



HAL
open science

Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères

Grégory Chagnon

► **To cite this version:**

Grégory Chagnon. Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes; Université de Nantes, 2003. Français. NNT: . tel-01987182

HAL Id: tel-01987182

<https://hal.science/tel-01987182>

Submitted on 20 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2003

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

***Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

GREGORY CHAGNON

le 30 octobre 2003
à l'Ecole Centrale de Nantes à Nantes

MODELISATION DE L'EFFET MULLINS DANS LES ELASTOMERES

JURY

Président :	LEMAIRE Maurice	Professeur, IFMA, Clermont Ferrand
Rapporteurs :	DESOYER Thierry	Professeur, ESM2, Marseille
Rapporteurs :	STOLZ Claude	Directeur de recherches, Ecole Polytechnique, Palaiseau
Examineurs :	CHARRIER Pierre	Ingénieur de recherches, Société Modyn Trelleborg, Carquefou
	COVENEY Vincent	Reader, University of the West of England, Bristol (Angleterre)
	PESEUX Bernard	Professeur, Ecole Centrale de Nantes
Invités :	GORNET Laurent	Maître de conférences, Ecole Centrale de Nantes
	VERRON Erwan	Maître de conférences, Ecole Centrale de Nantes

Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans la division Mécanique des Structures du Laboratoire de Mécanique et Matériaux de l'Ecole Centrale de Nantes en collaboration avec la société Modyn du groupe Trelleborg.

J'aimerais tout d'abord remercier les cinq personnes qui ont permis à cette thèse tout d'abord d'exister puis de vivre :

Pierre Charrier, ingénieur de recherches du Groupe Trelleborg responsable des études avancées sur le comportement et la fatigue des élastomères pour avoir réussi à initier cette thèse dans le contexte délicat de la reprise du groupe Draftex par Trelleborg. J'aimerais également le remercier pour toutes les discussions enrichissantes que nous avons eues et pour les nombreux essais qu'il a réalisés pour moi (j'en profite pour avoir une pensée quant à la performance de la ligne téléphonique entre l'ECN et Modyn).

Erwan Verron et Laurent Gornet, maîtres de conférences à l'Ecole Centrale de Nantes qui ont su m'aider et m'aiguiller chaque fois que nécessaire tout en me laissant un grand espace de liberté. Je souhaite les remercier pour les longues heures de discussion que nous avons pu avoir sur le comportement étrange de cette matière noire et pour m'avoir beaucoup appris. J'aimerais remercier Bernard Peseux, mon directeur de thèse d'avoir permis à Erwan Verron et Laurent Gornet de pleinement m'encadrer pendant cette thèse. Finalement je remercierais Donatien Le Houedec de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

J'aimerais associer à cette équipe, Gilles Marckmann, ingénieur de recherches au laboratoire pour toutes nos discussions fructueuses et toute l'aide qu'il m'a apporté pendant trois ans.

Je souhaiterais citer quelques personnes de Trelleborg qui m'ont aidé. Tout d'abord Elisabeth Ostoja-Kuczynski et Odile Duroc pour avoir réalisé bon nombre d'essais (non conventionnels) pour moi et cela toujours dans un délai très court ; Pascal Leduc et l'ensemble du service calculs pour les discussions sur Abaqus ; Jacques Métais et Olivier Véron pour les discussions matériaux ; et Patrice Fort pour m'avoir permis de m'intégrer pleinement dans son service et pour avoir cru en un projet comme celui-ci.

Je tiens également à remercier Messieurs Desoyer et Stolz qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail, et Messieurs Coveney et Lemaire d'avoir accepté de le juger.

Je remercierais sans les citer tous les participants du G.T.F.E. pour tout ce qu'ils ont pu m'apprendre au cours de nos réunions.

Pour terminer je vais saluer mes deux acolytes Jessy Lefeuve et Jean-Benoit Le Cam avec qui j'ai tour à tour partagé un bureau toujours dans la bonne humeur et avec qui nous avons eu de nombreuses discussions et soulevé bon nombre de problèmes sur l'implantation numérique ou sur le comportement du caoutchouc.

Merci à tous ceux du laboratoire qui ont rendu ces trois années agréables : Mathias, Reza, Patrice, Bertrand, Tanguy, Patrick, Jean-Pierre, Brigitte, Hervé, Pascal et les autres.

Merci enfin à toutes les personnes (hors du contexte du travail) qui ont pu m'aider ; elles se reconnaîtront.

Aux absents...

AVERTISSEMENT

Pour des raisons de confidentialité, toutes les valeurs numériques des contraintes et des forces ont été pondérées par un facteur multiplicatif. Celui-ci est identique pour toutes les valeurs du manuscrit.

Table des matières

Rappel et Notations	7
Introduction	9
Chapitre I Description des élastomères	11
I.1 Description moléculaire	11
I.1.1 Élastomère pur	11
I.1.2 Les charges	13
I.1.3 Matériau étudié	14
I.2 Comportement mécanique des élastomères	14
I.2.1 Description des essais mécaniques courants	14
I.2.2 Mise en évidence des différents aspects du comportement mécanique des élastomères	16
I.2.2.1 Élasticité non linéaire	16
I.2.2.2 Viscoélasticité	17
I.2.2.3 Effet Payne	18
I.2.2.4 Comportement sous chargement cyclique	19
I.2.2.5 Compressibilité	23
I.2.2.6 Définitions des phénomènes	23
I.2.3 Influence des conditions d'essais sur le comportement mécanique	24
I.2.3.1 La vitesse de déformation	24
I.2.3.2 Le repos	27
I.2.3.3 La température	30
I.2.3.4 L'histoire du chargement : anisotropie induite	32
I.3 Conclusions	33
Chapitre II Bibliographie sur les lois de comportement	35
II.1 Élasticité non-linéaire	35
II.1.1 Généralités sur l'hyperélasticité	35
II.1.1.1 Introduction	35

II.1.1.2	Loi de comportement hyperélastique	36
II.1.2	Modèles physiques	37
II.1.2.1	Fondements de la mécanique statistique	37
II.1.2.2	La théorie gaussienne et ses applications	39
II.1.2.3	La théorie non-gaussienne et ses applications	39
II.1.2.4	Modèle tube	42
II.1.2.5	Autres approches	43
II.1.2.6	Conclusion sur les modèles physiques	43
II.1.3	Modèles phénoménologiques	44
II.1.3.1	La série de Rivlin et ses variantes	44
II.1.3.2	Autres formulations en invariants	46
II.1.3.3	Modèles écrits en termes d'extensions principales	47
II.1.4	Problème de la courbure à l'origine	49
II.2	Effet Mullins	50
II.2.1	Introduction	51
II.2.2	Modèles physiques	51
II.2.3	Modèles de double réseau	53
II.2.4	Modèles d'endommagement	55
II.2.4.1	Modèle de Gurtin et De Souza Neto	55
II.2.4.2	Modèle de Simo	56
II.2.4.3	Modèle de Miehe	57
II.2.4.4	Modèle de De Simone <i>et al.</i>	58
II.2.4.5	Modèle d'Ogden et Roxburgh	59
II.2.4.6	Bilan	60
II.2.5	Conclusion	60
II.3	Choix d'un modèle	60
Chapitre III Modélisation du comportement		63
III.1	But de la modélisation	63
III.2	Utilisation de la mécanique de l'endommagement - Modèle M1	65
III.2.1	Bases thermodynamiques	66
III.2.2	Choix de la mesure de déformation	68
III.2.3	Construction de la loi de dommage	70
III.2.4	Limites du modèle et identification des paramètres	73
III.2.4.1	Limites	73
III.2.4.2	Choix de la densité d'énergie hyperélastique et écriture des relations contrainte-déformation	74
III.2.4.3	Identifications des paramètres	75
III.3	Altération des réseaux	77
III.3.1	Modèle M2	77

III.3.1.1	Base de la modélisation	77
III.3.1.2	Perspectives du modèle	81
III.3.2	Modèles équivalents	82
III.3.2.1	Application au modèle de Gent - Modèle M3	82
III.3.2.2	Application au modèle de Hart-Smith - Modèle M4	84
III.3.3	Bilan des modèles d'altération	86
III.4	Comparaison des formulations	86
III.4.1	Simulations des modèles de la bibliographie	86
III.4.2	Modèle de Simo (1987)	87
III.4.3	Modèle de Zuñiga et Beatty (2002b)	88
III.4.4	Qualités des modélisations	89
III.5	Conclusions	89
Chapitre IV Mise en oeuvre numérique		91
IV.1	Cadre général	91
IV.1.1	Méthode des éléments finis en grandes déformations	91
IV.1.1.1	Principe des travaux virtuels	91
IV.1.1.2	Discrétisation du problème	93
IV.1.2	Une difficulté supplémentaire : l'incompressibilité	94
IV.1.2.1	Problèmes numériques	94
IV.1.2.2	Solutions proposées dans la bibliographie	95
IV.1.2.3	Remarque finale : limite de la séparation sphérique-déviatorique	98
IV.1.3	Stabilité des lois	100
IV.2	Application : mise en oeuvre dans Abaqus	100
IV.2.1	Généralités sur l'approche retenue	100
IV.2.2	Détails sur la UMAT	101
IV.2.2.1	Description de la subroutine	101
IV.2.2.2	Calcul des grandeurs utiles	101
IV.2.2.3	Application aux modèles considérés	106
IV.2.2.4	Remarque finale	107
IV.3	Validation sur les essais simples	108
IV.3.1	Éprouvette haltère	109
IV.3.2	Éprouvette de glissement pur	110
IV.3.3	Éprouvette de glissement simple	111
IV.3.4	Éprouvette de compression	112
IV.4	Conclusion	113
Chapitre V Validation et applications industrielles		115
V.1	Plaque trouée	115

V.2	Structures réelles	117
V.2.1	Éprouvettes de fatigue	117
V.2.1.1	Éprouvette diabolo	117
V.2.1.2	Éprouvette AE	121
V.2.1.3	Bilan	125
V.2.2	Aide au dimensionnement des pièces industrielles	125
V.3	Conclusion	128
Conclusion		131
Références bibliographiques		132
Annexe A Passage du glissement simple au glissement pur		147
A. 1	Introduction	147
A. 2	Descriptif	147
A. 2.1	Glissement simple	147
A. 2.2	Glissement pur	148
A. 2.3	Comparaison des glissements	149
A. 3	Traitement pratique	150
A. 4	Vérification expérimentale	150
Annexe B Equivalence des modèles hyperélastiques		153
B. 1	Introduction	153
B. 2	Densité d'énergie de déformation	154
B. 2.1	Modèle HS	154
B. 2.2	Modèle AB	154
B. 2.3	Modèle G	155
B. 3	Comparaison des paramètres matériels	155
B. 3.1	Développements polynômiaux	155
B. 3.2	Comportement à faibles déformations	156
B. 3.3	Comportement à grandes déformations	156
B. 4	Exemples	159
B. 4.1	Identification du modèle G	159
B. 4.2	Identification des essais de Treloar	160
B. 5	Conclusion	162
Annexe C Modélisation de l'effet Mullins et de l'hystérésis		165
C. 1	Introduction	165
C. 2	Etude des phénomènes	165
C. 2.1	Effet Mullins	165

C. 2.2	Hystérésis	166
C. 2.2.1	Descriptif	166
C. 2.2.2	Mise en équations	167
C. 3	Construction du modèle global	168
C. 4	Identification des paramètres et simulations	169
C. 5	Conclusion	170

Rappel et Notations

Définition des formats :

- x, X Grandeur scalaire
- \mathbf{x} Tenseur d'ordre 1 de composante x_i
- \mathbf{X} Tenseur d'ordre 2 de composante X_{ij}
- \mathbb{X} Tenseur d'ordre 4 de composante X_{ijkl}

Grandeurs mathématiques :

- δ_{ij} Symbole de Kronecker
- \mathbf{I} Tenseur identité d'ordre 2 $I_{ij} = \delta_{ij}$
- \mathbb{I} Tenseur Identité d'ordre 4 $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$
- \mathbb{T} Tenseur Transposition d'ordre 4 $T_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$
- \mathbb{S} Tenseur Symétrie d'ordre 4 $S_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
- \mathbb{A} Tenseur Antisymétrie d'ordre 4 $A_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$

Définition des produits :

- \otimes Produit tensoriel $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$
- \cdot Produit contracté une fois $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$
- $:$ Produit contracté deux fois $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$
- \circ Action d'un tenseur d'ordre 2 sur un tenseur d'ordre 4 $[\mathbb{A} \circ \mathbf{B}]_{ijkl} = A_{ipkl} B_{pj}$
 $[\mathbf{B} \circ \mathbb{A}]_{ijkl} = B_{iq} A_{qjkl}$
- ∇ Opérateur gradient $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = u_{i,j}$

Grandeurs mécaniques :

- \mathbf{F} Gradient de la transformation
- J Dilatation volumique
- \mathbf{B} Tenseur des dilatations de Cauchy Green gauche
- \mathbf{C} Tenseur des dilatations de Cauchy Green droit
- $I_1 I_2 I_3$ Invariants des tenseurs de Cauchy Green
- $\bar{\mathbf{F}}$ Gradient de la transformation incompressible
- $\bar{\mathbf{B}}$ Tenseur des dilatations de Cauchy Green gauche incompressible
- $\bar{I}_1 \bar{I}_2 \bar{I}_3$ Invariants du tenseur de Cauchy Green gauche incompressible
- \mathbf{E} Tenseur des déformations de Lagrange
- $\boldsymbol{\sigma}$ Tenseur des contraintes de Cauchy

$\boldsymbol{\pi}$	Tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 1 (ou Boussinesq)
\mathbf{S}	Tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2 (ou Piola-Lagrange)
\mathbf{D}	Tenseur des taux de déformation
p	Pression hydrostatique
\mathbb{C}^L	Matrice Tangente lagrangienne
\mathbb{C}^e	Matrice Tangente eulérienne
\mathbb{C}^{Lr}	Matrice Tangente lagrangienne réactualisée
d	Accommodation à l'effet Mullins
Y	Variable thermodynamique associée à l'accommodation
W, W_0	Densités d'énergie hyperélastiques

L'indice « cp » désigne les mêmes tenseurs dans le cas des contraintes planes, notamment : \mathbf{B}^{cp} , \mathbf{C}^{cp} , \mathbf{S}^{cp} et $\boldsymbol{\sigma}^{cp}$.

Les indices « dev » et « sph » désignent les parties déviatorique et sphérique des tenseurs : \mathbf{S}^{dev} , \mathbf{S}^{sph} , $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{sph}$.

Introduction

Les matériaux élastomères prennent une part de plus en plus importante dans un grand nombre d'industries comme par exemple l'automobile, l'aéronautique ou encore le génie civil. Ceci conduit de plus en plus d'entreprises à s'intéresser à la modélisation de leur comportement mécanique. Le nombre d'études concernant des problèmes de tenue en fatigue, de tenue en milieu agressif, de résistance à l'abrasion ou d'acoustique est en forte progression depuis une dizaine d'années. La forte concurrence entre les différentes entreprises ainsi que la nécessité de réduction du temps de conception des pièces obligent les différents protagonistes à répondre très rapidement aux sollicitations des clients, surtout dans l'industrie automobile. Les campagnes expérimentales étant longues et onéreuses, des outils numériques sont maintenant indispensables dans la boucle de conception des différents produits. Dans ce cadre industriel, la société Modyn-Trelleborg, spécialisée dans l'anti-vibratoire automobile, a cherché des partenaires pour travailler sur le problème de l'estimation de la durée de vie en fatigue des pièces. Ceci a conduit à la création du GTFE (Groupe de Travail sur la Fatigue des Elastomères) regroupant les sociétés Allevard-Rejna, PSA et Modyn-Trelleborg, un centre de transfert, le CETIM de Nantes et des universitaires, l'Ecole Polytechnique et l'Ecole Centrale de Nantes. Dans ce cadre, la société Modyn-Trelleborg a, dans un premier temps, proposé une étude du comportement mécanique, et plus particulièrement de l'accommodation, des caoutchoucs naturels, avant de s'intéresser aux problèmes de fatigue à proprement parler.

Depuis le début du siècle, un grand nombre de travaux ont déjà été menés pour caractériser et modéliser les différents aspects du comportement mécanique du caoutchouc. Ceux-ci ont permis de mettre en évidence les nombreux phénomènes qui jalonnent le comportement de ce matériau, et notamment « l'effet Mullins » qui constitue le centre d'intérêt de ce travail. Ce phénomène est caractéristique des élastomères et n'est, à notre connaissance, présent dans aucun autre type de matériau. Il est étudié depuis près de cinquante ans, mais aucune définition unanime ne lui a été donnée à ce jour, chacun exploitant et interprétant les résultats expérimentaux de façon différente. Ainsi, aucun modèle décrivant ce phénomène n'est présent dans les codes de calculs commerciaux ; il ne peut donc pas être pris en compte de façon rigoureuse dans le dimensionnement des pièces industrielles. Dans ce contexte, le présent mémoire va s'attacher à proposer un outil permettant la prise en compte de ce phénomène.

Ce document se divise en cinq chapitres. Le chapitre I présente la large campagne expérimentale

menée afin de mettre en lumière tous les phénomènes présents dans le comportement mécanique des élastomères. L'inter-dépendance de ces phénomènes est étudiée par la réalisation d'essais précis permettant de les isoler les uns des autres. La démarche suivie ainsi que les principaux essais sont présentés dans le détail. Cette étude nous permet de définir les principales caractéristiques du comportement mécanique du caoutchouc et de définir précisément le phénomène que nous souhaitons modéliser, c'est-à-dire l'effet Mullins.

Une fois le phénomène prépondérant isolé, une étude bibliographique sur l'hyperélasticité et l'effet Mullins est proposée dans le chapitre II. Les différentes méthodes de modélisation sont exposées : deux approches sont identifiées pour l'hyperélasticité, tandis que trois stratégies différentes sont adoptées par les auteurs pour modéliser l'effet Mullins. Les principales caractéristiques des lois de comportement sont étudiées, et leur aptitude à décrire le comportement mécanique de notre matériau est considérée. Finalement les modèles qui nous semblent aujourd'hui les plus pertinents, c'est-à-dire ceux qui s'avèrent aptes à décrire le phénomène tout en étant facilement implantable dans un code de calcul éléments finis, sont retenus.

Au regard des résultats bibliographiques, deux pistes de modélisation de l'effet Mullins sont conservées : tout d'abord l'utilisation de la mécanique de l'endommagement, puis dans un second temps la prise en compte des phénomènes macro-moléculaires. Deux lois de comportement sont ainsi développées ; elles sont présentées dans le chapitre III. Dans un premier temps, la démarche de construction adoptée est exposée. Ensuite, leurs caractéristiques, performances et limites sont mises en évidence. Finalement, les deux théories proposées sont comparées aux modèles de la bibliographie jugés les plus pertinents sur les essais uniaxiaux.

Le chapitre IV présente le cadre de l'implantation numérique utilisé pour introduire les modèles précédents dans le logiciel commercial Abaqus. Les paramètres fondamentaux relatifs à ce type de problèmes sont présentés, notamment la gestion de l'incompressibilité et le calcul analytique de la matrice tangente. Finalement la simulation numérique d'essais simples est réalisée en utilisant les nouveaux modèles, puis comparée aux solutions analytiques et aux résultats expérimentaux.

Une fois l'outil de calcul construit, les modèles sont utilisés pour la simulation de pièces complexes. Les résultats sont présentés dans le chapitre V. Après avoir traité un cas d'école, la réponse d'éprouvettes classiquement utilisées dans les problèmes de fatigue est calculée, ce qui permet de mettre en évidence les problèmes de perte de raideur globale et locale. La modification importante de l'état de déformation local est notamment soulignée. Finalement, les problèmes de perte de raideur d'une pièce réelle, ici une voûte de suspension moteur, sont abordés au travers d'un dernier exemple.

Chapitre I

Description des élastomères

Le caoutchouc naturel utilisé dans l'industrie est produit à partir du latex de l'Hévéa *Brasiliensis*, arbre originaire du bassin de l'Amazone et cultivé essentiellement en Asie du Sud-Est et en Afrique. Ses premières utilisations remontent aux Mayas probablement sous forme d'imperméabilisant (IFOCA, 1984) ; ils lui laissèrent le nom de « cahutchu » (bois qui pleure). Ce produit connut un essor important en Europe à partir de la seconde moitié du XIX^{ème} siècle. L'occupation de l'Asie du Sud-Est par les Japonais pendant la Seconde Guerre Mondiale a conduit les États-Unis à réaliser des élastomères synthétiques de substitution (Kausch *et al.*, 2001). Beaucoup de ces produits sont largement utilisés aujourd'hui (tels le SBR, l'EPDM, le NBR...) mais le caoutchouc naturel reste l'élastomère le plus employé. Il est par exemple présent dans la production de 90% des pièces de l'antivibratoire automobile.

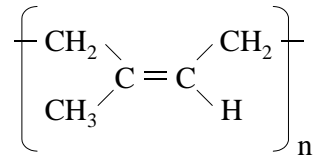
Ce mémoire est consacré uniquement à l'étude des caoutchoucs naturels. Ce premier chapitre a pour objet la description des élastomères d'un point de vue chimique puis mécanique à partir d'essais réalisés par la Société Modyn du Groupe Trelleborg et de quelques essais de la bibliographie.

I.1 Description moléculaire

Les élastomères utilisés dans l'industrie sont issus d'un mélange entre un caoutchouc naturel ou synthétique et différents additifs. Le matériau étudié dans ce mémoire est un caoutchouc naturel chargé qui est décrit dans la suite.

I.1.1 Élastomère pur

Un élastomère est un matériau composé d'un ensemble de chaînes macromoléculaires entrelacées au hasard de leurs configurations et conformations à la stéréoisomérisation près. Une macromolécule est un assemblage d'un grand nombre de monomères identiques (2000 à 10000). La macromolécule du caoutchouc naturel est le polyisoprène dont la structure moléculaire est présentée sur la figure I.1 ; son élément de base est l'isoprène *cis*1,4. Ses propriétés, aussi bien

FIG. I.1 – *Macromolécule du caoutchouc naturel.*

chimiques, mécaniques que thermiques lui sont conférées non seulement par sa composition chimique mais aussi par la position relative des différents groupements atomiques dans l'espace.

A l'état naturel, le caoutchouc se présente sous la forme d'un fluide très visqueux. Un procédé de réticulation appelé vulcanisation est nécessaire pour lui donner une consistance solide. Celui-ci fut inventé par Goodyear (brevet déposé en 1839). La vulcanisation consiste à établir des liaisons chimiques entre les différentes chaînes macromoléculaires afin de rigidifier le réseau. Elles sont créées par l'ajout d'éléments chimiques lors du mélangeage. Il existe deux méthodes de vulcanisation, la première consiste à introduire des éléments (soufre ou éléments dérivés) qui vont servir d'intermédiaires dans les liaisons entre chaînes macromoléculaires, la seconde consiste à introduire des agents (peroxydes organiques) qui jouent le rôle de catalyseurs pour faire réagir les chaînes directement entre elles. Le principe le plus utilisé est la vulcanisation au soufre (Oudet, 1994); un schéma explicatif de ce procédé est présenté sur la figure I.2. Les atomes de soufre brisent aléatoirement des doubles liaisons entre les atomes de carbone

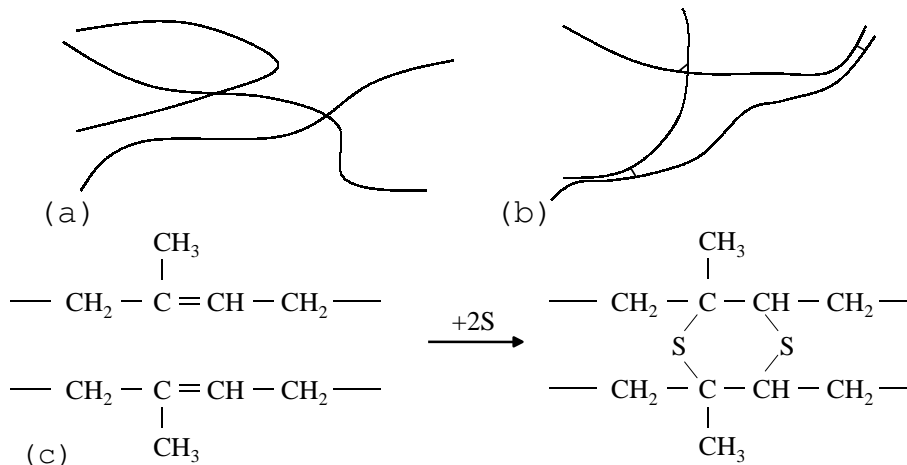


FIG. I.2 – *Processus de vulcanisation au soufre : (a) chaînes macromoléculaires avant vulcanisation, (b) chaînes macromoléculaires après vulcanisation, (c) principe de la vulcanisation en représentation linéaire.*

des chaînes de polyisoprène pour créer des liaisons entre différentes chaînes. Pour faciliter la vulcanisation au soufre, on introduit des accélérateurs (dithiocarbonates, thiurames, ...) qui sont essentiellement organiques, ainsi que des activateurs (oxydes métalliques) et des acides gras. Ces additifs permettent à la réaction de se faire plus rapidement et plus largement. Le principe de vulcanisation est résumé sur la figure I.3. Dans un premier temps, le complexe activateur qui permet la réaction est créé puis mélangé à l'agent actif (classiquement le soufre) pour former le

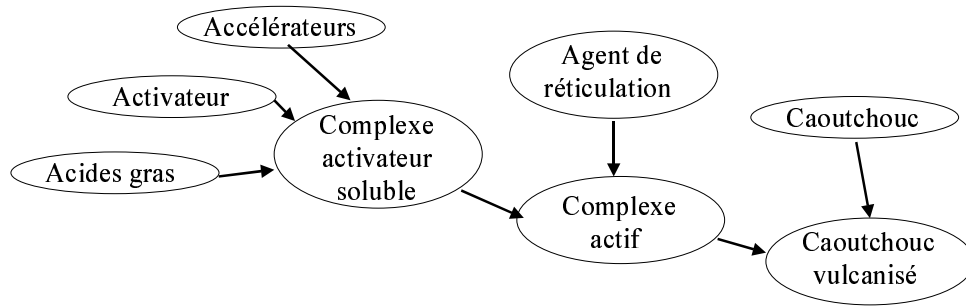


FIG. I.3 – *Principe global de la vulcanisation (IFOCA, 1984).*

complexe actif. Ce produit est finalement mélangé au caoutchouc initiant ainsi le processus.

Les élastomères sont comme tous les matériaux polymères sensibles à la température : il existe un seuil énergétique qui se traduit par l'existence d'une température de transition vitreuse, souvent notée T_g , à laquelle le matériau passe d'un état vitreux à un état caoutchoutique (Ashby et Jones, 1991). Pour les caoutchoucs naturels, celle-ci se situe aux alentours de -70°C . Dans ce mémoire la température d'utilisation du matériau est l'ambiante, donc nettement supérieure à T_g . Le matériau sera donc considéré dans son état caoutchoutique, l'utilisation des élastomères à basses températures ne présentant que peu d'intérêt.

I.1.2 Les charges

Même après vulcanisation, le latex (cf. figure I.4) récolté de l'Hévéa Brasiliensis ne possède



FIG. I.4 – *Latex coagulé à l'acide après sa récolte sur l'Hévéa Brasiliensis.*

pas de propriétés mécaniques intéressantes. Pour améliorer ses performances, les formulateurs ajoutent des charges au matériau. Les charges les plus couramment utilisées sont le noir de carbone, la silice, les kaolins et la craie. La proportion et la taille des charges jouent un rôle fondamental sur les propriétés du matériau (résistance à la rupture, à l'abrasion, tenue en fatigue, tenue en température, ...). L'interaction polymère-particule met en jeu un processus d'adsorption rendu possible par la présence de groupements chimiques à la surface des particules, créant ainsi des liaisons quasi-irréversibles de nature physique ou chimique (Oudet, 1994). De plus, les propriétés des matériaux sont directement influencées par la répartition des charges (Ambacher

et al., 1991). Des plastifiants sont ajoutés afin de faciliter leur dispersion dans le matériau (Bailon et Dorlot, 2000). Tous les élastomères utilisés dans les différentes industries sont des matériaux chargés. De nombreux auteurs se sont intéressés à l'influence de la taille et de la proportion des charges sur les propriétés mécaniques du matériau. Le lecteur pourra notamment se reporter à Rigbi (1980); Laraba-Abbes (1998) ou encore Ambacher *et al.* (1991) pour le noir de carbone, et à Dannenberg (1975) pour la silice.

I.1.3 Matériau étudié

Comme nous venons de le montrer brièvement, un élastomère est donc composé d'un grand nombre de produits différents. Dans ce mémoire, un seul matériau est étudié, il s'agit d'un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone et vulcanisé au soufre. La composition massique du matériau est présentée dans le tableau I.1.

Formulation	
Caoutchouc naturel	100
Oxyde de zinc	9.85
Plastifiant	3.00
Noir de carbone	34.0
Acide stéarique	3.00
Antioxydant	2.00
Accélérateurs	4.00

TAB. I.1 – *Composition massique du matériau étudié.*

Ce matériau est caractéristique d'un grand nombre de produits de l'antivibratoire automobile. Dans la suite de ce chapitre, les essais mécaniques réalisés sur ce matériau seront présentés.

I.2 Comportement mécanique des élastomères

Le but de cette partie est de décrire le comportement mécanique des élastomères. Pour cela, certains essais de la bibliographie ont été utilisés et un grand nombre d'expériences ont été réalisées en collaboration étroite avec la Société Modyn-Trelleborg. L'étude se concentre sur le comportement statique du matériau. Les propriétés dynamiques ne sont pas abordées ici.

I.2.1 Description des essais mécaniques courants

La présente étude s'intéresse à différents modes de déformation : traction, glissement simple, glissement pur et compression. La géométrie des éprouvettes utilisées lors de ces essais est présentée sur la figure I.5. L'éprouvette de traction est constituée de deux parties : la partie centrale et ses extrémités (voir figure I.5 (a)). Lors d'un essai, les extrémités sont bloquées dans des mors auto-serrants. Deux pastilles blanches sont collées aux limites de la partie centrale

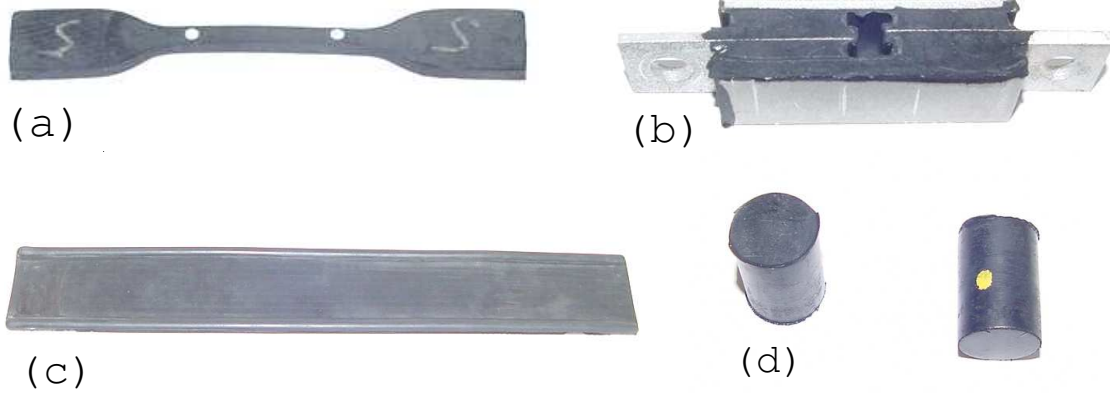


FIG. I.5 – *Éprouvettes utilisées pour la caractérisation des élastomères: (a) éprouvette haltère de traction, (b) éprouvette de glissement simple, (c) éprouvette de glissement pur, (d) plots de compression.*

de l'éprouvette et servent à mesurer la déformation de celle-ci qui est supposée homogène. Le déplacement des pastilles est suivi par un système optique, tandis que l'effort appliqué sur l'éprouvette est mesuré par un capteur de force placé au niveau des traverses sur lesquelles sont fixés les mors. Un essai de traction est caractérisé par les états de transformation et de contrainte de la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1/\sqrt{\lambda} & \\ & & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

où λ et σ sont respectivement l'élongation et la contrainte vraie dans la direction de traction.

Remarque: ici, nous avons tenu compte du caractère incompressible des élastomères. Cette hypothèse est faite pour tous les essais simples. La validité de l'hypothèse de compressibilité sera discutée dans la suite.

L'éprouvette de glissement simple est constituée de quatre blocs d'élastomère et de trois inserts métalliques (voir figure I.5 (b)). La réponse force-déplacement de l'éprouvette est déterminée grâce à la mesure des déplacements et efforts imposés sur les inserts métalliques. Ces essais sont dépouillés en deux étapes, la première consiste à calculer l'angle de glissement γ et la contrainte de cisaillement τ qui caractérisent l'état du matériau :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} X & \tau & \\ \tau & Y & \\ & & Z \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

où X , Y et Z sont des contraintes non mesurées lors de l'essai. La seconde consiste à projeter ces grandeurs dans les directions principales de déformation et d'obtenir ainsi l'équivalent d'un essai de glissement pur (cf. Annexe A) pour lequel la transformation et les contraintes sont données

par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1/\lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & 0 & \\ & & Z \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

où λ et σ sont respectivement les élongation et contrainte vraie maximales principales.

Des essais de glissement pur ont également été réalisés. Les déplacements et efforts appliqués sur les mors sont mesurés. Les deux grands côtés de l'éprouvette (cf. figure I.5 (c)) sont bloqués, ce qui impose au matériau de ne pas se déformer dans cette direction (les effets de bord sont négligés). L'éprouvette peut ainsi être considérée dans un état de contraintes planes (dont les caractéristiques sont données par l'équation I.3). Celui-ci se détermine simplement grâce à la connaissance de la géométrie des éprouvettes.

Les derniers essais mis en œuvre sont des essais de compression (voir figure I.5 (d)), les mesures effectuées sont les déplacements et efforts appliqués sur les mors ; les contraintes et déformations du matériau sont également déduites de la géométrie et s'écrivent sous la même forme que les essais de traction, à ceci près que λ prend des valeurs inférieures à 1.

I.2.2 Mise en évidence des différents aspects du comportement mécanique des élastomères

I.2.2.1 Élasticité non linéaire

Les élastomères sont caractérisés par une capacité à supporter les grandes déformations de façon réversible. La figure I.6 représente la courbe de traction à rupture d'un élastomère. Celle-ci

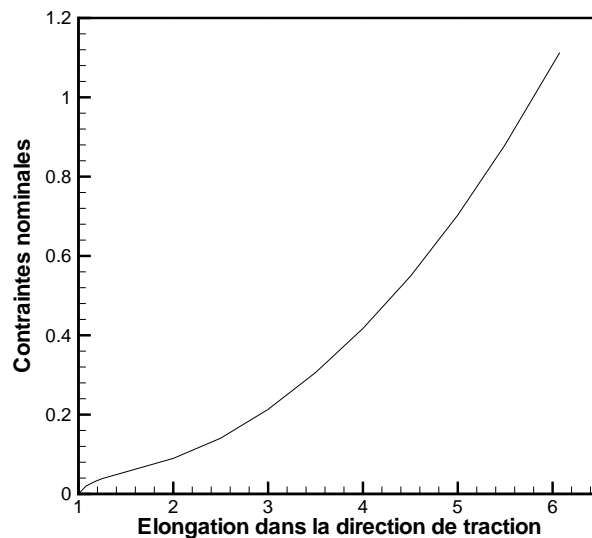


FIG. I.6 – Courbe de traction à rupture d'un élastomère

est clairement non-linéaire (courbe en forme de «S») et est composée de trois zones distinctes :

- les faibles déformations où l'énergie apportée est utilisée pour rompre les liaisons faibles

(Van der Waals...) entre les chaînes; cela se traduit par la courbure initiale de la courbe contrainte-déformation (10 – 25%).

- *les déformations moyennes* où l'énergie apportée sert au désenchevêtrement des chaînes macromoléculaires (25 – 400%).
- *les grandes déformations* où une énergie plus importante est nécessaire pour étendre les chaînes qui ont déjà été démêlées, ce qui se traduit par un raidissement du matériau. Celui-ci est d'autant plus important que le matériau cristallise sous contraintes (Magill, 1995), ce qui est le cas des caoutchoucs naturels (> 400%).

Un élastomère est capable de supporter des déformations très importantes qui peuvent atteindre 600 à 1000% selon sa composition, ses propriétés chimiques et ses conditions d'utilisation. Le matériau considéré dans notre étude peut supporter des déformations de l'ordre de 600 à 800% selon les conditions d'essais.

I.2.2.2 Viscoélasticité

En fait, la réversibilité du comportement n'est pas immédiate. En effet, les élastomères présentent un comportement viscoélastique. Ainsi, des essais de relaxation ont été réalisés à différents niveaux de contrainte pour mesurer l'influence du temps sur le comportement. La figure I.7 présente les courbes de relaxation normalisées par rapport à la contrainte maximale dans

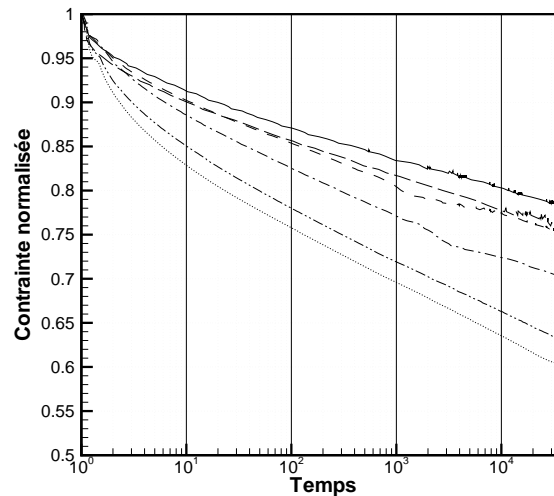


FIG. I.7 – Courbes de relaxation adimensionnalisées par rapport à la contrainte maximale, à différents niveaux de déformation : (—) 50%, (– –) 100%, (- -) 150%, (---) 200%, (···) 300% et (· · ·) 400%.

l'éprouvette. Il apparaît nettement que les courbes ne sont pas confondues, ce qui indique que le matériau présente un comportement viscoélastique non-linéaire, puisque le phénomène temporel dépend du niveau de contrainte imposé. Il n'existe pas de courbe maîtresse décrivant l'évolution du phénomène au cours du temps. En effet, plus la déformation imposée est importante, plus la dépendance au temps est importante. La modélisation d'un tel phénomène nécessite donc la

prise en compte non seulement du temps mais aussi du niveau de contrainte ou de déformation dans les fonctions de relaxation (Sullivan, 1987). Le même type de phénomène peut être observé lors d'essais de fluage non réalisés ici.

Ces phénomènes viscoélastiques sont dus au frottement des chaînes lors du processus de déformation. Plus le matériau est déformé, plus ils sont importants.

I.2.2.3 Effet Payne

Une conséquence importante du comportement viscoélastique est mise en évidence par des essais cycliques dynamiques (de la bibliographie) réalisés à faibles déformations. Le module complexe est mesuré en fonction de la déformation et de la fréquence de sollicitation. La figure I.8 met en évidence l'évolution du module dynamique avec la déformation. Ce module peut être

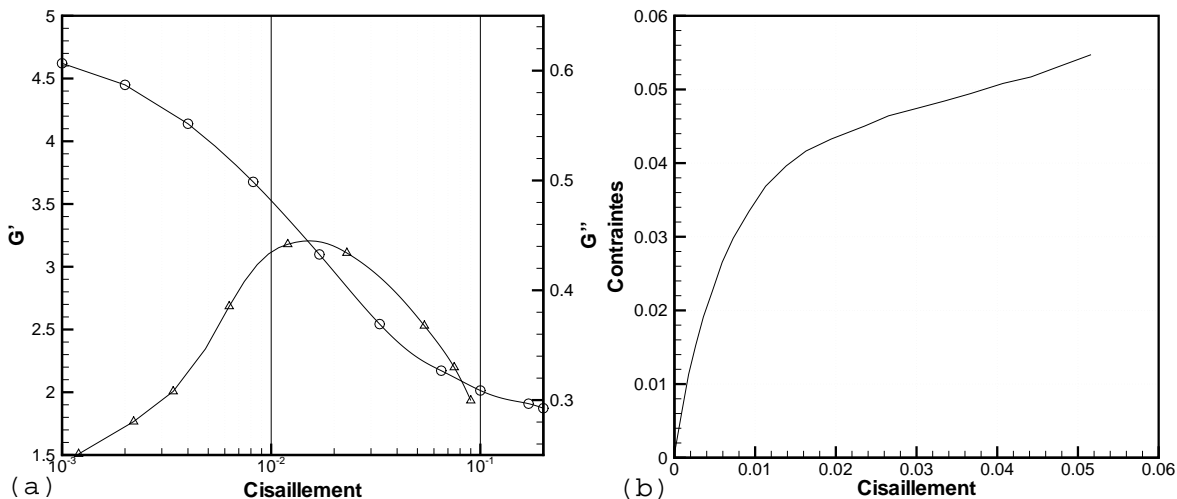


FIG. I.8 – Mise en évidence de l'effet Payne dans les élastomères d'après Chazeau et al. (2000) : (a) évolution des modules élastique ($\text{---}\circ\text{---}$) et de perte ($\text{---}\triangle\text{---}$) selon la déformation subie, (b) mise en évidence de la forte incurvation initiale de la courbe contrainte-déformation d'un élastomère due à l'effet Payne.

décomposé en deux parties, le module élastique G' et le module de perte G'' qui correspondent respectivement au module en- et hors-phase. Les essais réalisés sur une gamme de déformation de 0 à 20% montrent que G' est une fonction décroissante de la déformation tandis que G'' est une fonction qui passe par un maximum lorsque les déformations augmentent (cf. figure I.8(a)). Ce phénomène a d'abord été mis en évidence par Payne (1963) qui lui a d'ailleurs laissé son nom. Il montre que le maximum du module G'' correspond à un point d'inflexion pour le module G' . Pour Chazeau *et al.* (2000), ce phénomène est une conséquence du comportement non-linéaire des élastomères. De nombreuses modélisations ont été proposées, la plus utilisée est celle de Kraus (1984). Ce phénomène est fortement influencé par la quantité, la taille et la forme des charges (Payne et Whittaker, 1971; Vieweg *et al.*, 1995). Chazeau *et al.* (2000) montrent que l'effet Payne peut être supprimé pour des fréquences d'utilisation extrêmement faibles (de l'ordre de 10^{-5} Hz).

Ce phénomène dynamique peut être relié au comportement statique du matériau (Bokobza, 2001a,b) puisqu'il se traduit par une forte incurvation de la courbe contrainte-déformation aux faibles déformations (cf. figure I.8(b)). Dans la suite de l'étude, seules les conséquences sur le comportement statique seront considérées.

I.2.2.4 Comportement sous chargement cyclique

Des essais de traction cyclique ont été réalisés, cinq cycles sont appliqués sur une éprouvette haltère entre 0 et 300%. La courbe contrainte-déformation est présentée sur la figure I.9. Cette

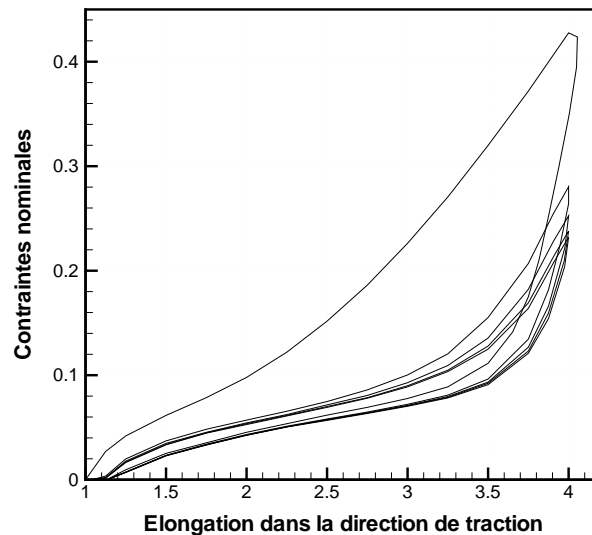


FIG. I.9 – *Traction cyclique entre 0 et 300% de déformation.*

courbe permet de mettre en évidence plusieurs phénomènes. Le premier d'entre eux est le comportement hystérétique du matériau : lors d'un cycle, les trajets de charge et de décharge sont différents. Ce phénomène apparaît quel que soit le niveau de déformation mais la forme de la boucle d'hystérésis dépend fortement du niveau de sollicitation appliqué (Lion, 1997). A un niveau de déformation donné, la forme de la boucle d'hystérésis reste inchangée après un cycle mais sa taille évolue de façon significative. La figure I.10 présente 100 cycles d'un essai de glissement simple à 50% de déformation ainsi que l'évolution de l'énergie dissipée dans la boucle d'hystérésis au cours des cycles. Il apparaît une forte décroissance entre les deux premiers cycles suivie d'une décroissance continue mais beaucoup plus faible de l'énergie. On peut noter que l'énergie dissipée dans la boucle d'hystérésis tend vers une valeur limite pour un nombre de cycles plus important. A ce jour, aucune interprétation unanime n'a été proposée pour expliquer ce phénomène. Harwood *et al.* (1965) attribuent l'hystérésis à différents phénomènes, tout d'abord à la rupture de liaisons entre charges et matrice pour les faibles déformations, puis au phénomène d'alignement des chaînes (phénomène de cristallisation) pour les niveaux de déformation plus importants. Pour Lion (1996), Kilian *et al.* (1994), le phénomène est expliqué par le glissement des chaînes entre les particules adjacentes. Bergström et Boyce (1998) imputent ce phénomène

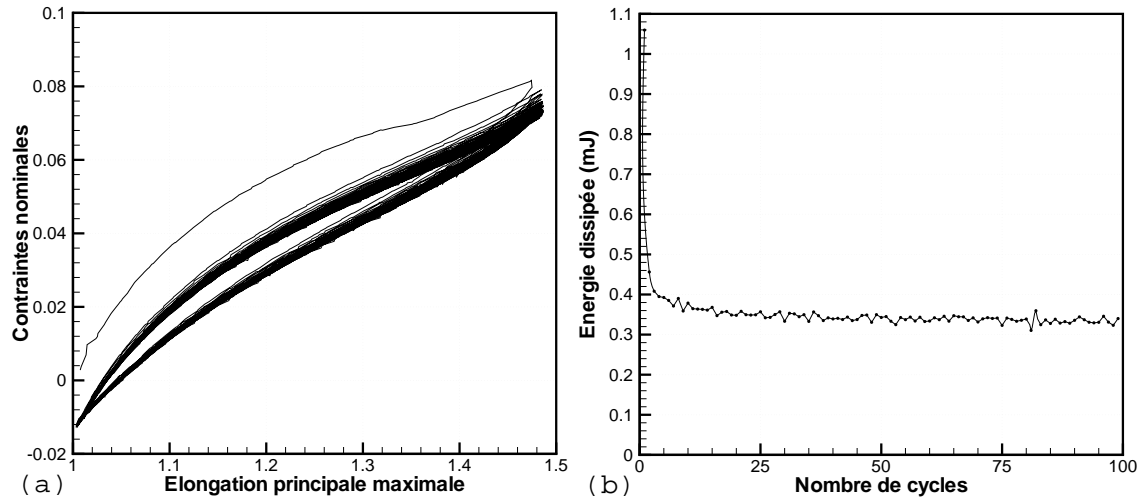


FIG. I.10 – *Glissement cyclique à 50% de déformation - (a) courbe contrainte-déformation, (b) évolution de l'énergie hystérétique au cours des cycles.*

au glissement des chaînes inactives dans l'élasticité. Pour eux, celles-ci ne transmettent pas d'effort mais ont la possibilité de changer de configuration sous charge. Kucherskii (2003) pense que l'hystérésis s'explique par la raideur des chaînes : pour de faibles déformations, il estime qu'elles sont très flexibles, ce qui limite l'hystérésis du matériau, tandis que pour des déformations plus importantes, elles deviennent rigides et présentent de fortes interactions ce qui a pour effet d'augmenter l'hystérésis.

Le second phénomène mis en évidence lors des essais est la décroissance des cycles au cours du chargement. On peut noter une très forte perte de raideur entre les deux premiers cycles de chargement. La perte de raideur entre les cycles suivants est nettement plus faible. Ceci permet de mettre en évidence un phénomène de relaxation cyclique. Néanmoins, la très forte décroissance lors des premiers cycles est également imputée à une spécificité des élastomères appelé : « effet Mullins ». A ce jour, il n'existe pas de définition unanime de ces deux phénomènes : certains auteurs considèrent que la viscoélasticité et l'effet Mullins ne sont qu'un seul et même phénomène (Govindjee et Simo, 1992; Drozdov et Dorfmann, 2001), d'autres considèrent que ces phénomènes sont différents et donc séparables. En effet, certains auteurs estiment que l'effet Mullins est responsable de la perte de raideur pendant les cinq premiers cycles (Miehe, 1995; Klüppel et Schramm, 2000) tandis que d'autres considèrent qu'il n'est responsable de la perte de raideur qu'entre les deux premières charges (De Souza Neto *et al.*, 1994; Marckmann *et al.*, 2002).

L'effet Mullins a été mis en évidence par Bouasse et Carrière (1903), il a été étudié de manière très complète par Mullins (1948, 1969) qui lui a laissé son nom. Pour lui, ce phénomène est caractérisé par quatre propriétés fondamentales :

- *La rigidité d'un matériau diminue après un premier cycle, pour des niveaux de déformation inférieurs à la déformation maximale imposée lors du premier cycle.* Ce phénomène est mis

en évidence par les essais de traction et de glissement sur la figure I.11. Le deuxième cycle

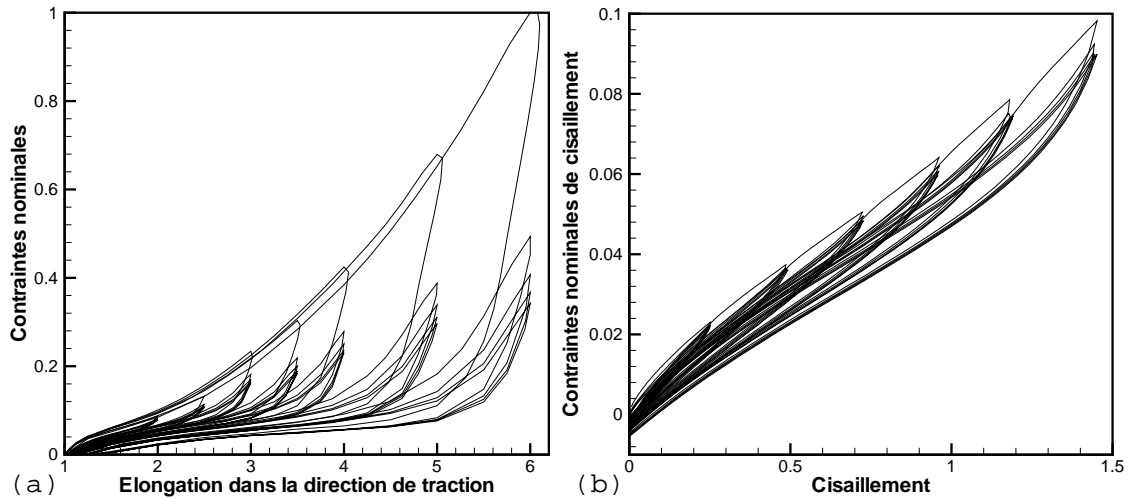


FIG. I.11 – *Essais cyclés à différents niveaux de déformation: (a) essai de traction uniaxiale cyclique réalisés à différents niveaux de déformations sur différentes éprouvettes, (b) essai de glissement cyclique réalisé sur une même éprouvette.*

se situe à un niveau de contrainte nettement inférieur au premier cycle. Ce phénomène est accentué par la déformation, puisque plus elle est importante, plus l'écart entre la première et la seconde charge l'est également.

- *Le matériau n'est pas adouci pour des déformations supérieures à la déformation maximale imposée lors du premier cycle.* Après un cycle de chargement, le matériau est accommodé à l'effet Mullins à la déformation maximale précédemment atteinte. Si l'on applique une charge supérieure, le matériau se trouve pour la première fois confronté à une telle déformation, et son comportement se retrouve sur la courbe de première charge qui correspond à un matériau vierge de toute sollicitation (cf. figure I.11(b)).
- *Le plus grand pourcentage de l'accommodation est obtenu lors du premier cycle.* Après trois ou quatre cycles, le comportement est stabilisé. L'effet Mullins est caractérisé par une perte de raideur qui se superpose au comportement viscoélastique du matériau qui génère également une perte de raideur. Après quatre cycles, on considère communément que seule la viscoélasticité est responsable de la perte de raideur.
- *Après le premier cycle, à l'approche de la déformation maximale imposée lors de celui-ci, le matériau se raidit.* Ainsi, le passage d'une courbe de seconde charge à la courbe de première charge se traduit par un raidissement caractéristique du passage d'un milieu accommodé à un milieu non accommodé (*i.e.* vierge de toute sollicitation).

Il est important de clairement distinguer l'effet Mullins et la viscoélasticité du matériau. Même si ces deux phénomènes se traduisent par une perte de raideur au cours des cycles, ils sont différents. En effet, après quelques heures de repos, le comportement viscoélastique est récupéré, le matériau retrouvant son comportement initial. En ce qui concerne l'effet Mullins,

les quelques heures de repos ne permettent pas au matériau de retrouver ses propriétés (cf. paragraphe I.2.3.2), ce phénomène est donc une accommodation du matériau causée par la rupture de liaisons chimiques et de liaisons faibles (Lee et Williams, 1985).

Un autre point notable est le fluage des éprouvettes ; celles-ci ne reviennent pas à leur configuration initiale non déformée après un cycle de chargement. Les éprouvettes de glissement sont comprimées au moment du retour à déformation nulle, tandis que les éprouvettes de traction flambent du fait de leur géométrie (cf. figure I.12). Ceci se visualise sur les courbes de la figure



FIG. I.12 – *Éprouvette haltère fluant lors du retour à zéro déplacement.*

I.11 par la présence d'un palier horizontal avant le début des cycles (autres que le premier) de chargement. Pour Bueche (1961), l'élongation résiduelle du matériau peut être supprimée par un maintien en température de quelques dizaines de minutes. Tout comme pour les autres phénomènes, les explications du phénomène de fluage ne sont pas unanimes. Le fluage est attribué aux ruptures des liaisons entre les charges par van-der Waals (Ambacher *et al.*, 1991; Kilian *et al.*, 1994), mais ce phénomène est présent dans les matériaux chargés ou non. Pour Bikard et Desoyer (2001), il est dû à la déformation plastique des longues chaînes dans la matrice et à la formation de cavités à proximité des zones cristallisées. Le phénomène de fluage provoque un retard de la réponse lors d'une seconde charge. En effet, on constate que le matériau est accommodé à l'effet Mullins pour des déformations légèrement supérieures au maximum de l'histoire (Johnson et Beatty, 1993a). Ce phénomène est illustré par la figure I.11 : l'extrapolation du comportement des secondes charges ne permet pas de revenir immédiatement sur la courbe de première charge.

Ces essais permettent de mettre en évidence deux aspects importants du comportement des élastomères : un fort phénomène d'accommodation (perte de raideur) et un phénomène dit « viscoélastique » marqué par la relaxation cyclique, l'hystérésis et l'allongement résiduel. Tous ces phénomènes sont dus à l'évolution du réseau macromoléculaire lors du temps avec la rupture et la reformation de liaisons faibles et la rupture de quelques liaisons fortes.

I.2.2.5 Compressibilité

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les élastomères sont classiquement considérés incompressibles. Des essais de compression hydrostatique ont été réalisés pour déterminer les limites de cette hypothèse. Les éprouvettes sont placées dans un compartiment de forme complémentaire puis comprimées. La figure I.13 montre l'évolution de la contrainte appliquée sur

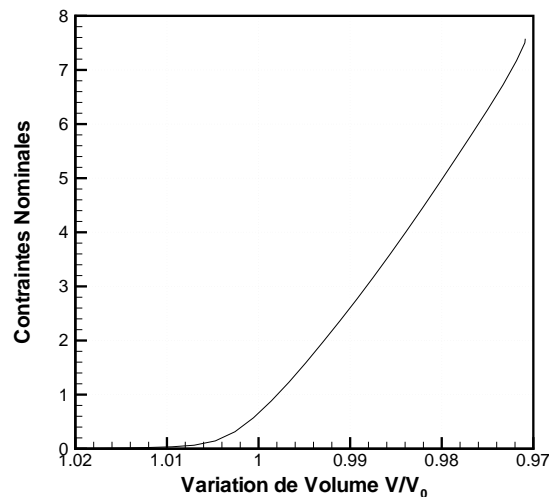


FIG. I.13 – *Essai de compression hydrostatique sur un plot de compression.*

l'éprouvette en fonction du changement de volume. Deux phases apparaissent durant l'essai :

- dans un premier temps, l'éprouvette remplit l'enceinte ce qui correspond au palier quasi-horizontale sur la figure I.13,
- dans un second temps, l'éprouvette est réellement sollicitée en compression hydrostatique.

La courbe présente une forme linéaire, ainsi le module de compressibilité est simplement identifié par la pente de la courbe et vaut 231 MPa (pour un module de cisaillement de l'ordre de 0,77 MPa). Le facteur important entre ces deux modules conduit à l'hypothèse d'incompressibilité (Besdo et Ihlemann, 2001) (néanmoins, ce rapport de l'ordre de 300 est classiquement plus important (Gent, 1994)).

I.2.2.6 Définitions des phénomènes

A ce jour, il n'existe pas de définition unanime pour tous les phénomènes mis en évidence dans le comportement mécanique des élastomères. Nous considérerons que les phénomènes d'accommodation et de relaxation sont distincts. Cela nous conduit à utiliser comme définitions :

- *Hystérésis ou viscoélasticité court terme* : fait que la charge et la décharge ne suivent pas le même chemin dans le graphe contrainte-déformation.
- *Relaxation ou viscoélasticité long terme* : influence du temps sur le comportement.
- *Effet Mullins* : perte de raideur entre les deux premières charges.

I.2.3 Influence des conditions d'essais sur le comportement mécanique

Les phénomènes caractéristiques du comportement mécanique des élastomères ayant été mis en évidence, une étude de l'influence de différents paramètres (vitesse, temps, histoire) est réalisée dans le but de connaître l'indépendance ou la dépendance des phénomènes (élasticité non-linéaire, viscoélasticité, effet Mullins) à ces grandeurs.

I.2.3.1 La vitesse de déformation

Les élastomères sont des matériaux viscoélastiques. Ils présentent donc un comportement dépendant de la vitesse de déformation. L'influence de ce paramètre sur les différentes caractéristiques du comportement est étudiée.

