



**THÈSE DE DOCTORAT DE
SORBONNE UNIVERSITÉ**

Spécialité

Automatique et traitement du signal

École doctorale Informatique, Télécommunications et Électronique (Paris)

Présentée par

Damien Bouvier

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de SORBONNE UNIVERSITÉ

Sujet de la thèse :

**Identification de systèmes non linéaires représentés en séries
de Volterra: applications aux systèmes sonores**

soutenue le 10 Décembre 2018

devant le jury composé de :

Mme Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE	Rapporteuse
M. Johan SCHOUKENS	Rapporteur
M. Roland BADEAU	Examineur
M. Benoit FABRE	Examineur
Mme Béatrice LAROCHE	Examinatrice
M. Marc RÉBILLAT	Examineur
M. Thomas HÉLIE	Directeur de thèse
M. David ROZE	Encadrant

*La science est ce que nous comprenons suffisamment bien pour l'expliquer à un ordinateur.
L'art, c'est tout ce que nous faisons d'autre.*

DONALD KNUTH

Remerciements

La solitude n'existe pas. Nul n'a jamais été seul pour naître.

Alain Damasio - *La Horde du contrevent*

Au terme de ces trois années de thèse, il m'apparaît clairement à quel point ce travail n'aurait pas été possible sans la présence et surtout le soutien d'une multitude de personnes.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Thomas Hélie, pour m'avoir accepté dans cette aventure. Sans sa disponibilité, sa rigueur scientifique et ses nombreuses propositions, le contenu de mes travaux aurait été bien moins intéressant. Je remercie aussi mon encadrant, David Roze, qui a toujours été à l'écoute de mes nombreux questionnements. Nos multiples discussions dans le bureau étaient un bon remède à mes découragements passagers.

Je remercie également Tristan Lebrun, pour la collaboration scientifique et les fous rires incongrus qui l'ont agrémentés. Je remercie aussi tout le personnel de l'Ircam que j'ai pu côtoyer pendant ces trois années, et plus spécialement René (et ses gâteaux), Marc (et ses chocolats), Nicolas, Pierre, Léo, Charles et tout le reste de l'équipe S3AM. Bien sûr, des remerciements spéciaux vont aux compagnons de galère (et de boisson), ceux qui forment la troupe du vendredi : Céline, Alice, Hugo et Tristan.

Mais il existe aussi une vie en dehors du laboratoire. Tout d'abord un grand merci aux membres de la Band'O : musique et bonne humeur ont toujours été au rendez-vous. Un chaleureux merci à Pierre, Adrien, Cyril et Ken, compagnons de boustifailles et machine à vapeur depuis de nombreuses années ; merci pour tous ces moments de franche rigolade. Et un merci à tous les autres qui ont tout simplement été présents : Émilie, Amélie, Titus, Anne-Sophie, et tous ceux que je pourrais oublier.

Enfin, un grand merci va à ma famille pour le soutien dont ils ont fait preuve (entre deux moqueries sur ma résistance à la technologie moderne), et surtout à Florence, pour m'avoir épaulé et accompagné durant tout ce temps.

Résumé

Beaucoup d'outils sont disponibles pour traiter les systèmes linéaires (modélisation, simulation, identification, contrôle, etc). Mais dans le cas non linéaire, de nombreux problèmes restent ouverts. Les séries de Volterra donnent une représentation entrée-sortie approximée à une erreur près de tout système non linéaire continu, invariant dans le temps et dit « à mémoire effaçable » (ce qui exclut les effets d'hystérésis, de changements de régimes, d'auto-oscillations ou de chaos). Techniquement, elles correspondent à un développement en série organisé par ordre d'homogénéité par rapport à l'entrée : chaque terme homogène est caractérisé par un noyau convolutif — souvent appelé réponse impulsionnelle généralisée — dont l'ensemble fournit une « signature complète » du système représenté. En ce sens, ces noyaux permettent la modélisation et la simulation de systèmes, mais aussi leur identification à partir de mesures, ce qui est un enjeu important de l'étude des systèmes non linéaires.

Cette thèse porte sur l'identification de systèmes non linéaires représentables en séries de Volterra, et son application à des systèmes sonores. Les travaux présentés reposent sur le développement d'une étape préalable de séparation des termes de la série pour améliorer l'identification. Par rapport aux méthodes déjà existantes de séparation en ordres homogènes, basées sur des relations d'amplitudes entre signaux tests, l'approche adoptée dans cette thèse consiste à exploiter les relations de phase entre signaux afin d'obtenir une méthode robuste.

Cela est tout d'abord obtenu de manière abstraite pour le cas de signaux d'excitations complexes. De cette idée, plusieurs méthodes adaptées au cas des signaux réels sont développées. Ceci amène à définir de nouvelles catégories de signaux pour décrire la sortie d'une série de Volterra, regroupant les contributions selon leurs propriétés de phase. Les méthodes de séparation proposées sont testées et appliquées à une pédale d'effet de guitare. Ensuite, des méthodes d'identification spécifiques aux nouveaux types de signaux sont présentées. Enfin, une méthode d'estimation des paramètres d'une représentation d'état à non-linéarités polynomiales est développée. Celle-ci est appliquée à un haut-parleur électrodynamique, dont les caractéristiques non linéaires sont étudiées.

Abstract

Many tools are available to study linear systems (either for modelling, simulation, identification or control). But in the nonlinear case, many problems remain open. Volterra series give an input-output representation, approximated to within a given error, of any time-invariant continuous nonlinear system with fading memory (this excludes hysteresis effects, regime changes, self-oscillations or chaos). Technically, they correspond to a series expansion sorted by homogeneity order with respect to the input : each homogeneous term is characterized by a convolutive kernel — often called generalized impulse response — whose set provides a « complete signature » of the modelled system. These kernels allow to model and simulate systems, but also to identify them from measurements, which is an important issue in the study of nonlinear systems.

This thesis addresses the identification of nonlinear systems that can be represented with Volterra series, and its application to audio systems. The works presented are based on the development of a preliminary step that consists in separating the series' terms to improve identification. Compared to existing homogeneous order separation methods, which are based on amplitude relationships between test signals, the approach chosen in this thesis is to exploit phase relationships between signals to obtain a robust method.

This is first obtained in the theoretical case of complex excitation signals. From this idea, several methods suited to the use of real signals are developed. This leads to define new signals categories that describes the output of a Volterra series, sorting nonlinear contributions according to their phase properties. The proposed separation methods are applied and tested on a guitar pedal effect. Then, specific identification methods for the new types of signals are presented. Finally, a method for estimating the parameters of a polynomial nonlinear state-space representation is developed. This is applied to an electrodynamic loudspeaker whose nonlinear characteristics are studied.

Liste des publications

- [A1] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Représentation en séries de Volterra d'un modèle passif de haut-parleur électrodynamique avec suspension non-linéaire et perspectives pour identification. *In Congrès Français d'Acoustique*, Le Mans, France, Avril 2016a.
- [A2] Damien BOUVIER : Volterra series : Identification problems and nonlinear order separation. Séminaire *Workshop on Physical Sound Synthesis*, Paris, France, Octobre 2016.
- [A3] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Systèmes audios non linéaires en séries de Volterra : Problèmes d'identification et séparation d'ordre. *In Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio*, Paris, France, Novembre 2016b. Société Française d'Acoustique.
- [A4] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Nonlinear Homogeneous Order Separation for Volterra Series Identification. *In Proceedings of the 20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'17)*, pages 3–10, Edinburgh, Royaume-Uni, 2017.
- [A5] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Phase-based homogeneous order separation for improving volterra series identification. *In Workshop on Nonlinear System Identification Benchmarks*, Liège, Belgique, Avril 2018a.
- [A6] Damien BOUVIER, Tristan LEBRUN, Thomas HÉLIE et David ROZE : Estimation de paramètres d'un haut-parleur électrodynamique non linéaire. *In Congrès Français d'Acoustique*, Le Havre, France, Avril 2018b.
- [A7] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Homophase signal separation for volterra series identification. *In 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, Décembre 2018c. Accepté.
- [A8] Damien BOUVIER, Thomas HÉLIE et David ROZE : Phase-based order separation for volterra series identification. *Automatica*, 2018d. Soumis.

Table des matières

Résumé	vii
Liste des publications	ix
Table des matières	xi
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xix
Notations	xxi
Acronymes	xxv
Avant-propos	1
Introduction	3
Contexte scientifique	3
Approches et contributions	4
Organisation du document.....	5
I Outils pour l'identification de systèmes représentables en séries de Volterra	7
1 Généralités sur l'identification de séries de Volterra	9
1.1 Cadre mathématique de l'identification de systèmes	9
1.1.1 Signaux	9
1.1.2 Systèmes	11
1.1.3 Modèles et représentations	12
1.1.4 Coûts et erreurs	14
1.1.5 Bruits et mesures	15
1.2 Séries de Volterra.....	15

1.2.1	Introduction	15
1.2.2	Définition	16
1.2.3	Formes des noyaux	18
1.2.4	Opérateurs de Volterra d'ordre homogène	18
1.2.5	Série de Volterra à temps discret	20
1.2.6	Utilisation dans le domaine de l'audio	21
1.3	Panorama des méthodes d'identification	22
1.4	État de l'art de la séparation en ordres homogènes.....	25
1.4.1	Motivation et contexte	25
1.4.2	Séparation fondée sur la multi-linéarité.....	26
1.4.3	Séparation fondée sur l'homogénéité.....	27
1.4.4	Cas particulier d'exploitation de la phase.....	28
1.5	Positionnement et hypothèses	29
2	Séparation en ordres homogènes fondée sur des relations de phase	31
2.1	Méthode existante de séparation par amplitude.....	32
2.1.1	Présentation de la méthode AS	32
2.1.2	Robustesse de la méthode	32
2.2	Séparation par phase pour des signaux à valeurs complexes	34
2.2.1	Principe et idée initiale.....	34
2.2.2	Présentation de la méthode CPS.....	34
2.2.3	Propriétés	35
2.3	Adaptation du déphasage au cas des signaux réels	40
2.3.1	Signaux interconjugués	42
2.3.2	Signaux homophases.....	45
2.3.3	Présentation de la méthode HPS	47
2.3.4	Propriétés	48
2.4	Séparation d'ordre utilisant phase et amplitude	50
2.4.1	Idée.....	50
2.4.2	Présentation de la méthode PAS.....	50
2.4.3	Propriétés	52
2.5	Séparation d'ordre par double déphasage	52
2.5.1	Résultats préliminaires.....	52
2.5.2	Présentation de la méthode RPS.....	56
2.5.3	Propriétés	58
2.6	Comparaison des méthodes	63
2.6.1	Considérations pratiques	63
2.6.2	Comparaison théorique	66
2.6.3	Comparaison à partir de simulations	68
2.7	Conclusion du chapitre	73
3	Identification de noyaux de Volterra par moindres carrés	75
3.1	Formulation du problème d'identification.....	75

3.1.1	Identification à partir de la sortie totale	76
3.1.2	Identification à partir des sorties d'ordres homogènes	77
3.1.3	Identification à partir des signaux interconjugués	77
3.1.4	Identification à partir des signaux homophases	78
3.2	Cas des noyaux de Volterra à temps discret	80
3.2.1	Expression matricielle des sorties d'ordre homogène	81
3.2.2	Expression matricielle de la sortie totale	82
3.2.3	Expression matricielle des signaux interconjugués	82
3.2.4	Expression matricielle des signaux homophases	85
3.2.5	Remarques sur les matrices de combinatoire	86
3.3	Cas des noyaux de Volterra projetés sur une base orthonormale.	88
3.3.1	Projection d'un noyau de Volterra.....	88
3.3.2	Expression matricielle des sorties d'ordre homogène	89
3.3.3	Expression matricielle des signaux interconjugués	90
3.3.4	Remarques sur le choix des bases	91
3.4	Comparaison des méthodes	93
3.4.1	Identification de noyaux à mémoire tronquée.....	94
3.4.2	Identification à l'aide de bases orthonormales	97
3.4.3	Remarques conclusives	100
4	Estimation de représentations d'états à non-linéarités polynomiales	103
4.1	Introduction	103
4.2	Rappels sur l'écriture d'une représentation d'état en série de Volterra	104
4.2.1	Représentation d'état à non-linéarités polynomiales.....	104
4.2.2	Mise en série	106
4.2.3	Exemple d'un système masse-ressort-amortissement non linéaire.....	108
4.2.4	Équivalence avec les modèles de type schéma-blocs.....	112
4.3	Méthode d'estimation itérative	113
4.3.1	Estimation des matrices du système linéarisé	113
4.3.2	Estimation des fonctions non linéaires	114
4.3.3	Exemple illustratif	117
4.4	Avantages et inconvénients	118
II	Applications à des systèmes sonores	121
5	Estimation des caractéristiques physiques d'un haut-parleur élec- trodynamique	123
5.1	Introduction	123
5.2	Modèle de haut-parleur électrodynamique	124
5.2.1	Équations de Thiele & Small	124

5.2.2	Phénomènes non linéaires	125
5.2.3	Modèle sous forme de représentation d'état.....	128
5.3	Protocole expérimental.....	128
5.3.1	Mesures	128
5.3.2	Estimation des paramètres physiques	130
5.4	Résultats.....	132
5.4.1	Signaux	132
5.4.2	Paramètres estimés	137
5.4.3	Simulations	142
5.5	Conclusion et perspectives	142
6	Effet audio analogique à forte distorsion : séparation et perspective pour l'identification	145
6.1	Pédale SansAmp™ GT2.....	145
6.2	Protocole expérimental.....	148
6.3	Résultats	149
6.3.1	Mode <i>Blues Breaker</i>	149
6.3.2	Mode <i>Métallica</i>	154
6.3.3	Remarques sur les méthodes de séparation	160
6.4	Perspectives pour l'identification	160
	Conclusion et perspectives	163
	Bilan de la thèse.....	163
	Perspectives de recherche	165
A	Preuves pour le Chapitre 2	167
A.1	Preuve du Théorème 2.1	167
A.2	Preuve du Théorème 2.2	168
A.3	Preuve de l'effet de la méthode RPS sur le bruit de mesure	169
	Bibliographie	173

Liste des figures

0.1	Organisation du document; les chapitres avec un astérisque comportent une application académique utilisant une simulation numérique.....	5
1.1	Structures élémentaires des modèles de type schéma-blocs.....	14
1.2	Schéma des différents bruits présents lors d'une mesure.....	15
1.3	Schéma d'équivalence entre l'opérateur V d'une série de Volterra et la somme des opérateurs d'ordre homogène V_n	19
1.4	Nombre de coefficients non nuls du noyau triangulaire d'ordre n , pour n allant de 1 à 5, en fonction de sa mémoire M	21
1.5	Identification sans et avec séparation d'ordre préalable.	26
1.6	Structure du modèle de Hammerstein polynomial.	28
2.1	Comparaison de l'évolution dans le plan complexe des puissances des facteurs utilisés dans les méthodes AS pour $\alpha < 1$ et CPS avec $w = e^{j2\pi/(N+1)}$ pour $N = 4$	36
2.2	Comparaison de l'évolution dans le plan complexe des puissances des facteurs $w = e^{j2\pi/(N+1)}$ pour $N = 4$ et $\lambda = \rho w$ pour $\rho < 1$	40
2.3	Lignes de niveau (en décibels) de l'amélioration du rejet des perturbations d'ordres supérieurs à la troncature pour la méthode CPS en fonction du nombre de phases P et du facteur de contraste ρ	41
2.4	Lignes de niveau (en décibels) de l'amélioration du rapport signal-sur-bruit pour la méthode CPS en fonction du nombre de phases P et du facteur de contraste ρ , pour l'ordre $n = 10$	41
2.5	Spectres des signaux interconjugués $y_{n,q}$ décrits dans l'Exemple 2.2	45
2.6	Représentation des signaux interconjugués $y_{n,q}$ dans un plan (n, p) , avec n leur ordre de non-linéarité et $p = n - 2q$ leur indice de déphasage.	46
2.7	Illustration du repliement d'ordre apparaissant dans la méthode HPS pour un ordre de troncature $N = 3$ en représentant les signaux interconjugués $y_{n,q}$ dans un plan (n, p) , avec n leur ordre de non-linéarité et $p = n - 2q$ leur indice de déphasage.	49

2.8	Répartition des signaux biphasés Ψ_{p_1, p_2} jusqu'à l'ordre $n = 3$ dans un plan (p_1, p_2)	54
2.9	Répartition des signaux interconjugués $y_{n, q}$ jusqu'à l'ordre $n = 3$ dans le demi-espace tridimensionnel (p_1, p_2, n)	55
2.10	Illustration du repliement apparaissant dans la méthode RPS en représentant les signaux biphasés Ψ_{p_1, p_2} dans un plan (p_1, p_2)	60
2.11	Évolution des différentes amplitudes a_k , où $k \in \llbracket 0; \lfloor P/2 \rfloor \rrbracket$, de la méthode RPS en fonction du nombre de phases P (cf. (2.56)).	62
2.12	Évolution de la dynamique d'amplitude minimum (en décibels) nécessaire à la méthode RPS en fonction de l'ordre de troncature N	62
2.13	Comparaison du nombre de signaux nécessaires minimum K_{\min} pour les méthodes de séparation en fonction de l'ordre de troncature N	66
2.14	Schéma du système simulé décrit par la relation (2.64).	68
2.15	Noyaux d'ordre 1 et 2 du système simulé.	69
2.16	Erreur d'estimation des signaux y_n pour les méthodes AS, PAS et RPS, pour deux valeurs du nombre de signaux tests K	71
2.17	Erreur d'estimation des signaux interconjugués $y_{n, q}$ pour la méthode RPS.	72
2.18	Erreur d'estimation des signaux homophases ψ_p par la méthode HPS pour deux nombres de signaux tests K	72
2.19	Valeur moyenne du temps de calcul des méthodes AS, PAS, RPS et HPS pour un nombre de signaux tests $K = 190$	73
3.1	Schéma d'un modèle de Wiener parallèle.	93
3.2	(Identification des coefficients des noyaux triangulaires) Évolution de l'erreur de simulation ϵ (en décibels) en fonction du temps de calcul machine pour les différentes approches d'identification et deux valeurs de RSB.	95
3.3	(Identification des coefficients des noyaux triangulaires) Noyaux de Volterra des deux premiers ordres calculés à partir du modèle, estimés à partir des signaux homophases avec $K = 7$ et estimés à partir des signaux homophases avec $K = 28$	98
3.4	(Identification de la projection des noyaux sur une base) Évolution de l'erreur de simulation ϵ (en décibels) en fonction du temps de calcul pour les différentes approches d'identification et deux valeurs de RSB.	99
3.5	(Identification de la projection des noyaux sur une base) Noyaux de Volterra des deux premiers ordres estimés à partir des signaux homophases avec (a) $K = 7$ et (b) $K = 28$; l'identification est faite en utilisant une projection sur une base orthogonale créée à partir du pôle réel du système étudié.	100

4.1	Structure de réalisation tronquée à l'ordre 3 de l'équation d'état donnée par (4.6a).....	109
4.2	Structure de réalisation tronquée à l'ordre 3 de l'équation de sortie donnée par (4.6b).....	110
4.3	Structures de réalisation exacte et tronquée à l'ordre 3 d'un système masse-ressort-amortissement non linéaire modélisée par la relation (4.26).	111
4.4	Structures de réalisation tronquée à l'ordre 3 de différents modèles de type schéma-blocs polynomiaux.....	113
5.1	Schéma constitutif d'un haut-parleur électrodynamique.	124
5.2	Schéma électrique équivalent des équations de Thiele & Small données par (5.1).....	125
5.3	Évolution du couplage électrodynamique en fonction de la position de la membrane pour plusieurs relations entre taille d'aimant L_{aimant} et taille de bobine L_{bobine}	127
5.4	Schéma du banc expérimental.	129
5.5	Mesures de la tension, du courant et de la position du haut-parleur excité en tension par une sinusoïde de fréquence 40 Hz.	133
5.6	Mesures de la tension, du courant et de la position du haut-parleur excité en tension par un sinus glissant (allant de 5 à 2000 Hz).	134
5.7	Signaux temporels des ordres homogènes séparés du courant et de la position du haut-parleur excité en tension par une sinusoïde de fréquence 40 Hz.....	135
5.8	Spectres d'amplitude des ordres homogènes séparés du courant et de la position du haut-parleur excité en tension par une sinusoïde de fréquence 40 Hz.	136
5.9	Signaux temporels des ordres homogènes séparés du courant et de la position du haut-parleur excité en tension par un sinus glissant (allant de 5 à 2000 Hz).	138
5.10	Fonctions de transfert tension vers courant et tension vers position mesurés à partir des signaux séparés et calculés à partir des paramètres estimés.	139
5.11	Courbes caractéristiques estimés de la force de rappel et du couplage électrodynamique en fonction de la position de la membrane, en prenant en compte seulement le terme linéaire ou bien tout le polynôme estimé.	141
5.12	Comparaison des signaux temporels de courant et position provenant des mesures, de la simulation par le modèle linéaire et de celle par le modèle non linéaire du haut-parleur excité par le sinus glissant.	143
6.1	Pédale SansAmp™ GT2.....	146

6.2	Modes étudiés de la SansAmp™ GT2 fournis dans le manuel utilisateur de la pédale.	147
6.3	Schéma du banc expérimental.	148
6.4	(Mode <i>Blues Breaker</i> – Mesures) Signal temporel et spectre d’amplitude de la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence 220 Hz.	150
6.5	(Mode <i>Blues Breaker</i> – Mesures) Spectrogramme (en décibels) de la réponse à un <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	151
6.6	(Mode <i>Blues Breaker</i> – RPS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode RPS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	152
6.7	(Mode <i>Blues Breaker</i> – PAS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode PAS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	153
6.8	(Mode <i>Blues Breaker</i> – HPS) Spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	154
6.9	(Mode <i>Métallica</i> – Mesures) Signal temporel et spectre d’amplitude la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence 220 Hz.	155
6.10	(Mode <i>Métallica</i> – Mesures) Spectrogramme (en décibels) de la réponse à un <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	156
6.11	(Mode <i>Métallica</i> – RPS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode RPS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	157
6.12	(Mode <i>Métallica</i> – PAS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode PAS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	158
6.13	(Mode <i>Métallica</i> – HPS) Spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS pour une excitation de type <i>sweep</i> exponentiel allant de 50 à 2000 Hz.	159

Liste des tableaux

2.1	Tableau comparatif des différentes méthodes de séparation pour une série de Volterra de degré N	67
3.1	Comparaison de la taille des matrices de combinatoire pour une série de Volterra de degré N et un signal de longueur L	87
5.1	Tableau comparatif des paramètres Thiele & Small donnés par le constructeur et ceux estimés sur la fonction de transfert.	140

Notations

Les principales notations employées dans ce document sont données ici. Les notations pouvant porter à confusion sont explicitées lorsque le contexte n'offre pas de clarification. Tous les indices désignant des éléments de vecteur ou de matrice sont numérotés à partir de 0.

Généralités

$:=$	Égal par définition
$ \cdot $	Valeur absolue
$\operatorname{Re}[\cdot], \operatorname{Im}[\cdot]$	Partie réel et partie imaginaire d'un nombre complexe
$\arg \cdot$	Argument (ou phase) d'un nombre complexe
$\operatorname{card}(\cdot)$	Cardinal d'un ensemble
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$\lfloor \cdot \rfloor$	Partie entière
$a \equiv b [k]$	Congruence modulo k
$\binom{n}{k}$	Coefficient binomial, vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\binom{n}{k_1, \dots, k_m}$	Coefficient multinomial, vaut $\frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$
$*$	Opérateur de convolution
$\operatorname{RMS}(u)$	Valeur efficace du signal u
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Loi normale de moyenne μ et de variance σ^2
$\mathcal{CN}(\mu, \sigma^2, \gamma)$	Loi normale à valeurs complexes de moyenne μ , de variance σ^2 et de pseudo-variance γ
$O(f(x))$	Fonction qui est dominée par f lorsque $x \rightarrow +\infty$

Vecteurs et matrices

\mathbf{x}	Vecteur
$x_i, [\mathbf{x}]_i$	$i + 1^{\text{ème}}$ du vecteur \mathbf{x}
\mathbf{X}	Matrice

$X_{ij}, [\mathbf{X}]_{ij}$	Coefficient de la $i + 1^{\text{ème}}$ ligne et $j + 1^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{X}
$[\mathbf{X}]_{i,:}, [\mathbf{X}]_{:,j}$	Respectivement $i + 1^{\text{ème}}$ ligne et $j + 1^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{X}
$(\cdot)^T$	Transposé
$(\cdot)^H$	Hermitien (aussi appelé conjugué transposé)

Ensembles et espaces

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers
\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{C}	Ensemble des complexes
$\llbracket a; b \rrbracket$	Ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq k \leq b$
\mathbb{T}	Ensemble des instants $t \in \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ ou $[0, T]$ avec $T > 0$
\mathbb{T}_d	Ensemble des instants discrets $l \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ ou $\llbracket 0; L \rrbracket$ avec $L \in \mathbb{N}$

$L^p(\mathbb{A}, \mathbb{B})$	Espace de Lebesgue d'ordre p des fonctions de \mathbb{A} dans \mathbb{B}
$\mathcal{ML}_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$	Espace des opérateurs $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{B}$ bornés et multi-linéaires d'ordre n
\mathcal{U}, \mathcal{Y}	Espace des signaux d'entrées et de sorties

\mathbb{I}_p^N	Ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $ p \leq n \leq N$ et $n \equiv p [2]$
\mathbb{J}_{p_1, p_2}^N	Ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $ p_1 + p_2 \leq n \leq N$ et $n \equiv p_1 + p_2 [2]$
$\mathbb{K}_n(m)$	Ensemble des n -uplets ordonnés $(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket^n$ avec $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$
$\mathbb{L}(n)$	Ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2 \leq p + q \leq n$
$\mathbb{M}_n(p, q)$	Ensemble des p -uplets $m \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket^p$ tels que $\sum_{i=1}^p m_i = n - q$
\mathcal{P}_n	Ensemble des $n!$ permutations des entiers de 1 à n

Séries de Volterra

\mathcal{VS}	Espace des séries de Volterra
\mathcal{V}_n	Espace des opérateurs de Volterra d'ordre n
V	Opérateur de Volterra
V_n	Opérateur de Volterra homogène d'ordre n
y_n	Sortie homogène d'ordre n
$y_{n,q}$	Signal interconjugué d'ordre n et d'indice de conjugaison q
ψ_p	Signal homophasé d'indice de phase p

Représentation d'état

\dot{x}	Dérivée de la grandeur x par rapport au temps
η_u, η_x, η_y	Dimension respective de l'entrée, l'état et la sortie
\mathcal{X}	Espace des états

$M_{p,q}$	Dérivée de Fréchet d'ordre (p, q) de la fonction caractéristique de l'équation d'état
$N_{p,q}$	Dérivée de Fréchet d'ordre (p, q) de la fonction caractéristique de l'équation de sortie

Acronymes

Les principaux acronymes et abréviations employées dans ce document sont données ici. Lorsque l'acronyme provient d'un terme non français, celui-ci est précisée entre parenthèses.

i.e.	C'est-à-dire (de la locution latine <i>id est</i>)
e.g.	Par exemple (de la locution latine <i>exempli gratia</i>)
<i>ssi</i>	Si et seulement si
i.i.d.	Indépendantes et identiquement distribuées
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFD-2D	Transformée de Fourier Discrète à deux dimensions
RSB	Rapport signal-sur-bruit
BLA	Meilleure approximation linéaire (de l'anglais <i>Best Linear Approximation</i>)
PNLSS	Représentation d'état à non-linéarités polynomiales (de l'anglais <i>Polynomial NonLinear State Space</i>)
AS	Séparation par Amplitudes (de l'anglais <i>Amplitude Separation method</i>)
CPS	Séparation par Phase pour signaux Complexes (de l'anglais <i>Complex Phase Separation method</i>)
HPS	Séparation en signaux Homophases (de l'anglais <i>Homophase Separation method</i>)
PAS	Séparation par utilisation de Phases et Amplitudes (de l'anglais <i>Phase and Amplitude Separation method</i>)
RPS	Séparation par Phase pour signaux Réels (de l'anglais <i>Real-valued Phase-based Separation method</i>)

Avant-propos

L'étude des instruments de musique et des systèmes audio révèle en général des phénomènes dynamiques non linéaires. Considérons par exemple le fonctionnement de la trompette. Lorsque l'instrumentiste joue plus fort, la réponse sonore de l'instrument n'est pas que proportionnellement plus forte. Il apparaît un phénomène non linéaire appelé *cuivrage*, qui caractérise le timbre de la trompette. D'un point de vue musical, cela se caractérise par un son brillant; d'un point de vue physique, ce phénomène consiste en une augmentation du contenu hautes fréquences du signal sonore dû à un phénomène de propagation acoustique non linéaire.

Les comportements non linéaires se retrouvent dans beaucoup d'autres instruments de musique : la vibration des cordes soumises à de fortes excitations, doublement de fréquence des instruments à anches, phénomènes de chaos de certaines percussions de type gong ou cymbales, etc. Dans le cas des guitares électriques, les effets non linéaires sont même expressément recherchés. La myriade de pédales connues sous le nom de saturation, de distorsion, d'*overdrive* ou encore de *fuzz* reposent toutes sur l'utilisation de (plus ou moins) fortes non-linéarités pour permettre au guitariste d'obtenir de manière précise le son souhaité.

À l'inverse, les constructeurs de transducteur audio (micros, haut-parleurs) cherchent à éviter à tout prix les effets non linéaires dans leurs produits. L'objectif étant ici une captation ou reproduction sonore fidèle, l'analyse des phénomènes non linéaires permet de les éviter (ou de les compenser), et donc de se rapprocher du transducteur idéal.

À la lumière de ces exemples, il apparaît donc nécessaire de considérer les phénomènes non linéaires lorsque l'on s'intéresse à l'étude des systèmes audio. Dans cette thèse, des outils scientifiques sont développés pour l'identification de systèmes non linéaires, et appliqués à des systèmes audio.

Introduction

CONTEXTE SCIENTIFIQUE

Beaucoup d'outils sont disponibles pour traiter les systèmes linéaires, que ce soit dans un but de modélisation, de simulation, d'identification ou de contrôle. Mais dans le cas non linéaire, la palette d'outils disponibles est bien plus restreinte, et de nombreux problèmes restent ouverts. Un système non linéaire est par définition un système dont la relation entrée-sortie ne respecte pas le principe de superposition. Cet ensemble comprend tout types de comportements allant des distorsions au chaos en passant par les phénomènes de bifurcation et d'hystérésis.

Dans cette thèse nous nous restreindrons aux systèmes dynamiques à non-linéarités régulières, parfois aussi appelés systèmes faiblement non linéaires. Cela correspond aux systèmes dont les représentations d'état ne comportent que des fonctions analytiques (excluant de fait les non-linéarités contenant des discontinuités). Dans ce cadre, nous nous intéresserons plus précisément au modèle des séries de Volterra. Issue des travaux du mathématicien italien du même nom sur l'étude des fonctionnelles, cette représentation repose sur la décomposition de la relation entrée-sortie d'un système à l'aide d'une série organisée par termes d'ordre homogène — de manière similaire au développement en séries entières d'une fonction.

Dans le cadre de l'automatique, les séries de Volterra permettent de représenter tout système non linéaire continu et invariant dans le temps si celui-ci possède la propriété de « mémoire effaçable » (ou *fading memory* en anglais) [Boyd et Chua, 1985]. Si cette propriété exclut les systèmes comportant de l'hystérésis, des changements de régimes, des auto-oscillations ou du chaos, il reste que le formalisme de Volterra est adapté à un grand nombre de systèmes pour une plage de fonctionnement délimitée (i.e. pour des entrées bornées en amplitude). Ceci est toujours valable dans le cas des systèmes audio dont un grand nombre possèdent la propriété de « mémoire effaçable ».

Techniquement, l'organisation par ordres homogènes selon l'entrée des séries de Volterra correspond au développement suivant : chaque terme homogène est caractérisé par un noyau convolutif — parfois appelé réponse impul-

sionnelle ou fonction de transfert généralisée — dont l'ensemble fournit une « signature complète » du système représenté. En ce sens, ces noyaux sont adaptés à la modélisation, la simulation et l'identification de systèmes non linéaires. Le formalisme de Volterra offre donc une représentation qui est à la fois générale et structurée.

Pour ces raisons, l'identification d'un système en utilisant les séries de Volterra est une question très largement étudiée, et ce depuis le milieu du siècle dernier [Wiener, 1942]. Pourtant, le problème de la détermination des noyaux de Volterra à partir de mesures pose encore de sérieuses difficultés. La première concerne le très grand nombre de coefficients à estimer, qui croît très vite lorsque l'on augmente le degré (de troncature) de la série ou la mémoire (i.e. le support temporel des noyaux) du système. Dans la littérature, ces problèmes sont généralement contournés par l'utilisation de décomposition des noyaux à estimer. Cela peut se faire soit à l'aide de décomposition tensorielle (voir par exemple [Favier *et al.*, 2012]) ou bien par une projection sur des bases orthonormales (voir par exemple [Kibangou, 2005]). L'utilisation de structures simplifiées (de type schéma-bloc) pour l'identification peut aussi être vue (dans certains cas) sous l'angle du formalisme de Volterra [Giri et Bai, 2010].

Une autre contrainte réside dans la nécessité d'identifier conjointement les noyaux de Volterra des différents ordres à partir de la sortie totale mesurée. L'utilisation de méthodes de régularisation permet de minimiser cette difficulté en imposant certains critères aux noyaux (voir par exemple [Birpoutsoukis, 2018]). Les travaux présentés dans ce manuscrit reposent sur une autre approche.

APPROCHES ET CONTRIBUTIONS

Dans cette thèse, nous nous intéressons spécialement à l'utilisation d'une étape préalable de séparation en ordres homogènes pour simplifier et améliorer l'identification des noyaux. Notre idée est de tirer parti de la structure en série du modèle de Volterra qui organise les non-linéarités de manière unique selon des termes d'ordres homogènes. La méthode existante de séparation, fondée sur des relations d'amplitude entre un ensemble de signaux tests, souffre de problèmes de robustesse [Boyd *et al.*, 1983]. Cette thèse cherche à exploiter les informations de phase afin d'améliorer la sensibilité de la séparation au bruit de mesure et au degré de la série.

Cette approche conduit tout d'abord à l'élaboration d'une méthode théorique abstraite permettant une séparation très efficace et robuste des ordres homogènes. L'adaptation de cette méthode à une utilisation en situation réelle nous amène à définir une nouvelle organisation des termes de la série de Volterra nécessitant la définition de nouveaux types de signaux. Des méthodes fondées principalement sur l'exploitation de la phase sont ensuite développées pour séparer les signaux introduits. L'application des méthodes proposées à

Décomposition structurée en série de Volterra

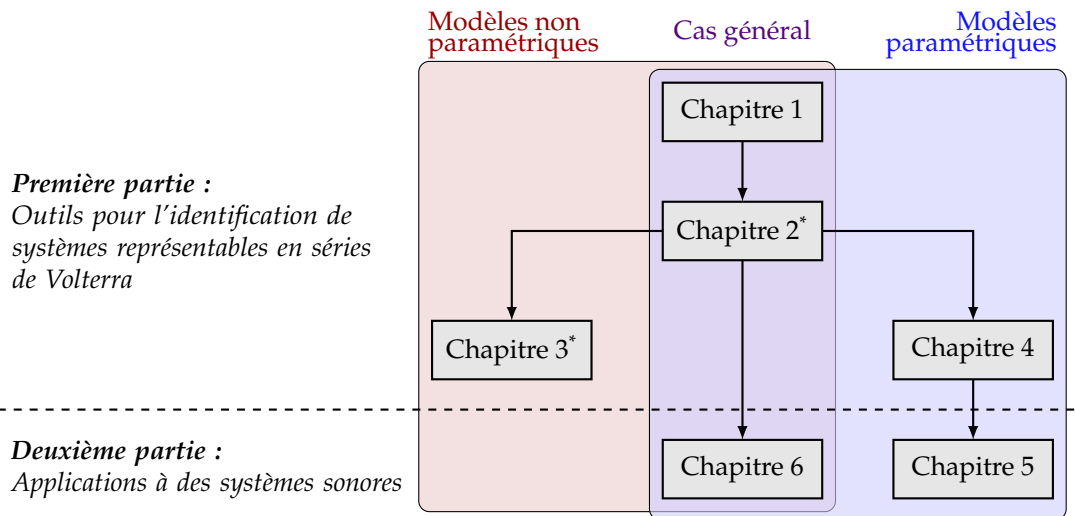


FIGURE 0.1 – Organisation du document ; les chapitres avec un astérisque comportent une application académique utilisant une simulation numérique.

une pédale d'effet de guitare à forte distorsion permet de mettre en valeur l'intérêt de l'approche par exploitation de la phase.

Les résultats sur la séparation sont ensuite utilisés pour l'identification de systèmes. Tout d'abord, de nouvelles méthodes d'identification des noyaux de Volterra sont proposées (dans le cadre classique des moindres carrés). Puis une méthode d'estimation des paramètres de représentation d'état à non-linéarités polynomiales est développée à partir de la connaissance des contributions par ordres homogènes (isolées par les méthodes de séparation proposées). Celle-ci est appliquée à un haut-parleur électrodynamique, dont les caractéristiques non linéaires sont étudiées, et l'intérêt de la méthode est discuté.

ORGANISATION DU DOCUMENT

Ce document s'articule en deux parties. La première partie présente les différents outils généraux développés pour l'identification de systèmes représentables en séries de Volterra. La deuxième partie s'intéresse aux applications de ces méthodes sur des systèmes audio mesurés expérimentalement. La structure du document ainsi que l'organisation des chapitres sont données dans la [Figure 0.1](#).

Première partie : Outils pour l'identification de systèmes représentables en séries de Volterra

Les notions de base du problème d'identification de systèmes ainsi que le formalisme des séries de Volterra sont rappelés en [Chapitre 1](#). De plus, un état de l'art des méthodes d'identification et de séparation d'ordres est donné.

Dans le [Chapitre 2](#), les méthodes de séparation exploitant la phase sont développées. La méthode existante fondée sur l'amplitude est d'abord rappelée. Puis, une méthode exploitant la phase est présentée dans le cadre théorique abstrait des signaux complexes, avant d'être adaptée au cas pratique des signaux réels. Enfin, les différentes méthodes de séparation proposées sont décrites puis comparées sur une expérience numérique.

Le [Chapitre 3](#) présente de nouvelles approches pour l'identification de séries de Volterra fondées sur les résultats précédents. Deux familles de méthodes d'identification sont proposées : ou bien des méthodes cherchant à identifier directement les noyaux de Volterra, ou bien des méthodes utilisant une projection sur une base orthonormale. Ces méthodes sont comparées sur une expérience numérique.

Enfin, une nouvelle méthode itérative d'estimation des paramètres d'une représentation d'état non linéaire est proposée en [Chapitre 4](#). Pour cela, l'écriture d'une représentation d'état dans le formalisme des séries de Volterra est rappelée.

Deuxième partie : Applications à des systèmes sonores

Dans le [Chapitre 5](#), la méthode d'estimation des paramètres est appliquée au cas d'un haut-parleur électrodynamique. Ses paramètres physiques sont estimés, et les courbes caractéristiques des effets non linéaires sont présentées. De plus, des signaux simulés à partir des paramètres identifiés sont comparés aux mesures.

Enfin, le [Chapitre 6](#) propose une application des méthodes de séparation développées au cas d'une pédale d'effet de guitare. Ce système à forte distorsion permet d'étudier le comportement de ces méthodes dans un cadre où un très grand nombre de termes est nécessaire pour approcher la dynamique du système avec le développement de la série. On teste en particulier la qualité des différents types de séparation proposées dans ce cadre ardu.

— Première partie —

Outils pour l'identification de
systèmes représentables en séries de
Volterra

— Chapitre 1 —

Généralités sur l'identification de séries de Volterra

Connais ton ennemi et connais-toi toi-même,
tu vaincras cent fois sans péril.

Sun Zi, *Art de la Guerre*

1.1 CADRE MATHÉMATIQUE DE L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES

L'identification de systèmes consiste à retrouver une description de la dynamique d'un système à partir de données mesurées. Pour cela, plusieurs approches existent, qui peuvent toutes se résumer comme suit : il s'agit, pour un *modèle* fixé supposé capable de représenter le système d'intérêt, et à partir d'un ensemble de *signaux* mesurés, de déterminer les paramètres d'un *système* qui minimisent un *coût* choisi [Ljung, 1987; Walter et Pronzato, 1994]. Dans cette section, nous donnons les définitions, telles qu'utilisées dans le cadre de cette thèse, des notions suivantes : signaux, systèmes, modèles (ou représentations) et coût (ou fonction de coût).

1.1.1 Signaux

La notion de signal désigne une donnée, le plus souvent une valeur numérique, qui évolue avec le temps [Oppenheim *et al.*, 1997]. Nous en prenons la définition mathématique suivante :

Définition 1.1. Soit \mathbb{T} un support temporel et \mathbb{U} un domaine de valeurs. Un signal $u \in \mathcal{U}$ est une fonction telle que

$$\begin{aligned} u: \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{U}, \\ t &\mapsto u(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où \mathcal{U} est un espace de fonctions de \mathbb{T} dans \mathbb{U} , de type Hilbert¹.

Un signal est dit à *temps continu* si le support temporel \mathbb{T} est un intervalle de \mathbb{R} — i.e. si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ —, et à *temps discret* si $\mathbb{T} = \mathbb{T}_d \subseteq \mathbb{Z}$. L'ensemble \mathbb{U} définit le domaine des valeurs de $u(t)$; il vaut généralement \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Les travaux de Joseph Fourier [Fourier, 1822] ont permis l'étude des signaux à travers leur spectre. Le passage du domaine temporel au fréquentiel se fait à l'aide d'une des transformées de Fourier, en fonction de la nature du support temporel \mathbb{T} . Selon la méthode d'identification utilisée et le modèle choisi, l'un ou l'autre domaine est préféré.

Dans le domaine de l'identification, plusieurs catégories de signaux sont souvent utilisées en pratique. Nous rappelons ici les plus courantes.

Signaux sinusoïdaux. Ces signaux mono-fréquentiels (ou mono-chromatique) sont très utilisés dans un cadre théorique pour mettre en avant les caractéristiques fréquentielles des systèmes étudiés. Toutefois, un tel signal est (spectralement) trop pauvre pour permettre la tâche d'identification.

Signaux périodiques. Ces signaux multi-fréquentiels permettent, de par leur répétition, une gestion du bruit de mesure en moyennant les valeurs estimées sur plusieurs périodes. Cette approche nécessite la gestion des transitoires. À l'instar des sinusoïdes, le spectre discret des signaux périodiques conduit à une excitation très localisée en fréquence du système, ce qui n'est pas optimal pour l'identification.

Sinus à balayage fréquentiel (ou sinus glissant, *sweep* ou *chirp*). Ces signaux se caractérisent par une sinusoïde dont la fréquence instantanée — ou de manière équivalente la phase instantanée — suit une loi mathématique choisie. Les bornes fréquentielles ainsi que les différents types d'évolution (linéaire, exponentielle, etc.) permettent de contrôler précisément le domaine fréquentielle excité.

Processus aléatoire indépendant et identiquement distribué (ou bruit blanc). Ces signaux stochastiques sont définis à partir de densité de probabilité (loi gaussienne ou normale, loi uniforme, etc.). Dans le cas d'un bruit gaussien, les caractéristiques statistiques d'indépendance et d'orthogonalité sont très intéressantes pour l'identification. Leurs variantes filtrées — nommées *bruit colorés* — permettent un contrôle du contenu fréquentiel, mais perdent certaines propriétés statistiques comme l'indépendance.

1. Les espaces standards utilisés en traitement du signal sont ceux de Lebesgues. Dans cette thèse, on emploiera spécialement $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{U})$, $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{U})$ et $L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{U})$.

Sommes de sinusoïdes à phase aléatoire. Ces signaux sont un compromis entre les signaux périodiques et les processus aléatoires. En effet, leur périodicité permet une gestion du bruit par moyennage tandis que leurs propriétés statistiques tendent vers celles d'un bruit blanc gaussien lorsque le nombre de sinusoïdes tend vers l'infini [Pintelon et Schoukens, 2012].

1.1.2 Systèmes

Dans le domaine de l'automatique, un système peut être vu comme un opérateur qui, à une *entrée* donnée, aussi appelée *excitation*, fait correspondre une *sortie*, aussi appelée *réponse* [Kailath, 1980; Khalil et Grizzle, 1996]. Nous en prenons la définition mathématique suivante :

Définition 1.2. Un système est défini par le triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, où \mathcal{S} est un opérateur qui, à tout signal $u \in \mathcal{U}$, fait correspondre le signal $y \in \mathcal{Y}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{Y}, \\ u &\mapsto y = \mathcal{S}[u]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Par extension, nous utiliserons \mathcal{S} pour désigner à la fois le système et l'opérateur qui le décrit.

La taxonomie des systèmes peut être faite selon plusieurs propriétés, dont certaines sont données ici.

Linéarité. Un système \mathcal{S} est dit *linéaire* s'il suit le principe de superposition, i.e. si pour tout signaux $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ tels que $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$ on a

$$\mathcal{S}[u_1 + u_2] = \mathcal{S}[u_1] + \mathcal{S}[u_2]. \tag{1.3}$$

Par opposition, un système est dit *non linéaire* s'il ne suit pas le principe de superposition². Cette définition par la négation entraîne un flou quant à la notion de système non linéaire, qui regroupe ainsi beaucoup de phénomènes de nature différente : intermodulation, saturation, hystérésis, bifurcation, chaos, etc. Dans un objectif d'identification, il convient donc de réduire le champ d'étude, ce que nous ferons par la suite en nous restreignant à un type de modèle précis.

Stationnarité. Un système est dit *invariant dans le temps* (ou *stationnaire*) si un décalage temporel de l'entrée u implique seulement le même décalage temporel de la sortie, i.e. si pour tout $T \in \mathbb{T}$ et $u \in \mathcal{U}$, on a

$$\mathcal{S}[u](t - T) = \mathcal{S}[u_T](t) \tag{1.4}$$

2. Dans certaines définitions, la classe des systèmes linéaires est incluse dans celle des systèmes non linéaires.

pour tout $t \in \mathbb{T}$, où $u_T \in \mathcal{U}$ désigne le signal décalé temporellement donné par $u_T(t) = u(t - T)$.

En pratique, la validité de l'hypothèse de stationnarité dépend du système étudié, mais aussi de la manière dont l'expérience est menée. Considérons par exemple le cas d'un système acoustique (e.g. instrument de musique, réverbération d'une salle) : ses propriétés dépendent de paramètres environnementaux (température, hygrométrie, etc.) qui peuvent varier dans le temps. Mais si l'on effectue l'expérience sur une courte durée (devant la variabilité des paramètres environnementaux), alors l'hypothèse de stationnarité peut être considérée comme valide.

Effet mémoire. Un système est dit *statique* si la sortie à un instant t dépend seulement de l'entrée à ce même instant t . Par opposition, un système qui n'est pas statique est dit à *mémoire* ou *dynamique*. En pratique, même si peu de systèmes physiques sont purement statiques, cette notion reste utile pour l'étude de certains phénomènes (e.g. la représentation de la saturation des pédales de guitare).

1.1.3 Modèles et représentations

La notion de modèle désigne une représentation mathématique décrivant la relation entrée-sortie d'un système ; un modèle est généralement constitué d'une fonction — au sens large du terme — paramétrée par un ensemble de valeurs. Une taxonomie classique pour l'identification est celle de la distinction entre les modèles de type *boîte noire*, *boîte blanche* ou *boîte grise*³. Pour illustrer cette classification, prenons l'exemple d'un système électronique résistance-bobine-condensateur. La relation entrée-sortie entre deux tensions et/ou courants peut être représentée de plusieurs manières :

- Soit à l'aide d'une convolution par une réponse impulsionnelle — ou de manière équivalente d'un produit par une fonction de transfert ; on obtient alors un modèle de type *boîte noire*, où seule la relation entrée-sortie est connue et non le fonctionnement interne du système.
- Soit en utilisant les lois des Kirchhoff et les lois physiques constitutives de la résistance, de l'inductance et de la capacité électrique du circuit ; on obtient alors un modèle (ici sous forme d'équation différentielle) de type *boîte blanche*, où tous les états peuvent être calculés à l'aide d'expressions mathématiques représentant le comportement interne du système.
- Soit en utilisant un modèle de type fonction transfert sous forme rationnelle paramétrée par la fréquence de résonance, l'amortissement et le gain

3. Cette classification sera préférée à la dichotomie entre modèle paramétrique et non-paramétrique, dont le sens dépend grandement de la signification donnée à la notion de *paramètres*.

du système ; on obtient alors un modèle de type *boîte grise*, où le fonctionnement interne du système n'est pas décrit mais où les valeurs caractérisant le modèle peuvent être quand même associées à une signification particulière.

Il existe dans la littérature un très grand nombre de modèles, que ce soit pour représenter des systèmes linéaires ou non. Il arrive que plusieurs modèles soient équivalents⁴, ou bien que les classes de systèmes qu'ils peuvent représenter se recoupent. Dans un but d'identification, il convient de choisir un modèle adapté au système analysé. Une liste exhaustive des modèles pour les systèmes non linéaires ne rentre pas dans le cadre de ce chapitre. Néanmoins, nous dressons ici un bref descriptif des approches les plus répandues.

Séries de Volterra. Issues de l'étude des fonctionnelles [Volterra, 1887], les séries de Volterra représentent un système comme une somme de sous-systèmes homogènes. Cette approche peut se voir comme une extension de la notion de filtrage pour les différents ordres de non-linéarités d'une série de Taylor. Elle sert de base à cette thèse et est détaillée en § 1.2.

Représentations d'état. Issues de l'étude des systèmes différentiels, les représentations d'état décrivent la relation entrée-sortie d'un système (potentiellement multi-entrée multi-sortie) par des équations de type

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.5b)$$

où \mathbf{x} est un vecteur d'état (de taille potentiellement infinie), $\dot{\mathbf{x}}$ sa dérivée temporelle, et \mathbf{f} et \mathbf{g} sont deux fonctions caractéristiques du système. Les états représentent des variables intrinsèques du système, comme la position d'un corps pour un système mécanique ou la tension aux bornes d'un dipôle pour un système électronique. Une version à temps discret des représentations d'état existe, où l'opérateur différentiel est remplacé par un décalage temporel, i.e. $\dot{\mathbf{x}}(t)$ devient $\mathbf{x}(t + 1)$. Sous certaines hypothèses, ces modèles peuvent aussi s'exprimer à l'aide des séries de Volterra [Brockett, 1976; Gilbert, 1977; Lamnabhi-Lagarrigue et Lamnabhi, 1979; Fliess *et al.*, 1983].

Schéma-blocs. La représentation de modèle dite en schéma-blocs repose sur la décomposition d'un système en blocs élémentaires : filtres linéaires et fonctions statique non linéaires. De nombreux modèles existent, mais tous sont des variantes ou combinaisons des éléments suivants [Schoukens et Tiels, 2017] :

Type Hammerstein : une fonction suivie d'un filtre (voir [Figure 1.1a](#)) ;

4. On peut par exemple citer, dans le cas des systèmes linéaires, l'équivalence entre la classe des fonctions de transfert rationnelles strictement propres et celle des représentations d'état à temps discret observables et commandables.

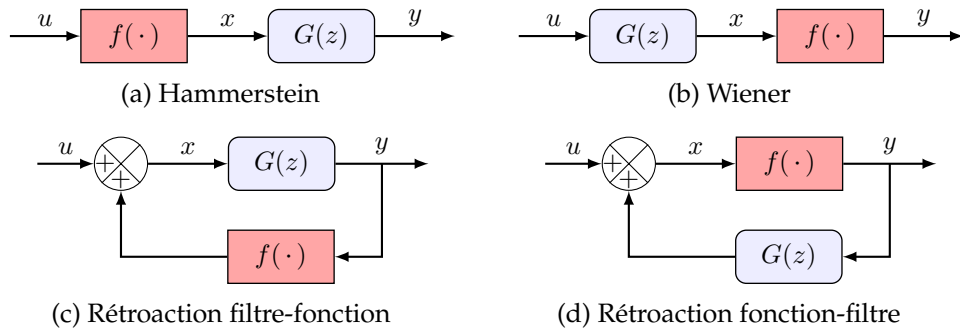


FIGURE 1.1 – Structures élémentaires des modèles de type schéma-blocs.

Type Wiener : un filtre suivi d'une fonction (voir Figure 1.1b);

Rétroaction : une chaîne bouclée filtre-fonction ou fonction-filtre (voir respectivement Figures 1.1c et 1.1d).

Lorsque que les fonctions non linéaires considérées sont polynomiales ou analytiques, ces modèles admettent des représentations en séries de Volterra.

Modèles de type NARMAX. Apparu dans les années 80 [Leontaritis et Billings, 1985a,b], le terme NARMAX⁵ regroupe une large classe de modèles à temps discret qui suivent tous une équation de récurrence du type

$$y(l) = F[y(l), \dots, y(l - m_y), u(l), \dots, u(l - m_u), b(l), \dots, b(l - m_b)] + b(l), \quad (1.6)$$

où m_y , m_u et m_b sont des paramètres de mémoire, b un signal de bruit et F est une fonction non linéaire. Les différents sous-modèles se caractérisent généralement par la spécification d'une classe pour la fonction F (polynomiale, rationnelle, hyperbolique, etc.). Dans le cas d'une fonction polynomiale, et lorsque que la partie auto-régressive peut se ré-exprimer selon l'entrée, les modèles de NARMAX sont équivalents à des séries de Volterra.

1.1.4 Coûts et erreurs

Le coût désigne la fonction mathématique à valeurs positives que l'on va chercher à minimiser pour identifier le système étudié. Notons Θ les paramètres que l'on cherche à trouver pour un modèle choisi, ainsi que $u \in \mathcal{U}$ et $y \in \mathcal{Y}$ les signaux d'entrée et de sortie mesurés. Le problème d'identification s'exprime alors mathématiquement comme la recherche de $\tilde{\Theta}$ tel que i.e.

$$\tilde{\Theta} = \arg \min_{\Theta} \mathcal{C}(u, y; \Theta), \quad (1.7)$$

où $\mathcal{C}(u, y; \Theta)$ est le coût choisi, et u et y sont des signaux d'entrée et de sortie mesurés.

5. Acronyme de *Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs*, qui peut se traduire par *modèle Non-linéaire Auto-Régressif à Moyenne Ajustée et entrées eXogènes*.

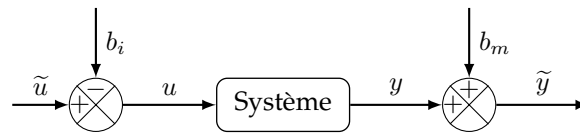


FIGURE 1.2 – Schéma des différents bruits présents lors d’une mesure.

Une fonction de coût classique est une fonction positive — de préférence convexe — d’une erreur entre le signal y_{mes} mesuré sur le système et le signal y_{est} estimé par le modèle. Selon la manière dont y_{est} est calculé, deux approches sont à distinguer :

- si la sortie estimée à l’instant t est calculée à partir de l’entrée mesurée aux instants $t' \leq t$ et de la sortie estimée aux instants $t' < t$, i.e. $y_{\text{est}}(t) = f(t, u, y_{\text{est}}; \Theta)$, on parlera d’*erreur de simulation* ;
- si la sortie estimée à l’instant t est calculée à partir de l’entrée mesurée aux instants $t' \leq t - \tau$ et de la sortie mesurée aux instants $t' \leq t - \tau$, i.e. $y_{\text{est}}(t) = f(t, u, y_{\text{mes}}; \Theta)$, on parlera d’*erreur de prédiction à horizon τ* .

Dans le cas de modèles sans boucle de rétroaction, i.e. lorsque $y_{\text{est}}(t) = f(t, u; \Theta)$, ces deux types d’erreurs sont confondus.

1.1.5 Bruits et mesures

Puisque l’on travaille sur des signaux mesurés, il convient de prendre en compte les bruits expérimentaux pour examiner la robustesse des méthodes d’identification. Ces bruits peuvent être de plusieurs natures. Considérons le schéma de la Figure 1.2 qui représente une expérience de mesure typique. On peut voir que l’entrée et la sortie réelle du système (respectivement u et y) ne sont accessibles qu’au travers des mesures $\tilde{u} = u + b_i$ et $\tilde{y} = y + b_m$. Le bruit b_m , nommé *bruit de sortie* ou plus généralement *bruit de mesure*, est souvent modélisé par un bruit blanc, généralement gaussien (par commodité, pour pouvoir développer des calculs analytiques). Le bruit b_i , nommé *bruit interne* ou *bruit de processus*, est plus rarement considéré. En effet, sa position en amont du système rend la construction d’un estimateur le prenant en compte bien plus difficile.

1.2 SÉRIES DE VOLTERRA

Nous présentons maintenant le formalisme des séries de Volterra qui sera utilisé tout au long de cette thèse.

1.2.1 Introduction

À la fin du XIX^{ème} siècle, le mathématicien italien Volterra étudie la représentation des fonctionnelles à l’aide d’écriture en série [Volterra, 1887]. Ce n’est

qu'à partir de 1942 que ses travaux pénètrent le domaine de l'automatique, lorsque Wiener les utilise pour étudier la réponse d'un système non linéaire à un bruit blanc [Wiener, 1942]. Après la guerre, ce rapport militaire est déclassifié, mais n'a tout d'abord qu'un rayonnement interne au MIT⁶ [Brilliant, 1958; George, 1959]. Ce n'est qu'après les années 50 que la représentation et l'étude des systèmes non linéaires à l'aide de fonctionnelles se répand dans la communauté, e.g. dans [Barrett, 1963; Waddington et Fallside, 1966].

La question du type de systèmes que peut représenter une série de Volterra a été étudiée dès le début de leur utilisation. Les premiers résultats [Brilliant, 1958; Gallman et Narendra, 1976] montrent que tout système continu non linéaire peut être approché à une erreur près aussi petite que l'on veut par une série de Volterra sur un support temporel fini $\mathbb{T} = [0, T]$. L'extension à un support temporel infini est tout d'abord donnée dans [Brockett, 1977] pour le cas des systèmes linéaire-analytiques à dimension finie et conditions initiales nulles. Enfin, dans [Boyd et Chua, 1985], les auteurs prouvent que les séries de Volterra peuvent représenter, sur un support temporel infini, tout système continu et invariant dans le temps tant que celui-ci possède la propriété de mémoire effaçable (ou *fading memory* en anglais). Cette notion indique que plus une excitation est lointaine dans le temps, moins son effet sur le signal de sortie se fait sentir.

1.2.2 Définition

L'introduction que nous faisons ici des séries de Volterra se restreint au cadre des systèmes mono-entrée mono-sortie et invariants dans le temps. Une présentation plus approfondie est donnée e.g. dans [Schetzen, 1980; Rugh, 1981; Boyd et al., 1984]. Préalablement à la définition des séries de Volterra, nous introduisons les notations suivantes qui seront nécessaires par la suite :

- $\llbracket a; b \rrbracket$: ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq k \leq b$;
- $L^p(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$: espace de Lebesgue d'ordre p , i.e. l'espace des fonctions de \mathbb{X} dans \mathbb{Y} dont la puissance p est intégrable au sens de Lebesgue, avec \mathbb{X} et \mathbb{Y} des espaces vectoriels ou de Hilbert;
- $\mathcal{U} = \mathcal{Y} := L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$: espace des signaux d'entrées et de sorties⁷;
- $\mathcal{H}_n := L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$: espace des noyaux de Volterra d'ordre n ;
- \mathcal{VS} : espace des séries $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $h_n \in \mathcal{H}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la série entière $\phi_h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_1 x^n$ ait un rayon de convergence ρ non nul;
- $\mathcal{ML}_n(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs $f: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ bornés et multi-linéaires d'ordre n .

6. *Massachusetts Institute of Technology*, où Wiener était professeur de mathématiques.

7. D'autres cadres fonctionnels sont possibles.

Définition 1.3 (Séries de Volterra). Un système est représenté par l'opérateur de Volterra $V \in \mathcal{VS}$ de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de rayon de convergence $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ si, pour toute entrée $u \in \mathcal{U}$ telle que $\|u\|_\infty < \rho$, la sortie $y \in \mathcal{Y}$ donnée autour du point d'équilibre y_0 par

$$y(t) = V[u](t) := y_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{T}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i}_{:=y_n(t)} \quad (1.8)$$

est normalement convergente⁸. Les termes y_n de la série sont appelés les *sorties d'ordre homogène*, et les h_n les *noyaux de Volterra*.

En pratique et pour des raisons numériques, la série (1.8) est tronquée. On parlera alors de série de Volterra⁹ de degré N , i.e. où l'ordre maximal vaut N .

À l'instar de la réponse impulsionnelle pour un système linéaire, les noyaux de Volterra — aussi appelés *réponses impulsionnelles généralisées*¹⁰ — caractérisent totalement un système non linéaire. Ainsi, une série de Volterra¹¹ est causale si et seulement si (ssi) ses noyaux h_n sont tels que

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \text{ si } \exists i \mid \tau_i < 0. \quad (1.9)$$

Pour des système causaux, la borne inférieure des intégrales dans (1.8) vaut donc 0. De plus, on considère généralement des signaux d'excitation nuls avant l'origine, i.e. $u(t) = 0$ lorsque $t < 0$. Dans ce cas là, la borne supérieure des intégrales devient t .

Il est aussi possible d'étudier les séries de Volterra dans le domaine fréquentiel. Cela se fait à l'aide des transformées de Fourier ou de Laplace ; l'équivalent des noyaux de Volterra en fréquentiel se nomme alors *noyaux de transfert* (par similarité avec les fonctions de transfert, version fréquentielle des réponses impulsionnelles des filtres linéaires). Mais la relation entrée-sortie dans le domaine fréquentiel n'est pas aussi directe que celle d'un système linéaire [Hasler, 1999]. Les travaux présentés dans cette thèse ne reposant pas sur ces notions, nous ne les développons pas ici. Des présentations plus approfondies de la représentation en série de Volterra dans le domaine fréquentiel peuvent être trouvées e.g. dans [Rugh, 1981; Lang et Billings, 1996; Lang *et al.*, 2007].

8. Il peut paraître étrange d'inclure le point d'équilibre y_0 dans l'opérateur de Volterra. Ce choix est fait pour des raisons de consistance et simplicité de notation dans la suite. De plus, ce point d'équilibre y_0 peut se voir comme une extension de la notion de sortie d'ordre homogène à l'ordre 0.

9. Pour être rigoureux, il faudrait parler dans ce cas de polynôme de Volterra de degré N . Cette appellation étant très peu utilisée dans la littérature, nous préférons garder ici celle de série.

10. Cette appellation peut porter à confusion, puisque certaines propriétés sont modifiées : par exemple la sortie d'ordre n d'une série de Volterra en réponse à une impulsion de Dirac vaut $y_n(t) = h_n(t, \dots, t)$, et ne correspond donc qu'à la diagonale du noyau h_n .

11. Par abus de langage, on assimilera la série de Volterra au système qu'elle représente.

1.2.3 Formes des noyaux

On remarque, à partir de la [Définition 1.3](#), que plusieurs famille de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ peuvent représenter le même opérateur de Volterra. Par exemple, toute permutation des variables d'intégration τ dans (1.8) laisse les signaux y_n (et donc la sortie totale y) inchangés, mais pas le noyau h_n : il existe une classe d'équivalence de noyaux h_n qui représentent la même relation entrée-sortie. À des fins d'identification, il convient de considérer des formes uniques des noyaux de Volterra, permettant de représenter tous les noyaux de la classe d'équivalence à l'aide d'un seul spécimen possédant des caractéristiques particulières.

Définition 1.4 (Forme symétrique). Un noyau h_n est dit symétrique si il est invariant à toute permutation de ses indices, i.e. si

$$h_n(\tau_{\pi_1}, \dots, \tau_{\pi_n}) = h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (1.10)$$

pour toute permutation $\pi \in \mathcal{P}_n$ (l'ensemble des $n!$ permutations des entiers de 1 à n).

Tout noyau peut être mis sous forme symétrique à l'aide de l'opérateur de symétrisation donné par

$$\text{SYM}\{h_n\}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} h_n(\tau_{\pi_1}, \dots, \tau_{\pi_n}). \quad (1.11)$$

Une autre famille de formes souvent utilisée pour l'identification est celle des noyaux triangulaires. À l'instar des matrices triangulaires, il en existe de plusieurs types (e.g. supérieures, inférieures); dans cette thèse, nous en considérons seulement une.

Définition 1.5 (Forme triangulaire supérieure). Un noyau h_n est dit triangulaire supérieure si il est nul dès lors que l'ensemble des variables τ n'est pas rangé dans l'ordre décroissante, i.e. si

$$\tau_i > \tau_j \mid 1 \leq i < j \leq n \implies h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0. \quad (1.12)$$

La forme triangulaire d'un noyau se construit à partir de sa forme symétrique. Tout noyau peut donc être ramené à une forme triangulaire (voir par exemple [Rugh, 1981, § 1.2]).

1.2.4 Opérateurs de Volterra d'ordre homogène

Pour la suite des développements contenus dans cette thèse, nous introduisons la notion d'opérateurs de Volterra d'ordre homogène.

