HAL
open science

Un regard élémentaire sur les groupes algébriques

Adrien Deloro

To cite this version:

Adrien Deloro. Un regard élémentaire sur les groupes algébriques. Théorie des groupes [math.GR]. Université Pierre & Marie Curie - Paris 6, 2016. tel-01989901

HAL Id: tel-01989901

https://hal.science/tel-01989901v1

Submitted on 22 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

Un regard élémentaire sur les groupes algébriques

Mémoire d'habilitation

Présenté le 7 juillet 2016	Jury composé de :
par Adrien Deloro	Alexandre Borovik
	Emmanuel Breuillard
	Gregory Cherlin
	Françoise Point (rapporteuse)
	Bruno Poizat
Était aussi rapporteur	Patrick Polo
Dugald Macpherson	Frank Wagner (rapporteur)

Un regard élémentaire sur les groupes algébriques

Semper eidem

Remerciements

L'expression de la gratitude se marie mal avec l'exigence de concision. La liste est pourtant longue des gens que j'aurais voulu nommer.

Au niveau institutionnel j'ai bénéficié de l'accueil de plusieurs structures. Ce sont le département de mathématiques de Rutgers où je fus professeur assistant entre 2007 et 2009 ; l'Institut de Mathématiques de Jussieu qui m'héberge comme maître de conférences depuis cette date ; l'Institut Camille Jordan où j'ai passé l'année 2015–2016 en délégation CNRS ; le Village Mathématique de Şirince que je visite de façon régulière.

Du premier je remercie notamment Gregory Cherlin et Simon Thomas. Ils contribuèrent à confirmer le mathématicien dans le jeune docteur que j'étais. Quelques-uns des travaux présentés furent écrits à Rutgers ; d'autres, commencés ; d'autres encore y furent *voulus*.

À Paris j'ai eu la chance d'intégrer une équipe bien tolérante envers mes opinions esthétiques, mes positions épistémologiques, et mes intérêts mathématiques. J'abandonne l'idée de citer un à un tous les membres dont la compagnie permet de mêler l'utile à l'agréable. Patrick Polo surtout a fait preuve d'une grande patience face à la naïveté de mes questions.

C'est lors du retour aux sources lyonnais que fut conçu le présent mémoire. L'atmosphère amicale du département a beaucoup joué, et j'ai tissé des liens cordiaux et fertiles avec ses mathématiciens, des plus neufs aux mieux invétérés. Tout au long de l'année Tuna Altınel fut un Mentor avisé. Je dois filer la métaphore. Frank Wagner fut un Nestor ; Bruno Poizat, un Chiron. Il m'a grandement obligé par son hospitalité, et plus grandement encore honoré par sa conversation aux nombreux aspects.

Enfin je passe toujours au Village Mathématique de Şirince des jours lumineux et des veilles fécondes. Certains des résultats exposés y furent démontrés, et portent ainsi le signe d'Ali Nesin son maire. Naturellement l'endroit ne serait pas le même sans Alexandre Borovik à qui je dois tant que je renonce à tenter de le dire. J'y rencontre aussi Şükrü Yalcınkaya et Ayşe Berkman, et ces pages leur ressemblent plus qu'ils ne le pensent.

J'ai plaisir à retrouver nombre de ces vivants modèles dans le jury ; les autres sont dans les références. Je n'oublie pas Dugald Macpherson à la conversation toujours éclairante, Emmanuel Breuillard qui pulvérise les cloisonnements mathématiques, ni Françoise Point dont je loue tout particulièrement la diligence et la compréhension. Par ailleurs Élisabeth Bouscaren et Zoé Chatzidakis ont su me conseiller quand j'en ai eu besoin.

Il faut encore remercier trois compagnons de recherche. Tout d'abord Olivier Frécon qui dans la plus grande humilité fait naître des choses superbes. Également Jeffrey Burdges avec qui j'ai eu plaisir à faire un peu de route. Enfin Joshua Wiscons, nouvel arrivant plein de force et d'idées neuves. Le domaine aurait-il en lui trouvé son Perceval ?

Je salue la mémoire d'Éric Jaligot. J'ai tenté d'honorer ma dette mathématique dans le premier chapitre. Il reste la dette humaine. Éric fut, au sortir d'un long hiver, la première personne à me rendre un peu de confiance en moi — tout simplement en me montrant celle qu'il osait y avoir.

Et je remercie tous mes amis pour leur soutien tant qu'ont soufflé des vents contraires.

Introduction

Je n'aime ni les avant-propos, ni les préfaces et, autant que possible, je m'abstiens de faire devancer mes livres par d'inutiles phrases.

Le présent mémoire en français présente seize travaux de recherche écrits en langue étrangère, groupés en quatre chapitres relativement autonomes et pourvus chacun d'une introduction ; on n'omettra pas son bref glossaire final qui fournit le cadre commun. Et de ce fait l'avant-propos qui suit en est sans doute la partie la plus superflue.

Trois branches des mathématiques confluent à la connaissance de certaines structures : les groupes qui régissent les transformations de l'espace linéaire. Il s'agit de la géométrie algébrique, de la théorie de Chevalley, et de la théorie des modèles. La première manie les groupes algébriques ; la deuxième a généralisé l'emploi de l'action adjointe ; la troisième sait reconnaître certains groupes de complexité modérée. Les trois étudient donc, chacune par ses méthodes et dans son propre cadre formel, les groupes « de type Lie ». L'appellation pourtant classique nous semble trompeuse car les techniques inventées par ce mathématicien seront absentes du mémoire ; dans la présente introduction, nous parlerons plus informellement de « groupes de matrices ».

Les apports sont variés. La géométrie algébrique unifie les phénomènes dans une abstraction supérieure, alors que la théorie de Chevalley en suggère la compréhension pratique en générateurs et relations ; nous allons essayer de résumer la contribution de la théorie des modèles. Ce rameau-là des mathématiques garde en effet une réputation d'ésotérisme. L'honneur est usurpé car rien n'est plus concret que l'approche modèle-théorique aux groupes de matrices. Les méthodes dites « élémentaires » concernent bel et bien les éléments, ou certains sous-ensembles bien compris, et les raisonnements en jeu ne sont ni conceptuels ni même abstraits. Tentons de les présenter.

La nature mathématique est revêtue de multiples strates structurelles, semblables à des calques superposés. Le pendant moins contestable de cette affirmation est que dans son étude le mathématicien dispose d'outils plus ou moins élaborés, du calcul élémentaire au raisonnement le plus complexe. Il peut choisir de travailler avec autant d'information que possible : le géomètre par exemple, retrouvera dans nos objets toute une parentèle catégorique et pensera en termes de schémas en groupes. Mais il peut aussi préférer, par prudence, par curiosité, ou par vice, ou dans un souci d'effectivité, travailler au niveau le plus bas ou presque.

La théorie des modèles s'intéresse essentiellement aux structures relationnelles et feint d'ignorer à peu près tout des mathématiques non naïves ; l'objet pour elle est *presque* dans sa nudité combinatoire. Un groupe de matrices par exemple se verra dépouiller de son affiliation fonctorielle, de sa topologie — d'origine analytique ou algébrique — et donc des méthodes Lie-théoriques ; pris sur un corps quelconque, il perdra même l'information arithmétique portée par sa théorie des caractères.

Mais il reste une fine couche structurelle qui en fait plus qu'un groupe abstrait. Car la théorie des modèles prend en compte les parties dites *définissables*, pensées par analogie avec les ensembles constructibles des géomètres. Sur une structure arbitraire la combinatoire des parties définissables peut être arbitrairement complexe ; et la théorie des modèles offre une grille de lignes de division servant à estimer cette complexité.

Il sera beaucoup question dans ce mémoire d'une hypothèse logique extrêmement forte : celle où les définissables d'un groupe portent une notion de dimension dont les propriétés reflètent celles de la dimension de Zariski sur les constructibles. Un tel groupe est dit *rangé*.

L'importance historique de cette approche, qui prétendait montrer l'identité de la géométrie algébrique sur les corps algébriquement clos et de la situation modèle-théorique idéale, est peut-être connue du lecteur ; nous n'allons pourtant pas la rappeler, confiant que le cadre rangé a atteint une maturité suffisante pour être sa propre légitimation.

L'hypothèse rangée permet d'introduire une notion d'élément générique. On perd bien sûr et la topologie des géomètres et les méthodes de comptage des théoriciens des groupes finis, mais on peut imiter les arguments d'estimées dimensionnelles des parties constructibles. Les raisonnements sont donc très peu conceptuels, par nécessité méthodologique. Ceci les rend souvent plus longs, et le non-logicien se demandera ce qu'on y gagne. La réponse est l'effectivité potentielle. En ce sens un groupe rangé est comme la limite informelle d'un groupe fini de très grand ordre et dont on n'aurait accès qu'aux éléments les plus « probables ». On voit la logique ici fidèle à sa vocation moderne de faire dialoguer le finitaire et l'infini.

Retenons seulement que le cadre rangé met en avant les phénomènes *génériques* des groupes de matrices : cela donne une compréhension en termes d'éléments (ce qui n'est en rien l'objectif de la géométrie algébrique), mais aussi un moyen de lisser les irrégularités finies (ce que ne fait par définition pas la théorie de Chevalley).

Pour des raisons d'ordre technique les seuls groupes de matrices rangés infinis, sont sur des corps algébriquement clos. Mais si les groupes rangés fournissent une modélisation commode de ces groupes, on ignore dans quelle mesure le cadre a débordé la nature algébrique.

La réciproque est donc ouverte. C'est d'ailleurs un phénomène bien connu des logiciens que toute formalisation est potentiellement grosse d'artéfacts, et que la description d'une structure mathématique est toujours susceptible de s'appliquer à des objets nouveaux et imprévus. Il n'est jamais clair a priori si une tentative de classification mènera vers la découverte d'une nouvelle classe d'objets légitimes, vers la production d'un ensemble cohérent de techniques auparavant inconnues, ou vers le regret d'efforts dissipés en tératologie palliative. Dans le cas présent, l'auteur soutient volontiers que la deuxième option s'est déjà réalisée ; l'équilibre entre la première et la troisième est encore incertain.

Mais derrière cette question classique abordée au chapitre I, nous aurons surtout en vue les groupes de matrices étudiés par la théorie des modèles : ce que les raisonnements élémentaires du logicien disent de leur torsion (chapitre II) ; et après un chapitre assez calculatoire de transition (chapitre III) dont la logique est absente, comment leurs représentations s'insèrent dans la catégorie définissable (chapitre IV).

Les pages qui viennent décrivent ainsi ce qu'un théoricien des modèles voit dans les groupes de matrices, et cette fois nous espérons faire dire au lecteur, comme au digne descendant du chevalier Dupin : « Interesting, though elementary ».

Présentons enfin le mémoire.

- Le premier chapitre décrit une réécriture de nombreux travaux consacrés à un point de la conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber.
- Le deuxième chapitre est plus léger : on y rapporte de petites études liées à la torsion dans les groupes rangés, qui ont servi de laboratoire à quelques manipulations élémentaires sur les groupes de matrices. Le géomètre y trouvera notamment une démonstration très épurée d'un résultat de Robert Steinberg.
- Le troisième chapitre relate les mésaventures d'un logicien égaré loin de la logique. Enlevé par un théorème de Timmesfeld, il a voulu faire de la théorie des représentations des groupes de matrices d'un point de vue groupe-théorique entièrement calculatoire, sans recours géométrique ou logique.
- Enfin le quatrième et dernier chapitre fournit un cadre où cette tentative aura plus d'espoir : précisément l'hypothèse rangée, qui devrait permettre sa poursuite. Une conjecture y fait le lien entre logique et théorie des représentations.

Chaque chapitre est ainsi pourvu de ses règles propres. Pourtant tous obéissent à une forme commune : liste des travaux relatés, présentation desdits articles, développements techniques de lecture facultative, problèmes ouverts, puis références. Une conséquence est l'absence de bibliographie globale.

Chaque chapitre est aussi autonome que possible : tâche ardue pour le premier, dont un non-spécialiste préférera survoler la part technique. Mais le deuxième est plus accessible. Le troisième chapitre n'a *aucun* prérequis, signe certain de la vanité de l'entreprise. Tout concourent au dernier, plus ample. Un glossaire en fin de mémoire devrait faciliter la lecture. Il fournit les éléments techniques sous la forme d'un dictionnaire.

I. Ô Mort, vieux capitaine

Io e' compagni eravam vecchi e tardi…

Ce chapitre est hanté par l'ombre d'Éric. Quand voici neuf ans j'émaillais de citations de Baudelaire ma thèse en rédaction, puis les ébauches des travaux ici décrits, je n'imaginais certes pas quelle serait l'issue de notre *Voyage*.

Travaux présentés

[I.a] « Groups of finite Morley rank with solvable local subgroups », *Comm. Algebra* **40** (2012), no. 3, p. 1019–1068. En collaboration avec É. Jaligot.

[I.b] « Small groups of finite Morley rank with involutions », *J. Reine Angew. Math.* **644** (2010), p. 23–45. En collaboration avec É. Jaligot.

[I.c] « Lie rank in groups of finite Morley rank with solvable local subgroups », *J. Algebra* **395** (2013), p. 82–95. En collaboration avec É. Jaligot.

[I.d] « Involutive automorphisms of $N_\circ^\circ$-groups », à paraître au *Pacific J. Math.* (2016). En collaboration avec É. Jaligot.

Tous ces articles sont signés avec Éric Jaligot. Ils sont donnés dans l'ordre d'achèvement et non de parution.

---

1. Présentation

Les travaux évoqués dans ce premier chapitre traitent d'un point précis de la conjecture de Cherlin-Zilber ; l'analogie avec la théorie des groupes finis est essentielle et nous ferons en sorte d'en rappeler les termes. Répétons au lecteur qu'il trouvera un lexique à la fin de ce mémoire.

1.1. Contexte

L'intérêt pour les groupes de rang de Morley fini fut à l'origine motivé par un point de théorie des modèles pure : l'étude fine, après Morley, du phénomène d'$\aleph_1$-catégoricité. L'analogie entre l'ordinal appelé rang de Morley par les logiciens, et la dimension de Zariski en géométrie, commença de s'élucider avec les travaux de Baldwin puis de Zilber dans les années 1970. Dès la fin de la décennie Cherlin et Zilber suggéraient que les liens désormais flagrants entre groupes de rang de Morley fini et groupes algébriques n'étaient en rien fortuits, mais la partie visible d'un phénomène plus profond.

Conjecture (Cherlin, Zilber : conjecture « d'algébricité »). *Tout groupe simple infini de rang de Morley fini est isomorphe en tant que groupe abstrait au groupe $\mathbb{G}_\mathbb{K}$ d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$ sur un corps $\mathbb{K}$.*

Nous ne motiverons pas modèle-théoriquement cet énoncé, en faveur duquel plaident les premières propriétés observables des groupes de rang de Morley fini, et surtout l'analogue finitaire, c'est-à-dire la classification des groupes simples finis. D'un point de vue méthodologique, l'absence totale de structure de type géométrique semble pourtant éloigner le domaine de la théorie des groupes algébriques, et interdire tout recours à la théorie de Lie.

La stratégie retenue pour aborder la conjecture fut proposée par Borovik ; elle consistait en l'adaptation systématique des techniques du cas fini, avec pour conséquence une autonomisation progressive par rapport à la théorie des modèles. Borovik et Poizat ont d'ailleurs pu dégager une axiomatisation [Poi87, §2.4] des groupes de rang de Morley fini où la logique ne joue presque aucun rôle. Les axiomes en sont d'inspiration algébrique : on transpose certaines propriétés naturelles de la classe des constructibles et de la dimension de Zariski des groupes algébriques, à la classe plus vaste des définissables et à une fonction appelée simplement « rang ». C'est pourquoi l'on parle parfois de « groupes rangés » pour désigner les groupes de rang de Morley fini envisagés sous leur aspect le plus algébrique, et le moins modèle-théorique.

L'ampleur idéologique du programme de Borovik est grande mais la méthode a ses limites. La restriction principale est l'absence d'un analogue en contexte rangé du théorème dit « de l'ordre impair » de Feit et Thompson, qui garantit l'existence d'involutions, soit encore la non-trivialité du 2-sous-groupe de Sylow, dans tout groupe simple fini non-abélien. La 2-structure étant précisément la pierre angulaire du cas fini, ne pas disposer d'une telle assurance réduit la portée desdites techniques, et l'on conçoit qu'à ce jour les résultats obtenus en vue d'une classification des groupes rangés simples infinis requièrent des hypothèses sur la présence de 2-torsion et même sur sa nature. Le plus grand succès du domaine est le théorème de classification suivant.

Théorème (Altınel-Borovik-Cherlin, [ABC08] : théorème « du type au moins pair »). *Soit G un groupe rangé simple infini. On suppose que G contient un 2-groupe abélien élémentaire infini. Alors en tant que groupe abstrait, G est isomorphe au groupe $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2.*

Entre ce théorème et le cas potentiel de l'absence d'involutions reste ouverte une vaste portion de la conjecture d'algébricité, celle dite « du type impair », où les 2-sous-groupes de Sylow sont supposés toriques-par-finis, ce qui appelle un mot de terminologie. Un 2-tore est une puissance cartésienne finie du 2-groupe quasi-cyclique infini de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$; la puissance maximale est appelée 2-rang de Prüfer ; on peut définir plus généralement une notion de p-tore et le p-rang de Prüfer $\mathrm{Pr}_p(G)$ d'un groupe rangé ; il sera de nouveau question de torsion divisible au chapitre II.

Les travaux présentés s'inscrivent dans le cadre du type impair.

1.2. Enjeux

Il ne s'agit certes pas de prétendre établir la conjecture d'algébricité en type impair — à l'auteur la chose apparaît sans espoir — mais d'étudier certaines configurations minimales de manière exploitable. Nous avons donc à motiver des résultats partiels, et qui sembleraient au premier abord s'inscrire dans un programme inductif auquel plus personne ne croit guère ; le point est délicat.

(0) On peut imaginer deux tâches principales pour l'étude du type impair : une approche descendante et une approche ascendante. Ces termes sembleront mal choisis car ils devraient plutôt refléter un intérêt soit pour le cas dit générique, soit pour les configurations minimales. Nous les conserverons pour leur force d'évocation.

(1) L'approche descendante introduit de nombreuses notions : K-groupes (groupes dont tout sous-quotient définissable connexe simple est de type $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$; ce K est pour *known* et ne fait pas référence à un corps) ; K^*-groupes (hypothèse restreinte aux sous-quotients propres) ; L-groupes (hypothèse restreinte aux sous-quotients ayant des involutions) ; L^*-groupes (définis comme attendu). Cette approche descendante utilise des aménagements non-triviaux des techniques finitaires ; elle a remporté des victoires notables.

Théorème (Burdges, [Bur09] : théorème « du grand rang de Prüfer »). *Soit G un groupe rangé simple infini. On suppose que G est K^* et de 2-rang de Prüfer au moins 3. Alors en tant que groupe abstrait, G est de la*

forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$.

La technique d'identification convoquée par un tel résultat est une version du théorème « de Curtis-Phan-Tits », dont nous devons dire quelques mots en raison de son importance méthodologique. Le théorème identifie un groupe G avec une extension centrale d'un groupe de type Lie sous l'hypothèse qu'il possède une famille de sous-groupes se comportant comme les sous-groupes SL_2-racines du groupe-cible, les interactions étant prédites par le diagramme de Dynkin (plus précisément : deux sous-groupes SL_2-racines associés à des racines adjacentes doivent engendrer une extension centrale du groupe de rang 2 attendu). La forme classique vient de la théorie des groupes finis ; nous avons trouvé dans [Gra09] un historique minutieux. Sans hypothèses sur le corps de base, Timmesfeld [Tim04] a donné une version générale remarquablement efficace, employée en contexte rangé par Berkman-Borovik [BB04] et Berkman-Borovik-Burdges-Cherlin [BBBC08, Proposition 2.1]. L'adjectif « générique » dans le titre de tels travaux ne doit rien à la logique mathématique mais fait référence au rang de Lie, ou à sa modélisation naïve en type impair : le 2-rang de Prüfer. Par nature un énoncé type Curtis-Phan-Tits n'a d'intérêt qu'en rang de Lie au moins 3, ce qui explique la borne dans le théorème de Burdges.

En rang de Prüfer inférieur la chose est moins précise. La ligne de front semble être [BC08] ; en l'état ce front serait plutôt un *no man's land*. Par ailleurs le plan de campagne donné en appendice à la thèse de Burdges [Bur04] mériterait certainement d'être relu à l'aune de notre nouvelle connaissance de certains principes généraux relatifs à la torsion, évoqués au chapitre II.

Quoi qu'il en soit, toute approche inductive s'arrête aux portes du bas rang de Prüfer.

(2) Parlons donc de l'approche ascendante et des petites configurations. Une analyse fondée sur le rang serait contraire à l'esprit du programme de Borovik. Dès [Che79], Cherlin ne put éliminer du rang 3 les éventuelles pathologies nommées *mauvais groupes* — groupes rangés non-résolubles dont tous les sous-groupes définissables, connexes, et propres seraient nilpotents. Après cet écueil fondateur l'intérêt pour les groupes de bas rang fut perdu jusqu'à ce que très récemment Wiscons [Wis15] analyse le rang 4 afin de classifier certains petits groupes de permutation.

Une autre modélisation de la petitesse serait par le concept de groupe « simple minimal », c'est-à-dire groupe rangé connexe dans lequel tout sous-quotient définissable connexe propre est résoluble. Certaines techniques de l'approche descendante consistent d'ailleurs en montrer qu'un groupe hautement pathologique serait simple minimal, pour en tirer une contradiction via des résultats propres à ces derniers.

Or on ne sait pas tout des groupes simples minimaux dans l'absolu : car même en supposant qu'il y a des involutions, il n'est pas clair que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ soit le seul groupe rangé ayant la propriété. (Mentionnons en passant les efforts d'Altınel, Burdges, et Frécon [ABF13, ABF15] pour analyser cette classe en l'absence d'involutions.) Toute une série de travaux a porté sur les groupes simples minimaux de type impair ; dont la thèse [Del07].

Dès 2007 et l'achèvement de celle-ci, Borovik suggéra que Jaligot et l'auteur en mènent une extension similaire aux travaux de Thompson [Tho68, sqq] sur les N-groupes finis, ou groupes finis dans lesquels le normalisateur d'un sous-groupe résoluble reste résoluble. Il est à noter d'ailleurs que [Tho68] obtint en corollaire la classification des groupes simples minimaux *finis*, dont les groupes simples minimaux *rangés* étaient la généralisation naturelle par introduction de la clause de connexité mentionnée plus haut.

(3) Et c'est ici que nous avons à nous justifier. Car à quoi bon, dès lors que le cas simple minimal n'est pas entièrement compris, et que l'approche descendante menace de ne pas aboutir, tenter de généraliser l'approche ascendante ? À cela plusieurs raisons.

- D'abord le caprice, que nous ne cachons pas, de réussir enfin là où [Del07] avait échoué : en systématisant les arguments, d'offrir aux centralisateurs d'involutions le théorème qu'ils méritaient. L'extension clôt ainsi plusieurs années d'explorations simples minimales ; elle permet une vue enfin globale, autonome, et synthétique.
- Par ailleurs le désir de comprendre les automorphismes des petites configurations, en écho à l'absence d'automorphismes involutifs des mauvais groupes [BN94, Proposition 13.4] ; une telle étude s'inscrirait dans une éventuelle reprise du programme de classification. Ces automorphismes n'étaient d'ailleurs qu'imparfaitement compris dans le cas simple minimal (mentionnons les travaux de Frécon [Fré10]

dans une direction légèrement différente) : mais à ce point autant travailler avec l'analogue infinitaire des N-groupes de Thompson.
– Enfin le besoin d'outils pour l'analyse des représentations rangées : les résultats ici présentés sont indispensables à certains travaux du chapitre IV, et pour lesquels le cas simple minimal n'aurait pas suffi.

On ne pourra donc juger de la portée des théorèmes du premier chapitre qu'à la lecture du dernier ; pour leur élégance, nous espérons qu'elle sera manifeste et convaincra déjà le lecteur de la pertinence de la généralisation conseillée par Borovik.

Cette odyssée fut entreprise avec grand enthousiasme — *mon cœur, comme un oiseau, voltigeait tout joyeux* — et s'achève ici dans l'amertume. Le concept retenu fut celui de $N_\circ^\circ$-groupe.

1.3. Résultats

Définition. *Un $N_\circ^\circ$-groupe est un groupe rangé dans lequel le normalisateur de tout sous-groupe définissable, connexe, et résoluble, est résoluble-par-fini.*

Comme en [Del07], la classification de tels groupes même ayant des involutions, reste ouverte. La série offre donc des conclusions partielles que nous allons à présent décrire. Il est utile de rappeler qu'un sous-groupe de Borel est, en contexte rangé, un sous-groupe définissable, connexe, résoluble, et maximal pour ces propriétés ; ces groupes sont d'une grande importance méthodologique en général, et l'hypothèse $N_\circ^\circ$ attire encore davantage l'attention sur eux.

Théorème I.1 ([I.b, Theorem 4]). *Soit G un $N_\circ^\circ$-groupe ayant un 2-sous-groupe de Sylow infini. Alors l'un des trois cas suivants se présente :*

1. *G° est résoluble ;*
2. *il y a un sous-groupe fini $E \leq G$ et un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2 tels que $G = G^\circ \times E$ et $G^\circ \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$;*
3. *G° est de type impair et non-résoluble.*

Le point 2 pourrait être dérivé du théorème « du type au moins pair » cité en §1.1 : ce n'est bien sûr pas la voie suivie dans [I.b]. Avant d'aborder le type impair proprement dit, une variation sur un autre nombre premier que 2 fut tentée malgré les difficultés liées à l'absence d'une théorie générale des p-sous-groupes de Sylow. On espérait borner le p-rang de Prüfer (voir fin de §1.1), qui dans le cas algébrique de caractéristique différente de p coïncide avec le rang de Lie.

Théorème I.2 ([I.c]). *Soient G un $N_\circ^\circ$-groupe connexe non-résoluble, et $S < G$ un p-tore maximal, supposé de rang de Prüfer au moins 2. On suppose que tout sous-groupe de G définissable, connexe, propre, et contenant S est résoluble. On suppose en outre que pour $s \in S \smallsetminus \{1\}$, le centralisateur $C_G(s)$ est résoluble-par-fini. Soit $B = \langle \{ C_G^\circ(s) : s \in S \text{ d'ordre exactement } p \} \rangle$. Alors l'un des deux cas suivants se produit.*

1. *$B < G$ est un sous-groupe de Borel de G ; si dans ce cas S est un p-sous-groupe de Sylow de $N_{N_G(B)}(S)$, alors $N_G(B)$ est p-fortement inclus dans G ;*
2. *$B = G$, auquel cas le p-rang de Prüfer est exactement 2.*

La p-forte inclusion est la variation naturelle sur la forte inclusion classique, concept emprunté à la théorie des groupes finis. Rappelons qu'un sous-groupe définissable propre $M < G$ d'un groupe rangé est fortement inclus s'il contient des involutions, mais que pour tout $g \notin N_G(M)$, l'intersection $M \cap M^g$ n'en a pas. Pour $p = 2$ le cas (1) du Théorème I.2 est éliminé dans [I.d] (voir la Proposition 8 plus bas) ; comme entrevu dans [Del08] le cas (2) y survit néanmoins.

C'est le dernier article qui contient les résultats à nos yeux les plus pertinents. Son but n'est pas seulement d'étudier les $N_\circ^\circ$-groupes de type impair dans l'abstrait, mais de contrôler leurs 2-tores d'automorphismes en vue de limiter leur insertion dans de plus grands groupes. L'énoncé est un peu délicat car on y mélange involutions « internes » à G, notées i, et « externes », notées ι.

Théorème I.3 ([I.d]). *Soient $\hat{G}$ un groupe rangé connexe de type impair, et $G \trianglelefteq \hat{G}$ un $N_\circ^\circ$-sous-groupe définissable, connexe, non-résoluble, et distingué.*

Alors les 2-sous-groupes de Sylow de G sont de l'une des formes suivantes : isomorphes à ceux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$*, isomorphes à ceux de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$*, ou toriques de rang de Prüfer au plus* 2*.*

On suppose en outre que pour toute involution $\iota \in \hat{G}$*, le centralisateur* dans le sous-groupe $C_G(\iota)$ *est résoluble-par-fini.*

Alors les 2-groupes abéliens élémentaires de $\hat{G}$ *sont au plus* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ *; de G ou* $\hat{G}/G$*, l'un est sans involutions, car les involutions de* $\hat{G}$ *sont conjuguées. En outre l'un des cinq cas suivants se produit :*

- **PSL$_2$:** $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ *pour un corps* $\mathbb{K}$ *(et* $\hat{G}/G$ *n'a pas d'involutions) ;*
- **CiBo$_\varnothing$:** *G n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de* $\hat{G}$ *est un tore de rang de Prüfer* 1*; pour* ι *involution de* $\hat{G}$*, le centralisateur* $C_G(\iota)$ *est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G ;*
- **CiBo$_1$:** $\hat{G}/G$ *n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est un tore de rang de Prüfer* 1*; pour i involution de G, le centralisateur* $C_G(i)$ *est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G ;*
- **CiBo$_2$:** $\hat{G}/G$ *n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est comme dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$*; pour i involution de G, la composante connexe* $C_G^\circ(i)$ *est un sous-groupe de Borel abélien inversé par chaque involution de* $C_G(i) \smallsetminus \{i\}$ *; enfin* $\operatorname{rg} G = 3 \operatorname{rg} C_G(i)$ *;*
- **CiBo$_3$:** $\hat{G}/G$ *n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est un tore de rang de Prüfer* 2*; pour i involution de G, le centralisateur* $C_G(i)$ *est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G dont i est l'unique involution centrale.*

Commentons brièvement ce dernier énoncé. Remarquons d'abord que les configurations de type **CiBo** sont pathologiques : l'intuition attendrait des centralisateurs d'involutions qu'ils soient abéliens, ou du moins non-maximaux. Or même pour un élément semi-simple x d'ordre suffisamment grand, bien que le caractère $N_\circ^\circ$ force $C_G^\circ(x)$ à être résoluble, l'abélianité n'est pas garantie.

La configuration **CiBo$_2$** n'est pas sans évoquer le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, dont on sait pourtant qu'il n'est pas rangé ni même modèle-théoriquement stable : une raison en est la définissabilité de $\mathbb{R}$ par exemple via la méthode de Bachmann [BN94, Fact 8.15], et l'auteur n'est pas sûr d'avoir un meilleur argument pour montrer le caractère non-rangé. La configuration **CiBo$_3$** ressemble davantage à $\mathrm{PSL}_3(\overline{\mathbb{F}_3})$, mais ici la réductivité des centralisateurs d'éléments semi-simples est prise en défaut. **CiBo$_1$** n'a pas d'analogue fini : dans un groupe simple fini d'ordre au moins 3, le 2-sous-groupe de Sylow n'est jamais cyclique, ce qui peut se voir par récurrence et emploi de la représentation régulière, ou par application du morphisme de transfert. Aucune des deux méthodes n'a d'analogue en contexte rangé. Quant à **CiBo$_\varnothing$**, on n'a pas de meilleure raison de l'éliminer dans le cas fini que le théorème de Feit-Thompson. Nous reviendrons sur ces problèmes en §3.

L'histoire du résultat est relatée dans [I.d].

2. Quelques points de technique

Cette partie de lecture facultative se veut un guide à la lecture de [I.a, I.b, I.c, I.d] ; par opposition au survol précédent, elle requiert une certaine maîtrise des techniques des groupes rangés. L'auteur espère y mettre en relief quelques aspects des démonstrations pour pouvoir en dégager en §3 des leçons de méthode.

