ce mémoire sera la porte contrôle NON dont les représentations symbolique et matricielle sont :

$$\begin{array}{c}
|y\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbf{X}} \text{ --- } |1-y\rangle \\
\downarrow \\
|x\rangle \text{ --- } \bullet \text{ --- } |x\rangle
\end{array}
\quad \mathbf{CX} = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{X} \end{pmatrix} = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathbf{X}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad (\text{A.4.3})$$

où $x, y \in 0, 1$. La porte bascule \mathbf{CX} agit sur les deux qubits $|xy\rangle$ en appliquant l'opérateur \mathbf{X} sur le second qubit (qubit cible) $|y\rangle$ si et seulement si le premier qubit (qubit source) $|x\rangle$ est dans l'état $|1\rangle$, sinon rien n'est fait. La porte \mathbf{CX} appartient à l'ensemble des portes à deux qubits contrôle-unitaire notés \mathbf{CU}

$$\begin{array}{c}
|y\rangle \text{ --- } \boxed{\mathbf{U}} \text{ --- } \mathbf{U}|y\rangle \\
\downarrow \\
|x\rangle \text{ --- } \bullet \text{ --- } |x\rangle
\end{array}
\quad \mathbf{CU} = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbf{U}) = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.4})$$

où l'opérateur unitaire \mathbf{U} est appliqué sur le second qubit $|y\rangle$ si et seulement si le premier qubit $|x\rangle$ est dans l'état $|1\rangle$.

Les portes de Walsh-Hadamard et \mathbf{CX} permettent par exemple de construire l'état $|\Psi^+\rangle$ de l'Eq. (A.2.1a) comme il suit :

$$\mathbf{CX}(\mathbf{W} \otimes \mathbb{I})|00\rangle = \mathbf{CX} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle). \quad (\text{A.4.5})$$

ANNEXE B

ALGORITHME D'INITIALISATION DES AMPLITUDES QUANTIQUES

Cet algorithme a été mis au point par Ventura et Martinez [VM99]. L'algorithme qui s'exécute en temps polynomial, permet de mettre un registre de qubits dans une superposition d'états souhaitée et non dans une superposition de tous les états possibles.

On pose $m \geq p \geq 1$, où $m \leq 2^n$ est le nombre de patrons de longueur n à faire apprendre au réseau. En général $m \ll 2^n$. p est l'indice sur un patron et n le nombre de qubits du réseau. L'opérateur clef de cet algorithme est la porte logique à deux qubits CS^p où l'opérateur “**state generation**” S^p est défini par [Tru02, VM99] :

$$\text{S}^p = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p-1}{p}} & -\frac{1}{\sqrt{p}} \\ \frac{1}{\sqrt{p}} & \sqrt{\frac{p-1}{p}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.1})$$

Ainsi,

$$\text{CS}^p = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{S}^p = \text{diag}(\mathbb{I}, \text{S}^p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p-1}{p}} & -\frac{1}{\sqrt{p}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} & \sqrt{\frac{p-1}{p}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.2})$$

Lors de l'évolution de l'algorithme, l'opérateur S^p affecte des amplitudes de probabilité faibles aux états qu'on désire mémoriser et qui correspondent aux patrons. Ainsi, les autres opérateurs n'ont aucun effet sur eux. Pour se faire, on utilise trois registres de n , $n-1$ et 2 qubits :

- $|x\rangle = |x_1 \dots x_n\rangle$, le registre sur lequel les différents patrons seront mémorisés ;
- $|g\rangle = |g_1 \dots g_{n-1}\rangle$, un registre utilisé comme espace de travail pour identifier ou marquer un état particulier ;
- $|c\rangle = |c_1 c_2\rangle$, un registre de deux qubits de contrôle qui sont utilisés pour déterminer lesquels sont affectés par un opérateur particulier. C'est sur ce dernier registre et plus particulièrement sur $|c_1\rangle$ qu'agit l'opérateur S^p lorsque $|c_1\rangle = |1\rangle$.

À la fin de l'algorithme, les qubits des deux derniers registres ne sont pas intriqués avec ceux du premier et sont respectivement mis à $|0^{\otimes n-1}\rangle \equiv |0_1 \dots 0_{n-1}\rangle$ et $|0^{\otimes 2}\rangle \equiv |00\rangle$. L'Algorithme B.1 décrit les différentes étapes menant au résultat souhaité où les opérateurs utilisés sont les suivants :

- l'opérateur à un qubit X ;
- deux variantes de l'opérateur à deux qubits¹ CX

$$CX^0 = \text{diag}(X, \mathbb{I}) \text{ et } CX = \text{diag}(\mathbb{I}, X); \quad (\text{B.0.3})$$

- quatre variantes de l'opérateur à trois qubits de Fredkin (porte CCX) utilisés pour marquer les états spécifiques dans une superposition

$$F^{00} = \text{diag}(X, \mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}), \quad F^{01} = \text{diag}(\mathbb{I}, X, \mathbb{I}, \mathbb{I}), \quad (\text{B.0.4})$$

$$F^{10} = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathbb{I}, X, \mathbb{I}), \quad F^{11} = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}, X); \quad (\text{B.0.5})$$

- et z_{pj} les valeurs des différents qubits des patrons, où on pose $z_{(m+1)j} = 0^{\otimes m}$.

