



**HAL**  
open science

# Méthodes d'homogénéisation et simulations numériques appliquées à la réponse électromagnétique des matériaux multi-échelles complexes

Helene Canot

► **To cite this version:**

Helene Canot. Méthodes d'homogénéisation et simulations numériques appliquées à la réponse électromagnétique des matériaux multi-échelles complexes. Mathématiques [math]. Université de Bretagne Sud, 2018. Français. NNT: . tel-01979679v1

**HAL Id: tel-01979679**

**<https://hal.science/tel-01979679v1>**

Submitted on 13 Jan 2019 (v1), last revised 13 Feb 2019 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE BRETAGNE SUD  
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N°601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : Mention Mathématiques et leurs interactions  
Par

**Hélène CANOT**

**Méthodes d'homogénéisation et simulations numériques appliquées à la  
réponse électromagnétique des matériaux multi-échelles complexes**

Thèse présentée et soutenue à VANNES, le 7 décembre 2018

Unité de recherche : **Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique**

## **Rapporteurs avant soutenance :**

Prof. Nicolas FORCADEL, INSA de Rouen

Sébastien TORDEUX, Université de PAU, INRIA

## **Composition du jury :**

Président : Prof. Iraj MORTAZAVI, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)

Examinatrice : Dr Renata BUNOIU SCHILTZ, Université de Lorraine

Dir. de thèse : Prof. Emmanuel FRENOD, Université de Bretagne Sud, LMBA

Co-dir. de thèse : Dr Alain REINEIX, Directeur de Recherche CNRS, XLIM

# REMERCIEMENTS

---

Je souhaite adresser mes remerciements à mes directeurs de thèse : Emmanuel Frénod, sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu, je le remercie pour sa disponibilité et sa patience durant cette thèse et Alain Reineix, pour sa gentillesse et sa disponibilité malgré les contraintes. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec eux.

Je remercie aussi Olivier Maurice pour avoir accepté de participer à cette aventure et pour ses conseils éclairés sur la CEM.

Sébastien Tordeux et Nicolas Forcadel, je tiens à vous remercier pour avoir accepté d'examiner mon rapport et pour vos remarques avisées. Encore merci.

Je remercie Iraj Mortazav qui s'est intéressé à mon travail en acceptant d'être examinateur et le soutien qu'il m'a apporté. J'adresse également toute ma reconnaissance à Renata Bunoïu pour avoir accepté d'être membre de mon jury en tant qu'examinatrice.

Un grand merci à Michel Valton et Dariush Ghorbanzadeh pour leur aide scientifique et leur soutien.

Je remercie le laboratoire Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique pour son accueil très sympathique et chaleureux, sans oublier Véronique et Sandrine.

Un grand merci aussi à l'ensemble de mes collègues : Paul, Bob, Florence, Rachida, Bénédicte, Sandra, Christelle, Dimitri, Fabienne, Rachel et Christine ainsi que Caroline et Régis Poirier . . . . pour leur soutien sans faille au quotidien.

Je termine avec les proches : Valérie l'amie de toujours, Alain bien sûr et la famille Domenges, Marie-Françoise, Christian, Jean, Estelle et Bruno sans oublier Martine, Marcel et Héroïse. Ils sont si précieux.

Ma famille : avec Philippe pour son soutien scientifique et affectif : il fut l'un de mes professeurs avant la thèse.

Mon père le premier a m'initier au mystère des nombres, aux soustractions et aux divisions à virgule !

Mon frère, mon premier professeur de maths, qui débuta mon apprentissage par la

théorie des groupes, corps et anneaux pour mon entrée en sixième. Une pensée pour mon grand-père qui aurait été si fier de me voir.

*Je dédie cette thèse à ma mère, décédée durant cette thèse.*

# TABLE OF CONTENTS

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Physical context</b>	<b>15</b>
1.1 Definitions . . . . .	15
1.1.1 Electromagnetic compatibility . . . . .	16
1.1.2 Electromagnetic Pulse . . . . .	16
1.1.3 Lightning strike on aircraft structures . . . . .	17
1.1.4 Composite material . . . . .	18
1.1.5 Electromagnetic behavior of composite materials . . . . .	19
1.1.6 Conductive composite materials . . . . .	20
1.1.7 Shielding effectiveness . . . . .	21
1.1.8 Homogenization methods . . . . .	23
<b>2 Presentation of the problem</b>	<b>27</b>
2.1 Modeling . . . . .	29
2.1.1 Notations and setting of the problem . . . . .	29
2.1.2 Maxwell equations . . . . .	32
2.1.3 Boundary conditions . . . . .	34
2.1.4 Time-harmonic Maxwell equations . . . . .	34
2.1.5 Scaling . . . . .	36
<b>3 Mathematical analysis of the models</b>	<b>47</b>
3.1 Preliminaries . . . . .	49
3.2 Weak formulation . . . . .	50
3.2.1 Regularized Maxwell equations for the electric field . . . . .	51
3.3 Existence, uniqueness and estimate . . . . .	53
<b>4 Homogenization by asymptotic analysis</b>	<b>55</b>
4.1 Asymptotic expansion . . . . .	57
<b>5 Two-scale convergence for the model</b>	<b>65</b>
5.1 Definitions . . . . .	67
5.1.1 For the magnetic field . . . . .	75
<b>6 Validations numériques bidimensionnelles</b>	<b>77</b>
6.1 Simplification et validation du modèle pour une onde plane . . . . .	79
6.1.1 Un domaine bidimensionnel . . . . .	79
6.1.1.1 Test 1, le module du champ électrique E constant . . . . .	82

## TABLE OF CONTENTS

---

6.1.1.2	Test 2, l'onde plane se propage dans l'air et le diélectrique	83
6.1.1.3	Test 3, l'onde plane se propage dans l'air, le composite avec ses fibres de carbone . . . . .	87
6.1.2	Homogénéisation . . . . .	89
6.1.2.1	Solution du problème adimensionné . . . . .	89
6.1.2.2	Solution du problème homogénéisé pour le matériau composite . . . . .	92
6.1.2.3	Coefficient de transmission pour une onde plane . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Applications au cas de l'onde électromagnétique provoquée par l'arc de foudre et d'une Impulsion Electromagnétique dans un composite</b>	<b>97</b>
7.1	Application au cas de l'onde électromagnétique provoquée par l'arc de foudre . . . . .	99
7.2	Impulsion Electromagnétique . . . . .	102
7.2.1	Impulsion électromagnétique nucléaire de type $E_3$ . . . . .	104
7.2.2	Impulsion électromagnétique nucléaire de type $E_1$ . . . . .	105
7.2.2.1	Description mathématique . . . . .	106
7.2.3	Simulations numériques d'IEM nucléaires . . . . .	108
7.2.3.1	Discussion sur le coefficient de transmission . . . . .	115
7.2.3.2	Discussion sur l'énergie dissipée par effet Joule . . . . .	116
<b>Conclusion</b>		<b>118</b>
7.2.4	Presentation of all cases of tables 1, 2, 3 and 4 . . . . .	121
7.2.5	Structure of the equations depending of $\varepsilon$ . . . . .	122
7.2.6	The transmission Maxwell problem . . . . .	125

# INTRODUCTION

---

*Cette thèse fait partie d'un projet qui s'inscrit dans un long processus. Tout comme un écrivain devant sa page blanche, il fallut construire le projet de A à Z. Réunir tout d'abord autour de ce projet un mathématicien, spécialiste de l'homogénéisation, un physicien spécialiste de l'électromagnétisme et un physicien issu du monde industriel spécialisé dans la CEM (Compatibilité Electromagnétique). Puis l'idée germa de contribuer à la modélisation des matériaux composites électromagnétiques, en utilisant bien sur les méthodes d'homogénéisation. Mais, de même qu'il ne suffit pas de jeter des mots sur le papier pour écrire un bon roman, il ne suffit pas de réunir des personnes venant d'horizons différents sur un sujet commun pour réussir son pari. Les contraintes étaient multiples. En effet, les pratiques et langages propres à chacun semblaient rendre la mise en équation complexe. Avec de nombreuses hétérogénéités de culture, placer un  $\varepsilon$  dans les objectifs était nécessaire. Grâce à une forte optimisation sous contrainte, on fit tendre  $\varepsilon$  vers zéro et grâce à l'homogénéisation ... le projet convergea.*

Cette thèse est une contribution à la technique d'homogénéisation appliquée à l'électromagnétisme. L'homogénéisation d'un matériau hétérogène permet de ramener le schéma équivalent en électromagnétisme de ce matériau (schéma regroupant ses propriétés de conductivité, permittivité, perméabilité et ce en fonction de la localisation dans son volume) à celui d'un matériau constitué d'une structure homogène dans tout son volume. Cette capacité est très intéressante dans les études en électromagnétisme et en particulier en compatibilité électromagnétique de façon à simplifier l'analyse de système là où cette réduction de la complexité est applicable.

Elle apporte une contribution aux travaux de réduction de la complexité dans les cas qui s'y prêtent bien, pour expérimenter virtuellement **la compatibilité électromagnétique (CEM)** de systèmes compliqués. Ce travail est motivé par la nécessité de tester des approches pour participer à la conception en compatibilité électromagnétique de systèmes embarquant des matériaux composites. L'objectif dans cette thèse est d'évaluer et valider un modèle théorique intégrant les méthodes d'homogénéisation de convergence à double échelle. Un exemple sera testé pour expérimenter sur un cas l'usage de cette technique d'homogénéisation. Le but à la suite de ce travail est de conforter les modèles développés, de maîtriser leurs limites et leurs conditions d'emploi.

Les applications des **matériaux composites** se multiplient, notamment dans les domaines du transport, de la construction et des équipements électriques. Mais c'est en premier lieu le domaine aéronautique qui a dopé le marché avec une tendance à l'accroissement des composites. Chez les deux avionneurs Boeing et Airbus, ailes,

fuselage, volets ... sont désormais en composites, les derniers nés de la gamme A350 et le Dreamliner B787 sont composés à plus de 50% par ces matériaux. Renforcés en fibres de carbone, ils permettent d'alléger considérablement ces appareils, et induisent une consommation de kérosène et des coûts de maintenance réduits de 25% selon les aviateurs. Les matériaux composites sont également plus résistants ce qui a permis de mieux réguler la pressurisation de la cabine : dans les cabines du B787 et de l'A350, elle correspond désormais à une altitude de 6000 pieds contre 8000 pieds pour les avions d'ancienne génération. Ce qui entraîne un regain de confort pour les passagers. Cependant, bien qu'ils apportent de nettes performances en terme de légèreté, résistance mécanique, isolation thermique ... ils ne permettent pas d'assurer **un blindage électromagnétique** tels que leurs aînés en bénéficiaient grâce à l'alliage métallique.

### Organisation de la thèse

L'environnement où se situent les systèmes électriques à l'intérieur de l'avion, conduit à l'apparition de plus en plus fréquente de phénomènes d'interférences électromagnétiques. De plus, l'avion est entouré parfois de perturbations électromagnétiques qui peuvent être très sévères : électricité statique, champs générés par des radars, foudre. Ces champs électromagnétiques risquent d'engendrer un dysfonctionnement de l'électronique de bord et de mettre en péril sa sécurité.

Les structures composites posent de nouveaux défis dans la protection face aux agressions électromagnétiques. Les composites à fibres, ayant une faible conductivité électrique, n'assurent pas efficacement la fonction de blindage électrique, comme les anciens avions en alliage métallique. La conductivité électrique des matériaux composites, étant moins bonne que celles des matériaux métalliques, les équipements électroniques embarqués sur des structures en composite sont soumis à des augmentations importantes de contraintes de **compatibilité électromagnétique (CEM)**. Afin d'assurer un blindage électromagnétique efficace, plusieurs solutions sont employées, comme celle consistant à insérer un treillis métallique dans les plis du matériau. Les plaques en carbone possèdent un grillage de l'ordre de 0.5 mm, inséré pendant l'élaboration du composite. C'est ce que l'on appelle le "Copper mesh", en français "treillis de cuivre", qui donne au composite une propriété de conduction accrue. Les systèmes vulnérables sont de plus protégés par la dépose d'une peinture métallisée. Ces solutions-là concernent en fait seulement le Boeing 787 Dreamliner et l'Airbus A350. Cependant, ce treillis a pour conséquence d'augmenter le poids de l'appareil, alors que le composite est censé l'alléger. La recherche s'est donc orientée vers des **nouveaux matériaux composites conducteurs** obtenus par injection d'inclusions conductrices au sein de la résine polymère isolante, présentant une conductivité électrique élevée.

Parmi ces nouveaux matériaux, nous allons étudier en particulier une structure composite à base de renfort fibreux (fibres de carbone) et dont la résine est chargée en nanoparticules de noir de carbone par exemple, contribuant ainsi à augmenter



---

sa conductivité électrique. Et ensuite nous analyserons le comportement du champ électromagnétique dans ce nouveau matériau composite et la capacité du matériau à atténuer la perturbation électromagnétique. Le présent manuscrit se concentrera sur le phénomène de propagation du champ électromagnétique dans ce matériau en régime harmonique. Il s'intéressera à l'étude mathématique basée sur l'homogénéisation, et la simulation numérique de modèles relevant de ces comportements. Grâce à leur conductivité élevée, cette classe de composites offre un réel intérêt pour les applications technologiques dans l'aéronautique telle que les composants électroniques, la protection des perturbations électromagnétiques, les champs électrostatiques et l'amélioration du blindage électromagnétique. L'objectif de cette thèse est de mesurer la réponse d'un tel matériau conducteur à des excitations électromagnétiques pouvant être très agressives (et de calculer le coefficient de transmission du nouveau matériau conducteur).

Dans la première partie du manuscrit on s'attachera à mettre en place le modèle mathématique dans le but d'analyser le comportement électromagnétique dans le matériau composite via la théorie d'homogénéisation. La deuxième partie est consacrée aux études numériques bidimensionnelles associées.

Dans notre cas, le domaine d'étude est composé par de l'air et un matériau composite. Nous nous plaçons dans le cas d'une fréquence fixe. Afin d'étudier le comportement électromagnétique du matériau dans le cadre mathématique de l'homogénéisation, notamment celui de la convergence double échelle, nous considérons que les renforts fibreux sont disposés périodiquement. La modélisation mathématique du matériau composite nécessite de prendre en compte les effets des différentes échelles de longueur. Le domaine contient trois échelles caractéristiques : la longueur d'onde de l'ordre du mètre dans les basses fréquences, le matériau composite dont l'échelle est de l'ordre du millimètre et les hétérogénéités, les fibres de carbone dont le diamètre est de l'ordre du micromètre ( $5 - 10\mu m$ ). Dans notre étude de propagation d'ondes, on doit tenir compte des différences à toutes les échelles.

Cependant, les outils numériques utilisés, ne permettent pas d'étudier la propagation d'un champ électromagnétique dans l'ensemble du fuselage composite d'un avion. Ils requerraient de discrétiser très finement le domaine de travail, au moins jusqu'à la taille des fibres de carbone et donc nécessiteraient des capacités de calcul inaccessibles. En effet, les maillages ainsi obtenus atteindraient alors des tailles défiant toute résolution numérique dans le domaine des éléments finis. Il existe donc un besoin important d'analyses numériques multi-échelles. **Les méthodes d'homogénéisation** permettent de franchir ces limitations. De nombreux travaux dans la communauté électromagnétique font référence à l'homogénéisation des composites comme dans [4]. Des résultats d'homogénéisation pour des équations de Maxwell temporelles ont été démontrés dans [43], [44]. L'étude complète des équations de Maxwell tridimensionnelles dans un crystal photonique a été réalisée dans [16] ou bien [22].

Pour homogénéiser un milieu hétérogène on donne une description du milieu à une échelle d'observation grande devant la taille des hétérogénéités et ainsi le milieu est vu comme homogène, tout en prenant en compte la nature microscopique du matériau. On caractérise donc deux échelles : une macroscopique et une autre microscopique. L'échelle macroscopique a pour dimension caractéristique l'épaisseur de la plaque composite. L'échelle microscopique a pour dimension caractéristique celle des hétérogénéités du milieu. Dans notre cas, la microstructure est périodique dans la plaque composite et l'on identifie, l'échelle macroscopique qui est grande devant les dimensions de la période et, l'échelle microscopique propre à l'hétérogénéité de la cellule périodique, c'est à dire le diamètre des fibres de carbone. Le milieu homogène équivalent obtenu, peut être introduit dans des modèles numériques, pour au final obtenir le comportement de structures complètes. Le milieu est donc modélisé par un petit paramètre  $\varepsilon$  défini comme le rapport entre le diamètre d'une fibre et l'épaisseur de la plaque de composite. Homogénéiser le problème revient à trouver le problème limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, les hétérogénéités devenant de plus en plus petites jusqu'à approcher un milieu continu. Le problème limite sera macroscopique.

Nous avons donc trois domaines : l'air  $\Omega_a$ , et s'agissant du composite deux sous-domaines avec la résine  $\Omega_r$  et le carbone  $\Omega_c$ . On cherche la réponse de l'onde électromagnétique qui se propage suivant la direction  $Oy$ . Le modèle est régi par les équations de Maxwell harmoniques tridimensionnelles. La résolution de ces équations s'appuie sur la formulation des équations du second ordre en champ électrique dans lequel on aura éliminé le champ magnétique. La propagation du champ électrique dans l'air puis au sein du matériau composite est modélisée par le problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \tilde{E} + k^2 \tilde{E} = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}. \\ \nabla \times \tilde{E} \times e_2 = -i\tilde{\omega}\mu_0 \tilde{H} \times e_2 & \text{on } \tilde{\Gamma}_d, \\ \nabla \times \tilde{E} \times e_2 = 0 & \text{on } \tilde{\Gamma}_L \end{cases} \quad (1)$$

où  $(\tilde{\Gamma}_d, \tilde{\Gamma}_L)$  sont respectivement les frontières supérieures et inférieures du domaine, avec  $k = \sqrt{-\tilde{\omega}^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon^* + i\tilde{\omega} \mu_0 \sigma}$  la constante de propagation de l'onde dans le milieu et  $\epsilon^*$  la permittivité relative dans chaque domaine air, résine et fibres de carbone.

Le champ magnétique sera donné alors par

$$H = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \tilde{E}. \quad (2)$$

Le système obtenu sera adimensionné : il sera réécrit en fonction des grandeurs caractéristiques : la longueur caractéristique correspondant à l'épaisseur du composite et l'échelle d'observation, la fréquence caractéristique :  $\bar{\omega} = 10^6 \text{ rad/s}$ . Ces grandeurs seront utilisées comme grandeurs de référence et l'on exprimera toutes les variables du système par rapport à ces grandeurs de référence. Par exemple si  $\tilde{E}$  est le champ électrique et  $\bar{E}$  le champ électrique caractéristique, alors la longueur adimensionnée est  $E = \frac{\tilde{E}}{\bar{E}}$ . On considèrera pour la conductivité de référence la conductivité longitudinale des fibres, c'est à dire la borne supérieure de Wiener.