Élasticité non-linéaire

Des essais de traction à rupture sont réalisés sur des éprouvettes de traction à différentes vitesses allant de $0,001$ à $0,33 \text{ s}^{-1}$ ce qui correspond à une gamme de vitesses variant d'un facteur 330. Ceci représente la limite des moyens expérimentaux pour ce type d'essai. Les résultats sont présentés sur la figure I.14. On peut constater deux phénomènes : tout d'abord la courbe

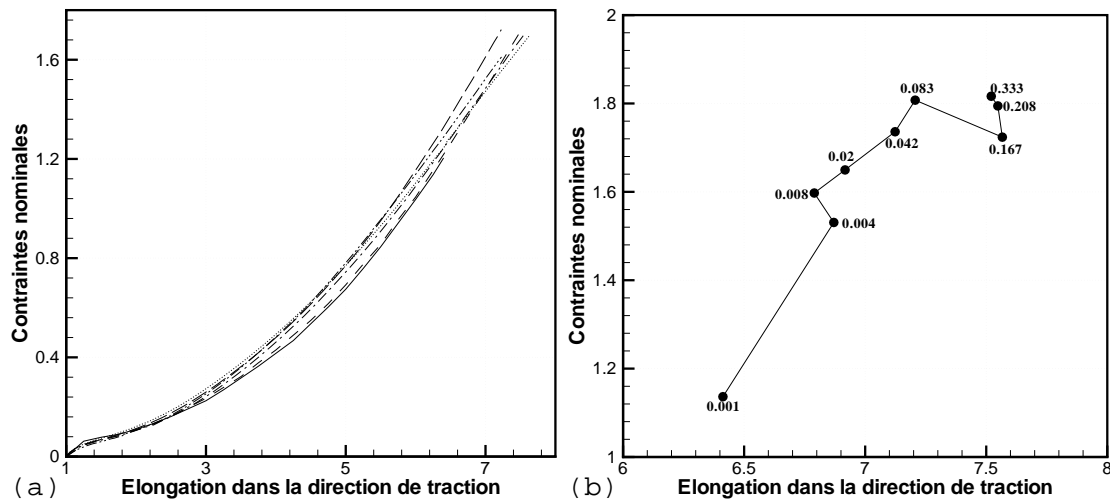


FIG. I.14 – Influence de la vitesse sur le comportement : (a) essai de traction à rupture pour des vitesses de déformations allant de $0,001$ à $0,33 \text{ s}^{-1}$, (b) influence de la vitesse de déformation sur le point à rupture d'un essai de traction simple.

contrainte-déformation dépend très peu de la vitesse de l'essai, puisque la raideur varie très peu dans la gamme de vitesses étudiée. En fait, on peut remarquer que la vitesse provoque une légère augmentation de la raideur du matériau. En revanche, le point de rupture est fortement influencé par la vitesse de sollicitation (cf. figure I.14(b)), aussi bien pour la déformation que pour la contrainte à rupture. L'enveloppe des limites à rupture a été obtenue par Halpin (1964) qui présente le même type de résultats mais sur une gamme de vitesses plus importante.

La vitesse n'est donc pas un paramètre fondamental pour la raideur des élastomères. Une même loi statique peut identifier le comportement du matériau pour une large gamme de vitesses.

Viscoélasticité et comportement cyclique

Après la mise en évidence du peu d'influence de la vitesse sur le comportement statique, on s'intéresse aux effets de la vitesse sur un essai cyclique. La figure I.15 montre cinq cycles de

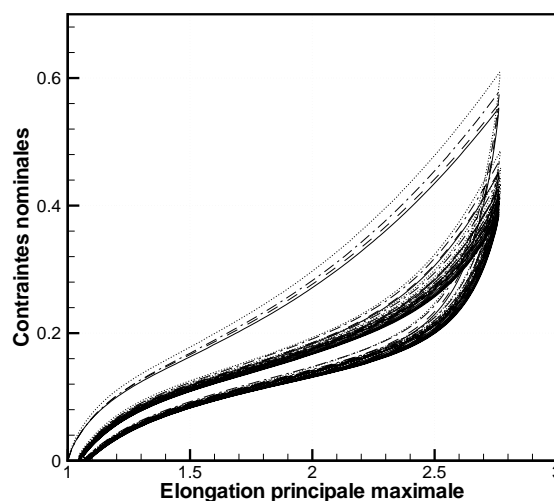


FIG. I.15 – Essai de glissement à 175% de déformation pour des vitesses de déformation variant de 0,001 à 0,33 s^{-1} .

glissement à 175% de déformation à des vitesses de déformation différentes. Il apparaît que la vitesse n'a que très peu d'influence sur le comportement. La raideur croît légèrement (comme nous l'avons montré précédemment) mais la forme des boucles d'hystérésis est inchangée. La réponse contrainte-déformation d'un essai cyclique est donc indépendante de la vitesse de sollicitation.

Finalement, l'influence de la vitesse de déformation sur l'accommodation à l'effet Mullins est mesurée en réalisant une accommodation à différentes vitesses (entre 0,001 et 0,4 s^{-1}) sur des éprouvettes de traction. Ces éprouvettes sont ensuite laissées au repos pendant trente minutes pour permettre au matériau de retrouver une configuration d'équilibre. Un nouvel essai de traction est réalisé à une même vitesse de déformation de 0,2 s^{-1} pour toutes les éprouvettes. Le premier cycle de chacun de ces essais est présenté sur la figure I.16. On remarque que toutes les courbes sont confondues, ce qui signifie que quelle que soit la vitesse à laquelle a été accommodé le matériau, l'accommodation à l'effet Mullins est la même à une déformation donnée. Ceci permet d'affirmer que « l'effet Mullins est indépendant de la vitesse de sollicitation ». Les résultats des essais sont conformes à ceux réalisés par Holt (1932) qui a montré que la vitesse n'a que très peu d'influence sur l'effet Mullins.

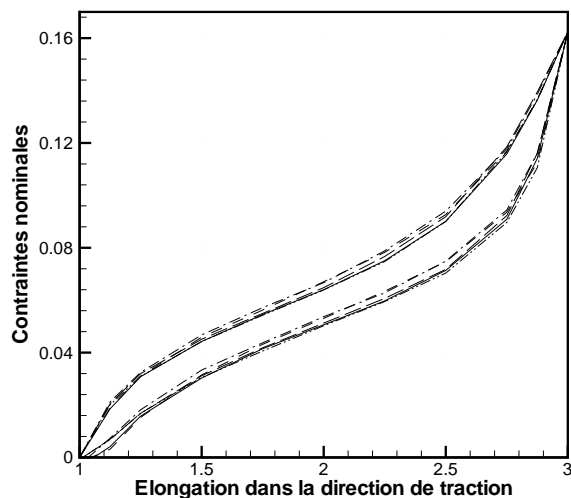


FIG. I.16 – Influence de la vitesse de déformation sur l’accommodation à l’effet Mullins. Comparaison des cycles de sollicitation d’une éprouvette de traction après accommodation à des vitesses de déformation entre $0,001$ et $0,4 \text{ s}^{-1}$ et un temps de repos de 30 min.

Compressibilité

Les essais de compression hydrostatique sont réalisés à différentes vitesses de déformation. La figure I.17 présente ces essais. Il apparaît que la réponse en contrainte n’est pas modifiée entre

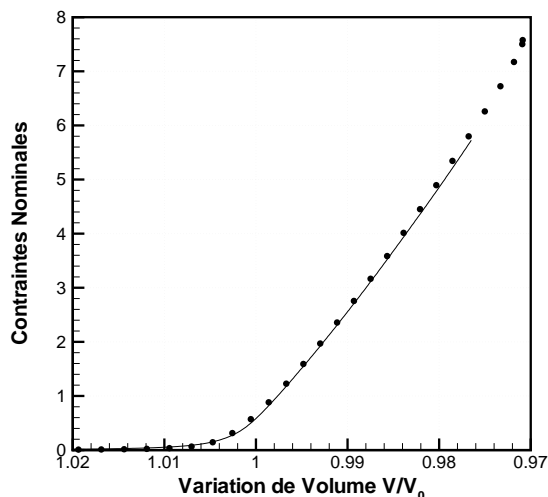


FIG. I.17 – Essai de compression hydrostatique d’un élastomère pour deux vitesses de déformation différentes (●) $0,1 \text{ s}^{-1}$ et (—) $0,001 \text{ s}^{-1}$.

deux vitesses de déformation variant d’un facteur 100. On en déduit donc que la compressibilité du matériau est totalement indépendante de la vitesse de déformation.

I.2.3.2 Le repos

Le repos, *i.e.* le fait de ne pas modifier l'état de chargement du matériau, permet aux chaînes macromoléculaires de changer de configuration. Ici l'influence du repos sur différentes caractéristiques du comportement du matériau est étudiée.

Élasticité non linéaire

Une étude de l'influence de la relaxation pendant le chargement du matériau a été réalisée. Des essais monotones ont été interrompus par des relaxations à différents instants durant les charges. La figure I.18 montre la comparaison d'une charge « classique », *i.e.* sans interrup-

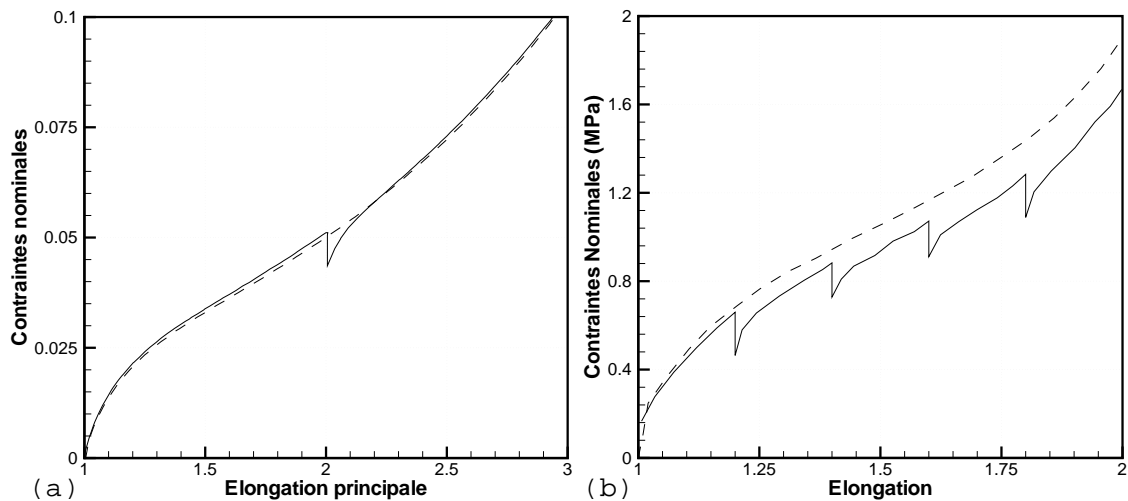


FIG. I.18 – Influence de la relaxation sur le comportement en charge d'un caoutchouc naturel: (—) charge sans interruption (—) charge interrompue par des relaxations. (a) Comportement de notre matériau. (b) Successions de relaxations rapprochées lors d'un essai de traction réalisé par Lion (1996).

tion par une pause relaxante et d'une charge interrompue par une pause relaxante, sur un essai de glissement à 250% avec un niveau de relaxation égal à 100%. On met en évidence qu'après la relaxation, le matériau revient à un état de contrainte indépendant de ce qu'il a subi précédemment. Ceci corrobore les constatations de Mullins (1948) qui a noté que la relaxation du matériau n'influence pas le comportement pour des déformations supérieures au niveau de déformation correspondant à la pause relaxante (cf. figure I.18(a)). Si des relaxations successives sont effectuées à des niveaux de déformation proches, le matériau n'a pas le temps de recouvrer son comportement originel, on observe ainsi une légère perte de raideur (cf. figure I.18(b)), phénomène mis en évidence par Lion (1996).

Comportement cyclique

L'influence du repos sur les essais cycliques est mesurée en interrompant les charges et les décharges par des pauses relaxantes. La figure I.19(a) présente trois cycles de chargement successifs à 250% interrompus par des relaxations à 48, 112 et 175%. Il apparaît que les contraintes

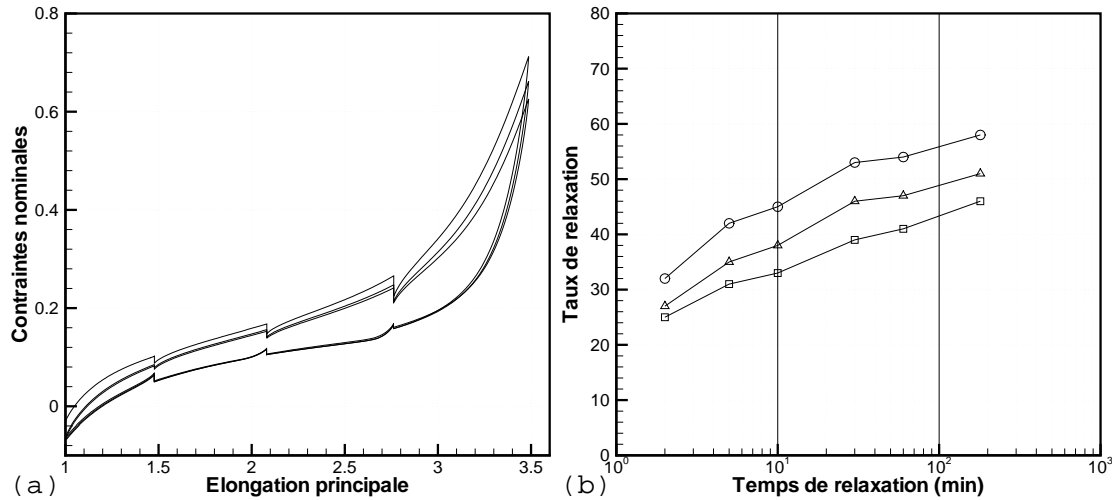


FIG. I.19 – *Limite de la boucle d’hystérésis. (a) Essai de glissement à 250% de déformation avec des temps de relaxation au cours des charges et des décharges. (b) Taux de relaxation dans les boucles d’hystérésis à différents niveaux de déformation : (—○—) 48%, (—△—) 112% et (—□—) 175%.*

tendent vers un état d'équilibre. Les essais ont été réalisés avec des temps de relaxation variant de 2 à 180 min. Un taux de relaxation de la boucle d'hystérésis a été défini par le rapport entre le niveau de contrainte relaxée et la taille de la boucle d'hystérésis (différence entre la contrainte en charge et en décharge) à une élongation donnée. La figure I.19(b) présente l'évolution de ce rapport pour différents niveaux de déformation. Il apparaît que la boucle se réduit davantage aux faibles déformations. Une extrapolation logarithmique du taux de relaxation laisse penser qu'il faudrait attendre un temps de l'ordre de 10^7 à 10^8 s pour atteindre une courbe d'équilibre hyperélastique. D'un point de vue du temps de vie du matériau, il apparaît donc que le comportement limite du matériau est une boucle d'hystérésis. Lion (1997) a déterminé un résultat identique qui lui permet de décomposer le comportement du matériau en deux parties : le comportement « brut » du matériau (boucle d'équilibre en charge et en décharge) et la sur-contrainte due aux effets viscoélastiques du matériau.

Le fait que l'on n'atteigne pas d'équilibre amène de nombreux auteurs (Kaliske et Rothert, 1998; Miehe et Keck, 2000; Cantournet, 2002; Lin et Schomburg, 2003) à modéliser la boucle d'hystérésis à l'aide d'un modèle plastique. Cette approche peut être sujet à discussion puisque le phénomène est indépendant du temps, alors que la limite de la boucle d'hystérésis varie fortement avec le temps de relaxation considéré. La réponse à cette interrogation nécessiterait la réalisation d'essais avec des temps de repos plus longs pour mettre en évidence la suite de

l'évolution du taux de relaxation (stabilisation ou croissance).

L'effet Mullins est un phénomène réversible qui se recouvre après un temps de repos. Des essais sont mis en place pour quantifier ce recouvrement. Après avoir subi une accommodation à l'effet Mullins par cinq cycles de traction, les éprouvettes sont laissées au repos durant un temps donné. Un essai de traction est alors de nouveau réalisé sur les mêmes éprouvettes. Une comparaison de la raideur de la courbe de première charge avant et après repos permet de quantifier le recouvrement de la raideur initiale en fonction du temps. Le résultat est illustré par la figure I.20(a). Il apparaît que le phénomène de recouvrement est un processus très lent

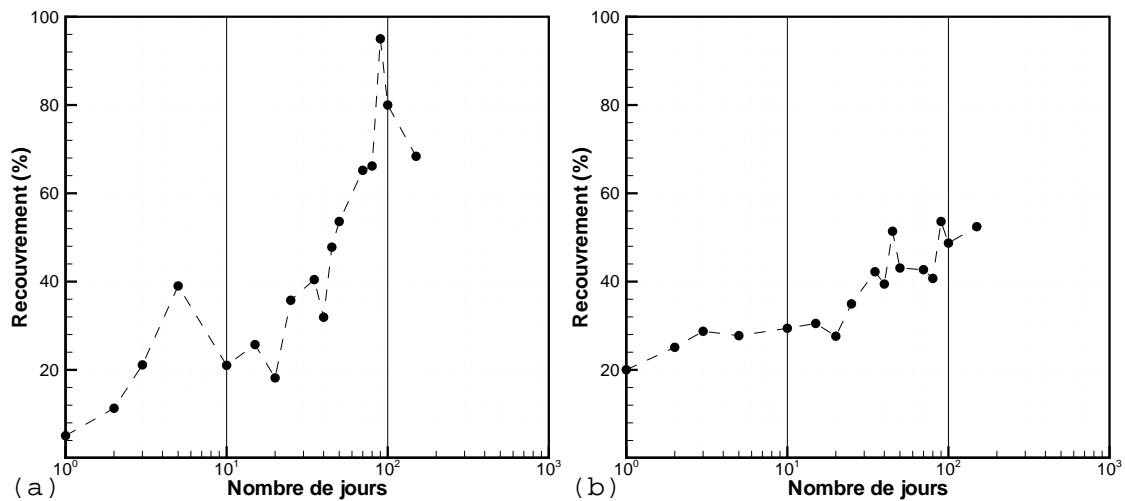


FIG. I.20 – *Recouvrement de l'effet Mullins pour une éprouvette de traction en fonction du temps de repos : (a) recouvrement de la raideur de la première charge, (b) recouvrement de l'écart entre les deux premières charges.*

et apparemment total. Mais il est accompagné d'un phénomène de vieillissement. Celui-ci a tendance à augmenter la raideur du matériau, ce qui signifie que le recouvrement tel qu'il a été mesuré surestime sa valeur réelle. Une deuxième mesure du recouvrement est alors définie par la perte de raideur entre les deux premières charges des essais avant et après repos. La figure I.20(b) présente le recouvrement de cet écart. Il apparaît que celui-ci est assez faible et très lent.

Bueche (1961) et Mullins (1969) montrent que le recouvrement est accéléré par la température. Stevenson (1993) a noté que le recouvrement ne peut être complet que pour les élastomères non chargés. En effet, la rupture des agrégats de charges est un phénomène dissipatif qui ne peut se recouvrir. Pour notre matériau (chargé), l'effet Mullins se recouvre légèrement après 100 jours de repos. Les liaisons faibles initialement rompues peuvent être reformées, mais pas les liaisons fortes et les agrégats rompus lors de la première sollicitation.

Afin de mesurer l'influence de la relaxation sur l'accommodation à l'effet Mullins, des relaxations sont réalisées soit à la fin de la première charge soit à la fin du premier cycle. La figure I.21 illustre la relaxation après une charge et après un cycle. Seules les deux premières charges sont représentées. Deux phénomènes différents sont mis en évidence. Lorsque la pause est effectuée

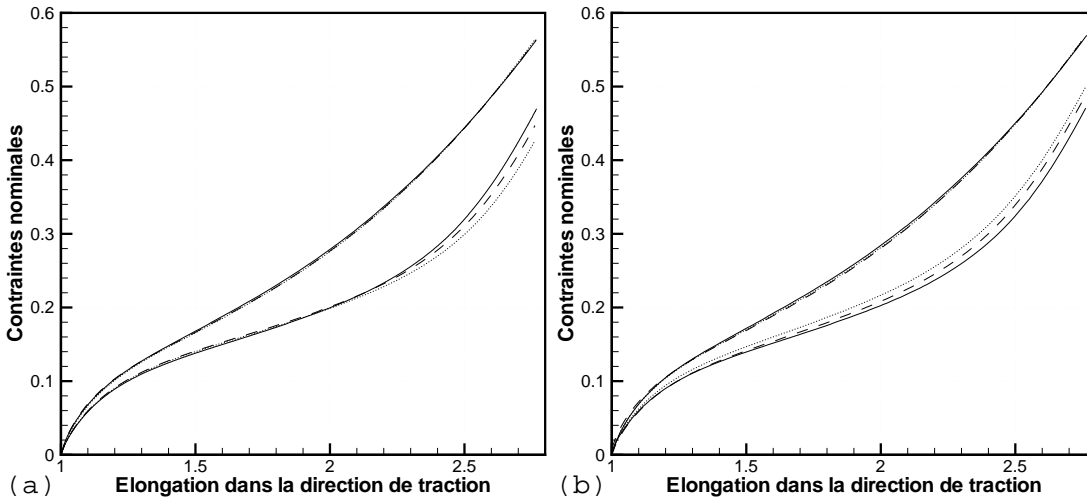


FIG. I.21 – Influence de la relaxation sur l'accommodation à l'effet Mullins : (a) relaxation après la première charge, (b) relaxation après le premier cycle pour (—) $t_{relax} = 0 \text{ min}$, (---) $t_{relax} = 10 \text{ min}$ et (\cdots) $t_{relax} = 60 \text{ min}$.

après le premier cycle, les propriétés viscoélastiques se recouvrent et l'accommodation à l'effet Mullins paraît moins importante. En fait, la partie de la perte de raideur due à la viscoélasticité est supprimée. Ceci permet de dissocier l'effet Mullins et la viscoélasticité dans la perte de raideur entre les première et seconde charges. Lorsque la relaxation a lieu après une charge on assouplit le matériau, ce qui semble générer plus d'accommodation à l'effet Mullins. En fait, les deux phénomènes se cumulent et la perte de raideur du matériau entre les deux charges est plus importante.

Les variations de raideur dues à la relaxation statique sont très faibles vis-à-vis de la perte de raideur entre les deux premiers cycles. Dans notre approche, nous ne prendrons pas en compte cette légère influence de la relaxation. Nous considérons que la perte de raideur entre les deux premières charges est totalement due à l'effet Mullins.

I.2.3.3 La température

La température a des effets très importants sur le comportement et la durée de vie des élastomères. En effet, les élastomères ne peuvent être utilisés ni pour des températures proches de la transition vitreuse, ni pour de fortes températures. Même les caoutchoucs naturels à tenue en température ne peuvent pas supporter plus de 110°C en cours d'utilisation.

A basses températures, *i.e.* proches de la transition vitreuse, Lee et Williams (1985) observent un raidissement du matériau qui, pour eux, est dû à la restriction du volume. En revanche, l'augmentation de la température a pour effet de diminuer la rigidité du matériau. Lee et Williams (1985), et Bhagawan et De (1988) ont notamment observé la chute du module de cisaillement avec la température. Bhagawan et De (1988) n'observent plus de raidissement du matériau lorsque la température augmente fortement. De plus, Lion (1997) met en évidence le fait que la

taille des boucles d'hystérésis décroît avec la température, tandis que Bhagawan et De (1988) ont observé que la boucle d'hystérésis pouvait disparaître pour un thermoplastique chargé. Des essais cycliques ont été réalisés à différentes températures, la figure I.22 présente la forme de la

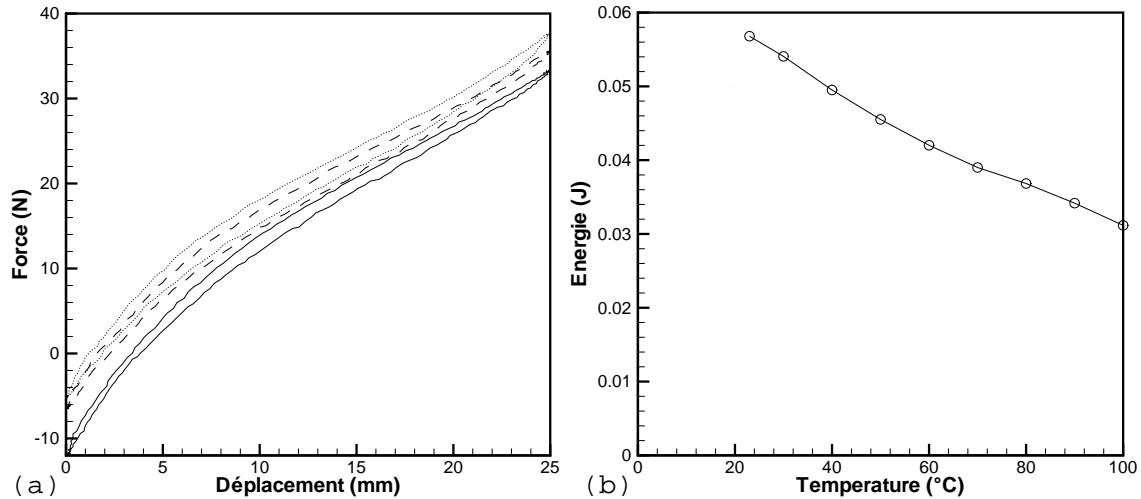


FIG. I.22 – Influence de la température sur la boucle d'hystérésis : (a) forme de la boucle d'hystérésis stabilisée pour différentes températures : (\cdots) 30°C , ($---$) 60°C et ($-$) 100°C , (b) énergie dissipée par hystérésis selon la température.

boucle d'hystérésis stabilisée (*i.e.* après 3000 cycles) pour différentes températures. Il apparaît que la raideur du cycle décroît faiblement avec la température, en revanche l'énergie dissipée par hystérésis (cf. figure I.22(b)) diminue fortement tandis que l'allongement résiduel est nettement accentué.

L'influence de la température peut également être visualisée sur les faciès de rupture (Le Cam *et al.*, 2003). La figure I.23 présente le profil de rupture de deux éprouvettes sollicitées à

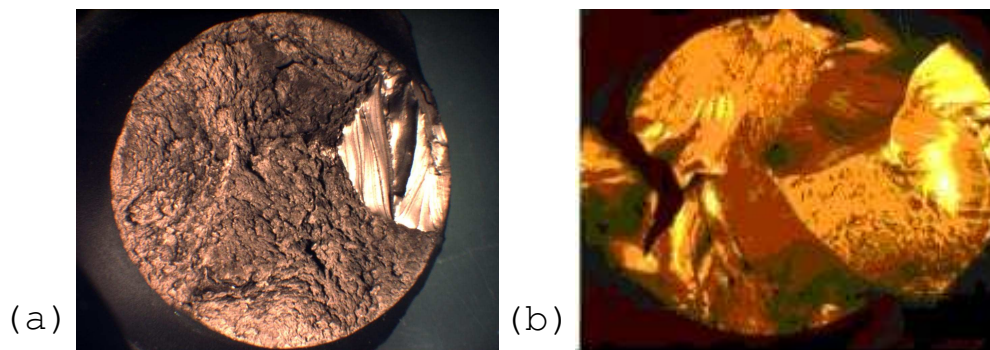


FIG. I.23 – Faciès de rupture d'une éprouvette pour deux températures différentes : (a) $T=58^\circ\text{C}$, (b) $T=83^\circ\text{C}$.

des températures de 58°C et 83°C . On constate, comme Bhagawan et De (1988), que le profil de rupture est fortement modifié par la température. Plus la température augmente, plus le matériau présente un faciès irrégulier. Le comportement des chaînes, la rupture des liaisons, le

mouvement des chaînes varient ainsi fortement avec la température.

I.2.3.4 L'histoire du chargement : anisotropie induite

L'effet Mullins a classiquement été considéré comme un phénomène isotrope. La validité de cette hypothèse est vérifiée ici. En effet, le phénomène d'accommodation provoque un réarrangement du réseau macromoléculaire. Dans le but d'analyser l'influence de la direction de sollicitation sur l'accommodation, des essais d'accommodation à l'effet Mullins sont réalisés sur des éprouvettes de glissement pur. Des lanières sont ensuite découpées dans l'éprouvette dans les deux directions principales de l'éprouvette et dans les directions diagonales (cf. figure I.24), et

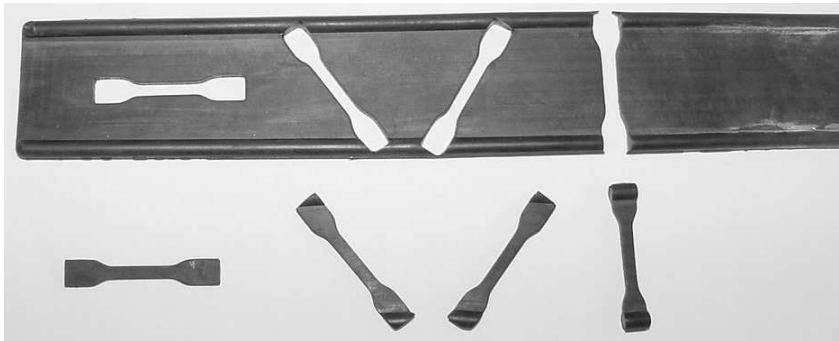


FIG. I.24 – Prélèvement des éprouvettes de traction dans une éprouvette de glissement pur pré-étirée, dans les directions orthogonale, diagonale et parallèle au sens de sollicitation

cela, dans différentes zones de l'éprouvette : au centre où la déformation est supposée homogène et sur les côtés pour estimer l'influence des conditions aux limites. Les éprouvettes de glissement pur sont étirées à une déformation de 300%. Du fait de la géométrie de l'éprouvette, le matériau a subi une déformation nulle dans la deuxième direction principale de l'espace et une compression de 75% dans la dernière.

Une étude préliminaire sur le lieu de découpe des éprouvettes lanière montre que la déformation est homogène dans toute l'éprouvette de glissement pur. La réponse du matériau est donc indépendante du lieu de prélèvement. La figure I.25 compare les courbes de traction à rupture du matériau vierge et du matériau accommodé dans les différentes directions de l'espace. Il apparaît que toutes les éprouvettes sont accommodées au même niveau de déformation, puisque le raidissement au moment du retour sur la première charge se produit systématiquement pour 300% de déformation. D'un point de vue quantitatif, la perte de raideur évolue fortement avec l'angle entre le sens de sollicitation et la direction de découpe de l'éprouvette de traction. Celle-ci est nulle lorsque l'éprouvette est découpée orthogonalement au sens de sollicitation initial (matériau vierge) et est maximale lorsque l'éprouvette est découpée dans le sens de sollicitation (ce dernier cas correspond exactement à la seconde charge d'un essai de traction). Ainsi, plus la direction de l'éprouvette est proche de l'axe de sollicitation, plus l'accommodation est importante. Ceci met clairement en évidence l'anisotropie induite par l'effet Mullins.

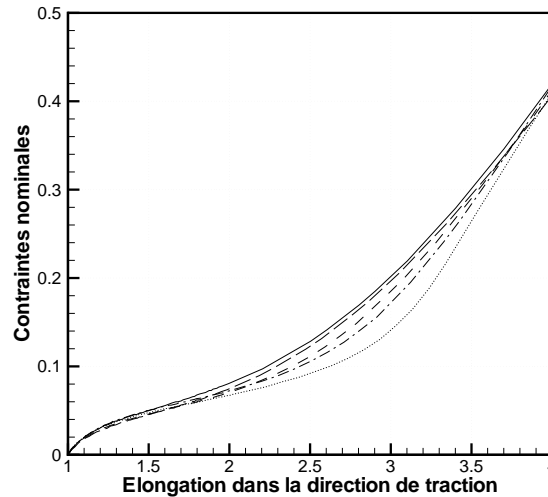


FIG. I.25 – Influence de l'histoire de chargement sur l'accommodation à l'effet Mullins. Des essais de traction sont réalisés sur des éprouvettes lanières, découpées dans une éprouvette de glissement pur pré-étirée à 300% de déformation, dans différentes directions du plan par rapport au sens de sollicitation : (—) 90° , (---) 60° , (- · -) 45° , (- · ·) 30° et (···) 0° .

Des résultats similaires sont indiqués dans la bibliographie, puisque Mullins (1947) a montré que l'accommodation dans une direction orthogonale à la direction de traction est plus faible. Pawelski (2001) a réalisé des essais de compression sur des cubes. Après rotation de 90° , il réalise un nouvel essai de compression et constate que la première compression n'a aucune incidence sur le comportement du matériau. Il a également réalisé des essais de traction biaxiale, et a remarqué que l'accommodation à l'effet Mullins n'était pas la même dans toutes les directions du plan. En effet, les accommodations sont plus importantes dans les deux directions de sollicitation que dans les directions diagonales. Les directions de sollicitation jouent donc un rôle fondamental sur l'accommodation.

La connaissance parfaite de l'anisotropie due à l'effet Mullins nécessiterait un grand nombre d'essais afin de mesurer l'influence des directions de sollicitation sur la réponse dans les autres directions de l'espace dans une large gamme de modes de déformation.

I.3 Conclusions

Les élastomères présentent un comportement très complexe avec de nombreux phénomènes tels que la capacité à supporter de grandes déformations, la viscoélasticité avec la dépendance au temps et à la vitesse et les phénomènes particuliers comme l'effet Mullins. L'influence des paramètres d'essais a été détaillée et illustrée par de nombreux essais.

Ce mémoire se consacrera à l'effet Mullins. Il a été mis en évidence que ce phénomène se produisait pendant les premiers cycles de chargement mais se localisait de façon prépondérante entre la première et la deuxième charge. Il ne dépend que de la déformation maximale et est

indépendant de la vitesse de sollicitation. Nous considérons que l'effet Mullins est simplement caractérisé par la perte de raideur du matériau entre la première et la seconde charge et est dû à la rupture de charges et de liaisons fortes et faibles (ainsi seules les liaisons faibles peuvent se recouvrir avec le temps). Néanmoins, la viscoélasticité du matériau est également responsable d'une partie de la perte de raideur entre les deux premières charges. Dans la suite, nous ne distinguerons pas la perte de raideur due à l'effet Mullins ou à la viscoélasticité. Il a été montré que le phénomène de relaxation pouvait accroître ou réduire la perte de raideur selon l'endroit où elle est appliquée. Ce phénomène quasi-négligeable en comparaison de la perte de raideur ne sera pas pris en compte dans cette approche.

Les modélisations proposées par la suite devront s'attacher à décrire l'accommodation à l'effet Mullins. On considérera que ce phénomène est isotrope et ne dépend que de l'histoire des déformations.

Chapitre II

Bibliographie sur les lois de comportement

Le Chapitre I a permis de mettre en évidence les différents aspects du comportement des élastomères, notamment l'élasticité non-linéaire, l'effet Mullins, l'hystérésis et la viscoélasticité. Il a été montré que ces phénomènes étaient indépendants; ainsi ils peuvent être modélisés séparément. Ce chapitre a pour but d'exposer les résultats de la bibliographie aptes à décrire les phénomènes que nous souhaitons prendre en compte, c'est-à-dire la capacité à subir de grandes déformations avec une très forte perte de raideur entre les deux premières charges lors d'un essai cyclique.

Dans un premier temps, le cadre d'existence de lois de comportement est introduit avec la présentation de densités d'énergie hyperélastiques qui modélisent la capacité du matériau à subir de grandes déformations de façon réversible. Deux approches sont proposées, la première prend en compte le comportement macromoléculaire du matériau (approche statistique) tandis que la seconde propose des formes mathématiques capables de simuler les essais (approche phénoménologique). Ces deux approches ont été développées parallèlement depuis 60 ans et seront présentées séparément. Dans un second temps, la modélisation de l'effet Mullins (*i.e.* la forte perte de raideur entre les deux premières charges) sera abordée selon différentes approches: la description physique, la mécanique de l'endommagement et la théorie du double réseau. Elles-aussi seront présentées séparément. Les avantages et inconvénients de chacune des méthodes seront mis en lumière et leur capacité à répondre à notre problème sera étudiée.

II.1 Élasticité non-linéaire

II.1.1 Généralités sur l'hyperélasticité

II.1.1.1 Introduction

Une loi de comportement permet de relier les contraintes à l'instant t aux déformations subies jusqu'à cet instant. Le tenseur des contraintes s'écrit comme une fonctionnelle \mathcal{S} de la transformation. Celle-ci doit vérifier trois principes: l'indifférence matérielle, la localisation spatiale et la causalité. On supposera de plus, l'hypothèse des matériaux matériellement simples (Truesdell,

1966), *i.e.* la cinématique peut être entièrement décrite par le gradient de la transformation. La loi de comportement peut ainsi s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{S}_{\tau \leq t} \{\mathbf{F}(\tau)\} \quad (\text{II.1})$$

Les élastomères sont considérés incompressibles (cf. paragraphe I.2.2.5), ainsi les déformations se font sans variation de volume. Dans ce contexte, la connaissance de l'état de déformation ne permet pas à elle seule de connaître l'état de contrainte. Celui-ci n'est connu qu'à une pression hydrostatique p près (Beatty, 1987) :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p\mathbf{I} + \mathcal{S}_{\tau \leq t} \{\mathbf{F}(\tau)\} \quad (\text{II.2})$$

Considérons à présent le principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité : la réponse du matériau doit être invariante dans tout changement de référentiel et plus particulièrement pour toute rotation du référentiel. Pour assurer que l'équation (II.2) est bien objective, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p\mathbf{I} + \mathcal{S}_{\tau \leq t} \{\mathbf{B}(t), \mathbf{C}_t(\tau)\} \quad (\text{II.3})$$

où $\mathbf{C}_t(\tau)$ représente le tenseur des dilatations au temps τ en référence à la configuration au temps t (Sidoroff, 1982).

Par la prise en compte de l'isotropie des matériaux et l'utilisation des théorèmes de représentation (Sidoroff, 1982), il est possible d'exprimer les lois de comportement en fonction des invariants des tenseurs des dilatations.

II.1.1.2 Loi de comportement hyperélastique

Nous restreignons notre étude aux lois de comportement élastiques, ainsi l'état de contrainte au temps t dépend seulement de l'état de déformation au temps t et non pas de l'histoire de la déformation ($\tau \leq t$). La correspondance entre l'état de contrainte et l'état de déformation est bijective. L'équation II.3 se réduit alors à l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p\mathbf{I} + \mathcal{S}_1 \{\mathbf{B}(t)\} \quad (\text{II.4})$$

dans le cas incompressible.

Dans le cadre général de l'élasticité, nous nous restreignons au cas particulier de l'hyperélasticité. Celui-ci est caractérisé par l'existence d'une fonction scalaire énergie de déformation W dépendant de l'état de déformation (Beatty, 1987) :

$$W = W(\mathbf{F}) \quad (\text{II.5})$$

La prise en compte du principe d'objectivité permet d'exprimer W à partir des tenseurs des dilatations (Sidoroff, 1982) :

$$W = W(\mathbf{B}) = W(\mathbf{C}) \quad (\text{II.6})$$

W étant une fonction scalaire isotrope du tenseur \mathbf{B} , elle est fonction des invariants de \mathbf{B} . Du fait de la prise en compte de l'incompressibilité, W s'exprime simplement grâce aux deux premiers invariants, ou des élongations principales dont ils sont fonction :

$$W = W(I_1, I_2) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{II.7})$$

Les relations contraintes-déformations se déduisent simplement par dérivation de l'énergie de déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \quad (\text{II.8})$$

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{II.9})$$

$$\boldsymbol{\pi} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (\text{II.10})$$

La dernière difficulté est la détermination de la forme de la densité d'énergie de déformation. Comme présentée par l'équation (II.7), celle-ci peut s'exprimer à partir soit des invariants, soit des élongations principales. Différentes approches ont été utilisées pour la détermination de la forme de W : physique ou phénoménologique. Les premières cherchent à décrire le comportement du réseau moléculaire du matériau, les secondes proposent des fonctions mathématiques décrivant son comportement global.

II.1.2 Modèles physiques

II.1.2.1 Fondements de la mécanique statistique

Les origines physiques de l'élasticité des matériaux se déduisent des principes fondamentaux de la thermodynamique. Le premier principe établit que les variations d'énergies du système (cinétique ΔK et interne ΔE) sont égales à la somme de l'énergie apportée sous forme de chaleur Q et du travail des efforts extérieurs W_{ext} :

$$\Delta E + \Delta K = W_{ext} + Q \quad (\text{II.11})$$

Le second principe appliqué à un processus réversible permet d'exprimer simplement la variation d'entropie ΔS par :

$$T\Delta S = Q \quad (\text{II.12})$$

Par utilisation du principe de l'énergie mécanique :

$$\Delta K = W_{ext} + W_{int} \quad (\text{II.13})$$

Meyer et Ferri (1935) ont montré que l'élasticité des caoutchoucs est essentiellement entropique (voir par exemple Treloar (1975)). Grâce à la mise en place d'essais de traction à différentes températures sur un caoutchouc faiblement vulcanisé, ils ont relié la force de traction à la

température par une relation linéaire. Ceci permet de négliger les variations d'énergie interne, et par combinaison des équations (II.11), (II.12) et (II.13) d'obtenir :

$$T\Delta S = W_{int} \quad (\text{II.14})$$

Cette équation montre que l'élasticité des élastomères est due aux phénomènes intra-macromoléculaires liés à la variation d'entropie du système. La variation d'entropie du système peut être calculée à partir de la somme des variations d'entropie de chaque chaîne individuelle. Ainsi, la volonté de modéliser le comportement des polymères a conduit de nombreux auteurs à étudier le comportement individuel des chaînes macromoléculaires lors de la déformation du matériau.

Une chaîne du réseau élastomérique est représentée par N segments inextensibles de longueur l (Doi, 1996). On définit le vecteur longueur de chaîne comme le vecteur liant les deux extrémités de celle-ci comme le montre la figure II.1. Sa longueur initiale est notée r_0 et est statistiquement

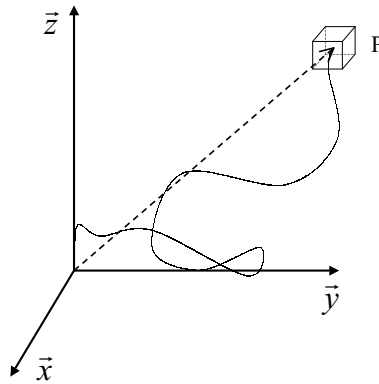


FIG. II.1 – Représentation du vecteur liant les extrémités d'une chaîne dans l'espace.

égale à $\sqrt{N}l$ (Treloar, 1975). La mécanique statistique conduit à étudier l'entropie d'une chaîne (Mayer et Mayer, 1940) :

$$s = k \ln(\Omega) \quad (\text{II.15})$$

où $k = 8,31 \text{ J/mol.K}$ est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre d'états de conformations spatiales de la chaîne. Une conformation dépend de la répartition spatiale des N segments de la chaîne. Une analyse statistique permet de déterminer la probabilité $p(x, y, z)$ qu'une chaîne de longueur donnée, fixée en un point donné ait son autre extrémité au voisinage d'un point P dans un volume élémentaire $\Delta x \Delta y \Delta z$ (cf. figure II.1). Le calcul de cette probabilité conduit à évaluer le nombre de conformations possibles permettant à la chaîne d'avoir son extrémité en P. L'entropie s'écrit alors :

$$s = k \ln [p(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z] \quad (\text{II.16})$$

Le point clé consiste ensuite à déterminer une densité de probabilité. Plusieurs propositions de la bibliographie sont présentées.

II.1.2.2 La théorie gaussienne et ses applications

Guth et Mark (1934) ont proposé la densité de probabilité gaussienne :

$$p(x, y, z) = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2(x^2 + y^2 + z^2)) \quad (\text{II.17})$$

avec $b^2 = 3/2Nl^2$. Cette probabilité dépend uniquement de la distance entre les deux extrémités de la chaîne et peut se mettre sous une forme simple :

$$p(r) = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2r^2) \quad (\text{II.18})$$

Elle permet de déterminer l'entropie d'une chaîne d'après l'équation (II.16) :

$$s_{\text{Gauss}} = k \ln \left(\Delta x \Delta y \Delta z \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \right) - kb^2r^2 \quad (\text{II.19})$$

L'énergie de déformation étant seulement entropique dans les élastomères, la densité d'énergie est déterminée simplement. Celle-ci a, dans un premier temps, été utilisée par Wall (1942a,b, 1943) pour décrire des cas de sollicitations simples. Treloar (1943a,b) a fait l'hypothèse supplémentaire que les chaînes se déformaient de façon homogène dans le matériau, *i.e.* :

- les fluctuations statistiques des points de jonction (réticulation et enchevêtrement) autour de leur position moyenne sont négligées ;
- le vecteur liant les extrémités d'une chaîne suit la déformation locale du milieu continu.

Ceci a permis d'exprimer simplement l'énergie de déformation en fonction du premier invariant du tenseur des dilatations :

$$W = \frac{1}{2}nk\theta(I_1 - 3) \quad (\text{II.20})$$

Ce modèle est appelé « modèle néo-hookéen ».

Cette théorie est améliorée par James et Guth (1947) qui considèrent que seuls les points de jonction du réseau sont fixes et que tous les autres peuvent fluctuer librement, *i.e.* les chaînes sont libres de se déplacer sans aucune restriction, les inter-pénétrations étant possibles, d'où le nom de « modèle fantôme ». L'énergie de déformation se met alors sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\phi} \right) nk\theta(I_1 - 3) \quad (\text{II.21})$$

où le paramètre ϕ est la fonctionnalité du réseau, c'est-à-dire le nombre moyen de chaînes accrochées en chaque point de jonction. La forme de cette densité d'énergie est exactement la même que le modèle néo-hookéen du point de vue du mécanicien, seule la constante matérielle change.

II.1.2.3 La théorie non-gaussienne et ses applications

La théorie gaussienne ne permettant pas de reproduire le comportement en grandes déformations, Kuhn et Gr \ddot{u} in (1942) ont proposé une densité d'énergie non gaussienne qui prend en

compte la distribution, plus probable, des angles entre les segments de chaînes mais aussi l'extension maximale. Celle-ci s'exprime sous la forme d'une fonction logarithmique :

$$\ln(p(r)) = N \left[\frac{r}{Nl} \beta + \ln \left(\frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

où $\beta = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r}{\sqrt{Nl}} \right]$ et \mathcal{L} est la fonction de Langevin définie par :

$$\mathcal{L}(\beta) = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \quad (\text{II.23})$$

Remarque : afin de simplifier les expressions et réduire les temps de calcul, différentes formes approchées ont été proposées pour calculer l'inverse de la fonction de Langevin (Cohen, 1991; Bergström, 1999; Perrin, 2000).

L'entropie d'une chaîne non-gaussienne se déduit simplement de l'équation (II.22) :

$$s_{\text{Non Gauss}} = C - Nk \left[\frac{r}{Nl} \beta + \ln \left(\frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \quad (\text{II.24})$$

Cette théorie est utilisée pour décrire le comportement global du matériau et diverge de la théorie gaussienne à partir d'un niveau de déformation correspondant à peu près au tiers de la déformation acceptable par le matériau (Kucherskii, 2003). La description du comportement du matériau nécessite d'approcher la répartition des chaînes dans un volume élémentaire.

Modèle du réseau complet

Après Treloar (1954) et Treloar et Riding (1979), Wu et van der Giessen (1993) ont proposé une distribution statistique des chaînes dans toutes les directions de l'espace (cf. figure II.2(a)). Le comportement du matériau est obtenu par intégration sur l'espace du comportement de

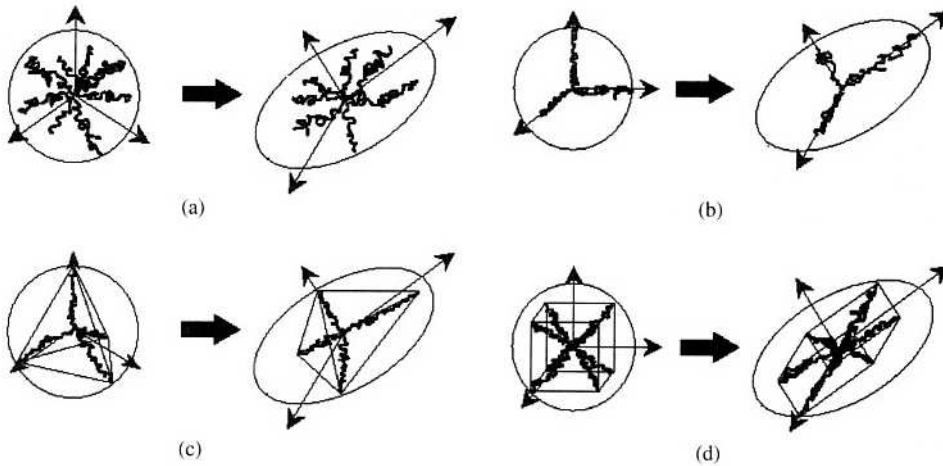


FIG. II.2 – Disposition des chaînes dans l'espace pour les différents modèles : (a) orientation aléatoire, (b) modèle trois chaînes, (c) modèle quatre chaînes, (d) modèle huit chaînes.

l'ensemble des chaînes. Les contraintes eulériennes s'écrivent :

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi} C_R \sqrt{N} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \lambda^4 m_i^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi - p \quad (\text{II.25})$$

où $m_1 = \sin \theta \cos \phi$, $m_2 = \sin \theta \sin \phi$, $m_3 = \cos \theta$ et

$$\lambda^{-2} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{\lambda_i} \quad (\text{II.26})$$

C_R et N sont les paramètres matériels. Le premier paramètre représente la pente à l'origine du modèle et est simplement relié à la densité de chaînes par unité de volume n par $C_R = nk\theta$ où k est la constante de Boltzmann et θ est la température. Le second paramètre décrit la position du raidissement et peut se déterminer par la position du changement de pente dans le graphe des contraintes de Mooney (Morris, 1964). Il représente le nombre moyen de monomères actifs par chaîne. Les simulations du modèle sont correctes mais il est important de noter que cette intégration entraîne des difficultés numériques. Ainsi certains auteurs ont proposé de répartir la densité d'énergie dans des directions privilégiées de l'espace.

Modèle trois chaînes

James et Guth (1943) ont proposé de représenter le matériau par des chaînes non-gaussiennes placées dans les trois directions principales de l'espace (cf. figure II.2(b)). Ils considèrent que la densité de chaînes est $n/3$ dans ces trois directions. Les contraintes principales s'écrivent alors simplement dans ces mêmes directions :

$$\sigma_i = -p + \frac{1}{3} C_R \sqrt{N} \lambda_i \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{II.27})$$

Les paramètres C_R et N jouent les mêmes rôles que dans le modèle du réseau complet. Les simulations du modèle sont pertinentes même s'il surestime le raidissement.

Modèle quatre chaînes

Flory (1944) puis Treloar (1946) ont proposé de répartir de façon équitable la densité de chaînes dans les directions reliant le centre d'un tétraèdre à chacun de ses sommets (cf. figure II.2(c)). Ce modèle ne présente pas une forme analytique simple puisqu'il nécessite le calcul de la position du centre du tétraèdre à chaque état de déformation. Les performances de ce modèle sont similaires à celles du modèle trois chaînes. Ne donnant pas de meilleurs résultats et ayant une forme plus complexe que le modèle trois chaînes, il n'a pas été fréquemment utilisé.

Modèle huit chaînes

L'approche non-gaussienne n'a ensuite été réutilisée que cinquante ans plus tard par Arruda et Boyce (1993) qui ont réparti la densité de chaînes de façon équiprobable dans les directions des diagonales d'un cube (cf. figure II.2(d)). Cette géométrie présente l'avantage d'avoir la même

configuration dans les trois directions de l'espace. La densité d'énergie s'écrit simplement en sommant la contribution de chacune des chaînes :

$$W = C_R N \left[\frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right] \quad (\text{II.28})$$

avec $\lambda_{chain} = \sqrt{I_1/3}$. Les paramètres C_R et N jouent les mêmes rôles que dans le modèle trois chaînes. Ce modèle permet la description de l'ensemble des essais uniaxiaux mais sous-estime les contraintes aux faibles déformations.

Bilan de la théorie non-gaussienne

Meissner (2000) a récemment émis une critique sur la forme du comportement de la théorie non-gaussienne, il juge les incurvations de la courbe contraintes-déformations trop prononcées. Il propose de faire évoluer le paramètre décrivant le nombre de monomères actifs dans une chaîne avec la déformation. Ceci permet d'obtenir une courbe présentant des incurvations moins prononcées. Récemment, Zuñiga et Beatty (2002a) ont reformulé les modèles « chaînes » à partir de la théorie non-gaussienne corrigée de Jernigan et Flory (1969) qui permet de mieux prendre en compte le comportement sur toute la gamme de déformation. Cette formulation apporte une amélioration des modèles mais en contre-partie complexifie fortement leurs expressions analytiques, ce qui les rend difficiles d'emploi pour des utilisations numériques.

Les modèles non-gaussiens présentent l'avantage de décrire correctement le comportement global du matériau avec notamment le raidissement aux grandes déformations. Ces modèles constituent une amélioration importante du modèle néo-hookéen seulement capable de décrire les faibles déformations. Néanmoins, leurs formulations analytiques posent de grandes difficultés d'implantation numérique. A ce jour, seul le modèle huit-chaînes est implanté dans les codes de calcul commerciaux et sous la forme d'un développement en séries entières de I_1 à l'ordre 5. Du fait de sa formulation isotrope et de ses propriétés, il semble être actuellement le modèle statistique le plus pertinent pour décrire le comportement, et le seul utilisable numériquement.

II.1.2.4 Modèle tube

Heinrich et Kaliske (1997) ont cherché à construire un modèle hyperélastique fondé sur des concepts macromoléculaires facilement implantables dans un code de calcul. Ils ont considéré qu'une chaîne macromoléculaire se déplaçait dans un tube virtuel constitué par les autres chaînes comme le montre la figure II.3. Une chaîne est confinée au voisinage de sa position initiale $R(s)$. La probabilité d'une conformation est donnée par une distribution aléatoire :

$$P(R(s)) = K \left\{ -\frac{3}{2b} \int_0^L ds \left(\frac{\partial R(s)}{\partial s} \right)^2 \right\} \quad (\text{II.29})$$

où b est la longueur moyenne d'un segment, L la longueur moyenne d'une chaîne et K une constante. Cela permet de déterminer la déviation de la position de la chaîne $r(s)$ par rapport

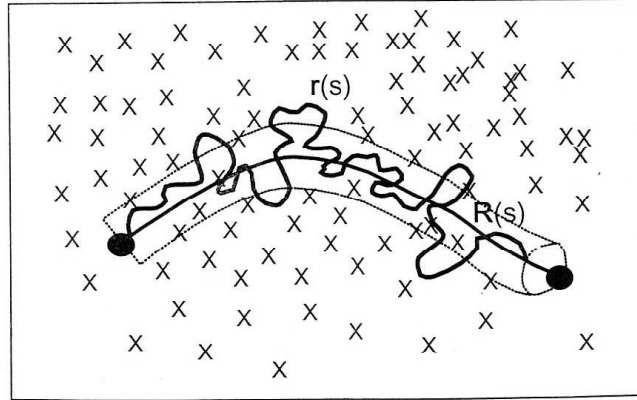


FIG. II.3 – Tube entourant une chaîne dans le matériau (Heinrich et Kaliske, 1997).

à sa position initiale dans la direction i :

$$d_i^2 = \langle (r_i(s) - \lambda_i R_i(s))^2 \rangle \quad (\text{II.30})$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente l'opérateur moyenne. On en déduit l'évolution des paramètres du tube (rayon et longueur). En utilisant l'hypothèse de déformation affine du réseau, les auteurs écrivent la densité d'énergie de déformation sous la forme suivante :

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{G_c}{2} (\lambda_i^2 - 1) + \frac{2G_e}{\beta^2} (\lambda_i^{-\beta} - 1) \quad (\text{II.31})$$

où G_c , G_e et β sont les paramètres matériels du modèle. Cette densité d'énergie est un cas particulier du modèle d'Ogden (1972) à deux termes (cf. paragraphe II.1.3.3).

II.1.2.5 Autres approches

D'autres approches physiques ont été proposées dans la bibliographie pour la modélisation du comportement macromoléculaire des élastomères, notamment les modèles de chaînes contraintes (Flory, 1977; Flory et Erman, 1982) et liquides (Di Marzio, 1962, 1994). Mais ceux-ci présentent des formes non exploitables par le mécanicien pour le calcul de structures et ne sont donc pas exposés ici. Pour une revue bibliographique complète, on pourra se reporter à Edwards et Virgils (1986), Han *et al.* (1999) et Boyce et Arruda (2000).

II.1.2.6 Conclusion sur les modèles physiques

Les approches fondées sur la physique des chaînes macromoléculaires permettent de décrire le comportement global du matériau et d'étudier leurs propriétés mécaniques (Kloczkowski, 2002). Il nous semble que compte tenu des difficultés d'utilisation des lois, le modèle le plus pertinent est le modèle huit chaînes d'Arruda et Boyce (1993). De plus, ce modèle est le seul à être implanté dans les codes de calcul.

II.1.3 Modèles phénoménologiques

Au moment même où se développaient des modèles physiques, des formulations mathématiques ont été proposées. Des revues bibliographiques ont été notamment réalisées par Charlton *et al.* (1994), Seibert et Schoche (2000). Dans ce paragraphe, les principaux modèles phénoménologiques, à notre sens, sont présentés.

II.1.3.1 La série de Rivlin et ses variantes

Mooney (1940) a construit un modèle grâce à l'exploitation d'essais uniaxiaux. Suite à des développements mathématiques (notamment fondés sur l'hypothèse d'un comportement linéaire des élastomères en glissement simple), il a proposé une fonction d'énergie de déformation sous la forme d'une fonction linéaire des deux premiers invariants :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{II.32})$$

Ce modèle est très largement utilisé dans les codes de calcul industriels, car il présente l'avantage d'être stable numériquement et permet de décrire le comportement des élastomères pour les faibles et moyennes déformations. Ce modèle est appelé « modèle de Mooney-Rivlin ». Il convient de noter que lorsque $C_2 = 0$, la formulation de Treloar (1943a,b) est retrouvée, ce qui justifie physiquement l'existence du premier terme du modèle. Récemment Fried (2002) a remis en cause une hypothèse de la théorie gaussienne des chaînes (les chaînes ne suivent pas le milieu continu) ce qui lui permet également de justifier l'existence du terme dépendant du second invariant dans le modèle de Mooney-Rivlin.