Commençons par une remarque géométrique. On vise $(\mathrm{P})\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Le rang de Tits de ce groupe étant 1, la seule technique empruntée à la géométrie combinatoire qui semble accessible est celle des ensembles de Moufang rangés, étudiés en [DMT08, Wis11] et que nous n'aurons pas besoin de définir.

Or toute information géométrique a priori manque à nos configurations. Pour essayer de la reconstruire on tente l'*analyse locale*, i.e. l'étude systématique des intersections de sous-groupes. Leur contrôle requiert des phénomènes de disjonction présentés dans les « principes d'unicité » et dans la « méthode de Bender » plus bas. Ici les choses se compliquent.

2.1. Unipotence

Si nous n'avons mentionné que trois théorèmes pour quatre articles, c'est que le premier de la série [I.a] joue le rôle ingrat de prologue technique. Y sont exposées outre les définitions préliminaires, les

méthodes relatives aux intersections de sous-groupes de Borel, définis au début de §1.3. Contrairement au cas algébrique [Hum75, §21], ces derniers ne jouissent pas de bonnes propriétés : on ignore tout de leur centre ; on n'a pas de théorème de conjugaison ; on ne comprend pas leurs intersections, même dans le contexte $N_\circ^\circ$.

(1) Ceci est lié à la difficulté qu'on trouve à modéliser le concept d'unipotence, qui n'est pas une propriété groupe-théorique. Et de fait le contexte rangé n'offre en général pas de décomposition de Jordan, si bien que l'opposition entre éléments semi-simples et éléments unipotents n'est pas triviale à mettre en place, surtout en caractéristique nulle. (Il n'est en effet pas clair que l'intrigant [ABF15], limité au cas simple minimal, soit l'amorce d'une théorie générale ; ce doute semble partagé par Altınel, Burdges, et Frécon.)

La raison profonde en est que la « matière » dont sont formés les groupes rangés admet tout un spectre de nuances entre semi-simple et unipotent. Le groupe additif d'un corps de caractéristique nulle pourrait en effet agir comme sous-groupe multiplicatif propre d'un autre corps — de caractéristique nulle aussi, pour des raisons de théorie des modèles que nous n'indiquerons pas ici. Cette pathologie est à confronter avec la situation algébrique linéaire où les deux seules briques fondamentales sont le groupe additif et le groupe multiplicatif [Hum75, Theorem 20.25]. En termes de méthodes, que ce dernier phénomène soit non-trivial à démontrer est un indice de sa disparition en contexte rangé ; le célèbre théorème de Reineke [BN94, Ex. 21 p. 80] assurant qu'un groupe connexe de rang 1 est abélien, celui de Macintyre [BN94, Theorem 6.7] décomposant tout groupe abélien rangé en somme directe d'une partie divisible et d'une partie d'exposant fini, paraissent dérisoires à côté du résultat algébrique.

(2) Et pourtant Burdges a réussi à présenter une théorie convaincante de l'unipotence, dont nous devons dire quelques mots ; il sera question de semi-simplicité au chapitre II.

Définition. *Un paramètre d'unipotence est une paire de la forme* (p, ∞) *(p premier) ou* $(0, d)$ *(d entier naturel). Les paramètres d'unipotence sont ordonnés comme suit :*

$$(2, \infty) > (3, \infty) > \cdots > \cdots > (0, d) > \cdots > (0, 0)$$

On appelle caractéristique du paramètre le premier entier.

Théorème (Burdges, [Bur04a] : notions d'unipotence)**.** *Il existe pour chaque paramètre d'unipotence* ρ *une notion de sous-groupe* ρ*-unipotent, de radical* ρ*-unipotent* $U_\rho(\cdot)$*, de* ρ*-sous-groupe de Sylow.*

Ces notions d'unipotence se comportent globalement bien en caractéristique positive ; en caractéristique nulle il faut garder à l'esprit que l'unipotence est *relative* et *graduée*.

Pour le paramètre ρ de caractéristique p, i.e. pour $\rho = (p, \infty)$, la notion est relativement classique. Un sous-groupe est ρ-unipotent s'il est définissable, connexe, nilpotent d'exposant une puissance de p. On ignore si la clause de nilpotence est redondante, ne sachant toujours pas si les « monstres de Tarski » peuvent être rangés, mais elle équivaut à la résolubilité ; la p-torsion sera plus longuement évoquée au chapitre II.

La construction est bien plus technique en caractéristique nulle. L'idée-force est pourtant simple : dans un corps de rang d, un sous-groupe multiplicatif définissable sans torsion est nécessairement propre, donc de rang $< d$. Ceci doit permettre de hiérarchiser certains blocs, les plus « lourds » ne pouvant agir non-trivialement sur les plus « légers ». Appelons donc indécomposable au sens de Burdges un sous-groupe définissable abélien qui ne peut s'écrire comme somme directe de deux tels sous-groupes propres. Un groupe indécomposable A est connexe (et partant, indécomposable au sens de Zilber, mais les deux notions sont d'inspiration distincte). En outre A possède un plus grand sous-groupe définissable connexe $\Phi(A)$. Pour un paramètre $\rho = (0, d)$ avec $d > 0$, appelons ρ-indécomposable un indécomposable A tel que $A/\Phi(A)$ soit sans torsion et de rang d ; Burdges pose alors :

$$U_\rho(G) = \langle A \leq G : A \text{ est } \rho\text{-indécomposable} \rangle$$

La définition comporte toutefois une subtilité supplémentaire pour la valeur $(0, 0)$, qui est liée au concept de semi-simplicité, et le lecteur est dirigé vers [I.d, §2.3].

Mentionnons en passant qu'un U_ρ-groupe peut contenir un U_σ-groupe non-trivial pour $\rho \neq \sigma$ des paramètres de caractéristique nulle, et que Frécon a montré (v. [I.d, Fact 7 (vii)]) un résultat d'*homogénéisation* excluant de tels parasites dans le cas d'un U_ρ-groupe obtenu comme groupe de commutateurs. Ce résultat avait été tenu pour essentiel à toutes les versions préliminaires des travaux présentés, menées dans les groupes simples minimaux ; comme on le verra, il est pourtant dispensable car il n'est nulle part invoqué dans [I.d].

Définition. *Le plus grand paramètre d'unipotence ρ tel qu'un groupe H ait un radical ρ-unipotent non-trivial est noté ρ_H, et simplement appelé : le paramètre de H.*

(3) Ceci étant, les deux techniques principales relatives aux intersections de sous-groupes de Borel dans les $N_\circ^\circ$-groupes sont liées à ce que l'unipotence ne se partage pas.

Proposition ([I.a, Corollary 4.3] : « principes d'unicité »). *Soient G un $N_\circ^\circ$-groupe et $B \leq G$ un sous-groupe de Borel. Soit $U \leq B$ un sous-groupe ρ_B-unipotent ; on suppose $\rho_{C_G^\circ(U)} \leq \rho_B$.*

Alors $U_{\rho_B}(B)$ est le seul ρ_B-sous-groupe de Sylow de G contenant U. En outre B est le seul sous-groupe de Borel de G de paramètre *ρ_B contenant U.*

L'autre technique d'analyse locale, cruciale dans [I.d], se résume avec peine : c'est l'adaptation au cadre $N_\circ^\circ$ de la monumentale transposition de la « méthode de Bender » par Burdges au contexte simple minimal [Bur07]. En peu de mots, disons qu'une partie de [I.a] est consacrée à l'étude serrée d'intersections non-abéliennes de sous-groupes de Borel d'un $N_\circ^\circ$-groupe. Il s'agit essentiellement de vérifier que les arguments de Burdges restent valides dans le nouveau contexte.

Théorème (Burdges, [Bur07] : « méthode de Bender » ; adaptée en [I.a, §4.2] ; la part effectivement utilisée *in fine* est en [I.d, §2.4]). *Sans être apparemment contradictoire, une intersection non-abélienne de sous-groupes de Borel $B_1 \neq B_2$ distincts d'un $N_\circ^\circ$-groupe peut donner lieu à une inspection extrêmement poussée.*

Notamment si l'intersection $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ est maximale, on peut étudier :
- *l'unicité des sous-groupes de Borel au-dessus de H ;*
- *les paramètres d'unipotence de B_1, B_2, H, H'.*

Ces bases posées dans le premier article, la série bifurque en type au moins pair dans [I.b], où l'unipotence de Burdges n'est pas employée : des techniques fort classiques de sous-groupes faiblement et fortement inclus suffisent. Dans [I.c] elle apparaît brièvement mais la présence de $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ permet [I.c, Corollary 3.11] d'obtenir des rigidités dans l'esprit des « principes d'unicité » plus haut pour les sous-groupes ρ-unipotents E-invariants ; la méthode de Bender n'est pas invoquée. Les arguments de [I.c] sont tous classiques.

2.2. $N_\circ^\circ$-groupes en contexte involutif

Ceci nous mène au dernier article que nous aimerions exposer davantage. Sa démonstration recombine des idées déjà présentes dans [Del07a, Del08] et pourrait passer pour une simple réécriture, comme ce que [I.a] était à [Bur07]. Il n'en est rien. Les arguments de [Del07a, Del08] sont en effet repris de manière souvent tout-à-fait inattendue. En outre [I.d] a demandé une refonte parfois substantielle de certains prérequis (voir sa section de préliminaires), car le prologue d'origine [I.a] n'était plus adapté à l'ampleur de l'ouvrage. Rappelons l'énoncé obtenu.

Théorème I.3. *Soient $\hat{G}$ un groupe rangé connexe de type impair, et $G \trianglelefteq \hat{G}$ un $N_\circ^\circ$-sous-groupe définissable, connexe, non-résoluble, et distingué.*

Alors les 2-sous-groupes de Sylow de G sont de l'une des formes suivantes : isomorphes à ceux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, isomorphes à ceux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, ou toriques de rang de Prüfer au plus 2.

On suppose en outre que pour toute involution $\iota \in \hat{G}$, le centralisateur dans le sous-groupe *$C_G(\iota)$ est résoluble-par-fini.*

Alors les 2-groupes abéliens élémentaires de $\hat{G}$ sont au plus $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; de G ou $\hat{G}/G$, l'un est sans involutions, car les involutions de $\hat{G}$ sont conjuguées. En outre l'un des cinq cas suivants se produit :

- **PSL$_2$:** *$G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ pour un corps $\mathbb{K}$ (et $\hat{G}/G$ n'a pas d'involutions) ;*
- **CiBo$_\varnothing$:** *G n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$ est un tore de rang de Prüfer 1 ; pour ι involution de $\hat{G}$, le centralisateur $C_G(\iota)$ est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G ;*
- **CiBo$_1$:** *$\hat{G}/G$ n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est un tore de rang de Prüfer 1 ; pour i involution de G, le centralisateur $C_G(i)$ est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G ;*
- **CiBo$_2$:** *$\hat{G}/G$ n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est comme dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; pour i involution de G, la composante connexe $C_G^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel abélien inversé par chaque involution de $C_G(i) \smallsetminus \{i\}$; enfin $\operatorname{rg} G = 3 \operatorname{rg} C_G(i)$;*
- **CiBo$_3$:** *$\hat{G}/G$ n'a pas d'involutions ; le 2-sous-groupe de Sylow de G est un tore de rang de Prüfer 2 ; pour i involution de G, le centralisateur $C_G(i)$ est un sous-groupe de Borel autonormalisant de G dont i est l'unique involution centrale.*

L'argument requiert huit propositions intermédiaires. Nous attirons l'attention du lecteur sur la tension constante entre hypothèses sur $\hat{G}$ et conclusions dans G.

Proposition 1 de [I.d]. *La structure du 2-sous-groupe de Sylow de G est connue (sans borne sur le rang de Prüfer).*

La méthode est connue ; déjà présente dans [Del08], elle a également débouché sur la preuve du théorème de torsion de Steinberg présentée au chapitre II.

Proposition 2 de [I.d]. *L'involution générique κ de $\hat{G}$ inverse dans un sous-groupe $H \leq G$ résoluble fixé un ensemble noté $T_H(\kappa)$ de taille déterminable.*

C'est le point de départ de l'analyse, s'inspirant d'une technique apparemment systématisée par Bender qui consiste à compter les conjuguées d'une involution fixée dans les translatés d'un sous-groupe : les produits de celles contenues dans un même translaté sont des éléments fortement réels du sous-groupe. Tous les travaux d'identification des petits groupes depuis quinze ans emploient cette méthode. Dès lors on peut isoler le cas algébrique.

Proposition 3 de [I.d]. *S'il existe une involution $i \in G$ telle que $C_G^\circ(i)$ soit inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$.*

Ici encore c'est très classique, à ceci près qu'on a préféré pour conclure l'approche de Wiscons en termes d'ensembles de Moufang [Wis11] (extension de [DMT08] à la caractéristique positive $p \neq 2$), plutôt que la méthode traditionnelle via les groupes de Zassenhaus. La combinatoire est en effet suffisamment comprise à la fin de la Proposition 3 pour voir émerger la BN-paire du groupe.

À ce point les choses deviennent plus intéressantes : commence la partie « néoclassique » de l'article. Les configurations non-algébriques de l'énoncé du Théorème I.3 ont en commun que $C_G^\circ(\iota)$ est un sous-groupe de Borel de G. Le phénomène n'est pas nouveau [Del08], mais nous l'obtenons ici sans borne sur le rang de Prüfer, et pour des involutions extérieures au groupe G. Dès 2007 il fut envisagé de procéder par récurrence sur les involutions. Ceci requiert deux préliminaires demandant la connexité du 2-sous-groupe de Sylow dans $\hat{G}$, alors que leur grande application (Proposition 6 ci-dessous) ne l'exigera que dans G.

Proposition 4 de [I.d]. *Si le 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$ est connexe, on peut faire émerger des rigidités imprévues portant sur les sous-groupes centralisés par une involution et inversés par une autre.*

Nous ne désirons pas donner le détail de cet énoncé retors qui renforce considérablement les « principes d'unicité » en présence de 4-groupes ; bien que fort brève, la démonstration est encore plus perverse. La récurrence peut se mettre en place.

Proposition 5 de [I.d]. *Si le 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$ est connexe, on peut, soit dans l'optique d'une récurrence pour la Proposition 6, soit dans celle de conjuguer les involutions à la toute fin du théorème, remplacer $T_H(\kappa)$ de la Proposition 2 par un ensemble sans torsion de même rang.*

Contrôler la torsion est en effet essentiel en contexte $N_\circ^\circ$, où l'on sait que le centralisateur d'un élement *d'ordre infini* est résoluble-par-fini. La preuve est courte mais subtile : elle requiert la Proposition 4 dans chacun des deux cas de la disjonction finale. Ayant ainsi affiné les ensembles fortement réels on peut aborder le cœur de [I.d].

Proposition 6 de [I.d]. *Si le 2-sous-groupe de Sylow de G est connexe, alors pour toute involution ι de $\hat{G}$, le petit centralisateur $C_G^\circ(\iota)$ est un sous-groupe de Borel de G.*

La démonstration se conduit par récurrence descendante sur le paramètre d'unipotence de $C_G^\circ(\iota)$; malgré les propositions préliminaires il faut encore plusieurs pages de raisonnement par l'absurde. Cette preuve utilise brutalement la méthode de Bender rappelée dans [I.a] ; il faut cependant noter que *même si l'on savait ou supposait que les intersections de sous-groupes de Borel sont abéliennes, elle ne serait pas immédiate*. En revanche, les résultats d'homogénéisation de Frécon mentionnés en §2.1 ne sont jamais invoqués.

Malgré les efforts de clarification de l'auteur, la démonstration reste énigmatique (et notamment sa 7e étape). On conjugue néanmoins, de manière informelle, le semi-simple à l'unipotent, provoquant l'accrétion d'un « cœur » résoluble et distingué, en un hommage typique à la première manière de Jaligot. Une différence notable avec les versions préliminaires en contexte simple minimal est l'emploi de cette conjugaison surprenante même dans le cas d'intersections abéliennes (9e étape).

Les deux propositions finales sont indépendantes l'une de l'autre, mais s'appuient sur la Proposition 6.

Proposition 7 de [I.d]. *Le cas dihédral : si le 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$ est isomorphe à celui de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, *mais qu'il existe une involution $\iota \in \hat{G}$ telle que $C_G^\circ(\iota)$ soit incluse dans un* unique *sous-groupe de Borel de G, alors on a une configuration de type* $\mathbf{CiBo}_2$.

On notera la symétrie avec la Proposition 3. Nous sommes aidés par un groupe dihédral infini : la présence de 4-groupes donne un bon contrôle des paramètres d'unipotence, comme dans [I.c]. La configuration s'effondre assez rapidement si les involutions sont dans G ; un peu moins dans le cas contraire.

Proposition 8 de [I.d]. *Le cas fortement inclus : si G possède un sous-groupe définissable, résoluble, et fortement inclus, alors son rang de Prüfer est au plus* 1.

La forte inclusion a été définie en §1.3, après l'énoncé du Théorème I.2 dont ceci est bien le renforcement annoncé quand $p = 2$. La Proposition 8 est la première où la question du 2-rang de Prüfer est abordée ; ceci peut surprendre ; nous en reparlerons à la fin de ce survol. *Il est remarquable que la Proposition 8, a priori réécriture de l'article [BCJ07], tienne en seulement deux pages : par la force de la Proposition 6, tout un pan de l'analyse évoquée disparaît.* (Mentionnons que dans [ABF13], Altınel, Burdges, et Frécon avaient réécrit un fragment de [BCJ07] — précisément celui que la Proposition 6 élimine.)

Vient enfin l'assemblage. L'opération n'est pas triviale car à ce point :

- les involutions peuvent être dans G ou pas ;
- les hypothèses de connexité du 2-sous-groupe de Sylow fluctuent au gré des propositions ;
- on ne dispose toujours pas de borne sur le 2-rang de Prüfer.

Nous insistons sur le caractère inattendu de la démarche ; et pourtant répétons que la Proposition 6 ne demande pas de telle borne.

On commence donc par éliminer les cas $\mathbf{PSL}_2$ et $\mathbf{CiBo}_2$ où le 2-sous-groupe de Sylow de G n'est pas connexe : c'est essentiellement le contenu des Propositions 1, 3, et 7. Puis on borne le 2-rang de Prüfer de $\hat{G}$ par 2 : en rang supérieur on créerait *dans* G un sous-groupe fortement inclus, contre la Proposition 8. À ce point les Propositions 4 et 5 réapparaissent pour permettre de contrôler la distribution des involutions dans les translatés des centralisateurs. La chose est plus subtile qu'il n'y paraît : car seul G a pour l'instant un 2-sous-groupe de Sylow connexe, et c'est inconnu de $\hat{G}$. Mais dans tous les cas on arrive à conjuguer les involutions *au-dessus de* G, puis on identifie les trois cas restants : $\mathbf{CiBo}_3$, $\mathbf{CiBo}_1$, et $\mathbf{CiBo}_\varnothing$.

3. Leçons et perspectives

L'auteur est convaincu que la preuve esquissée plus haut est la bonne, dans un sens absolu. Il aimerait tirer quatre leçons de cette orgie technique :

- un meilleur contrôle des arguments d'unipotence : d'une part l'absence d'emploi de l'homogénéisation de Frécon (par opposition à l'homogénéité obtenue par Burdges pour les intersections non-abéliennes), et d'autre part celui de la « méthode de Bender » (v. fin §2.1) limité à la seule Proposition 6 ;
- la réécriture inattendue de [BCJ07] : la borne sur le rang de Prüfer vient en sus, le phénomène essentiel étant la maximalité de $C_G^\circ(\iota)$ (Proposition 6) qui concentre le gros des efforts ;
- le systématisme avec lequel reviennent des énoncés du type « un 2-sous-groupe de Sylow connexe est une situation pathologique » : nous en reparlerons au chapitre suivant ;
- l'inutilité quasi-totale des sous-groupes de Carter, sauf pour quelques raisonnements intermédiaires dans les groupes résolubles.

Espérons que la synthèse ici faite aura dissipé toute ombre. Et si l'auteur devait étudier à nouveau les configurations de type **CiBo**, il commencerait certainement par deux questions plus simples.

(1) **Locale finitude**

Question I.A. *Pourquoi les groupes* **CiBo** *ne peuvent-ils être localement finis ?*

On travaillerait évidemment sans s'appuyer sur le résultat suivant. La condition M_C stipule la stationnarité des chaînes descendantes de centralisateurs.

Théorème (S. Thomas, [Tho83, Theorem 2] : le cas localement fini)**.** *Soit G un M_C-groupe simple infini localement fini. Alors G est isomorphe au groupe $\hat{\mathbb{G}}_{\mathbb{K}}$ d'un groupe de Chevalley $\hat{\mathbb{G}}$ sur un corps localement fini $\mathbb{K}$.*

Ce théorème exploite la classification des groupes simples finis, alors que l'esprit du programme de Borovik serait plutôt d'en produire un modèle réduit sans l'invoquer ; Borovik [Bor95] a d'ailleurs donné une preuve de cette même classification pour les groupes simples rangés localement finis de type impair, i.e. a démontré la conjecture de Cherlin-Zilber dans le cas « localement fini, de type impair ». Il est fort vraisemblable qu'une adaptation minime empêche les $\mathbf{CiBo}_{k\neq\varnothing}$ (qui ne sont pas supposés simples) d'être localement finis. Mais nous aimerions un argument direct, par curiosité ; à vrai dire nous ne connaissons pas d'argument *rapide* éliminant les analogues finitaires de $\mathbf{CiBo}_2$ et $\mathbf{CiBo}_3$.

(2) **Linéarité**

Question I.B. *Les groupes* **CiBo** *peuvent-ils être linéaires ?*

Cette seconde question d'apparence anodine pourrait nous emmener fort loin : on risquerait d'aborder la conjecture de Cherlin-Zilber sous l'hypothèse linéaire. Le problème est redoutable. Comme on ne sait pas si tout groupe linéaire simple non-abélien possède une involution [Kou16, Problem 16.78], il n'est pas clair que l'hypothèse de linéarité garantisse la non-trivialité du 2-sous-groupe de Sylow. (Revenant d'ailleurs aux travaux de S. Thomas : même dans le cas localement fini, il n'est pas clair qu'on puisse se dispenser d'invoquer le théorème de Feit-Thompson pour amorcer la 2-structure, la variante de Borovik [Bor95] mentionnée plus haut n'étant valable qu'en type impair.)

(3) Quant à la destruction des **CiBo** par analyse locale, elle paraît inaccessible. Le Théorème I.3 restera donc sans doute en l'état jusqu'à ce qu'interviennent de nouvelles méthodes : une éventuelle suite ne saurait reposer que sur une approche différente. L'unipotence de Burdges fut un crépuscule, que l'on a pris pour une aurore.

Rappelons enfin pour ne pas sembler trop amer que [I.d] a trouvé une application à des questions de représentations rangées décrites au chapitre IV.

Références pour le chapitre

[ABC08] T. Altinel, A. Borovik & G. Cherlin – *Simple groups of finite Morley rank*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 145, American Mathematical Society, Providence, 2008.

[ABF13] T. Altinel, J. Burdges & O. Frécon – « On Weyl groups in minimal simple groups of finite Morley rank », *Israel J. Math.* **197** (2013), p. 377–407.

[ABF15] — , « Structure of Borel subgroups in simple groups of finite Morley rank », *Israel J. Math.* **208** (2015), p. 101–162.

[BB04] A. Berkman & A. Borovik – « A generic identification theorem for groups of finite Morley rank », *J. London Math. Soc.* **69** (2004), vol. 2, p. 14–26.

[BBBC08] A. Berkman, A. Borovik, J. Burdges & G. Cherlin – « A generic identification theorem for L^*-groups of finite Morley rank », *J. Algebra* **319** (2008), p. 50–76.

[Bor95] A. Borovik – « Simple locally finite groups of finite Morley rank and odd type », in *Finite and locally finite groups (Istanbul, 1994)*, NATO Adv. Sci. Inst., Series C : Math. Phys. Sci., vol. 471, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995, p. 247–284.

[BN94] A. Borovik & A. Nesin – *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides, vol. 26, The Clarendon Press — Oxford University Press, New York, 1994, Oxford Science Publications.

[Bur04] J. Burdges – « Simple groups of finite Morley rank of odd and degenerate type », Thèse, Rutgers University, New Brunswick, 2004.

[Bur04a] — , « A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank », *J. Algebra* **274** (2004), no. 1, p. 215–229.

[Bur07] — , « The Bender method in groups of finite Morley rank », *J. Algebra* **307** (2007), no. 2, p. 704–726.

[Bur09] — , « Signalizers and balance in groups of finite Morley rank », *J. Algebra* **321** (2009), no. 5, p. 1383–1406.

[BC08] J. Burdges & G. Cherlin – « A generation theorem for groups of finite Morley rank », *J. Math. Log.* **8** (2008), no. 2, p. 163–195.

[BCJ07] J. Burdges, G. Cherlin & É. Jaligot – « Minimal connected simple groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups », *J. Algebra* **314** (2007), no. 2, p. 581–612.

[Che79] G. Cherlin – « Groups of small Morley rank », *Ann. Math. Logic* **17** (1979), no. 1-2, p. 1–28.

[Del07] A. Deloro – « Groupes simples connexes minimaux de type impair », Thèse, Université Paris 7, Paris, 2007.

[Del07a] — , « Groupes simples connexes minimaux algébriques de type impair », *J. Algebra* **317** (2007), no. 2, p. 877–923.

[Del08] — , « Groupes simples connexes minimaux non-algébriques de type impair », *J. Algebra* **319** (2008), no. 4, p. 1636–1684.

[DMT08] T. De Medts & K. Tent – « Special abelian Moufang sets of finite Morley rank », *J. Group Theory* **11** (2008), no. 5, p. 645–655.

[Fré10] O. Frécon – « Automorphism groups of small simple groups of finite Morley rank », *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 7, p. 2591–2599.

[Gra09] R. Gramlich – « Developments in finite Phan theory », *Innov. Incidence Geom.* **9** (2009), p. 123–175.

[Hum75] J. Humphreys – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21. Springer-Verlag, New York, 1975.

[Kou16] *The Kourovka notebook*, 16 éd., V. D. Mazurov & E. I. Khukhro (éds.). Russian Academy of Sciences — Siberian Division, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2006.

[Poi87] B. Poizat – *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[Tho68] J. Thompson – « Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable », *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), p. 383–437.

[Tho83] S. Thomas – « The classification of the simple periodic linear groups », *Arch. Math. (Basel)* **41** (1983), no. 2, p. 103–116.

[Tim04] F. G. Timmesfeld – « The Curtis-Tits-presentation », *Adv. Math.* **189** (2004), no. 1, p. 38–67.

[Wis11] J. Wiscons – « On groups of finite Morley rank with a split BN-pair of rank 1 », *J. Algebra* **330** (2011), p. 431–447.

[Wis15] — , « Groups of Morley rank 4 », à paraître au *J. Symbolic Logic* (2015).

II. Bagatelles (Études de torsion)

Les premiers mots qu'on vous adresse sont toujours d'une vérité particulière.

Sous un faux air désinvolte, ce chapitre est polémique. Il y est question du groupe de Weyl.

Travaux présentés

[II.a] « Weyl groups of small groups of finite Morley rank », *Israel J. Math.* **179** (2010), p. 403–423. En collaboration avec J. Burdges.

[II.b] « Steinberg's torsion theorem in the context of groups of finite Morley rank », *J. Group Theory* **12** (2009), no. 5, p. 709–710.

[II.c] « p-rank and p-groups in algebraic groups », *Turkish J. Math.* **36** (2012), no. 4, p. 578–582.

Ici encore l'ordre est celui de rédaction. On notera qu'il s'agit des travaux les moins récents de ce mémoire : la réflexion sur le sujet n'a pas été poursuivie par l'auteur ces derniers temps.

---

1. Présentation

Par opposition à celles du premier chapitre, les pages de ce *scherzo* se détournent entièrement du cas fini. Les groupes rangés servent ici à modéliser des groupes algébriques ; on ne cherche pas à les identifier. Le but est d'obtenir des propriétés algébriques par des moyens élémentaires.

1.1. Contexte

Le groupe de Weyl d'un groupe algébrique ou de Chevalley peut s'envisager d'au moins deux façons. La première est intimement liée à l'unipotence : dans cette optique le groupe de Weyl est directement associé au système de racines [Car72, §2]. Mais la théorie des modèles a du mal à capturer les racines comme formes linéaires (l'opération mentale, trop abstraite, n'est « pas du premier ordre »), si bien que le logicien évoquera plutôt les sous-groupes racines, et l'action du groupe de Weyl qui les permute. Or même sous cet aspect plus concret le contexte rangé ne dispose d'aucun des outils liés à la représentation adjointe ; une formalisation satisfaisante des sous-groupes racines demeurant impossible, on ne sait pas faire émerger de groupe de symétries pertinent. La seconde manière est entièrement liée à la semi-simplicité : le groupe de Weyl est le groupe des automorphismes d'un tore maximal induits par l'action de son normalisateur [Car72, §7.2]. Cette approche est transposable dans le cadre modèle-théorique, si bien que nous parlerons d'abord de semi-simplicité.

Cela n'est pourtant pas sans peine. On a vu au chapitre I l'absence de décomposition de Jordan, et les subtilités liées à la notion d'unipotence. On évitera donc de penser la semi-simplicité comme sa jumelle.

Or la semi-simplicité d'un groupe algébrique simple, ou même réductif, en est le phénomène générique ; en outre il est intimement lié à la torsion divisible [Hum75, §22.2] (référence du chapitre I). Ceci suggère d'oublier intégralement la décomposition de Jordan et de se concentrer sur les propriétés de l'élément

générique du groupe, surtout celles relatives à la torsion. On notera que le point de vue adopté est celui de la géométrie algébrique plutôt que celui de la théorie de Chevalley. Le point de départ d'une approche du groupe de Weyl pour les groupes rangés fut ainsi le renouveau de l'étude des génériques à la suite de Cherlin, et de leurs propriétés en lien avec la torsion. Les travaux sur la question sont fortement tributaires des résultats généraux que nous allons désormais évoquer.

Commençons par rappeler qu'un bon tore est un groupe abélien divisible dont tout sous-groupe est clôture définissable de la torsion qu'il contient ; un tore décent est plus généralement un groupe abélien divisible clôture définissable de sa torsion.

Théorème (Cherlin, [Che05] : étude des bons tores et des tores décents). *Si T est un bon tore maximal d'un groupe rangé, alors les conjugués de $C_G^\circ(T)$ sont d'union générique. En particulier les bons tores maximaux sont conjugués. C'est aussi vrai des tores décents maximaux.*

L'important [BBC07], que nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser directement, poursuivit l'étude du générique, couplée à un maniement subtil des involutions. L'étape d'après, et jusqu'à ce jour sommet de la théorie de la torsion divisible, fut [BC09]. Appelons $U_p^\perp$ un groupe rangé sans sous-groupe p-unipotent non-trivial, c'est-à-dire sans p-sous-groupe abélien élémentaire infini. Dans un tel groupe, les p-sous-groupes *résolubles* sont de la forme torique-par-fini (les p-tores ont été définis au chapitre I) ; on appelle p-sous-groupes de Sylow ceux qui sont maximaux.

Théorème (Burdges-Cherlin, [BC09, Theorem 3] : « principes de toralité »). *Si G est un groupe rangé connexe et $U_p^\perp$, alors tout p-élément est torique, et même dans tout p-tore maximal de son centralisateur.*

Cet énoncé a des nombreuses variantes et applications, qui jouaient un rôle permanent dans [I.d] présenté au chapitre I. La conséquence suivante est très efficace en pratique.