Algorithme B.1 Initialisation des amplitudes des états quantiques (Ref. [VM99])

```

1 :  $|\psi\rangle = |x_1 \dots x_n, g_1 \dots g_{n-1}, c_1 c_2\rangle \equiv |0_1 \dots 0_n, 0_1 \dots 0_{n-1}, 00\rangle$  {Initialisation}
2 : for  $m \geq p \geq 1$  do
3 :   for  $1 \leq j \leq n$  do
4 :     if  $z_{pj} \neq z_{(p+1)j}$  then
5 :        $|\psi\rangle = CX_{(c_2 x_j)}^0 |\psi\rangle$ 
6 :     end if
7 :   end for
8 :    $|\psi\rangle = CX_{(c_2 c_1)}^0 |\psi\rangle$ 
9 :    $|\psi\rangle = S^p |\psi\rangle$ 
10 :   $|\psi\rangle = F_{x_1 x_2 g_1}^{z_{p1} z_{p2}} |\psi\rangle$ 
11 :  for  $3 \leq k \leq n$  do
12 :     $|\psi\rangle = F_{x_k g_{k-2} g_{k-1}}^{z_k 1} |\psi\rangle$ 
13 :  end for
14 :   $|\psi\rangle = CX_{(g_{n-1} c_1)} |\psi\rangle$ 
15 :  for  $n \geq k \geq 3$  do
16 :     $|\psi\rangle = F_{x_k g_{k-2} g_{k-1}}^{z_k 1} |\psi\rangle$ 
17 :  end for
18 :   $|\psi\rangle = F_{x_1 x_2 g_1}^{z_{p1} z_{p2}} |\psi\rangle$ 
19 : end for
20 :  $|\psi\rangle = X_{c_2} |\psi\rangle$ 

```

¹ CX^0 inverse l'état du premier qubit lorsque le second est dans l'état $|0\rangle$

Algorithme B.2 Résumé de l'Algorithme B.1 (Ref. [VM99])

```
1 :  $|\psi\rangle = |x_1 \dots x_n, g_1 \dots g_{n-1}, c_1 c_2\rangle \equiv |0_1 \dots 0_n, 0_1 \dots 0_{n-1}, 00\rangle$  {Initialisation}
2 : for  $m \geq p \geq 1$  do
3 :    $|\psi\rangle = \text{FLIP } |\psi\rangle$  {Générer l'état du patron d'indice  $p$ }
4 :    $|\psi\rangle = \text{CS}^p |\psi\rangle$  {Appliquer l'opérateur  $\text{CS}^p$ }
5 :    $|\psi\rangle = \text{SAVE } |\psi\rangle$  {Sauvegarder l'état du patron d'indice  $p$ }
6 : end for
7 :  $|\psi\rangle = \mathbf{X}_{c_2} |\psi\rangle$ 
```

Dans l'Algorithme B.2 qui donne la forme contractée de l'Algorithme B.1, l'opérateur FLIP agrège les lignes 3-8 de l'Algorithme B.1,

$$\text{FLIP} = \mathbf{C}\mathbf{X}_{(c_2 c_1)}^0 \mathbf{C}\mathbf{X}_{(c_2 x_j)}^0, \quad (1 \leq j \leq n, z_{pj} \neq z_{(p+1)j}), \quad (\text{B.0.6})$$

et change l'état des qubits du premier registre quand $|c_1\rangle = |1\rangle$ de sorte qu'ils correspondent aux états $|P\rangle$ associés aux différents patrons. L'opérateur SAVE, qui agrège les lignes 10-19 de l'Algorithme B.1, permet de sauvegarder ces états qui ont de petites amplitudes de probabilité. À la fin du processus le système se retrouve dans l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_1^m |P\rangle, \quad (\text{B.0.7})$$

appelé **mémoire blanche** en ce sens que tous les états ont la même probabilité d'être trouvés à la suite d'une mesure [Tru02]. Le nombre d'étapes nécessaires pour mettre le système dans l'état $|\psi\rangle$ de l'équation (B.0.7) vaut $\mathcal{O}(mn)$.

Exemple B.1. On désire construire l'état $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$ à partir de l'état $|000\rangle$. On commence donc avec $|\psi_0\rangle = |000, 00, 00\rangle$.

1. Pour $p = 5$:

- $|\psi_1\rangle = \text{FLIP } |\psi_0\rangle = |000, 00, 10\rangle$;
- $|\psi_2\rangle = \text{CS}^p |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 10\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |000, 00, 11\rangle$;
- $|\psi_2\rangle = \text{SAVE } |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |000, 00, 00\rangle$.