Rivlin (1948a,b) enrichit la formulation précédente en proposant l'ajout de termes supplémentaires, ce qui le conduit à développer W en série infinie des deux premiers invariants :

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (\text{II.33})$$

Ce modèle ne peut être utilisable sous cette forme. Ainsi, différents auteurs ont proposé des troncatures. Le choix des termes s'est fait par l'étude des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à chacun des invariants. Selon les matériaux étudiés, les auteurs ont conservé un nombre plus ou moins important de termes. Certains se sont attachés à décrire le comportement sur une large gamme de déformation, d'autres ont cherché à décrire simultanément les différents essais simples. Un récapitulatif des principales troncatures est proposé dans le tableau II.1. Les termes dépendant du premier invariant sont classiquement utilisés pour décrire le comportement global du matériau. Les termes dépendant du second invariant servent principalement à décrire le comportement à l'origine et les courbures du comportement. Les auteurs conservent le plus souvent plus de termes dépendant du premier que du second invariant. Le choix de retenir des termes dépendant uniquement du premier invariant ou des termes dépendant des deux invariants a été fréquemment discuté mais aucune formulation unanime n'a été retenue. Yeoh (1990) a présenté l'évolution du module de cisaillement avec le premier invariant. La figure II.4 illustre

Auteurs	Modèles
Isihara <i>et al.</i> (1951)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2 - 3)$
Biderman (1958)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)$
Tschoegl (1972)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$
James <i>et al.</i> (1975)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$
Haines et Wilson (1979)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$
Yeoh (1990)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$
Bechir <i>et al.</i> (2002)	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2$

TAB. II.1 – Modèles fondés sur une troncature de la série de Rivlin.

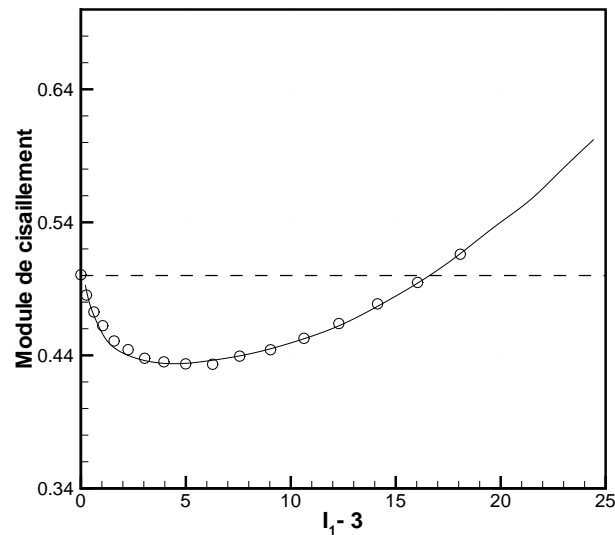


FIG. II.4 – Évolution du module de cisaillement en fonction du premier invariant de la transformation (Yeoh, 1990) : (○) points expérimentaux, (—) modèle de Yeoh, (---) modèles néo-hookéen ou de Mooney-Rivlin.

sa décroissance pour de faibles déformations, puis sa croissance aux grandes déformations. Ce phénomène ne peut être pris en compte que grâce aux trois premiers termes en I_1 , à la condition de choisir un coefficient C_{20} négatif. Cette idée a été renforcée par James et Green (1975) qui ont étudié les différents paramètres matériels et ont montré que C_{10} , C_{01} et C_{30} doivent être positifs et C_{11} et C_{20} négatifs.

Les séries de Rivlin permettent de décrire correctement le comportement. Néanmoins, il est important de limiter au maximum le nombre de paramètres. La multiplication des termes

entraîne des difficultés d'identification. De plus, l'aspect multiaxial du comportement doit être vérifié car les simulations peuvent être erronées. Dans le but de garder les meilleures simulations en limitant le nombre de termes, la formulation de Yeoh (1990) avec trois termes dépendant du premier invariant est d'après nous la formulation la plus adaptée à décrire globalement le comportement du matériau.

II.1.3.2 Autres formulations en invariants

L'étude des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à chacun des invariants a conduit certains auteurs à proposer des formulations différentes d'une série entière. Rivlin et Saunders (1951) ont proposé de décomposer l'énergie de déformation en deux fonctions ne dépendant chacune que d'un invariant. La fonction du premier invariant est choisie comme étant le modèle néo-hookéen et la seconde n'est pas explicitement définie :

$$W = C_1(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (\text{II.34})$$

la seule caractéristique imposée par les auteurs à f est sa décroissance. Gent et Thomas (1958) ont proposé une forme empirique pour cette fonction, forme fondée sur l'utilisation de la théorie statistique non-gaussienne :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \quad (\text{II.35})$$

Les résultats obtenus avec ce modèle ne sont pas plus pertinents que ceux obtenus avec le modèle néo-hookéen. Ainsi le terme dépendant du second invariant ne présente aucun apport supplémentaire. Hart-Smith (1966) a cherché à déterminer les fonctions mathématiques les plus à même de décrire les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants sur une large gamme de déformations. Il a proposé des fonctions exponentielles et logarithmiques :

$$W(I_1, I_2) = C_1 \int \exp\{(C_3(I_1 - 3)^2)\} dI_1 + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \quad (\text{II.36})$$

Le premier terme permet de décrire le comportement global du matériau avec notamment le phénomène de raidissement tandis que le second terme permet de reproduire la courbure à l'origine du matériau. Ce modèle fut le premier capable de décrire le raidissement en gardant une formulation en invariants avec un nombre de paramètres limité. Un modèle présentant les mêmes caractéristiques a été proposé par Knowles (1977) sous la forme d'une puissance :

$$W = \frac{\mu}{b} \left[\left(1 + \frac{b}{n}(I_1 - 3) \right)^n - 1 \right] \quad (\text{II.37})$$

où μ et n représentent respectivement le module de cisaillement du matériau et le paramètre de raidissement (lorsque n est un entier, ce modèle est un cas particulier des séries de Rivlin). On note que ce modèle ne s'exprime qu'avec le premier invariant, cette idée est également mise en évidence par Gregory (1979), ce qui a conduit Othman et Gregory (1990) à proposer une nouvelle

formulation adaptée au comportement à faibles déformations. Finalement, Gent (1996) a proposé une formulation permettant de simuler le raidissement grâce à une fonction logarithmique :

$$W = -\frac{E}{6} J_m \ln \left[1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right] \quad (\text{II.38})$$

L'avantage de cette formulation vient du fait que les paramètres du modèle ont des significations physiques, puisque E représente la pente à l'origine du modèle (dans le graphe contraintes-déformations) et J_m décrit la position de l'asymptote correspondant au raidissement du modèle. Boyce (1996) a montré que ce modèle était équivalent au modèle huit chaînes, donc que E et J_m pouvaient être reliés à la densité de chaînes et au nombre de monomères par chaîne (cf. annexe B). Pour Horgan et Saccomandi (2003), ce modèle est celui qui propose la meilleure forme de raidissement. Récemment, Lambert-Diani et Rey (1999) ont modélisé très précisément l'évolution des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants, en remarquant que :

- $\partial W / \partial I_1$ décroît, passe par un minimum puis croît avec le premier invariant ;
- $\partial W / \partial I_2$ croît, passe par un maximum puis décroît avec le deuxième invariant.

Ceci les a conduit à proposer une formulation sous la forme de deux séries ne dépendant respectivement que d'un seul invariant :

$$W(I_1, I_2) = \int \exp \left[\sum_{i=0}^n a_i (I_1 - 3)^i \right] dI_1 + \int \exp \left[\sum_{i=0}^n b_i (\ln(I_2))^i \right] dI_2 \quad (\text{II.39})$$

Ce modèle pose les mêmes problèmes que la série de Rivlin puisqu'il n'est pas utilisable sous sa forme globale. Ce modèle étant récent, aucune troncature autre que celle des auteurs n'a été proposée à ce jour. Leur choix permet de décrire correctement les phénomènes mais avec cinq paramètres matériels.

Les modèles de Hart-Smith (1966) et de Gent (1996) sont les modèles les plus intéressants à notre sens car ils décrivent le comportement global du matériau avec respectivement deux et trois paramètres matériels. De plus, le modèle de Gent présente l'avantage d'être équivalent au modèle huit chaînes donc d'avoir des paramètres matériels pouvant être interprétés à l'aide de considérations physiques. Les séries de Rivlin (1948a,b) présentent l'avantage d'avoir une forme simple, mais il faut absolument limiter le nombre de termes retenus. Toutes ces études ont montré la prédominance du premier invariant dans la description du comportement.

II.1.3.3 Modèles écrits en termes d'extensions principales

Certains auteurs ont privilégié une approche en extensions principales plutôt qu'en invariants. La première formulation est due à Carmichael et Holdaway (1961) qui ont proposé une densité d'énergie exprimée en fonction des élongations principales :

$$W = \sum_{i=1}^3 [\phi(\lambda_i^2) - \phi(1)] \quad (\text{II.40})$$

où la fonction ϕ est définie par :

$$\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{1}{4u} \left[A e^{\beta(\sqrt{u} - \sqrt{u^{-1}})} - B(u + u^{-1} - 2) \right] \quad (\text{II.41})$$

A , B et β sont les paramètres matériels. Ce modèle fournit de bons résultats sur les essais de Treloar, avec seulement trois paramètres matériels. Valanis et Landel (1967) ont fait l'hypothèse que pour des raisons d'isotropie la réponse du matériau devait être la même dans les trois directions principales de l'espace. Pour ce faire, ils introduisent une densité d'énergie correspondant à chaque direction de l'espace :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (\text{II.42})$$

Cette loi ne présente qu'une seule fonction de comportement à identifier, $\partial w / \partial \lambda$, alors que les modèles en invariants nécessitent l'identification de la dérivée de l'énergie par rapport à chacun des invariants. La forme proposée $w'(\lambda) = 2\mu \ln(\lambda)$ permet de décrire le comportement aux faibles déformations. Néanmoins Landel (1998) a remis en cause les fondements de cette loi et a proposé de la remplacer par une fonction plus apte à décrire le comportement sur une large gamme de déformations :

$$\lambda w'(\lambda) = 2G(\lambda - 1 + k'\lambda^n) \quad (\text{II.43})$$

D'autre part, Ogden (1972) a remis en cause l'hypothèse de restriction de puissances entières des élongations principales imposée par Rivlin (du fait de la formulation en série entière) et a proposé une densité d'énergie (respectant l'hypothèse de Valanis et Landel (1967)) sous la forme d'une série exprimée en fonction des élongations principales :

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{II.44})$$

où les doublets $(\mu_n, \alpha_n)_{n=1, N}$ sont les constantes matérielles du modèle qui doivent vérifier la condition de stabilité $\mu_n \alpha_n > 0$, lorsque seuls un ou deux termes de la série sont conservés. Une bonne simulation des modèles nécessite l'utilisation de deux ou trois termes de la série. La principale difficulté du modèle réside dans l'identification des paramètres. En effet, Yeoh (1997) a mis en évidence que les valeurs des paramètres dépendaient fortement du point de départ lors du processus d'identification.

Une approche originale a été proposée par Blatz *et al.* (1974) qui utilisent la notion de déformations généralisées (Hill, 1978). La déformation devient un paramètre puisque l'énergie se met sous la forme simple de deux termes polynômiaux :

$$W = \frac{2G}{n} I_E + B I_E^m \quad (\text{II.45})$$

où I_E est le premier invariant d'un tenseur des déformations généralisées. Le tenseur de déformation à utiliser doit être identifié sur le matériau au même titre que les paramètres G , n et m . Ce modèle très original n'a, à notre connaissance, pas été repris à ce jour.

Les modèles en extensions principales nécessitent des temps de calculs plus longs que les modèles en invariants même si des solutions alternatives sont proposées pour éviter le calcul des directions propres (Morman Jr., 1988). Ainsi, même si le modèle d'Ogden (1972) est reconnu pour décrire très correctement le comportement, sa formulation et la difficulté d'identification des paramètres nous conduisent à l'écartier.

II.1.4 Problème de la courbure à l'origine

Depuis la création de modèles capables de décrire le raidissement des élastomères, un grand nombre d'auteurs a mis en évidence l'incapacité de nombreuses densités d'énergie à décrire la courbure à l'origine du comportement. Ce phénomène est notamment observable pour les modèles physiques et les modèles exprimés seulement à l'aide du premier invariant de la transformation. En effet, Chazeau *et al.* (2000) montrent que les théories non-gaussiennes ne sont pas aptes à décrire l'effet Payne. Le succès du modèle de Mooney-Rivlin (II.32) pour de faibles déformations a conduit certains auteurs à proposer l'ajout d'un terme dépendant du second invariant de la transformation. Morris (1964) avait étudié ce problème dans le cas de la traction uniaxiale et avait ajouté le terme dépendant du second invariant du modèle de Mooney-Rivlin (II.32) aux théories non-gaussiennes, cette idée fut ensuite reprise par Meissner (2000). Meissner et Matejka (2000) ont également proposé une modification de ce terme dans le cas uniaxial, mais elle présente la difficulté de ne pas s'exprimer sous forme tensorielle tridimensionnelle. L'avantage de leur formulation est qu'à faibles déformations, elle devient équivalente au modèle de Mooney-Rivlin. Après analyse de la courbure à l'origine des courbes contrainte-déformation, Alexander (1968) a proposé une fonction du second invariant qu'il introduit dans le modèle de Hart-Smith (II.36) (seul modèle de l'époque capable de décrire le raidissement du matériau) :

$$W = C_1 \int \exp(k(I_1 - 3)^2) dI_1 + C_2 \ln \left(\frac{(I_2 - 3) + \gamma}{\gamma} \right) + C_3(I_2 - 3) \quad (\text{II.46})$$

Pucci et Saccomandi (2002) ont proposé une modification du modèle de Gent (II.38) par l'ajout d'un terme dépendant du second invariant, celui-ci a la même forme que la partie dépendant uniquement du premier invariant (II.38). Ce terme n'apporte pas de résultats plus efficaces que le terme proposé par Gent et Thomas (II.35). Yeoh (1993) a mis en évidence les insuffisances de son modèle (cf. tableau II.1) pour décrire les faibles déformations, mais remet en cause l'utilisation d'un terme dépendant du second invariant. En effet, un tel terme peut donner des résultats erronés dans le cas des sollicitations multiaxiales (Boyce et Arruda, 2000). Il a proposé l'ajout d'un terme (de nature phénoménologique) dépendant uniquement du premier invariant de la forme :

$$\frac{A}{B} \{1 - \exp[-B(I_1 - 3)]\} \quad (\text{II.47})$$

Ce terme présente l'avantage de n'intervenir qu'aux faibles déformations et de ne pas interférer dans les fortes sollicitations multiaxiales. Yeoh et Fleming (1997) ont ensuite adapté ce terme correcteur au modèle de Gent (II.38). Dans le même but, Davies *et al.* (1994) ont construit une

fonction du premier invariant pouvant à la fois décrire les faibles déformations (premier terme) et les fortes déformations :

$$W = \frac{A}{2(1 - \frac{n}{2})} (I_1 - 3 + C^2)^{1 - \frac{n}{2}} + k(I_1 - 3)^2 \quad (\text{II.48})$$

Il est important de noter que selon les sollicitations, un des invariants devient prépondérant comme le montre la figure II.5. Un terme qui paraissait n'intervenir qu'aux faibles déformations

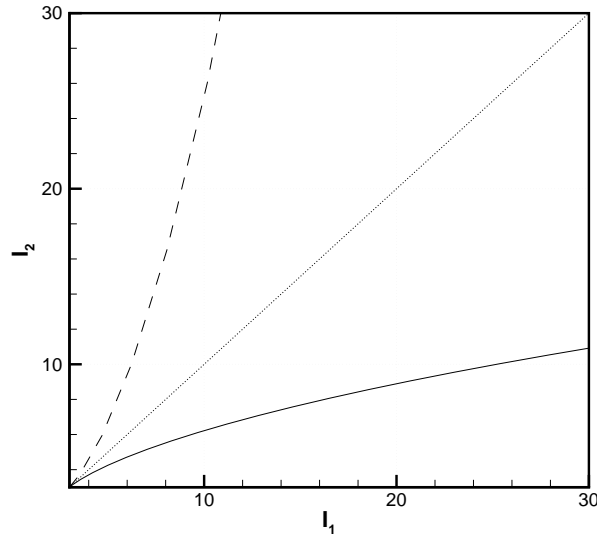


FIG. II.5 – Trajets de l'état de déformation dans le graphique des deux premiers invariants dans le cas des sollicitations simples : (—) traction uniaxiale, (---) compression ou traction équibiaxiale, (···) glissement pur.

pour un type de sollicitation peut être prépondérant pour un autre type. Il est donc nécessaire de choisir une fonction de correction pour les faibles déformations qui n'intervient pas en grandes déformations afin de ne pas modifier la forme du modèle. Le choix d'une fonction qui disparaît ou qui atteint un palier lorsque la déformation augmente est important, ce qui conduit à retenir une fonction similaire à celle proposée par Yeoh (II.47). Le choix d'une fonction de l'invariant n'est pas discriminant à ce niveau. En revanche, le terme correcteur interviendra plus selon le mode de sollicitation considéré. Ce choix ne peut donc être que guidé par l'étude des courbes expérimentales du matériau considéré. L'ajout du second terme du modèle de Mooney-Rivlin est à prendre avec précaution car il pourra modifier fortement le comportement aux grandes déformations dans les modes multiaxiaux.

II.2 Effet Mullins

Après le rappel des différentes formes de densités d'énergie proposées pour modéliser le comportement hyperélastique des élastomères, les différentes approches pour la prise en compte de l'effet Mullins sont détaillées ici.

II.2.1 Introduction

Après l'observation du phénomène par Bouasse et Carrière (1903), seules des approches qualitatives ont été proposées (on pourra se reporter aux revues bibliographiques de Harwood *et al.* (1967), et Mullins (1969)) jusque dans les années 1940. Celles-ci ne seront pas abordées dans ce paragraphe. Des approches quantitatives ont ensuite été proposées, elles peuvent être séparées en trois grands types : les théories fondées sur la physique des chaînes, les théories de double réseau et la mécanique de l'endommagement.

II.2.2 Modèles physiques

Bueche (1960, 1961) a construit un modèle uniaxial fondé sur des considérations moléculaires. Il considère que l'accommodation est due à la rupture de chaînes entre les agrégats de charges. La polymérisation conduit à la création de chaînes de différentes longueurs liant les charges (cf. figure II.6), et celles-ci se rompent au fur et à mesure que la déformation augmente. L'auteur

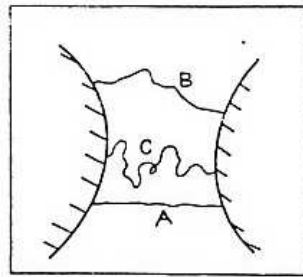


FIG. II.6 – Chaînes de longueurs différentes joignant deux charges (Bueche, 1960, 1961).

propose un modèle probabiliste prenant en compte la rupture progressive des chaînes avec la déformation maximale ; cette formulation fait intervenir les paramètres du réseau moléculaire. Dannenberg et Brennan (1966), et Dannenberg (1966) imputent l'effet Mullins, mais aussi la relaxation et l'hystérésis, au glissement des chaînes sur les agrégats de charges lors de l'extension. Ils émettent plusieurs hypothèses quant à l'évolution du réseau : ils pensent que les chaînes peuvent soit se rompre, soit se détacher, soit glisser sur la surface de l'agrégat de charge. Cette dernière hypothèse est conservée puisque c'est celle qui nécessite le moins d'énergie (les deux premières sont celles retenues par Bueche). Ceci permet au matériau d'évoluer vers une structure plus « molle ». Harwood *et al.* (1967) estiment que cette hypothèse reste plausible pour expliquer les pertes d'énergie. En revanche, Harwood *et al.* (1965) montrent que l'accommodation a lieu aussi bien dans les matériaux chargés que dans les matériaux non-chargés, ce qui remet en cause les hypothèses des modélisations précédentes. Cette constatation permet à Harwood et Payne (1966a,b) d'affirmer que l'adoucissement du matériau se produit très majoritairement dans la matrice, plutôt qu'aux jonctions charges-matrice. L'effet Mullins serait principalement causé par un réarrangement du réseau moléculaire au travers des mouvements des points de jonction (enchevêtrements, réticulation, charges). Une autre approche fondée sur les charges a

été proposée par Roland (1989b,c,a) qui estime que certaines charges sont rompues et viennent renforcer la matrice élastomérique. Comme le soulignent Drozdov et Dorfmann (2001) ainsi que Besdo et Ihlemann (2003), il n'existe pas d'avis unanime sur l'effet Mullins.

De plus, toutes ces approches ne sont pas applicables au calcul de structures puisque limitées à des modélisations uniaxiales. La première approche tridimensionnelle est proposée par Govindjee et Simo (1991, 1992) qui proposent une généralisation du modèle de Bueche (1960, 1961) par une théorie de la moyenne. Leur première hypothèse fut l'isotropie, afin d'éviter les problèmes de directions principales qui tournent au cours du temps. Ils considèrent le matériau comme un composite constitué d'une matrice en caoutchouc renforcée par des charges. L'énergie de déformation du matériau provient uniquement de la matrice, ce qui permet d'écrire simplement W en fonction du comportement de la matrice sous la forme :

$$W(\langle F \rangle_X) = (1 - v_p) W^m(\langle F \rangle_X^m) \quad (\text{II.49})$$

où v_p est la fraction volumique de charges et $\langle \cdot \rangle_X$ représente l'opérateur moyenne; $\langle F \rangle_X^m$ représente donc le gradient de la transformation moyen dans la matrice. Ils décomposent l'énergie de déformation en une partie provenant du mouvement des chaînes entre les liens W_{cc} et une autre provenant du mouvement des chaînes entre les particules W_{pp} comme l'illustre la figure II.7. Ils considèrent que seules les chaînes dont une extrémité est liée à une charge peuvent rompre lors

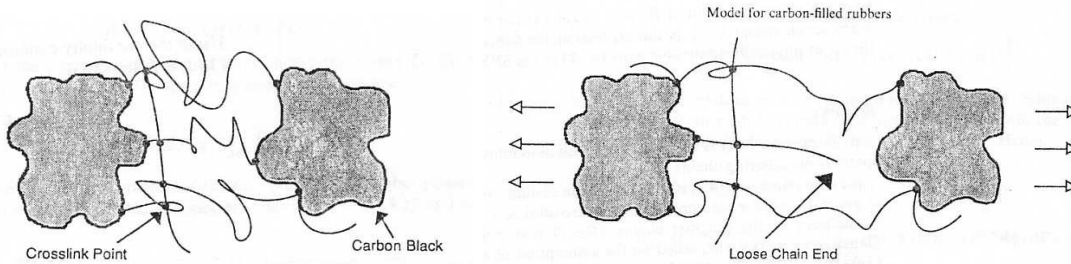


FIG. II.7 – Modèle de Govindjee et Simo (1991, 1992). Mise en évidence de l'existence de chaînes accrochées entre elles ou à des charges et évolution du réseau macromoléculaire après déformation du réseau.

de l'accommodation à l'effet Mullins. Ainsi, seule W_{pp} peut rendre compte de l'accommodation. L'énergie de déformation globale du matériau s'écrit alors :

$$W(\langle F \rangle_X) = (1 - v_p)[W_{cc}(\lambda_i^m) + W_{pp}(\lambda_i^m, \mu)] \quad (\text{II.50})$$

où λ_i^m sont les élongations principales de la matrice et μ l'élongation principale maximale de la matrice. L'énergie de déformation des chaînes liées entre elles est simplement représentée par un modèle hyperélastique, ici celui de James et Guth (1943). En revanche la densité d'énergie des chaînes liées aux particules est celle d'Ogden (1972). Cette dernière est corrigée par une fonction d'évolution du réseau $(1 - \chi(\lambda_A^m, \mu))$ qui enregistre l'accommodation à l'effet Mullins. La forme de la fonction choisie est la suivante :

$$\chi(\lambda, \mu) = c_1(\mu)[\lambda - c_2(\mu)] + c_3(\mu) \quad \text{avec} \quad c_i = k_i \exp\{(-1)^i \delta_i (\mu - 1)\} \quad (\text{II.51})$$

où k_i et δ_i sont les paramètres matériels du modèle. L'accommodation à l'effet Mullins nécessite l'introduction de six paramètres auxquels il faut ajouter les paramètres des deux densités d'énergie hyperélastiques utilisées. Ceci entraîne des difficultés d'identification des paramètres. De plus, même s'il parvient à décrire le phénomène d'accommodation, ce modèle reste fondé sur le fait que l'effet Mullins est dû à la rupture des chaînes en contact avec les charges alors que le phénomène apparaît également pour les matériaux non chargés.

II.2.3 Modèles de double réseau

Mullins et Tobin (1957) ont proposé une approche phénoménologique de l'effet Mullins en considérant qu'un matériau vulcanisé et chargé pouvait être approché par un corps à deux phases, l'une souple et l'autre rigide. Cette modélisation est fondée sur le concept du double réseau développé par Green et Tobolsky (1946). Lors de la déformation, la phase rigide se transforme en phase souple. La part de phase molle dans le matériau est paramétrée par la déformation maximale subie par le matériau. Cette modélisation a été justifiée par Bonart (1968), puis Lee et Donovan (1985) qui considèrent le caoutchouc comme un ensemble de groupes de chaînes liées entre elles par des liaisons de Van der Waals et des enchevêtrements, dont la rupture fait passer des groupes de la phase dure à la phase molle. Cette approche est restée assez longtemps inexploitée avant d'être reprise par Johnson et Beatty (1993b,a, 1995). Les auteurs considèrent la phase rigide comme des groupements de chaînes moléculaires liées par de courts segments, étranglements ou forces intramoléculaires. Pour eux, l'étirement provoque une sortie des chaînes des regroupements, ce qui implique trois conséquences phénoménologiques :

- la contrainte décroît dans la phase souple ;
- la longueur moyenne des chaînes augmente avec le chargement ;
- la phase rigide s'oriente dans la direction de traction.

Ils ont proposé un modèle uniaxial puis biaxial fondé sur ces hypothèses d'évolution du réseau. L'effet Mullins provoquant un assouplissement du matériau, la déformation atteinte à une contrainte donnée augmente. Ils ont alors introduit une fonction $\chi(\sigma)$ décrivant le facteur d'amplification de déformation à une contrainte donnée :

$$\varepsilon(\sigma(t)) = \frac{\varepsilon(s)}{\chi(\sigma_{max})} \quad (\text{II.52})$$

où $\varepsilon(s)$ est la déformation microstructurale. L'évolution de la fonction χ est établie en faisant le rapport entre les différentes courbes de charge. Les résultats obtenus suggèrent une forme du type :

$$\chi(M) = e^{b(M-\sqrt{3})} \quad (\text{II.53})$$

où M est la mesure de déformation choisie qui s'écrit grâce aux deux premiers invariants du tenseur des dilatations :

$$m = \sqrt{I_1^2 - 2I_2} \quad \text{et} \quad M = \max_{0 \leq s \leq t} m(s) \quad (\text{II.54})$$

Cette approche a ensuite été reprise par Beatty et Krishnaswamy (2000) qui décomposent la réponse en contrainte d'un matériau en trois fonctions correspondant aux dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux trois invariants. Ces fonctions doivent être décroissantes pour décrire l'effet Mullins. Ainsi les auteurs introduisent une fonction d'accommodation $\hat{\alpha}$ qui vient corriger les contraintes :

$$\mathbf{T} = (1 - \hat{\alpha}(M))\mathbf{T}_0 \quad (\text{II.55})$$

Le facteur d'amplification, introduit initialement par Johnson *et al.* (1993), est directement relié à la fonction $\hat{\alpha}$ par :

$$\chi(M) = \frac{1}{1 - \hat{\alpha}(M)} \quad (\text{II.56})$$

Les travaux de Johnson et Beatty (1993a,b) sur la fonction d'amplification sont alors exploités pour construire la fonction d'évolution, ce qui leur permet de proposer une fonction exponentielle décroissante :

$$\hat{\alpha}(M) = 1 - e^{-b(M-\sqrt{3})} \quad (\text{II.57})$$

où b est un paramètre matériel définissant la vitesse d'accommodation. Beatty et Krishnaswamy (2000) mettent également en avant que d'autres formes de fonction d'évolution sont acceptables et proposent par ailleurs l'utilisation de :

$$\hat{\alpha}(M) = \tanh[b(M - \sqrt{3})] \quad (\text{II.58})$$

Ce modèle a ensuite été adapté aux matériaux compressibles par Krishnaswamy et Beatty (2000). Zuñiga et Beatty (2002b) ont repris ces travaux et ont cherché une nouvelle forme de fonction d'évolution. Ils ont montré que la réponse accommodée du matériau dépend conjointement de la déformation actuelle et de la déformation maximale subie par le matériau. Ceci les conduit à remplacer la fonction $(1 - \hat{\alpha})$ par une fonction $F(m, M)$. Grâce à un travail sur les rapports des courbes de première et seconde charges, la fonction F est proposée sous la forme suivante :

$$F(m, M) = \exp(-b\sqrt{M - m}) \quad (\text{II.59})$$

avec $0 < F(m, M) < 1$ et $F(M, M) = 1$. Cette formulation présente l'avantage d'avoir une fonction d'évolution non constante sur les courbes de secondes charges en comparaison de la formulation de Beatty et Krishnaswamy (2000). Ceci permet de décrire une plus grande perte de raideur du matériau. La modélisation la plus intéressante reste la dernière proposition de Zuñiga et Beatty (2002b). Cette formulation permet de décrire de grandes pertes de raideur entre les deux premières charges. Néanmoins, la forme des courbes de seconde charge n'est pas respectée, puisque les simulations de ce modèle présentent une raideur initiale très faible. En effet, les courbes de seconde charge présentent un palier quasi-horizontal à l'origine. Ceci peut conduire à des simulations totalement erronées pour les problèmes à efforts imposés. Toutefois, ce modèle est un des rares à être capable de simuler correctement les fortes pertes d'énergie observées entre les deux premières charges.

II.2.4 Modèles d'endommagement

Les modèles de dommage sont utilisés pour une large gamme de matériaux tels que les métaux, les composites ou le béton (Voyiadjis *et al.*, 1998). Cette méthode a été étendue à la modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères. Bien que la plus récente, cette approche est à ce jour, la plus utilisée.

Les bases de la mécanique de l'endommagement ont été proposées par Kachanov (1958) et Rabotnov (1968), la théorie a ensuite été formalisée par Lemaitre et Chaboche (1990) pour les métaux (pour le cadre thermodynamique des variables internes on pourra se reporter à Maugin (1999)). Les approches de la bibliographie qui nous paraissent les plus significatives seront présentées ici par ordre chronologique.

II.2.4.1 Modèle de Gurtin et De Souza Neto

Gurtin et Francis (1981) ont été les premiers à proposer un modèle de dommage pour décrire l'accommodation à l'effet Mullins des propergols solides. Ils se sont restreints au cas de la traction uniaxiale. Une étude des secondes charges les a conduit à comparer leur forme en les normant par rapport à la déformation maximale ($\varepsilon_m = \max_{\tau \in [0,t]} \varepsilon(\tau)$) à laquelle elles réfèrent (cf figure II.8). Pour cela, ils ont introduit la variable ξ définie par le rapport entre la déformation courante

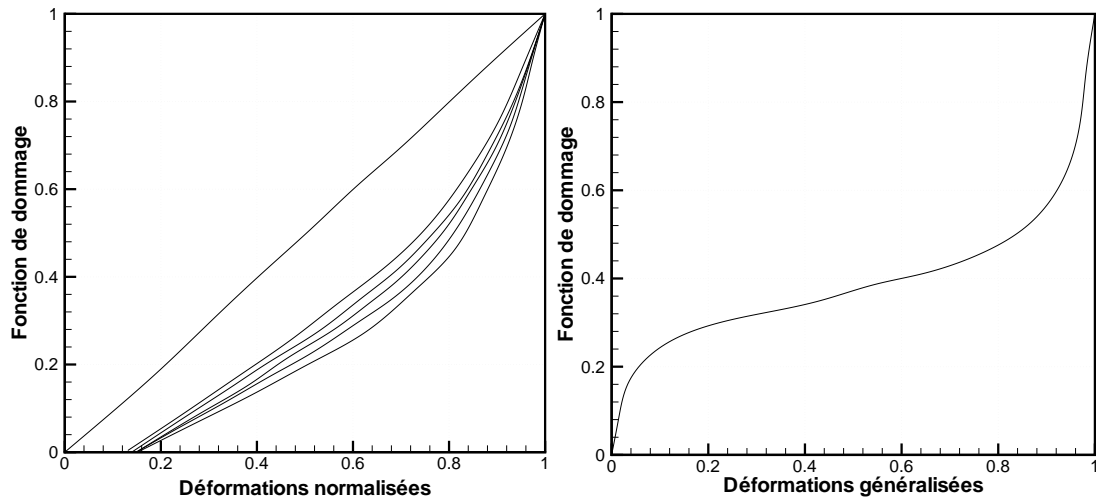


FIG. II.8 – Bases de la modélisation de De Souza Neto et al. (1994) : (a) évolution de la fonction de dommage pour la courbe de première charge et les courbes de secondes charges normées par rapport à leur déformation maximale pour des déformations variant de 2 à 10% sur un propergol solide (courbes proposées par Gurtin et Francis (1981)), (b) proposition d'une forme de courbe maîtresse de dommage par De Souza Neto et al. (1994).

et la déformation maximale $\varepsilon/\varepsilon_m$ qui normalise la déformation. Après avoir fait l'hypothèse que toutes les secondes charges avaient la même forme, ils ont modélisé les secondes charges par une seule et même fonction. Cela les a conduit à écrire la contrainte sous la forme du produit de la

contrainte du matériau vierge et d'une fonction de dommage :

$$\sigma = F(\xi)G(\varepsilon_m) \quad (\text{II.60})$$

où $F(\xi)$ est la fonction de dommage (qui reste invariante sur la première charge) et $G(\varepsilon_m)$ est la courbe de contrainte du matériau vierge. Ce modèle monodimensionnel a été généralisé aux trois dimensions de l'espace par De Souza Neto *et al.* (1994). Une nouvelle mesure de déformation a été proposée pour pouvoir prendre en compte un état de déformation tridimensionnel, en considérant l'énergie stockée dans le matériau :

$$D(t) = \max_{s \in [0, t]} \{W_0(s)\} \quad (\text{II.61})$$

La déformation normée est ainsi redéfinie par $\xi = W_0/D$. Le choix d'une courbe maîtresse de dommage a été proposé (cf. figure II.8(b)). Elle présente un fort raidissement à ses deux extrémités avec une zone « palier » au centre. Ceci permet de décrire de grandes pertes de raideur avec le phénomène de raidissement du matériau au moment du retour sur la courbe de première charge. Il est important de noter que la forme proposée s'éloigne fortement des courbes expérimentales de Gurtin et Francis (1981). En effet, ces derniers se sont limités à l'étude des faibles déformations tandis que De Souza Neto *et al.* (1994) décrivent la forme générale d'une seconde charge pour de grandes déformations. Même si cette modélisation permet d'obtenir des résultats pertinents, on peut se demander quelle est la signification physique du paramètre de dommage. En effet, celui-ci est différent du concept introduit par Lemaitre et Chaboche (1990).

II.2.4.2 Modèle de Simo

Le cadre de la mécanique de l'endommagement pour la description de l'effet Mullins dans les élastomères a été présenté par Simo (1987), qui introduit une fonction de dommage D gouvernant l'accommodation. Il considère que celle-ci dépend uniquement de la déformation maximale subie par le matériau. Les mesures de déformation courante Ξ_t et maximale Ξ_t^m sont exprimées en fonction de l'énergie de déformation :

$$\Xi_t = \sqrt{2W_0(\mathbf{E}(t))} \quad \text{et} \quad \Xi_t^m = \max_{s \in]-\infty, t]} \sqrt{2W_0(\mathbf{E}(s))} \quad (\text{II.62})$$

Ces mesures permettent de définir une grandeur scalaire décrivant un état de déformation tridimensionnel. L'évolution du dommage est gouvernée par une fonction critère φ qui mesure la variation du maximum de déformation :

$$\varphi(\mathbf{E}(t), \Xi_t^m) = \sqrt{2W_0(\mathbf{E}(t))} - \Xi_t^m \quad (\text{II.63})$$

Cette fonction permet de définir, lorsqu'elle est nulle, la surface de dommage de l'espace des déformations. La normale à l'espace des déformations s'obtient par dérivation de la fonction de dommage :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{II.64})$$

L'évolution du dommage est donc simplement gouvernée par celle de la déformation maximale. Trois cas peuvent être distingués, ceux-ci s'expriment grâce à la normale à l'espace des déformations :

$$\begin{aligned}
\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} : \dot{\mathbf{E}} < 0 & \quad \text{Décharge} & \quad (II.65) \\
\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} : \dot{\mathbf{E}} = 0 & \quad \text{Chargement neutre} \\
\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} : \dot{\mathbf{E}} > 0 & \quad \text{Charge}
\end{aligned}$$

Simo a finalement proposé une forme de fonction de dommage sous la forme d'une exponentielle décroissante :

$$W(\mathbf{E}, \Xi_t^m) = \bar{g}(\Xi_t^m) W_0(\mathbf{E}) \quad \text{avec} \quad \bar{g}(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - \exp(-\frac{x}{\alpha})}{\frac{x}{\alpha}} \quad (II.66)$$

où α et β sont les deux paramètres matériels, avec comme condition $\beta \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, +\infty[$. Ce modèle présente l'avantage de ne posséder que deux paramètres et d'être adaptable à toutes les densités d'énergie hyperélastiques. De plus, ce modèle est implantable facilement dans les codes éléments finis. Une telle approche est ainsi très pertinente pour la modélisation de l'effet Mullins.

II.2.4.3 Modèle de Miehe

Miehe (1995) a proposé un modèle d'endommagement se présentant sous la forme d'une fonction corrective $(1 - d)$. Cette approche est semblable à celle utilisée dans les métaux et composites. Il décompose la fonction de dommage en deux parties : une partie discontinue et l'autre continue. Miehe considère que la majeure partie de l'effet Mullins se déroule entre le premier et le deuxième chargement, ce qui est modélisé par l'endommagement discontinu, mais également que l'effet Mullins agit pendant les quelques cycles suivants, ce qui est modélisé par l'endommagement continu. Cette formulation a pour but de représenter exactement le phénomène d'accommodation au sens de Mullins (cf. paragraphe I.2.2.4). La fonction de dommage d s'écrit donc :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta) \quad (II.67)$$

avec les conditions suivantes :

$$d_\alpha(0) + d_\beta(0) = 0 \quad \text{et} \quad d_\alpha(\infty) + d_\beta(\infty) \in [0, 1]$$

les indices α et β représentent respectivement les mesures des endommagements discontinu et continu. Comme Simo (1987), Miehe mesure l'état de déformation à l'aide d'une grandeur scalaire exprimée à partir de l'énergie de déformation. Les fonctions α et β enregistrent respectivement l'état de déformation maximal et le trajet dans l'histoire des déformations :

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} W(s) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \int_0^t |\dot{W}(s)| ds$$

Une forme exponentielle décroissante est proposée pour décrire l'évolution des endommagements continu et discontinu :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right] \quad (\text{II.68})$$

$$d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right] \quad (\text{II.69})$$

d_α^∞ , η_α , d_β^∞ et η_β sont les quatre paramètres matériels du modèle. Un handicap de l'endommagement continu est qu'il peut saturer rapidement et ne plus décrire la perte de raideur aux fortes déformations. Miehe et Keck (2000) ont alors proposé de faire évoluer le seuil d'endommagement continu avec la déformation maximale pour palier cette difficulté. Le modèle peut ainsi décrire la perte de raideur au cours des premiers cycles de sollicitation aux différents niveaux de déformation.

Ce modèle est actuellement un des plus utilisés. Kaliske et Domscheit (2001) l'ont implanté dans un code de calcul et l'ont appliqué aux calculs de pneumatiques. Ils ont mis en évidence la non-symétrie de la matrice tangente du modèle qui peut poser des problèmes de convergence. Robisson (2000) a utilisé la partie discontinue du modèle en changeant le critère d'endommagement ; le paramètre α a été remplacé par l'élongation principale maximale du matériau. Laiarinandrasana *et al.* (2001) ont montré que le changement de paramétrage modifiait l'évolution du dommage mais ne modifiait pas la forme des courbes. Laraba-Abbes *et al.* (2003a,b) ont utilisé les deux parties du modèle de Miehe (1995), tout en modifiant l'évolution de l'endommagement continu puisqu'il ont considéré que l'endommagement dû à l'effet Mullins ne se produisait qu'au cours des charges :

$$\beta(t) = \int_0^t \langle \dot{W}(s) \rangle ds \quad (\text{II.70})$$

où $\langle . \rangle$ représente l'opérateur partie positive.

La forme de la fonction proposée par Miehe (1995) est en fait un modèle simple d'utilisation. La partie discontinue du modèle est maintenant classiquement utilisée. Ce modèle possède la qualité de n'avoir que deux paramètres matériels, mais il ne permet pas de décrire de très fortes pertes de raideur. Un handicap de ce modèle est qu'il impose aux courbes de secondes charges d'être proportionnelles, ce qui ne lui permet pas de décrire le raidissement du matériau lors du retour sur la courbe de première charge (cf. chapitre III).

II.2.4.4 Modèle de De Simone *et al.*

Une approche originale a été proposée par De Simone *et al.* (2001) qui ont simplifié le comportement des élastomères pour proposer une modélisation de l'effet Mullins. Ils ont considéré qu'il existait trois zones linéaires dans le comportement d'un caoutchouc, ces zones pouvant uniquement et entièrement être décrites par le module d'Young :

- les faibles déformations où la rigidité est forte et où le matériau n'est pas accommodable à l'effet Mullins ;

- les déformations moyennes où la rigidité du matériau est plus faible mais où le matériau est accommodable à l'effet Mullins ;
- les fortes déformations où l'accommodation à l'effet Mullins a atteint un maximum et où la rigidité devient constante.

Ainsi, le matériau est simplement décrit par la valeur de son module d'Young à un instant donné. L'évolution du module d'Young lors de l'accommodation à l'effet Mullins est décrite par une loi d'endommagement. Ce modèle extrêmement simpliste ne peut décrire de façon correcte le comportement des matériaux et n'est pas exploitable pour le calcul de structures.

II.2.4.5 Modèle d'Ogden et Roxburgh

Ogden et Roxburgh (1999b) utilisent une approche différente. Ils introduisent un paramètre d'endommagement η qui permet de repérer l'état actuel de chargement (première ou seconde charges). Ce paramètre est inactif pendant une première charge et devient actif lors de décharges ou lors de secondes charges. Ce paramètre ne fonctionne pas comme un paramètre de dommage classique puisque plus l'accommodation est importante, plus la valeur de η est faible. Ils proposent une énergie de déformation sous la forme :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta) \quad \text{avec} \quad 0 < \eta \leq 1 \quad (\text{II.71})$$

où $\phi(\eta)$ est la fonction d'endommagement (avec $\phi(1) = 0$). Lors d'une première charge, le paramètre η reste égal à 1, le comportement se résume donc à un comportement hyperélastique classique. Dans les autres cas, le comportement est modifié par la fonction d'endommagement. Le choix de la fonction ϕ est arbitraire mais celle-ci doit vérifier des conditions énergétiques d'admissibilité (Ogden et Roxburgh, 1999b). Des développements théoriques de ce modèle sont proposés par Ogden (2001). Une forme de fonction de dommage est proposée :

$$-\phi'(\eta) = m \operatorname{erf}^{-1}(r(\eta - 1)) + \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_1)^{max} \quad (\text{II.72})$$

où m et r sont des paramètres matériels et erf^{-1} représente l'inverse de la fonction erreur. L'avantage d'une telle formulation est que le modèle hyperélastique de base et la loi d'endommagement sont indépendants. Ogden et Roxburgh (1999a) ont proposé une extension du modèle pour prendre en compte la déformation résiduelle en ne restreignant plus η à être positif. Ce même modèle est élargi aux trois directions de l'espace par Holzapfel *et al.* (1999) pour prendre en compte l'anisotropie de l'accommodation à l'effet Mullins. Dorfmann et Ogden (2003) ont pris en compte le phénomène hystérétique en considérant que l'évolution du paramètre de dommage n'était pas la même dans le sens de la charge et de la décharge.

Ce modèle présente l'avantage de décrire correctement la perte de raideur mais est fondé sur une approche peu convaincante. En effet, l'utilisation de deux fonctions différentes pour décrire les courbes de charge et de décharge n'est pas, à notre avis, la meilleure façon d'obtenir un modèle de comportement global du matériau. De plus, la signification physique du paramètre de dommage est peu évidente puisqu'il évolue sur les courbes de secondes charges. Ceci aurait tendance à signifier que le matériau s'endommage en décharge et se « répare » en charge.

II.2.4.6 Bilan

La mécanique de l'endommagement reste un outil très utilisé pour la description de l'effet Mullins. Les approches proposées varient énormément : certaines introduisent une fonction de dommage $(1 - d)$ ou une fonction correctrice (Simo, 1987; De Souza Neto *et al.*, 1994), d'autres utilisent des formes plus originales (Ogden et Roxburgh, 1999a; De Simone *et al.*, 2001). Ces approches diffèrent totalement sur leur mise en œuvre. Les premières imposent à la fonction d'endommagement d'être constante sur les courbes de secondes charges, et donc au niveau d'accommodation d'être fixe et de dépendre uniquement de la déformation maximale. Les secondes utilisent une fonction qui évolue au cours des secondes charges, un coefficient d'endommagement à proprement parler n'est pas utilisé. Ces deux formulations, même si elles sont fondées sur les mêmes bases, sont très différentes. Les modèles de Miehe (1995) et Simo (1987) sont, à nos yeux, les plus pertinents et permettent une bonne simulation de la perte de raideur. Ils ont l'avantage de s'adapter à toutes les densités d'énergie hyperélastiques et d'être thermodynamiquement cohérents.

II.2.5 Conclusion

Les modèles physiques sont, à ce jour, soumis à de fortes discussions et mal adaptés à la simulation éléments finis à cause de leur complexité mathématique. Les modèles les plus utilisés restent ceux fondés sur la mécanique de l'endommagement. Les modèles proposés sont variés et présentent des formes d'évolution du dommage différentes. Les modèles les plus aptes au calcul de structures sont les modèles de Miehe (1995) et Simo (1987). Le modèle de Zuñiga et Beatty (2002b) fondé sur le concept du double réseau présente une forme similaire aux modèles de dommage. Toutes ces approches se restreignent à une modélisation isotrope de l'effet Mullins. Le paramètre déterminant de l'accommodation reste la déformation maximale subie par le matériau, et il suffit de définir une grandeur capable de décrire complètement l'état de déformation. Lorsque l'hypothèse d'isotropie n'est pas considérée, il est fondamental d'enregistrer les déformations dans toutes les directions de l'espace. Pawelski (2001), et Hokanson et Yazdani (1997) proposent l'utilisation d'un tenseur d'ordre quatre pour enregistrer l'histoire de l'accommodation à l'effet Mullins. La difficulté réside dans la détermination de toutes les composantes du tenseur à partir des données expérimentales. Une simplification de cette approche est possible en n'enregistrant les déformations que dans certaines directions de l'espace. Elata et Rubin (1994) mettent en évidence que six directions bien choisies permettent de décrire totalement un état de déformation. Dans cet esprit, Martin-Borret (1998) construit un modèle enregistrant les élongations maximales dans sept directions privilégiées de l'espace.

II.3 Choix d'un modèle

Les résultats expérimentaux exposés dans le chapitre I ont permis de mettre en évidence que les différents phénomènes caractéristiques du comportement mécanique des élastomères

pouvaient être modélisés séparément. Une revue bibliographique portant sur le comportement hyperélastique et sur l'accommodation à l'effet Mullins a été réalisée. Les différents concepts existants ont été présentés. Nous nous sommes efforcés de présenter les modèles qui nous semblent les plus pertinents pour remplir nos objectifs, *i.e.* décrire le comportement en grandes déformations et être capables de décrire des pertes de raideur importantes entre la première et les secondes charges, tout en restant dans un cadre physique correct.

En ce qui concerne le comportement hyperélastique, nous considérons que le modèle doit être capable de décrire le raidissement. Ainsi les modèles les plus intéressants sont ceux de Hart-Smith, Gent, Yeoh et Arruda-Boyce. Néanmoins, nous émettons une préférence pour les formulations en invariants plutôt qu'en directions principales (comme le modèle d'Arruda-Boyce). Notre approche de l'effet Mullins étant isotrope, ces formulations seront plus aisées d'utilisation. A propos de l'effet Mullins, nous avons proposé une revue bibliographique des trois grandes familles de modèles : physiques, théories du double-réseau et de l'endommagement. Le choix d'une méthode n'est pas le point fondamental tant que les hypothèses de la théorie restent vérifiées. Nous avons mis en évidence les modèles qui sont pour nous les plus pertinents pour chacune des théories. Il apparaît que le modèle de Zuñiga et Beatty est la meilleure formulation de la théorie de double réseau, tandis que les modèles de Simo et Miehe présentent des lois de dommage pertinentes. En revanche à ce jour, aucune formulation physique n'est apte à décrire complètement le phénomène avec des hypothèses acceptables et des performances numériques intéressantes.

Chapitre III

Modélisation du comportement

La modélisation de l'effet Mullins est un point crucial dans l'étude des structures en élastomère (Besdo et Ihlemann, 2001). La pratique courante qui consiste à considérer la structure uniformément accommodée à l'effet Mullins est incorrecte. La géométrie complexe des structures implique que le champ de déformation subi par la pièce n'est pas homogène. Ceci a pour effet d'accommoder le matériau à des niveaux de déformation différents. Ainsi après un cycle d'accommodation, le matériau est devenu inhomogène du fait de la forme de la structure. Les lois de comportement « hyperélastiques » ne peuvent rendre compte d'un tel phénomène, il est donc indispensable d'incorporer l'effet Mullins dans la loi de comportement. Ce point est d'autant plus important que les pièces étudiées présentent de forts gradients de déformation par exemple pour les problèmes traitant de la fissuration ou de la fatigue.

Le but du présent chapitre est de présenter les modélisations de l'effet Mullins que nous avons construites à partir de différentes approches. Une première modélisation fondée sur la mécanique de l'endommagement est développée. Une loi de dommage est construite dans le cadre de la thermodynamique classique à partir des résultats expérimentaux de traction uniaxiale et de glissement. La seconde est fondée sur une approche physique, par la création d'une théorie d'altération du réseau macromoléculaire. L'évolution des caractéristiques des chaînes est paramétrée par la déformation maximale subie par le matériau. Finalement, les avantages et les inconvénients des différents modèles seront discutés et comparés aux résultats de la bibliographie relatifs aux essais simples.

III.1 But de la modélisation

Ce chapitre s'attache à la modélisation de l'accommodation à l'effet Mullins des élastomères. Comme présenté dans le chapitre I, l'effet Mullins est un phénomène complexe. Une première hypothèse de travail consiste à le considérer isotrope (Simo, 1987; Miehe, 1995; Beatty et Krishnaswamy, 2000). Cette hypothèse revient à considérer qu'un volume élémentaire accommodé dans une direction de l'espace est accommodé de la même façon dans toutes les directions de l'espace. Il est important de noter que cette hypothèse est contraire aux résultats expérimentaux obtenus sur l'anisotropie dans le paragraphe I.2.3.4. De plus, notre définition de l'effet Mullins

considère que l'accommodation ne se produit qu'entre la première et la seconde charge, ce qui revient à ne modéliser que l'accommodation discontinue au sens de Miehe (1995) (voir paragraphe II.2.4.3). L'effet Mullins est ainsi simplement gouverné par la déformation maximale subie précédemment par le matériau et est indépendant des phénomènes temporels, comme le montrent les résultats expérimentaux du chapitre I.

Un traitement des courbes expérimentales est nécessaire pour se consacrer uniquement au phénomène d'accommodation. La première hypothèse consiste à négliger le phénomène hystérétique : nous considérons que le matériau a le même comportement en charge et en décharge, donc seules les courbes de charges sont conservées. Certains auteurs utilisent une courbe moyenne entre la charge et la décharge (Lion, 1996; Bergström et Boyce, 1998). Il a été montré que les phénomènes temporels et l'accommodation étaient indépendants. Ainsi nous considérons que l'allongement résiduel est un phénomène purement viscoélastique indépendant de l'effet Mullins. Après une première charge, nous supposons donc que le matériau est dans un nouvel état de repos. Finalement, les courbes de secondes charges sont prolongées pour atteindre la courbe de première charge au niveau de la déformation maximale à laquelle elles se réfèrent (dans le but de vérifier les conditions de Mullins exposées dans le paragraphe I.2.2.4). La figure III.1 illustre le traitement des données expérimentales sur un essai de traction.

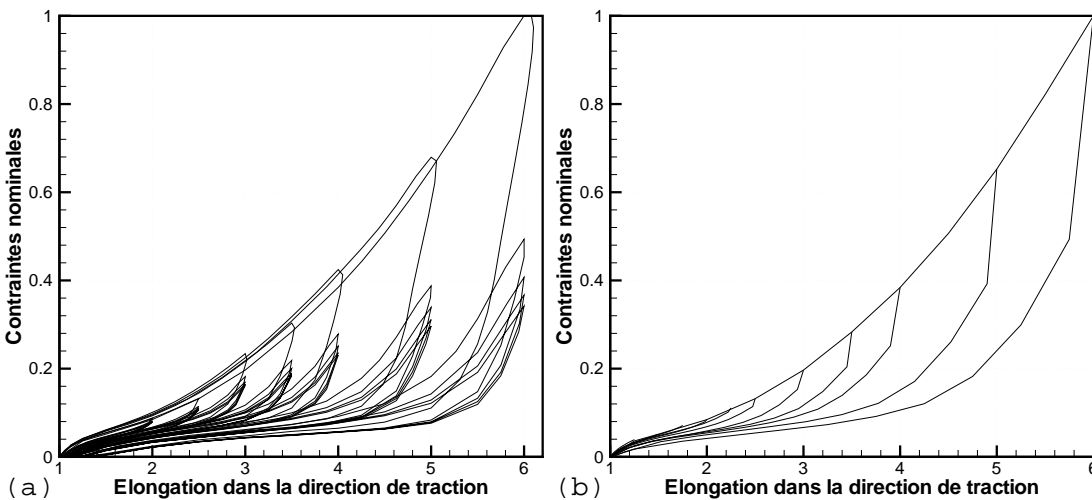


FIG. III.1 – Traitement des données expérimentales pour la prise en compte unique de la perte de raideur entre la première et les secondes charges : (a) données expérimentales d'un essai de traction cyclique, (b) courbes expérimentales traitées.

Ce traitement des données expérimentales revient à considérer que la réponse d'un matériau à une sollicitation du type de la figure III.2(a) est du type de celle présentée sur la figure III.2(b). Le comportement peut alors être décrit de la manière exposée ci-après. A l'origine, le matériau est vierge (non accommodé), il est dans un premier temps étiré jusqu'à l'élongation λ_I , la contrainte suit le chemin I , la décharge suit la courbe I' . Lors de la seconde charge de 0 à $\lambda_{II} > \lambda_I$, la contrainte suit la courbe I' jusqu'à λ_I puis II jusqu'à λ_{II} (le matériau a retrouvé la

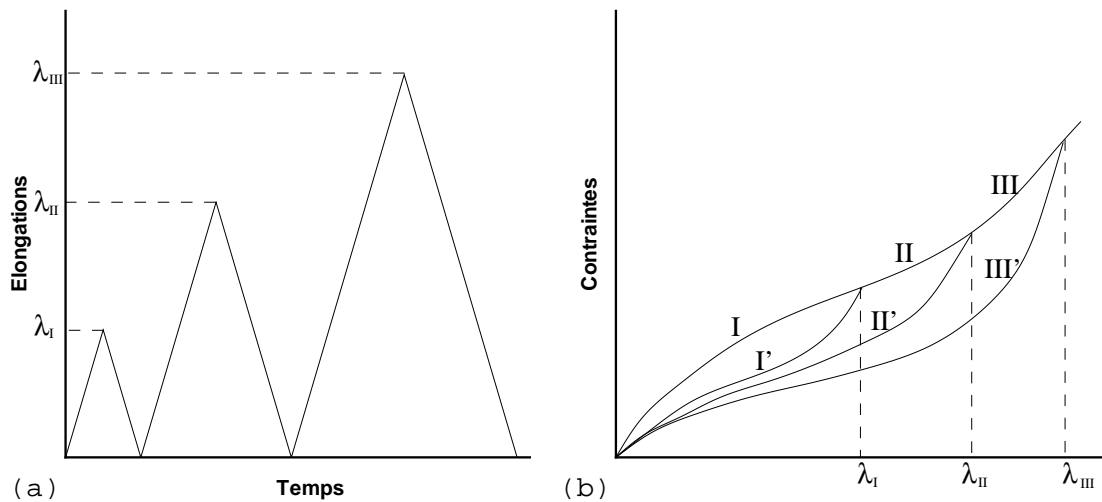


FIG. III.2 – Comportement hyperélastique accommodable parfait d'un élastomère : (a) cycles de déplacement imposés au matériau, (b) réponse contraintes-déformations à la sollicitation.

courbe de première charge). La seconde décharge suit le trajet II' qui est différent de la première décharge I' . De même, un nouveau cycle de chargement conduit à suivre les courbes II' et III en charge et III' en décharge.

Deux approches classiques ont été menées en parallèle dans le but de modéliser cet aspect du comportement. Ceci a permis la construction de plusieurs modèles qui porteront les noms de Modèle M suivi d'un numéro.

III.2 Utilisation de la mécanique de l'endommagement - Modèle M1

Comme précisé dans le chapitre II, la mécanique de l'endommagement a été couramment utilisée pour la modélisation de l'effet Mullins. Avant de présenter cette théorie, il est important de faire quelques remarques. A l'origine, la mécanique de l'endommagement est fondée sur la définition de la contrainte effective (Lemaitre et Chaboche, 1990), et considère qu'après chargement, la surface du matériau sur laquelle s'exercent les efforts se réduit du fait de la croissance de micro-vides. Trois remarques se déduisent de ces considérations :

- (1) l'endommagement ne peut pas décroître durant la vie du matériau puisque les micro-défauts et micro-vides ne peuvent disparaître ;
- (2) l'évolution du dommage dépend des conditions de chargement : en charge, les micro-vides et les micro-défauts sont activés tandis qu'en compression, seuls les micro-défauts sont activés, les micro-vides étant quant à eux fermés (Aubard *et al.*, 2002) ;
- (3) l'endommagement évolue jusqu'à la création d'une fissure suffisamment grande ; à ce moment la surface résistante atteint un seuil critique qui conduit à la rupture.

En revanche, ces remarques sont fausses dans le cas de l'effet Mullins. En effet, ce phénomène est une accommodation et non un endommagement. Il est dû au réarrangement du réseau polymérique au cours de la déformation où des liens, entre les chaînes, ou entre les chaînes et les charges, sont rompus. Ainsi les trois remarques précédentes doivent être corrigées :

- (1) l'accommodation peut être en partie recouverte avec le temps ou en chauffant le matériau, ainsi l'endommagement peut décroître durant la vie du matériau ;
- (2) comme l'effet Mullins est une conséquence du réarrangement du réseau moléculaire, l'évolution du dommage ne doit pas différer selon le mode de sollicitation (Bergström et Boyce, 1998) ;
- (3) il est reconnu que la rupture dans les pièces élastomériques n'est pas directement reliée à l'accommodation. Les grandes valeurs du coefficient d'endommagement (proches de 1) ne peuvent pas être considérées comme un critère de rupture.