On exprime le nouveau système ainsi que les conditions limites en fonction des nouvelles variables. Il apparait de nouveaux rapports et des paramètres sans dimension, dans notre étude, en fonction de la longueur d'ondes  $\frac{\bar{L}}{\lambda}$  et de l'effet de peau  $\frac{\bar{L}}{\delta}$ . L'effet de peau étant le phénomène électromagnétique qui entraîne la concentration des champs à la surface d'un milieu conducteur : la partie imaginaire de la constante de propagation  $k$ , induit une décroissance exponentielle de l'amplitude des champs électromagnétiques dans le matériau. Le champ se propage dans le conducteur mais en étant atténué d'un facteur  $\delta$ . Finalement, après calcul des nouveaux rapports en fonction du petit paramètre  $\varepsilon$  qui est le rapport entre l'hétérogénéité et l'épaisseur de la plaque composite, le problème s'écrit maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i \omega \Sigma_a^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_a^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i \omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_r^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i \omega \Sigma_c^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_c^\varepsilon. \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega H_d(x, z) \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L. \end{array} \right. \quad (3)$$

Nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution grâce à la méthode de régularisation des équations de Maxwell. Le modèle théorique à homogénéiser étudie la propagation du champ électromagnétique du premier arc en retour de foudre, pour une pulsation fixe caractéristique  $\bar{\omega} = 10^6 \text{ rad/s}$ , dans l'air et le matériau composite dont les fibres sont disposées périodiquement. On utilisera l'analyse asymptotique dans un premier temps pour établir l'homogénéisation du problème, cf Bensoussan *et al* [13], Cioranescu et Donato [17], Lions [27] ... L'inconnue  $E^\varepsilon$  du problème limite sera approchée par une série de la forme

$$E^\varepsilon(\mathbf{x}) = E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \dots \quad (4)$$

Afin d'appliquer **la méthode de convergence à double échelle** proposé par G. Allaire [6] et Nguetsens [34] qui permet de démontrer rigoureusement l'homogénéisation, nous établissons une estimation, dont la constante est indépendante de  $\varepsilon$ . Cette justification rigoureuse donnera lieu à un théorème de convergence.

Dans la deuxième partie du manuscrit, on se consacre aux simulations numériques venant illustrer la théorie des premiers chapitres. Dans un premier temps, on valide dans un domaine dimensionné, grâce au logiciel d'éléments finis Freefem++, sous forme de tests, trois cas simples. Le premier cas représente le champ électrique constant dans tout le domaine (représenté par l'air). Le second cas représente une onde plane se propageant dans l'air et le diélectrique sans fibre et enfin le dernier cas où l'on rajoute des fibres. Lorsque ces cas simples sont validés on peut se permettre d'aborder et de valider les méthodes d'homogénéisation. Nous limitons notre étude numérique certes au cas bidimensionnel, mais elle permet de conforter la méthode d'homogénéisation et sa convergence.

Le dernier chapitre est consacré à des illustrations directes de propagation d'ondes, en guise d'application et perspective de travail futur. On abordera plus en détail l'arc de foudre et les IEM nucléaires. En fait, on prend comme source d'excitation incidente les champs électriques et magnétiques définis dans les travaux de recherche [40] dans le domaine fréquentiel. Grâce aux méthodes d'homogénéisation validées, nous illustrons la propagation du premier arc en retour de l'onde foudre de type A, c'est à dire le plus énergétique et agressif, dans le composite. Puis nous calculons **le coefficient de transmission**, défini comme le rapport du champ transmis sur le champ incident. Il correspond à une diminution du champ électrique, magnétique, qui dépend du type de matériau composite, de son épaisseur, ainsi que de la fréquence du champ incident. Il permet de représenter l'efficacité du composite conducteur.

Nous intégrons dans notre modèle numérique une IEM nucléaire de type  $E_1$ , caractérisant un champ électrique de haute intensité qui se propage à très grande vitesse et dans un temps très court dans le composite. Caractérisé mathématiquement, tout comme l'onde foudre par une double exponentielle dans le domaine temporel, les travaux de recherche sur l'IEM débuté dans les années 60 ont influencé les travaux sur la foudre. Nous étudierons numériquement des gammes de fréquences allant de  $f = 10Hz$  à  $f = 10MHz$  ce qui implique des longueurs d'onde plus grandes que le diamètre des fibres. Nous évaluons ainsi le coefficient de transmission dans un matériau nano-chargé. Lorsqu'une onde pénètre dans le composite, l'amplitude du champ électrique décroît car une partie de l'énergie est cédée à la matière par effet Joule sous forme d'échauffement. Nous estimerons donc **l'énergie dissipée** dans le composite par **effet Joule**.

Ce mémoire s'articule autour de sept chapitres.

**Chapitre I :** Dans ce chapitre on présentera les différents et principaux éléments utilisés dans cette thèse. L'objectif étant de mieux connaître la propagation des perturbations électromagnétiques pour mieux s'en protéger, nous rappelons tout d'abord les notions de CEM. Puis nous introduisons les différents types d'agressions : la foudre et les impulsions électromagnétiques issues des explosions nucléaires. Enfin, nous décrivons la structure du matériau composite, de manière classique, des fibres de carbone incluses dans une matrice polymère réalisée en résine époxy, et en particulier les matériaux composites conducteurs, c'est à dire lorsque l'on a chargé en nanoparticules la résine époxy. Nous introduirons enfin, la méthode d'homogénéisation pour notre problème.

**Chapitre II :** Dans ce chapitre, nous présentons le problème général . On réalise l'étude tridimensionnelle, en basses fréquences, des équations de Maxwell en régime harmonique. On adimensionne le système d'équations et ses conditions limites en considérant une pulsation caractéristique  $\bar{\omega}$ , une conductivité caractéristique  $\bar{\sigma}$  et un champ électromagnétique caractéristique  $(\bar{E}, \bar{H})$ . On considère le petit paramètre  $\varepsilon$

comme étant le rapport entre l'hétérogénéité et l'épaisseur de la plaque composite. Nous paramétrons le modèle simplifié pour la pulsation caractéristique  $\bar{\omega} = 10^6 \text{ rad/s}$ . Après calcul des rapports adimensionnés, on réécrit le problème en fonction de  $\varepsilon$ .

Le **Chapitre III** : est consacré à l'analyse mathématique. On établit l'existence et l'unicité de la solution du problème. On achève le chapitre, avec l'estimation de la norme de la solution  $E^\varepsilon$  dans l'espace de définition, par une constante ne dépendant pas du paramètre  $\varepsilon$ .

**Chapitre IV** : Dans ce chapitre, nous homogénéisons par analyse asymptotique le champ électrique  $E^\varepsilon$ . Pour  $\bar{\omega} = 10^6 \text{ rad/s}$ , on a le système

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon - \omega^2 \varepsilon^5 \varepsilon^* E^\varepsilon + i\omega [(\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon = 0, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega H_d(x, z) \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L, \end{cases} \quad (5)$$

où  $\mathbf{1}_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ .

**Chapitre V** : Ce chapitre est consacré à la méthode de convergence à double échelle. Nous justifions le modèle (5). On approche la solution  $E^\varepsilon$  par l'addition du champ électrique moyen et le champ correcteur. Le champ correcteur dépend de la microstructure et est la solution des problèmes de cellule.

**Chapitre VI** : Nous nous intéresserons aux résultats numériques des problèmes étudiés théoriquement dans les précédents chapitres afin de valider les modèles homogénéisés. Pour toutes ces applications numériques nous nous placerons dans le cas simplifié d'une étude bidimensionnelle. Tous les calculs numériques présentés dans ce manuscrit, ont été réalisés grâce au logiciel Freefem++. C'est un logiciel destiné à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, par la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, nous validerons le problème simple : air diélectrique sans fibre. Dans un second temps, nous validerons numériquement les méthodes d'homogénéisation.

Le **Chapitre VII** : aborde de manière exploratoire des applications au problème théorique. Il traite numériquement de la propagation d'un IEM nucléaire et de la propagation d'une onde électromagnétique issue de l'arc en retour de type A. L'IEM d'origine nucléaire est un phénomène majeur, il est impulsif de l'ordre de la nanoseconde sur un large spectre de 0 à 1 Ghz, alors que la foudre est de l'ordre de la microseconde. Tout d'abord nous établissons un état de l'art sur les différentes IEM d'origine nucléaire. Nous privilégierons l'IEM de type  $E_1$  que nous considérerons comme notre source incidente sous la forme d'une double exponentielle dans le cas spectral, elle

s'écrit  $E(\omega) = E_0 k_1 \left( \frac{1}{i\omega + \alpha} \frac{1}{i\omega + \beta} \right)$  avec  $E_0 = 50000 \text{ V/m}$ ,  $k_1 = 1.3$ ,  $\alpha = 4.10^7 \text{ s}^{-1}$  et  $\beta = 6.10^8 \text{ s}^{-1}$ .

Nous établirons le coefficient de transmission pour différentes fréquences. La dernière partie du chapitre est dédié aux calculs des pertes par effet Joule dans le composite.

Nous donnons quelques conclusions générales et quelques perspectives à la fin de la thèse.

Ce travail a conduit à l'écriture de trois articles

- Canot H. Frenod E. Modeling electromagnetism in and near composite material using two-scale behavior of the time-harmonic Maxwell equations. AIMS Mathematics Vol. 2 No 2, pp 269–304 (DOI : 10.3934/Math.2017.2.269).
- Canot H. Frenod E. Method of Homogenization for the Study of the Propagation of Electromagnetic Waves in a Composite Part 1 : Modeling, Scaling, Existence and Uniqueness Results. Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proceedings of The World Congress on Engineering 2017, 5-7 July, 2017, London, U.K., pp 5–10.
- Canot H. Frenod E. Method of Homogenization for the Study of the Propagation of Electromagnetic Waves in a Composite Part 2 : Homogenization, Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proceedings of The World Congress on Engineering 2017, 5-7 July, 2017, London, U.K., pp 11–15.

D'un article en preview : Homogenization of Electromagnetic Fields Propagation in a Composite, dans le livre Transactions on Engineering Technologies 25th World Congress on Engineering (WCE 2017). Editors : Ao, Sio-long, Gelman, Len, Kim, Haeng Kon (Eds.) chez Springer.

# PHYSICAL CONTEXT

## 1.1 Definitions

The increasing number of electronic equipment on board and the technological evolution of the materials with the composite used, led the scientific community to continue and densify its studies of electromagnetic vulnerability of aircraft. In the last few years, planes have emerged whose mass share of composite materials breaks records : 50% for the Boeing 787 Dreamliner and Airbus A350. Composite materials offer undeniable advantages over conventional metal structure. The most obvious is the weight gain and fuel economy that results. Nevertheless, their increased use significantly increases the vulnerability of the aircraft against disturbances.

In this work, we consider different perturbations electromagnetic and for different frequencies.

An electromagnetic wave is a combination of two disturbance : electric and magnetic. Maxwell studied the relationship between electric and magnetic fields see [30] [29], in particular showed that electric and magnetic propagate in space in the form of a wave and at the speed of light. In this thesis, we study the propagation of the electromagnetic waves in a composite material. The framework is that of classical physics without relativity, general field theory and quantum mechanic. Electromagnetic waves are formed when an electric field couples with a magnetic field. Electricity can be static and also magnetic. A changing magnetic field induces a changing electric field and vice versa, the two are linked. They travel through air, vacuum and solid material like composite.

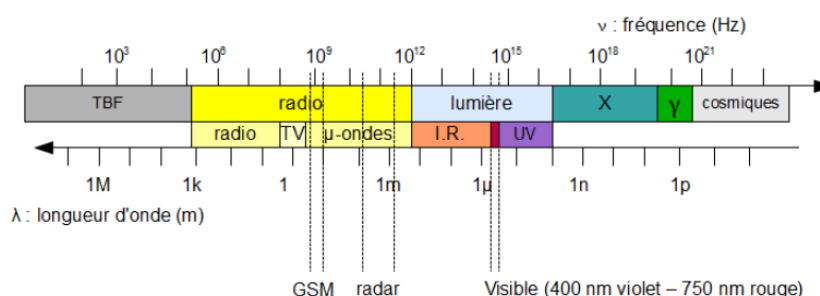


FIGURE 1.1 – Electromagnetic spectrum.

The Present work is motivated by industrial applications in aeronautic on low fre-

quencies. In particular, we will be interested in electromagnetic pulse generated by a lightning strike or a nuclear electromagnetic pulse.

### 1.1.1 Electromagnetic compatibility

Electromagnetic compatibility (EMC) characterizes “the ability of device or system to function satisfactorily in its electromagnetic environment without itself producing electromagnetic disturbances likely to create serious disturbances in the operations of the devices or systems located in its environment.”

Electromagnetic compatibility is a necessity for the satisfactory of all systems and equipments see [28]. In the aeronautics, space and defense sectors, several needs have led to the development of this discipline and the tools / methodologies associated with it. First of all, it was necessary to protect the planes and other launchers (rockets) against threats of lightning type or Electromagnetic Pulse (EMP : indirect effects of the lightning, illumination by the electromagnetic wave caused by the explosion of a nuclear bomb (EMP)). In the field of aviation, it has been necessary to allow the use of more and more massive electronic flight computers.

The transmission of a disturbance between the source and the system to be protected involves one or more physical phenomena called couplings. In electromagnetic compatibility, a first classification of propagation modes distinguishes :

- Conducted disturbances which were propagated by the connecting cables and particular power cables,
  
- Radiated disturbances : those which act via magnetic, electromagnetic and electromagnetic fields,
  
- Electrostatic discharges resulting from the contacting of an electrically charged conductor or an ignition by ionizing of the air,
  
- The electronuclear pulse, which corresponds to the electromagnetic radiation that would be caused by the explosion at high altitude of a nuclear charge, could put out of use a significant part of the exposed electrical equipment.

For EMC Modeling, different types of models are commonly used. Here we solve the time-Harmonic Maxwell equations. To simplify the classification, we can distinguish different harmonic regimes (Low Frequency, Middle Frequency, High Frequency).

### 1.1.2 Electromagnetic Pulse

An electromagnetic pulse (EMP) is a short burst of electromagnetic energy and very high amplitude emission of electromagnetic waves that can destroy electronic instrumentations. It may be generated by a natural occurrence such as : lightning EMP,



discharge of electromagnetic energy resulting from the impact of a meteoroid, geomagnetic storm : solar EMP. We have also man-made EMP with power line surges, and military EMP : nuclear electromagnetic pulse (NEMP), as a result of a nuclear explosion, non-nuclear electromagnetic pulse (NNEMP) weapons.

For example, in 1989, a big geomagnetic storm struck the Earth and caused a variation of magnetic field which led to an electrical power blackout. This geomagnetic storm was the result of a coronal mass ejection and three days later the severe geomagnetic storm struck Earth. The storm provoked intense auroras at the pole, which was seen as far south as Texas and Florida. Charged particles and electrons in the ionosphere flowed from west to east, inducing powerful electrical current in the ground. The burst produced short waves radio interference : some satellites in polar orbit have been out of control for several hours. It created sudden variations of the Earth's magnetic field, which triggered the protection mechanism of the transmission lines, isolating the James Bay network and generating a blackout that lasted nine hours.

Nuclear EMP and high altitude nuclear EMP : A nuclear detonation in or above the Earth's atmosphere produces an intense EMP. For bursts at altitudes above 40 km, the EMP environment is referred to as a HEMP. A nuclear burst puts out fast pulse of Gamma rays. They interact with upper atmosphere, generating Compton electrons, which turn in the Earth's geomagnetic field and produce a transverse current that radiate EMP towards the Earth.

### 1.1.3 Lightning strike on aircraft structures

Lightning discharges produce both an electromagnetic pulse due to the rapid lightning current pulse, which radiates primarily in Very Low Frequency (VLF) part of spectrum as well as a quasi-electrostatic (QE) field due to the removal of charge from the thundercloud. EMP interference is generally damaging to electronic equipment. A lightning strike can damage physical objects such as aircraft structures, either through heating effects or disruptive effects of the very large magnetic field generated by the current. Structures and systems require some form of protection against lightning. Every commercial aircraft is struck by lightning at least once a year on average. Aircraft lightning protection is a major concern for aircraft manufacturers.

We are interested in this document by the electric and magnetic fields of the lightning EMP. There are two types of lightning strikes to aircraft : the first one is the interception by the aircraft of a lightning leader. The second one, which makes about 90% of the cases, is when the aircraft initiates the lightning discharge by emitting two leaders when it is found in the intense electric field region produced by a thundercloud, our approach applies in this case. When the aircraft flies through a cloud region where the atmospheric electric field is large enough, an ionized channel, called a positive leader, merges from the aircraft in the direction of the ambient electric field. Laroche *et al* [26],

at an altitude of 6000m, observed an atmospheric electric field close to 50 kV/m inside the storm clouds, 100kV/m to the ground. When upward leader connects with the downward negative leader of the cloud, a return stroke is produced and a bright return stroked wave travels from aircraft to cloud. The lightning return strokes radiate powerful electromagnetic fields which may cause damage to aircraft electronic equipment.

When lightning strikes an aircraft, the consequences are classified into two main categories :

- the direct effects collect the damage caused to the points of attachment of the lightning : temperature rise linked to a shock wave causing damage to the fuselage ;
- the indirect effects combine the consequences of the circulations and penetrations of the electromagnetic fields and the currents generated in the aircraft.

Our work is devoted to the indirect effect to the electric and magnetic field associated to the lightning strike. We study of the electromagnetic waves propagation in the air and in the composite material. In this artificial periodic material, the electromagnetic field satisfies the Maxwell equations.

In recent years, the share of composite materials in the global industry has grown steadily, benefiting from rapid growth, supported in particular by the diversity of applications (aeronautics, rail, naval, automotive , spatial ...). They also enrich the design possibilities by making it possible to lighten structures and to realize complex shapes, able to fulfilling several functions, in each of the markets of applications. Composites have significant advantages over traditional materials (metal). They offer many functional advantages in lightness, mechanical and chemical resistance, reduced maintenance, freedom of form. They make it possible to increase the service life of equipment thanks to their mechanical and chemical properties.

#### **1.1.4 Composite material**

A composite material is a structure composed of at least two different materials. It is commonly arrangement of fibers (the reinforcements), which are embedded in a matrix whose mechanical strength is much lower. Reinforcements in a composite material take different shapes. long and continuous parallel fibers arranged to each other, unidirectional reinforcement or at a predefined angle, multidirectional reinforcement, short fibers or loads. The matrix ensures the cohesion and the orientation of the fibers and transmits the solicitations to a certain material. The materials obtained are highly heterogeneous. The reinforcement may be alone within a matrix or associated with a reinforcement of a different nature.

We will study theoretically and numerically a composite structure based on conventional carbon fiber reinforcements with an epoxy resin loaded with nanoparticles of black carbon. It is the most widely used conductive particle in composites and conductive polymers due to its low density and low cost. Epoxy resin has many advantages : excellent mechanical strength, thermal resistancy, chemical stability and adhesion to the fibers. However, it is sensitive to moisture, UV and shocks.