2. Pour $p = 4$:

- $|\psi_3\rangle = \text{FLIP } |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |001, 00, 10\rangle$;
- $|\psi_4\rangle = \text{CS}^p |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 10\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |001, 00, 11\rangle$;
- $|\psi_4\rangle = \text{SAVE } |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |001, 00, 00\rangle$.

3. Pour $p = 3$:

- $|\psi_5\rangle = \text{FLIP } |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |010, 00, 10\rangle$;
- $|\psi_6\rangle = \text{CS}^p |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 10\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |010, 00, 11\rangle$;

-
- $|\psi_6\rangle = \text{SAVE } |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |010, 00, 00\rangle$.

4. Pour $p = 2$

- $|\psi_7\rangle = \text{FLIP } |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |101, 00, 10\rangle$.
- $|\psi_8\rangle = \text{CSP } |\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 11\rangle$
- $|\psi_8\rangle = \text{SAVE } |\psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 00\rangle$

5. Pour $p = 1$

- $|\psi_9\rangle = \text{FLIP } |\psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |110, 00, 00\rangle$;
- $|\psi_{10}\rangle = \text{CSP } |\psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |110, 00, 10\rangle$;
- $|\psi_{10}\rangle = \text{SAVE } |\psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |110, 00, 01\rangle$.

6. $X_{c_2} |\psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |000, 00, 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |001, 00, 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |010, 00, 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |101, 00, 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |110, 00, 00\rangle$.

En séparant les registres on obtient bien l'état $|\Psi\rangle$.

ANNEXE C

ALGORITHME DE GROVER

L'algorithme de Grover [Gro97a, Gro97b], mis au point par Grover en 1997, est un algorithme de recherche dans une base désordonnée de $N = 2^n$ éléments, où n est le nombre de qubits. Dans une base de N éléments, comme un manuel téléphonique, nous avons besoin d'au plus $\mathcal{O}(N)$ requêtes pour trouver l'élément recherché. Contrairement aux algorithmes classiques les plus performants, l'algorithme de Grover n'a besoin que de $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ requêtes.

Les N éléments qui constituent la base de données de recherche sont représentés par des états en superposition. Pour un système à n qubits, l'état du système issu de l'Eq. (A.1.4) est représenté par

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle, \quad (\text{C.0.1})$$

où tous les états $|x\rangle$ sont équiprobables. L'algorithme de Grover agit sur l'amplitude de probabilité de l'état correspondant à l'élément recherché et fait croître sa probabilité vers $1 - \frac{1}{N}$. Remarquons qu'en vertu de l'Eq. (C.0.1) cet algorithme nécessite que le système soit une superposition de tous les états possibles.

Soit $|\tau\rangle$ l'état qui représente l'élément recherché dans la base de données. On définit l'opérateur d'oracle \mathbb{O}

$$\mathbb{O} = \mathbb{I} - 2|\tau\rangle\langle\tau| \quad (\text{C.0.2a})$$

ou bien

$$\mathbb{O} : a_x \mapsto \begin{cases} -a_x, & \text{si } x = \tau \\ a_x, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{C.0.2b})$$

dont l'action est de n'inverser que l'amplitude de probabilité a_τ de l'état $|\tau\rangle$. On définit aussi l'opérateur de diffusion \mathbb{D}

$$\mathbb{D} = \mathbb{W}^{\otimes n} (-\mathbb{I} + 2|0\rangle\langle 0|) \mathbb{W}^{\otimes n} = \sum_{x,y=0}^{N-1} \left(-\delta_{xy} + \frac{2}{N} \right) |x\rangle\langle y| \quad (\text{C.0.3a})$$

ou bien

$$\mathbb{D} : a_x \mapsto 2\langle a \rangle - a_x, \quad (\text{C.0.3b})$$

dont l'action est d'inverser les amplitudes de probabilité de tous les états par rapport à l'amplitude de probabilité moyenne $\langle a \rangle$, $\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} a_x$. L'Algorithme C.1 nous présente

alors les étapes de l'algorithme de Grover, tandis que la Fig. C.0.1 donne son diagramme de Brikman [BHL⁺05].

Algorithme C.1 Algorithme de Grover.

- 1 : $|\psi\rangle = W^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle$ {Initialisation et construction de l'état (C.0.1) par application de la porte W sur chaque qubit}
 - 2 : **for** $1 \leq i \leq \Lambda = \frac{\pi}{4 \arcsin(N^{-\frac{1}{2}})} - \frac{1}{2}$ **do**
 - 3 : Appliquer l'opérateur O au registre
 - 4 : Appliquer l'opérateur D au registre {Pour N grand les étapes sont répétées $\Lambda = \frac{\pi}{4} \sqrt{N}$ fois.}
 - 5 : **end for**
 - 6 : Observer le système.
-

On peut regrouper les deux opérateurs D et O en un seul opérateur $G = DO$ appelé **opérateur de Grover**. Notons également la nécessité d'un qubit ancillaire (à cause de l'opérateur D) mis dans l'état $|1\rangle$.