En conclusion de ces trois remarques, on peut affirmer que la mécanique de l'endommagement ne peut être utilisée pour la modélisation de l'effet Mullins qu'avec quelques restrictions et précautions (Chagnon *et al.*, 2003b).

III.2.1 Bases thermodynamiques

On considère un matériau homogène isotrope incompressible. Ce matériau est supposé hyperélastique soumis à un endommagement isotrope pour la description de l'effet Mullins. Ainsi, il existe une densité d'énergie de déformation qui dépend du gradient de la transformation \mathbf{F} et de la variable scalaire d'endommagement d qui caractérise l'accommodation. En considérant le principe d'objectivité, l'isotropie et l'incompressibilité (Sidoroff, 1982; Lemaitre et Chaboche, 1990), l'énergie de déformation peut s'écrire :

$$W = W(I_1, I_2, d) \quad (\text{III.1})$$

En considérant que la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}_0$, *i.e.* la contrainte qui agit sur le matériau non endommagé, est simplement reliée à la contrainte de Cauchy appliquée $\boldsymbol{\sigma}$ (Lemaitre et Chaboche, 1990), on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \quad (\text{III.2})$$

Ainsi, l'énergie de déformation (III.1) peut être décrite comme le produit de la réduction de surface $(1-d)$ et de l'énergie de déformation du matériau vierge W_0 :

$$W = (1-d) W_0(I_1, I_2) \quad (\text{III.3})$$

Dans le but d'établir les équations d'état tout en vérifiant le second principe de la thermodynamique, l'inégalité de Clausius-Duhem doit être vérifiée, elle s'écrit simplement :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \dot{W} \geq 0 \quad \forall \mathbf{D} / \text{tr } \mathbf{D} = 0 \quad (\text{III.4})$$

où \mathcal{D} représente les dissipations internes et \mathbf{D} est le tenseur des taux de déformation ; $\text{tr } \mathbf{D} = 0$ représente la condition d'incompressibilité. Après quelques manipulations les équations III.3 et III.4 deviennent :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1 - d) 2\mathbf{B} \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{B}} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = W_0 \dot{d} \geq 0 \quad (\text{III.5})$$

où $p\mathbf{I}$ est un tenseur sphérique arbitraire qui provient de la condition d'incompressibilité. La partie gauche de l'équation (III.5) permet de relier la contrainte courante endommagée au paramètre de dommage, à l'énergie de déformation et à l'état de déformation actuel. En utilisant le fait que W_0 dépend exclusivement des deux premiers invariants de \mathbf{B} , on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1 - d) \left[2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \right] \quad (\text{III.6})$$

où les fonctions $\partial W_0 / \partial I_1$ et $\partial W_0 / \partial I_2$ sont les paramètres matériels. La partie droite de l'équation (III.5) montre que le processus de dommage est dissipatif et que la force thermodynamique associée à la variable de dommage d est $Y = -W_0$.

Dans le but de complètement définir l'équation hyperélastique endommagée, l'équation d'évolution de la variable de dommage d doit à présent être définie. Comme précisé dans le chapitre II, l'accommodation à l'effet Mullins est supposée ne dépendre que de la déformation maximale subie par le matériau dans son histoire (Mullins, 1969). Ainsi, une mesure de l'état de déformation et son maximum doivent être définis. La mesure de déformation dépend conjointement de l'état de déformation et du temps, et est notée α . Elle sera explicitée plus tard. Son maximum est :

$$\bar{\alpha}(t) = \max_{\tau \in]-\infty, t]} \alpha(\tau) \quad (\text{III.7})$$

Dans la suite, les notations proposées par Simo (1987) seront utilisées (cf. paragraphe II.2.4.2). Ainsi, en considérant les définitions précédentes, le critère de dommage se réduit à une sous-région de l'espace des déformations donnée par (Simo, 1987; Miehe, 1995) :

$$\phi(\alpha(t), \bar{\alpha}(t)) = \alpha(t) - \bar{\alpha}(t) \leq 0 \quad (\text{III.8})$$

La surface de dommage et sa normale \mathbf{n} peuvent alors être définies de la façon suivante :

$$\phi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{B}} \quad (\text{III.9})$$

Ainsi, pour un état de déformation particulier, quatre situations physiques (avec leurs cadres mathématiques) sont possibles :

- (i) l'état de déformation courant n'est pas maximum, *i.e.* la mesure de déformation $\alpha(t)$ n'est pas égale à $\bar{\alpha}(t)$, alors l'inégalité $\phi < 0$ est satisfaite ;
- (ii) l'état de déformation courant est maximum, *i.e.* $\phi = 0$ et on se situe dans une direction de décharge par rapport à l'état de déformation, *i.e.* $\mathbf{n} : \dot{\mathbf{B}} < 0$;
- (iii) l'état de déformation courant est maximum, *i.e.* $\phi = 0$ et on se situe dans une direction de charge neutre, *i.e.* $\mathbf{n} : \dot{\mathbf{B}} = 0$;

(iv) l'état de déformation courant est maximum, *i.e.* $\phi = 0$ et on se situe dans une direction de charge par rapport à l'état de déformation, *i.e.* $\mathbf{n} : \dot{\mathbf{B}} > 0$.

Les trois premiers cas (i), (ii) et (iii) correspondent à des situations physiques pour lesquelles l'endommagement n'évolue pas, tandis que (iv) représente un cas dans lequel l'état de déformation maximum de l'histoire du matériau et donc, le paramètre de dommage, évoluent. Une équation d'évolution irréversible du dommage peut être proposée sous la forme suivante :

$$\dot{d} = \begin{cases} h(\alpha, d) \dot{\alpha} & \text{si } \phi = 0 \text{ et } \mathbf{n} : \dot{\mathbf{B}} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

où la fonction h caractérise l'évolution de l'endommagement. Dans le cas de l'accommodation, h peut être supposée indépendante du paramètre de dommage d (Miehe, 1995), ainsi le premier cas de l'équation (III.10) se réduit à :

$$\dot{d} = h(\alpha) \dot{\alpha} \quad \text{avec } \alpha = \bar{\alpha} \quad \text{et } \dot{\alpha} > 0 \quad (\text{III.11})$$

Comme la fonction de dommage est non-décroissante et irréversible, *i.e.* $\dot{d} \geq 0$, la fonction h est positive sur $]0, +\infty[$. De plus, en considérant que h est suffisamment régulière (ce qui est assuré par le phénomène physique d'accommodation), l'équation (III.11) peut être intégrée de la façon suivante :

$$d = \tilde{d}(\bar{\alpha}) \quad \text{avec } \tilde{d}_{,\alpha}(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{et } \tilde{d}(\alpha = 0) = 0 \quad (\text{III.12})$$

où la dernière équation correspond aux conditions initiales, qui signifient qu'il n'y a pas d'endommagement quand le matériau est dans son état naturel. Ainsi, la relation contraintes-déformations (III.6) devient simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left(1 - \tilde{d}(\bar{\alpha})\right) \left[2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W_0}{\partial I_2}\right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \mathbf{B}^2\right] \quad (\text{III.13})$$

III.2.2 Choix de la mesure de déformation

Un problème à résoudre est le choix de la mesure de déformation. Dans la théorie générale de la thermodynamique des processus irréversibles, l'équation d'état pour les variables internes doit être écrite en fonction de la force thermodynamique associée à chacune des variables. Dans le cas présent, cela signifie que la mesure $\alpha(t)$ doit être une fonction de $-W_0$ qui est la variable thermodynamique associée à d . Les premiers auteurs qui ont utilisé la mécanique de l'endommagement pour modéliser l'effet Mullins, l'ont adoptée sans aucune déviation : c'est le cas de Simo (1987), De Souza Neto *et al.* (1994) et Miehe (1995). Ce choix met en avant un problème majeur : la forme de l'énergie de déformation doit être postulée avant la dérivation du modèle complet. Cependant, du fait de considérations physiques, il semble plus approprié de formuler l'équation d'évolution de l'endommagement en fonction de l'état de déformation. Cette approche a été utilisée dans le cadre de la mécanique de l'endommagement par Govindjee et Simo (1991, 1992), et plus tard par Miehe et Keck (2000). Il faut noter que cette approche peut être reliée

à la méthode du double réseau de Green et Tobolsky (1946) et aux modèles à deux phases de Mullins et Tobin (1957). L'évolution du réseau est décrite par une fonction de reformation qui ne dépend que de la déformation maximale subie par le matériau dans son histoire. L'état de déformation est mesuré par une fonction scalaire ne dépendant que de I_1 et I_2 . Comme proposée par Beatty and Krishnaswamy, cette fonction peut être vue comme une fonction de dommage (voir note de bas de page 5 dans Beatty et Krishnaswamy (2000)). Ici, cette seconde approche est adoptée. La mesure scalaire de l'état de déformation s'écrit alors :

$$\alpha = g(I_1, I_2) \quad (\text{III.14})$$

Dans le but de mettre en évidence les hypothèses que doit vérifier g , l'approche classique en terme de $-W_0$ doit d'abord être examinée. Soit $\alpha = f(W_0)$ la mesure de l'état de déformation paramétrée par l'énergie de déformation (*i.e.* $-Y$). Même si f n'a pas à être une norme au sens mathématique, on peut raisonnablement supposer que :

- f est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$;
- $f(0) = 0$, *i.e.* la mesure de déformation est nulle pour un état non déformé;
- f est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est une fonction positive croissante sur $]0, +\infty[$. En utilisant cette mesure exprimée à partir de W_0 , et du fait de l'isotropie du matériau et des règles de dérivation, l'équation (III.11) devient :

$$\dot{d} = h \circ f(W_0) f_{,W_0} W_{0,I_1} \dot{I}_1 + h \circ f(W_0) f_{,W_0} W_{0,I_2} \dot{I}_2 \quad (\text{III.15})$$

En considérant les inégalités empiriques proposées par Batra (1975, 1976) et rappelées par Beatty (1987) :

$$W_{0,I_1} > 0 \quad \text{et} \quad W_{0,I_2} \geq 0 \quad (\text{III.16})$$

l'équation (III.15) peut s'écrire :

$$\dot{d} = \beta_1^f \dot{I}_1 + \beta_2^f \dot{I}_2 \quad (\text{III.17})$$

où $(\beta_i^f)_{i=1,2}$ sont des fonctions de I_1 et I_2 qui vérifient :

$$\beta_1^f > 0 \quad \text{et} \quad \beta_2^f \geq 0 \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[\quad (\text{III.18})$$

En suivant la même méthode pour la mesure de déformation $g(I_1, I_2)$ classiquement utilisée pour les modèles de double réseau (III.14), l'équation (III.11) devient :

$$\dot{d} = h \circ g(I_1, I_2) g_{,I_1} \dot{I}_1 + h \circ g(I_1, I_2) g_{,I_2} \dot{I}_2 \quad (\text{III.19})$$

En comparant cette équation à (III.17) et en utilisant les propriétés de h , les propriétés que g doit vérifier peuvent être établies :

- g est définie sur $]3, +\infty[\times]3, +\infty[$;
- g est dérivable par rapport aux variables I_1 et I_2 sur $]3, +\infty[\times]3, +\infty[$;
- $g_{,I_1} > 0$ et $g_{,I_2} \geq 0$;
- le choix $g(I_1 = 3, I_2 = 3) = 0$, assurant que la mesure est nulle pour l'état non déformé, est recommandé.

III.2.3 Construction de la loi de dommage

Indépendamment du choix de l'énergie de déformation, la forme de la loi d'évolution du dommage (III.11) et (III.12) doit être établie. Comme détaillé précédemment, l'approche présentée ici se concentre sur une mesure de déformation fondée sur l'utilisation des deux premiers invariants du tenseur des dilatations \mathbf{B} (III.14). Dans un premier temps, on choisit une mesure de déformation ne dépendant que du premier invariant I_1 :

$$\alpha = \sqrt{I_1/3} - 1 \quad (\text{III.20})$$

Cette mesure correspond à la variation de longueur de la diagonale d'un cube de matière. Cette mesure est pertinente au regard des propriétés établies précédemment. Elle est définie et différentiable sur $]3, +\infty[\times]3, +\infty[$, sa dérivation par rapport à I_1 est positive et sa dérivation par rapport à I_2 est nulle. De plus, cette mesure est nulle lorsque $I_1 = 3$ (quelle que soit la valeur de I_2). Le changement de mesure de déformation est aisé, la seule difficulté consiste à recueillir suffisamment de résultats expérimentaux pour identifier les formes des fonctions d'évolution.

La fonction de dommage $\tilde{d}(\alpha)$ se détermine simplement à partir des résultats expérimentaux. La méthode générale est décrite sans référence à un type particulier d'expériences, mais les résultats seront présentés pour la traction uniaxiale et le glissement pur. Les courbes expérimentales ont une forme similaire à celles présentées sur la figure III.3. En utilisant ces résultats,

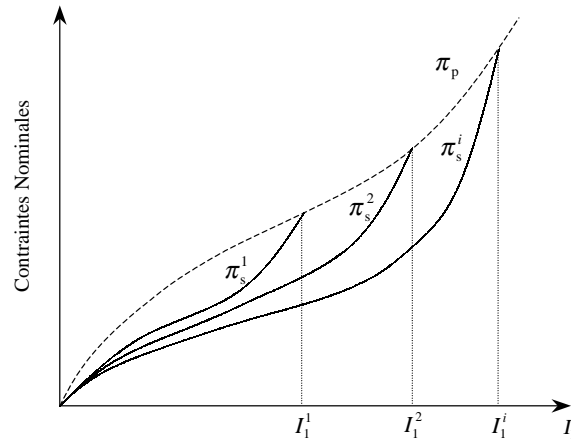


FIG. III.3 – Définition des contraintes et élongations auxquelles réfèrent la première et les secondes charges pour les essais de traction uniaxiale ou de glissement.

la relation contrainte-déformation se réduit à une succession de courbes de charges référant à différents maxima de déformation. Sur cette figure, la contrainte nominale π (caractéristique de l'essai) est exprimée en fonction du premier invariant I_1 . Deux types de courbes contrainte-déformation peuvent être identifiés : la courbe de première charge représentée par des pointillés sur la figure et les courbes de secondes charges représentées par des lignes continues. Selon le type de courbe, la relation contrainte-déformation diffère :

- pour la courbe de première charge, la contrainte courante π_p est donnée par :

$$\pi_p = k_p \pi_0 \quad (\text{III.21})$$

où π_0 est la contrainte nominale du matériau vierge et k_p dépend de I_1 :

$$k_p = 1 - \tilde{d}(\bar{\alpha}) \quad \text{avec} \quad \bar{\alpha} = \sqrt{I_1/3} - 1 \quad (\text{III.22})$$

Ainsi, sur une courbe de première charge, k_p est une fonction décroissante de I_1 ;

- sur la $i^{\text{ème}}$ courbe de seconde charge délimitée par son intersection avec la courbe de première charge en I_1^i , la contrainte courante π_s^i peut s'écrire :

$$\pi_s^i = k_s^i \pi_0 \quad (\text{III.23})$$

où k_s^i est un paramètre constant donné par :

$$k_s^i = 1 - \tilde{d}(\bar{\alpha}) \quad \text{avec} \quad \bar{\alpha} = \sqrt{I_1^i/3} - 1 \quad (\text{III.24})$$

En fait, sur cette courbe, la valeur courante de α est plus faible que la valeur $\bar{\alpha}$ précédemment atteinte sur la courbe de première charge, *i.e.* I_1^i .

Pour deux secondes charges différentes numérotées i et j ($i < j$), les contraintes nominales correspondantes sont simplement reliées par un coefficient multiplicatif :

$$\frac{\pi_s^j}{\pi_s^i} = \frac{k_s^j}{k_s^i} \quad \text{sur} \quad [1, I_1^i] \quad (\text{III.25})$$

Cette propriété va à présent être utilisée pour construire la loi de dommage (Chagnon *et al.*, 2001b).

Avant de déterminer l'équation de dommage, sa validité doit être examinée vis-à-vis des résultats expérimentaux. Pour chaque courbe de seconde charge numérotée i , le rapport de la contrainte correspondante et de la contrainte mesurée sur la courbe de seconde charge suivante peut être représenté comme une fonction dépendant de l'état de déformation (en utilisant I_1 par exemple). Deux exemples de tels graphiques sont présentés sur la figure III.4 pour la traction uniaxiale et le glissement simple. Tous les graphes sont qualitativement similaires. A faibles et moyennes déformations, le rapport est constant ; la région correspondante est notée A sur la figure III.4 et est appelée « zone proportionnelle ». Pour les grandes déformations, le rapport décroît lorsque la déformation croît. Cela correspond à la région B sur la figure III.4, et peut être appelée « zone non-proportionnelle » (Chagnon *et al.*, 2001a). Selon la déformation maximale qui correspond à chaque courbe de seconde charge, la gamme de déformation où la relation est proportionnelle change. En d'autres termes, lorsque I_1^i croît, la largeur de la zone A sur la figure III.4 croît. Au regard de cette remarque, la validité de notre théorie est démontrée uniquement sur la partie du graphe où les contraintes sont proportionnelles. La zone non-proportionnelle correspond au raidissement du matériau lors du retour d'une seconde charge i sur la courbe de première charge (cf. figure III.3). Les limites d'application de la présente modélisation seront discutées dans le paragraphe III.2.4.

La zone d'application de notre théorie étant déterminée, il est maintenant possible de construire la loi de dommage sur le domaine. Dans ce but, les courbes expérimentales k_s^i/k_s^1 en

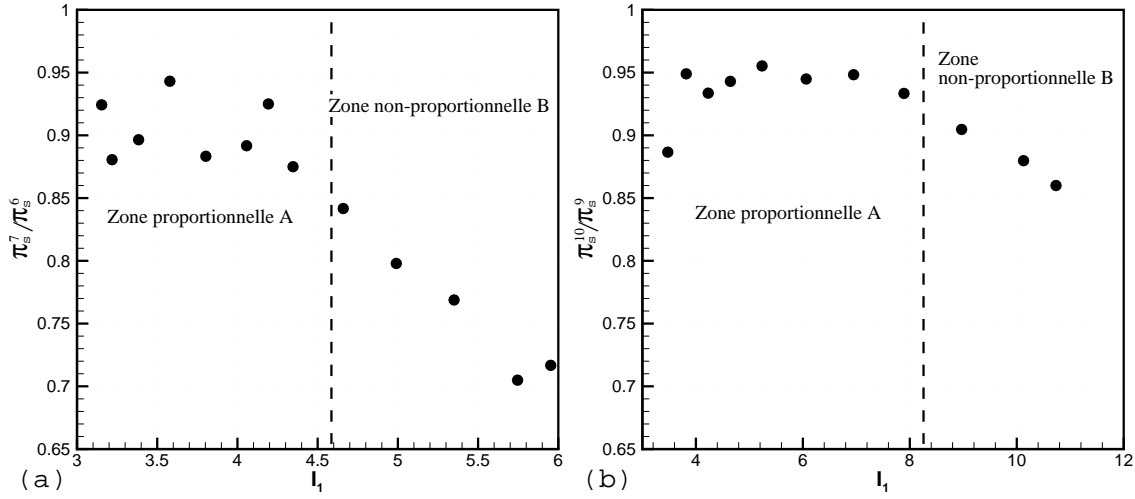


FIG. III.4 – Rapport des contraintes entre deux courbes de secondes charges consécutives : (a) courbes de seconde charge à 125 et 150% d'un essai de traction, (b) courbes de seconde charge à 225 et 250% d'un essai de glissement simple.

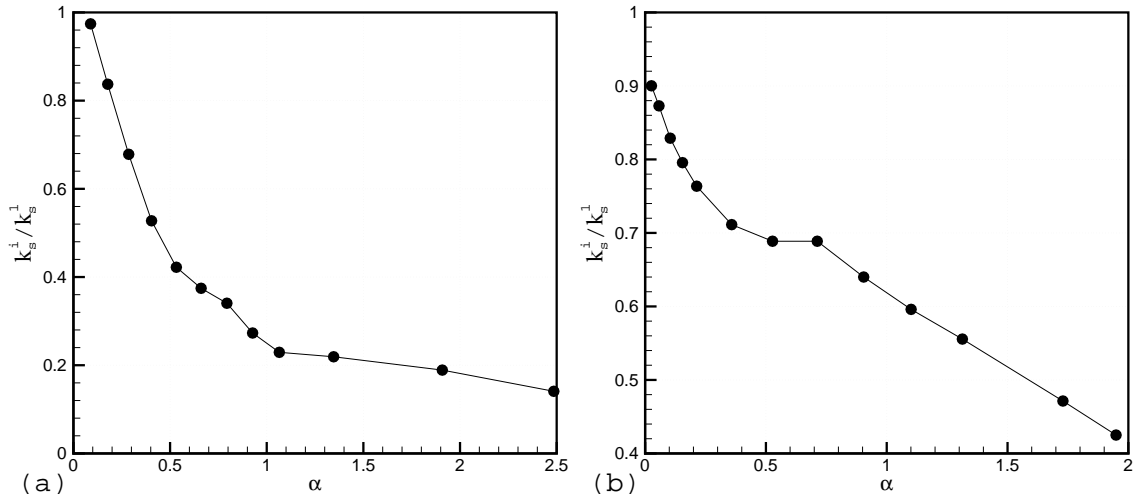


FIG. III.5 – Évolution du rapport k_s^i/k_s^1 en fonction de $\sqrt{I_1^i/3} - 1$ pour une large gamme de déformation pour deux types d'essais uniaxiaux : (a) essai de traction, (b) essai de glissement simple.

fonction de $\sqrt{I_1^i/3} - 1$ sont tracées sur la figure III.5 pour les essais de traction uniaxiale et de glissement simple. Les deux courbes ont une forme exponentielle décroissante qui peut être identifiée par une relation de la forme suivante :

$$\frac{k}{k_s^1} = a + b \left\{ \exp \left[-c \left(\sqrt{I_1/3} - 1 \right) \right] - 1 \right\} \quad (\text{III.26})$$

où a , b et c sont les paramètres matériels. De plus, en considérant l'état initial du matériau comme non-endommagé, *i.e.* $d = 0$ et $k = 1$ pour $I_1 = 3$, l'équation d'évolution de k se réduit

simplement à :

$$k = 1 + b' \left\{ \exp \left[-c \left(\sqrt{I_1/3} - 1 \right) \right] - 1 \right\} \quad (\text{III.27})$$

Par l'utilisation de (III.22) et (III.24), l'équation d'évolution du dommage peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{d}(\bar{\alpha}) = d_\infty \left[1 - \exp \left(-\frac{\bar{\alpha}}{\eta} \right) \right] \quad (\text{III.28})$$

où les deux paramètres matériels sont l'endommagement maximum d_∞ et un facteur d'échelle η . Ils sont reliés aux paramètres précédents (III.26) par :

$$d_\infty = bk_s^1 \quad \text{et} \quad \eta = 1/c \quad (\text{III.29})$$

Il convient de noter que la forme de la loi de dommage (III.28) est similaire au modèle phénoménologique proposé par Miehe (1995). La première différence réside dans le choix de la mesure de déformation. Miehe exprime sa modélisation en fonction de la densité d'énergie de déformation (*i.e.* la mesure α est égale à l'énergie de déformation W_0 et non à I_1). La seconde différence réside dans la méthode d'obtention des lois, ici fondée sur le dépouillement de résultats expérimentaux alors que la forme proposée par Miehe est purement intuitive.

Finalement, les formes des courbes de dommage en traction uniaxiale et en glissement pur sont qualitativement similaires (cf. figure III.5) mais les valeurs des paramètres de l'équation (III.28) sont différentes. Cette différence est expliquée dans le paragraphe suivant.

III.2.4 Limites du modèle et identification des paramètres

III.2.4.1 Limites

Comme précisé précédemment, la mécanique de l'endommagement appliquée à la modélisation de l'effet Mullins est seulement effective sur la partie proportionnelle des courbes expérimentales (cf. figure III.4). Les limites de cette théorie sont illustrées par la figure III.6 dans laquelle les courbes de secondes charges sont superposées en utilisant les facteurs d'échelle k_s^i précédemment déterminés. La figure montre que le principe de superposition est satisfait jusqu'au phénomène de raidissement. Celui-ci se produit quand les courbes de secondes charges rejoignent la courbe de première charge, ce qui correspond au niveau d'accommodation précédemment atteint par le matériau. En fait, cette limitation est inhérente au choix du mécanisme d'endommagement puisque la loi d'évolution du dommage étant écrite en fonction de la déformation maximale (que l'on utilise un critère en déformation ou en énergie), les secondes charges sont proportionnelles. Ceci peut être corrigé en conservant d dans (III.10).

La seconde difficulté évoquée dans le paragraphe précédent est la différence quantitative obtenue entre les essais de traction et de glissement pur. Selon nous, cette différence peut être expliquée par le choix de la mesure de déformation. Ici, dans un but de simplicité, l'état de déformation α est seulement mesuré grâce à I_1 . Pour reproduire différents cas de chargement, l'influence de I_2 peut également être retenue (la figure II.5 montre les différents trajets de charge des essais simples dans le diagramme $I_1 - I_2$). Ceci nécessiterait un large spectre de données

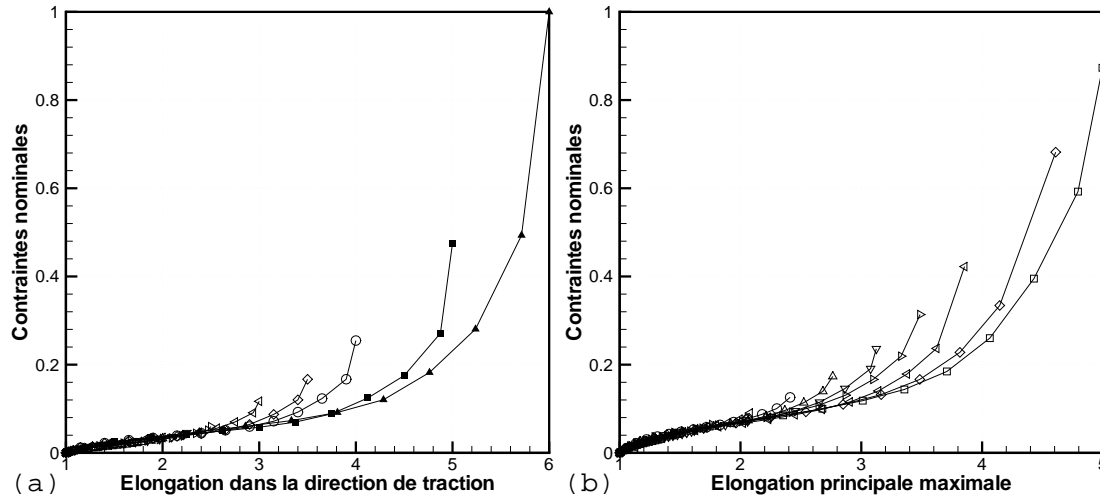


FIG. III.6 – *Superposition des courbes de secondes charges pour les essais uniaxiaux grâce aux valeurs des coefficients de proportionnalité k_s^i : (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur.*

expérimentales correspondant à différents cas de chargement afin de déterminer la mesure de déformation la plus pertinente.

Finalement, la gamme de déformations dans laquelle le modèle est applicable doit être estimée. Théoriquement, le dommage d ne doit jamais dépasser la valeur 1. Si le paramètre de dommage correspondant au long terme d_∞ (III.28) est plus faible que 1, alors $d \leq 1$ est satisfait pour tous les états de déformation. La limitation $d_\infty \leq 1$ peut être imposée lors du processus d'identification. Ici, cette contrainte n'est pas imposée et d_∞ peut prendre des valeurs supérieures à 1. Ceci correspond aux limitations de l'application de la mécanique de l'endommagement pour la modélisation de l'effet Mullins. Dans ce cas, cette condition peut s'écrire en terme d'état de déformation :

$$I_1 \leq 3 \left[1 + \eta \ln \left(\frac{d_\infty}{d_\infty - 1} \right) \right] \quad (\text{III.30})$$

Ainsi, pour les applications éléments finis, l'inégalité précédente doit être vérifiée en tout point de la structure pour assurer la validité du résultat. Ceci est d'autant plus important dans les zones où le maillage subit de fortes déformations locales.

III.2.4.2 Choix de la densité d'énergie hyperélastique et écriture des relations contrainte-déformation

La loi de dommage étant déterminée, le modèle complet nécessite le choix d'une densité d'énergie hyperélastique. Comme nous l'avons vu au chapitre II, les modèles les plus pertinents pour décrire le comportement des élastomères sur une large gamme de déformations sont les propositions de Hart-Smith (1966), Yeoh (1990), Arruda et Boyce (1993) et Gent (1996).

Durant la première charge, la densité d'énergie et la loi de dommage évoluent conjointement tandis que durant les secondes charges, seule la densité d'énergie évolue puisque le dommage est constant. La loi de dommage ne pouvant prendre en compte les forts raidissements, l'utilisation

d'une densité d'énergie hyperélastique avec un raidissement très important permettrait de bien décrire les secondes charges pour les très grandes déformations mais ne pourrait pas décrire aussi bien les secondes charges à faibles déformations (qui ne feraient pas apparaître de raidissement) que la première charge. Une densité d'énergie avec des incurvations moins fortes permet de décrire globalement toutes les secondes charges. Ainsi, la densité d'énergie la plus à même d'être couplée à la loi de dommage est celle de Yeoh (1990) :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{III.31})$$

Cette densité d'énergie permet de décrire l'ensemble du comportement avec seulement trois paramètres matériels. Le modèle complet comprenant la loi de dommage et la densité d'énergie hyperélastique est appelé dans la suite Modèle M1.

La relation entre les contraintes nominales et les élongations peut s'écrire sous la forme suivante :

– Traction uniaxiale :

$$\pi = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{avec} \quad I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (\text{III.32})$$

– Glissement pur :

$$\pi = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{avec} \quad I_1 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 \quad (\text{III.33})$$

– Traction équibiaxiale :

$$\pi = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{avec} \quad I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad (\text{III.34})$$

où π et λ correspondent aux contrainte et élongation caractéristiques de chaque essai. Pour le modèle M1, la dérivée de l'énergie de déformation s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = (1 - D) (C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \quad (\text{III.35})$$

III.2.4.3 Identifications des paramètres

Cinq paramètres matériels doivent être déterminés : trois provenant du modèle hyperélastique C_{10} , C_{20} et C_{30} , et deux coefficients de la loi de dommage d_∞ et η . Du fait du choix de l'approche fait ici, *i.e.* l'utilisation d'une mesure de déformation à la place de la densité d'énergie de déformation comme critère de dommage, la loi de dommage peut être identifiée en utilisant les données de la figure III.5, et la détermination de W_0 se réduit à l'identification classique d'une densité d'énergie hyperélastique en utilisant la courbe de première charge. Néanmoins, en prenant en compte les limites discutées précédemment, une identification globale en utilisant les essais de traction uniaxiale et de glissement pur permet d'obtenir de meilleurs résultats.

Pour la procédure d'identification, l'écart entre le modèle et les résultats expérimentaux en traction uniaxiale et en glissement pur est calculé simultanément pour toutes les courbes (récemment, Hartmann *et al.* (2003) ont proposé une identification sur des cas plus complexes

par l'utilisation de calculs éléments finis). La programmation est réalisée en utilisant deux algorithmes différents. Le premier est génétique et permet d'estimer grossièrement les coefficients. Le second utilise une méthode de plus grande pente avec comme point de départ la solution de l'algorithme génétique et permet de déterminer précisément les paramètres (Marckmann, 2004). Les valeurs des paramètres obtenues sont présentées dans le tableau III.1 et les résultats

Paramètres	Valeurs
C_{10}	$3.99 \cdot 10^{-2}$ MPa
C_{20}	$-4.05 \cdot 10^{-4}$ MPa
C_{30}	$1.31 \cdot 10^{-4}$ MPa
d_{∞}	1.744
η	3.85

TAB. III.1 – Valeurs des paramètres matériau du modèle M1.

de l'identification sont comparés aux essais sur la figure III.7. Les simulations du modèle M1

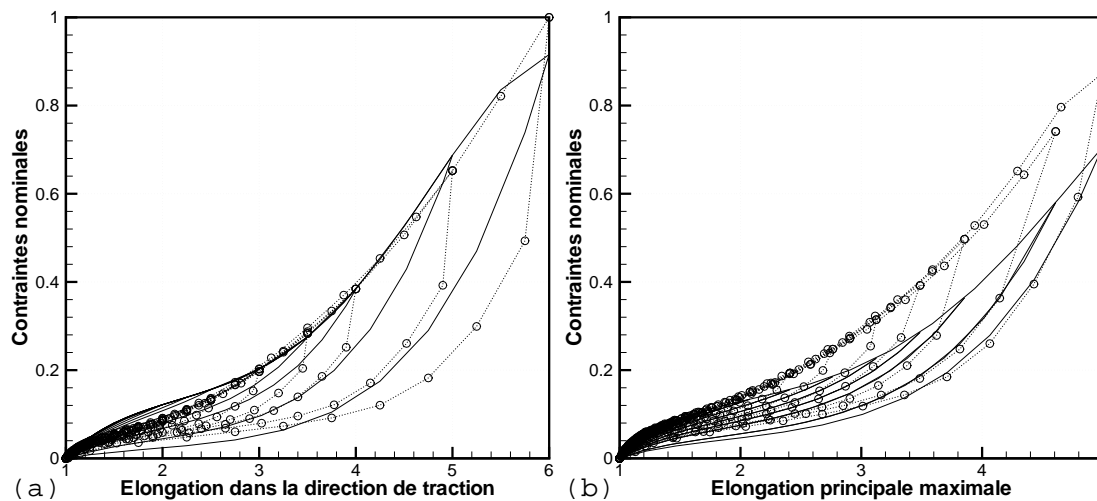


FIG. III.7 – Simulations des essais simples ($\cdots \circ \cdots$) avec le modèle M1 ($-$): (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur.

sont globalement en bon accord avec les résultats expérimentaux, le modèle décrit donc correctement la transition entre les différentes courbes de charge au cours de l'essai cyclique et met en évidence l'influence de la déformation maximale. Comme exposé précédemment, le modèle n'est pas apte à décrire le comportement du matériau lors du retour des courbes de seconde charge sur la courbe de première charge. En fait, la forte incurvation des courbes de seconde charge, conséquence du raidissement, n'est pas bien reproduite par le modèle. Néanmoins, de tels résultats avec seulement cinq paramètres matériels sont satisfaisants ; l'utilisation de ce modèle dans les calculs par éléments finis peut permettre l'obtention de résultats qualitatifs intéressants. Finalement, au regard de l'équation (III.30) et des valeurs des paramètres données dans le ta-

bleau III.1, cette approche est applicable jusqu'à 630% de déformation en traction uniaxiale et plus de 400% en traction équibiaxiale. Les problèmes en très grandes déformations locales devront donc être abordés avec prudence.

III.3 Altération des réseaux

Comme montré dans la bibliographie, différentes approches pour la modélisation de l'effet Mullins sont possibles. Les théories fondées sur le comportement macromoléculaire des élastomères sont rares et peu applicables au calcul des structures. Une proposition est réalisée ici. Dans un but applicatif, la forme du modèle est travaillée pour faciliter son implantation numérique.

III.3.1 Modèle M2

III.3.1.1 Base de la modélisation

Une modélisation développée au Laboratoire de Mécanique et Matériaux par Marckmann *et al.* (2002) est présentée ici. Dans cette approche, une théorie de rupture de liaisons est proposée sans préjuger de leur nature. La bibliographie suggère que des liaisons entre charges et matrice mais également des liaisons faibles de la matrice caoutchoutique sont rompues par l'effet Mullins. La conséquence la plus importante est l'allongement de la longueur moyenne des chaînes comme le suggèrent Johnson et Beatty (1993b). La modélisation présentée ici s'inscrit dans le cadre des théories d'évolution du réseau de chaînes polymériques.

On considère que la configuration du réseau peut être représentée par la figure III.8. Après

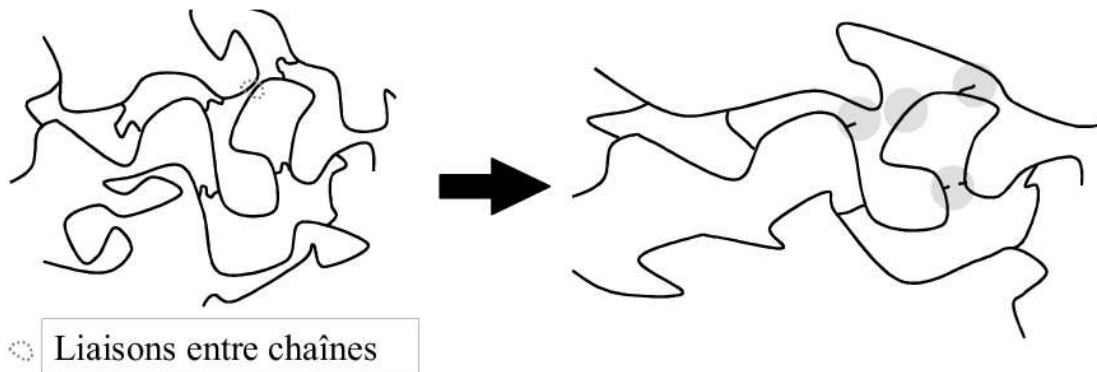


FIG. III.8 – Évolution du réseau macromoléculaire avec la déformation subie au cours du temps.

polymérisation, les chaînes sont reliées par des points d'enchevêtrement et par des segments de jonction. D'autres liens existent tels que des liaisons d'interactions faibles dues à la polarisation des macromolécules. Pour les matériaux chargés, des liaisons supplémentaires sont créées entre les chaînes et les charges. Ces liaisons conduisent à un réseau macromoléculaire amorphe comme illustré par la figure III.8. Durant le chargement, certaines chaînes sont étendues jusqu'à leur limite d'extensibilité et sont donc rompues. Le nombre de ruptures augmente au fur et à mesure

que la déformation globale à laquelle est soumise le matériau augmente. De plus, le nombre de ruptures est fortement dépendant de la distribution des liaisons secondaires. De façon similaire, certaines liaisons faibles sont rompues. L'augmentation du nombre de ruptures provoque une diminution du nombre de points d'interaction. Ainsi, le nombre moyen de monomères par chaîne polymérique, noté N , augmente. Des arguments précédents, on déduit que N est une fonction de la déformation maximale subie par le matériau.

Une autre conséquence du réarrangement du réseau est la décroissance de la densité de chaînes par unité de volume n . Ceci est une conséquence du principe de conservation de la masse qui implique que le nombre de monomères par unité de volume reste constant. Néanmoins, la conservation de la masse ne doit pas être vue au sens strict du terme, puisqu'il ne faut en réalité prendre en compte que les monomères participant effectivement à la raideur du matériau. En effet, durant l'altération du réseau, certaines parties de chaînes peuvent devenir pendantes et ne plus intervenir dans la rigidité du matériau. Ainsi, le produit nN doit être une fonction décroissante ou constante de la déformation maximale. Cette théorie peut être rapprochée de celle proposée par Septanika et Ernst (1998a,b) qui considèrent que la configuration du réseau évolue en fonction de la déformation.

Dans le but d'incorporer ces développements dans les théories hyperélastiques classiques, il est naturel d'adapter en premier lieu les modèles « chaînes », puisqu'ils sont exprimés en fonction des deux paramètres n et N précédemment cités. Comme précisé dans le paragraphe II.1.2, le modèle d'Arruda et Boyce (1993) est à notre avis le plus pertinent pour décrire le comportement des élastomères. Les constantes matérielles du modèle huit-chaînes vont donc devenir des fonctions de la déformation maximale subie par le matériau au travers de la mesure $\bar{\alpha}$ (III.7) :

$$n = n(\bar{\alpha}) \quad (\text{III.36})$$

$$N = N(\bar{\alpha}) \quad (\text{III.37})$$

Des simulations du modèle huit chaînes sont présentées sur la figure III.9 pour une valeur de $C_R = 1,0$ et différentes valeurs du paramètre N . On peut mettre en évidence que lorsque N croît, la pente à l'origine décroît tandis que la position de l'asymptote se déplace vers des déformations plus importantes. Le maximum de déformation étant constant sur une courbe de seconde charge, les paramètres matériels n'évoluent pas, ainsi la forme des courbes de seconde charge est, à un facteur multiplicatif près, exactement celle proposée sur la figure III.9. En revanche, sur la courbe de première charge, le maximum de déformation est égal à la déformation courante, ainsi le nombre de monomères par chaîne croît avec la déformation, ce qui a également été mis en évidence par Meissner (2000). Il montre que cela permet de mieux décrire le comportement hyperélastique, *i.e.* la courbe de première charge. La difficulté restante est la détermination de l'évolution des fonctions $n = n(\bar{\alpha})$ et $N = N(\bar{\alpha})$.

L'identification des fonctions d'évolution est réalisée grâce à la mesure de l'évolution des paramètres sur les différentes secondes charges. Les secondes charges sont identifiées avec le modèle huit chaînes puis l'évolution des paramètres est tracée en fonction de la déformation maximale

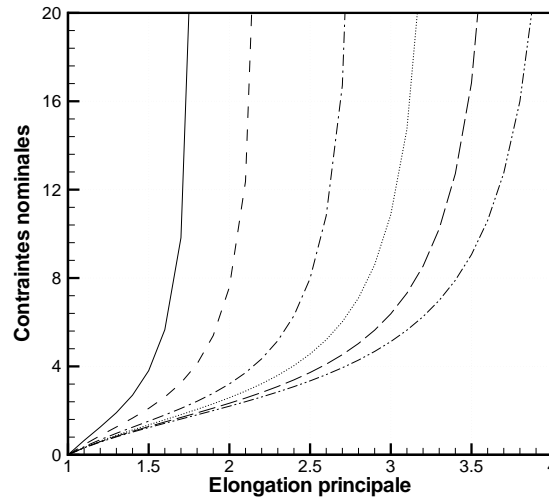


FIG. III.9 – Evolution de la réponse du modèle huit-chaînes pour $C_R = 1,0$ et différentes valeurs de N : (—) 1,5, (– –) 2, (– · –) 3, (···) 4, (– –) 5 et (– · ·) 6.

(cf. figure III.9). L'évolution des paramètres se met sous la forme de fonctions exponentielles décroissante et croissante :

$$N = N_0 \exp(N_1 \bar{\alpha}) \quad (\text{III.38})$$

$$C_R = C_{R0} \exp(-C_{R1} \bar{\alpha}) \quad (\text{III.39})$$

L'évolution de C_R traduit exactement la variation de la densité de chaînes par unité de volume puisque C_R et n sont simplement liés par $C_R = nk\theta$. Ce modèle sera nommé modèle M2 dans la suite. Les paramètres obtenus par identification sur les essais de traction et de glissement sont détaillés dans le tableau III.2. La figure III.10 montre l'évolution des paramètres matériels

Paramètres	Valeurs
C_{R0}	0,06
C_{R1}	0,58
N_0	3,13
N_1	0,57

TAB. III.2 – Valeurs des paramètres matériels pour le modèle M2.

avec la déformation maximale. La figure III.11 met en évidence l'évolution du produit $C_R N$ qui est proportionnel au nombre de monomères actifs dans le réseau. On constate que $C_R N$ est bien une fonction décroissante de la déformation, ce qui permet de vérifier les hypothèses de la modélisation. Une simulation des essais uniaxiaux est présentée sur la figure III.12. Elle montre que le modèle permet de décrire très correctement l'accommodation à l'effet Mullins avec seulement quatre paramètres matériels. Contrairement à l'approche fondée sur la mécanique de l'endommagement, cette théorie n'impose pas aux secondes charges d'être proportionnelles entre elles. Elle permet donc de décrire le raidissement du matériau lors du retour sur la courbe de

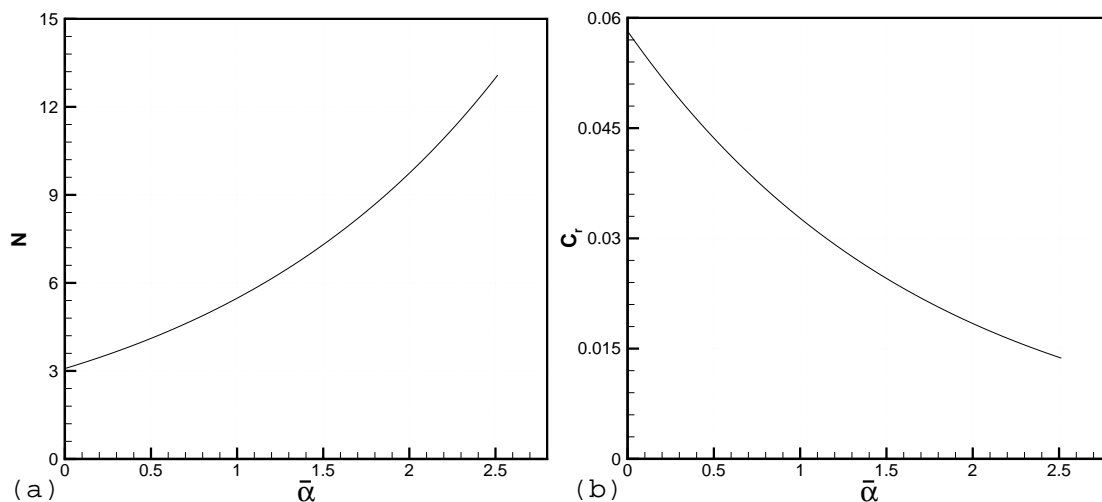


FIG. III.10 – Évolution des paramètres du modèle huit-chaînes en fonction de la mesure de déformation : (a) évolution du nombre de monomères par chaîne N , (b) évolution de la densité de chaînes par unité de volume C_R .

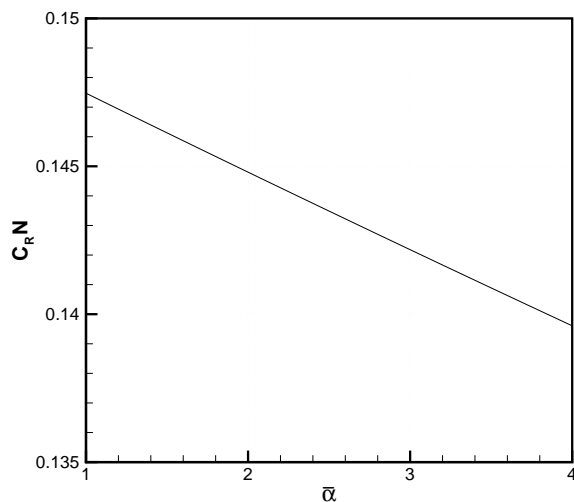


FIG. III.11 – Évolution du produit $C_R N$ proportionnel au nombre de monomères actifs lors de la déformation pour le modèle M2.

première charge en gardant une simulation pertinente sur le reste de la courbe. Ce modèle répond donc parfaitement aux objectifs de la modélisation. La forme des courbes et la perte de raideur entre la première et les secondes charges sont correctement décrites. De plus, la formulation physique de ce modèle permet une bonne compatibilité avec la modélisation d'autres phénomènes comme l'hystérésis (cf. annexe C).

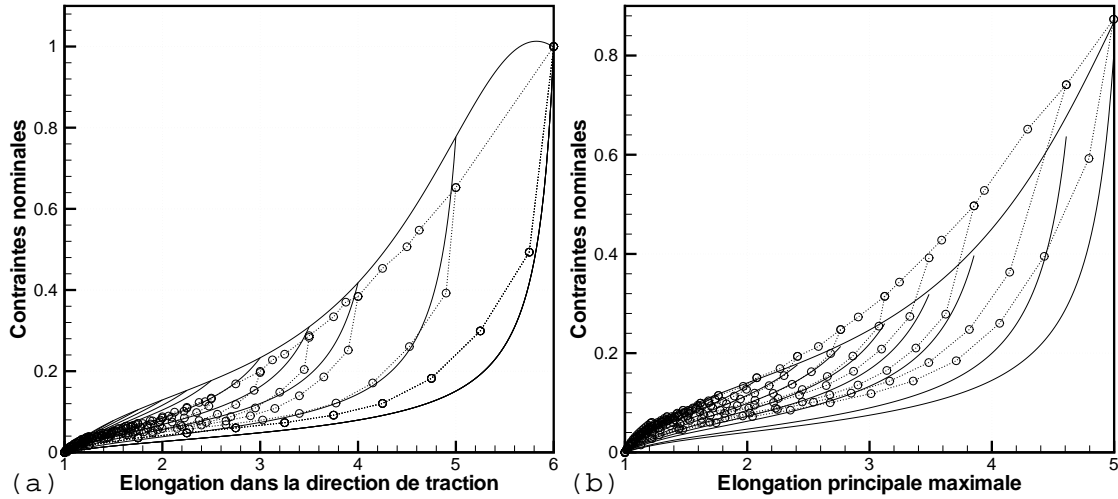


FIG. III.12 – Simulations des essais simples ($\cdots \circ \cdots$) avec le modèle $M2$ ($—$): (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur.

III.3.1.2 Perspectives du modèle

Un point pénalisant du modèle est sa formulation en directions principales couplée aux difficultés liées à l'utilisation de la fonction de Langevin qui induisent des problèmes numériques. En effet, le modèle huit-chaînes n'est présent dans Abaqus que sous la forme de son développement limité au cinquième ordre en fonction du premier invariant. La figure III.13 illustre la différence

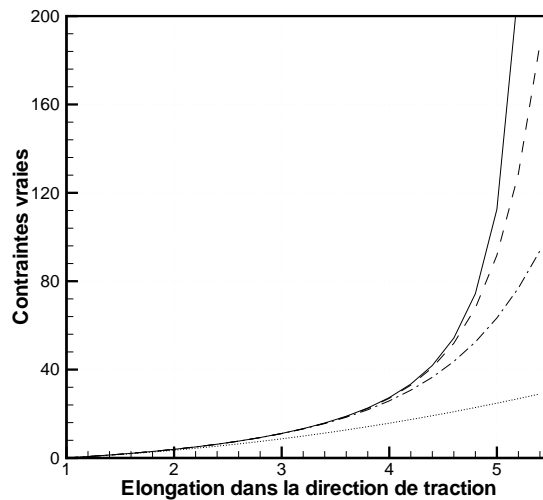


FIG. III.13 – Comparaison des formulations du modèle huit chaînes: ($—$) formulation exacte, ($--$) développement limité à l'ordre 11, ($- \cdot -$) développement limité à l'ordre 5, (\cdots) développement limité à l'ordre 1 (modèle néo-hookéen).

entre la formulation exacte du huit-chaînes et ses développements limités. L'ordre 5, classiquement utilisé, décrit parfaitement les deux premiers tiers de la gamme de déformations mais n'est pas capable de simuler le raidissement. Comme le montre la figure III.12, les secondes charges

présentent de forts raidissements qui ne peuvent être décrits par un tel développement. L'utilisation d'un développement d'ordre supérieur (par exemple 11) permet de mieux prendre en compte le raidissement, mais n'est pas compatible avec l'évolution des paramètres (en effet la théorie d'altération est fondée sur la position et la description exacte des raidissements). De plus, des problèmes numériques apparaissent, puisque les coefficients du développement atteignent les limites de précision « machine » des codes de calcul. L'utilisation d'un développement n'est donc pas une solution pour supprimer les problèmes numériques de la fonction de Langevin.

Du fait de sa formulation peu attractive et malgré ses performances, ce modèle n'est ni utilisable sous sa forme explicite ni sous sa forme approchée. Il est donc important de déterminer une forme plus à même de permettre les simulations. Il est fondamental de déterminer une autre formulation apte à décrire les phénomènes et implantable dans les codes de calcul éléments finis.

III.3.2 Modèles équivalents

Le modèle huit chaînes n'étant pas une solution à la description de la théorie d'altération du réseau, nous avons mené un travail sur les densités d'énergie hyperélastiques. Les modèles aussi performants que le modèle huit-chaînes pour la description du comportement global du matériau (notamment les grandes déformations) avec peu de paramètres matériels ont été listés et comparés. D'après les résultats du chapitre II, il a été montré que les modèles de Hart-Smith (1966) et de Gent (1996) sont aptes à décrire le comportement avec seulement deux paramètres (l'un décrivant la pente à l'origine et l'autre la position du raidissement). Un travail visant à déterminer des relations entre les paramètres des différents modèles a été réalisé (cf. annexe B) et a permis de mettre en évidence que les paramètres décrivant respectivement la pente à l'origine et la position de l'asymptote pouvaient être reliés par des relations relativement simples. Les relations entre les modèles d'Arruda et Boyce (1993) et de Gent (1996) s'obtiennent simplement alors que les relations avec le modèle de Hart-Smith (1966) demandent des développements mathématiques importants. Ceci a permis de démontrer l'équivalence entre les trois densités d'énergie hyperélastique précédemment citées. Cette équivalence peut désormais servir de base à la construction de deux nouveaux modèles d'accommodation fondés sur la théorie d'altération.

III.3.2.1 Application au modèle de Gent - Modèle M3

Le modèle de Gent (1996) présente une forme très similaire au modèle huit chaînes puisque les paramètres matériels du modèle représentent la courbure initiale et la position de l'asymptote verticale. Le travail présenté en annexe B montre que les coefficients des lois de Gent (II.38) et d'Arruda et Boyce (II.28) sont liés par des relations linéaires simples :

$$C_r = \frac{E}{3} \quad \text{et} \quad J_m = 3N + 1 \quad (\text{III.40})$$

La théorie d'altération introduite dans le modèle huit-chaînes peut être introduite également dans la formulation de Gent, ce qui permet de créer le modèle M3. Les évolutions du nombre de monomères par chaîne et de la densité de chaînes par unité de volume peuvent être décrites

grâce aux paramètres E et J_m qui sont respectivement équivalents aux paramètres C_r et N de la formulation huit-chaînes. Les équations (III.38) et (III.39) permettent donc d'écrire :

$$E = E_0 \exp(-E_1 \bar{\alpha}) \quad (\text{III.41})$$

$$J_m = J_{m0} \exp(J_{m1} \bar{\alpha}) \quad (\text{III.42})$$

Les paramètres du modèle de Gent peuvent être identifiés grâce aux relations entre les paramètres (III.40). Néanmoins, du fait de l'incertitude sur les relations (III.40) (cf. annexe B), il est plus pertinent d'identifier globalement les paramètres sur les essais uniaxiaux (traction uniaxiale et glissement pur). Les valeurs correspondantes sont présentées dans le tableau III.3. On peut

Paramètres	Valeurs
E_0	0,171
E_1	0,476
J_{m0}	8,18
J_{m1}	0,612

TAB. III.3 – Valeurs des paramètres matériau pour le modèle M3.

vérifier que le nombre de monomères actifs est une fonction décroissante de la déformation (cf. figure III.14). La figure III.15 montre que les résultats des simulations sont aussi satisfaisants que

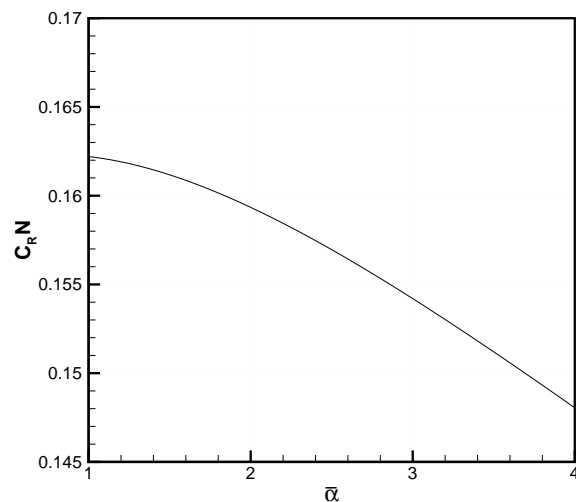


FIG. III.14 – Évolution du produit $C_r N$ proportionnel au nombre de monomères actifs lors de la déformation pour le modèle M3.

ceux du modèle M2. La forme des courbes de première et secondes charges est très bien décrite par le modèle. Un avantage est sa formulation en terme d'invariants, ce qui évite l'utilisation des directions principales. Mais le problème lié à l'utilisation de la fonction de Langevin est remplacé par la présence d'une asymptote verticale due à une fonction logarithmique. Les difficultés numériques liées à la quasi-verticalité de la tangente à la courbe ne sont donc pas résolues avec

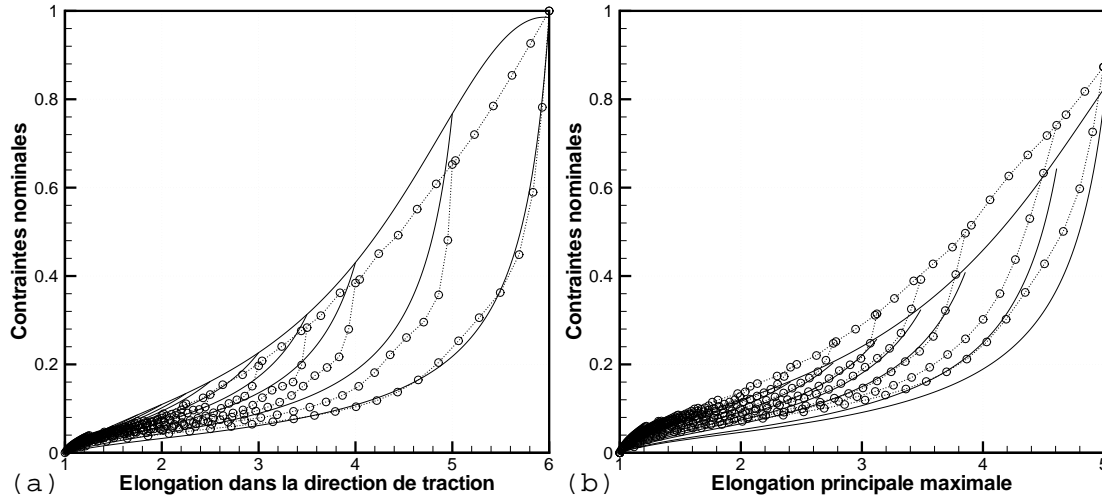


FIG. III.15 – Simulations des essais simples ($\cdots \circ \cdots$) avec le modèle M3 (—): (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur.

une telle formulation. Seul le temps de calcul est amélioré, puisque l'utilisation des invariants évite de calculer les directions principales du tenseur des déformations.