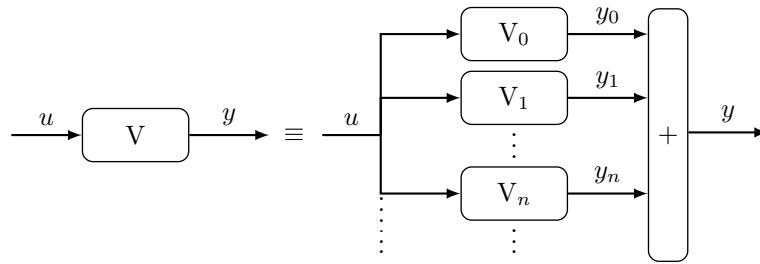


FIGURE 1.3 – Schéma d'équivalence entre l'opérateur V d'une série de Volterra et la somme des opérateurs d'ordre homogène V_n .

Définition 1.6 (Opérateur de Volterra d'ordre homogène). Soit $h_n \in \mathcal{H}_n$ un noyau de Volterra d'ordre n . On note alors $V_n \in \mathcal{V}_n := \mathcal{ML}_n(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ l'opérateur de Volterra d'ordre homogène défini par

$$V_n[u_1, \dots, u_n](t) := \int_{\mathbb{T}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u_i(t - \tau_i) d\tau_i \quad (1.13)$$

pour tout signaux $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}$.

Notons que cet opérateur est bien borné et que sa norme vaut

$$\|V_n\|_{\mathcal{ML}_n(\mathcal{U}, \mathcal{Y})} := \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U} \\ \|u_1\|_{\mathcal{U}}, \dots, \|u_n\|_{\mathcal{U}} = 1}} \|V_n[u_1, \dots, u_n]\|_{\mathcal{Y}} = \|h_n\|_{\mathcal{H}_n} \quad (1.14)$$

Corolaire 1.1. Soit un noyau h_n et V_n l'opérateur associé. Soit u un signal d'excitation et y_n la sortie d'ordre homogène correspondante. Alors

$$y_n(t) = V_n[u, \dots, u](t). \quad (1.15)$$

Par abus de notation, on notera $V_n[u] = V_n[u, \dots, u]$ lorsque $u_1 = \dots = u_n = u$ ainsi que $V_0 := y_0$.

Corolaire 1.2. Soit un opérateur de Volterra $V \in \mathcal{VS}$ de rayon de convergence ρ , V_n les opérateurs d'ordre homogène associés à ses noyaux pour $n \in \mathbb{N}^*$ et V_0 l'opérateur d'ordre nul associé au terme constant y_0 . Alors

$$V[u] = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n[u] \quad (1.16)$$

pour tout signal $u \in \mathcal{U}$ tel que $\|u\|_{\infty} < \rho$. Par abus de notation, on écrira aussi $V = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ (voir Figure 1.3).

Propriété 1.1. Un opérateur d'ordre homogène $V_n \in \mathcal{V}_n$ a les propriétés suivantes :

- (i) Multi-linéarité : pour tout signaux u_1, \dots, u_n et v , pour tout scalaire α , et pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} V_n[u_1, \dots, u_k + \alpha v, u_{k+1}, \dots, u_n] = \\ V_n[u_1, \dots, u_n] + \alpha V_n[u_1, \dots, v, u_{k+1}, \dots, u_n]; \end{aligned} \quad (1.17)$$

- (ii) Homogénéité : pour tout signaux u_1, \dots, u_n et pour tout scalaire α ,

$$V_n[\alpha u_1, \dots, \alpha u_n] = \alpha^n V_n[u_1, \dots, u_n]; \quad (1.18)$$

- (iii) Symétrie : si le noyau h_n est symétrique (selon ses variables temporelles) alors l'opérateur associé V_n est symétrique (selon les signaux d'entrées), i.e. pour tout signaux u_1, \dots, u_n et pour toute permutation $\pi \in \mathcal{P}_n$,

$$V_n[u_{\pi_1}, \dots, u_{\pi_n}] = V_n[u_1, \dots, u_n]. \quad (1.19)$$

Dans cette thèse, nous nous intéresserons principalement aux opérateurs V_n définis à partir de noyaux symétriques. Il est toujours possible de se ramener à un tel cas à l'aide de l'opérateur de symétrisation de noyaux. Dans le cas des opérateurs d'ordre homogène, la relation (1.11) conduit à introduire

$$\text{SYM}\{V_n\}[u_1, \dots, u_n] := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} V_n[u_{\pi_1}, \dots, u_{\pi_n}]. \quad (1.20)$$

1.2.5 Série de Volterra à temps discret

Il existe aussi une version à temps discret des séries de Volterra. Elle est obtenue en remplaçant l'intégrale multiple par une somme (discrète) multiple dans la relation (1.8) qui devient alors

$$V[u](l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m \in \mathbb{T}_d^n} h_n(m_1, \dots, m_n) \prod_{i=1}^n u(l - m_i), \quad (1.21)$$

où $\mathbb{T}_d \subset \mathbb{Z}$ est le support temporel discret (de type intervalle fini ou non). Le même changement doit être appliqué à la relation (1.13) pour définir les opérateurs d'ordre homogène à temps discret :

$$V_n[u_1, \dots, u_n](l) = \sum_{m \in \mathbb{T}_d^n} h_n(m_1, \dots, m_n) \prod_{i=1}^n u_i(l - m_i). \quad (1.22)$$

Les remarques précédentes concernant les bornes d'intégration restent valables pour les bornes de la somme.

Lorsque l'on s'intéresse à l'identification des noyaux, on considère généralement des noyaux de mémoire finie M , i.e. tels que

$$h_n(m_1, \dots, m_n) = 0 \text{ si } \exists i \mid m_i \geq M. \quad (1.23)$$

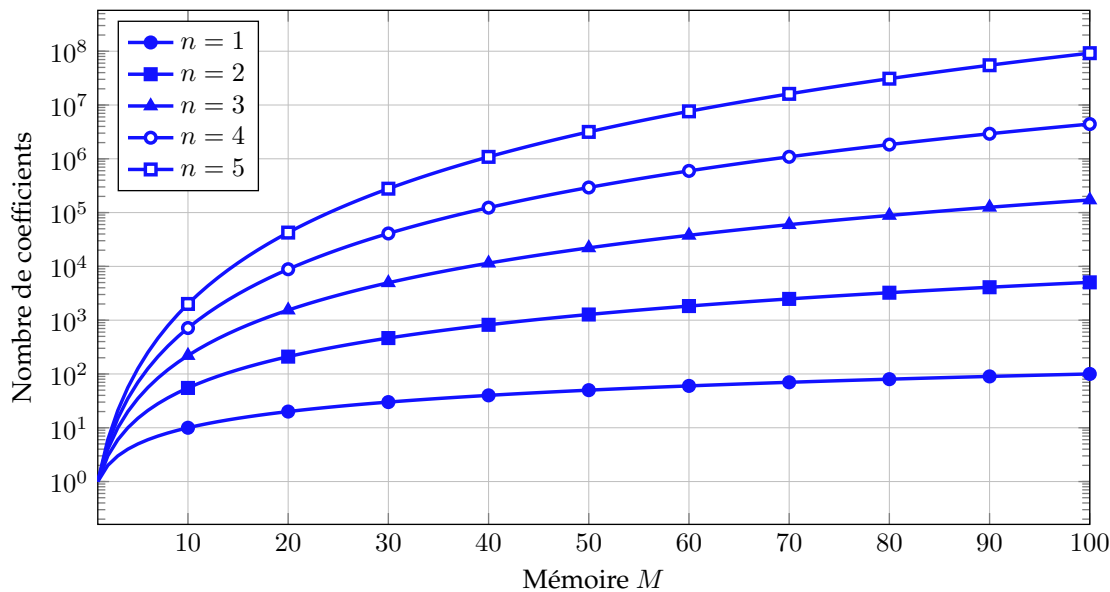


FIGURE 1.4 – Nombre de coefficients non nuls du noyau triangulaire d’ordre n , pour n allant de 1 à 5, en fonction de sa mémoire M .

Ainsi, s’il est causal, un tel noyau contient M^n coefficients. De plus, puisque tout noyau peut se ramener à sa forme symétrique ou triangulaire, on peut réduire le nombre de coefficients *effectifs*. Ce nombre est égal au nombre de coefficients non nuls dans le noyau triangulaire. Il vaut le nombre de combinaisons avec répétition de M éléments pris n à n (tirage avec remise de n valeurs dans l’ensemble discret $\llbracket 0; M-1 \rrbracket$). Il y a donc $\binom{M+n-1}{n}$ coefficients effectifs à identifier dans un noyau d’ordre n de mémoire M , où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le coefficient binomial. L’évolution de ce nombre en fonction de la mémoire M est tracée en Figure 1.4. On remarque une croissance très rapide avec la mémoire M due à la combinatoire.

Remarque 1.1 (Nombre de coefficients d’une série tronquée). Une série de Volterra de degré N et de mémoire M pour tous ses noyaux a $\binom{M+N}{N} - 1$ coefficients effectifs qu’il faut identifier.

Même pour un degré N raisonnable et une mémoire M courte, le nombre de coefficients est très grand. Ce problème est une des difficultés majeures de l’identification des séries de Volterra, et entraîne une grande variance dans l’estimation des noyaux.

1.2.6 Utilisation dans le domaine de l’audio

La représentation en séries de Volterra est souvent utilisée dans le domaine de l’audio, principalement à des fins de simulation ou de modélisation.

Dans l’étude des instruments de musique, la combinaison des effets de mémoire et des non-linéarités permet de représenter naturellement l’évolution du

timbre (principalement caractérisé par le contenu spectral) en fonction de l'amplitude sonore. Par exemple, la modélisation des équations de propagation et de dissipation acoustique à l'aide de séries de Volterra [Hélie et Hasler, 2004] permet la simulation de l'effet de cuivrage des instruments de type trompette ou trombone [Hélie et Smet, 2008]. Le formalisme de Volterra est aussi appliqué à la synthèse sonore de cordes non linéaires [Hélie et Roze, 2008]. Pour cela, un formalisme spatio-temporel, les séries de Green-Volterra, est utilisé, qui permet de décrire les systèmes faiblement non linéaires à la fois dans le temps et dans l'espace [Roze, 2010; Roze et Hélie, 2014].

D'autres types de systèmes audio sont aussi étudiés à l'aide des séries de Volterra. Certains travaux les utilisent pour la simulation numérique de circuits audio électroniques, tels que les pédales d'effets de guitare [Agerkvist, 2010; Tronchin, 2013] ou le filtre Moog [Hélie, 2010]. D'autres pour modéliser les transducteurs électro-acoustiques comme les haut-parleurs [Kaizer, 1987] afin d'éliminer [Agerkvist *et al.*, 2014, 2015] ou de compenser [Bard, 2005; Bard et Sandberg, 2007] les effets non linéaires indésirables.

En théorie, le formalisme de Volterra permet de représenter tout système continu à mémoire effaçable mais ne permet pas l'étude des phénomènes de bifurcation, d'hystérésis ou de chaos. Nous excluons donc du cadre de cette thèse les systèmes audio ayant de telles caractéristiques. Cela regroupe principalement les excitateurs des instruments de musique, tels que les anches simples (clarinette, saxophone), doubles (hautbois) ou lippales (trompette, cor, etc.), ou le frottement d'un archet sur une corde (violon, violoncelle, etc.).

1.3 PANORAMA DES MÉTHODES D'IDENTIFICATION

Nous dressons ici un panorama historique des différentes méthodes d'identification existantes pour les séries de Volterra.

Approches par corrélation croisée. Historiquement, la première méthode pour l'identification de séries de Volterra est celle utilisant la corrélation croisée introduite dans [Wiener, 1942] qui sera généralisée plus tard dans [Lee et Schetzen, 1965]. Elle repose sur l'utilisation d'un bruit blanc gaussien appliqué à une variante orthogonalisée des séries de Volterra, connue sous le nom de *série de Wiener*¹² [Wiener et Teichmann, 1959]. Dans ce modèle, les termes d'ordre n , qui représentent chacun la meilleure approximation de la relation entrée-sortie par un système homogène d'ordre n , sont orthogonaux entre eux¹³. Grâce aux propriétés statistiques d'indépendance du bruit blanc, il est possible d'identifier les noyaux correspondants par des calculs de corrélation entre les signaux d'entrée

12. À ne pas confondre avec le modèle ou bloc de Wiener; ces deux noms très proches désignent pourtant deux modèles bien distincts, et furent source de confusion dans les années 50 [Schetzen, 1980].

13. L'orthogonalité est ici entendue dans un sens probabiliste; elle est définie à partir du produit scalaire $\langle a, b \rangle = \mathbf{E}[(a - \mathbf{E}[a])(b - \mathbf{E}[b])]$.

et de sortie. Les noyaux de Volterra sont ensuite calculés à partir des noyaux de la série de Wiener ainsi obtenus. Plusieurs apports seront faits à l'idée initiale au fil du temps : l'extension au domaine de Fourier [French et Butz, 1973], l'utilisation de bruits non blancs [Schetzen, 1974], ou bien l'amélioration de l'estimation des termes diagonaux du noyau [Goussard *et al.*, 1985].

Approches utilisant des signaux élémentaires. Cette approche consiste à étudier la réponse du système aux signaux élémentaires, i.e. les impulsions de Dirac pour le domaine temporel [Schetzen, 1965; Clancy et Rugh, 1979] ou les sinusoides en fréquentiel [Boyd *et al.*, 1983; Chua et Liao, 1989]. Lorsqu'une combinaison d'impulsions de Dirac décalées temporellement est utilisée, la sortie se compose d'une somme de certaines diagonales des noyaux de Volterra des différents ordres. L'identification des noyaux nécessite alors seulement de séparer les contributions des différents ordres. Lorsqu'une somme de sinusoides est utilisée, il est possible d'estimer directement certains points fréquentiels précis des noyaux de transfert (après séparation des contributions des différents ordres). Dans les deux cas, un grand nombre de mesures est nécessaire pour obtenir un nombre de points (temporels ou fréquentiels) des noyaux assez important. Cette difficulté peut être partiellement diminuée en choisissant soigneusement les paramètres (fréquences ou décalages temporels) des signaux utilisés [Victor et Shapley, 1980; Schetzen, 1965].

Approches par moindres carrés linéaires. Dans le cas des systèmes à temps discret, la relation entrée-sortie d'une série de Volterra peut être reformulée à l'aide d'une relation matricielle [Rugh, 1981, Chapitre 7]. L'identification des noyaux devient alors un problème de moindres carrés linéaires et peut se résoudre à l'aide de méthodes d'inversion matricielle. Toutefois, le grand nombre de paramètres à identifier (cf. § 1.2.5) pose des problèmes de conditionnement et de faisabilité. Plusieurs idées et approches ont été proposées pour remédier à ce problème.

Certains auteurs proposent de résoudre le problème des moindres carrés en utilisant des décompositions orthogonales de l'espace décrit par la combinatoire du signal d'entrée — i.e. la matrice regroupant tout les produits des versions décalées de l'entrée —, et projettent ensuite le signal de sortie sur la base ainsi obtenue [Korenberg, 1988; Goussard *et al.*, 1991]. Matriciellement, cela s'effectue à l'aide d'une décomposition QR de la matrice contenant toute la combinatoire de l'entrée. Cette technique améliore sensiblement l'estimation lorsque que la quantité de données est petite, et ce sans utiliser d'a priori sur le système à identifier. Le problème restant est que l'orthogonalisation est très couteuse en stockage mémoire, surtout lorsque le degré ou la mémoire du système grandit (cf. Figure 1.4).

Plus récemment, les méthodes de régularisation utilisées pour l'identification des systèmes linéaires ont été étendues aux cas des noyaux de Volterra [Bir-

poutsoukis *et al.*, 2017; Birpoutsoukis, 2018]. Par l'ajout d'une pénalisation supplémentaire au coût à minimiser, il est possible d'imposer une continuité et/ou décroissance exponentielle au noyau à estimer. D'un point de vue technique, les auteurs proposent de plus d'utiliser une descente de gradient optimisée pour éviter l'utilisation mémoire très élevée des nombreuses inversions matricielles nécessaires [Birpoutsoukis *et al.*, 2018]. Cette approche améliore l'identification des noyaux tout en diminuant l'utilisation de la mémoire machine, mais le temps de calcul est rallongé.

Approches par décomposition des noyaux. Plusieurs approches fondées sur des décompositions des noyaux de Volterra permettent de contourner la difficulté liée à l'explosion du nombre de coefficients. La première s'appuie sur les modèles de type PARAFAC¹⁴. Ces modèles de décompositions tensorielles permettent de représenter un noyau de Volterra à l'aide d'une somme de produits externes de vecteurs [Favier *et al.*, 2012]. Ces vecteurs ainsi que les coefficients de la décomposition sont estimés simultanément à l'aide d'algorithmes itératifs [Khouaja, 2005; Ahmed *et al.*, 2015]. Cette approche se limite au cas des noyaux à temps discret.

La seconde utilise la projection des noyaux de Volterra sur des bases orthonormales. Bien que similaire à la décomposition tensorielle, cette approche vient des travaux sur l'utilisation de bases pour l'identification de systèmes linéaires [de Hoog, 2001]. Ceux-ci reposent sur la création de bases de filtres élémentaires orthogonaux entre eux¹⁵, tels que les filtres de Laguerre [Wahlberg, 1991] ou de Kautz [Wahlberg, 1994]. Ces filtres peuvent être aussi définis à partir de systèmes linéaires arbitraires [van den Hof *et al.*, 1995; Heuberger *et al.*, 1995], permettant la représentation de dynamiques plus complexes. Une unification de ces différentes bases, qui sont paramétrées par un ou plusieurs pôles, a été donnée dans [Ninness et Gustafsson, 1997]. La projection sur des bases des noyaux de Volterra permet de réduire fortement le nombre de coefficients à identifier [Hacıoğlu et Williamson, 2001; Favier *et al.*, 2003]. De plus, celui-ci ne dépend plus de la mémoire considérée pour le noyau, mais du nombre d'éléments sélectionnés dans la base choisie, et donc de la précision permise par cette sélection (et le sous-espace associé).

Approches par structuration des noyaux selon des modèles de type schéma-bloc. De nombreux travaux sur l'identification des systèmes non linéaires reposent sur l'utilisation de modèles simplifiés formés par la combinaison en parallèle ou en série des blocs élémentaires donnés en Figure 1.1 (voir p. 14) [Giri et Bai, 2010]. Lorsque que les éléments non linéaires considérés sont représentés par

14. Acronyme de PARAllel FACtor analysis, qui peut se traduire par *analyse en facteurs parallèles*.

15. L'orthogonalité est ici entendue au sens du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ défini par $\langle a, b \rangle = \int_{\mathbb{T}} a(t)\overline{b(t)}dt$.

des polynômes, ces modèles sont équivalents à des séries de Volterra dont les noyaux ont une structure particulière (par exemple purement diagonaux pour un modèle de Hammerstein). L'identification de ces modèles consiste à estimer les différents filtres conjointement aux fonctions non linéaires (i.e. les coefficients des polynômes dans le cas de fonctions polynomiales).

Pour une grande partie de ces modèles, une famille de méthodes repose sur l'estimation au préalable d'une approximation linéaire appelée *Best Linear Approximation*¹⁶ (BLA) [Schoukens et Tiels, 2017]. L'approche repose sur le fait que la dynamique de la BLA— i.e. les pôles de la fonction de transfert estimée — contient toute l'information des dynamiques des différents filtres présents dans le modèle. Une fois la BLA estimée, des méthodes d'optimisation permettent de répartir les pôles aux différents filtres et d'estimer les non-linéarités. L'approche par BLA peut aussi être utilisée pour estimer la base orthonormale optimale lorsque l'on souhaite identifier la projection des noyaux de Volterra sur une base.

1.4 ÉTAT DE L'ART DE LA SÉPARATION EN ORDRES HOMOGENES

1.4.1 Motivation et contexte

La question de la séparation des sorties d'ordres homogènes apparaît très tôt dans la littérature sur l'identification de systèmes non linéaires [Gardiner, 1968]. Néanmoins, cette approche est très peu utilisée, ce qui peut s'expliquer par la difficulté d'utiliser les méthodes existantes — pour des raisons de mise en œuvre ou de robustesse au bruit. L'idée initiale est pourtant très intéressante, et peut se résumer comme suit.

Une représentation en séries de Volterra modélise un système comme une somme de sous-systèmes de degré homogène. (voir [Figure 1.3](#)). Chacun de ces sous-systèmes, représenté par l'opérateur V_n , est totalement caractérisé par le noyau h_n . On peut donc faire la réflexion suivante : supposons que l'on connaisse les sorties d'ordre homogène y_n ; il est alors possible de remplacer l'identification conjointe des noyaux depuis la sortie y (voir [Figure 1.5a](#)) par une identification (séparée) de chaque noyau à partir de chaque signal y_n (voir [Figure 1.5b](#)). Une telle approche devrait donner de meilleures estimations des noyaux qu'une identification directe : le nombre de coefficients à estimer pour chaque sous-problème est réduit par rapport au problème direct, et l'estimation d'un noyau n'est plus perturbée par celle des noyaux des autres ordres. Pour permettre cela, il est nécessaire d'avoir une méthode de *séparation en ordres homogènes* (que nous appellerons aussi *séparation d'ordre*, par souci de concision), i.e. une méthode qui, pour un ensemble de mesures données, permet de retrouver les signaux d'ordre homogène y_n correspondant à une excitation de référence.

16. Ce qui peut se traduire par *meilleure approximation linéaire*.

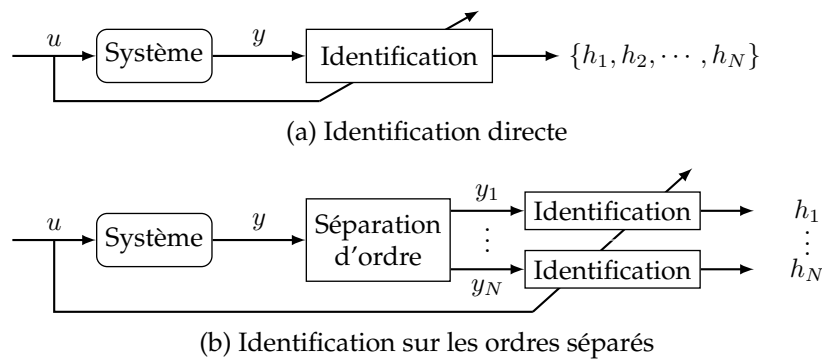


FIGURE 1.5 – Identification (a) sans et (b) avec séparation d'ordre préalable.

L'idée de distinguer différentes contributions dans le signal de sortie pour améliorer l'estimation des noyaux n'est pas nouvelle. L'utilisation des séries de Wiener se base partiellement sur ce principe : les termes de la série étant orthogonaux entre eux (au sens probabiliste), leur identification se fait séparément grâce à des signaux possédant les bonnes propriétés statistiques. L'identification par corrélation croisée, lorsqu'elle est appliquée à une série de Wiener, effectue donc une forme de séparation conjointement à l'identification.

L'utilisation de signaux sinusoïdaux (ou multi-sinusoïdaux) se fonde elle aussi sur cette idée, puisqu'elle permet de distinguer les différentes contributions fréquentielles. Pour de telles entrées, le spectre de sortie est limité aux harmoniques et aux intermodulations des fréquences du signal d'entrée. De plus, à une fréquence du signal de sortie donnée, seuls certains ordres contribuent. Par exemple, pour une entrée composée des fréquences f_1 et f_2 , seuls les ordres 3, 5, etc., contribuent à la fréquence $2f_1 + f_2$. En apportant un soin particulier au choix des fréquences d'entrée [Victor et Shapley, 1980; Chua et Liao, 1989], il est possible de maximiser le nombre de fréquences dans le signal de sortie pour lesquelles un seul ordre contribue. Il devient alors possible d'identifier la valeur correspondante du noyau de transfert directement depuis l'amplitude et la phase mesurées à cette fréquence.

Dans ces deux approches (séries de Wiener et signaux multi-sinusoïdaux), la séparation ne se fait pas selon les ordres homogènes de non-linéarités. De plus, elles reposent sur l'utilisation de modèles ou de signaux spécifiques. On retrouve dans la littérature sur les séries de Volterra deux méthodes de séparation en ordres homogènes, indépendantes du signal utilisé ou du modèle supposé. Nous les présentons maintenant.

1.4.2 Séparation fondée sur la multi-linéarité

Considérons un système de degré 2, i.e. $V = V_1 + V_2$. Soient a et b deux signaux. La [Propriété 1.1](#) donne

$$V_1[a + b] = V_1[a] + V_1[b], \quad (1.24)$$

$$V_1[a - b] = V_1[a] - V_1[b], \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} V_2[a + b] &= V_2[a + b, a + b] \\ &= V_2[a, a] + 2 V_2[a, b] + V_1[b, b], \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$V_2[a - b] = V_2[a, a] - 2 V_2[a, b] + V_1[b, b], \quad (1.27)$$

où l'on a considéré l'opérateur V_2 symétrique, sans perte de généralité. En combinant les sorties correspondantes aux excitations $a, b, a + b$, et $a - b$, on obtient alors

$$V[a] + V[b] - \frac{1}{2}(V[a + b] + V[a - b]) = V_1[a] + V_1[b], \quad (1.28)$$

$$V[a] + V[b] - V[a + b] = 2 V_2[a, b]. \quad (1.29)$$

Les termes de droite de ces deux relations contiennent seulement des contributions d'ordre 1 pour (1.28) et d'ordre 2 pour (1.29). Ces équations montrent comment séparer des contributions des différents ordres en utilisant les propriétés de multi-linéarité des termes de la série de Volterra. Bien que ces contributions ne correspondent pas à des sorties d'ordre homogène pour une excitation donnée, elles permettent néanmoins l'identification des noyaux.

Plus généralement, il est possible avec cette approche d'extraire une contribution d'ordre n à l'aide de $2^n - n$ mesures [Schetzen, 1965]. Ce nombre peut être réduit à $2 \times 3^{(n-1)/2}$ pour un n impair ou $3^{n/2}$ pour un n pair en construisant la collection de signaux d'entrées de telle sorte que la plupart soient nuls ou redondants [Chua et Liao, 1991].

On retrouve très peu cette approche dans la littérature, et encore moins appliquée à des problèmes d'identification. Par exemple, dans [Chua et Liao, 1991], elle n'est utilisée que dans le but d'estimer l'ordre maximal d'un système. Cette faible utilisation peut s'expliquer par la complexité de la combinatoire sur laquelle elle repose et le très grand nombre de mesures nécessaires.

1.4.3 Séparation fondée sur l'homogénéité

Considérons un système de degré N . Soit un signal d'entrée u et un scalaire α . La propriété d'homogénéité (1.18) donne

$$V[\alpha u] = \sum_{n=1}^N \alpha^n V_n[u]. \quad (1.30)$$

L'homogénéité des ordres de la série de Volterra permet de séparer les sorties $y_n = V_n[u]$ de manière similaire à une interpolation polynomiale¹⁷ où les coefficients recherchés correspondent aux sorties y_n . Il suffit pour cela d'effectuer au

17. L'interpolation polynomiale consiste en l'estimation des coefficients p_n d'un polynôme de degré fixé à partir d'un ensemble de points (x_i, y_i) .

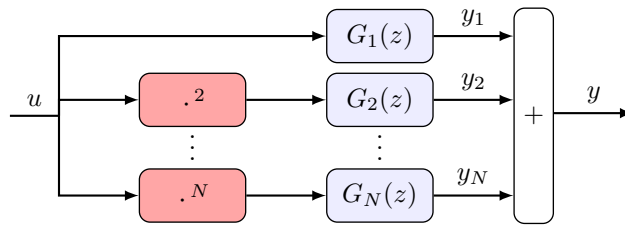


FIGURE 1.6 – Structure du modèle de Hammerstein polynomial.

minimum N mesures pour des amplitudes α différentes. Cette approche sera plus précisément décrite et analysée au § 2.1.

L'utilisation de facteurs d'amplitudes pour séparer les différentes contributions non linéaires apparaît dans la littérature sur l'identification au tournant des années 1970. Elle est d'abord appliquée à des systèmes de type Wiener-Hammerstein parallèle. Dans [Gardiner, 1968], cette idée est utilisée pour estimer la réponse linéaire du système, tandis que dans [Economakos, 1971] l'approche est généralisée pour séparer tous les ordres. La méthode est formalisée peu après dans [Halme *et al.*, 1971] et [Simpson et Power, 1972] pour le cas plus général des séries de Volterra. On la retrouve depuis utilisée dans de nombreux travaux sur l'identification de séries de Volterra, e.g. dans [Boyd *et al.*, 1983; Lee, 1997; Bard et Sandberg, 2007].

1.4.4 Cas particulier d'exploitation de la phase

On retrouve dans la littérature récente sur l'identification de systèmes une approche s'intéressant à l'exploitation de la phase pour distinguer certaines contributions dans le signal de sortie. Bien que n'étant pas *stricto sensu* une méthode de séparation, nous la présentons ici succinctement afin d'aider le lecteur à situer les résultats développés dans cette thèse par rapport à la littérature. Tout d'abord présentée dans [Farina, 2000], cette méthode fut réintroduite dans [Novak *et al.*, 2009; Rébillat *et al.*, 2011]. Elle est fréquemment utilisée dans le domaine audio pour identifier des systèmes électroniques sonores afin d'en effectuer la synthèse [de Paiva *et al.*, 2012; Tronchin, 2013; Lambert, 2014; Schmitz et Embrechts, 2017].

La méthode repose sur l'hypothèse que le système suit un modèle de Hammerstein de type polynomial. Cette structure désigne une mise en parallèle de blocs de Hammerstein, où chaque branche est composée d'un élément non linéaire statique d'ordre homogène suivie d'un filtre linéaire (voir Figure 1.6). Un tel modèle peut aussi être représenté par une série de Volterra dont les noyaux sont nuls exceptés sur leur diagonale principale qui vaut la réponse impulsionnelle des filtres.

Cette méthode est fondée sur l'utilisation d'un sinus à balayage fréquentiel exponentiel particulier dont l'évolution temporelle de la phase $\phi(t)$ possède la

propriété fondamentale

$$k\phi(t) = \phi(t + \Delta_k), \quad (1.31)$$

où Δ_k dépend de l'entier k et des propriétés du signal (durée, fréquences initiale et finale). Appliqué à un système de Hammerstein de type polynomial, et combiné avec une opération de déconvolution, ce signal permet de séparer temporellement une collection de réponses impulsionnelles. Celles-ci correspondent aux filtres appliqués aux différents harmoniques du signal d'excitation. L'inversion d'une matrice faisant apparaître les coefficients des polynômes de Tchebychev¹⁸ permet de retrouver les filtres des différents ordres [Rébillat *et al.*, 2011]. Cette méthode exploite donc l'évolution de la phase *instantanée* d'un signal particulier à travers une structure spécifique pour séparer des composantes du signal de sortie et faciliter l'identification.

1.5 POSITIONNEMENT ET HYPOTHÈSES

Cette thèse s'intéresse à l'identification de systèmes représentables en séries de Volterra. Les travaux présentés se focalisent sur l'élaboration de méthodes robustes de séparation de la série en termes homogènes basées sur l'exploitation de relations de phase.

Les résultats des Chapitres 2 et 3 ne font aucune hypothèse sur le modèle sous-jacent du système (i.e. représentation d'état, modèles en schéma-bloc, etc.), et sont valides pour toute représentation en série de Volterra. À l'inverse, les résultats présentés au Chapitre 4 supposent que le système admet une représentation d'état.

Les hypothèses effectuées dans le cadre de cette thèse sont les suivantes :

- Les signaux sont d'amplitude bornée, i.e. appartiennent à $L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$;
- Les systèmes étudiés sont stationnaires et admettent une représentation en série de Volterra ;
- Les fonctions de coûts utilisées sont construites à partir de l'erreur de simulation¹⁹ ;
- Le bruit de processus est négligé, et seule l'étude de la robustesse au bruit de mesure est effectuée.

18. Nous avons choisi dans ce document d'utiliser la transcription française « Tchebychev » plutôt que celle anglo-saxonne « Chebyshev ».

19. Ceci est une implication directe du fait que les séries de Volterra ne sont pas un modèle auto-régressif.

— Chapitre 2 —

Séparation en ordres homogènes fondée sur des relations de phase

Divide et impera.

Nicolas Machiavel, *Le Prince*

Ce chapitre s'intéresse au développement de méthodes de séparation fondées sur l'exploitation de la phase.

La méthode existante basée sur des relations d'amplitudes est tout d'abord rappelée en § 2.1. L'utilisation de la phase est ensuite présentée au § 2.2 dans le cadre d'une méthode théorique utilisant des signaux complexes. Dans le § 2.3, l'exploitation de la phase est adaptée au cas des signaux réels, ce qui nous amène à définir deux nouveaux types de signaux (que l'on nomme signaux interconjugués et signaux homophases) permettant une réorganisation des termes de la série de Volterra ; de plus, une méthode de séparation des signaux homophases est donnée. Deux méthodes permettant de séparer les signaux interconjugués (ainsi que les ordres homogènes) sont ensuite proposés. Dans le § 2.4, cette séparation est obtenue en utilisant à la fois des relations de phase et d'amplitude. Dans le § 2.5, la multi-linéarité des ordres de Volterra est exploitée pour éviter l'utilisation d'amplitudes. Enfin, les avantages et inconvénients des différentes méthodes sont discutés et comparés en § 2.6

Toutes les méthodes présentées ici reposent sur (i) la création d'une collection de signaux d'entrées à partir d'un signal de référence, (ii) la mesure des sorties correspondantes à travers le système, et (iii) l'utilisation d'outils d'algèbre linéaire pour séparer et regrouper les différents signaux à partir de la collection des sorties mesurées. Dans ce chapitre, on désignera toujours

- le nombre de signaux utilisés par K ;
- le nombre d'amplitudes utilisées par A ;
- le nombre de phases utilisées par P .

On considérera dans ce chapitre des opérateurs de Volterra V contenant un terme constant non nul. Les résultats présentés sont valables pour tout temps $t \in \mathbb{T}$.

2.1 MÉTHODE EXISTANTE DE SÉPARATION PAR AMPLITUDE

Nous présentons maintenant la méthode de séparation fondée sur l'homogénéité des ordres évoquée en § 1.4.3

2.1.1 Présentation de la méthode AS

Soit une série de Volterra de degré $N \in \mathbb{N}$. Soit un signal de référence $u \in \mathcal{U}$, et $y_n = V_n[u] \in \mathcal{Y}$ pour $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$ les ordres que l'on souhaite séparer. Soit les coefficients $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$; notons $u_k = \alpha_k u \in \mathcal{U}$ une collection de $K = N + 1$ signaux d'entrée, et $z_k = V[u_k] \in \mathcal{Y}$ les sorties correspondantes. La propriété d'homogénéité (1.18) permet alors d'écrire la relation matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}}_{= \mathbf{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^N \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_N & \dots & \alpha_N^N \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{= \mathbf{y}}(t), \quad (2.1)$$

valable pour tout temps t . Puisque \mathbf{A} est une matrice de type Vandermonde, elle est inversible ssi tous les facteurs α_k sont non nuls et distincts deux à deux. Dans ce cas, il est possible de récupérer les ordres y_n en calculant $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$. On nommera cette méthode

Séparation par Amplitudes (AS, pour *Amplitude Separation method*¹).

2.1.2 Robustesse de la méthode

En pratique, la mesure des signaux de sortie z_k est bruitée. À cause du mauvais conditionnement des matrices de Vandermonde, le bruit de mesure a des effets particulièrement mauvais sur l'estimation des ordres y_n . Pour rappel, le conditionnement (ou nombre de conditionnement) κ d'une matrice inversible \mathbf{A} est un nombre réel, supérieur ou égal à 1, qui permet de mesurer la dépendance de la solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ aux données \mathbf{b} du problème. Il est défini, pour une norme matricielle donnée, par $\kappa = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$. Un conditionnement de 1 est optimal, tandis qu'une valeur élevée indique une grande sensibilité aux données. Dans le cas des matrices de Vandermonde, de récents travaux [Pan,

1. Pour cette méthode, ainsi que toutes celles présentées dans ce chapitre, nous utilisons les acronymes anglais, par consistance avec la terminologie employée dans les articles déjà publiés.

2016] ont montré que le conditionnement croît exponentiellement avec la taille, excepté pour certains choix particuliers des α_k , i.e. lorsqu'ils sont régulièrement espacés sur le cercle unité. Pour des $\alpha_k \in \mathbb{R}$, ce critère ne sera jamais rempli. Dans le cas qui nous intéresse, cela signifie que plus l'ordre de troncature N considéré est grand, moins l'estimation sera robuste aux bruits de mesure. À l'inverse, prendre un ordre de troncature trop petit induit des erreurs lorsque les ordres supérieurs à N sont non négligeables.

Pour éviter ces problèmes de robustesse, deux approches complémentaires sont possibles.

- Utiliser des signes alternés pour les α_k , en considérant e.g. $(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = (\alpha_k, -\alpha_k)$ pour tout k pair. Cela permet d'améliorer le conditionnement de \mathbf{A} .
- Utiliser un nombre de signaux K plus grand que $N + 1$, avec K amplitudes différentes. L'équation (2.1) devient alors un problème sur-déterminé, et les ordres peuvent être estimés en utilisant le principe des moindres-carrés (i.e. via la pseudo-inverse de \mathbf{A}).

Malgré ces deux améliorations, l'estimation des ordres supérieurs reste peu robuste (cf. [Boyd *et al.*, 1983]). Du point de vue de l'analyse numérique, la méthode AS est fiable seulement pour de petits ordres de troncature N .

Du point de vue de la mise en pratique de la mesure des signaux, d'autres considérations sont à prendre en compte pour le choix des α_k . Notons $u_{\max} = u$ l'entrée d'amplitude maximale dans la collection des u_k que l'on règle dans le domaine de convergence du système étudié.

Considérons que le signal de référence u ait été réglé pour minimiser les différents bruits de mesure (bruit thermique ambiant des composants électriques, bruit de quantification du convertisseur analogique-numérique, etc.) ainsi que pour appartenir au domaine de convergence du système étudié. Afin de ne pas sortir du formalisme de Volterra, il est donc nécessaire de choisir des gains $|\alpha_k| < 1$ — i.e. de sorte à ce que $|u_k| < |u|$. Mais en utilisant de petites amplitudes d'excitation, le rapport signal-sur-bruit (RSB) des mesures est diminué, ce qui détériore par conséquent l'estimation des ordres. Il convient alors d'utiliser des gains α_k qui ne soient pas trop petits, limités par les spécificités du système à l'étude et des systèmes de mesure. Ces conditions peuvent de plus être en conflit avec la recherche d'optimalité du conditionnement de \mathbf{A} .

Malgré les deux améliorations mentionnées ci-dessus, la méthode AS reste limitée quant à son application pratique. Cela provient principalement de son mauvais conditionnement qui est dû à l'utilisation des relations d'amplitudes entre les différents signaux tests.

2.2 SÉPARATION PAR PHASE POUR DES SIGNAUX À VALEURS COMPLEXES

2.2.1 Principe et idée initiale

L'utilisation de facteurs 1 et -1 permet de séparer efficacement les contributions d'ordre pair de celles d'ordre impair, en inversant le système

$$\begin{bmatrix} V[u] \\ V[-u] \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{n=0} y_{2n} \\ \sum_{n=0} y_{2n+1} \end{bmatrix}(t). \quad (2.2)$$

En effet, la matrice à inverser est unitaire (à une normalisation près), et le conditionnement de ce problème est donc optimal. De plus, puisque les deux signaux tests u et $-u$ ont la même amplitude, leur RSB est identique et les problèmes évoqués précédemment concernant les amplitudes des signaux tests sont ici évités. Or le fait de multiplier un signal par un facteur -1 peut être vu comme une opposition de phase. Il en résulte que l'utilisation d'un déphasage permet une séparation robuste et optimale des contributions paires et impaires. Notre idée initiale est la suivante : **est-il possible d'étendre cette idée pour séparer de manière robuste tous les ordres y_n ?**

Remarquons tout d'abord que, dans (2.2), la matrice à inverser est un cas très particulier de matrice de Vandermonde : c'est la matrice de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre 2. Son conditionnement optimal est dû à l'égal espacement des 1 et -1 sur le cercle unité [Pan, 2016]. Garder un conditionnement optimal pourrait se faire en ne prenant que des facteurs espacés de manière égale sur le cercle unité. La multiplication d'un signal par un facteur $e^{j\theta}$ revient à déphaser de θ chaque fréquence constitutive du signal. Cela résoudrait de plus les problèmes de mesures dûs aux différences d'amplitudes des signaux tests, puisque tous auraient la même amplitude $|e^{j\theta}u| = |u|$. Néanmoins, un obstacle (et pas des moindres) empêche ce choix en pratique : les signaux tests $e^{j\theta}u$ ainsi obtenus sont à valeurs complexes.

Avant de s'attaquer à cette difficulté, nous proposons d'examiner le fonctionnement et les propriétés de cette approche théorique. Le développement de méthodes de séparation fondées sur cette idée et utilisant des signaux réels est traité ensuite. Dans toute cette section, on considérera des opérateurs de Volterra

$$\begin{aligned} V: \mathcal{U}^C &\rightarrow \mathcal{Y}^C \\ u &\mapsto V[u] \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec les domaines \mathcal{U}^C et \mathcal{Y}^C définis par

$$\mathcal{U}^C := \mathcal{Y}^C := L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}). \quad (2.4)$$

2.2.2 Présentation de la méthode CPS

Soit une série de Volterra de degré $N \in \mathbb{N}$. Soit un signal de référence $u \in \mathcal{U}^C$, et $y_n = V_n[u] \in \mathcal{Y}^C$ les ordres que l'on souhaite séparer. On introduit $P = N + 1$

et $w = e^{-j2\pi/P}$; notons $u_k = w^k u \in \mathcal{U}^C$ pour $k \in \llbracket 0; P-1 \rrbracket$ une collection de $K = P$ signaux d'entrée, et $z_k = V[u_k] \in \mathcal{Y}^C$ les sorties correspondantes. Alors la propriété d'homogénéité (1.18) permet d'écrire la relation suivante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}}_{= \mathbf{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^N & \dots & w^{N^2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{W}_P} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{= \mathbf{y}}(t), \quad (2.5)$$

où \mathbf{W}_P est la matrice de la TFD d'ordre P , selon la convention où le facteur de normalisation de la transformée directe est fixé à 1; on a donc $\mathbf{W}_P^{-1} = \mathbf{W}_P^H/P$, où \mathbf{W}^H dénote le hermitien de \mathbf{W} .

Notons que la TFD ne s'applique pas ici sur le temps, mais bien sur les ordres homogènes de non-linéarité. Les ordres y_n se récupèrent en inversant \mathbf{W}_P , ce qui peut se faire en utilisant l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide². On nommera cette méthode

Séparation par Phase pour signaux Complexes (CPS, pour *Complex Phase Separation method*).

Les méthodes AS et CPS dérivent toutes les deux de l'idée d'interpolation polynomiale, et découlent de la propriété d'homogénéité (1.18) des ordres d'une série de Volterra. La seule — et grande — distinction est située dans la manière où les puissances des facteurs α ou w évoluent (voir Figure 2.1). Les puissances successives d'un facteur $\alpha \in \mathbb{R}$, cantonnés à la droite des réels, convergent vers 0 (si $|\alpha| < 1$) ou divergent vers l'infini (si $|\alpha| > 1$). Pour un nombre complexe w tel que $|w| = 1$, ses puissances restent sur le cercle unité, en tournant dans le sens trigonométrique (si $\arg w > 0$) ou anti-trigonométrique (si $\arg w < 0$). De plus, si l'on choisit w comme une racine de l'unité, alors w^n ne peut prendre qu'une quantité discrète de valeurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2.2.3 Propriétés

La méthode CPS s'appuyant sur l'utilisation de la TFD, il est aisé d'étudier ses propriétés à l'aide de celles très connues de la TFD.

Interpolation et nombre de phases. Une des propriétés de la TFD est le fait que rajouter des zéros en fin d'un signal dans son domaine original (e.g. temporel) équivaut à interpoler dans le domaine de Fourier (e.g. fréquentiel). Ce résultat

². Le gain de temps apporté par rapport à une inversion matricielle classique, de l'ordre de $O(P^3)$ est ici assez faible puisque les valeurs de P restent peu élevées.

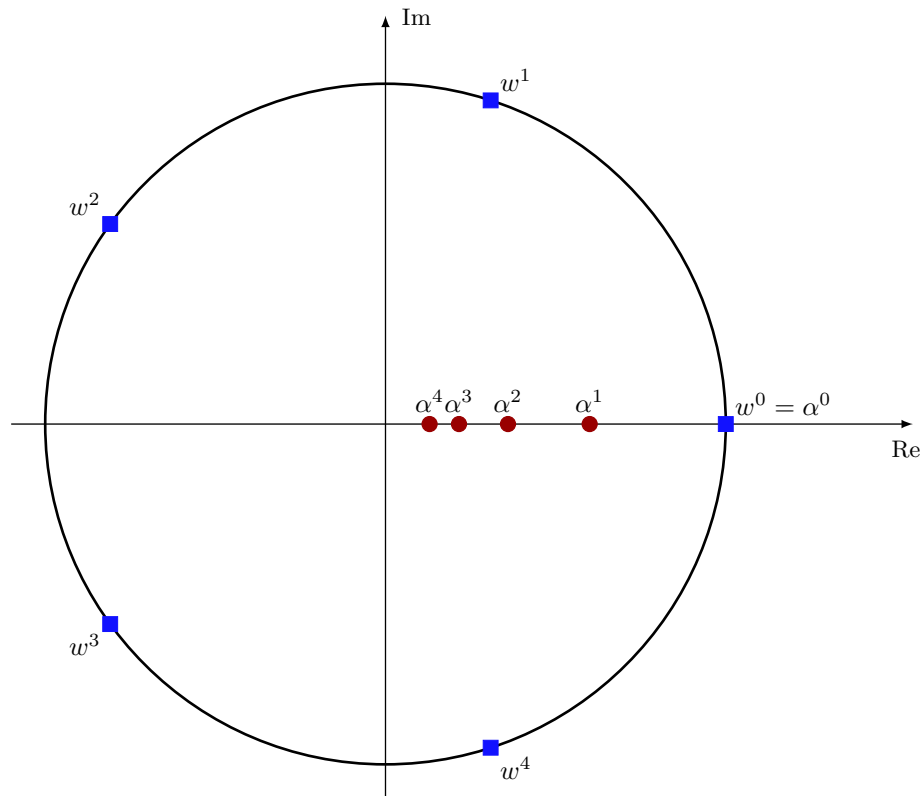


FIGURE 2.1 – Comparaison de l'évolution dans le plan complexe des puissances des facteurs utilisés dans les méthodes AS — cercles rouges (●) — pour $\alpha < 1$ et CPS — carrés bleu (■) — avec $w = e^{j2\pi/(N+1)}$ pour $N = 4$.

est utilisé par exemple dans la technique classique dite « de bourrage de zéros », qui permet d'augmenter artificiellement la résolution fréquentielle d'un spectre — i.e. diminuer le pas fréquentiel — autant que souhaité.

Dans le cas de la méthode CPS, la TFD permet de passer du domaine des ordres de non-linéarités — le vecteur \mathbf{y} — à l'espace des relations de phase — le vecteur \mathbf{z} . Rajouter des zéros au vecteur \mathbf{y} — i.e. considérer que les ordres y_n pour $n > N$ sont nuls³ — correspond donc à « interpoler » le vecteur \mathbf{z} , ce qui signifie considérer un nombre de phases P (i.e. le nombre de points pris sur le cercle unité) supérieur à $P_{\min} = N + 1$. En gardant les notations définies

3. En accord avec l'hypothèse de troncature de la série de Volterra.

au § 2.2.2, et en notant $\mathbf{z} = [z_0 \ \dots \ z_{P-1}]^T$, la relation (2.5) devient

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}_P \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (t). \quad (2.6)$$

Autrement dit, il est possible d'augmenter P le nombre de phases (et donc $K = P$ le nombre de entrées dans la collection de signaux tests) et de retrouver les ordres y_n pour $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$ à l'aide d'une TFD inverse d'ordre $P (> N + 1)$ — et non pas à partir du principe des moindres carrés comme avec la méthode AS. Comme pour la méthode AS, l'augmentation du nombre de signaux test a un impact bénéfique — ici facilement quantifiable — sur la robustesse de la séparation. Nous nous intéressons tout d'abord à la sensibilité de CPS au bruit de mesure, avant d'étudier l'effet d'une mauvaise troncature sur la séparation.

Robustesse au bruit. Supposons que chaque mesure \tilde{z}_k est perturbée par un processus gaussien indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) b_k , i.e. $\tilde{z}_k(t) = z_k(t) + b_k(t)$. Comme les signaux sont à valeurs complexes, il est nécessaire d'étudier les propriétés du bruit à l'aide des distributions gaussiennes complexes⁴; nous nous limiterons au cas des distributions symétriques circulaires, i.e. où les parties réelles et imaginaires sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des distributions identiques. Chaque bruit de mesure b_k est donc représenté par un processus gaussien complexe de moyenne nulle, de variance σ^2 et de pseudo-variance nulle, i.e. $b_k(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma, 0)$ pour tout k et tout instant t . La relation (2.6) devient

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}_P \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2.7)$$

où $\mathbf{b}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_b, \mathbf{0})$ est un processus i.i.d. multivariable avec $\Sigma_b = \sigma^2 \mathcal{I}$, où \mathcal{I} la matrice identité. La meilleure estimation $\tilde{\mathbf{y}}$ de \mathbf{y} au sens des moindres carrés est donnée par

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{W}_P^{-1} \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (2.8)$$

4. Cette distribution généralise la loi normale aux cas des variables aléatoires complexes z en introduisant, en plus de la moyenne $\mu = \mathbf{E}[z]$ et de la variance $\sigma^2 = \langle z, z \rangle = \mathbf{E}[(z - \mathbf{E}[z])(z - \mathbf{E}[z])]$, un troisième paramètre $\gamma = \langle z, \bar{z} \rangle$; ce paramètre, qui apparaît dans la littérature sous le nom de pseudo-variance, variance complémentaire, variance conjuguée ou facteur de relation, mesure la dépendance entre z et \bar{z} à l'ordre 2 (tandis que la variance σ^2 mesure la dépendance entre z et z à l'ordre 2). Pour plus de détails sur les distributions gaussiennes complexes, voir par exemple [Schreier et Scharf, 2010, Chapitre 2].

où $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{W}_P^{-1}\mathbf{b} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{0})$ est aussi un processus gaussien i.i.d. multivarié. À l'aide des règles de combinaison linéaire de distribution gaussienne⁵ et des propriétés de la matrice de la TFD \mathbf{W}_P , on trouve

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{P} \mathcal{I}. \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) montre qu'en utilisant la méthode de séparation CPS, on divise la variance de l'estimation due au bruit de mesure par P . Le RSB des ordres estimés est donc amélioré d'un facteur \sqrt{P} par rapport au RSB des mesures, ce qui correspond à une augmentation de $10 \log_{10}(P)$ dB. Par exemple, une amélioration de 20 dB est obtenue en fixant $P = 100$. Augmenter la valeur de P rend donc plus robuste la séparation d'ordres, au prix d'un nombre de mesures plus élevé.

Erreur de troncature et repliement d'ordre. La méthode de séparation d'ordre CPS nécessite de considérer des séries tronquées. Or un système physique est représenté par une série infinie. Les ordres supérieurs à la troncature N vont donc avoir un effet sur l'estimation des ordres y_n , qu'il convient d'étudier.

Considérons une série de Volterra non tronquée décrite par l'opérateur V . Étant donnée la P -périodicité d'une racine $P^{\text{ème}}$ de l'unité w , on a

$$V[wu](t) = \sum_{n=0}^{P-1} w^n \sum_{r=0}^{\infty} y_{n+rP}(t). \quad (2.10)$$

La relation (2.6) devient alors

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}_P \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{y}^{(r)}(t) \right), \quad (2.11)$$

avec, $\forall r \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{y}^{(r)} = \begin{bmatrix} y_{rP} \\ y_{rP+1} \\ \vdots \\ y_{rP+N} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

L'application de la méthode CPS donne donc l'estimation suivante des ordres \tilde{y}_n , pour $n = 0, \dots, N$:

$$\tilde{y}_n(t) = y_n(t) + \sum_{r=1}^{\infty} y_{n+rP}(t). \quad (2.13)$$

5. Ces règles sont la généralisation de celles connues pour la combinaison de variables aléatoires gaussiennes à valeurs réelles, i.e. si $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma})$, alors $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^H, \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}^T)$, où \mathbf{X}^T et \mathbf{X}^H dénotent respectivement la transposée et transposée hermitienne de \mathbf{X} .

L'équation (2.13) révèle que, lorsque l'ordre de troncature N est sous-estimé, l'estimation \tilde{y}_n est perturbée par un terme résiduel $\sum_{r=1}^{\infty} y_{n+rP}$. Celui-ci peut être vu comme un *repliement d'ordre non linéaire*⁶, qui se comporte exactement comme le repliement spectral lors du calcul de la TFD d'un signal complexe. Ce repliement d'ordre organise l'erreur résiduelle globale et la distribue sous forme de P perturbations. Cette organisation permet de réduire l'effet des ordres supérieurs à la troncature dans l'estimation des y_n .

Considérons qu'à la place des $w_k = w^k$, nous utilisons les facteurs $\lambda_k = \rho w^k$, avec $0 < \rho \leq 1$ (voir Figure 2.2). Alors (2.11) devient

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}_P \mathbf{R} \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \rho^{rP} \mathbf{y}^{(r)}(t) \right), \quad (2.14)$$

où $\mathbf{R} = \text{diag}(1, \rho, \dots, \rho^{P-1})$. Par inversion de $\mathbf{W}_P \mathbf{R}$, on obtient alors l'estimation $\tilde{\mathbf{y}}$ suivante :

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \rho^{rP} \mathbf{y}^{(r)}(t). \quad (2.15)$$

On observe que les contributions $\mathbf{y}^{(r)}$ du résidu sont atténuées d'un facteur $(\rho^P)^r < 1$. Le facteur de contraste ρ permet de contrôler cette diminution en influant sur la convergence des puissances de λ vers 0 (voir Figure 2.2). Les paramètres P et ρ permettent donc de minimiser l'impact des résidus des ordres supérieurs en améliorant le rapport $\text{RMS}(y_n) / \text{RMS}(y_{n+P})$ d'un ratio $1/\rho^P$ quel que soit l'ordre n , ce qui correspond à une augmentation de $-10P \log_{10}(\rho)$ dB. La Figure 2.3 montre l'évolution de cette amélioration en fonction des paramètres P et ρ . Par exemple, un ratio de 20 dB est obtenu en fixant e.g. (i) $P = 100$ et $\rho \approx 0.955$, ou (ii) $P = 10$ et $\rho \approx 0.631$. Le premier cas nécessite beaucoup plus de signaux tests que le second, mais l'amplitude plus élevée permet d'avoir des mesures avec un meilleur RSB.

En utilisant un facteur de contraste $\rho \neq 1$, les ordres y_n estimés correspondent à une entrée de référence u à une amplitude à laquelle le système n'a pas été mesurée — puisque toutes les mesures ont été faites à une amplitude $\rho|u|$. La séparation va donc extrapoler la valeur des ordres y_n à partir des mesures effectuées sous l'hypothèse que la série de Volterra du système reste convergente pour le niveau d'entrée $|u|$.

L'utilisation d'un facteur de contraste va de plus diminuer l'amélioration du RSB montrée précédemment. Des calculs similaires à (2.7)–(2.8) montrent que (2.9) devient

$$\Sigma_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{P} \mathbf{R}^2. \quad (2.16)$$

6. Je remercie le relecteur anonyme qui a proposé le terme de « *nonlinear order aliasing* » dans son compte-rendu de l'article de conférence [Bouvier *et al.*, 2017]Bouvier *et al.* [2017].

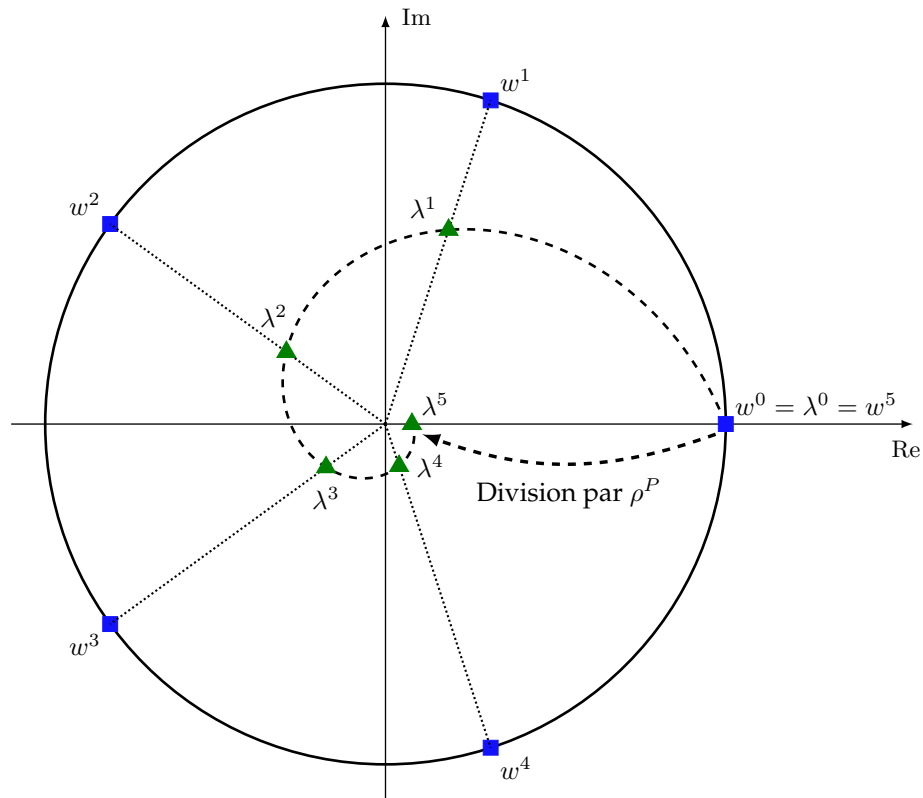


FIGURE 2.2 – Comparaison de l'évolution dans le plan complexe des puissances des facteurs $w = e^{j2\pi/(N+1)}$ — carrés bleu (■) — pour $N = 4$ et $\lambda = \rho w$ — triangles verts (▲) — pour $\rho < 1$.

L'amélioration du RSB passe donc à $\rho^n \sqrt{P}$ pour chaque ordre n , ce qui correspond à $10 \log_{10}(P) + 20n \log_{10}(\rho)$ dB; la Figure 2.4 montre l'évolution de cette amélioration en fonction des paramètres P et ρ .

Comme il est impossible d'exciter un système physique par des signaux complexes, la méthode CPS est seulement abstraite et inutilisable en pratique. Aussi, nous proposons ci-dessous une manière d'adapter l'utilisation du déphasage pour des signaux réels.

2.3 ADAPTATION DU DÉPHASAGE AU CAS DES SIGNAUX RÉELS

Afin d'étudier le comportement du déphasage d'un signal réel à travers les séries de Volterra, une nouvelle organisation des termes de la série de Volterra est développée. Pour cela, deux nouveaux types de signaux sont tout d'abord définis : les signaux interconjugués en § 2.3.1 et les signaux homophases en § 2.3.2. Ensuite, une méthode de séparation des signaux homophases basée sur les résultats de la méthode CPS est présentée en § 2.3.3 et étudiée en § 2.3.4.

2.3. ADAPTATION DU DÉPHASAGE AU CAS DES SIGNAUX RÉELS

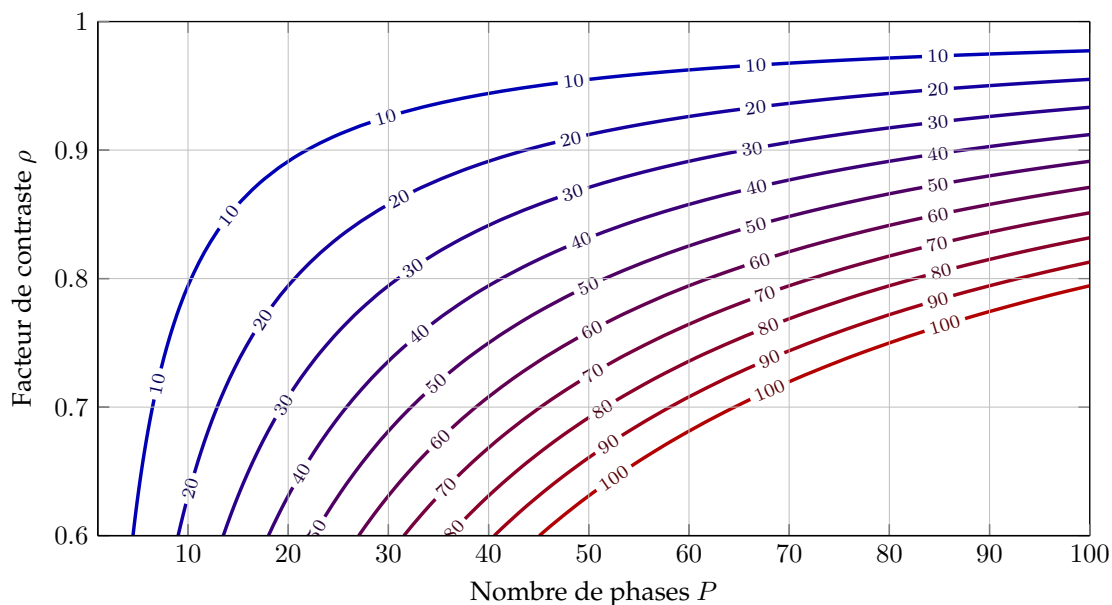


FIGURE 2.3 – Lignes de niveau (en décibels) de l’amélioration du rejet des perturbations d’ordres supérieurs à la troncature pour la méthode CPS en fonction du nombre de phases P et du facteur de contraste ρ .

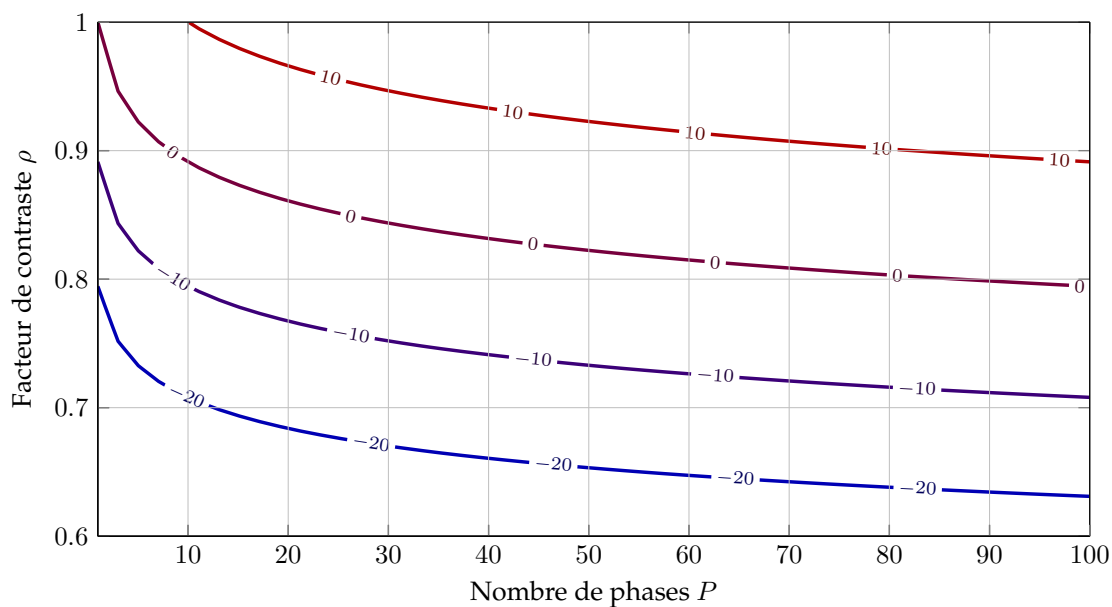


FIGURE 2.4 – Lignes de niveau (en décibels) de l’amélioration du rapport signal-sur-bruit pour la méthode CPS en fonction du nombre de phases P et du facteur de contraste ρ , pour l’ordre $n = 10$.

2.3.1 Signaux interconjugués

Dans le § 2.2, nous avons considéré un déphasage défini comme la multiplication d'un signal par le facteur $e^{j\theta}$. Néanmoins, le signal obtenu par cette opération est à valeurs complexes. Tout signal réel $r \in \mathcal{U}$ peut s'exprimer comme la somme pondérée d'un signal complexe de référence $u \in \mathcal{U}^C$ et de son conjugué. Le signal u peut être choisi comme le signal analytique⁷ de r , mais d'autres choix sont possibles, tant que l'égalité $r = (u + \bar{u})/2$ est respectée. Il est donc possible de construire la version déphasée d'un signal réel (telle que nous l'entendons dans cette thèse) à partir du déphasage du signal complexe de référence, i.e. en calculant $(e^{j\theta}u + \overline{e^{j\theta}u})/2$.

Pour étudier le comportement du déphasage à travers une série de Volterra, il faut donc considérer non plus seulement l'homogénéité mais surtout la multilinéarité des opérateurs de Volterra V_n . Une nouvelle notion permet de faire le lien entre \mathcal{Y} et \mathcal{Y}^C , celle des signaux interconjugués.