Théorème (Altınel-Burdges, [AB08, Theorem 1] : connexité des centralisateurs). *Si G est un groupe rangé connexe et $T \leq G$ un tore décent, alors $C_G(T)$ est connexe.*

Signalons enfin que Frécon [Fré09] a introduit une notion de pseudo-tores (groupes abéliens divisibles dont aucun sous-quotient définissable n'est isomorphe au groupe additif d'un corps infini définissable) ; il a retrouvé pour ces objets plus généraux les trois résultats que nous venons de citer.

Venons-en au groupe de Weyl.

1.2. Enjeux

On veut modéliser le groupe de Weyl dans les groupes rangés abstraits ; la solution retenue est via la semi-simplicité. Trois voies ont été proposées.

- La première semble remonter à Borovik et Poizat [BP90] et se concentre sur la torsion p-divisible. Ceci mène à considérer les p-sous-groupes de Černikov maximaux Σ d'un groupe rangé G ; on peut définir le p-groupe de Weyl de G comme le quotient Σ/Σ°. (Rappelons qu'en prenant la trace de la composante connexe de la clôture définissable, poser $\Sigma^\circ = \Sigma \cap (d(\Sigma))^\circ$ a l'effet espéré.) Ce point de vue ne capture que la p-torsion ; il s'étend en considérant les p-tores maximaux Θ, et $N_G(\Theta)/C_G(\Theta)$. Cela n'est tant soit peu sérieux que sous l'hypothèse $U_p^\perp$ décrite plus haut. En outre les définitions requièrent la conjugaison des p-tores maximaux, conséquence de celle des tores décents maximaux. Ceci nous mène à la deuxième approche.
- Par conjugaison des tores décents maximaux T, on peut définir $W(G) = N_G(T)/C_G(T)$.
  Cette solution ne peut qu'être la bonne pour des raisons de richesse thématique. La notion de tore décent, qui se ramène à celle de bon tore par quotient, est en effet liée à la théorie des modèles, un théorème de Wagner [Wag01] affirmant que *le groupe multiplicatif d'un corps rangé de caractéristique positive est un bon tore*. (Ici notre argument n'est pas de nature mathématique : nous prenons l'existence d'interfaces comme indice de fécondité d'un domaine.)
- La troisième formalisation est plus ambitieuse. Un sous-groupe de Carter Q est un sous-groupe définissable, connexe, nilpotent, et d'indice fini dans son normalisateur ; on considère alors $N(Q)/Q$.

Pour le plaisir d'être outrancier nous allons soutenir que cette dernière définition n'a ni sens ni raison d'être. Ni sens, car faute d'une compréhension suffisante de l'élément générique dont [Poi13] marque les limites, on ne dispose pas de théorème *général* de conjugaison pour les sous-groupes de Carter. Ni raison d'être, car une leçon majeure du chapitre I est la très relative importance de ces sous-groupes au niveau global.

Mais bien plus profondément (et nous parlons à nouveau sans affectation), ce n'est pas la structure abstraite du groupe de Weyl qui importe : *ce qui importe est sa représentation concrète*. Or en l'absence de système de racines, la représentation du groupe de Weyl ne peut se faire que dans la torsion divisible, pour obtenir des contraintes de nature arithmétique.

Nous plaiderons ainsi, dans les pages qui vont suivre, en faveur de la deuxième approche : celle en termes de tores décents. Et puisse Frécon nous donner tort une fois de plus : car ce chapitre n'a d'autre but que de lui demander un nouveau miracle de même ampleur que sa conjugaison des sous-groupes de Carter dans les groupes K^* [Fré08], définis au chapitre I, §1.2. (On notera qu'il démontrait aussi la chose [Fré08, Corollary 1.6] pour les groupes $N_\circ^\circ$ du chapitre I, mais que la présence de torsion dans les groupes étudiés rendait cet outil sans emploi.)

1.3. Résultats

Le premier article présenté, en commun avec Jeffrey Burdges, faisait directement suite à [AB08, Theorem 3], où il était montré que le groupe de Weyl d'un groupe simple minimal est cyclique-par-cyclique. Les groupes simples minimaux ont été définis au chapitre I. L'énoncé suivant ne suppose pas la présence d'involutions ; sous cette hypothèse supplémentaire il suivrait de l'analyse de tels groupes en type impair.

Théorème II.1 ([II.a]). *Soit G rangé simple minimal. Alors le groupe de Weyl, défini comme le quotient $N_G(T)/C_G(T)$ pour un tore décent maximal, est cyclique et se relève dans $N_G(T)$ en un groupe isomorphe, de sorte que $N_G(T) = C_G(T) \rtimes W$.*

Ce résultat requiert plusieurs méthodes, dont la théorie de l'unipotence de Burdges brièvement esquissée au chapitre I, mais aussi les contraintes arithmétiques dont nous allons parler davantage. Le deuxième article est notre favori.

Théorème II.2 ([II.b]). *Soient G un groupe rangé connexe et $U_p^\perp$, et $\zeta \in G$ un p-élément tel que $\zeta^{p^n} \in Z(G)$. Alors $C_G(\zeta)/C_G^\circ(\zeta)$ est d'exposant divisant p^n.*

C'est un analogue abstrait du théorème de torsion de Steinberg [Ste75, Corollary 2.16(b)]. L'original fut obtenu par une étude serrée du système de racines, qui nous l'avons dit fait défaut. La démonstration alternative illustre le cheminement vers la maturité des groupes rangés : l'énoncé était connu, mais il est non-trivial, et surtout l'argument semble entièrement nouveau. La question de la réductivité des centralisateurs d'éléments semi-simples [Ste75, Corollary 2.18], pourtant si naturelle, reste insoluble.

Le troisième article requiert trois notations. On a rencontré au chapitre I le p-rang de Prüfer $\mathrm{Pr}_p(G)$, qui est le d maximal dans une copie de $\mathbb{Z}_{p^\infty}^d$ présente à l'intérieur de G. Le p-rang normal $n_p(G)$ est le d maximal dans une copie de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ *distinguée* dans un p-sous-groupe de Sylow. Le p-rang maximal $m_p(G)$ est défini sans clause de distinction. Clairement $\mathrm{Pr}_p\, G) \leq n_p(G) \leq m_p(G)$.

Théorème II.3 ([II.c]). *Si G est un groupe rangé connexe et $U_p^\perp$, alors $\mathrm{Pr}_p(G) = n_p(G) \geq \frac{p-1}{p} m_p(G)$.*

La première égalité est une conséquence immédiate des « principes de toralité » mentionnés plus haut. Elle peut sembler anodine mais permettrait des simplifications notables dans certains cas de l'approche inductive des groupes rangés de type impair : par exemple [BBN08] travaille sous l'hypothèse $n_2(G) \geq 3$ et $\mathrm{Pr}_2(G) \geq 2$, dont nous venons d'expliquer l'équivalence avec $\mathrm{Pr}_2(G) \geq 3$.

L'inégalité en revanche requiert un peu d'arithmétique dans la représentation p-adique. Elle aussi pourrait modifier la feuille de route laissée par Burdges [Bur04] (référence du chapitre I).

2. Quelques points de technique

§2.2, improvisation inspirée par la rédaction de ce mémoire, explicitera divers liens entre les possibles modélisations du groupe de Weyl. Pour l'instant et en §2.1 nous allons dire quelques mots des méthodes mises en œuvre dans les travaux présentés.

Le premier théorème [II.a] nous intéresse moins : on a peu d'espoir d'affirmer quoi que ce soit de sensé en général ; il n'est même pas clair que l'on puisse transférer l'argument au contexte $N_\circ^\circ$ introduit au chapitre I, tant la résolubilité des centralisateurs d'éléments *d'ordre fini* paraît nécessaire. Il avait été question naguère de tenter l'étude générale du groupe de Weyl dans les $N_\circ^\circ$-groupes ; l'auteur était resté sceptique et n'a pas été surpris par l'abandon du projet sans résultat.

Le deuxième article [II.b] est à nos yeux bien plus pertinent ; nous trouvons même qu'il n'a pas reçu la publicité méritée, sans doute en raison de sa concision même. Nous allons donc en reproduire l'argument dans son intégralité après avoir rapidement parlé du troisième [II.c]. Celui-ci se concentre sur un p-tore T d'un groupe rangé G, disons $T \simeq \mathbb{Z}_{p^\infty}^d$. Or écrivant la limite inductive $T \simeq \lim_{\to}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$, on obtient la limite projective $\mathrm{Aut}(T) \simeq \lim_{\leftarrow} \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d) \simeq \lim_{\leftarrow} \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$. On s'est ainsi ramené à l'étude de sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$ pour y faire un peu d'arithmétique.

2.1. Un théorème de R. Steinberg

Rappelons la démonstration de [II.b]. Partons de G connexe et $U_p^\perp$, avec un p-élément ζ tel que $\zeta^k \in Z(G)$, où $k = p^n$. Nous allons borner l'exposant du quotient $C_G(\zeta)/C_G^\circ(\zeta)$. Or comme on sait relever la torsion dans les groupes rangés, contrôler la torsion d'un quotient revient à contrôler celle présente dans les translatés. Soit donc $\overline{\alpha} \in C_G(\zeta)/C_G^\circ(\zeta)$ un q-élément pour un nombre premier q ; il suffit de montrer que $\overline{\alpha}^k = 1$. Relevons $\overline{\alpha}$ en un q-élément $\alpha \in C_G(\zeta)$: nous voulons $\alpha^k \in C_G^\circ(\zeta)$.

D'après les principes de toralité, il existe un p-tore S de G pour lequel $\zeta \in S$. Mais $C_G^\circ(\zeta) \trianglelefteq C_G(\zeta)$ et $C_G^\circ(\zeta)$ conjugue ses p-tores maximaux, si bien qu'un argument de Frattini donne $C_G(\zeta) = C_G^\circ(\zeta) \cdot N_{C_G(\zeta)}(S)$. On peut donc supposer $\alpha \in N_G(S)$, illustrant l'idée que le groupe de Weyl ne vaut que par son unique représentation accessible dans le contexte rangé : l'action sur la torsion divisible.

À ce point si $q \neq p$, on voit que $S = C_S(\alpha) \oplus [S, \alpha]$, d'où la connexité de chaque. Ainsi $\zeta \in C_S(\alpha) = C_S^\circ(\alpha)$. Par connexité des centralisateurs de tores, $\alpha \in C(C_S(\alpha)) = C^\circ(C_S^\circ(\alpha)) \leq C^\circ(\zeta)$, comme voulu.

On peut donc supposer $q = p$, et nous allons conduire un argument similaire. Puisque $\alpha \in C_G(\zeta)$, on a $\zeta \in C_G(\alpha)$; ce dernier conjugue ses p-tores maximaux, et même ses p-sous-groupes de Sylow, si bien que ζ normalise un p-tore maximal Σ de $C_G^\circ(\alpha)$. On sait des principes de toralité que $\alpha \in \Sigma$. Considérons à présent l'action de ζ sur Σ. Comme précédemment, $\Sigma = C_\Sigma(\zeta) + [\Sigma, \zeta]$, et l'on voit que $\Sigma = C_\Sigma^\circ(\zeta) + [\Sigma, \zeta]$. Écrivons alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in C_\Sigma^\circ(\zeta) \times [\Sigma, \zeta]$, puis prenons la trace sous l'action de ζ ; il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\zeta(\alpha) &= \alpha + \zeta \cdot \alpha + \cdots + \zeta^{k-1} \cdot \alpha = k\alpha \\ &= \mathrm{Tr}_\zeta(\alpha_1) + \mathrm{Tr}_\zeta(\alpha_2) = k\alpha_1 \end{aligned}$$

ou encore $\alpha^k = \alpha_1^k$ en notation multiplicative. Par construction $\alpha_1^k \in C_\Sigma^\circ(\zeta)$. On applique alors la connexité des centralisateurs de tores : $\zeta \in C(C_\Sigma^\circ(\zeta)) = C^\circ(C_\Sigma^\circ(\zeta)) \leq C^\circ(\alpha_1^k) = C^\circ(\alpha^k)$.

L'argument final est inspiré de [Del08], plus précisément de [Del07, Chapitre 4.2], tous deux cités au chapitre I. On y avait introduit la relation de *cotoricité* sur des éléments toriques : $\alpha \sim_{\mathrm{cot}} \beta$ s'il existe un tore contenant α et β. Or par principes de toralité, pour des p-éléments d'un groupe connexe $U_p^\perp$, $\alpha \sim_{\mathrm{cot}} \beta$ si et seulement si $\alpha \in C_G^\circ(\beta)$. On conclut par symétrie : ici, $\zeta \in C_G^\circ(\alpha^k)$ entraîne $\alpha^k \in C_G^\circ(\zeta)$, comme annoncé.

2.2. Compléments

Cherchons les rapports entre les diverses formalisations rappelées en §1.2. Commençons par la première approche mentionnée. Pour G rangé $U_p^\perp$, notons $W_p(G) = S_p/S_p^\circ$, où S_p est un p-sous-groupe de Sylow de G. Le Lemme suivant se trouve dans [I.d] (référence du chapitre I).

Lemme L de [I.d]. *Soit G rangé $U_p^\perp$.*
- *Si $H \leq G$ est définissable et connexe, alors $W_p(H) \hookrightarrow W_p(G)$.*
- *Si $H \trianglelefteq G$ est définissable, connexe, et distingué, alors $W_p(G/H) \simeq W_p(G)/W_p(H)$.*

C'est un résultat bien faible : comprendre la p-torsion du groupe de Weyl reste insuffisant. C'est néanmoins un résultat pertinent pour une raison dont l'exposition demande un bref préliminaire.

Lemme (pour les besoins de ce mémoire ; « souvenir des serpents »). *Soit $\hat{G} = K \ltimes G$ un groupe rangé $U_p^\perp$, où G est définissable connexe, et K un p-groupe fini. Alors K normalise un tore décent maximal de G.*

Démonstration. Cet argument n'a pas été soumis à vérification.

Soit T_p un p-tore maximal de G. Incluons T_p dans un p-sous-groupe de Sylow Σ_1 de $\hat{G}$, et K dans un autre, disons Σ_2. Comme $\hat{G} = GK$ conjugue ses p-sous-groupes de Sylow par principes de toralité, plus précisément [BC09, Theorem 4], on a $\Sigma_2 = \Sigma_1^g$ pour un $g \in G$. Notamment K normalise T_p^g et sa clôture définissable Θ. Si Θ n'est pas distingué dans G raisonnons par récurrence ; s'il l'est factorisons par Θ. Nous pouvons donc supposer G sans p-tore non-trivial : il est alors par hypothèse et principes de toralité sans p-torsion, et K est un p-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$.

Soit à présent T un tore décent maximal de G. Par conjugaison et un argument de Frattini, $\hat{G} = N_{\hat{G}}(T) \cdot G$. Soient P un sous-groupe de Sylow de $N_{\hat{G}}(T)$ et $Q \leq \hat{G}$ un p-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$ contenant P. On sait (voir si besoin [I.d, §2.2]) que les p-sous-groupes de Sylow de $\hat{G}/G$ sont les images de ceux de $\hat{G}$. Il suit que PG/G est p-sous-groupe de Sylow de $N_{\hat{G}}(T)G/G = \hat{G}/G$, ainsi que QG/G. Notamment $QG = PG$, et comme G n'a pas de p-éléments, $P = Q$ est un p-sous-groupe de Sylow de $\hat{G}$, que l'on peut supposer $\hat{G} = GK$- et donc G-conjugué à K, de sorte que K normalise bien un G-conjugué de T. □

Voici la justification du Lemme L. Rappelons que nous avons noté $W(G) = N_G(T)/C_G(T)$, pour T un tore décent maximal de G.

Lemme (pour les besoins de ce mémoire). *Si G est un groupe rangé connexe et $U_p^\perp$, alors $W_p(G)$ est isomorphe à un p-sous-groupe de Sylow de $W(G)$.*

Démonstration. Cet argument n'a pas été soumis à vérification.

Fixons un tore décent maximal T ainsi qu'un p-sous-groupe de Sylow S_p de G ; conjuguant, nous pouvons supposer $S_p^\circ \leq T$. Prenant des représentants des différents translatés de S_p° dans le groupe localement fini S_p, écrivons $S_p = S_p^\circ \cdot K$ pour un p-groupe fini K. Posons $\hat{G} = K \ltimes G$ et appliquons le Lemme précédent : K normalise un tore décent maximal T de G. On peut donc supposer que S_p normalise T.

Ceci étant, $S_p \cap C_G(T) \leq C_{S_p}(S_p^\circ) = S_p^\circ$ par connexité de G et principes de toralité, si bien que $W_p(G) \simeq S_p/S_p^\circ$ est isomorphe à un sous-groupe de $N_G(T)/C_G(T) \simeq W(G)$. Plus finement, si π est un p-sous-groupe de Sylow de $W(G)$, on sait le relever en un p-sous-groupe de Sylow P de $N_G(T)$. Mais ce dernier conjugue ses tels sous-groupes, de sorte que l'on peut supposer $S_p = P$, et clairement $W_p(G) \simeq \pi$. □

Malheureusement la connaissance des différents $W_p(G)$ ne procurerait pas celle de $W(G)$ puisque ce dernier n'est pas en général nilpotent. En outre rien n'est dit du cas où G possède de la p-unipotence.

Revenons enfin à la troisième formalisation de §1.2. Il n'est pas clair, en présence à la fois d'un tore décent maximal T non-trivial et d'un sous-groupe de Carter Q le contenant, que les deux modélisations du groupe de Weyl associées coïncident. C'est vrai pour G simple minimal [II.a, Lemma 2.3] (pour G simple minimal sans tore décent, [ABF13, Proposition 3.2], référence du chapitre I), mais en général il faudrait comprendre $N_G(Q) \cap C_G(T)$.

Lemme (pour les besoins de ce mémoire). *Soient G un groupe rangé connexe, T un tore décent maximal (éventuellement trivial), et $Q \leq G$ un sous-groupe de Carter contenant T.*

1. *$W(G)$ est isomorphe à un quotient de $N_G(Q)/Q$.*
2. *Si $C_G(T)$ est $U_p^\perp$ pour p premier divisant $|N_G(Q)/Q|$, alors $N_G(Q)/Q \simeq W(G)$.*

Démonstration. Cet argument n'a pas été soumis à vérification.

Notons que T est central et caractéristique dans Q, si bien que $Q \leq C_G(T)$ et $N_G(Q) \leq N_G(T)$.

1. $C_G(T)$ conjugue ses sous-groupes G-conjugués à Q : c'est vrai dans tout sous-groupe de G contenant Q. Un argument de Frattini sur la paire $C_G(T) \trianglelefteq N_G(T)$ entraîne alors $N_G(T) = N_{N_G(T)}(Q) \cdot C_G(T) = N_G(Q) \cdot C_G(T)$, si bien que $N_G(T)/C_G(T) \simeq N_G(Q)/(N_G(Q) \cap C_G(T))$. Comme le dernier terme contient Q, le groupe $N_G(T)/C_G(T)$ est bien quotient de $N_G(Q)/Q$.
2. Il suffit de montrer $N_G(Q) \cap C_G(T) = Q$. En effet soit $H = C_G(T)$, qui est connexe et contient Q. Le quotient $\overline{H} = H/d(T)$ est par hypothèse sans p-torsion pour p divisant $|N_G(Q)/Q|$; comme $\overline{Q}$ en est sous-groupe de Carter, on a $N_{\overline{H}}(\overline{Q}) = \overline{Q}$, d'où $N_H(Q) = \pi^{-1}(N_{\overline{H}}(\overline{Q})) = \pi^{-1}(\overline{Q}) = Q$. □

3. Leçons et perspectives

La torsion divisible des groupes rangés ouvre à nos yeux la seule approche raisonnable du groupe de Weyl, car elle permet quelques méthodes arithmétiques. *Soulignons la fertilité de notre approche :* [II.b] et [II.c] ont été mis à contribution pour un problème « concret », [IV.c] présenté au chapitre IV.

Le reste peut sembler gratuit. Face aux groupes sans torsion divisible, plusieurs attitudes sont possibles :
- voir en les groupes sans torsion divisible l'écueil où se fracassera la conjecture d'algébricité ;
- considérer les groupes sans torsion divisible comme le cas noble de cette conjecture, les sous-groupes de Carter y prenant le relais des tores ;
- ne pas éprouver d'intérêt pour les groupes sans torsion divisible ;
- trouver sans intérêt les groupes sans torsion divisible.

Au lecteur de se situer.

Pour l'heure nous ne voyons pas de direction à suivre de manière systématique — la réductivité des centralisateurs d'éléments semi-simples (v. §1.3) étant hors de portée, qui éliminerait sans doute certaines pathologies du chapitre I. Nous avons néanmoins quelques questions.

(0) L'auteur ignore la réponse à de nombreux problèmes naturels sur la représentation p-adique.

Question II.A (très certainement classique). *Soient T un p-tore et $\rho : \mathrm{Aut}(T) \to \mathrm{Aut}(\Omega_p(T))$ le morphisme de restriction au sous-groupe $\Omega_p(T) = \{t \in T : t^p = 1\}$. Soit $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(T)$ l'*ensemble *des automorphismes d'ordre fini de T. Décrire $\rho(\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(T))$ et les groupes finis qu'il contient ; en particulier, à quelle condition un élément de $\mathrm{Aut}(\Omega_p(T))$ provient-il d'un automorphisme de T d'ordre fini ?*

Vu l'intérêt porté aux sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, nous croyons la solution à cette question relative à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ connue. Mentionnons aussi un problème d'effectivité dont la réponse pourrait nous intéresser.

Question II.B. *Trouver $m = m(d, n)$ tel que pour tout automorphisme α d'ordre p^n d'un p-tore $T \simeq \mathbb{Z}_{p^\infty}^d$, si α centralise un élément $\zeta \in T$ d'ordre p^m, alors $C_T(\alpha)$ est infini.*

(1) Deux questions de base relatives au groupe de Weyl sont laissées ouvertes dans §2.2. On peut d'abord rêver une extension du « souvenir des serpents » (s'arrêtant bien sûr avant K résoluble : car l'image de A_4 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ fournirait un contre-exemple).

Question II.C. *Soit $\underline{p}$ une collection de nombres premiers. Soit $\hat{G} = K \ltimes G$ un groupe rangé $U_{\underline{p}}^{\perp}$ (la définition est celle attendue), où G est définissable connexe, et K un $\underline{p}$-groupe fini super-résoluble. Est-il vrai que K normalise un tore décent maximal de G ?*

Ceci serait l'analogue d'un résultat de Springer et Steinberg, [SS70, §E.II.5, Theorem 5.16]. La récurrence donnée en [SS70] n'a dans le contexte rangé pas d'équivalent.

Question II.D. *Existe-t-il des résultats similaires à [I.d, Lemma L] (voir §2.2) pour la « bonne » notion de groupe de Weyl, celle en termes de tores décents maximaux $W(G) = N_G(T)/C_G(T)$?*
- *Pour $H \leq G$ définissable et connexe, a-t-on $W(H) \hookrightarrow W(G)$?*
- *Pour $H \trianglelefteq G$ définissable, connexe, et distingué, a-t-on $W(G/H) \simeq W(G)/W(H)$?*

(2) Nous aimerions mettre en avant le cas de connexité des p-sous-groupes de Sylow.

Définition. *Un groupe rangé connexe et $U_p^\perp$ est dit $W_p^\perp$ si son p-sous-groupe de Sylow est connexe.*

Cette propriété introduite en [I.d, §3.5] semble offrir une ligne de division notable. D'abord, elle est pathologique en $p = 2$: un groupe algébrique connexe et $W_2^\perp$ est résoluble (réciproquement un groupe rangé, connexe et résoluble est classiquement $W_p^\perp$). De plus elle est héréditaire, puisqu'un sous-quotient définissable connexe d'un groupe $U_p^\perp$ et $W_p^\perp$ le reste d'après [I.d, Lemme L] (v. §2.2).

Nous aimerions surtout — ce fut suggéré au chapitre I — proposer d'explorer la classe des groupes $U_2^\perp$ qui sont *héréditairement* W_2, i.e. dans lesquels les sous-quotients définissables connexes et $W_2^\perp$ sont résolubles. Ces groupes sont les moins pathologiques, et vu les grandes rigidités de $\mathbf{CiBo}_2$, un espoir de classification n'est pas interdit.

Question II.E. *Peut-on classifier les groupes simples rangés dans lesquels tout sous-quotient définissable connexe simple a un 2-sous-groupe de Sylow non connexe ?*

(3) Quant aux degrés des centralisateurs, et surtout ceux d'involutions, l'auteur possède un vieux projet — son plus vieux projet — sur lequel pèse un tabou, mais qu'il devait mentionner dans une phrase sibylline.

Par ailleurs, en repensant à la démonstration de [II.b], il n'est pas clair que l'on ne puisse pas définir au premier ordre la simple connexité d'un groupe rangé G par la clause suivante (pour le cas algébrique réductif en caractéristique nulle, invoquer [Ste75, Theorems 2.15 & 2.27]) :

$\sim_{\mathrm{cot}}$ coïncide avec la relation de commutation (entre éléments toriques).

Il nous paraît bien désirable d'introduire un groupe mesurant l'écart entre commutation et cotoricité, qui modéliserait le groupe fondamental. Cette rêverie pour l'instant sans fondement nous conforte dans notre dessein de ne travailler qu'avec de la torsion divisible.

Références pour le chapitre

[AB08] T. Altinel & J. Burdges – « On analogies between algebraic groups and groups of finite Morley rank », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), no. 1, p. 213–232.

[BBC07] A. Borovik, J. Burdges & G. Cherlin – « Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate type », *Selecta Math. (N.S.)* **13** (2007), no. 1, p. 1–22.

[BBN08] A. Borovik, J. Burdges & A. Nesin – « Uniqueness cases in odd-type groups of finite Morley rank », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **77** (2008), no. 1, p. 240–252.

[BC09] J. Burdges & G. Cherlin – « Semisimple torsion in groups of finite Morley rank », *J. Math. Logic* **9** (2009), no. 2, p. 183–200.

[BP90] A. Borovik & B. Poizat – « Tores et p-groupes », *J. Symbolic Logic* **55** (1990), no. 2, p. 478–491.

[Car72] R. Carter – *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, vol. 28, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, 1972.

[Che05] G. Cherlin – « Good tori in groups of finite Morley rank », *J. Group Theory* **8** (2005), no. 5, p. 613–621.

[Fré08] O. Frécon – « Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank », *J. Math. Log.* **8** (2008), p. 41–92.

[Fré09] — , « Pseudo-tori and subtame groups of finite Morley rank », *J. Group Theory* **12** (2009), no. 2, p. 305–315.

[Poi13] B. Poizat – « Centralisateurs génériques », *J. Symbolic Logic* **78** (2013), no. 1, p. 290–306.

[SS70] T. Springer & R. Steinberg – « Conjugacy classes », in *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 131, Springer-Verlag, New York, 1970.

[Ste75] R. Steinberg – « Torsion in reductive groups », *Adv. Math.* **15** (1975), p. 63–92.

[Wag01] F. Wagner – « Fields of finite Morley rank », *J. Symbolic Logic* **66** (2001), no. 2, p. 703–706.

III. Variations quadratiques

Aujourd'hui, plus calme et non moins ardent,
Mais sachant la vie, et qu'il faut qu'on plie,
J'ai dû réfréner ma belle folie,
Sans me résigner par trop cependant.

Nous relatons des efforts certainement naïfs pour étudier les représentations de groupes algébriques par des moyens élémentaires et souvent calculatoires. Ces essais furent sans lien avec la théorie des modèles.

Travaux présentés

[III.a] « Quadratic Actions », *Confl. Math.* **5** (2013), no. 2, p. 23–41.

[III.b] « Symmetric powers of Nat $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ », *Comm. Algebra* **44** (2016), no. 5, p. 1981–2008.

[III.c] « Symmetric powers of Nat $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ », à paraître au *J. Group Theory* **19** (2016), no. 3.

[III.d] « Locally quadratic modules and minuscule representations », soumis (2015), 22 pages.

Le quatrième article a été soumis pour publication à l'automne 2015.

---

1. Présentation

Bien que de lecture indépendante les travaux présentés forment un tout. Leur thème commun est exposé dans l'« avant-propos général » de [III.a], que nous reprenons à présent.

1.1. Contexte

La question semblera vague. Nos résultats sont loin d'y répondre ; espérons qu'ils pourront la légitimer.

Question vague. *Soient $\mathbb{G}$ un groupe algébrique, $\mathbb{K}$ un corps, et $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ en tant que groupe abstrait. Soit V un G-module. À quelles conditions (sur $\mathbb{G}, \mathbb{K}, V$) peut-on espérer dire quelque chose de sensé — par exemple quand V est-il un $\mathbb{K}[G]$-module ? une représentation de G en tant que groupe algébrique ?*

Il s'agit ainsi d'identifier, parmi les $\mathbb{Z}[G]$-modules, ceux qui proviennent de la géométrie algébrique. C'est clairement se tromper de catégorie que manipuler des modules abstraits dont la complexité algébrique n'a pas de raison d'être bornée en l'absence de toute mesure de dimension. Même les phénomènes d'isomorphismes entre petits groupes simples sont là pour nous avertir de la vanité de toute ambition trop générale. Mais le lecteur notera que l'on se laisse encore toute latitude quant aux hypothèses. Le chapitre IV proposera même de plonger la question dans un cadre modèle-théorique ; ce n'est pas ici le cas.

Nous devons donc plaider pour la possibilité d'une réponse même partielle à la question. Or celle-ci n'est peut-être pas sans évoquer un résultat célèbre.

Théorème (Borel-Tits, [BT73, cas particulier du Théorème A] : factorisation des homomorphismes de groupes abstraits entre groupes de $\mathbb{K}$-points). *Soient $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ deux groupes algébriques simples en tant que tels, $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux corps, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ et $G' = \mathbb{G}'_{\mathbb{K}'}$. On suppose que $\mathbb{G}'$ est de forme adjointe.*

Soient $H \leq G$ un sous-groupe abstrait contenant le groupe G^+ engendré par les $\mathbb{K}$-points des radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques de G, et $\alpha : H \to G'$ un morphisme de groupes abstraits. *On suppose que l'image $\alpha(G^+)$ est Zariski-dense dans G'.*

Alors α se factorise en $\alpha = \beta \circ \varphi^\circ$, où $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ est un plongement de corps, $\varphi^\circ : G \to {}^{\varphi}\mathbb{G}_{\mathbb{K}'}$ désigne le morphisme de groupes associé par changement de base, et $\beta : {}^{\varphi}\mathbb{G}_{\mathbb{K}'} \to G'$ est une isogénie définie sur $\mathbb{K}'$.

Le théorème de Borel-Tits est d'une tout autre portée que la question posée plus haut ; nous le mentionnons car il s'agit d'un théorème de réduction de la catégorie « abstraite », où la structure rationnelle n'est pas prise en compte, à la catégorie rationnelle. On voudrait donc un théorème de factorisation pour les morphismes $\alpha : \mathbb{G}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Aut}(V)$, où $\mathrm{Aut}(V)$ est simplement le groupe d'automorphismes du groupe abélien V ; répétons que des hypothèses raisonnables sont à trouver, et qu'on s'interdit pour l'instant le recours à la logique.

Il peut être tentant de prendre en compte l'action de l'algèbre de Lie associée. Ceci n'a pourtant guère de sens méthodologique, puisque G est vu comme groupe abstrait, sans moyen de différentier. En outre l'algèbre de Lie étant déjà dotée d'une structure vectorielle, n'est certainement pas le bon objet pour étudier la linéarisation. On préférera donc introduire l'anneau de Lie sous-jacent, qui est muni de la loi de groupe et du crochet mais en ayant oublié la structure scalaire. Et cela ne résout rien mais suggère au contraire d'étendre la question.