III.3.2.2 Application au modèle de Hart-Smith - Modèle M4

Le modèle de Hart-Smith (1966) n'est pas fondé sur une forme asymptotique contrairement aux deux modèles précédents mais présente une branche exponentielle. Malgré tout, une relation entre les coefficients des modèles de Gent (II.38) et de Hart-Smith (II.36) a pu être obtenue (cf. annexe B) :

$$C_1 = \frac{C_r}{2} \quad \text{et} \quad C_3 J_m^2 = k \quad (\text{III.43})$$

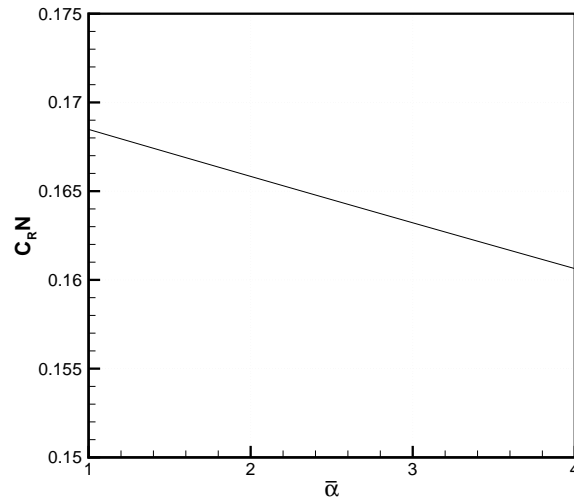
où k est une constante. Le paramètre C_1 représente la pente à l'origine du modèle et est donc directement lié à la densité de chaînes par unité de volume. Néanmoins, le paramètre C_3 ne détermine pas la position d'une asymptote mais définit la forme exponentielle du raidissement. La relation entre les paramètres C_3 et J_m est ici hyperbolique (III.43). Le paramètre C_3 possède donc une évolution inverse par rapport au nombre de monomères par chaîne. Les variations de C_3 sont plus rapides que celles de N et J_m du fait de la présence de la fonction carré dans la relation précédente. Les équations (III.38), (III.39) et (III.43) permettent donc d'écrire :

$$C_1 = C_{1a} \exp(-C_{1b}\bar{\alpha}) \quad (\text{III.44})$$

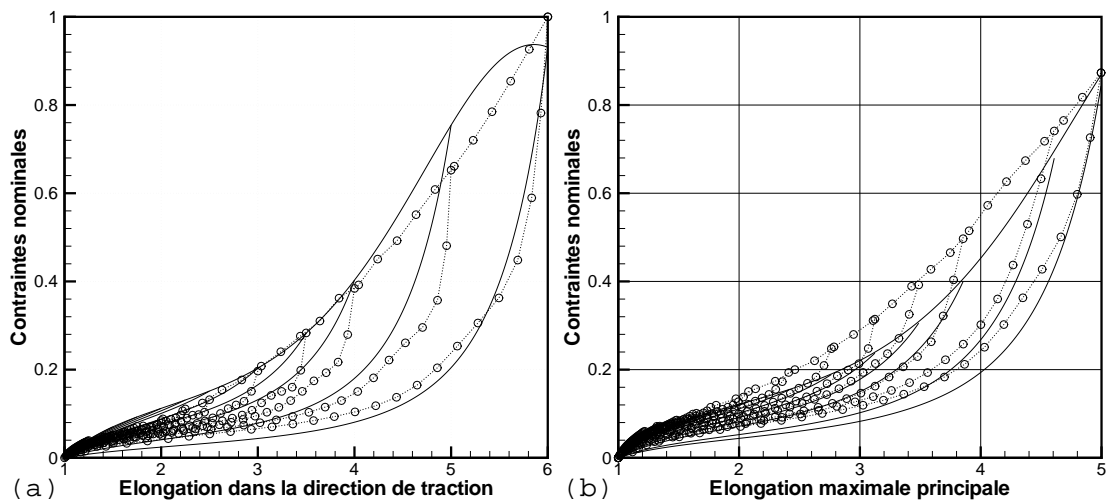
$$C_3 = C_{3a} \exp(-C_{3b}\bar{\alpha}) \quad (\text{III.45})$$

Ce modèle est appelé modèle M4. Tout comme pour le modèle de Gent (1996), il est plus pertinent d'identifier les paramètres matériels sur les essais uniaxiaux (traction uniaxiale et glissement pur) que par l'utilisation des relations empiriques. Les valeurs des paramètres du modèle M4 sont présentées dans le tableau III.4. La figure III.16 montre que l'hypothèse de décroissance du

Paramètres	Valeurs
C_{1a}	$3,76e^{-2}$ MPa
C_{1b}	$4,34e^{-2}$
C_{3a}	$1,35e^{-2}$ MPa
C_{3a}	$5,15e^{-2}$

TAB. III.4 – Valeurs des paramètres matériels pour le modèle M_4 .FIG. III.16 – Évolution du produit $C_R N$ proportionnel au nombre de monomères actifs lors de la déformation pour le modèle M_4 .

nombre de monomères actifs dans l'élasticité est bien vérifiée. La figure III.17 présente les simulations du modèle sur les essais simples. La qualité des simulations est similaire à celle des deux

FIG. III.17 – Simulations des essais simples ($\cdots \circ \cdots$) avec le modèle M_4 (—): (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur.

modèles d'altération précédents. L'avantage de cette formulation par rapport au modèle d'Arruda et Boyce (1993) est son écriture en invariants plutôt qu'en directions principales. Le modèle de Hart-Smith (1966) a de plus l'avantage d'être exprimé à l'aide d'une fonction exponentielle plutôt qu'une fonction avec asymptote comme l'est le modèle de Gent (1996). Les problèmes numériques liés à la présence d'une asymptote sont donc supprimés. La version complète proposée dans l'article original de Hart-Smith possède un terme linéaire du second invariant qui peut permettre de mieux décrire les faibles déformations. Mais ce dernier est à utiliser avec prudence car ses prédictions peuvent être erronées dans les cas multiaxiaux (cf. paragraphe II.1.4).

III.3.3 Bilan des modèles d'altération

Une théorie d'altération fondée sur l'évolution du réseau macromoléculaire a permis de construire une loi d'accommodation à l'effet Mullins décrivant l'évolution des chaînes dans le réseau. Du fait de sa formulation physique, cette théorie a été adaptée au modèle huit-chaînes d'Arruda et Boyce (1993) (modèle M2). Ce dernier permet une représentation qualitative du phénomène de perte de raideur mais avec une formulation analytique non utilisable dans les codes de calcul. L'équivalence entre les trois modèles hyperélastiques étudiés a permis de construire deux nouveaux modèles d'altération exprimés en invariants. Tous ces modèles présentent la même qualité de simulation, en revanche, la formulation exprimée grâce à la densité d'énergie d'Hart-Smith (1966) (modèle M4) est la plus pertinente pour une implantation numérique. Pour la suite de l'étude, seul le modèle M4 est conservé.

III.4 Comparaison des formulations

Nos études nous ont permis de construire des modèles fondés sur deux concepts différents, d'une part la mécanique de l'endommagement et d'autre part l'évolution du réseau macromoléculaire du matériau. Ces deux approches présentent des avantages et inconvénients différents. Ceux-ci vont être mis en évidence et discutés en comparaison avec des modèles de la bibliographie sélectionnés dans le chapitre II, notamment ceux de Simo (1987) et de Zuñiga et Beatty (2002b).

III.4.1 Simulations des modèles de la bibliographie

Les modèles de Simo (1987) (II.66) et Zuñiga et Beatty (2002b) (II.59) sont respectivement issus de la mécanique de l'endommagement et de la théorie du double réseau. Ils sont initialement paramétrés à l'aide de mesures de déformation isotropes différentes de celle proposée dans ce mémoire (III.20). Pour l'étude comparative proposée ici, la mesure de déformation utilisée est la même que pour les modèles précédemment construits, *i.e.* $\bar{\alpha}$. Ces deux modèles nécessitent le choix d'une densité d'énergie hyperélastique comme base de leur comportement. Pour l'utilisation du modèle de Zuñiga et Beatty (2002b), cette dernière peut être choisie uniquement selon

ses capacités à décrire la forme de la première charge tandis que pour le modèle de Simo (1987) l'accommodation et l'hyperélasticité sont liées.

III.4.2 Modèle de Simo (1987)

Le modèle de Simo présentant une forme similaire au modèle M1 (cf. paragraphe III.2.3) sur la courbe de première charge, l'utilisation de la densité d'énergie de Yeoh (1990) reste la plus pertinente. Ceci conduit à une formulation avec cinq paramètres matériels. Les paramètres du modèle sont identifiés sur les essais de traction et de glissement, leurs valeurs sont fournies dans le tableau III.5 et les simulations sont présentées sur la figure III.18.

Paramètres	Valeurs
C_{10}	$6,13 \cdot 10^{-2}$ MPa
C_{20}	$1,34 \cdot 10^{-2}$ MPa
C_{30}	$2,13 \cdot 10^{-3}$ MPa
α	$7,54 \cdot 10^{-2}$
β	0

TAB. III.5 – Valeurs des paramètres matériels du modèle de Simo (1987) introduit dans le modèle de Yeoh (1990).

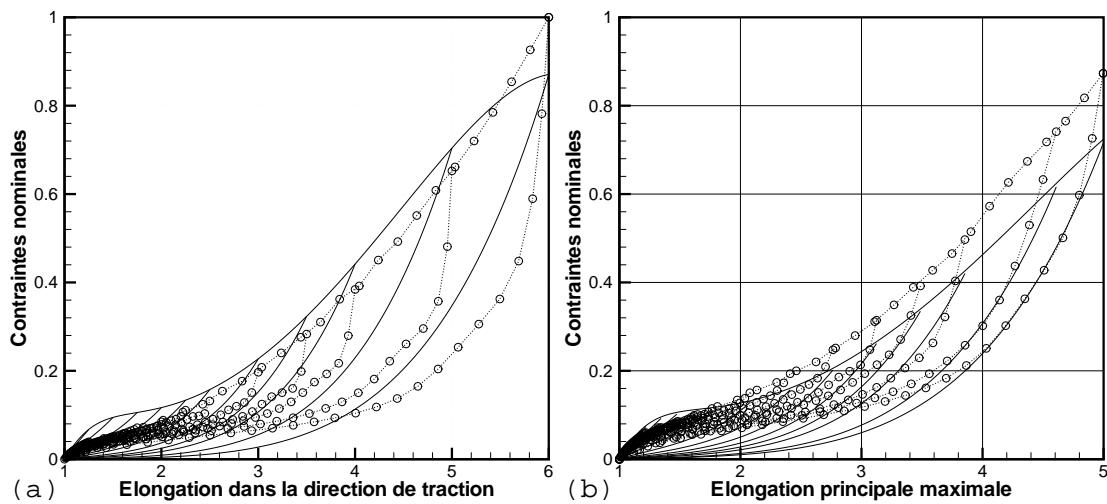


FIG. III.18 – Simulation des essais uniaxiaux ($\dots\circ\dots$) réalisée avec le modèle d'accommodation de Simo (1987) couplé avec la densité d'énergie de Yeoh (1990) (—): (a) la traction simple et (b) le glissement pur.

III.4.3 Modèle de Zuñiga et Beatty (2002b)

La loi d'évolution de Zuñiga et Beatty (2002b) est inactive lors de la première charge mais varie lors des secondes charges, ce qui permet à la densité hyperélastique et à la loi d'accommodation d'être indépendantes. Il est ainsi possible d'identifier les paramètres séparément. La densité d'énergie hyperélastique décrit entièrement la première charge. Celle-ci présente des incurvations très faibles, ce qui proscrit l'utilisation des densités d'énergie de Hart-Smith (1966), d'Arruda et Boyce (1993) et de Gent (1996). La densité de Yeoh (1990) est ici aussi la plus à même de décrire la forme de la courbe. Les paramètres sont donnés dans le tableau III.6 et les simulations des essais de traction uniaxiale et de glissement pur sont présentées sur la figure III.19.

Paramètres	Valeurs
C_{10}	$3,78 \cdot 10^{-2}$ MPa
C_{20}	$2,48 \cdot 10^{-4}$ MPa
C_{30}	$1,05 \cdot 10^{-5}$ MPa
β	1,32

TAB. III.6 – Valeurs des paramètres matériels du modèle de Zuñiga et Beatty (2002b) introduit dans le modèle de Yeoh (1990)

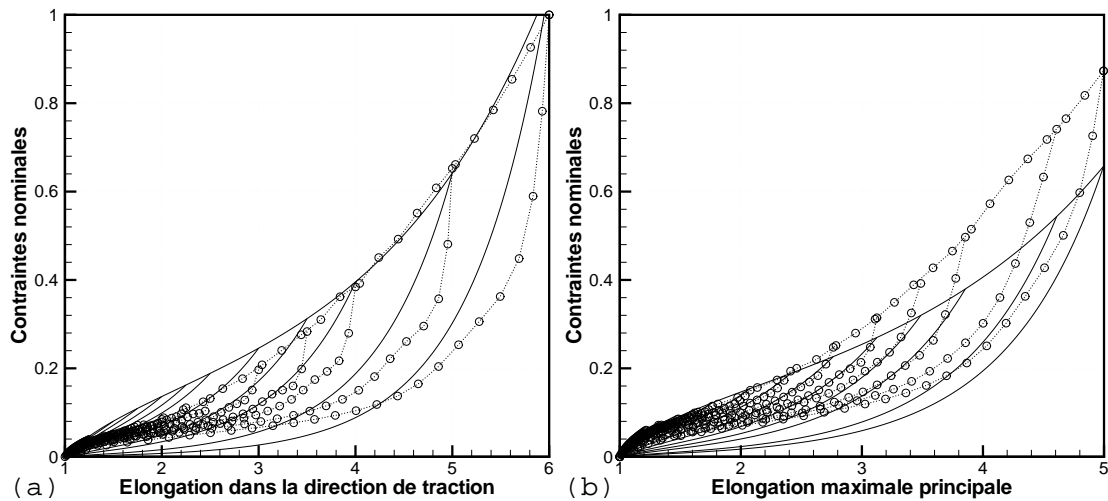


FIG. III.19 – Simulation des essais uniaxiaux ($\cdots\circ\cdots$) réalisée avec le modèle d'accommodation de Zuñiga et Beatty (2002b) couplé avec la densité d'énergie de Yeoh (1990) (—): (a) la traction simple et (b) le glissement pur.

III.4.4 Qualités des modélisations

Au regard des simulations des différents modèles, le modèle M4 (cf. figure III.17) est le plus à même de décrire la perte de raideur après la première charge, contrairement au modèle M1 (cf. figure III.7) qui la sous-estime. Les modèles de Simo (1987) et de Zuñiga et Beatty (2002b) ne décrivent pas correctement la forme des secondes charges. En effet, le raidissement au moment du retour sur la première charge est bien décrit, mais le comportement aux déformations modérées est fortement sous-estimé. Les fonctions introduites ne peuvent à la fois décrire la forte perte de raideur aux grandes déformations et la bonne tenue du matériau pour des déformations plus faibles. Le modèle M1 permet de décrire ce comportement pour les déformations modérées mais n'est pas capable de décrire le raidissement du matériau (du fait de la forme de la loi qui impose une proportionnalité entre les secondes charges). Ces modèles présentent donc chacun des avantages particuliers dans deux zones de déformation différentes. Le modèle M4 est le seul qui présente tous ces avantages. Le modèle de Simo (1987) (cf. figure III.18) présente les mêmes caractéristiques que le modèle M1 puisque les secondes charges sont proportionnelles. Simplement, la forme de la première charge est nettement influencée par la loi d'évolution, c'est pourquoi les simulations présentent de fortes incurvations aux faibles déformations. Il permet également de décrire une accommodation plus forte, ce qui conduit cependant à sous-estimer fortement les contraintes aux déformations modérées sur les courbes de secondes charges. Le gain en accommodation est ainsi très pénalisant sur une large gamme de déformations. Le modèle de Zuñiga et Beatty (2002b) (cf. figure III.19) possède une forme de loi différente en comparaison des deux lois de dommage, puisque la fonction d'évolution dépend conjointement des déformations maximale et instantanée. Ceci permet aux deuxièmes charges de décrire le raidissement. Néanmoins, la forme de loi choisie n'est pas adaptée pour décrire l'ensemble de la gamme de déformations. Une fonction ayant une même forme que celle proposée par De Souza Neto *et al.* (1994) (cf. figure II.8) serait plus adaptée à la condition de faire évoluer la forme de la courbe avec le niveau de déformation maximale. Néanmoins, le paramétrage en déformation courante implique que l'accommodation n'est pas uniquement dépendante de la déformation maximale, ce qui est contraire aux résultats expérimentaux.

Remarque : l'utilisation des mesures de déformations initiales, i.e W_0 pour le modèle de Simo (1987) et $\sqrt{I_1^2 - I_2}$ pour le modèle de Zuñiga et Beatty (2002b) ne modifie pas les courbes contrainte-déformation de façon significative.

III.5 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à la modélisation de la perte de raideur entre les deux premières charges. Pour cela, deux théories ont été développées parallèlement, l'une fondée sur la mécanique de l'endommagement, l'autre sur une description physique de l'évolution du réseau macromoléculaire. Le modèle M1 issu de la mécanique de l'endommagement permet une représentation

qualitative du phénomène mais ne permet pas de décrire le fort raidissement lors du retour sur la courbe de première charge. Néanmoins, la loi de dommage est indépendante de la modélisation hyperélastique, elle est donc adaptable à toutes les densités d'énergie. La seconde théorie a permis la construction de trois modèles M2, M3 et M4, tous fondés sur la description de l'altération du réseau en fonction de la déformation maximale qu'il a subie. Ces modèles permettent une bonne représentation des essais uniaxiaux (traction et glissement). Toutefois, le modèle M4 est le seul à avoir une base hyperélastique facilement utilisable dans les codes de calcul.

La comparaison des résultats avec les modèles de la bibliographie est satisfaisante et met en évidence la pertinence de nos modèles pour décrire l'effet Mullins.

Chapitre IV

Mise en oeuvre numérique

Le chapitre III a permis la construction de modèles capables de décrire l’accommodation des élastomères à l’effet Mullins. Le présent chapitre a pour objectif d’implanter ces lois dans un code de calculs éléments finis. Dans un premier temps, la formulation globale d’un problème tridimensionnel est proposée avec la mise en évidence de l’importance de la loi de comportement. Comme mentionné dans le chapitre I, les élastomères sont considérés incompressibles. Ce point est délicat à gérer numériquement, et des solutions sont ici proposées. La méthode retenue dans notre étude est détaillée, ses avantages et limites sont étudiés. Les points nécessaires à l’implantation sont ensuite présentés et explicités dans le cas particulier des modèles M1 et M4.

Les modèles sont finalement testés pour des sollicitations uniaxiales : la traction uniaxiale et le glissement pur qui ont servi à l’identification des paramètres matériels, et le glissement simple et la compression où le caractère prédictif des modèles est évalué.

IV.1 Cadre général

L’implantation numérique des lois de comportement est un problème complexe souvent abordé (Lin et Schomburg, 2003; Laiarinandrasana *et al.*, 2003). Mackerle (1998, 2002) propose une bibliographie sur l’ensemble des problèmes numériques. Ici, le cadre général de l’implantation numérique est présenté. Dans un premier temps, l’écriture du problème tridimensionnel est étudiée. Les problèmes numériques sont ensuite soulevés avec notamment la gestion de l’incompressibilité.

IV.1.1 Méthode des éléments finis en grandes déformations

IV.1.1.1 Principe des travaux virtuels

La mise en équation d’un problème mécanique est dans un premier temps appelée (Bonet et Wood, 1997; Holzapfel, 2000). Le principe des travaux virtuels est écrit pour un système (Σ) de volume Ω_0 et de frontière $\partial\Omega_0$. On note respectivement $\partial\Omega_{0u}$ et $\partial\Omega_{0p}$ les parties de la frontière où sont imposés les déplacements et les efforts, avec :

$$\partial\Omega_{0u} \cap \partial\Omega_{0p} = \emptyset \quad \text{et} \quad \partial\Omega_{0u} \cup \partial\Omega_{0p} = \partial\Omega \quad (\text{IV.1})$$

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement. La fonction énergie potentielle du système peut être écrite comme la somme du travail des efforts extérieurs et intérieurs :

$$\Pi_L(\mathbf{u}) = \Pi_{int}(\mathbf{u}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (\text{IV.2})$$

Ces deux dernières grandeurs s'expriment simplement :

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} W(\mathbf{C}(\mathbf{u})) dV \quad (\text{IV.3})$$

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega_0} \mathbf{F}_0 \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{T}_0 \mathbf{u} dS \quad (\text{IV.4})$$

où \mathbf{F}_0 et \mathbf{T}_0 représentent respectivement les forces extérieures volumiques et surfaciques s'exerçant sur (Σ) dans son état non-déformé.

Soit $\delta\mathbf{v}$ un champ de déplacement virtuel qui permet de différencier l'équation (IV.1) :

$$D_{\delta\mathbf{v}}\Pi_L(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{IV.5})$$

où $D_{\delta\mathbf{v}}f$ est la dérivée de la fonction f dans la direction $\delta\mathbf{v}$. L'expression est valable pour tous les $\delta\mathbf{v}$ cinématiquement admissibles, c'est-à-dire satisfaisant $\delta\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega_{0u}$. La différentiation permet d'écrire :

$$D_{\delta\mathbf{v}}\Pi_L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W(\mathbf{C}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{C}} : D\mathbf{C}(\delta\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{F}_0 \delta\mathbf{v} dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{T}_0 \delta\mathbf{v} dS = 0 \quad (\text{IV.6})$$

soit :

$$D_{\delta\mathbf{v}}\Pi_L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : D\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{F}_0 \delta\mathbf{v} dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{T}_0 \delta\mathbf{v} dS = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Une linéarisation (nécessaire dans le cadre des problèmes non-linéaires) de cette expression dans la direction \mathbf{u} permet d'obtenir :

$$D_{\delta\mathbf{v}}^2\Pi_L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} D\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) : \mathbb{C}^L : D\mathbf{E}(\mathbf{u}) dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : [(\nabla_0\mathbf{u})^T(\nabla_0\delta\mathbf{v})] dV \quad (\text{IV.8})$$

où \mathbb{C}^L est le tenseur d'élasticité lagrangien défini par :

$$\mathbb{C}^L = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{IV.9})$$

Les mêmes développements peuvent être réalisés en considérant la configuration courante comme référence :

$$D_{\delta\mathbf{v}}\Pi_L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : D\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}) dv - \int_{\Omega} \mathbf{F} \delta\mathbf{v} dv - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{T} \delta\mathbf{v} ds = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où \mathbf{F} et \mathbf{T} représentent respectivement les forces extérieures volumiques et surfaciques s'exerçant sur (Σ) dans son état déformé. Par linéarisation, on obtient :

$$D_{\delta\mathbf{v}}^2\Pi_L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}^e : D\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}) dv + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\delta\mathbf{v})] dv \quad (\text{IV.11})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des petites déformations défini par $((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u})/2$, et \mathbb{C}^e est le tenseur d'élasticité eulérien.

Quel que soit le type d'approche, lagrangienne ou eulérienne, l'écriture d'un problème tridimensionnel nécessite donc la connaissance du tenseur des contraintes et du tenseur d'élasticité. Le passage d'une description à une autre se fait simplement grâce à la transformation Push-Forward ϕ^* (Simo et Pister, 1984) et sa réciproque Pull-Back ϕ_* . Sa définition pour des tenseurs d'ordre 2 et 4 est la suivante :

$$\mathbf{A} = \phi^*(\mathbf{B}) \quad \text{est défini par} \quad \mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{IV.12})$$

et :

$$\mathbb{A} = \phi^*(\mathbb{B}) \quad \text{est défini par} \quad A_{ijkl} = \sum_{I,J,K,L} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} B_{IJKL} \quad (\text{IV.13})$$

Donc, le tenseur d'élasticité eulérien se déduit simplement du tenseur d'élasticité lagrangien grâce à ϕ^* :

$$\mathbb{C}^e = J^{-1} \phi^*(\mathbb{C}^L) \quad (\text{IV.14})$$

Le tableau IV.1 présente le résultat de la transformation Push-Forward pour les tenseurs usuels.

— ϕ^* —>	
I	B
C⁻¹	I
C	B²
$\partial \mathbf{C}^{-1} / \partial \mathbf{C}$	II

TAB. IV.1 – Transformation Push-Forward des tenseurs usuels.

IV.1.1.2 Discrétisation du problème

Un problème éléments finis nécessite la discrétisation de l'espace. Des fonctions de forme $(N_i)_{i=1..n}$ sont introduites. Elles permettent d'écrire simplement la position d'un point sous la forme d'une pondération des positions de points particuliers :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{x}_i \quad (\text{IV.15})$$

où $(\mathbf{x}_i)_{i=1..n}$ sont les vecteurs position des points de la discrétisation. Le gradient de la transformation s'exprime alors grâce aux dérivées des fonctions de forme :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \nabla_0 N_i \mathbf{x}_i \quad (\text{IV.16})$$

Les champs de déplacement réel \mathbf{v} et virtuel $\delta\mathbf{v}$ peuvent également s'écrire grâce aux fonctions de forme (dans l'hypothèse isoparamétrique) :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i \quad \delta\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n N_i \delta\mathbf{v}_i \quad (\text{IV.17})$$

où \mathbf{u}_i et $\delta\mathbf{v}_i$ sont les vecteurs déplacement réel et virtuel des points de la discrétisation. L'équation (IV.11) est alors discrétisée et devient :

$$D_{\delta\mathbf{v}}^2 \Pi_L = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i \otimes \nabla N_i + \nabla N_i \otimes \mathbf{u}_i) : \mathbb{C}^e : \frac{1}{2} (\delta\mathbf{v}_j \otimes \nabla N_j + \nabla N_j \otimes \delta\mathbf{v}_j) dv + (\mathbf{u}_i \delta\mathbf{v}_j) \int_{\Omega} \nabla N_i \boldsymbol{\sigma} \nabla N_j dv \quad (\text{IV.18})$$

IV.1.2 Une difficulté supplémentaire : l'incompressibilité

Les élastomères sont des matériaux classiquement considérés incompressibles, même si cette hypothèse a été récemment remise en cause (Heuillet et Dugautier, 1997). Les essais réalisés ont permis de montrer que le coefficient de compressibilité est nettement supérieur aux autres caractéristiques du matériau (cf. paragraphe I.2.2.5). L'implantation de l'incompressibilité pose de nombreux problèmes numériques (Gadala, 1986; Sussman et Bathe, 1987; Chen et Pan, 1996; Chen *et al.*, 1996) qui sont détaillés dans la suite.

IV.1.2.1 Problèmes numériques

Cas des contraintes planes

Les contraintes planes permettent de gérer l'incompressibilité de façon simple. La déformation dans la troisième direction de l'espace (direction de contraintes planes) se déduit des deux autres par utilisation de la conservation du volume. Le problème ne comporte plus que trois variables correspondant aux trois déformations du plan (deux elongations et un glissement). La direction de contraintes planes permet « d'équilibrer le volume » à chaque instant.

Autres cas

Les autres hypothèses de travail (déformations planes, cas tridimensionnel) ne peuvent être traitées de la même façon. La gestion de la variation de volume est classiquement réalisée (pour les métaux, bétons, composites, ...) par la connaissance du coefficient de Poisson ν . La conservation du volume conduirait intuitivement à une valeur de $\nu = 0,5$. Mais, Beatty et Stalnaker (1986) mettent en évidence les limites de l'utilisation du coefficient de Poisson pour les grandes déformations. Une valeur constante ne peut pas être utilisée; les auteurs montrent comment ν doit évoluer avec la déformation maximale pour que le matériau reste incompressible. Pour la traction uniaxiale, ils proposent la relation suivante :

$$\nu(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \lambda^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.19})$$

où λ est l'élongation dans la direction de traction. On note que l'on retrouve $\nu = 0,5$ dans l'état non déformé.

Le coefficient de Poisson ne peut donc plus être utilisé comme un paramètre matériel puisqu'il évolue avec la déformation. La gestion de l'incompressibilité nécessite donc l'utilisation d'autres méthodes que la simple utilisation du coefficient de Poisson pour mesurer la contraction latérale du matériau lors de son extension.

IV.1.2.2 Solutions proposées dans la bibliographie

Gestion stricte de l'incompressibilité

L'incompressibilité impose une liaison interne au matériau (Sidoroff, 1982). Celle-ci implique l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange. Une fonction de pénalité est ainsi introduite pour imposer l'incompressibilité, mais cette méthode a rarement été retenue et n'est pas utilisée dans les codes de calcul.

Passage du cas incompressible au cas quasi-incompressible

De nombreux auteurs ont proposé de décomposer les contraintes en deux parties (Bonet et Wood, 1997; Holzapfel, 2000; Attard, 2003), l'une déviatorique et l'autre sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} + \boldsymbol{\sigma}^{sph} \quad (\text{IV.20})$$

La partie déviatorique représente l'état de contrainte dans le matériau sans changement de volume, tandis que la partie sphérique représente les contraintes nécessaires pour garder le volume du matériau constant. Le matériau peut ainsi être décrit par deux types de grandeurs : celles qui mesurent la variation de volume et celles qui mesurent l'état de déformation à volume constant. La variation de volume est simplement représentée par une grandeur scalaire, le paramètre J , tandis que de nouvelles élongations ($\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ et $\bar{\lambda}_3$) du matériau sont définies pour décrire l'état de déformation à volume constant (Ogden, 1984) :

$$\bar{\lambda}_1 = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_1 \quad \bar{\lambda}_2 = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_2 \quad \bar{\lambda}_3 = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_3 \quad (\text{IV.21})$$

Cela conduit à définir de nouveaux invariants « incompressibles » de la transformation :

$$\bar{I}_1 = I_3^{-\frac{1}{3}} I_1 \quad \bar{I}_2 = I_3^{-\frac{2}{3}} I_2 \quad (\text{IV.22})$$

D'autres formulations ont été proposées dans la bibliographie mais n'ont pas été retenues jusqu'à présent (Nicholson, 1995).

En fait, ceci revient à considérer que la densité d'énergie du matériau peut se décomposer en parties déviatorique et volumique sous la forme :

$$W = \bar{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + U(J) \quad \text{ou} \quad W = \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U(J) \quad (\text{IV.23})$$

La partie déviatorique de la densité d'énergie est représentée par un modèle hyperélastique classique, tandis que la densité d'énergie volumique s'exprime à l'aide d'une fonction de pénalisation

qui dépend du jacobien de la transformation J (Kakavas et Chang, 1995). Le choix de la fonction doit répondre aux quatre conditions établies par Doll et Schweizerhof (2000) :

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow 0} U &= +\infty & \lim_{J \rightarrow +\infty} U &= +\infty \\ \lim_{J \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial J} &= -\infty & \lim_{J \rightarrow +\infty} \frac{\partial U}{\partial J} &= +\infty \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

En fait, la fonction de pénalité doit être convexe, avoir son minimum en 1 (Brink et Stein, 1996) et croître rapidement vers l'infini aux limites de l'intervalle. Un grand nombre de fonctions a été proposé dans la bibliographie. Elles sont présentées dans le tableau IV.2. Les formes sont

Référence	Densité d'énergie
Simo (1988); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = \frac{K}{2}(J-1)^2$
Valanis et Landel (1967)	$U(J) = K \frac{(\ln J)^2}{2}$
Simo et Taylor (1982); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = K \frac{(J-1)^2 + (\ln J)^2}{4}$
Ogden (1972); Kaliske et Rothert (1997b)	$U(J) = K\theta^2(\theta \ln J + J^{-\theta} - 1)$
Liu <i>et al.</i> (1992, 1994)	$U(J) = K(J \ln J - J + 1)$
Simo et Pister (1984)	$U(J) = \frac{1}{2}\lambda(\ln J)^2 - \mu \ln J$
Doll et Schweizerhof (2000)	$U(J) = K \frac{\exp(J-1) - \ln J - 1}{2}$
Doll et Schweizerhof (2000)	$U(J) = K(J-1) \ln \frac{J}{2}$
Kaliske et Rothert (1999)	$U(J) = \frac{K}{2} \left(\frac{J^2-1}{2} - \ln J \right)$

TAB. IV.2 – Fonctions de pénalisation proposées dans la bibliographie.

assez diverses et s'appuient soit sur la fonction $(J-1)$, soit sur $\ln J$. Toutes ces fonctions ne vérifient pas les conditions exposées précédemment (IV.24). L'allure des courbes des essais de compressibilité (cf. figure I.17) suggère une forme linéaire de la pression hydrostatique et donc une expression polynomiale de degré 2 de la densité d'énergie, forme recommandée par Brink et Stein (1996). La forme de fonction la plus adaptée est celle proposée par Simo (1988), et van den Bogert et de Borst (1990). Elle est couramment utilisée pour tous les élastomères mais est remise en cause par Heuillet *et al.* (1995) qui considèrent que le coefficient K dépend fortement de la pression hydrostatique appliquée. Il est important de noter que cette fonction ne vérifie pas la troisième condition énoncée :

$$\lim_{J \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial J} = -K \neq -\infty \quad (\text{IV.25})$$

Malgré tout, le fait d'avoir un coefficient de pénalité nettement supérieur aux autres paramètres du matériau permet de considérer que la condition est vérifiée. La figure IV.1 montre l'évolution de U et de sa dérivée avec la variation de volume.

Réécriture du problème éléments finis

La décomposition de la densité d'énergie en parties déviatorique et sphérique conduit à la gestion conjointe des champs de déplacement et de pression. Le principe des travaux virtuels

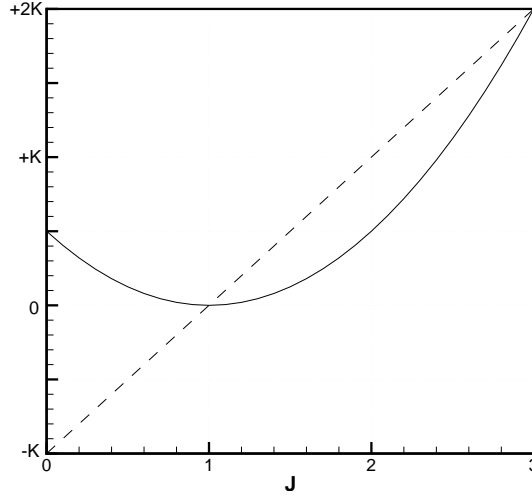


FIG. IV.1 – Variations de la fonction de pénalité quadratique $U(J) = K(J - 1)^2$ (—) et de sa dérivée, la pression hydrostatique (—).

(paragraphe IV.1.1.1) doit être réécrit pour prendre en compte le champ de pression (avec l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange p) :

$$\Pi_L(\mathbf{u}, p) = \Pi_{int}(\mathbf{u}, p) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (\text{IV.26})$$

Le travail des efforts extérieurs est inchangé mais celui des efforts intérieurs doit être réécrit :

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega_0} [\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u})) + p(J(\mathbf{u}) - 1)] dV \quad (\text{IV.27})$$

où le terme $p(J(\mathbf{u}) - 1)$ correspond à la variation de volume tandis que la fonction $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}})$ caractérise la réponse à isovolume du matériau. L'équation est alors différentiée par rapport aux champs de déplacement et de pression :

$$D_{\delta\mathbf{u}}\Pi_L = \int_{\Omega_0} \left(Jp \operatorname{div}(\delta\mathbf{v}) + 2 \frac{\partial \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{C}} \right) : D\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) dV + D_{\delta\mathbf{u}}\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{IV.28})$$

$$D_{\delta p}\Pi_L(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega_0} \delta p (J(\mathbf{u}) - 1) dV = 0 \quad (\text{IV.29})$$

Par linéarisation de l'équation (IV.28), on obtient une forme similaire à l'équation (IV.8) :

$$D_{\delta\mathbf{v}}^2\Pi_L = \int_{\Omega_0} D\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) : \mathbb{C}^L : D\mathbf{E}(\mathbf{u}) dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : [(\nabla_0\mathbf{u})^T(\nabla_0\delta\mathbf{v})] dV \quad (\text{IV.30})$$

mais avec un tenseur d'élasticité lagrangien différent :

$$\mathbb{C}^L = \widehat{\mathbb{C}}^L + \mathbb{C}_p^L + \mathbb{C}_k^L \quad (\text{IV.31})$$

avec :

$$\widehat{\mathbb{C}}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{dev}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{IV.32})$$

$$\mathbb{C}_p^L = J \frac{\partial U}{\partial J} \left[\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad (\text{IV.33})$$

$$\mathbb{C}_k^L = J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{IV.34})$$

puisqu'il se décompose en trois parties. La première (IV.32) correspond au tenseur d'élasticité du matériau considéré incompressible, tandis que les deux autres (IV.33) et (IV.34) correspondent aux tenseurs d'élasticité de la partie sphérique destinés à conserver constant le volume.

Utilisation d'éléments mixtes

Les codes de calcul proposent une discrétisation simultanée du champ de déplacement et du champ de pression. Ceci conduit à l'utilisation d'éléments mixtes (Abaqus, 2002). Ces derniers permettent de discrétiser séparément la pression et les déplacements (Takamatsu et Stricklin, 1976). La décomposition déviatorique-sphérique est ainsi directement gérée au sein des éléments (Mackerle, 1998).

IV.1.2.3 Remarque finale : limite de la séparation sphérique-déviatorique

Penn (1970) avait remis en cause l'hypothèse de décomposition de la densité d'énergie en parties déviatorique et sphérique à partir du dépouillement d'un essai de traction uniaxiale. Ces travaux n'ont été repris qu'une trentaine d'années plus tard par Ehlers et Eipper (1998) dans une approche numérique. Ils mettent en évidence que l'utilisation d'une formulation globale avec une fonction de pénalité est plus à même de décrire l'incompressibilité.

Dans le but de vérifier ces observations, nous avons réalisé le calcul d'une brique (un élément tridimensionnel à 8 noeuds) en traction uniaxiale à partir du modèle de Yeoh (les paramètres matériels utilisés sont ceux du modèle M1, cf. tableau III.7) et de la fonction de pénalisation de Simo (1988), et van den Bogert et de Borst (1990) (cf. tableau IV.2) à l'aide des deux formulations existantes :

- (a) la décomposition déviatorique-sphérique ;
- (b) la formulation totale avec une fonction de pénalité.

La figure IV.2 montre l'évolution de la réponse contrainte-déformation des deux formulations pour différents rapports entre le module de cisaillement et le coefficient de compressibilité. Il apparaît que la réponse de la formulation globale est indépendante du coefficient de pénalité tandis que la réponse de la séparation déviatorique-sphérique dépend fortement du coefficient de compressibilité pour les grandes déformations. La figure IV.3 montre l'évolution de la déformation transversale en fonction de la déformation longitudinale. La formulation globale permet de retrouver exactement la réponse d'un matériau incompressible, donc de conserver le volume constant. En revanche, on constate que la décomposition déviatorique-sphérique ne conserve pas l'incompressibilité ; en effet le volume augmente. On note qu'aux grandes déformations, lorsque la déformation longitudinale est très importante, la déformation transversale augmente, ce qui est physiquement aberrant. Ceci est dû au fait que la décomposition déviatorique-sphérique est

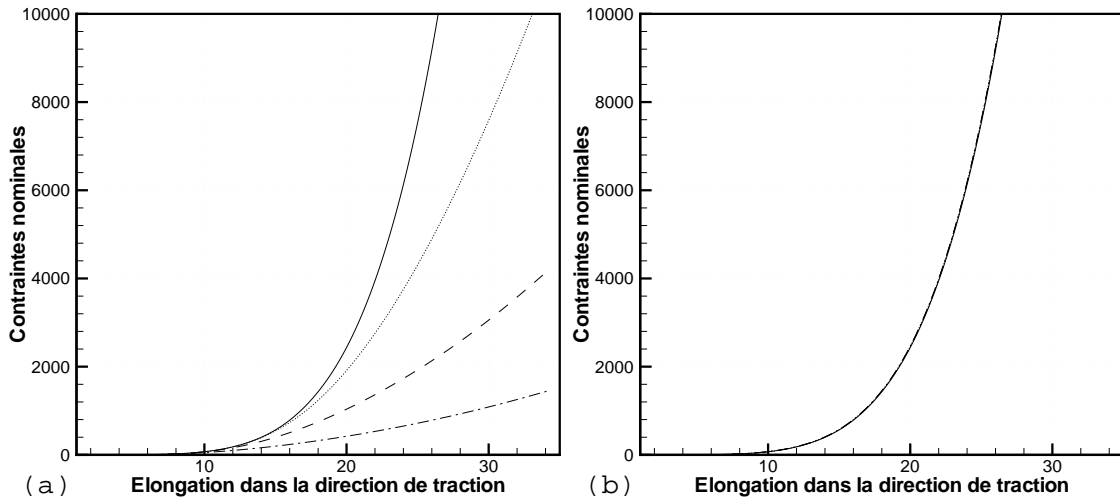


FIG. IV.2 – Comparaison de l'évolution de la contrainte en fonction du rapport entre le module de cisaillement et le coefficient de pénalité : (---) 10000, (- · -) 1000, (· · ·) 100 pour (a) la décomposition déviatorique-sphérique, et (b) la formulation globale. La référence est la formulation incompressible analytique (—).

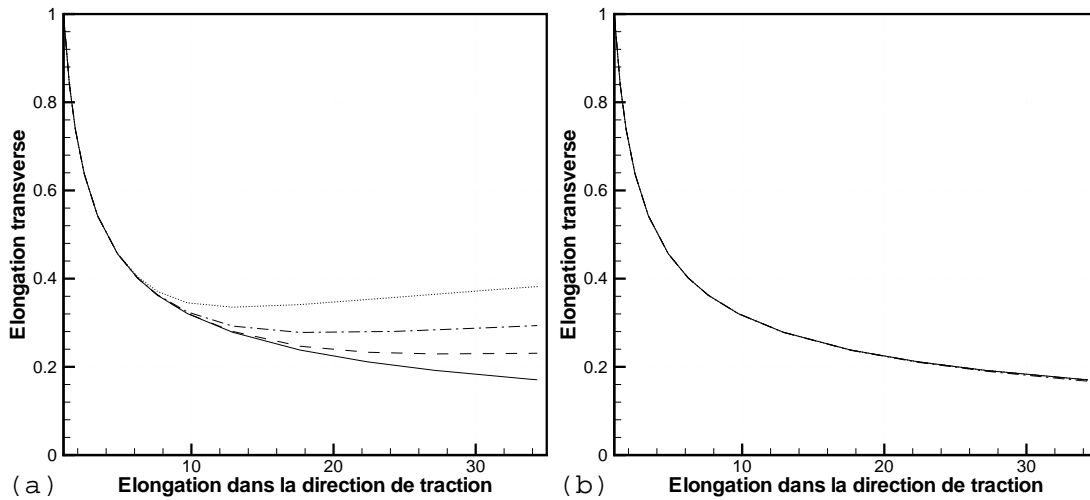


FIG. IV.3 – Évolution de la section de la brique en fonction du rapport entre le module de cisaillement et le coefficient de pénalité : (---) 10000, (- · -) 1000, (· · ·) 100 pour (a) la décomposition déviatorique-sphérique, et (b) la formulation globale. La référence est la formulation incompressible analytique (—).

une formulation quasi-incompressible et non incompressible. Ce problème est indépendant de la forme de la fonction de pénalité et de la densité d'énergie hyperélastique. Il dépend uniquement du rapport entre les contraintes déviatorique et sphérique.

La différence entre la solution analytique incompressible et la solution numérique du problème décomposé en parties déviatorique et sphérique est négligeable pour les déformations modérées. On constate que la zone où les deux formulations sont confondues dépend fortement du coefficient

de pénalité. Au regard des déformations acceptables par notre matériau et du rapport entre son coefficient de compressibilité et son module de cisaillement, la décomposition déviatorique-sphérique est totalement justifiée dans le présent travail.

IV.1.3 Stabilité des lois

Les lois implantées doivent vérifier des conditions de polyconvexité pour être stables (Ball, 1977; Kruzik, 1999). Nicholson (1995) a vérifié ces conditions dans le cas de sollicitations simples, tandis que Romanov (2001) a étudié la stabilité pour différents types de chargement. Les séries de Rivlin posent un problème de stabilité évoqué par Kao et Razgunas (1986) qui émettent des restrictions sur les valeurs des coefficients du matériau. Pour Heuillet *et al.* (1995), les séries de Rivlin avec un grand nombre de termes présentent des difficultés aux limites du domaine d'identification. Ceci renforce le problème d'utilisation des termes dépendant du second invariant exposé dans le paragraphe II.1.4.

Selon Johnson *et al.* (1994), assurer la stabilité sur les essais simples n'assure pas la stabilité pour tous les modes de sollicitations. Ces auteurs ont étudié la stabilité d'une série de Rivlin à cinq termes et ont imposé des conditions entre les coefficients. Assurer la stabilité permet, selon Johnson *et al.* (1994), d'éviter les simulations « étranges » en dehors de l'intervalle de déformation utilisé pour l'identification. Une condition suffisante couramment utilisée (Hartmann, 2001) consiste à imposer la positivité de tous les coefficients. Przybylo et Arruda (2000) ont mis en évidence que ces conditions suffisantes de stabilité conduisent à des identifications de qualité inférieure.

Le problème de la stabilité ne sera pas abordé ici, pour les détails le lecteur pourra se reporter à Bikard (2002). La stabilité des différents modèles a simplement été testée sur les cas de sollicitations simples utilisés par Abaqus (2002).

IV.2 Application : mise en oeuvre dans Abaqus

Le choix du code de calcul n'est pas discuté ici. Le code de calcul Abaqus a été retenu pour une question d'opportunité. Aucune comparaison des caractéristiques des différents codes n'est donc réalisée, simplement les principales caractéristiques d'Abaqus sont présentées.

IV.2.1 Généralités sur l'approche retenue

Abaqus utilise une formulation différente de celles exposées dans le paragraphe IV.1.1.1. L'étude est réalisée à partir de la configuration réactualisée $\mathbf{F}_t(t + dt)$ (Chen *et al.*, 1997). Ainsi, les équations sont modifiées pour prendre en compte la nouvelle configuration de référence (Chicheportiche, 1998; Martin-Borret, 1998). Un nouveau tenseur d'élasticité est introduit : le tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé. Celui-ci s'obtient après quelques étapes de calcul

(Martin-Borret, 1998; Abaqus, 2002) :

$$\mathbb{C}^{Lr} = [\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbb{S} + \mathbb{S} \circ \boldsymbol{\sigma}] + \frac{1}{J} \mathbf{F} \circ \left[\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \mathbf{E}} : (\mathbf{F}^T \circ \mathbb{S} \circ \mathbf{F}) \right] \circ \mathbf{F}^T \quad (\text{IV.35})$$

Les deux termes de l'équation sont le terme de convection et le terme de transport de la configuration initiale vers la configuration actuelle que l'on peut écrire :

$$\mathbb{C}^{Lr} = [\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbb{S} + \mathbb{S} \circ \boldsymbol{\sigma}] + \frac{1}{J} \phi_* [\mathbb{C}^L] = [\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbb{S} + \mathbb{S} \circ \boldsymbol{\sigma}] + \frac{1}{J} \mathbb{C}^e \quad (\text{IV.36})$$

Le tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé se déduit donc du calcul du tenseur d'élasticité lagrangien et du tenseur des contraintes eulériennes par (IV.36).

L'implantation d'une loi de comportement dans Abaqus nécessite donc le calcul des contraintes eulériennes et du tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé.

IV.2.2 Détails sur la UMAT

L'introduction de lois de comportement dans Abaqus se fait grâce à une subroutine utilisateur « UMAT » en langage FORTRAN.

IV.2.2.1 Description de la subroutine

La subroutine UMAT permet d'intégrer sa propre loi de comportement dans le logiciel Abaqus. Le traitement d'un problème en grandes transformations avec des non-linéarités aussi bien géométriques que matérielles nécessite la discrétisation temporelle du problème. Le calcul est réalisé par étapes successives de calcul à partir d'une méthode d'intégration implicite (Lefeuvre, 2003).

Le code fournit toutes les variables internes au temps t_n et une prédiction de l'état de déformation à l'instant t_{n+1} est réalisée. La subroutine UMAT doit évaluer les contraintes et le tenseur d'élasticité à partir de ces grandeurs à chaque instant. Abaqus laisse la possibilité d'enregistrer des variables au cours du temps en chaque point d'intégration (pour nous le critère de déformation). L'algorithme de travail de la subroutine UMAT est présenté dans le tableau IV.3.

IV.2.2.2 Calcul des grandeurs utiles

Les grandeurs utiles à l'implantation sont les contraintes eulériennes et le tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé. Ce dernier est un point stratégique pour assurer la convergence des calculs. De nombreux auteurs (Bolzon et Vitaliani, 1989; Gadala, 1992; Kaliske et Rothert, 1997a; Kaliske *et al.*, 2001) se sont intéressés à son évaluation dans différents cadres, aussi bien hyperélastique, qu'accommodable ou viscoélastique. Les tenseurs d'élasticité des modèles hyperélastiques classiques sont proposés par Kim *et al.* (1994) et Kaliske et Rothert (1997b) mais ici ces modèles sont couplés avec des lois d'accommodation.

Pour un incrément de chargement donné à l'instant t_{n+1} , le gradient de la déformation \mathbf{F}_{n+1} est donné.

1. Calcul du gradient de la transformation incompressible :

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = \det(\mathbf{F}_{n+1})^{-1/3} \mathbf{F}_{n+1}$$

2. Calcul du tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche incompressible :

$$\bar{\mathbf{B}}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^T$$

et de son premier invariant :

$$\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}_{n+1})$$

3. Détermination des mesures des déformations courante et maximale, respectivement α et $\bar{\alpha}$:

$$\alpha = \sqrt{\bar{I}_1/3} - 1 \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} \leftarrow \max(\bar{\alpha}, \alpha)$$

4. Mise à jour des paramètres d'accommodation :
si $\alpha = \bar{\alpha}$ et $\dot{\alpha} > 0$ alors

Evolution des paramètres

- (i) Loi de dommage : $d_{n+1} \leftarrow \tilde{d}(\bar{\alpha})$

- (ii) Théorie d'altération : $C_i^{m+1} \leftarrow C_i(\bar{\alpha})$

sinon

Non-évolution des paramètres

- (i) Loi de dommage : $d_{n+1} \leftarrow d_n$

- (ii) Théorie d'altération : $C_i^{m+1} \leftarrow C_i^m$

fin si

5. Calcul du tenseur des contraintes et du tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé.
-

TAB. IV.3 – *Algorithme utilisé dans la subroutine UMAT d'Abaqus pour l'implantation numérique d'un modèle d'accommodation à l'effet Mullins : (i) modèle M1, (ii) modèle M4.*

Les expressions des contraintes eulériennes et des tenseurs d'élasticité sont ici évaluées dans différents cadres de travail avec les formulations tridimensionnelles, en contraintes planes, déformations planes et axisymétrique. Les modèles développés dans le chapitre III ne s'expriment qu'en fonction du premier invariant de la transformation. Ainsi, seul ce cas particulier est détaillé dans la suite.

Cas tridimensionnel

L'énergie de déformation est décomposée (cf. paragraphe IV.1.2.2) en une partie isovolume dépendant du premier invariant et une partie dépendant du jacobien de la transformation d'après

les relations IV.23 :

$$W = \bar{W}(\bar{I}_1) + f(J) \quad (\text{IV.37})$$

Les contraintes lagrangiennes se décomposent donc en deux parties, l'une déviatorique et l'autre sphérique :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{S}^{dev} + \mathbf{S}^{sph} &= 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} + J \frac{\partial f}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + J \frac{\partial f}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + J \frac{\partial f}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Les contraintes eulériennes se déduisent simplement de l'expression précédente :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} + \boldsymbol{\sigma}^{sph} = \frac{1}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} (\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I}) + \frac{\partial f}{\partial J} \mathbf{I} \quad (\text{IV.39})$$

La décomposition déviatorique sphérique permet le découplage du tenseur d'élasticité en trois parties (cf. paragraphe IV.1.2.2). La partie déviatorique du tenseur lagrangien se déduit de la dérivation des contraintes déviatoriques lagrangiennes :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^l &= 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{dev}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{1}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \right) \otimes \left(\frac{1}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \right) \\ &= 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \det(\mathbf{C})^{-\frac{1}{3}}}{\partial \det(\mathbf{C})} \frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(-\frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &+ \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &= \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{1}{3} I_1 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{9} I_1 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &+ \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{9} I_1^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

Le tenseur d'élasticité déviatorique eulérien est déterminé à partir de l'expression précédente par l'utilisation de la transformation Push-Forward (IV.13) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^e &= \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{1}{3} \bar{I}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{9} \bar{I}_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \\ &+ \frac{2}{J} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{9} \bar{I}_1^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

soit en écriture indicielle :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ijkl}^e &= \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{1}{3} \bar{I}_1 \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{B}}_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} + \frac{1}{9} \bar{I}_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\ &+ \frac{2}{J} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\bar{\mathbf{B}}_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} - \frac{1}{3} I_1 \bar{\mathbf{B}}_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} + \frac{1}{9} I_1^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Le terme de convection s'écrit simplement grâce au tenseur des contraintes eulériennes :

$$(\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbb{S} + \mathbb{S} \circ \boldsymbol{\sigma})_{ijkl} = \frac{1}{2J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} (\bar{\mathbf{B}}_{ik} \delta_{jl} + \bar{\mathbf{B}}_{il} \delta_{jk} + \bar{\mathbf{B}}_{jl} \delta_{ik} + \bar{\mathbf{B}}_{jk} \delta_{il} - \frac{\bar{I}_1}{3} (2\delta_{ik} \delta_{jl} + 2\delta_{il} \delta_{jk})) \quad (\text{IV.43})$$

Finalement, le tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé se déduit des deux équations précédentes par addition :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{C}}_{ijkl}^r &= \frac{1}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{1}{2} (\bar{\mathbf{B}}_{ik} \delta_{jl} + \bar{\mathbf{B}}_{il} \delta_{jk} + \bar{\mathbf{B}}_{jl} \delta_{ik} + \bar{\mathbf{B}}_{jk} \delta_{il}) \right) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(-\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_{ij} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} + \frac{2}{9} \bar{I}_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\ &+ \frac{2}{J} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\bar{\mathbf{B}}_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}}_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \delta_{ij} \bar{\mathbf{B}}_{kl} + \frac{1}{9} \bar{I}_1^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

Les contraintes et le tenseur d'élasticité sont ici simplement paramétrés par les dérivées première et seconde de l'énergie de déformation par rapport au premier invariant de la transformation. La formulation précédemment énoncée est valable pour tous les modèles ne dépendant que du premier invariant.

Les deux autres termes du tenseur d'élasticité (IV.33) et (IV.34) se déduisent de la fonction de pénalité et s'écrivent, pour le choix de la fonction de pénalité quadratique :

$$\mathbb{C}_p^L = 2KJ(J-1) \left[\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad (\text{IV.45})$$

$$\mathbb{C}_k^L = 2KJ^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{IV.46})$$

Cas des déformations planes

Les déformations planes ne sont qu'un cas particulier du problème tridimensionnel (Bonet et Wood, 1997). L'élongation dans la troisième direction de l'espace reste égale à 1. L'incompressibilité est ici simplement gérée dans le plan. Les calculs réalisés précédemment restent valables en ne conservant que les deux premières directions de l'espace. Les difficultés numériques liées à la gestion de l'incompressibilité sont les mêmes dans les cas tridimensionnels et de déformations planes.

Cas axisymétrique

Le problème axisymétrique est lui aussi un cas particulier de la formulation tridimensionnelle. La troisième direction de l'espace (orthoradiale) est principale, ainsi les tenseurs des déformations et contraintes ont une forme particulière puisque le problème se réduit à un problème plan avec la gestion d'une direction principale supplémentaire. Le cas axisymétrique se traite de façon identique au problème tridimensionnel avec une forme particulière des tenseurs qui possèdent deux termes nuls hors de la diagonale.

Cas des contraintes planes

La formulation globale des contraintes lagrangiennes et eulériennes est identique au problème tridimensionnel :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{I} + p \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + p \mathbf{I} \quad (\text{IV.47})$$

Simplement ici, la pression hydrostatique se détermine par la connaissance de l'état de déformation dans la troisième direction de l'espace grâce à l'hypothèse d'incompressibilité $\det(\mathbf{B}) = 1$ qui impose une restriction cinématique. On peut alors écrire :

$$B_{33} = C_{33} = \frac{1}{\det(\mathbf{B}_{cp})} \stackrel{\text{def}}{=} j^2 \quad (\text{IV.48})$$

Ceci nous conduit à introduire les grandeurs planes \mathbf{S}_{cp} , \mathbf{B}_{cp} et $\boldsymbol{\sigma}_{cp}$. Elles désignent les tenseurs classiques restreints aux deux premières directions de l'espace. Les relations contraintes déformations (IV.47) deviennent alors :

$$\mathbf{S}_{cp} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (\mathbf{I} - j^2 \mathbf{C}_{cp}^{-1}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_{cp} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (\mathbf{B}_{cp} - j^2 \mathbf{I}) \quad (\text{IV.49})$$

Le tenseur d'élasticité lagrangien se déduit des contraintes lagrangiennes par dérivation :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{cp}^l &= 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{cp}}{\partial \mathbf{C}_{cp}} & (\text{IV.50}) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{cp}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} (\mathbf{I} - j^2 \mathbf{C}_{cp}^{-1}) \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - j^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}_{cp}^{-1}) + 2j^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \left(\mathbf{C}_{cp}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{cp}^{-1} + \frac{\partial \mathbf{C}_{cp}^{-1}}{\partial \mathbf{C}_{cp}} \right) \end{aligned}$$

Le tenseur d'élasticité eulérien se détermine, tout comme dans le cas tridimensionnel, par l'utilisation de la transformation Push-Forward :

$$\mathbb{C}_{cp}^e = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} (\mathbf{B}_{cp} \otimes \mathbf{B}_{cp} - j^2 \mathbf{B}_{cp} \otimes \mathbf{I}) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} j^2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbb{I}) \quad (\text{IV.51})$$

Le terme de convection prend une forme différente du cas tridimensionnel du fait de la connaissance de la valeur de la pression hydrostatique :

$$(\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbb{S} + \mathbb{S} \circ \boldsymbol{\sigma})_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_1} (\mathbf{B}_{ik} \delta_{jl} + \mathbf{B}_{il} \delta_{jk} + \mathbf{B}_{jl} \delta_{ik} + \mathbf{B}_{jk} \delta_{il} - 2j^2 \delta_{ik} \delta_{jl} - 2j^2 \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{IV.52})$$

Le tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé s'obtient par ajout des termes de transformation et de convection (IV.51) et (IV.52) :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}_{cp}^{Lr})_{ijkl} &= \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_1} (\mathbf{B}_{ik} \delta_{jl} + \mathbf{B}_{il} \delta_{jk} + \mathbf{B}_{jl} \delta_{ik} + \mathbf{B}_{jk} \delta_{il}) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \mathbf{B}_{ij} (\mathbf{B}_{kl} - j^2 \delta_{kl}) + \frac{\partial W}{\partial I_1} j^2 (2\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{IV.53}) \end{aligned}$$

IV.2.2.3 Application aux modèles considérés

Les formulations des tenseurs d'élasticité sont maintenant appliquées aux modèles développés dans le chapitre III. Ils reposent sur les densités hyperélastiques de Hart-Smith (1966), Gent (1996) et Yeoh (1990). Les dérivées de l'énergie de déformation sont proposées dans le tableau IV.4. Le modèle néo-hookéen est présenté à titre comparatif. L'introduction d'une loi de dom-

Modèles hyperélastiques	$\frac{\partial W}{\partial I_1}$	$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}$
Néo-Hookéen (1942)	C_1	0
Yeoh (1990)	$C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$	$2C_{20} + 6C_{30}(I_1 - 3)$
Hart-Smith (1966)	$C_1 \exp\{C_3(I_1 - 3)^2\}$	$2C_1 C_3 (I_1 - 3) \exp\{C_3(I_1 - 3)^2\}$
Gent (1996)	$\frac{EJ_m}{6} \frac{1}{J_m - I_1 + 3}$	$\frac{EJ_m}{6} \frac{1}{(J_m - I_1 + 3)^2}$

TAB. IV.4 – Dérivées première et seconde de l'énergie de déformation de quelques modèles hyperélastiques par rapport au premier invariant de la transformation.

mage (modèle M1) ou d'une fonction d'évolution (modèle de Zuñiga et Beatty (2002b)) modifie les expressions précédentes (cf. tableau IV.5). Deux termes apparaissent, le premier modifie sim-

Modèles accommodables	$\frac{\partial W_0}{\partial I_1}$	$\frac{\partial^2 W_0}{\partial I_1^2}$
Endommagement	$(1 - D) \frac{\partial W_0}{\partial I_1}$	$(1 - D) \frac{\partial^2 W_0}{\partial I_1^2} - \frac{\partial D}{\partial I_1} \frac{\partial W_0}{\partial I_1}$
Elias-Zuñiga et Beatty	$F(M, m) \frac{\partial W_0}{\partial I_1}$	$F(M, m) \frac{\partial^2 W_0}{\partial I_1^2} + \frac{\partial F(M, m)}{\partial I_1} \frac{\partial W_0}{\partial I_1}$

TAB. IV.5 – Dérivées première et seconde de l'énergie de déformation des modèles accommodables de type endommagement ou double réseau par rapport au premier invariant de la transformation.

plement le terme hyperélastique, le second fait intervenir les dérivées des fonctions de dommage et d'évolution :

$$\frac{\partial D}{\partial I_1} = \begin{cases} -\frac{D_\infty}{2\eta\sqrt{3I_1}} \exp(-\frac{\bar{\alpha}}{\eta}) & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ \frac{b}{2\sqrt{\bar{\alpha} - \alpha}} \exp(-b\sqrt{\bar{\alpha} - \alpha}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

Ces fonctions prennent des valeurs différentes selon le trajet de chargement (charge ou décharge). Il apparaît que la fonction d'évolution de Zuñiga et Beatty (2002b) présente une tangente verticale au début de chaque décharge, ce qui pose des problèmes numériques puisque (IV.55) n'est plus définie.