Définition 2.1 (Signaux interconjugués). Soit un signal $u \in \mathcal{U}^C$ et un opérateur de Volterra symétrique $V_n \in \mathcal{V}_n$ (cf. Définition 1.6 p. 19). Les signaux interconjugués $y_{n,q} \in \mathcal{Y}^C$ sont définis pour tout $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ par

$$y_{n,q}(t) := V_n \left[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q \text{ fois}}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{q \text{ fois}} \right] (t). \quad (2.17)$$

Par extension, on note aussi $y_{0,0}(t) := V_0(t) = y_0$.

Remarque 2.1. Les signaux $y_{n,0}$ (respectivement $y_{n,n}$) correspondent à la sortie d'ordre n d'une série de Volterra excitée par le signal u (resp. \bar{u}). Les signaux $y_{n,q}$ avec $0 \neq q \neq n$ n'ont pas de correspondance similaires en terme de relations entrées/sorties.

Propriété 2.1 (Symétrie hermitienne). Il découle de la symétrie de V_n les propriétés suivantes :

- pour tout ordre n et entier $q = 0, \dots, n$, on a $y_{n,n-q} = \overline{y_{n,q}}$;
- pour tout ordre n pair, les signaux $y_{n,n/2}$ sont réels.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. On note $\alpha = |\gamma|$ et $\theta = e^{j \arg \gamma}$. En notant le signal $v = \alpha \theta u \in \mathcal{U}^C$, on a alors

$$V_n \left[\underbrace{v, \dots, v}_{n-q \text{ fois}}, \underbrace{\bar{v}, \dots, \bar{v}}_{q \text{ fois}} \right] (t) = \alpha^n \theta^{n-2q} V_n \left[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q \text{ fois}}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{q \text{ fois}} \right] (t), \quad (2.18)$$

ce qui nous permet de déduire la propriété suivante.

7. Un signal analytique est un signal complexe n'ayant aucune fréquence négative. À tout signal réel correspond un unique signal analytique qui peut être calculé à l'aide de la Transformée de Hilbert.

Propriété 2.2 (Homogénéité). Les signaux $y_{n,q}$ sont

- homogènes d'ordre n par rapport à un gain en amplitude du signal u ;
- homogènes d'ordre $n - 2q$ par rapport à un déphasage du signal u .

Propriété 2.3. Soit le signal sinusoïdal complexe $u(t) = e^{j2\pi ft}$. Alors les signaux interconjugués $y_{n,q}$ sont des sinusoïdes complexes qui représentent la contribution d'ordre n à la fréquence $(n - 2q)f$. Leur phase et amplitude dépendent de l'opérateur V_n .

Remarque 2.2. On observe en pratique que la **Propriété 2.3** se généralise au cas des signaux sinusoïdaux $u(t) = e^{j2\pi f(t)t}$ où la fréquence instantanée $f(t)$ varie lentement, i.e. les signaux interconjugués sont alors sinusoïdes complexes de la fréquence $(n - 2q)f(t)$.

Les signaux interconjugués permettent de ré-écrire la sortie d'ordre n en réponse à un signal d'entrée réel, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.1. Soit les conditions de la **Définition 2.1**. On note $r = \text{Re}[u] \in \mathcal{U}$, et $y_n = V_n[r, \dots, r] \in \mathcal{Y}$ la sortie d'ordre n correspondante. Alors

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} y_{n,q}(t). \quad (2.19)$$

Démonstration. La preuve découle de la symétrie et de la n -linéarité de l'opérateur V_n qui prend pour chacune de ses n entrées $r = (u + \bar{u})/2$. \square

Exemple 2.1. Soit le signal cosinusoidal $r(t) = \cos(2\pi ft)$ et sa version analytique $u(t) = e^{j2\pi ft}$. Considérons un opérateur V_n tel que $V_n[r](t) = r(t)^n$. Alors (2.19) régénère

$$\begin{aligned} \cos(2\pi ft)^n &= \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} e^{j(n-2q)2\pi ft} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\binom{n}{n/2} + \sum_{m=1}^{n/2} \binom{n}{n/2 - m} \cos(2\pi 2m ft) \right), & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{(n-2m-1)/2} \cos(2\pi(2m+1)ft), & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

la formule de linéarisation de $\cos(x)^n$ qui fait apparaître les coefficients des polynômes de Tchebychev.

Pour la méthode CPS (cf. § 2.2), et grâce à l'utilisation de signaux complexes, les ordres d'homogénéité par rapport à un changement d'amplitude et par rapport à un déphasage sont confondus. Cette propriété nous a permis de remplacer l'utilisation d'une matrice de Vandermonde quelconque par la matrice de la TFD pour la séparation d'ordre. Le Lemme 2.1 montre que pour le cas des signaux à valeurs réelles, deux ordres distincts apparaissent pour l'amplitude et la phase (cf. (2.18)). Il n'existe pas de relation d'homogénéité entre le déphasage des ordres de la sortie et le déphasage du signal d'entrée (excepté le cas de l'opposition de phase, i.e. d'une multiplication de l'entrée par -1). Par contre, chaque ordre peut se décomposer en une somme de signaux interconjugués (cf. (2.19)) qui sont bien en relation d'homogénéité par rapport un déphasage du signal complexe u . Cette relation induit un support fréquentiel très particulier pour les signaux $y_{n,q}$, comme le détaille le corollaire suivant.

Corolaire 2.1. Soit un signal complexe $u \in \mathcal{U}^C$ de support fréquentiel borné $\Delta_u = [f_1, f_2]$. Pour tout opérateur $V_n \in \mathcal{V}_n$, le support fréquentiel $\Delta_{y_{n,q}}$ du signal interconjugué $y_{n,q}$ correspondant (cf. Définition 2.1) vaut

$$\Delta_{y_{n,q}} = \left[(n-q)f_1 - qf_2, (n-q)f_2 - qf_1 \right]. \quad (2.22)$$

Ce support est centré en $\frac{n-2q}{2}(f_1 + f_2)$ avec une largeur de $n(f_2 - f_1)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le support fréquentiel de $y_{n,q}$ est identique à celui du signal $u^{n-q}\bar{u}^q$. \square

Exemple 2.2. Soit le signal u dont la transformée de Fourier vaut 1 sur le domaine fréquentiel $[a, b]$, 0 ailleurs⁸, et r sa version réelle, i.e. $r(t) = \text{Re}[u(t)]$. Considérons un opérateur V_n tel que $V_n[r](t) = r(t)^n$. Les spectres correspondants aux signaux $y_{n,q}$ pour $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $n = 1, 2, 3$ sont montrés en Figure 2.5.

Corolaire 2.2. Soit un signal complexe $u \in \mathcal{U}^C$ de support fréquentiel borné $\Delta_u = [f_1, f_2]$. Pour tout opérateur $V_n \in \mathcal{V}_n$, le support fréquentiel Δ_{y_n} de la sortie d'ordre homogène y_n vaut

$$\Delta_{y_n} = \bigcup_{q=0}^n \left[(n-q)f_1 - qf_2, (n-q)f_2 - qf_1 \right]. \quad (2.23)$$

Démonstration. La preuve découle directement de la combinaison du Lemme 2.1 et du Corolaire 2.1. \square

La formule (2.23) est un résultat déjà connu de la littérature [Lang et Billings, 1997].

8. Il s'agit d'un sinus cardinal modulé dont l'expression temporelle est $(b-a) \text{sinc}(\pi(b-a)t) e^{j\pi t(a+b)t}$.

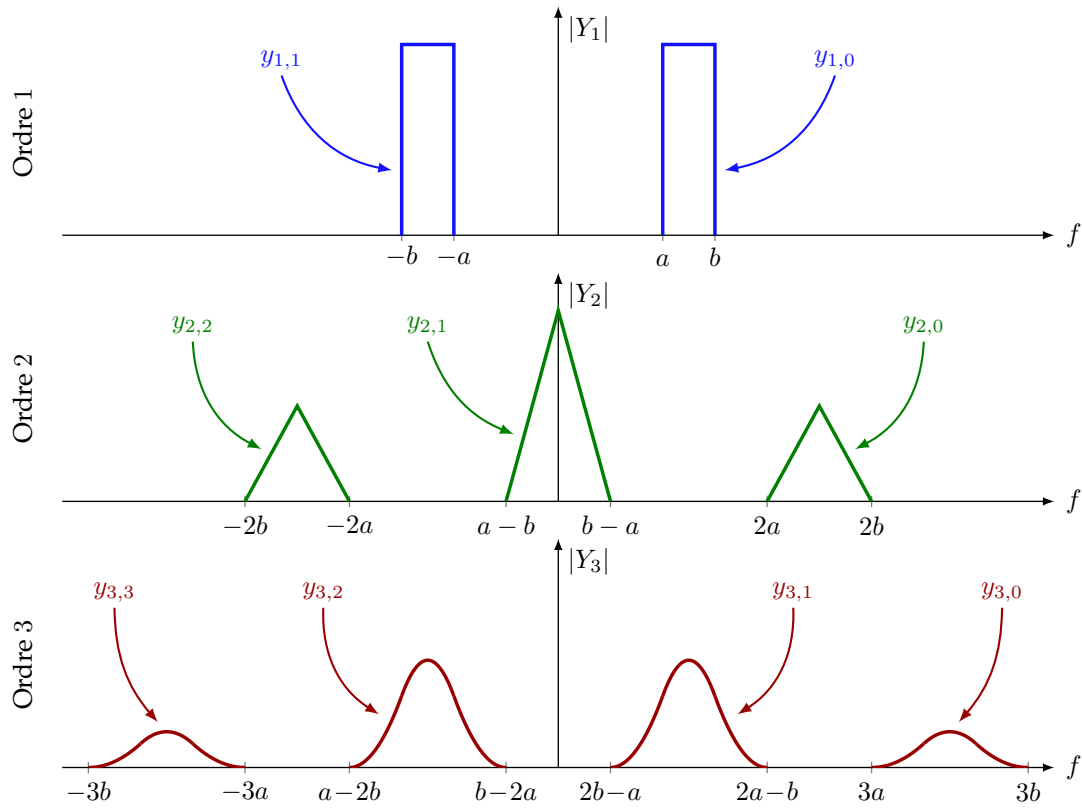


FIGURE 2.5 – Spectres des signaux interconjugués $y_{n,q}$ décrits dans l'Exemple 2.2

2.3.2 Signaux homophases

Maintenant que les outils pour décrire la sortie réelle d'une série de Volterra à l'aide de signaux complexes — les signaux interconjugués — sont disponibles, il devient possible d'étudier l'effet d'un déphasage dans le cas des signaux réels. Soit un signal complexe de référence $u \in \mathcal{U}^C$, et θ un scalaire complexe sur le cercle unité, i.e. $|\theta| = 1$. On note $r_\theta = \text{Re}[\theta u] \in \mathcal{U}$, et $y_n \in \mathcal{Y}$ la sortie d'ordre n correspondante. Alors le Lemme 2.1 et la propriété d'homogénéité (1.18) donnent

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} \theta^{n-2q} y_{n,q}(t). \quad (2.24)$$

En accord avec la Propriété 2.2, les signaux interconjugués $y_{n,q}$ sont liés à un facteur de déphasage θ^{n-2q} fixe. Si l'on représente les $y_{n,q}$ dans un plan selon leur ordre n et leur déphasage $p = n - 2q$ (voir Figure 2.6), on retrouve la structure du triangle de Pascal. Cela découle tout simplement de la propriété de multilinéarité des opérateurs V_n . Les différents termes $y_{n,q}$ regroupés dans chaque colonne p partagent donc tous le même déphasage; cela nous amène à la définition suivante :

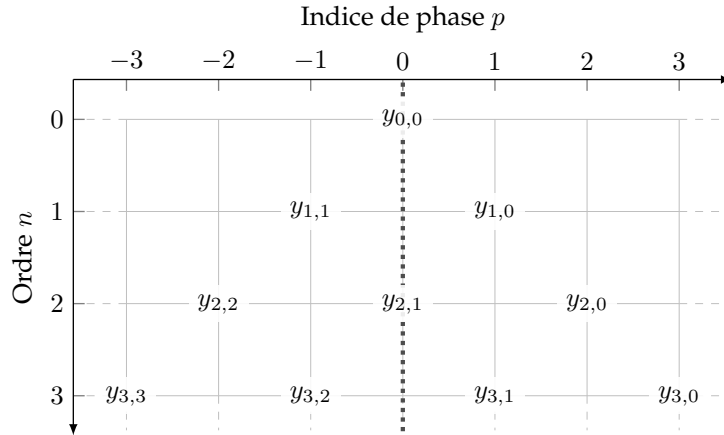


FIGURE 2.6 – Représentation des signaux interconjugés $y_{n,q}$ dans un plan (n, p) , avec n leur ordre de non-linéarité et $p = n - 2q$ leur indice de déphasage; la ligne pointillée (····) indique l'axe de symétrie hermitienne.

Définition 2.2 (Signaux homophases). Soit un opérateur de Volterra $V \in \mathcal{V}\mathcal{S}$ d'ordre maximal fini $N \in \mathbb{N}$ ou infini $N = +\infty$. Soit un signal $u \in \mathcal{U}^C$, et $y_{n,q}$ les signaux interconjugés donnés par la Définition 2.1 pour tout $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$. On définit

- l'ensemble d'indices

$$\mathbb{I}_p^N = \{n \in \mathbb{N} \mid |p| \leq n \leq N \text{ et } n \equiv p [2]\}, \quad (2.25)$$

où $a \equiv b [k]$ signifie a congru à b modulo k ;

- les signaux homophases $\psi_p \in \mathcal{Y}^C$ donnés pour tout $p \in \llbracket -N; N \rrbracket$ par

$$\psi_p(t) := \sum_{n \in \mathbb{I}_p^N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} y_{n, \frac{n-p}{2}}(t). \quad (2.26)$$

Propriété 2.4 (Symétrie hermitienne). Il découle de la Propriété 2.1 que :

- pour tout indice de phase p , on a $\psi_{-p} = \overline{\psi_p}$;
- le signal ψ_0 est réel.

Propriété 2.5 (Homogénéité). Il découle de la Propriété 2.2 que les signaux ψ_p sont homogènes d'ordre p par rapport à un déphasage du signal de référence u .

Propriété 2.6. Soit le signal sinusoïdal complexe $u(t) = e^{j2\pi ft}$. Alors les signaux homophases ψ_p sont des sinusoïdes complexes qui représentent la contribution du système— de tous les ordres — à la fréquence pf . Leur phase et amplitude dépendent de l'opérateur V_n .

Remarque 2.3. En pratique, on observe aussi que pour des excitations ayant une fréquence instantanée $f(t)$ à variation suffisamment lente, les signaux homophases ψ_p correspondent aux composantes harmoniques de fréquence $pf(t)$.

Cette notion de signaux homophases permet de réécrire la sortie d'une série de Volterra comme une somme de termes homogènes, non plus en amplitude, mais en phase.

Théorème 2.1. *Soit un opérateur de Volterra $V \in \mathcal{VS}$ d'ordre maximal fini $N \in \mathbb{N}$ ou infini $N = +\infty$. Soit un signal $u \in \mathcal{U}^C$, ψ_p les signaux homophases donnés par la Définition 2.2 pour tout $p \in \llbracket -N; N \rrbracket$, et θ un scalaire complexe sur le cercle unité. On note $y \in \mathcal{Y}$ la sortie de l'opérateur en réponse à $\text{Re}[\theta u] \in \mathcal{U}$. Alors*

$$y(t) = \sum_{p=-N}^N \theta^p \psi_p(t). \quad (2.27)$$

Démonstration. Voir Annexe A.1. □

L'équation (2.27) montre qu'il est possible de séparer les signaux homophases d'une manière similaire à la méthode CPS, comme le montre la section suivante.

2.3.3 Présentation de la méthode HPS

Soit une série de Volterra de degré $N \in \mathbb{N}$. Soit un signal complexe de référence $u \in \mathcal{U}^C$, $r = \text{Re}[u] \in \mathcal{U}$ le signal d'entrée associé, et $\psi_p \in \mathcal{Y}^C$ les signaux homophases que l'on souhaite séparer. On introduit $P = 2N + 1$ et $w = e^{-j2\pi/P}$; notons $u_k = \text{Re}[w_k u] \in \mathcal{U}$ une collection de signaux d'entrée, et $z_k = V[u_k] \in \mathcal{Y}$ les sorties correspondantes. Alors (2.27) donne

$$z = \mathbf{W}_P \psi, \quad (2.28)$$

où $\psi = [\psi_0 \ \dots \ \psi_N \ \psi_{-N} \ \dots \ \psi_{-1}]^T$ et \mathbf{W}_P est la matrice de la TFD. La structure du vecteur ψ découle de la symétrie hermitienne des signaux ψ_p selon p (cf. Propriété 2.4), et est en accord avec le fait que ψ correspond au spectre du vecteur z réel.

On peut donc récupérer les signaux homophases à l'aide d'une TFD inverse appliquée aux mesures — i.e. en calculant $\psi = z \mathbf{W}_P^{-1}$. On nommera cette méthode

Séparation en signaux Homophases (HPS, pour *HomoPhase Separation method*).

En utilisant la même approche que pour la méthode CPS — déphasage et TFD inverse —, les signaux de phases homogènes peuvent être séparés. Mais, à la différence du cas des signaux complexes où phase, amplitude et ordre de non-linéarité sont tout trois homogènes, dans le cas des signaux réels ces signaux *homophases* ne correspondent pas aux ordres y_n . Autre différence, le nombre minimum de phases requises passe de $N + 1$ (pour CPS) à $2N + 1$. Ceci est dû au fait que, travaillant sur des signaux réels, il faille prendre en compte à la fois les indices de phases p positives et négatives.

2.3.4 Propriétés

La méthode HPS utilisant la TFD — comme CPS —, on y retrouve une grande partie de ses propriétés.

Interpolation et nombre de phases. Comme pour la méthode CPS (cf. § 2.2.3), il est possible d'utiliser un nombre de phases P supérieur à $P_{\min} = 2N + 1$. Le vecteur ψ estimé devient alors

$$\psi = [\psi_0 \ \dots \ \psi_N \ 0 \ \dots \ 0 \ \psi_{-N} \ \dots \ \psi_{-1}]^T. \quad (2.29)$$

La différence par rapport à CPS sur l'apparition des zéros tient à la symétrie hermitienne de ψ .

Robustesse au bruit. Supposons que chaque mesure z_k est perturbée par un processus i.i.d. suivant une loi gaussienne centrée de variance σ^2 , i.e. $b_k(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour tout instant t . Alors, de manière similaire à (2.7) et (2.8), on montre que la meilleure estimation des signaux homophases au sens des moindres carrés, donnée par

$$\tilde{\psi}(t) = \mathbf{W}_P^{-1} \tilde{\mathbf{z}}(t) = \psi(t) + \varepsilon(t) \quad (2.30)$$

est perturbée par un processus gaussien à valeurs complexes i.i.d. multivariable $\mathbf{b} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Les matrices de covariance Σ_ε et de pseudo-covariance Γ_ε de ce bruit d'estimation sont données par⁹

$$\Sigma_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{P} \mathbf{I}, \quad (2.31)$$

$$\Gamma_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{P} \mathcal{J}, \quad (2.32)$$

avec \mathcal{J} la matrice carrée de taille P telle que $\mathcal{J}_{ij} = 1$ si $i + j \equiv 0 [P]$ et 0 sinon, pour $i, j = 0, \dots, P - 1$. La forme de la matrice de pseudo-covariance découle de la symétrie hermitienne du vecteur $\tilde{\psi}$.

Les équations (2.31) et (2.32) montre qu'en utilisant la méthode HPS, le RSB des signaux homophases estimés s'améliore d'un facteur \sqrt{P} , correspondant à une augmentation de $10 \log_{10}(P)$. Il est donc intéressant d'utiliser un nombre de phases P grand pour augmenter la robustesse au bruit de mesure.

Erreur de troncature et repliement d'ordre homophase. On s'intéresse à l'effet des ordres supérieurs à l'ordre de troncature N sur l'estimation des signaux ψ_p pour $p \in \llbracket -N; N \rrbracket$.

9. La preuve se fait en considérant que si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, alors $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma})$; autrement dit, une variable aléatoire qui suit une distribution gaussienne peut aussi être décrite à l'aide d'une distribution gaussienne complexe, avec sa matrice de pseudo-covariance Γ égale à sa matrice de covariance Σ .

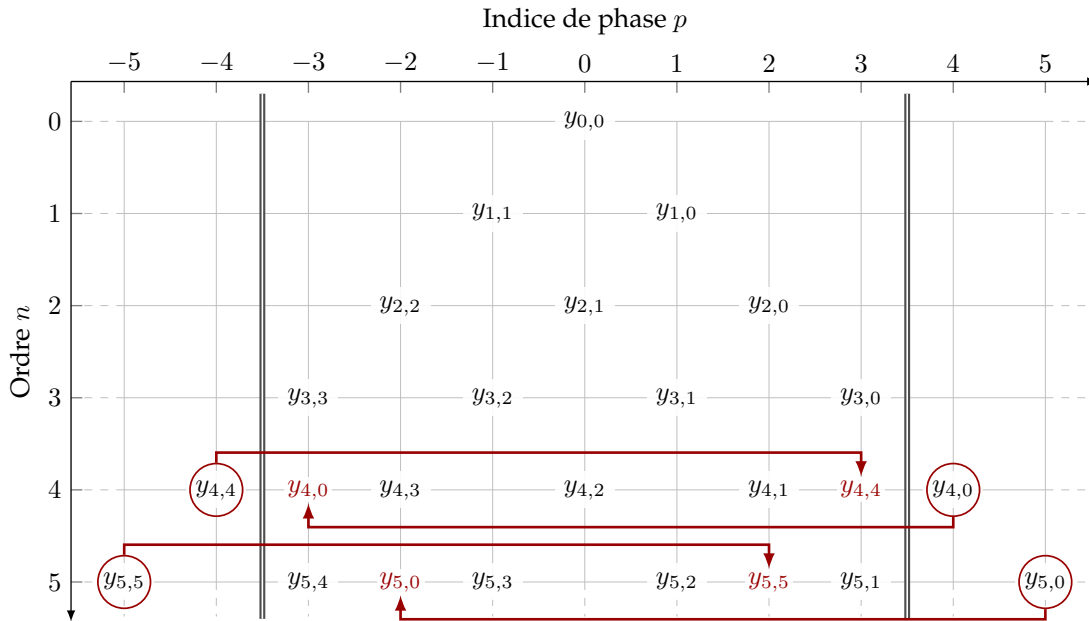


FIGURE 2.7 – Illustration du repliement apparaissant dans la méthode HPS pour un ordre de troncature $N = 3$ en représentant les signaux interconjugués $y_{n,q}$ dans un plan (n, p) , avec n leur ordre de non-linéarité et $p = n - 2q$ leur indice de déphasage ; les lignes doubles (\equiv) indiquent les axes de périodicité dues au repliement, et les signaux interconjugués repliés sont indiqués par des flèches rouges.

Soit une série de Volterra (non tronquée) décrite par l'opérateur V . Alors les signaux homophases ψ_p estimés par HPS contiennent des contributions de tous les ordres $n \geq p$ puisque la somme dans l'équation (2.26) est infinie. De plus, étant donnée la périodicité de n'importe quelle racine $P^{\text{ème}}$ de l'unité w , on peut réécrire (2.27) comme suit :

$$V [\text{Re}[wu]](t) = \sum_{p=-(P-1)/2}^{(P-1)/2} w^p \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{p+rP}(t). \quad (2.33)$$

On observe donc ici aussi un phénomène de repliement, se comportant comme le repliement spectral lors du calcul de la TFD d'un signal réel. À l'instar de la méthode CPS, l'estimation $\tilde{\psi}_p$ se retrouve donc perturbée comme suit :

$$\tilde{\psi}_p(t) = \psi_p(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \psi_{p+rP}(t). \quad (2.34)$$

Exprimé autrement, cela signifie que $\tilde{\psi}_p$ regroupe tous les signaux interconjugués $y_{n,q}$ tel que $p \equiv n - 2q [P]$ (voir Figure 2.7).

L'utilisation d'un facteur de contraste pour minimiser l'effet du repliement, comme pour la méthode CPS, n'est ici pas possible. Cela est dû au fait que les

signaux homophases ne sont pas homogènes par rapport à l'amplitude du signal d'entrée, puisqu'ils contiennent des contributions de plusieurs ordres différents. La seule manière permettant de réduire l'impact du repliement est de prendre un nombre de phases P élevé — et donc utiliser un grand nombre de signaux tests. En effet, les ψ_p ne comportant que des contributions d'ordres n supérieurs à $|p|$, la première perturbation ψ_{p+P} sera d'amplitude assez faible par rapport à celle de ψ_p si P est assez grand.

La méthode HPS nous donne accès aux signaux homophases (avec un conditionnement optimal et une robustesse intéressante si P est grand) grâce à l'utilisation d'une TFD inverse. Toutefois elle ne permet pas de retrouver les ordres y_n puisque pour cela il faudrait pouvoir séparer tous les différents signaux interconjugués $y_{n,q}$, et reconstruire les ordres à l'aide de la relation (2.19). Pour retrouver les $y_{n,q}$, le § 2.4 présente une méthode mixte, exploitant des relations de phase (comme dans HPS) et d'amplitude (comme dans AS). Une autre méthode, utilisant quand à elle seulement des relations de phase, est présentée en § 2.5.

2.4 SÉPARATION D'ORDRE UTILISANT PHASE ET AMPLITUDE

2.4.1 Idée

Pour un indice de phase p donné, les signaux interconjugués $y_{n,q}$ tels que $n - 2q = p$ partagent le même ordre d'homogénéité par rapport à un déphasage du signal d'entrée (cf. [Propriété 2.2](#)). S'ils ne peuvent être discriminés via des relations de phases, ils peuvent l'être via des relations d'amplitudes. L'intérêt réside dans le fait que le nombre de termes à séparer (via l'amplitude) dans un signal homophase est réduit par rapport au nombre d'ordres à séparer dans la sortie totale. Puisque la méthode HPS fait déjà une séparation entre les ordres pairs et impairs, le nombre d'amplitudes nécessaires est égal au nombre maximum de signaux $y_{n,q}$ dans un signal ψ_p , i.e. $1 + \lfloor N/2 \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Puisqu'ils serviront à séparer des signaux $y_{n,q}$ avec des ordres n de même parité, il est nécessaire que ces facteurs soient tous de même signe.

2.4.2 Présentation de la méthode PAS

Soit une série de Volterra de degré $N \in \mathbb{N}$. Soit un signal complexe de référence $u \in \mathcal{U}^C$, $r = \text{Re}[u] \in \mathcal{U}$ le signal d'entrée associé, et $y_n \in \mathcal{Y}$ les ordres que l'on souhaite séparer. On nommera

Séparation par utilisation de Phases et Amplitudes (PAS, pour *Phase and Amplitude Separation method*)

la méthode constituée des étapes suivantes :

- (i) **Séparation des signaux homophases.** Soit $A = 1 + \lfloor N/2 \rfloor$ coefficients $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; A \rrbracket$. Pour chaque amplitude α_k , on applique la méthode HPS en utilisant $u_k = \alpha_k u$ comme signal complexe de référence, et on note $\psi_p^{(\alpha_k)}$ les signaux homophases ainsi estimés. D'après la [Définition 2.2](#) et la [Propriété 2.2](#), ces signaux $\psi_p^{(\alpha_k)}$ sont donnés par

$$\psi_p^{(\alpha_k)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{I}_p^N} \frac{\alpha_k^n}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} y_{n, \frac{n-p}{2}}(t). \quad (2.35)$$

- (ii) **Regroupement par indice de phase.** On note N_p l'ordre maximal de non-linéarité apparaissant dans le signal ψ_p , i.e.

$$N_p = \begin{cases} N, & \text{si } p \equiv N \pmod{2}; \\ N - 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour chaque $p = -N, \dots, N$, on construit :

- le vecteur $\boldsymbol{\psi}_p$ regroupant tous les $\psi_p^{(\alpha_k)}$ pour $k = 1, \dots, A$, i.e.

$$\boldsymbol{\psi}_p(t) = \begin{bmatrix} \psi_p^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ \psi_p^{(\alpha_A)} \end{bmatrix} (t); \quad (2.37)$$

- le vecteur \mathbf{y}_p regroupant tous les signaux $y_{n,q}$ tels que $n - 2q = p$, i.e.

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} y_{|p|, \frac{|p|-p}{2}} \\ y_{|p|+2, \frac{|p|-p}{2}+1} \\ \vdots \\ y_{N_p, \frac{N_p-p}{2}} \end{bmatrix} (t); \quad (2.38)$$

- la matrice de combinaison Ξ_p donnée par

$$\Xi_p = \begin{bmatrix} \xi_{|p|}^{(\alpha_1)} & \xi_{|p|+2}^{(\alpha_0)} & \cdots & \xi_{N_p}^{(\alpha_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{|p|}^{(\alpha_A)} & \xi_{|p|+2}^{(\alpha_0)} & \cdots & \xi_{N_p}^{(\alpha_A)} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

où les $\xi_n^{(\alpha)}$ sont définis par

$$\xi_n^{(\alpha)} = \frac{\alpha^n}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}}. \quad (2.40)$$

- (iii) **Séparation des signaux interconjugués.** D'après (2.35), la relation

$$\boldsymbol{\psi}_p(t) = \Xi_p \mathbf{y}_p(t) \quad (2.41)$$

est vraie pour tout $p = -N, \dots, N$. Les signaux interconjugués $y_{n,q}$ sont donc estimés en inversant (2.41). La matrice Ξ_p est (pseudo-)inversible si et seulement si les facteurs α_k sont non nuls et distincts deux à deux.

(iv) **Reconstruction des sorties d'ordres homogènes :** Une fois que les signaux $y_{n,q}$ sont connus, les ordres y_n sont reconstruits en utilisant le Lemme 2.1.

D'une certaine manière, cette méthode PAS peut être vue comme une extension de la méthode AS utilisant des facteurs de signes alternés : le même nombre d'amplitudes $A = 1 + \lfloor N/2 \rfloor$ est nécessaire, et l'utilisation de facteurs de signes alternés est étendue à tout déphasage (facteurs complexes sur le cercle unité). Il en résulte un plus grand nombre de signaux tests mais aussi la possibilité d'avoir accès aux signaux interconjugués $y_{n,q}$, et pas seulement aux ordres homogènes y_n .

2.4.3 Propriétés

La méthode PAS, par définition, hérite des avantages et inconvénients des méthodes AS et HPS. Puisque l'étape (i) consiste essentiellement en plusieurs applications de la méthode HPS, son conditionnement est optimal. De plus, sa robustesse aux bruits de mesure et à une mauvaise troncature N peut être améliorée en augmentant le nombre de phases P utilisé pour HPS ; chaque ajout d'une phase augmente le nombre de signaux tests nécessaires de $1 + \lfloor N/2 \rfloor$.

À l'inverse, l'étape (iii) est plutôt mal conditionnée. Bien que les matrices de Vandermonde à inverser soient de petite taille — par rapport à la matrice de Vandermonde inversée dans AS —, le conditionnement de certaines est assez élevé. Ceci est particulièrement vrai pour les matrices Ξ_1 et Ξ_{-1} dont l'inversion permet d'obtenir les termes linéaires. Comme pour la méthode AS, il est possible d'y remédier en utilisant plus d'amplitudes différentes ; chaque nouveau facteur α_k fait augmenter le nombre de signaux tests nécessaires de P .

La robustesse globale de la méthode PAS repose donc sur un compromis entre nombre de phases P et nombre d'amplitudes A d'un côté, et nombre de signaux tests et intervalle d'amplitude disponible de l'autre.

2.5 SÉPARATION D'ORDRE PAR DOUBLE DÉPHASAGE

Afin d'éviter les difficultés inhérentes à l'utilisation d'amplitudes, cette section propose une méthode basée sur des combinaisons linéaires de paires de signaux ayant chacun un déphasage propre.

2.5.1 Résultats préliminaires

La notion de signal homophase introduite en § 2.3.2 regroupe les signaux signaux $y_{n,q}$ dont la phase varie identiquement (grâce à une matrice de TFD). De même, un nouveau type de signal est défini ici, permettant l'exploitation de

la multi-linéarité des ordres de Volterra (au lieu de l'homogénéité) pour étudier la réponse à un signal de la forme $\text{Re}\left[\frac{\theta_1 u + \theta_2 u}{2}\right]$.

Définition 2.3 (Signaux biphasés). Soit un opérateur de Volterra $V \in \mathcal{VS}$ d'ordre maximal fini $N \in \mathbb{N}$ ou infini $N = +\infty$. Soit un signal $u \in \mathcal{U}^C$, et $y_{n,q}$ les signaux interconjugués données par la [Définition 2.1](#) pour tout $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$. On définit

- les coefficients

$$\chi_n(a_1, a_2) := \frac{1}{4n} \sum_{\substack{l=a_1 \\ l \equiv a_1 [2]}}^{n-a_2} \binom{n}{\frac{l+a_1}{2}, \frac{n-l+a_2}{2}, \frac{l-a_1}{2}, \frac{n-l-a_2}{2}}, \quad (2.42)$$

où $\binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$ est le coefficient multinomial;

- l'ensemble d'indices

$$\mathbb{J}_{p_1, p_2}^N = \{n \in \mathbb{N} \mid |p_1| + |p_2| \leq n \leq N \text{ et } n \equiv p_1 + p_2 [2]\}; \quad (2.43)$$

- Les signaux biphasés $\Psi_{p_1, p_2} \in \mathcal{Y}^C$ donnés pour tout $(p_1, p_2) \in \llbracket -N; N \rrbracket^2$ par

$$\Psi_{p_1, p_2}(t) := \sum_{n \in \mathbb{J}_{p_1, p_2}^N} \chi_n(|p_1|, |p_2|) y_{n, \frac{n-|p_1|-|p_2|}{2}}(t), \quad (2.44)$$

Propriété 2.7 (Symétrie). En remarquant que $\chi_n(a_1, a_2) = \chi_n(a_2, a_1)$, il s'en suit que $\Psi_{p_1, p_2}(t) = \Psi_{p_2, p_1}(t)$.

Propriété 2.8 (Symétrie hermitienne). Il découle de la [Propriété 2.1](#) que :

- pour tout indices de phases p_1 et p_2 , on a $\Psi_{-p_1, -p_2} = \overline{\Psi_{p_1, p_2}}$;
- pour tout indice de phase p , le signal $\Psi_{p, -p}$ est réel.

Propriété 2.9 (Homogénéité). Il découle de la [Propriété 2.2](#) que les signaux Ψ_{p_1, p_2} sont homogènes d'ordre $p = p_1 + p_2$ par rapport à un déphasage du signal de référence u .

Les signaux biphasés permettent de ré-écrire simplement la sortie d'une série de Volterra pour une entrée constituée comme la combinaison linéaire d'une paire de signaux ayant chacun un déphasage propre.

Théorème 2.2. Soit un opérateur de Volterra $V \in \mathcal{VS}$ d'ordre maximal fini $N \in \mathbb{N}$ ou infini $N = +\infty$. Soit un signal $u \in \mathcal{U}^C$, Ψ_{p_1, p_2} les signaux biphasés donnés par la [Définition 2.3](#), et θ_1, θ_2 deux scalaires complexes sur le cercle unité. On note $y \in \mathcal{Y}$ la sortie de l'opérateur en réponse à l'entrée $\text{Re}\left[\frac{\theta_1 u + \theta_2 u}{2}\right] \in \mathcal{U}$. Alors

$$y(t) = \sum_{|p_1| + |p_2| \leq N} \theta_1^{p_1} \theta_2^{p_2} \Psi_{p_1, p_2}(t), \quad (2.45)$$

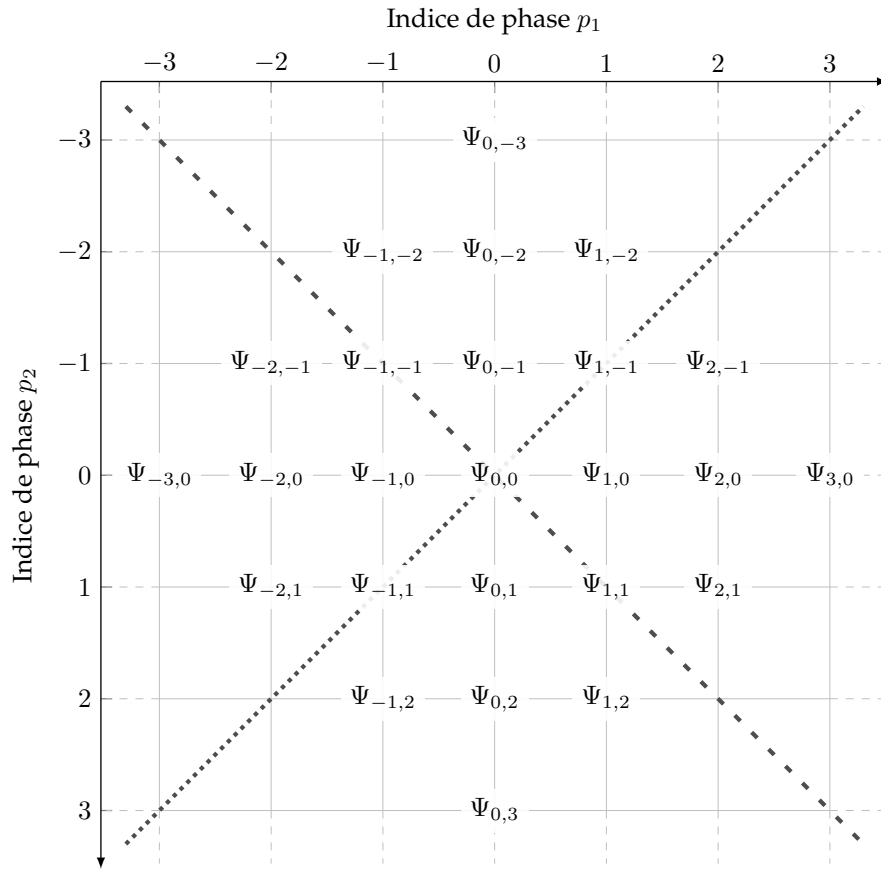


FIGURE 2.8 – Répartition des signaux biphasés Ψ_{p_1, p_2} jusqu'à l'ordre $n = 3$ dans un plan (p_1, p_2) ; la ligne en tireté (- -) indique l'axe de symétrie, et la ligne pointillée (.....) l'axe de symétrie hermitienne.

Démonstration. Voir Annexe A.2. □

Le **Théorème 2.2** montre qu'il est possible de séparer les signaux biphasés à l'aide de l'utilisation d'une Transformée de Fourier Discrète à deux dimensions (TFD-2D). En effet, pour une entrée de la forme $\text{Re}\left[\frac{\theta_1 u + \theta_2 v}{2}\right]$, la sortie d'une série de Volterra peut être décomposée en signaux Ψ_{p_1, p_2} dans le plan de phases (p_1, p_2) (voir **Figure 2.8**). Les symétries de cette décomposition sont similaires à celles du spectre de fréquences d'une image 2D réelle (cf. **Propriétés 2.7** et **2.8**).

De plus, d'après (2.44) et (2.45), les signaux $y_{n,q}$ peuvent être répartis dans le demi-espace tridimensionnel (p_1, p_2, n) comme en **Figure 2.9**. On y remarque la structure tétraédrique de la pyramide de Pascal, qui est due à la multi-linéarité de l'opérateur V_n . On y observe aussi le fait que, pour un n donné, l'anti-diagonale $p = p_1 + p_2$ ne contient qu'un seul signal interconjugué— i.e. $y_{n, \frac{n-p}{2}}$ —, et que les signaux $y_{n,q}$ sont circonscrits à l'intérieur du carré $|p_1| + |p_2| \leq n$. Ces propriétés rendent possible la séparation des signaux interconjugués à partir des signaux biphasés, comme détaillé ci-dessous.

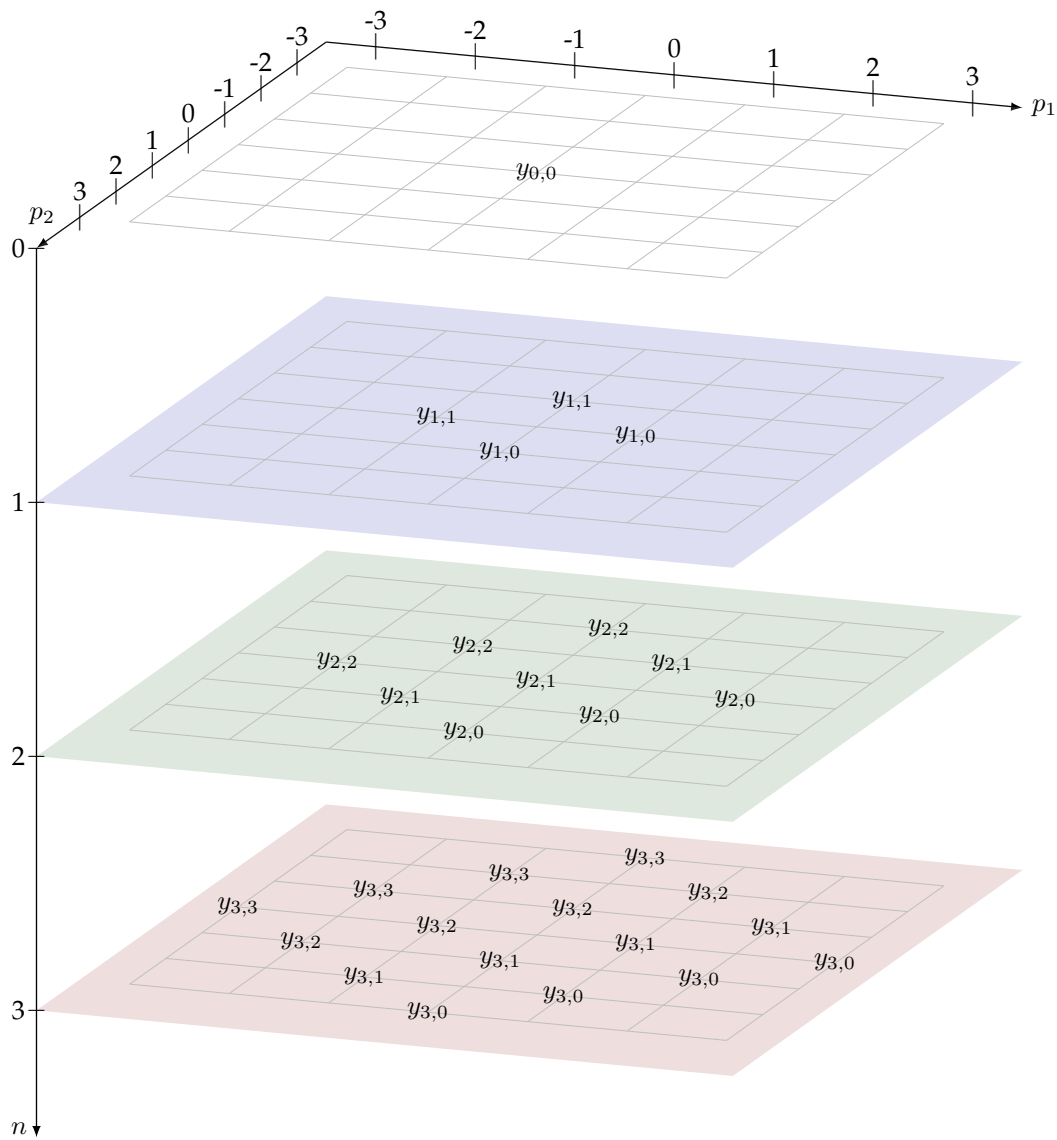


FIGURE 2.9 – Répartition des signaux interconjugués $y_{n,q}$ jusqu'à l'ordre $n = 3$ dans le demi-espace tridimensionnel (p_1, p_2, n) suivant les relations $q = \frac{n-p_1-p_2}{2}$ et $|p_1| + |p_2| \leq n$.

2.5.2 Présentation de la méthode RPS

Soit une série de Volterra de degré $N \in \mathbb{N}$. Soit un signal complexe de référence $u \in \mathcal{U}^C$, $r = \text{Re}[u] \in \mathcal{U}$ le signal d'entrée associé, et $y_n \in \mathcal{Y}$ les ordres que l'on souhaite séparer. On nommera

Séparation par Phase pour signaux Réels (RPS, pour *Real-valued Phase-based Separation*).

la méthode constituée des étapes suivantes :

- (i) **Création des signaux.** Soit $P = 2N + 1$ et $w = e^{-j2\pi/P}$; notons $U_{k_1, k_2} = \frac{1}{2} \text{Re}[(w^{k_1} + w^{k_2})u] \in \mathcal{U}$ une collection de signaux d'entrée, et $Z_{k_1, k_2} = \mathcal{V}[U_{k_1, k_2}] \in \mathcal{Y}$ les sorties correspondantes.
- (ii) **Séparation des signaux biphasés.** Notons $\mathcal{F}_{P,P}$ l'opérateur de la TFD-2D d'ordre (P, P) . D'après le [Théorème 2.2](#), on a

$$\mathbf{Z}(t) = \mathcal{F}_{P,P}\{\Psi\}(t), \quad (2.46)$$

où la matrice Ψ regroupe les signaux Ψ_{p_1, p_2} , i.e.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{0,0} & \cdots & \Psi_{0,N} & \Psi_{0,-N} & \cdots & \Psi_{0,-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{N,0} & \cdots & \Psi_{N,N} & \Psi_{N,-N} & \cdots & \Psi_{N,-1} \\ \Psi_{-N,0} & \cdots & \Psi_{-N,N} & \Psi_{-N,-N} & \cdots & \Psi_{-N,-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{-1,0} & \cdots & \Psi_{-1,N} & \Psi_{-1,-N} & \cdots & \Psi_{-1,-1} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Les signaux biphasés sont donc estimés à l'aide d'une TFD-2D inverse.

- (iii) **Regroupement par indice de phase.** On note N_p l'ordre maximal de non-linéarité apparaissant dans les signaux Ψ_{p_1, p_2} tels que $p_1 + p_2 = p$, i.e.

$$N_p = \begin{cases} N, & \text{si } p \equiv N [2]; \\ N - 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.48)$$

Pour chaque $p = -N, \dots, N$, on construit :

- le vecteur \mathbf{v}_p regroupant tous les signaux Ψ_{p_1, p_2} sur l'anti-diagonale $p_1 + p_2 = p$, i.e.

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} \Psi_{r_0, r_{N_p}} \\ \Psi_{r_1, r_{N_p-1}} \\ \cdots \\ \Psi_{r_{N_p}, r_0} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

avec $r_j = \frac{p - N_p}{2} + j$;

- le vecteur \mathbf{y}_p regroupant tous les signaux $y_{n,q}$ tels que $n - 2q = p$, i.e. comme défini par l'équation (2.38);
- la matrice de combinaison \mathcal{X}_p donnée par

$$\mathcal{X}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \zeta_{N_p}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \zeta_{|p|+2}\left(\frac{N_p-|p|-2}{2}\right) & \dots & \zeta_{N_p}\left(\frac{N_p-|p|-2}{2}\right) \\ \zeta_{|p|}\left(\frac{N_p-|p|}{2}\right) & \zeta_{|p|+2}\left(\frac{N_p-|p|}{2}\right) & \dots & \zeta_{N_p}\left(\frac{N_p-|p|}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_{|p|}\left(\frac{N_p+|p|}{2}\right) & \zeta_{|p|+2}\left(\frac{N_p+|p|}{2}\right) & \dots & \zeta_{N_p}\left(\frac{N_p+|p|}{2}\right) \\ 0 & \zeta_{|p|+2}\left(\frac{N_p+|p|+2}{2}\right) & \dots & \zeta_{N_p}\left(\frac{N_p+|p|+2}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{N_p}(N_p) \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

où l'on a noté par souci de lisibilité $\zeta_a(j) = \chi_a\left(\frac{p-N_p}{2} + j, \frac{p+N_p}{2} - j\right)$. On retrouve dans cette matrice creuse la structure triangulaire qui correspond à la [Figure 2.9](#). L'indice des colonnes est associé à un ordre de non-linéarité du système et l'indice des lignes à un signal biphasé.

(iv) **Séparation des signaux interconjugués.** D'après (2.44), la relation

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathcal{X}_p \mathbf{y}_p(t) \quad (2.51)$$

est vraie pour tout $p = -N, \dots, N$. Les signaux interconjugués $y_{n,q}$ sont donc estimés en inversant (2.51), ce qui est toujours possible car la matrice \mathcal{X}_p est pseudo-inversible.

(v) **Reconstruction des sorties d'ordres homogènes.** Une fois que les signaux $y_{n,q}$ sont connus, les ordres y_n sont reconstruits en utilisant le [Lemme 2.1](#).

En pratique, il n'est pas nécessaire de réaliser les P^2 mesures indiquées à l'étape (i). En effet, la collection de signaux d'entrées a la propriété de symétrie $U_{k_1,k_2} = U_{k_2,k_1}$, ce qui implique $Z_{k_1,k_2} = Z_{k_2,k_1}$. Ainsi, le nombre de signaux tests à utiliser vaut $K = \frac{P(P+1)}{2} = (2N+1)(N+1)$, ce qui correspond au nombre de signaux distincts dans la matrice symétrique \mathbf{Z} (les signaux restants sont retrouvés par symétrie).

2.5.3 Propriétés

Interpolation et nombre de phases. Comme pour les méthodes CPS et HPS, il est possible d'utiliser un nombre de phases P supérieur à $P_{\min} = 2N + 1$. Les propriétés de la TFD-2D permettent de remarquer que ce paramètre a un impact sur la robustesse de la méthode RPS, comme détaillé ci-dessous.

Robustesse au bruit. Supposons que chaque mesure Z_{k_1, k_2} est perturbée par un processus i.i.d. suivant une loi gaussienne centrée de variance σ^2 , i.e. $b_{k_1, k_2}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour tout instant t . Alors des développements identiques à (2.30)–(2.32) montrent qu'en utilisant la méthode RPS, le RSB des signaux biphasés Ψ_{p_1, p_2} estimés lors de l'étape (ii) s'améliore d'un facteur P , correspondant à une augmentation de $20 \log_{10}(P)$. La différence avec les méthodes CPS et HPS, où l'amélioration est de \sqrt{P} , tient à la différence de normalisation entre la TFD — au total de P entre la transformée directe et inverse — et la TFD-2D — au total de P^2 .

Mais, en considérant le cas où les signaux Z_{k_1, k_2} et Z_{k_2, k_1} viennent de la même mesure, l'hypothèse d'indépendance statistique entre les bruits b_{k_1, k_2} et b_{k_2, k_1} est erronée (puisque'ils sont égaux). Les relations de covariance deviennent

$$\text{Cov}(b_{k_1, k_2}, b_{l_1, l_2}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } k_1 = l_1 \text{ et } k_2 = l_2; \\ \sigma^2, & \text{si } k_1 = l_2 \text{ et } k_2 = l_1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.52)$$

Notons ε_{p_1, p_2} l'erreur (à valeurs complexes) sur le signal biphasé Ψ_{p_1, p_2} estimé résultant du bruit de mesure, i.e. $\varepsilon(t) = \mathcal{F}_{P, P}^{-1}\{\mathbf{b}\}(t)$. On a alors les relations de covariance suivantes (voir § A.3 pour la preuve) :

$$\text{Cov}(\varepsilon_{p_1, p_2}, \varepsilon_{q_1, q_2}) = \frac{\sigma^2}{P^2} \times \begin{cases} \left(2 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = p_2 = q_1 = q_2; \\ \left(1 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = q_1 \text{ et } p_2 = q_2; \\ \left(1 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = q_2 \text{ et } q_1 = p_2; \\ \frac{-1}{P}, & \text{si } p_1 + p_2 \equiv q_1 + q_2 [P]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.53)$$

De plus, la pseudo-covariance des bruits ε_{p_1, p_2} est donnée par

$$\text{Cov}(\varepsilon_{p_1, p_2}, \overline{\varepsilon_{q_1, q_2}}) = \frac{\sigma^2}{P^2} \times \begin{cases} \left(2 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = p_2 = -q_1 = -q_2; \\ \left(1 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = -q_1 \text{ et } p_2 = -q_2; \\ \left(1 - \frac{1}{P}\right), & \text{si } p_1 = -q_2 \text{ et } q_1 = -p_2; \\ \frac{-1}{P}, & \text{si } p_1 + p_2 \equiv -q_1 - q_2 [P]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.54)$$

Cette expression de la pseudo-covariance découle de la symétrie hermitienne de la matrice ψ .

L'équation (2.53) montre que le bruit d'estimation entre différents signaux biphasés peut être corrélé, mais que globalement la diminution de la variance du bruit reste d'un ordre de grandeur de P^2 (correspondant à une amélioration du RSB d'environ P). Comme pour les méthodes CPS ou HPS, il est donc intéressant d'utiliser un nombre de phases P élevé pour augmenter la robustesse au bruit de mesure dans l'étape (ii). Par contre, cela augmentera énormément le nombre minimum de signaux tests qui est ici en $O(P^2)$, et non plus en $O(P)$ comme pour les méthodes CPS, HPS ou PAS.

La qualité de l'estimation des signaux interconjugués (étape (iv)), dépend de celle des signaux biphasés et du conditionnement de la matrice \mathcal{X}_p . Ce conditionnement est fixe pour un ordre de troncature N et un indice de phase p donnés. Il vaut 1 lorsque $p = N$ ou $p = N - 1$ (ce qui correspond aux cas où les signaux biphasés sont constitués d'un seul signal interconjugué) et, pour un p fixé, augmente avec N . La robustesse globale de l'étape (iv) diminue donc lorsque l'ordre de troncature augmente.

Erreur de troncature et repliement. Considérons maintenant l'effet des ordres supérieurs à l'ordre de troncature N sur l'estimation des signaux y_n pour $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$. Soit une série de Volterra (non tronquée) décrite par l'opérateur V . À l'instar de la méthode HPS, cela signifie tout d'abord que les signaux Ψ_{p_1, p_2} contiennent des contributions de tous les ordres $n \geq |p_1| + |p_2|$, i.e. que la somme dans l'équation (2.44) est infinie.

De plus, étant donnée la périodicité des racines $P^{\text{ème}}$ de l'unité, un phénomène de repliement apparaît dans l'estimation des signaux biphasés lors de l'étape (ii). Celui-ci se comporte comme le repliement spectral lors du calcul de la TFD-2D d'un signal réel bi-dimensionnel (voir Figure 2.10). À l'instar de la méthode HPS, l'utilisation d'un facteur de contraste pour éliminer les pertur-

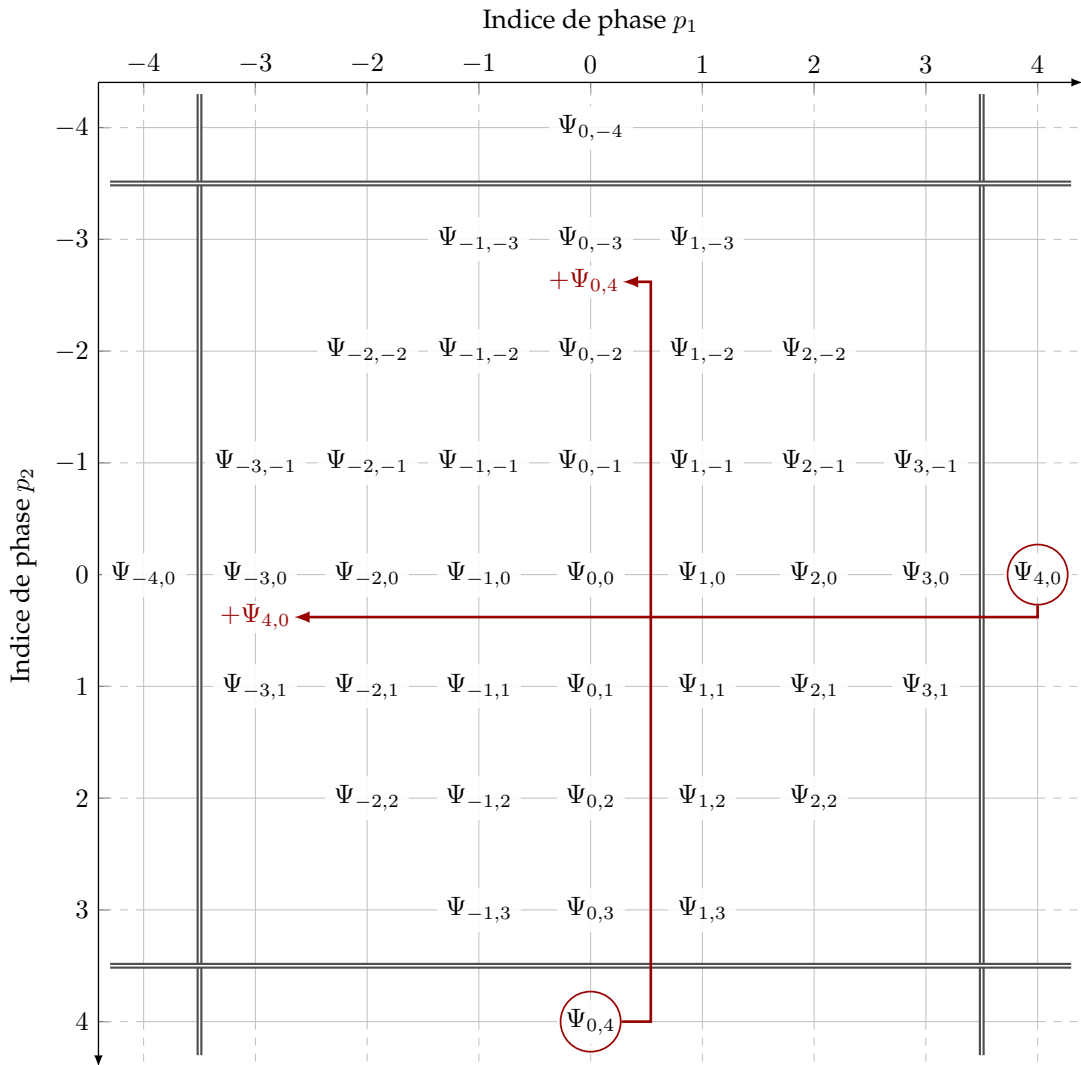


FIGURE 2.10 – Illustration du repliement apparaissant dans la méthode RPS en représentant les signaux biphasés Ψ_{p_1, p_2} dans un plan (p_1, p_2) ; les lignes doubles (==) indiquent les axes de périodicité dues au repliement, et les signaux biphasés repliés sont indiqués par des flèches rouges.

bations dues aux ordres supérieurs à la troncature N n'est pas possible ici. La seule manière de réduire leurs effets est d'augmenter le nombre de phases P .

Amplitudes des signaux d'entrées. Les différents signaux tests U_{k_1, k_2} n'ont pas tous la même amplitude¹⁰. Cette dernière dépend du signal complexe de référence u — de la relation entre sa partie réelle et sa partie imaginaire —, mais aussi principalement du facteur $|\frac{1}{2}(w^{k_1} + w^{k_2})|$. Comme

$$\left| \frac{1}{2}(w^{k_1} + w^{k_2}) \right| = \frac{1}{2} |1 + w^{k_2 - k_1}| = \frac{1}{2} |w^{k_1 - k_2} + 1|, \quad (2.55)$$

ce facteur ne dépend que de l'écart $k = |k_2 - k_1|$ entre les deux déphasages w^{k_1} et w^{k_2} . Notons $a_k = \frac{1}{2} |w^{k_1 - k_2} + 1|$, avec $k \in \llbracket 0; P - 1 \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \cos\left(2\pi \frac{k}{P}\right)\right)^2 + \sin\left(2\pi \frac{k}{P}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos\left(2\pi \frac{k}{P}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cos^2\left(\pi \frac{k}{P}\right)} \\ &= \left| \cos\left(\pi \frac{k}{P}\right) \right|. \end{aligned} \quad (2.56)$$

La [Figure 2.11](#) montre l'évolution de ces amplitudes en fonction du nombre de phases P . La valeur maximale est atteinte pour $k = 0$ et vaut 1. Si P est pair, la valeur minimale est atteinte pour $k = P/2$ et vaut 0; cette valeur est atteinte pour $P/2$ signaux tests, ce qui signifie que pour un P pair, le nombre effectif de signaux à utiliser vaut $K = P_{\min}^2/2$. Si P est impair, la valeur minimale est atteinte pour $k = (P - 1)/2$ — ou bien $k = (P + 1)/2$ — et vaut $\cos(\frac{\pi}{2} \frac{P-1}{P})$.

Ces résultats nous permettent de déterminer la gamme d'amplitudes d'excitation que couvre les signaux tests de la méthode RPS en fonction de l'ordre de troncature N (voir [Figure 2.12](#)). Puisque $P_{\min} = 2N + 1$ est toujours impair, cette gamme vaut $-20 \log_{10}(\cos(\frac{\pi}{2} \frac{N}{2N+1}))$ dB. Par exemple, si l'on souhaite appliquer la méthode RPS avec un ordre de troncature $N = 10$, alors il sera nécessaire de pouvoir exciter le système sur une gamme d'amplitudes de ≈ 22.5 dB.

10. Il est important de noter que dans la méthode RPS, les variations d'amplitudes entre les différents signaux tests ne sont pas choisies (comme dans les méthodes AS ou PAS), mais subies.

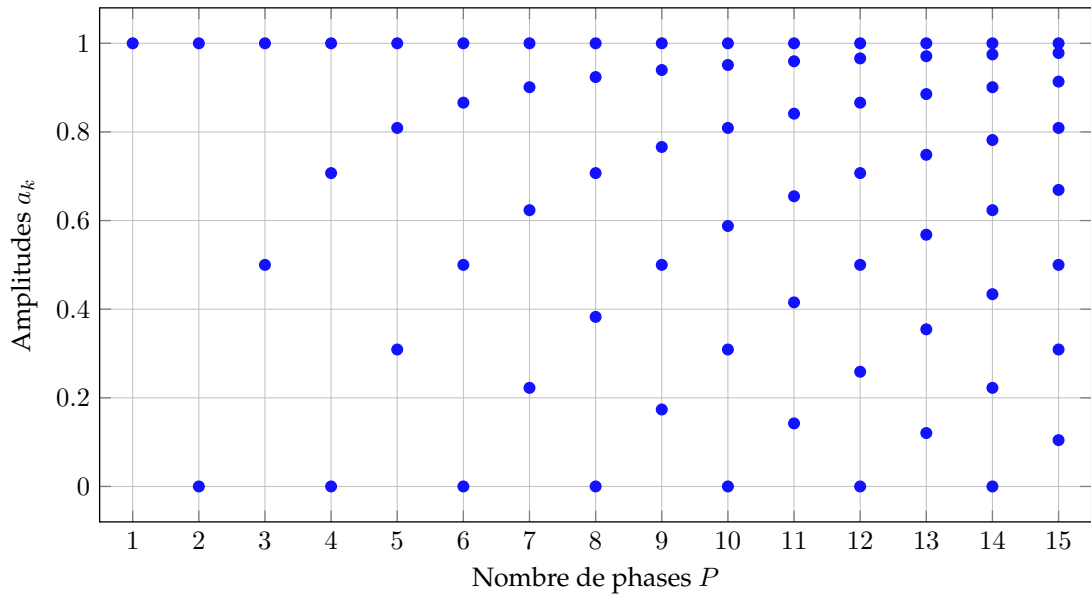


FIGURE 2.11 – Évolution des différentes amplitudes a_k , où $k \in \llbracket 0; \lfloor P/2 \rfloor \rrbracket$, de la méthode RPS en fonction du nombre de phases P (cf. (2.56)).

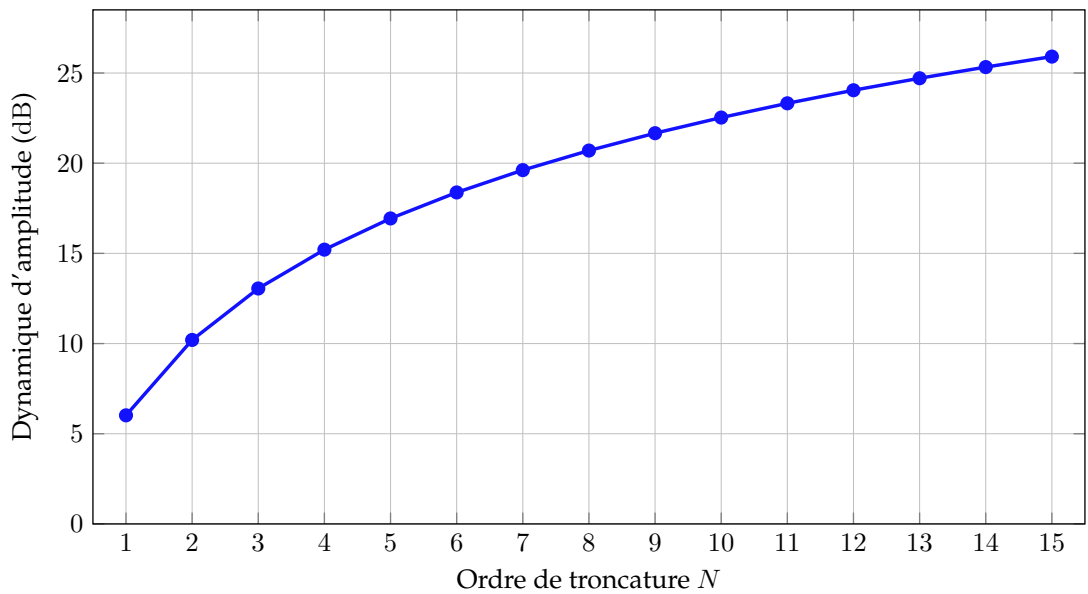


FIGURE 2.12 – Évolution de la dynamique d'amplitude minimum (en décibels) nécessaire à la méthode RPS en fonction de l'ordre de troncature N .