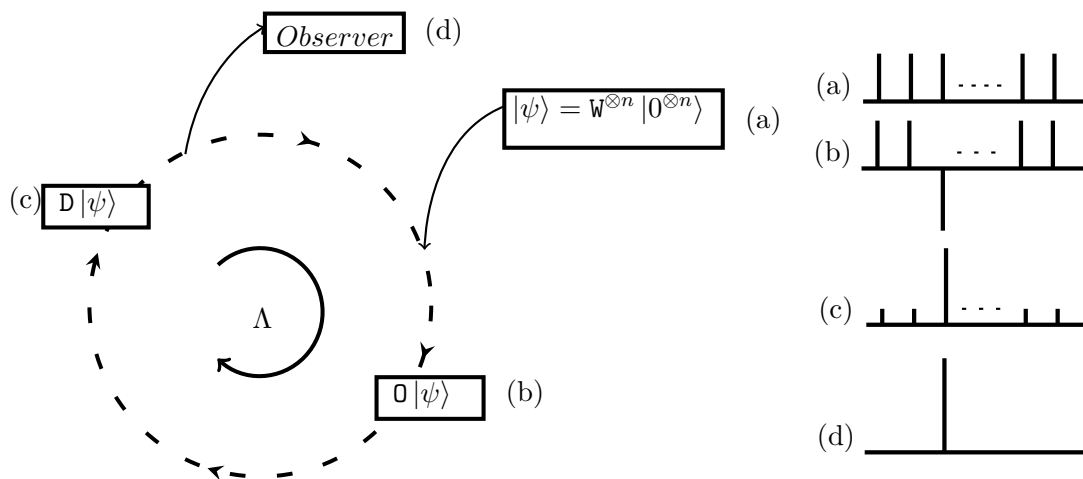


Figure C.0.1 – Diagramme de Brikman de l'algorithme de Grover (Algorithme C.1). (a) Le registre de n qubit est mis dans une superposition équiprobable de tous les états possibles et permet d'obtenir l'état C.0.1. (b) et (c) Les opérateurs d'oracle et de diffusion sont appliqués Λ fois sur le registre. (d) Le système est observé afin d'obtenir un résultat.

Utilisé dans un QAM, l'algorithme de Grover nécessite, comme souligné, que le système soit dans une superposition de tous les états possibles, sinon la probabilité d'obtenir un état non désiré augmente. De plus, la mémoire dans ce cas ne fait que de la complétion de données¹. Il faut également, pour fonctionner, que la séquence de bits présentée au réseau soit rigoureusement identique à une partie des bits d'un des patrons mémorisés. Autrement, la mémoire n'évoluera pas et donnera au hasard, comme résultat, l'un des patrons mémorisés.

¹La forme modifiée de l'algorithme de Grover proposé dans [VM00] présente également la même limite sauf qu'il n'est pas nécessaire que le système soit dans une superposition de tous les états possibles.

ANNEXE D

AMPLIFICATION D'AMPLITUDE

Considérons un registre de n qubits dans l'état initial $|\gamma\rangle$ sur lequel est appliqué un opérateur \mathcal{A} . Ce dernier permet à un des états désirés $|\tau\rangle$ d'acquérir une amplitude de probabilité λ .

L'amplification d'amplitude est un procédé qui consiste à appliquer un nombre ζ de fois l'opérateur \mathcal{A} sur le registre afin d'obtenir un des états recherchés $|\tau\rangle$. Ce nombre ζ est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. L'amplification d'amplitude est possible grâce à deux opérateurs d'inversion de phase sélective, l'un s'appliquant sur l'état initial et l'autre sur les états recherchés. En se basant sur les Ref. [Gro05, Lov06], l'objectif de cet Annexe est de mettre en évidence le fait que les deux Algorithmes C.1 et 2.1 sont des amplifications d'amplitude.

D.1 Cas de l'algorithme de Grover

L'algorithme de Grover est un cas particulier d'amplification d'amplitude où, l'opérateur \mathcal{A} est le produit tensoriel des opérateurs de Walsh-Hadamard défini par $\mathbb{H} = \mathbb{W}^{\otimes n}$, l'état initial étant $|\gamma\rangle = |0^{\otimes n}\rangle$. En suivant les étapes de l'Algorithme C.1, on obtient

1. $\mathbb{W}^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle \equiv \mathbb{H} |0^{\otimes n}\rangle$;
2. nous on applique Λ fois l'opérateur de Grover $G = \mathbb{D}\mathbb{O}$:

$$(\mathbb{D}\mathbb{O})(\mathbb{D}\mathbb{O}) \dots (\mathbb{D}\mathbb{O})\mathbb{H} |0^{\otimes n}\rangle \equiv G^\Lambda (\mathbb{H} |0^{\otimes n}\rangle). \quad (\text{D.1.1})$$

L'opérateur d'oracle est

$$\mathbb{O} = \mathbb{I} - 2 |\tau\rangle \langle \tau| = \sum_j (-1)^{\delta_{j\tau}} |j\rangle \langle j| \equiv I_\tau, \quad (\text{D.1.2a})$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & 0 \\ 0 & & & -1 & & 0 \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.2b})$$

Les éléments $(j; j)$ de cette matrice valent 1 sauf pour l'élément $(\tau; \tau)$ qui vaut -1 . Les éléments $(i; j)$, $i \neq j$, valent 0.