Question vague. *Soient $\mathbb{G}$ un groupe algébrique, $\mathbb{K}$ un corps, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ en tant que groupe abstrait, et $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ en tant qu'anneau de Lie abstrait. Soient $\mathcal{G} = G$ ou $\mathfrak{g}$, selon, et V un $\mathcal{G}$-module. À quelles conditions peut-on espérer dire quelque chose de sensé ?*

Cette question ne paraît pas avoir été souvent posée ; la bibliographie du présent chapitre est d'ailleurs fort restreinte.

1.2. Enjeux

L'archétype de l'énoncé positif est le résultat suivant, dû indépendamment à S. Smith et F.-G. Timmesfeld. Un G-module M_0 étant supposé connu, nous dirons qu'un G-module M est *de la forme* $\oplus_I M_0$ s'il existe un ensemble éventuellement infini I tel que $M \simeq \oplus_I M_0$ en tant que G-modules.

Théorème (Smith [Smi89], Timmesfeld [Tim01, Theorem I.3.4] : « théorème quadratique »). *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$ différent de $\mathbb{F}_3$, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, et V un G-module. On suppose que tout sous-groupe unipotent maximal $U < G$ agit quadratiquement, i.e. de sorte que $[U,[U,V]] = 0$. Alors $V = C_V(G) \oplus [G,V]$ et $[G,V]$ porte une structure d'espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus_I \mathrm{Nat}\, G$, où $\mathrm{Nat}\, G$ désigne la représentation naturelle de G sur $\mathbb{K}^2$.*

Mentionnons en passant qu'un analogue où $\mathbb{K}$ serait simplement un corps gauche reste apparemment ouvert. Indiquons aussi qu'à la différence de l'énoncé de Smith, celui de Timmesfeld est bien plus général en ce qu'il ne requiert pas de connaître le type d'isomorphisme de G, qu'il détermine par coordinatisation *simultanée* du module et du groupe. Nous dirons un mot de la preuve en §2.1.

Suite à certains calculs menés pour [IV.b] exposé au chapitre IV et dont à sa grande surprise il put retirer toute forme de théorie des modèles, l'auteur rua dans une véritable frénésie d'extension du théorème quadratique. Ce dernier pourrait ainsi n'être que l'abord d'un pays beaucoup plus vaste, le premier indice d'un phénomène de « rigidité » qui linéariserait certains $\mathcal{G}$-modules, pour $\mathcal{G}$ une structure abstraite de type groupe ou anneau de Lie, et qui tiendrait aux seules contraintes algébriques internes de $\mathcal{G}$, suffisantes pour reconstruire une géométrie. Autrement dit, les $\mathcal{G}$-modules de complexité modérée (dans un sens à trouver mais dont on imagine le lien avec la nilpotence) appartiendraient spontanément à la catégorie des représentations de $\mathcal{G}$.

Cet espoir informel a l'irréflexion — et nous espérons le charme — de la jeunesse. Il nous revient de

présenter des éléments en sa faveur. On peut envisager une première série de questions.
- Le théorème quadratique s'énonce-t-il en termes d'*éléments* unipotents ?
- A-t-il un analogue pour l'anneau de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$?
- Si oui, les énoncés ont-ils un lien profond ?
- Le théorème quadratique s'étend-il aux autres représentations rationnelles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$? de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$?
- Se généralise-t-il aux autres groupes algébriques simples, et à leurs anneaux de Lie ?
- Que signifie la linéarité en termes strictement groupe-théoriques ?
- Que signifie la rationalité en termes strictement groupe-théoriques ?

Ces questions et les réponses très partielles que nous pourrons apporter ne sont à prendre que comme autant d'incursions plus ou moins aléatoires menées depuis la baie quadratique. Et bien que ces explorations aient donné quelque chose, il n'est pas clair à l'heure actuelle que la « terre inconnue » existe.

1.3. Résultats

Le ton sera déceptif. L'auteur espérait trois extensions principales au théorème quadratique.
- La première (très partiellement atteinte au Théorème III.3) est d'une vérité plutôt douteuse ; on sait déjà qu'elle ne peut pas être établie par des moyens naïvement calculatoires.
- La deuxième (Théorème III.5) avait déjà été trouvée, par Timmesfeld lui-même.
- La troisième requérait de telles hypothèses qu'elle a naturellement migré parmi les travaux du chapitre IV.

1.3.1. Puissances symétriques

(0) La première extension concernait les puissances symétriques de la représentation naturelle de SL_2. On sait que dans la catégorie rationnelle, les représentations irréductibles de dimension finie de SL_2 sont les puissances symétriques $\mathrm{Sym}^d \mathrm{Nat}$ de la représentation naturelle (vectorielle) de SL_2, commodément pensées comme les espaces de polynômes homogènes $\mathbb{K}[X^d, X^{d-1}Y, \dots, Y^d]$ pour l'action usuelle.

L'auteur a voulu identifier ces objets parmi les $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$- ou les $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules. Il a d'abord porté son attention sur le cas de l'anneau de Lie [III.b] comme étant plus simple ; celui-ci devait servir de préparation au cas du groupe [III.c]. *Les deux problèmes sont néanmoins indépendants*, comme nous le verrons en §2.

La tactique retenue suit l'idéologie de Chevalley-Steinberg pour laquelle le groupe des $\mathbb{K}$-points d'un groupe algébrique est déterminé par un squelette combinatoire « absolu » indépendant du corps, et un choix de corps qui fournit essentiellement la chair, en étoffant les scalaires. Les quatre théorèmes qui suivent reflètent dans une large mesure cette ligne méthodologique ; le troisième fait exception. Posons $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, selon ; posons aussi $\mathcal{G}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_1)$, où $\mathbb{K}_1$ désigne le sous-corps premier de $\mathbb{K}$. La stratégie est ainsi de comprendre certains $\mathcal{G}_1$-modules, avant d'étudier sous quelles conditions la $\mathcal{G}_1$-structure d'un $\mathcal{G}$-module contraint sa $\mathcal{G}$-structure globale.

Naturellement la modélisation la plus naturelle du caractère fini-dimensionnel des $\mathrm{Sym}^d \mathrm{Nat}$ est la finitude de la longueur de nilpotence. Définissons donc la longueur d'un $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-module comme la longueur de nilpotence d'un sous-groupe unipotent quelconque, i.e. le premier entier tel que $[U, \dots [U, V]\dots] = 0$; la longueur d'un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module sera la longueur de nilpotence du sous-anneau nilpotent $\mathfrak{u}_+$ *formé des matrices strictement triangulaires supérieures* (le choix importe comme on le verra en §2.1 et surtout §2.2), i.e. le premier entier tel que $\mathfrak{u}_+^n \cdot V = 0$.

(1) Le cas de l'anneau de Lie est satisfaisant (pour le sens de l'expression « de la forme », v. §1.2).

Théorème III.1 ([III.b, Variation $n°17$]). *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}_1$ un corps* premier *de caractéristique* 0 *ou $\geq 2n+1$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$, et V un $\mathfrak{g}_1$-module. Si $\mathbb{K}_1$ est de caractéristique nulle, on suppose V sans torsion. Supposons V de longueur au plus n.*

Alors $V = \mathrm{Ann}_V(\mathfrak{g}_1) \oplus \mathfrak{g}_1 \cdot V$, et $\mathfrak{g}_1 \cdot V$ porte une structure de $\mathbb{K}_1$-espace vectoriel pour laquelle il est de la forme $\bigoplus_{k=1}^{n-1} \oplus_{I_k} \mathrm{Sym}^k \mathrm{Nat}\, \mathfrak{g}_1$.

Quant à la « récupération des scalaires », c'est-à-dire la compréhension de la $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-structure de module à partir de la $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$-structure, le résultat est comme attendu.

Théorème III.2 ([III.b, Variation $n°19$]). *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 ou $\geq n$, et $\mathbb{K}_1$ son sous-corps premier. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On suppose qu'en tant que $\mathfrak{g}_1$-module, V est de la forme $\oplus_I \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} \mathfrak{g}_1$. Alors V porte une structure d'espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus_J \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} \mathfrak{g}$.*

Ces théorèmes valent ce qu'ils valent : ils servaient surtout à dégager une stratégie pour le cas du groupe.

(2) Or l'auteur s'est emporté et a cru bon de mener ses calculs pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Théorème III.3 ([III.c, Theorem 1]). *Soit V un $\mathbb{Q}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$-module ; on suppose que $(u-1)^5 \cdot V = 0$. Alors V possède une suite de composition dont chaque facteur est de la forme $\bigoplus_{I_k} \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Sym}^k \operatorname{Nat} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right)$, pour k entre 0 et 4.*

L'auteur a du mal à estimer la pertinence et la portée de ce résultat, en tout cas entièrement nouveau.

À la différence du cas de l'anneau de Lie, la suite obtenue ne se scinde pas. En outre l'exposant 5 est très vraisemblablement optimal, ainsi que nous le verrons en §2.3. Mais cela ne concerne que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: et l'auteur ne sait pas si l'on peut généraliser en longueur quelconque à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$, ni même à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Il a donc ici dévié de sa ligne méthodologique de s'en tenir au corps premier, et *le problème d'origine reste ouvert*.

Dans le cas du groupe encore, la « récupération des scalaires » est possible. La méthode à l'œuvre dans le théorème suivant paraît suffisamment rodée pour être essayée bientôt sur des problèmes plus ambitieux.

Théorème III.4 ([III.c, Theorem 2]). *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 ou $\geq 2n+1$, et $\mathbb{K}_1$ son sous-corps premier. On suppose $\mathbb{K}$ clos sous extraction de racines $2(n-1)(n-3)\ldots$-èmes.*

Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_1)$. Soit V un G-module. On suppose qu'en tant que G_1-module, V est de la forme $\oplus_I \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} G_1$. Alors V porte une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus_J \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} G$.

Nous dirons quelques mots de tout cela en §2 ; plus précisément nous parlerons de [III.b] en §2.2 et de [III.c] en §2.3. Mais répétons déjà qu'il faudrait revenir au Théorème III.3, pour lequel l'auteur ne s'est pas tenu à son projet de rester dans $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_1)$. Une solution en caractéristique positive aurait certainement des conséquences sur les travaux exposés au chapitre IV.

1.3.2. Représentations minuscules

La deuxième extension réservait une grande déconvenue à l'auteur, soucieux de généraliser le théorème quadratique de §1.2 aux autres groupes algébriques simples : l'énoncé, aussi naturel qu'élégant, avait déjà été trouvé par Timmesfeld [Tim12]. Néanmoins la démonstration proposée dans [III.d] est elle aussi élégante et naturelle ; elle est d'ailleurs sans lien avec l'argument proposé par Timmesfeld et dont nous n'avions pas connaissance. En outre on peut simultanément traiter le cas du groupe et celui de l'anneau de Lie, ce que nous prenons pour une indication de robustesse de la méthode.

Ce sont ces raisons qui ont poussé l'auteur à soumettre le travail dont nous esquisserons la démonstration en §2.4.

Théorème III.5 ([III.d], mais aussi Timmesfeld : [Tim12]). *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$ différent de $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{G}$ un groupe algébrique simple, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, $\mathfrak{g} = (\operatorname{Lie} \mathbb{G})_{\mathbb{K}}$, et $\mathcal{G} = G$ ou $\mathfrak{g}$, selon.*

Soit V un $\mathcal{G}$-module. On suppose que chaque racine est quadratique dans son action sur V. Alors $V = C_V(G) \oplus [G, V]$ (resp. $V = \operatorname{Ann}_V(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g} \cdot V$), et le second terme porte une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour laquelle il est somme directe de représentations minuscules.

Le lecteur peu au fait des poids minuscules trouvera quelques explications techniques en §2.4 ; il peut déjà noter la linéarisabilité et la complète réductibilité, deux phénomènes non-triviaux. Ici encore la méthode paraît assez élégante pour être appliquée à des cas plus ambitieux que les représentations minuscules, et nous y reviendrons en §3.

1.3.3. Détensorisation

La troisième extension visait à identifier les modules « à la Minkowski », obtenus par changement de base-et-tensorisation $\mathrm{Nat}\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \otimes^{\varphi} (\mathrm{Nat}\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}))$ parmi les modules cubiques, i.e. de longueur de nilpotence 3. Travaux menés, les hypothèses en paraissaient de plus en plus *ad hoc*, jusqu'à se fondre naturellement en contexte modèle-théorique. Il n'en sera donc question qu'au chapitre IV.

2. Quelques points de technique

Entrons pour cette section de lecture accessoire dans le détail des travaux présentés, non sans avoir commencé par quelques mots sur la démonstration du théorème quadratique lui-même (rappelé en §1.2). Soient donc $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ pour un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$ et non isomorphe à $\mathbb{F}_3$, et V un G-module quadratique : $[U, [U, V]] = 0$ pour U le groupe des matrices strictement triangulaires supérieures. On désire décomposer V en $C_V(G) \oplus [G, V]$ et coordinatiser $[G, V]$.

Diverses réductions d'inspiration groupe-théorique, en jouant avec l'involution centrale i, permettent de se ramener au cas où i inverse V. La preuve repose alors sur l'emploi des générateurs et relations de Steinberg pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ [Car72, Lemma 6.4.4 ; notre notation diffère]. Se donner une réalisation de G revient à fixer :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad t_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

vérifiant les relations évidentes :

$$w^2 = i \quad ; \quad u_\lambda u_\mu = u_{\lambda+\mu} \quad ; \quad t_\lambda t_\mu = t_{\lambda\mu} \quad ; \quad t_\lambda u_\mu t_\lambda^{-1} = u_{\lambda^2\mu}$$

et celle, plus surprenante (exprimant notamment que $(u_1 w)$ est d'ordre 3) :

$$u_\lambda w u_{\lambda^{-1}} w u_\lambda w = t_\lambda$$

On notera que cette dernière formule lie la semi-simplicité à l'unipotence et à l'action du groupe de Weyl.

Revenant à V quadratique inversé par i, un simple calcul montre alors que pour $a \in [U, V]$,

$$(u_\lambda - 1) w \cdot a = -t_\lambda \cdot a$$

Cette dernière expression, que nous appellerons « équation de Timmesfeld » pour le $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-module quadratique, a des conséquences remarquables : on peut désormais interpréter le sous-groupe T-invariant $[U, V]$ comme l'espace de poids 1 en posant $\lambda \cdot a = t_\lambda \cdot a$ pour $a \in [U, V]$. L'additivité en a, la multiplicativité en λ, sont évidentes. En outre la formule est bien additive en λ puisque par quadraticité, le membre de gauche de l'équation de Timmesfeld l'est. Il est dès lors aisé de reconstruire la structure vectorielle ; la complète réductibilité est d'ailleurs évidente. Ceci prouve le théorème quadratique.

Les quatre articles [III.a, III.b, III.c, III.d] et partant les sections §2.1, §2.2, §2.3, §2.4, sont de lecture indépendante.

2.1. Le premier article

[III.a] se concentre sur les actions quadratiques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Il sert surtout à montrer la non-trivialité de la question principale, et à dégager des méthodes. Nous noterons encore U un sous-groupe unipotent de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, par exemple celui formé des matrices triangulaires supérieures à diagonale identité ; $u \in U$ en est un élément, par exemple la matrice

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ on notera $\mathfrak{u}$ l'anneau de Lie des matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle ; la matrice

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en est élément ; sa transposée $y = {}^T x$ jouera aussi un rôle.

Proposition ([III.a, Variation $n°7$]). *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2, 3$, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, et V un G-module. Si l'élément u agit quadratiquement, alors U agit quadratiquement.*

À part l'hypothèse sur la caractéristique le corps est bien entendu quelconque. Le résultat est fort anecdotique et repose sur des calculs disproportionnés à l'intérêt de l'énoncé ; néanmoins il était apparemment inconnu, et surtout il a le mérite d'attirer l'attention sur les problèmes de caractéristique, dont il sera beaucoup question et qui sont plus subtils qu'il n'y paraît. Passons aux liens entre G-modules et $\mathfrak{g}$-modules ; rappelons que pour nous $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est un *anneau* de Lie.

Proposition ([III.a, Variation $n°8$]). *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$ différent de $\mathbb{F}_3$. Alors tout $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-module quadratique peut être muni d'une structure de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module quadratique.*

Ceci pourrait bien sûr être vu comme un corollaire du théorème quadratique ; d'ailleurs au grand étonnement de l'auteur, une démonstration directe n'enseigne rien. On aurait aussi vite fait de linéariser V que de reconstruire l'action de l'anneau de Lie, sans d'ailleurs que les deux arguments se conduisent simultanément. Ceci confirme que les méthodes Lie-théoriques sont exclues pour aborder la question principale, mais cela porte aussi l'attention sur les $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules pour eux-mêmes. La fin de [III.a] et la totalité de [III.b] leur sont dédiées.

Proposition ([III.a, Variation $n°12$]). *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2, 3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, et V un $\mathfrak{g}$-module. On suppose que $x^2 \cdot V = 0$. Alors $V = \mathrm{Ann}_V(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g} \cdot V$, et $\mathfrak{g} \cdot V$ porte une structure d'espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus \mathrm{Nat}\, \mathfrak{g}$.*

Ceci passe par l'obtention d'une « équation de Timmesfeld » pour l'action de l'anneau de Lie. Il est tout-à-fait remarquable que dans l'énoncé précédent la caractéristique doive être distincte de 3. Une exploration plus poussée a révélé le rémède.

Proposition ([III.a, Variation $n°14$]). *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, et V un $\mathfrak{g}$-module. On suppose que $x^2 \cdot V = 0 = y^2 \cdot V$. Mêmes conclusions.*

L'hypothèse peut paraître redondante : une réflexion hâtive suggère que x et y conjugués sous l'action du groupe de Weyl, ne peuvent agir différemment. Cette intuition est erronée car en caractéristique 3, une action quadratique de $\mathfrak{g}$ ne s'étend pas nécessairement en une action de $\mathfrak{g} \rtimes W$. Et de fait, [III.a] construit des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules en caractéristique 3 où $x^2 \cdot V = 0$ mais où y est d'ordre infini. Ce phénomène a été généralisé et étudié à fond dans [III.b] que nous décrivons à présent.

2.2. Le deuxième article

[III.b] a pour but l'étude des diverses puissances symétriques $\mathrm{Sym}^d \mathrm{Nat}\, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}[X^d, X^{d-1}Y, \ldots, Y^d]$. On a cherché à les caractériser parmi les $\mathfrak{g}$-modules, où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ *en tant qu'anneau de Lie*. Posons quelques notations supplémentaires. Soit pour $\mu \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$x_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément x précédemment introduit est donc x_1.

(1) Degrés de cohérence

Définition. *Pour un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module V, notons :*

– $\lambda(V)$ *le plus petit entier n, s'il en existe, tel que* $\forall(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$, $x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}\cdot V=0$;
– $\kappa(V)$ *le plus petit entier n, s'il en existe, tel que* $\forall(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$, $\ker x^n\leq\ker(x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n})$;
– $\iota(V)$ *le plus petit entier n, s'il en existe, tel que* $\forall(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$, $\operatorname{im}(x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n})\leq\operatorname{im}x$.

Ces grandeurs sont appelées longueur, cohérence ascendante, *et* cohérence descendante, *du module.*

À titre d'exemple, $\lambda(\operatorname{Sym}^d\operatorname{Nat}\mathfrak{g})=d+1$, et $\kappa(\operatorname{Sym}^d\operatorname{Nat}\mathfrak{g})=\iota(\operatorname{Sym}^d\operatorname{Nat}\mathfrak{g})=1$. Les liens généraux entre ces quantités sont loin d'être élucidés ; en outre elles dépendent du sous-anneau nilpotent choisi, ici $\mathfrak{u}_+=\{x_\mu:\mu\in\mathbb{K}\}$. On peut néanmoins préciser quelques propriétés.

Proposition ([III.b, Variations *nn*°16 et 23])**.** *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique* 0 *ou* $\geq n+1$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, *et* V *un* $\mathfrak{g}$*-module de longueur* $\leq n$. *Alors* $\lambda(V)=\min\{n:x^n\cdot V=0\}$, *et* $\max(\kappa(V),\iota(V))\leq\lambda(V)-1$.

Le résultat est optimal, comme le montre un exemple naturel. Prenons d automorphismes distincts $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ de $\mathbb{K}$, et notons W_i la copie de $\operatorname{Nat}\mathfrak{g}$ « tordue » par l'action de φ_i. Posons enfin $V=W_1\otimes\cdots\otimes W_d$: c'est un $\mathfrak{g}$-module dont on montre $\kappa(V)=\iota(V)=d=\lambda(V)-1$. Ceci corrobore l'impression que les degrés de cohérence (introduits précisément pour cette raison) pourraient mesurer le nombre de facteurs tensoriels dans les $\mathfrak{g}$-modules abstraits — si du moins un hypothétique théorème de structure existait. Quoi qu'il en soit, *la cohérence* 1 *devrait modéliser la rationalité.*

(2) Revenons à l'étude du squelette combinatoire, et au résultat déjà mentionné en §1.3.

Théorème III.1. *Soient* $n\geq 2$ *un entier,* $\mathbb{K}_1$ *un corps* premier *de caractéristique* 0 *ou* $\geq 2n+1$, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$, *et* V *un* $\mathfrak{g}_1$*-module. Si* $\mathbb{K}_1$ *est de caractéristique nulle, on suppose* V *sans torsion. Supposons* $\lambda(V)\leq n$. *Alors* $V=\operatorname{Ann}_V(\mathfrak{g}_1)\oplus\mathfrak{g}_1\cdot V$, *et* $\mathfrak{g}_1\cdot V$ *porte une structure de* $\mathbb{K}_1$*-espace vectoriel pour laquelle il est de la forme* $\bigoplus_{k=1}^{n-1}\oplus_{I_k}\operatorname{Sym}^k\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1$.

L'auteur aurait voulu s'affranchir de l'hypothèse sur la torsion en caractéristique nulle : il n'a pas su. La démonstration est une récurrence relativement transparente ; elle requiert d'assez lourdes identités combinatoires reflétant l'algorithme qui sous-tend le théorème de Poincaré-Birkhof-Witt pour l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$. Le rôle de la caractéristique est moins immédiat, car la borne en $2n+1$ peut surprendre.

(3) Il est dès lors tentant de se placer en caractéristique moindre, quitte à perdre l'action du groupe de Weyl, comme attendu depuis l'expérience quadratique en caractéristique 3 de [III.a].

Proposition ([III.b, §3.2])**.** *Soient* $n\geq 2$ *un entier,* $\mathbb{K}_1$ *un corps* premier *de caractéristique* $n<p<2n$, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$, *et* V *un* $\mathfrak{g}_1$*-module simple tel que* $\lambda(V)=n$. *Alors* V *est de structure connue.*

Ces modules sont construits en [III.b, §3.2] ; le procédé est simple. Dans le cas non-pathologique de $\operatorname{Sym}^n\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1$, le diagramme des espaces de poids E_i (i est un poids entier) est comme suit, où y désigne la matrice transposée ${}^Tx$:

$$\begin{tikzcd} E_{1-n} \arrow[r, shift left, "x"] & \cdots\cdots & E_{n-1} \arrow[l, shift left, "y"] \end{tikzcd}$$

Or au vu de la petitesse de la caractéristique, on peut opérer un recollement inattendu en posant $m=p-n$:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Sym}^{m-1}\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1 \left\{ \right. & E_{m-1} \arrow[r, shift left, "y"] & \cdots\cdots & E_{1-m} \arrow[l, shift left, "y"] \arrow[d, bend left, "y"] \\ & E_{1-n} \arrow[u, bend left, "y"] \arrow[r, shift left, "x"] & \cdots\cdots & E_{n-1} \arrow[l, shift left, "y"] \arrow[r, phantom, "\left.\right\}\operatorname{Sym}^{n-1}\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1"] & {} \end{tikzcd}$$

La mise en place technique est sans difficulté. En outre on arrive à paramétrer les classes d'isomorphismes. Notons enfin qu'en amalgamant ainsi $\operatorname{Sym}^{n-1}\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1$ à $\operatorname{Sym}^{m-1}\operatorname{Nat}\mathfrak{g}_1$, on crée des modules V où $x^n\cdot V=0$,

alors que toute latitude est laissée à $y^n \cdot V$. Ceci illustre l'absence d'action compatible du groupe de Weyl, liée à la petitesse de la caractéristique. Comme pour les actions quadratiques (§2.1), le remède est simple et consiste en une hypothèse de bilatéralité de longueur.

Proposition ([III.b, Variation $n°18$]). *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}_1$ un corps* premier *de caractéristique $n < p < 2n$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$, et V un $\mathfrak{g}_1$-module. Supposons $x^n \cdot V = 0 = y^n \cdot V$. Mêmes conclusions qu'au Théorème III.1.*

On sait donc à peu près tout ce qu'on pourrait désirer au niveau combinatoire, même sur les pathologies.

(4) Rappelons notre résultat de « récupération des scalaires », déjà cité en §1.3.

Théorème III.2. *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 ou $\geq n$, et $\mathbb{K}_1$ son sous-corps premier. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_1)$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On suppose qu'en tant que $\mathfrak{g}_1$-module, V est de la forme $\oplus_I \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} \mathfrak{g}_1$. Alors V porte une structure d'espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus_J \operatorname{Sym}^{n-1} \operatorname{Nat} \mathfrak{g}$.*

La démonstration est naturelle. Comme les espaces de poids sont visibles sur le corps premier en raison de la caractéristique, l'action d'un sous-anneau de Cartan de $\mathfrak{g}$ (par exemple celui des matrices diagonales à trace nulle) sur l'espace de plus haut poids permet d'y définir une structure $\mathbb{K}$-vectorielle. Il suffit ensuite de la propager à tout le module et de vérifier la linéarité de l'action. Cette technique fut adaptée au cas du groupe pour la démonstration du Théorème III.4 comme on le verra en §2.3.

En combinant les résultats de [III.b] entre eux au moyen d'hypothèses sur le degré de cohérence κ ou ι, on peut ainsi aboutir à une analyse fine des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules 1-cohérents de longueur finie quelconque, en termes de suites de composition à facteurs tous de la forme $\oplus_I \operatorname{Sym}^k \operatorname{Nat} \mathfrak{g}$. Notons à l'intention du lecteur que ces suites ne sont a priori *pas* scindées. La raison en est que l'outil principal pour la scission, l'opérateur de Casimir $c = 2xy + 2yx + h^2$, n'a pas de raison d'être central dans l'*anneau* enveloppant $\mathfrak{g}$. Il faudrait sans doute s'interroger sur les liens entre hauteur de centralité de l'opérateur de Casimir dans l'image de l'anneau enveloppant, et degrés de cohérence.

L'entreprise est néanmoins déjà suffisamment aboutie pour qu'on puisse espérer généraliser au-delà des puissances symétriques de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$: voir §3.

2.3. Le troisième article

[III.c] était consacré aux mêmes questions pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Avant tout, si les mesures de cohérence κ et ι se définissent sans difficulté, il paraît difficile d'en dire quoi que ce soit.

(1) En ce qui concerne la combinatoire sur le corps premier, l'auteur a eu la naïveté de tenter l'étude sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Son résultat n'est donc pas conforme à la ligne méthodologique initialement retenue ; surtout il est partiel. Rappelons que nous avons posé :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

lesquelles matrices sont bien dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le théorème obtenu a été cité en §1.3.

Théorème III.3. *Soit V un $\mathbb{Q}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$-module ; on suppose que $(u-1)^5 \cdot V = 0$. Alors V possède une suite de composition dont chaque facteur est de la forme $\bigoplus_{I_k} \big(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Sym}^k \operatorname{Nat} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$, pour k entre 0 et 4.*

La démonstration est un fort long calcul n'expliquant rien de ce résultat aussi nouveau qu'inattendu. On obtient laborieusement des identités $f(x, w) = 0$ pour $x = \log u$ (bien défini par hypothèse) et f divers polynômes non-commutatifs plus ou moins complexes. Les différents termes de la suite de composition en émergent avec peine. Aucune interprétation n'est proposée.

Surtout c'est la méthode elle-même qui est en faute, comme l'a expliqué Maxime Wolff.

Proposition (Wolff ; repris avec son accord dans [III.c, §1.3]). *Soient n un entier et A l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]/I$, où I est l'idéal engendré par $(u-1)^n$. Alors :*

– *si $n \leq 5$, A est de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module ;*
– *si $n \geq 7$, A n'est pas de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module.*

En longueur $n \leq 5$, la preuve emploie la théorie de Bass-Serre ; elle donne à voir géométriquement la terminaison du calcul naïf — sans pour autant expliciter la suite de composition que construit notre théorème. Pour $n \geq 7$, l'argument est lui aussi emprunté à la théorie géométrique des groupes mais bien plus rapide : on code un groupe triangulaire infini. Le cas $n = 6$ est ouvert.

Avec le recul, deux indices auraient dû nous avertir que le calcul du Théorème III.3 n'avait plus rien à voir avec les relations de Steinberg mais prenait entièrement place dans le demi-plan de Poincaré :
– l'emploi systématique des seuls w et uw (via $x = \log(uw \cdot w^{-1})$, d'apparence trompeusement Lie-théorique), interprétés naturellement comme générateurs du groupe unimodulaire ;
– l'apparition du développement limité de la tangente hyperbolique dans les identités [III.c, Claim 1.2.10.2].

Ce seront donc les géomètres qui décideront si le Théorème III.3 est une curiosité ou quelque chose de plus profond.

Répétons néanmoins que l'auteur s'est éloigné de la question qu'il se posait sur le « squelette » combinatoire et n'y a pas répondu, puisqu'en passant à $\mathbb{Z}$ il a dévié de l'idéologie de Chevalley-Steinberg et du corps premier. *La question sur $\mathbb{K}_1$ reste ouverte* (v. §3).

(2) Nous voudrions dire à présent quelques mots du résultat de « récupération des scalaires » cité en §1.3.

Théorème III.4. *Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 ou $\geq 2n+1$, et $\mathbb{K}_1$ son sous-corps premier. On suppose $\mathbb{K}$ clos sous extraction de racines $2(n-1)(n-3)\ldots$-èmes.*

Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_1)$. Soit V un G-module. On suppose qu'en tant que G_1-module, V est de la forme $\oplus_I \mathrm{Sym}^n \mathrm{Nat}\, G_1$. Alors V porte une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel compatible pour laquelle il est de la forme $\oplus_J \mathrm{Sym}^n \mathrm{Nat}\, G$.

La preuve est un va-et-vient entre la vision semi-simple et la vision unipotente, conformément à la démonstration du théorème quadratique donnée au début de la présente §2. Expliquons ce que nous entendons par là.
– La première étape est de décomposer V en somme directe de sous-groupes qui seront, après imposition d'une structure vectorielle, ses espaces de poids. Dans la représentation visée les espaces de poids sont donnés par l'action du tore ; mais en l'absence de structure scalaire, une modélisation semi-simple est impossible.
  Or l'espace de plus haut poids coïncide avec le centralisateur du sous-groupe unipotent positif ; plus généralement, le i^e centre dans l'action, nilpotente, de U sur V est exactement E_{n+2-2i}, l'espace de poids $n+2-2i$. Cela peut se voir sur le corps premier : nous avons donc retrouvé les espaces de poids, et le tore normalise chacun d'entre eux.
  (Ceci revient à comprendre que le degré de cohérence de V, au sens de §2.2, est 1.)
– Il paraît alors tentant d'employer l'élément semi-simple précédemment introduit :

$$t_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

  pour reconstruire la structure scalaire sur E_n en posant : $\lambda^{n-1} \cdot v := t_\lambda \cdot v$.
  La question de la correction de cette définition, bien que non-triviale, est mineure. Le véritable problème est qu'une telle définition semi-simple de l'action montrera certes sa multiplicativité en λ, mais pas son additivité. On cherche alors une définition unipotente de cette action.
  Mais un calcul avec les relations de Steinberg définissant $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ montre que pour $v \in E_n$:

$$(u_{\lambda^{n-1}} - 1)(u-1)^{n-1} w \cdot v = t_\lambda \cdot v$$

  Cette formule, « équation de Timmesfeld » généralisée obtenue par une récurrence assez lourde, est *une vision unipotente de l'action du tore*. Elle montre que la loi scalaire proposée plus haut est bien définie, et additive en λ.