2.6 COMPARAISON DES MÉTHODES

2.6.1 *Considérations pratiques*

Avant de comparer les méthodes de séparation d'ordre, quelques considérations pratiques sur des sujets divers sont données.

Temps discret. Dans les équations précédents, le temps continu est représenté par la variable $t \in \mathbb{T}$. Pour la suite, on introduit $\mathbb{T}_d = \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ ou $\llbracket 0; L \rrbracket$ avec $L \in \mathbb{N}$ l'ensemble des instants discrets. Alors, en considérant des opérateurs de Volterra

$$\begin{aligned} V : \mathcal{U}_d &\rightarrow \mathcal{Y}_d \\ u &\mapsto V[u] \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec les domaines \mathcal{U}_d et \mathcal{Y}_d définis par

$$\mathcal{U}_d := \mathcal{Y}_d := L^\infty(\mathbb{T}_d, \mathbb{R}), \quad (2.58)$$

les développements précédents restent valides. Les méthodes de séparation peuvent donc être utilisées que l'on considère des signaux à temps continu ou à temps discret.

Domaine fréquentiel. Par linéarité de la Transformée de Fourier, tous les résultats énoncés dans ce chapitre peuvent être exprimés dans le domaine fréquentiel. Il suffit pour cela de remplacer, lorsqu'elle apparaît, la variable temporel $t \in \mathbb{T}$ par $f \in \mathbb{F}$, où \mathbb{F} représente le domaine fréquentiel (continu ou discret). Au choix, les méthodes présentées ici peuvent donc être utilisées de manière équivalente dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Cas des signaux centrés. Dans ce chapitre, il a été supposé que le signal de sortie pouvait être décrit à l'aide d'une série de Volterra autour d'un point d'équilibre y_0 , i.e.

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1} y_n(t). \quad (2.59)$$

Dans de nombreuses applications, et principalement dans le cas de signaux audio ou vibratoires, on considère que le point d'équilibre est nul. Les méthodes de séparation peuvent être facilement adaptées pour prendre en compte cette hypothèse :

- **Méthode AS :** il suffit de supprimer la première colonne de la matrice A dans l'équation (2.1); le nombre minimum de signaux nécessaires devient alors N (au lieu de $N + 1$);

- **Méthode CPS** : le nombre de phases minimum (et donc de signaux tests) passe de $N + 1$ à N ; si $P = P_{\min} = N$, la relation (2.5) donne

$$z(t) = \mathbf{W}_P \begin{bmatrix} y_N \\ y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} (t), \quad (2.60)$$

et il faut alors faire attention à l'ordre des signaux y_n ;

- **Méthode PAS** : il suffit de supprimer la première colonne de la matrice Ξ_0 donnée par (2.39) lors de sa création à l'étape (ii) ; le nombre minimum d'amplitude passe à $\lfloor (N + 1)/2 \rfloor$ (au lieu de $\lfloor N/2 \rfloor + 1$) ;
- **Méthode RPS** : il suffit de supprimer la première colonne de la matrice \mathcal{X}_0 donnée par (2.50) lors de sa création à l'étape (iii) ; le nombre minimum de signaux tests ne change pas.

Estimation du point d'équilibre. Les différentes méthodes présentées estiment une valeur y_0 pour chaque temps t . Or, ceci est incohérent avec le fait que le point d'équilibre est constant et indépendant de t .

Pour éviter cela, une idée serait d'estimer y_0 directement sur les signaux mesurés par un moyennage temporel, ce qui revient à calculer la composante de fréquence nulle du signal de sortie. Malheureusement, cette composante peut aussi contenir des contributions des ordres supérieurs. Par exemple, la mise au carré de $\cos(2\pi ft)$ donne $\frac{1+\cos(4\pi ft)}{2}$, qui contient une composante de fréquence zéro non nulle ; or, cette composante n'est pas comprise dans le point d'équilibre puisque elle dépend du signal d'entrée.

Une manière de contourner ce problème est d'appliquer la séparation dans le domaine fréquentiel. En effet, le point d'équilibre n'apparaissant qu'à la fréquence nulle, il ne sera estimé en tout et pour tout qu'une seule fois. Pour les fréquences non nulles, il suffit d'appliquer les changements décrits au paragraphe précédent.

Choix du signal de référence. Les méthodes présentées ici ne posent aucun a priori sur le choix du signal de référence u — excepté le fait que, pour les méthodes HPS, PAS et RPS, il doit être à valeurs complexes. Il est donc à définir en fonction de la méthode d'identification utilisée *a posteriori*. Concernant son amplitude, le plus simple est de l'optimiser pour minimiser les bruits de mesures tout en restant dans le domaine d'utilisation des appareils de mesures et le rayon de convergence de la série de Volterra — ne pas faire saturer le système mesuré, ni l'exciter dans une région où la description en série n'est plus valide.

Choix des facteurs d'amplitudes. Les méthodes AS et PAS nécessitent le choix des facteurs d'amplitudes α_k à utiliser. Dans le domaine de l'interpolation polynomiale, un ensemble de valeurs souvent choisies sont les nœuds de Tchebychev¹¹. Nous avons pu observer empiriquement que cette approche était préférable à des amplitudes espacées de manière linéaire ou logarithmique, puisqu'elle effectue un bon compromis entre le conditionnement des matrices à inverser et le niveau des signaux tests (et donc leur RSB). Afin d'avoir une amplitude maximale $\alpha_1 = 1$ — i.e. pour avoir tout les signaux tests u_k d'amplitude inférieure au signal de référence —, les formules des nœuds de Tchebychev ont été adaptées comme suit.

Pour la méthode AS, les facteurs d'amplitude $\alpha_k^{(AS)}$ sont choisis pour tout $k \in \llbracket 0; A - 1 \rrbracket$ par

$$\alpha_k^{(AS)} = \cos\left(\pi \frac{k}{A-1}\right) \quad (2.61)$$

pour un nombre d'amplitudes A impair et par

$$\alpha_k^{(AS)} = \begin{cases} \cos\left(\pi \frac{k}{A}\right), & \text{si } k < A/2, \\ \cos\left(\pi \frac{k+1}{A}\right), & \text{si } k \geq A/2, \end{cases} \quad (2.62)$$

pour A pair.

Pour la méthode PAS, puisque seules des valeurs positives sont possibles, les $\alpha_k^{(PAS)}$ sont choisis pour tout $k \in \llbracket 0; A - 1 \rrbracket$ par

$$\alpha_k^{(PAS)} = \cos\left(\pi \frac{k}{2A-1}\right). \quad (2.63)$$

Mesures expérimentales. Chaque méthode de séparation se base sur la connaissance d'une collection de signaux d'entrées et de sorties. Ces signaux doivent être tous mesurés dans les mêmes conditions expérimentales et pour les mêmes conditions initiales. En pratique, il est donc nécessaire d'attendre que le système retourne à l'état d'équilibre entre chaque mesure. Si ce n'est pas possible (e.g. pour des raisons d'expérience trop longue), il faut alors éliminer les transitoires des signaux mesurés avant d'appliquer la séparation.

Cas des systèmes multi-entrées/multi-sorties. Dans ce chapitre, il n'a été traité que de systèmes mono-entrée mono-sortie. Mais les méthodes proposées se généralisent au cas multi-entrées/multi-sorties.

11. Pour rappel, les nœuds de Tchebychev d'ordre n sont définis comme les zéros du polynôme de Tchebychev de degré n de première espèce, et sont donnés par $\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right)$, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ils sont souvent utilisés pour des problèmes d'interpolation polynomiale car ils permettent de minimiser les phénomènes de Gibbs apparaissant autour des discontinuités.

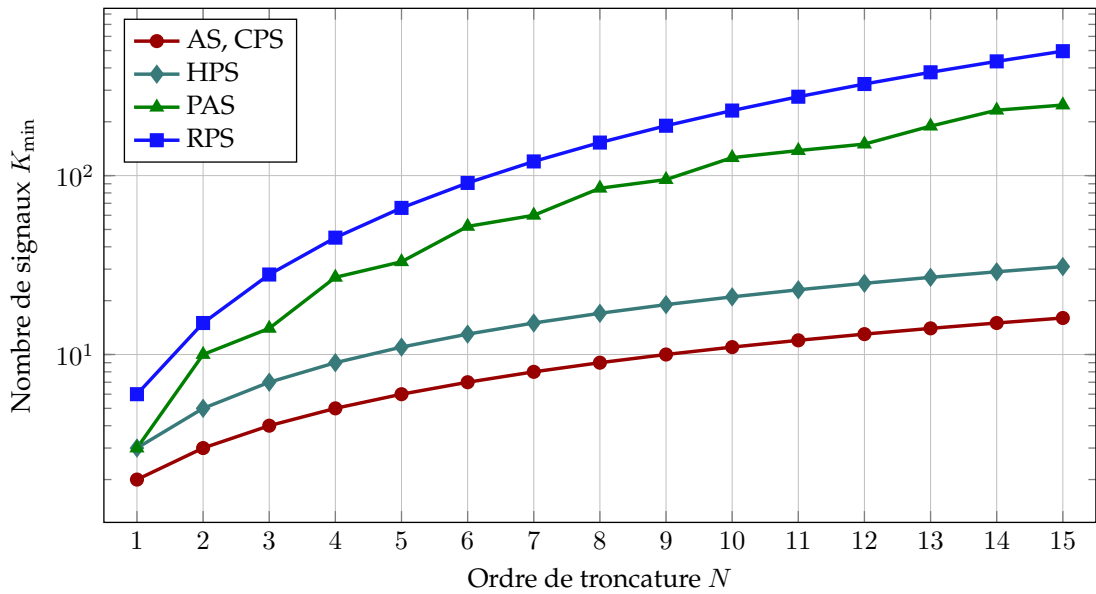


FIGURE 2.13 – Comparaison du nombre de signaux nécessaires minimum K_{\min} pour les méthodes de séparation en fonction de l'ordre de troncature N .

Pour les systèmes à plusieurs sorties, cela se fait de manière simple. Considérons un système $\mathcal{S}: L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n_y})$ à n_y sorties. Sous les bonnes conditions de convergence, on peut le représenter à l'aide d'une collection de n_y opérateurs de Volterra $\{V^{(1)}, \dots, V^{(n_y)}\}$, où chaque $V^{(i)}$ correspond à l'opérateur liant l'entrée à la $i^{\text{ème}}$ sortie. On peut donc séparer les ordres homogènes en appliquant la même méthode de séparation à chaque sortie.

Dans le cas des systèmes à plusieurs entrée, la généralisation est plus compliquée. Nous ne l'aborderons pas dans le cadre de cette thèse.

2.6.2 Comparaison théorique

Le [Tableau 2.1](#) récapitule les paramètres et propriétés des différentes méthodes évoquées dans ce chapitre. La méthode CPS possède de nombreux avantages : un nombre de signaux tests nécessaires en $O(N)$ (voir [Figure 2.13](#)), tous au même niveau d'amplitude, un conditionnement optimal, et un paramètre ρ permettant de gérer les perturbations des ordres supérieurs dans l'estimation. Malheureusement, cette méthode est abstraite et théorique, puisqu'elle exploite le fait que les signaux traversant le système sont à valeurs complexes.

La méthode HPS, dont le fonctionnement est similaire à la méthode CPS, conserve la plupart de ses bonnes propriétés au prix du double de signaux nécessaires (voir [Figure 2.13](#)). Malheureusement, elle ne donne pas l'accès aux ordres y_n , mais seulement aux signaux homophases ψ_p . De plus, le rejet des perturbations dues aux ordres supérieurs n'est plus possible.

Méthode	AS (§ 2.1)	CPS ^a (§ 2.2)	HPS (§ 2.3)	PAS (§ 2.4)	RPS (§ 2.5)
Donne	y_n	y_n	ψ_p	y_n ou $y_{n,q}$	y_n ou $y_{n,q}$
Paramètres ^b	N, α_k	$N (P, \rho)$	$N (P)$	$N, \alpha_k (P)$	$N (P)$
d'amplitudes A_{\min}	$N + 1^c$	X	X	$1 + \lfloor N/2 \rfloor^d$	X
de phases P_{\min}	X	$N + 1^c$	$2N + 1$	$2N + 1$	$2N + 1$
de signaux K_{\min}	$N + 1^c$	$N + 1^c$	$2N + 1$	$(1 + \lfloor N/2 \rfloor)(2N + 1)^e$	$(N + 1)(2N + 1)$
Amplitude maximale	$\max(\alpha_k)$	ρ	1	$\max(\alpha_k)$	1
Amplitude minimale	$\min(\alpha_k)$	ρ	1	$\min(\alpha_k)$	$\cos(\frac{\pi}{2} \frac{P-1}{P})$
Conditionnement	Dépend des α_k	Optimal	Optimal	Dépend des α_k	Croît avec N
Robustesse au bruit	Dépend des α_k	Améliorée par P	Améliorée par P	Dépend des α_k Améliorée par P	Améliorée par P
Effet des ordres $n > N$	Dépend des α_k	Géré par ρ	Réduit par P	Dépend des α_k Réduit par P	Réduit par P

^a seulement valable pour des entrées et sorties à valeurs complexes

^b les paramètres optionnels sont donnés entre parenthèses

^c ou N si le terme constant y_0 est supposé nul

^d ou $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ si le terme constant y_0 est supposé nul

^e ou $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor (2N + 1)$ si le terme constant y_0 est supposé nul

TABLEAU 2.1 – Tableau comparatif des différentes méthodes de séparation pour une série de Volterra de degré N .

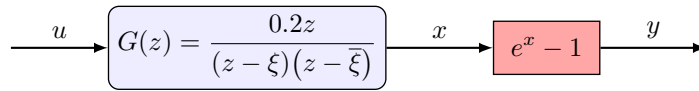


FIGURE 2.14 – Schéma du système simulé décrit par la relation (2.64); le pôle du filtre résonant vaut $\xi = 0.85e^{j2\pi \times 0.05}$.

Enfin, les méthodes AS, PAS et RPS permettent la séparation des ordres y_n . Elles nécessitent toutes les trois une collection de signaux d'entrées couvrant une certaine dynamique d'amplitude. Les méthodes AS et PAS dépendent fortement du choix de ces amplitudes α_k , tandis que pour la méthodes RPS, cette dynamique d'amplitude est fixée par le nombre de phases P . De plus, les méthodes PAS et RPS ont un nombre de signaux tests nécessaires en $O(N^2)$ (voir Figure 2.13). Mais ces deux méthodes donnent aussi accès aux signaux interconjugués; autrement dit, on est capable, en utilisant seulement des signaux d'excitations à valeurs réelles, de retrouver la réponse du système à des signaux complexes.

2.6.3 Comparaison à partir de simulations

Afin de tester l'efficacité et la robustesse des méthodes présentées dans ce chapitre, une expérience numérique est menée.

Système simulé. Le système simulé est choisi comme étant un modèle de Wiener constitué d'un filtre résonant d'ordre 2 — de pôle $\xi = 0.85e^{j2\pi \times 0.05}$ — en cascade avec une non-linéarité statique donnée par la fonction $f(x) = e^x - 1$ (voir Figure 2.14). La relation entrée-sortie de système est donnée par

$$y(t) = e^{[g*u](t)} - 1, \quad (2.64)$$

où g est la réponse impulsionnelle du filtre résonant et $*$ l'opérateur convolution. D'après le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle, les opérateurs de Volterra V_n du système (2.64) sont donnés par

$$V_n[u_1, \dots, u_n](t) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n [g * u_i](t). \quad (2.65)$$

Les deux premiers noyaux de ce système sont montrées en Figure 2.15.

Description de l'expérience. Les méthodes AS, PAS, RPS et HPS sont testées. L'efficacité des méthodes de séparation est comparée à l'aide de la moyenne quadratique de l'erreur normalisée par la moyenne quadratique du signal à estimer, i.e.

$$\epsilon_n = \text{RMS}(y_n - \tilde{y}_n) / \text{RMS}(y_n), \quad (2.66)$$

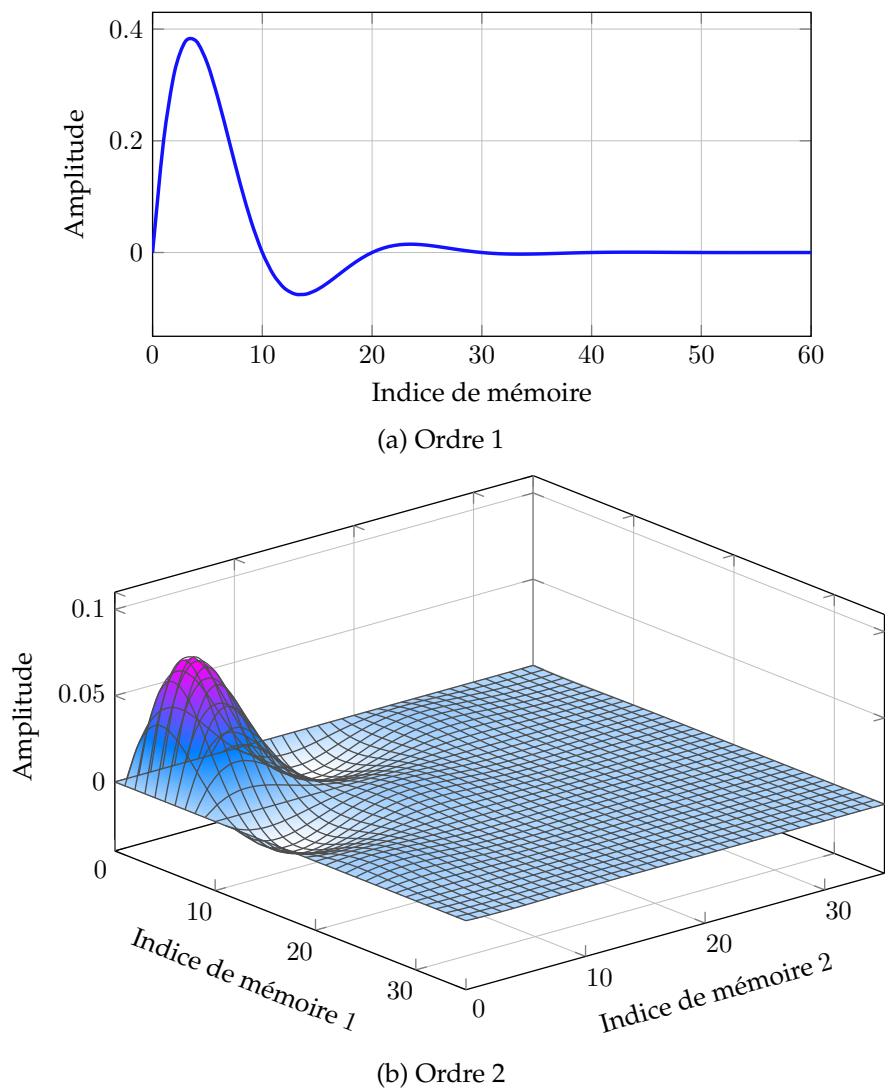


FIGURE 2.15 – Noyaux d'ordre 1 (haut) et 2 (bas) du système simulé décrit par la relation (2.64).

pour l'estimation \tilde{y}_n de l'ordre y_n . L'erreur d'estimation des signaux interconjugués $\epsilon_{n,q}$ et celle des signaux homophases ϵ_p sont calculées de manière identique.

Pour les méthodes PAS, RPS et HPS, le signal de référence u utilisé pour créer les collections de signaux tests est un bruit blanc de $L = 10000$ échantillons à valeurs complexes; ce processus i.i.d. suit une distribution gaussienne complexe symétrique circulaire de moyenne nulle et de variance unitaire, i.e. $u[l] \sim \mathcal{CN}(0, 1, 0)$ pour tout $l \in \llbracket 0; L - 1 \rrbracket$. Pour la méthode AS, $\text{Re}[u]$ est pris comme signal de référence. Par ce choix, l'amplitude maximale des signaux tests pour les trois méthodes est égal. Les ordres y_n que l'on cherche à estimer sont ceux en réponse à $\text{Re}[u]$. Dix expériences utilisant dix réalisations de ce signal de référence sont effectuées.

L'ordre de troncature considéré pour la séparation est fixé à $N = 9$. Ce choix permet de capturer la majorité des non-linéarités pour les niveaux d'excitations où l'on se place. En effet, pour les signaux utilisés, on observe que l'ordre 10 est à 60 dB en dessous du niveau du signal de sortie. Un bruit de mesure avec un RSB de 40 dB — par rapport à la sortie totale — est rajouté aux mesures.

Résultats. La Figure 2.16 montre les résultats d'estimation des ordres y_n (obtenus par les trois méthodes AS, PAS et RPS). Deux cas sont distingués : celui où le nombre de signaux tests est minimum pour chaque méthode ($K = K_{\min}$, voir Figure 2.16a), et celui où le nombre de signaux tests est le même pour toutes ($K = K^{(\text{RPS})} = 190$, voir Figure 2.16b).

On peut remarquer que, toutes méthodes et nombre de signaux confondus, l'estimation des signaux y_n se dégrade lorsque l'ordre n augmente. Cela est dû à la décroissance des amplitudes des ordres y_n lorsque n croît. De plus, la variance de l'estimation augmente avec l'ordre n . À partir de $n = 3$, l'estimation devient inutilisable, puisque l'amplitude de l'erreur est au niveau du signal que l'on cherche à estimer.

Si l'on regarde le cas $K = K_{\min}$ (voir Figure 2.16a), il apparaît que la méthode RPS offre de meilleurs résultats que la méthode PAS, elle-même meilleure que AS. À nombre de signaux tests équivalents, (voir Figure 2.16b), les différentes méthodes ont des erreurs proches. Pour les ordres pairs, PAS et RPS donnent exactement les mêmes résultats, et AS offre une amélioration de quelques dB. Pour les ordres impairs, les signaux séparés par AS sont un peu mieux estimés que par PAS, qui sont eux-mêmes un peu mieux estimés que par RPS.

Les méthodes PAS et RPS permettent de plus de séparer les signaux interconjugés. La Figure 2.17 donne l'erreur d'estimation des signaux interconjugés pour le cas de la méthode RPS (les résultats obtenus par CPS sont similaires). On remarque que, pour un ordre n donné, l'erreur faite sur les différents signaux $y_{n,q}$ est très proche, à l'exception de l'estimation des signaux $y_{n,n/2}$, pour les ordres n pairs, qui sont généralement meilleurs.

La Figure 2.18 montre les résultats d'estimation des signaux homophases ψ_p obtenus par la méthode HPS pour $K = P_{\min} = 19$ et $K = 10P_{\min} = 190$. On remarque que les niveaux d'erreur sont bien inférieurs à ceux obtenus par les méthodes de séparation d'ordre. Cela s'explique par le conditionnement optimal de la méthode HPS. Les erreurs obtenues sont d'ailleurs inférieures au RSB des mesures (qui est de 40 dB), ce qui est dû à la propriété de réduction de bruit présentée en § 2.3.4. L'écart de 10 dB que l'on observe entre les cas $K = 19$ et $K = 190$ est d'ailleurs en accord avec cette propriété.

Le temps de calcul machine des différentes méthodes est donnée dans la Figure 2.19 (dans le cas d'un nombre de signaux tests $K = 190$ pour chaque méthode). On remarque tout d'abord que les méthodes sont très peu coûteuses en calcul. La rapidité de la méthode HPS s'explique par l'utilisation de la Transformée de Fourier Rapide. Les autres méthodes nécessitent d'utiliser des in-

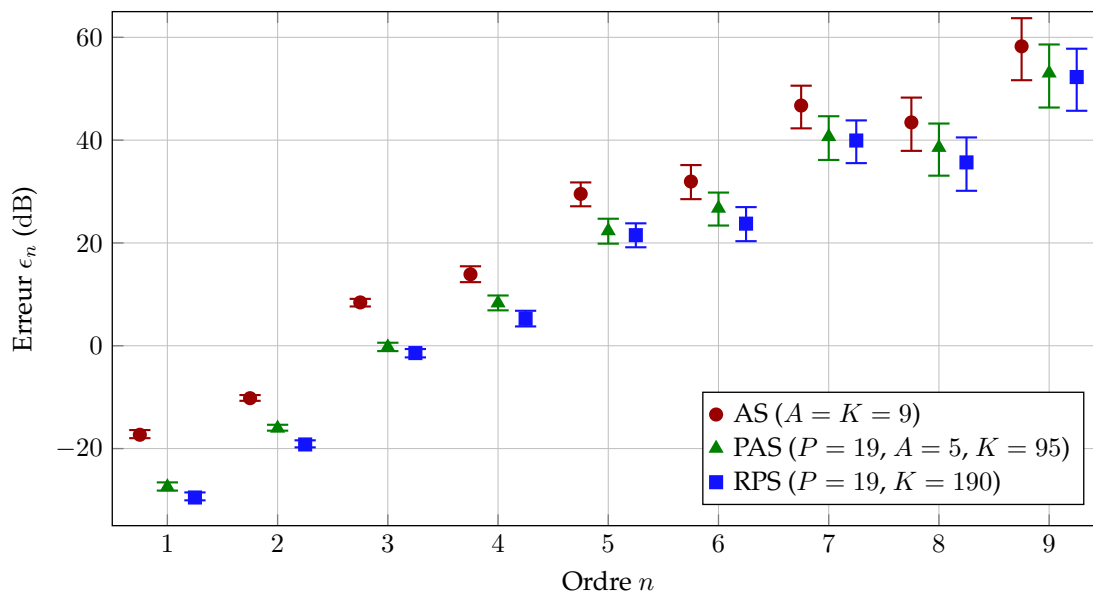
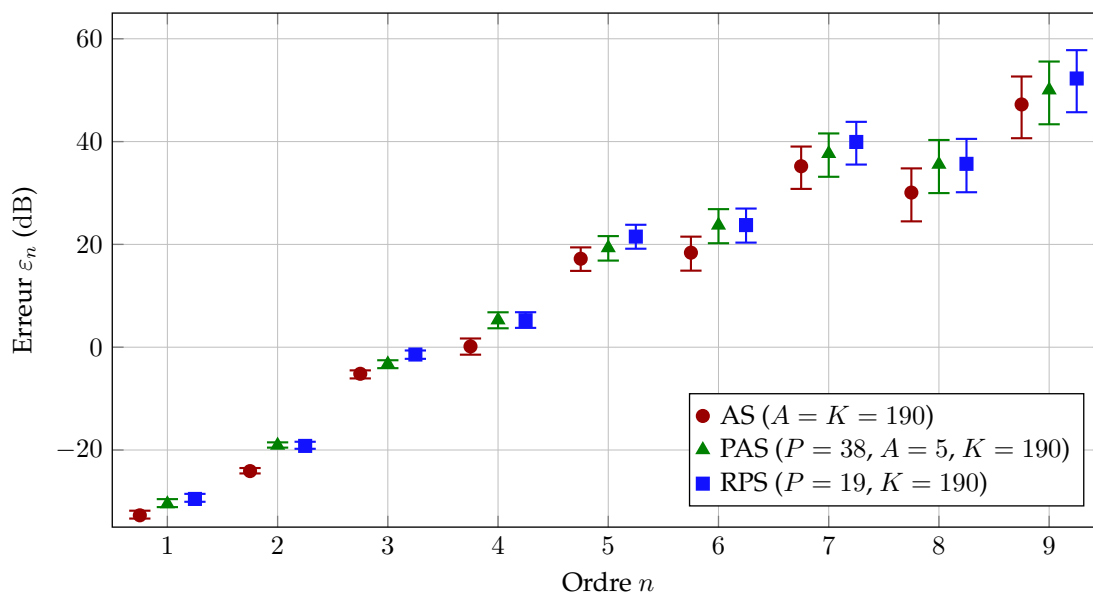
(a) $K = K_{\min}$ pour chaque méthode(b) $K = K_{\min}^{(RPS)} = 190$ pour chaque méthode

FIGURE 2.16 – Erreur d'estimation des signaux y_n pour les méthodes AS, PAS et RPS, pour deux valeurs du nombre de signaux tests K ; le RSB utilisé est de 40 dB; les barres d'erreurs représentent les valeurs moyennes, minimales et maximales des 10 réalisations.

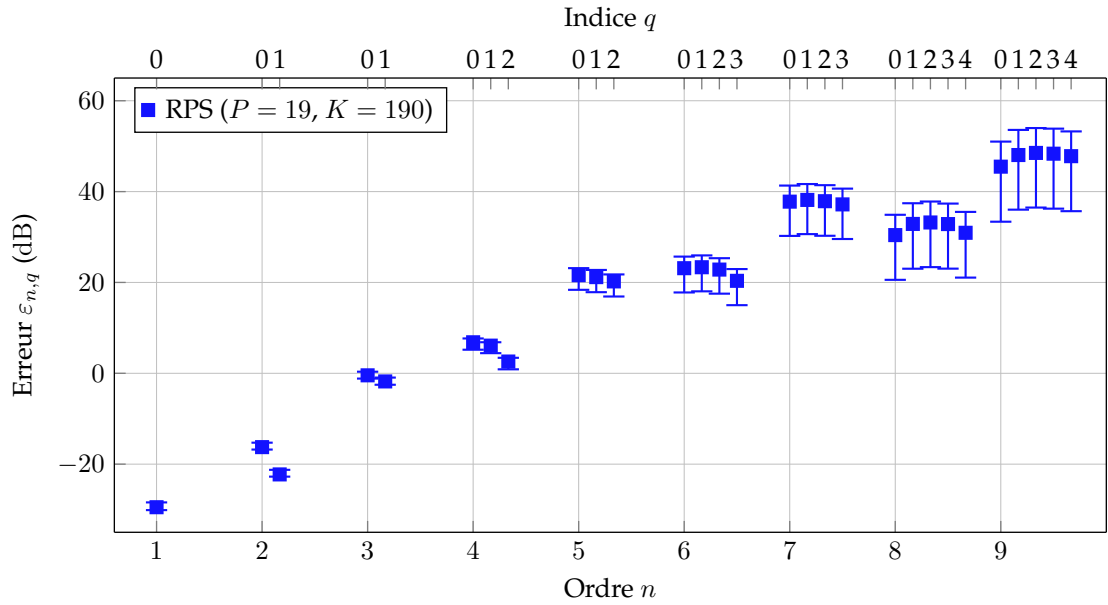


FIGURE 2.17 – Erreur d’estimation des signaux interconjugués $y_{n,q}$ pour la méthode RPS; le RSB utilisé est de 40 dB; les barres d’erreurs représentent les valeurs moyennes, minimales et maximales des 10 réalisations.

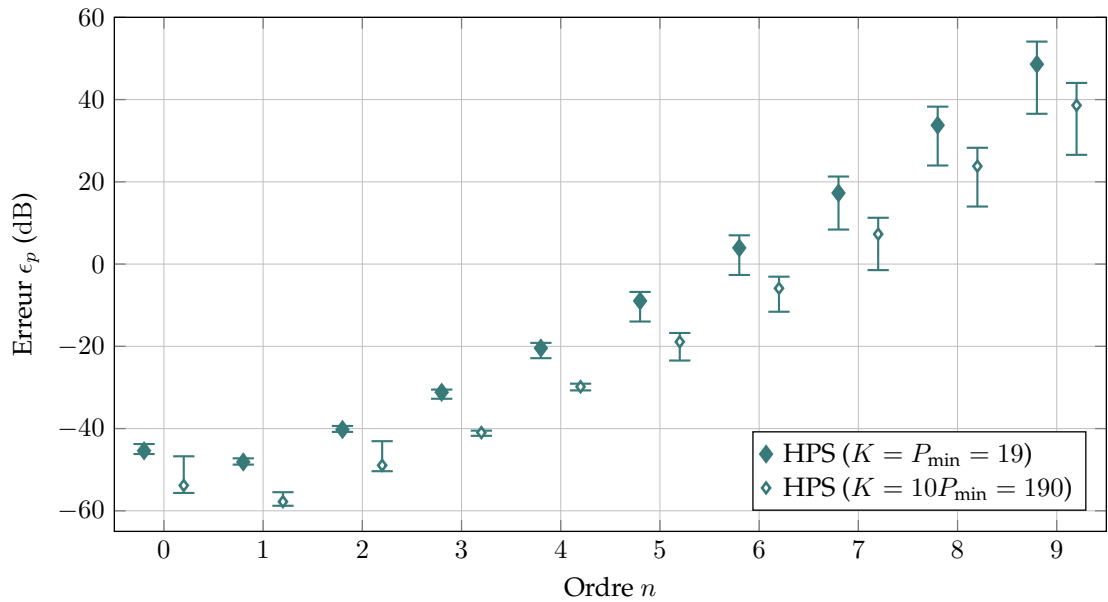


FIGURE 2.18 – Erreur d’estimation des signaux homophases ψ_p par la méthode HPS pour deux nombres de signaux tests K ; le RSB utilisé est de 40 dB; les barres d’erreurs représentent les valeurs moyennes, minimales et maximales des 10 réalisations.

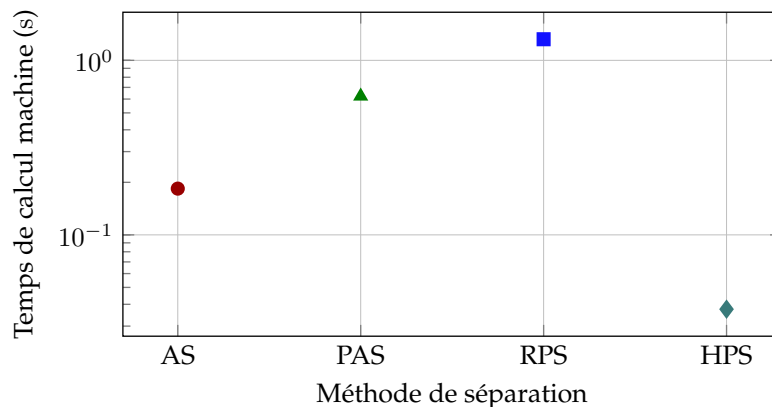


FIGURE 2.19 – Valeur moyenne du temps de calcul des méthodes AS, PAS, RPS et HPS pour un nombre de signaux tests $K = 190$.

versions matricielles classiques, plus coûteuses en calculs (en plus de plusieurs TFD pour PAS ou d'une TFD-2D pour RPS). Les différences entre les méthodes AS, PAS et RPS s'expliquent par le nombre d'inversions nécessaires et la taille des matrices à inverser.

2.7 CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, la question de la séparation des ordres homogènes d'une série de Volterra a été étudiée. Il a été montré dans un cadre abstrait et théorique que l'exploitation des relations de phase dans une collection adaptée de signaux complexes permettait d'obtenir une méthode robuste et conditionnée de manière optimale. L'adaptation de cette méthode à des signaux réels a amené à repenser l'organisation de la sortie d'une série de Volterra non plus comme une somme de termes homogènes selon l'amplitude du signal d'entrée mais selon sa phase. Cette réorganisation a conduit à introduire deux nouveaux concepts de signaux : les signaux interconjugués et les signaux homophases — dont une propriété est d'être homogène par rapport à un déphasage du signal d'entrée.

Plusieurs méthodes de séparation ont été proposées. La méthode HPS permet de retrouver les signaux homophases de manière robuste grâce à l'utilisation d'une TFD. La méthode PAS combine l'approche par phase avec l'exploitation de relations d'amplitude pour séparer les signaux interconjugués (et permet donc d'obtenir aussi les sorties d'ordres homogènes). Enfin, la méthode RPS utilise un double déphasage pour donner accès aux signaux interconjugués.

La robustesse de la méthode HPS à un bruit de mesure a pu être testée et confirmée sur des expériences numériques. On a aussi pu montrer qu'à nombre donné de signaux tests, les méthodes PAS et RPS n'améliorent pas les résultats de la littérature (méthode AS). Ceci corrobore une remarque que faisait Boyd

et al. en 1983 sur le sujet : « estimer les coefficients fortement décroissants d'un polynôme bruité est intrinsèquement difficile »¹².

L'absence d'amélioration s'explique par le fait que l'on décompose un problème mal conditionné (inversion d'une matrice de Vandermonde pour AS) en une étape idéalement conditionnée (une TFD inverse) suivie d'une seconde étape peu robuste (inversions de multiples matrices mal conditionnées). Toutefois cette décomposition en deux étapes a l'intérêt de donner accès aux signaux interconjugués et homophases. Comme nous allons le voir par la suite, ces signaux permettent d'améliorer substantiellement l'identification des noyaux de Volterra.

12. « [...] *estimating the rapidly decreasing coefficients of a noisy polynomial is inherently difficult* », [Boyd *et al.*, 1983].

— Chapitre 3 —

Identification de noyaux de Volterra par moindres carrés

Chaque solution amène de nouveaux problèmes.

Loi de Murphy

Le [Chapitre 2](#) a proposé plusieurs méthodes permettant la séparation des signaux d'ordres homogènes à partir d'une collection de mesures. De plus, il a introduit les notions de signaux interconjugués et de signaux homophases, pour lesquels des méthodes de séparation ont été développées.

Ce troisième chapitre s'intéresse à l'utilisation de ces différents types de signaux pour l'identification des noyaux de Volterra d'un système non linéaire à l'aide d'optimisations de type moindres carrés. Dans la suite du chapitre, on considère des signaux discrets de longueur L , i.e. dont le support temporel discret est $\mathbb{T}_d = [0, L - 1]_{\mathbb{N}}$. On considérera donc les domaines

$$\mathcal{U}_d := \mathcal{Y}_d := L^\infty(\mathbb{T}_d, \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

pour les signaux à valeurs réelles et

$$\mathcal{U}_d^C := \mathcal{Y}_d^C := L^\infty(\mathbb{T}_d, \mathbb{C}) \quad (3.2)$$

pour les signaux à valeurs complexes. De plus, on supposera que la série de Volterra dont on cherche à identifier les noyaux est de degré N et ne comporte pas de composante continue y_0 — ou, de manière équivalente, que celle-ci est connue et retranchée des mesures.

3.1 FORMULATION DU PROBLÈME D'IDENTIFICATION

Dans cette section, nous montrons comment le problème de l'identification des noyaux peut s'exprimer lorsque l'on utilise :

§ 3.1.1 : la sortie mesurée y ;

- § 3.1.2 : les ordres homogènes y_n (estimés par les méthodes AS, PAS ou RPS);
 § 3.1.3 : les signaux interconjugués y_n (estimés par les méthodes PAS ou RPS);
 § 3.1.4 : les signaux homophases ψ_p , (estimés par la méthode HPS).

Nous utilisons ici le formalisme des moindres carrés : le coût \mathcal{C} à minimiser est défini comme une forme quadratique à partir d'un vecteur d'erreur ϵ_Θ (potentiellement complexe). D'une manière générale, le coût s'écrit

$$\mathcal{C}(\Theta) = \epsilon_\Theta^H \Lambda \epsilon_\Theta, \quad (3.3)$$

où Λ est une matrice positive¹ de pondération. Si l'erreur ϵ_Θ s'exprime linéairement en fonction de Θ , les paramètres optimaux minimisant \mathcal{C} peuvent être calculés par (pseudo-)inversion matricielle. De manière plus générale, la minimisation de (3.3) peut se faire à l'aide de méthodes d'optimisation comme celle du gradient conjugué [Hestenes et Stiefel, 1952] ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt [Levenberg, 1944; Marquardt, 1963].

L'expression des différents signaux utilisés en fonction des paramètres Θ sera donnée en § 3.2 dans le cas de l'identification de noyaux de Volterra à temps discret et en § 3.3 pour l'identification de la projection d'un noyau sur une base orthonormale.

3.1.1 Identification à partir de la sortie totale

Le problème d'identification des noyaux de Volterra peut s'écrire comme suit :

Problème 3.1 (Approche utilisant la sortie totale). *Trouver les noyaux $\{h_n\}_{n \in [1;N]}$ qui minimisent le coût*

$$\mathcal{C}(\Theta) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(\Theta)})^H \Lambda (\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(\Theta)}), \quad (3.4)$$

où $\mathbf{y} = [y(0) \ \dots \ y(L-1)]^T$ est le vecteur des mesures du signal de sortie et $\mathbf{y}^{(\Theta)}$ sa reconstruction.

En minimisant (3.4), les noyaux des différents ordres sont estimés conjointement à partir du signal de sortie. Le nombre de coefficients à estimer Γ étant très élevé, l'estimation des noyaux est soumise à une forte variance. Pour remédier à cela, une possibilité est d'utiliser un nombre de données $L \gg \Gamma$, ce qui aura pour effet d'améliorer l'estimation mais aussi d'augmenter le temps de mesure et le temps de calcul.

Les poids permettent de prendre en compte la présence de bruit — à travers une estimation de sa matrice de covariance ou des connaissances a priori

1. Une matrice carrée complexe M est dite positive si la forme sesquilinéaire associée $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^H M \mathbf{y}$ est hermitienne positive. Si la matrice est à valeurs réelles, on parle aussi de matrice semi-définie positive.

sur sa nature [Pintelon et Schoukens, 2012] —, ou bien de valoriser ou ne pas prendre en compte certaines parties du signal pour l'identification — e.g. les transitoires de début ou de fin. La fonction de coût (3.4) peut aussi s'exprimer dans le domaine fréquentiel, en remplaçant les vecteurs \mathbf{y} et $\mathbf{y}^{(\Theta)}$ par les spectres correspondants. La matrice de poids doit alors être exprimée elle aussi dans le domaine fréquentiel.

3.1.2 Identification à partir des sorties d'ordres homogènes

Supposons que les ordres homogènes y_n pour $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ aient été séparés au préalable. Puisque chaque signal y_n ne dépend que du noyau d'ordre n , le problème d'identification peut alors s'exprimer comme suit :

Problème 3.2 (Approche utilisant les ordres homogènes). *Pour chaque ordre $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$, trouver le noyau h_n qui minimise le coût*

$$\mathcal{C}_n(\Theta_n) = (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^{(\Theta_n)})^H \Lambda_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^{(\Theta_n)}), \quad (3.5)$$

où $\mathbf{y}_n = [y_n(0) \ \dots \ y_n(L-1)]^T$ est le vecteur des valeurs de l'ordre homogène y_n séparé et $\mathbf{y}_n^{(\Theta_n)}$ sa reconstruction.

Identifier les noyaux à partir des ordres y_n plutôt que la sortie y revient à découper le problème de l'identification en N sous-problèmes indépendants, chacun de taille moindre². Par exemple, si l'on considère des noyaux triangulaires de mémoire M , le nombre de coefficients à estimer conjointement passe de $\Gamma = \binom{M+N}{N} - 1$ (pour une identification de tous les noyaux depuis la sortie totale) à $\Gamma_n = \binom{M+n-1}{n}$ (pour une identification depuis chaque ordre y_n).

Cette approche suppose une bonne estimation des ordres y_n . Mais si un ou plusieurs signaux y_n ne sont pas bien estimés, cela n'affectera pas l'identification des autres noyaux h_m avec $m \neq n$. En pratique, puisque l'estimation des signaux y_n se détériore avec l'ordre n (cf. les résultats de comparaison des méthodes de séparation au § 2.6.3), l'identification des noyaux h_n se dégradera avec l'ordre n .

Le support fréquentiel des signaux d'ordre homogène y_n peut être déterminé à partir de celui de l'entrée [Lang et al., 2007]. Lorsque le coût (3.5) est exprimé dans le domaine fréquentiel, il est intéressant de prendre en compte ce support fréquentiel dans la construction des matrices de poids Λ_n , afin de n'effectuer l'identification que sur les domaines fréquentiels adaptés.

3.1.3 Identification à partir des signaux interconjugués

Supposons que les signaux interconjugués $y_{n,q}$ pour $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ aient été séparés au préalable. Puisque chaque signal $y_{n,q}$ ne dépend que du

2. Par taille du problème, nous entendons ici le nombre de paramètres à identifier Γ .

noyau d'ordre n (cf. Définition 2.1 p. 42), le Problème 3.2 peut se réécrire comme suit :

Problème 3.3 (Approche utilisant les signaux interconjugués). *Pour chaque ordre $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$, trouver le noyau h_n qui minimise le coût*

$$\mathcal{C}'_n(\Theta_n) = \sum_{q=0}^n (\mathbf{y}_{n,q} - \mathbf{y}_{n,q}^{(\Theta)})^H \Lambda_{n,q} (\mathbf{y}_{n,q} - \mathbf{y}_{n,q}^{(\Theta)}), \quad (3.6)$$

où $\mathbf{y}_{n,q} = [y_{n,q}(0) \ \dots \ y_{n,q}(L-1)]^T$ est le vecteur des valeurs du signal interconjugué $y_{n,q}$ séparé et $\mathbf{y}_{n,q}^{(\Theta)}$ sa reconstruction.

De la même manière que pour le Problème 3.2, l'identification est ici découpée en N sous-problèmes indépendants. De plus, l'utilisation des $n+1$ signaux interconjugués d'ordre n fait que l'estimation du noyau repose ici sur $n+1$ fois plus de données qu'en utilisant les ordres homogènes y_n . Cette augmentation artificielle du nombre de données permet d'avoir une identification plus robuste ; ce gain de robustesse grandit avec l'ordre n .

Pour une entrée à support fréquentiel limité, les signaux interconjugués sont très localisés en fréquence (cf. Corolaire 2.1). Cette information peut être utilisée dans la construction de la matrice de poids $\Lambda_{n,q}$ lorsque que (3.6) est exprimée dans le domaine fréquentiel.

3.1.4 Identification à partir des signaux homophases

Supposons que les signaux homophases ψ_p pour $p \in \llbracket -N; N \rrbracket$ aient été séparés au préalable. Puisque chaque signal homophase ψ_p ne contient que des contributions d'ordre n de même parité que p tels que $|p| \leq n \leq N$ (cf. Définition 2.2 p. 46), le problème d'identification des noyaux de Volterra peut se réécrire comme suit :

Problème 3.4 (Approche utilisant les signaux homophases). *Trouver les noyaux d'ordres impairs $\{h_n\}_{n \in \mathbb{I}_1^N}$ et ceux d'ordres pairs $\{h_n\}_{n \in \mathbb{I}_2^N}$ qui minimisent respectivement les coûts $\mathcal{C}_{\text{impair}}$ et $\mathcal{C}_{\text{pair}}$ donnés par*

$$\mathcal{C}_{\text{impair}}(\Theta_{\text{impair}}) = \sum_{\substack{-N \leq p \leq N \\ p \text{ impair}}} (\boldsymbol{\psi}_p - \boldsymbol{\psi}_p^{(\Theta_{\text{impair}})})^H \Lambda_p (\boldsymbol{\psi}_p - \boldsymbol{\psi}_p^{(\Theta_{\text{impair}})}), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{C}_{\text{pair}}(\Theta_{\text{pair}}) = \sum_{\substack{-N \leq p \leq N \\ p \text{ pair}}} (\boldsymbol{\psi}_p - \boldsymbol{\psi}_p^{(\Theta_{\text{pair}})})^H \Lambda_p (\boldsymbol{\psi}_p - \boldsymbol{\psi}_p^{(\Theta_{\text{pair}})}), \quad (3.8)$$

où $\boldsymbol{\psi}_p = [\psi_p(0) \ \dots \ \psi_p(L-1)]^T$ est le vecteur des valeurs du signal homophase ψ_p séparé, $\boldsymbol{\psi}_p^{(\Theta)}$ sa reconstruction et Λ_p une matrice de poids.

Avec cette approche, l'identification des noyaux est scindée en deux sous-problèmes indépendants : celui de l'estimation des noyaux d'ordre pair — à partir de tous les signaux homophases d'indice de phase pair —, et celui de ceux d'ordre impair — à partir de tous les signaux homophases d'indice de phase impair. Tout comme pour le [Problème 3.3](#), l'estimation du noyau d'ordre n repose sur l'utilisation des $n + 1$ signaux interconjugués $y_{n,q}$. Par contre son identification est ici conjointe à tous les autres noyaux de même parité.

Un autre choix possible est d'identifier de manière itérative à partir des signaux homophases. Par exemple, considérons une série de Volterra de degré 3 dont on cherche les noyaux d'ordre ³ 1 et 3. D'après la [Définition 2.2](#), on a

$$\psi_1 = y_{1,0} + 3y_{3,1}, \quad (3.9)$$

$$\psi_3 = y_{3,0}. \quad (3.10)$$

Il est donc possible d'identifier le noyau h_3 à partir de ψ_3 (et de son conjugué $\psi[-3]$). Une fois h_3 connu, il est possible de calculer le signal $y_{3,1}$ et de le retrancher à ψ_1 , i.e. calculer $y_{1,0} = \psi_1 - 3y_{3,1}$. Il devient alors possible d'estimer le noyau d'ordre 1 à partir du signal $y_{1,0}$ ainsi obtenu.

Cette approche itérative se généralise pour une série de degré N . On peut la décrire par l'algorithme suivant :

1. initialiser $n = N$;
2. identifier le noyau h_n à partir de ψ_n et ψ_{-n} ;
3. pour $q \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$, calculer les $y_{n,q}$ grâce au noyau h_n estimé et les retrancher des signaux ψ_{n-2q} ;
4. $n \leftarrow n - 1$;
5. si $n = 0$, s'arrêter ; sinon, retourner à l'étape 2.

En pratique, cette méthode est généralement peu robuste, et cela pour deux raisons.

La première est due à sa nature itérative. Les noyaux des ordres supérieurs sont les plus difficiles à identifier (grand nombre de coefficients, faible RSB), ce qui entraîne leur moins bonne estimation. Or l'erreur d'identification faite à l'ordre N sera reportée à l'ordre $N - 2$, celle faite à l'ordre $N - 2$ à l'ordre $N - 4$, et ainsi de suite : on a ainsi une propagation des erreurs d'estimation jusqu'au premiers ordres.

La seconde raison tient à la manière dont sont estimés les noyaux h_n . Considérons le cas du noyau h_N : il est identifié à partir des contributions d'ordre N présentes dans les signaux homophases ψ_N et ψ_{-N} , i.e. à partir des signaux interconjugués $y_{N,0}$ et $y_{N,N}$ (cf [Définition 2.2](#) p. 46). Le [Corolaire 2.1](#) montre que, pour un signal de référence complexe à support fréquentiel borné $[f_1, f_2]$,

3. Le noyau d'ordre 2 peut se retrouver à l'aide du coût (3.6) puisque les signaux $\psi[2]$, $\psi[0]$, et $\psi[-2]$ valent respectivement $y_{2,0}$, $2y_{2,1}$ et $y_{2,2}$.

les signaux $y_{N,0}$ et $y_{N,N}$ ont pour supports fréquentiels respectifs $[Nf_1, Nf_2]$ et $[-Nf_2, -Nf_1]$. L'estimation du noyau n'est donc valide que sur le support fréquentiel $[-Nf_2, -Nf_1] \cup [Nf_1, Nf_2]$. Or, lorsque ce noyau est utilisé dans l'étape 3 pour retrancher les autres contributions d'ordre N — i.e. les signaux $y_{N,q}$ pour $q \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$ —, il est appliqué sur des supports fréquentiels différents, et l'identification des noyaux d'ordre inférieurs à N s'en trouve donc impactée.

Ces deux raisons font que cette approche itérative est très sensible au bruit de mesure et au choix de l'ordre de troncature N . Nous l'éviterons et lui préférons l'approche conjointe du [Problème 3.4](#).

La résolution des Problèmes [3.1](#), [3.2](#), [3.3](#) et [3.4](#) peut être faite de plusieurs manières. Cela dépend tout d'abord du choix du modèle (dans la classe des séries de Volterra), ou plus précisément de la manière dont les reconstructions $\mathbf{y}^{(\Theta)}$, $\mathbf{y}_n^{(\Theta_n)}$, $\mathbf{y}_{n,q}^{(\Theta_n)}$ et $\psi_p^{(\Theta)}$ dépendent des paramètres à estimer⁴. Lorsque les relations entrées-sorties peuvent s'écrire de manière linéaire en les paramètres, on retombe sur des problèmes de moindres carrés linéaires. C'est à ce cas là que nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre, avec deux modèles que nous utiliserons par la suite : le cas général de noyaux de Volterra à temps discret et mémoire tronquée (cf. [§ 3.2](#)), et celui de noyaux projetés sur une base orthonormale connue (cf. [§ 3.3](#)).

3.2 CAS DES NOYAUX DE VOLTERRA À TEMPS DISCRET

Cette section s'intéresse à l'identification de noyaux de Volterra à temps discret et à horizon temporel tronqué. On notera M la mémoire des noyaux⁵. En pratique, on considère les noyaux triangulaires qui ont l'avantage d'être représentés par un plus petit nombre de coefficients (cf. [§ 1.2.3](#) p. 18).

Ces hypothèses permettent d'écrire des relations linéaires en les paramètres (ici les coefficients des noyaux à identifier) pour tous les types de signaux de sortie. Les expressions matricielles des ordres homogènes y_n (cf. [§ 3.2.1](#)) ou de la sortie totale y (cf. [§ 3.2.2](#)) sont déjà connues, et peuvent être retrouvées dans la littérature, e.g. dans [Goussard *et al.*, 1991]. Elles sont rappelées ici afin d'introduire les notations utilisées ensuite pour présenter les écritures matricielles des signaux interconjugués $y_{n,q}$ (cf. [§ 3.2.3](#)) et des signaux homophases ψ_p (cf. [§ 3.2.4](#)).

4. Dans la suite, et pour des raisons de lisibilité, on omettra le symbole (Θ) pour indiquer les vecteurs reconstruits.

5. Par simplicité, la même mémoire est considérée pour tous les noyaux. Les résultats présentés restent valides si l'on prend une mémoire M_n différente pour chaque ordre n .

3.2.1 Expression matricielle des sorties d'ordre homogène

Soit un opérateur de Volterra $V_n \in \mathcal{V}_n$, représentée par le noyau triangulaire (supérieur) $h_n^{(tri)}$ de mémoire finie M , et un signal d'entrée $u \in \mathcal{U}$. Alors l'ordre $y_n = V_n[u, \dots, u] \in \mathcal{Y}$ est donné par la relation

$$y(l) = \sum_{m \in \mathbb{K}_n(M)} h_n^{(tri)}(m_1, \dots, m_n) u(l - m_1) \dots u(l - m_n). \quad (3.11)$$

où $\mathbb{K}_n(M)$ désigne l'ensemble des n -uplets ordonnés $m \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket^n$ donné par

$$\mathbb{K}_n(M) = \{(m_1, \dots, m_n) \in \llbracket 0; M - 1 \rrbracket \mid m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n\}. \quad (3.12)$$

Cette relation peut aussi s'exprimer sous la forme d'un produit matriciel. Pour cela, regroupons les $\binom{M+n-1}{n}$ coefficients non nuls du noyau $h_n^{(tri)}$ dans un vecteur \mathbf{f}_n , selon un ordre choisi. Dans ce document, nous avons opté pour l'ordre lexicographique⁶, mais d'autres choix peuvent être faits. On note et nomme vecteur de combinatoire le vecteur $\phi_n(l)$ regroupant tous les produits $u(l - m_1) \dots u(l - m_n)$ dans l'ordre correspondant à celui choisi pour \mathbf{f} , avec $l \in \llbracket 0; L - 1 \rrbracket$ et où L est la longueur du signal considéré. En utilisant ces notations, la relation (3.11) devient

$$y_n(l) = \phi_n^T(l) \mathbf{f}_n. \quad (3.13)$$

Exemple 3.1. Pour un noyau cubique de mémoire $M = 3$, les vecteurs \mathbf{f}_3 et ϕ_3 sont donnés par

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} h_3(0, 0, 0) \\ h_3(0, 0, 1) \\ h_3(0, 0, 2) \\ h_3(0, 1, 1) \\ h_3(0, 1, 2) \\ h_3(0, 2, 2) \\ h_3(1, 1, 1) \\ h_3(1, 1, 2) \\ h_3(1, 2, 2) \\ h_3(2, 2, 2) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_3(l) = \begin{bmatrix} u(l)^3 \\ u(l)^2 u(l-1) \\ u(l)^2 u(l-2) \\ u(l) u(l-1)^2 \\ u(l) u(l-1) u(l-2) \\ u(l) u(l-2)^2 u(l-1)^3 \\ u(l-1)^2 u(l-2) \\ u(l-1) u(l-2)^2 \\ u(l-2)^3 \end{bmatrix}.$$

Puisque (3.13) est valable pour tout $l \in \llbracket 0; L - 1 \rrbracket$, on a

$$\mathbf{y}_n = \Phi_n \mathbf{f}_n, \quad (3.14)$$

6. L'ordre lexicographique, qui est une des manières possibles d'ordonner des ensembles de valeurs a et b , est déterminée par relation d'ordre suivante : $\{a_1, \dots, a_n\} \leq \{b_1, \dots, b_n\}$ si et seulement si $a_1 \leq b_1$ ou ($a_1 = b_1$ et $\{a_2, \dots, a_n\} \leq \{b_2, \dots, b_n\}$).

où $\Phi_n = [\phi_n(0) \ \dots \ \phi_n(L-1)]^T$ est la matrice de combinatoire d'ordre n . Cette expression montre qu'un ordre y_n d'une série de Volterra dépend linéairement des valeurs du noyau $h_n^{(tri)}$. Elle permet de ré-écrire le [Problème 3.2](#) comme N sous-problèmes de moindres carrés linéaires où l'on recherche les f_n . Ces sous-problèmes peuvent se résoudre de plusieurs manières. Par exemple, dans le cas d'une pondération uniforme⁷, la solution optimale est donnée par

$$\mathbf{f}_n = \Phi_n^\dagger \mathbf{y}_n \quad (3.15)$$

pour chaque $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$, où

$$\Phi_n^\dagger = (\Phi_n^T \Phi_n)^{-1} \Phi_n^T \quad (3.16)$$

est la pseudo-inverse de la matrice à valeurs réelles⁸ Φ_n . Les noyaux recherchés sont reconstruits à partir des vecteurs \mathbf{f}_n ainsi estimés.

3.2.2 Expression matricielle de la sortie totale

Puisque la série de Volterra est de degré N , on a $\mathbf{y} = \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n$. En utilisant (3.14), la relation entrée-sortie s'écrit alors

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f}, \quad (3.17)$$

où $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \ \dots \ \mathbf{f}_N^T]^T$ est le vecteur de taille $\binom{M+N}{N} - 1 \times 1$ regroupant les coefficients de tous les noyaux, et $\Phi = [\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N]$ est la matrice de combinatoire totale de taille $L \times \binom{M+n-1}{n}$. La sortie y d'une série de Volterra dépend donc linéairement des valeurs des noyaux. L'expression (3.17) permet de ré-écrire le [Problème 3.1](#) comme un problème de moindres carrés linéaires où l'on recherche \mathbf{f} . Par exemple, si l'on ne considère pas de poids, la solution optimale est donnée par

$$\mathbf{f} = \Phi^\dagger \mathbf{y}. \quad (3.18)$$

3.2.3 Expression matricielle des signaux interconjugués

La [Définition 2.1](#) donne, pour l'expression des signaux interconjugués, la relation

$$y_{n,q}(l) = V_n^{(\text{sym})} \left[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q \text{ fois}}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_q \text{ fois} \right] (l), \quad (3.19)$$

où $u \in \mathcal{U}^C$ est un signal à valeurs complexes et $V_n^{(\text{sym})} \in \mathcal{V}_n$ l'opérateur de Volterra défini à partir du noyau sous forme symétrique. Notons $V_n^{(\text{tri})}$ l'opéra-

7. Ce qui revient à prendre des matrices de poids Λ_n égales aux matrices identités de tailles adéquates.

8. Dans le cas d'une matrice à valeurs complexe, la définition est la même en remplaçant l'opérateur de transposition $(\cdot)^T$ par le hermitien $(\cdot)^H$.

teur construit à partir du noyau sous forme triangulaire $h_n^{(tri)}$. D'après la relation (1.20), on a

$$V_n^{(sym)}[u_1, \dots, u_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} V_n^{(tri)}[u_{\pi_1}, \dots, u_{\pi_n}], \quad (3.20)$$

où pour rappel \mathcal{P}_n dénote l'ensemble des $n!$ permutations des entiers de 1 à n , et π_i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la permutation π . La relation (3.19) s'écrit alors

$$y_{n,q}(l) = V_n^{(sym)} \left[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q \text{ fois}}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{q \text{ fois}} \right] (l) \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{m \in \mathbb{K}_n(M)} h_n^{(tri)}(m_1, \dots, m_n) \times \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} u(l - m_{\pi_1}) \dots u(l - m_{\pi_{n-q}}) \overline{u(l - m_{\pi_{n-q+1}})} \dots \overline{u(l - m_{\pi_n})}. \quad (3.22)$$

Dans la deuxième ligne de (3.22), de nombreux termes de la somme sont redondants. En effet dans (3.22), tout changement d'indices dans les signaux u (non conjugués) et tout changement d'indices dans les signaux \bar{u} (conjugués) laisse leur produit invariant. Pour regrouper les termes identiques, on introduit l'ensemble Ω_n^q des partitions des entiers de 1 à n en deux sous-ensembles non ordonnés⁹ de taille respective $n - q$ et q .

Exemple 3.2. Considérons le cas $n = 3$ et $q = 1$. L'ensemble des permutations \mathcal{P}_3 est donnée par

$$\mathcal{P}_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}, \quad (3.23)$$

et l'ensemble Ω_3^1 par

$$\Omega_3^1 = \{(\{1, 2\}, \{3\}), (\{1, 3\}, \{2\}), (\{2, 3\}, \{1\})\} \quad (3.24)$$

En utilisant l'ensemble Ω_n^q , l'équation (3.22) devient alors

$$y_{n,q}(l) = \frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_{m \in \mathbb{K}_n(M)} h_n^{(tri)}(m_1, \dots, m_n) \times \sum_{(a, \bar{a}) \in \Omega_n^q} u(l - m_{a_1}) \dots u(l - m_{a_{n-q}}) \overline{u(l - m_{\bar{a}_1})} \dots \overline{u(l - m_{\bar{a}_q})}. \quad (3.25)$$

Comme pour le cas des ordres homogènes y_n , cette relation peut s'exprimer sous la forme d'un produit vectoriel en écrivant

$$y_{n,q}(l) = \phi_{n,q}(l) \mathbf{f}_n, \quad (3.26)$$

9. Nous noterons ces deux sous-ensembles complémentaires a et \bar{a} , selon la notation utilisée en théorie des ensembles.

où $\phi_{n,q}(l)$ est le vecteur à valeurs complexes de taille $\binom{M+n-1}{n} \times 1$ regroupant tous les termes

$$\frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_{(a,\bar{a}) \in \Omega_n^q} u(l - m_{a_1}) \dots u(l - m_{a_{n-q}}) \overline{u(l - m_{\bar{a}_1})} \dots \overline{u(l - m_{\bar{a}_q})} \quad (3.27)$$

pour les différentes valeurs des indices m .

Exemple 3.3. Pour un noyau cubique et de mémoire $M = 3$, le vecteur $\phi_{3,1}$ est donné par

$$\phi_{3,1}(l) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3u(l)^2 \overline{u(l)} \\ u(l)^2 \overline{u(l-1)} + 2u(l)u(l-1) \overline{u(l)} \\ u(l)^2 \overline{u(l-2)} + 2u(l)u(l-2) \overline{u(l)} \\ 2u(l)u(l-1) \overline{u(l-1)} + u(l-1)^2 \overline{u(l)} \\ u(l)u(l-1) \overline{u(l-2)} + u(l)u(l-2) \overline{u(l-1)} + u(l-1)u(l-2) \overline{u(l)} \\ 2u(l)u(l-2) \overline{u(l-2)} + u(l-2)^2 \overline{u(l)} \\ 3u(l-1)^2 \overline{u(l-1)} \\ u(l-1)^2 \overline{u(l-2)} + 2u(l-1)u(l-2) \overline{u(l-1)} \\ 2u(l-1)u(l-2) \overline{u(l-2)} + u(l-2)^2 \overline{u(l-1)} \\ 3u(l-2)^2 \overline{u(l-2)} \end{bmatrix}.$$

Puisque (3.26) est valable pour tout $l \in \llbracket 0; L-1 \rrbracket$, l'expression matricielle des signaux interconjugués est finalement donnée par

$$\mathbf{y}_{n,q} = \Phi_{n,q} \mathbf{f}_n, \quad (3.28)$$

où $\Phi_{n,q} = [\phi_{n,q}(0) \dots \phi_{n,q}(L-1)]^T$ est la matrice de combinatoire correspondant au signal interconjugué $y_{n,q}$, de taille $L \times \binom{M+n-1}{n}$.

Expression de la fonction de coût et solution. L'expression (3.28) montre qu'un signal interconjugué $y_{n,q}$ dépend linéairement des valeurs du noyau $h_n^{(tri)}$. Elle permet de ré-écrire le [Problème 3.3](#) comme N sous-problèmes de moindres carrés linéaires où l'on recherche les \mathbf{f}_n .

Le coût C'_n donné par l'équation (3.6) peut s'écrire matriciellement

$$C'_n(\mathbf{f}_n) = \boldsymbol{\varepsilon}_n^H \Lambda_n \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (3.29)$$

avec le vecteur d'erreur

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{n,0} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n,n} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{y}'_n} - \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{n,0} \\ \vdots \\ \Phi_{n,n} \end{bmatrix}}_{:= \Phi'_n} \mathbf{f}_n \quad (3.30)$$

et la matrice de poids

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \Lambda_{n,0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \Lambda_{n,q} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Dans le cas d'une pondération uniforme, la solution optimale est donnée par

$$\mathbf{f}_n = (\Phi'_n)^\dagger \mathbf{y}'_n \quad (3.32)$$

pour chaque $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$.