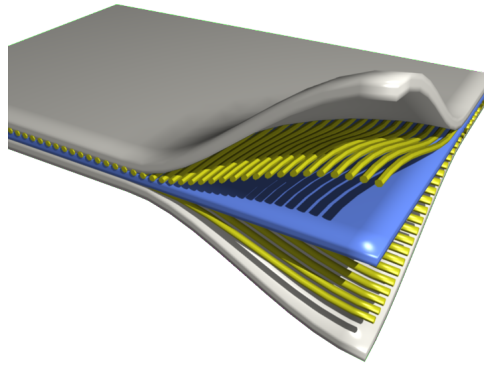


FIGURE 1.2 – Composite material. [2]

The assembly of several materials makes it possible to obtain an assembly possessing novel properties. The composite materials used in aeronautics are made up of a backbone (or reinforcement) assembled in a resin matrix. The reinforcement generally has very interesting mechanical characteristics and the matrix aims to protect the skeleton and to transmit the mechanical forces to it. Depending on their components, there are several types of composite materials : Glass-Reinforced Plastics (GRP) or fiberglass consisting of glass fibers and epoxy resin (commonly called fiberglass) and Kevlar or Carbon-Fiber-Reinforced Plastic (CFRP) (carbon fiber) consisting of carbon fibers and epoxy resin.

### 1.1.5 Electromagnetic behavior of composite materials

These performances have encouraged their growth specifically in the aeronautical field. Over the last 30 years, composite structures have become increasingly common in civil aircraft, using it up to 53% for the latest Airbus A350, and 50% for the Boeing B787, aircrafts offer increased vulnerability facing lightning. Earlier generation aircrafts, whose fuselages were predominantly composed of aluminum, behave like a Faraday cage so that it offers maximum protection for internal equipment. Currently, in aircrafts, composite materials consisting of a resin enclosing carbon fibers have significant advantages in terms of weight gain and therefore fuel saving. Yet, because aluminium conducts 100 to 1000 times more than composite, we lose the Faraday effect. Modern aircrafts have seen also the increasing reliance on electronic avionics systems instead of mechanical controls and electromechanical instrumentation. The constant increase in our dependency on composite material throughout many branches of industry make it necessary to quantify the risk associated with lightning strikes. For these reasons, aircraft manufacturers are very sensitive to lightning protection and pay special attention to aircraft certification through testing and analysis.

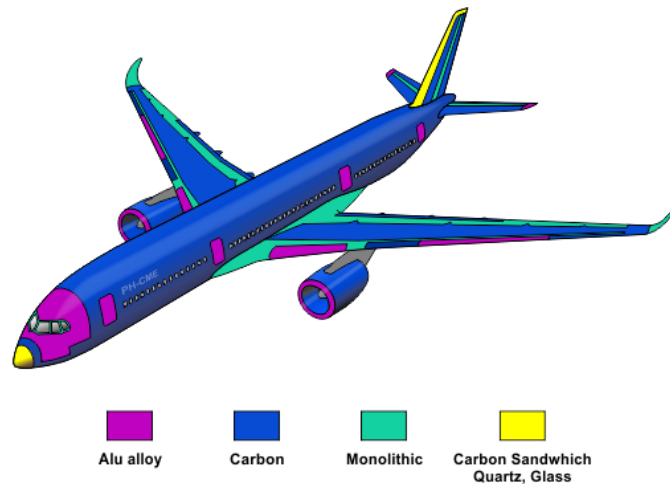


FIGURE 1.3 – Composite LOCATION of Airbus A350. [47]

However, the use of fibrous reinforced composite materials, for example : (fiber-glass) does not make it possible to perform the function of the electromagnetic shield, since the latter have a low electrical conductivity. This induces that we need metal protection for the walls, protection by conductive paints or assembly of conductive materials with the structure. However, the protection function is important for the survival of the structure. Composites do not provide a total effective protection against electromagnetic field, both for the embedded electronic equipment and for the integrity of the structure, especially with the lightning strike. It is therefore essential to add an electromagnetic protection function. These solutions generally entail : high cost, additional steps during the execution, regular maintenance ; it sometimes happens that there is a rapid degradation of the electrical properties of the layer added to the environment.

There are other solutions such as the insertion of a wire mesh (aluminum or copper), depending on the criticality of the zone to be protected (zoning). Despite the efforts of researchers to develop this way, the addition of the mesh in a composite structure can contribute to a degradation of the intrinsic mechanical properties of the latter and complicates the implementation.

### 1.1.6 Conductive composite materials

When the composite does not have the properties necessary to allow electrical conductivity, this can be obtained by introducing conductive charges into an insulated matrix. The conductivity is ensured by a phenomenon of percolation of the conductive particles, when their concentration reaches a threshold. The current can be propagated both by contact between particles and by tunneling.

Material	$\sigma(S/m)$
Silver	$6.17 \times 10^7$
Copper	$5.8 \times 10^7$
Gold	$4.1 \times 10^7$
Aluminium	$3.54 \times 10^7$
Carbon	40000
Sea water	4
Glass	$2 \times 10^{-4}$
Epoxy	$10^{-12}$

TABLE 1.1 – Electric conductivity of material

However, conductive composite materials are a new class of materials with a broad spectrum of technological applications, such as the use of electronic components, photovoltaic cells, corrosion protection, electronic gas sensors, electrostatic discharges and electromagnetic shielding. They are obtained by the incorporation of conductive inclusions within an insulating polymer matrix. They have both high electrical conductivity and low density. Such properties make conductive composite materials of real interest for applications in the field of protection against electromagnetic waves.

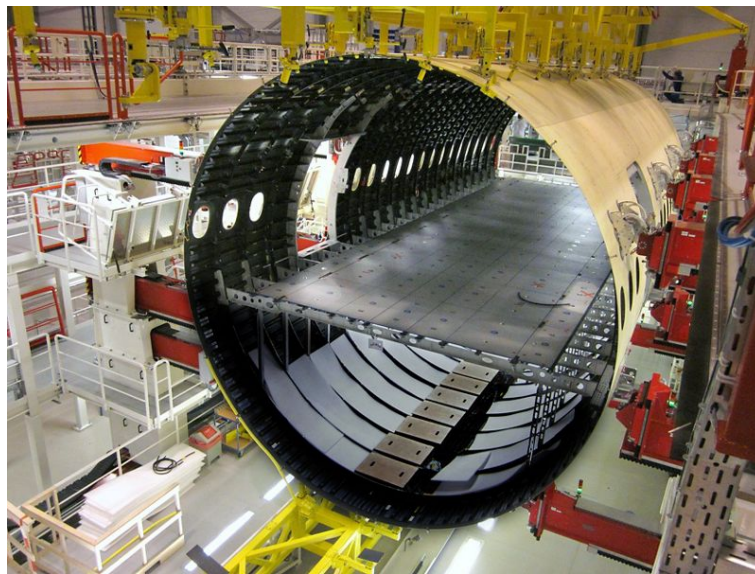


FIGURE 1.4 – Composite in the fuselage of Airbus A350. [5]

### 1.1.7 Shielding effectiveness

When an electromagnetic field arrives on a plate, a part is reflected, a part is absorbed by the material (resulting in a heating) and the other part transmitted on the

other side of the material. Shielding is used to reduce disturbances and make a device in accordance with the radiated emission and immunity standards. The higher it is, the more it will prevent the propagation of waves.

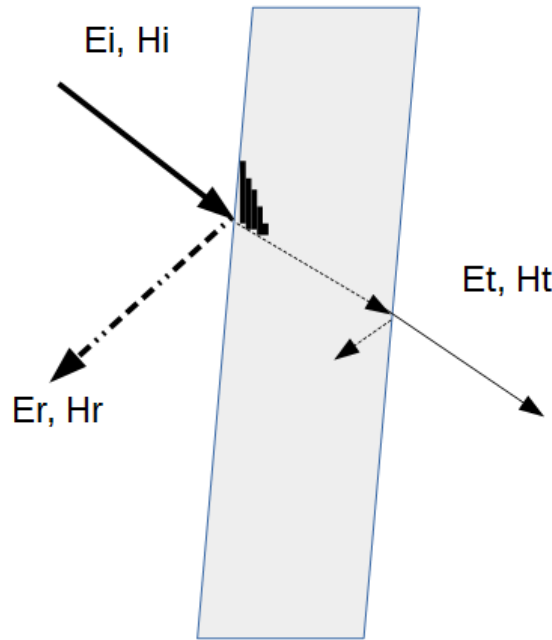


FIGURE 1.5 – Representation of the wave propagation

It is defined by the ratio between ratio between the incident field ( $E_i, H_i$ ) and the transmitted field ( $E_t, H_t$ ), or alternatively, the field with the shield and the unshielded field at a given point. According to Figure 1.5. The remaining portion which penetrates the composite will go through an absorption, which depends on the type of material and its thickness. At the emerging, a new reflection takes place and the transmitted field goes out on the other side of the composite.

$$SE = \frac{E_i}{E_t} = \frac{H_i}{H_t}. \quad (1.1)$$

Then the shielding effectiveness is given, for the particular case of plane wave, by

$$SE(dB) = 20 \log\left(\frac{E_i}{E_t}\right) = 20 \log\left(\frac{H_i}{H_t}\right). \quad (1.2)$$

Shielding efficiency is the sum of multiple reflection, absorption and reflection losses. It can be divided into three terms each representing a phenomenon :

$$SE(dB) = SE_R + SE_A + SE_M \quad (1.3)$$

$SE_R$  represents reflective losses on the left side of the driver,  $SE_R = 20 \log \left| \frac{E_i}{E_t} \right|$

$SE_A$  represents absorption losses in the driver.  $SE_A = 20 \log e^{L/\delta}$ .

$SE_M$  represents additional reflections and multiple transmissions. where  $L$  is the thickness of the composite, and  $\delta$  is the thickness skin.

In our numerical models, that our composite plate is semi infinite, we will calculate the transmission coefficient. It is defined as the ratio of the electric field transmitted on the incident field.

$$Rt = \frac{E_t}{E_i}. \quad (1.4)$$

### 1.1.8 Homogenization methods

We are particularly interested in our work, by the propagation of strong electric and magnetic fields as EMP (low frequencies) or IR waves (high frequencies) in a conductive composite material with an epoxy resin loaded with nanoparticles. We consider composite material with a periodic structure and when the period of this microstructure is small compared to the wavelength of the electromagnetic wave. We use the time-harmonic Maxwell equations : an incoming wave is imposed on the upper boundary modeling electromagnetic field radiated by an electromagnetic pulse (EMP) or infrared waves. On the lower frontier we want to impose "outgoing waves".

We evaluate the electromagnetic field within and near a periodic structure when the period of this microstructure is small compared to the wavelength of the electromagnetic wave. The scale of the carbon fiber is of the order of about  $10^{-5}m$ , the scale of composite plate is of the order of  $10^{-3}m$ . We consider the microscopic scale  $\varepsilon = \frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-2}$ , which represents the ratio between the diameter of the fiber and thickness of the composite material. Therefore, any study of Maxwell's harmonic equations in such a geometry must take into account the local differences between these different scales. The analysis of the propagation of the electromagnetic field requires a calculation of the complete electric and magnetic field in the composite material. Carbon fibers and epoxy resin have different properties (in the conductivity, the permeability and the permittivity), then our models are such the coefficients are quickly oscillating. The numerical simulation of these models with oscillating coefficients requires a very fine mesh and thus very important capacities and a computation time. However, only the macroscopic behavior of the environment will interest our study. We therefore seek to consider the composite as an equivalent homogeneous medium with equivalent properties and where the diameter of the carbon fibers goes to zero. So, we are trying to understand how the microscopic structure affects the macroscopic electromagnetic field behavior. This is possible thanks to the development of a homogenization method. Faster and simplified calculations will give us the intensity of electric and magnetic fields.

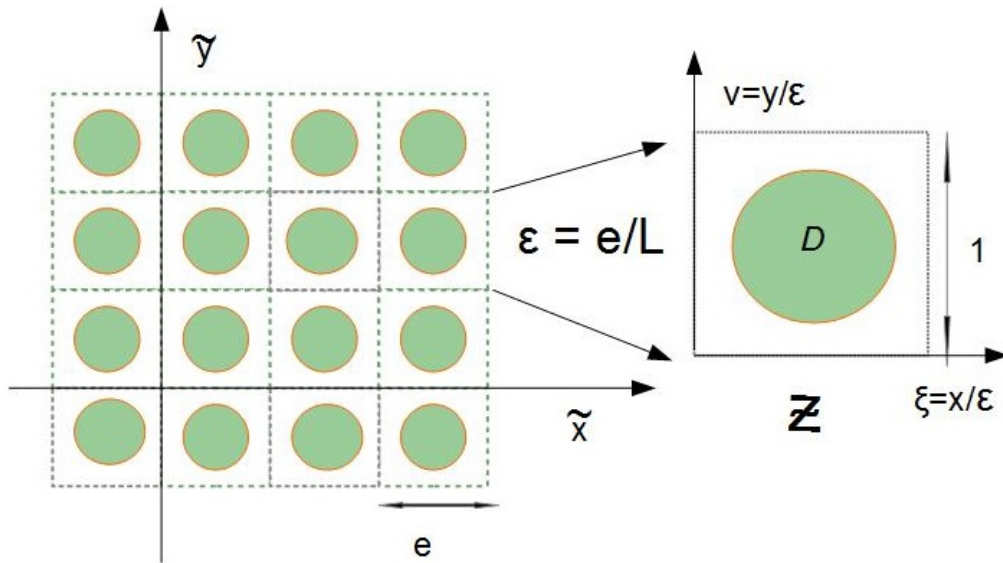


FIGURE 1.6 – Left : The global microstructure in 2D. Right :  $\mathcal{Z}$ -cell of the periodic structure.

We consider that carbon fibers have the same diameter and are periodically arranged in the resin. The figure above represents the periodic repetition of a cell with a period  $\varepsilon$ . Homogenization of Maxwell equations with periodically oscillating coefficients was studied in many papers. N. Wellander homogenized linear and non-linear Maxwell equations with perfect conducting boundary conditions using two-scale convergence in [43] and [44]. N. Wellander and B. Kristensson homogenized the full time-harmonic Maxwell equation with penetrable boundary conditions and at fixed frequency in [45]. The homogenized time-harmonic Maxwell equation for the scattering problem was done in F. Guenneau, S. Zolla and A. Nicolet [22]. Y. Amirat and V. Shelukhin perform two-scale homogenization time-harmonic Maxwell equations for a periodical structure in [9]. They calculate the effective dielectric  $\varepsilon$  and effective electric conductivity  $\sigma$ . They proved that homogenized Maxwell equations are different in low and high frequencies. The result obtained by two-scale convergence approach takes into account the characteristic sizes of skin thickness and wavelength around the material. We use the theory of two-scale convergence introduced by G. Nguetseng [34] and developed by G. Allaire [6].

Our models are composed by air above the composite fuselage and we study the behavior of the electromagnetic wave in low and high frequencies, in the domain filled by the composite material, representing the skin aircraft which can be the wings, the fuselage or the radome, and the air. We build 3D models, under simplifying assumptions, using linear time-harmonic Maxwell equations and constitutive relations for electric and



magnetic fields. In our developments, we impose a magnetic permeability  $\mu_0$  uniform and an electrical permittivity  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon^*$ , where  $\epsilon^*$  is the relative permittivity depending of the medium.

We consider that we have very conductive - but not perfect conductors - carbon fibers and an epoxy resin whose conduction depends on its doping rate. The conductivity of the air is non-linear. Air is a strong insulator [46] with conductivity of the order of  $10^{-14} \text{ S.m}^{-1}$  but beyond some electric solicitation, the air loses its insulating nature and locally becomes suddenly conductive. The ionization phenomenon is the only cause that can make the air conductor of electricity. The ionized channel becomes very conductive.

On of the parameter we account for in our models :  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\omega \bar{\sigma} \mu_0}}$ , where  $\bar{\sigma}$  is the characteristic conductivity and  $\bar{\omega}$  the order of the magnitude of the pulsation shares much with the definition of theoretical thickness skin  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \bar{\sigma} \mu_0}}$ . The thickness skin is the depth at which the surface current moves to a factor of  $e^{-1}$ . Indeed, at high frequency, the skin effect phenomenon appears because the current tends to concentrate at the periphery of the conductor. On the other side, at low frequencies the penetration depth is much greater than the thickness of the plate which means that a part of the electric field penetrates the composite plate.



# PRESENTATION OF THE PROBLEM

---



## 2.1 Modeling

This chapter is dedicated to the complete mathematical model we will study in this thesis. First, we consider problem that seems relevant with the perspective of propagation of the electromagnetic field in the air and in the skin of aircraft fuselage made of composite material for different pulsations corresponding to the lightning strike. Secondly, we make a scaling of the model and finally we operate simplifications. We consider a structure formed by fibers parallel to the direction  $0z$  with infinite length see Figure 2.1. These fibers are arranged periodically in  $(x, y)$  direction. The period noted  $\varepsilon$  will be the small parameter of our homogenized problem.

### 2.1.1 Notations and setting of the problem

We consider set  $\tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3, \tilde{y} \in (-\bar{L}, d)\}$  for  $\bar{L}$  and  $d$  two positive constants, with two open subsets  $\tilde{\Omega}_a$  and  $\tilde{P}$  (see Figure 2.1). The air fills  $\tilde{\Omega}_a$  and we consider that the composite material, with two materials periodically distributed, stands in domain  $\tilde{P}$ .