Les théories d'altération sont fondées sur l'évolution des paramètres matériels en fonction de la déformation maximale. La dérivée première de l'énergie de déformation n'est pas modifiée par rapport au modèle hyperélastique de base (cf. tableau IV.4), simplement ici les paramètres

évoluent. En revanche, les dérivées secondes sont différentes, leurs valeurs sont présentées dans le tableau IV.6 dans le cas des modèles M3 et M4. Les dérivées des paramètres par rapport à la

Modèles d'altération	$\frac{\partial^2 W_0}{\partial I_1^2}$
Hart-Smith	$\left[\frac{\partial C_1}{\partial I_1} + C_1 \frac{\partial C_3}{\partial I_1} (I_1 - 3)^2 + 2C_1 C_3 (I_1 - 3) \right] \exp\{C_3 (I_1 - 3)^2\}$
Gent	$\frac{J_m}{6} \frac{\partial E}{\partial I_1} \frac{1}{J_m - I_1 - 3} + \left(\frac{E J_m}{6} - (I_1 - 3) \frac{\partial J_m}{\partial I_1} \right) \frac{1}{(J_m - I_1 - 3)^2}$

TAB. IV.6 – Dérivée seconde de l'énergie de déformation des modèles d'altération par rapport au premier invariant de la transformation.

déformation évoluent durant les charges et sont nulles pendant les décharges :

– Modèle M3.

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} = \begin{cases} -\frac{E_0 E_1}{2\sqrt{3}I_1} \exp(-E_1 \bar{\alpha}) & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

$$\frac{\partial J_m}{\partial I_1} = \begin{cases} \frac{J_{m0} J_{m1}}{2\sqrt{3}I_1} \exp(J_{m1} \bar{\alpha}) & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

– Modèle M4.

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} = \begin{cases} -\frac{C_{1a} C_{1b}}{2\sqrt{3}I_1} \exp(C_{1b} \bar{\alpha}) & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial I_1} = \begin{cases} -\frac{C_{3a} C_{3b}}{2\sqrt{3}I_1} \exp(C_{3b} \bar{\alpha}) & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \text{ et } \dot{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

IV.2.2.4 Remarque finale

Toutes les densités d'énergie traitées ici sont uniquement exprimées en fonction du premier invariant de la transformation. Classiquement, les densités d'énergie dépendent des deux premiers invariants. L'ajout du terme en I_2 modifie les équations précédemment proposées puisque l'on retrouve un ou deux termes supplémentaires. Les modifications des équations sont présentées ici dans le cas tridimensionnel.

Les contraintes lagrangiennes contiennent maintenant deux termes provenant des dérivations par rapport à chacun des invariants :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{dev} &= 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + \frac{2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Les contraintes eulériennes se déduisent simplement de l'expression précédente :

$$\boldsymbol{\sigma}^{dev} = \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} (\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I}) + \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} (\bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^2 - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \mathbf{I}) \quad (\text{IV.61})$$

Le tenseur d'élasticité lagrangien s'exprime alors simplement par une seconde dérivation :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^L &= 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \\ &+ 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

Le tenseur d'élasticité contient ici quatre termes supplémentaires par rapport aux modèles dépendant seulement du premier invariant. L'utilisation des deux invariants de la transformation est aisée mais entraîne des formules très « lourdes ». Le modèle le plus simple d'utilisation est le modèle de Mooney-Rivlin qui présente une forme linéaire par rapport aux deux premiers invariants. Le modèle est traité ici à titre d'exemple :

$$\bar{W} = C_1 (\bar{I}_1 - 3) + C_2 (\bar{I}_2 - 3) \quad (\text{IV.63})$$

– contraintes eulériennes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2C_1}{J} (\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I}) + \frac{2C_2}{J} (\bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^2 - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \mathbf{I}) \quad (\text{IV.64})$$

– tenseur d'élasticité lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^L &= \frac{C_1}{\det \mathbf{C}^{-\frac{1}{3}}} \left[-\frac{1}{3} I_1 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{9} I_1 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \\ &+ \frac{C_2}{\det \mathbf{C}^{-\frac{2}{3}}} \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbb{I} - \frac{2}{3} I_2 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} - \frac{2}{3} I_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \\ &+ \frac{C_2}{\det \mathbf{C}^{-\frac{2}{3}}} \left[\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} + \frac{2}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{4}{9} I_2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

Il apparaît que l'expression est nettement plus « longue » que pour le modèle néo-hookéen (*i.e.* lorsque $C_2 = 0$) puisque deux termes supplémentaires apparaissent. L'utilisation de fonctions autres que linéaires dépendant de I_2 ou de fonctions dépendant conjointement des deux invariants fait apparaître plusieurs autres termes dans l'expression précédente. Si ce n'est une écriture plus « complexe », l'utilisation du second invariant ne pose pas de difficulté majeure.

IV.3 Validation sur les essais simples

La validation des sous-routines UMAT que nous avons développées est réalisée par la simulation des essais simples dans le cadre de différentes hypothèses : les contraintes planes, les déformations planes, l'axisymétrie et le cas tridimensionnel. Les résultats sont comparés aux formulations analytiques et aux résultats expérimentaux. Dans un premier temps, les essais de traction uniaxiale et de glissement pur sont simulés et comparés aux formulations analytiques incompressibles. Dans un second temps, des essais de glissement simple et de compression sont simulés pour montrer le côté prédictif des lois proposées.

IV.3.1 Éprouvette haltère

Les éprouvettes de traction ont une épaisseur très faible (2 mm pour une longueur de 80 mm), ce qui permet de les étudier sous l'hypothèse des contraintes planes. La figure IV.4 présente les

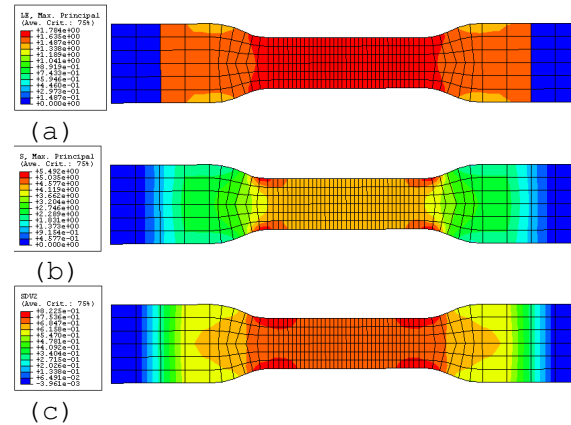


FIG. IV.4 – Simulation de l'étirement de 240 mm d'une éprouvette de traction uniaxiale avec le modèle M1 représentée dans la configuration non-déformée : (a) déformation logarithmique maximale principale, (b) contrainte eulérienne maximale principale, (c) accommodation à l'effet Mullins.

états de contrainte, de déformation et de dommage de l'éprouvette représentée dans l'état non déformé pour plus de clarté, après avoir subi un étirement de 240 mm. Il apparaît que les hypothèses de dépouillement des essais sont vérifiées, puisque la zone centrale de l'éprouvette se déforme de façon homogène. La figure IV.5 présente une comparaison entre les calculs éléments

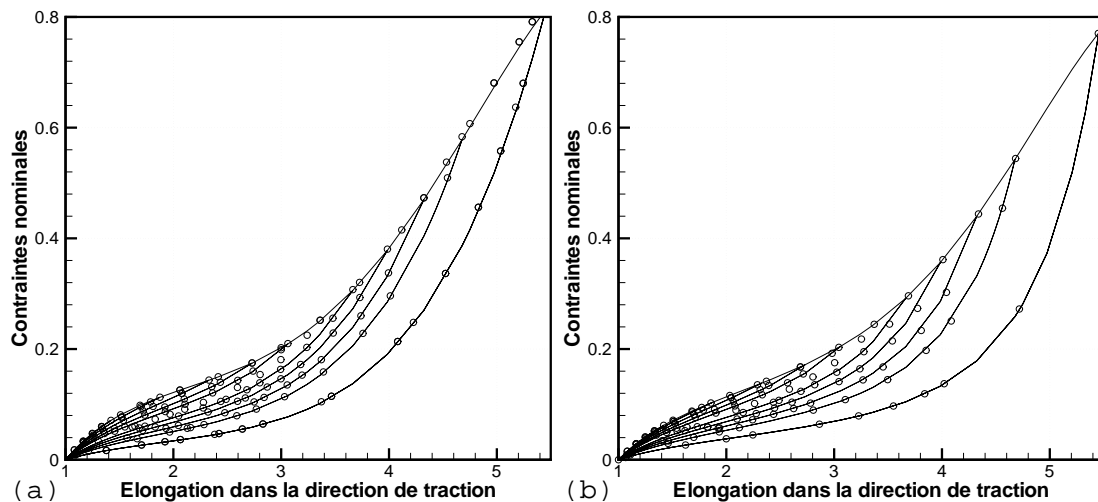


FIG. IV.5 – Comparaison des solutions numériques (—) et des solutions analytiques incompressibles (o) d'un essai de traction uniaxiale : (a) le modèle M1, (b) modèle M4.

finis et les solutions analytiques incompressibles du problème de traction pour les deux modèles M1 et M4. Il apparaît que le calcul éléments finis reproduit exactement les solutions analytiques.

Le calcul en contraintes planes simule donc les essais avec la même qualité que les simulations uniaxiales présentées dans le chapitre III (cf. figures III.7 et III.17).

IV.3.2 Éprouvette de glissement pur

Les essais de glissement pur (longueur 350 mm, hauteur 35 mm et épaisseur 2 mm) se traitent également dans le cadre des contraintes planes. La figure IV.6 présente une éprouvette soumise

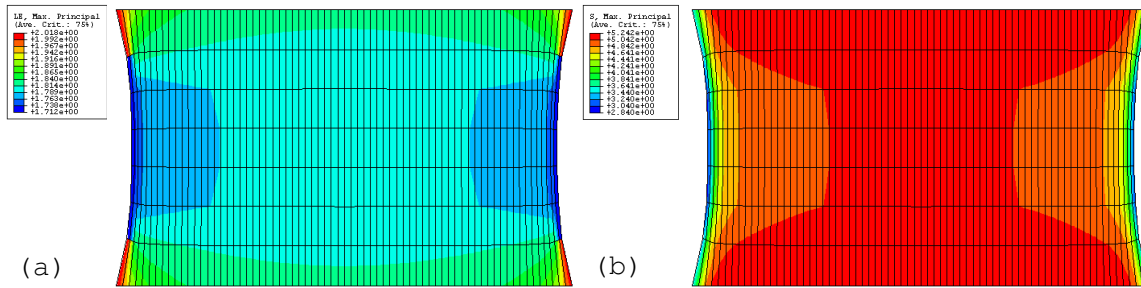


FIG. IV.6 – Simulation de l'étirement de 175 mm d'une éprouvette de glissement pur avec le modèle M_4 : (a) déformation logarithmique maximale principale, (b) contrainte eulérienne maximale principale.

à un déplacement de 175 mm. Il apparaît que l'état de déformation est quasiment homogène dans toute l'éprouvette. Les effets de bord sont très limités. Une comparaison des simulations numériques avec les solutions analytiques incompressibles est présentée sur la figure IV.7. Tout

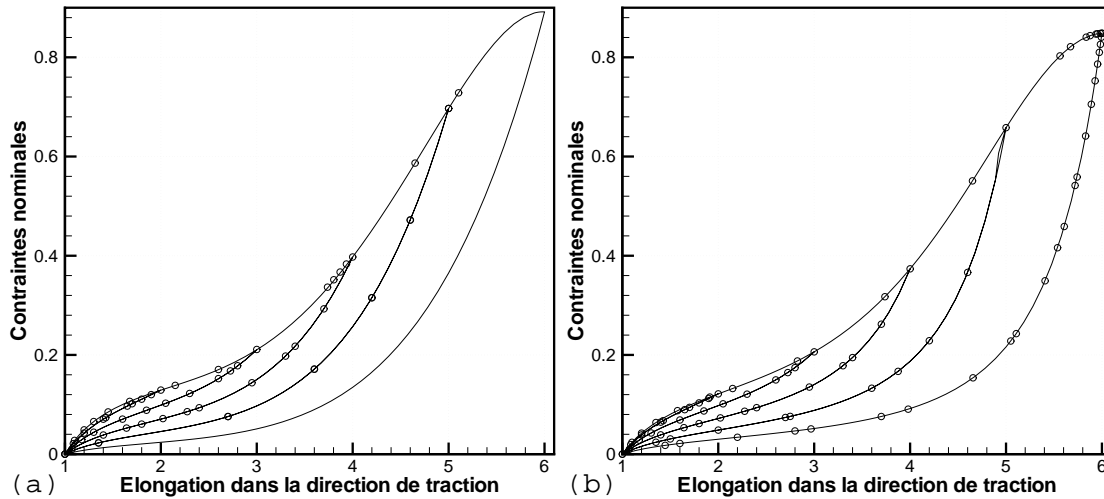


FIG. IV.7 – Comparaison des solutions numériques (—) et des solutions analytiques incompressibles (o) d'un essai de glissement pur : (a) modèle M_1 , (b) modèle M_4 .

comme lors de l'essai de traction, la solution éléments finis permet de retrouver exactement la formulation analytique incompressible.

IV.3.3 Éprouvette de glissement simple

Les éprouvettes de glissement simple sont massives (longueur 25 mm, largeur 20 mm et épaisseur 4 mm), elles peuvent être traitées dans le cadre tridimensionnel ou sous l'hypothèse des déformations planes. La figure IV.8 montre l'état de contrainte et de déformation dans

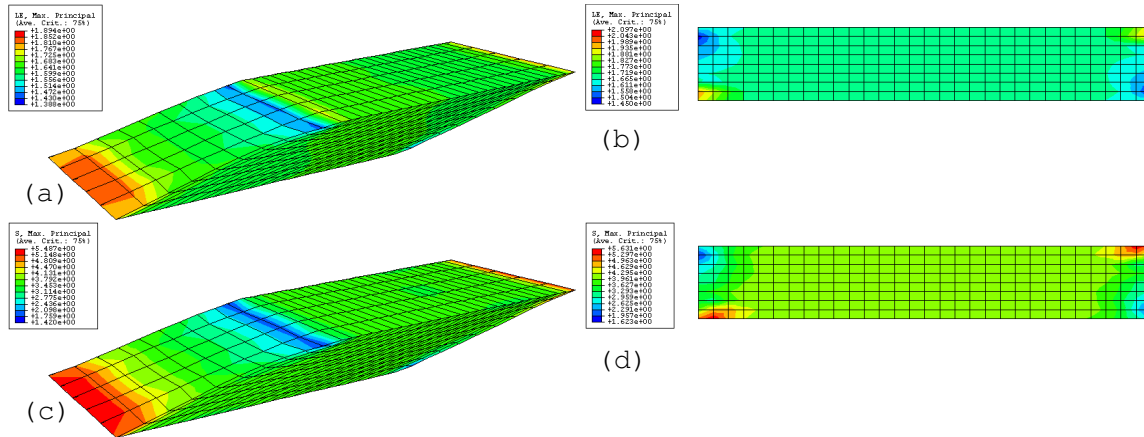


FIG. IV.8 – Calcul de l'éprouvette de glissement simple en formulation tridimensionnelle et en déformations planes (ici en représentation non déformée). (a) Déformation maximale principale pour un calcul tridimensionnel. (b) Déformation maximale principale pour un calcul en déformations planes. (c) Contrainte maximale principale pour un calcul tridimensionnel. (d) Contrainte maximale principale pour un calcul en déformations planes.

l'éprouvette pour un déplacement imposé de 20 mm. Les simulations mettent en évidence un léger effet de bord. Malgré tout, les états de contrainte et de déformation peuvent être considérés comme homogènes. Lors des essais, deux grandeurs globales sont mesurées : le déplacement et la force appliquée sur l'éprouvette. La figure IV.9 compare les réponses dans les cadres tridimen-

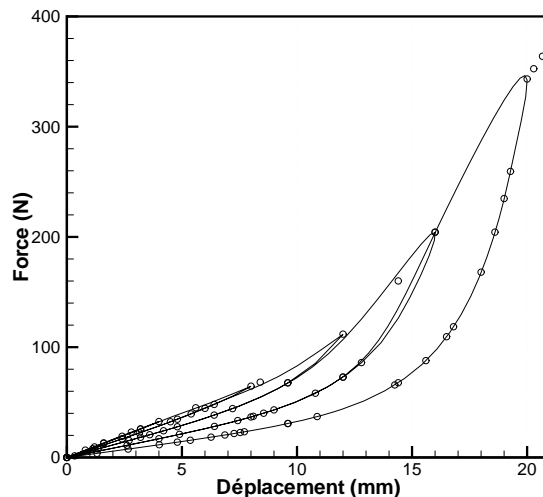


FIG. IV.9 – Comparaison des formulations tridimensionnelle (—) et en déformations planes (o) avec le modèle M_4 dans le cas de l'éprouvette de glissement simple.

sionnel et de déformations planes. Il apparaît que celles-ci sont similaires. La différence entre les deux calculs est de l'ordre de 3% pour les contraintes et 10% pour les déformations dans les zones les plus sollicitées. Cela permet de justifier l'utilisation des déformations planes pour la modélisation de l'éprouvette de glissement simple et surtout, de valider les formulations du problème (tridimensionnelle et déformations planes) l'une par rapport à l'autre.

La figure IV.10 compare la réponse des modèles M1 et M4 aux résultats expérimentaux du

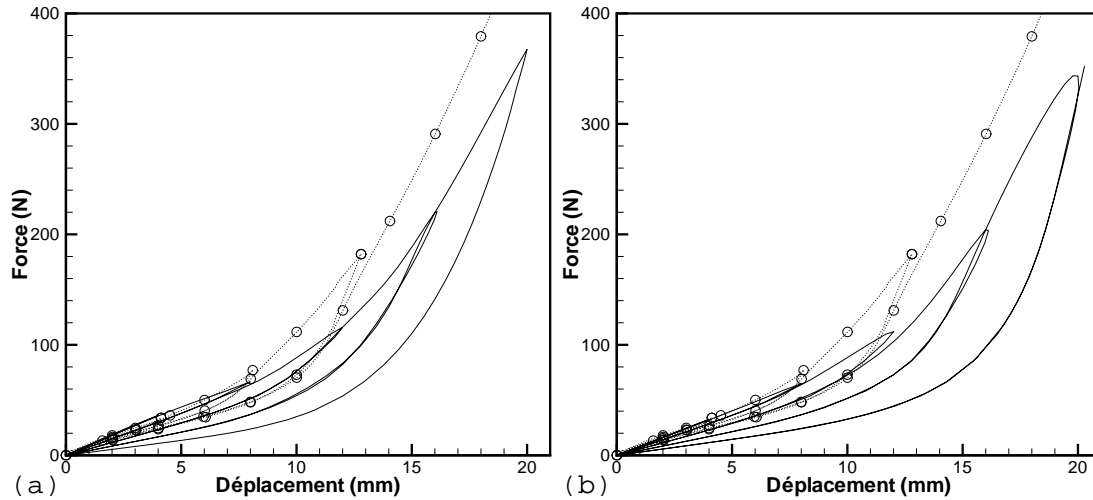


FIG. IV.10 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de glissement simple (—) aux résultats expérimentaux ($\cdots \circ \cdots$): (a) modèle M1, (b) modèle M4.

chapitre III. La qualité des résultats est similaire à la simulation uniaxiale des essais de glissement pur, la raideur de la première charge est légèrement sous-estimée mais la forme globale est bien reproduite.

IV.3.4 Éprouvette de compression

Les essais de compression réalisés sur des plots (diamètre 17,5 mm et hauteur 25,8 mm) sont traités dans un cadre axisymétrique. L'éprouvette ne se trouve pas dans un état de compression pure puisque les deux extrémités de l'éprouvette sont « collées » sur les mors, ainsi les essais ne peuvent pas être dépouillés de manière analytique. La figure IV.11 présente les états de déformation et de contrainte d'un plot soumis à un déplacement de 13 mm. La convergence des calculs est limitée par la distorsion des éléments situés au bord de l'éprouvette au niveau de l'encastrement. La déformation de l'éprouvette est seulement homogène dans sa partie centrale. La figure IV.12 compare les grandeurs globales mesurées lors de l'essai aux résultats du calcul Éléments Finis. Les essais de compression n'ont pas été utilisés pour l'identification des paramètres, ce qui permet de mettre en avant le côté prédictif des lois qui permettent une très bonne représentation de ces essais.

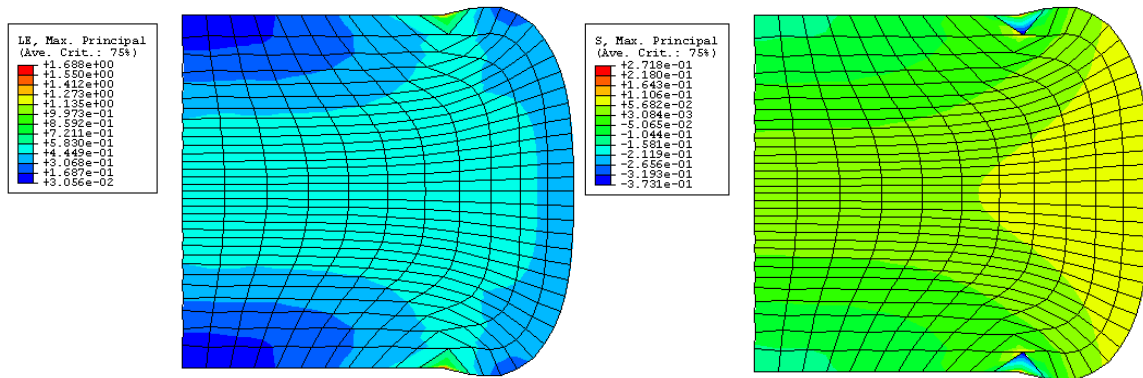


FIG. IV.11 – Simulation de la compression de 13 mm d'un plot avec le modèle M1: (a) déformation logarithmique maximale principale, (b) contrainte eulérienne maximale principale.

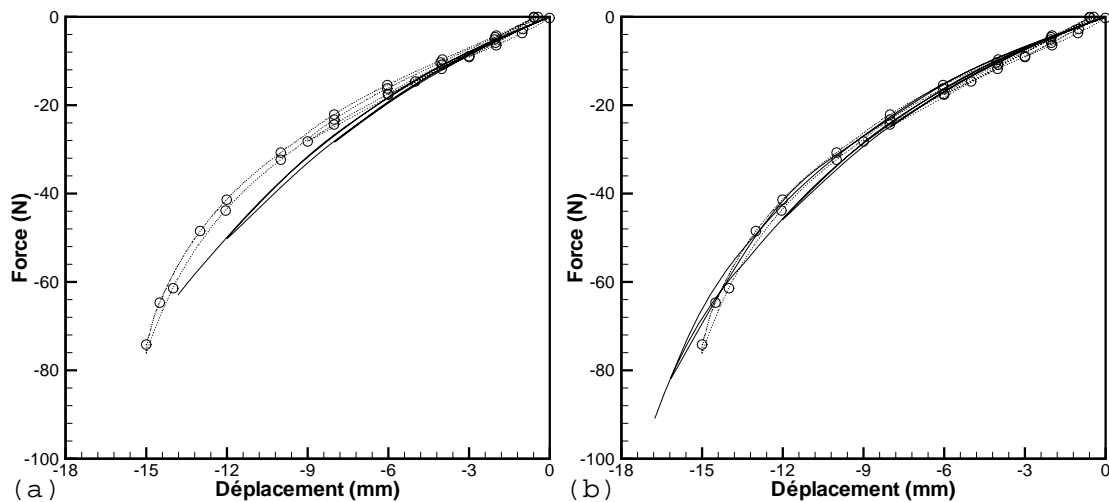


FIG. IV.12 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de compression (—) aux résultats expérimentaux (···○···): (a) modèle M1, (b) modèle M4.

IV.4 Conclusion

Ce chapitre s'est attaché à présenter les différentes étapes de l'implantation numérique des lois de comportement développées dans un code de calcul, ici Abaqus. La formulation d'un problème éléments finis nous a conduit à étudier plusieurs points, notamment la gestion de l'incompressibilité dans les calculs et l'évaluation du tenseur d'élasticité. A notre sens, l'incompressibilité est le point le plus sensible. Nous avons opté pour une décomposition du comportement en parties déviatorique et sphérique. Cette dernière permet d'imposer la quasi-incompressibilité à l'aide d'une fonction de pénalisation. Le choix de la forme de la fonction a été fait à partir des essais de compression hydrostatique. D'autre part, le calcul du tenseur d'élasticité est un point fondamental puisqu'il conditionne la limite de convergence des calculs. Les deux modèles M1 et M4, une fois implantés dans Abaqus ont servi à la simulation des essais simples. Ceci a permis d'une part, de valider notre implantation pour toutes les hypothèses (contraintes planes,

déformations planes, axisymétrique et tridimensionnelle) et d'autre part, de mettre en avant la capacité prédictive des lois sur des essais qui n'ont pas servi à l'identification des paramètres.

Chapitre V

Validation et applications industrielles

Après l'implantation des deux modèles M1 et M4 dans Abaqus et la vérification de leur capacité à décrire les essais simples, ces modèles vont à présent être testés sur des structures réelles. Dans un premier temps, un cas d'école est considéré : une plaque trouée. Cet exemple possède l'avantage de présenter un champ de déformation fortement inhomogène. Ceci permet de visualiser les conséquences de l'accommodation à l'effet Mullins. De plus, l'importance du trajet de chargement est mise en évidence.

Comme mentionnée précédemment, la prise en compte de l'accommodation à l'effet Mullins est fondamentale dans les phénomènes de fatigue. Ainsi, deux éprouvettes classiquement utilisées pour les problèmes de chargement cyclique seront considérées pour les simulations. Ces calculs vont permettre de mettre en évidence et de comparer les pertes de raideur globale des structures, tout comme les modifications des états de contrainte et de déformation locaux au sein des éprouvettes.

Finalement, les modèles sont testés sur une structure réelle : une voûte de support moteur. Les simulations sont alors comparées aux résultats expérimentaux.

V.1 Plaque trouée

Un premier cas-test est réalisé sur une plaque trouée. Cette structure présente des zones de fortes concentrations de contraintes, donc de forts gradients de déformations. La plaque est maillée à l'aide d'éléments mixtes linéaires en déplacement et constants en pression. Le problème est traité dans le cadre des contraintes planes. La loi de comportement utilisée est le modèle M1. Deux types de sollicitation sont appliqués :

- (i) l'éprouvette est étirée dans une de ses directions principales (notée y), relâchée, étirée dans sa deuxième direction principale (notée x) de la même quantité puis relâchée,
- (ii) la plaque est étirée simultanément le long de ses directions principales (x et y) puis relâchée.

La figure V.1 présente l'état de dommage de la plaque soumise aux deux états de sollicitation précédents. Après sollicitation dans une direction (cf. figure V.1(b)), on peut constater l'hétérogénéité très importante de l'endommagement, puisque certaines zones sont fortement

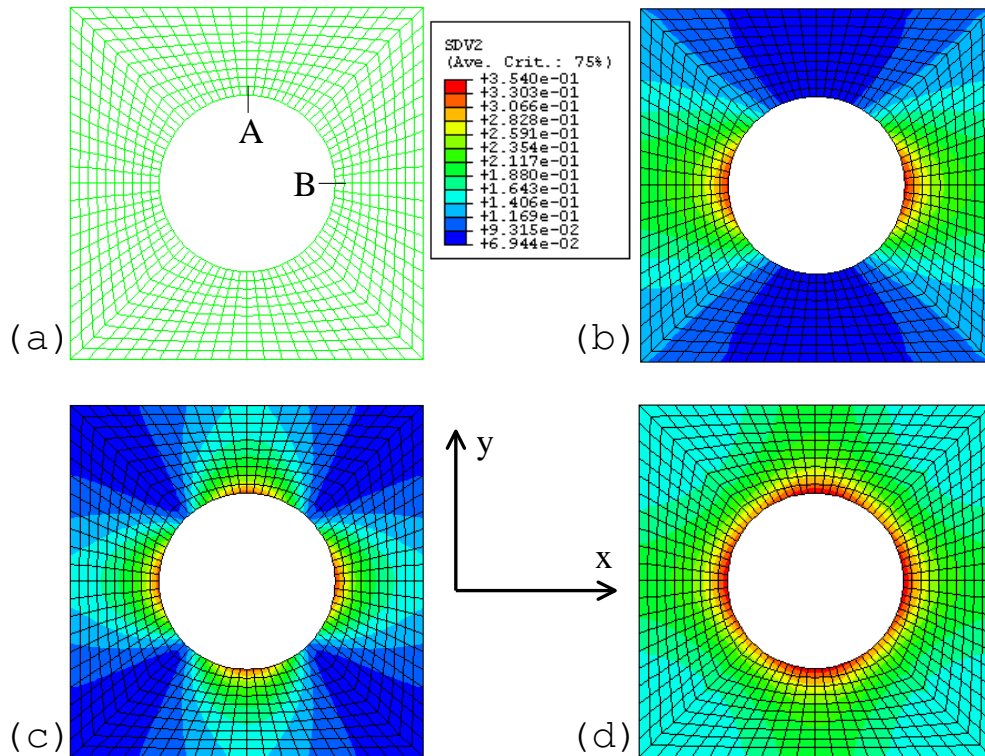


FIG. V.1 – Carte de dommage dans une plaque trouée: (a) maillage de la plaque, (b) plaque après sollicitation dans la direction (y), (c) plaque après sollicitation dans les directions (y) puis (x), (d) plaque après sollicitation simultanée dans les directions (x) et (y).

accommodées alors que d'autres ne le sont pratiquement pas. Après ce premier chargement, la structure admet un comportement différent en chaque point d'intégration, du fait de l'assouplissement de la structure dans certaines zones. Une deuxième traction dans la direction perpendiculaire montre un état de dommage final légèrement différent dans les deux directions (cf. figure V.1(c)). En effet, la répartition des contraintes est modifiée par la première accommodation, ce qui met en avant l'influence de l'accommodation à l'effet Mullins sur l'état global de déformation. Tout cela montre l'importance de l'histoire des déformations sur l'accommodation.

Le deuxième cas de chargement (ii) consiste à appliquer les mêmes déplacements que (i) mais simultanément dans les deux directions du plan. Par comparaison du résultat final des deux expériences (i) et (ii) (cf. figure V.1(c) et (d)), on note que l'accommodation est très différente même si les déplacements imposés dans les directions principales sont les mêmes. Ceci met en avant la capacité du modèle à prendre en compte l'état de déformation global de la structure. Les points notés A et B (cf. figure V.1(a)) correspondent aux points les plus sollicités de la structure dans les deux directions de sollicitation. La figure V.2 présente l'évolution du dommage en ces points pour les deux trajets de sollicitation. Il apparaît que le niveau de dommage maximal dépend de l'histoire. Les déformations globales de la structure modifient la répartition des déformations locales, ce qui conduit à des variations de l'état de dommage maximal de l'ordre de 10% (pour cet exemple). Ces différents exemples mettent en lumière

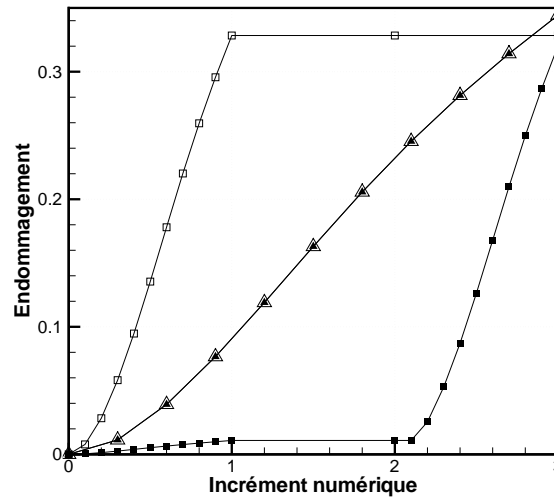


FIG. V.2 – Niveau de dommage dans la plaque trouée : (—□—) point A pour le trajet (i), (—■—) point B pour le trajet (i), (—△—) point A pour le trajet (ii), (—▲—) point B pour le trajet (ii).

l'anisotropie induite par l'effet Mullins, phénomène qui ne peut être pris en compte avec une loi hyperélastique classique même assouplie.

Le modèle M4 ne permet pas la visualisation d'une carte de dommage, puisque le principe de prise en compte de l'accommodation est différent. Néanmoins, les mêmes constatations peuvent être faites en visualisant le critère de déformation maximal qui traduit parfaitement l'état d'accommodation.

V.2 Structures réelles

Après un test classique, les modèles M1 et M4 sont maintenant évalués sur des structures réelles utilisées par la société Modyn du groupe Trelleborg. Dans un premier temps, des éprouvettes utilisées pour des essais de fatigue sont analysées et dans un second temps, la raideur d'une voûte de support moteur est étudiée.

V.2.1 Éprouvettes de fatigue

Les éprouvettes de fatigue étudiées ici sont deux éprouvettes axisymétriques que nous appelons diabolo et AE (elles seront décrites ci-après). Elles sont aujourd'hui classiquement utilisées pour l'étude de la fatigue des élastomères (Robisson, 2000; Piques et Saintier, 2001). Des simulations sont réalisées avec les deux modèles M1 et M4 dans le but de comparer les états de contrainte et de déformation locaux des éprouvettes ainsi que les pertes globales de raideur.

V.2.1.1 Éprouvette diabolo

La première géométrie utilisée est l'éprouvette « diabolo » présentée sur la figure V.3. Cette

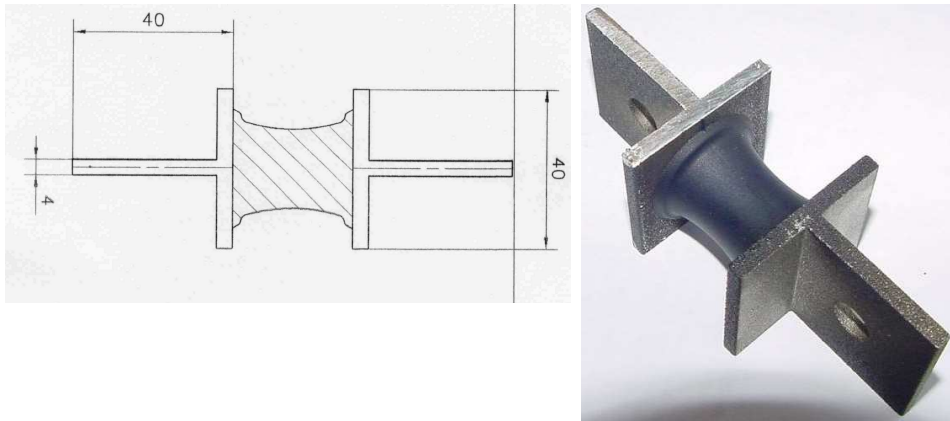


FIG. V.3 – Géométrie de l'éprouvette diablo.

éprouvette est axisymétrique et présente une légère réduction de diamètre en son centre. Sa géométrie la destine à l'étude des modes de traction-compression, de torsion ou de toutes combinaisons de ces cas de chargement. Différentes simulations représentatives de l'éprouvette ont été réalisées. La structure peut être aussi bien étudiée sous l'hypothèse d'axisymétrie qu'avec une approche tridimensionnelle; les résultats de calcul seront présentés de façon arbitraire. Les maillages tridimensionnel et axisymétrique sont réalisés à partir d'éléments linéaires en déplacement et constants en pression.

Dans un premier temps, un essai de traction cyclique est réalisé. La figure V.4 présente la

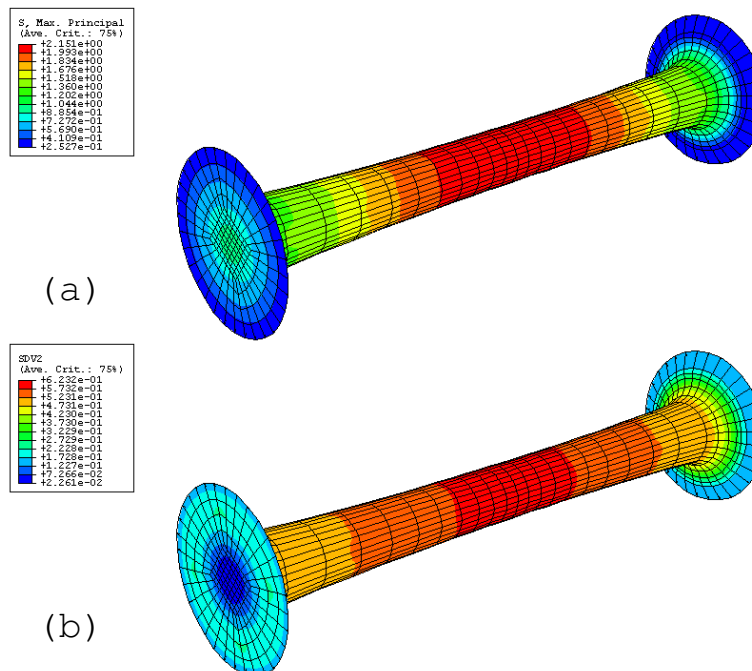


FIG. V.4 – Simulation des états de déformation et de dommage d'une éprouvette diablo soumise à une sollicitation de traction à partir du modèle M1: (a) contrainte eulérienne principale maximale, (b) endommagement.

simulation de l'essai à partir du modèle M1. On peut constater que le dommage se concentre dans la partie centrale de l'éprouvette. Lors des essais, les déplacements et efforts appliqués sur les mors sont mesurés. Ils sont comparés aux simulations des modèles M1 et M4 sur la figure V.5. Il apparaît que les modèles surestiment l'état de contrainte à faibles déformations mais le

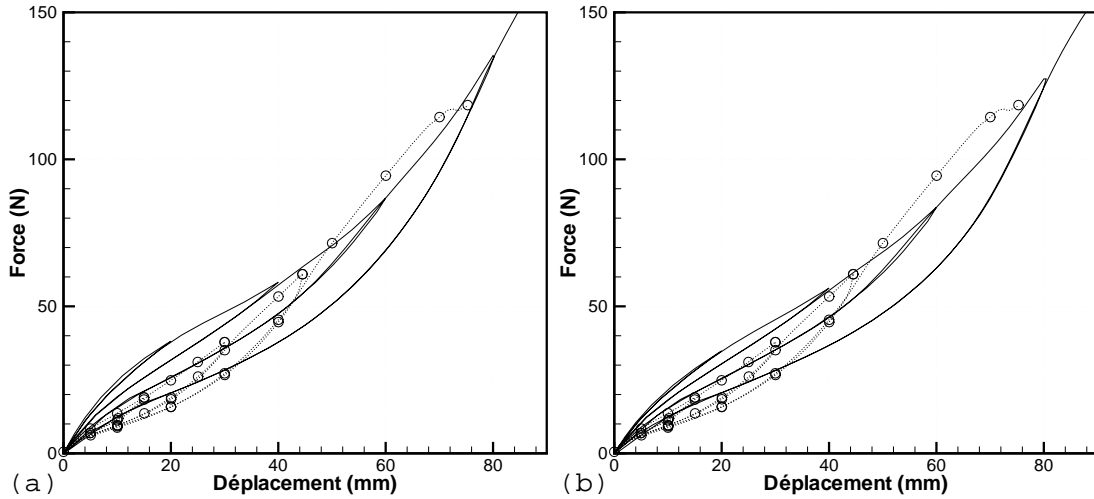


FIG. V.5 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de traction cyclique sur diabolo (—) aux résultats expérimentaux ($\cdots \circ \cdots$): (a) modèle M1, (b) modèle M4.

représentent très correctement à fortes déformations. L'énergie dissipée par la perte de raideur est également bien représentée. La figure V.6 présente la variation des états de contrainte et de

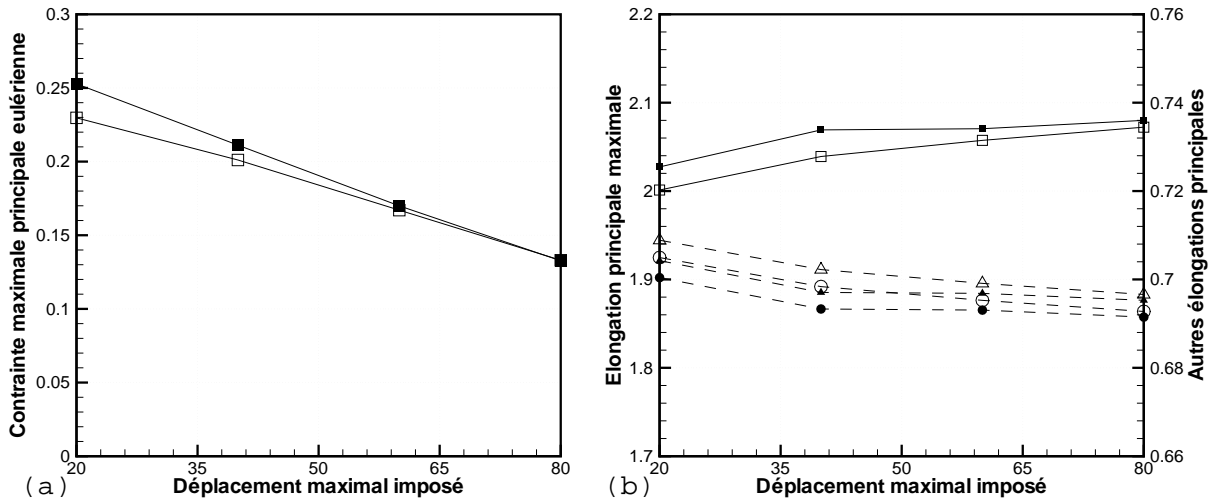


FIG. V.6 – Évolution des états de déformation et de contrainte locaux de l'éprouvette diabolo soumise à un déplacement de 20 mm en traction selon la précharge en traction appliquée: (a) évolution de la contrainte principale maximale pour le modèle M1 (—■—), et le modèle M4 (—□—); (b) évolution de l'état de déformation: (—) élongation principale maximale, (---) autres élongations principales.

déformation dans la zone centrale de l'éprouvette lorsqu'elle est soumise à une traction de 20 mm après avoir été soumise à une pré-traction de 20, 40, 60 ou 80 mm. L'état de contrainte est toujours uniaxial. Il apparaît que l'accommodation provoque une perte de raideur très importante de l'éprouvette de l'ordre de 30% (cf. figure V.6(a)), ceci se traduit par une modification de l'état de déformation de l'éprouvette (cf. figure V.6(b)). En effet, elle est sollicitée de façon plus importante dans la direction de sollicitation, ainsi les elongations principales sont légèrement modifiées de l'ordre de 3%. En fait, l'éprouvette est plus souple dans sa zone centrale du fait de l'accommodation, cela se traduit par une déformation plus importante de cette zone dans la direction de sollicitation et donc une réduction de diamètre plus importante. L'éprouvette ayant une géométrie massive, l'état de déformation n'est pas fortement modifié.

Les éprouvettes diablo sont classiquement utilisées en fatigue lors d'essais de torsion. Une simulation d'un essai de torsion à 450° est présentée sur la figure V.7. Il apparaît une réduction de

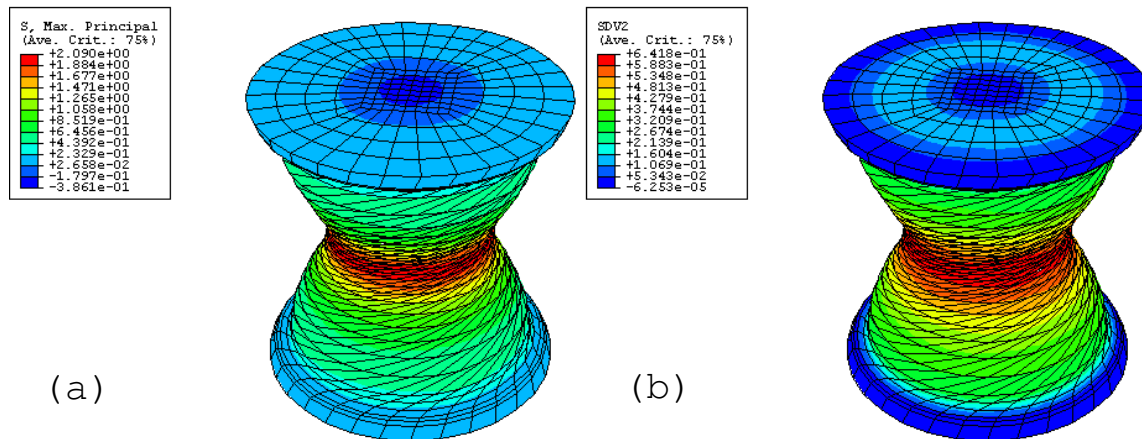


FIG. V.7 – Simulation des états de déformation et de dommage d'une éprouvette diablo soumise à une sollicitation en torsion à partir du modèle M1 : (a) contrainte eulérienne principale maximale, (b) endommagement.

la section du diablo dans sa zone centrale. La réponse couple-angle de sollicitation est présentée sur la figure V.8. La perte de raideur est assez faible malgré de très forts angles de torsion (nous n'avons pas à ce jour de résultats expérimentaux pour comparer les simulations).

Un cas plus complexe de traction-torsion est finalement étudié. Une simulation de torsion est réalisée sur des éprouvettes pré-chargées en traction. La figure V.9 présente l'évolution de l'endommagement pour un cycle de torsion de 360° selon la pré-charge en traction. Il apparaît que pour un faible angle de torsion, le matériau est d'autant plus endommagé que la sollicitation en traction est importante. En revanche, pour les forts angles de torsion, l'endommagement est plus important pour les faibles pré-charges en traction. Ceci est une conséquence de la triaxialité de l'état de déformation local de l'éprouvette. Une sollicitation supplémentaire peut ainsi être bénéfique, permettant à l'état de déformation d'être moins pénalisant au sens de l'effet Mullins. Comme montré pour la plaque trouée, le paramètre déterminant est l'état local de déformation en un point.

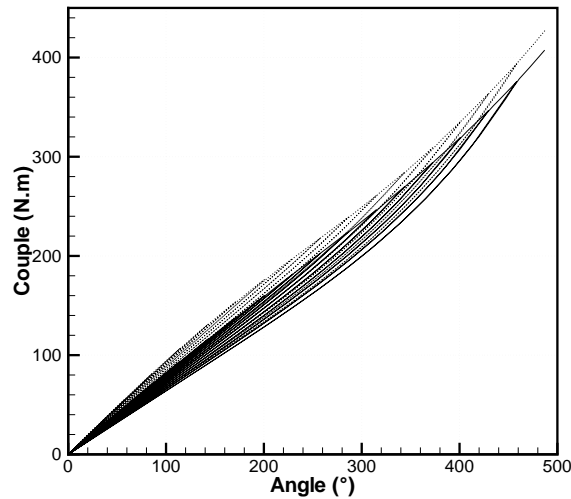


FIG. V.8 – Simulation de cycles de torsion sur diabolo : (\cdots) modèle M1, (—) modèle M4.

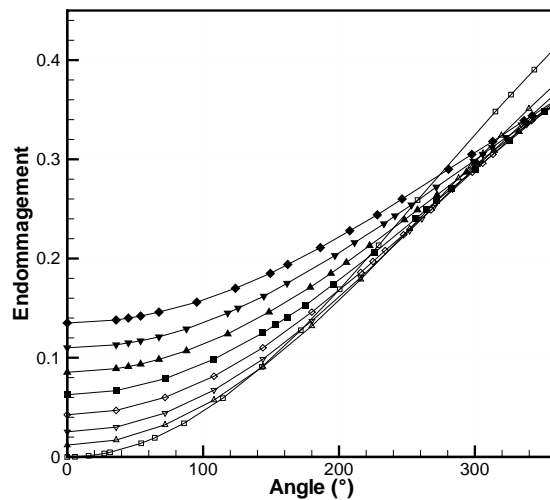


FIG. V.9 – Endommagement maximal dans l'éprouvette diabolo pour une sollicitation en torsion de 360° avec différentes pré-charges en traction : (—□—) 0 mm, (—△—) 5 mm, (—▽—) 7,5 mm, (—◇—) 10 mm, (—■—) 12,5 mm, (—▲—) 15 mm, (—▼—) 17,5 mm, (—◆—) 20 mm.

V.2.1.2 Éprouvette AE

La deuxième éprouvette souvent utilisée en fatigue est l'éprouvette axisymétrique entaillée « AE » présentée sur la figure V.10. Elle est utilisée pour le même type de sollicitations que l'éprouvette diabolo. Cette géométrie permet de concentrer les contraintes au centre de l'éprouvette de façon plus importante que l'éprouvette diabolo. La structure peut être aussi bien étudiée sous l'hypothèse d'axisymétrie qu'avec un modèle tridimensionnel. Les maillages tridimensionnel et axisymétrique sont réalisés à partir d'éléments linéaires en déplacement et constants en pression.

Un essai de traction cyclique est dans un premier temps simulé à partir du modèle M4

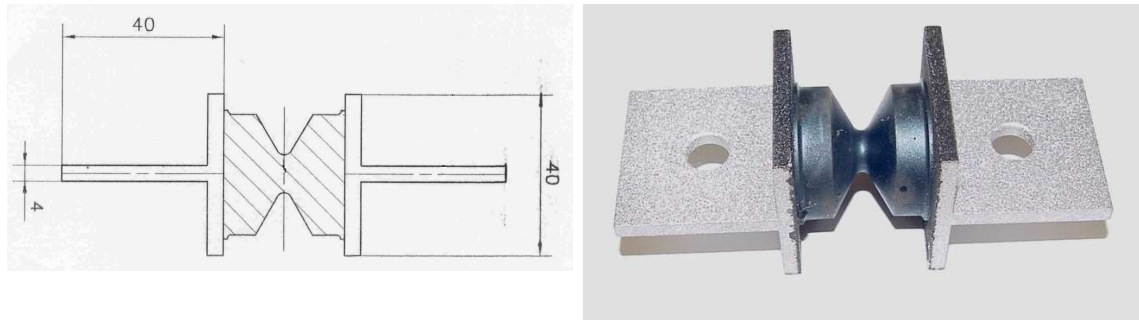


FIG. V.10 – Géométrie de l'éprouvette axisymétrique entaillée AE.

et les états de contrainte et de déformation correspondants sont présentés sur la figure V.11. La figure V.12 présente la comparaison des grandeurs globales des simulations aux résultats

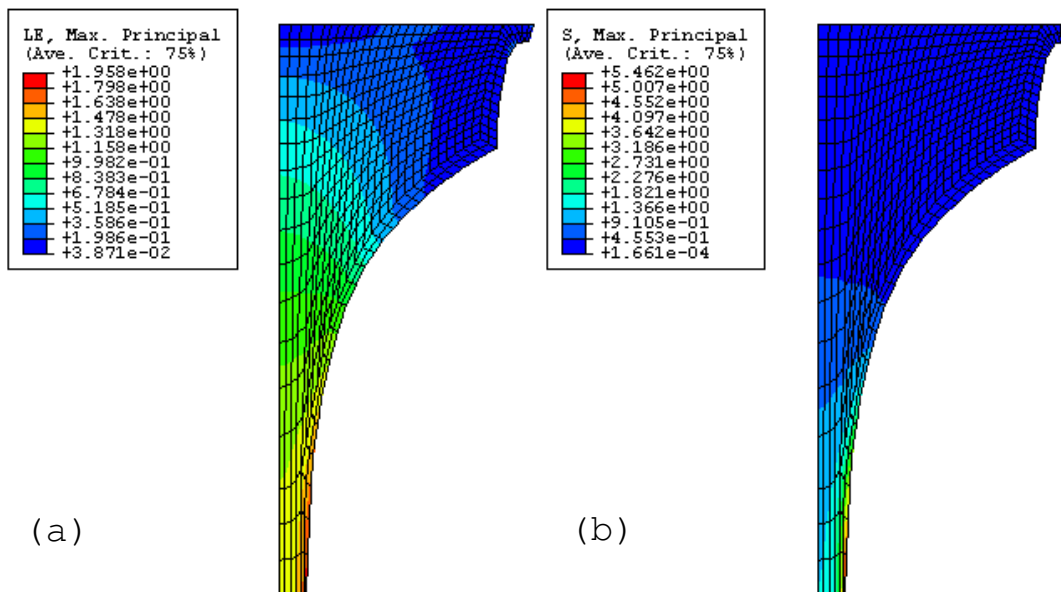


FIG. V.11 – Simulation des états de déformation et de contrainte d'une éprouvette AE soumise à une sollicitation de traction à partir du modèle M4 : (a) déformation logarithmique principale maximale, (b) contrainte eulérienne principale maximale.

expérimentaux. On constate que les deux modèles sous-estiment la raideur de la pièce d'approximativement 25%. D'un point de vue local, il apparaît que la zone centrale de l'éprouvette est fortement sollicitée en comparaison du reste de la géométrie. La figure V.13 présente les états de contrainte et de déformation pour un déplacement de 4 mm après une pré-charge en traction de 4, 8, 12, 16 et 20 mm. L'état de contrainte est quasi-uniaxial au centre de l'éprouvette. La figure V.13(a) montre que la perte de raideur est d'autant plus importante que la pré-charge appliquée l'est, elle peut ici atteindre 50%. Cet assouplissement modifie de plus très fortement l'état de déformation (cf. figure V.13(b)). En effet, l'élongation dans la direction de traction peut augmenter de plus de 30% suivant l'accommodation. Cela se traduit également par une contraction plus importante au centre de l'éprouvette. Tout ceci met en évidence que l'état de

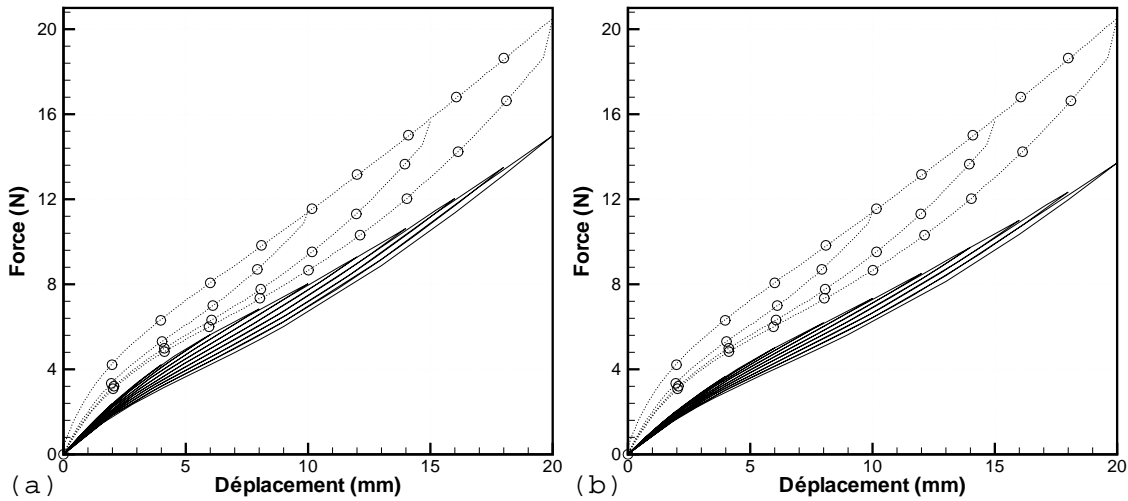


FIG. V.12 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de traction cyclique sur éprouvette AE (—) aux résultats expérimentaux ($\cdots \circ \cdots$): (a) modèle M1, (b) modèle M4.