D'après la propriété de symétrie hermitienne des signaux interconjugués (cf. [Propriété 2.1](#)), on a $\mathbf{y}_{n,n-q} = \overline{\mathbf{y}_{n,q}}$. De même, on observe que les matrices combinatoires respectent l'égalité $\Phi_{n,n-q} = \overline{\Phi_{n,q}}$. Puisque les noyaux sont à valeurs réelles, il est possible de remplacer \mathbf{y}'_n et Φ'_n dans (3.32) par

$$\mathbf{y}'_n = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\mathbf{y}_{n,0}] \\ \operatorname{Im}[\mathbf{y}_{n,0}] \\ \vdots \\ \operatorname{Re}[\mathbf{y}_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}] \\ \operatorname{Im}[\mathbf{y}_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi'_n = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_{n,0}] \\ \operatorname{Im}[\Phi_{n,0}] \\ \vdots \\ \operatorname{Re}[\Phi_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}] \\ \operatorname{Im}[\Phi_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}] \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Si n est pair, alors $\operatorname{Im}[\mathbf{y}_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]$ et $\operatorname{Im}[\Phi_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]$ sont nuls, et peuvent être omis.

3.2.4 Expression matricielle des signaux homophases

La [Définition 2.2](#) donne, pour l'expression des signaux homophases, la relation

$$\psi_p(l) = \sum_{n \in \mathbb{I}_p^N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} y_{n, \frac{n-p}{2}}(l). \quad (3.34)$$

En utilisant la relation (3.26) on a alors

$$\psi_p = \sum_{n \in \mathbb{I}_p^N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} \Phi_{n, \frac{n-p}{2}} \mathbf{f}_n. \quad (3.35)$$

Un signal homophase ψ_p dépend donc linéairement des valeurs des noyaux d'ordre $n \geq |p|$ de même parité que p . L'expression (3.35) permet de ré-écrire le [Problème 3.4](#) comme deux sous-problèmes de moindres carrés linéaires où l'on recherche les \mathbf{f}_n pour n pair et n impair séparément.

Les coûts $\mathcal{C}_{\text{impair}}$ et $\mathcal{C}_{\text{pair}}$ donnés respectivement par les équations (3.7) et (3.8) peuvent aussi s'écrire matriciellement. Par exemple, si l'on considère N impair, alors $\mathcal{C}_{\text{impair}}$ peut s'écrire

$$\mathcal{C}_{\text{impair}}(\mathbf{f}_{\text{impair}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{impair}}^H \Lambda_{\text{impair}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{impair}}, \quad (3.36)$$

avec le vecteur d'erreur

$$\varepsilon_{\text{impair}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{-N} \\ \vdots \\ \psi_{-3} \\ \psi_{-1} \\ \psi_1 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}}_{:=\psi_{\text{impair}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2^N} \Phi_{N,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{8} \Phi_{3,3} & \cdots & \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{N+3}{2}} \Phi_{N,(N+3)/2} \\ \frac{1}{2} \Phi_{1,1} & \frac{3}{8} \Phi_{3,2} & \cdots & \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{N+1}{2}} \Phi_{N,(N+1)/2} \\ \frac{1}{2} \Phi_{1,0} & \frac{3}{8} \Phi_{3,1} & \cdots & \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{N-1}{2}} \Phi_{N,(N-1)/2} \\ 0 & \frac{1}{8} \Phi_{3,0} & \cdots & \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{N-3}{2}} \Phi_{N,(N-3)/2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2^N} \Phi_{N,0} \end{bmatrix}}_{:=\Phi_{\text{impair}}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}}_{:=f_{\text{impair}}}. \quad (3.37)$$

et la matrice de poids

$$\Lambda_{\text{impair}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{-N} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_N \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Dans le cas d'une pondération uniforme, la solution optimale est alors donnée par

$$f_{\text{impair}} = \Phi_{\text{impair}}^\dagger \psi_{\text{impair}} \quad (3.39)$$

Le même type d'écriture est possible pour $\mathcal{C}_{\text{pair}}$. À l'instar de la ré-écriture (3.33), la symétrie hermitienne des signaux homophases et des matrices de combinaisons $\Phi_{n,q}$ peut être utilisée pour ne travailler qu'avec des valeurs réelles.

3.2.5 Remarques sur les matrices de combinatoire

En pratique, travailler avec les différents types de matrice de combinatoire — Φ , Φ_n , Φ'_n , Φ_{impair} et Φ_{pair} — pose certaines difficultés qui sont dues à leur taille. Celle-ci va déterminer l'espace mémoire nécessaire à son stockage ainsi que le temps de calcul pris par son inversion. La taille dépend à la fois de la longueur L du signal utilisé et du nombre de coefficients Γ à estimer. Ce dernier, donné par $\Gamma_n = \binom{n+M-1}{n}$ pour un noyau d'ordre n , croît très fortement lorsque l'ordre n ou la mémoire M grandissent (cf. § 1.2.5).

Les tailles des différentes matrices de combinatoire sont données dans le [Tableau 3.1](#). On remarque que l'utilisation d'une séparation préalable permet de réduire le nombre de colonnes — i.e. la quantité de paramètres à estimer — des matrices de combinatoire. Cette réduction, assez grande avec les ordres y_n ou les signaux interconjugués $y_{n,q}$, est moins importante dans le cas de l'utilisation des signaux homophases ψ_p .

3.2. CAS DES NOYAUX DE VOLTERRA À TEMPS DISCRET

Problème résolu	Signaux utilisés	Matrice de combinatoire	Taille
Problème 3.1	Sortie totale y	Φ	$L \times \sum_{n=1}^N \Gamma_n$
Problème 3.2	Ordre homogène y_n (n isolé)	Φ_n	$L \times \Gamma_n$
Problème 3.3	Interconjugués $y_{n,q}$ (n isolé et $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$)	Φ'_n	$(n+1)L \times \Gamma_n$
Problème 3.4	Homophases ψ_p (p groupé par parité)	Φ_{impair}^a	$2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor L \times \sum_{n \text{ impair}} \Gamma_n$
		Φ_{pair}^b	$\left(2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 \right) L \times \sum_{n \text{ pair}} \Gamma_n$

^a contient seulement $L \sum_{n \text{ impair}} (n+1) \Gamma_n$ coefficients non nuls

^b contient seulement $L \sum_{n \text{ pair}} (n+1) \Gamma_n$ coefficients non nuls

TABLEAU 3.1 – Comparaison de la taille des matrices de combinatoire pour une série de Volterra de degré N et un signal de longueur L ; pour rappel, $\Gamma_n = \binom{n}{M+n-1}$ représente le nombre de coefficients non nuls contenus dans un noyau triangulaire d'ordre n et de mémoire M .

Néanmoins, l'utilisation des signaux interconjugués ou homophases s'accompagne d'une augmentation du nombre de lignes — i.e. de la quantité de données disponible. Or l'inversion d'une matrice de taille $m \times n$ par l'utilisation d'une décomposition en valeurs singulières (SVD¹⁰) est en $O(mn^2)$. D'un point de vue computationnel, il est donc plus intéressant de diminuer le nombre de paramètres à estimer que la quantité de données utilisées.

Si l'on cherche la solution optimale du problème des moindres carrés par inversion matricielle, les capacités matérielles vont donc limiter les choix possibles concernant le modèle considéré (i.e. les valeurs de N et M) ainsi que le nombre de données L . Pour éviter ces limitations, le problème des moindres carrés peut être résolu à l'aide de méthodes itératives comme la descente de gradient. Comme ici la formulation du problème d'identification est linéaire en les paramètres, le problème à résoudre est convexe et l'optimum global peut donc être obtenu par l'utilisation de méthodes itératives.

Ici, une autre approche a été prise pour traiter la problématique du grand nombre de coefficients à estimer : la projection des noyaux de Volterra sur des bases orthonormales.

10. Acronyme de *Singular Value Decomposition*.

3.3 CAS DES NOYAUX DE VOLTERRA PROJETÉS SUR UNE BASE ORTHONORMALE

Cette section s'intéresse à l'identification de la projection de noyaux de Volterra sur une base orthonormale connue. À l'instar de la section précédente concernant l'identification de noyaux à mémoire finie, ce problème se ramène à des moindres carrés linéaires, où les paramètres à estimer sont les coefficients de la projection du noyau. Nous présentons tout d'abord le principe de la projection des noyaux de Volterra sur une base orthonormale. Nous rappelons ensuite l'expression matricielle des ordres homogènes y_n (cf. § 3.3.2), que l'on peut retrouver dans la littérature, e.g. dans [Favier *et al.*, 2003], et donnons enfin l'expression des signaux interconjugués $y_{n,q}$ (cf. § 3.3.3). Les expressions pour la sortie totale ou les signaux homophases se retrouvent en appliquant les mêmes raisonnements qu'en § 3.2.2 et § 3.2.4.

3.3.1 Projection d'un noyau de Volterra

On note $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T}_d, \mathbb{C})$ avec $\mathbb{T}_d = \mathbb{N}$. i.e. telle que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (3.40)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker, et où le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}_d, \mathbb{C})$ est définie par

$$\langle a, b \rangle = \sum_{l \in \mathbb{T}_d} a(l) \overline{b(l)}. \quad (3.41)$$

Remarque 3.1. En pratique, dans le cadre de l'identification de systèmes, les bases orthonormales sont utilisées pour représenter des objets à valeurs réelles (réponse impulsionnelle, noyau de Volterra, etc.). Dans ce cas, il est préférable de travailler avec des bases dont tous les éléments b_i sont à valeurs réelles. Cela peut se faire sans perte de généralité en construisant, à partir d'une base \mathcal{B} dont les éléments b_i sont à valeurs complexes, une base \mathcal{B}' dont les éléments b'_i sont à valeurs réelles et sont données par une combinaison linéaires des b_i .

Pour la représentation de systèmes dynamiques, les bases sont le plus souvent construites à partir d'un ensemble de pôles $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avec $|\xi_i| < 1$ pour tout i . Les fonctions b_i forment alors un ensemble de filtres dont les fonctions de transfert sont données par

$$B_0(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_0|^2}}{z - \xi_0}, \quad (3.42a)$$

$$B_i(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_i|^2}}{z - \xi_i} \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1 - \overline{\xi_k} z}{z - \xi_k} \right) \text{ pour } i \geq 1. \quad (3.42b)$$

Ces relations définissent un ensemble de bases que l'on retrouve dans la littérature sous l'appellation de Bases Orthonormales Généralisées (BOG) [Ninness et Gustafsson, 1997; Khouaja, 2005]. Dans le cas où l'ensemble $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ contient des pôles complexes et leurs conjugués, des définitions alternatives permettent d'avoir un ensemble de filtres b_i réels, tout en gardant les propriétés d'orthonormalité [Ninness et Gustafsson, 1997]. Deux sous familles très utilisées des BOG sont les bases de Laguerre, définies à partir d'un seul pôle réel (et de sa multiplicité) — i.e. $\xi_i = \xi \in \mathbb{R}$ pour tout i —, et les bases de Kautz, définies à partir d'un seul pôle complexe (et de sa multiplicité) — i.e. $\xi_i = \bar{\xi}_{i+1} = \xi \in \mathbb{C}$ pour tout i pair.

Propriété 3.1 (Projection d'un noyau symétrique). Soit $h_n \in \mathcal{H}_n$ un noyau de Volterra. Il peut alors être représenté en le projetant, selon chaque dimension temporelle, sur une base orthonormale \mathcal{B} , i.e.

$$h_n(m_1, \dots, m_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n} b_{k_1}(m_1) \dots b_{k_n}(m_n), \quad (3.43)$$

où les $g_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de la projection. Si l'on considère le noyau h_n sous sa forme symétrique, alors la projection g_{k_1, \dots, k_n} est elle aussi symétrique, i.e. $g_{k_{\pi_1}, \dots, k_{\pi_n}} = g_{k_1, \dots, k_n}$ pour toute permutation π .

Dans la suite, on considérera cette propriété satisfaite (sans perte de généralité).

3.3.2 Expression matricielle des sorties d'ordre homogène

En utilisant (3.43), la sortie d'ordre homogène y_n s'écrit

$$y_n(l) = \sum_{m \in \mathbb{T}_d^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n b_{k_i}(m_i) u(l - m_i) \quad (3.44)$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n v_{k_i}(l), \quad (3.45)$$

où les v_k pour $k \in \mathbb{N}$ correspondent au signal u filtré par les b_k , i.e.

$$v_k(l) = \sum_{m \in \mathbb{T}_d} b_k(m) u(l - m) = [b_k * u](l).$$

Comme le produit $\prod_{i=1}^n v_{k_i}(l)$ est indépendant de l'ordre des k_i , on peut ne prendre en compte que les termes non redondants dans la somme de (3.45). Cela revient à réécrire (3.45) comme

$$y_n(l) = \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=k_1}^{+\infty} \dots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n}^{(tri)} \prod_{i=1}^n v_{k_i}(l), \quad (3.46)$$

où $g_{k_1, \dots, k_n}^{(tri)}$ est la version triangulaire de g_{k_1, \dots, k_n} , i.e. telle que $g_{k_1, \dots, k_n}^{(tri)} = 0$ si il existe $i < j$ tel que $k_i > k_j$. En pratique, on utilise des bases tronquées de R éléments $\mathcal{B}_R = \{b_i\}_{i \in [0; R-1]}$. L'équation (3.46) devient alors

$$y_n(l) = \sum_{k \in \mathbb{K}_n(R)} g_{k_1, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n v_{k_i}(l), \quad (3.47)$$

où l'ensemble $\mathbb{K}_n(R)$ est défini en (3.12). Puisque que la base orthonormale est choisie à l'avance, les v_k peuvent être calculés directement à partir du signal d'entrée. Identifier la projection du noyau h_n revient donc à estimer les $\binom{R+n-1}{n}$ coefficients de g_{k_1, \dots, k_n} à partir des données de y_n et des v_k . La relation (3.47) peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{y}_n = \Phi_n \mathbf{g}_n, \quad (3.48)$$

où \mathbf{g}_n regroupe les coefficients de g_{k_1, \dots, k_n} dans un ordre choisi, et les colonnes de Φ_n correspondent aux produits des signaux filtrés v_k correspondants.

Exemple 3.4. Pour un noyau cubique et une base contenant $R = 3$ éléments, le vecteurs \mathbf{f}_3 et la $l + 1^{\text{ème}}$ ligne de la matrice Φ_3 sont donnés par

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} g_{0,0,0}^{(tri)} \\ g_{0,0,1}^{(tri)} \\ g_{0,0,2}^{(tri)} \\ g_{0,1,2}^{(tri)} \\ g_{0,1,1}^{(tri)} \\ g_{0,2,2}^{(tri)} \\ g_{1,1,1}^{(tri)} \\ g_{1,1,2}^{(tri)} \\ g_{1,2,2}^{(tri)} \\ g_{2,2,2}^{(tri)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Phi_3]_{l,:} = \begin{bmatrix} v_0(l)^3 \\ v_0(l)^2 v_1(l) \\ v_0(l)^2 v_2(l) \\ v_0(l) v_1(l)^2 \\ v_0(l) v_1(l) v_2(l) \\ v_0(l) v_2(l)^2 \\ v_1(l)^3 \\ v_1(l)^2 v_2(l) \\ v_1(l) v_2(l)^2 \\ v_2(l)^3 \end{bmatrix}^T.$$

3.3.3 Expression matricielle des signaux interconjugués

De la même manière que dans le cas des noyaux à temps discret et mémoire tronquée (cf. § 3.2.3), on peut exprimer les signaux interconjugués en fonction de la projection du noyau sur une base orthonormale. En partant de la relation (3.43) et en utilisant la symétrisation décrite en (3.20), le signal interconju-

gué $y_{n,q}$ peut s'écrire

$$y_{n,q}(l) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \sum_{m \in \mathbb{T}_d^n} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=k_1}^{+\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n} \times \left(\prod_{i=1}^{n-q} b_{k_{\pi_i}}(m_{\pi_i}) u(l - m_{\pi_i}) \prod_{i=n-q+1}^n b_{k_{\pi_i}}(m_{\pi_i}) \overline{u(l - m_{\pi_i})} \right) \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=k_1}^{+\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{+\infty} g_{k_1, \dots, k_n} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \left(\prod_{i=1}^{n-q} v_{k_{\pi_i}}(l) \prod_{i=n-q+1}^n \overline{v_{k_{\pi_i}}(l)} \right). \quad (3.50)$$

Comme pour la relation (3.22), on peut remplacer la somme sur l'ensemble des permutations \mathcal{P}_n par une somme sur l'ensemble des partitions Ω_n^q . En considérant de plus une base tronquée \mathcal{B}_R , l'équation (3.50) devient alors

$$y_{n,q}(l) = \frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_{k \in \mathbb{K}_n(R)} g_{k_1, \dots, k_n} \sum_{(a, \bar{a}) \in \Omega_n^q} \left(\prod_{i=1}^{n-q} v_{k_{a_i}}(l) \prod_{i=1}^q \overline{v_{k_{\bar{a}_i}}(l)} \right). \quad (3.51)$$

Cette relation peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$\mathbf{y}_{n,q} = \mathbf{\Phi}_{n,q} \mathbf{g}_n, \quad (3.52)$$

où les colonnes de $\mathbf{\Phi}_{n,q}$ correspondent aux produits des signaux filtrés à valeurs complexe v_k et $\overline{v_k}$ correspondants.

Exemple 3.5. Pour un noyau d'ordre 3 et une base contenant $R = 3$ éléments, la $l + 1^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\mathbf{\Phi}_{3,1}$ est donnée par

$$[\mathbf{\Phi}_{3,1}]_{l,\cdot} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3v_0(l)^2 \overline{v_0(l)} \\ v_0(l)^2 \overline{v_1(l)} + 2v_0(l)v_1(l) \overline{v_0(l)} \\ v_0(l)^2 \overline{v_2(l)} + 2v_0(l)v_2(l) \overline{v_0(l)} \\ 2v_0(l)v_1(l) \overline{v_1(l)} + v_1(l)^2 \overline{v_0(l)} \\ v_0(l)v_1(l) \overline{v_2(l)} + v_0(l)v_2(l) \overline{v_1(l)} + v_1(l)v_2(l) \overline{v_0(l)} \\ 2v_0(l)v_2(l) \overline{v_2(l)} + v_2(l)^2 \overline{v_0(l)} \\ v_1(l)^2 \overline{v_1(l)} \\ v_1(l)^2 \overline{v_2(l)} + 2v_1(l)v_2(l) \overline{v_1(l)} \\ 2v_1(l)v_2(l) \overline{v_2(l)} + v_2(l)^2 \overline{v_1(l)} \\ v_2(l)^2 \overline{v_2(l)} \end{bmatrix}^T.$$

3.3.4 Remarques sur le choix des bases

En utilisant des projections sur des bases, le nombre de coefficients caractérisant le noyau d'ordre n vaut $\Gamma_n = \binom{R+n-1}{n}$, où R est le nombre d'éléments

dans la base choisie. Cette formule est similaire à celle du nombre de coefficients dans un noyau de mémoire M , qui vaut $\binom{M+n-1}{n}$, en remplaçant la longueur de la mémoire par le nombre de fonctions de bases. Pour obtenir une diminution significative du nombre de paramètres à estimer, il faut donc que R soit assez petit devant M . Or diminuer R impacte ce qu'il est possible de représenter avec la base choisie, et augmente l'erreur d'estimation du noyau. Le choix de la base est donc primordial, puisque celui-ci va conditionner la bonne estimation des noyaux. Pour faire cela, il faut déterminer un ensemble de pôles $\{\xi_i\}_{i \in \llbracket 0; R-1 \rrbracket}$ qui soit le plus adapté possible à la dynamique sous-jacente du système étudié. Il peut parfois être plus intéressant de considérer une base différente pour chaque noyau h_n .

Dans le cas des bases de Laguerre, il existe une formule analytique donnant le pôle optimal pour la projection d'un noyau de Volterra d'ordre n [Campello *et al.*, 2004, 2006]. Ces formules nécessitent la connaissance a priori du noyau, et ne sont donc pas utilisables à des fins d'identification. Dans [Kibangou *et al.*, 2005], les auteurs proposent une formule analytique qui permet de calculer le pôle optimal à partir de la projection du noyau sur n'importe quelle base de Laguerre. Ils proposent alors une méthode d'identification itérative qui peut se résumer ainsi :

1. fixer (arbitrairement) un pôle ξ et un nombre d'éléments R ;
2. créer la base de Laguerre correspondant au pôle ξ ;
3. identifier la projection du noyau sur cette base à partir des données mesurées;
4. si l'erreur d'identification est supérieure à un seuil fixé, estimer le pôle optimal ξ_{opt} , et repartir à l'étape 2 en fixant $\xi = \xi_{opt}$; sinon s'arrêter.

La convergence vers un pôle permettant une estimation à la fois parcimonieuse (en nombre d'éléments nécessaires dans la base) et efficace (en terme d'erreur d'identification) dépend fortement de l'étape 3. Effectuer celle-ci en utilisant des signaux séparés selon chaque ordre d'homogénéité (sorties d'ordre homogène ou signaux interconjugués) devrait donc permettre une estimation plus précise du pôle optimal pour chaque noyau. Toutefois, une base de Laguerre n'étant constituée que de filtres à pôles réels, elle est mal adaptée à la représentation de résonances ou autres dynamiques plus complexes. Or ces phénomènes sont présents dans une large majorité de systèmes, et particulièrement en lorsque l'on s'intéresse aux systèmes sonores.

Pour représenter de tels systèmes, il est préférable d'utiliser des bases de type Kautz ou BOG. Dans ce cas là, on cherche alors à optimiser le choix de un ou plusieurs pôles complexes. Il est possible de faire cela à l'aide de l'estimation de la BLA du système — qui consiste pour rappel en la meilleure approximation linéaire du système étudié. En effet, un noyau projeté sur une base finie peut aussi se représenter à l'aide d'un modèle de Wiener parallèle (voir Fi-

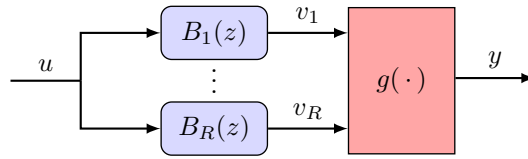


FIGURE 3.1 – Schéma d'un modèle de Wiener parallèle.

figure 3.1) qui est constitué des R filtres de la base choisie — les B_k — en parallèle alimentant une non-linéarité statique $g(\cdot)$ homogène d'ordre n décrite par les coefficients de la projection g_{k_1, \dots, k_n} . Or, il a été montré que si l'on estime la BLA d'un tel modèle, la fonction de transfert obtenue a pour pôles l'ensemble de ceux des B_k [Tiels et Schoukens, 2014]. Il suffit alors d'identifier les pôles de la fonction de transfert obtenue pour les utiliser dans la construction de la base.

La recherche de méthodes pour déterminer la base optimale à partir des données sort du cadre de cette thèse. Il serait intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser les signaux interconjugués et/ou homophases pour améliorer l'estimation des pôles (et donc de la base optimale). Cette piste est gardée en perspective de recherche.

3.4 COMPARAISON DES MÉTHODES

Afin de comparer les approches d'identification présentées dans ce chapitre — à partir de la sortie totale, des ordres homogènes, des signaux interconjugués ou des signaux homophases —, l'expérience numérique décrite au § 2.6.3 est réutilisée.

Pour les méthodes nécessitant une séparation préalable, une seule méthode de séparation sera utilisée.

Signaux y_n les ordres y_n sont estimés par la méthode AS (cf. § 2.1.1);

Signaux $y_{n,q}$ les signaux interconjugués $y_{n,q}$ sont estimés par la méthode PAS (cf. § 2.4.2);

Signaux ψ_p les signaux homophases ψ_p estimés par la méthode HPS (cf. § 2.3.3).

La méthode AS (respectivement PAS) a été choisie car elle est celle qui donne accès aux ordres y_n (resp. les signaux $y_{n,q}$) pour le plus petit nombre de signaux tests nécessaire K . Si la méthode de séparation préalable est changée, les résultats de l'identification changent de la même manière que ceux observés pour la séparation (cf. § 2.6.3).

Pour la méthode basée sur la sortie totale, le même type de signaux d'entrées a été utilisé (bruit blanc gaussien de moyenne nulle et variance unitaire). Afin de comparer les méthodes pour un nombre identique de données, les signaux d'excitations sont pris de longueur $L_d = KL$, où $L = 10000$ est la longueur des signaux de référence utilisées pour la séparation. D'un point de vue expé-

rimental, cette approche nécessiterait donc approximativement la même durée de mesure qu'une méthode avec séparation¹¹.

La performance des méthodes d'identification est comparée en estimant l'erreur relative de reconstruction pour un signal d'évaluation

$$\epsilon = \text{RMS}(y_{\text{eval}} - \tilde{y}_{\text{eval}}) / \text{RMS}(y_{\text{eval}}), \quad (3.53)$$

où y_{eval} est le signal en sortie du système et \tilde{y}_{eval} celui reconstruit à l'aide du modèle estimé. Le signal d'évaluation est pris comme la réponse du système à un bruit gaussien indépendamment distribué dont la variance croît linéairement de 0 à 1.25 en $L_{\text{eval}} = 10000$ échantillons. La valeur maximale de la variance, supérieure à elle utilisée pour l'identification, permet de mesurer la capacité de l'estimation à extrapoler le comportement du système étudié pour des amplitudes supérieures à celles utilisés lors de l'estimation.

3.4.1 Identification de noyaux à mémoire tronquée

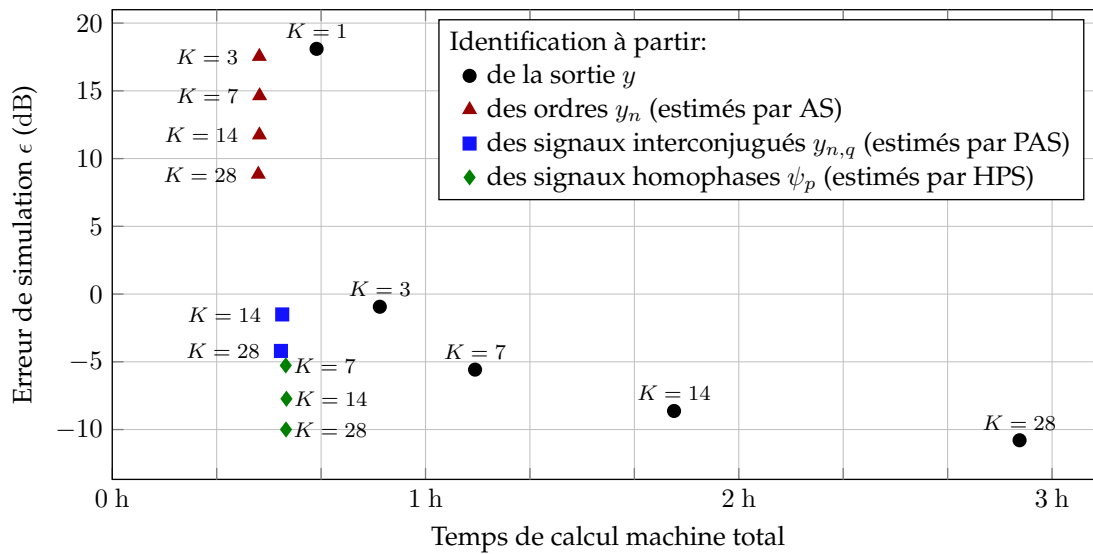
Nous nous intéressons dans un premier temps à l'estimation des coefficients des noyaux de Volterra à temps discret. Ici, nous nous limitons à l'identification d'une série de Volterra de degré 3, dont les ordres ont pour mémoire respective $M_1 = 100$, $M_2 = 60$ et $M_3 = 35$. Cela correspond à un nombre de coefficients à estimer pour chaque ordre de $\Gamma_1 = 100$, $\Gamma_2 = 1830$ et $\Gamma_3 = 7770$. Au total, le nombre de coefficient à estimer est donc de $\Gamma = 9700$.

Le conditionnement des méthodes de séparation augmente avec l'ordre de troncature N choisi — à l'exception de HPS, où le conditionnement est toujours optimal. Nous nous contentons donc ici de séparer les trois premiers ordres de la série et choisissons $N = 3$. Les méthodes sont testées pour plusieurs valeurs de $K \in \{1, 3, 7, 14, 28\}$, ce qui correspond aux valeurs minimales nécessaires pour les différentes méthodes de séparation lorsque $N = 3$. Pour chaque méthode d'identification, les valeurs optimales des coefficients des noyaux sont trouvées par inversion matricielle. Les résultats d'évaluation pour chacune des méthodes et pour deux niveaux de bruit sont rassemblés en [Figure 3.2](#) en fonction du temps de calcul machine.

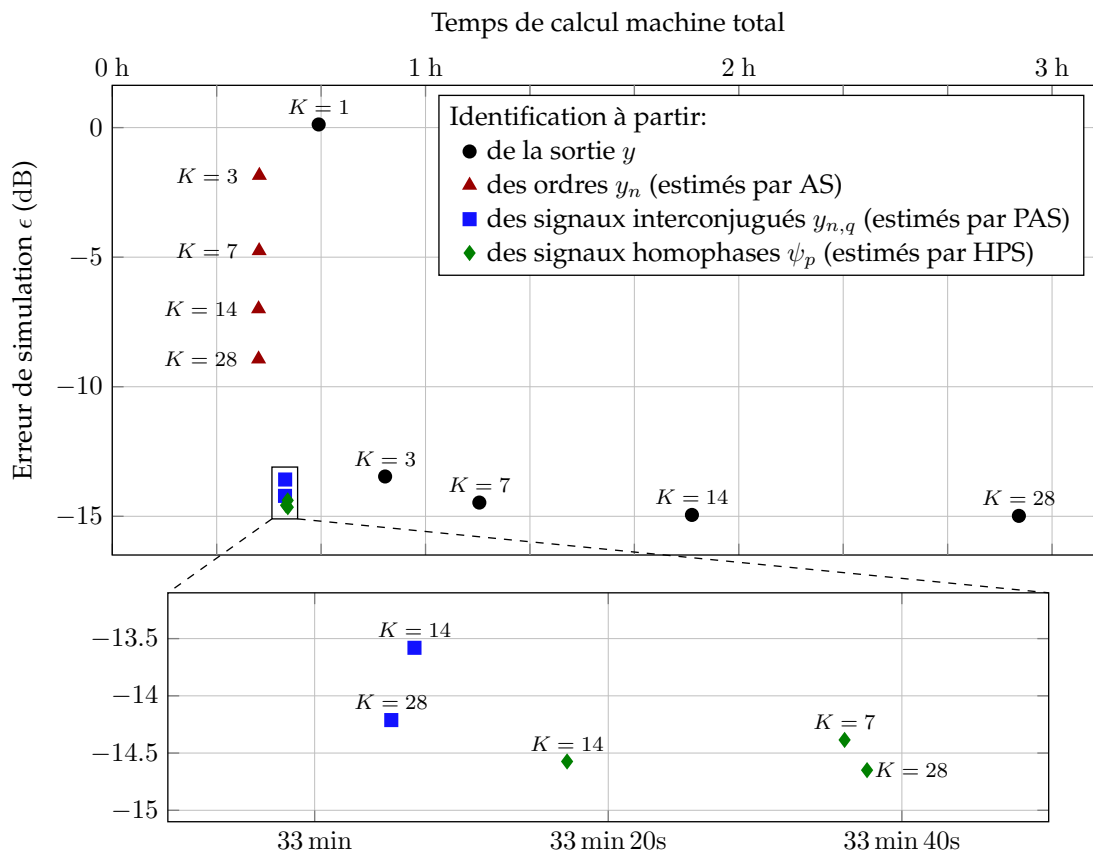
Considérons tout d'abord le cas où le RSB est de 0 dB. On remarque que les résultats de la méthode utilisant la sortie totale (ronds noirs dans la [Figure 3.2a](#)) s'améliorent lorsque l'on augmente la longueur du signal utilisé — i.e. lorsque K augmente —, ce qui s'accompagne d'une augmentation importante du temps de calcul. C'est un résultat habituel de l'estimation par moindres carrés. Il est donc théoriquement possible d'augmenter la longueur du signal d'excitation jusqu'à obtenir une erreur cible, mais une telle approche est en pratique limitée par les capacités de calcul qu'elle nécessite.

11. Une petite différence réside dans le fait que l'approche directe ne nécessite qu'une seule longue mesure, tandis qu'une approche par séparation nécessite plusieurs mesures courtes, chacune espacée du temps suffisant pour ce que le système retourne à son état d'équilibre.

3.4. COMPARAISON DES MÉTHODES



(a) RSB de 0 dB



(b) RSB de 20 dB

FIGURE 3.2 – (Identification des coefficients des noyaux triangulaires) Évolution de l'erreur de simulation ϵ (en décibels) en fonction du temps de calcul machine pour les différentes approches d'identification et deux valeurs de RSB; les points représentent les valeurs moyennes pour les 10 réalisations.

À l'inverse, le temps de calcul total des approches basés sur la séparation est peu affecté par une augmentation de K . En effet, augmenter le nombre de signaux rend le calcul de la séparation plus long, mais cette étape reste néanmoins négligeable devant l'identification (voir [Figure 2.19](#) p. 73). De plus, comme dans ce cas là l'identification utilise toujours sur un signal de longueur L , son temps de calcul est fixe quel que soit le nombre K de signaux tests utilisés pour la séparation. En utilisant des méthodes de séparation, il est donc possible d'améliorer les résultats de l'identification sans affecter le temps de calcul en augmentant le nombre de signaux K . Une multiplication par 2 du nombre de signaux utilisés améliore l'erreur de simulation d'environ 3 dB, ce qui est en accord avec les résultats théoriques sur la robustesse des méthodes de séparation développés au [Chapitre 2](#).

L'approche utilisant les ordres estimés par la méthode AS (triangles rouges dans la [Figure 3.2a](#)) donnent des estimations peu satisfaisantes; des résultats similaires sont trouvés que l'on utilise nos méthodes PAS ou RPS pour estimer les ordres, tant pour l'erreur de simulation que pour le temps de calcul. En effet, bien qu'ils soient meilleurs qu'une approche directe avec un signal de longueur L , l'utilisation des ordres est nettement surpassée par une approche directe utilisant un nombre de données équivalent. Dans le cas d'un RSB de 0 dB, l'estimation des noyaux est même mauvaise puisque l'erreur d'évaluation est supérieure à 0 dB. La grande sensibilité au bruit de l'approche par ordres y_n est due au mauvais conditionnement de l'étape de séparation (et ce que l'on utilise AS, PAS ou RPS).

Toutefois, l'utilisation des signaux interconjugués (carrés bleus dans la [Figure 3.2a](#)) améliore sensiblement les résultats d'estimation par rapport à l'utilisation des ordres y_n , et ce bien que l'étape de séparation soit identique. Cette différence s'explique par une augmentation artificielle du nombre de données utilisées pour l'identification : il y a $n + 1$ signaux interconjugués à partir desquelles le noyau d'ordre n peut être estimé, mais un seul signal y_n . Cette augmentation du nombre de données dans l'étape d'identification explique aussi l'augmentation du temps de calcul. L'erreur d'évaluation reste plus grande que celle obtenue par l'approche directe pour un nombre de données équivalent, mais le temps de calcul est nettement plus faible.

L'utilisation des signaux homophases ψ_p (losanges verts dans la [Figure 3.2a](#)) améliore les résultats obtenus à partir des y_n ou $y_{n,q}$. À nombre de données équivalent, l'approche directe et l'approche par signaux homophases conduisent à des erreurs du même ordre de grandeur. Cela peut s'expliquer par le conditionnement optimal de la TFD sur laquelle repose la méthode HPS. De plus, l'approche par signaux homophases a un temps de calcul plus faible. D'un point de vue numérique, la méthode HPS effectue donc un pré-traitement qui permet une identification à moindre coûts sans augmenter le niveau de bruit. Le nombre de signaux K permet de contrôler l'ordre de la TFD, et donc son effet

sur le bruit de mesure. La [Figure 3.3](#) montre par exemple l'estimation des deux premiers noyaux basés sur la séparation en signaux homophases pour deux valeurs de K .

Considérons maintenant le cas où le RSB vaut 20 dB ([Figure 3.2b](#)). Les remarques concernant les temps de calcul restent valides. De plus, les résultats de toutes les méthodes d'identification s'améliorent. Mais l'erreur de simulation ne dépasse pas les -15 dB. Cela provient de l'erreur de modélisation dû au choix de la troncature. En effet, l'erreur de reconstruction entre la sortie totale et la sortie tronquée à l'ordre $N = 3$ vaut -16 dB. Il est donc naturel de ne pas pouvoir obtenir des résultats meilleurs avec le modèle choisi. Choisir un ordre de troncature plus élevé permettrait de mieux modéliser le système, mais au coût d'un plus grand nombre de coefficients à identifier, et donc d'un temps de calcul accru.

3.4.2 Identification à l'aide de bases orthonormales

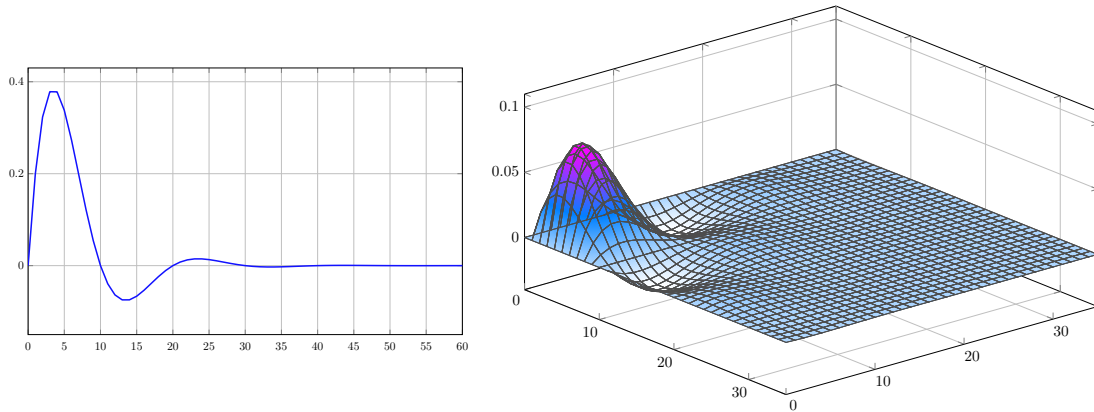
Nous nous intéressons maintenant à l'estimation des coefficients de la projection des noyaux de Volterra sur une base orthonormale. Pour cela, nous utilisons une base de Kautz avec $R = 2$ éléments construite avec le vrai pôle du système, i.e. $\xi = 0.85e^{j2\pi \times 0.05}$. Ce cas est idéal, puisque la base choisie permet de reconstruire parfaitement le système étudié. Les projections des 9 premiers noyaux de la série sont estimées. Le nombre total de coefficient à estimer est donc de $\Gamma = 55$.

Pour séparer les 9 premiers ordres de la série, plusieurs valeurs de $K \in \{1, 9, 19, 90, 190\}$ sont utilisées, qui correspondent aux valeurs minimales nécessaires pour les différentes méthodes de séparation lorsque $N = 9$. Pour chaque méthode d'identification, les valeurs de la projection des noyaux sont calculées par inversion matricielle. Les résultats d'évaluation pour chacune des méthodes et pour deux niveaux de bruit sont rassemblées en [Figure 3.4](#) en fonction du temps de calcul machine.

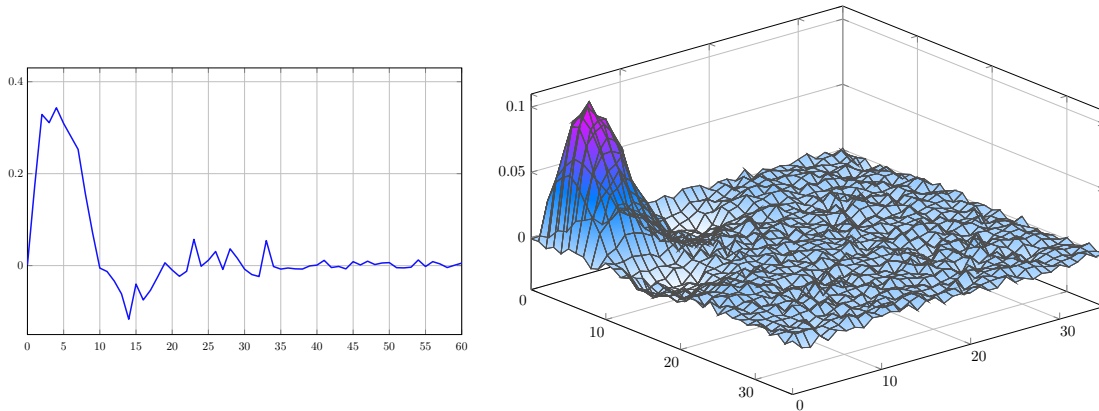
On remarque tout d'abord que le gain en temps de calcul apporté par les méthodes de séparation est significativement réduit. Cela est dû au petit nombre de coefficients à estimer.

De plus, quel que soit le RSB utilisé, les résultats des différentes méthodes présentent des évolutions similaires en fonction du paramètre K . En effet, dans cette expérience, il y a peu d'erreur de modélisation puisque que la base choisie permet de représenter parfaitement le système étudié, et que l'ordre de troncature considéré est élevé. La [Figure 3.3](#) montre par exemple l'estimation des deux premiers noyaux basés sur la séparation en signaux homophases pour deux valeurs de K .

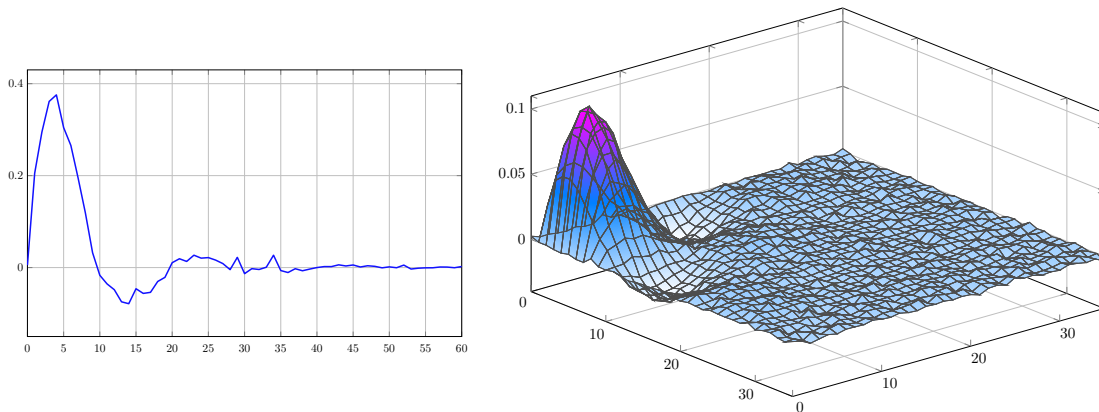
Enfin, on remarque que pour ces conditions d'estimation idéales (puisque la base choisie est parfaitement adaptée au système), la méthode directe (ronds



(a) Noyaux de référence



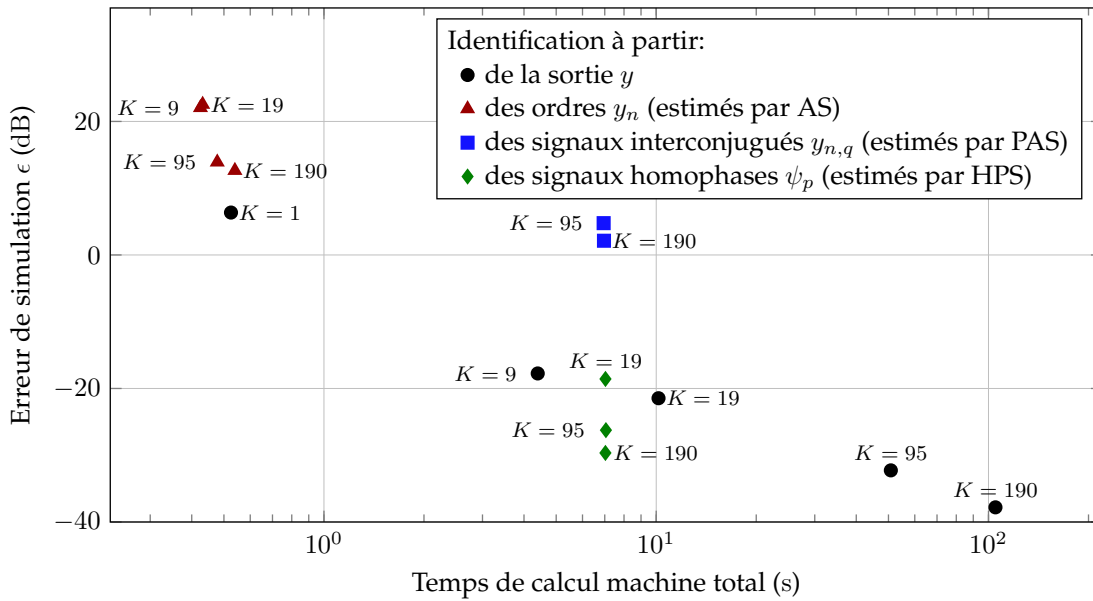
(b) Noyaux estimés à partir des signaux homophases avec $K = 7$



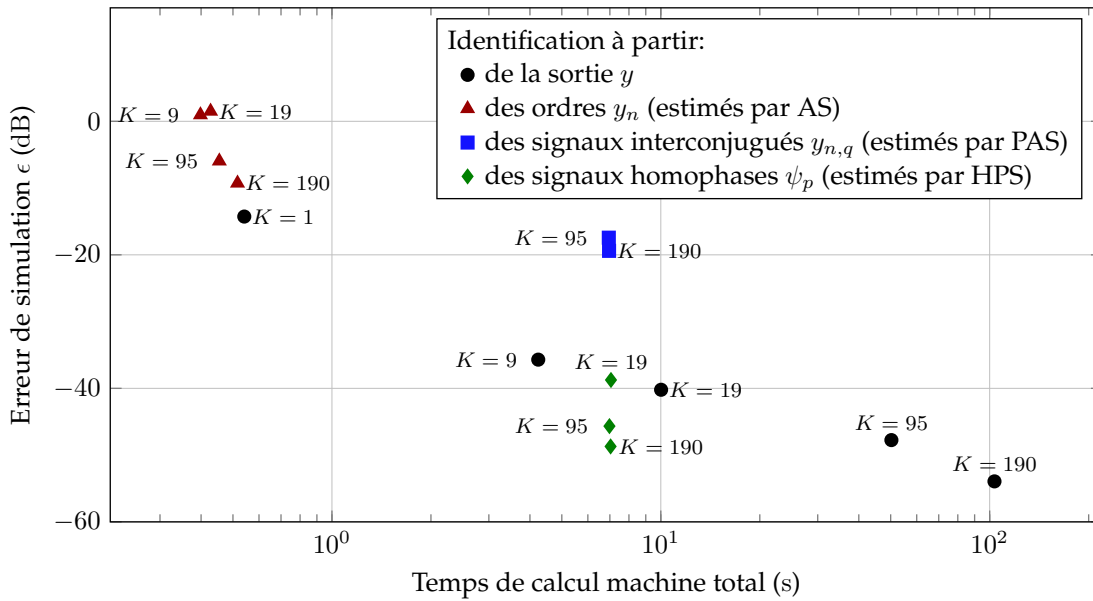
(c) Noyaux estimés à partir des signaux homophases avec $K = 28$

FIGURE 3.3 – (Identification des coefficients des noyaux triangulaires) Noyaux de Volterra des deux premiers ordres (a) calculés à partir du modèle, (b) estimés à partir des signaux homophases avec $K = 7$ et (c) estimés à partir des signaux homophases avec $K = 28$.

3.4. COMPARAISON DES MÉTHODES

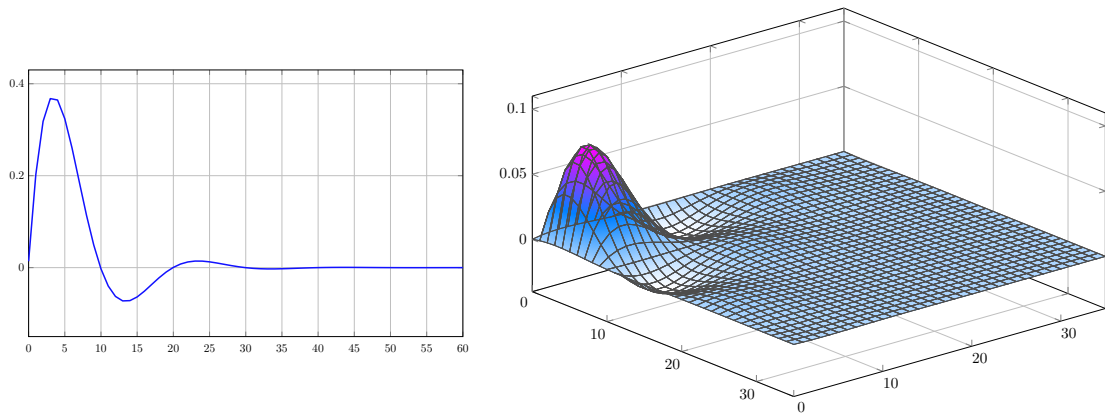


(a) RSB de 0 dB

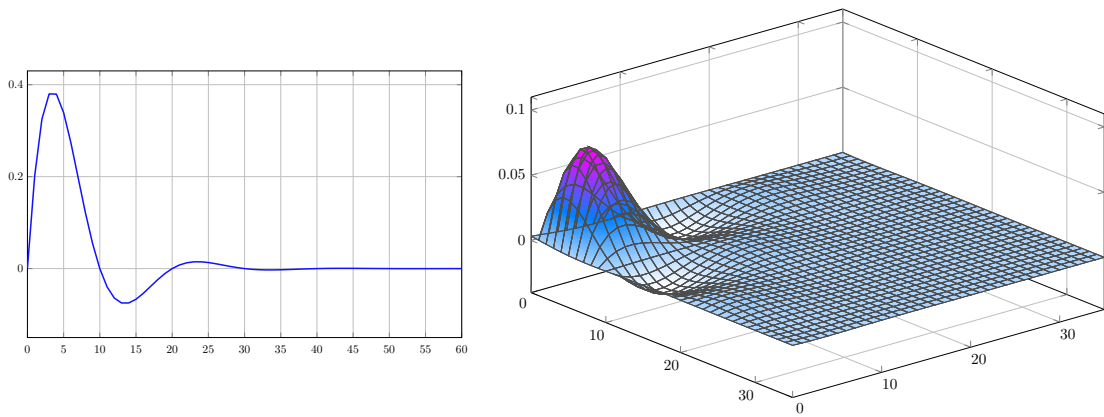


(b) RSB de 20 dB

FIGURE 3.4 – (Identification de la projection des noyaux sur une base) Évolution de l’erreur de simulation ϵ (en décibels) en fonction du temps de calcul pour les différentes approches d’identification et deux valeurs de RSB ; l’identification est faite en utilisant une projection sur une base orthogonale créée à partir du pôle réel du système étudié ; les points représentent les valeurs moyennes pour les 10 réalisations.



(a) Noyaux estimés à partir des signaux homophases avec $K = 7$



(b) Noyaux estimés à partir des signaux homophases avec $K = 28$

FIGURE 3.5 – (Identification de la projection des noyaux sur une base) Noyaux de Volterra des deux premiers ordres estimés à partir des signaux homophases avec (a) $K = 7$ et (b) $K = 28$; l'identification est faite en utilisant une projection sur une base orthogonale créée à partir du pôle réel du système étudié.

noirs dans la Figure 3.4) donne, pour un nombre de données équivalent, une estimation meilleure que toute autre approche.

3.4.3 Remarques conclusives

Les expériences numériques nous ont permis de remarquer que les différentes approches proposées dans ce chapitre se comportent différemment en fonction de la quantité de bruit de mesure et du modèle utilisé. Se pose donc la question légitime de quelle approche privilégier lorsque l'on cherche à identifier un système réel ?

Si l'utilisateur n'a pas le contrôle des signaux d'excitations, alors l'utilisation des méthodes de séparation est impossible et l'identification doit se faire à partir de la sortie totale. Si les signaux d'entrées peuvent être fixés, alors la réponse

dépend de plusieurs conditions.

Niveau de bruit des mesures. Comme nous l'avons vu, les méthodes de séparation AS, PAS et RPS sont très sensibles à la présence de bruit, et ce d'autant plus lorsque l'ordre de troncature N est grand. Les approches d'identification basées sur les ordres y_n ou les signaux interconjugués sont donc à éviter lorsque que le RSB est faible. Une approche directe ou utilisant les signaux homophases est alors à préférer. Cette dernière permet d'économiser en temps de calcul (surtout lorsque que le modèle contient de nombreux paramètres à estimer).

Nombre de mesures réalisables. Les méthodes PAS et RPS sont coûteuses en nombre de signaux d'excitations à utiliser, qui est en $O(N^2)$. Pour les méthodes AS et HPS, le nombre de signaux minimum est en $O(N)$. Ces méthodes sont donc à privilégier si les mesures possibles sont limitées et qu'une séparation (des ordres pour AS et des signaux homophases pour HPS) est souhaitée.

Type de modèle à identifier. Le modèle choisi va déterminer le nombre de paramètres à identifier. Si il est nécessaire d'estimer un grand nombre de paramètres, la méthode directe est à éviter à cause de son coût de calcul et de son utilisation mémoire. Dans ce cas, une approche utilisant les ordres y_n ou les signaux $y_{n,q}$ sont les plus adaptées, puisque chaque noyau est estimé séparément. De plus, si l'on souhaite estimer les pôles d'une base orthogonale en vue d'identifier le système, avoir accès aux ordres y_n séparés permet de trouver une base optimale différente pour chaque ordre (et non une base optimale pour tout les noyaux, comme cela serait le cas si les pôles étaient estimés à partir de la sortie totale).

En conclusion, l'approche à utiliser dépend du contexte. Toutefois, en règle générale la méthode utilisant les signaux homophases fournit un bon compromis entre robustesse au bruit, temps de calcul et nombre de signaux minimums nécessaires.

— Chapitre 4 —

Estimation de représentations d'états à non-linéarités polynomiales

Il est inutile de défoncer des portes
qu'on peut ouvrir.

Arthur Honegger - *Écrits*

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre s'intéresse à l'utilisation des méthode de séparation en ordres homogènes pour l'estimation des paramètres de représentations d'états non linéaire. Pour rappel, un système différentiel admet une représentation d'état de paramètres Θ si sa relation entrée-sortie peut s'écrire sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\Theta}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}_{\Theta}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4.1b)$$

où \mathbf{u} , \mathbf{x} et \mathbf{y} représentent l'entrée, l'état et la sortie du système, et $\dot{\mathbf{x}}$ la dérivée temporelle de l'état. Ici, on s'intéressera au cas de système de dimension finie à entrée, état et sortie bornés et de conditions initiales nulles, i.e. tels que $\mathbf{u} \in \mathcal{U} = L^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{\eta_u})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X} = L^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{\eta_x})$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} = L^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{\eta_y})$ avec η_u , η_x et η_y leurs dimensions respectives, et $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. De plus les fonctions \mathbf{f}_{Θ} et \mathbf{g}_{Θ} sont supposées analytiques en $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{\eta_x} \times \mathbb{R}^{\eta_u}$ autour du point d'équilibre¹ $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pour tout les paramètres Θ .

Pour utiliser les méthodes de séparation présentées dans le [Chapitre 2](#), il est nécessaire d'exprimer la relation (4.1) dans le formalisme des séries de Volterra. On trouve ce type de ré-écriture dans la littérature sur les séries de Volterra à partir des années 1970.

1. Il est toujours possible de se ramener à ce cas par une translation $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{eq}}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{eq}})$.

Dans [Brockett, 1976], l'auteur montre que la classe des systèmes linéaires-analytiques² admet une représentation en série de Volterra (sous la condition que le système ne diverge pas en un temps fini et si l'on considère un état initial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$). De plus, des formules analytiques permettant de trouver le rayon de convergence de tels systèmes ont été données dans [Hélie et Laroche, 2011] — pour la cas des systèmes à dimension finie — et [Hélie et Laroche, 2014] — pour la cas des systèmes à dimension infinie. Un résultat pour la forme générale (4.1) est donnée dans [Gilbert, 1977] pour un intervalle de temps \mathbb{T} borné. Les formules analytiques des noyaux sont calculables à partir des dérivées de Fréchet des fonctions f et g [Dieudonné, 2013; Hélie, 2013].

Une autre approche permet d'écrire un système différentiel dans le formalisme des séries de Volterra. Celle-ci, basée sur l'utilisation de séries génératrices en variables non commutatives [Fliess, 1981], permet d'obtenir de manière relativement aisée les formules symboliques des noyaux de Volterra [Fliess *et al.*, 1983]. Cette approche a amené au développement d'un logiciel d'analyse de circuit électronique non linéaire permettant l'analyse de la sortie d'un système en réponse à des entrées déterministes typiques (harmoniques, Dirac, échelons, etc.) ou à des entrées aléatoires [Lamnabhi, 1986].

Le § 4.2 rappelle l'écriture en série de Volterra d'un système différentiel. Les notations utilisées sont celles choisies dans [Hélie, 2013, § 2.2], et la présentation est basée sur l'écriture en dérivées de Fréchet et l'utilisation de la méthode des perturbations [Khalil et Grizzle, 1996, Chapitre 5]. En s'appuyant sur cette formulation, une méthode est proposée en § 4.3 pour estimer les paramètres Θ d'une représentation d'état. Cette méthode procède de manière itérative sur les ordres de non-linéarité : on estime d'abord les paramètres de la partie linéaire du système, qui sont ensuite utilisées pour estimer les paramètres de la partie quadratique, etc. Enfin, les avantages et inconvénients de l'approche proposée sont discutés en § 4.4, et des perspectives d'améliorations sont proposées.

4.2 RAPPELS SUR L'ÉCRITURE D'UNE REPRÉSENTATION D'ÉTAT EN SÉRIE DE VOLTERRA

4.2.1 Représentation d'état à non-linéarités polynomiales

Considérons un système différentiel causal et de dimension finie dont la relation entrée-sortie est donnée par la représentation d'état (4.1), et initialement au repos, i.e. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Si les fonctions f_Θ et g_Θ sont bien analytique autour de $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, alors elles peuvent s'écrire (en omettant le paramètre Θ par souci de

2. Un système est dit linéaire-analytique si il existe des fonctions analytiques f_x et f_u telles que $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = f_x(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(t)f_u(\mathbf{x}(t))$ et si de plus $g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = g(\mathbf{x}(t))$

clarté)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M_{p,q} \left(\underbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}_p, \underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_q \right), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} N_{p,q} \left(\underbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}_p, \underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_q \right), \quad (4.3)$$

où $M_{p,q} \in \mathcal{ML}_{p+q}(\mathcal{X}^p \times \mathcal{U}^q, \mathcal{X})$ et $N_{p,q} \in \mathcal{ML}_{p+q}(\mathcal{X}^p \times \mathcal{U}^q, \mathcal{Y})$ sont les dérivées de Fréchet de \mathbf{f} et \mathbf{g} , i.e.

$$M_{p,q}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \frac{\partial^{p+q} \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}^p \partial \mathbf{u}^q} \left(\underbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}_p, \underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_q \right), \quad (4.4)$$

$$N_{p,q}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \frac{\partial^{p+q} \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}^p \partial \mathbf{u}^q} \left(\underbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}_p, \underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_q \right). \quad (4.5)$$

La relation (4.1) peut alors se réécrire

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q}} M_{p,q}(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(t)), \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q}} N_{p,q}(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(t)), \quad (4.6b)$$

où l'on a re-noté les termes linéaires par $\mathbf{A}\mathbf{x} = M_{1,0}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}\mathbf{u} = M_{0,1}(\mathbf{u})$, $\mathbf{C}\mathbf{x} = N_{1,0}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{D}\mathbf{u} = N_{0,1}(\mathbf{u})$, et où les objets \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ dépendent des paramètres Θ .

Lorsque les indices (p, q) sont bornés ($p \leq P$, $q \leq Q$), le modèle (4.6) correspond à ce que l'on retrouve dans la littérature sous le nom de *Polynomial NonLinear State Space*, bien que généralement présenté sous une notation différentielle [Paduart, 2008, Chapitre 5]. Par commodité, nous utiliserons par la suite l'acronyme PNLSS utilisée dans la littérature pour se référer au modèle (4.6). La notation utilisée ici permet d'écrire facilement un système de type PNLSS en série de Volterra, ce que nous ferons en § 4.2.2 à l'aide de la méthode des perturbations régulières.

Forme des $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$. Les fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ sont multi-linéaires d'ordre p en l'état et q en l'entrée. Elles peuvent être représentés sous forme de multi-nômes, ou *forme polynomiale multi-variable*. En considérant (sans perte de généralité) que les $M_{p,q}$ sont symétriques en \mathbf{x} selon les p premières variables et en

\mathbf{u} selon les q dernières, on peut écrire

$$\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_q(\eta_u)} \mathbf{m}_{p,q}^{(k,l)} \prod_{j=1}^p [\mathbf{x}]_{k_j} \prod_{j=1}^q [\mathbf{u}]_{l_j}, \quad (4.7)$$

où $[\mathbf{x}]_n$ (respectivement $[\mathbf{u}]_n$) désigne la $n - 1^{\text{ème}}$ coordonnée³ de l'état (respectivement de l'entrée), $\mathbf{m}_{p,q}^{(k,l)}$ est un vecteur de coefficients de longueur η_x , et où pour rappel $\mathbb{K}_n(\eta)$ désigne l'ensemble des n -uplets ordonnés d'entiers de 0 à $\eta - 1$ (cf. (3.12) p. 81). Les $\mathbf{N}_{p,q}$ s'écrivent de manière similaire.

Nombre de paramètres. Les paramètres Θ_1 de la partie linéaire d'un modèle PNLSS sont les coefficients des quatre matrices \mathbf{A} (de taille $\eta_x \times \eta_x$), \mathbf{B} (de taille $\eta_x \times \eta_u$), \mathbf{C} (de taille $\eta_y \times \eta_x$) et \mathbf{D} (de taille $\eta_y \times \eta_u$). Le nombre de paramètres linéaires est donc de $\text{card}(\Theta_1) = (\eta_x + \eta_y)(\eta_x + \eta_u)$, où $\text{card}(\Theta)$ représente le cardinal de l'ensemble Θ .

Les paramètres Θ_n de la partie non linéaire d'ordre n d'un modèle PNLSS sont les coefficients de tous les vecteurs $\mathbf{m}_{p,q}^{(k,l)}$ (de longueur η_x) et $\mathbf{n}_{p,q}^{(k,l)}$ (de longueur η_y) — représentant respectivement les fonctions $\mathbf{M}_{p,q}$ et $\mathbf{N}_{p,q}$ — tels que $p + q = n$. En utilisant l'écriture polynomiale (4.7), une fonction $\mathbf{M}_{p,q}$ est caractérisée par $\binom{\eta_x + p - 1}{p} \binom{\eta_u + q - 1}{q}$ de ces vecteurs. Si l'on considère toutes les non-linéarités d'ordre n , on peut alors montrer que celles-ci sont représentées par $\text{card}(\Theta_n) = (\eta_x + \eta_y) \binom{\eta_x + \eta_u + n - 1}{n}$ paramètres.

Le nombre maximal de paramètres d'un modèle PNLSS tronquée à l'ordre N est donc donnée par

$$\text{card}(\{\Theta_n\}_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}) = (\eta_x + \eta_y) \sum_{n=1}^N \binom{\eta_x + \eta_u + n - 1}{n} \quad (4.8)$$

$$= (\eta_x + \eta_y) \left(\binom{\eta_x + \eta_u + N}{N} - 1 \right). \quad (4.9)$$

En pratique, il est aussi nécessaire de considérer l'invariance par similarité des représentations d'état. En effet, remplacer l'état \mathbf{x} par $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ laisse les équations (4.6) inchangées (à condition que \mathbf{T} soit inversible). En considérant les η_x^2 paramètres libres de \mathbf{T} , le nombre effectif de paramètres d'un modèle PNLSS de degré N est donc de

$$(\eta_x + \eta_y) \left(\binom{\eta_x + \eta_u + N}{N} - 1 \right) - \eta_x^2. \quad (4.10)$$

4.2.2 Mise en série

Afin de réécrire le modèle (4.6) dans le formalisme des séries de Volterra, nous nous basons sur la méthode des perturbations régulières. Celle-ci consiste

3. Pour rappel, les indices désignant des éléments de vecteur sont numérotés à partir de 0.

à chercher un développement des vecteurs d'état et de sorties de la forme

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{x}_n, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{y}_n, \quad (4.12)$$

où les termes \mathbf{x}_n et \mathbf{y}_n sont homogènes d'ordre n par rapport à l'entrée — i.e. si l'on remplace l'entrée \mathbf{u} par la perturbation $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, alors les termes \mathbf{x}_n (respectivement \mathbf{y}_n) deviennent $\alpha^n\mathbf{x}_n$ (respectivement $\alpha^n\mathbf{y}_n$). Pour cette raison, on appellera *état d'ordre homogène n* le vecteur \mathbf{x}_n , ou plus simplement *état d'ordre n* .