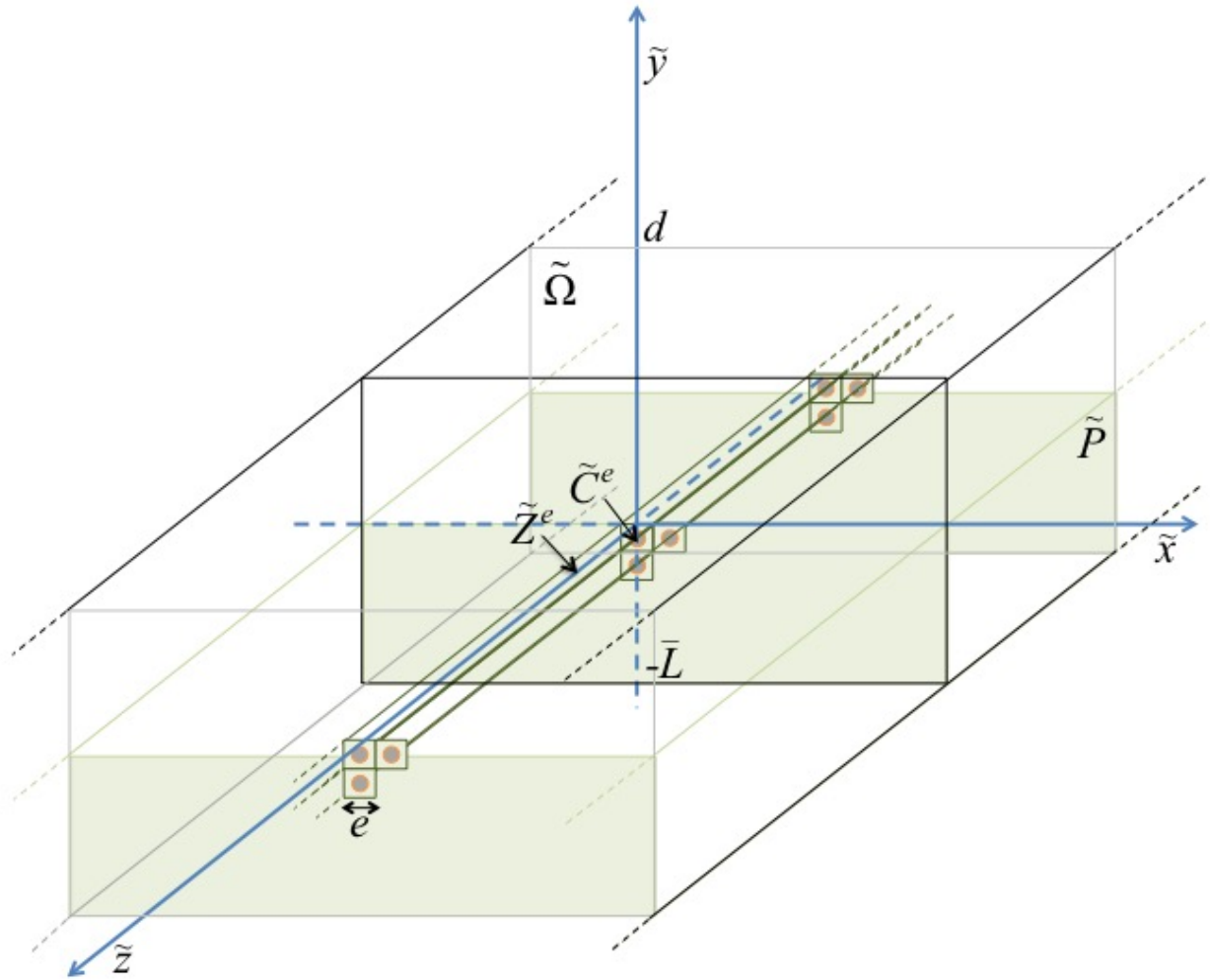


FIGURE 2.1 – The global domain

We assume that the thickness  $\bar{L}$  of the composite material is much smaller than its horizontal size. We denote by  $e$  the lateral size of the basic cell  $\tilde{Y}^e$  of the periodic microstructure of the material. The cell is composed of a carbon fiber in the resin. We define now more precisely the material, introducing :

$$\tilde{P} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3 / -\bar{L} < \tilde{y} < 0\}, \quad (2.1)$$

which is the domain containing the material. Now we describe precisely the basic cell. For this we first introduce the following cylinder with square base :

$$\tilde{Z}^e = \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \times [-e, 0] \times \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

We consider  $\alpha$  such that  $0 < \alpha < 1$ , and  $\tilde{R}^e = \alpha \frac{e}{2}$ . We set

$$\tilde{D}^e = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 / (\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + \frac{e}{2})^2) < (\tilde{R}^e)^2\right\}. \quad (2.3)$$

We define the cylinder containing the fiber as (see fig 1) :

$$\tilde{C}^e = \tilde{D}^e \times \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Then the part of the basic cell containing the matrix is

$$\tilde{Y}_R^e = \tilde{Z}^e \setminus \tilde{C}^e, \quad (2.5)$$

and by definition, the basic cell  $\tilde{Y}^e$  is the couple

$$(\tilde{Y}_R^e, \tilde{C}^e). \quad (2.6)$$

The composite material results from a periodic extension of the basic cell. More precisely the part of the material that contains the carbon fibers is

$$\tilde{\Omega}_c = \tilde{P} \cap \{(ie, je, 0) + \tilde{C}^e, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^-\}, \quad (2.7)$$

where the intersection with  $\tilde{P}$  limits the periodic extension to the area where stands the material. Set  $\{(ie, je, 0) + \tilde{C}^e, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^-\}$  is a short notation for

$$\{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists j \in \mathbb{Z}^-, \exists (x_b, y_b, z_b) \in \tilde{C}^e; \tilde{x} = x_b + ie, \tilde{y} = y_b + je, \tilde{z} = z_b\}. \quad (2.8)$$

In the same way the part of the material that contains the resin is

$$\tilde{\Omega}_r = \tilde{P} \cap \{(ie, je, 0) + \tilde{Y}_R^e\}, \quad (2.9)$$

or equivalently

$$\tilde{\Omega}_r = \tilde{P} \cap \{(ie, je, 0) + \tilde{Z}^e \setminus \tilde{C}^e\} = (\mathbb{R} \times (-L, 0) \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}_c. \quad (2.10)$$

So the geometrical model of our composite material is couple  $(\tilde{\Omega}_c, \tilde{\Omega}_r)$ . Now, it remains to set the domain that contains the air :

$$\tilde{\Omega}_a = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / 0 \leq \tilde{y} < d\}. \quad (2.11)$$

We consider that  $d$  is of the same order as  $\bar{L}$  and we introduce the upper frontier  $\tilde{\Gamma}_d = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / \tilde{y} = d\}$  of domain  $\tilde{\Omega}$ . On this frontier we will consider that the electric field and magnetic field are given. We also introduce the lower frontier  $\tilde{\Gamma}_L = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / \tilde{y} = -\bar{L}\}$  with those definitions we have  $\tilde{\Omega}_a \cap \tilde{P} = \emptyset$ ,  $\tilde{\Omega}_c \cap \tilde{\Omega}_r = \emptyset$ ,  $\tilde{P} = \Omega_r \cup \Omega_c$ ,  $\tilde{\Omega} = \Omega_a \cup \tilde{P} = \Omega_a \cup \Omega_r \cup \Omega_c$ , and for any  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma}_d \cup \tilde{\Gamma}_L$  and, we write  $\tilde{n}$ , the unit vector, orthogonal to  $\partial\tilde{\Omega}$  and pointing outside  $\tilde{\Omega}$ . We have :

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= e_2 \text{ on } \tilde{\Gamma}_d \\ \tilde{n} &= -e_2 \text{ on } \tilde{\Gamma}_L. \end{aligned} \quad (2.12)$$

In the following we need to describe what happens at the interfaces between resin and carbon fibers, and resin and air. So we define  $\Gamma_{ra} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / \tilde{y} = 0\}$  and  $\Gamma_{cr}$  the boundary of the set defined by (2.8).

## 2.1.2 Maxwell equations

The classical theory of electromagnetism is based on Maxwell's equations proposed by James Clerk Maxwell [29]). These equations describe the propagation of electromagnetic waves with the speed of light,  $c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ . The electromagnetic field is represented using four functions dependent on time and space.

$\tilde{E}^*(t, x, y, z)$  is the electric field, (V/m)

$\tilde{H}^*(t, x, y, z)$  the magnetic field, (A/m)

$\tilde{D}^*(t, x, y, z)$  the electric induction, ( $C/m^2$ )

$\tilde{B}^*(t, x, y, z)$  the magnetic induction, (T).

They write :

$$-\frac{\partial \tilde{D}^*}{\partial t} + \nabla \times \tilde{H}^* = \tilde{J}^*, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t} + \nabla \times \tilde{E}^* = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \tilde{D}^* = \tilde{\rho}^*, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \tilde{B}^* = 0, \quad (2.16)$$

in  $\mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ .

In (2.13)-(2.16),  $\nabla \times$  and  $\nabla \cdot$  are the curl and divergence operators. Equation (2.13) is called Ampere's equation and it means that a variation of electric field creates a magnetic field. Equation (2.14), called Faraday's equation reflects the fact that variation of the magnetic field induces an electric field. Equation (2.15) represents Gauss's law and signifies that an electric charge creates an electric field. Finally, equation (2.16) called the Magnetic Gaussian Law reflects the fact that there is no monopolar magnetic charge. The charge density,  $\tilde{\rho}^*(t, x, y, z)$  (see T. Abboud and I. Terrasse [3]), results from the presence of electrical charge. And the field  $\tilde{J}^*$ , called current density, appears



as soon as there is an electric current.

To close this system, it is necessary to add constitutive laws that define the response of the medium to a sollicitation : electrical, magnetic, thermal ... These laws are written in  $\mathbb{R} \times \widetilde{\Omega}$

$$\widetilde{D}^* = \epsilon(x, y, z) \widetilde{E}^*(t, x, y, z), \quad (2.17)$$

$$\widetilde{B}^* = \mu(x, y, z) \widetilde{H}^*(t, x, y, z). \quad (2.18)$$

The function  $\epsilon(x, y, z)$  is the dielectric permittivity and describe the response of a given medium to an electric field. The function  $\mu(x, y, z)$ , the magnetic permeability, describe the ability of a given medium to modify a magnetic field. In any medium permittivity and permeability are characterized by

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \mu(x, y, z) = \mu_0 \mu_r, \quad (2.19)$$

where  $\mu_0$  and  $\epsilon_0$  are the permeability and permittivity in the vacuum. In our model we treat the constitutive laws by :

$$\widetilde{D}^* = \epsilon_0 \epsilon^* \widetilde{E}^*, \quad (2.20)$$

$$\widetilde{B}^* = \mu_0 \widetilde{H}^*, \quad (2.21)$$

where  $\epsilon^*$  is the relative permittivity of the domains defined by

$$\epsilon_{|\widetilde{\Omega}_a}^* = 1, \epsilon_{|\widetilde{\Omega}_r}^* = \epsilon_r, \epsilon_{|\widetilde{\Omega}_c}^* = \epsilon_c, \quad (2.22)$$

where  $\epsilon_r$  and  $\epsilon_c$ , to simplify the problem, are positives constants. In order to account for energy transfer between the electromagnetic compartment and the propagation of the electric charges, we take for granted the Ohmic law, in  $\mathbb{R} \times \widetilde{\Omega}$

$$\widetilde{J}^* = \sigma \widetilde{E}^*, \quad (2.23)$$

where  $\sigma$  is the electric conductivity. Its value depends on the location :

$$\sigma_{|\widetilde{\Omega}_a} = \sigma_a, \sigma_{|\widetilde{\Omega}_r} = \sigma_r, \sigma_{|\widetilde{\Omega}_c} = \sigma_c, \quad (2.24)$$

where  $\widetilde{\Omega}_a$ ,  $\widetilde{\Omega}_r$  and  $\widetilde{\Omega}_c$  were defined in (2.11), (2.9) and (2.7).

### 2.1.3 Boundary conditions

For mathematical as well as physical reasons we have to set boundary conditions on  $\widetilde{\Gamma}_d$  and  $\widetilde{\Gamma}_L$ . On  $\widetilde{\Gamma}_d$  we will write conditions that translate that  $\widetilde{E}^*$  and  $\widetilde{H}^*$  are given by the source located in  $\widetilde{y} = d$ . The way we chose consists in setting :

$$\widetilde{E}^* \times e_2 = \widetilde{E}_d^* \times e_2; \quad \widetilde{H}^* \times e_2 = \widetilde{H}_d^* \times e_2 \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \widetilde{\Gamma}_d, \quad (2.25)$$

where  $\widetilde{E}_d^*, \widetilde{H}_d^*$  are functions defined on  $\widetilde{\Gamma}_d$  for any  $t \in \mathbb{R}$ .

On  $\widetilde{\Gamma}_L$ , we chose Neumann boundary conditions. These boundary conditions reflect the fact there is outgoing wave from it.

$$\nabla \times \widetilde{E} \times e_2 = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \widetilde{\Gamma}_L. \quad (2.26)$$

Problem (2.13)-(2.24) supplemented with (2.25) and (2.26), is considered as containing all physics we want to account for.

### 2.1.4 Time-harmonic Maxwell equations

The first simplification we make, consists in considering the harmonic version of the Maxwell equations (2.13)-(2.24). This simplification is used in many references studying electromagnetic phenomena and especially for lightning [24] and near infrared applications, in spite of the fact that it considers implicitly that every fields and currents are waves of the form, for all  $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}$  :

$$\Re e[U(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \exp^{i\widetilde{\omega}t}], \quad (2.27)$$

where  $U(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = a(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \exp^{i\phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})}$  is the complex amplitude with  $\widetilde{\omega}$  the pulsation,  $\phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$  the phase shift of the wave and  $a(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$  is its amplitude. In particular, it supposes  $\widetilde{E}_d^*, \widetilde{H}_d^*$  in (2.25) are of the form, for all  $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}$  :

$$\widetilde{E}_d^*(t, \widetilde{x}, \widetilde{z}) = \Re e(\widetilde{E}_d(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \exp^{i\widetilde{\omega}t}), \quad (2.28)$$

$$\widetilde{H}_d^*(t, \widetilde{x}, \widetilde{z}) = \Re e(\widetilde{H}_d(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \exp^{i\widetilde{\omega}t}), \quad (2.29)$$

where  $\widetilde{E}_d$  and  $\widetilde{H}_d$  take into account the amplitude and the phase shift of their corresponding fields. Taking (2.23) into account, the time-harmonic Maxwell equations, which describe the electromagnetic radiation, are written :

$$\nabla \times \widetilde{H} - i\widetilde{\omega}\epsilon_0\epsilon^* \widetilde{E} = \sigma \widetilde{E}, \quad \text{Maxwell - Ampere equation} \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \widetilde{E} + i\widetilde{\omega}\mu_0 \widetilde{H} = 0, \quad \text{Maxwell - Faraday equation} \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0\epsilon^* \widetilde{E}) = \widetilde{\rho}, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \widetilde{H}) = 0, \quad (2.33)$$

where  $\widetilde{E}^*(t, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \Re e(\widetilde{E}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \exp^{i\widetilde{\omega}t})$  and  $\widetilde{H}^*(t, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \Re e(\widetilde{H}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \exp^{i\widetilde{\omega}t})$ ,  $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in \widetilde{\Omega}$ . The magnetic field  $\widetilde{H}$  can be directly computed from the electric field  $\widetilde{E}$

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \widetilde{E}. \quad (2.34)$$

Now, for the electric approach, taking the curl of equation (2.34) yields an expression of  $\nabla \times \widetilde{H}$  in term of  $\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}$ . Inserting  $\nabla \times \widetilde{H}$  in (2.30) we get the following equation for the electric field :

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E} + (-\widetilde{\omega}^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon^* + i\widetilde{\omega} \mu_0 \sigma) \widetilde{E} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}. \quad (2.35)$$

Taking the divergence of the equation (2.30) yields the natural gauge condition :

$$\nabla \cdot [(i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon^* + \sigma) \widetilde{E}] = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}. \quad (2.36)$$

Notice that  $i\widetilde{\omega} \epsilon_0 + \sigma$  is equal to  $i\widetilde{\omega} \epsilon_0 + \sigma_a$  in  $\widetilde{\Omega}_a$ , to  $i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon_r + \sigma_r$  in  $\widetilde{\Omega}_r$  and to  $i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon_c + \sigma_c$  in  $\widetilde{\Omega}_c$ , those quantities being all nonzero. Then (2.36) is equivalent to :

$$\nabla \cdot \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_a} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}_a, \quad \nabla \cdot \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_r} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}_r, \quad \nabla \cdot \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_c} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}_c. \quad (2.37)$$

with the transmission conditions

$$\begin{aligned} (i\widetilde{\omega} \epsilon_0 + \sigma_a) \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_a} \cdot e_2 &= (i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon_r + \sigma_r) \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_r} \cdot e_2 \quad \text{on} \quad \widetilde{\Gamma}_{ra}, \\ (i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon_r + \sigma_r) \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_r} \cdot e_2 &= (i\widetilde{\omega} \epsilon_0 \epsilon_c + \sigma_c) \widetilde{E}|_{\widetilde{\Omega}_c} \cdot e_2 \quad \text{on} \quad \widetilde{\Gamma}_{cr}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Summarizing, we finally obtain the PDE model :

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E} + (-\widetilde{\omega}^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon^* + i\widetilde{\omega} \mu_0 \sigma) \widetilde{E} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega}. \quad (2.39)$$

According to the tangential trace of the Maxwell-Faraday equation (2.31) we obviously obtain that using boundary condition (2.25), is equivalent to using :

$$\nabla \times \widetilde{E} \times e_2 = -i\widetilde{\omega} \mu_0 \widetilde{H}_d(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \times e_2 \quad \text{on} \quad \widetilde{\Gamma}_d \quad (2.40)$$

where  $\widetilde{H}_d$  is defined in (2.29) and where we used (2.12).

And on  $\widetilde{\Gamma}_L$  we have :

$$\nabla \times \widetilde{E} \times e_2 = 0 \quad \text{on} \quad \widetilde{\Gamma}_L. \quad (2.41)$$

### 2.1.5 Scaling

In this subsection we propose a rescaling of system ((2.39)-(2.41)), we will consider a set of characteristic sizes related to our problem. Physical factors are then rewritten using those values leading to a new set of dimensionless and unitless variables and fields in which the system is rewritten. The considered characteristic sizes are : the thickness  $\bar{L}$  of the plate  $\tilde{P}$  and  $\bar{\omega}$  the characteristic pulsation,  $\bar{\sigma}$  the characteristic electric conductivity,  $\bar{E}$  the characteristic electric magnitude,  $\bar{H}$  the characteristic magnetic magnitude. We then define the dimensionless variables :  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  with  $x = \frac{\tilde{x}}{\bar{L}}$ ,  $y = \frac{\tilde{y}}{\bar{L}}$ ,  $z = \frac{\tilde{z}}{\bar{L}}$  and fields  $E$ ,  $H$  and  $\sigma$  that are such that

$$\begin{cases} E(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\bar{E}} \tilde{E}(\bar{\omega}\omega, \bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z), \\ H(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\bar{H}} \tilde{H}(\bar{\omega}\omega, \bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z), \\ \sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \tilde{\sigma}(\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z), \end{cases} \quad (2.42)$$

Taking (2.24) into account,  $\sigma$  also reads :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \quad \text{if} \quad 0 \leq \bar{L}y \leq d, \quad (2.43)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \quad \text{if} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_r, \quad (2.44)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \quad \text{if} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_c. \quad (2.45)$$

Doing this gives the status of units to the characteristic sizes. Since, for instance :

$$\frac{\partial E}{\partial x}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\bar{L}}{\bar{E}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{x}}(\bar{\omega}\omega, \bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z), \quad (2.46)$$

using those dimensionless variables and fields and taking (2.43)-(2.45) into account, equation (2.39) gives :

$$\bar{E} \nabla \times \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) - \left( \frac{\bar{L}^2 \bar{\omega}^2}{c^2} \epsilon^* \omega^2 + i \bar{\sigma} \bar{\omega} \omega \bar{L}^2 \mu_0 \sigma(\mathbf{x}, \omega) \right) \bar{E} E(\omega, x, y, z) = 0, \quad (2.47)$$

for any  $(\omega, \mathbf{x})$  such that  $(\bar{\omega}\omega, \bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}$ . Now we exhibit

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi c}{\bar{\omega}}, \quad (2.48)$$

which is the characteristic wave length and

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega} \bar{\sigma} \mu_0}}, \quad (2.49)$$

which is the characteristic skin thickness. Using those quantities equation (2.47) reads, for any  $(\omega, \mathbf{x}) \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) + \left(-\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2} \omega^2 + i \frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2} \frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \omega\right) E(\omega, \mathbf{x}) &= 0 \quad \text{when} \quad 0 \leq \bar{L}y \leq d, \\ \nabla \times \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) + \left(-\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2} \epsilon_r \omega^2 + i \frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2} \frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \omega\right) E(\omega, \mathbf{x}) &= 0 \quad \text{when} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_r, \\ \nabla \times \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) + \left(-\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2} \epsilon_c \omega^2 + i \frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2} \frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \omega\right) E(\omega, \mathbf{x}) &= 0 \quad \text{when} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_c. \end{aligned} \quad (2.50)$$

In the following expressions,  $\frac{\bar{L}}{\bar{\lambda}}$  and  $\frac{\bar{L}}{\bar{\delta}}$  appearing in the equations above will be rewritten in terms of a small parameter  $\varepsilon$ .