L'opérateur de diffusion D , dont l'action est d'inverser les amplitudes de probabilité par rapport à l'amplitude de probabilité moyenne est

$$D = \mathbb{H}^\dagger (-\mathbb{I} + 2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}|) \mathbb{H} \equiv -\mathbb{H}^\dagger I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H}, \quad (\text{D.1.3})$$

$$I_{0^{\otimes n}} = \sum_j (-1)^{\delta_{j0^{\otimes n}}} |j\rangle \langle j|, \quad (\text{D.1.4})$$

où $I_{0^{\otimes n}}$ est l'opérateur d'inversion de phase sélective qui s'applique sur l'état initial $|0^{\otimes n}\rangle$ et I_τ celui qui s'applique sur l'état recherché $|\tau\rangle$. $I_{0^{\otimes n}}$ a les mêmes propriétés que I_τ , dont l'élément $(0; 0)$ vaut -1 , et $\mathbb{H}^\dagger = \mathbb{H}$.

L'équation D.1.1 se réécrit alors comme suit

$$(-\mathbb{H} I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau) (-\mathbb{H} I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau) \dots (-\mathbb{H} I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau) \mathbb{H} |0^{\otimes n}\rangle \equiv (-\mathbb{H} I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau)^\Lambda (\mathbb{H} |0^{\otimes n}\rangle). \quad (\text{D.1.5})$$

En réorganisant les éléments entre parenthèses et les signes $(-)$, nous avons

$$\mathbb{H} (-I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau \mathbb{H}) (-I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau \mathbb{H}) \dots (-I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau \mathbb{H}) |0^{\otimes n}\rangle, \quad (\text{D.1.6})$$

où l'opérateur qui permet l'amplification d'amplitude

$$\mathcal{Q}_G = -I_{0^{\otimes n}} \mathbb{H} I_\tau \mathbb{H} \quad (\text{D.1.7})$$

est appliqué Λ fois sur le registre.

En utilisant les opérateurs d'inversion de phase sélective, l'amplification d'amplitude pour un opérateur \mathcal{A} est la conséquence de l'opérateur \mathcal{Q} défini par

$$\mathcal{Q} = I_\gamma \mathcal{A}^\dagger I_\tau \mathcal{A}. \quad (\text{D.1.8})$$

Les opérateurs d'inversion de phase sélective sont des opérateurs de rotation de phase sélective où l'angle de rotation ϕ vaut $(2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. La forme générale de l'opérateur \mathcal{Q} est donc la suivante :

$$\mathcal{Q} = R_\gamma \mathcal{A}^\dagger R_\tau \mathcal{A}, \quad (\text{D.1.9})$$

où

$$R_\gamma = \sum_j \exp(i\phi_\gamma \delta_{j\gamma}) |j\rangle \langle j| \text{ et } R_\tau = \sum_j \exp(i\phi_\tau \delta_{j\tau}) |j\rangle \langle j|, \text{ avec } i = \sqrt{-1}, \quad (\text{D.1.10})$$

sont les opérateurs de rotation de phase sélective des états $|\gamma\rangle$ et $|\tau\rangle$ d'angle ϕ_γ et ϕ_τ respectivement. $|\phi_\gamma - \phi_\tau| \ll \lambda$ pour une amplification d'amplitude récursive.

De ce qui précède, il apparaît que toutes les formes modifiées de l'algorithme de Grover sont des amplifications d'amplitude.

Précisons également que, si $\epsilon \in]0, 1[$ est l'erreur sur la probabilité de trouver l'état $|\tau\rangle$, la probabilité de trouver $|\tau\rangle$ est donc

$$\mathcal{P}_\tau = 1 - \epsilon. \quad (\text{D.1.11})$$

Grover et *al.* [Gro05, Lov06] pensent que si les angles ϕ des opérateurs de rotation de phase sélective valent $\frac{\pi}{3}$, alors pour q requêtes, la probabilité de trouver l'état $|\tau\rangle$ devient

$$\mathcal{P}_\tau = 1 - \epsilon^{2q+1}. \quad (\text{D.1.12})$$

D.2 Cas de l'algorithme de recherche avec requête distribuée

Cet algorithme étant une version modifiée de l'algorithme de Grover, posons que \mathcal{K} est l'opérateur unitaire qui génère la requête et \mathbf{A} l'opérateur permettant d'obtenir l'état (2.3.1). Comme précédemment on a

$$(\text{D0})(\text{D0}) \dots (\text{D0})\mathbf{A} |0^{\otimes n}\rangle, \quad (\text{D.2.1})$$

avec

$$\begin{aligned} \text{D} &= \mathbb{I} - 2 |Req^p\rangle \langle Req^p| \\ &= \mathcal{K}\mathcal{K}^\dagger - 2\mathcal{K} |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| \mathcal{K}^\dagger \\ &= \mathcal{K}(\mathbb{I} - 2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}|) \mathcal{K}^\dagger \\ &= \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

et

$$\begin{aligned} \text{D} &= 2 |\psi\rangle \langle \psi| - \mathbb{I} \\ &= 2\mathbf{A} |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| \mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \\ &= \mathbf{A}(2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - \mathbb{I})\mathbf{A}^\dagger \\ &= \mathbf{A}(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