Équation d'état. Considérons tout d'abord l'équation dynamique. En substituant le développement en série (4.11) dans (4.6a), et en regroupant les termes par ordre d'homogénéité, on trouve alors qu'un tel développement est *formellement* possible si les états d'ordre homogènes \mathbf{x}_n satisfont

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{r}_n(t) \quad (4.13)$$

pour tout $n \geq 1$, avec

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.14)$$

et

$$\mathbf{r}_n(t) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{L}(n)} \sum_{m \in \mathbb{M}_n(p,q)} \mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{x}_{m_1}(t), \dots, \mathbf{x}_{m_p}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(t)) \quad (4.15)$$

pour $n \geq 2$, et où les ensembles $\mathbb{L}(n)$ et $\mathbb{M}_n(p, q)$ sont données par

$$\mathbb{L}(n) = \{(p, q) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid 2 \leq p + q \leq n\}, \quad (4.16)$$

$$\mathbb{M}_n(p, q) = \{m \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket^p \mid m_1 + \dots + m_p = n - q\}. \quad (4.17)$$

L'ensemble $\mathbb{L}(n)$ permet de sélectionner toutes les fonctions multilinéaires $\mathbf{M}_{p,q}$ qui contribuent à l'ordre n , tandis que $\mathbb{M}_n(p, q)$ représente l'ensemble des combinaisons d'ordres homogène de l'état telles que leur produit soient d'ordre $n - q$. Le signal \mathbf{r}_n est donc homogène d'ordre n par rapport à l'entrée \mathbf{u} .

Puisque \mathbf{r}_n ne dépend que des états d'ordres m strictement inférieurs à n , on peut interpréter (4.13) comme l'équation dynamique d'une représentation d'état linéaire excitée par une entrée \mathbf{r}_n (pour une matrice de commande identité, i.e. $\mathbf{B} = \mathcal{I}_{\eta_x}$). La solution de (4.13) est alors donnée par

$$\mathbf{x}_n(t) = [\mathbf{W} * \mathbf{r}_n](t), \quad (4.18)$$

où l'on a noté

$$[\mathbf{W} * \mathbf{r}_n](t) = \int_{\mathbb{T}} \mathbf{W}(\tau) \mathbf{r}_n(t - \tau) d\tau \quad (4.19)$$

avec le filtre \mathbf{W} défini par

$$\mathbf{W}(t) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}t}, & \text{si } t \geq 0; \\ \mathbf{0}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.20)$$

Ainsi, la solution de (4.6a) s'écrit

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\mathbf{W} * \mathbf{r}_n](t). \quad (4.21)$$

Ce développement par ordre homogène sur \mathbf{u} correspond au développement en séries de Volterra (voir par exemple [Hélie et Laroche, 2014]).

On remarque dans l'écriture de la solution (4.18) que seule la matrice \mathbf{A} intervient dans « l'opérateur de mémoire » \mathbf{W} . La matrice \mathbf{B} et les fonctions $M_{p,q}$ n'agissent quant à elles que sous forme de combinaisons statiques entre l'entrée et les états d'ordre homogène. Cette observation permet de montrer que le système peut se réaliser sous la forme d'une structure récursive (voir Figure 4.1).

Équation de sortie. Considérons maintenant l'équation de sortie. De manière similaire à l'équation d'état, si l'on substitue le développement (4.12) dans (4.6b), et regroupe les termes par ordre d'homogénéité, on trouve alors qu'un tel développement est possible si les \mathbf{y}_n satisfont

$$\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{s}_n(t) \quad (4.22)$$

pour tout $n \geq 1$, avec

$$\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.23)$$

et

$$\mathbf{s}_n(t) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{L}(n)} \sum_{m \in \mathbb{M}_n(p,q)} \mathbf{N}_{p,q}(\mathbf{x}_{m_1}(t), \dots, \mathbf{x}_{m_p}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(t)). \quad (4.24)$$

On retrouve donc un développement similaire à celui de l'équation d'état. Mais comme l'équation de sortie ne contient pas de dynamique, elle peut se réaliser seulement à l'aide de combinaisons non linéaires statiques de l'entrée \mathbf{u} et des états d'ordre homogène \mathbf{x}_n ; cette structure est montrée en Figure 4.2 pour un système tronqué à l'ordre 3.

4.2.3 Exemple d'un système masse-ressort-amortissement non linéaire

Considérons le système mécanique décrit par l'équation de mouvement

$$m\ddot{x}(t) = -c\dot{x}(t) - k_1x(t) - k_2x^2(t) - k_3x^3(t) + f(t), \quad (4.25)$$

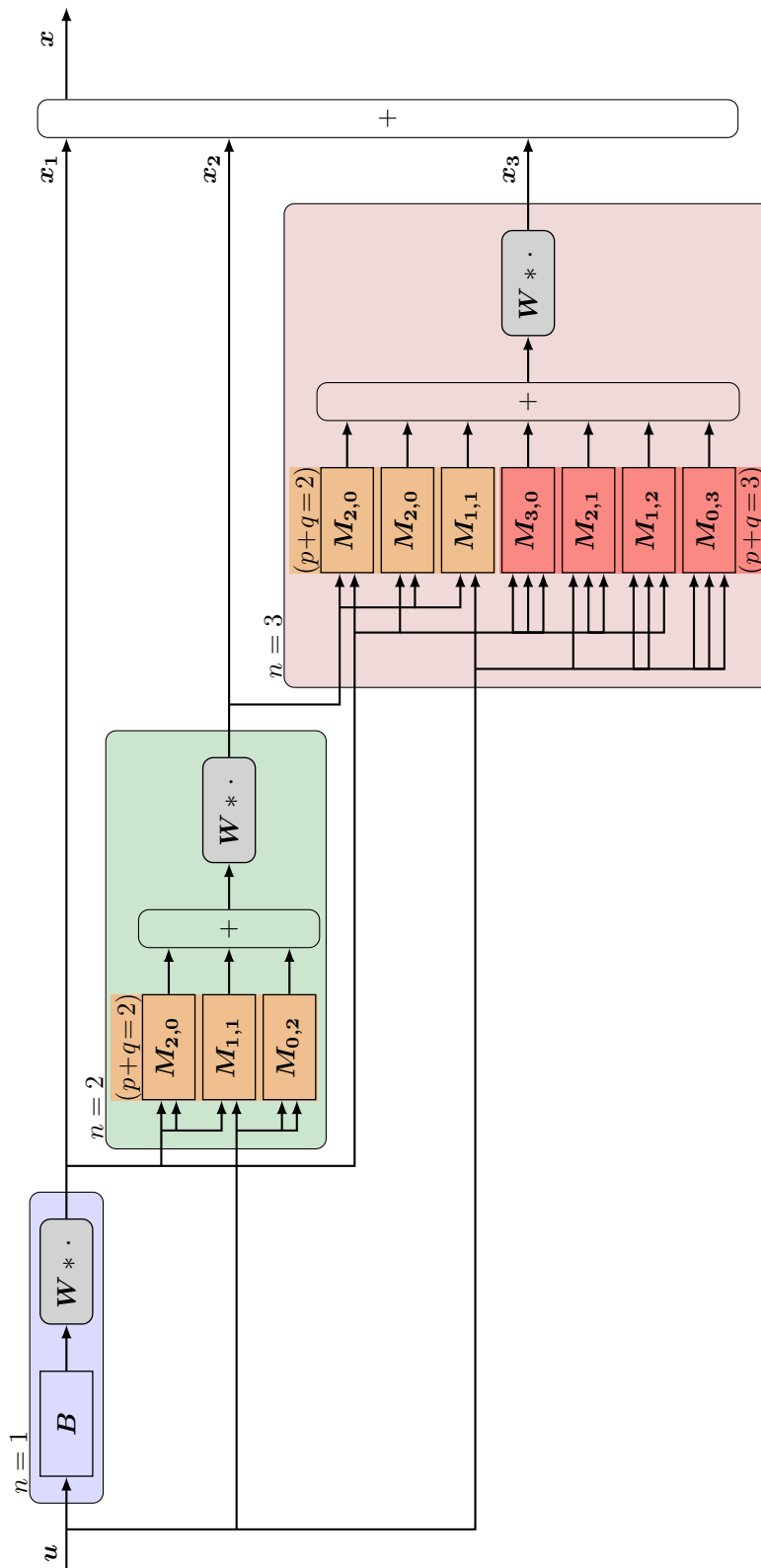


FIGURE 4.1 – Structure de réalisation tronquée à l'ordre 3 de l'équation d'état donnée par (4.6a).

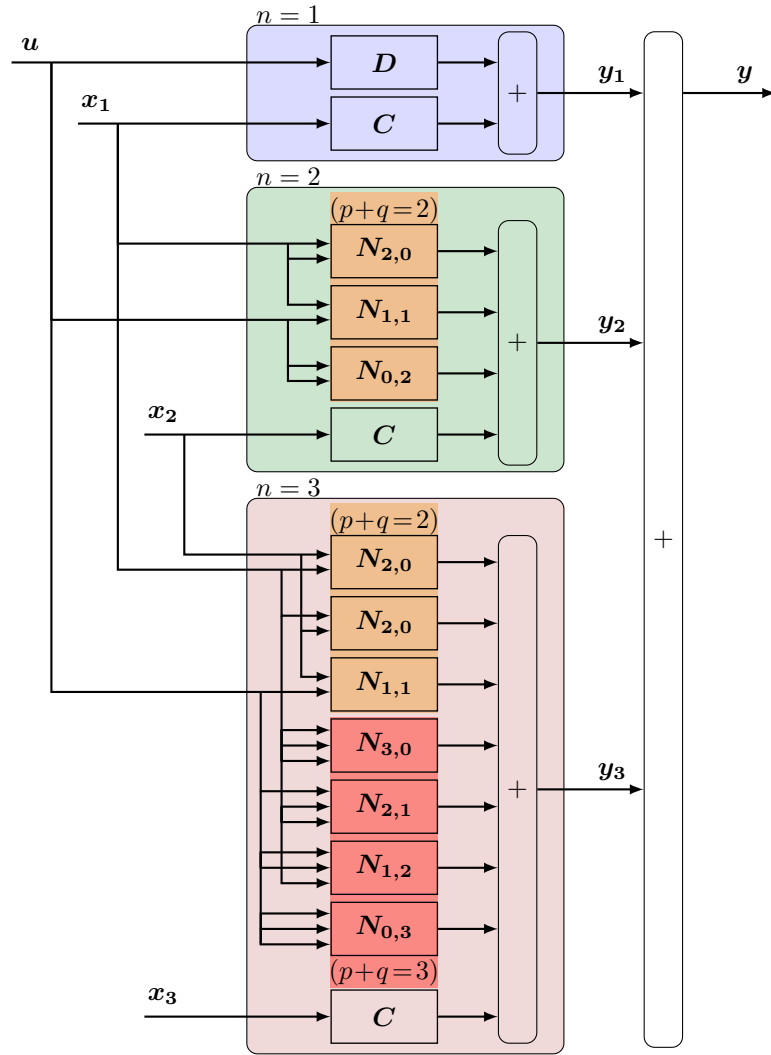


FIGURE 4.2 – Structure de réalisation tronquée à l'ordre 3 de l'équation de sortie donnée par (4.6b).

où m est la masse, c le coefficient d'amortissement, k_i les paramètres de raideur et f la force appliquée au système. En notant $\mathbf{u} = [f]$, $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$ et $\mathbf{y} = [x]$ les vecteurs correspondant respectivement à l'entrée, l'état et la sortie, la relation (4.25) s'écrit comme un modèle PNLSS avec

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) + \mathbf{K}_3(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)), \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t), \quad (4.26b)$$

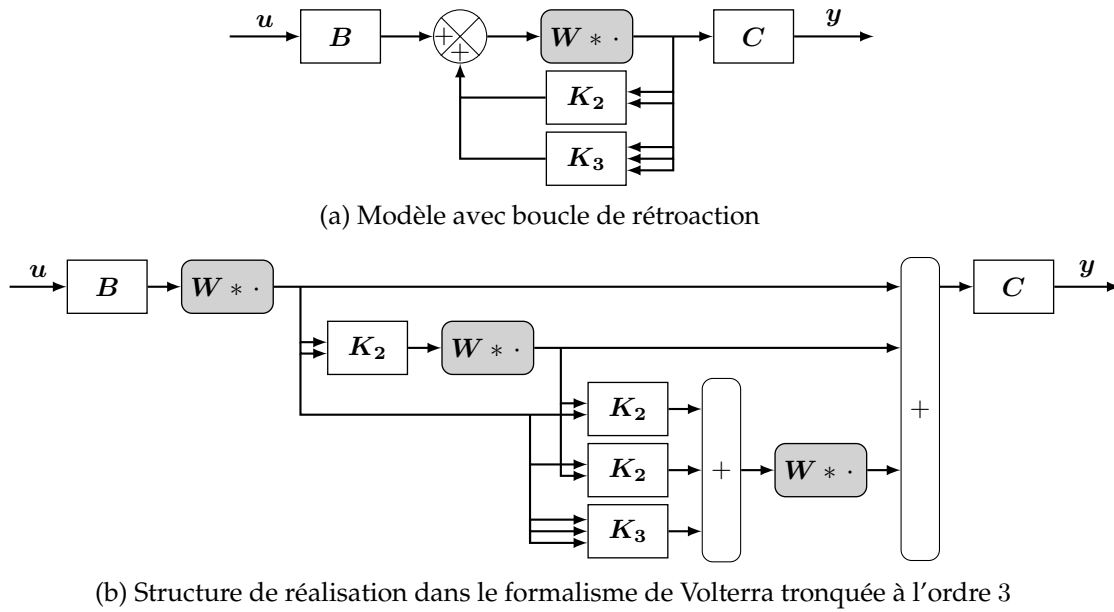


FIGURE 4.3 – Structures de réalisation exacte (haut) et tronquée à l'ordre 3 (bas) d'un système masse-ressort-amortissement non linéaire modélisée par la relation (4.26).

où les fonctions K_2 et K_3 — correspondant respectivement à des non-linéarités de type $M_{2,0}$ et $M_{3,0}$ — sont données par

$$K_2(a, b) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{m} [a]_0 [b]_0 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$K_3(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_3}{m} [a]_0 [b]_0 [c]_0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Le modèle exact (4.26) peut se schématiser à l'aide d'une boucle de rétroaction (voir Figure 4.3a). Mais l'on peut aussi représenter ce modèle dans le formalisme de Volterra en décomposant les états et la sortie à l'aide des décompositions en séries (4.13) et (4.22). Un autre schéma de réalisation est alors possible (voir Figure 4.3b), faisant apparaître une structure récursive sans rétroaction. Il est intéressant de noter que la réalisation donnée par la Figure 4.3b n'est pas exacte mais tronquée à l'ordre 3, alors même que le modèle (4.26) ne contient lui que des non-linéarités d'ordre 2 et 3. Cela est dû au déploiement de la boucle de rétroaction sur les ordres de non-linéarités.

De manière générale, tant qu'il existe une fonction $M_{p,q}$ non nulle avec $p \neq 0$, la dynamique inclut une infinité de contributions d'ordre homogène. Ainsi, la représentation du modèle PNLSS dans le formalisme de Volterra correspond à une série infinie. On peut aussi le comprendre à partir des relations (4.14) et (4.15) : dans ce cas, la série des termes r_n n'est pas finie — et par conséquent celle des ordres x_n et des sorties y_n non plus. À l'inverse, les fonctions $M_{0,q}$ et $N_{p,q}$ n'agissent que sur un seul ordre de la sortie, respectivement y_q et y_{p+q} .

4.2.4 Équivalence avec les modèles de type schéma-blocs

Les Figures 4.1 et 4.2 montrent comment l'utilisation du formalisme des séries de Volterra permet de réaliser un modèle PNLSS à l'aide seulement de filtres linéaires — W — et de fonctions statiques d'ordres homogènes — B, C, D et les fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$. Ce type de réalisation se rapproche des modèles dits en schéma-blocs (cf. § 1.1.3), que l'on peut voir comme des cas particuliers du modèle PNLSS.

Considérons le modèle de Hammerstein de type polynomial (cf. Figure 1.6 p. 28), constitué de plusieurs branches parallèles « puissance vers filtre », i.e.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [u^n * g_n](t). \quad (4.29)$$

Dans le formalisme PNLSS, ce modèle s'écrit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \sum_{q=2}^{+\infty} \mathbf{M}_{0,q}(\mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(t)), \quad (4.30a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (4.30b)$$

De même, le modèle de Wiener polynomial, constitué de plusieurs branches parallèles « filtre vers puissance », suit une relation de type

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [u * g_n]^n(t) \quad (4.31)$$

Dans le formalisme PNLSS, cette relation peut se réécrire

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \sum_{p=2}^{+\infty} \mathbf{N}_{p,0}(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t)). \quad (4.32b)$$

La structure de réalisation de ces deux modèles est donnée en Figure 4.4. On remarque que les schémas obtenus sont des cas particuliers de celui d'un modèle PNLSS général (voir Figures 4.1 et 4.2). De plus, si l'on compare avec la structure de réalisation obtenue pour un système masse-ressort-amortissement (voir Figure 4.3b), on remarque qu'elle ne correspond ni à un modèle de Hammerstein ni à celui de Wiener. Les méthodes d'identification développées spécifiquement pour ces deux modèles [Kibangou et Favier, 2009; Rébillat *et al.*, 2011] ne sont donc pas adaptées à un système décrit par des relations plus générales — i.e. dès que des non-linéarités sur l'état sont incluses dans l'équation dynamique, comme par exemple (4.26a).

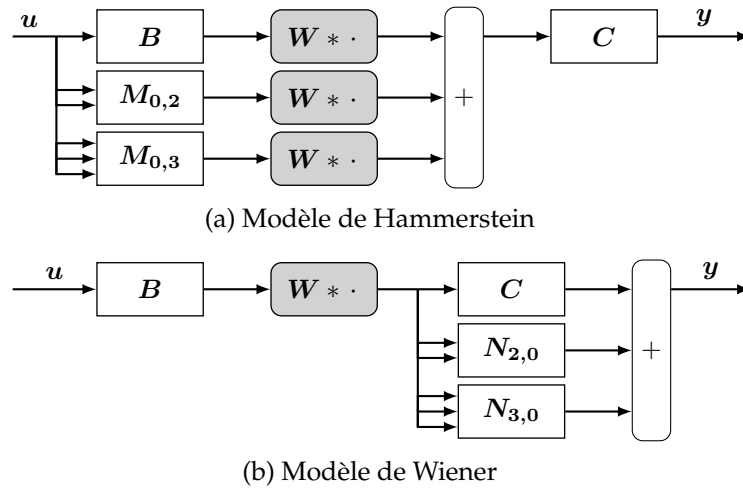


FIGURE 4.4 – Structures de réalisation tronquée à l'ordre 3 de différents modèles de type schéma-blocs polynomiaux.

4.3 MÉTHODE D'ESTIMATION ITÉRATIVE

Nous supposons maintenant que les ordres homogènes y_n de la sortie sont connus, par exemple par l'utilisation des méthodes de séparation d'ordres présentés⁴ au Chapitre 2. Il devient alors possible d'estimer une représentation d'état donnée par (4.6) de manière itérative, ce qui peut se résumer comme suit :

1. estimer les paramètre Θ_1 (i.e. les matrices A, B, C et D) à partir de y_1 ;
2. pour n allant de 2 à N , estimer les paramètre Θ_n (i.e. les fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ avec $p + q = n$) à partir de y_n et des paramètres précédemment estimés $\{\Theta_m\}_{m \in [1;n-1]}$;

L'intérêt de cette approche est double. Elle permet de tirer parti des méthodes d'estimation de représentation d'état linéaire déjà existantes, pour lesquelles de nombreux résultats et propriétés sont connus. De plus, comme nous allons le montrer par la suite, l'estimation des fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ se ramène à un problème de régression linéaire.

4.3.1 Estimation des matrices du système linéarisé

À partir des équations (4.18) et (4.22), la relation entrée-sortie du système linéarisé s'écrit

$$y_1(t) = C[W * Bu](t) + Du(t). \tag{4.33}$$

L'estimation des matrices de la représentation d'état (linéaire) à partir de la connaissance de u et y_1 est un problème qui a été très largement étudié, e.g.

4. Bien que ces méthodes n'aient pas été présentées dans le cadre de systèmes multi-entrées multi-sorties, nous gardons pour des principes de consistance la notation vectorielle u et y pour les signaux d'entrées et de sorties.

dans [Ljung, 1987]. Parmi les méthodes existantes, on peut citer par exemple la famille des *subspaces identification methods*⁵, adaptées au domaine soit temporel [Doyle, 1985; Viberg *et al.*, 1991] soit fréquentiel [McKelvey *et al.*, 1996], ou bien celle des *prediction error methods*⁶[Ljung, 1987, 2002]. Nous ne développons pas sur cette étape ici, et renvoyons le lecteur aux ouvrages cités.

4.3.2 Estimation des fonctions non linéaires

Dans cette section, nous nous intéressons à l'estimation des fonctions multi-linéaires $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ avec $p + q = n$ — i.e. de Θ_n — à partir de la connaissance de l'ordre y_n . On suppose donc connues les matrices de la partie linéaire de la représentation d'état ainsi que toutes les fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ tels que $p + q < n$. L'identification des fonctions multi-linéaires recherchées se fait alors deux étapes (détaillées ci-dessous) :

1. le calcul, à partir des paramètres déjà estimés, de la partie *non linéaire innovante* de l'ordre y_n , i.e. celle qui ne fait apparaître que les fonctions $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ recherchées ;
2. l'estimation des paramètres Θ_n en exprimant la partie *non linéaire innovante* de l'ordre y_n linéairement à partir des paramètres recherchés.

Dans la suite et pour des soucis de lisibilité, l'indice temporel est omis.

Calcul de la partie innovante de y_n . Intéressons-nous dans un premier temps à l'état d'ordre homogène n donnée par

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{W} * \mathbf{r}_n, \quad (4.34)$$

où le signal \mathbf{r}_n est décrit par (4.15). Puisque la matrice \mathbf{A} est connue, la matrice de filtres \mathbf{W} peut être calculé. D'autre part, le signal \mathbf{r}_n peut être séparé en deux termes distincts : un ne contenant que les paramètres déjà estimés, et l'autre dépendant ceux que l'on cherche. Autrement dit, on écrit

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^{(c)} + \mathbf{r}_n^{(i)} \quad (4.35)$$

où le terme connu $\mathbf{r}_n^{(c)}$ est donné par

$$\mathbf{r}_n^{(c)} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{L}(n-1)} \sum_{m \in \mathbb{M}_n(p,q)} M_{p,q}(\mathbf{x}_{m_1}, \dots, \mathbf{x}_{m_p}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \quad (4.36)$$

et le terme $\mathbf{r}_n^{(i)}$ contenant les innovations non linéaires d'ordre n est donné par

$$\mathbf{r}_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n M_{p,n-p}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}). \quad (4.37)$$

5. Ou *méthodes d'identification des sous-espaces*.

6. Ou *méthodes par erreur de prédiction*.

L'équation (4.36) ne faisant apparaître que des états \mathbf{x}_m d'ordre $m < n$, le signal peut être calculé à partir de la connaissance des paramètres déjà estimés.

Si l'on considère la sortie \mathbf{y}_n donnée par (4.22), la même séparation peut être faite pour le signal \mathbf{s}_n , i.e. on écrit

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n^{(c)} + \mathbf{s}_n^{(i)} \quad (4.38)$$

avec

$$\mathbf{s}_n^{(c)} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{L}(n-1)} \sum_{m \in \mathbb{M}_n(p,q)} N_{p,q}(\mathbf{x}_{m_1}, \dots, \mathbf{x}_{m_p}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{s}_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n N_{p,n-p}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}). \quad (4.40)$$

La sortie d'ordre n est donc donnée par

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n^{(c)} + \mathbf{s}_n^{(i)} \quad (4.41)$$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{W} * \mathbf{r}_n^{(c)} + \mathbf{W} * \mathbf{r}_n^{(i)}) + \mathbf{s}_n^{(c)} + \mathbf{s}_n^{(i)}. \quad (4.42)$$

On définit alors la *partie non linéaire innovante*, ou plus simplement *partie innovante*, de l'ordre \mathbf{y}_n par

$$\mathbf{y}_n^{(i)} = \mathbf{y}_n - \mathbf{s}_n^{(c)} - \mathbf{W} * \mathbf{r}_n^{(c)} \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{s}_n^{(i)} + \mathbf{C}\mathbf{W} * \mathbf{r}_n^{(i)}. \quad (4.44)$$

Puisque le filtre \mathbf{W} est connu, on peut montrer que $\mathbf{y}_n^{(i)}$ dépend linéairement des paramètres Θ_n à estimer.

Estimation des paramètres non linéaires d'ordre n . Nous utilisons maintenant la notation polynomiale des $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ introduite en (4.7), i.e.

$$M_{p,q}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_q(\eta_u)} \mathbf{m}_{p,q}^{(k,l)} \prod_{j=1}^p [\mathbf{x}]_{k_j} \prod_{j=1}^q [\mathbf{u}]_{l_j}, \quad (4.45)$$

$$N_{p,q}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_q(\eta_u)} \mathbf{n}_{p,q}^{(k,l)} \prod_{j=1}^p [\mathbf{x}]_{k_j} \prod_{j=1}^q [\mathbf{u}]_{l_j}. \quad (4.46)$$

Les coefficients vecteurs $\mathbf{m}_{p,q}^{(k,l)}$ et $\mathbf{n}_{p,q}^{(k,l)}$ correspondent aux paramètres recherchés. Alors, en notant

$$v_{k,l} = \prod_{j=1}^p [\mathbf{x}_1]_{k_j} \prod_{j=1}^q [\mathbf{u}]_{l_j}, \quad (4.47)$$

pour tout $(k, l) \in \mathbb{K}_p(\eta_x) \times \mathbb{K}_q(\eta_u)$, les définitions (4.37) et (4.40) se réécrivent respectivement

$$\mathbf{r}_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_{n-p}(\eta_u)} \mathbf{m}_{p,n-p}^{(k,l)} v_{k,l} \quad (4.48)$$

et

$$\mathbf{s}_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_{n-p}(\eta_u)} \mathbf{n}_{p,n-p}^{(k,l)} v_{k,l}. \quad (4.49)$$

La partie innovante de la sortie d'ordre n vaut donc

$$\mathbf{y}_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_p(\eta_x)} \sum_{l \in \mathbb{K}_{n-p}(\eta_u)} \mathbf{C}\mathbf{W} * \left(\mathbf{m}_{p,n-p}^{(k,l)} v_{k,l} \right) + \mathbf{n}_{p,n-p}^{(k,l)} v_{k,l}. \quad (4.50)$$

Dans cette relation, la matrice \mathbf{C} et le filtre \mathbf{W} sont connus. De plus, les signaux $v_{k,l}$ peuvent être calculés à partir du signal d'entrée, du filtre \mathbf{W} et de la matrice \mathbf{B} connus. Les seules inconnues sont les paramètres $\mathbf{m}_{p,n-p}^{(k,l)}$ et $\mathbf{n}_{p,n-p}^{(k,l)}$ recherchés. Comme la relation ne contient que des opérations linéaires — sommes et convolutions —, l'estimation de ces paramètres peut s'exprimer comme un problème de régression linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, où le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ regroupe tous les coefficients des $\mathbf{m}_{p,n-p}^{(k,l)}$ et $\mathbf{n}_{p,n-p}^{(k,l)}$, où la matrice de réponse \mathbf{Y} contient les parties innovantes de l'ordre $\mathbf{y}_n^{(i)}$, et où la matrice de prédicteurs \mathbf{X} contient tous les signaux $v_{k,l}$ et leurs versions filtrées par $\mathbf{C}\mathbf{W}$.

Remarque 4.1 (Estimation de la dimension de \mathbf{W} et questions de commandabilité/observabilité). Considérons un exemple illustratif simplifié. Soit un système de dimension 2 initialement au repos et de représentation d'état

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} f_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4.51a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t), \quad (4.51b)$$

avec $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ et où f_{nl} est une fonction strictement non linéaire — i.e. sans terme constant ni linéaire. Dans l'étape d'estimation des paramètres linéaires (cf. § 4.3.1), le système linéarisé $\dot{\mathbf{x}}_{\text{lin}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{lin}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}_{\text{lin}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_{\text{lin}}(t)$ a pour matrices de commandabilité \mathcal{C} et d'observabilité \mathcal{O} [Kailath, 1980]

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{A}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Les deux états sont observables (d'après \mathcal{O}), mais le deuxième état sera « invisible » car non excité à l'ordre 1 (d'après \mathcal{C}). En ce sens, la dimension de la matrice de filtres W sera (naturellement) estimée à 1 avec une méthode d'identification aveugle (appliquée à la sortie d'ordre y_{lin} séparée). Dans l'étape d'estimation des paramètres non linéaires, le deuxième état sera pourtant présent dans les sorties d'ordre $n \geq 2$ séparées car bien excité à travers f_{nl} . Il est d'ailleurs excité pour le système non linéaire complet (voir [Isidori, 2013] pour la commandabilité). Avec cet exemple, on voit que la dimension de la matrice des filtres peut être sous-estimée lors de la première étape.

Lorsque le modèle de la représentation d'état est connu (comme pour notre application au haut-parleur faite au [Chapitre 5](#)), ce problème ne se pose pas.

4.3.3 Exemple illustratif

Considérons l'exemple du système masse-ressort-amortisseur décrit précédemment (cf. § 4.2.3 p. 108). L'estimation de la partie linéaire revient à trouver les paramètres m , c et k_1 . Cela peut se faire par exemple en essayant de minimiser une erreur de reconstruction entre la fonction de transfert mesurée et le modèle

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k_1}. \quad (4.54)$$

Une fois que ces paramètres ont été estimés, il est possible de calculer la position d'ordre 1 donnée par

$$x_1(t) = \frac{1}{m}[h * u](t), \quad (4.55)$$

où h est la réponse impulsionnelle associée à la fonction de transfert (4.54). Or la sortie d'ordre 2 vaut

$$y_2(t) = x_2(t) = -\frac{k_2}{m}[h * x_1^2](t). \quad (4.56)$$

En notant $v_2 = -\frac{1}{m}[h * x_1^2]$, estimer le paramètre k_2 depuis y_2 selon le principe des moindres carrés revient à minimiser la fonction de coût

$$\mathcal{C}_2(k_2) = \int_{\mathbb{T}} (y_2(t) - k_2 v_2(t))^2 dt. \quad (4.57)$$

Puis, une fois k_2 connu, la partie innovante de l'ordre 3 s'écrit :

$$y_3^{(i)}(t) = y_3(t) + 2\frac{k_2}{m}[h * x_1 x_2](t), \quad (4.58)$$

$$= -\frac{k_3}{m}[h * x_1^3](t). \quad (4.59)$$

Le paramètre k_3 s'estime donc en minimisant

$$\mathcal{C}_3(k_3) = \int_{\mathbb{T}} \left(y_3^{(i)}(t) - k_3 v_3(t) \right)^2 dt, \quad (4.60)$$

où $v_3 = -\frac{1}{m}[h * x_1^3]$.

Cette méthode sera utilisée en [Chapitre 5](#) pour estimer les paramètres d'un haut-parleur électrodynamique à partir de mesures expérimentales.

4.4 AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS

Comme mentionné précédemment, l'intérêt de l'approche proposée pour l'estimation de modèle PNLSS est double. Tout d'abord, elle permet de tirer parti des travaux existants sur l'estimation de représentation d'état linéaire. Cette étape est cruciale, puisque c'est là que l'on va déterminer la dynamique du système (au travers de la matrice A), qui sera réutilisée dans le reste de la méthode pour estimer les états internes du système. De plus, l'estimation des paramètres des fonctions non linéaires $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$ est un problème de régression linéaire, ce qui rend la méthode simple à mettre en place. La seule difficulté d'implémentation réside dans la gestion de la combinatoire lors du calcul des parties innovantes des ordres homogènes et de la construction des signaux matrices du problème de régression.

Mais la méthode proposée souffre de plusieurs inconvénients, dû principalement à sa nature itérative. Celle-ci va tout d'abord entraîner une propagation de l'erreur à travers les ordres, limitant en pratique l'ordre maximal que l'on peut considérer. En effet, une erreur d'estimation des paramètres — linéaires ou non — va se propager sur le calcul des états d'ordre homogène et donc de la partie innovante des sorties d'ordre n . Cette erreur de reconstruction va fortement influencer l'estimation des paramètres non linéaires d'ordre n . De plus, la méthode proposée ne permet pas de gérer des différences d'amplitudes entre les ordres. Imaginons par exemple un système dont les ordres pairs sont peu présents. Leur séparation sera donc assez bruitée, ce qui entraîne une mauvaise estimation des paramètres non linéaires d'ordres pairs. Or ceux-ci sont utilisées lors de l'estimation des ordres supérieurs — pour retrancher leurs contributions dans la sortie. Ces mauvais paramètres vont donc entraîner une mauvaise estimation des paramètres non linéaires d'ordre impairs.

Au vu de ces remarques, il paraîtrait donc intéressant de combiner l'utilisation de la séparation avec des méthodes d'estimation de modèles PNLSS qui identifient tous les paramètres de manière simultanée — pour lesquelles le problème à résoudre n'est plus linéaire en les paramètres comme dans la méthode proposée. De telles approches existent, comme celle développée par Paduart dans ses travaux de thèse [Paduart, 2008; Paduart *et al.*, 2010]. Cette méthode repose sur le fait que, pour un modèle PNLSS à temps discret, le calcul du gradient de la sortie en fonction des paramètres peut se faire en simulant un système de type PNLSS. L'estimation des paramètres peut alors se faire en utilisant un algorithme de descente de gradient ainsi qu'une estimation initiale des paramètres.

Or les différents ordres de la série de Volterra correspondant à un modèle PNLSS peuvent eux aussi s'écrire comme un modèle PNLSS. Il serait donc possible d'utiliser la méthode développée dans [Paduart, 2008] à partir des ordres séparés à la place de la sortie totale. Par manque de temps, nous n'avons malheureusement pas pu essayer une telle approche pour la comparer à celle proposée en § 4.3.

Enfin, nous avons pu voir au § 3.4 qu'il était plus intéressant d'utiliser les signaux interconjugués ou homophases pour l'identification de noyaux de Volterra. Il serait donc aussi intéressant de voir si leur utilisation dans le cadre de l'estimation de modèles PNLSS est ici aussi plus pertinente que le choix des ordres homogènes. Cela nécessiterait une réécriture du modèle (4.6) sur une décomposition en signaux interconjugués des états et de la sortie. Bien qu'une telle décomposition ne devrait pas poser de problème — à part une complexification de la combinatoire —, il conviendrait d'étudier sa validité. L'utilisation des signaux homophases n'est pas adaptée à l'approche itérative décrite en § 4.3, puisque que les paramètres linéaires du modèle ne pourraient plus être estimés directement. Elle nécessite donc l'utilisation d'une méthode d'estimation conjointe.

— Deuxième partie —

Applications à des systèmes sonores

— Chapitre 5 —

Estimation des caractéristiques physiques d'un haut-parleur électrodynamique

PHONOGRAPHE, n. Un jouet irritant qui redonne vie à des bruits morts.

Ambrose Bierce, *The Devil's Dictionary*.

Ce chapitre s'intéresse à l'estimation des caractéristiques physiques non linéaires d'un haut-parleur électrodynamique. Ce travail a été effectué en collaboration avec Tristan Lebrun dans le cadre de sa thèse portant sur le contrôle des haut-parleurs.

5.1 INTRODUCTION

Les haut-parleurs sont des systèmes multi-physiques dont la fonction est de reproduire un champ acoustique cible déterminé par une tension électrique d'excitation. Ils sont constitués d'une membrane mobile, reliée à un bâti au moyen d'une suspension et d'un *spider*, et sur laquelle est fixée une bobine électrique; cette dernière est plongée dans un champ magnétique créé par un aimant (voir [Figure 5.1](#)).

Le fluctuation de la tension aux bornes de la bobine entraîne le déplacement de la membrane, de par l'apparition d'une force électromotrice due au champ magnétique (qui est créé par la fluctuation de courant). Les mouvements de la membrane sont à l'origine de vibrations acoustiques transmises au milieu aérien. L'utilisation de fortes amplitudes de tension génèrent des distorsions sonores qui ne sont pas désirables dans le cas d'une reproduction haute-fidélité. Ces distorsions sont dues à différents phénomènes non linéaires du transducteur, comme le comportement raidissant de la suspension ou la diminution du couplage électrodynamique bobine-aimant pour de forts déplacement de la membrane.

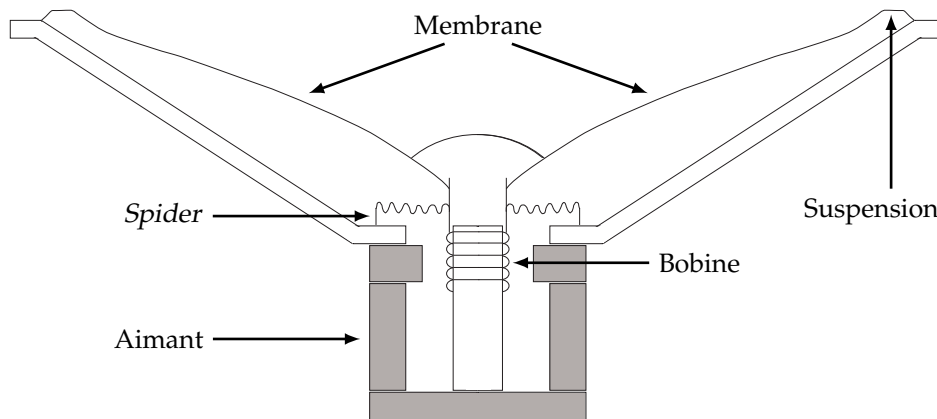


FIGURE 5.1 – Schéma constitutif d'un haut-parleur électrodynamique.

Une manière d'éliminer ces artefacts est de pré-distordre le signal électrique d'entrée du haut-parleur afin de compenser les distorsions inhérentes au système. Dans [Kaizer, 1987] par exemple, cette entrée est calculée à partir des formules d'inversion des séries de Volterra. Mais ce contrôle de type *feed-forward* nécessite un modèle réaliste du haut-parleur ainsi qu'une estimation précise des paramètres.

L'objectif de ce chapitre est d'estimer les paramètres physiques d'un haut-parleur dans le but, par exemple, de permettre son contrôle et restaurer un signal sonore de haute-fidélité. Pour cela, la méthode d'estimation de représentation d'état présentée au Chapitre 4 est utilisée. Le § 5.2 décrit le modèle considéré et les phénomènes non linéaires pris en compte. Le protocole expérimental est donné en § 5.3, et les résultats en § 5.4. Enfin, le § 5.5 conclut en présentant des pistes d'améliorations concernant principalement le modèle utilisé.

5.2 MODÈLE DE HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

5.2.1 Équations de Thiele & Small

Une approximation classique du comportement des haut-parleurs est donnée par le modèle paramétrique Thiele & Small [Thiele, 1971a,b; Small, 1972]. Cette représentation basse-fréquence repose sur la modélisation

- de la partie électrique comme un système résistance-bobine, dont le comportement est régi par les lois de Kirchhoff;
- de la partie mécanique comme un système masse-ressort-amortisseur unidimensionnel, dont le comportement est régi par la seconde loi de Newton;
- du couplage électrodynamique à l'aide d'une force électromotrice (de La-

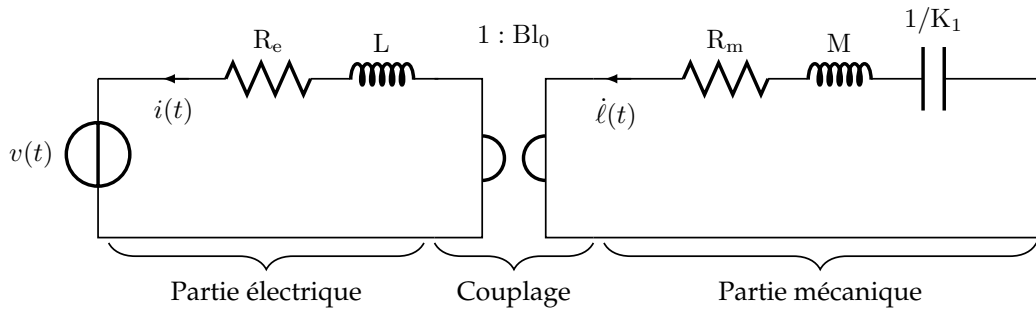


FIGURE 5.2 – Schéma électrique équivalent des équations de Thiele & Small données par (5.1).

place) agissant sur la membrane et d’une tension électrique contreélectromotrice ajoutée au circuit électrique.

Ce modèle linéaire simplifié assimile les effets acoustiques (rayonnement et présence d’une enceinte) à une masse et une raideur qui sont fusionnées avec les paramètres mécaniques du haut-parleur.

Notons v la tension d’excitation aux bornes du haut-parleur, i le courant dans le circuit électrique et ℓ la position de la membrane. Les équations de Thiele & Small s’écrivent alors

$$v(t) = R_e i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + Bl \dot{\ell}(t), \quad (5.1a)$$

$$M \ddot{\ell}(t) = -R_m \dot{\ell}(t) - K \ell(t) + Bl i(t), \quad (5.1b)$$

où :

- R_e est l’impédance du circuit électrique (en Ω);
- L est l’inductance de la bobine (en H);
- Bl est le facteur de couplage électrodynamique (en N/A);
- M est la masse de la membrane (en kg);
- R_m est le coefficient d’amortissement de la membrane (en kg/s);
- K est la raideur de la suspension (en kg/s²).

Le schéma électrique équivalent des équations de Thiele & Small est donné dans la [Figure 5.2](#).

5.2.2 Phénomènes non linéaires

Les relations (5.1) sont linéaires, et ne peuvent donc capturer les phénomènes à l’origine des distorsions. Pour cela, nous considérons dans cette thèse les deux phénomènes non linéaires qui prédominent dans la dynamique du haut-parleur [Klippel, 1992] : l’aspect raidissant de la suspension ainsi que la dépendance du couplage électrodynamique à la position de la membrane.

Suspension raidissante. Dans le modèle de Thiele & Small, la force de rappel due à la suspension est modélisée par la relation linéaire

$$f_{\text{rappel}}(\ell) = K \ell . \quad (5.2)$$

Or en pratique cette force est raidissante : plus l'excursion de la membrane est grande, plus le rapport $f_{\text{rappel}}(\ell)/\ell$ est important. Ce phénomène est causé par les propriétés physiques du matériau de la membrane, ainsi que par sa géométrie. Afin de pouvoir utiliser le formalisme des séries de Volterra, nous modélisons cette non-linéarité par un polynôme de degré N_k , i.e.

$$f_{\text{rappel}}(\ell) = \sum_{n=1}^{N_k} K_n \ell^n . \quad (5.3)$$

Le terme de degré nul n'est pas pris en compte car nous supposons que la force de rappel est nulle à la position d'équilibre de la membrane $\ell_0 = 0$. Pour que la force de rappel soit physiquement sensée — i.e. dérive d'une énergie potentielle positive —, il est nécessaire que son expression vérifie $\int_0^\ell f_{\text{rappel}}(l) dl \geq 0$ (i.e. $\sum_{n=1}^{N_k} \frac{K_n}{n+1} \ell^{n+1} \geq 0$) pour toute position ℓ (ou *a minima* sur la plage de valeurs $[\ell_{\min}, \ell_{\max}]$ couverte par les mesures).

Couplage électrodynamique. Le terme de couplage électrodynamique modélise dans quelle proportion le courant électrique (respectivement la vitesse de la membrane) induit une force électromotrice (resp. une tension contreélectromotrice) sur la membrane (resp. dans le circuit électrique). Dans le modèle de Thiele & Small, ce facteur est considéré constant. Or le couplage électrodynamique va dépendre de la position relative entre la bobine et l'aimant (et donc de la valeur de la position de la membrane ℓ).

En effet, considérons un aimant (ou plus exactement l'entrefer dans lequel règne un champ magnétique supposé quasi-uniforme et constant) de taille similaire à la bobine. Lorsque la membrane s'écarte de sa position d'équilibre, la proportion de la bobine plongée dans la partie uniforme et constante du champ magnétique diminue, ce qui entraîne un affaiblissement du couplage électrodynamique. Ce couplage tend vers zéro lorsque la position ℓ tend vers l'infini. Un tel comportement est souvent localement approché par une fonction de type gaussienne. Pour pallier ce phénomène non linéaire, des constructeurs de haut-parleurs utilisent des aimants et bobines de tailles très différentes¹. Cela permet d'avoir, pour une plage de déplacement ℓ donnée, une quantité de fils de la bobine plongé dans le champ magnétique de l'aimant toujours identique, et donc

1. Ces configurations, nommées *underhung coil* — lorsque la bobine est plus petite que l'aimant — et *overhung coil* — lorsque la bobine est plus grande que l'aimant —, ont des caractéristiques de couplage électrodynamique assez proches sur la plage d'excursion normale, mais leur sensibilité (i.e. la plage fréquentielle où on peut les considérer comme des transducteurs idéaux) diffèrent grandement à cause de la différence de poids de l'appareillage mobile bobine-membrane.

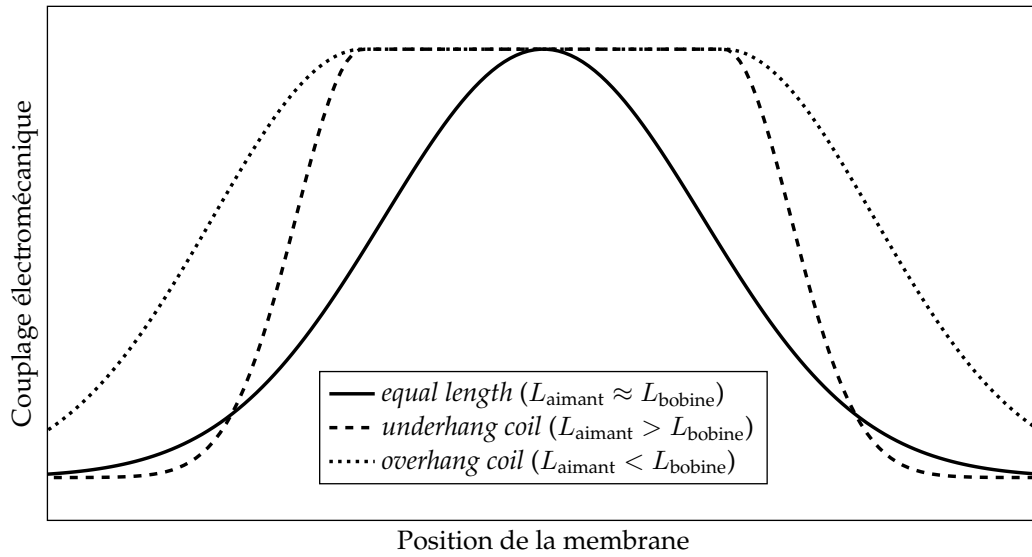


FIGURE 5.3 – Évolution du couplage électrodynamique en fonction de la position de la membrane pour plusieurs relations entre taille d’aimant L_{aimant} et taille de bobine L_{bobine} .

de conserver un couplage quasi-constant. La [Figure 5.3](#) montre des comportements typiques du couplage électrodynamique pour plusieurs configurations de haut-parleur. Dans cette thèse, et afin de pouvoir utiliser le formalisme des séries de Volterra, nous modélisons ce couplage par un polynôme de degré $N_{Bl} - 1$ (correspondant à des non-linéarités allant jusqu’à l’ordre N_{Bl}), i.e.

$$\text{Bl}(\ell) = \sum_{n=0}^{N_{Bl}-1} \text{Bl}_n \ell^n. \quad (5.4)$$

Pour que le couplage soit physiquement sensé, il est nécessaire que son expression vérifie $\text{Bl}(\ell) \geq 0$ pour toute position ℓ (ou *a minima* sur la plage de valeurs $[\ell_{\min}, \ell_{\max}]$ couverte par les mesures). Il est important de noter que le terme de couplage d’ordre n induit une non linéarité d’ordre $n + 1$: le terme constant Bl_0 correspond au comportement linéaire du haut-parleur, Bl_1 au comportement quadratique, etc.

En prenant en compte ces deux phénomènes non linéaires, les équations de Thiele & Small deviennent

$$v(t) = R_e i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + \text{Bl}(\ell) \dot{\ell}(t), \quad (5.5a)$$

$$M \ddot{\ell}(t) = -R_m \dot{\ell}(t) - f_{\text{rappel}}(\ell) + \text{Bl}(\ell) i(t), \quad (5.5b)$$

où les termes $f_{\text{rappel}}(\ell)$ et $\text{Bl}(\ell)$ sont donnés respectivement par (5.3) et (5.4).

5.2.3 Modèle sous forme de représentation d'état

Afin d'utiliser la méthode d'estimation proposée au [Chapitre 4](#), on établit un modèle de type PNLSS du haut-parleur. Les expériences ont été effectuées en contrôlant le haut-parleur en tension et en mesurant la position et le courant résultant. Nous utilisons donc un modèle d'entrée $\mathbf{u} = [v]$ et de sortie $\mathbf{y} = [i \ \ell]^T$. De plus, nous supposons que les non-linéarités sont de degré N , i.e. que $N_k = N_{Bl} + 1 = N$.

Considérons le vecteur d'état

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ \ell \\ \dot{\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Les équations (5.5) permettent alors d'écrire la représentation d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L} & 0 & -\frac{Bl_0}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{Bl_0}{M} & -\frac{K_1}{M} & -\frac{R_m}{M} \end{bmatrix}}_{=A} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} \mathbf{u}(t) + \sum_{n=2}^N \mathbf{M}_{n,0}(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t)), \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \mathbf{x}(t), \quad (5.7b)$$

où les fonctions non linéaires $\mathbf{M}_{n,0}$ sont données par

$$\mathbf{M}_{n,0}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=[i \ \ell \ \dot{\ell}]^T} = K_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M} \ell^n \end{bmatrix} + Bl_{n-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \ell^{n-1} \dot{\ell} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \ell^{n-1} i \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Les équations (5.7) correspondent bien à un modèle de type PNLSS. La méthode d'estimation présentée en [§ 4.3](#) peut donc être appliquée.

5.3 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL

5.3.1 Mesures

Banc expérimental. Le haut-parleur étudié est un modèle 3 pouces du constructeur [SICA loudspeakers®], que l'on insère dans une enceinte fermée². Il est

2. Les paramètres constructeurs sont indiqués plus loin en [Tableau 5.1](#) p. 140. Il est à noter que les masse, amortissement et raideur du modèle de Thiele & Small équivalent sont à modifier du fait du conditionnement du haut-parleur inséré dans une enceinte.

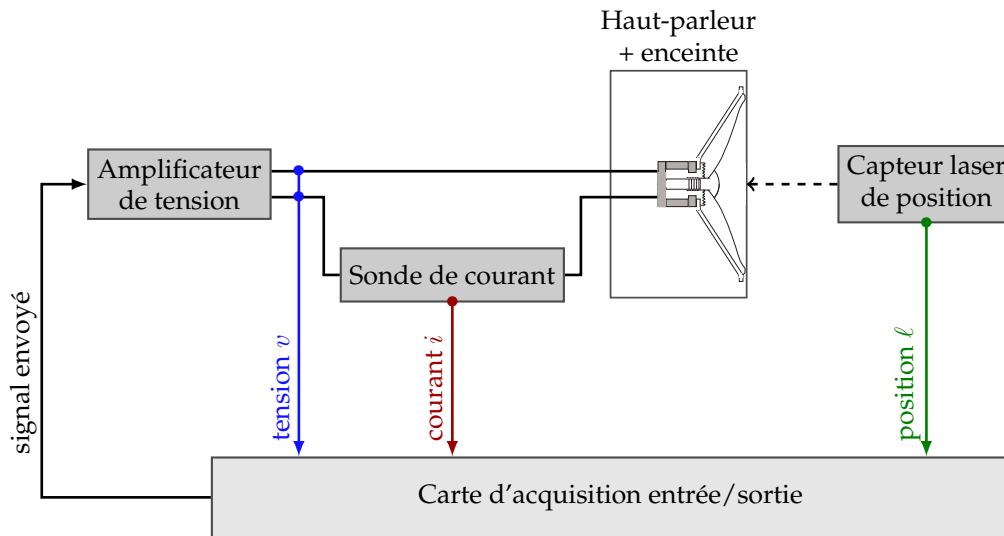


FIGURE 5.4 – Schéma du banc expérimental.

contrôlé en tension à l'aide d'un amplificateur de tension (modèle LPA05 [Newtons4th Ltd]) et équipé d'une sonde de courant (LTS 6-NP [LEM[®]]) et d'un capteur laser de position (LK-H050 [Keyence]). Les mesures sont effectuées à l'aide d'une carte d'acquisition numérique (MicroLabBox [dSPACE]). Le banc expérimental est schématisé en Figure 5.4.

Signaux d'excitations. Puisque la représentation (5.7) dérivée des équations de Thiele & Small est une approximation basse-fréquence du comportement du haut-parleur, on se limite pour les mesures à une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 10$ kHz. Deux types de signaux d'excitations sont utilisées, avec chacun une amplitude allant de -6 à 6 V — ce qui conduit le haut-parleur à des excursions de la membrane supérieure au régime linéaire spécifiée par le constructeur.

Le premier est une sinusoïde, utilisé pour illustrer les différentes étapes de l'estimation ainsi que pour évaluer qualitativement la séparation d'ordres. Sa fréquence est fixée à 40 Hz, où l'on peut observer l'apparition de non-linéarités pour des amplitudes de tension modérées.

Le second est un *sweep* (ou sinus glissant) de durée $T = 1.5$ s et dont la fréquence évolue exponentiellement entre 5 et 2000 Hz. Ce signal est celui utilisé pour l'estimation des paramètres.

Séparation en ordres homogènes. Afin de séparer les sorties d'ordres homogènes, la méthode PAS est utilisée. L'ordre de troncature est choisi à $N = 5$; les trois amplitudes nécessaires à la méthode sont fixées à l'aide de la formule (2.63) (voir p. 65), ce qui donne l'ensemble d'amplitudes $\{1, \cos(\pi/5), \cos(2\pi/5)\}$. Le

nombre de phases utilisées³ est de $P = 40$. Le nombre total de signaux nécessaires à la séparation est donc de $K = 120$. Cela correspond à une durée totale de mesures de presque 3 min pour le sinus glissant⁴.

5.3.2 Estimation des paramètres physiques

Termes linéaires. D'après le modèle (5.7), les fonctions de transfert de la tension vers les ordres linéaires du courant et de la position sont données par

$$H_{i_1/v}(s) = \frac{M s^2 + R_m s + K_1}{Q(s)}, \quad (5.9)$$

$$H_{\ell_1/v}(s) = \frac{Bl_0}{Q(s)}, \quad (5.10)$$

où le dénominateur (commun à $H_{i_1/v}$ et $H_{\ell_1/v}$) vaut

$$Q(s) = ML s^3 + (MR_e + LR_m)s^2 + (Bl_0^2 + R_e R_m + K_1 L)s + R_e K_1. \quad (5.11)$$

Une fois que les ordres homogènes de la sortie ont été séparés, les fonctions de transfert $\tilde{H}_{i_1/v}$ et $\tilde{H}_{\ell_1/v}$ sont estimées à partir des mesures de la tension v et des ordres linéaires i_1 et ℓ_1 . Ensuite, les paramètres linéaires — i.e. R_e , L , Bl_0 , M , R_m et K_1 — sont trouvés en minimisant la fonction de coût

$$\begin{aligned} C(\Theta) = \sum_k \left[\left(\frac{20 \log_{10} \left(\left| \tilde{H}_{i_1/v}(s_k) \right| / \left| H_{i_1/v}(s_k) \right| \right)}{20 \log_{10} \left(\left| H_{i_1/v}(s_k) \right| \right)} \right)^2 \right. \\ + \left(\frac{20 \log_{10} \left(\left| \tilde{H}_{\ell_1/v}(s_k) \right| / \left| H_{\ell_1/v}(s_k) \right| \right)}{20 \log_{10} \left(\left| H_{\ell_1/v}(s_k) \right| \right)} \right)^2 \\ + \left(\frac{\arg \tilde{H}_{i_1/v}(s_k) - \arg H_{i_1/v}(s_k)}{\arg H_{i_1/v}(s_k)} \right)^2 \\ \left. + \left(\frac{\arg \tilde{H}_{\ell_1/v}(s_k) - \arg H_{\ell_1/v}(s_k)}{\arg H_{\ell_1/v}(s_k)} \right)^2 \right], \quad (5.12) \end{aligned}$$

où $\Theta = \{R_e, L, Bl_0, M, R_m, K_1\}$, $s_k = j2\pi f_k$, et avec la somme sur k telle que les fréquences f_k soient comprises entre 5 et 2000 Hz — i.e. le support fréquentiel du signal d'excitation. L'expression de cette fonction de coût a été choisie pour répondre aux critères suivants :

- prendre en compte à la fois l'amplitude et la phase des fonctions de transfert ;

3. Ce choix a été dicté par la capacité mémoire de la carte d'acquisition utilisée.

4. En prenant en compte 0.15 s de silence entre chaque signal test pour laisser le haut-parleur retourner à l'état d'équilibre.

- prendre en compte l'amplitude sur une échelle logarithmique (ici en décibels);
- prendre en compte avec le même poids les deux fonctions de transfert $H_{i_1/v}$ et $H_{\ell_1/v}$.

L'utilisation de cette fonction de coût a permis d'obtenir de meilleurs résultats par rapport à une fonction de coût quadratique. D'autres fonctions de coût répondant à nos critères auraient pu être choisies, e.g. celle présentée dans [Hélie et Matignon, 2006].

Le coût (5.12) est minimisé à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, où le gradient est approximé numériquement. Les valeurs utilisées pour initialiser la descente de gradient sont celles données par le constructeur.

Termes non linéaires. Une fois les paramètres linéaires connus, les paramètres non linéaires sont estimés en utilisant la méthode décrite en § 4.3. Pour cela, la partie innovante de la sortie est calculée par

$$\begin{bmatrix} i_n^{(i)} \\ \ell_n^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_n \\ \ell_n \end{bmatrix} - \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{m \in \mathbb{M}_n(p,0)} \mathbf{C}\mathbf{W}^d * \mathbf{M}_{n,0}(\mathbf{x}_{m_1}, \dots, \mathbf{x}_{m_p}), \quad (5.13)$$

où l'indice temporel a été omis pour des raisons de lisibilité, et avec \mathbf{W}^d la version discrétisée (par exemple ici par la transformée bilinéaire⁵) du filtre \mathbf{W} donnée par $\mathbf{W}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ pour $t \geq 0$. Pour rappel, la définition de l'ensemble $\mathbb{M}_n(p, q)$ est donnée par (4.17) p. 107. La partie innovante de la sortie s'exprime alors

$$\begin{bmatrix} i_n^{(i)} \\ \ell_n^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_n \begin{bmatrix} i_n^{(\mathbf{K}_n)} \\ \ell_n^{(\mathbf{K}_n)} \end{bmatrix} + \mathbf{Bl}_{n-1} \begin{bmatrix} i_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})} \\ \ell_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

avec

$$\begin{bmatrix} i_n^{(\mathbf{K}_n)} \\ \ell_n^{(\mathbf{K}_n)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{W} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\mathbf{M}} \ell_1^n \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} i_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})} \\ \ell_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{W} * \begin{bmatrix} \frac{-1}{\mathbf{L}} \ell_1^{n-1} \dot{\ell}_1 \\ 0 \\ \frac{1}{\mathbf{M}} \ell_1^{n-1} i_1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Une fois les signaux $i_n^{(\mathbf{K}_n)}$, $\ell_n^{(\mathbf{K}_n)}$, $i_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})}$ et $\ell_n^{(\mathbf{Bl}_{n-1})}$ calculés — à l'aide des paramètres linéaires déjà estimés —, l'estimation des paramètres \mathbf{K}_n et \mathbf{Bl}_{n-1} se fait

5. Pour rappel, la transformée bilinéaire consiste à remplacer la variable de Laplace s par $s(z) = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, où T est la période d'échantillonnage.

en résolvant le système linéaire

$$\begin{bmatrix} i_n^{(i)}(0) \\ \ell_n^{(i)}(0) \\ \vdots \\ i_n^{(i)}(L-1) \\ \ell_n^{(i)}(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_n^{(K_n)}(0) & i_n^{(Bl_{n-1})}(0) \\ \ell_n^{(K_n)}(0) & \ell_n^{(Bl_{n-1})}(0) \\ \vdots & \vdots \\ i_n^{(K_n)}(L-1) & i_n^{(Bl_{n-1})}(L-1) \\ \ell_n^{(K_n)}(L-1) & \ell_n^{(Bl_{n-1})}(L-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_n \\ Bl_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

où L est la longueur des signaux.

5.4 RÉSULTATS

5.4.1 Signaux

Signaux mesurés. La [Figure 5.5](#) montre les signaux mesurés de tension, courant et position pour l'excitation sinusoïdale. On remarque à partir de la forme temporelle de la position et du courant que, pour ce niveau d'excitation, le système présente des distorsions non négligeables.

Si l'on s'intéresse maintenant aux signaux mesurés dans le cas du sweep (voir [Figure 5.6](#)), on peut observer le comportement fréquentiel habituel d'un haut-parleur. Le système de type admittance (tension vers courant) agit comme un coupe-bande centré en une fréquence d'anti-résonance correspondant approximativement à l'instant $t = 0.8$ s. Le système tension vers position agit quant à lui plutôt comme un passe-bas résonant, dont la fréquence de coupure correspond à l'anti-résonance de l'admittance.

Ordres séparés. Les [Figures 5.7](#) et [5.8](#) montrent respectivement le signal temporel et le spectre d'amplitude des ordres séparés dans le cas de l'excitation sinusoïdale.

On remarque premièrement une grande différence d'amplitude entre les ordres pairs et impairs : la sortie quadratique est approximativement 25 dB en dessous de la partie linéaire (pour le courant et la tension), et l'atténuation montre à plus de 30 dB pour l'ordre 4 de la position. Cette différence est due aux propriétés de quasi-symétrie des caractéristiques non linéaires. La force de rappel est principalement une fonction impaire de l'élongation ℓ , et donc dominée par ses ordres impairs. Le couplage électrodynamique étant un phénomène quasi-symétrique par rapport à la position d'équilibre, la fonction $\ell \mapsto Bl(\ell)$ a une partie paire largement dominante. Ainsi, les coefficients pairs de son expansion polynômiale sont prédominants. Mais comme ceux-ci sont toujours liés à des produits $\ell^n i$ ou $\ell^n \dot{\ell}$ d'ordre homogène $n+1$ impair (pour n pair), le couplage participe donc lui aussi principalement aux non-linéarités d'ordre impair.