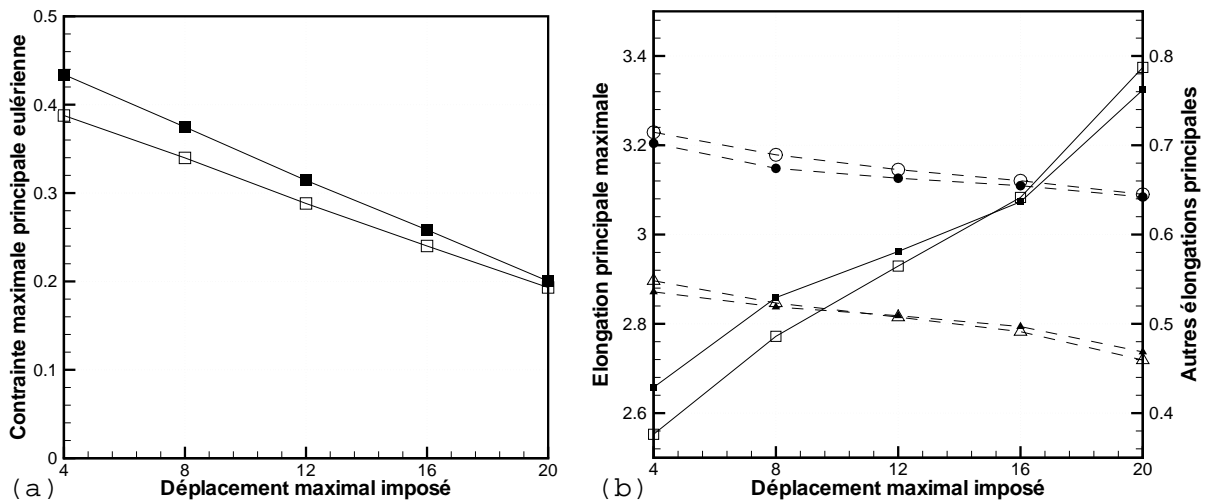


FIG. V.13 – Évolution des états de déformation et contrainte locaux de l'éprouvette AE soumise à un déplacement de 4 mm en traction selon la pré-charge en traction appliquée: (a) évolution de la contrainte principale maximale pour le modèle M1 (—■—) et le modèle M4 (—□—); (b) évolution de l'état de déformation: (—) élongation principale maximale, (---) autres élongations principales.

déformation est lui aussi fortement modifié par l'effet Mullins.

Il faut bien noter que l'état de déformation dans les zones sensibles à la propagation de fissures est un point très important dans les processus de fatigue. Mars (2001), et Saintier *et al.* (2000) introduisent un taux de biaxialité permettant de décrire le rapport entre les élongations principales de l'éprouvette à la surface d'une structure. Les fortes variations des élongations principales dans la zone centrale de l'éprouvette, dues à l'accommodation à l'effet Mullins, conduisent à une très forte variation de ces taux de biaxialité, ce qui illustre que les processus

de rupture mis en jeu, avant et après accommodation, peuvent être fortement modifiés. L'effet Mullins est donc un phénomène très important à prendre en compte dans les phénomènes de fatigue.

Comme pour l'éprouvette diabolo, des essais de torsion sont simulés. La figure V.14 présente

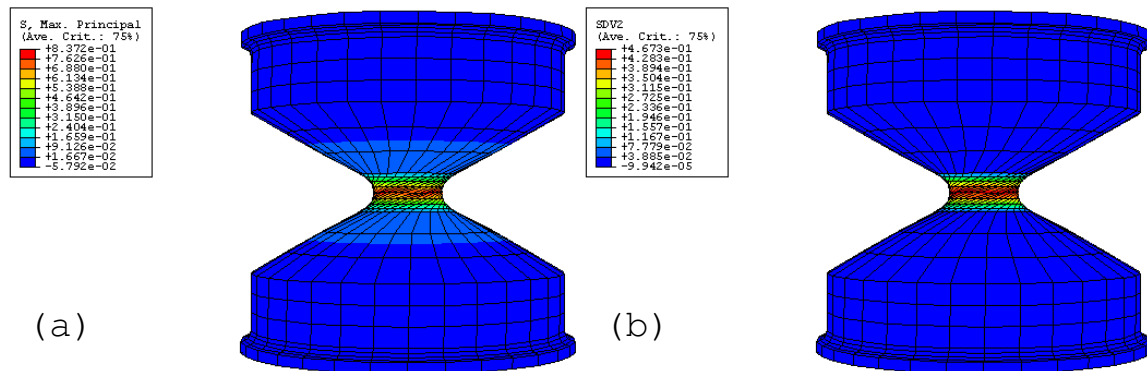


FIG. V.14 – Simulation des états de contrainte et de dommage d'une éprouvette AE soumise à une sollicitation de torsion à partir du modèle M1 : (a) déformation logarithmique principale maximale, (b) endommagement.

les états de contrainte et dommage pour une rotation de 240° . Tout comme lors des sollicitations de traction, le dommage est très fortement localisé dans la zone centrale de l'éprouvette. La figure V.15 montre l'évolution du couple appliqué en fonction de l'angle de rotation. La perte de raideur

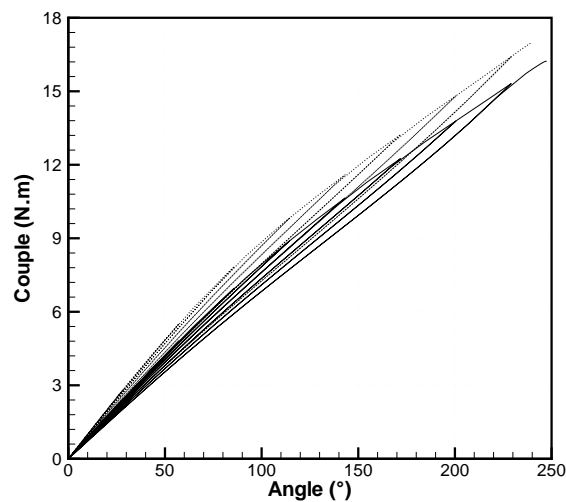


FIG. V.15 – Simulation de cycles de torsion sur une éprouvette AE : (\cdots) modèle M1, (—) modèle M4.

est ici plus significative que pour le diabolo du fait de la géométrie de la structure.

V.2.1.3 Bilan

Les calculs réalisés sur ces éprouvettes de fatigue ont permis de montrer la forte dépendance de la forme globale de la structure et des phénomènes locaux. En effet, les zones de concentration de contraintes sont créatrices de zones fortement accommodées qui perdent ainsi beaucoup de raideur et qui, en conséquence, voient leurs champs de déformation et de contrainte totalement modifiés. Le fort affaiblissement d'une zone de la structure peut alors pénaliser d'autres zones. Des résultats similaires ont été proposés par Kaliske et Domscheit (2001) qui ont mis en évidence l'évolution de la bande de roulement d'un pneumatique avec la prise en compte de l'effet Mullins. Dans ce cas, l'affaiblissement d'une partie de la structure affecte fortement son comportement global.

V.2.2 Aide au dimensionnement des pièces industrielles

Finalement, les lois développées sont testées sur une structure réelle : une voûte de support moteur présentée sur la figure V.16. Différents essais ont été réalisés sur cette pièce afin de



FIG. V.16 – *Voûte de suspension moteur.*

comparer les résultats expérimentaux aux prédictions des deux modèles M1 et M4. La voûte est une structure axisymétrique, composée d'une structure élastomère fixée dans deux inserts métalliques. Pour la simulation, ces derniers sont considérés comme infiniment rigides et la liaison métal-élastomère est supposée parfaitement collée. La structure peut être aussi bien étudiée sous l'hypothèse d'axisymétrie ou avec une approche tridimensionnelle. Les maillages sont réalisés à partir d'éléments linéaires en déplacement et constants en pression.

Le premier test consiste à simuler un chargement de traction sur la voûte. Cette expérience n'est pas représentative du fonctionnement de la pièce, mais permet d'estimer la qualité de la simulation dans un cadre tridimensionnel, et de la comparer aux résultats expérimentaux. La figure V.17 présente les états de déformation et de contrainte de la voûte. La structure est représentée dans sa configuration non-déformée pour plus de clarté. L'évolution de la force en fonction du déplacement est présentée sur la figure V.18. Il apparaît que les simulations des deux lois de comportement sont proches des résultats expérimentaux bien que la position du raidissement de la réponse soit surestimée. En fait, la perte de raideur globale est bien estimée.

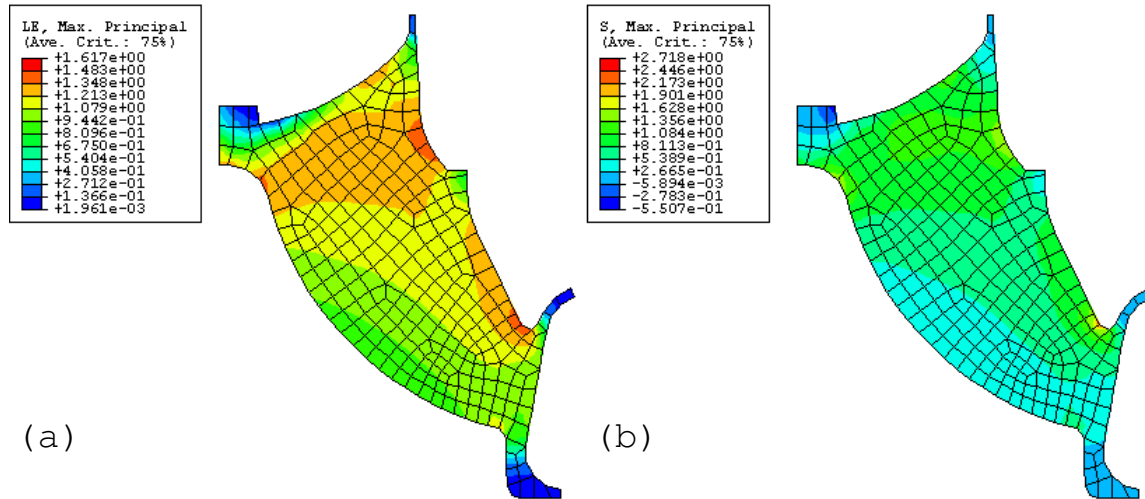


FIG. V.17 – Simulation des états de déformation et de contrainte de la voûte soumise à une sollicitation en traction grâce au modèle M_4 (représentation dans la configuration non-déformée) : (a) déformation logarithmique principale maximale, (b) contrainte eulérienne principale maximale.

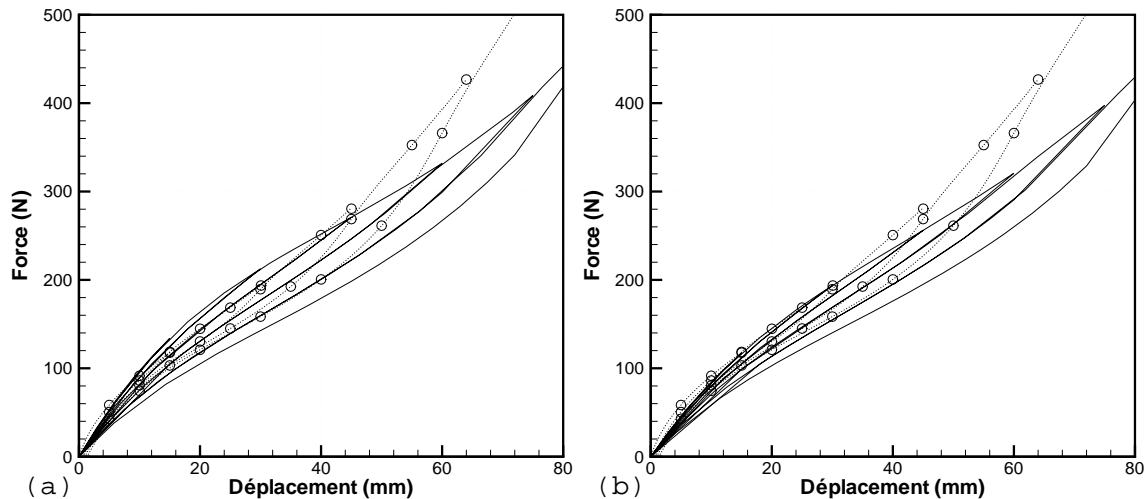


FIG. V.18 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de traction cyclique sur une voûte de suspension moteur (—) aux résultats expérimentaux (···○···) : (a) modèle M_1 , (b) modèle M_4 .

Il est important de noter que les pertes de raideur locales sont beaucoup plus importantes que les pertes globales.

De la même façon, un essai de compression est simulé sur la voûte. La figure V.19 montre les états de contrainte et de déformation pour une compression de 17 mm. Elle met en évidence les limites de convergence du calcul dues au problème de retournement des éléments, phénomène totalement indépendant de la loi de comportement, à notre avis. La figure V.20 présente la comparaison des résultats expérimentaux et des simulations. Il apparaît que les deux lois de

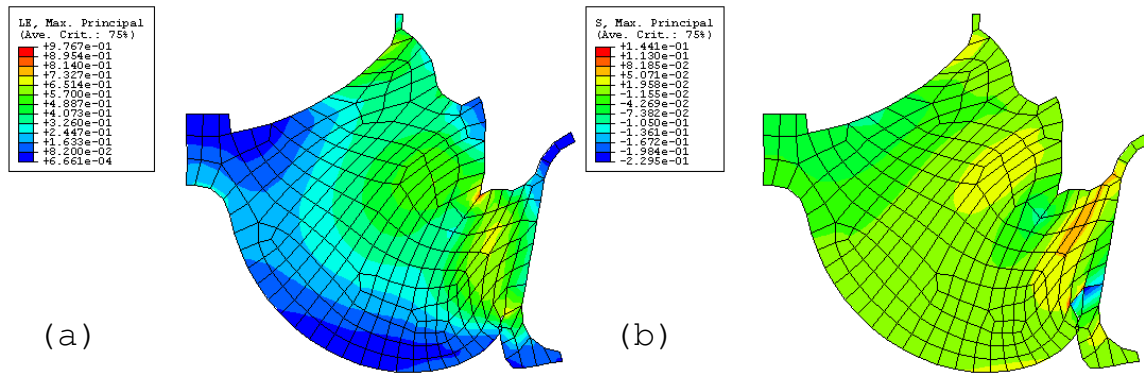


FIG. V.19 – Simulation des états de déformation et de contrainte de la voûte soumise à une sollicitation en compression grâce au modèle M_4 : (a) déformation logarithmique principale maximale, (b) contrainte eulérienne principale maximale.

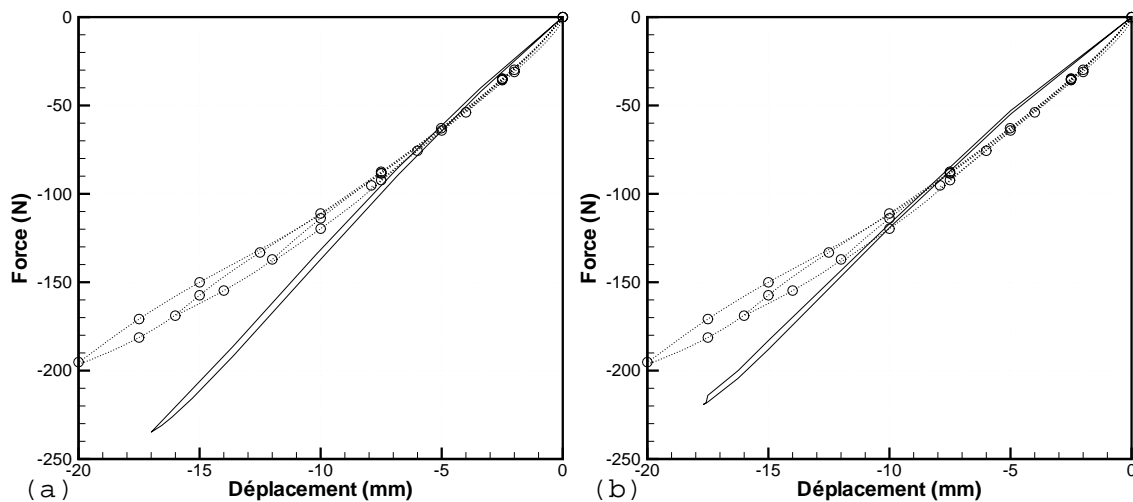


FIG. V.20 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de compression cyclique sur une voûte de suspension moteur (---) aux résultats expérimentaux (· · · o · · ·) : (a) modèle M_1 , (b) modèle M_4 .

comportement surestiment légèrement l'état de contrainte à forte compression ; ceci est dû à un phénomène de flambement de l'éprouvette.

Le dernier calcul réalisé sur la voûte correspond à la mise sous couple du moteur. Il s'agit du cisaillement de la pièce. La figure V.21 présente les états de contrainte et de déformation de la voûte, et la figure V.22 montre la comparaison des résultats expérimentaux et des simulations numériques sur les grandeurs globales mesurées. La raideur de la pièce est bien reproduite, même si globalement, les modèles ne prédisent pas de perte de raideur significative.

Tous ces calculs mettent en avant que les pertes de raideur globale des pièces sont faibles vis-à-vis des pertes de raideur locale. Ceci conduit à une modification importante de l'état de déformation local des zones fortement sollicitées. Bien que le modèle M_4 soit capable de décrire de plus fortes pertes de raideur que le modèle M_1 , les deux lois simulent quasiment la même

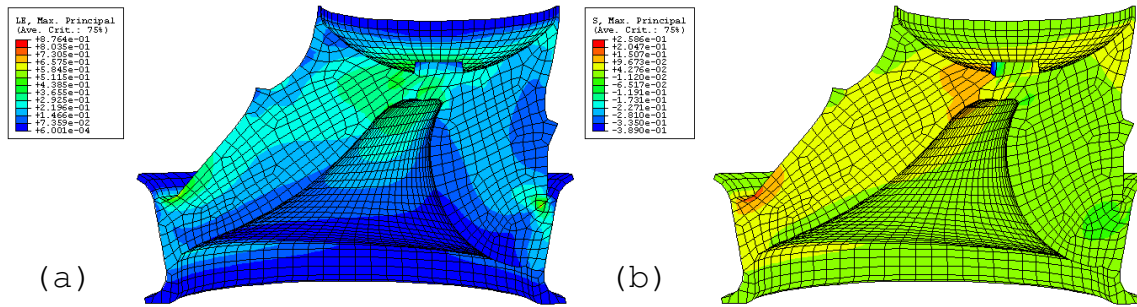


FIG. V.21 – Simulation des états de déformation et de contrainte de la voûte soumise à une sollicitation en cisaillement grâce au modèle M_4 : (a) déformation logarithmique principale maximale, (b) contrainte eulérienne principale maximale.

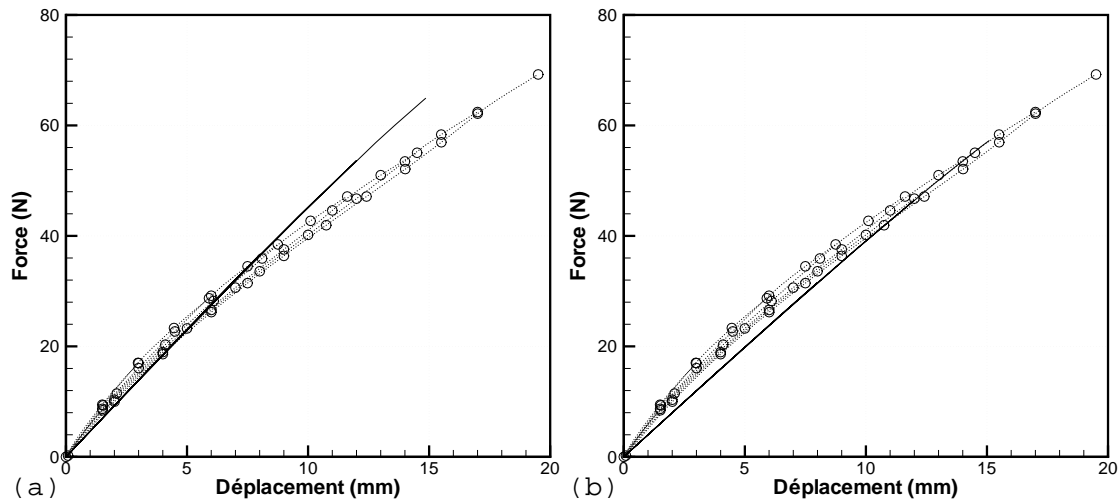


FIG. V.22 – Comparaison des simulations numériques d'un essai de traction cyclique sur une voûte de suspension moteur (—) aux résultats expérimentaux (⋯ ∘ ⋯): (a) modèle M_1 , (b) modèle M_4 .

perte de raideur et la même modification de l'état de déformation local.

V.3 Conclusion

Ce chapitre a montré les apports d'une loi de comportement prenant en compte l'effet Mullins par rapport à un modèle hyperélastique classique. En effet, la prise en considération de l'effet Mullins permet de rendre compte de l'état de contrainte inhomogène de la structure après une première charge. Ceci illustre les limites des modélisations hyperélastiques classiquement utilisées dans l'industrie du caoutchouc. Un modèle hyperélastique, accommodé ou non, fait disparaître tous les phénomènes induits par l'accommodation : non seulement les niveaux de contraintes sont erronés, mais la déformation de la structure peut être elle aussi incorrecte. En effet, les zones fortement sollicitées des structures élastomères voient leur comportement évoluer de manière très sensible. Ceci a pour conséquence de modifier complètement leur comportement global. Ainsi les

zones les plus fortement sollicitées, *i.e.* les plus propices à l'apparition de fissures, voient leurs états de contrainte et déformation changer radicalement. Ceci illustre le fait que les phénomènes mis en jeu lors des chargements de fatigue évoluent très significativement après une pré-charge. Un unique cycle de sollicitation peut ainsi totalement modifier le comportement mécanique d'une pièce élastomère. Les conséquences d'un cycle d'accommodation à l'effet Mullins peuvent être comparées aux effets d'une pré-charge plastique ou endommageante pour d'autres matériaux.

Une conséquence de l'ajout d'un phénomène dans une loi de comportement est l'allongement du temps de calcul. Les modèles M1 et M4 demandent deux à trois fois plus de temps qu'un modèle hyperélastique classique dans les cas tridimensionnel ou axisymétrique. Dans le cas des contraintes planes, les temps de calcul sont similaires. De plus, l'utilisation d'une telle loi conduit à la simulation de cycles de charge et de décharge, ce qui augmente également le temps de calcul. Ainsi, l'utilisation de telles lois ne doit pas être systématique mais réfléchie. Elle doit être réservée à des cas pertinents, comme les études de fatigue ou de pièces présentant de forts gradients de déformation.

Conclusion

L'objectif du présent travail était la construction d'un modèle de comportement mécanique décrivant l'accommodation à l'effet Mullins des élastomères et de surcroît facilement implantable dans un code de calculs industriel.

Les élastomères présentant un comportement mécanique très complexe, nous avons dans un premier temps mis en place une campagne expérimentale afin d'identifier et de dissocier les différents phénomènes caractéristiques. Nous nous sommes principalement attachés à comprendre et à définir l'effet Mullins. Son indépendance vis-à-vis du temps de repos (au cours d'un chargement complexe) et de la vitesse, ainsi que sa dépendance à la direction de sollicitation ont été mises en évidence. Cette dernière n'a pas été considérée dans notre travail. De plus, la bibliographie étant peu unanime sur le sujet, ces observations nous ont conduit à proposer notre définition de l'effet Mullins, à savoir qu'il s'agit uniquement de la perte de raideur entre les deux premières courbes de charge d'un essai cyclique.

Une fois le phénomène mis en évidence, sa modélisation a été abordée. Dans un premier temps, une étude bibliographique nous a permis d'analyser et comparer les différentes approches existantes en insistant sur leurs avantages et inconvénients. D'une manière générale, il apparaît que peu de modèles sont capables de décrire de fortes pertes de raideur entre les deux premières courbes de charge, ce qui discrédite leur utilisation dans le cadre des très grandes déformations.

Notre objectif à plus long terme étant la prise en compte de l'influence de l'effet Mullins dans des structures fissurées, la qualité de la modélisation en grandes déformations est bien évidemment un aspect primordial. Ainsi, les modèles de la bibliographie ne donnant pas entière satisfaction, deux études ont été menées parallèlement pour modéliser l'effet Mullins dans les élastomères ; l'une est fondée sur la mécanique de l'endommagement et l'autre sur des concepts macro-moléculaires. Ces travaux ont conduit à la construction de deux modèles d'effet Mullins très différents dans leurs formes, respectivement nommés modèles M1 (mécanique de l'endommagement) et M2 (approche macro-moléculaire). Le premier ne permet pas de décrire de très fortes pertes de raideur mais possède l'avantage d'être facilement implantable dans les codes de calculs éléments finis de par la stabilité du cadre thermodynamique associé. Le modèle M2 permet quant à lui de décrire de très fortes pertes de raideur mais présente une forme analytique non utilisable dans les codes de calculs. Un travail sur les densités d'énergie hyperélastique a permis de palier ce problème en créant le modèle M4 présentant les mêmes caractéristiques que le modèle M2 mais avec une forme analytique plus propice à l'utilisation numérique.

Ces modèles ont ensuite été implantés dans le code de calculs commercial Abaqus. La difficulté d'utilisation de lois de comportement pour les élastomères dans les logiciels réside le plus souvent dans la gestion de l'incompressibilité et se traduit par des problèmes de convergence. Les recherches effectuées nous ont conduits à utiliser une formulation décomposant la densité d'énergie en parties sphérique et déviatorique. Il est important de signaler que le calcul de la matrice tangente doit être réalisé avec soin car son exactitude conditionne la limite de convergence des calculs. L'utilisation d'Abaqus nous a dans un premier temps permis de valider les modèles sur résultats expérimentaux issus d'essais simples. Des calculs sur structures complexes ont permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes, le premier (évident) est l'inhomogénéité de l'accommodation à l'effet Mullins dans la structure, ce qui remet donc en cause l'utilisation d'une loi de comportement accommodée pour l'ensemble de la structure (méthode classiquement utilisée pour les calculs industriels). Ce point est d'autant plus important que la structure chargée admet de forts gradients de déformation. L'autre point fondamental est le changement d'états de contrainte et de déformation d'une zone de la structure avant et après accommodation. La modification de l'état de contrainte est directement due à la perte de raideur induite par le modèle, tandis que la modification de l'état de déformation est une conséquence de l'inhomogénéité de l'accommodation dans la structure. La structure présentant des zones plus raides et plus souples après une charge, elle ne se déforme plus de la même façon. Ce phénomène est très important dans les problèmes de fatigue. En effet, les études récentes sur la fatigue des élastomères sont toutes fondées sur l'état de déformation local notamment au travers de la définition d'un taux de biaxialité. Un cycle d'accommodation à l'effet Mullins dans un processus complet de fatigue peut complètement changer la durée de vie de la pièce, cette influence peut ici être analysée par la connaissance de ce taux de biaxialité.

De nombreux résultats peuvent être obtenus à partir de ces modèles. A court terme, l'accommodation à l'effet Mullins peut être prise en compte dans les phénomènes de fatigue. L'évolution de la raideur globale des pièces, selon les chargements extrêmes appliqués, s'obtient simplement. D'un point de vue local, la modification du taux de biaxialité peut être mise en relation avec la durée de vie du matériau, grâce à une campagne expérimentale d'essais de fatigue bien choisis.

A moyen terme, les problèmes de fissuration peuvent être abordés. L'énergie dissipée par effet Mullins lors d'une propagation de fissures peut être évaluée et permettre la réalisation d'un bilan énergétique plus rigoureux. Un bilan complet nécessite quant à lui, la prise en compte de tous les phénomènes dans la loi de comportement (hystérésis, relaxation, auto-échauffement). Ces développements demandent en revanche beaucoup de temps et ne peuvent être envisagés qu'à long terme, même si une première étude sur le phénomène d'hystérésis a été présentée dans l'annexe C de ce mémoire. Une telle étude conduit à s'interroger sur la signification moléculaire de chacun des phénomènes avec de plus un retour sur la compréhension exacte du recouvrement de l'effet Mullins. Finalement, cette loi permettrait de déterminer l'influence relative de tous les phénomènes.

Bibliographie

- Abaqus (2002). *Theory Manual, ver 6.2*. HKS.
- Alexander, H. (1968). A constitutive relation for rubber-like materials. *Int. J. Eng. Sci.*, **6**, 549–562.
- Ambacher, H., Straub, M., Kilian, N. G. U., et Wolff, S. (1991). Reinforcement in filler loaded rubbers. *Kaut. Gummi Kunstst.*, **44**.
- Arif, A. F. M., Pervez, T., et Mughal, M. P. (2002). Performance of a finite element procedure for hyperelastic-viscoplastic large deformation problems. *Finite Elem. Anal. Des.*, **34**, 89–112.
- Arruda, E. M. et Boyce, M. C. (1993). A three dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 389–412.
- Ashby, M. F. et Jones, D. R. H. (1991). *Matériaux 2. Microstructure et mise en oeuvre*. Dunod edition.
- Attard, M. M. (2003). Finite strain-isotropic hyperelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **40**, 4353–4378.
- Aubard, X., Boucard, P. A., Ladeveze, P., et Michel, S. (2002). Modeling and simulation of damage in elastomer structures at high strains. *Comput. Struct.*, **80**, 2289–2298.
- Bailon, J. P. et Dorlot, J. M. (2000). *Des Matériaux*. Presses internationales Polytechnique, 3^e édition.
- Ball, J. M. (1977). Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63**.
- Banks, H. T., Gabriella, A., Pinter, A., Potter, L. K., Gaitens, M. J., et Yanyo, L. C. (1999). Modeling of nonlinear hysteresis in elastomers under uniaxial tension. *J. Intel. Mat. Syst. Str.*, **10**, 116–134.
- Batra, R. C. (1975). On the coincidence of the principle axes of stress and strain in isotropic elastic bodies. *Lett. Appl. Sci.*, **3**, 435–439.
- Batra, R. C. (1976). Deformation produced by a simple tensile load in an isotropic elastic body. *J. Elast.*, **6**, 109–111.
- Beatty, M. F. (1987). Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples. *Appl. Mech. Rev.*, **40**, 1699–1734.
- Beatty, M. F. et Krishnaswamy, S. (2000). A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1931–1965.

- Beatty, M. F. et Stalnaker, D. O. (1986). The Poisson function of finite elasticity. *J. Appl. Mech. T. ASME*, **53**, 807–813.
- Bechir, O., Boufala, K., et Chevalier, Y. (2002). Strain energy density function for carbon black filled rubber vulcanized for industrial applications. *Mécanique et industries*, **3**, 245–252.
- Bergström, J. S. (1999). *Large strain time-dependant behavior of elastomeric materials*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Bergström, J. S. et Boyce, M. C. (1998). Constitutive modeling of the large strain time dependant behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, **46**, 931–954.
- Bergström, J. S. et Boyce, M. C. (2001). Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues. *Mech. Mater.*, **33**, 523–530.
- Bergström, J. S., Kurtz, S. M., Rimnac, C. M., et Edidin, A. A. (2002). Constitutive modeling of the ultra high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. *Biomaterials*, **23**, 2329–2343.
- Besdo, D. et Ihlemann, J. (2001). The effect of softening phenomena in filled rubber during inhomogeneous loading. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the second European Conference, Hannover, Germany*.
- Besdo, D. et Ihlemann, J. (2003). Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self-organizing linkage patterns. *Int. J. Plasticity*, **19**, 1001–1018.
- Bhagawan, S. S. et De, S. K. (1988). Mechanical properties and fracture surface morphology of clay-filled thermoplastic 1-2 polybutadiene rubber at elevated temperature. *Polym. Plast. Technol. Eng.*, **27**, 37–60.
- Biderman, V. L. (1958). Calculations of rubber parts. *Rascheti na Prochnost*, page 40.
- Bikard, J. (2002). *Un modèle de comportement visco-élastique plastique endommageable pour les élastomères chargés*. Thèse Université Aix-Marseille II.
- Bikard, J. et Desoyer, T. (2001). Finite viscoelasticity, plasticity and damage of a class of filled elastomers: constitutive model. *Mech. Res. Commun.*, **28**, 693–702.
- Blatz, P. J., Sharda, S. C., et Tschoegl, N. W. (1974). Strain energy function for rubberlike materials based on a generalized measure of strain. *Transactions of the society of rheology*, **18**, 145–161.
- Bokobza, L. (2001a). Reinforcement of elastomeric networks by fillers. pages 43–46. 8th international seminar on elastomers, Le Mans, France.
- Bokobza, L. (2001b). Silica and carbon black reinforcement of natural rubber. pages 231–234. 8th international seminar on elastomers, Le Mans, France.
- Bolzon, G. et Vitaliani, R. (1989). Derivation of hyperelastic incompressible material constitutive tensor within a total lagrangian framework. *Comput. Struct.*, **33**, 221–227.
- Bonart, R. (1968). X-ray investigations concerning the physical structure of cross-linking in segmented urethane elastomers. *J. Macromol. Sci. Phys.*, **B2**, 115–138.
- Bonet, J. et Wood, R. D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press.

- Bouasse, H. et Carrière, Z. (1903). Courbes de traction de caoutchouc vulcanisé. *Ann. Fac. Sciences de Toulouse*, **5**, 257–283.
- Boyce, M. C. (1996). Direct comparison of the Gent and the Arruda-Boyce constitutive models of rubber elasticity. *Rubber Chem. Technol.*, **69**, 781–785.
- Boyce, M. C. et Arruda, E. M. (2000). Constitutive models of rubber elasticity : a review. *Rubber Chem. Technol.*, **73**, 504–523.
- Brink, U. et Stein, E. (1996). On some mixed finite element methods for incompressible and nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Mech.*, **19**, 105–119.
- Bueche, F. (1960). Molecular basis for the Mullins effect. *J. Appl. Polym. Sci.*, **3**, 107–114.
- Bueche, F. (1961). Mullins effect and rubber filler interaction. *J. Appl. Polym. Sci.*, **5**, 271–281.
- Cantournet, S. (2002). *Endommagement et fatigue des élastomères*. Thèse de Doctorat - Université Pierre et Marie Curie.
- Carmichael, A. J. et Holdaway, H. W. (1961). Phenomenological elastomechanical behavior of rubber over wide ranges of strain. *J. Appl. Phys.*, **32**, 159–166.
- Chagnon, G., Verron, E., Gornet, L., Marckmann, G., Charrier, P., et Fort, P. (2001a). Experimental identification and rheological modeling of the Mullins effect for carbon black-filled rubber. pages 79–82, Le Mans, France. Eighth Seminar on Elastomers.
- Chagnon, G., Verron, E., Gornet, L., Marckmann, G., et Charrier, P. (2001b). Modélisation et simulation de l'effet Mullins dans les pièces élastomères du secteur automobile. Nancy, France. XVème Congrès Français de Mécanique.
- Chagnon, G., Marckmann, G., Verron, E., Gornet, L., Ostoja-Kuczynski, E., et Charrier, P. (2002). A new modeling of mullins effect and viscoelasticity of elastomers based on a physical approach. Prague, Czech Republic. International Rubber Conference.
- Chagnon, G., Marckmann, G., et Verron, E. (2003a). Equivalence of the hart-smith model with arruda-boyce and gent formulations for rubber elasticity. *Rubber Chem. Technol. (soumis)*.
- Chagnon, G., Verron, E., Gornet, L., Marckmann, G., et Charrier, P. (2003b). On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the Mullins effect. *J. Mech. Phys. Solids. (soumis)*.
- Charlton, D. J., Yang, J., et Teh, K. K. (1994). A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in finite element analysis. *Rubber Chem. Technol.*, **67**, 481–503.
- Chazeau, L., Brown, J. D., Yanyo, L. C., et Sternstein, S. S. (2000). Modulus recovery kinetics and other insights into the Payne effect for filled elastomers. *Polym. Composite*, **21**, 202–222.
- Chen, J. S. et Pan, C. (1996). A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelasticity, Part I: Theory. *J. Appl. Mech.*, **63**, 862–868.
- Chen, J. S., Wu, C. T., et Pan, C. (1996). A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelasticity, Part II: Applications. *J. Appl. Mech.*, **63**, 869–876.
- Chen, J. S., Han, W., Wu, C. T., et Duan, W. (1997). On the perturbed lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **142**, 335–351.

- Chicheportiche, D. (1998). *Comportement mécanique d'adhésifs polyuréthane - Application au collage des pare-brise*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- Cohen, A. (1991). A Padé approximant to the inverse Langevin function. *Rheol. Acta*, **30**, 270–273.
- Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., et Knuth, D. E. (1996). On the Lambert W function. *Comput. Math*, **5**, 329–359.
- Dannenberg, E. M. (1966). Molecular slippage mechanism of reinforcement. *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **42**, 26.
- Dannenberg, E. M. (1975). The effects of surface chemical interactions on the properties of filled reinforced rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, **48**, 410–444.
- Dannenberg, E. M. et Brennan, J. J. (1966). Strain energy as a criterion for stress softening in carbon-black-filled vulcanizates. *Rubber Chem. Technol.*, **39**, 597–608.
- Davies, C. K. L., De, D. K., et Thomas, A. G. (1994). Characterization of the behaviour of rubber for engineering design purposes: 1-Stress-strain relation. *Rubber Chem. Technol.*, **67**, 716–728.
- De Simone, A., Marigo, J. J., et Teresi, L. (2001). A damage mechanics approach to stress softening and its application to rubber. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**, 873–892.
- De Souza Neto, E. A., Peric, D., et Owen, D. R. J. (1994). A phenomenological three dimensional rate independent continuum damage model for highly filled polymers: formulation and computational aspects. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 1533–1550.
- Di Marzio, E. A. (1962). Contribution to a liquid like theory of rubber elasticity. *J. Chem. Phys.*, **36**, 1563.
- Di Marzio, E. A. (1994). Contribution to a liquid like theory of rubber elasticity 2. Existence of a $(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_z\lambda_x)$ term. *Polymer*, **35**, 1819.
- Doi, M. (1996). *Introduction to polymer physics*. Oxford Science Publications.
- Doll, S. et Schweizerhof, K. (2000). On the development of volumetric strain energy functions. *J. Appl. Mech. T. ASME*, **67**, 17–21.
- Dorfmann, A. et Ogden, R. W. (2003). A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber. *Int. J. Solids Struct.*
- Drozdov, A. D. et Dorfmann, A. I. (2001). Stress-strain relations in finite viscoelastoplasticity of rigid-rod networks: applications to the Mullins effect. *Continuum Mech. Therm.*, **13**, 183–205.
- Edwards, S. F. et Virgils, T. (1986). The effect of entanglements in rubber elasticity. *Polymer*, **27**, 483–492.
- Ehlers, W. et Eipper, G. (1998). The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws. *Acta Mech.*, **130**, 17–27.
- Elata, D. et Rubin, M. B. (1994). Isotropy of strain energy functions which depends only on a finite number of directional strain measures. *J. Appl. Mech. T. ASME*, **61**, 284–289.
- Flory, P. J. (1944). Network structure and the elastic properties of vulcanized rubber. *Chem. Rev.*, **35**, 51–75.

- Flory, P. J. (1977). Theory of elasticity of polymer networks: The effect of local constraints on junctions. *J. Chem. Phys.*, **66**, 5720.
- Flory, P. J. et Erman, B. (1982). Theory of elasticity of polymer networks. *Macromolecules*, **15**, 800.
- Fried, E. (2002). An elementary molecular-statistical basis for the Mooney and Rivlin-Saunders theories of rubber elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **50**, 571–582.
- Gadala, M. S. (1986). Numerical solutions of nonlinear problems of continua - II Survey of incompressibility constraints and software aspects. *Comput. Struct.*, **22**, 841–855.
- Gadala, M. S. (1992). Alternative methods for the solution of hyperelastic problems with incompressibility. *Comput. Struct.*, **42**, 1–10.
- Gent, A. N. (1994). *Strength of elastomers, Science and Technology of Rubber, 2nd Edition*, pages 471–512. Academic Press, J.E. Mark, B. Erman, F.R. Eirich edition.
- Gent, A. N. (1996). A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, **69**, 59–61.
- Gent, A. N. et Thomas, A. G. (1958). Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *J. Polym. Sci.*, **28**, 625–637.
- Govindjee, S. et Simo, J. C. (1991). A micro-mechanically continuum damage model for carbon black filled rubbers incorporating Mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, 87–112.
- Govindjee, S. et Simo, J. C. (1992). Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *Int. J. Solids Structures*, **29**, 1737–1751.
- Green, M. S. et Tobolsky, A. V. (1946). A new approach for the theory of relaxing polymeric media. *J. Chem. Phys.*, **14**, 87–112.
- Gregory, M. J. (1979). The stress-strain behaviour of filled rubber at moderate strains. *Plastics and rubber: Materials applications*, **4**, 184–188.
- Gurtin, M. E. et Francis, E. C. (1981). Simple rate-independent model for damage. *J. Spacecraft*, **18**, 285–286.
- Guth, E. et Mark, H. (1934). Internal molecular statistics especially in chain molecules. *Monatsh. Chem.*, **65**, 93–121.
- Haines, D. W. et Wilson, D. W. (1979). Strain energy density function for rubber like materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, 345–360.
- Halpin, J. C. (1964). Fracture of amorphous polymeric solids: Time to break. *J. Appl. Phys.*, **35**, 3133–3141.
- Han, W. H., Horkay, F., et McKenna, G. (1999). Mechanical and swelling behaviors of rubber: a comparison of some molecular models with experiments. *Math. Mech. Solids*, **4**, 139–167.
- Hart-Smith, L. J. (1966). Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *Z. Angew. Math. Phys.*, **17**, 608–626.
- Hartmann, S. (2001). Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *Int. J. Solids Struct.*, **38**, 7999–8018.

- Hartmann, S., Tschöpe, T., Schreiber, L., et Haupt, P. (2003). Finite deformations of a carbon black-filled rubber. Experiment, optical measurement and material parameter identification. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **22**, 309–324.
- Harwood, J. A. C. et Payne, A. R. (1966a). Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part 3. Carbon black filled vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, **10**, 315.
- Harwood, J. A. C. et Payne, A. R. (1966b). Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part 4. Unfilled vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, **10**, 1203–1211.
- Harwood, J. A. C., Mullins, L., et Payne, A. R. (1965). Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part 2. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers. *J. Appl. Polym. Sci.*, **9**, 3011–3021.
- Harwood, J. A. C., Mullins, L., et Payne, A. R. (1967). Stress softening in rubbers - a review. *Journal of the IRI*, **1**, 17–27.
- Heinrich, K. et Kaliske, M. (1997). Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube model of rubber elasticity. *Comput. Theor. Polym. Sci.*, **7**, 227–241.
- Heuillet, P. et Dugautier, L. (1997). *Modélisation du comportement hyperélastique des élastomères compacts*, pages 67–103. Génie Mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastiques, In Apollon Inpl LRCCP Firtech edition.
- Heuillet, P., Roumagnac, P., Dugautier, L., et Meyer, P. (1995). Modélisation du comportement hyperélastique des caoutchoucs et élastomères thermoplastiques compacts ou cellulaires. *Mecammat Infos*, pages 15–21.
- Hill, R. (1978). Aspects of invariance in solids mechanics. *Adv. Appl. Mech.*, **18**, 1–75.
- Hokanson, J. et Yazdani, S. (1997). A constitutive model of the artery with damage. *Mech. Res. Commun.*, **24**, 151–159.
- Holt, W. L. (1932). Behavior of rubber under repeated stresses. *Rubber Chem. Technol.*, **5**, 79–89.
- Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*. John Wiley and Sons, LTD.
- Holzapfel, G. A., Stadler, M., et Ogden, R. W. (1999). Aspects of stress softening in filled rubbers incorporating residual strains. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the first European Conference, Vienne, Autriche*.
- Horgan, C. O. et Saccomandi, G. (2003). Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility. *J. Mech. Phys. Solids*.
- IFOCA (1984). *Synthèse, propriétés et technologie des élastomères*. Institut national de formation et d'enseignement professionnel du caoutchouc.
- Isihara, A., Hashitsume, N., et Tatibana, M. (1951). Statistical theory of rubber-like elasticity - IV (two-dimensional stretching). *J. Chem. Phys.*, **19**, 1508–1512.
- James, A. G. et Green, A. (1975). Strain energy functions of rubber. II-The characterization of filled vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 2319–2330.

- James, A. G., Green, A., et Simpson, G. M. (1975). Strain energy functions of rubber. I Characterization of gum vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 2033–2058.
- James, H. M. et Guth, E. (1943). Theory of the elastic properties of rubber. *J. Chem. Phys.*, **11**, 455–481.
- James, H. M. et Guth, E. (1947). Theory of the increase in rigidity of rubber during cure. *J. Chem. Phys.*, **15**, 669–683.
- Jernigan, R. L. et Flory, P. J. (1969). Distribution functions for chain molecules. *J. Chem. Phys.*, **50**, 4185–4200.
- Johnson, A. R., Quigley, C. J., Young, D. G., et Danik, J. A. (1993). Viscohyperelastic modeling of rubber vulcanizates. *Tire Sci. Technol.*, **21**, 179–199.
- Johnson, A. R., Quigley, C. J., et Mead, J. L. (1994). Large strain viscoelastic constitutive models for rubber, Part I: Formulations. *Rubber Chem. Technol.*, **67**, 904–917.
- Johnson, M. A. et Beatty, M. F. (1993a). A constitutive equation for the Mullins effect in stress controlled extension experiments. *Continuum Mech. Therm.*, **5**, 301–318.
- Johnson, M. A. et Beatty, M. F. (1993b). The Mullins effect in uniaxial extension and its influence on transverse vibration of rubber string. *Continuum Mech. Therm.*, **5**, 83–115.
- Johnson, M. A. et Beatty, M. F. (1995). The Mullins effect in equibiaxial extension and its influence on the inflation of a balloon. *Int. J. Engng. Sci.*, **33**, 223–245.
- Kachanov, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk.*, **8**, 26–31.
- Kakavas, P. A. et Chang, W. V. (1995). An extension of the penalty function formulation to incompressible hyperelastic solids described by general measure of strain. *J. Appl. Polym. Sci.*, **55**, 1051–1061.
- Kaliske, M. et Domscheit, A. (2001). Modelling of softening effects in elastomeric material and its application in tire computations. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the second European Conference, Hannover, Germany*, pages 303–306.
- Kaliske, M. et Rothert, H. (1997a). Formulation and implementation of three dimensional viscoelasticity at small and finite strain. *Comput. Mech.*, **19**, 228–239.
- Kaliske, M. et Rothert, H. (1997b). On the finite element implementation of rubber-like materials at finite strains. *Eng. Computation*, **14**, 216–232.
- Kaliske, M. et Rothert, H. (1998). Constitutive approach to rate independent properties of filled elastomers. *Int. J. Solids. Structures*, **35**, 2057–2071.
- Kaliske, M. et Rothert, H. (1999). A viscoelastic damage model for elastomeric materials. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the first European Conference, Vienne, Autriche*.
- Kaliske, M., Nasdala, L., et Rothert, H. (2001). On damage modelling for elastic and viscoelastic materials at large strains. *Comput. Sci.*, **79**, 2133–2141.
- Kao, B. G. et Razgunas, L. (1986). On the determination of strain energy functions of rubbers. In *Vehicle structural Mechanics*, pages 145–154. Sixth international conference.

- Kausch, H. H., Heymans, N., Plummer, C. J., et Decroly, P. (2001). *Traité des matériaux. 14-Matériaux polymères : propriétés mécaniques et physiques. Principe de mise en oeuvre*. Presses polytechniques et universitaires romanes.
- Kilian, H., Strauss, M., et Hamm, W. (1994). Universal properties in filler-loaded rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, **67**, 1–16.
- Kim, Y., Saleeb, A. F., et Chang, T. Y. P. (1994). Implementation of material stiffness coefficients in finite element applications to rubber. *Tire Sci. Technol.*, **22**, 223–241.
- Kloczkowski, A. (2002). Application of statistical mechanics to the analysis of various physical properties of elastomeric networks - a review. *Polymer*, **43**, 1503–1525.
- Klüppel, M. et Schramm, J. (2000). A generalized tube model of rubber elasticity and stress softening of filler reinforced elastomers systems. *Macromol. Theor. Sim.*, **9**, 742–754.
- Knowles, J. K. (1977). The finite anti-plane shear field near the crack tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. *Int. J. Fracture*, **19**, 611–639.
- Kraus, G. (1984). Mechanical losses in carbon-black filled rubbers. *J. Appl. Polym. Sci., Polym. Symp.*, **39**, 75–92.
- Krishnaswamy, S. et Beatty, M. F. (2000). The Mullins effect in compressible solids. *Int. J. Eng. Sci.*, **38**, 1397–1414.
- Kruzik, M. (1999). On the composition of quasi-convex functions and the transposition. *J. Convex. Anal.*, **6**, 207–213.
- Kucherskii, A. M. (2003). New characteristic of tensile stress-strain properties in rubber. *Polym. Test.*, **22**, 503–507.
- Kuhn, W. et Grün, F. (1942). Beziehung zwischen elastischen konstanten und dehnungsdoppelbrechung hochelastischer stoffe. *Kolloideitschrift*, **101**, 248–271.
- Laiarinandrasana, L., Piques, R., Laraba-Abbes, F., et Layouni, K. (2001). Mullins' effect on rubber materials: damage model driving parameters. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the second European Conference, Hannover, Germany*, pages 149–158.
- Laiarinandrasana, L., Piques, R., et Robisson, A. (2003). Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total lagrangian formulation. *Int. J. Plasticity*, **19**.
- Lambert-Diani, J. et Rey, C. (1999). New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **18**, 1027–1043.
- Landel, R. F. (1998). A simple $w'(\lambda)$ function for the Valanis-Landel form of the stored energy function. *Rubber Chem. Technol.*, **71**, 234–243.
- Laraba-Abbes, F. (1998). *Comportements hyperélastique et viscoélastique de deux élastomères de deux types NR et PDMS par extensométrie optique bidimensionnelle*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.
- Laraba-Abbes, F., Ienny, P., et Piques, R. (2003a). A new “Taylor-made” methodology for the mechanical behaviour analysis of rubber-like materials: II- Application to the hyperelastic

- behaviour characterization of a carbon-black filled natural rubber vulcanizate. *Polymer*, **44**, 821–840.
- Laraba-Abbes, F., Ienny, P., et Piques, R. (2003b). A new “Taylor-made” methodology for the mechanical behaviour analysis of rubber-like materials: I- kinematics measurement using a digital speckle extensometry. *Polymer*, **44**, 807–820.
- Le Cam, J. B., Ostoja-Kuczynski, E., Briançon, C., Charrier, P., Verron, E., et Pérocheau, F. (2003). Influence de la fréquence de sollicitation sur le faciès de rupture de pièces élastomères en fatigue. In *38ème colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie*.
- Lee, D. J. et Donovan, J. A. (1985). Critical J-Integral and tearing energies for fracture of reinforced natural rubber. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **4**, 137–147.
- Lee, M. C. H. et Williams, M. C. (1985). Application of a new structural theory to polymers. I. Uniaxial stress in crosslinked rubbers. *J. Polym. Sci. : Polym. Phys. Edn*, **23**, 2243–2271.
- Lefeuvre, J. (2003). *Simulation numérique d'un dispositif de retenue d'enfant - Etude du comportement d'un polypropylène sous chargement dynamique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- Lemaitre, J. et Chaboche, J. L. (1990). Mechanics of solid materials. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Lin, R. C. et Schomburg, U. (2003). A finite elastic-viscoelastic-elastoplastic material law with damage: theoretical and numerical aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **192**, 1591–1627.
- Lion, A. (1996). A constitutive model for carbon black filled rubber: experimental investigations and mathematical representation. *Continuum Mech. Therm.*, **8**, 153–169.
- Lion, A. (1997). On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, 1805–1834.
- Liu, C. H., Horfstetter, G., et Mang, H. A. (1992). Evaluation of a 3d FE-formulations for incompressible hyperelastic materials at finite strains. In *Proceedings of the first european conference on numerical methods in Engineering*, pages 757–764.
- Liu, C. H., Horfstetter, G., et Mang, H. A. (1994). 3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains. *Eng. Comput.*, **11**, 111–128.
- Mackerle, J. (1998). Rubber and rubber-like materials, finite-element analyses and simulations. A bibliography (1976-1997). *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **6**, 171–198.
- Mackerle, J. (2002). Material and geometrical nonlinearities FEM and BEM analyses. A bibliography (1998-2002). *Finite elements in analysis and design*, **38**, 307–317.
- Magill, J. H. (1995). Crystallization and morphology of rubber. *Rubber Chem. Technol.*, **68**, 507–539.
- Marckmann, G. (2004). *Contribution à la modélisation du comportement des élastomères et des membranes soufflées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- Marckmann, G., Verron, E., Gornet, L., Chagnon, G., Charrier, P., et Fort, P. (2002). A theory of network alteration for the Mullins effect. *J. Mech. Phys. Solids.*, **50**, 2011–2028.

- Mars, W. V. (2001). *Multiaxial fatigue of rubber*. PhD, University of Toledo.
- Martin-Borret, G. (1998). *Sur la propagation de fissures dans les élastomères*. Thèse, Ecole Polytechnique.
- Maugin, G. A. (1999). *The thermodynamics of nonlinear irreversible behaviors*, volume 27 of *A. World scientific series on nonlinear science*.
- Mayer, J. et Mayer, M. (1940). *Statistical mechanics*. John Wiley and Sons edition.
- Meissner, B. (2000). Tensile stress-strain behaviour of rubber like networks up to break. Theory and experimental comparison. *Polymer*, **41**, 7827–7841.
- Meissner, B. et Matejka, L. (2000). Description of the tensile stress-strain behavior of filled-reinforced rubber-like networks using a Langevin-theory-based approach. Part I. *Polymer*, **41**, 7749–7760.
- Meissner, B. et Matejka, L. (2001). Description of tensile stress-strain behavior of filler-reinforced rubber-like networks using a Langevin-theory-based approach. Part II. *Polymer*, **42**, 1143–1156.
- Meyer, H. K. et Ferri, C. (1935). Sur l'élasticité des caoutchoucs. *Helv. Chim. Acta*, **18**, 570–589.
- Miehe, C. (1995). Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden type large strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14**, 697–720.
- Miehe, C. et Keck, J. (2000). Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 323–365.
- Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, **11**, 582–592.
- Morman Jr., K. N. (1988). An adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like viscoelasticity by use of a generalized strain measure. *Rheol. Acta*, **27**, 3–14.
- Morris, M. (1964). Network characterization from stress-strain behaviour at large extensions. *J. Appl. Polym. Sci.*, **8**, 545–553.
- Mullins, L. (1947). Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of rubber research*, **16**, 275–289.
- Mullins, L. (1948). Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chem. Technol.*, **21**, 281–300.
- Mullins, L. (1969). Softening of rubber by deformation. *Rubber Chem. Technol.*, **42**, 339–362.
- Mullins, L. et Tobin, N. R. (1957). Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, **30**, 551–571.
- Nicholson, D. W. (1995). Tangent modulus matrix for finite element analysis of hyperelastic materials. *Acta Mech.*, **112**, 187–201.
- Ogden, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber like solids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **326**, 565–584.
- Ogden, R. W. (1984). Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity. *Rubber Chem. Technol.*, **59**, 361–383.

- Ogden, R. W. (2001). Stress softening and residual strain in the azimuthal shear of a pseudo-elastic circular cylindrical tube. *Int. J. Nonlinear Mech.*, **36**, 477–487.
- Ogden, R. W. et Roxburgh, D. G. (1999a). An energy-based model for the Mullins effect. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the first European Conference, Vienne, Autriche*.
- Ogden, R. W. et Roxburgh, D. G. (1999b). A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **455**, 2861–2877.
- Othman, A. B. et Gregory, M. J. (1990). A stress-strain relationship for filled rubber. *J. Nat. Rubber Res.*, **5**, 144.
- Oudet, C. (1994). *Polymères - Structure et Propriétés - Introduction*. Masson edition.
- Pawelski, H. (2001). Softening behaviour of elastomeric media after loading in changing directions. In *Constitutive models for rubber - Proceeding of the second European Conference, Hannover, Germany*.
- Payne, A. R. (1963). The dynamic properties of carbon-black loaded natural rubber vulcanizates, part I. *Rubber Chem. Technol.*, **36**, 432–443.
- Payne, A. R. et Whittaker, R. E. (1971). Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, **44**, 440–478.
- Penn, R. W. (1970). Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transactions of the society of rheology*, **14**, 509–517.
- Perrin, G. (2000). Analytic stress-strain relationship for isotropic network model of rubber elasticity. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **t328**, 5–10.
- Piques, R. et Saintier, N. (2001). Critère multiaxial de prévision des durées de vie en fatigue de composants élastomères. *Revue des composites et des matériaux avancés*, **11**, 97–110.
- Przybylo, P. A. et Arruda, E. M. (2000). Experimental investigations and numerical modeling of incompressible elastomers during non-homogeneous deformations. *Rubber Chem. Technol.*, **71**, 730–749.
- Pucci, E. et Saccomandi, G. (2002). A note on the Gent model for rubber-like materials. *Rubber Chem. Technol.*, **75**, 839–851.
- Rabotnov, Y. N. (1968). Creep rupture. *Proc. XII, Int. Cong. Appl. Mech., Stanford-Springer*.
- Rigbi, Z. (1980). Reinforcement of rubber by carbon black. *Adv. Polym. Sci.*, **36**, 21–68.
- Rivlin, R. S. (1948a). Large elastic deformation of isotropic materials - IV. Further developments of the general theory. *Philos. T. Roy. Soc. A*, **241**, 379–397.
- Rivlin, R. S. (1948b). Some topics in finite elasticity. I. fundamental concepts. *Philos. T. Roy. Soc. A*, **A240**, 459–490.
- Rivlin, R. S. et Saunders, D. W. (1951). Large elastic deformations of isotropic materials - VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philos. T. Roy. Soc. A*, **A243**, 251–288.
- Robisson, A. (2000). *Comportement mécanique d'un élastomère chargé en silice. Etude de l'influence des charges et modélisation par une loi visco-hyperélastique endommageable*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

- Roland, C. M. (1989a). The Mullins effect in crosslinked rubber. *J. Rheol.*, **33**, 659–670.
- Roland, C. M. (1989b). Network recovery from uniaxial extension. 1. elastic equilibrium. *Rubber Chem. Technol.*, **62**, 863–879.
- Roland, C. M. (1989c). Network recovery from uniaxial extension. 2. the origin of the Mullins effect. *Rubber Chem. Technol.*, **62**, 880–895.
- Romanov, K. I. (2001). The Drucker stability of a material. *J. Appl. Maths Mech.*, **65**, 155–162.
- Saintier, N., Cailletaud, G., et Piques, R. (2000). Fatigue life prediction of natural rubber component for uniaxial and multiaxial loadings. In *Fracture Mechanics: Applications and Challenges, Proceedings of the 13th European Conference on Fracture*, San Sebastian.
- Seibert, D. J. et Schoche, N. (2000). Direct comparison of some recent rubber elasticity models. *Rubber Chem. Technol.*, **73**, 366–384.
- Septanika, E. G. et Ernst, L. J. (1998a). Application of the network alteration theory for modeling the time dependent constitutive behavior of rubber. Part I- General theory. *Mech. Mater.*, **30**, 253–263.
- Septanika, E. G. et Ernst, L. J. (1998b). Application of the network alteration theory for modeling the time dependent constitutive behavior of rubber. Part II - Further evaluation of the general theory and experimental verification. *Mech. Mater.*, **30**, 265–273.
- Sidoroff, F. (1982). *Cours sur les grandes déformations*. Rapport GRECO, Ecole d'été Sophia-Antipolis.
- Simo, J. C. (1987). On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **60**, 153–173.
- Simo, J. C. (1988). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **66**, 199–219.
- Simo, J. C. et Pister, K. S. (1984). Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **46**, 201–215.
- Simo, J. C. et Taylor, R. L. (1982). Penalty function formulations for incompressible non-linear elastostatics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **35**, 107–118.
- Stevenson, A. (1993). Stress softening of elastomers. *MSI International fatigue life research project (Rapport interne)*.
- Sullivan, J. L. (1987). A nonlinear viscoelastic model for representing nonfactorizable time-dependent behaviour of cured rubber. *J. Rheol.*, **31**, 271–295.
- Sussman, T. et Bathe, K. J. (1987). A finite element formulation for non-linear incompressible elastic and inelastic analysis. *Comput. Struct.*, **26**, 357–409.
- Takamatsu, T. S. et Stricklin, J. A. (1976). Symmetric stiffness matrix for incompressible hyperelastic materials. *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, **14**, 414–416.
- Treloar, L. R. G. (1943a). The elasticity of a network of long chains molecules I. *Trans. Faraday Soc.*, **39**, 36–41.