The boundary conditions are written

$$\begin{aligned} \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) \times e_2 &= -i\omega \bar{\omega} \mu_0 \frac{\bar{L}}{\bar{E}} \bar{H}_d H_d(x, z) \times e_2 \quad \text{when} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Gamma}_d, \\ \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}) \times e_2 &= 0 \quad \text{when} \quad (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Gamma}_L, \end{aligned} \quad (2.51)$$

where  $\bar{H}_d H_d(x, z) = \tilde{H}_d(\bar{L}x, \bar{L}z)$

In the same way the magnetic field (2.34) gives for any  $(\omega, \mathbf{x}) \in \Omega$  :

$$H(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega \bar{\omega} \mu_0 \bar{L} \bar{H}} \bar{E} \nabla \times E(\omega, \mathbf{x}). \quad (2.52)$$

The characteristic thickness of the plate  $\bar{L}$  is about  $10^{-3}$ m and the size of the basic cell  $e$  is about  $10^{-5}$ m. Since  $e$  is much smaller than the thickness of the plate  $\bar{L}$ , it is pertinent to assume the ratio  $\frac{e}{\bar{L}}$  equals a small parameter  $\varepsilon$  :

$$\frac{e}{\bar{L}} \sim 10^{-2} = \varepsilon. \quad (2.53)$$

Then, in what concerns the characteristic pulsation  $\bar{\omega}$ , in the tables below we consider several values. In our study we will consider  $\bar{\omega} = 10^6 \text{rad/s}$ . Then, concerning the characteristic electric conductivity it seems to be reasonable to take for  $\bar{\sigma}$  the value of the effective electric conductivity of the composite material. Yet this choice implies to compute a coarse estimate of this effective conductivity at this level.

For this we take into account that the composite material is composed of carbon fibers and epoxy resin. The resin can be charged by nanoparticles, which increases strongly its conductivity, or not. The tables below summarize the cases when the resin is charged and also when the resin is not charged. We also account for the fact there is not

only one effective electric conductivity but a first one in the fiber direction : the longitudinal electric conductivity (in cases 1, 2, 5 and 6 of the tables below), and a second electric conductivity, in the transverse direction to the fibers (considered in cases 3, 4, 7 and 8). In this context, we consider the basic model which is based on the electrical analogy and the law of mixtures. It corresponds to the Wiener limits : the harmonic average and the arithmetic average. The effective values are the extreme limits of the conductivity of the composite introduced by Wiener in 1912 see S. Berthier p 76 [14]. The longitudinal electric conductivity corresponding of the upper Wiener limit is expressed by the equation :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\text{long}} = f_c \sigma_c + (1 - f_c) \sigma_r, \quad (2.54)$$

where  $f_c = \pi \frac{\alpha^2}{4}$  is the volume fraction of the carbon fiber.

The transverse electric conductivity corresponding of the lower Wiener limit is expressed by

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\text{trans}} = \frac{1}{\frac{f_c}{\sigma_c} + \frac{(1-f_c)}{\sigma_r}}. \quad (2.55)$$

For the computation, we take values close to reality. We consider that carbon fiber occupies the volume of the cell this means that  $\alpha$  is close to 1. When the resin is not doped  $\sigma_r \sim 10^{-10} S.m^{-1}$  is much smaller than  $\sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$ . Then,  $\bar{\sigma} = \sigma_{\text{long}}$  is close to  $\pi \frac{\alpha^2}{4} \sigma_c \sim \sigma_c$  and  $\bar{\sigma} = \sigma_{\text{trans}}$  is close to  $\frac{\sigma_r}{(1-\pi \frac{\alpha^2}{4})} \sim \sigma_r$ .

Now, we express the electric conductivity of the air in terms of  $\bar{\sigma}$ , we consider two possibilities. The first one is relevant for a situation with a ionized channel. The second one of situation with a strong atmospheric electric field but without a ionized channel. In this situation air is not ionized and has a low conductivity. All possible situations are gathered in the tables below. Cases 5 to 8 are associated with the first situation with air conductivity  $\sigma_a$  being  $\sigma_{\text{lightning}} = 4242 S.m^{-1}$  for an ionized lightning channel see [23]. Cases 1 to 4, to the second one, with  $\sigma_a = 10^{-14} S.m^{-1}$ .

All calculations of the different cases of the tables are detailed in Annex 7.2.4. In our study we consider the case 6 for  $\omega = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ , which corresponds to the air ionized, a resin doped and the longitudinal electric conductivity of the carbon fibers which corresponds to the upper Wiener's limit and a high conductivity.

	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7	case 8
$\bar{L}(m)$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$e(m)$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\bar{\lambda}(m)$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^6$
$\bar{\sigma}(S.m^{-1})$	40000	40000	$10^{-10}$	$10^{-3}$	40000	$10^4$	$10^{-10}$	$10^{-3}$
$\bar{\delta}(m)$	0, 1	0, 1	$10^7$	$10^3$	0, 1	0, 1	$10^7$	$10^3$
$\sigma_c(S.m^{-1})$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^4}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^4}$
$\sigma_r(S.m^{-1})$	$\varepsilon^7 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\varepsilon^7 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
$\sigma_a(S.m^{-1})$	$\varepsilon^9 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^9 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^2 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^6 \bar{\sigma}$	$\varepsilon \bar{\sigma}$	$\varepsilon \bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^5}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^2}$
$\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2}$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$	$\varepsilon^9$
$\frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2}$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^{10}$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^{10}$	$\varepsilon^7$

TABLE 2.1 – for  $\bar{\omega} = 100 rad.s^{-1}$ .

	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7	case 8
$\bar{L}(m)$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$e(m)$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\bar{\lambda}(m)$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$
$\bar{\sigma}(S.m^{-1})$	40000	40000	$10^{-10}$	$10^{-3}$	40000	40000	$10^{-10}$	$10^{-3}$
$\bar{\delta}(m)$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^5$	10	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^5$	10
$\sigma_c(S.m^{-1})$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^5}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^5}$
$\sigma_r(S.m^{-1})$	$\varepsilon^7 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\varepsilon^7 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
$\sigma_a(S.m^{-1})$	$\varepsilon^9 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^9 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^2 \bar{\sigma}$	$\varepsilon^6 \bar{\sigma}$	$\varepsilon \bar{\sigma}$	$\varepsilon \bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^5}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^2}$
$\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2}$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^5$
$\frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2}$	1	1	$\varepsilon^8$	$\varepsilon^5$	1	1	$\varepsilon^8$	$\varepsilon^5$

TABLE 2.2 – for  $\bar{\omega} = 10^6 rad.s^{-1}$ .

	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7	case 8
$\bar{L}(m)$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$e(m)$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\bar{\lambda}(m)$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$\bar{\sigma}(S.m^{-1})$	40000	40000	$10^{-10}$	$10^{-3}$	40000	40000	$10^{-10}$	$10^{-3}$
$\bar{\delta}(m)$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	1	$10^{-3/2}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	1	$10^{-3/2}$
$\sigma_c(S.m^{-1})$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^4}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^7}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^4}$
$\sigma_r(S.m^{-1})$	$\epsilon^7 \bar{\sigma}$	$\epsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\epsilon^7 \bar{\sigma}$	$\epsilon^4 \bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
$\sigma_a(S.m^{-1})$	$\epsilon^9 \bar{\sigma}$	$\epsilon^9 \bar{\sigma}$	$\epsilon^2 \bar{\sigma}$	$\epsilon^6 \bar{\sigma}$	$\epsilon \bar{\sigma}$	$\epsilon \bar{\sigma}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^5}$	$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon^2}$
$\frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\bar{\lambda}^2}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$
$\frac{\bar{L}^2}{\bar{\delta}^2}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\epsilon^3$	$\epsilon$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\frac{1}{\epsilon^3}$	$\epsilon^3$	$\epsilon$

 TABLE 2.3 – for  $\bar{\omega} = 10^{14} rad.s^{-1}$ .

As it is well known the tables confirm that at high frequencies the thickness of the plate is much greater than the skin depth. This one depends on  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{\omega}$  and decreases strongly for high conductivity or high frequencies. For  $\bar{\omega} = 10^{14} rad.s^{-1}$  and  $\bar{\sigma} = 4.10^4 S.m^{-1}$ , the conductivity in the direction of the carbon fibers, which the skin effect phenomenon appears with  $\delta = 10^{-6}m$ . In low frequencies and low conductivity  $\delta$  is large so the electromagnetic wave can penetrate the composite material. The high conductivity limits the penetration of the electromagnetic wave to a boundary layer whose depth is about  $\bar{\delta}$ .

Now, we will discuss on the values of  $\bar{E}$  and  $\bar{\rho}$ . It seems that the density of electrons in a ionized channel is about  $10^{10} part.m^{-3}$ . Hence we take  $\bar{\rho} = 10^{10}$ . When the air is not ionized, the charge density is much smaller, and we choose :  $\bar{\rho} = 1$ .

For the boundary conditions

$$\nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega \bar{\omega} \mu_0 \frac{\bar{L}}{\bar{E}} \bar{H}_d H_d(x, z) \times e_2, \quad (2.56)$$

we want  $\bar{\omega} \mu_0 \frac{\bar{L}}{\bar{E}} \bar{H}_d$  to be order 1. In the context of the case  $\bar{\omega} = 10^6 rad/s$ , the magnetic field magnitude can be seen as the magnetic field induced by a peak of current

$$\bar{H}_d = \frac{I}{2\pi r}, \quad (2.57)$$

with current intensity  $I = 200 kA$  and for exemple  $r = 1 cm$  see Figure 2.2

then the characteristic electric field is equal to  $\bar{E} = 20 kV/m$ . The dimensionless boundary conditions (2.40) on  $\Gamma_d$  writes :

$$\nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega H_d(x, z) \times e_2, \quad (2.58)$$



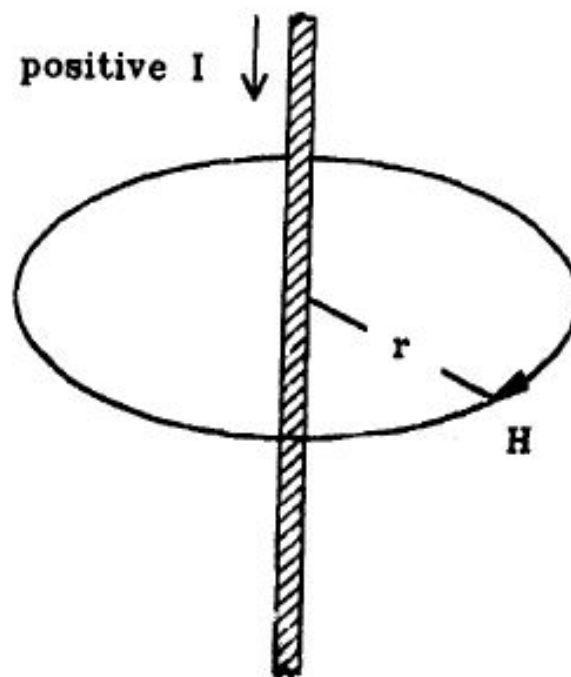


FIGURE 2.2 – Magnetic field induced by a peak of current.

In the same way, on  $\Gamma_L$ , we have

$$\nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = 0. \quad (2.59)$$

For the magnetic field, we obtain

$$H(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i\omega} \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.60)$$

with  $\bar{E} = 20 \text{ kV/m}$ .

From the physical spatial coordinates  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \tilde{\Omega}$  we define  $\mathbf{y} = (\xi, \nu, \zeta)$  with  $\xi = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon}$ ,  $\nu = \frac{\tilde{y}}{\varepsilon}$ ,  $\zeta = \frac{\tilde{z}}{\varepsilon}$  or equivalently  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ ,  $\nu = \frac{y}{\varepsilon}$ ,  $\zeta = \frac{z}{\varepsilon}$ . And we now introduce  $Y$ , the basic cell. It is built from :  $Z = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 0] \times \mathbb{R}$  and the set  $C = D \times \mathbb{R}$  with the disc  $D$  defined by :

$$D = \{(\xi, \nu) \in \mathbb{R}^2 / \xi^2 + (\nu + \frac{1}{2})^2 < R^2\}, \quad (2.61)$$

and  $R = \frac{\alpha}{2}$ . The set  $\Omega_c$  is then defined as :

$$\Omega_c = \{(i, j, 0) + C, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^-\}. \quad (2.62)$$

We denote  $Y_r$  as  $Y_r = Z \setminus C$  and then the set

$$\Omega_r = \{(i, j, 0) + Y_r, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^-\}. \quad (2.63)$$

Then unit cell  $Y$  is defined as  $Y = (Y_r, C)$ . Finally, we define the domain  $\Omega_a$  :

$$\Omega_a = \{\mathbf{y} = (\xi, \nu, \zeta) / \nu > 0\}. \quad (2.64)$$

Using this, we will give a new expression of the sets in which the variables range in equations (2.50). We see the following :

$$(\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_r \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{P}, \\ (\frac{\bar{L}x}{\varepsilon}, \frac{\bar{L}y}{\varepsilon}, \frac{\bar{L}z}{\varepsilon}) \in \Omega_r, \end{cases} \quad (2.65)$$

*i.e.*

$$(\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_r \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{P}, \\ (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}) \in \Omega_r. \end{cases} \quad (2.66)$$

In the same way :

$$(\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_c \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{P}, \\ (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}) \in \Omega_c, \end{cases} \quad (2.67)$$

and :

$$0 \leq \bar{L}y \leq d \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^2 \\ \bar{L}y \leq d, \end{cases} \quad (2.68)$$

or

$$(\bar{L}x, \bar{L}y, \bar{L}z) \in \tilde{\Omega}_a \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{L}y \leq d \\ (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}) \in \Omega_a. \end{cases} \quad (2.69)$$

We define :

$$\Sigma^\varepsilon(\mathbf{y}) = \Sigma^\varepsilon(\xi, \nu, \zeta) = \begin{cases} \Sigma_a^\varepsilon & \text{in } \Omega_a, \\ \Sigma_r^\varepsilon & \text{in } \Omega_r, \\ \Sigma_c^\varepsilon & \text{in } \Omega_c, \end{cases} \quad (2.70)$$

where  $\Sigma_a^\varepsilon = \frac{\sigma_a \bar{L}^2}{\sigma \delta^2}$ ,  $\Sigma_r^\varepsilon = \frac{\sigma_r \bar{L}^2}{\sigma \delta^2}$  and  $\Sigma_c^\varepsilon = \frac{\sigma_c \bar{L}^2}{\sigma \delta^2}$  have their expressions in term of  $\varepsilon$  given from Tables above depending on the case we are interested in. The detail of this expressions are in appendix 7.2.5. The model studied corresponds to the case  $\bar{\omega} = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon$ ,  $\Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4$  and  $\Sigma_c^\varepsilon = 1$ . Which corresponds to say that, at the scale of the composite material, the conductivity of the carbon is of order 1, and the conductivity of the resin is of order  $\varepsilon^4$ .

Defining also mapping

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

we can set  $\Omega_a^\varepsilon$  as  $\psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_a) \cap (\mathbb{R} \times [0, \frac{d}{L}] \times \mathbb{R})$ ,  $\Omega_r^\varepsilon$  as  $\psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_r) \cap \tilde{P}$  and  $\Omega_c^\varepsilon$  as  $\psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_c) \cap \tilde{P}$ . We also define the boundaries  $\Gamma_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, y = \frac{d}{L}\}$  and  $\Gamma_L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, y = -\bar{L}\}$  and interfaces  $\Gamma_{ra} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$  and  $\Gamma_{cr}^\varepsilon = \partial\Omega_c$ . Hence equation (2.50) reads :

$$\nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon^* + i \omega \sigma^\varepsilon(x, y, z)) E^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.72)$$

where  $\Omega = \Omega_a^\varepsilon \cup \Omega_r^\varepsilon \cup \Omega_c^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, -1 < y < \frac{d}{L}\}$  does not depend on  $\varepsilon$ . Only its partition in  $\Omega_a^\varepsilon$ ,  $\Omega_r^\varepsilon$  and  $\Omega_c^\varepsilon$  is  $\varepsilon$ -dependent where

$$\sigma^\varepsilon(x, y, z) = \Sigma^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\right), \quad (2.73)$$

with  $\Sigma^\varepsilon$  given by 2.70 and

$$\varepsilon^\eta = \frac{4\pi^2 \bar{L}^2}{\lambda^2}, \quad (2.74)$$

with the value of  $\eta \geq 0$  extracted from Tables, and where we replace  $E$  by  $E^\varepsilon$ , to clearly state that it depends on  $\varepsilon$ .

Equation (2.72) is provided with the following boundary conditions :

$$\nabla \times E^\varepsilon \times e_2 = -i\omega H_d \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \quad (2.75)$$

and,

$$\nabla \times E^\varepsilon \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L. \quad (2.76)$$

From (2.72) we can deduce the condition on the divergence of  $E^\varepsilon$  which can be written in two ways. As previously in (2.36), (2.37) and (2.38) we obtain :

$$\nabla \cdot [(-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon^* + i\omega \sigma^\varepsilon) E^\varepsilon] = 0 \text{ in } \Omega, \quad (2.77)$$

which will be preferentially used with (2.72) and its second one is

$$\nabla \cdot E^\varepsilon_{|\Omega_a^\varepsilon} = 0 \text{ in } \Omega_a^\varepsilon, \quad \nabla \cdot E^\varepsilon_{|\Omega_r^\varepsilon} = 0 \text{ in } \Omega_r^\varepsilon, \quad \nabla \cdot E^\varepsilon_{|\Omega_c^\varepsilon} = 0 \text{ in } \Omega_c^\varepsilon, \quad (2.78)$$

with the transmission conditions on the interfaces  $\Gamma_{ra}$  and  $\Gamma_{cr}^\varepsilon$

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \Sigma_a^\varepsilon) E^\varepsilon_{|\Omega_a^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_a^\varepsilon} &= (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon_{|\Omega_r^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_r^\varepsilon} \text{ on } \Gamma_{ra}, \\ (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon_{|\Omega_r^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_r^\varepsilon} &= (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon) E^\varepsilon_{|\Omega_c^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_c^\varepsilon} \text{ on } \Gamma_{cr}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Before treating mathematically the question we are interested in, we make a last simplification. Since it seems clear that physical relevant phenomena occur in the upper part of the plate. The boundary condition on the lower boundary of the plate has very little influence on the physics of what happens in the upper part, we consider that the lower boundary of  $\Omega$  is located in  $y = -\infty$  in place of  $y = -1$ , making the second boundary condition useless. Besides, as  $\bar{L}$  and  $d$  are of the same order it seems reasonable to set  $\Gamma_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, y = 1\}$  and consequently

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, y < 1\} = \Omega_a^\varepsilon \cup \Omega_r^\varepsilon \cup \Omega_c^\varepsilon, \text{ with,} \\ \Omega_a^\varepsilon = \psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_a), \\ \Omega_r^\varepsilon = \psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_r), \\ \Omega_c^\varepsilon = \psi_\varepsilon^{-1}(\Omega_c), \end{array} \right. \quad (2.80)$$

with  $\psi_\varepsilon$  defined in (2.71). We have that the border of  $\Omega$  is  $\Gamma_d$ .