De plus, si l'on regarde les spectres des ordres pairs sur la [Figure 5.8](#), on peut voir que ces signaux contiennent des harmoniques impairs d'amplitudes

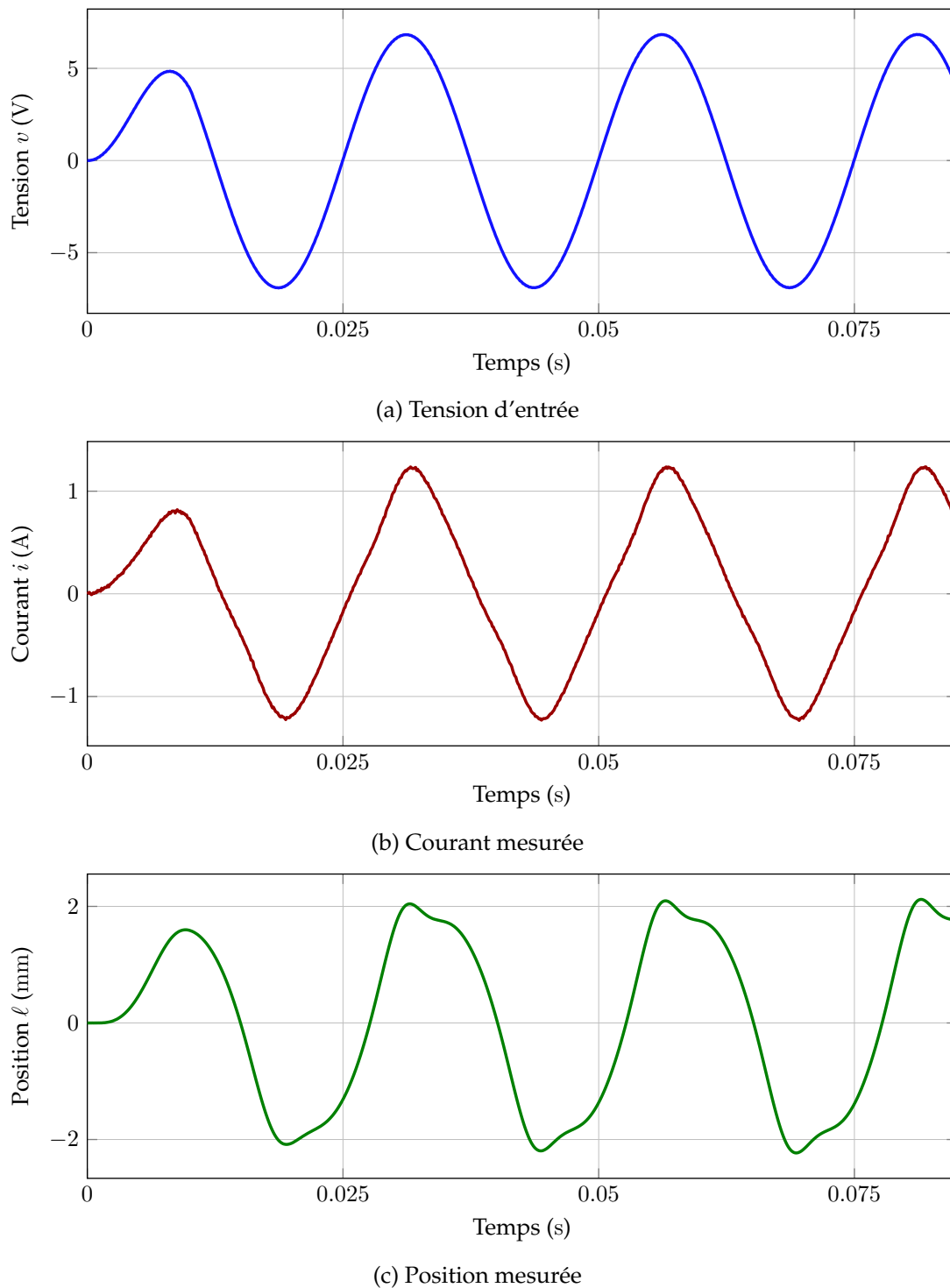
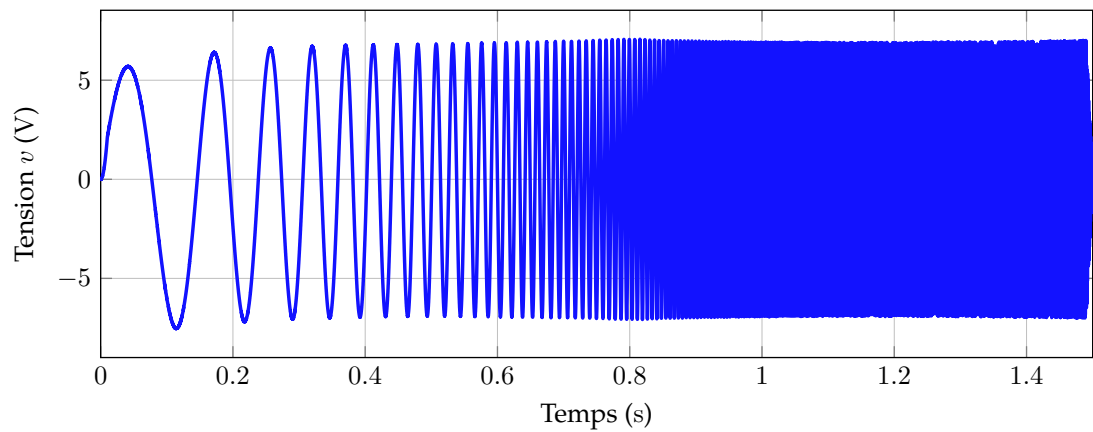
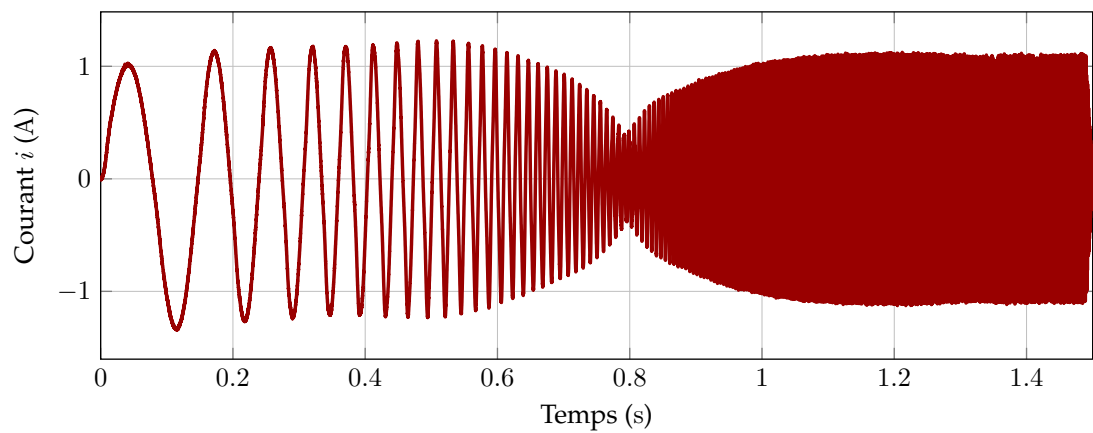


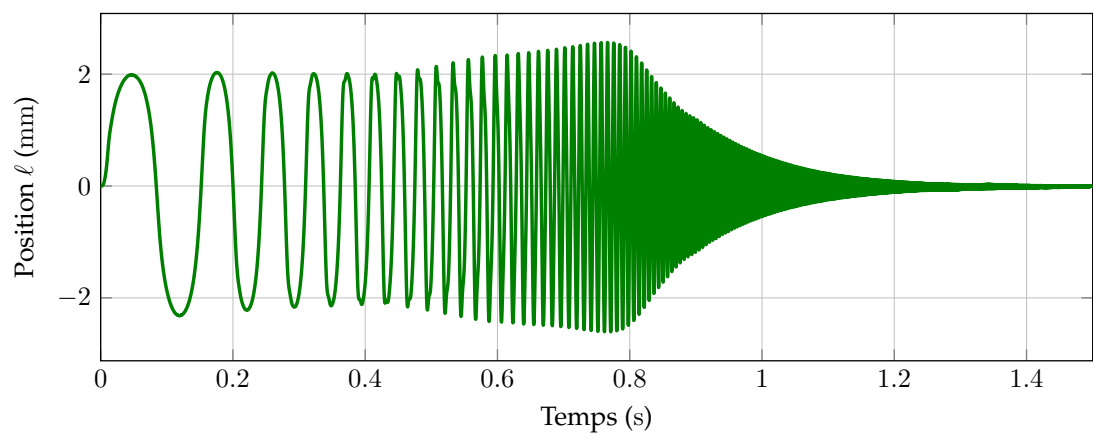
FIGURE 5.5 – Mesures de la tension (haut), du courant (milieu) et de la position (bas) du haut-parleur excité en tension par une sinusoïde de fréquence 40 Hz; seules les trois premières périodes sont montrées.



(a) Tension d'entrée



(b) Courant mesurée



(c) Position mesurée

FIGURE 5.6 – Mesures de la tension (haut), du courant (milieu) et de la position (bas) du haut-parleur excité en tension par un sinus glissant (allant de 5 à 2000 Hz).

5.4. RÉSULTATS

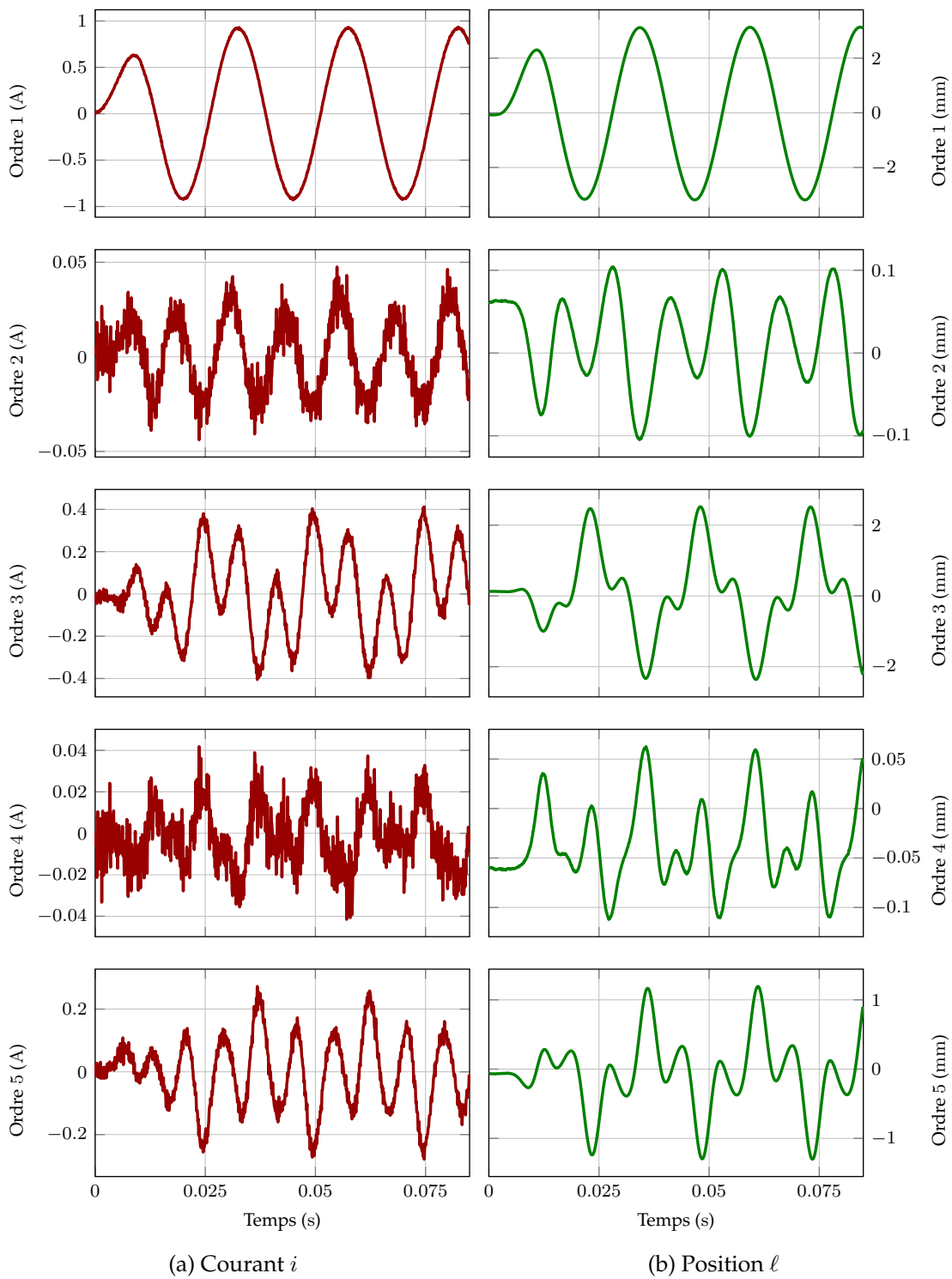


FIGURE 5.7 – Signaux temporels des ordres homogènes séparés du courant (gauche) et de la position (droite) du haut-parleur excité en tension par une sinusoïde de fréquence 40 Hz; seules le début du signal correspondant aux trois premières périodes du signal d’excitation sont montrés.

modestes. Ces artefacts sont dus à un choix d'ordre de troncature trop petit combinés aux propriétés de repliement d'ordre de la séparation basée sur la phase (cf. § 2.4.3 52).

Enfin, l'étude des ordres séparés fait apparaître d'autres artefacts dus aux mesures. On peut observer la présence d'un bruit assez important sur les ordres pairs du courant, dû à un faible rapport Signal-sur-Bruit du capteur utilisé. Pour la position, l'étude des spectres des ordres pairs laisse apparaître la présence d'un pic à 50 Hz; celui-ci est une perturbation due au champ électrique ambiant que nous n'avons pas réussi à éliminer.

L'étude des ordres séparés dans le cas du sweep (cf. Figure 5.9) amène aux mêmes conclusions (ordre pairs faibles, courant bruité). De plus, on remarque sur les signaux de courant que les effets non linéaires prédominent aux alentours de l'anti-résonance, ou plus exactement juste avant et après. Pour la position, les non-linéarités sont globalement plus prononcées en basses fréquences.

5.4.2 Paramètres estimés

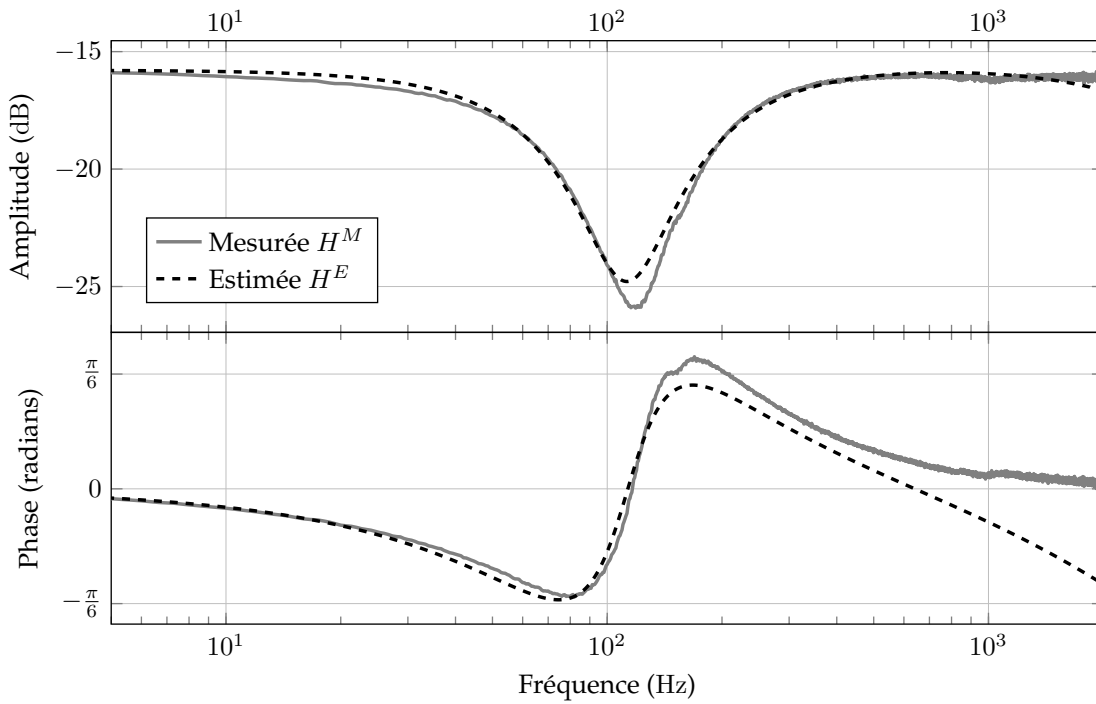
Paramètres linéaires. La Figure 5.10 montre les fonctions de transfert H^M mesurés à partir des signaux séparés et H^E calculés à partir des paramètres estimés. On y observe bien les comportements anti-résonant (tension vers courant) et passe-bas (tension vers position). Les fonctions de transfert paramétriques H^E sont assez proches des H^M mesurées à partir des sorties linéaires.

Les différences observées sont de plusieurs types. Sur la fonction de transfert tension vers courant estimé H^E , l'amplitude du pic d'anti-résonance est sous-estimée (comparé à H^M). De plus, on peut voir en hautes fréquences une faible différence de pente entre l'amplitude mesurée (une pente quasi-constante) et celle estimée (une pente négative, en accord avec le modèle), ainsi qu'un décalage en phase qui s'accroît avec la fréquence. Ces observations laissent à penser que le modèle électrique pourrait être améliorée en hautes fréquences, en considérant par exemple l'effet des courants de Foucault [Brunet et Shafai, 2014; King et Agerkvist, 2017].

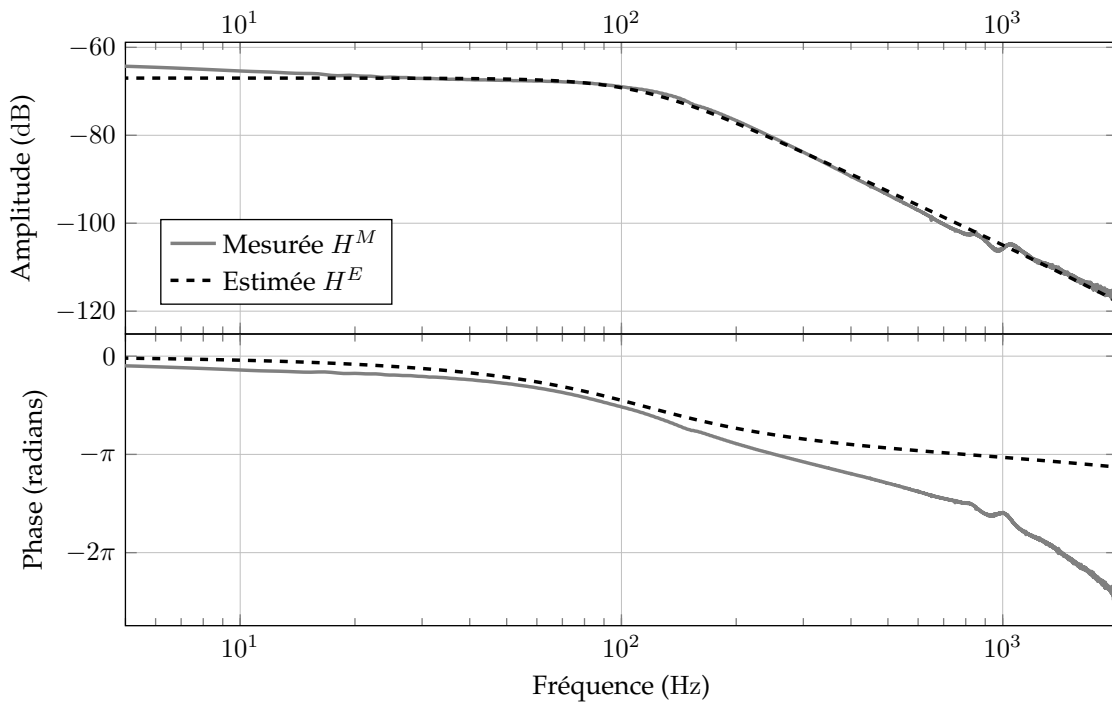
Sur la fonction de transfert tension vers position, on observe de même un décalage de phase croissant avec la fréquence entre H^M et H^E . Mais on remarque aussi une différence de pente dans l'amplitude en basses fréquences, ce qui est caractéristique du comportement visco-élastique de la membrane du haut-parleur [Knudsen et Jensen, 1993].

Ces observations montrent l'intérêt de l'approche combinant séparation et estimation pour examiner la capacité du modèle à capturer les phénomènes impliqués. En ce sens, la méthode de séparation est utile si l'on souhaite étudier un système dans son comportement « petits signaux » car elle permet de maîtriser le rejet des perturbations non linéaires.

Par ailleurs, la fréquence de résonance mesurée se situe autour de 120 Hz, ce qui diffère (sans surprise) de celle proposée par le constructeur (156 Hz) puisque



(a) Tension v vers courant i



(b) Tension v vers position ℓ

FIGURE 5.10 – Fonctions de transfert tension vers courant (haut) et tension vers position (bas) mesurés à partir des signaux séparés (ligne en trait plein gris) et calculés à partir des paramètres estimés (ligne en tirets noirs); l'axe fréquentiel est limité au support fréquentiel du signal d'excitation utilisé pour l'estimation des paramètres, i.e. 5 – 2000 Hz.

Paramètre	Valeur constructeur	Valeur estimée
Impédance R_e	5.7 Ω	6.16 Ω
Inductance L	0.11 mH	0.254 mH
Couplage Bl_0	2.99 N/A	2.90 N/A
Masse M	1.9 g	2.10 g
Amortissement R_m	0.405 kg/s	0.753 kg/s
Raideur K_1	1825 kg/s ²	1055 kg/s ²

TABLEAU 5.1 – Tableau comparatif des paramètres Thiele & Small donnés par le constructeur et ceux estimés sur la fonction de transfert.

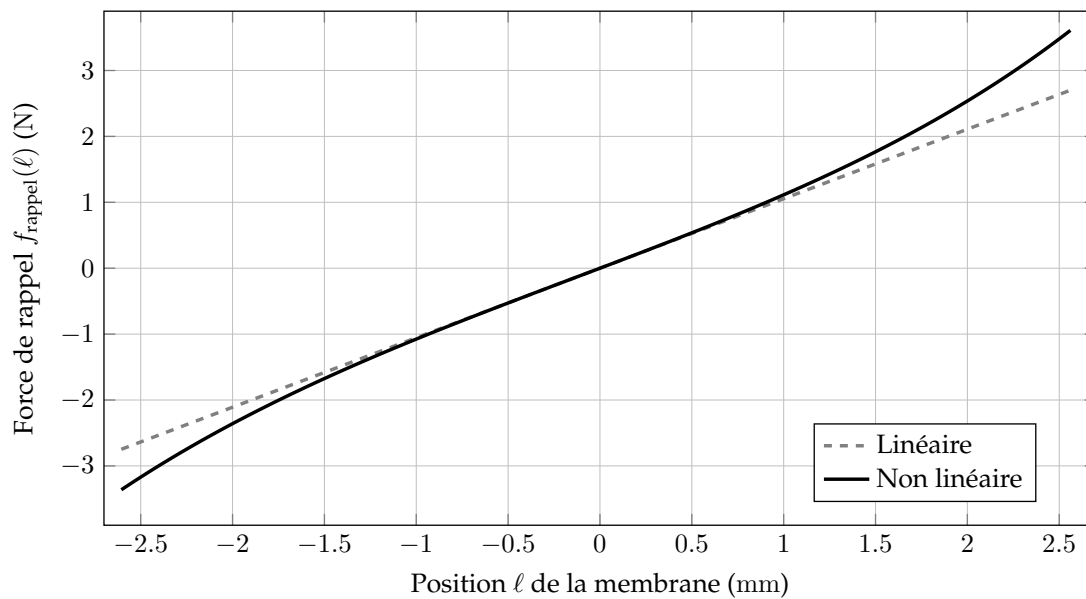
notre haut-parleur n'est pas conditionné comme par le constructeur (voir infra). Ceci s'accompagne de quelques différences entre les paramètres constructeur et ceux estimés, qui sont données dans le [Tableau 5.1](#). On peut y voir que l'impédance, le terme statique de couplage et la masse estimés sont tout les trois assez proches des valeurs constructeurs. Au contraire, les valeurs de l'inductance et de l'amortissement sont très fortement surestimés, tandis que celle de la partie linéaire de la raideur est sous-estimée.

Ces déviations par rapport aux données constructeurs peuvent tout d'abord s'expliquer par la différence de protocole de mesure : haut-parleur bafflé dans une salle anéchoïque dans le cas des mesures constructeurs *versus* haut-parleur dans une enceinte et dans une salle non absorbante dans notre cas. De plus, la différence d'estimation des paramètres physiques peut s'expliquer aussi par un vieillissement de la membrane et/ou de la suspension. Quant à l'inductance, il n'est pas incohérent qu'elle soit mal estimée puisque ce paramètre a un effet dans les hautes fréquences, où nous manquons de données.

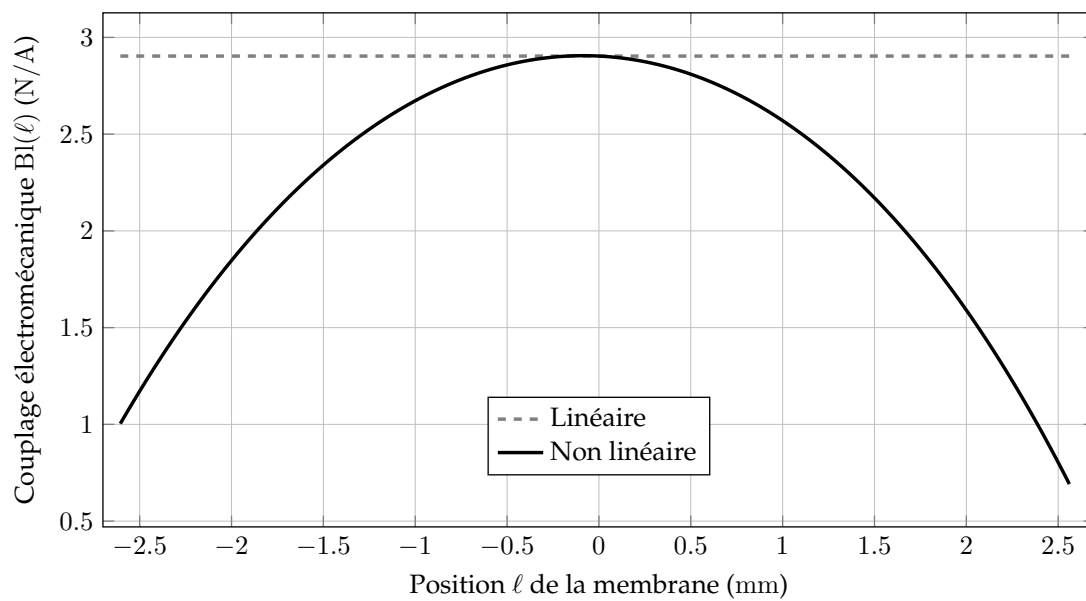
Caractéristiques non linéaires. Les courbes caractéristiques non linéaires estimées sont montrées dans la [Figure 5.11](#). L'évolution de la force de rappel en fonction de la position de la membrane fait bien apparaître son caractère raidissant. De plus, à partir d'une amplitude d'excursion supérieure à 1.5 mm, on peut voir que le modèle linéaire (en tirets gris) n'est plus valide. Cette valeur limite correspond à ce que les spécifications constructeur donnent comme amplitude maximale pour avoir moins de 10% de taux de distorsion harmonique.

Le couplage électrodynamique estimé, qui fait apparaître une décroissance lorsque l'amplitude de la position augmente, est lui aussi typique de ce à quoi on pourrait s'attendre d'un haut-parleur. On observe de plus une légère dissymétrie par rapport à la position d'équilibre $\ell = 0$. Puisque notre approche impose un modèle polynomial, il est normal de ne pas obtenir une courbe caractéristique d'un *underhang coil* ou *overhang coil* (voir [Figure 5.3](#)).

Il est important de noter que les paramètres estimés correspondent à une plage de validité conditionnée par celle des mesures. Par exemple, si l'on extrapole le couplage électrodynamique pour des positions $|\ell| > 3$ mm (non atteintes



(a) Force de rappel



(b) Couplage électrodynamique

FIGURE 5.11 – Courbes caractéristiques estimés de la force de rappel (haut) et du couplage électrodynamique (bas) en fonction de la position de la membrane, en prenant en compte seulement le terme linéaire (ligne en tiretés gris) ou bien tout le polynôme estimé (ligne en trait plein noir); l'axe des abscisses est limité à la plage d'excursion atteinte par la membrane lors des mesures.

pendant les mesures), on obtient des valeurs négatives, ce qui n'a pas de sens physique. Il est donc nécessaire de prendre cette plage de validité en compte si l'on souhaite utiliser les paramètres estimés à des fins de simulation ou de contrôle.

5.4.3 Simulations

Pour étudier la validité du modèle obtenu, une simulation numérique utilisant les paramètres estimés est effectuée. Le courant et la position de la membrane sont calculés pour une excitation correspondant à la tension mesurée pour le sweep. La simulation est effectuée en utilisant le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports [Hélie *et al.*, 2015; Falaize et Hélie, 2016]⁶ que nous ne détaillons pas ici. La Figure 5.12 compare les signaux mesurés (traits pleins colorés — pour le courant et — pour la position) à ceux simulés par l'utilisation du modèle linéaire (5.1) (pointillés gris ····) et du modèle non linéaire (5.5) (tiretés gris - - -).

Intéressons-nous tout d'abord aux instants du sweep correspondant à des basses fréquences (voir Figure 5.12a). On remarque que le modèle linéaire reconstruit des signaux proches des mesures, mais que le passage dans les hautes amplitudes du cycle sinusoïdal est peu fidèle. La prise en compte des non-linéarités permet de très bien restaurer la forme d'onde. On peut remarquer un léger déphasage entre la position mesurée et simulée.

Lorsque l'on regarde autour de l'anti-résonance (voir Figure 5.12b), on observe une disparition des phénomènes non linéaires pour la position, et donc une grande proximité entre les simulations. À l'inverse, le courant est très distordu, et la simulation non-linéaire permet une reconstitution plus fidèle.

Enfin, si l'on regarde encore plus loin dans le signal — et donc encore plus haut en fréquences — (voir Figure 5.12c et Figure 5.12d), on remarque que les effets non linéaires disparaissent. Les deux simulations (selon le modèle linéaire ou non linéaire) sont confondus. Par contre, on observe un déphasage entre les signaux simulés et mesurés, qui grandit avec la fréquence. Ce décalage est la conséquence directe de la mauvaise estimation paramétrique du comportement haute fréquence de la phase des fonctions de transfert⁷ (voir Figure 5.10).

5.5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre, la méthode itérative proposée au Chapitre 4 a été appliquée avec succès à l'estimation des paramètres physiques d'un haut-parleur électrodynamique : les caractéristiques non linéaires estimées sont en accord

6. Ce formalisme a été utilisée en lieu et place d'une simulation à partir de la représentation d'état pour deux raisons. Tout d'abord il permet de simuler la sortie totale (et non tronquée à un certain ordre). De plus, c'est dans ce formalisme que travaille Tristan Lebrun pour développer un contrôle actif du haut-parleur.

7. Comportement qui est dû à phénomènes non représentés dans le modèle choisi.

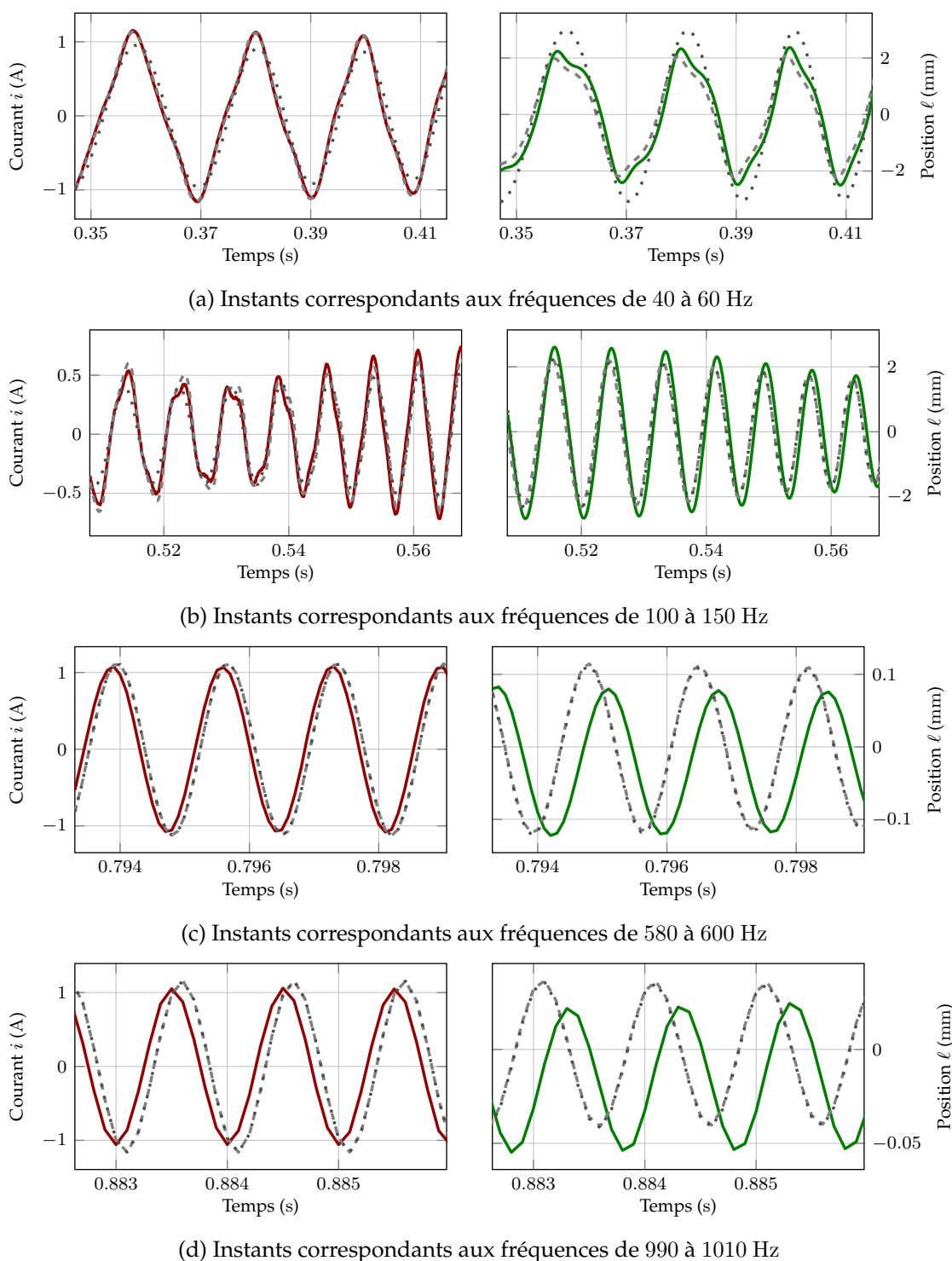


FIGURE 5.12 – Comparaison des signaux temporels de courant (gauche) et position (droite) provenant des mesures (ligne en trait plein coloré — ou —) de la simulation par le modèle linéaire (ligne en pointillés noirs ···) et de celle par le modèle non linéaire (ligne en tirets gris - -) du haut-parleur excité par le sinus glissant; les signaux montrés correspondent à des zooms sur plusieurs instants différents correspondants à des plages de fréquences différentes.

avec la théorie sur la modélisation de ces systèmes. L'étude des signaux simulés et de l'estimation paramétrique à partir des fonctions de transfert a montré l'intérêt de la modélisation non linéaire et de la méthode d'estimation ainsi que fait ressortir les limitations de la partie linéaire du modèle choisi.

Isoler les signaux de sortie linéaire a permis d'extraire de la dynamique du haut-parleur la présence d'un comportement visco-élastique linéaire. Cet effet de mémoire longue de la membrane se traduit par une pente non nulle de la fonction de transfert en basses fréquences, que les équations de Thiele & Small ne prévoient pas. Il peut se modéliser à l'aide de dérivées temporelles fractionnaires [Knudsen et Jensen, 1993]. Une approche permettant l'incorporation de ce phénomène dans un modèle en représentation d'état serait d'approximer les dérivées fractionnaires par un ajout de cellules ressort-amortisseurs en parallèle de la suspension [Hélie, 2014; Falaize, 2016].

Le comportement en hautes fréquences des fonctions de transfert (voir [Figure 5.10](#)) fait apparaître la présence de courants de Foucault [Brunet et Shafai, 2014; King et Agerkvist, 2017]. Ce phénomène serait important à prendre en compte si l'on souhaite agrandir la plage fréquentielle de validité de notre estimation. Comme pour le comportement visco-élastique, un modèle en dérivées fractionnaires permettrait de représenter les courants de Foucault.

Enfin, d'autres phénomènes sont négligés dans le modèle de Thiele & Small étendu que l'on considère. On peut citer par exemple l'impédance de rayonnement acoustique du haut-parleur (qui se retrouve confondu avec les paramètres mécaniques dans le modèle utilisé), les modes de vibrations de la membrane (qui peuvent apparaître à partir de quelques centaines de Hertz) ou bien l'échauffement du système qui induit une grosse variation de la résistance électrique.

Une fois incorporés dans un modèle en représentation d'état paramétrique, ces différents comportements pourraient être a priori estimés par les outils présentés dans cette thèse, puisque la séparation des ordres permet déjà de les exhiber. Dans le chapitre suivant, nous abordons justement la caractérisation de ce que les méthodes de séparation proposées au [Chapitre 2](#) sont capables d'extraire dans des conditions ardues (système à très forte distorsion).

— Chapitre 6 —

Effet audio analogique à forte distorsion : séparation et perspective pour l'identification

L'information n'est pas la connaissance.
La connaissance n'est pas la sagesse.
La sagesse n'est pas la vérité.
La vérité n'est pas la beauté.
La beauté n'est pas l'amour.
L'amour n'est pas la musique.
La musique est la meilleure des choses.

Frank Zappa, *Packard Goose*

Ce chapitre s'intéresse à l'application des méthodes de séparation développées dans le [Chapitre 2](#) au cas d'un système à forte distorsion, pour lequel une représentation en séries de Volterra pourrait rester efficace mais nécessiterait un très grand nombre d'ordres. Plus précisément, on examine le comportement et la robustesse de ces méthodes dans un cadre expérimental réaliste. Pour cela, notre choix s'est porté sur une pédale de pré-amplification de guitare, la SansAmp™ GT2, pour laquelle la troncature à faible ordre de sa série de Volterra ne conduit pas à une approximation satisfaisante¹.

Le § 6.1 présente la pédale d'effet étudiée. Le protocole expérimental est décrit en § 6.2. Les résultats obtenus par les méthodes de séparation sont donnés et discutés en § 6.3. Enfin, des perspectives pour l'identification d'un tel système sont données en § 6.4.

6.1 PÉDALE SANSAMP™ GT2

La pédale SansAmp™ GT2 [Tech 21] est une pédale de pré-amplification de guitare. Elle est appréciée car elle permet d'émuler (avec des amplificateurs opérationnels, ou amplis. op., cf. [Cohen, 2007]) le son caractéristique de certains types d'amplificateurs à lampes. La volonté initiale de cette étude était de

1. Y compris lorsque la série est calculée à partir des équations du circuit [Cohen, 2007].



FIGURE 6.1 – Pédale SansAmp™ GT2.

reproduire numériquement le comportement de cette pédale d'effet à partir de modèles identifiés. Par manque de temps, ce travail n'a pas pu être mené à bout. Seule l'application des méthodes de séparation d'ordres a pu être menée.

Nous avons choisi d'étudier ce système pour plusieurs raisons. Premièrement, son comportement contient à la fois des non-linéarités (dues aux amplis. op.) ainsi que des phénomènes de mémoire (dus à la reproduction des effets de l'enceinte d'un haut-parleur). Deuxièmement, les différents contrôles offrent une grande modularité. Leurs effets peuvent être résumés comme suit :

Level Ajuste le niveau de sortie ;

Low/High Contrôle les basses/hautes fréquences à l'aide de filtres actifs ;

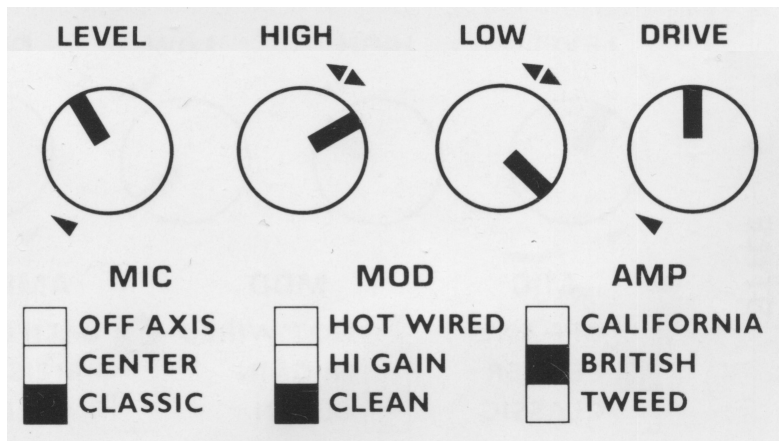
Drive Ajuste la quantité d'*overdrive*² (i.e. l'importance de la non-linéarité) ;

Amp Définit le type d'amplificateur émulé ;

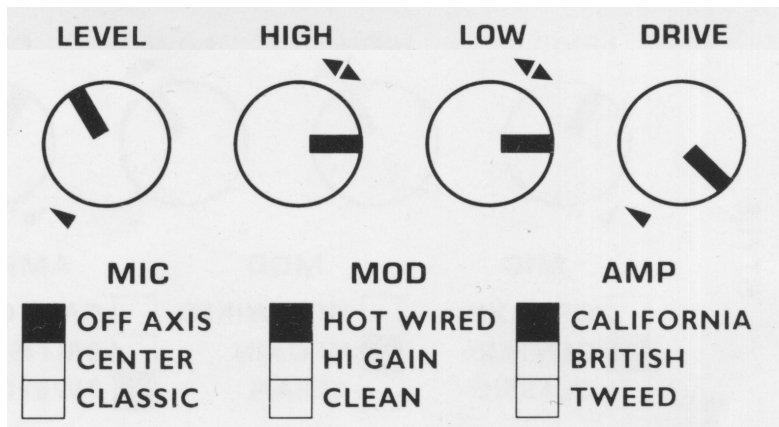
Mod Choisit la structure des non-linéarités ;

Mic Détermine un effet de filtrage similaire au choix de positionnement d'un micro.

2. Terme anglais qui désigne le fait d'utiliser un système électronique à des tensions supérieure à sa plage de fonctionnement habituelle, ce qui engendre une saturation. L'utilisation de ce phénomène caractérise l'ensemble des musiques que l'on pourrait regrouper sous le terme de rock.



(a) Mode *Blues Breaker*



(b) Mode *Metallica*

FIGURE 6.2 – Modes étudiés de la SansAmp™ GT2 fournis dans le manuel utilisateur de la pédale.

Il est donc possible de choisir la *quantité* de non-linéarité, ce qui permet d'étudier le comportement des méthodes de séparation proposées dans une situation réelle mais contrôlable.

Dans la suite, nous nous intéresserons au comportement de deux réglages de la pédale³ : le mode *Blues Breaker* (voir Figure 6.2a) et le mode *Metallica* (voir Figure 6.2b). Le premier correspond au son caractéristique des amplificateurs Marshall® utilisés dans la scène rock anglaise des années 60 et 70; il est caractérisé par un *overdrive* modéré ainsi qu'une augmentation des basses fréquences. Le deuxième correspond au son du groupe Metallica, et se caractérise par une très forte distorsion. Celle-ci crée un enrichissement en fréquences important qui nécessite par conséquent un très grand nombre de noyaux pour être représentée. Ce dernier réglage est donc particulièrement intéressant pour

3. Ces réglages sont proposées dans le manuel utilisateur de la pédale.

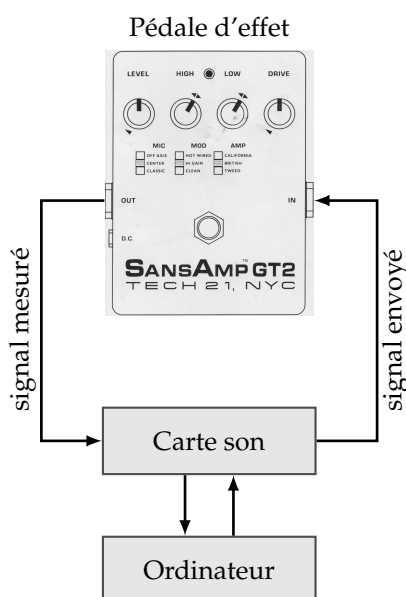


FIGURE 6.3 – Schéma du banc expérimental.

tester en pratique l’efficacité des méthodes de séparation avec un choix de troncature très grand.

6.2 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL

Banc expérimental. Les mesures sont effectuées à l’aide d’une carte son (Fire-Face UC [RME]). Le banc expérimental est schématisé en Figure 6.3. La fréquence d’échantillonnage est fixée à $f_e = 44.1$ kHz, fréquence d’échantillonnage classique utilisée en audio.

Signaux d’excitation. Deux types de signaux d’excitations sont utilisées, avec chacun une amplitude de -3 dB FS⁴. Le premier est une sinusoïde de fréquence 220 Hz (ce qui correspond à la fréquence du 1^{er} mode de la corde de La de la guitare) et de durée $T = 1$ s. Le second est un *sweep* de durée $T = 1$ s et dont la fréquence évolue exponentiellement entre 50 et 2000 Hz.

Méthode de séparation. Trois des méthodes de séparation présentées dans cette thèse sont comparées : RPS (méthode par doubles déphasages, cf. § 2.5), PAS (méthode par phase et amplitude, cf. § 2.4) et HPS (séparation en signaux homophases, cf. § 2.3). Les paramètres des trois méthodes sont choisis pour que toutes utilisent un nombre de $K = 190$ signaux tests :

4. L’échelle *decibel Full Scale* (ou *décibel pleine échelle*) est une échelle logarithmique utilisée en audio numérique où la valeur 0 dB est définie comme l’amplitude maximale du signal numérique, c’est-à-dire la plus grande valeur absolue pouvant être représentée dans le code (en positif ou en négatif).

- RPS utilise un nombre de phases $P = 19$ (ce qui permet de séparer jusqu'à $N = 9$ ordres);
- PAS utilise un nombre d'amplitudes $A = 5$ et un nombre de phase $P = 38$, (ce qui permet de séparer jusqu'à $N = 9$ ordres);
- HPS utilise un nombre de phases $P = 190$ (ce qui permet de séparer jusqu'à $N = 94$ signaux homophases).

Les amplitudes de la méthode PAS sont fixées à l'aide de la formule (2.63) (voir p. 65), ce qui donne l'ensemble d'amplitudes $\{\cos(k\pi/9)\}_{k \in \llbracket 0;4 \rrbracket}$. En prenant en compte 0.5 s de silence entre chaque signal test⁵, cela correspond à une durée totale de mesures d'environ 5 min pour chaque expérience (i.e. un signal d'excitation utilisé sur mode de la pédale).

6.3 RÉSULTATS

6.3.1 Mode Blues Breaker

Nous nous intéressons tout d'abord au comportement de la pédale lorsque ses réglages sont sur le mode *Blues Breaker*. La Figure 6.4 montre la sortie mesurée pour l'excitation sinusoïdale. On observe sur le signal temporel (Figure 6.4a) une distorsion assez visible de la forme d'onde. Cela se caractérise sur l'allure fréquentielle (Figure 6.4b) par l'apparition de nombreux harmoniques. On y remarque de plus l'absence apparente des non-linéarités d'ordres pairs. Le dernier harmonique que l'on peut observer au dessus du bruit de mesure⁶ se situe à 8140 Hz — ce qui correspond à une contribution non linéaire d'ordre 37 (et d'ordre supérieurs) — et est à -100 dB comparé à l'harmonique fondamental.

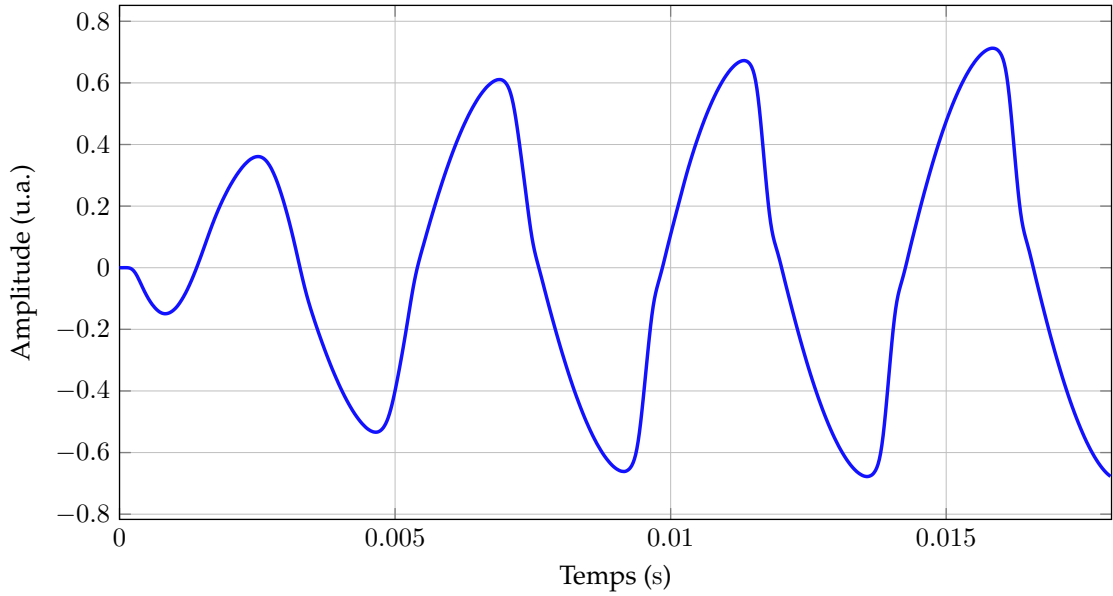
La réponse au *sweep* est montrée en Figure 6.5 sous la forme d'un spectrogramme. On remarque que les effets non linéaires ne sont pas présents pour une excitation basse-fréquence. De plus, des composantes associées à des non-linéarités paires apparaissent pour une excitation haute-fréquence (même si elles sont bien inférieures à celles associées à des ordres impairs).

Les Figures 6.6 et 6.7 montrent les spectrogrammes des ordres séparés obtenus respectivement par la méthode RPS et PAS. On peut tout d'abord observer que les deux méthodes donnent des résultats similaires pour les ordres impairs. On y voit, en accord avec la théorie, tous les harmoniques jusqu'à l'ordre du signal (harmonique 1 pour la sortie linéaire, harmoniques 1 et 3 pour la sortie cubique, 1, 3, 5 pour l'ordre 5, etc.). Les signaux d'ordres impairs semblent⁷ donc bien séparés, avec une dynamique d'au moins 60 dB par rapport aux perturbations (bruit de mesure ou autres ordres).

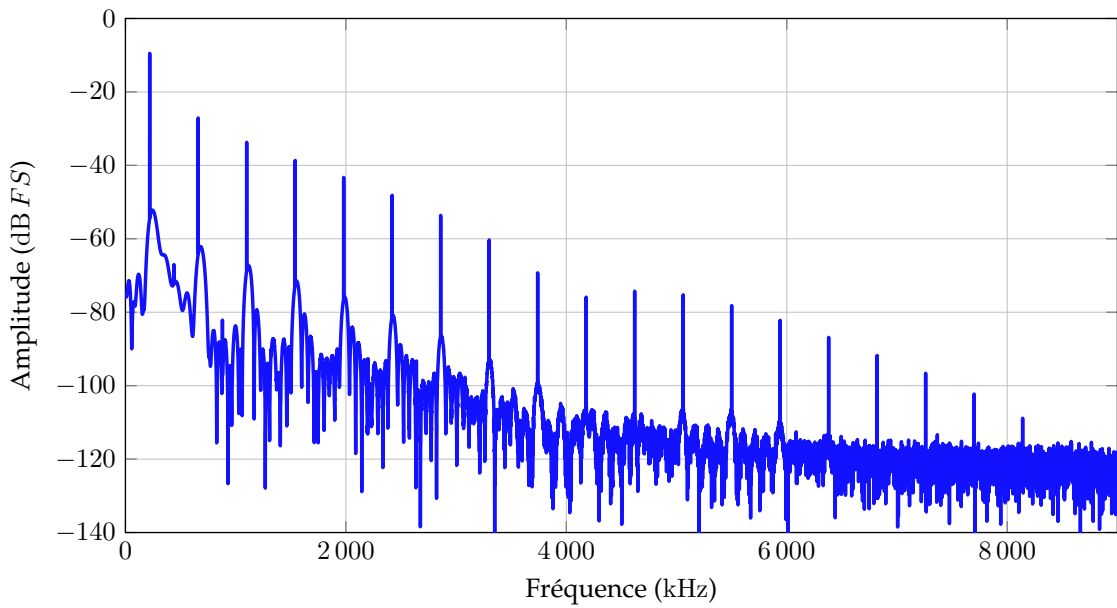
5. Afin de laisser la pédale retourner à l'état d'équilibre.

6. Qui est ici un peu en dessous de -110 dB FS, ce qui correspond à l'amplitude de mesure de la carte son utilisée.

7. Comme nous n'avons pas accès aux vrais signaux de sortie homogènes par ordres, il n'est pas possible d'évaluer ici quantitativement la séparation.



(a) Signal temporel (zoomé sur les 3 premières périodes)



(b) Spectre d'amplitude (zoomé sur la plage 0 – 9000 Hz)

FIGURE 6.4 – (Mode *Blues Breaker* – Mesures) Signal temporel (haut) et spectre d'amplitude (bas) de la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence 220 Hz.

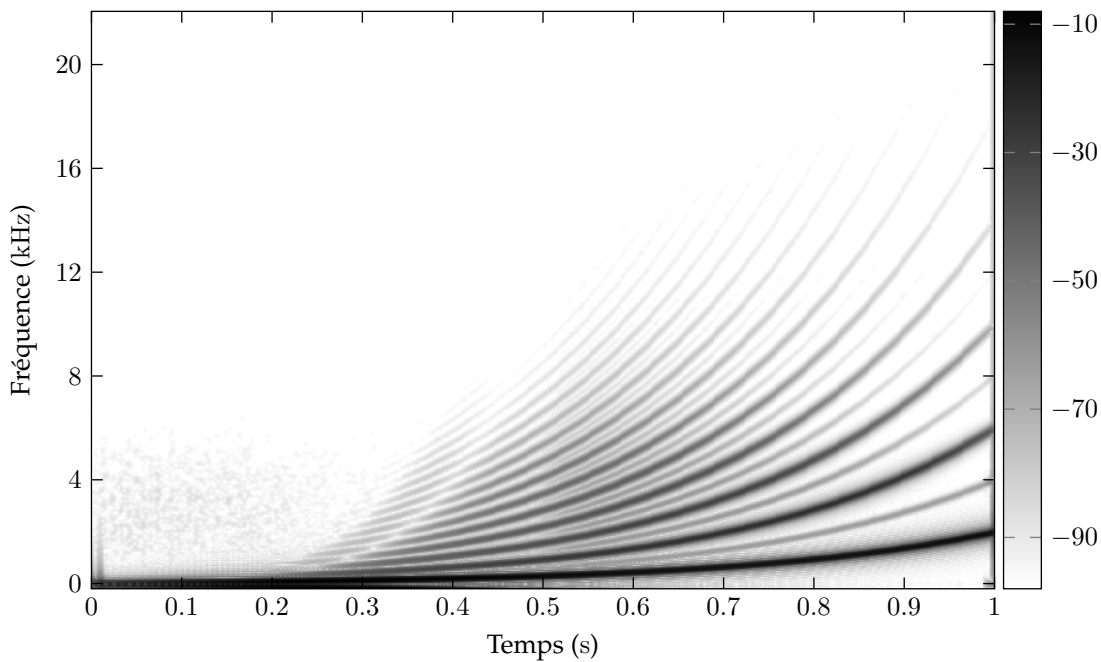


FIGURE 6.5 – (Mode *Blues Breaker* – Mesures) Spectrogramme (en décibels) de la réponse à un *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz ; pour des raisons de visibilité, la dynamique d’amplitude est limitée à 90 dB.

Pour les deux méthodes, l’estimation des ordres pairs est assez bruitée au début du signal. De plus, on remarque que les deux méthodes ne donnent pas les mêmes résultats : la méthode PAS semble assez bien séparer ces ordres (même si on peut remarquer la présence d’harmoniques d’ordres impairs qui ne devraient pas être présents), tandis que les ordres estimés par la méthode RPS contiennent des harmoniques bien supérieurs à leurs ordres. Cette différence s’explique par l’effet de repliement d’ordre inhérent aux méthodes de séparation basées sur la phase (cf. dernier paragraphe de § 2.3.4) qui est plus présent pour RPS qui n’utilise ici que 19 phases (contrairement à PAS qui en utilise 38). Pour un nombre de signaux équivalents, la méthode PAS semble donc plus robuste à une mauvaise troncature que RPS.

La Figure 6.8 montre les spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS. On observe que le signal homophase ψ_p correspond au $p^{\text{ème}}$ harmonique, en accord avec la théorie (cf. Propriété 2.6 et Remarque 2.3 p. 46). En effet, dans le cas d’une excitation mono-fréquentielle de fréquence f , le signal homophase ψ_p est un signal mono-fréquentiel complexe de fréquence pf . À partir des signaux ψ_p pour p supérieur à 20 (Figures 6.8c, 6.8d et 6.8e), on remarque aussi que le RSB diminue lorsque l’indice de phase p croît. Cela est dû à la diminution de l’amplitude des harmoniques avec leur ordre. De plus, on peut voir sur la Figure 6.8c la présence (certes faible) d’harmoniques non attendus dans le signal estimé. Ces résidus sont probablement un artefact

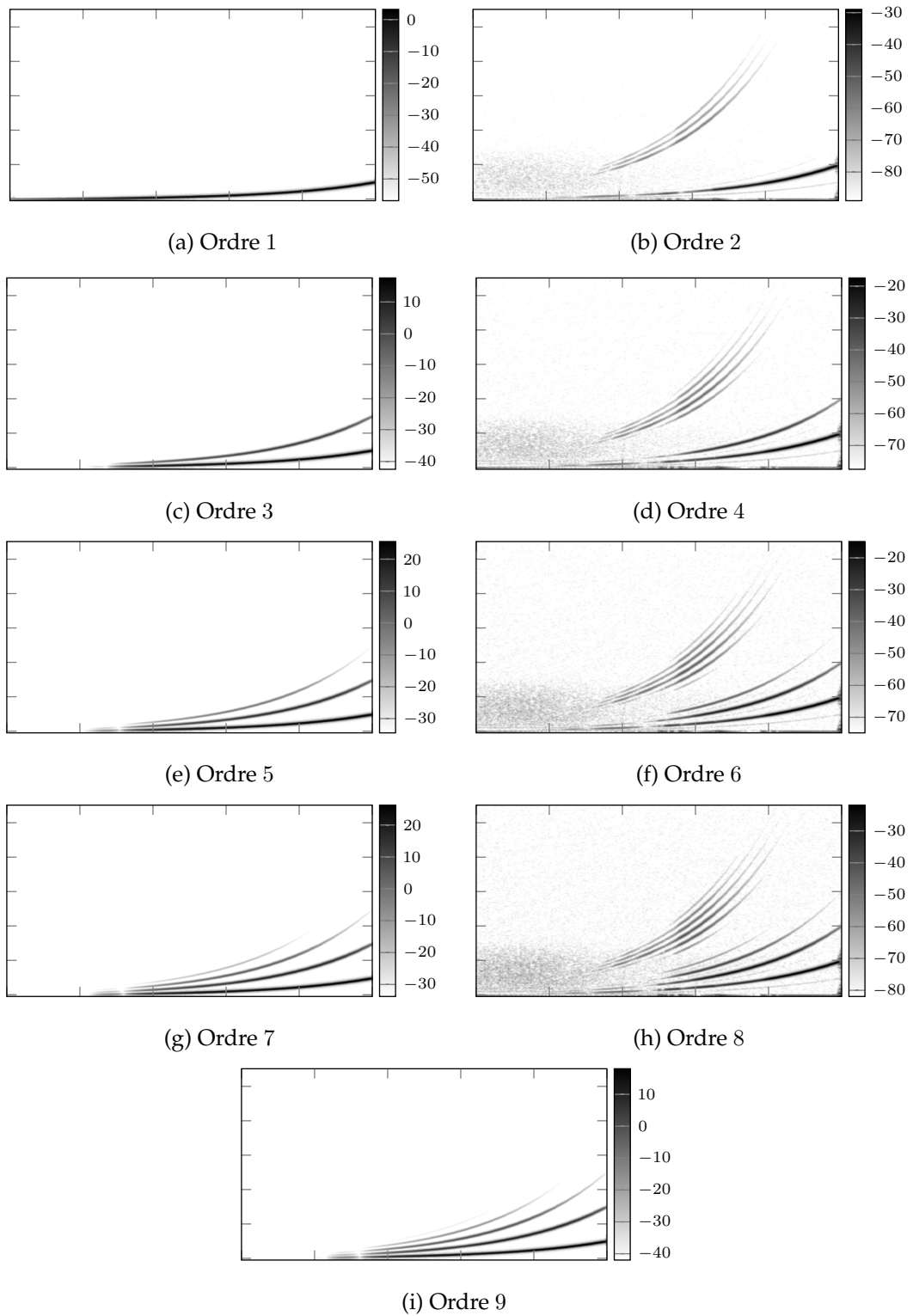


FIGURE 6.6 – (Mode *Blues Breaker* – RPS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode RPS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d’amplitude est limitée à 60 dB.

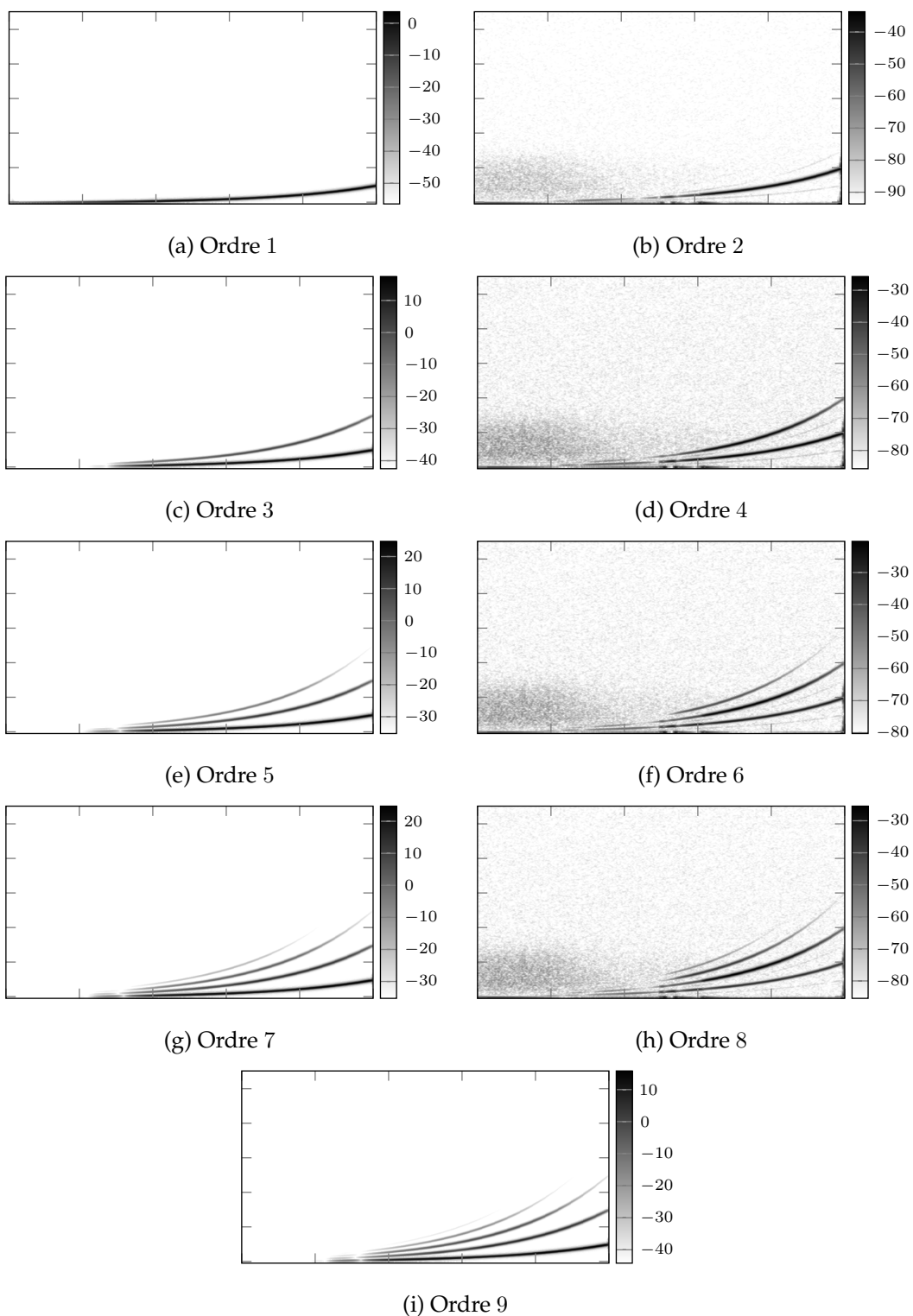


FIGURE 6.7 – (Mode *Blues Breaker* – PAS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode PAS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d’amplitude est limitée à 60 dB.