– Étendre l'action scalaire à V entier et prouver la linéarité de G est dès lors sans difficulté majeure.

La rigidité manifestée par ce premier cas de « récupération des scalaires » pour le groupe, où un G-module $\mathbb{K}_1[G_1]$-isotypique ne peut provenir que d'un module $\mathbb{K}[G]$-isotypique, suggère fortement d'aborder d'autres configurations dans un avenir prochain.

2.4. Le quatrième article

Rappelons l'énoncé obtenu dans [III.d].

Théorème III.5. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$ différent de $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{G}$ un groupe algébrique simple, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$, et $\mathcal{G} = G$ ou $\mathfrak{g}$, selon.*

Soit V un $\mathcal{G}$-module. On suppose que chaque racine est quadratique dans son action sur V. Alors $V = C_V(G) \oplus [G, V]$ (resp. $V = \mathrm{Ann}_V(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g} \cdot V$), et le second terme porte une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour laquelle il est somme directe de représentations minuscules.

Les grandes lignes de la démonstration sont éclairantes ; à la différence de la preuve donnée par Timmesfeld [Tim12], celle-ci insiste sur le système de racines.

Puisque les représentations minuscules [Bou75, Chapitre VIII, §7.3] sont caractérisées par la transitivité de l'action du groupe de Weyl sur l'ensemble des poids, il faut penser en ces termes. Or par quadraticité des racines, on arrive à modéliser les espaces de poids ; après quoi l'on montre que l'action du groupe de Weyl est bien la permutation attendue de ces espaces. Se restreignant à une orbite, on arrive à capturer ce qui devrait être une somme directe de copies d'une même représentation minuscule. On se place alors en l'espace de plus haut poids, on y définit la loi scalaire, puis on utilise l'action du groupe de Weyl pour la diffuser à tout le module. La difficulté principale est de modéliser les espaces de poids. Voici le détail des étapes.

– Notons Φ (resp., $\Phi^\vee$) le système des (co-)racines ; notons aussi Φ_s un choix de racines simples. Réalisons $\mathcal{G}$. Pour chaque racine positive α, notons G_α (resp. $\mathfrak{g}_\alpha$) le sous-groupe (resp. sous-anneau) associé à $\pm\alpha$; celui-ci contient les sous-structures racines $U_{\pm\alpha}$ (resp. $\mathfrak{u}_{\pm\alpha}$).
– Le début de l'analyse est une simple remarque. Reprenons les notations matricielles du début de §2 en les préfixant par la racine α, réalisant ainsi $G_\alpha \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. On a par quadraticité de l'action de G_α, pour $a \in [U_\alpha, V]$:
$$(u_{\alpha,\lambda} - 1)w_\alpha \cdot a = -t_\lambda \cdot a,$$
ce que nous appellerons « équation locale de Timmesfeld » (un analogue est disponible pour l'action de $\mathfrak{g}_\alpha$, dans le cas de l'anneau de Lie $\mathcal{G} = \mathfrak{g}$).
– Dans la réalité algébrique, si π est un poids minuscule, on a pour tout $\alpha \in \Phi$ que $\langle \pi, \alpha^\vee \rangle \in \{-1, 0, 1\}$. Toujours par inspection, on sait dans toute représentation minuscule M lier la valeur de $\langle \pi, \alpha^\vee \rangle$ à la « géométrie unipotente » de l'espace $E_\pi(M)$ de poids π.
En effet $\langle \pi, \alpha^\vee \rangle = -1$ si et seulement si $E_\pi(M) \leq [U_{-\alpha}, M]$; symétriquement $\langle \pi, \alpha^\vee \rangle = 1$ si et seulement si $E_\pi(M) \leq [U_\alpha, M]$; enfin $\langle \pi, \alpha^\vee \rangle = 0$ si et seulement si $E_\pi(M) \leq C_V(\langle U_{-\alpha}, U_\alpha \rangle) = C_V(G_\alpha)$. Il y a bien sûr des énoncés similaires dans le cas de $\mathfrak{g}$.
– Ceci suggère les notations suivantes, pour $\mu \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Phi)$ et $\alpha \in \Phi_s$:
  – si $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle = -1$, soit $V_{(\mu,\alpha^\vee)} = [U_{-\alpha}, V]$ (resp. $\mathfrak{u}_{-\alpha} \cdot V$) ;
  – si $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle = 0$, soit $V_{(\mu,\alpha^\vee)} = C_V(G_\alpha)$ (resp. $\mathrm{Ann}_V(\mathfrak{g}_\alpha)$) ;
  – si $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle = 1$, soit $V_{(\mu,\alpha^\vee)} = [U_\alpha, V]$ (resp. $\mathfrak{u}_\alpha \cdot V$) ;
  – si $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, 0, 1\}$, soit $V_{(\mu,\alpha^\vee)} = 0$.

  On pose enfin $S_\mu = \bigcap_{\alpha \in \Phi_s} V_{(\mu,\alpha^\vee)}$, dit *lieu de masse* μ, et qui devrait modéliser un espace de poids.
– V est somme directe de ses lieux de masse : ceci se ramène à de brefs calculs, très visuels, dans les systèmes de rang 2.
– Le groupe de Weyl permute les lieux de masse comme attendu : si $\alpha \in \Phi_s$, et que w_α est l'élément « de Weyl » de $G_\alpha \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ associé à la réalisation, alors $w_\alpha \cdot S_\mu = S_{\sigma_\alpha(\mu)}$, où $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha^\vee \rangle \alpha$ est la réflexion de plan $\alpha^\perp$.
Ici encore il s'agit d'analyser les configurations de rang 2, essentiellement par des calculs visuels. On

notera que traiter le cas de l'anneau de Lie requiert un artifice technique pour coder le groupe de Weyl à l'intérieur de l'anneau enveloppant. Bien que [III.b] incite à la prudence, c'est sans difficulté par quadraticité de $\mathfrak{u}_{\pm\alpha}$.
- On peut supposer $V = \oplus_{\mu \in W \cdot \mu_0} S_\mu$. Ceci revient à attendre V de la forme $\oplus_I M$ pour une certaine représentation minuscule M encore à trouver : mais à ce point il n'y a même pas de structure vectorielle.
- On construit la loi scalaire à la main, sur n'importe quel $V_{(\mu,\alpha^\vee)}$ avec $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \neq 0$; puis on transporte la structure linéaire par l'action du groupe de Weyl.
  Comme l'action du groupe de Weyl sur l'ensemble des lieux de masse est comprise, c'est sans difficulté. Cette étape utilise de façon cruciale les « équations locales de Timmesfeld ».
- Nous disposons déjà d'une structure vectorielle compatible sur $V = \oplus_{\mu \in W \cdot \mu_0} S_\mu$. Mais déterminer son type d'isomorphisme, et même sa complète réductibilité, requiert un peu d'analyse des valeurs possibles de μ dont la connaissance était jusqu'alors inutile.
  Or on peut à ce point établir par une inspection non pas géométrique mais purement combinatoire que μ est l'un des poids minuscules donnés dans [Bou75, Chapitre VIII, §7.3] : la liste n'était jamais utile aux arguments précédents, et la démonstration permet de la retrouver par des moyens élémentaires.
- L'action du tore est clairement par scalaires ; comme l'action des générateurs unipotents U_α est bien comprise en termes de celle du groupe de Weyl grâce aux « équations locales », on sait (et le cas de l'anneau de Lie est entièrement similaire) déterminer le module engendré par un élément de poids μ. C'est une représentation minuscule et son irréductibilité est connue ; notre démonstration permet d'ailleurs de la retrouver par des moyens élémentaires.
  La complète réductibilité suit.

Insistons sur le caractère élémentaire et naturel de la méthode, qui par opposition à [Tim12] ne requiert *aucun* argument de théorie des représentations. Nous conclurons par deux remarques.
- Si l'on omet la fin de la preuve, on trouve toujours sur $V' = [G, V]$ (resp. $\mathfrak{g} \cdot V$) une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel compatible. Dans le cas de E_8, F_4, et G_2, structures sans poid minuscules, il faut leur liste pour voir que V' est en fait trivial et que la démonstration ne construit rien.
- Il est indispensable de travailler en caractéristique $\neq 2$: cette restriction est naturelle dans le cas de $\mathfrak{g}$, et liée dans celui de G à l'emploi systématique des involutions centrales dans les sous-groupes SL_2-racines. Rappelons d'ailleurs qu'en caractéristique 2, la complète réductibilité des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules quadratiques est prise en défaut : prendre un sous-groupe parabolique de $\mathrm{Sp}_6(\overline{\mathbb{F}_2})$. Une généralisation à la caractéristique paire est donc hors de question.

3. Leçons et perspectives

Existe-t-elle, la terre inconnue dont l'auteur a cru voir se dessiner l'horizon ? ou n'a-t-il que rêvé l'unité d'îlots épars ? Il ne sait plus quoi penser. Le chapitre IV offre un cadre où la question aura plus de sens.

(1) La relecture de [III.b] suggère de revenir sur les différents degrés de cohérence (voir §2.2), et explorer d'éventuels liens avec la hauteur de centralité de l'élément de Casimir dans l'*anneau de Lie* enveloppant. Ce problème est selon toute vraisemblance essentiellement calculatoire et d'un intérêt médiocre. Le prochain nous paraît bien plus pertinent.

Question III.A. *Analyser les $\mathfrak{g}$-modules de longueur finie et de degré de cohérence* 1*, pour $\mathfrak{g}$ de la forme $(\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ où $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique simple.*

On espérerait avoir complète réductibilité, et l'espace trivial mis à part, trouver une somme directe de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tous dans la catégorie algébrique. *Mais les outils sont à créer.*

Question III.B. *Analyser les $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules de longueur finie et de bas degré de cohérence.*

Rappelons que le degré de cohérence a été introduit en §2.2 dans l'espoir de mesurer le nombre de facteurs tensoriels dans une décomposition ${}^{\varphi_1}V \otimes \ldots {}^{\varphi_d}V$, où les φ_i sont des automorphismes de $\mathbb{K}$.

Tout ceci peut sembler un peu vain faute d'une conjecture précise — énoncée au dernier chapitre.

(2) Revenons à présent aux questions laissées ouvertes par [III.c]. Nous écartons celles liées aux degrés de cohérence comme trop gratuitement calculatoires, et vraisemblablement désespérées.

Question III.C.
- *L'anneau quotient* $\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]/I$*, où* I *est l'idéal engendré par* $(u-1)^6$*, est-il de type fini en tant que* $\mathbb{Z}$*-module ?*
- *Quel est le sens géométrique (voir §2.3) du calcul établissant le Théorème III.3 ?*

Et derrière ces questions liées à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, il nous semble essentiel de reprendre l'étude là où nous l'avons laissée : sur le corps premier.

Question III.D. *Soient* $\mathbb{K}_1$ *un corps premier et* $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_1)$*. Soit* V *un* $\mathbb{K}_1[G_1]$*-module de longueur finie. Peut-on analyser* V *?*

Puisque les représentations indécomposables de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ ont été décrites par Janusz [Jan66, §3], l'espoir n'est pas exclu en caractéristique première. L'auteur n'a pas de stratégie sur $\mathbb{Q}$: un « transfert » logique est impossible. (Signalons au lecteur hâtif que la question de la cohérence ne se pose pas ici : sur un corps premier, même sur $\mathbb{Q}$, tout est 1-cohérent, de manière ascendante ou descendante, v. [III.c, §2.2].)

Enfin mais dans une autre direction, le phénomène de « récupération des scalaires » présenté par la démonstration du Théorème III.4 (v. §2.3) pourrait être à explorer plus avant.

Question III.E. *Soient* $\mathbb{G}$ *un groupe algébrique,* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ *une extension de corps, et* V *un* $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$*-module. On suppose qu'en tant que* $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$*-module,* V *est* $\mathbb{K}[\mathbb{G}_{\mathbb{K}}]$*-isotypique. Quand peut-on dire quelque chose de sensé — par exemple quand* V *est-il un* $\mathbb{L}[\mathbb{G}_{\mathbb{L}}]$*-module ?*

(3) Quant à étendre [III.d], on peut rêver une reconstruction de l'action adjointe. On chercherait à l'identifier, sans doute, parmi les représentations dites « quasi-minuscules » (celles où le groupe de Weyl a deux orbites sur l'ensemble des poids, l'une étant $\{0\}$) en type A-D-E, sous l'hypothèse que chaque racine est cubique et de cohérence 1. Ce n'est qu'une direction.

Question III.F. *Identifier les représentations quasi-minuscules des groupes algébriques simples parmi leurs modules abstraits.*

(4) Tout ceci n'a fait qu'éviter la véritable question, pour laquelle c'en serait bien fini des appareillages timides depuis la baie quadratique.

Question III.G. *Trouver un énoncé crédible « à la Curtis-Phan-Tits » pour les modules, les identifiant à partir de données locales.*

Un tel énoncé — nous n'osons pas parler de conjecture — serait par exemple le suivant.

> Soient $\mathcal{G}$ une structure de la forme $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ ou $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$, pour $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif, et V un $\mathcal{G}$-module irréductible, sur $\mathbb{K}$ de caractéristique assez grande et suffisamment radicalement clos (par rapport à la *structure locale* de V supposée ci-après).
>
> On suppose que les différentes structures racines de type $\mathbb{SL}_2$ agissent de manière complètement réductible et rationnelle, dans le sens où $V = C_V(G_\alpha) \oplus [G_\alpha V]$ (resp. $V = \mathrm{Ann}_V(\mathfrak{g}_\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \cdot V$) et le second terme est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel se décomposant en somme directe de représentations rationnelles.
>
> V porte-t-il une structure vectorielle compatible *globale* ? rationnelle ?

C'est dans un sens ce que faisait [III.d], à relire sous cet angle. Nous n'avons connaisance d'aucune autre étude envisageant le problème. La Question III.A semble être le laboratoire approprié.

(5) En attendant on peut suggérer quelques problèmes plus facilement accessibles. Il nous a en effet semblé que les anneaux de Lie n'avaient pas jusqu'ici obtenu grande attention.

Question III.H. *Où est le théorème de Borel-Tits pour les anneaux de Lie de la forme* $(\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ *?*

Nous n'avons pas connaissance de tels travaux, malgré l'apparente simplicité de la question.

Mais revenons aux modules, pour une question de nouveau vague. Le lecteur ayant noté le comportement parfois pathologique du groupe de Weyl dans les modules de basse caractéristique peut par ailleurs envisager un remède algébrique : jumeler l'action de l'anneau de Lie à celle du groupe de Weyl, voire à celle de tout le groupe abstrait.

Question III.I. *Soient $\mathbb{G}$ un groupe algébrique, $\mathbb{K}$ un corps, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathfrak{g} = (\operatorname{Lie}\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$. Que peut-on dire des $(G, \mathfrak{g})$-bimodules où l'action est compatible avec celle de G sur $\mathfrak{g}$? Même question pour les $(W, \mathfrak{g})$-bimodules, où W est le groupe de Weyl.*

Références pour le chapitre

[Bou75] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII : Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées*, Actualités scientifiques et industrielles, no. 1364, Hermann, Paris, 1975.

[BT73] A. Borel & J. Tits – « Homomorphismes ''abstraits'' de groupes algébriques simples », *Ann. of Math.* **97** (1973), no. 2, p. 499–571.

[Jan66] G. Janusz – « Indecomposable representations of groups with a cyclic Sylow subgroup », *Trans. Amer. Math. Soc.* **125** (1966), p. 288–295.

[Smi89] S. Smith – « Quadratic action and the natural module for $\mathrm{SL}_2(k)$ », *J. Algebra* **127** (1989), no. 1, p. 155–162.

[Tim01] F. G. Timmesfeld – *Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-type*, Monographs in Mathematics, vol. 95, Birkhäuser, Basel, 2001.

[Tim12] — , « Complete reducibility of quadratic modules for finite Lie-type groups », *J. Algebra* **355** (2012), p. 35–60.

IV. Logique des représentations

Shall I at least set my lands in order?

Le mémoire d'habilitation commencerait ici. Nous esquissons des liens entre théorie des modèles et théorie des représentations.

Travaux présentés

[IV.a] « Actions of groups of finite Morley rank on small abelian groups », *Bull. Symb. Log.* **15** (2009), no. 1, p. 70–90.

[IV.b] « Small representations of SL_2 in the finite Morley rank category », *J. Symbolic Logic* **77** (2012), no. 3, p. 919–933. En collaboration avec G. Cherlin.

[IV.c] « Rank 3 Bingo », à paraître au *J. Symbolic Logic* (2016). En collaboration avec A. Borovik.

[IV.d] « For a study of definable representations of algebraic groups », soumis (2016), 24 pages.

[IV.e] « A note on linearisation », en préparation (2016), 4 pages.

Le quatrième article a été soumis pour publication début 2016.

---

1. Présentation

Deux points de vue ont primé jusqu'à présent :

- les groupes algébriques modélisés par certains groupes abstraits au sein d'un univers soumis à des contraintes de nature modèle-théorique ; on peut soit chercher un résultat de classification réduisant une classe à l'autre, comme au chapitre I, soit tenter d'étudier les groupes algébriques dans le cadre offert par la logique, comme au chapitre II ;
- les groupes algébriques et les algèbres de Lie associées vus comme objets concrets, munis d'une représentation dans une structure algébrique, mais sans donnée géométrique ni logique supplémentaire : ce que faisait le chapitre III.

Ce dernier chapitre propose d'unifier les deux aspects ; il y sera question de représentations en contexte modèle-théorique.

1.1. Contexte

À l'origine les groupes de rang de Morley fini étaient apparus comme groupes de permutations : les « groupes de liaison » régissant la nature $\aleph_1$-catégorique [Poi87] (référence du chapitre I). Mais en rompant progressivement avec leur filiation modèle-théorique, les groupes de rang de Morley fini devenus groupes rangés ont été surtout considérés comme groupes abstraits, conformément à l'esprit du programme de classification dû à Borovik et dont nous avons touché quelques mots au chapitre I. Les explorations des trois décennies qui suivirent leur émergence ont donc mis l'accent sur leur structure interne. Il y eut bien sûr des exception notables :

- une série de travaux de Nesin et alii relatifs aux groupes rangés strictement doublement transitifs (pour l'impressionnante liste desquels nous renvoyons à [BN94, §11], référence du chapitre I) ;
- l'étude par Gropp des groupes de permutation sur des ensembles de rang 2 [Gro92] en vue d'étendre un théorème classique de Hrushovski ;
- un article de Macpherson et Pillay [MP95] visant à reproduire l'analyse des actions primitives *finies* due à O'Nan-Scott ;
- l'approche géométrique par les BN-paires, dont [KTVM99, Ten03, Ten04, DMT08, Wis11] (les deux derniers, cités au chapitre I).

On peut néanmoins soutenir que le gros des efforts a porté jusqu'à présent sur la classification des groupes abstraits ; et l'on soutiendra même que les groupes rangés seront à l'avenir davantage considérés comme groupes concrets.

C'est en parallèle à la mise au propre du théorème « du type au moins pair » [ABC08] évoqué au chapitre I §1.1 que Borovik et Cherlin rédigèrent, pour le semestre d'étude au printemps 2005 à Cambridge, l'article [BC08] qui devait indiquer une inflexion majeure. Nous voudrions citer un extrait d'un message personnel de Cherlin, datant de l'automne 2014 :

> It's fortunate the Newton people asked us for a wrap-up article ; none of the permutation theoretic stuff would have happened otherwise, I don't think — though Sasha [Borovik] certainly had it somewhere in mind.

[BC08] suggère l'application des techniques acquises lors de l'étude interne des groupes rangés abstraits, à des questions relatives aux groupes de permutation. Car de même que la classification des groupes simples finis a permis de résoudre nombre de problèmes à caractère combinatoire, on peut espérer que notre connaissance *bien qu'incomplète* des groupes simples rangés et surtout les outils développés dans ce cadre aient acquis une maturité suffisante pour les situations « concrètes ».

L'article de Borovik et Cherlin s'achève ainsi sur une liste de problèmes à résoudre ou du moins à étudier, qui vont de la théorie des modèles pure à la géométrie algébrique, en insistant sur ce qu'il convient d'appeler « géométrie combinatoire », ou étude élémentaire des géométries linéaires.

[BC08] et sa liste ont suscité l'intérêt de presque tous les membres de l'univers rangé. Nous allons défendre l'idée qu'il s'agit d'un véritable second souffle pour le domaine, avec un changement d'orientation marqué par l'éloignement des groupes finis et le retour probable à davantage de théorie des modèles.

1.2. Enjeux

L'auteur a préféré un cadre algébrique plutôt que combinatoire, et s'est consacré aux problèmes de représentations.

Définition. *Un module rangé est un triplet $(G, V, \cdot)$ — on sous-entendra parfois l'action — où G est un groupe, V un groupe abélien* connexe*, et $\cdot$ une action de G sur V, le tout étant définissable dans un univers rangé.*

De manière équivalente on peut demander que $G \ltimes V$ soit un groupe rangé avec G et V définissables, et V abélien connexe. Signalons au lecteur que l'hypothèse de connexité affecte les notions de sous-module, de suite de composition, et d'irréductibilité. Cette dernière propriété est parfois nommée G-minimalité, terme que nous éviterons.

Ce n'est là qu'une partie du champ plus général ouvert par Borovik et Cherlin dans [BC08]. Mais d'une part l'analyse des groupes de permutations définissablement primitifs [MP95, Theorem 1.1] (généralisation modèle-théorique du résultat fini montré par O'Nan et Scott) voit émerger de telles configurations « de type affine » ; et d'autre part nous allons tenter de convaincre le lecteur de leur importance et intérêt intrinsèques. Les problèmes raisonnables se divisent en deux classes.

- Les questions d'« identification simultanée » : on fait des hypothèses sur le module, par exemple sur son rang ou le degré de transitivité générique de l'action, et l'on vise à identifier le triplet $(G, V, \cdot)$. Cette ligne tend vers la géométrie combinatoire.

– Les problèmes de « zoologie des $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$-modules rangés » : *on suppose G connu*, par exemple G de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ où $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique, et l'on essaie de déterminer la classe de ses modules rangés. Cette seconde approche évoque plutôt la géométrie algébrique.

La division est naturelle et les moyens mis en œuvre sont remarquablement différents, comme le montrera le présent chapitre. En §1.3 nous présenterons des travaux dans chacune de ces directions, dont nous commentons pour l'instant les enjeux.

1.2.1. Identification simultanée

L'un des buts à court terme de la première voie est la conjecture suivante sur laquelle travaillent Berkman et Borovik. (La k-transitivité générique est l'existence d'une orbite générique dans l'action sur Ω^k.)

Conjecture (Borovik-Cherlin, [BC08, Problem 13]). *Soient G rangé connexe et V un G-module fidèle génériquement n-transitif de rang n. Alors $G \ltimes V \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ltimes \mathbb{K}^n$ dans l'action naturelle, pour $\mathbb{K}$ un corps définissable de rang* 1.

Comme annoncé, cette conjecture relative aux modules s'inscrit dans le programme plus vaste de l'étude des groupes de permutations rangés à haute transitivité générique, dont Altınel et Wiscons ont récemment annoncé la résolution dans le cas $n = 2$ [AW16].

Conjecture (Borovik-Cherlin, [BC08, Problem 9]). *Soit G un groupe connexe rangé agissant définissablement, fidèlement, et génériquement k-transitivement sur un ensemble Ω de rang n. Alors $k \leq n+2$, et le cas d'égalité ne se produit que si (G, Ω) équivaut à l'action projective $(\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}), \mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$ pour un corps définissable $\mathbb{K}$.*

Un autre objectif associé est le problème suivant.

Conjecture (Borovik-Cherlin, [BC08, Problem 12]). *Soit (G, V) un module rangé où G est fidèle et l'action génériquement k-transitive. Alors* $\mathrm{rg}(V) \geq k$.

Ceci servirait à la résolution du problème principal mis en avant par [BC08] : la détermination explicite d'une borne fine pour le rang d'un groupe de permutations rangé définissablement primitif en fonction de l'ensemble sur lequel il agit. Mais cette voie nous éloigne trop des modules rangés.

Retenons simplement que les questions d'identification de modules interviennent spontanément en géométrie combinatoire et pour des problèmes naturels de groupes de permutations en contexte modèle-théorique.

1.2.2. Zoologie des modules rangés

La seconde voie est celle de l'étude de la catégorie des modules définissables des groupes algébriques, ce qu'on peut aussi voir comme l'étude au premier ordre de leurs représentations, avec toute la part d'effectivité potentielle que cela sous-entendrait à terme.

Cela permettrait aussi de progresser vers la réponse à une question posée par Borovik et Cherlin [BC08, Problem 14] : la généralisation en toute caractéristique des travaux de Popov [Pop07] déterminant le degré de transitivité générique maximal des groupes algébriques connexes agissant sur des variétés algébriques. Or les travaux de Popov sont limités à la caractéristique nulle car ils requièrent la classification des actions rationnelles ayant une orbite dense (travaux de Kimura pour cette caractéristique, cités dans [Pop07]). Borovik et Cherlin suggèrent les changements de catégorie : d'algébrique vers définissable, et d'hypothèse : de dense vers générique. C'est ici que l'étude systématique des modules rangés pour les groupes algébriques entrerait en jeu.

À l'origine l'auteur était attiré par ce problème « à la Kimura-Popov » ; il pense avoir trouvé sa voie propre dans une autre direction, signalée en §4.2.

1.3. Résultats

Nous allons présenter des travaux dans chacune des deux directions naturelles : identification simultanée (§1.3.1) et zoologie des modules rangés (§1.3.2) ; nous commencerons par un prologue plus général sur la

linéarité.

1.3.0. Questions de linéarité

La rédaction de ce mémoire a permis à l'auteur de clarifier ses idées quant à l'obtention de corps en contexte rangé ; le théorème suivant en résulte. On notera que l'énoncé ne porte pas sur la seule action d'un groupe mais est plus général.

Théorème IV.1 ([IV.e]). *Définissables dans une structure rangée, soient V un groupe abélien, et X un ensemble définissable infini d'endomorphismes de V. On suppose que V est X-irréductible (la notion garde un sens). On fait en outre l'une des deux hypothèses suivantes :*
- *V est sans torsion ;*
- *X contient un sous-ensemble définissable infini $X_0 \subseteq X$ dont tout opérateur commute à chaque opérateur de X.*

Alors on peut définir un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ et X agit linéairement ; dans le second cas, X_0 agit par scalaires.

Ce théorème généralise non-trivialement un certain nombre de résultats classiques évoqués en §2.2. On trouvera remarques et éléments de démonstration en §3.1.

1.3.1. Identification simultanée

Rappelons que nous entendons par là les problèmes d'identification d'un module rangé $(G, V, \cdot)$ sous des hypothèses sur le module et l'action plutôt que sur le groupe agissant. L'auteur a pris [BC08, Problems 15–16] comme des œuvres de commande ; la direction est surtout explorée par Altınel, Berkman, Borovik, et Wiscons [AW16, BB12].

Théorème IV.2 ([IV.a, Theorem A]). *Soit (G, V) un module rangé. On suppose G connexe non-résoluble, $\operatorname{rg} V = 2$, et l'action fidèle. Alors il existe un corps $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}^2$ et $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ dans l'action naturelle, le tout définissablement.*

Aussi anodin semble-t-il, ce petit résultat a requis l'emploi des « principes d'unicité » pour les $N_\circ^\circ$-groupes développés au chapitre I (§2.1), bien que sous forme restreinte. L'extension au rang 3 fut conduite en compagnie d'Alexandre Borovik.

Théorème IV.3 ([IV.c]). *Soit (G, V) un module rangé. On suppose G connexe non-résoluble, $\operatorname{rg} V = 3$, et l'action fidèle et irréductible. Alors :*
- *soit il existe un corps $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}^3$ et $G \simeq \mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ ou $\mathrm{GL}_3\,\mathbb{K})$ dans l'action naturelle, ou $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^\times \operatorname{Id} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ dans l'action adjointe, le tout définissablement ;*
- *soit G est un mauvais groupe simple de rang 3, et V est d'exposant premier impair.*

Il paraît difficile d'éliminer le cas du mauvais groupe (objet défini au chapitre I, §1.2), pour lequel rien n'est dit de l'action. Au moins sait-on [MP09, Corollaire B] qu'un mauvais groupe de rang 3 ne peut être linéaire, même non-définissablement, ce dont nous reparlerons en §2.2.4. Ceci accentue le côté pathologique de la situation. Nous dirons quelques mots de la preuve en §3.2 ; elle convoque un large corpus de travaux, qui reflète toute la variété des directions à suivre dans l'univers rangé, et notamment un vaste fragment du chapitre I, surtout [I.d] que nous y avons présenté.

1.3.2. Zoologie des $\mathbb{G}_\mathbb{K}$-modules rangés

Dans cette autre veine on cherche à classifier les modules rangés de la forme $(\mathbb{G}_\mathbb{K}, V, \cdot)$, pour $\mathbb{G}$ un groupe algébrique donné. Nous pouvons résumer nos travaux en un seul énoncé.

Théorème IV.4 ([IV.a, Theorem B], [IV.b], [IV.d]). *Soit $\mathbb{K}$ un corps de rang k, de caractéristique ni 2 ni 3. Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et V un G-module irréductible de rang $\leq 4k$. Alors V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel définissablement isomorphe, en tant que $\mathbb{K}[G]$-module, à l'un des objets suivants :*
- *la représentation naturelle $\operatorname{Nat} G$;*
- *la représentation adjointe $\operatorname{Ad} G$;*

– *la représentation rationnelle de dimension* 4*, i.e. la troisième puissance symétrique,* $\mathrm{Sym}^3 \mathrm{Nat}\, G$ *;*
– *une représentation obtenue par changement de base-et-tensorisation* $(\mathrm{Nat}\, G) \otimes^{\varphi} (\mathrm{Nat}\, G)$ *pour un automorphisme définissable* φ *de* $\mathbb{K}$*.*

Le cas de la représentation naturelle est dans [IV.a, Theorem B] et celui de la représentation adjointe dans [IV.b], travail commun avec Gregory Cherlin. C'est à vrai dire une poursuite solitaire du calcul final (« fuga ») de [IV.b] qui en éliminant progressivement la théorie des modèles fut l'origine de nos travaux sur les puissances symétriques [III.b, III.c] présentés au chapitre III. Comme on l'a vu dans ledit chapitre, §2.3, la complexité combinatoire du calcul explose rapidement. *Revenir en contexte modèle-théorique pourrait enrayer ces phénomènes*, et nous en reparlerons en §4.3.

Outre l'étude des configurations de dimension 4, [IV.d] propose des réécritures des cas naturel et adjoint indépendantes et plus concises grâce à des outils nouvellement développés. Mais à la différence des travaux d'« identification simultanée », l'argument ne demande presque aucune connaissance des groupes rangés : engendrement par indécomposables, théorème de Macintyre sur les corps définissables (rappelé en §2.1 ci-après), théorème du corps de Zilber (§2.2), et théorème de Wagner sur les groupes multiplicatifs de corps rangés (v. chapitre II, §1.2) sont les seuls prérequis techniques. *C'est pour nous le signe que [IV.d] est le début d'une nouvelle voie encore inexplorée.*

Enfin, par rapport aux précédents [IV.a, Theorem B] et [IV.b], [IV.d] est bien plus qu'une incrémentation quantitative du rang du module : un saut qualitatif vers un nouveau cadre, car nous avons quitté avec succès la catégorie rationnelle.