L'équation D.2.1 devient alors

$$[\mathbf{A}(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger][\mathbf{A}(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger] \dots [\mathbf{A} - I_{0^{\otimes n}}]\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \mathbf{A} |0^{\otimes n}\rangle, \quad (\text{D.2.4a})$$

puis en réorganisant les crochets nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \mathbf{A}][(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \mathbf{A}] \dots [(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \mathbf{A}] |0^{\otimes n}\rangle \\ \equiv \mathbf{A}[(-I_{0^{\otimes n}})\mathbf{A}^\dagger \mathcal{K}I_{0^{\otimes n}}\mathcal{K}^\dagger \mathbf{A}]^\Lambda |0^{\otimes n}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.2.4b})$$

L'Eq. (D.2.4b) est formellement identique à l'Eq. (D.1.5), c'est donc une amplification d'amplitude.

ANNEXE E

DISTRIBUTION BINOMIALE

Une loi ou distribution binomiale, de paramètre n et q , est une distribution de la somme de n variables de **Bernouilli** indépendantes et identiques de paramètre commun q . Pour se faire on effectue l'expérience suivante : on renouvelle n fois de manière indépendante une *épreuve de Bernouilli*. On rappelle qu'une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire à deux issues possibles (échec et succès) où la probabilité d'un succès est q et celle d'un échec $r = (1 - q)$, de paramètre q . Puis on compte le nombre de succès à l'issue de n épreuves et on appelle X la variable aléatoire correspondant à ce nombre de succès. La loi de probabilité suivie par cette variable aléatoire est définie par

$$p(k) = P(X = k) = C_n^k q^k (1 - q)^{n-k}, \quad (\text{E.0.1})$$

avec q un réel quelconque pris dans l'intervalle $]0; 1[$ et $\sum_k p(k) = 1$.

Dans le cas présent, les n variables de Bernouilli sont des distances de Hamming vues par rapport à un nombre y (c'est-à-dire $k = |y - x|$), qui se retrouve être le centre de la distribution. Il n'existe alors dans ce cas qu'une seule manière d'écrire la loi de probabilité, sachant que le nombre de qubits représente aussi le nombre total de variables et la plus grande distance de Hamming n

$$\begin{aligned} p_y(k)_{x/y} &= p_y(k = |y - x|) \\ &= P_y(X = k = |y - x|) \\ &= q^{|y-x|} (1 - q)^{n-|y-x|}, \end{aligned} \quad (\text{E.0.2})$$

avec $\sum_x p_y(k = |y - x|) = 1$.

Pour le centre de la distribution y la distance de Hamming vaut $k = 0$ et $P_y(X = 0) = (1 - q)^n$. Posons $f(q) = (1 - q)^n$, sachant que $0 < q < 1$, le tableau de variation de cette fonction est le suivant

q	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(q)$		-	-
$f(q)$	1	\searrow	$(\frac{1}{2})^n$
			\searrow
			0

On constate que nous avons affaire à une fonction décroissante. Pour que le centre de la distribution garde la probabilité la plus élevée il faut que $q > \frac{1}{2}$. Dans le cas où $q = \frac{1}{2}$ on se retrouve dans l'un des cas de l'algorithme de Grover, où la requête porte sur tous les états possibles (pour n qubits), qui ont alors la même amplitude de probabilité; c'est-à-dire $P_y(X = k = |y - x|) = (\frac{1}{2})^n$.

LISTE DES PUBLICATIONS

- [TNNEW12] J.-P. Tchapet Njafa, S. G. Nana Engo, and Paul Wofo. Quantum Associative Memory with Improved Distributed Queries. *International Journal of Theoretical Physics*, 52(6) :1787–1801, jun 2012.
- [NE16] J.-P. Tchapet Njafa and S.G. Nana Engo. Concise quantum associative memories with nonlinear search algorithm. *Fortschr. Phys.*, 64(2-3) :250–268, jan 2016.
- [NE18] J.-P. Tchapet Njafa and S.G. Nana Engo. Quantum associative memory with linear and non-linear algorithms for the diagnosis of some tropical diseases. *Neural Networks*, 97 :1 – 10, jan 2018.