- Treloar, L. R. G. (1943b). The elasticity of a network of long chains molecules II. *Trans. Faraday Soc.*, **39**, 241–246.
- Treloar, L. R. G. (1944). Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, **46**, 59–70.
- Treloar, L. R. G. (1946). The elasticity of a network of long-chain molecules - III. *Trans. Faraday Soc.*, **42**, 77–83.
- Treloar, L. R. G. (1954). The photoelastic properties of short-chain molecular networks. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **54**, 881.
- Treloar, L. R. G. (1975). *The physics of rubber elasticity*. Oxford University Press, Oxford (UK).
- Treloar, L. R. G. et Riding, G. (1979). A non-gaussian theory for rubber in biaxial strain. I. mechanical properties. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **369**, 261–280.
- Truesdell, C. (1966). *The element of continuum mechanics*. New-York: Springer Verlag.
- Tschoegl, N. W. (1972). Constitutive equations for elastomers. *Rubber Chem. Technol.*, **45**, 60.
- Valanis, K. C. et Landel, R. F. (1967). The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *J. Appl. Phys.*, **38**, 2997–3002.
- van den Bogert, P. A. J. et de Borst, R. (1990). Constitutive aspects and finite elements analysis of 3D rubber specimens in compression and shear. In G. N. Pandle et J. Middleton, editors, *NUMETA 90: Numerical methods in engineering: Theory and Applications*, pages 870–877.
- Verron, E. (2003). *Modélisation du comportement des structures et des matériaux élastomères*. HDR - Ecole Centrale de Nantes.
- Vieweg, S., Unger, R., Schroter, K., Donth, E., et Heinrich, G. (1995). Frequency and temperature dependence of the small strain behaviour of carbon black filled vulcanized. *Polym. Network Blend*, **5**, 199–204.
- Voyiadjis, G. Z., Ju, J. W., et Chaboche, J. L. (1998). *Damage Mechanics in Engineering Materials*, volume 46 of *Studies in Applied Mechanics*. Elsevier.
- Wall, F. T. (1942a). Statistical thermodynamics of rubber. *J. Chem. Phys.*, **10**, 132–134.
- Wall, F. T. (1942b). Statistical thermodynamics of rubber II. *J. Chem. Phys.*, **10**, 485–488.
- Wall, F. T. (1943). Statistical thermodynamics of rubber III. *J. Chem. Phys.*, **11**, 527–530.
- Wu, P. D. et van der Giessen, E. (1993). On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 427–456.
- Yeoh, O. H. (1990). Characterization of elastic properties of carbon black filled rubber vulcanizates. *Rubber Chem. Technol.*, **63**, 792–805.
- Yeoh, O. H. (1993). Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, **66**, 754–771.
- Yeoh, O. H. (1997). On the Ogden strain-energy function. *Rubber Chem. Technol.*, **70**, 175.
- Yeoh, O. H. et Fleming, P. D. (1997). A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. *J. Polym. Sci. B: Polym Phys*, **35**, 1919–1931.

- Zuñiga, A. E. et Beatty, M. F. (2002a). Constitutive equations for amended non-gaussian network models of rubber elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **40**, 2265–2294.
- Zuñiga, A. E. et Beatty, M. F. (2002b). A new phenomenological model for stress-softening in elastomers. *Z. Angew. Math. Phys.*, **53**, 794–814.

Passage du glissement simple au glissement pur

A. 1 Introduction

Les essais de glissement simple couramment employés dans le milieu industriel posent une difficulté d'exploitation. En effet, les directions principales changent lors de la déformation, ainsi les simulations uniaxiales ne s'écrivent pas simplement. Une solution consiste à transformer les essais de glissement simple en glissement pur (Charlton *et al.*, 1994). La méthode est exposée ci-après.

A. 2 Descriptif

A. 2.1 Glissement simple

Les essais de glissement ont été réalisés sur des éprouvettes de glissement simple à quatre blocs (cf. Figure A.1). Un déplacement est imposé aux extrémités de l'éprouvette et la force



FIG. A.1 – *Éprouvette quadruple cisaillement*

exercée entre les deux mors de fixation est mesurée. Ces essais reviennent à imposer un glissement aux quatre blocs de l'éprouvette. Un bloc d'élastomère est présenté dans un état déformé sur la figure A.2. Les états de contrainte et de déformation correspondants s'écrivent :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}_{(\mathfrak{R}_0)} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \pi_y \\ & & \pi_z \end{pmatrix}_{(\mathfrak{R}_0)} \quad (\text{A.1})$$

où \mathfrak{R}_0 est le repère de l'éprouvette dans sa configuration non déformée. La mesure du déplacement et de la force appliquée permettent d'obtenir facilement le glissement γ (cf. Figure A.2) et la

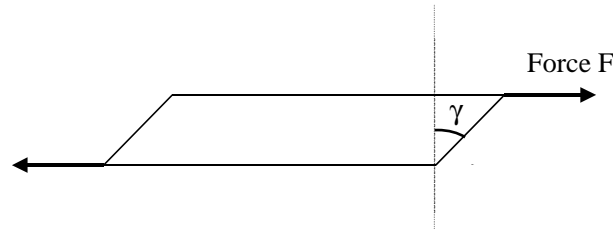


FIG. A.2 – Définition de la force appliquée et de la mesure de déformation sur l'éprouvette de glissement pur.

contrainte de cisaillement τ_{xy} (du tenseur des contraintes nominales) d'après la géométrie de la structure. Les valeurs des autres contraintes (π_x , π_y et π_z) ne peuvent être déterminées par les mesures effectuées.

Lors de ces essais, les directions principales des déformations dans chaque bloc tournent. La figure A.3 présente la position des directions principales dans un état de repos (repère \mathfrak{R}_0) et dans un état déformé (repère \mathfrak{R}_1). L'angle de rotation entre les deux repères est noté θ .

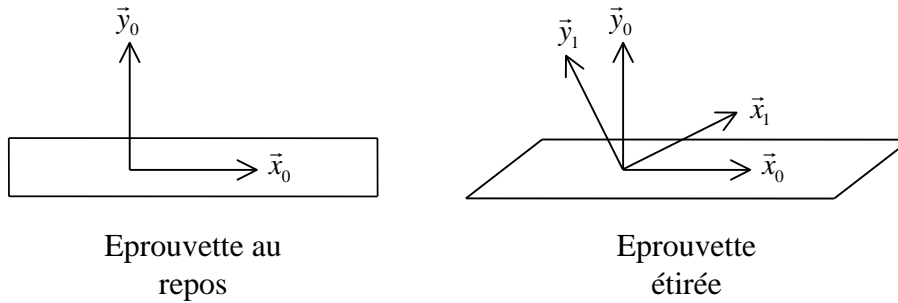


FIG. A.3 – Orientation des directions principales dans l'éprouvette de glissement simple dans les configurations déformée et non déformée.

A. 2.2 Glissement pur

La figure A.4 présente la forme d'une éprouvette de glissement pur. Lors de l'essai, le



FIG. A.4 – Éprouvette de glissement pur.

déplacement est imposé à l'éprouvette tandis que l'effort induit est mesuré. Les champs de contrainte et de déformation dans le matériau s'écrivent :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1/\lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & & \\ & 0 & \\ & & \pi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

et se déduisent simplement de la géométrie de l'éprouvette (la contrainte π_3 ne peut être déterminée par les données de l'essai). L'avantage de cette géométrie est de permettre aux directions principales de rester fixes au cours de l'essai.

A. 2.3 Comparaison des glissements

Les deux géométries d'éprouvettes de glissement possèdent le même type de champ de déformation. La figure A.5 présente les caractéristiques des deux géométries d'éprouvette. Le

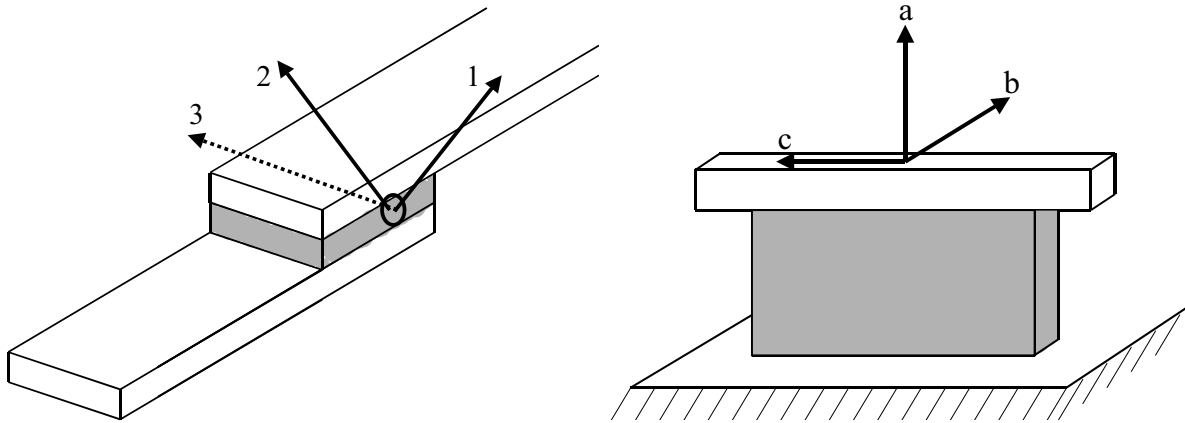


FIG. A.5 – Représentation des directions principales dans les géométries tridimensionnelles des éprouvettes de glissement simple et glissement pur.

tableau A.1 présente une comparaison de leurs caractéristiques et donne la correspondance entre

Directions	Éprouvette CS	Éprouvette CP
Non déformée	Direction 3	Direction c
Traction	Direction 1	Direction a
Compression	Direction 2	Direction b
Mesures	Angle de glissement (γ) Contraintes de cisaillement (τ)	Elongation dans la direction a (λ_a) Contrainte dans la direction a (π_a)

TAB. A.1 – Comparaison des éprouvettes de glissement simple et glissement pur.

les différentes directions de l'espace pour les deux éprouvettes. Par changement de repère, les deux essais peuvent être simplement comparés. L'essai de glissement simple s'écrit dans sa base principale (repère \mathfrak{R}_1) sous la même forme que l'essai de glissement pur (Eq. A.2), avec :

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{abs} \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \right) \quad (\text{A.3})$$

L'angle de rotation entre les deux repères \mathfrak{R}_0 et \mathfrak{R}_1 s'écrit simplement :

$$\theta = \arctan \frac{1}{\lambda} \quad (\text{A.4})$$

Les matrices des contraintes des deux types d'essais sont comparées en écrivant le tenseur des contraintes de l'essai de glissement pur (Eq. A.2) dans le repère \mathfrak{R}_1 grâce à la connaissance de la rotation entre les deux repères :

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \cos^2(\theta) & \pi_1 \cos(\theta) \sin(\theta) & \\ \pi_1 \cos(\theta) \sin(\theta) & \pi_1 \sin^2(\theta) & \\ & & \pi_3 \end{bmatrix}_{(\mathfrak{R}_0)} \quad (\text{A.5})$$

Ceci permet d'obtenir une relation simple entre la contrainte principale maximale de l'essai de glissement pur et la contrainte de cisaillement de l'essai de glissement simple :

$$\pi_{xy} = \pi_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (\text{A.6})$$

A. 3 Traitement pratique

La démarche à suivre pour convertir un essai de glissement simple en glissement pur est la suivante :

- déterminer les élongations principales,
- calculer l'angle de rotation,
- calculer la première contrainte principale de glissement pur à partir de la relation A.6.

Remarque : Pour un calcul analytique, il est tout de même nécessaire d'identifier la pression hydrostatique lorsque l'on travaille avec un matériau incompressible.

A. 4 Vérification expérimentale

Une comparaison entre les essais de glissement pur et les essais de glissement simple est présentée sur la figure A.6. Il apparaît une légère déviation entre les deux simulations ; celle-ci est inexistante à faibles déformations et croît lorsque la déformation augmente. Cet écart n'est pas dû à la théorie de transformation utilisée mais à l'hypothèse que le parallélépipède rectangle de matière se transforme durant toute la déformation sous la forme d'un prisme à base parallélogramme.

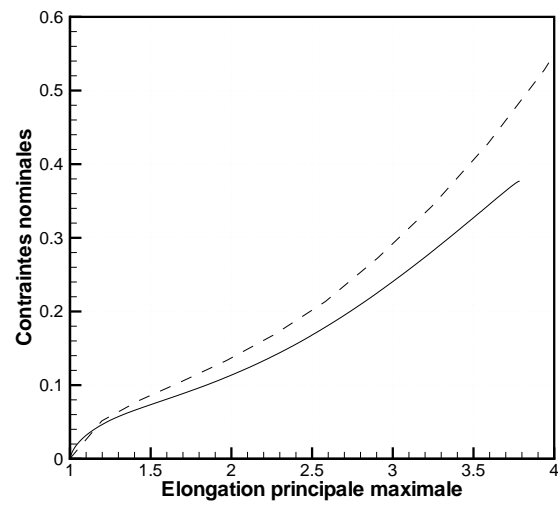


FIG. A.6 – Comparaison des essais de glissement pur (—) et de glissement simple traité grâce à l'équation A.6 (---).

Equivalence des modèles hyperélastiques

B. 1 Introduction

La base de la modélisation du comportement d'un élastomère passe par l'utilisation d'une densité d'énergie hyperélastique. Comme vu dans le chapitre II, l'énergie de déformation peut s'exprimer simplement en fonction des deux premiers invariants de la transformation :

$$W = W(I_1, I_2) \quad (\text{B.1})$$

Les contraintes eulériennes s'écrivent simplement grâce aux dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} = -p\mathbf{I} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 \quad (\text{B.2})$$

La difficulté majeure reste la détermination de la fonction W (voir chapitre II). Une densité efficace doit avoir quatre qualités :

- elle doit reproduire la forme en « S » de la courbe contraintes-déformations,
- le changement de mode de déformation ne doit pas être problématique, après une identification des paramètres sur les essais de traction uniaxiale, les simulations en glissement pur et en traction équibiaxiale doivent être correctes,
- le nombre de paramètres matériels doit être aussi faible que possible pour réduire les problèmes d'identification,
- la formulation mathématique doit être la plus simple possible dans le but d'une implantation numérique fiable du modèle.

Vus les pré-requis énoncés, les modèles sélectionnés sont les modèles récents d'Arruda et Boyce (1993) et de Gent (1996), ainsi que le modèle plus ancien de Hart-Smith (1966). Ces modèles seront respectivement notés AB, G et HS.

Le but de cette étude est de démontrer l'équivalence des trois modèles précédemment cités. Plus précisément, leurs comportements à faibles et grandes déformations seront examinés. Boyce (1996) a déjà comparé les modèles AB et G, l'apport réside ici dans la comparaison de ces

modèles avec le modèle HS (Chagnon *et al.*, 2003a). Dans un premier temps, les équations des modèles seront rappelées, puis des relations théoriques entre les paramètres des modèles seront développées. Finalement, ces propositions seront validées sur des cas concrets d'identification.

B. 2 Densité d'énergie de déformation

Dans ce paragraphe, les énergies de déformation qui définissent les modèles HS, AB et G sont brièvement rappelées.

B. 2.1 Modèle HS

Dans les années 60, Hart-Smith (1966) a proposé une forme empirique de W fondée sur l'étude de ses dérivées par rapport aux deux premiers invariants. Une forme capable de décrire le comportement sur une large gamme de déformations est construite :

$$W_{\text{HS}} = C_1 \int \exp [C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + C_2 \ln \frac{I_2}{3} \quad (\text{B.3})$$

où C_1 , C_2 , C_3 sont les trois paramètres matériels du modèle. Dans cette équation, le premier terme de l'énergie de déformation décrit le comportement global du matériau. Ce terme ne dépend que du premier invariant. Le second terme qui fait intervenir I_2 est issu du travail de Gent et Thomas (1958) qui s'intéressent à la capacité du modèle à décrire les déformations modérées (moins de 150%). Il peut être relié à la théorie de Mooney-Rivlin qui emploie les deux invariants I_1 et I_2 et qui est reconnue pour décrire le comportement aux déformations modérées (Treloar, 1975).

B. 2.2 Modèle AB

Le modèle d'Arruda et Boyce (1993) est fondé sur une approche macromoléculaire. Suivant la théorie de Kuhn et Gr \ddot{u} n (1942), le comportement statistique d'une chaîne est supposé non-gaussien. Le matériau est représenté par huit chaînes orientées dans les directions des diagonales d'un cube. L'énergie de déformation est ainsi donnée par :

$$W_{\text{AB}} = C_R N \left(\sqrt{\frac{I_1}{3N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \quad (\text{B.4})$$

où $\beta = \mathcal{L}^{-1}(\sqrt{I_1/3N})$ et \mathcal{L} est la fonction de Langevin définie par $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - 1/x$. Dans l'équation précédente, C_R et N sont les paramètres matériels. Du fait de la nature non-gaussienne des lois, $3N$ représente la valeur maximale que I_1 peut atteindre, donc la limite d'extensibilité des chaînes. Ce modèle dépend uniquement du premier invariant I_1 et est bien connu pour ses bonnes performances à des fortes déformations (Wu et van der Giessen, 1993).

B. 2.3 Modèle G

Récemment, Gent (1996) a proposé une forme empirique d'énergie de déformation :

$$W_G = -\frac{E}{6} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (\text{B.5})$$

où E et J_m sont les deux paramètres matériels du modèle. J_m représente la valeur maximale que peut atteindre $I_1 - 3$ donc la limite d'extensibilité du matériau. Ceci est une représentation phénoménologique de la limite d'extensibilité des chaînes.

B. 3 Comparaison des paramètres matériels

Ce paragraphe est consacré à la comparaison des trois modèles cités ci-dessus. Ceux-ci sont supposés décrire qualitativement le comportement sur l'ensemble de la gamme de déformations. Le comportement doit être aussi bien modélisé à faibles qu'à grandes déformations. Néanmoins, les termes en I_2 peuvent être vus comme une correction des théories gaussienne et non-gaussienne. Ainsi, nous proposons de ne comparer que les parties de W ne dépendant que de I_1 , *i.e.* le modèle HS considéré pour le reste de l'étude est le suivant :

$$W_{\text{HS}} = C_1 \int \exp [C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 \quad (\text{B.6})$$

Le modèle ne dépend plus que de deux paramètres matériels : C_1 et C_3 . Un travail préliminaire de Boyce (1996) a montré l'équivalence entre les modèles AB et G. La suite de l'étude s'intéressera à la comparaison du modèle HS avec les deux autres modèles précédemment cités.

B. 3.1 Développements polynômiaux

Avant de comparer explicitement les modèles, leurs développements polynômiaux en fonction de I_1 sont explicités. Ceci simplifiera leur comparaison à faibles déformations. Le modèle HS (Eq. B.6) peut être développé sous la forme d'une série infinie :

$$W_{\text{HS}} = C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_3^i}{(2i+1) i!} (I_1 - 3)^{2i+1} \quad (\text{B.7})$$

Il est important de noter que ce développement se trouve être un cas particulier du modèle proposé par Rivlin (1948a,b) :

$$W = \sum_{(i,j)=(0,0)}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (\text{B.8})$$

où la dépendance au deuxième invariant I_2 n'est pas prise en compte, *i.e.* $j = 0$, et avec seulement les puissances impaires du développement. Les cinq premiers termes du développement de W_{AB}

(Eq. B.4) s'écrivent :

$$W_{AB} = C_R \left[\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20N}(I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2}(I_1^3 - 27) \right. \\ \left. + \frac{19}{7000N^3}(I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4}(I_1^5 - 243) + \dots \right] \quad (\text{B.9})$$

Ce développement est également un cas particulier des séries de Rivlin (Eq. B.8), mais contrairement à l'équation B.7, il est exprimé à l'aide des puissances paires et impaires de I_1 . Tout comme les précédentes énergies de déformation, W_G (Eq. B.5) peut être développée en séries :

$$W = \frac{E}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_m^{n-1}} (I_1 - 3)^n \quad (\text{B.10})$$

Ici, les puissances paires et impaires sont conservées.

B. 3.2 Comportement à faibles déformations

La raideur à faibles déformations des modèles est respectivement représentée par le premier terme de chacun des développements en séries (Eqs B.7, B.9 et B.10). Les trois modèles se réduisent donc au modèle néo-Hookéen (Treloar, 1975) :

$$W_{NH} = \frac{1}{2}C (I_1 - 3) \quad (\text{B.11})$$

où C est l'unique paramètre matériel. Ainsi, les premiers paramètres des modèles HS, AB et G sont proportionnels, ils sont simplement reliés à C par l'équation suivante :

$$C = 2C_1 = C_R = \frac{E}{3} \quad (\text{B.12})$$

B. 3.3 Comportement à grandes déformations

Comme précisé précédemment, les trois modèles sont caractérisés par leur capacité à décrire le raidissement du matériau qui se produit aux grandes déformations. D'un point de vue physique, ce phénomène est associé à la limite d'extensibilité des chaînes macromoléculaires.

Selon l'équation B.2 et en prenant en compte que les densités d'énergie ne dépendent pas du second invariant, *i.e.* $\partial W / \partial I_2 = 0$, la relation contraintes-déformations se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} \quad (\text{B.13})$$

dans laquelle seule la dérivation de W par rapport à I_1 est pertinente.

Dans les trois cas, le terme est donné par :

$$\frac{\partial W_{HS}}{\partial I_1} = C_1 \exp [C_3(I_1 - 3)^2] \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial W_{AB}}{\partial I_1} = \frac{C_R N}{2\sqrt{3}I_1} \mathcal{L}^{-1}(\sqrt{I_1/3N}) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial W_G}{\partial I_1} = \frac{E}{6} \frac{1}{1 - (I_1 - 3)/J_m} \quad (\text{B.16})$$

En examinant ces équations, il est évident que les trois fonctions présentent une forte incurvation pour les grandes valeurs de I_1 . De plus, pour les modèles AB et G, $\partial W/\partial I_1$ tend asymptotiquement vers l'infini lorsque I_1 se rapproche de la valeur limite. La position de l'asymptote verticale correspond à des valeurs de I_1 respectivement égales à $3N$ et $J_m + 3$ pour les modèles AB et G. Le second terme des modèles est ainsi simplement relié par :

$$J_m = 3(N - 1) \quad (\text{B.17})$$

Le modèle HS ne présente pas un comportement asymptotique puisqu'il est écrit grâce à une fonction exponentielle. Néanmoins, pour assurer que les modèles reproduisent le même comportement à grandes déformations, il est important qu'ils présentent les mêmes pentes sur une large gamme de déformations. Ici, le modèle HS est simplement comparé au modèle G, l'équivalence entre les modèles AB et G étant d'ores-et-déjà établie par l'équation B.17. Les pentes de la courbe contrainte-déformation s'expriment simplement avec la dérivée seconde de W par rapport au premier invariant :

$$\frac{\partial^2 W_{\text{HS}}}{\partial I_1^2} = 2C_1 C_3 (I_1 - 3) \exp [C_3 (I_1 - 3)^2] \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{G}}}{\partial I_1^2} = \frac{E}{6J_m} \frac{1}{[1 - (I_1 - 3)/J_m]^2} \quad (\text{B.19})$$

Pour assurer que les réponses des modèles HS et G soient similaires, il faut que les deux dérivées soient égales. En éliminant le premier paramètre matériel, *i.e.* respectivement C_1 et E par l'utilisation de l'équation B.12, on obtient :

$$2C_3 (I_1 - 3) \exp [C_3 (I_1 - 3)^2] = \frac{1}{J_m} \frac{1}{[1 - (I_1 - 3)/J_m]^2} \quad (\text{B.20})$$

Il apparaît que la relation entre le second paramètre matériel de chaque modèle (C_3 et J_m) dépend de I_1 . Cela signifie que l'égalité des pentes dépend du niveau de déformation. Dans le but de résoudre cette équation, elle est transformée de la façon suivante :

$$C_3 (I_1 - 3)^2 \exp [C_3 (I_1 - 3)^2] = \frac{I_1 - 3}{2J_m} \frac{1}{[1 - (I_1 - 3)/J_m]^2} \quad (\text{B.21})$$

La solution de cette équation s'exprime grâce à la fonction W de Lambert, notée ici \mathcal{W}^{L} :

$$C_3 (I_1 - 3)^2 = \mathcal{W}^{\text{L}} \left(\frac{I_1 - 3}{2J_m} \frac{1}{[1 - (I_1 - 3)/J_m]^2} \right) \quad (\text{B.22})$$

où \mathcal{W}^{L} est définie comme étant la fonction satisfaisant (voir Corless *et al.* (1996) et les références citées à l'intérieur pour les détails) :

$$\mathcal{W}^{\text{L}}(x) e^{\mathcal{W}^{\text{L}}(x)} = x \quad (\text{B.23})$$

Ainsi, en définissant le premier invariant réduit α par :

$$\alpha = \frac{I_1 - 3}{J_m} \quad (\text{B.24})$$

où $\alpha \in [0, 1]$, puisque J_m représente la valeur asymptotique de $I_1 - 3$, et en considérant quelques manipulations algébriques, l'équation B.22 peut être transformée en :

$$C_3 J_m^2 = \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{W}^L \left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \right) \quad \text{pour } \alpha \in [0, 1] \quad (\text{B.25})$$

Cette équation relie les seconds paramètres matériels (C_3 et J_m) des deux modèles HS et G aux grandes déformations. Comme précisé plus haut, cette égalité dépend de α , *i.e.* du niveau de déformation. Néanmoins, puisque le modèle G croît asymptotiquement vers l'infini dans le voisinage de $I_1 = J_m + 3$, *i.e.* $\alpha = 1$ et que le modèle HS se réduit à une forme exponentielle fortement croissante pour de tels niveaux de déformation, l'équation B.25 n'est pas définie pour $\alpha = 1$. En pratique, l'équivalence entre les deux équations du modèle peut simplement être démontrée pour une gamme donnée de α (ou de I_1). Dans ce but, une valeur moyenne de la partie droite de l'équation B.25 peut être adoptée pour relier C_3 et J_m . Cela permet de supprimer la dépendance en α de $C_3 J_m^2$. Notons $[\alpha_{\min}, 1[$, avec $\alpha_{\min} > 0$, la gamme de déformation dans laquelle les modèles HS et G sont proches. Sur ce domaine, les paramètres peuvent être simplement reliés par une grandeur constante k :

$$C_3 J_m^2 = k \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{1 - \alpha_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^1 \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{W}^L \left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \right) d\alpha \quad (\text{B.26})$$

Ainsi, la valeur de k dépend de la zone de déformation sur laquelle on souhaite assurer l'équivalence des modèles. La figure B.1 présente l'évolution de k comme une fonction de α_{\min} . Comme

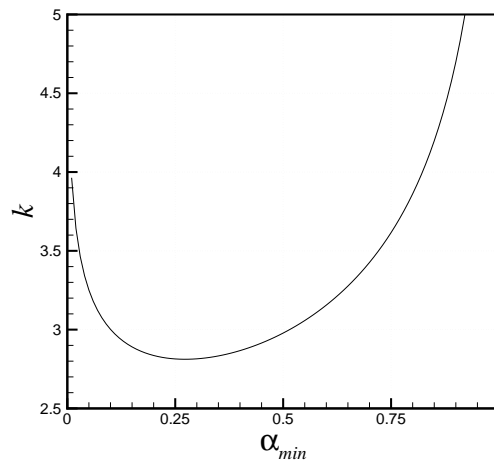


FIG. B.1 – Courbe illustrant l'équation (B.26) : k comme fonction de α_{\min} .

illustré par le graphe, k tend vers l'infini lorsque α_{\min} tend vers 0 ou 1.

Le choix pratique de la limite α_{\min} et de la valeur correspondante de k sera discuté dans le paragraphe suivant sur deux exemples.

B. 4 Exemples

Finalement, deux exemples sont étudiés pour démontrer l'équivalence entre les trois équations et vérifier les relations B.12, B.17 et B.26 qui relient les paramètres matériels.

B. 4.1 Identification du modèle G

Le premier exemple consiste à utiliser le modèle G comme référence. Dans le but de créer des matériaux virtuels et leurs caractéristiques correspondantes, les deux paramètres E et J_m sont considérés comme variant respectivement dans $]0, 10]$ et $[7, 100]$. Ces intervalles correspondent aux plages de valeur classiquement obtenues pour tout type d'élastomères. Les valeurs de J_m représentent la limite d'extensibilité des chaînes qui varie entre 200% et 900% dans le cas de la traction uniaxiale. Dans un premier temps, J_m est choisi égal à 60 et E prend trois valeurs : 0,1, 1 et 10. Dans ces trois cas, la fonction $\partial W_G / \partial I_1$ donnée par l'équation B.16 est discrétisée en utilisant un nombre important de valeurs. Les contraintes correspondant aux modèles HS et AB données par les équations B.14 et B.15 sont identifiées sur ces données. L'identification est obtenue par le même principe que les modèles d'accommodation (Marckmann, 2004). La relation linéaire (Eq. B.12) entre le premier paramètre de chaque modèle est exactement retrouvée pour les trois essais.

Dans un second temps, la pente initiale E est fixée à 1 et J_m prend des valeurs comprises entre 7 et 100. Le premier paramètre des modèles HS et AB est calculé grâce à l'équation B.12, *i.e.* $C_1 = 6$ et $C_R = 3$. Pour les valeurs de J_m considérées, la même méthode que pour le premier paramètre est employée pour déterminer C_3 et N . Pour le modèle AB, la figure B.2 montre une comparaison entre les résultats identifiés et la relation théorique (Eq. B.17). Les résultats

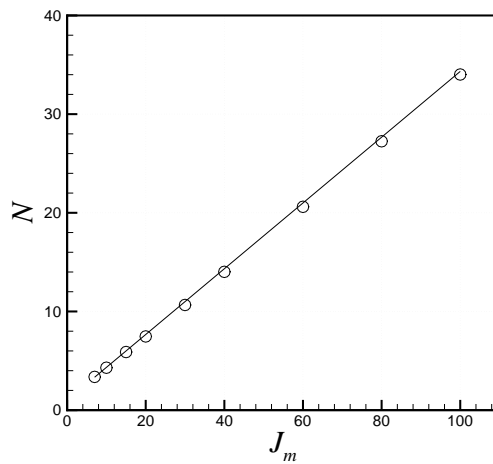


FIG. B.2 – Comparaison du second paramètre des modèles AB et G: (○) résultats identifiés, (—) résultats théoriques donnés par l'équation (B.17).

identifiés sont en accord avec les résultats théoriques obtenus sur la position de l'asymptote verticale des deux modèles.

Comme précisé plus haut, le cas du modèle HS est plus difficile ; notre but est de vérifier l'équation B.26. Ainsi, l'intervalle de α doit être défini pour calculer l'intégrale de cette équation. Dans le but de choisir la borne inférieure α_{\min} , on considère que les pentes des modèles HS et G ne doivent pas être comparées pour les faibles déformations, car seul le raidissement doit être examiné. Comme proposé par Kucherskii (2003), le modèle néo-Hookéen est valide sur le premier tiers de la gamme de déformations admissible. Ainsi, seulement deux tiers de la gamme de déformations doivent être retenus pour décrire le comportement à fortes déformations, ce qui correspond à $\alpha_{\min} \geq 1/9$. De plus, les modèles sont fortement différents dans le voisinage de $\alpha = 1$. La présence de l'asymptote verticale dans le modèle G et de la branche exponentielle dans le modèle HS conduisent à considérer que l'équivalence doit être démontrée pour plus d'un tiers de la gamme de déformation, *i.e.* $\alpha_{\min} \leq 4/9$. Ainsi, selon l'équation B.26 et en notant que k n'a pas une évolution monotone pour $\alpha_{\min} \in [1/9, 4/9]$, la gamme dans laquelle k varie, peut être facilement établie :

$$2.83 \leq k \leq 2.98 \quad (\text{B.27})$$

Les variations de k dans ce domaine sont illustrées par la figure B.1.

La figure B.3 montre la comparaison entre les résultats théoriques et identifiés. Les deux

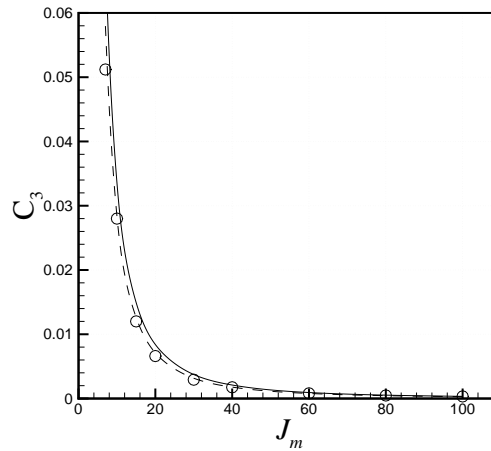


FIG. B.3 – Comparaison du second paramètre pour les modèles de G et HS : (\circ) résultats identifiés, (- - -) résultats théoriques donnés par l'Eq. (B.26) pour $k = 2.83$, (—) résultats théoriques donnés par l'Eq. (B.26) pour $k = 2.98$.

bornes de l'intervalle de k sont considérées. Cette figure illustre que les résultats identifiés sont correctement reproduits par l'équation B.26, avec une légère dépendance à la valeur α_{\min} .

B. 4.2 Identification des essais de Treloar

Le second exemple repose sur la comparaison des modèles sur un matériau réel. Ici, les données expérimentales de Treloar (1944) sont utilisées. L'auteur a réalisé une large gamme d'essais prenant en compte différents modes de déformation : traction uniaxiale, glissement pur,

tension équibiaxiale (par le gonflement d'un ballon) et traction biaxiale (par combinaison de traction et glissement pur).

En utilisant ces données, les paramètres matériels des trois équations du modèle sont déterminés. L'identification est réalisée sur tous les essais simultanément. Les paramètres matériels sont présentés dans le tableau B.1. Les résultats correspondant aux relations contrainte-déforma-

modèle	HS	AB	G
premier paramètre (MPa)	$C_1 = 0.18$	$C_R = 0.34$	$E = 1.0$
second paramètre	$C_3 = 2.7 \cdot 10^{-4}$	$N = 27.9$	$J_m = 92.0$

TAB. B.1 – Valeurs des paramètres matériels.

tion sont présentés sur la figure B.4. Sur chaque figure, les axes des abscisses et des ordonnées correspondent à la déformation et à la contrainte la plus pertinente pour décrire chaque essai. Les quatre graphes illustrent l'équivalence entre les trois modèles et démontrent leur capa-

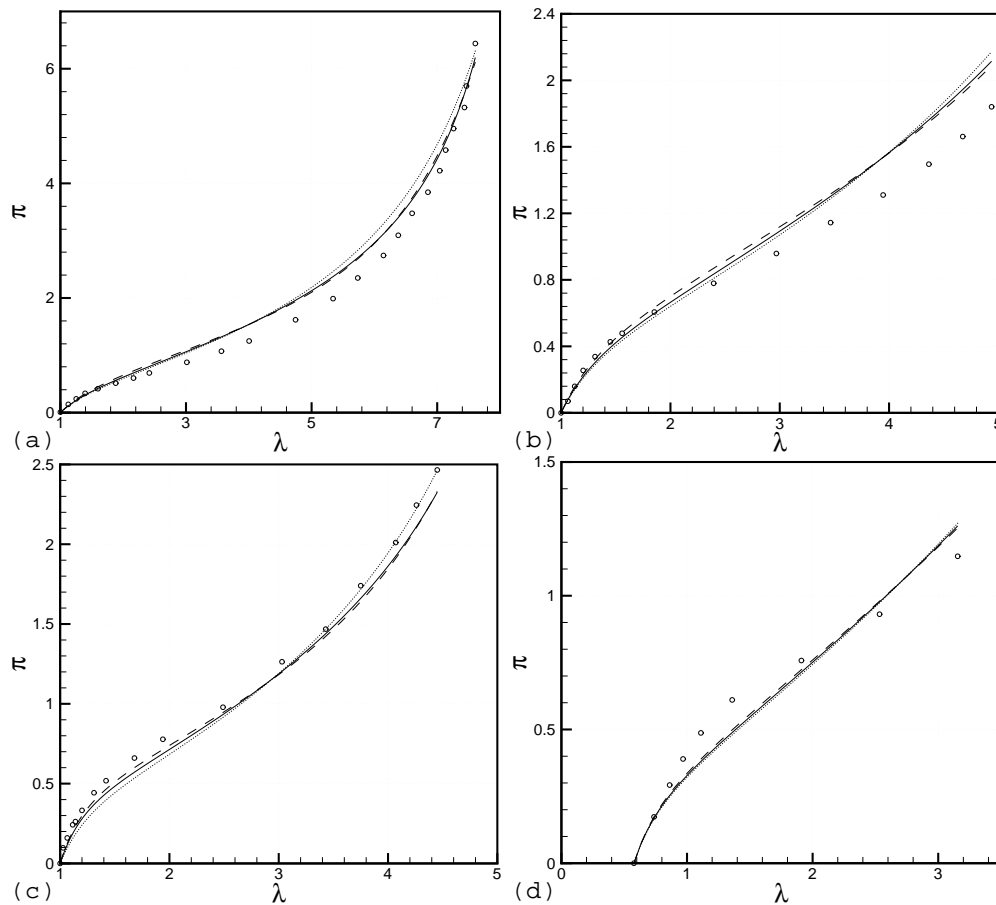


FIG. B.4 – Identification des essais de Treloar, (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur, (c) traction équibiaxiale, (d) traction biaxiale: (\circ) essais, (---) modèle HS, (—) modèle AB, (\cdots) modèle G.

cité à décrire correctement les différents états de déformation avec seulement deux paramètres matériaux.

Vérifions maintenant la vraisemblance des relations précédemment établies sur les paramètres présentés dans le tableau B.1. Dans le but de simplifier la comparaison, les paramètres du modèle G sont pris comme référence et les paramètres des modèles AB et HS leur sont comparés :

- Concernant le premier paramètre des modèles, on calcule $6C_1 = 1.08$ pour le modèle HS et $3C_R = 1.02$ pour le modèle AB, comme illustré par l'équation B.12. Ainsi, la différence maximale entre des données et $E = 1$ est de l'ordre de 8%.
- Concernant le second paramètre des modèles, soit respectivement J_m et N pour les modèles G et AB, la relation B.17 est analysée, la valeur théorique de N est $(J_m + 1)/3 = 31.0$. La différence entre la valeur prédite et les résultats identifiés est d'environ 10%.
- Finalement, considérons la relation entre J_m et C_3 . La relation théorique reliant ces paramètres est donnée par l'équation B.26. Dans le but de calculer k , la borne inférieure du domaine de déformation α_{\min} doit être déterminée. En analysant les résultats expérimentaux de traction uniaxiale illustrés par la figure B.4(a), la gamme des faibles déformations dans laquelle le modèle néo-Hookéen est suffisant est définie par $\lambda \in [1, 4]$. Cet intervalle correspond à $I_1 \in [3, 16, 5]$ et l'utilisation de l'équation B.24 conduit à $\alpha_{\min} \approx 0,14$. Selon l'équation B.26, k est défini par l'intégrale de α_{\min} à 1. Néanmoins, en considérant que le dernier point de la courbe expérimentale correspond à $\lambda_{\max} = 7,6$, *i.e.* $I_{1 \max} = 58,0$, la borne supérieure de l'intégrale n'est pas égale à 1, mais doit être remplacée par $\alpha_{\max} = (I_{1 \max} - 3)/J_m \approx 0,6$. En fait, il est impossible d'atteindre expérimentalement la limite d'extensibilité des chaînes puisque le matériau rompt à des déformations plus faibles. Finalement, la valeur théorique de k est donnée par :

$$k = \frac{1}{0,6 - 0,14} \int_{0,14}^{0,6} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{W}^L \left(\frac{\alpha}{2(1 - \alpha)^2} \right) d\alpha \simeq 2,69 \quad (\text{B.28})$$

Il faut noter que cette valeur n'est pas contenue dans le domaine donné par l'équation B.27. En utilisant le résultat de l'équation B.3, le second paramètre du modèle HS, C_3 , doit être égal à $3,18 \cdot 10^{-4}$. La comparaison de cette valeur aux résultats identifiés donnés par le tableau B.1 mènent à un écart de 15%. A la vue de ces différences obtenues entre les résultats théoriques et identifiés, les développements précédents sont validés. L'équivalence entre les densités d'énergie hyperélastiques est ainsi validée.

B. 5 Conclusion

Cette étude montre l'équivalence entre les trois modèles hyperélastiques HS, G et AB. Ici, seulement la partie dépendant de I_1 a été considérée. Comme proposée par Meissner et Matejka (2001), la validité de ces trois approches pour les déformations modérées peut être améliorée sous certaines restrictions en ajoutant une fonction de I_2 à W (tout cela avec beaucoup de précautions cf. paragraphe II.1.4). Il est intéressant de noter que le modèle HS contenait déjà

un terme en I_2 . Le modèle HS présente de grands avantages d'un point de vue implantation numérique (cf. chapitre IV) puisqu'il est formulé en terme d'invariants et que son comportement à fortes déformations est gouverné par une fonction exponentielle croissante, ainsi sa tangente est toujours définie. De plus, l'équivalence démontrée ici, simplifie l'identification des paramètres matériels puisque les paramètres du modèle HS peuvent maintenant être reliés à des concepts physiques.

Modélisation de l'effet Mullins et de l'hystérésis

C. 1 Introduction

Le chapitre I a permis de mettre en évidence les différentes caractéristiques du comportement des élastomères. Il apparaît qu'elles peuvent être étudiées indépendamment les unes des autres. Cette annexe se focalise sur deux phénomènes : l'effet Mullins (perte de raideur entre la première et seconde charge) et l'hystérésis (trajets différents entre la charge et la décharge). La modélisation de l'effet Mullins a été développée dans le chapitre III et différentes formes de loi ont été déterminées. La proposition d'une modélisation de l'hystérésis s'appuie sur les résultats de la bibliographie. Un choix de modèle pour l'effet Mullins et l'hystérésis est réalisé. Puis, une modélisation globale fondée sur des concepts macromoléculaires est présentée. Finalement les simulations du modèle sont comparées aux résultats expérimentaux.

C. 2 Etude des phénomènes

Ce travail a pour but de construire un modèle pouvant décrire l'hystérésis et l'effet Mullins simultanément. Ces deux phénomènes sont étudiés et modélisés séparément. Il est donc important que les modèles proposés soient compatibles. L'étude de l'effet Mullins dans le chapitre III a montré que l'approche macromoléculaire est la plus à même de décrire le phénomène, ainsi le même type d'approche doit être utilisé pour décrire l'hystérésis.

C. 2.1 Effet Mullins

La théorie d'altération présentée au paragraphe III.3 a montré que le réseau macromoléculaire pouvait être représenté par un ensemble de chaînes (liées entre elles) assurant la rigidité du matériau. Ce réseau est caractérisé par deux grandeurs : la densité de chaînes par unité de volume et la longueur moyenne des chaînes. Seules les chaînes rentrant réellement en compte dans l'élasticité du matériau sont prises en compte, en effet les chaînes pendantes n'apportent pas de rigidité. La modélisation de l'effet Mullins est réalisée par l'étude de l'évolution du réseau

au cours du processus de déformation. L'étirement du matériau provoque la rupture de liaisons entre les chaînes macromoléculaires, ce qui a pour effet :

- (1) d'augmenter la longueur moyenne des chaînes,
- (2) de diminuer la densité de chaînes par unité de volume.

Cette théorie est introduite dans le modèle huit chaînes d'Arruda et Boyce (1993) à travers l'évolution des paramètres matériels en fonction de la déformation maximale. Deux autres densités d'énergie peuvent être utilisées grâce à l'équivalence des modèles hyperélastiques (cf. annexe B).

C. 2.2 Hystérésis

C. 2.2.1 Descriptif

Sous chargement cyclique, les élastomères révèlent leur nature viscoélastique. Deux phénomènes visqueux différents sont mis en évidence. Le premier est leur nature hystérétique : les trajets en charge et en décharge ne sont pas les mêmes. Le second est le phénomène de viscoélasticité long-terme comme la relaxation et le fluage (comme vu au chapitre I). Ainsi, ces deux phénomènes peuvent être modélisés séparément. Dans ce travail, seule la partie hystérétique est considérée.

Depuis quelques années, plusieurs modélisations fondées sur des considérations expérimentales et théoriques ont été proposées (Lion, 1996; Bergström et Boyce, 1998; Banks *et al.*, 1999; Miehe et Keck, 2000; Arif *et al.*, 2002). Tous ces modèles sont issus de la même approche : la superposition d'un état d'équilibre et d'une réponse viscoélastique. Ils diffèrent seulement dans le détail des relations contrainte-déformation (Verron, 2003). Ici, on s'intéressera au modèle développé par Bergström et Boyce (1998). Comme précisé précédemment, il se décompose en deux parties, une élastique (notée A) et l'autre anélastique (notée B). Les deux parties du modèle sont indépendantes l'une de l'autre. La réponse du matériau est en fait la superposition des deux réponses. Lorsqu'une déformation est appliquée au matériau, celle-ci est la même pour les deux parties :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B \quad (\text{C.1})$$

ainsi les contraintes dans le matériau se déduisent par l'ajout des contributions de chacune des parties du réseau :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^A + \boldsymbol{\sigma}^B \quad (\text{C.2})$$

Dans le cas uniaxial, le réseau peut simplement être représenté par la figure C.1. La partie élastique est simplement décrite par une densité d'énergie hyperélastique, ici le modèle huit chaînes (présenté dans le paragraphe II.1.2). La partie anélastique traduit le glissement des chaînes pendantes. La réponse globale est représentée par une densité d'énergie hyperélastique (le modèle huit chaînes) et par un amortisseur dynamique qui enregistre le retard de la réponse. Bergström et Boyce modélisent l'amortisseur grâce au glissement d'une chaîne à l'intérieur d'un tube (cf. figure C.2).

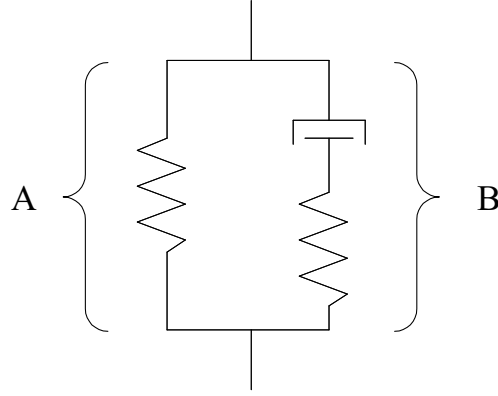


FIG. C.1 – Représentation rhéologique monodimensionnelle du réseau élastomérique par Bergström et Boyce (1998) : A - Partie élastique, B - Partie anélastique.

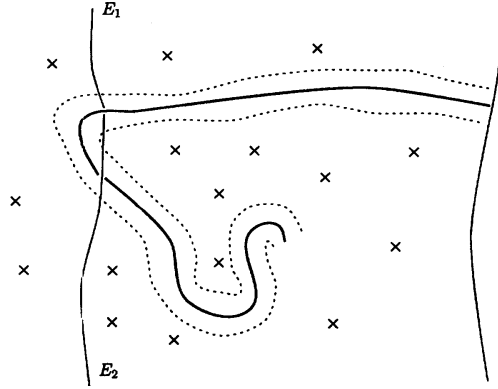


FIG. C.2 – Représentation du glissement d'une chaîne dans le matériau à l'intérieur d'un tube (Bergström et Boyce, 1998).

C. 2.2.2 Mise en équations

La partie élastique du matériau est simplement hyperélastique et est modélisée par le modèle huit chaînes, ainsi les contraintes σ^A se déduisent simplement du gradient de la transformation \mathbf{F}^A . La déformation de la partie B se décompose en la déformation de l'amortisseur \mathbf{F}_p^B et celle des chaînes \mathbf{F}_e^B par :

$$\mathbf{F}^B = \mathbf{F}_e^B \mathbf{F}_p^B \quad (\text{C.3})$$

La mesure \mathbf{F}_e^B permet simplement de connaître les contraintes dans la partie anélastique du réseau. \mathbf{F}_p^B permet de définir le tenseur des vitesses d'évolution du réseau (à une rotation de solide rigide près) :

$$\mathbf{D}_p^B = \dot{\mathbf{F}}_p^B \mathbf{F}_p^{B-1} \quad (\text{C.4})$$

Celui-ci peut également s'écrire comme le produit de la vitesse de fluage des chaînes $\dot{\gamma}_B$, dans les directions prépondérantes de contraintes définies par le tenseur \mathbf{N}^B :

$$\mathbf{D}_p^B = \dot{\gamma}_B \mathbf{N}^B \quad (\text{C.5})$$

Dans le but d'isoler les directions des contraintes, une norme du tenseur des contraintes est définie grâce au cisaillement équivalent effectif du réseau :

$$\tau_B = \sqrt{\frac{1}{2} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}^B) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}^B)} \quad (\text{C.6})$$

Les directions des contraintes sont alors définies par :

$$\mathbf{N}^B = \frac{1}{\sqrt{2\tau_B}} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}^B) \quad (\text{C.7})$$

La vitesse de fluage des chaînes est obtenue en étudiant leur glissement à l'intérieur d'un tube sur un intervalle de temps donné. Après quelques hypothèses, Bergström (1999) écrit le glissement sous la forme :

$$\dot{\gamma}_B = C_1 [\lambda_{chaîne}^{Bp} - 1]^{C_2} \tau_B^m \quad (\text{C.8})$$

où $\lambda_{chaîne}^{Bp}$ est la longueur de chaîne de la partie anélastique du modèle ; C_1 , C_2 et m sont les trois paramètres matériels à déterminer, avec comme conditions $C_1 > 0$, $C_2 \in [-1, 0]$ et $m > 0$. La loi proposée présente un problème à l'origine, le fait d'imposer $C_2 < 0$ provoque une division par zéro, puisque la mesure des contraintes est nulle. Une proposition de correction a été réalisée par Bergström et Boyce (2001) qui ajoutent un petit paramètre ε (de l'ordre de 10^{-2}) qui permet d'éviter la division par zéro :

$$\dot{\gamma}_B = C_1 [\lambda_{chaîne}^{Bp} - 1 + \varepsilon]^{C_2} \tau_B^m \quad (\text{C.9})$$

Le calcul des contraintes et des vitesses de déformation sont liés par les équations précédentes. Un schéma d'intégration est donc nécessaire pour les déterminer, le lecteur pourra se reporter à Lefeuvre (2003) pour les détails.

Récemment, Bergström *et al.* (2002) ont proposé un modèle hybride fondé sur une décomposition du réseau en séries plutôt qu'un réseau parallèle. Une nouvelle vitesse de glissement est proposée de façon phénoménologique. Le modèle semble plus performant mais perd sa base macromoléculaire.

C. 3 Construction du modèle global

Dans le but de modéliser simultanément l'effet Mullins et l'hystérésis, il est nécessaire de combiner les approches vues précédemment. L'avantage des deux modélisations précédentes est d'être fondées sur la même approche de chaînes.

Bergström et Boyce (1998) décomposent le réseau en deux parties, la branche élastique du réseau représente la résistance à la déformation du matériau (grâce aux chaînes liées à leurs deux extrémités, celles-ci sont alors tendues lors de la déformation). La réponse anélastique provient du glissement des chaînes libres dans le matériau. Celles-ci n'interviennent pas dans la résistance mais leur frottement provoque un retard à la réponse. La modélisation de l'effet Mullins par Marckmann *et al.* (2002) prend en compte l'évolution des liaisons entre les chaînes entrant en

compte dans la raideur du matériau. Ainsi, seule la structure macromoléculaire résistant à la déformation évolue avec la déformation maximale. L'accommodation à l'effet Mullins n'intervient donc que dans la partie élastique du matériau (Chagnon *et al.*, 2002). Le modèle huit chaînes de la partie élastique du modèle de Bergström et Boyce (1998) est ainsi remplacé par la théorie d'altération. La représentation monodimensionnelle rhéologique du modèle est illustrée sur la figure C.3. Le principe d'intégration reste le même que pour le modèle hystérétique. Simplement,

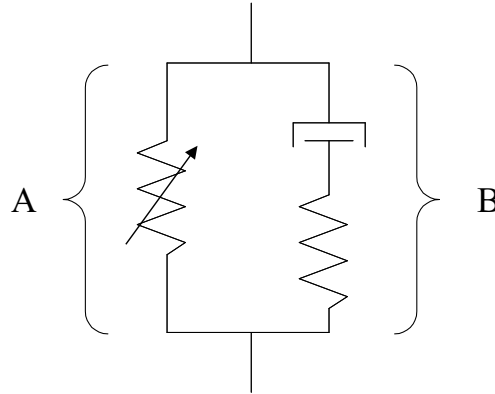


FIG. C.3 – Représentation rhéologique monodimensionnelle du réseau élastomérique pour la prise en compte de l'effet Mullins et de l'hystérésis : A - Partie élastique accommodable à l'effet Mullins, B - Partie anélastique

le réseau hyperélastique est remplacé par un réseau hyperélastique accommodable.

Les trois modélisations issues de la théorie d'altération étant équivalentes (cf. paragraphe III.3), chacune d'elles peut être utilisée pour la modélisation de l'effet Mullins. Dans le but d'une implantation numérique, il est préférable de conserver le modèle M4 plutôt que le modèle M2. Néanmoins, pour les développements théoriques, nous conserverons le modèle M2.

C. 4 Identification des paramètres et simulations

Le modèle est identifié sur les essais de traction uniaxiale et de glissement pur selon la même procédure que celle détaillée au paragraphe III.2.4.3. Tous les paramètres sont identifiés globalement ; leurs valeurs sont présentées sur le tableau C.1. La comparaison du modèle avec les essais est présentée sur la figure C.3. Les simulations montrent que le modèle décrit conjointement l'effet Mullins et l'hystérésis. Il est capable de représenter qualitativement les résultats expérimentaux. Néanmoins, les résultats quantitatifs ne sont pas de la qualité attendue. On peut constater sur les simulations que l'effet Mullins est largement prédominant par rapport à l'hystérésis. A une déformation donnée, le premier cycle est correctement décrit, mais le second présente une hystérésis trop faible, il présente une forme trop « écrasée ». Cette difficulté peut être expliquée par le fait que le premier cycle contient à la fois l'effet Mullins et l'hystérésis, ainsi la perte de raideur entre les premières charge et décharge est correctement décrite. Le second cycle est en revanche, accommodé à l'effet Mullins, et l'hystérésis est fortement sous-estimée.

Modèle	Paramètres	Valeurs
Partie élastique	N_0^A	1.79
	N_1^A	0.328
	C_{R0}^A	0.350
	C_{R1}^A	0.328
Partie anélastique	C_R^B	2.00
	N^B	5.64
Hystérésis	C_1	1
	C_2	-0.99
	m	2.39

TAB. C.1 – Valeurs des paramètres matériels du modèle complet.

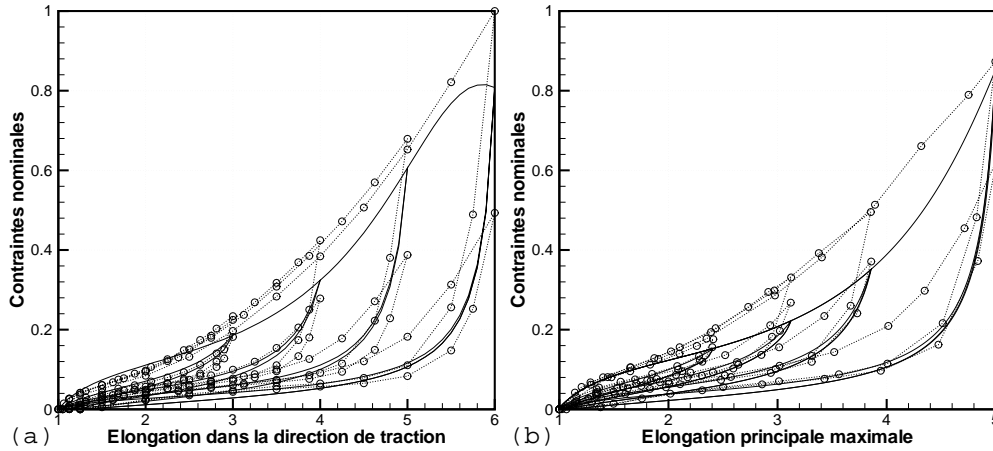


FIG. C.4 – Simulation des essais simples avec le modèle de Bergström et Boyce (1998) avec prise en compte de l'effet Mullins par le modèle M2.

Ceci peut être une conséquence du processus d'identification utilisé. Il serait plus approprié de pouvoir identifier les phénomènes séparément les uns après les autres. Finalement, il faut noter que la relaxation n'est pas prise en compte dans la présente modélisation. Ainsi, la perte de rigidité après chaque cycle de chargement due à la relaxation cyclique n'est pas représentée par le modèle. Dans le but d'améliorer cette approche, il est nécessaire d'incorporer les phénomènes viscoélastiques long-terme. L'ajout d'un terme de relaxation permettrait de réduire l'influence de l'effet Mullins sur le premier cycle. De plus, la forme et la taille des boucles d'hystérésis seraient modifiées et s'approcheraient plus de la forme réelle.

C. 5 Conclusion

Les différents phénomènes à la base du comportement des élastomères sont classiquement modélisés séparément. Dans le but de décrire le comportement global, il est nécessaire de com-

biner différentes approches. Un problème majeur induit par une telle modélisation est le nombre important de paramètres matériels. La multiplication du nombre de paramètres rend difficile l'identification. Le nombre de paramètres dans la modélisation de chacun des phénomènes doit absolument être limité. Dans le but d'assembler des modèles, il est important qu'ils soient issus d'un même type d'approche pour être compatibles. Cette étude, fondée sur le comportement des chaînes macromoléculaires sous chargement cyclique, a permis la construction d'un modèle global à partir de l'étude de leurs ruptures et de leurs glissements.

Globalement, le modèle permet une simulation qualitative des phénomènes mais ne permet pas la description quantitative de la taille des boucles d'hystérésis. Il peut être amélioré par une meilleure description du glissement des chaînes dans le tube et par une stratégie d'identification des paramètres adaptée.