Nous dirons un mot de la preuve en §3.3, et reviendrons sur l'énoncé en §4.2.

2. Quelques points de technique (1) — État des lieux

Mais avant tout nous aimerions, pour que ce texte prenne un peu d'ampleur, évoquer les principes généraux relatifs aux représentations rangées. Les compléments techniques sur nos propres travaux se trouveront en §3 ; la section présente ne contient rien de l'auteur. Ces rappels concernent la question suivante.

Question. *Soit* (G, V) *un module rangé.*
– *Dans quels cas peut-on définir un corps* $\mathbb{K}$ *tel que* $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ *et* $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *?*
– *Dans quels cas la configuration est-elle algébrique ?*

Pour cela nous devrons commencer par quelques mots sur la matière puis sur les corps (§2.1) ; la question proprement dite sera abordée aux §§2.2 et 2.3 ; l'ouvrage [BN94] est une référence du chapitre I.

Nos tout premiers rappels sont de simples remarques.

(1) **Notion de caractéristique.** Il est évident d'après le célèbre théorème de Macintyre sur les groupes abéliens (cité au chapitre I, §2.1), qu'un module irréductible non-trivial (G, V) est soit d'exposant premier, soit divisible. Mais dans le second cas, comme un p-tore (v. chapitre I, §1.1) n'a qu'un nombre borné par le continu d'automorphismes, G ne peut être infini : si bien que si V est divisible, il est également sans torsion. Nous dirons que V est de caractéristique p ou 0, selon.

(2) **Matière dans les groupes résolubles en caractéristique positive.** D'après [IV.c, Lemma B] (conséquence immédiate des théorèmes de structure pour les groupes rangés résolubles), si (H, V) est un module rangé avec H connexe résoluble et V de caractéristique p, alors $H = T \ltimes U$ où :
– U est p-unipotent (au sens du chapitre I, §2.1), et $U \ltimes V$ est nilpotent ;
– T est un bon tore (au sens du chapitre II, §1.1).

Ceci limite drastiquement la structure des sous-groupes *résolubles* des groupes d'automorphismes de modules en caractéristique positive. La matière n'est pourtant pas parfaitement maîtrisée, comme nous allons le voir tout de suite en parlant de corps. Pour d'autres raisons nous n'évoquerons pas ici la caractéristique nulle.

2.1. Rappels sur les corps rangés

Les corps a priori gauches définissables dans les théories rangées sont commutatifs (Cherlin [BN94, Theorem 8.10], mais voir remarques historiques à la fin du chapitre concerné, [BN94, p. 139]) ; ceux qui sont infinis sont algébriquement clos (Macintyre [BN94, Theorem 8.1]), si bien que par finitude du rang il n'existe pas d'extension de corps infinis définissables.

En revanche, et c'est une différence majeure avec la géométrie algébrique, *le rang d'un corps n'est pas nécessairement* 1 ; les techniques modèle-théoriques « d'amalgamation » de Hrushovski ont permis de telles constructions [Poi99]. Il existe même des corps rangés dont le groupe additif ou multiplicatif n'est pas modèle-théoriquement minimal (i.e., possède un sous-groupe définissable infini propre), par opposition au contexte algébrique. Résumons les connaissances sur la question.

- Si $\mathbb{K}$ est un corps rangé de caractéristique nulle, alors $\mathbb{K}_+$ est minimal (Zilber, Poizat : le normalisateur de $0 < A \leq \mathbb{K}_+$ est un sous-corps définissable infini, donc égal à $\mathbb{K}$, dont A est ainsi un idéal).
- Il existe $\mathbb{K}$ rangé de caractéristique nulle avec $\mathbb{K}^\times$ non-minimal (Baudisch–Hils–Martin-Pizarro–Wagner [BHMW09]). À vrai dire, toute la monumentale théorie de l'unipotence de Burdges, aperçue au chapitre I, §2.1, est une tentative de contrer l'émergence de ces « mauvais corps ».
- Il existe des corps rangés de caractéristique positive avec $\mathbb{K}_+$ non-minimal (Baudisch–Martin-Pizarro–Ziegler [BMZ07]).
- L'existence de corps rangés de caractéristique positive avec $\mathbb{K}^\times$ non-minimal, est ouverte et considérée peu vraisemblable par les spécialistes car contraire à certaines conjectures classiques de théorie des nombres (Wagner [Wag03]).

Parlons enfin d'automorphismes. Vu l'absence d'extensions définissables, un corps rangé de caractéristique nulle n'a pas d'automorphisme définissable autre que l'identité. En caractéristique positive il y a les puissances *relatives* de l'automorphisme de Frobenius ; on ignore encore si c'est tout [BN94, Question B.35]. En revanche il n'y a pas de *groupe définissable* d'automorphismes d'un corps rangé [BN94, Theorem 8.3].

2.2. Principes de linéarisation

Ces rappels effectués revenons à la question posée au début de la présente section. Divers résultats apportent leur réponse au premier volet : la linéarisabilité d'un module rangé (G, V).

2.2.1. Un principe local : le théorème de Zilber

L'important résultat suivant est *local* en ce qu'il requiert la petitesse du groupe agissant.

Théorème (Zilber, [BN94, Theorem 9.1] : théorème « du corps » (linéarisation abélienne)). *Soit (G, V) un module rangé ; on suppose G abélien, V irréductible, et l'action fidèle. Alors il existe un corps définissable $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}_+$ et $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V) \simeq \mathbb{K}^\times$ définissablement.*

Ce théorème est à la base de nombreuses méthodes pratiques, par exemple dans le chapitre I pour l'identification de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$, ou encore en toile de fond à l'unipotence de Burdges. La configuration $G \leq \mathbb{K}^\times$ a directement motivé la question de la minimalité modèle-théorique de $\mathbb{K}^\times$ évoquée en §2.1.

La preuve est remarquable. Il s'agit au fond d'une forme définissable du lemme de Schur ; au vu de nos rappels sur les corps, la question est essentiellement celle de l'émergence d'un corps gauche infini définissable. Le candidat naïf est l'anneau des endomorphismes définissables de V ; cette construction n'est pas du premier ordre. Le candidat retenu est le sous-anneau d'endomorphismes définissables de V *engendré par* G ; de manière non-triviale ce dernier anneau est définissable, par un jeu subtil d'interpolation en un nombre borné de points des opérateurs utilisant l'analyse des « indécomposables » de Zilber (adaptation d'un lemme d'engendrement bien connu sur les groupes algébriques : voir par exemple [Hum75, Proposition 7.5], référence du chapitre I). L'étude [IV.e] propose une démonstration différente du théorème du corps, esquissée en §3.1.

Répétons enfin que le théorème du corps est un énoncé *local*. En effet si l'on fait agir un groupe G quelconque, on ne pourra appliquer ce théorème qu'à l'action de certains sous-groupes $H \leq G$ sur certains H-sous-modules $W \leq V$; il n'est alors pas clair, *même en supposant G simple*, que le corps $\mathbb{K}$ soit

indépendant de (H, W). En revanche il existe des cas plus favorables, dégagés par Nesin puis Poizat, où la présence d'un radical résoluble infini permet une linéarisation globale.

Théorème (Nesin, Poizat, [BN94, Corollary 9.6] : linéarisation via les semi-simples). *Soit (G, V) un module rangé. On suppose G connexe et fidèle. On suppose en outre qu'il y a un sous-groupe infini, définissable, abélien, et distingué $H \trianglelefteq G$ et un H-sous-module* irréductible *$W \leq V$ tels que $V = \langle W^g : g \in G \rangle$. Alors il existe un corps définissable $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ et $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ définissablement ; en outre $H \hookrightarrow \mathbb{K}^\times \mathrm{Id}_V$.*

Rien de tel pour les groupes dont le radical résoluble est fini : le caractère local du théorème du corps est en général insurmontable.

2.2.2. Un principe global en caractéristique nulle

Théorème (Loveys-Wagner, [LW93, Theorem 4], repris en [BN94, Theorem A.20] : linéarisation en caractéristique nulle). *Soit (G, V) un module rangé ; on suppose l'action fidèle, et V irréductible* et sans torsion. *Alors il existe un corps définissable $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ et $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définissablement.*

Ce principe de linéarisation global ne paraît pas contraindre a priori la structure de G : l'hypothèse d'absence de torsion est pourtant forte, puisque le contexte rangé interdit les phénomènes de « caractéristique croisée », si bien que G est immédiatement $U_p^\perp$ au sens du chapitre II. En outre, la situation étant a posteriori linéaire en caractéristique nulle, l'unipotence est de nouveau géométrique ; et le théorème a pour conséquence méthodologique l'évacuation à peu près totale de la théorie de l'unipotence de Burdges des questions de modules rangés.

La démonstration proposée par Loveys et Wagner procède par capture d'une « droite » : un sous-groupe $L \leq V$ modèle-théoriquement minimal. Par absence de torsion et minimalité, L intersecte trivialement ses conjugués distincts. On l'emploie pour coordinatiser sommairement le module ; puis via les opérateurs de G, on construit un pan raisonnable de l'anneau des endomorphismes définissables de L. À ce dernier s'applique la technique de Zilber : on a ainsi fait émerger un corps infini, dont il reste à reconstruire l'action sur V entier, et vérifier la compatibilité à celle de G.

Nous donnerons une autre démonstration, d'un phénomène plus général.

2.2.3. Le cas additif

Nous avons jusqu'à présent considéré le cas d'un sous-groupe *multiplicatif* $G \leq \mathrm{Aut}(V)$ tel que $(G, V, \cdot)$ soit rangé. Un problème parallèle fut étudié par Nesin [Nes89] : celui d'un sous-groupe *additif* $H \leq \mathrm{End}(V)$. Les deux contextes ne sont pas équivalents. Dans le second, H est abélien en tant que groupe abstrait puisque le groupe additif $\mathrm{End}(V)$ l'est, mais rien ne force les éléments de H à commuter en tant qu'opérateurs. Cette subtilité pousse Nesin à travailler avec des anneaux ; c'est inutile pour ses arguments.

Au moyen d'une élégante version définissable du lemme de Schur qu'il attribue à Zilber, Nesin conclut à la linéarisabilité définissable dans de nombreux cas. L'énoncé suivant est extrait de son travail.

Théorème (Nesin, [Nes89, Lemma 12], repris en [BN94, Proposition A.11] : linéarisation additive). *Soit $(H, V, \cdot)$ un triplet définissable, où le groupe abélien infini H agit par* endomorphismes *sur le groupe abélien connexe V. On suppose que V est H-irréductible. On suppose en outre que V est sans torsion, ou que H contient un sous-groupe infini définissable H_0 dont tout opérateur commute à chaque opérateur de H.*

Alors on peut définir un corps algébriquement clos tel que $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ et H agit linéairement ; dans le second cas, H_0 agit par scalaires.

Ce théorème a pour corollaire la linéarisabilité des actions d'anneaux de Lie rangés en caractéristique nulle, dont nous reparlerons en §4.3.2.

La preuve emploie le théorème des indécomposables de Zilber : pour l'amorcer, il est indispensable que H porte une structure de groupe additif. C'est sans doute ce qui empêcha Nesin [Nes89] puis Borovik et Nesin [BN94] d'appliquer la construction « à la Schur » au théorème du corps de Zilber.

Notre Théorème IV.1 déjà cité en §1.3.0 fait l'économie de toute structure algébrique sur l'ensemble agissant, unifiant ainsi les théorèmes classiques des §§2.2.1, 2.2.2, 2.2.3. Sa preuve est esquissée en §3.1,

2.2.4. Linéarité abstraite

Les énoncés des §§2.2.1 et 2.2.2 concernent l'obtention de plongements définissables de G dans un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour G provenant d'un module rangé (G, V) ; on peut dans une tout autre direction s'interroger sur la linéarisabilité — définissable ou non — de groupes rangés *abstraits*.

Les travaux d'Altınel et Wilson (linéarisabilité de certains groupes nilpotents, puis résolubles) [AW09, AW11] vont dans ce sens, et ceux de Frécon (existence de groupes résolubles non *définissablement* linéaires) [Fré10, Proposition 5.3] dans le sens contraire. Nous avons en outre déjà mentionné qu'un mauvais groupe de rang 3 ne peut être linéaire même non-définissablement [MP09, Corollaire B], car les arguments de recouvrement parfaitement compris dans ce cas seulement passent à la clôture de Zariski ; c'est ouvert pour un mauvais groupe de rang plus élevé. (Pour le cas *définissablement* linéaire, voir §2.3.1.)

Ce problème de l'existence de représentations linéaires pour les groupes rangés a droit de cité indépendamment de la conjecture « d'algébricité » de Cherlin-Zilber évoquée au chapitre I et de l'étude des représentations rangées qui nous occupe. Il en est même assez vraisemblablement disjoint ; sa difficulté paraît difficile à prédire ; et nous ne l'avons indiqué qu'en passant.

2.3. Principes d'algébrisation

Nous abordons maintenant l'autre versant de la question de §2 : à supposer que le groupe rangé G se représente définissablement dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, i.e. si (modulo noyau) $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définissablement, la configuration est-elle algébrique ?

On prendra soin de distinguer l'algébricité « abstraite », où G seul est un groupe algébrique, de l'algébricité « concrète », où $G \ltimes V$ l'est.

2.3.1. Algébricité pure

Le théorème suivant de Poizat est une conséquence de travaux plus profondément modèle-théoriques sur les corps, dûs à Wagner [Wag01] et mentionnés au chapitre II.

Théorème (Poizat, [Poi01, Théorème 1] : algébrisation en caractéristique première). *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé* de caractéristique positive *et $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe définissable et simple. Alors G est définissablement isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ pour un groupe algébrique $\mathbb{G}$.*

La démonstration combine un grand nombre d'idées empruntées à la théorie des modèles, à la géométrie algébrique, et à la théorie des groupes localement finis. Quitte à saturer (ce qui est légitime car la simplicité est exprimable, par un raisonnement classique sur les « indécomposables » de Zilber), on peut supposer que G a des points de grande torsion. La caractéristique étant finie, G contient des éléments géométriquement semi-simples : la trace T d'un tore de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur G est non-triviale. Mais encore par simplicité et maniement d'indécomposables, G peut être reconstruit à partir de T. Tout ceci montre que G est définissable dans le corps $\mathbb{K}$ enrichi d'un sous-groupe de $(\mathbb{K}^\times)^n$. C'est ici qu'intervient le résultat de Wagner : la présence de l'automorphisme de Frobenius entraîne que G a un sous-modèle élémentaire G_0 localement fini — et donc se comporte lui-même comme s'il l'était. Or la classification des groupes simples rangés infinis localement finis, due à Simon Thomas et évoquée au chapitre I, §3, force G_0 à être le groupe des $\mathbb{K}_0$-points d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$: donc G est de la même forme. Les nombreux transferts entre modèles font perdre de vue la question du corps de définition $\mathbb{L}$ de G, dont l'énoncé affirme qu'il est égal à $\mathbb{K}$, ou plus finement *définissablement isomorphe* à $\mathbb{K}$. Par des constructions invoquant le théorème du corps de Zilber dans G et dans sa clôture de Zariski à l'intérieur de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, Poizat montre qu'il en est bien ainsi.

Le théorème d'algébrisation de Poizat a été généralisé comme suit par Mustafin ; le radical résoluble $R(G)$ d'un groupe rangé G est son plus grand sous-groupe distingué résoluble, classiquement définissable.

Théorème (Mustafin, [Mus04, Théorème 2.6] : algébrisation en caractéristique première). *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé* de caractéristique positive *et $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe définissable et connexe. Alors $G/R(G)$ est définissablement isomorphe à un produit d'un nombre fini de groupes simples de la forme $\mathbb{G}_{i,\mathbb{K}}$.*

De tels énoncés sont inaccessibles en caractéristique nulle, si bien que l'on ignore encore si un mauvais groupe (de rang $\neq 3$ pour une raison donnée en §2.2.4) peut être définissablement linéaire.

Mentionnons néanmoins qu'un théorème de Macpherson-Pillay [MP95, Theorem 1.4 (a)] étendu par Poizat [Poi01, Théorème 3] force un groupe G simple définissablement linéaire mais non-algébrique *en caractéristique nulle* à n'être formé que d'éléments géométriquement semi-simples. La raison est essentiellement la stabilité de G sous décomposition de Jordan (voir aussi [Poi12, §6]).

Le problème de l'existence d'un groupe simple définissablement linéaire non constructible en caractéristique nulle a résisté à plus de vingt ans d'étude et nous fuirons devant cette question à nouveau récemment considérée par Borovik et Burdges dans un travail non-publié [BB08] qui concluait à l'absence d'involutions.

2.3.2. Algébricité augmentée

Un problème reste en suspens. À supposer que le module rangé (G, V) donne lieu à un plongement définissable $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et que G soit même — par exemple en vertu des travaux de Poizat-Mustafin que nous venons de rappeler — de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ pour un groupe algébrique $\mathbb{G}$, cela signifie-t-il que l'action sur V est algébrique ? (Attention, on ne suppose pas seulement que G est isomorphe en tant que groupe à $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$: on suppose aussi qu'il l'est *définissablement*.) Nous pouvons reformuler la question ainsi : si G est définissablement-abstraitement algébrique, l'est-il concrètement, i.e. $G \ltimes V$ est-il algébrique ? ou encore : le *plongement* de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est-il algébrique ?

La réponse est évidemment non : prendre n'importe quelle représentation rationnelle (G_0, V_0) d'un groupe algébrique, et « tordre » l'action de G_0 sur V_0 par un automorphisme *définissable, mais non-algébrique* du corps de base, obtenant un G_0-module V. Ceci donne lieu à un plongement de G_0 dans $\mathrm{GL}(V)$ d'image G définissable, définissablement isomorphe à G_0, de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, mais pourtant G n'est pas un fermé de Zariski de $\mathrm{GL}(V)$.

Tout cela est dans [MP95, Poi01], de même qu'un résultat montrant combien cette situation est typique.

Théorème (Macpherson-Pillay, Poizat, [MP95, Theorem 1.4 (b)] et [Poi01, Théorème 2] : algébricité augmentée). *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé* de caractéristique positive *et $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe définissable et simple. Alors il existe des automorphismes définissables $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ du corps $\mathbb{K}$ tels que G soit définissable dans $(\mathbb{K}; +, \cdot, \varphi_1, \ldots, \varphi_d)$.*

- La démonstration que donne [Poi01] est voisine de celle, plus longue, de [MP95].
  En inspectant sa preuve des principes d'algébrisation décrits en §2.3.1, Poizat constate que l'on n'a besoin que d'un nombre fini d'automorphismes définissables pour construire dans $\mathbb{K}$ un sous-groupe unipotent de G. Par simplicité et maniement d'indécomposables, cette structure suffit à recouvrer G.
- Le théorème s'étend immédiatement au cas d'un sous-groupe définissablement linéaire en caractéristique positive $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *sans sous-groupe infini distingué résoluble*, par des raisonnements classiques sur le socle (mêmes arguments que ceux de Mustafin pour son théorème cité plus haut).
  Mais puisque $\mathbb{K}_+$ peut en caractéristique positive posséder des sous-groupes propres définissables propres, on voit mal comment traiter le cas où G serait abélien ou même résoluble sans centre. L'énoncé pour G de radical résoluble fini paraît donc optimal.

Revenons aux modules rangés. La présence des φ_i correspond à une « augmentation » de la classe des représentations rationnelles de G en autorisant plusieurs automorphismes définissables de corps à la fois, ce qui ne peut qu'affecter les opérations de « changement de base-et-tensorisation ». La chose n'est peut-être pas sans intérêt et nous en reparlerons en §4.2.

Notons enfin qu'en caractéristique nulle, le seul automorphisme définissable de $\mathbb{K}$ est l'identité : si bien que la classe « augmentée » reste celle de la géométrie algébrique.

2.3.3. Définition du corps de base.

Nous nous sommes peu à peu déplacés vers la question de la « définissabilité réciproque » entre G et $\mathbb{K}$ (rappelons que l'abus de langage est courant pour ce que le logicien appellerait plutôt *interprétabilité*) ; il semble impossible de ne pas mentionner des travaux à caractère plus abstrait.

Le premier [Poi88] est la réécriture par Poizat du théorème de Borel-Tits sur les homomorphismes abstraits entre groupes de $\mathbb{K}$-points cité au chapitre précédent, dans le cas des corps algébriquement clos : le contexte rangé permet une preuve remarquablement simple.

Le deuxième [KRT99] émane également du théorème de Borel-Tits : en adaptant partie de l'argument, Kramer, Röhrle et Tent parviennent modulo des hypothèses de non-dégénerescence du groupe sur $\mathbb{K}$ (mais sans hypothèses sur $\mathbb{K}$ lui-même) à définir $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$. La théorie des modèles est étrangère à la construction.

Le troisième [Fré16] est l'effort de Frécon pour s'affranchir des contraintes structurelles de simplicité dans la version rangée du théorème de Borel-Tits, mais en revenant aux corps algébriquement clos. La bi-définissabilité entre groupe et corps est grandement compliquée (la raison modèle-théorique informelle pourrait être que la théorie du premier ordre cesse d'être $\aleph_1$-catégorique), et Frécon doit travailler sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avant de transférer aux autres corps clos de caractéristique nulle.

Ces résultats ne sont mentionnés qu'en passant, pour leur importance dans le domaine, sans être liés à nos propres travaux.

3. Quelques points de technique (2) — Travaux présentés

Donnons à présent certains détails relatifs aux théorèmes obtenus et déjà évoqués en §1.3.

3.1. Linéarisation

Après réflexion, l'auteur voit trois causes possibles à l'émergence d'un corps.

1. La première est liée aux géométries d'incidence, par introduction de systèmes de coordonnées. L'analyse de Hrushovski des groupes de permutations d'ensembles de rang 1 [BN94, Theorem 11.98] (référence du chapitre I) en est un cas particulier ; la méthode de Bachmann [BN94, Fact 8.15] aussi, et plus généralement la coordinatisation « à la Hilbert » des plans projectifs arguésiens ou des espaces projectifs de dimension au moins 3 [BN94, §3.3.3].
2. La deuxième source est en théorie des groupes pure ; la construction de Malcev [BN94, §3.2.2] dans les groupes nilpotents de type Heisenberg y ressortit. Le résultat le plus général semble être [GH93] ; on notera que l'hypothèse sur l'absence de torsion paraît incontournable, en raison du groupe nilpotent rangé construit par Baudisch [Bau96] qui ne définit pas de corps infini.
3. La troisième cause est le lemme de Schur de théorie des représentations : tout module irréductible donne naissance à un corps gauche.

Répétons la conclusion de [IV.e], obtenue dans cette troisième veine et déjà mentionnée en §1.3.0.

Théorème IV.1. *Définissables dans une structure rangée, soient V un groupe abélien, et X un ensemble définissable infini d'endomorphismes de V. On suppose que V est X-irréductible (la notion garde un sens). On fait en outre l'une des deux hypothèses suivantes :*
- *V est sans torsion ;*
- *X contient un sous-ensemble définissable infini $X_0 \subseteq X$ dont tout opérateur commute à chaque opérateur de X.*

Alors on peut définir un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}_+^n$ et X agit linéairement ; dans le second cas, X_0 agit par scalaires.

On notera que ceci généralise strictement le théorème de Zilber et celui de Loveys-Wagner présentés en §2.2.1 et §2.2.2 respectivement, qui demandent à X une structure de sous-groupe *multiplicatif* de $\mathrm{Aut}(V)$. Le résultat généralise également le théorème de Nesin évoqué en §2.2.3 qui demande à X une structure de sous-groupe *additif* de $\mathrm{End}(V)$.

Il peut toutefois paraître algébriquement plus faible que la version de Nesin-Poizat (v. fin §2.2.1) : nous avons besoin d'une partie X_0 « centrale », quand ce dernier résultat ne demande qu'un sous-groupe abélien distingué. La raison en est que nous n'arrivons pas à introduire, pour l'éliminer aussitôt, de groupe

définissable d'automorphismes du corps construit. Mais c'est oublier qu'à la différence de Nesin-Poizat nous ne faisons aucune hypothèse de connexité sur X : cela n'aurait même pas de sens faute de structure algébrique sur cet ensemble.

Voici les grandes lignes de la démonstration de ce travail non publié. Il peut être instructif de la confronter à celle des versions classiques rappelées plus haut. Hormis l'étape d'« interpolation finie » ci-dessous, nous suivons la démonstration de Nesin [Nes89] très fidèlement. *Mais on gardera à l'esprit que X est dénué de structure algébrique.*

- Conformément à l'esprit du lemme de Schur, et rejoignant donc [Nes89] plutôt que les preuves classiques des résultats « multiplicatifs » de Zilber et Loveys-Wagner, on pose :

  $$C = \{\lambda : V \to V \text{ définissable tel que } \forall (f, v) \in X \times V, f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)\}$$

  C'est l'anneau des endomorphismes définissables de la « représentation » V. Tout le problème est de montrer qu'il s'agit d'un corps infini définissable.
- L'infinité de C provient des hypothèses : en caractéristique nulle il contient les entiers ; en caractéristique positive il contient l'ensemble X_0. Le fait que C soit un corps est standard, car par X-covariance et irréductibilité, les opérateurs de C sont surjectifs. Leur noyau est donc au plus fini, mais un noyau fini non-trivial pour $\lambda \in C$ donnerait lieu à un sous-X-module invariant non-définissable dénombrable $K = \bigcup_n \ker \lambda^n$. Un tel sous-$X$-module n'a qu'un nombre borné (par le continu) d'endomorphismes. Dans le modèle saturé, il existe deux opérateurs distincts de X qui coïncident sur K, donc partout : contradiction.

  Mais il reste à établir la définissabilité de C, et une propriété d'interpolation finie doit faire son apparition. Soit donc $X_n \subseteq \langle X \rangle$ l'ensemble — définissable — des sommes et différences d'au plus n produits d'au plus n opérateurs de X.
- On montre qu'il existe un entier n et $w_0 \in V$ tels que $V = X_n \cdot w_0$. Cette étape est technique ; on ne peut invoquer le théorème des indécomposables dont il faut légèrement modifier l'argument.

  On commence par prouver qu'il existe w_0 tel que $X \cdot w_0$ soit infini ; c'est évident en caractéristique nulle, et se voit par compacité en caractéristique positive.

  Puis on fixe une paire (n, w_0) de manière à maximiser le rang de $Y_n = X_n \cdot w_0$. Considérons le stabilisateur générique :

  $$A_n = \{v \in V : \mathrm{rg}(Y_n \triangle (v + Y_n)) < \mathrm{rg}\, Y_n\}$$

  où $\triangle$ est la différence symétrique. En imitant la démonstration du théorème des indécomposables on voit que $A_n \subseteq Y_n - Y_n$ et que Y_n (donc $Y_n - Y_n$ aussi) est inclus dans un nombre *fini* de translatés du sous-groupe $A_n \leq V$.

  Mais comme les Y_n sont emboîtés, on en déduit que A_n° ne dépend pas de n assez grand, et qu'il est X-invariant. Enfin par X-irréductibilité, $V = A_n^\circ \subseteq Y_n - Y_n \subseteq Y_{2n}$. Au multiple près, $V = X_n \cdot w_0$.
- La dernière idée est dans Nesin [Nes89] attribuée à Zilber. À ce point toujours pas de géométrie linéaire. On modélise donc la droite engendrée par w_0 via :

  $$L = \bigcap_{\substack{h \in \langle X \rangle : \\ w_0 \in \ker h}} \ker h$$

  qui est une forme de double centralisateur, et définissable par condition de chaîne descendante. Pour $w_1 \in L$, l'intuition suggère l'existence d'un unique « scalaire » envoyant w_0 sur w_1.

  Or par construction, la fonction de remplacement $\lambda_{w_0 \to w_1} : h(w_0) \mapsto h(w_1)$ est bien définie pour $h \in \langle X \rangle$: grâce à l'interpolation finie du point précédent, elle définit un endomorphisme *définissable* sur $X_n \cdot w_0 = V$. Sa covariance est par construction ; réciproquement tout opérateur de C s'interprète comme une telle fonction de remplacement, si bien que $C = \{\lambda_{w_0 \to w_1} : w_1 \in L\}$.

  Ceci fournit une définition de C au premier ordre, qui est donc un corps gauche infini définissable : et partant un corps algébriquement clos.

C'est bien une version définissable du lemme de Schur, sans structure sur X ; répétons que notre seule contribution est l'interpolation finie sans structure, et que le reste se trouvait dans [Nes89].

Nous avons deux remarques.

- Le double recours au théorème de compacité montre les limites du cadre axiomatique rêvé par Borovik (« axiomes de Borovik-Poizat », v. début du chapitre I), plus propice au programme d'identification des groupes abstraits qu'aux questions de représentations, *pour lesquelles la dose de théorie des modèles requise est encore inconnue*. Elles sont en effet plus combinatoires que les problèmes de structure interne ; [BC08] demandait même plusieurs arguments logiquement non-triviaux.
- La présence de X_0 infini paraît incontournable en caractéristique p. Un remède injustifiable modèle-théoriquement pourrait être à chercher dans la question suivante.

Question isolée. *Soit (G, V) un module rangé avec G infini et V X-irréductible. On suppose que pour tout $v \in V \smallsetminus \{0\}$, le double centralisateur $C_V(C_G(v))$ est infini. Peut-on définir un corps algébriquement clos ?*

Une relecture hâtive du Théorème IV.1 de §3.1 laisserait croire que oui. On attend de C qu'il soit un corps, qu'il soit définissable, et qu'il soit infini. Le premier point est trivial ; le deuxième est vrai par l'interprétation en termes de $\lambda_{w_0 \to w_1}$; le troisième, par l'hypothèse sur X_0, désormais absent. Mais il suffit que L soit infinie pour garantir que C l'est. Comme la première est construite par un double centralisateur, on pourrait croire que c'est exactement l'hypothèse de la question.

Il n'en est rien : l'hypothèse porte sur $C_V(C_G(v))$; la construction de L dans le Théorème IV.1 est par $C_V(C_{\langle G \rangle}(v))$, où $\langle G \rangle$ désigne le sous-anneau engendré par G. La question n'est donc pas triviale.

3.2. Identification simultanée

Nous voudrions maintenant esquisser la preuve, autrement plus ample, du théorème d'identification des modules de rang 3 déjà cité en §1.3.1.

Théorème IV.3. *Soit (G, V) un module rangé. On suppose G connexe non-résoluble,* $\operatorname{rg} V = 3$*, et l'action fidèle et irréductible. Alors :*
- *soit il existe un corps $\mathbb{K}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}^3$ et $G \simeq \mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ ou $\mathrm{GL}_3\,\mathbb{K})$ dans l'action naturelle, ou $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^\times \operatorname{Id} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ dans l'action adjointe, le tout définissablement ;*
- *soit G est un mauvais groupe simple de rang 3, et V est d'exposant premier impair.*

La démonstration a ceci de remarquable qu'elle requiert des résultats et des méthodes d'à peu près toutes les directions de recherche sur les groupes rangés, depuis l'article originel de Cherlin [Che79] jusqu'au monumental théorème « du type au moins pair » d'Altınel-Borovik-Cherlin [ABC08] (voir chapitre I), et notamment :
- les théorèmes « de linéarisation via les semi-simples » de Nesin-Poizat d'une part, et « en caractéristique nulle » de Loveys-Wagner d'autre part, étendant le théorème du corps de Zilber (v.§2.2 ; [IV.e] est postérieur à [IV.c]) ;
- le principe d'algébrisation de Poizat (v. §2.3) ;
- l'étude des mauvais groupes (Cherlin, Nesin, Poizat, Corredor), dont nous évitons soigneusement les détails dans ce mémoire ;
- l'analyse des $N_\circ^\circ$-groupes, employée de manière autrement plus substantielle que les seuls « principes d'unicité » (chapitre I, §2.1) convoqués pour l'étude en rang 2 [IV.a] ; à présent l'ébauche de classification du théorème principal de [I.d] présenté au chapitre I *est effectivement utilisée*, via sa « Proposition 6 » sur les centralisateurs d'involutions ;
- nos travaux avec Cherlin sur la représentation adjointe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ ([IV.b], v. §1.3.2) ;
- les arguments, fidèles à l'esprit du programme de Borovik, par sous-groupes fortement inclus (définis au chapitre I, §1.3) ;
- les résultats les plus récents de Berkman et Borovik [BB12].