In the following section we will establish the existence and uniqueness from the general point of view for

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i \omega \Sigma_a^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_a^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r + i \omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_r^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_c + i \omega \Sigma_c^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_c^\varepsilon. \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega H_d(x, z) \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L. \end{array} \right. \quad (2.81)$$

We recapitulate the homogenized problem that we will study and simulate later in this thesis.

We model the propagation of the electromagnetic field, induced by a peak of current in the air become electrically conductive, and the composite material whose epoxy resin was loaded in nanoparticle and became also electrically conductive.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon - \omega^2 \varepsilon^5 \varepsilon^* E^\varepsilon + i\omega [(\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon = 0, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = -i\omega H_d(x, z) \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}, \omega) \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L, \end{array} \right. \quad (2.82)$$

where for a given set  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{1}_\mathcal{A}$  stands for the characteristic function of  $\mathcal{A}$  and where  $\mathbf{1}_\mathcal{A}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , hence  $\mathbf{1}_C^\varepsilon$  and  $\mathbf{1}_R^\varepsilon$  are the characteristic functions of the sets filled by carbon fibers and by resin. And for the magnetic field

$$H^\varepsilon = -\frac{1}{i\omega} \nabla \times E^\varepsilon. \quad (2.83)$$



# **MATHEMATICAL ANALYSIS OF THE MODELS**

---





### 3.1 Preliminaries

We are going to make precise the variational formulation. First of all, we need to introduce the following functional spaces. We have the standard function spaces  $\mathbf{L}^2(\Omega^\varepsilon) = [L^2(\Omega^\varepsilon)]^3$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) &= \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \times u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) &= \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\},\end{aligned}\quad (3.1)$$

with the usual norms :

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)}^2 &= \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2, \\ \|u\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 &= \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\quad (3.2)$$

They are well known Hilbert spaces.

We define the next space :

$$\mathbf{X}(\Omega) = \{u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \mid \nabla \cdot u|_{\Omega_a^\varepsilon} \in L^2(\Omega_a^\varepsilon), \nabla \cdot u|_{\Omega_r^\varepsilon} \in L^2(\Omega_r^\varepsilon), \nabla \cdot u|_{\Omega_c^\varepsilon} \in L^2(\Omega_c^\varepsilon)\}. \quad (3.3)$$

Our variational space is :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) &= \{u \in \mathbf{X}(\Omega) \mid (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \sigma_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon)u|_{\Omega_a^\varepsilon} \cdot e_2 = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r + i\omega \sigma_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot e_2, \\ &\quad (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r + i\omega \sigma_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_c + i\omega \sigma_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon)u|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Finally

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) &= \{u \in \mathbf{X}(\Omega) \mid (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \Sigma_a^\varepsilon)u|_{\Omega_a^\varepsilon} \cdot e_2 = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot e_2, \\ &\quad (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon)u|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot n_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon\}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

This space is equipped with the norm

$$\|u\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot u|_{\Omega_a^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_a^\varepsilon)}^2 + \|\nabla \cdot u|_{\Omega_r^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_r^\varepsilon)}^2 + \|\nabla \cdot u|_{\Omega_c^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_c^\varepsilon)}^2 + \|\nabla \times u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2.$$

#### Trace space

On the boundary we have the  $L^2$  spaces

$$\begin{cases} L^2(\Gamma, \mathbb{R}^3) = \{u : \int_{\Gamma} |u(x)|^2 d\sigma < \infty\} \\ L_t^2(\Gamma, \mathbb{R}^3) = \{u : n \cdot u = 0 \text{ and } \int_{\Gamma} |u(x)|^2 d\sigma < \infty\} \end{cases} \quad (3.6)$$

where  $d\sigma$  is the surface measure of  $\Gamma$ .

We introduce the trace spaces  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma)$  and  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$  defined by

$$H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) = \{u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3), (n \cdot u)|_{\Gamma} = 0, \text{div}_{\Gamma} u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3)\} \quad (3.7)$$

and

$$H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma) = \{u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3), (n \cdot u)|_{\Gamma} = 0, \text{curl}_{\Gamma} u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3)\}. \quad (3.8)$$

We recall the trace theorems, see J.C Nédélec [32] for the demonstration, stating that the traces mappings

$\gamma_T : \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma)$ , that assigns to any  $u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  its tangential components  $n \times (u \times n)$ , is continuous and surjective, that is :

$$\|\gamma_T(u)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma)} \leq C_{\gamma_T} \|u\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)}, \quad \forall u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$$

$\gamma_t : \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$ , that assigns to any  $u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  its tangential components  $u \times n$ , is continuous and surjective :

$$\|\gamma_t(u)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} \leq C_{\gamma_t} \|u\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)}, \quad \forall u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega).$$

Moreover,  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$  is the dual of  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma)$  and one has the Green's formula :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times u \cdot V - u \cdot \nabla \times V) dx = \langle u \times n, V_T \rangle_{\Gamma} \quad \forall (u, V) \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega). \quad (3.9)$$

## 3.2 Weak formulation

Now, we introduce the variational formulation of our problem (2.72), (2.75) and (2.76) for the electric field. Integrating (2.72) over  $\Omega$  and using the Green's formula and (2.75) we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \times E^{\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_a^{\varepsilon}} (-\omega^2 \varepsilon^n + i\omega \Sigma_a^{\varepsilon}) E^{\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_c^{\varepsilon}} (-\omega^2 \varepsilon^n \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^{\varepsilon}) E^{\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^{\varepsilon}} (-\omega^2 \varepsilon^n \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^{\varepsilon}) E^{\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot \bar{V}_T \, d\sigma \end{aligned} \quad (3.10)$$

where  $\bar{V}$  is the complex conjugate of  $V$  and  $V_T = (e_2 \times V) \times e_2$ . We introduce the sesquilinear form depending on parameters  $\eta$  and  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } E^\varepsilon, V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega), \\ a^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, V) = \int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=a,r,c} \int_{\Omega_i^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_i + i\omega \Sigma_i^\varepsilon) E^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Hence, the weak formulation of (2.72), (2.75) and (2.76) that we will use is the following :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } E^\varepsilon \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) \text{ such as } \forall V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) \text{ we have :} \\ a^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, V) = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot \bar{V}_T \, d\sigma. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Integrating by parts in the variational formulation (3.10), we find the following transmission problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \Sigma_a^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_a^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_r^\varepsilon, \\ \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon + (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon) E^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_c^\varepsilon. \\ E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \times e_2 = E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon} & \text{on } \Gamma_{ra}, \\ E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon} = E_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_c^\varepsilon} & \text{on } \Gamma_{cr}, \\ \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \times e_2 = \nabla \times E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon} & \text{on } \Gamma_{ra}, \\ \nabla \times E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon} = \nabla \times E_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_c^\varepsilon} & \text{on } \Gamma_{cr}, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

where  $e_2$  is the unit outward normal to  $\Omega_a^\varepsilon$ ,  $n_{|\Omega_r^\varepsilon}$  is the unit outward normal to  $\Omega_r^\varepsilon$  and  $n_{|\Omega_c^\varepsilon}$  is the unit outward normal to  $\Omega_c^\varepsilon$ . We refer to Annex 7.2.6 for the proof that transmission problem (3.13) is equivalent to ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)).

### 3.2.1 Regularized Maxwell equations for the electric field

The sesquilinear form  $a^{\varepsilon, \eta}$  is not coercive on  $\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)$ , so we regularize it adding terms involving the divergence of  $E^\varepsilon$  in  $\Omega_a^\varepsilon$ ,  $\Omega_r^\varepsilon$  and  $\Omega_c^\varepsilon$ . Thanks to the additional terms, existence and uniqueness of the regularized variational formulation solution will be established by the Lax-Milgram theory. Let  $s$  be an arbitrary positive number, we define the regularized formulation of problem (3.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } E^\varepsilon \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) \text{ such that for any } V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega) \\ a_R^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, V) = a^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, V) + s \int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ + s \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + s \int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot \bar{V}_T \, d\sigma. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

For any  $\varepsilon > 0$  and any  $\eta \geq 0$ , sesquilinear form  $a_R^{\varepsilon,\eta}(\cdot, \cdot)$  is continuous over  $\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)$  thanks to the continuity conditions. We will show that it is also coercive. The following proposition was inspired by article [18] Lemma 1.1.

**Proposition 3.2.1.** *For any  $\varepsilon > 0$ , for any  $\eta \geq 0$  and for any  $s > 0$ , there exists a positive constant  $\omega_0$  which does not depend on  $\varepsilon$  and such that for all  $\omega \in (0, \omega_0)$ , there exists a positive constant  $C_0$  depending on  $\varepsilon_r, \varepsilon_c, s, \omega$  but not on  $\varepsilon$  such that :*

$$\forall E^\varepsilon \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega), \quad \Re[\exp(-i\frac{\pi}{4}) a_R^{\varepsilon,\eta}(E^\varepsilon, E^\varepsilon)] \geq C_0 \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2 \quad (3.15)$$

*Démonstration.* We have :

$$\begin{aligned} \Re[\exp(-i\frac{\pi}{4}) a_R^{\varepsilon,\eta}(E^\varepsilon, E^\varepsilon)] &= a_R^\varepsilon(E^\varepsilon, E^\varepsilon) - \int_{\Omega_a^\varepsilon} \omega^2 \varepsilon^\eta |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega_r^\varepsilon} \omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_c^\varepsilon} \omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_c |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

with

$$\begin{aligned} a_R^\varepsilon(E^\varepsilon, E^\varepsilon) &= \int_{\Omega} |\nabla \times E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + s \int_{\Omega_a^\varepsilon} |\nabla \cdot E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \\ &+ s \int_{\Omega_r^\varepsilon} |\nabla \cdot E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + s \int_{\Omega_c^\varepsilon} |\nabla \cdot E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_a^\varepsilon} \omega \Sigma_a^\varepsilon |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} \omega \Sigma_r^\varepsilon |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_c^\varepsilon} \omega \Sigma_c^\varepsilon |E^\varepsilon|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

We have the following estimate :

$$|a_R^\varepsilon(E^\varepsilon, E^\varepsilon)| \geq \min\{1, \omega, s\} \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2. \quad (3.18)$$

Returning to formulation (3.15), for  $\eta \geq 0$ , since  $\max(\Sigma_a^\varepsilon, \Sigma_r^\varepsilon, \Sigma_c^\varepsilon) > \varepsilon^\eta$ , inequality (3.15) is valid with  $C_0 = \min\{1, \omega, s\}$  as soon as  $\omega^2 \min\{1, \varepsilon_r, \varepsilon_c\} < \min\{1, \omega, s\}$  or  $\omega < \sqrt{\frac{\min\{1, \omega, s\}}{\min\{1, \varepsilon_r, \varepsilon_c\}}}$ . This ends the proof of Proposition 3.2.1.  $\square$

Thanks to Proposition 3.2.1 we can state the existence and uniqueness of the solution to regularized problem (3.14).

**Theorem 3.2.2.** *Under the assumptions of Proposition 3.2.1, there exists a unique solution  $E^\varepsilon$  to regularized problem (3.14).*

*Démonstration.* The sesquilinear form  $a_R^{\varepsilon,\eta}$  is continuous, bounded, coercive thanks to Proposition 3.2.1 and the right hand side is continuous on  $X^\varepsilon(\Omega)$ , then problem (3.14) has a unique solution in  $X^\varepsilon(\Omega)$  thanks to the Lax-Milgram Lemma.  $\square$

### 3.3 Existence, uniqueness and estimate

**Theorem 3.3.1.** *For any  $\varepsilon > 0$ , for any  $\eta \geq 0$ , there exists a positive constant  $\omega_0$  which does not depend on  $\varepsilon$  and such that for all  $\omega \in (0, \omega_0)$ , there exists a unique solution of (3.13) or ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)).*

*Démonstration.* We show that for an appropriate choice of  $s$  that  $E^\varepsilon$  satisfies all equations (3.13) or ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)). It is obvious that any solution of (3.13) or of ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)) is also solution to (3.14). Indeed, since from (3.13) or from ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)) we have  $\nabla \cdot E|_{\Omega_a^\varepsilon} = 0$ ,  $\nabla \cdot E|_{\Omega_r^\varepsilon} = 0$ ,  $\nabla \cdot E|_{\Omega_c^\varepsilon} = 0$ , the additional terms  $s \int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + s \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + s \int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \cdot E^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x}$  cancel in (3.14).

Uniqueness follows from that if  $E_1^\varepsilon$  and  $E_2^\varepsilon$  are two solutions to (2.72) with the boundary condition (2.76) their difference  $e^\varepsilon = E_2^\varepsilon - E_1^\varepsilon$  satisfies the problem (2.72) with (2.76). Then it comes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \times e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_a^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \Sigma_a^\varepsilon) |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega_c^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon) |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon) |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} \\ = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Taking the imaginary part of the expression we get  $\int_{\Omega_a^\varepsilon} \omega \Sigma_a^\varepsilon |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_c^\varepsilon} \omega \Sigma_c^\varepsilon |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} \omega \Sigma_r^\varepsilon |e^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} = 0$  and then  $e^\varepsilon = 0$ .

Let us consider the reciprocal assertion, according to the same proof of S. Hassani, S. Nicaise, A. Maghnooui in [36], we define  $H_0^1(\Omega_c^\varepsilon, \Delta)$  the subspace of  $\psi \in H_0^1(\Omega_c^\varepsilon)$  such that  $\Delta(\psi) \in L^2(\Omega_c^\varepsilon)$ .

Let  $E_s^\varepsilon$  be the solution of the regularized formulation (3.14). In (3.14) we take a test function  $V = \nabla \psi$  where  $\psi \in H_0^1(\Omega_c^\varepsilon, \Delta)$ , extended by zero outside  $\Omega_c^\varepsilon$ . We get :

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} s \nabla \cdot E_s^\varepsilon \nabla \cdot (\nabla \psi) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_c^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon) E_s^\varepsilon \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.20)$$

By Green's formula,  $\forall \psi \in H_0^1(\Omega_c^\varepsilon, \Delta)$ , we obtain :

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \cdot E_s^\varepsilon (\Delta \psi + \frac{\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c - i\omega \Sigma_c^\varepsilon}{s} \psi) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.21)$$

Thus, if we choose  $s$  such that  $\frac{\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c - i\omega \Sigma_c^\varepsilon}{s}$  is not an eigenvalue of  $(\Delta_{dir}, \Omega_c^\varepsilon)$  : the Laplacian operator in  $\Omega_c^\varepsilon$  with Dirichlet condition on its boundary, then for all  $\varphi \in L(\Omega_c^\varepsilon)^2$  there exists  $\psi \in H_0^1(\Omega_c^\varepsilon, \Delta)$  solution of

$$\Delta \psi + \frac{\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c - i\omega \Sigma_c^\varepsilon}{s} \psi = \varphi. \quad (3.22)$$

Then, we conclude that

$$\nabla \cdot E_s^\varepsilon|_{\Omega_c^\varepsilon} = 0. \quad (3.23)$$

A similar argument in  $\Omega_a^\varepsilon$  yields  $\nabla \cdot E_s^\varepsilon|_{\Omega_a^\varepsilon} = 0$  for  $s$  such that  $\frac{\omega^2 \varepsilon^\eta - i\omega \Sigma_a^\varepsilon}{s}$  is not an eigenvalue of  $(\Delta_{dir}, \Omega_a^\varepsilon)$ . In the same way, we obtain in  $\Omega_r^\varepsilon$ ,  $\nabla \cdot E_s^\varepsilon|_{\Omega_r^\varepsilon} = 0$  with  $s$  such that  $\frac{\omega^2 \varepsilon^\eta \varepsilon_r - i\omega \Sigma_r^\varepsilon}{s}$  is not an eigenvalue of  $(\Delta_{dir}, \Omega_r^\varepsilon)$ .

Hence  $\nabla \cdot E_s^\varepsilon = 0$  in  $\Omega_c^\varepsilon$ , this cancels the additional term  $s \int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \cdot E_s^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x}$  in (3.14). In the same way,  $\nabla \cdot E_s^\varepsilon = 0$  in  $\Omega_r^\varepsilon$  and  $\nabla \cdot E_s^\varepsilon = 0$  in  $\Omega_a^\varepsilon$  cancel  $s \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \cdot E_s^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x}$  and  $s \int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \cdot E_s^\varepsilon \nabla \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x}$  in (3.14). So, (3.14) becomes (3.10). Applying Green's formula, we find (2.72).  $\square$

**Theorem 3.3.2.** *Under the assumptions of Theorem 3.2.2,  $E^\varepsilon \in X^\varepsilon(\Omega)$  solution of (3.14) satisfies*

$$\|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)} \leq C \quad (3.24)$$

with  $C = \frac{C_{\gamma_t} C_{\gamma_T}}{C_0} \|H_d\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$

*Démonstration.* The sesquilinear form  $a_R^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, V)$  is coercive, weak formulation (3.14) becomes :

$$\begin{aligned} C_0 \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2 &\leq \Re(\exp(-i\frac{\pi}{4}) a_R^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, E^\varepsilon)) \\ &\leq |\exp(-i\frac{\pi}{4}) \cdot a_R^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, E^\varepsilon)| = |a_R^{\varepsilon, \eta}(E^\varepsilon, E^\varepsilon)| \\ &\leq \left| \int_{\Gamma_d} -i\omega H_d \times e_2 \cdot E_T^\varepsilon \, d\sigma \right| \quad (3.25) \\ &\leq \|H_d \times e_2\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_d)} \|E_T^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}, \Gamma_d)} \\ &\leq C_{\gamma_t} C_{\gamma_T} \|H_d\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)} \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)} \end{aligned}$$

We have

$$\|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2 \leq C \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)} \leq C \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}. \quad (3.26)$$

and then

$$\|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}^2 \leq C \|E^\varepsilon\|_{\mathbf{X}^\varepsilon(\Omega)}. \quad (3.27)$$

We conclude 3.24 with  $C = \frac{C_{\gamma_t} C_{\gamma_T}}{C_0} \|H_d\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$   $\square$

# HOMOGENIZATION BY ASYMPTOTIC ANALYSIS

---





The emergence in the industry of composite material has brought out a new branch of mathematic : the homogenization. With the internal microstructure, the composite materials are complex and difficult to study in the theoretical and numerical domains. The goal of homogenization theory is to justify that the behavior of the composite structure is comparable to a new homogeneous medium and to identify a homogenized medium. In our model we consider a composite material whose heterogeneity is represented by a periodic microstructure. The period is described by the small parameter  $\varepsilon$ .