Quantum Associative Memory with Improved Distributed Queries

J.-P. Tchapet Njafa, S. G. Nana Engo & Paul Woafu

International Journal of Theoretical Physics

ISSN 0020-7748

Int J Theor Phys

DOI 10.1007/s10773-012-1237-0

Volume 45 • Number 1 • January 2012

**ONLINE
FIRST**

**International
Journal of
Theoretical
Physics**

Available
online
www.springerlink.com

IJTP • 10773 • ISSN 0020-7748
45(1) 0000-0000 (2006)

 Springer

 Springer

Concise quantum associative memories with nonlinear search algorithm

J.-P. Tchapel Njafa* and S.G. Nana Engo

Received 11 August 2015, revised 14 November 2015, accepted 3 December 2015

Published online 11 January 2016

The model of Quantum Associative Memories (QAM) we propose here consists in simplifying and generalizing that of Rigui Zhou et al. [1] which uses the quantum matrix with the binary decision diagram put forth by David Rosenbaum [2] and the Abrams and Lloyd's nonlinear search algorithm [3]. Our model gives the possibility to retrieve one of the sought states in multi-values retrieving scheme when a measurement is done on the first register in $\mathcal{O}(c - r)$ time complexity. It is better than Grover's algorithm and its modified form which need $\mathcal{O}(\sqrt{\frac{2^n}{m}})$ steps when they are used as the retrieval algorithm. n is the number of qubits of the first register and m the number of x values for which $f(x) = 1$. As the nonlinearity makes the system highly susceptible to the noise, an analysis of the influence of the single qubit noise channels on the Nonlinear Search Algorithm of our model of QAM shows a fidelity of about 0.7 whatever the number of qubits existing in the first register, thus demonstrating the robustness of our model.

1 Introduction

Quantum Neural Networks are Artificial Neural Networks functioning according to quantum laws. One of the useful Neural Networks is the Associative Memory which is an important tool for pattern recognition, intelligent control, and artificial intelligence. Ventura and Martinez built a model of Quantum Associative Memory (QAM) where the stored patterns were considered as the basis states of the memory quantum state [4]. They used a modified version of the well-known Grover's quantum search algorithm in an unsorted database as the retrieval algorithm. In order to overcome the limits of that model that solves only the completion problem by retrieving data from noisy data, Ezhov et al. used an *exclusive* method of quantum superposition and Grover's algorithm with distributed queries [5]. However,

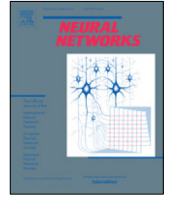
their model still produces non-negligible probability of irrelevant classification. We have recently put forth an improved model of QAM with distributed query that reduces the probability of this irrelevant classification [6].

The NonLinear Search Algorithm (NLSA) is based on the fact that it has been suggested that under some circumstances, the superposition principle of quantum theory might be violated. In other words, sometimes a quantum system might have temporal nonlinear evolution. Therefore, nonlinear quantum computer could solve NP-complete and even #P problems in polynomial time that Abrams and Lloyd argued in 1998 in their nowadays classic paper [3]. We recall that the NLSA of Abrams and Lloyd uses the Weinberg's prescription and they based their argument on a general property of nonlinear evolutions in Hilbert spaces. This nonlinear evolution is the non-conservation of scalar products between nonlinearly evolving solutions of a nonlinear Schrödinger equation. We call this effect a mobility phenomenon. With the intention of avoiding the fact that the Weinberg's formalism implies a transmission faster than the light [8], Czachor [7] proposed another description based on the Polchinski-type one. In the present paper, we follow the Czachor's description. Meyer and Wong give in [9] another reason which can justify the use of nonlinear formalism in quantum mechanics:

“[...] An obvious question is whether a modest, physically motivated nonlinearity can still produce a computational advantage. In particular, consider Bose-Einstein condensates (BECs). [...] In general, describing such many-body systems is difficult because of the many interaction terms. But under certain conditions, one can assume that only two-body contact interactions contribute and the s-wave scattering length

Laboratory of Photonics, Department of Physics, University of Ngaoundere, POB 454 Ngaoundere, Cameroon

* Corresponding author E-mail: jptchapet@univ-ndere.cm



Quantum associative memory with linear and non-linear algorithms for the diagnosis of some tropical diseases



J.-P. Tchapet Njafa*, S.G. Nana Engo

Laboratory of Photonics, Department of Physics, University of Ngaoundere, PO. BOX 454 Ngaoundere, Cameroon

ARTICLE INFO

Article history:

Received 6 February 2017

Received in revised form 29 August 2017

Accepted 1 September 2017

Available online 21 September 2017

Keywords:

Quantum associative memory

Quantum search algorithm

Linear search algorithm

Non-linear search algorithm

Tropical diseases

ABSTRACT

This paper presents the QAMDiagnos, a model of Quantum Associative Memory (QAM) that can be a helpful tool for medical staff without experience or laboratory facilities, for the diagnosis of four tropical diseases (malaria, typhoid fever, yellow fever and dengue) which have several similar signs and symptoms. The memory can distinguish a single infection from a polyinfection. Our model is a combination of the improved versions of the original linear quantum retrieving algorithm proposed by Ventura and the non-linear quantum search algorithm of Abrams and Lloyd. From the given simulation results, it appears that the efficiency of recognition is good when particular signs and symptoms of a disease are inserted given that the linear algorithm is the main algorithm. The non-linear algorithm helps confirm or correct the diagnosis or give some advice to the medical staff for the treatment. So, our QAMDiagnos that has a friendly graphical user interface for desktop and smart-phone is a sensitive and a low-cost diagnostic tool that enables rapid and accurate diagnosis of four tropical diseases.