Ce déluge technique est à notre avis la meilleure preuve de la qualité des travaux fournis par la communauté depuis l'origine : ils interviennent naturellement dans la résolution d'un problème « concret ».

Notons également que la démonstration en rang 2 [IV.a] peut être vue comme un sous-ensemble de celle en rang 3. L'auteur a voulu pour ce mémoire en donner une version plus épurée, mais n'a obtenu que des modifications superficielles.

Voici comment procède la preuve.

[IV.c, §2.1] On élimine d'abord les cas où la théorie des modèles force la linéarité.

Les théorèmes de linéarisation de Nesin-Poizat d'une part (§2.2.1), de Loveys-Wagner d'autre part (§2.2.2), couplés aux principes d'algébrisation de Poizat (§2.3.1), permettent en effet de supposer que V est de caractéristique positive et G de radical résoluble fini.

[IV.c, §2.1 encore] On élimine la caractéristique paire.

Pour ce faire on invoque le théorème « du type au moins pair » et un théorème de Timmesfeld (distinct de ceux mentionnés au chapitre III).

Commence alors une disjonction selon la valeur du rang de Prüfer de G.

[IV.c, §2.2] Le premier cas est celui pathologique où G n'a pas d'involutions : on montre que G est un mauvais groupe de rang 3.

De telles petites configurations s'étudient avec les moyens du bord : en l'occurence le théorème du corps de Zilber, le théorème de Hrushovski sur les groupes de permutations d'ensembles de rang 1, l'analyse classique des mauvais groupes, et enfin une étude récente de Wiscons [Wis15] sur les groupes de rang 4, déjà citée au chapitre I. Il n'est pas clair qu'aucune leçon puisse être tirée de cette suite d'arguments.

[IV.c, §2.3] Dans le cas où G est de rang de Prüfer 1, on vise $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ dans son action adjointe. Par [IV.b] dont nous dirons davantage dans la partie suivante, il suffit d'identifier le groupe, et c'est dans une bonne mesure ce que fait [I.d], conclusion du chapitre I.

On montre donc que G supposé non-isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ est pourtant un $N_\circ^\circ$-groupe, et que pour toute involution $i \in G$, le centralisateur $C_G^\circ(i)$ est résoluble. D'après [I.d] c'est même un sous-groupe de Borel. L'information est essentielle pour appliquer les techniques usuelles du programme de Borovik : éléments fortement réels (chapitre I, §2.2) et estimées à la Brauer-Fowler prennent le relais vers la contradiction désirée.

[IV.c, §2.4] Si G est de rang de Prüfer 2, on cherche à identifier $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ dans son action naturelle ; rappelons que $\mathbb{K}^\times \mathrm{Id} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$, linéarisable pour raisons modèle-théoriques, a déjà été identifié.

Cette partie de l'argument est passablement dans la ligne du programme de classification des groupes rangés abstraits, car elle repose sur le maniement de sous-groupes fortement inclus. Le jeu est de construire suffisamment d'involutions $i \in G$ telles que $C_G^\circ(i)$ soit isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$; on utilise alors le groupe de Weyl pour véhiculer la structure $\mathbb{K}$-linéaire à tout le module (les travaux [II.b] et [II.c] présentés au chapitre II ne sont d'ailleurs pas étrangers à la détermination du groupe de Weyl).

Ce transport de structure linéaire évoque [III.d] du chapitre III, bien qu'il n'y ait pas encore de lien direct. On peut y voir une approche très partielle de la Question III.G « à la Curtis-Phan-Tits ».

[IV.c, §2.5] En rang de Prüfer supérieur, un théorème de Berkman et Borovik [BB12] permet de conclure directement.

La structure de cette preuve n'est pas sans enseignements.

On voit la séparation entre théorie des modèles, pour les arguments de linéarisation a priori, et théorie des groupes d'inspiration finitaire, pour les études de cas.

On voit aussi à l'œuvre les involutions : plus grand est le rang de Prüfer $d = \mathrm{Pr}_2(G)$, plus « lisses » sont les démonstrations. En $d \geq \mathrm{rg}(V)$, ici $d \geq 3$, il y a une théorie générale. En $d = 2$ on utilise des méthodes classiques. Le cas critique $d = 1$ requiert une analyse extérieure assez poussée. Et le cas pathologique $d = 0$ reste un mystère car il n'offre prise ni aux techniques de théorie des groupes ni à celles de logique mathématique.

Ceci confirme que la théorie des modèles devrait tenir dans les questions de représentations une plus grande place que celle occupée dans la conjecture d'algébricité. Et cela, surtout si l'on tentait d'éliminer le cas du mauvais groupe.

Question isolée. *Dans le Théorème IV.3, G peut-il* vraiment *être un mauvais groupe de type semi-simple, i.e. sans p-torsion ?*

Les sous-groupes de Borel de G devraient être de bons tores T sans involutions de rang 1 ; on déduit facilement qu'ils définissent sur $V = C_V(T) \oplus [T, V]$ une structure de corps de rang 2 avec $\mathbb{K}^\times$ non-minimal. C'est déjà contraire aux attentes des spécialistes (voir §2.1) quant à l'existence de tels objets. Mais surtout, comme indiqué par Borovik, on a l'impression que des involutions « virtuelles » (éléments de $T + T \leq \mathrm{End}([T, V])$, absents du groupe G) ne sont pas loin. Les internaliser dans un groupe $\hat{G}$ plus grand pourrait donner des contraintes supplémentaires.

Nous n'avons en revanche aucun espoir personnel de supprimer le cas où G est mauvais de type unipotent, i.e. d'exposant p. Ceci confirme la première impression de Cherlin [Che79] : le rang 3 est déjà fort compliqué.

3.3. Zoologie des $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$-modules rangés

Évoquons maintenant l'analyse des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules de rang $\leq 4\,\mathrm{rg}(\mathbb{K})$, dont nous rappelons la classification donnée en §1.3.2.

Théorème IV.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de rang k, de caractéristique ni 2 ni 3. Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et V un G-module irréductible de rang $\leq 4k$. Alors V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel définissablement isomorphe, en tant que $\mathbb{K}[G]$-module, à l'un des objets suivants :*
- *la représentation naturelle* $\mathrm{Nat}\, G$ *;*
- *la représentation adjointe* $\mathrm{Ad}\, G$ *;*
- *la représentation rationnelle de dimension* 4*, i.e. la troisième puissance symétrique,* $\mathrm{Sym}^3 \mathrm{Nat}\, G$ *;*
- *une représentation obtenue par changement de base-et-tensorisation* $(\mathrm{Nat}\, G) \otimes {}^{\varphi}(\mathrm{Nat}\, G)$ *pour un automorphisme définissable φ de $\mathbb{K}$.*

La question suivante ne devrait pas être trop difficile mais adaptée à un mémoire de maîtrise. Il s'agirait de reprendre les calculs existants et de faire émerger des sous-modules.

Question isolée. *Que se passe-t-il en basse caractéristique ?*

Revenons au Théorème. Nous n'esquisserons pas les détails de sa preuve et nous contenterons de quelques remarques ; ces dernières épousent toutefois la structure de l'argument.

3.3.1. Espaces de poids

La première difficulté est évidemment d'arriver à capturer les espaces de poids : rappelons qu'en l'absence de structure $\mathbb{K}$-linéaire globale, la notion n'a même pas de sens. On peut certes espérer appliquer le théorème du corps de Zilber localement, en considérant l'action du tore algébrique T sur les divers sous-T-modules irréductibles, mais ceci se heurte à deux difficultés :
- l'absence de complète réductibilité : on ignorait jusqu'à récemment si V est bien somme directe de T-irréductibles et d'une partie T-triviale ;
- l'absence de monosomie : les différents T-irréductibles peuvent définir des structures de corps non-isomorphes.

Il revient à Tindzogho Ntsiri d'avoir, dans son doctorat [TN13], résolu le premier problème et abordé le second. Un outil d'importance pour [IV.d] et à notre avis pour tout travail futur dans la même direction, est l'énoncé suivant.

Théorème (Tindzogho Ntsiri, [TN13, §5.2.1, Proposition 5.23] et [TN16, Corollary 2.17] : « Maschke semi-simple définissable »). *Soit (T, V) un module rangé avec T résoluble, connexe, sans p-torsion, V de caractéristique p, et $C_V(T) = 0$. Alors V est complètement réductible.*

Mentionnons en passant la question d'un analogue en caractéristique 0. Elle n'est pas sans intérêt intrinsèque ; en revanche elle est dénuée d'utilité. Comme on le verra en §4.2.2, le problème « global » est dans ce cas réglé.

Le résultat de Tindzogho Ntsiri ouvre la voie vers quelque chose comme une décomposition en somme d'espaces de poids, en prenant pour T le tore algébrique. On reste loin du but puisque d'une part $C_V(T)$

demeure inétudiable, et que d'autre part rien ne garantit que les corps trouvés dans les différents T-irréductibles par la méthode de Zilber soient isomorphes au corps de définition $\mathbb{K}$, ni même isomorphes entre eux.

Ici encore [TN13], revisité dans [IV.d] pour le cas où le tore n'est pas fidèle, offre une solution technique partielle, grâce à l'étude des configurations impliquant trois structures de corps commencée dans [IV.b, Lemma 1.11] (le lemme et sa preuve devaient tout à Cherlin), étendue par Tindzogho Ntsiri dans sa thèse [TN13, Théorème 5.7] (aussi [TN16, Theorem 3.2]), puis généralisée dans [IV.d, Theorem 2.1].

Proposition ([IV.d, Theorem 2.1] ; proposition « de monosomie »). *Tous les objets sont supposés définissables dans une structure rangée. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ trois corps et U, V, W trois espaces vectoriels respectifs. Soit T un groupe agissant, sans hypothèse de fidélité, sur U, V, W comme sous-groupe de $\mathbb{K}^\times$ (resp. $\mathbb{L}^\times, \mathbb{M}^\times$) ; soit $\kappa : T \to \mathbb{K}^\times$ (resp. λ, μ) le morphisme associé.*

Soit $\beta : U \times V \to W$ une fonction bi-additive T-covariante non-nulle. Alors :

- $(\ker \kappa \cap \ker \lambda) = (\ker \kappa \cap \ker \mu) = (\ker \lambda \cap \ker \mu)$, *noté $K \leq T$;*
- *si* $\ker \kappa / K$ *est infini, alors* $\mathbb{L} \simeq \mathbb{M}$ *;*
- *si* $\ker \kappa / K$ *et* $\operatorname{im} \kappa$ *sont infinis, alors* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{L} \simeq \mathbb{M}$ *;*
- *si* $\ker \mu / K$ *est infini, alors* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{L}$ *;*
- *si* $\ker \mu / K$ *et* $\operatorname{im} \mu$ *sont infinis, alors* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{L} \simeq \mathbb{M}$.

Il y a des variantes où l'action de T sur β est alternée ; le résultat semble optimal pour l'action d'un groupe de scalaires. L'appliquant avec pour T un tore algébrique, U un sous-groupe unipotent normalisé par T, et V et W deux sous-quotients $B = TU$-irréductibles de V tels que $[U, V] = W$, on obtient des informations sur la structure de V en tant que B-module.

Il s'ensuit dans [IV.d, §2.3] un embryon d'étude générale des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules rangés arbitraires, qui ont tendance à voir émerger des « lignes » de rang égal à $\operatorname{rg} \mathbb{K}$ *sans pour autant que le type d'isomorphisme des corps définis soit clair*. Cela nous semble être l'une des questions techniques principales pour l'avenir, et nous en reparlerons en §4.3.

3.3.2. L'aspect calculatoire

Ces outils en main on peut montrer que si $\operatorname{rg}(V) \leq 4k$, alors la longueur de nilpotence du module, au sens de l'action d'un sous-groupe unipotent de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, est au plus 4.

Un problème majeur et que l'auteur ne prétend pas cacher est que le reste de l'analyse dans [IV.d] repose en bonne part sur des calculs empruntés à [III.c] du chapitre précédent. (Rappelons que [III.c] est une systématisation extrême des calculs développés pour [IV.b].)

Lesdits calculs décrivent en courte longueur de nilpotence un phénomène inespérable en longueur supérieure : nous renvoyons au chapitre III, §2.3. Il serait souhaitable qu'un argument modèle-théorique court-circuite ces calculs ; en l'état, on voit mal comment généraliser le Théorème IV.4 en rang arbitraire.

3.3.3. La détensorisation du module

L'aspect le plus intéressant reste le succès obtenu dans le dernier cas de la classification du Théorème IV.4, à savoir la détensorisation d'un module « à la Minkowski » : avec cet objet on a quitté l'univers de la géométrie algébrique. Les principes d'algébricité augmentée de Macpherson-Pillay et Poizat (v. §2.3) ne jouent pourtant aucun rôle dans l'obtention de l'automorphisme φ, qui est reconstruit par le calcul, ainsi que l'isomorphisme définissable avec le module-cible. Nous ignorons s'il y a là quelque chose de plus général et c'est à notre avis une question d'importance.

Enfin, comme mentionné au chapitre précédent, ce travail (la « troisième extension » du théorème quadratique, v. chapitre III, §1.3.3) avait initialement été envisagé sans contraintes logiques. Or la liste des hypothèses requises s'allongeait jusqu'à ne plus avoir de sens. Car si la détermination des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules cubiques de degré de cohérence 1 (v. chapitre III, §2.2) est bien un corollaire des travaux [III.c] présentés précédemment, l'analyse en degré de cohérence supérieur laissait prévoir des pathologies inclassifiables. L'auteur a donc été ravi de voir la théorie des modèles revenir naturellement et unifier toutes ses hypothèses *ad hoc* en une simple contrainte sur le rang : c'est à notre sens un sérieux indice de ce qu'elle pourrait

fournir un bon cadre pour la question vague et sans espoir du chapitre précédent.

4. Leçons — Perspectives — Directions

L'étude des modules rangés comporte a priori deux branches :
- celle où l'on fait des hypothèses sur l'action pour identifier $(G, V, \cdot)$; n'en parlons plus dorénavant ;
- celle où l'on suppose G connu et où l'on cherche à déterminer l'action.

Il est tout-à-fait remarquable, et le lecteur le confirmera en parcourant à nouveau la présentation de [IV.c] (§3.2) et de [IV.d] (§3.3) que *la première branche utilise à peu près tout de nos connaissances sur les groupes rangés, et la deuxième à peu près rien*.

Cette seconde direction est donc, nous l'espérons, le commencement de quelque chose de nouveau. En outre elle pourrait donner corps aux visions du chapitre III.

Question déjà moins vague. *Soit $(G, V, \cdot)$ un module rangé, où G est de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ pour un groupe algébrique $\mathbb{G}$. Que peut-on dire de sensé ?*

Nous consacrerons la fin du mémoire à justifier notre intuition qu'une réponse sensée peut exister.

4.1. Quelques points de technique (3) — Pour les besoins de ce mémoire

Le but de ces brefs compléments est de convaincre les théoriciens des modèles que le chapitre III n'était pas qu'une rêverie sans intérêt en l'utilisant pour un corollaire non-trivial.

Théorème (pour les besoins de ce mémoire). *Fixons un entier n. Soit (G, V) un module rangé où G est de la forme $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$, $O_{2n+1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$, ou $O_{2n}(\mathbb{K})$, et V est irréductible de rang $\leq 2n$. Alors $V = C_V(G) \oplus [G, V]$ et $(G, [G, V])$ est algébrique.*

Démonstration. Cet argument n'a pas été soumis à vérification.

Le lecteur notera que nous avons supposé G de type A_n, B_n, C_n ou D_n. Rappelons que pour chacun de ces groupes, un choix de racines étant fixé, la plus haute racine positive de chaque longueur est de hauteur $\geq n$, comme on peut le voir par inspection de [Hum78, Table 2, fin de §12].

Nous affirmons à présent que chaque sous-groupe racine associé est, dans son action sur V, de longueur de nilpotence au plus 2. Fixons quelques notations : $U \leq G$ sera un sous-groupe unipotent maximal, $U_\alpha \leq U$ le sous-groupe racine associé à la racine positive α. Nous venons d'affirmer que $[U_\alpha, [U_\alpha, V]] = 0$.

Introduisons en effet la suite descendante sous l'action globale de U par $V_{i+1} = [U, V_i]$. Vu la nilpotence de $U \ltimes V$ et la valeur du rang, la longueur de V comme U-module est au plus $2n$. Il nous suffit de montrer que pour toute racine positive α de hauteur h, on a pour chaque i l'inclusion $[U_\alpha, V_i] \leq V_{i+h}$. La preuve est simple ; dans le cas d'une algèbre de Lie elle serait triviale, mais ici la formule de Chevalley [Car72, §5.2] (référence du chapitre II) demande un peu de technique, et les détails sont fastidieux.

Pour une racine positive α, soit $\mathrm{ht}(\alpha)$ sa hauteur ; soit $\delta(\alpha) \geq 1$ le plus grand $j \leq 2n$ tel que pour tout i l'on ait $[U_\alpha, V_i] \leq V_{i+j}$. Nous allons montrer $\delta(\alpha) \geq \mathrm{ht}(\alpha)$; il suffit de voir que δ est sur-additive, i.e. $\delta(\rho + \sigma) \geq \delta(\rho) + \delta(\sigma)$ pour toute paire de racines de somme encore une racine (tout ceci étant évident dans le cas d'une algèbre de Lie).

Or pour α et β deux racines, l'identité de Hall, la formule de Chevalley, et quelques calculs entraînent :

$$\delta(\alpha + \beta) \geq \min\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta), \min_{\gamma \in \Gamma'_{\alpha,\beta}} \delta(\gamma)\right)$$

où $\Gamma_{\alpha,\beta}$ est l'ensemble des racines dans $(\mathbb{N}_{>0}\alpha + \mathbb{N}_{>0}\beta)$ et $\Gamma'_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta} \smallsetminus \{\alpha + \beta\}$.

À ce point il nous faut une étude de cas (la récurrence nous échappe) sur le système engendré par ρ et σ. Nous supposerons Φ de type B_2, avec ρ courte et σ longue ; les autres cas sont similaires.

Considérons d'abord la paire $(\rho, \rho + \sigma)$, pour laquelle $\Gamma_{\rho,\rho+\sigma} = \{2\rho + \sigma\}$ et $\Gamma'_{\rho,\rho+\sigma} = \varnothing$. La formule donne :

$$\delta(2\rho + \sigma) \geq \delta(\rho) + \delta(\rho + \sigma)$$

Puis pour la paire (ρ, σ), on a $\Gamma_{\rho,\sigma} = \{\rho + \sigma, 2\rho + \sigma\}$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\delta(\rho + \sigma) &\geq \min\left(\delta(\rho) + \delta(\sigma), \delta(2\rho + \sigma)\right)\\ &\geq \min\left(\delta(\rho) + \delta(\sigma), \delta(\rho) + \delta(\rho + \sigma)\right)\end{aligned}$$

Comme δ est à valeurs strictement positives, on trouve $\delta(\rho + \sigma) \geq \delta(\rho) + \delta(\sigma)$.

Les autres systèmes se traitent de même, G_2 étant un peu plus long ; nous aurions préféré une récurrence, mais nous avons bien montré $\delta(\sigma + \rho) \geq \delta(\sigma) + \delta(\rho)$. Cette sur-additivité entraîne immédiatement $\delta(\alpha) \geq \mathrm{ht}(\alpha)$ pour toute racine positive : comme affirmé.

En conséquence, pour α de hauteur $\geq n$ on a bien $[U_\alpha, [U_\alpha, V]] \leq V_{2n} = 0$. La racine la plus haute de chaque longueur est ainsi quadratique ; par conjugaison sous l'action du groupe de Weyl [Car72, §7.2], *toute* racine est quadratique. Nous invoquons l'étude [III.d] présentée au chapitre III pour conclure. □

La même méthode permet de montrer par exemple, toujours grâce à [Hum78, Table 2, fin de §12], que G_2 n'a pas de module non-trivial de rang ≤ 6 ; il existe d'ailleurs une représentation algébrique de dimension 7. Nous donnons cet exemple car la borne obtenue pour E_8 est bien moins bonne : nous trouvons 58, alors que la plus petite représentation non-triviale de ce groupe a dimension 248.

Question isolée. *Peut-on affiner ces bornes ?*

La question très naturelle de remplacer n par $n \cdot \mathrm{rg}\,\mathbb{K}$ dans le théorème plus haut paraît délicate : il faudrait comprendre la structure fine d'une U-suite de composition de V, avec U un sous-groupe unipotent maximal de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, en espérant montrer que le rang décroît toujours d'un multiple de $\mathrm{rg}\,\mathbb{K}$. C'est l'étude entamée par Tindzogho Ntsiri pour $n = 2$, point mentionné en §3.3 et sur lequel nous reviendrons.

4.2. Conjecture et apologie

Conjecture. *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé, $\mathbb{G}$ un groupe algébrique semi-simple, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, et (G, V) un module rangé irréductible.*

Alors V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de manière définissable et compatible avec l'action ; en outre il existe des automorphismes définissables $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ de $\mathbb{K}$ et des représentations algébriques irréductibles $W_1, \ldots, W_d$ tels que $V \simeq {}^{\varphi_1}W_1 \otimes \cdots \otimes {}^{\varphi_d}W_d$ en tant que $\mathbb{K}[G]$-modules.

Le nombre d devrait même être mesuré par le degré de cohérence, au sens du chapitre III, §2.2.

4.2.1. Autre théorème de R. Steinberg

L'argument principal en faveur de notre Conjecture est qu'elle représente l'analogue définissable du théorème du produit tensoriel de Steinberg.

Théorème (Steinberg, [Ste63] : théorème « du produit tensoriel »). *Soient G un groupe algébrique semi-simple de caractéristique $p > 0$ et de rang de Lie m défini sur un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini. Soit $\mathfrak{R}$ l'ensemble (à p^m éléments) des représentations projectives rationnelles irréductibles de plus haut poids borné par $p - 1$.*

Alors les représentations projectives rationnelles irréductibles de G sont exactement les produits tensoriels $V = \bigotimes_i {}^{\varphi_i}R_i$, pour R_i dans $\mathfrak{R}$ et φ_i puissance de l'automorphisme de Frobenius.

Plus précisément, les facteurs de V se déterminent en écrivant la décomposition p-adique du plus haut poids de V.

Au demeurant, le théorème de Borel-Tits sur les homomorphismes abstraits, [BT73] cité au chapitre III, permet d'enlever l'hypothèse de rationalité ; il faut alors remplacer les puissances de l'automorphisme de Frobenius par des automorphismes quelconques. La conclusion [BT73, Corollaire 10.4] résout ainsi positivement la conjecture énoncée par Steinberg dans [Ste63]. Mais pour nous l'hypothèse de définissabilité paraît incontournable, sauf à vouloir se perdre à nouveau dans les brumes *paralogiques*du chapitre précédent.

4.2.2. Autres arguments

(1) **La vérité pour les $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules de rang $\leq 4k$.** Nous l'avons déjà présentée en §1.3. Le Théorème IV.4 montre en effet la détensorisation à l'œuvre. Ce n'est pas là grand'chose, mais il était indispensable de traiter ce premier cas avant d'énoncer notre Conjecture.

(2) **La vérité en caractéristique nulle.** Ce fut l'une des conclusions de [IV.b], que nous n'avions pas encore mentionnée.

Proposition ([IV.b, Lemma 1.4]). *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé, $\mathbb{G}$ un groupe algébrique simple, $G = \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, et V un G-module rangé. On suppose V irréductible et sans torsion. Alors V porte une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; l'action est algébrique.*

Nous avons déjà dit, à la fin de §2.3, qu'un corps rangé de caractéristique nulle n'a pas d'automorphisme définissable autre que l'identité : ce qui explique la simplification de l'énoncé. Mais citons Steinberg décrivant son théorème [Ste63].

> We need only remark here that there is no corresponding phenomenon for groups of characteristic 0, since then the identity is the only rational field automorphism and the tensor product of two rational representations is never irreducible unless one of them is one-dimensional.

La Proposition donnée résulte du théorème de linéarisation en caractéristique nulle de Loveys-Wagner (ou de notre Théorème IV.1), de l'analyse des groupes définissablement linéaires en caractéristique nulle évoquée à la fin de §2.3.1, et du théorème de factorisation de Borel-Tits cité au chapitre III : voir [IV.b] pour les détails. La question de la classe des représentations rangées d'un groupe algébrique simple *en caractéristique nulle* est donc entièrement résolue, et notre Conjecture y est démontrée.

Le théoricien des modèles notera enfin que la Proposition plus haut est l'analogue rangé d'un résultat o-minimal classique, [MMT00, Proposition 4.1], qui ne requiert même pas la connaissance préalable de G. Mais il est vrai que le monde o-minimal est plus rigide.

(3) **Le phénomène d'« algébricité augmentée ».** Rappelons que d'après le théorème de Macpherson-Pillay et Poizat cité en §2.3.2, si (G, V) est un module rangé définissablement linéaire en caractéristique positive, avec G algébrique simple (la simplicité entraîne d'ailleurs l'algébricité), alors en voyant G comme un groupe constructible dans $\mathbb{K}$, la représentation V est définissable dans la structure $(\mathbb{K}; +, \cdot, \varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ pour des automorphismes définissables $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ du corps $\mathbb{K}$.

Bien que ce théorème ne fournisse aucune information sur une éventuelle décomposition tensorielle de V, nous interprétons l'émergence d'automorphismes de $\mathbb{K}$ comme un indice en faveur de la Conjecture.

(4) **Structure des automorphismes définissables.** Une dernière remarque. Dans le cas rationnel, la décomposition de Steinberg s'obtient en écrivant la décomposition p-adique du plus haut poids de la représentation : et l'on voit les puissances positives de l'automorphisme de Frobenius apparaître naturellement.

Ici qu'attendre ? on décomposerait selon les automorphismes définissables, si bien qu'apparaîtrait sans doute naturellement l'anneau $\mathbb{F}_p[\mathrm{Aut}_{\text{déf}}(\mathbb{K})]$ engendré par les automorphismes définissables. On ignore encore (v. §2.1) s'il s'agit des seules puissances relatives de l'automorphisme de Frobenius. Mais comme noté par Borovik en conversation, cet anneau est nécessairement commutatif puisque deux automorphismes définissables d'un corps rangé commutent sur la clôture algébrique du corps premier.

Ceci donne une complexité supplémentaire par rapport au cas rationnel de Steinberg, mais aussi une rigidité absente du cas général de Borel-Tits, et cet entre-deux nous conforte dans l'idée que l'univers rangé pourrait bien être le cadre d'étude pertinent pour nos divagations du chapitre III.

4.3. Directions

Nous parlons désormais sans précautions.

4.3.1. Premières remarques

Il peut être tentant de décomposer la conjecture en deux parties :

1. montrer la linéarité définissable, i.e. construire sur V une structure définissable de $\mathbb{K}$-espace vectoriel compatible avec l'action de G ;
2. cela fait, i.e. partant d'un $\mathbb{K}[G]$-module rangé irréductible, reconstruire les W_i et les φ_i.

L'auteur manque certainement de recul, mais il n'a pas encore trouvé le second volet évident. Certes l'ajout de Borel-Tits au théorème de Steinberg permet d'affirmer que V serait abstraitement de la forme $\bigotimes^{\varphi_i} W_i$, mais la définissabilité des φ_i (ou du moins de leurs quotients) nous échappe en général — la fin de [IV.d] reconstruit ainsi l'automorphisme à la main.

Du reste, cette analyse en deux étapes n'aurait de sens que si la première était sensiblement plus simple que le problème total. Or une leçon de [IV.e] confirmant la complexité de l'étude en rang 3 [IV.c] est que selon toute vraisemblance, il n'existe pas d'analogue du principe de linéarisation « global » en caractéristique positive sans hypothèse supplémentaire : le corps d'endomorphismes du module obtenu en §3.1 n'a pas de raison d'être infini, et la « question isolée » posée alors était motivée par la curiosité plutôt que la croyance en son utilité.

En conclusion, pour construire une structure linéaire, on ne voit rien de mieux pour l'instant (et c'est la stratégie suivie pour le cas tensoriel de [IV.d]) que construire les espaces de poids et l'action du corps en imitant le comportement du module attendu.

4.3.2. Extraits d'un log-book

Nous allons quelques instants nous éloigner des groupes. La Conjecture aurait aussi du sens pour $\mathfrak{g}$ un anneau de Lie rangé de la forme $(\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$, et bien que l'auteur la trouve non moins intéressante, il est tenté de la croire plus simple. La définition d'un module rangé $(\mathfrak{g}, V)$ pour un anneau de Lie $\mathfrak{g}$ est naturelle.

log(Conjecture). *Soient $\mathbb{K}$ un corps rangé, $\mathbb{G}$ un groupe algébrique semi-simple, $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ comme anneau de Lie, et $(\mathfrak{g}, V)$ un module rangé irréductible.*

Alors V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de manière définissable et compatible avec l'action ; en outre il existe des automorphismes définissables $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathbb{K}$ et des représentations algébriques $W_1, \dots, W_d$ tels que $V \simeq {}^{\varphi_1}W_1 \otimes \cdots \otimes {}^{\varphi_d}W_d$ en tant que $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$-modules.

Encore faudrait-il développer systématiquement la théorie de anneaux de Lie rangés, ce qui n'a pas été fait, les seules études à ce jour étant les premières remarques de Nesin dans [Nes89] et la classification en rang ≤ 3 par Rosengarten dans sa thèse non-publiée [Ros91]. Fort de l'expérience des groupes, on mènerait de front l'analyse interne abstraite et le problème des représentations.

(1) Pour les anneaux de Lie rangés abstraits, on commencerait par une étude fine de leur « matière ».

Question IV.A.
- *Modéliser la semi-simplicité et l'unipotence dans les anneaux de Lie rangés (on viserait les tores décents et leurs centralisateurs, comme Cherlin au chapitre II, et si nécessaire l'unipotence de Burdges survolée au chapitre I) — la vraie question étant celle de l'existence de sous-anneaux de Cartan [Hum78, §15.3].*
- *Si ces derniers existent de manière satisfaisante, on n'envisagerait pas le problème de la conjugaison (voir plus bas), mais celui de l'action adjointe.*
- *Existe-t-il une forme satisfaisante de décomposition de Jordan abstraite pour les anneaux de Lie rangés simples ? Si oui, est-elle préservée dans les modules rangés (au sens de [Hum78, §6.4]) ?*

Le premier volet pourait être du niveau d'un mémoire de maîtrise ; le deuxième aurait un caractère miraculeux que nous n'excluons pas. Le troisième nous paraît moins délicat que son analogue dans le cas du groupe, dont le pan abstrait fut abordé dans [ABF15] (référence du chapitre I), sans qu'y soit posée la question de la préservation dans les modules.

Mentionnons également un problème de base imitant la célèbre « analyse de Hrushovski » des groupes agissant sur des ensembles de rang 1.