Assuming that the sequence  $E^\varepsilon$  converges towards a limit  $E$ , we try to identify the problem homogenized in  $E$ , it is deduced by passing to the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . This processus is called homogenization.

First, the homogenized problem will be obtained through the classical method of asymptotic development at two scales. This method is based on the assumption of periodicity of the geometry of the composite material. In the second part, to rigorously justify mathematically and establish the convergence of the model, we use the two-scale convergence method. see Allaire [6], and Nguetseng [34]. This method combines the two stages of a classical homogenization by proving both the existence of the asymptotic development and the convergence towards the solution of the homogenized problem.

## 4.1 Asymptotic expansion

Asymptotic analysis consists to study the influence of the small parameter  $\varepsilon$  on the solution of the mathematical problem. It leads to a great loss of precision in numerical simulation in the region where the small parameter produces disturbances. Asymptotic analysis is used in cases where two levels of space are distinguished phenomena, in order to see in the numerical simulations the microscopic phenomena that occur at the level of the microstructure. Thanks to the asymptotic analysis, local phenomena will be taken into account. Asymptotic analysis corresponds to split the coordinate system  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  into a fine scale coordinate system  $\mathbf{y} = (\xi, \nu, \zeta)$  where  $(\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \nu = \frac{y}{\varepsilon}, \zeta = \frac{z}{\varepsilon})$  for capturing the oscillations of the solution. It should be noted the smaller the value of  $\varepsilon$ , the more the asymptotic analysis will give a better description of the phenomena.

If we place in the context of the case 6 with  $\delta > L$  and  $\bar{\omega} = 10^6 \text{rad.s}^{-1}$ , then we have  $\eta = 5$  and  $\Sigma^\varepsilon$ , which depends on the conductivity of the domain and the characteristic skin thickness, is the coefficient of conductivity at the point  $\mathbf{x}$  with high contrast. The medium is composed by a low-conductive resin and conductive fibers, periodically distributed.  $\sigma^\varepsilon$  takes the value of the conductivity where  $\mathbf{x}$  is respectively in the resin and the fiber in the small period  $\varepsilon$ , then  $\sigma^\varepsilon$  oscillates rapidly. Then  $\Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon$ ,  $\Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4$ ,  $\Sigma_c^\varepsilon = 1$  which gives the following equation :

**Remark 4.1.1.** We recall that  $\epsilon_c$  and  $\epsilon_r$  are respectively the relative permittivity of the

carbon fibers and the resin. You should not confused with the microscopic scale  $\varepsilon$ .

We want to resolve the following problem :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon - \omega^2 \varepsilon^5 \varepsilon^* E^\varepsilon + i\omega[(\mathbf{1}_C(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}))\mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}]E^\varepsilon = 0 \\ \nabla \times u^\varepsilon \times e_2 = -i\omega H_d \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla \times u^\varepsilon \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L. \end{cases} \quad (4.1)$$

Asymptotic analysis consists to make a formal calculation by looking for solutions in the form of asymptotic expansions such that :

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(\mathbf{x}) &= E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{x}$  is the macroscopic variable and  $\mathbf{y}$  the microscopic variable and where the functions  $E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  are  $\mathcal{Z}$  periodic in  $\mathbf{y}$ .

By inserting 4.2 in the equations of the problem 4.1 and by identifying the power of  $\varepsilon$ , we deduce the result main of this section and we have the following Theorem :

**Theorem 4.1.2.** *Under assumptions of Theorem 3.3.2, sequence  $E^\varepsilon$  solution of (3.14) or (3.13) or ((2.72), (2.75), (2.76), (2.78)) converges to  $E(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  which is the unique solution of the homogenized problem :*

$$\begin{cases} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) + i\omega \theta_2 E(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \Omega, \\ \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \times e_2 = -i\omega H_d \times e_2 \text{ on } \Gamma_d, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \times e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_L. \end{cases} \quad (4.3)$$

with  $\theta_1 = \int_{\mathcal{Z}} \text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$  and  $\theta_2 = \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{1}_C(\mathbf{y})(\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}$ .

And where the vector field  $\chi_j = (\chi_1$  is the unique solution, up to an additive constant in the Hilbert space of  $\mathcal{Z}$  periodic functions  $H_{\#}^1(\mathcal{Z})$ , of the following boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}}(\chi_j(\mathbf{y})) = 0 \text{ in } \mathcal{Z} \setminus \partial\Omega_C, \\ \left[ \frac{\partial \chi_j}{\partial n} \right] = -n_j \text{ on } \partial\Omega_C, \\ \int_{\mathcal{Z}} \chi_j \, d\mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

where  $[f]$  is the jump across the surface of  $\partial\Omega_C$ ,  $n_j$ ,  $j = \{1, 2, 3\}$  is the projection on the axis  $e_j$  of the normal of  $\partial\Omega_C$ .

*Démonstration.* We assume that  $(E^\varepsilon, H^\varepsilon)$  satisfies the following asymptotic expansion, as  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$E^\varepsilon(\mathbf{x}) = E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 E_2(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \dots, \quad (4.5)$$

$$H^\varepsilon(\mathbf{x}) = H_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon H_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 H_2(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \dots, \quad (4.6)$$

where for any  $k \in \mathbb{N}$   $E_k = E_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $H_k = H_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  are considered as  $\mathcal{Z}$ -periodic functions with respect to  $\mathbf{y}$ . Applied to functions  $E_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  and  $H_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , the curl operator becomes  $\nabla_{\mathbf{x}} \times E_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times E_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  and  $\nabla_{\mathbf{x}} \times H_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times H_k(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ . Plugging (4.5) and (4.6) in the formulations (4.1), gathering the coefficients with the same power of  $\varepsilon$ , we get :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ + \frac{1}{\varepsilon} [\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})] \\ + \varepsilon^0 [\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})] \\ + \varepsilon [\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_2(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_3(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + i\omega \mathbf{1}_{\{y > 0\}} E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})] + \dots = 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

In order to write what is in factor of  $\varepsilon$  in the last equation we used that :  $\mathbf{1}_{\{y < 0\}} = \mathbf{1}_{\{\frac{y}{\varepsilon} < 0\}}$ . Since (4.7) is considered as true for any small  $\varepsilon$  it gives a cascade of equations, from which we extract the four first equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\omega \mathbf{1}_{\{\nu > 0\}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Applying  $\text{div}_{\mathbf{y}}$  in the last two equations in (4.8), we obtain

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0, \quad (4.9)$$

and

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (i\omega (\mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{1}_{\{\nu > 0\}}) E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0. \quad (4.10)$$

The boundary conditions write :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \right) \times e_2 \\ = -i\omega H_d \times e_2, \quad \mathbf{x} \in R^3, \mathbf{y} \in \mathcal{Z}, \text{ on } \Gamma_d, \\ \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \right) \times e_2 \\ = 0, \quad \mathbf{x} \in R^3, \mathbf{y} \in \mathcal{Z}, \text{ on } \Gamma_L \end{array} \right. \quad (4.11)$$

For the magnetic field  $H$ , plugging (4.6) in the expression  $H^\varepsilon(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega} \nabla_{\mathbf{x}} \times E^\varepsilon(\mathbf{x})$  we obtain :

$$H_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon H_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \dots = -\frac{1}{i\omega} \nabla_{\mathbf{x}} \times (E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \dots) \quad (4.12)$$

which gives

$$H_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = -\frac{1}{i\omega} \nabla_{\mathbf{x}} \times (E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \quad (4.13)$$

Taking the the divergence equation of 4.13 implies

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (4.14)$$

Now for the electric field, we take the first equation of (4.8) and the equation (5.33) to obtain :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{i\omega(\mathbf{1}_C(\mathbf{y})\mathbf{1}_{\{\nu < 0\}})E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = 0. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Multiplying the first equation in (4.15) by the conjugate of  $E_0$  and integrating by parts over  $\mathcal{Z}$  leads to

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathcal{Z}} |\nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \, d\mathbf{y} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

We deduce that the first equation in (4.15) is equivalent to

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (4.17)$$

for any  $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$ . Hence from Lemma 5.10 we conclude that  $E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  can be decomposed as

$$E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.18)$$

where the potential  $\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z}))$  and  $E(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . And where

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{Z}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.19)$$

Now we are looking for  $\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , injecting the form of the solution of the electric field (5.32) in the second equality (4.15) leads to

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} (E(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right) = 0. \quad (4.20)$$

Defining the vector field  $\chi(\mathbf{y}) = (\chi_1(\mathbf{y}), \chi_2(\mathbf{y}), \chi_3(\mathbf{y}))$  with for  $i \in \{1, 2, 3\}$   $\chi_i(\mathbf{y})$  in  $\mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z}) \setminus \mathbb{R}$ . We separate the variables in the form

$$\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y}) \cdot E(\mathbf{x}), \quad (4.21)$$

Finally we have the solution

$$E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( Id + \nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y}) \right) E(\mathbf{x}), \quad (4.22)$$

where  $Id$  is the identity matrix and  $\nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y})$  denotes the Jacobian. This means

$$E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( Id + \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1(\mathbf{y})}{\partial \xi} & \frac{\partial \chi_1(\mathbf{y})}{\partial \nu} & \frac{\partial \chi_1(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \chi_2(\mathbf{y})}{\partial \xi} & \frac{\partial \chi_2(\mathbf{y})}{\partial \nu} & \frac{\partial \chi_2(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \chi_3(\mathbf{y})}{\partial \xi} & \frac{\partial \chi_3(\mathbf{y})}{\partial \nu} & \frac{\partial \chi_3(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \right) E(\mathbf{x}). \quad (4.23)$$

Inserting in the divergence equation 4.22 we have

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (Id + \nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y})) E(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (4.24)$$

which gives, up to an additive constant, the cell problem (5.47) :

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}}(\chi_j(\mathbf{y})) = 0 & \text{in } \mathcal{Z} \setminus \partial\Omega_C, \\ \left[ \frac{\partial \chi_j}{\partial n} \right] = -n_j & \text{on } \partial\Omega_C, \\ \int_{\mathcal{Z}} \chi_j d\mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

What remains to be done in order to be able to characterize  $E_0$  is to set out a well-posed problem for  $E(\mathbf{x})$ . This is what we do now considering the information coming from the second equations of (4.8), since  $\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times = \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times$  we have :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\omega \mathbf{1}_{\{\nu > 0\}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Using equation (4.22), since  $\nabla_{\mathbf{y}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times (Id + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))E(\mathbf{x})) = 0$  we have

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0. \quad (4.27)$$

Then (4.26) is reduced to

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\{\nu < 0\}} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\omega \mathbf{1}_{\{\nu > 0\}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

In the same way as above, we can apply again Proposition 5.1.9 to get the decomposition of  $E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Analogously, then there exists a scalar function  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z}))$  such that

$$E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x})^{\sharp} + \nabla_{\mathbf{y}}\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.29)$$

where  $E(\mathbf{x})^{\sharp} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Making the same as previously, we deduce that

$$E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (Id + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))E(\mathbf{x})^{\sharp}. \quad (4.30)$$

The third equation in (4.8) gives :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\nu < 0} \cdot E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

which is an equation for  $E_2$ . If we integrate the left hand side of (4.31) over  $\mathcal{Z}$  and using the periodicity of  $E_2$  with respect to  $\mathbf{y}$ , we obtain

$$\int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0, \quad (4.32)$$

which implies a zero average for the right hand side of (4.31). Integrating (4.8) on  $\mathcal{Z}$  we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\nu < 0} \cdot E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Plugging the forms (4.22) of  $E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  and (4.30) of  $E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  into (4.33) - (4.11), and since  $\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , we obtain the following homogenized problem :

$$\begin{cases} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) + i\omega \theta_2 \cdot E(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \nabla_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) \times e_2 = -i\omega H_d \times e_2 & \text{on } \mathbb{R} \times \Gamma_d \\ \nabla_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) \times e_2 = 0 & \text{on } \mathbb{R} \times \Gamma_L \end{cases} \quad (4.34)$$

where  $\theta_1 = \int_{\mathcal{Z}} (Id + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}$  and  $\theta_2 = \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (Id + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}$ .

**Lemma 4.1.3.** *The homogenized problem (4.34) has a unique solution in  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ .*

*Démonstration.* For any test function  $V \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ , the variational formulation of (4.34) gives :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}) + i\omega\theta_2 E(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot V_T(\mathbf{x}) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Since  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are positive, we deduce that the bilinear form of (4.35) is coercive in  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$

$$\begin{aligned} |a(E, E)| &= \int_{\Omega} \theta_1 |\nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x})|^2 + i\omega\theta_2 |E(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\geq c \|\nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \equiv c \|E(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Then the homogenized problem (4.34) has a unique solution in  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  by the Lax Milgram Lemma.  $\square$

With these results, we can build the electric field  $E^\varepsilon$  that approach the solution of the problem (3.13) and (2.75) when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (4.5) gives the approximation of  $E^\varepsilon$  from  $E_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  and  $E_0$  is established with (4.22), and (4.34).

We show some analogous properties for the magnetic field  $H^\varepsilon$ , (4.6) gives the approximation of  $H^\varepsilon$  from  $H_0$ . In the absence of oscillation the homogenized problem of the magnetic field writes :

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.37)$$

where  $\theta = \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\nu < 0} \, d\mathbf{y}$ .

It is a classic method but it does not provide a convergence result to homogenized problem but it allows to obtain effective parameters.

With the aim to obtain a convergence result for the problem (2.72), (2.75) and (2.76), we propose an approach based on two-scale convergence. This concept was introduced by G. Nguetseng [34], [35] and specified by G. Allaire [6], [7] which studied properties of the two-scale convergence. M. Neuss-Radu in [33] presented an extension of two-scale convergence method to the periodic surfaces. Many authors applied two-scale convergence approach D. Cionarescu and P. Donato [17], N. Crouseilles, E. Frénod, S. Hirstoaga and A. Mouton [19], Y. Amirat, K. Hamdache and A. Ziani [8] and also A. Back, E. Frénod [10]. This mathematical concept were applied to homogenize the time-harmonic Maxwell equations S. Ouchetto, O. Zouhdi and A. Bossavit [38], H.E. Pak[39].

In our model, the parallel carbon cylinders are periodically distributed in direction  $x$  and  $z$ , as the material is homogenous in the  $y$  direction, we can consider that the material is periodic with a three directional cell of periodicity. In other words, introducing

$\mathcal{Z} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 0]^2$ , function  $\Sigma^\varepsilon$  given by (2.70) is naturally periodic with respect to  $(\xi, \zeta)$  with period  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 0]$  but it is also periodic with respect to  $y$  with period  $\mathcal{Z}$ . □



# TWO-SCALE CONVERGENCE FOR THE MODEL

---



## 5.1 Definitions

We will explore in this chapter the behavior of electromagnetic field  $E^\varepsilon$  using the two-scale convergence to determine the homogenized problem. We review some basis definitions and results about two-scale convergence. We first define the function spaces

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\#(\text{curl}, \mathcal{Z}) = \{u \in \mathbf{H}(\text{curl}, \mathbb{R}^3) : u \text{ is } \mathcal{Z}\text{-periodic}\} \\ \mathbf{H}_\#(\text{div}, \mathcal{Z}) = \{u \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3) : u \text{ is } \mathcal{Z}\text{-periodic}\} \end{cases} \quad (5.1)$$

and where  $\mathbf{H}(\text{curl}, \mathbb{R}^3)$  and  $\mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$  are defined by (3.1) with  $\Omega^\varepsilon$  replaced by  $\mathbb{R}^3$ . We introduce

$$\mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}) = \{u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3), u \text{ is } \mathcal{Z}\text{-periodic}\}, \quad (5.2)$$

and

$$\mathbf{H}_\#^1(\mathcal{Z}) = \{u \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3), u \text{ is } \mathcal{Z}\text{-periodic}\}, \quad (5.3)$$

where  $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$  is the usual Sobolev space on  $\mathbb{R}^3$ . First, denoting by  $\mathbf{C}_\#^0(\mathcal{Z})$  the space of functions in  $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}^3)$  and  $\mathcal{Z}$ -periodic,  $\mathbf{C}_0^0(\mathbb{R}^3)$  the space of continuous functions over  $\mathbb{R}^3$  with compact support, we have the following definitions :

**Definition 5.1.1.** A sequence  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  in  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  two-scale converges to  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$  if for every  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^0(\Omega, \mathbf{C}_\#^0(\mathcal{Z}))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx dy. \quad (5.4)$$

**Proposition 5.1.2.** If  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  two-scale converges to  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$ , we have for all  $v(\mathbf{x}) \in C_0(\overline{\Omega})$  and all  $w(\mathbf{y}) \in \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) w\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot v(\mathbf{x}) w(\mathbf{y}) dx dy. \quad (5.5)$$

**Theorem 5.1.3.** (Nguetseng). Let  $u^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Suppose there exists a constant  $c > 0$  such that for all  $\varepsilon$

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c.$$

Then there exists a subsequence of  $\varepsilon$  (still denoted  $\varepsilon$ ) and  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$  such that :

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.6)$$

**Proposition 5.1.4.** Let  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  be a sequence of functions in  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , which two-scale converges to a limit  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$ . Then  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  converges also to  $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy$  in  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  weakly.

**Remark 5.1.5.** :- For any smooth function  $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , being  $\mathcal{Z}$ -periodic in  $\mathbf{y}$ , the associated sequence  $u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  two-scale converges to  $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

- Any sequence  $u^\varepsilon$  that converges strongly in  $L^2(\Omega)$  to a limit  $u(\mathbf{x})$ , two-scale converges to the same limit  $u(\mathbf{x})$ .

- If  $u^\varepsilon$  admits an asymptotic expansion of the type  $u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \dots$ , where the functions  $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  are smooth and  $\mathcal{Z}$ -periodic in  $\mathbf{y}$ , two-scale convergence allows to identify the first term of the expansion  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  with the two-scale limit of  $u^\varepsilon$  and the two-scale limit of  $\frac{u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})}{\varepsilon}$  with  $u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  see (Frénod, Raviart and Sonnendrucker [20]).