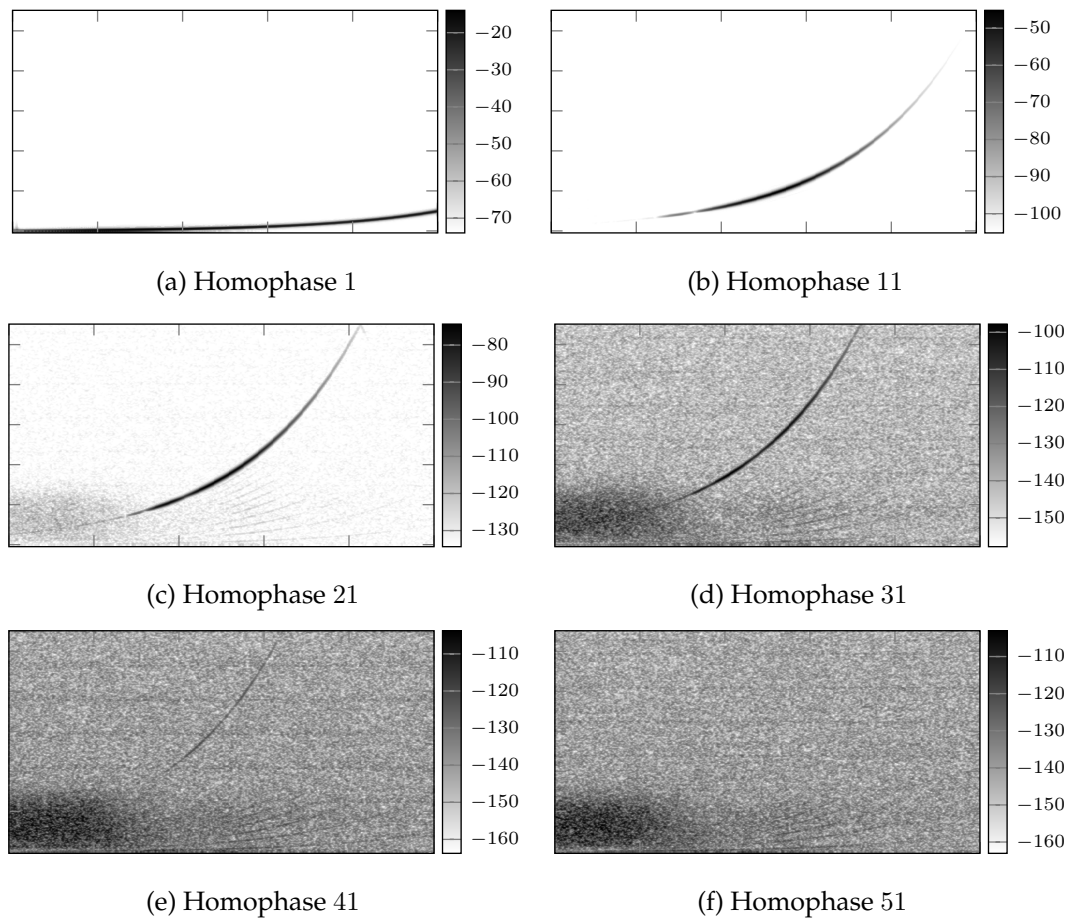
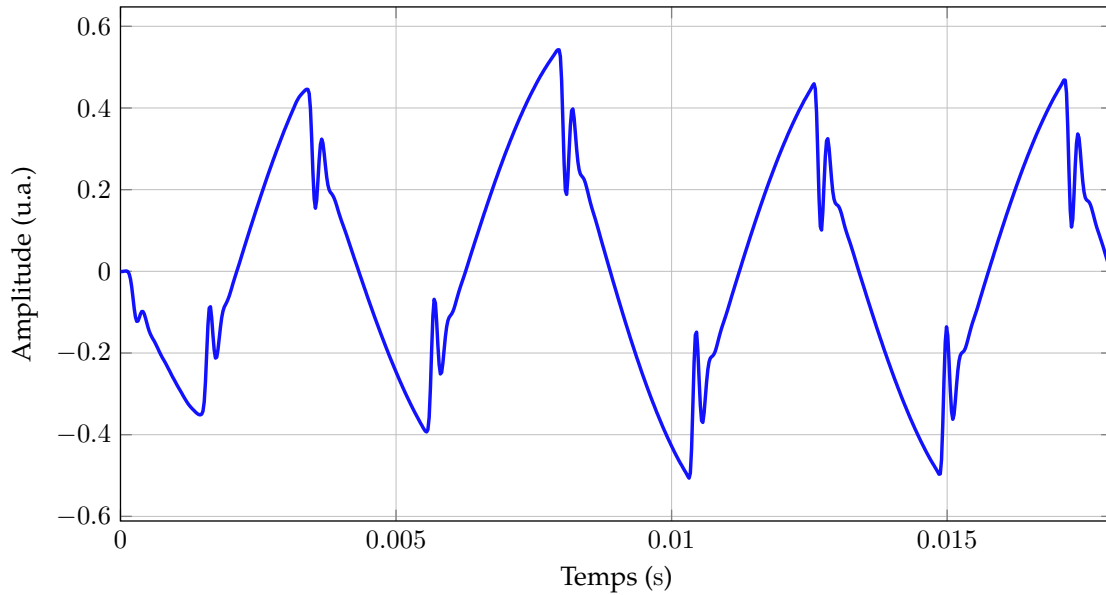


FIGURE 6.8 – (Mode *Blues Breaker* – HPS) Spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d’amplitude est limitée à 60 dB.

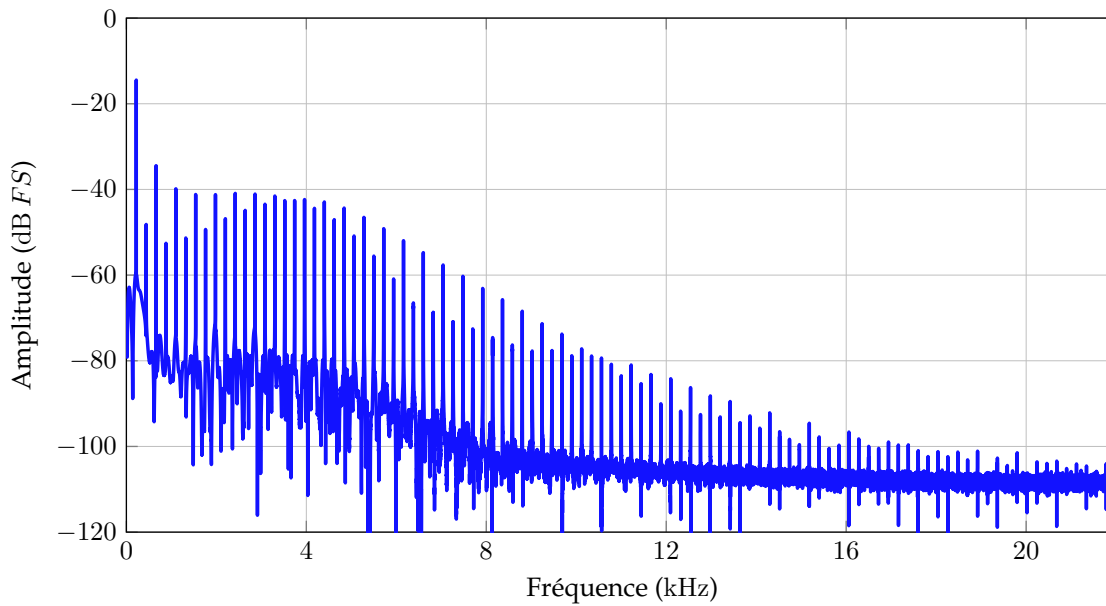
de la méthode. À partir du signal ψ_p d’inde de phase $p = 41$, les signaux sont presque exclusivement constitués de bruit. Cela correspond à peu près à l’harmonique maximale observée sur la [Figure 6.4b](#).

6.3.2 Mode Métallica

Intéressons-nous maintenant au comportement de la pédale lorsque ses réglages sont sur le mode *Métallica*. La [Figure 6.9](#) montre la sortie mesurée pour l’excitation sinusoïdale. L’allure temporelle ([Figure 6.9a](#)) fait apparaître une très forte distorsion de la forme d’onde, ce qui correspond à un contenu fréquentiel très riche ([Figure 6.9b](#)). La sortie contient des harmoniques d’ordres pairs et impairs, et ce presque jusqu’à la fréquence de Nyquist (où les harmoniques sont à approximativement -90 dB de la composante principale). La réponse au *sweep* est montrée en [Figure 6.10](#). On y remarque que les effets non linéaires sont présents quelle que soit la fréquence d’excitation.



(a) Signal temporel (zoomé sur les 3 premières périodes)



(b) Spectre d'amplitude

FIGURE 6.9 – (Mode *Métallica* – Mesures) Signal temporel (haut) et spectre d'amplitude (bas) de la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence 220 Hz.

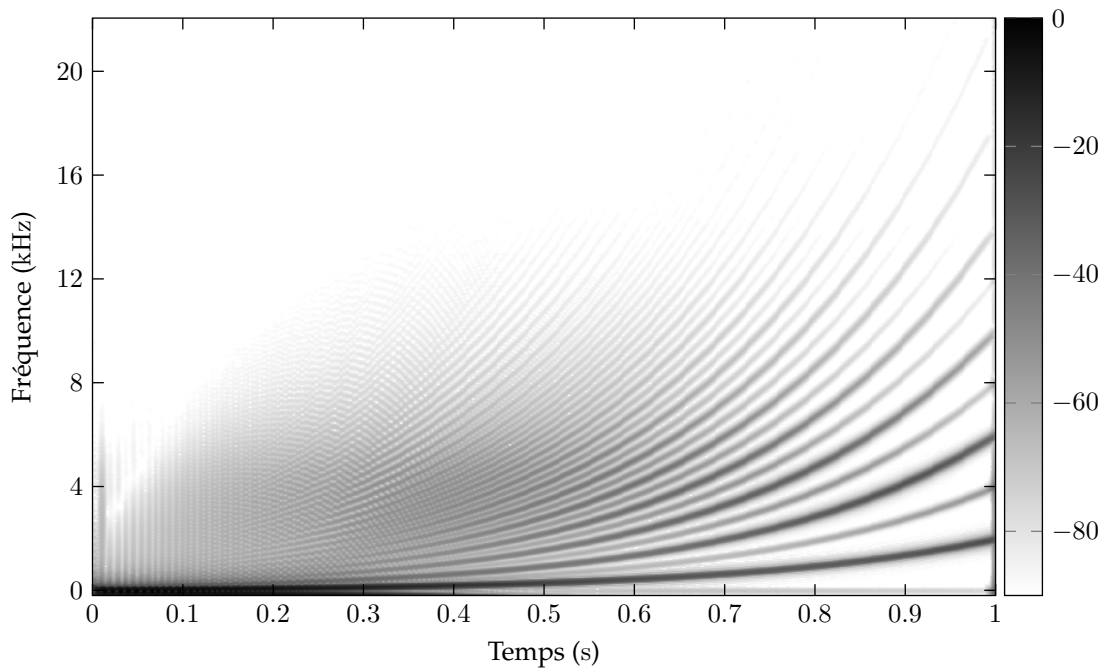


FIGURE 6.10 – (Mode *Metallica* – Mesures) Spectrogramme (en décibels) de la réponse à un *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; pour des raisons de visibilité, la dynamique d'amplitude est limitée à 90 dB.

Les Figures 6.11 et 6.12 montrent les spectrogrammes des ordres séparés obtenus respectivement par la méthode RPS et PAS. On observe tout d'abord qu'il n'y a pas dans ce cas de distinction entre l'estimation des ordres pairs et impairs. Cela est dû à la relative égalité de niveau entre les harmoniques pairs et impairs. On remarque de plus que les artefacts dus au repliement (la présence d'harmoniques plus élevés que l'ordre du signal) sont bien plus présents. Cela s'explique par le fait que les deux méthodes ne séparent que les 9 premiers ordres, alors que le système en contient beaucoup plus. Concernant ces artefacts, la distinction entre RPS et PAS demeure, cette dernière étant beaucoup moins affectée puisque utilisant un plus grand nombre de phases.

Enfin la Figure 6.13 montre les spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS. On remarque que, jusqu'à l'indice de phase 51, les signaux homophases ne sont constitués que de l'harmonique correspondant à leur indice de phase, et ce avec un RSB d'au moins 60 dB (i.e. la dynamique d'amplitude utilisée pour la représentation). Pour les signaux homophases d'ordre supérieur, un deuxième harmonique apparaît, qui est dû à la propriété de repliement d'ordre de la méthode HPS (cf. troisième paragraphe de § 2.3.4 p. 48). Cette propriété explique parfaitement le comportement de ce deuxième harmonique, i.e. le fait qu'il diminue en fréquence lorsque l'indice de phase p augmente. Pour éliminer cet artefact indésirable, il suffit de choisir

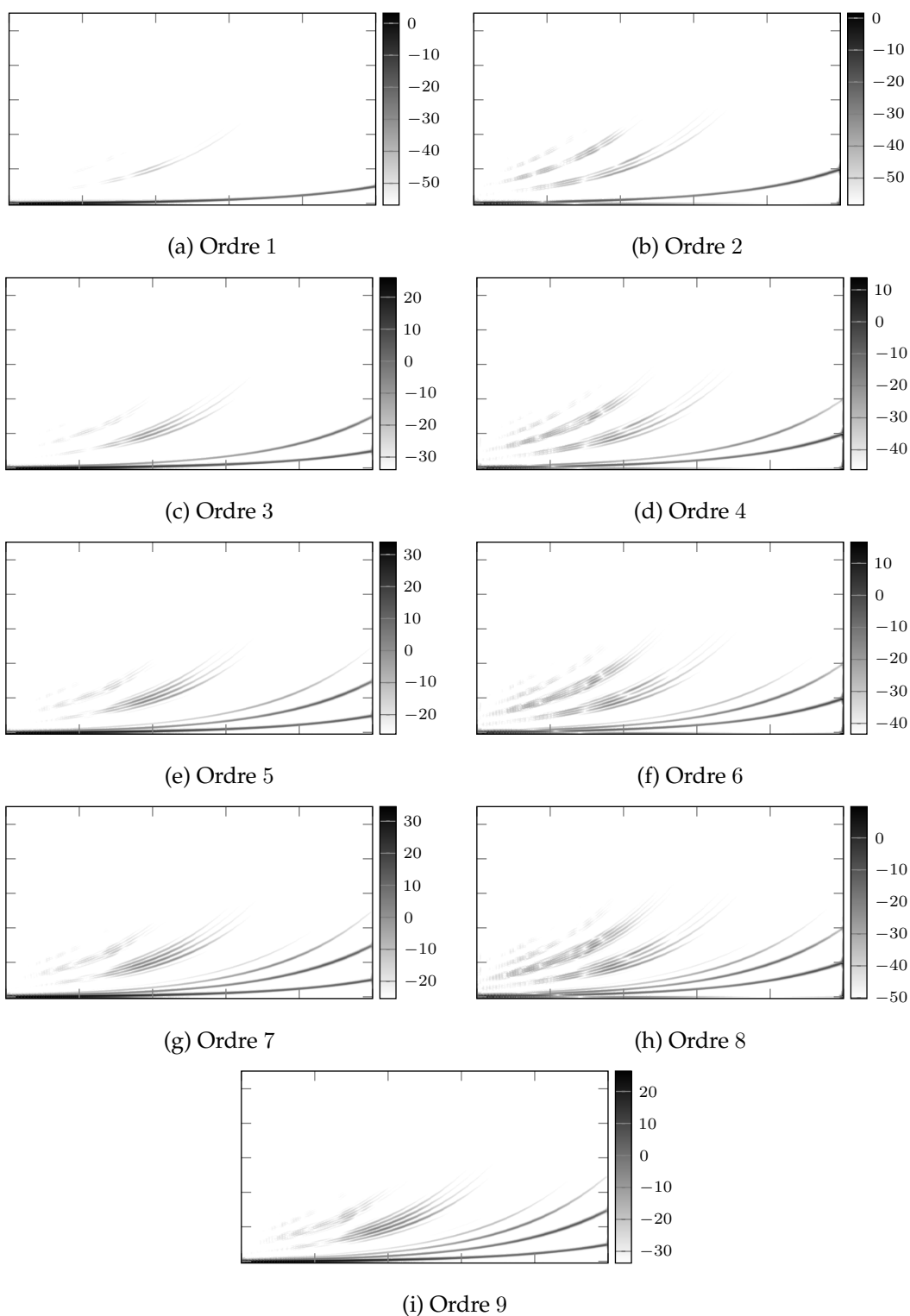


FIGURE 6.11 – (Mode *Métallica* – RPS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode RPS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d’amplitude est limitée à 60 dB.

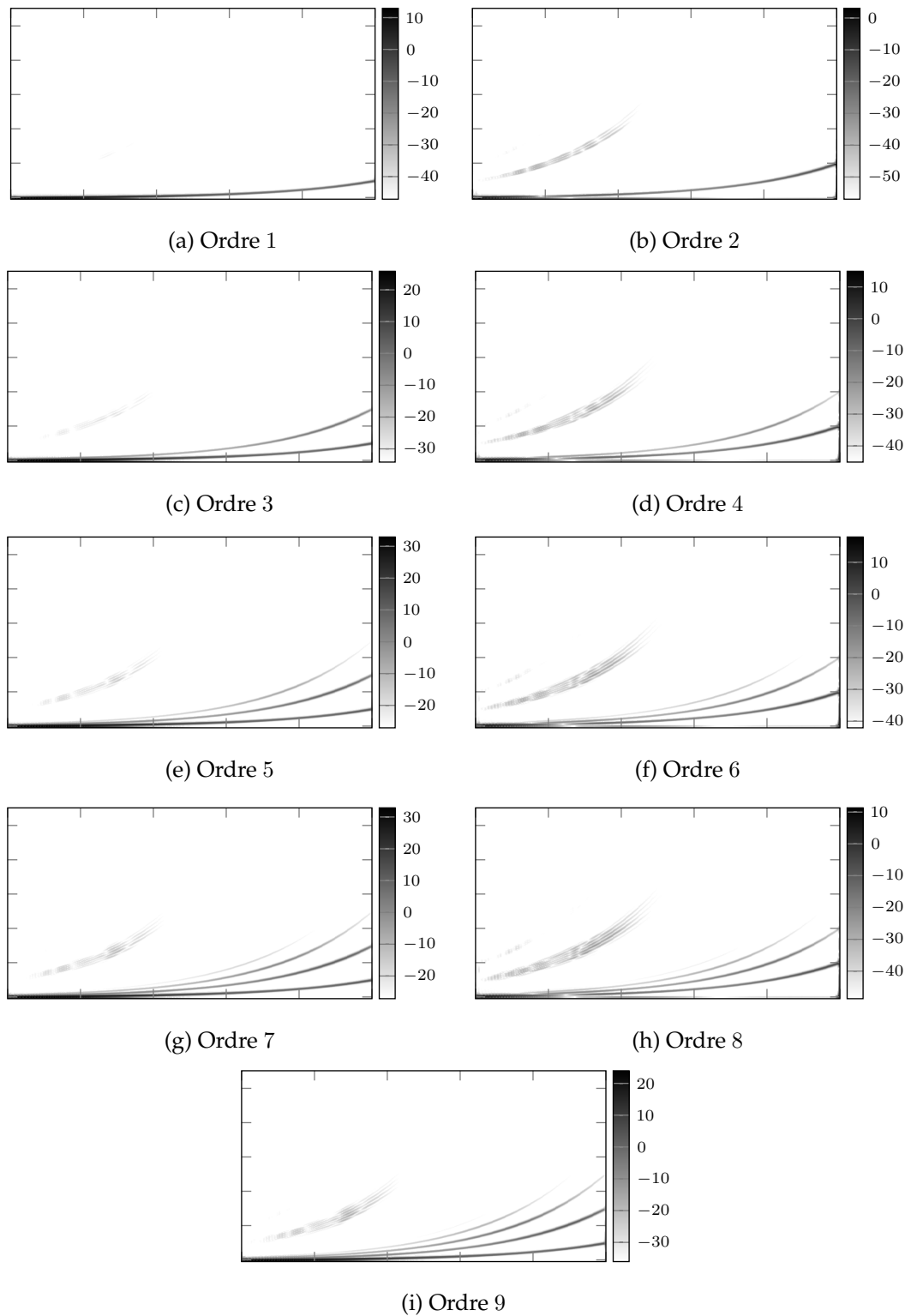


FIGURE 6.12 – (Mode *Métallica* – PAS) Spectrogrammes des ordres séparés par la méthode PAS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d'amplitude est limitée à 60 dB.

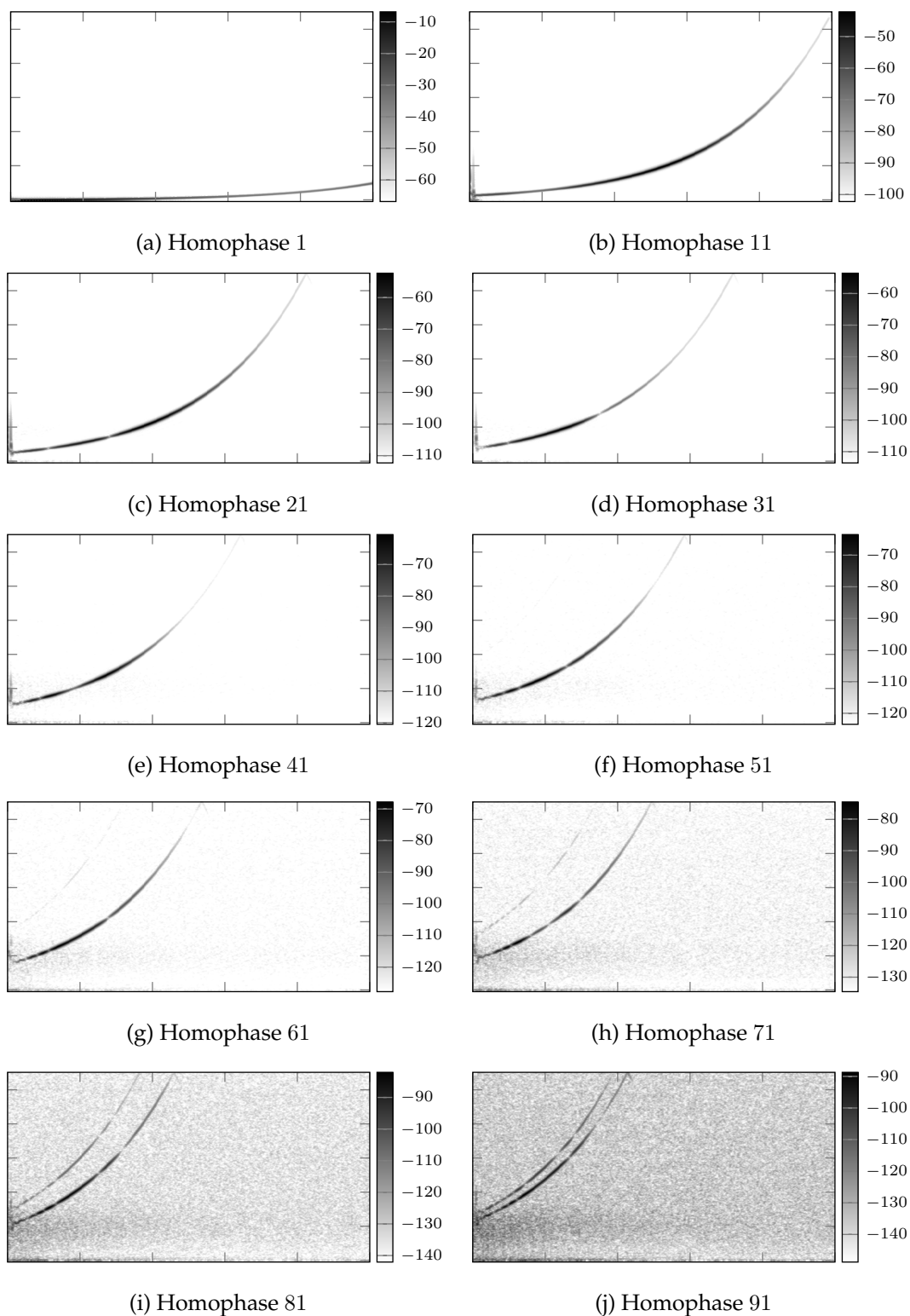


FIGURE 6.13 – (Mode *Métallica* – HPS) Spectrogrammes de plusieurs signaux homophases séparés par la méthode HPS pour une excitation de type *sweep* exponentiel allant de 50 à 2000 Hz; la dynamique d’amplitude est limitée à 60 dB.

un nombre de phases P plus élevé. Enfin, on observe que le RSB se dégrade fortement à partir de l'indice de phase $p = 71$.

6.3.3 Remarques sur les méthodes de séparation

Ces deux exemples permettent de comprendre les limites ou avantages des différentes méthodes de séparation lorsqu'elles sont appliquées à un système à forte distorsion. Les méthodes de séparation en ordres homogènes (PAS et RPS) semblent (à nombre de signaux tests fixés) moins robustes et adaptées que HPS. Augmenter l'ordre de troncature N pour se rapprocher d'une valeur réaliste pour le système ne serait pas viable ici, et ce pour deux raisons.

Premièrement, il faut se rappeler que pour ces méthodes, le nombre de signaux nécessaires est en $O(N^2)$. Par exemple, choisir $N = 50$ nécessite $K_{\text{RPS}} = 5151$ signaux tests pour la méthode RPS et $K_{\text{PAS}} = 2525$ pour la méthode PAS. Deuxièmement, le conditionnement de ces méthodes croît très rapidement avec l'ordre N . Par exemple, le cas $N = 50$ donne un conditionnement⁸ de $\approx 10^{15}$ pour la méthode RPS et $\approx 10^{25}$ pour la méthode PAS⁹. Utiliser la méthode AS permettrait de réduire fortement le nombre minimum de signaux nécessaires — qui est égal à l'ordre de troncature —, mais cela n'améliorerait pas le conditionnement. Le cas $N = 50$ donne un conditionnement $\approx 10^{18}$ pour la méthode AS¹⁰. De plus, utiliser la méthode AS ne donne pas accès aux signaux inter-conjugués, dont nous avons montré que l'utilisation améliore l'identification (cf. § 3.4.1).

Quelle que soit la méthode utilisée, une approche fondée sur la séparation en ordres homogènes n'est pas viable dans le cas d'un système à forte distorsion contenant un très grand nombre d'ordres. Pour ce type de systèmes, la séparation en signaux homophases par la méthode HPS paraît être bien plus adaptée.

En effet, cette méthode nécessite un nombre de signaux en $O(N)$, et son conditionnement est toujours optimal — de par l'utilisation de la TFD. De plus, il a été montré que plus le nombre de phases utilisées est grand — ce qui correspond au nombre de signaux tests —, plus le bruit est réduit (cf. deuxième paragraphe de § 2.3.4 p. 48). En contrepartie, cette approche ne donne pas accès aux signaux d'ordres homogènes, mais seulement aux signaux homophases. Toutefois ces signaux peuvent servir à l'identification.

6.4 PERSPECTIVES POUR L'IDENTIFICATION

Avec ou sans séparation préalable, l'identification d'un système à forte distorsion dans le formalisme de Volterra se heurte au problème du nombre de

8. Comme les méthodes PAS et RPS repose sur l'inversion de plusieurs matrices, nous donnons ici le conditionnement le plus élevé, i.e. celui de la matrice permettant de retrouver les termes linéaires.

9. Où les amplitudes ont été fixées en utilisant la formule (2.63).

10. Où les amplitudes ont été fixées en utilisant la formule (2.62).

coefficients à estimer. En effet, pour reproduire avec précision le comportement du mode *Blues Breaker*, il est nécessaire de considérer un ordre de troncature proche de 40 (ou 100 pour le mode *Metallica*). Même en considérant l'identification de la projection des noyaux sur une base contenant seulement 5 éléments, le nombre de coefficients à estimer est de plus d'un million pour un ordre de troncature de $N = 40$ (et monte jusque la centaine de millions pour $N = 50$). On atteint donc les limites du formalisme de Volterra lorsque l'on cherche à identifier de tels systèmes, et il devient nécessaire de changer de modèle pour rendre l'identification réalisable.

Une approche possible serait d'utiliser des modèles de type schéma-blocs où les fonctions non linéaires statiques sont choisies pour modéliser une forte distorsion (e.g. une valeur absolue, la fonction arc tangente, etc.). Pour l'identification et la reproduction numérique de systèmes audio, l'utilisation de ce type de modèles se combine généralement avec des connaissances a priori permettant de ramener le modèle à un petit nombre de paramètres décrivant les filtres et les non-linéarités [Eichas *et al.*, 2015, 2017]. Il serait intéressant de voir si l'utilisation d'une séparation préalable en signaux homophases peut se combiner avec une telle approche, et si l'apport serait bénéfique à l'identification.

Conclusion et perspectives

Toujours remettre à demain ce que, demain, on pourrait remettre à... disons, l'année prochaine.

Terry Pratchett - *Procrastination*

BILAN DE LA THÈSE

Cette thèse s'est intéressée à l'identification de systèmes non linéaires représentables en série de Volterra, et plus particulièrement à l'utilisation d'une étape préalable de séparation en termes homogènes. Pour cela, plusieurs nouvelles méthodes de séparation ont tout d'abord été proposées et étudiées ([Chapitre 2](#)). Ensuite, ces résultats ont permis le développement de nouvelles approches pour l'identification des noyaux de Volterra ([Chapitre 3](#)). Enfin, une méthode d'estimation pour des représentations d'état à non-linéarités polynomiales a été proposée ([Chapitre 4](#)).

Dans une deuxième partie, les méthodes proposées ont été appliquées à des systèmes sonores. L'approche développée au [Chapitre 4](#) a été appliquée à l'estimation des paramètres linéaires et non linéaires d'un haut-parleur électrodynamique ([Chapitre 5](#)). Enfin, l'utilisation des méthodes de séparation sur une pédale d'effet de guitare à fortes distorsions a permis d'étudier leur comportement dans le cas d'un système à fortes distorsions ([Chapitre 6](#)).

Les contributions des trois axes de travail (séparation, identification et estimation) sont détaillées ci-dessous.

Séparation en termes homogènes. L'exploitation des relations de phase à l'intérieur d'une collection de signaux tests a été mise à profit pour développer plusieurs approches de séparation.

Tout d'abord, une méthode de séparation en ordres homogènes a été présentée dans un cadre théorique utilisant des signaux complexes comme entrée et sortie du système étudié (CPS, [§ 2.2](#)). L'intérêt des propriétés de cette méthode basée sur la Transformée de Fourier Discrète a été mis en avant, à la fois

du point de vue de la robustesse au bruit de mesure ainsi que de l'effet d'une mauvaise troncature de la série.

Ensuite le comportement de la sortie d'une série de Volterra pour une entrée déphasée mais à valeurs réelles a été étudié. Cela a amené à la définition de deux nouveaux types de signaux permettant la réécriture du signal de sortie : les signaux interconjugués (§ 2.3.1) et les signaux homophases (§ 2.3.2). L'adaptation aux signaux réels de la méthode CPS a permis le développement d'une méthode de séparation en signaux homophases (HPS, § 2.3.3), qui présente une grande robustesse.

Néanmoins, nous avons pu remarquer que l'utilisation des seules relations de phase ne permettait pas la séparation totale des ordres homogènes. Pour cela, deux autres méthodes ont été proposées : PAS, qui combine la méthode HPS et des relations d'amplitudes entre signaux (§ 2.4), et RPS, qui utilise un double déphasage et exploite la multi-linéarité des séries de Volterra (§ 2.5). Ces deux méthodes permettent à la fois la séparation des sorties d'ordres homogènes et des signaux interconjugués. Elles nécessitent néanmoins nombre de signaux tests significativement plus grand que la méthode de l'état de l'art (AS, basée sur l'utilisation de relations d'amplitudes).

Il a été montré que les méthodes de séparation en ordres homogènes proposées (PAS et RPS) sont aussi robustes que la méthode AS pour un nombre de signaux tests équivalent. Ces nouvelles méthodes permettent de plus la séparation des signaux interconjugués. La notion proposée de signaux homophases s'est révélée très intéressante, principalement pour le conditionnement optimal qu'elle confère à la méthode de séparation qui lui est associée. L'application des méthodes proposées à une pédale de pré-amplification de guitare a permis de montrer l'intérêt de l'approche par séparation en signaux homophases, y compris dans le cas d'un système dont le degré maximal de non-linéarité est très élevé (Chapitre 6).

Identification des noyaux Volterra. Plusieurs approches d'identification utilisant les différents types de signaux séparés (ordres, interconjugués, homophases) ont été proposées (§ 3.1). Chaque approche a été explicitée dans le cas de l'identification des noyaux de Volterra sous forme triangulaire (§ 3.2), ou de la projection sur une base orthonormale préalablement définie (§ 3.3).

Pour un nombre de données équivalents, les méthodes d'identification utilisant des signaux séparés sont moins coûteuses en utilisation de mémoire machine et en temps de calcul que l'approche directe utilisant la sortie totale. Néanmoins, seule la méthode fondée sur les signaux homophases donne des résultats (en terme d'erreur de simulation) équivalents à l'approche directe.

Estimation de représentation d'état. Une méthode d'estimation de représentations d'état non linéaires a été proposée. Elle repose sur une séparation préa-

lable en ordres homogènes, et estime séparément les paramètres linéaires, quadratiques, etc., du modèle. Les avantages de cette approche sont qu'il est possible de bénéficier des résultats connus dans la littérature sur l'estimation de représentation d'état linéaire, et que la formulation du problème est linéaire en les paramètres. Mais la méthode repose sur une approche itérative qui va propager l'erreur d'estimation des termes linéaires aux ordres élevés.

Cette méthode est utilisée pour estimer les paramètres physiques d'un haut-parleur électrodynamique à partir de mesures expérimentales ([Chapitre 5](#)). Les courbes estimées des caractéristiques non linéaires font clairement apparaître le comportement raidissant de la suspension et la décroissance du terme de couplage électrodynamique. Les méthodes de séparation d'ordres (et spécialement l'isolement de la contribution linéaire) présentent un intérêt à souligner : elles permettent d'exhiber des phénomènes linéaires non inclus dans le modèle et qui peuvent être masqués par les contributions non linéaires dans la dynamique, ou par le bruit pour des mesures à faible amplitude.

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Séparation en termes homogènes. Les méthodes de séparation proposées ont été développées dans le cadre des systèmes mono-entrée mono-sortie, et leur extension au cas multi-sortie a été évoquée. Une perspective de recherche serait d'étudier l'extension des méthodes proposées pour le cas des systèmes multi-entrées. Cette extension apportera plus de complexité, mais devrait être assez directe.

Les méthodes proposées nécessitent un grand nombre de mesures, qu'il serait intéressant de diminuer. Une piste actuellement à l'étude est de considérer un signal périodique dont la multiplication par un facteur de phase est équivalente à un décalage temporel. L'idée est que la mesure de toutes les versions déphasées s'obtiendrait en une seule mesure.

Identification des noyaux Volterra. Lorsque l'on s'intéresse à l'identification de la projection des noyaux sur une base orthonormale donnée, le choix de la base utilisée est crucial. Une base optimale pour tous les noyaux peut se déterminer à partir de la mesure des pôles de la *Best Linear Approximation* (BLA) obtenue à partir de la sortie totale mesurée. Si les ordres homogènes sont connus, la même approche permet de déterminer une base optimale pour chaque ordre (et donc permettre une meilleure identification). Or nous avons vu que l'approche par séparation en signaux homophases est généralement plus robuste que celle fondée sur la séparation en ordres homogènes. Il serait donc intéressant d'étudier la possibilité de déterminer des bases optimales pour chaque ordre à partir des signaux homophases et de l'utilisation d'une approche de type BLA.

Un autre axe de travail consisterait en l'incorporation d'autres approches dans l'identification sur les signaux séparés, comme par exemple l'utilisation de techniques de régularisation ou la résolution par descente de gradient.

Identification d'effets audio analogiques. Lorsque l'on s'intéresse à l'identification d'une pédale de pré-amplification de guitare, l'estimation des noyaux de Volterra non structurés est un problème trop complexe (en termes de nombre de coefficients à estimer). Cependant, la méthode de séparation en signaux homophases semble donner des résultats très robustes, et permet de séparer les harmoniques du signal de sortie jusqu'à un ordre élevé. Une piste de recherche serait de combiner cette séparation avec des informations *a priori* sur la structure du circuit de la pédale pour construire une méthode d'identification adaptée.

Estimation de représentation d'état. La méthode d'identification de représentation d'état proposée nécessite la séparation des ordres homogènes. Une perspective d'amélioration serait de développer des méthodes utilisant soit les signaux interconjugués, soit les signaux homophases. Pour cela, il serait tout d'abord nécessaire de trouver les formulations de ces signaux dans le cas d'une représentation non linéaire. Dans le cas des signaux homophases, il serait de plus nécessaire d'utiliser une méthode d'identification conjointe de tous les paramètres (pour laquelle le problème n'est plus linéaire en les paramètres). En effet, dans ce cas, il n'est plus possible d'estimer les paramètres linéaires nécessaires à la méthode itérative proposée, puisque que les sorties linéaires ne sont pas séparées.

Haut-parleur électrodynamique. Lors de l'estimation des paramètres physiques du haut-parleur, les résultats obtenus montrent les limitations du modèle utilisé (plus que celle de la méthode d'estimation utilisée). Une amélioration de celui-ci est donc nécessaire pour mieux expliquer le comportement du haut-parleur. L'utilisation d'un modèle visco-élastique de la suspension permettrait de prendre en compte les phénomènes de mémoire longue, et d'étendre la validité du modèle en basses fréquences. Quant aux améliorations à apporter sur le comportement en hautes fréquences, elles concernent probablement en premier lieu l'intégration de courants de Foucault. Ces deux phénomènes pourraient se modéliser dans une représentation d'état par une approximation de dimension finie d'un modèle en dérivées fractionnaires.

— Annexe A —

Preuves pour le Chapitre 2

A.1 PREUVE DU THÉORÈME 2.1

Considérons les hypothèses du [Théorème 2.1](#), et soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\text{Re}[\theta u] = \frac{1}{2}(\theta u + \overline{\theta u})$, la symétrie et n -linéarité de V_n donnent l'expression suivante pour la sortie d'ordre n (cf. [\(2.24\)](#)) :

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} \theta^{n-2q} y_{n,q}(t). \quad (\text{A.1})$$

Considérons le changement de variable $(n, q) \rightarrow (n, p)$ avec, pour $0 \leq q \leq n$,

$$p = n - 2q \Leftrightarrow q = \frac{n-p}{2}, \quad (\text{A.2})$$

ce qui implique $-n \leq p \leq n$ et $p \equiv n [2]$.

Appliquer le changement de variable [\(A.2\)](#) à [\(A.1\)](#) donne

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{p=-n \\ p \equiv n [2]}}^n \binom{n}{\frac{n-p}{2}} \theta^p y_{n, \frac{n-p}{2}}(t). \quad (\text{A.3})$$

La sortie totale $y = \sum_{n=0}^N y_n$ s'écrit donc

$$y(t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{p=-n \\ p \equiv n [2]}}^n \binom{n}{\frac{n-p}{2}} \theta^p y_{n, \frac{n-p}{2}}(t). \quad (\text{A.4})$$

Soit $\mathbb{I}_p^N = \{n \in \mathbb{N} \mid |p| \leq n \leq N \text{ et } n \equiv p [2]\}$ l'ensemble défini en [\(2.25\)](#). En réor-

ganisant le double somme¹, on obtient

$$y(t) = \sum_{p=-N}^N \theta^p \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{I}_p^N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} y_{n, \frac{n-p}{2}}(t)}_{:=\psi_p(t)}, \quad (\text{A.5})$$

ce qui conclut la preuve.

A.2 PREUVE DU THÉORÈME 2.2

Considérons les hypothèses du Théorème 2.2. Puisque

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\theta_1 u + \theta_2 u}{2} \right] = \frac{1}{4} (\theta_1 u + \overline{\theta_1 u} + \theta_2 u + \overline{\theta_2 u}), \quad (\text{A.6})$$

la symétrie et n -linéarité de V_n donnent l'expression suivante pour la sortie d'ordre n :

$$y_n(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4=0 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=n}}^n \left(\binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} \theta_1^{k_1} \overline{\theta_1}^{k_2} \theta_2^{k_3} \overline{\theta_2}^{k_4} \times \right. \\ \left. V_n \left[\underbrace{u, \dots, u}_{k_1 \text{ fois}}, \underbrace{\overline{u}, \dots, \overline{u}}_{k_2 \text{ fois}}, \underbrace{u, \dots, u}_{k_3 \text{ fois}}, \underbrace{\overline{u}, \dots, \overline{u}}_{k_4 \text{ fois}} \right] (t) \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4=0 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=n}}^n \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} \theta_1^{k_1-k_2} \theta_2^{k_3-k_4} y_{n, k_2+k_4}(t). \quad (\text{A.8})$$

Considérons le changement de variable $(k_1, k_2, k_3, k_4) \rightarrow (l_1, l_2, p_1, p_2)$ avec

$$\begin{cases} l_1 = k_1 + k_2 \\ l_2 = k_3 + k_4 \\ p_1 = k_1 - k_2 \\ p_2 = k_3 - k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = (l_1 + p_1)/2 \\ k_2 = (l_1 - p_1)/2 \\ k_3 = (l_2 + p_2)/2 \\ k_4 = (l_2 - p_2)/2 \end{cases}. \quad (\text{A.9})$$

Les nouvelles variables l_i, p_i ($i = 1, 2$) respectent les conditions

$$\begin{aligned} n &= l_1 + l_2, \\ p_i &\equiv l_i [2] & \implies & p_1 + p_2 \equiv n [2], \\ |p_i| &\leq l_i & \implies & |p_1| + |p_2| \leq n. \end{aligned}$$

1. Dans le cas où l'ordre maximal N vaut $+\infty$, la preuve que les sommes peuvent être inversées est immédiate en utilisant le théorème de Fubini et en considérant que le terme de droite doit converger puisque la série de Volterra converge.

L'application du changement de variable (A.9) à (A.7) donne

$$y_n(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{|p_1|+|p_2|\leq n \\ p_1+p_2\equiv n[2]}} \sum_{\substack{l_1\geq|p_1| \\ l_2\geq|p_2| \\ l_1+l_2=n \\ l_1\equiv|p_1|[2]}} \theta_1^{p_2} \theta_2^{p_2} y_{n, \frac{n-p_1-p_2}{2}}(t) \binom{n}{\frac{l_1+p_1}{2}, \frac{l_2+p_2}{2}, \frac{l_1-p_1}{2}, \frac{l_2-p_2}{2}}, \quad (\text{A.10})$$

ce qui peut se simplifier en

$$y_n(t) = \sum_{\substack{|p_1|+|p_2|\leq n \\ p_1+p_2\equiv n[2]}} \theta_1^{p_2} \theta_2^{p_2} y_{n, \frac{n-p_1-p_2}{2}}(t) \sum_{\substack{l=|p_1| \\ l\equiv|p_1|[2]}}^{n-|p_2|} \frac{1}{4^n} \binom{n}{\frac{l+p_1}{2}, \frac{n-l+p_2}{2}, \frac{l-p_1}{2}, \frac{n-l-p_2}{2}}. \quad (\text{A.11})$$

La dernière somme est égale à $\chi_n(|p_1|, |p_2|)$ comme définie en (2.42). On a alors

$$y_n(t) = \sum_{\substack{|p_1|+|p_2|\leq n \\ p_1+p_2\equiv n[2]}} \theta_1^{p_2} \theta_2^{p_2} y_{n, \frac{n-p_1-p_2}{2}}(t) \chi_n(|p_1|, |p_2|). \quad (\text{A.12})$$

La sortie totale $y = \sum_{n=0}^N y_n$ s'écrit donc

$$y(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{|p_1|+|p_2|\leq n \\ p_1+p_2\equiv n[2]}} \theta_1^{p_2} \theta_2^{p_2} \chi_n(|p_1|, |p_2|) y_{n, \frac{n-p_1-p_2}{2}}(t). \quad (\text{A.13})$$

Soit $\mathbb{J}_{p_1, p_2}^N = \{n \in \mathbb{N} \mid |p_1| + |p_2| \leq n \leq N \text{ et } n \equiv p_1 + p_2 [2]\}$ l'ensemble défini en (2.43). Les deux sommes de (A.13) peuvent être échangées², donnant

$$y(t) = \sum_{|p_1|+|p_2|\leq N} \theta_1^{p_2} \theta_2^{p_2} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{J}_{p_1, p_2}^N} \chi_n(|p_1|, |p_2|) y_{n, \frac{n-p_1-p_2}{2}}(t)}_{:= \Psi_{p_1, p_2}(t)}, \quad (\text{A.14})$$

ce qui conclut la preuve.

A.3 PREUVE DE L'EFFET DE LA MÉTHODE RPS SUR LE BRUIT DE MESURE

Soit P le nombre de phases utilisées dans la méthode RPS. On note P^- et P^+ les bornes des indices de phase, i.e. $P^- = P^+ = (P-1)/2$ si P est impair, et $P^- = P/2 - 1$ et $P^+ = P/2$ si P est pair.

Considérons la collection de bruits Gaussien b_{k_1, k_2} , pour $(k_1, k_2) \in \llbracket P^-; P^+ \rrbracket$, à moyenne nulle et dont la covariance est donnée par (2.52), i.e.

$$\text{Cov}(b_{k_1, k_2}, b_{l_1, l_2}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } k_1 = l_1 \text{ et } k_2 = l_2; \\ \sigma^2, & \text{si } k_1 = l_2 \text{ et } k_2 = l_1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

2. La même remarque que pour la preuve précédente s'applique ici aussi.

Soit $\delta_{k,l}$ le symbole de Kronecker donné par

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

On peut alors réécrire (A.15) comme

$$\text{Cov}(b_{k_1,k_2}, b_{l_1,l_2}) = \sigma^2 \left(\delta_{k_1,l_1} \delta_{k_2,l_2} + \delta_{k_1,l_2} \delta_{k_2,l_1} - \delta_{k_1,l_1} \delta_{k_2,l_2} \delta_{k_1,k_2} \right). \quad (\text{A.17})$$

Soit les erreurs ε_{p_1,p_2} , pour $p_1, p_2 = P^-, \dots, P^+$, donnée par $\varepsilon(t) = \mathcal{F}_{P,P}^{-1}\{\mathbf{b}\}(t)$. On note $w = e^{-j2\pi/P}$. Alors, comme $w^{p+rP} = w^p$ pour tout p et tout entier $r \in \mathbb{Z}$, on peut écrire

$$\varepsilon_{p_1,p_2}(t) = \frac{1}{P^4} \sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} w^{-k_1 p_1} w^{-k_2 p_2} b_{k_1, k_2}(t). \quad (\text{A.18})$$

Les relations de covariance des bruits ε_{p_1,p_2} sont donc données par

$$\text{Cov}(\varepsilon_{p_1,p_2}, \varepsilon_{q_1,q_2}) = \frac{1}{P^4} \sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} \sum_{l_1, l_2=P^-}^{P^+} w^{-k_1 p_1 - k_2 p_2} w^{l_1 q_1 + l_2 q_2} \text{Cov}(b_{k_1, k_2}, b_{l_1, l_2}) \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{\sigma^2}{P^4} \left(\sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} w^{k_1(q_1-p_1)} w^{k_2(q_2-p_2)} + \sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} w^{k_1(q_1-p_2)} w^{k_2(q_2-p_1)} - \sum_{k_1=P^-}^{P^+} w^{k_1(q_1+q_2-p_1-p_2)} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{\sigma^2}{P^2} \left(\delta_{p_1, q_1} \delta_{p_2, q_2} + \delta_{p_1, q_2} \delta_{p_2, q_1} - \frac{1}{P} \widehat{\delta}_{p_1+p_2, q_1+q_2} \right), \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\widehat{\delta}_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv q [P]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

De la même manière, les relations de pseudo-covariance entre les bruits ε_{p_1,p_2} peuvent être calculées. En effet, la pseudo-covariance entre deux bruits aléa-

toires x et y est donnée par $\text{Cov}(x, \bar{y})$. Il suffit alors de calculer,

$$\text{Cov}(\varepsilon_{p_1, p_2}, \varepsilon_{q_1, q_2}) = \frac{1}{P^4} \sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} \sum_{l_1, l_2=P^-}^{P^+} w^{-k_1 p_1 - k_2 p_2} w^{-l_1 q_1 - l_2 q_2} \text{Cov}(b_{k_1, k_2}, b_{l_1, l_2}) \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{\sigma^2}{P^4} \left(\sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} w^{k_1(p_1+q_1)} w^{k_2(p_2+q_2)} + \sum_{k_1, k_2=P^-}^{P^+} w^{k_1(p_1+q_2)} w^{k_2(p_2+q_1)} - \sum_{k_1=P^-}^{P^+} w^{k_1(p_1+p_2+q_1+q_2)} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\sigma^2}{P^2} \left(\delta_{p_1, -q_1} \delta_{p_2, -q_2} + \delta_{p_1, -q_2} \delta_{p_2, -q_1} - \frac{1}{P} \widehat{\delta}_{p_1+p_2, -q_1-q_2} \right), \quad (\text{A.25})$$

Les relations (A.21) et (A.25) permettent de retrouver les résultats (2.53) et (2.54).

Bibliographie

- F. AGERKVIST, A. TORRAS-ROSELL et R. MCWALTER : Eliminating transducer distortion in acoustic measurements. *In Audio Engineering Society Convention 137*. Audio Engineering Society, 2014.
- F. T. AGERKVIST : Volterra Series Based Distortion Effect. *In Audio Engineering Society Convention 129*. Audio Engineering Society, 2010.
- F. T. AGERKVIST, A. TORRAS-ROSELL et R. MCWALTER : Improvements in elimination of loudspeaker distortion in acoustic measurements. *In Audio Engineering Society Convention 138*. Audio Engineering Society, 2015.
- Z. B. AHMED, G. FAVIER et N. DERBEL : Identification of Volterra-PARAFAC models using partial update LMS algorithms. *In 7th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, pages 1–4. IEEE, 2015.
- D. BARD : *Compensation des non-linéarités des systèmes haut-parleurs à pavillon*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suisse, 2005.
- D. BARD et G. SANDBERG : Modeling of Nonlinearities in Electrodynamic Loudspeakers. *In Audio Engineering Society Convention 123*. Audio Engineering Society, 2007.
- J. BARRETT : The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems. *International Journal of Electronics*, 15(6):567–615, 1963.
- G. BIRPOUTSOUKIS : *Volterra Series Estimation in the Presence of Prior Knowledge*. Thèse de doctorat, Vrije Universiteit Brussel, Bruxelles, Belgique, 2018.
- G. BIRPOUTSOUKIS, P. Z. CSURCSIA et J. SCHOUKENS : Efficient multidimensional regularization for Volterra series estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 104:896–914, 2018.
- G. BIRPOUTSOUKIS, A. MARCONATO, J. LATAIRE et J. SCHOUKENS : Regularized nonparametric Volterra kernel estimation. *Automatica*, 82:324–327, 2017.

- D. BOUVIER, T. HÉLIE et D. ROZE : Nonlinear Homogeneous Order Separation for Volterra Series Identification. *In Proceedings of the 20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'17)*, pages 3–10, Edinburgh, UK, 2017.
- S. BOYD, L. O. CHUA et C. A. DESOER : Analytical foundations of Volterra series. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1(3):243–282, 1984.
- S. BOYD et L. O. CHUA : Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 32(11):1150–1161, 1985.
- S. BOYD, Y. TANG et L. O. CHUA : Measuring Volterra kernels. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(8):571–577, 1983.
- M. B. BRILLIANT : Theory of the analysis of nonlinear systems. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology. Research Laboratory of Electronics, 1958.
- R. W. BROCKETT : Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations. *In Nonlinear systems and applications*, pages 39–46. Elsevier, 1977.
- R. W. BROCKETT : Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12(2):167–176, 1976.
- P. BRUNET et B. SHAFAI : Identification of loudspeakers using fractional derivatives. *Journal of the Audio Engineering Society*, 62(7/8):505–515, 2014.
- R. J. CAMPELLO, W. C. do AMARAL et G. FAVIER : A note on the optimal expansion of Volterra models using Laguerre functions. *Automatica*, 42(4):689–693, 2006.
- R. J. CAMPELLO, G. FAVIER et W. C. do AMARAL : Optimal expansions of discrete-time volterra models using Laguerre functions. *Automatica*, 40(5):815–822, 2004.
- L. O. CHUA et Y. LIAO : Measuring Volterra kernels (ii). *International journal of circuit theory and applications*, 17(2):151–190, 1989.
- L. O. CHUA et Y. LIAO : Measuring Volterra kernels (iii) : How to estimate the highest significant order. *International journal of circuit theory and applications*, 19(2):189–209, 1991.
- S. CLANCY et W. RUGH : A note on the identification of discrete-time polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):975–978, 1979.
- I. COHEN : Simulation de circuits audio analogiques non linéaires par les séries de Volterra. Mémoire de master, Université Pierre et Marie Curie, 2007.

- J. DIEUDONNÉ : *Foundations of modern analysis*. Read Books Ltd, 2013.
- J. C. DOYLE : Structured uncertainty in control system design. *In 24th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 24, pages 260–265. IEEE, 1985.
- DSPACE : *Fiche technique constructeur de la carte d'acquisition MicroLabBox*. URL https://www.dspace.com/shared/data/pdf/2018/dSPACE_MicroLabBox_Product_information_2018-06_English.pdf. Accédé le 2018-10-05.
- E. ECONOMAKOS : Identification of a group of internal signals of zero-memory nonlinear systems. *Electronics Letters*, 7(4):99, 1971.
- F. EICHAS, S. MÖLLER et U. ZÖLZER : Block-oriented modeling of distortion audio effects using iterative minimization. *In Proceedings of the 18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'15)*, Trondheim, Norvège, 2015.
- F. EICHAS, S. MÖLLER et U. ZÖLZER : Block-oriented gray box modeling of guitar amplifiers. *In Proceedings of the 20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'17)*, pages 184–191, Edinburgh, Royaume-Uni, 2017.
- A. FALAIZE : *Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios : approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2016.
- A. FALAIZE et T. HÉLIE : Passive guaranteed simulation of analog audio circuits : A port-hamiltonian approach. *Applied Sciences*, 6(10):273, 2016.
- A. FARINA : Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. *In Audio Engineering Society Convention 108*. Audio Engineering Society, 2000.
- G. FAVIER, A. KIBANGOU et R. CAMPELLO : Nonlinear systems modelling by means of generalized orthonormal basis functions. *In IEEE Conference on Signals, Systems, Decision and information technology (SSD)*, volume 3, 2003.
- G. FAVIER, A. Y. KIBANGOU et T. BOUILLOC : Nonlinear system modeling and identification using Volterra-PARAFAC models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(1):30–53, 2012.
- M. FLIESS : Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bulletin de la société mathématique de France*, 109:3–40, 1981.
- M. FLIESS, M. LAMNABHI et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE : An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(8):554–570, 1983.

- J. FOURIER : *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- A. S. FRENCH et E. G. BUTZ : Measuring the Wiener kernels of a non-linear system using the fast Fourier transform algorithm. *International Journal of Control*, 17(3):529–539, 1973.
- P. G. GALLMAN et K. NARENDRA : Representations of nonlinear systems via the Stone-Weierstrass theorem. *Automatica*, 12(6):619–622, 1976.
- A. GARDINER : Determination of the linear output signal of a process containing single-valued nonlinearities. *Electronics Letters*, 4(11):224–226, 1968.
- D. A. GEORGE : Continuous nonlinear systems. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology. Research Laboratory of Electronics, 1959.
- E. GILBERT : Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(6):909–921, 1977.
- F. GIRI et E.-W. BAI : *Block-oriented nonlinear system identification*. Springer, 2010.
- Y. GOUSSARD, W. C. KRENZ et L. STARK : An improvement of the Lee and Schetzen cross-correlation method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9):895–898, 1985.
- Y. GOUSSARD, W. C. KRENZ, L. STARK et G. DEMOMENT : Practical identification of functional expansions of nonlinear systems submitted to non-Gaussian inputs. *Annals of biomedical engineering*, 19(4):401–427, 1991.
- R. HACIOĞLU et G. A. WILLIAMSON : Reduced complexity Volterra models for nonlinear system identification. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2001(4):734913, 2001.
- A. HALME, J. ORAVA et H. BLOMBERG : Polynomial operators in non-linear systems theory. *International Journal of Systems Science*, 2(1):25–47, 1971.
- M. HASLER : Phénomènes non linéaires. *École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 1999.
- T. HÉLIE : Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio circuits including saturations : Application to the Moog ladder filter. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 18(4):747–759, 2010.
- T. HÉLIE : Modélisation physique d’instruments de musique et de la voix. Habilitation à Diriger des Recherches, 2013.
- T. HÉLIE : Simulation of fractional-order low-pass filters. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing (TASLP)*, 22(11):1636–1647, 2014.

- T. HÉLIE, A. FALAIZE et N. LOPES : Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs. *In Colloque National en Calcul des Structures*, volume 12, 2015.
- T. HÉLIE et M. HASLER : Volterra series for solving weakly non-linear partial differential equations : application to a dissipative Burgers equation. *International Journal of Control*, 77(12):1071–1082, 2004.
- T. HÉLIE et B. LAROCHE : Computation of convergence bounds for Volterra series of linear-analytic single-input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9):2062–2072, 2011.
- T. HÉLIE et B. LAROCHE : Computable convergence bounds of series expansions for infinite dimensional linear-analytic systems and application. *Automatica*, 50(9):2334–2340, 2014.
- T. HÉLIE et D. MATIGNON : Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Signal Processing*, 86(10):2516–2528, 2006.
- T. HÉLIE et D. ROZE : Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 314(1):275–306, 2008.
- T. HÉLIE et V. SMET : Simulation of the weakly nonlinear propagation in a straight pipe : application to a real-time brassy audio effect. *In 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1580–1585. IEEE, 2008.
- M. R. HESTENES et E. STIEFEL : *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, volume 49. NBS Washington, DC, 1952.
- P. S. HEUBERGER, P. M. Van den HOF et O. H. BOSGRA : A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):451–465, 1995.
- P. M. J. van den HOF, P. S. C. HEUBERGER et J. BOKOR : System identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, 31(12):1821–1834, 1995.
- T. J. DE HOOG : *Rational orthonormal bases and related transforms in linear system modeling*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Delft, Delft, Pays-Bas, 2001.
- A. ISIDORI : *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- T. KAILATH : *Linear systems*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.

- A. J. KAIZER : Modeling of the nonlinear response of an electrodynamic loudspeaker by a Volterra series expansion. *Journal of the Audio Engineering Society*, 35(6):421–433, 1987.
- KEYENCE : Fiche technique constructeur du capteur laser LK-H050. URL <https://www.keyence.fr/products/measure/laser-1d/lk-g5000/models/lk-h050/index.jsp>. Accédé le 2018-10-05.
- H. K. KHALIL et J. GRIZZLE : *Nonlinear systems*. Prentice Hall New Jersey, troisième édition, 1996.
- A. KHOUAJA : *Modélisation et identification de systèmes non-linéaires à l'aide de modèles de volterra à complexité réduite*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, Nice, France, 2005.
- A. Y. KIBANGOU : *Modèles de volterra à complexité réduite : estimation paramétrique et application à l'égalisation des canaux de communication*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, Nice, France, 2005.
- A. Y. KIBANGOU et G. FAVIER : Identification of parallel-cascade Wiener systems using joint diagonalization of third-order Volterra kernel slices. *Signal Processing Letters, IEEE*, 16(3):188–191, 2009.
- A. Y. KIBANGOU, G. FAVIER et M. M. HASSANI : Laguerre-Volterra filters optimization based on Laguerre spectra. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(17):391385, 2005.
- A. W. KING et F. T. AGERKVIST : Position dependence of fractional derivative models for loudspeaker voice coils with lossy inductance. In *Audio Engineering Society Convention 142*. Audio Engineering Society, 2017.
- W. KLIPPEL : Nonlinear large-signal behavior of electrodynamic loudspeakers at low frequencies. *Journal of the Audio Engineering Society*, 40(6):483–496, 1992.
- M. H. KNUDSEN et J. G. JENSEN : Low-frequency loudspeaker models that include suspension creep. *Journal of the Audio Engineering Society*, 41(1/2):3–18, 1993.
- M. J. KORENBERG : Identifying nonlinear difference equation and functional expansion representations : the fast orthogonal algorithm. *Annals of biomedical engineering*, 16(1):123–142, 1988.
- R. H. LAMBERT : General Volterra and Swept-Sine Diagonal System Estimation and Modeling Performance. In *Audio Engineering Society Convention 137*. Audio Engineering Society, 2014.

- M. LAMNABHI : *Analyse des systèmes non linéaires par les méthodes de développements fonctionnels*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Paris, France, 1986.
- F. LAMNABHI-LAGARRIGUE et M. LAMNABHI : Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires. *Ricerche di Automatica*, 10:17–26, 1979.
- Z.-Q. LANG et S. BILLINGS : Output frequency characteristics of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 64(6):1049–1067, 1996.
- Z.-Q. LANG et S. BILLINGS : Output frequencies of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 67(5):713–730, 1997.
- Z. Q. LANG, S. A. BILLINGS, R. YUE et J. LI : Output frequency response function of nonlinear Volterra systems. *Automatica*, 43(5):805–816, 2007.
- G. LEE : Estimation of non-linear system parameters using higher-order frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2): 219–228, 1997.
- Y. W. LEE et M. SCHETZEN : Measurement of the Wiener kernels of a non-linear system by cross-correlation. *International Journal of Control*, 2(3):237–254, 1965.
- LEM[®] : *Fiche technique constructeur du capteur de courant LTS 6-NP*. URL https://www.lem.com/sites/default/files/products_datasheets/lts_6-np.pdf. Accédé le 2018-10-05.
- I. J. LEONTARITIS et S. A. BILLINGS : Input-output parametric models for non-linear systems Part I : deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303–328, 1985a.
- I. J. LEONTARITIS et S. A. BILLINGS : Input-output parametric models for non-linear systems Part II : stochastic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329–344, 1985b.
- K. LEVENBERG : A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168, 1944.
- L. LJUNG : *System identification : theory for the user*. Prentice-hall, 1987.
- L. LJUNG : Prediction error estimation methods. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 21(1):11–21, 2002.
- D. W. MARQUARDT : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2): 431–441, 1963.

- T. MCKELVEY, H. AKÇAY et L. LJUNG : Subspace-based multivariable system identification from frequency response data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):960–979, 1996.
- NEWTONS4TH LTD : *Fiche technique constructeur de l'amplificateur LPA05*. URL <https://www.newtons4th.com/wp-content/uploads/2014/05/LPA05-Dec-2017.pdf>. Accédé le 2018-10-05.
- B. NINNESS et F. GUSTAFSSON : A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):515–521, 1997.
- A. NOVAK, L. SIMON, P. LOTTON et F. KADLEC : Modeling of nonlinear audio systems using swept-sine signals : Application to audio effects. In *Proceedings of the 12th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, pages 1–4, 2009.
- A. V. OPPENHEIM, A. S. WILLSKY et S. H. NAWAB : *Signals and systems*. Prentice Hall New Jersey, seconde édition, 1997.
- J. PADUART : *Identification of nonlinear systems using Polynomial Nonlinear State Space models*. Thèse de doctorat, Vrije Universiteit Brussel, Bruxelles, Belgique, 2008.
- J. PADUART, L. LAUWERS, J. SWEVERS, K. SMOLDERS, J. SCHOUKENS et R. PINTELOON : Identification of nonlinear systems using polynomial nonlinear state space models. *Automatica*, 46(4):647–656, 2010.
- R. C. D. DE PAIVA, J. PAKARINEN et V. VÄLIMÄKI : Reduced-complexity modeling of high-order nonlinear audio systems using swept-sine and principal component analysis. In *Audio Engineering Society Conference : 45th International Conference : Applications of Time-Frequency Processing in Audio*. Audio Engineering Society, 2012.
- V. Y. PAN : How Bad Are Vandermonde Matrices? *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 37(2):676–694, 2016.
- R. PINTELOON et J. SCHOUKENS : *System identification : a frequency domain approach*. John Wiley & Sons, 2012.
- M. RÉBILLAT, R. HENNEQUIN, É. CORTEEL et B. F. G. KATZ : Identification of cascade of Hammerstein models for the description of nonlinearities in vibrating devices. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):1018–1038, 2011.
- RME : *Fiche technique constructeur de la carte son Fireface UC*. URL http://www.rme-audio.de/download/fface_uc_e.pdf. Accédé le 2018-10-05.

- D. ROZE : *Simulation de la propagation d'onde non linéaire par les séries de Volterra*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2010.
- D. ROZE et T. HÉLIE : Introducing a Green–Volterra series formalism to solve weakly nonlinear boundary problems : Application to kirchhoff's string. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2073–2086, 2014.
- W. J. RUGH : *Nonlinear system theory*. Johns Hopkins University Press Baltimore, 1981.
- M. SCHETZEN : Measurement of the kernels of a non-linear system of finite order. *International Journal of Control*, 1(3):251–263, 1965.
- M. SCHETZEN : A theory of non-linear system identification. *International Journal of Control*, 20(4):577–592, 1974.
- M. SCHETZEN : *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. John Wiley & Sons, 1980.
- T. SCHMITZ et J.-J. EMBRECHTS : Hammerstein Kernels Identification by Means of a Sine Sweep Technique Applied to Nonlinear Audio Devices Emulation. *Journal of the Audio Engineering Society*, 65(9):696–710, 2017.
- M. SCHOUKENS et K. TIELS : Identification of block-oriented nonlinear systems starting from linear approximations : A survey. *Automatica*, 85:272–292, 2017.
- P. J. SCHREIER et L. L. SCHARF : *Statistical signal processing of complex-valued data : the theory of improper and noncircular signals*. Cambridge University Press, 2010.
- SICA LOUDPSEAKERS® : *Fiche technique constructeur du haut-parleur SICA 3L 0, 8SL 8 Ohm modèle Z000900*. URL <https://www.sica.it/en/product/professional/3-l-0-8-sl>. Accédé le 2018-10-05.
- R. J. SIMPSON et H. M. POWER : Correlation techniques for the identification of non-linear systems. *Measurement and Control*, 5(8):316–321, 1972.
- R. H. SMALL : Closed-box loudspeaker systems – Part 1 : analysis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 20(10):798–808, 1972.
- TECH 21 : *Page descriptive de la pédale SansAmp™ GT2*. URL <http://www.tech21nyc.com/products/sansamp/gt2.html>. Accédé le 2018-10-05.
- N. THIELE : Loudspeakers in vented boxes : Part 1. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(5):382–392, 1971a.
- N. THIELE : Loudspeakers in vented boxes : Part 2. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(6):471–483, 1971b.

- K. TIELS et J. SCHOUKENS : Wiener system identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, 50(12):3147–3154, 2014.
- L. TRONCHIN : The emulation of nonlinear time-invariant audio systems with memory by means of Volterra series. *Journal of the Audio Engineering Society*, 60(12):984–996, 2013.
- M. VIBERG, B. OTTERSTEN, B. WAHLBERG et L. LJUNG : A statistical perspective on state-space modeling using subspace methods. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1337–1342. IEEE, 1991.
- J. VICTOR et R. SHAPLEY : A method of nonlinear analysis in the frequency domain. *Biophysical Journal*, 29(3):459–483, 1980.
- V. VOLTERRA : *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Tipografia della Reale Accademia dei Lincei, 1887.
- J. WADDINGTON et F. FALLSIDE : Analysis of non-linear differential equations by the Volterra series. *International Journal of Control*, 3(1):1–15, 1966.
- B. WAHLBERG : System identification using Laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):551–562, 1991.
- B. WAHLBERG : System identification using Kautz models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1276–1282, 1994.
- É. WALTER et L. PRONZATO : *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, 1994.
- N. WIENER : Response of a nonlinear device to noise. *Massachusetts Inst. Technology, Rept*, 129, 1942.
- N. WIENER et T. TEICHMANN : Nonlinear problems in random theory. *Physics Today*, 12:52, 1959.