© 2017 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Diagnosis is the identification of a situation, a difficulty or a phenomenon by interpreting external signs or lesions. In the medical field, it consists of identifying abnormal condition that afflicts a specific patient, based on manifested clinical data. If the final diagnosis matches a disease that afflicts a patient, the diagnostic process is correct; otherwise, a misdiagnosis occurs. Medical diagnosis can also be defined as the process that allows a physician, through information collected from a history and physical examination of a person, to make prediction about features of clinical situations and determine appropriate course of action. It implements a complex decision process that involves a lot of vagueness and uncertainty management, especially when a disease has multiple signs and symptoms or non-specific signs and symptoms.

From the point of view of statistics, the diagnostic procedure involves classification tests. That is, the task is made on the basis of measured features to assign a patient to one of a small set of classes (Dybowski & Gant, 2007). Then, Artificial Neural Networks (ANN) provide powerful tools that help physicians avoid misdiagnosis by analysing, modelling and making sense of complex clinical data across a broad-range of medical applications. As ANNs have the ability of prediction, parallel operation and adaptability, they have been widely used as computer-assisted tools among many techniques about automatic disease diagnosis proposed in the

literature (Alkim, Gürbüz, & Kiliç, 2012; Filippo et al., 2013). ANNs have been used for example for the diagnosis of colorectal cancer, multiple sclerosis lesions, colon cancer, tuberculosis, pancreatic disease, gynaecological diseases and early diabetes (Filippo et al., 2013).

Associative Memories (AM) are a class of ANNs specialised in pattern recognition that have drawn the attention of major research groups in the world due to a number of properties such as a rapidity, a compute efficient best-match and an intrinsic noise tolerance. They are built for modelling the learning and retrieval of memories in the brain. Aldape-Pérez et al. gave in Mario, cornelio, Oscar, and Argüelles-Cruz Amadeo (2012) a good summary of the AM evolution, from the first model, the Lernmatrix developed by Karl Steinbuch in 1961, to the recent model proposed between 1982 and 1984 by Hopfield (1982, 1984). The latter is an AM that uses the Hebbian learning rule and it is able to recall patterns from noisy or partial representation. More generally, an AM is a ANN in which the stimulus of an incomplete or corrupted patterns leads to the response of a stored pattern that mostly corresponds to the input pattern. So as associative memories are robust and fault-tolerant retrieval, they seem to be the appropriate tool for the diagnosis of tropical diseases which have several similar signs and symptoms.

There are other medical computer-assisted tools that use others' artificial intelligence approaches. Some of them use expert system (ES) but are unable to manage new situations except those which are exactly covered by their expertise area (Agarkar & Ghatol, 2010). Others use genetic algorithm (GA), but they are

* Corresponding author.

E-mail address: jptchapet@univ-ndere.cm (J.-P. Tchapet Njafa).

INDEX

A

algorithme

d'apprentissage	28
d'initialisation des amplitudes quantiques	117
de Grover	23, 121
de la QAM-NLSA	68
de recherche avec requête distribuée	31, 32
de recherche non linéaire	52, 52
de recherche pour mémoire associative quantique de Ventura et Martinez	24
amplification d'amplitude	123
apprentissage	
non supervisé	20
supervisé	21
artificial neural networks (ANN)	<i>voir</i> réseaux de neurones artificiels

B

bit flip	72
bruit quantique	68
BSQDD	<i>voir</i> diagramme quantique superposé de décision binaire

C

canaux bruités quantiques à un qubit	69
--	----

D

dengue	13
diagnostic	1
diagramme quantique superposé de décision binaire	28
distribution binomiale	126

décohérence	115
E	
état superposé	113
évolution non linéaire	54, 55
F	
fidélité	72
fièvre	
jaune	10
typhoïde	15
I	
intelligence artificielle (IA)	17
intrication quantique	115
M	
maladies tropicales	6
malaria	<i>voir</i> paludisme
mémoire associative	21
quantique	21
quantique avec algorithme de recherche non linéaire	60
quantique avec requête distribuée améliorée	37, 38, 44
O	
opérateurs	
d'erreur	69
de Kraus	<i>voir</i> opérateur d'erreur
unitaires	115
P	
paludisme	7
parallélisme quantique	115
portes logiques quantiques	<i>voir</i> opérateurs unitaires
pyramide sanitaire	78
Q	
QAMDiagnos	28, 75, 80, 99
qubit	113
R	
réseaux de neurones artificiels	20

S

signes et symptômes 77

Z

zone de stabilité 73, 74