Question IV.B. *Soit $\mathfrak{g}$ un anneau de Lie simple rangé. On suppose que $\mathfrak{g}$ possède un sous-anneau définissable $\mathfrak{h}$ qui est maximal en tant que sous-groupe additif. L'anneau $\mathfrak{g}$ est-il isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$?*

Bien sûr l'enjeu réel à terme serait le suivant.

Question IV.C. *Tenter de classifier les anneaux de Lie simples infinis rangés.*

Tout espoir est permis : comme montré par Rosengarten [Ros91], *il n'y a pas de « mauvais » anneau de Lie de rang* 3.

Mais il faudrait pour cela — nous ne voyons pas quoi faire d'autre — soit arriver à linéariser l'action adjointe et reconstruire des racines (les travaux de Tindzogho Ntsiri sont donc à pousser plus avant), soit raisonner inductivement et trouver une forme de théorème « à la Curtis-Phan-Tits » pour l'identification d'anneaux de Lie abstraits. Nous renvoyons au chapitre I, §1.2, et aux travaux cités, pour ce qu'il faut comprendre par là. (Ce serait l'analogue pour les anneaux de Lie rangés des travaux sur les *groupes* rangés dus à Berkman-Borovik [BB04] et Berkman-Borovik-Burdges-Cherlin [BBBC08] cités à ce chapitre.) En raison de l'importance de la représentation adjointe et des méthodes associées qui forment la voie royale vers une classification élégante et rapide des algèbres de Lie simples, *une telle méthode alternative paraît ne pas avoir été développée*.

Quoi qu'il en soit, la théorie des modèles aura tout à gagner à la Question IV.C : même en cas d'échec, on saurait ainsi que la conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber n'aboutit pas pour des raisons bien plus « essentielles » que l'absence éventuelle d'involutions.

(2) Sur le front des représentations, on notera que le Théorème IV.1 (mais la version « additive » de Nesin, §2.2.3, le faisait déjà) résout entièrement le logarithme de la conjecture en caractéristique nulle, puisque $\mathbb{K}_+$ est modèle-théoriquement minimal. Passons donc en caractéristique finie. Sachant quelle virtuosité [PS97, sqq] demandent les anneaux de Lie de basse caractéristique (ce qui a considérablement compliqué la démonstration par Rosengarten de l'analogue du théorème de Reineke dans [Ros91]), l'auteur n'exclut pas de n'œuvrer qu'en caractéristique asymptotique. Mais même alors, nous revenons à l'absence de décomposition en espaces de poids et à la nécessité d'étendre les travaux de Tindzogho Ntsiri. (Mentionnons en passant que l'étude de la complète réductibilité et de la « monosomie » entamées pour l'action d'un *groupe*, v. §3.3.1, seraient donc à réécrire.)

Et quand bien même tout cela serait fait, la Question III.H d'un analogue pour les anneaux de Lie de la forme $(\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ du théorème de Borel-Tits se poserait à nouveau avec insistance. En contexte rangé une simple adaptation des travaux de Poizat [Poi88] évoqués en §2.2.3 devrait suffire.

(3) Un dernier point avant de revenir aux groupes : nous ne voyons pas par quel processus faire émerger des groupes rangés à partir d'anneaux rangés. Notamment les problèmes de conjugaison *dans l'anneau, mais sous l'action d'un groupe définissable*, par exemple de sous-anneaux de Cartan, semblent dénués de sens (l'auteur peut manquer de recul). Une manière attrayante d'exprimer cette absence est le manque d'un analogue *définissable* de la « correspondance de Chevalley », procédé construisant un groupe à partir d'une algèbre de Lie.

La Conjecture et sa version logarithmique semblent donc parallèles distinctes ; on pourrait se consoler en formulant une version *simultanée*, partant d'un bi-module rangé $(G, V, \mathfrak{g})$ avec G de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}\,\mathbb{G})_{\mathbb{K}}$ (voir Question III.I).

Tout ceci suggère d'étudier les liens généraux entre groupes et anneaux de type Lie. La question a deux volets dont l'unité n'est en rien évidente ; elle n'est pas destinée à l'auteur.

Question IV.D (pour les théoriciens des modèles « purs »). *Trouver le contexte modèle-théorique naturel pour la correspondance de Lie, et pour celle de Chevalley.*

Revenons aux groupes.

4.3.3. Groupes

La Conjecture principale porte sur les représentations définissables des *groupes*. À moins de se placer dans un douteux empyrée qui répondrait à la Question IV.D, on ne disposera pas de méthodes avancées, ce qu'il faut confronter à la démonstration de Steinberg [Ste63] ou à l'élégante preuve [CPS80] via les noyaux de Frobenius. Nous ne pouvons donc pas proposer mieux qu'une approche élémentaire.

Il faudrait commencer par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. La question de l'extension du Théorème IV.4 en rang $5k$, voire $6k-1$, paraît plus indiquée pour un mémoire de maîtrise que pour une thèse de doctorat ; le véritable problème est de reprendre les outils généraux de [IV.d].

(1) **Espaces de poids.** Une question naturelle dans la modélisation des espaces de poids est la suivante.

Question IV.E. *Soit (G, V) un module rangé irréductible, où $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Peut-on montrer que $C_V(B) = 0$, où B est un sous-groupe de Borel ? Peut-on montrer que dans une B-suite de composition,* au plus un *sous-quotient est centralisé par T ?*

Pour des raisons techniques c'est encore inconnu. Tout ce que [IV.d, §2.3] (poursuivant les travaux de Tindzogho Ntsiri) obtient est l'information suivante. Soit $U = B'$ le radical unipotent, dont l'action sur V est nilpotente. Soient $Z_j \leq V$ le j^e centre itéré sous l'action de U et Y_j le facteur correspondant :

$$Z_0 = 0, \quad Y_j = Z_j/Z_{j-1} = C^\circ_{V/Z_{j-1}}(U)$$

Grâce à la proposition « de monosomie » (v. §3.3.1) employée par l'absurde, Y_j se décompose en $C_{Y_j}(T) \oplus [T, Y_j]$, où le second terme est complètement réductible en T-modules irréductibles *de même rang que le corps de base* ; après quoi la monosomie ne s'applique plus et le type d'isomorphisme des corps apparus reste inconnu. L'information sur le rang est néanmoins très importante : nous capturons ce qui ressemble à des lignes.

En revanche on ignore tout du centralisateur $C_V(T)$, qui contrairement au cas algébrique pourrait se répartir sur plusieurs étages Y_j distincts. Une réponse positive à la Question IV.E permettrait d'obtenir une approximation satisfaisante des espaces de poids (mais toujours sans répondre à la question du type d'isomorphisme des corps).

(2) **L'aspect calculatoire.** L'étape suivante est indépendante de la Question IV.E.

Question IV.F. *Fournir une démonstration non calculatoire du Théorème IV.4.*

La preuve actuelle utilise le « miracle en petite longueur de nilpotence » qu'est [III.c, Theorem 1], le Théorème III.3 présenté au chapitre III, §2.3. Un autre argument éviterait ainsi les atrocités calculatoires de [III.c] dont une partie est reproduite dans [IV.d] ; cela passerait peut-être par une réponse à la Question III.D du chapitre précédent, mais l'hypothèse rangée devrait grandement simplifier le problème.

Cela fait on pourra finalement généraliser en longueur de nilpotence quelconque. En effet l'auteur n'imagine pas un instant que l'explosion combinatoire en longueur au moins 7 du chapitre précédent, §2.3, puisse apparaître en contexte rangé.

Question IV.G (quand réponse positive à la Question IV.F)**.** *Classifier les $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$-modules rangés irréductibles de degré de cohérence* 1 *(v. chapitre III, §2.2).*

Il y aurait une petite dose de théorie des groupes finis, lissée par de la théorie des modèles ; c'est une approche de biais, sans amélioration requise des outils généraux.

(3) **La détensorisation du module.** Une autre étape — entièrement indépendante — vers la Conjecture était suggérée en §4.3.1. On s'affranchirait ici de l'hypothèse SL_2 *et surtout des contraintes modèle-théoriques.*

Question IV.H. *Soit (G, V) un module, où G est de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ et V de la forme $\bigotimes^{\varphi_i} W_i$ « à la Steinberg ». Montrer que les φ_i/φ_1 sont définissables dans la structure (G, V). Montrer qu'un module équivalent à (G, V) est définissable dans $(\mathbb{K}; +, \cdot, \varphi_2/\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi_1)$.*

Ces travaux seraient dans la lignée de [KRT99] évoqué en §2.3.3.

(4) **Appel aux Muses.** Puis il faudrait revenir aux espaces de poids de manière générale, hors de la catégorie rationnelle (on pourrait à la rigueur aborder le premier problème avant la réponse à la Question IV.E mais il paraît plus délicat).

Question IV.I. *Montrer une monosomie forte : les différents sous-modules T-irréductibles d'un* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$*-module rangé irréductible voient émerger (à isomorphisme définissable près)* une seule *structure de corps infini,* $\mathbb{K}$.

Malgré l'optimalité vraisemblable de la proposition de monosomie donnée en §3.3.1, toutes les conséquences pratiques n'ont peut-être pas été déduites. Une solution à la Question IV.E semble absolument indispensable à la suite.

Question IV.J (si réponse positive aux précédentes)**.** *Classifier les* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$*-modules rangés irréductibles.*

La question est déjà au-delà des capacités d'anticipation de l'auteur, qui n'a pas de suggestion méthodologique à formuler.

Après quoi le paysage changerait du tout au tout, et nous sommes dans l'inconnu complet : il faudrait un théorème « à la Curtis-Phan-Tits » pour les G-modules rangés, où G est de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$. C'est la Question III.G du chapitre précédent, mais dans un cadre modèle-théorique. *Il doit exister une réponse.*

Le besoin d'identifier la représentation adjointe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ en contexte rangé se fait pressant.

Références pour le chapitre

[AW09] T. Altinel & J. Wilson – « On the linearity of torsion-free nilpotent groups of finite Morley rank », *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 5, p. 1813–1821.

[AW11] — , « Linear representations of soluble groups of finite Morley rank », *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (2011), no. 8, p. 2957–2972.

[AW16] T. Altinel & J. Wiscons – « Recognizing PGL_3 via generic 4-transitivity », à paraître au *JEMS* (2016).

[Bau96] A. Baudisch – « A new uncountably categorical group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 10, p. 3889–3940.

[BMZ07] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, & M. Ziegler – « Red fields », *J. Symbolic Logic* **72** (2007), no. 1, p. 207–225.

[BHMW09] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro & F. Wagner – « Die böse Farbe », *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 3, p. 415–443.

[BB12] A. Berkman & A. Borovik – « Groups of finite Morley rank with a pseudoreflection action », *J. Algebra* **368** (2012), p. 237–250.

[BB08] A. Borovik & J. Burdges – « Definably linear groups of finite Morley rank », prépublication arXiv:0801.3958 (2008).

[BC08] A. Borovik & G. Cherlin – « Permutation groups of finite Morley rank », in *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 350, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, p. 59–124.

[CPS80] E. Cline, B. Parshall & L. Scott – « On the tensor product theorem for algebraic groups », *J. Algebra* **63** (1980), no. 1, p. 264–267.

[GH93] C. Grünenwald & F. Haug – « On stable torsion-free nilpotent groups », *Arch. Math. Logic* **32** (1993), no. 6, p. 451–462.

[Fré10] O. Frécon – « Splitting in solvable groups of finite Morley rank », *J. Log. Anal.* **2** (2010), p. 1–15.

[Fré16] — , « Algebraic groups as abstract groups », à paraître aux *Mem. Amer. Math. Soc.* (2016).

[Gro92] U. Gropp – « There is no sharp transitivity on q^6 when q is a type of Morley rank 2 », *J. Symbolic Logic* **57** (1992), no. 4, p. 1198–1212.

[Hum78] J. Humphreys – *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, deuxième édition révisée.

[KTVM99] L. Kramer, K. Tent & H. Van Maldeghem – « Simple groups of finite Morley rank and Tits buildings », *Israel J. Math.* **109** (1999), p. 189–224.

[KRT99] L. Kramer, G. Röhrle & K. Tent – « Defining k in $G(k)$ », *J. Algebra* **216** (1999), no. 1, p. 77–85.

[LW93] J. Loveys & F. Wagner – « Le Canada semi-dry », *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 1, p. 217–221.

[MMT00] D. Macpherson, A. Mosley & K. Tent – « Permutation groups in o-minimal structures », *Proc. London Math. Soc.* **62** (2000), no. 2, p. 650–670.

[MP95] D. Macpherson & A. Pillay – « Primitive permutation groups of finite Morley rank », *Proc. London Math. Soc.* **70** (1995), no. 3, p. 481–504.

[Mus04] Y. Mustafin – « Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini », *J. Algebra* **281** (2004), no. 2, p. 753–773.

[MP09] Y. Mustafin & B. Poizat – « Sous-groupes superstables de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ », *J. Algebra* **297** (2006), no. 1, p. 155–167.

[Nes89] A. Nesin – « Non-associative rings of finite Morley rank », in *The model theory of groups (Notre Dame, IN, 1985–1987)*, Notre Dame Math. Lectures, vol. 11, Univ. Notre Dame Press, Notre Dame, 1989, p. 117–137.

[Poi88] B. Poizat – « MM. Borel, Tits, Zilber et le général nonsense », *J. Symbolic Logic* **53** (1988), no. 1, p. 124–131.

[Poi99] — , « Le carré de l'égalité », *J. Symbolic Logic* **64** (1999), no. 3, p. 1339–1355.

[Poi01] — , « Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner », *J. Symbolic Logic* **66** (2001), no. 4, p. 1637–1646.

[Poi12] — , « Groupes linéaires de rang de Morley fini », *Ann. Sci. Math. Québec* **36** (2012), no. 2, p. 591-602.

[Pop07] V. Popov – « Generically multiple transitive algebraic group actions », in *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, p. 481–523.

[PS97] A. Premet & H. Strade – « Simple Lie algebras of small characteristic. I. Sandwich elements », *J. Algebra* 189 (1997), no. 2, p. 419–480.

[Ros91] R. Rosengarten – « $\aleph_0$-stable Lie algebras », Thèse, Rutgers University, New Brunswick, 1991.

[Ste63] R. Steinberg – « Representations of algebraic groups », *Nagoya Math. J.* **22** (1963), p. 33–56.

[Ten03] K. Tent – « Split BN-pairs of finite Morley rank », *Ann. Pure Appl. Logic* **119** (2003), p. 239–264.

[Ten04] — , « BN-pairs of finite Morley rank where B is solvable », *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **11** (2004), no. 1, p. 49–62.

[TN13] J. Tindzogho Ntsiri – « Étude de quelques liens entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires », Thèse, Université de Poitiers, Poitiers, 2013.

[TN16] — , « Structure of an SL_2-module of finite Morley rank, soumis (2016).

[Wag03] F. Wagner – « Bad fields in positive characteristic », *Bull. London Math. Soc.* **35** (2005), p. 499–502.

Glossaire (fragments de)

Le plein soleil d'été s'épandait sur la paix du jardin.

Algébrique (groupe). Variété algébrique munie d'une loi de groupe compatible ; la notion permet notamment la modélisation des groupes de type Lie dans le contexte de la géométrie algébrique. Omettant la structure rationnelle, nous considérerons surtout les groupes abstraits de la forme $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$, i.e. les groupes linéaires de $\mathbb{K}$-points d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$, dont nous dirons par abus de langage qu'ils sont « algébriques ». Les variétés abéliennes sont absentes de ce mémoire.

Borel (sous-groupe de). En contexte rangé, désigne un sous-groupe définissable, connexe, résoluble, et maximal pour ces propriétés. On ne dispose d'aucun des théorèmes « géométriques » classiques [C, §21] sur ces sous-groupes. Dans un groupe de $\mathbb{K}$-points sur un corps rangé même enrichi, les notions logique et géométrique coïncident (v. clôture définissable et [A, Corollary 5.38]).

Chaîne (conditions de). Tout groupe rangé satisfait la propriété de stationnement des suites décroissantes de sous-groupes définissables [A, §5.1], ainsi que des suites croissantes de sous-groupes définissables *connexes* [A, Ex. 2 p. 71] ; la dernière clause est bien sûr indispensable.

Chevalley (groupe de). Groupe engendré par certains automorphismes de l'algèbre des $\mathbb{K}$-points d'une algèbre de Lie simple [B, §4.4] ; la notion permet notamment la modélisation des groupes de type Lie finis. Sous forme adjointe, ces groupes sont presque tous simples [B, §11.1] ; Steinberg a donné générateurs et relations [B, Theorem 12.1.1] de leur forme universelle.

Bien que la théorie générale soit compliquée par l'existence des sous-groupes dits « tordus » [B, §13.4] liée à la présence d'automorphismes de corps, une telle construction est impossible dans le contexte rangé qui exclut les extensions de corps.

Connexe. Groupe n'ayant pas de sous-groupe définissable propre d'indice fini. Un tel groupe est indécomposable au sens de Zilber.

Il existe une notion de composante connexe [A, §5.2] pour les sous-groupes définissables, qui s'étend via la clôture définissable à tout sous-groupe.

Si un groupe connexe permute définissablement un ensemble fini, il le fixe [A, Lemma 5.9].

Constructible. Partie définissable dans un pur corps algébriquement clos [A, Fact 3.6]. La stabilité par projection s'appelle élimination des quanteurs ; la stabilité par quotient modulo relation d'équivalence [A, Fact 3.7], élimination des imaginaires.

Corps. Un corps rangé pouvant être muni de structure étendant les deux lois additive et multiplicative, son rang n'est pas forcément 1. On sait les choses suivantes (v. chapitre IV, §2.1, pour références et attributions) :

- tout corps rangé infini est algébriquement clos (seul le chapitre III envisage d'autres corps) ;
- le groupe additif d'un corps rangé de caractéristique 0 est minimal (v. minimal) ;
- il existe des corps rangés de caractéristique 0 avec $\mathbb{K}^\times$ non-minimal ;
- il existe des corps rangés de caractéristique $p > 0$ avec $\mathbb{K}_+$ non-minimal ;
- l'existence de corps rangés de caractéristique $p > 0$ avec $\mathbb{K}^\times$ non-minimal est ouverte bien que considérée peu vraisemblable.

Tout ceci complique considérablement les techniques d'analyse des groupes rangés, par contraste avec le cas algébrique affine où les seules briques sont $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$ [C, Theorem 20.5].

Curtis-Phan-Tits (théorème à la). Type de théorème décrivant une structure algébrique *globale* en fonction de données *locales*. La version classique (v.

chapitre I, §1.2) identifie un groupe abstrait G à partir d'une famille de sous-groupes se comportant comme les sous-groupes SL_2-racines d'un groupe de type Lie ; $G/Z(G)$ est alors de type Lie. Originaires de théorie des groupes finis, ces énoncés existent ausi pour les groupes de Chevalley infinis.

Définissable (clôture). Nous l'employons dans un sens spécifique qui n'est pas la notion modèle-théorique générale. La clôture définissable [A, §5.5] d'une partie est le plus petit *sous-groupe* définissable la contenant ; c'est bien défini par condition de chaîne (faute de topologie, on ne peut pas parler d'adhérence ensembliste générale). Le comportement de ce sous-groupe est celui attendu par les géomètres.

Définissable (partie). Par abus de langage, désigne une partie que le théoricien des modèles appellerait en toute rigueur « définissable avec paramètres dans $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ », ou « interprétable dans $(\mathcal{M}, M)$ » [A, §4.1.1]. La classe des parties définissables d'une structure est la plus petite collection :
- comprenant les $\mathcal{M}^n$, les singletons, et les graphes des relations de la structure ;
- stable par combinaison booléenne ;
- stable par projection ;
- stable par passage au quotient modulo relation d'équivalence de la collection.

Ceci généralise la classe constructible ; les notions coïncident pour un groupe linéaire sur un pur corps algébriquement clos.

Fortement inclus (sous-groupe). Sous-groupe définissable propre $M < G$ d'un groupe rangé contenant une involution, mais tel que pour $g \in G \smallsetminus M$, l'intersection $M \cap M^g$ n'en contienne aucune : les involutions « ne communiquent pas ». Ceci équivaut à l'existence d'un 2-sous-groupe de Sylow $S < G$ tel que $N_G(S) \leq M$ et pour toute involution $i \in S$, $C_G(i) \leq M$ [A, Theorem 10.19]. Concept emprunté à la théorie des groupes finis.

Fortement réel (élément). Produit de deux involutions distinctes. Concept emprunté à la théorie des groupes finis.

Générique. Partie de rang maximal — faute de topologie, les notions d'ouvert ou de partie dense n'ont pas de sens en contexte rangé. Exemple : l'union des conjugués du centralisateur d'un tore décent maximal (Cherlin, v. chapitre II ; cf. [C, Theorem 22.2]).

Impair (groupe de type). Groupe rangé dont les 2-sous-groupes de Sylow sont toriques-par-finis infinis (v. Sylow, v. tore). C'est le comportement algébrique en caractéristique distincte de 2.

Indécomposable. Partie définissable qu'aucun sous-groupe définissable ne partitionne, par ses translatés, en un nombre fini non-trivial de sous-parties [A, §5.4].

La propriété permet de modéliser l'irréductibilité topologique ; et l'engendrement par des parties indécomposables contenant l'identité d'un groupe (Zilber, [A, Theorem 5.26]) se comporte comme dans le cadre algébrique [C, Proposition 7.5].

(Sans rapport avec les indécomposables de Burdges, notion technique étayant sa théorie de l'unipotence.)

Lie (anneau de). Structure algébrique $(\mathfrak{g}, +, [\cdot,\cdot])$ de groupe abélien pourvu d'un crochet de Lie ; *pas d'hypothèse de structure vectorielle*, ce qui affecte les notions de morphisme et de représentation.

Lie (groupe de type). V. algébrique, v. Chevalley, v. khazar, v. rangé.

Linéaire (groupe). Sous-groupe d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il est dit *définissablement* linéaire s'il y est définissable, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ étant alors vu comme une structure de groupe donnée par celle du corps $\mathbb{K}$.

Mauvais groupe. Groupe rangé non-résoluble dont tous les sous-groupes définissables, connexes et propres seraient nilpotents [A, §13.1]. On ignore encore si de tels objets existent, même en rang 3. On ignore s'ils pourraient être linéaires ; on sait qu'ils ne pourraient l'être définissablement qu'en caractéristique nulle (Poizat, v. chapitre IV).

Entre autres propriétés pathologiques, les mauvais groupes simples n'auraient pas d'involutions [A, Theorem 13.3]. Ces objets seraient donc sans équivalent fini car ils violeraient un analogue infinitaire du théorème de Feit-Thompson (v. Sylow) ; ils seraient aussi sans équivalent algébrique [C, §21.4].

Minimal (groupe). Groupe infini n'ayant pas de sous-groupe définissable propre *infini*. Ceci ne préjuge en rien de la valeur du rang. Sans lien avec la simple minimalité.

Ne pas confondre avec la propriété parfois appelée G-minimalité, et que nous appellerons toujours G-irréductibilité, d'un G-module V ne possédant pas de sous-G-module définissable propre infini.

$N_\circ^\circ$-groupe. Groupe rangé dans lequel le normalisateur de tout sous-groupe définissable, connexe, et résoluble, est résoluble-par-fini. La classe généralise celle des groupes simples minimaux. Notion adaptée de la théorie des groupes finis ; v. chapitre I.

Racine. Objet géométrique associé à la représentation adjointe d'un groupe de type Lie sur l'algèbre de Lie associée. Le mot a plusieurs acceptions que le logicien prendra garde à ne pas confondre :
- racine comme élément d'un système (v. Weyl), abstraction géométrique du sens suivant ;
- racine comme forme linéaire, i.e. poids non-nul de la représentation adjointe [B, §3.3] ;
- sous-groupe racine, exponentielle d'un espace racine [B, §5.1] ; un tel groupe est unipotent ;
- sous-groupe SL_2-racine (ou SL_2-fondamental), engendré par deux sous-groupes racines opposés, et isomorphe à $(\mathrm{P})\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ [B, §6.3].

Rien de tout cela n'a d'équivalent pour un groupe rangé abstrait — faute d'action adjointe.

Rangé (groupe). Groupe définissable dans une structure rangée. La notion permet la modélisation des groupes de type Lie sur les corps algébriquement clos dans le contexte de la théorie des modèles. On ignore si les groupes simples rangés sont tous de cette forme (conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber).

D'après un théorème de Poizat, une structure de groupe est rangée si et seulement si la théorie en est de rang de Morley fini [A, App. C].

Rangé (module). Triplet $(G, V, \cdot)$ définissable dans une structure rangée, où G est un groupe, V un groupe abélien *connexe*, et $\cdot$ une action de G sur V. Définissabilité et connexité affectent naturellement les notions d'irréductibilité, etc.

Rangée (structure). Structure dont la classe définissable porte une dimension, dite fonction de rang, soumise aux axiomes de Borovik-Poizat [A, §4.1.2] pour l'énoncé desquels $f : A \twoheadrightarrow B$ désigne une surjection définissable entre parties définissables :
- $\operatorname{rg} A \geq n+1$ si et seulement s'il existe une infinité de $B_i \subseteq A$ définissables disjoints de rang $\geq n$;
- pour chaque entier k, l'ensemble $F_k = \{b \in B : \operatorname{rg} f^{-1}(b) = k\}$ est définissable ;
- si $F_k = B$, alors $\operatorname{rg} A = k + \operatorname{rg} B$;
- il y a un entier m tel que chaque fibre $f^{-1}(b)$ est soit de cardinal $\leq m$ soit infinie.

Semi-simple. V. tore.

Simple minimal (groupe). En contexte rangé, groupe définissable simple infini dont tout sous-groupe définissable propre connexe est résoluble. Notion adaptée de la théorie des groupes finis, aperçue aux chapitres I et II ; le premier se concentre sur la généralisation $N_\circ^\circ$.

Structure. Objet pourvu d'une collection donnée de relations ; les fonctions peuvent être vues comme des relations [A, §3.1]. On ne dispose ni de donnée topologique, ni d'appartenance catégorique. Le terme technique est structure « du premier ordre » ; la théorie des modèles se concentre sur la combinatoire des parties définissables d'une telle structure.

L'expression « structure de groupe ou de corps » désigne un groupe ou un corps *éventuellement muni de structure supplémentaire* ; autrement nous dirons du groupe ou du corps qu'il est *pur*.

Sylow (sous-groupe de). Un p-sous-groupe de Sylow est un p-sous-groupe — non supposé définissable — localement fini et maximal pour ces propriétés. En contexte rangé, la locale finitude équivaut à la nilpotence locale [A, Theorem 6.19] ; quand $p = 2$, la clause est superflue [A, Theorem 6.21] ; c'est ouvert en $p > 2$.

Les 2-sous-groupes de Sylow sont toujours conjugués d'après un théorème de Borovik et Poizat [A, Theorem 10.11] ; c'est l'amorce du programme de Borovik pour la conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber, qui se concentre sur la 2-structure. Mais le contexte rangé n'offre apparemment pas de théorème de Feit-Thompson, si bien que la non-trivialité des 2-sous-groupes de Sylow est un problème ouvert (v. mauvais groupe).

Dans le cas $U_p^\perp$, les p-sous-groupes de Sylow alors toriques-par-finis sont conjugués (Burdges et Cherlin, v. chapitre II) ; le problème général est ouvert.

La notion de 0-sous-groupe de Sylow (Burdges, v. chapitre I) est plus complexe à manier.

Tore. Dans le cadre rangé, la semi-simplicité n'est pas une propriété intrinsèque à un élément ; c'est une propriété de sous-groupe.
- Un *p-tore* est un sous-groupe (non supposé définissable) de la forme $\mathbb{Z}_{p^\infty}^n$, où $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est le p-groupe quasi-cyclique de Prüfer. L'entier n est appellé *rang de Prüfer*.
- Un *bon tore* est un sous-groupe définissable abélien, divisible, et dont tout sous-groupe définissable connexe est clôture définissable de sa torsion. Exemple : $\mathbb{K}^\times$ pour $\mathbb{K}$ un corps rangé de

caractéristique positive (Wagner).

– Un *tore décent* est un sous-groupe définissable, abélien, divisible, et clôture définissable de sa torsion.

Cherlin a obtenu la conjugaison des bons tores maximaux, et des tores décents maximaux (v. chapitre II) ; celle des p-tores maximaux suit.

Unipotent. Dans le cadre rangé, l'unipotence n'est pas une propriété intrinsèque à un élément ; c'est une propriété de sous-groupe. La théorie est bien moins géométrique que dans les contextes algébrique [C, §26] ou de Chevalley [B, §5].

Un sous-groupe p-unipotent d'un groupe rangé en est un p-sous-groupe définissable, connexe, nilpotent, d'exposant borné. On ignore si la clause de nilpotence est superflue ; on ne possède *aucun* résultat de conjugaison sauf si $p = 2$ (v. Sylow).

Burdges a introduit une notion de 0-unipotence *graduée*, à manier avec précaution (v. chapitre I).

$\mathbf{U_p^\perp}$. Se dit d'un groupe rangé sans sous-groupe p-unipotent non-trivial.

Weyl (groupe de). Quotient du normalisateur d'un tore décent maximal, par son centralisateur. Le second est connexe si le groupe ambiant l'est (Altınel et Burdges, v. chapitre II). Faute de système de racines, la théorie est infiniment moins développée que dans le cas des groupes de Chevalley [B, §2]. Pour un groupe algébrique les deux notions se rejoignent [B, Theorem 7.2.2].

Références du glossaire

[A] A. Borovik & A. Nesin – *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides, vol. 26, The Clarendon Press - Oxford University Press, New York, 1994, Oxford Science Publications.

[B] R. Carter – *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, vol. 28, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, 1972.

[C] J. Humphreys – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21. Springer-Verlag, New York, 1975.

Table des matières

Introduction **i**

I. Ô Mort, vieux capitaine **1**

1 Présentation . . . 1
1.1 Contexte . . . 1
1.2 Enjeux . . . 2
1.3 Résultats . . . 4
2 Quelques points de technique . . . 5
2.1 Unipotence . . . 5
2.2 $N_\circ^\circ$-groupes en contexte involutif . . . 7
3 Leçons et perspectives . . . 10
Références . . . 10

II. Bagatelles (Études de torsion) **13**

1 Présentation . . . 13
1.1 Contexte . . . 13
1.2 Enjeux . . . 14
1.3 Résultats . . . 15
2 Quelques points de technique . . . 16
2.1 Un théorème de R. Steinberg . . . 16
2.2 Compléments . . . 16
3 Leçons et perspectives . . . 18
Références . . . 19

III. Variations quadratiques **20**

1 Présentation . . . 20
1.1 Contexte . . . 20
1.2 Enjeux . . . 21
1.3 Résultats . . . 22
2 Quelques points de technique . . . 24
2.1 Le premier article . . . 24
2.2 Le deuxième article . . . 25
2.3 Le troisième article . . . 27
2.4 Le quatrième article . . . 29
3 Leçons et perspectives . . . 30
Références . . . 32

IV. Logique des représentations **33**
1 Présentation . . . 33
1.1 Contexte . . . 33
1.2 Enjeux . . . 34
1.3 Résultats . . . 35
2 Quelques points de technique (1) — État des lieux . . . 37
2.1 Rappels sur les corps rangés . . . 38
2.2 Principes de linéarisation . . . 38
2.3 Principes d'algébrisation . . . 40
3 Quelques points de technique (2) — Travaux présentés . . . 42
3.1 Linéarisation . . . 42
3.2 Identification simultanée . . . 44
3.3 Zoologie des $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$-modules rangés . . . 46
4 Leçons — Perspectives — Directions . . . 48
4.1 Quelques points de technique (3) — Pour les besoins de ce mémoire . . . 48
4.2 Conjecture et apologie . . . 49
4.3 Directions . . . 50
Références . . . 54

Glossaire **56**