**Proposition 5.1.6.** Let  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  in  $L^2(\Omega)$ . Suppose there exists a constant  $c > 0$  such that for all  $\varepsilon$

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c.$$

Up to a subsequence,  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  two-scale converges to  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega, L^2_{\#}(\mathcal{Z}))$  such that :

$$u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) + \widetilde{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5.7)$$

where  $\widetilde{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega, L^2_{\#}(\mathcal{Z}))$  satisfies

$$\int_{\mathcal{Z}} \widetilde{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0, \quad (5.8)$$

and  $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$  is a weak limit in  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.*  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  is bounded in  $L^2(\Omega)$ , then by application of Theorem 5.1.3, we get the first part of the proposition. Furthermore by defining  $\widetilde{u}_0$  as

$$\widetilde{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad (5.9)$$

we obtain the decomposition of  $u_0$ . □

**Proposition 5.1.7.** Let  $f \in H^1_{\#}(\mathcal{Z}, R^3)$  and  $\nabla_{\mathbf{y}} \times f(\mathbf{y}) = 0$ . Moreover, assume  $\langle f \rangle = 0$ . Then there exists a unique function  $q \in H^1_{\#}/R$  such that

$$f(\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}} q(\mathbf{y}). \quad (5.10)$$

Defining  $\nabla_{\mathbf{x}} = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z})$ ,  $\nabla_{\mathbf{y}} = (\frac{\partial}{\partial \xi}; \frac{\partial}{\partial \nu}; \frac{\partial}{\partial \zeta})$ , we have

**Proposition 5.1.8.** *Let  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  be bounded in  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ . Then, up to a subsequence, there exists a function  $u_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_\#(\text{curl}, \mathcal{Z}))$  such that*

$$\nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5.11)$$

where  $u_0$  is given by Proposition 5.1.6.

*Démonstration.* From Theorem 5.1.3, since  $u^\varepsilon$  and  $\nabla \times u^\varepsilon$  are bounded in  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  then, up to a subsequence, they two-scale converge to  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$  and  $\eta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}_\#^2(\mathcal{Z}))$ . So we have for all  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^0(\Omega; \mathbf{C}_\#^0(\mathcal{Z}))$  :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (5.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} \eta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (5.13)$$

Next, by integration by parts, we have :

$$\int_{\Omega} \nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)) \, d\mathbf{x}. \quad (5.14)$$

If we choose a test function  $V \in \mathbf{C}_0^0(\Omega, \mathbf{C}_\#^0(\mathcal{Z}))$  such that  $\nabla_{\mathbf{y}} \times V = 0$ , passing to the limit in the left-hand side (5.13) we get

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \, d\mathbf{x} &\rightarrow \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

This means that with the difference between (5.13) and (5.15) :

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} [\eta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0, \quad (5.16)$$

for all functions  $V \in \mathbf{C}_0^1(\Omega)$  with  $\nabla_{\mathbf{y}} \times V = 0$ . It follows that function  $\eta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  is orthogonal to functions with zero rotational in  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_\#(\text{curl}), \mathcal{Z})$ . This implies that there exists a function  $u_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_\#(\text{curl}, \mathcal{Z}))$  such that

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.17)$$

Thus

$$\nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup \nabla_{\mathbf{x}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.18)$$

□

**Proposition 5.1.9.** *Let  $u^\varepsilon$  be a bounded sequence in  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ . Then a subsequence  $u^\varepsilon$  can be extracted from  $\varepsilon$  such that, letting  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup u(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.19)$$

where  $\Phi \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z}))$  is a scalar-valued function and where  $u \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . And we have

$$\nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup \nabla_{\mathbf{x}} \times u(\mathbf{x}) \text{ weakly in } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (5.20)$$

where  $u(\mathbf{x})$  is given by Proposition 5.1.6.

*Démonstration.* Proof of (5.19), for any  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^1(\Omega, \mathbf{C}_{\#}^1(\mathcal{Z}))$ , we have

$$\int_{\Omega} \nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right\} d\mathbf{x}. \quad (5.21)$$

Multiplying by  $\varepsilon$  we have

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \left\{ \varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right\} d\mathbf{x}. \quad (5.22)$$

Taking the two-scale limit as  $\varepsilon \rightarrow 0$  we obtain

$$0 = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (5.23)$$

which implies that  $\nabla_{\mathbf{y}} \times u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Thus  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  is a gradient with respect to the variable  $\mathbf{y}$  for some scalar function  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . And according to Proposition (5.1.6)  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  can be written as  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , where  $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$  for some scalar function  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Next, we choose a test function  $V(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Integration by parts yields :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \times u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \cdot \nabla \times V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \times u(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

□

These results are important properties of the two-scales convergence. We note that the usual concepts of convergence do not preserve information concerning the micro-scale of the function. However, the two-scale convergence preserves information on the micro-scale.

Now, we will prove Theorem (4.1.2) by the method of two-scale convergence.

*Démonstration. Step 1 : Estimate* Due to the estimate (3.24),  $E^\varepsilon$  is bounded in  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Hence, up to a subsequence,  $E^\varepsilon$  two-scale converges to  $E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  belonging to  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{L}^2_\#(\mathcal{Z}))$ . That means for any  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^1(\Omega, \mathbf{C}_\#^1(\mathcal{Z}))$ , we have :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy d\mathbf{x}. \quad (5.25)$$

**Step 2 : Deduction of the constraint equation.** We multiply the equation 4.1 by oscillating test function  $V^\varepsilon(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  where  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^1(\Omega, \mathbf{C}_\#^1(\mathcal{Z}))$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) + [-\omega^2 \varepsilon^5 k(\varepsilon) \\ & + i\omega (\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon \cdot V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times V(x, 1, z, \xi, \frac{1}{\varepsilon}, \zeta)) \times e_2 d\sigma. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Integrating by parts, we get :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) + [-\omega^2 \varepsilon^5 k(\varepsilon) \\ & + i\omega (\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V^\varepsilon(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times V(x, 1, z, \xi, \frac{1}{\varepsilon}, \zeta)) \times e_2 d\sigma. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Now we multiply (5.27) by  $\varepsilon^2$  and we pass to the two-scale limit, applying Theorem 5.1.3 we obtain :

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{y})) dy d\mathbf{x} = 0. \quad (5.28)$$

We deduce the constraint equation for the profile  $E_0$  :

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (5.29)$$

**Step 3. Looking for the solutions to the constraint equation.** Multiplying Equation (5.29) by  $E_0$  and integrating by parts over  $\mathcal{Z}$  leads to

$$\int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{Z}} |\nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = 0. \quad (5.30)$$

We deduce that equation (5.30) is equivalent to

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (5.31)$$

Moreover a solution of (5.31) is also solution of (5.29). So (5.29) and (5.31) are equivalent.

Hence, from Proposition (5.19) we conclude that  $E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  can be decomposed as

$$E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.32)$$

**Step 4. Equations for  $E(\mathbf{x})$  and  $\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .** The divergence equation of 4.1 is multiplied with  $V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = \varepsilon v(\mathbf{x})\psi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , where  $v \in \mathbf{C}_0^1(\Omega)$  and  $\psi \in \mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z})$ . Theorem 5.1.3 and integration by parts yields for all  $\psi \in \mathbf{H}_{\#}^1(\mathcal{Z})$  and  $v \in \mathbf{C}_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \cdot \{ -\omega^2 \varepsilon^5 k(\varepsilon) E^\varepsilon(\mathbf{x}) + i\omega [(\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon(\mathbf{x}) \} \varepsilon v(\mathbf{x}) \psi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) d\mathbf{x} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \{ -\omega^2 \varepsilon^5 k(\varepsilon) E^\varepsilon(\mathbf{x}) + i\omega [\mathbf{1}_C^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R^\varepsilon(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})] \mathbf{1}_{\{y < 0\}} \\ &+ \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}} \} E^\varepsilon \cdot (\varepsilon \nabla v(\mathbf{x}) \psi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + v(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}} \psi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} v(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}} \psi(\mathbf{y}) \cdot [i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dy d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

from which it follows that

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot [i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0. \quad (5.34)$$

with  $E_0$  given by the decomposition (5.19). So we obtain the local equation

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot [i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \{E(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}] dy = 0. \quad (5.35)$$

The potential  $\Phi_0$  which depends on the microscopic variable  $\mathbf{y}$  and the macroscopic variable  $\mathbf{x}$ . We can write it as the product of the macroscopic field and a correcting term  $\chi_j$  depending on the microscopic variable. It may be written on the form

$$\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^3 \chi_j(\mathbf{y}) e_j \cdot E(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{y}) \cdot E(\mathbf{x}), \quad (5.36)$$

From (5.32) and (5.36), we get :

$$E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))E(\mathbf{x}). \quad (5.37)$$

Inserting  $E_0$  in (5.35) we obtain

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot [i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))] = 0. \quad (5.38)$$

Now, we build oscillating test functions satisfying constraint (5.32) and use them in



weak formulation (5.27). We define test function  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_0^1(\Omega, C_{\#}^1(\mathcal{Z}))$  and we inject in (5.27) test function  $V^\varepsilon = V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , which gives :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \frac{2}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right) + [-\omega^2 \varepsilon^5 k(\varepsilon) + i\omega \left( \mathbf{1}_C(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right. \\ & \left. + \varepsilon^4 \mathbf{1}_R(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right) \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + \varepsilon \mathbf{1}_{\{y > 0\}}] E^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \, d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times V^\dagger(x, 1, z, \xi, \zeta)) \times e_2 \, d\sigma, \end{aligned} \quad (5.39)$$

with  $V(x, 1, z, \xi, \nu, \zeta) = V^\dagger(x, 1, z, \xi, \zeta)$  the restriction on  $V$  which does not depend on  $\nu$ . The term containing the constraint, the third one, disappears. Passing to the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  and replacing the expression of  $V$  by the term  $\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , we have

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times [\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times (\alpha(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times (\nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times (\nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Since  $\nabla_{\mathbf{y}} \times (\nabla_{\mathbf{y}}) = 0$ , the term  $\frac{2}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  vanishes. Therefore, (5.39) becomes :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times (\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ & \quad + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \, dy d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times (\alpha(x, 1, z) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(x, 1, z, \xi, \zeta))) \times e_2 \, d\sigma. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Now in (5.41) we replace expression  $E_0$  given by (5.37). We obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) E(\mathbf{x}) \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times (\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right. \\ & \quad \left. + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) E(\mathbf{x}) \right) \cdot (\alpha(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \, dy d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times (\alpha(x, 1, z) + \nabla_{\mathbf{y}}\beta(x, 1, z, \xi, \zeta))) \times e_2 \, d\sigma. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Taking  $\alpha(\mathbf{x}) = 0$  in (5.42), we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \quad + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) E(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Integrating by parts

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{ (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \} \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \quad - i\omega \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{ \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) E(\mathbf{x}) \} \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

And since  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{\mathbf{1}_C(\mathbf{y})(\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))E(\mathbf{x})\} = 0$  we obtain

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{(\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x})\} \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy d\mathbf{x} = 0. \quad (5.45)$$

which gives the cell problem

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot [\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})] = 0. \quad (5.46)$$

From (5.38) and (5.46), the scalar function  $\chi$  is the unique solution, thanks to Lax-Milgram Lemma, up to an additive constant in the Hilbert space of  $\mathcal{Z}$  periodic function  $H_{\#}^1(\mathcal{Z})$  of the following boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}}(\chi_j(\mathbf{y})) = 0 & \text{in } \mathcal{Z} \setminus \partial\Omega_C, \\ \left[ \frac{\partial \chi_j}{\partial n} \right] = -n_j & \text{on } \partial\Omega_C, \\ \int_{\mathcal{Z}} \chi_j d\mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

where  $[f]$  is the jump across the surface of  $\partial\Omega_C$ ,  $n_j$ ,  $j = \{1, 2, 3\}$  is the projection on the axis  $e_j$  of the normal of  $\partial\Omega_C$ .

**Remark 5.1.10.** (5.47) can be seen as an electrostatic problem. Solving (5.38) and (5.46) reduces to look for a potential induced by surface density of charges. Then  $\chi$  is this potential induced by the charges on the interface of carbon fiber.

Setting  $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  in (5.42) and integrating by parts, we get

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Z}} (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) \\ & \quad + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y})(\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}))E(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) \, dy d\mathbf{x} \\ & = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times e_2 \cdot (e_2 \times \alpha(x, 1, z)) \times e_2 \, d\sigma. \end{aligned} \quad (5.48)$$

which gives the following well posed problem for  $E(\mathbf{x})$

$$\begin{cases} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) + i\omega \theta_2 E(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \times e_2 = -i\omega H_d \times e_2 & \text{on } \Gamma_d, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}) \times e_2 = 0 & \text{on } \Gamma_L. \end{cases} \quad (5.49)$$

with  $\theta_1 = \int_{\mathcal{Z}} \text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y}) \, dy$  and  $\theta_2 = \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{1}_C(\mathbf{y})(\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}}\chi(\mathbf{y})) \, dy$ .

This concludes the proof of Theorem (4.3).  $\square$

### 5.1.1 For the magnetic field

$$H^\varepsilon = -\frac{1}{i\omega} \nabla \times E^\varepsilon. \quad (5.50)$$

From the estimate (3.24) and the two-scale convergence  $H^\varepsilon \rightharpoonup H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  and (5.11), we have

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{i\omega} (\nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (5.51)$$

$H^\varepsilon$  converge weakly in  $L^2(\Omega)$  and integrating over  $\mathcal{Z}$

$$\int_{\mathcal{Z}} H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{i\omega} \int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.52)$$

Thanks to the periodicity of  $E_1$  and to the anti-periodicity of the outer normal  $n$  to  $\partial\mathcal{Z}$ , by the Green formula, we have :

$$\int_{\mathcal{Z}} \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\mathcal{Z}} E_1 \times n d\sigma = 0. \quad (5.53)$$

and with  $H(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{Z}} H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , we get the homogenized equation where  $H(\mathbf{x})$  and  $E(\mathbf{x})$  satisfy

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega} \theta_1 \nabla_{\mathbf{x}} \times E(\mathbf{x}). \quad (5.54)$$

with  $\theta_1 = \int_{\mathcal{Z}} (\text{Id} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi(\mathbf{y})) d\mathbf{y}$ .



# **VALIDATIONS NUMÉRIQUES BIDIMENSIONNELLES**

---



Nous débutons ce chapitre par la phase essentielle de la validation numérique du modèle. Nous simplifions tout d'abord notre problème 3D en 2D. Dans un premier temps, nous allons étudier une série de cas tests afin de vérifier sa faisabilité. Nous allons appliquer le modèle décrit dans la partie théorique pour nos simulations numériques, avec quelques simplifications. Nous allons tout d'abord vérifier le bon comportement du modèle pour trois tests en faisant varier les paramètres tels que la permittivité et la conductivité dans le domaine. Puis nous validerons la théorie de l'homogénéisation sur le nouveau modèle simplifié. Enfin nous appliquerons dans le chapitre suivant cette méthode pour illustrer l'agression du composite par une IEM que ce soit la foudre ou bien une IEM ayant pour origine une explosion nucléaire. Les simulations dans ce manuscrit sont réalisées grâce au logiciel Open Source Feefem ++. Il résout numériquement les EDP dans un domaine bidimensionnel (et tridimensionnel) par la méthode des éléments finis. Il est basé sur la transcription de la formulation variationnelle du problème considéré. On peut utiliser de nombreux types d'éléments finis tels que : P0, P1, P2 Lagrange, discontinu, Raviart-Thomas ... |

## 6.1 Simplification et validation du modèle pour une onde plane

### 6.1.1 Un domaine bidimensionnel

Implémenter le problème théorique en 3D s'est avéré complexe à réaliser, nous nous sommes alors tournés vers les physiciens pour mettre en place un modèle numérique qui réponde à leur attente. Pour simplifier l'étude nous nous sommes placés dans le cas des équations de Maxwell harmoniques bidimensionnelles. L'air et la plaque composite composent le modèle, pour réduire le temps de calcul une partie de la plaque infinie, avec quelques fibres, est modélisée. On considère la propagation d'une onde plane dans l'air et dans un réseau semi périodique et semi infini en 2D. Elle se propage suivant la direction  $Ox$  et est polarisée électriquement suivant  $Oy$ . Les inclusions sont les fibres de carbone. Les permittivités relatives sont alors égales à  $\varepsilon_r = 1$  dans l'air,  $\varepsilon_r = 5$  dans le diélectrique et  $\varepsilon_r = 2.5$  dans le carbone.

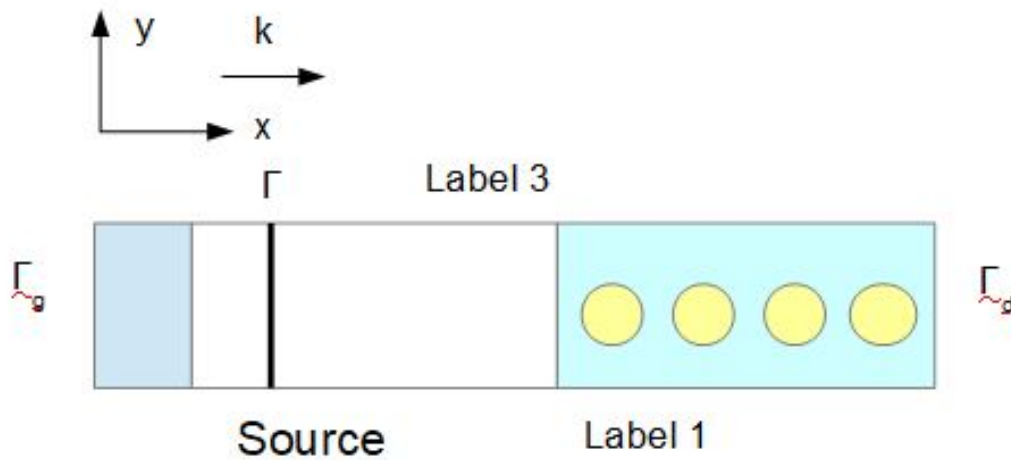


FIGURE 6.1 – Le domaine d'étude : air, composite.

Le composite est constituée d'une rangée de 5 fibres de diamètre  $\phi = 10\mu m$  et positionnées à l'extrémité droite du domaine de taille  $Lx \times Ly$ . Nous utiliserons le logiciel Freefem++ pour résoudre le problème avec les éléments finis P2. L'ordinateur personnel avec 8 Giga octets de RAM a été mis à contribution.

Des conditions limites périodiques sont appliquées sur les frontières supérieures et inférieures du domaine (label 3, label 1). Ainsi, une seule rangée horizontale de fibres dans le diélectrique est suffisante. A l'extrémité gauche nous avons rajouté la condition limite  $\frac{\partial E}{\partial n} = ikx$  avec  $k = \omega\epsilon_0\mu_0$ ,  $\omega = 2\pi f$ . A l'extrémité droite nous avons l'équivalent dans le composite  $\frac{\partial E}{\partial n} = -ik_r x$  avec  $k_r = \sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_r - i\omega\mu_0\sigma_r}$  où  $\mu_0 = 1.25663706 \times 10^{-6}$  est la perméabilité du vide et où la permittivité du vide vaut  $\epsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12}$ ,  $\epsilon_r$  étant la permittivité relative du matériau. Ces conditions limites sont rajoutées aux extrémités du domaine afin d'éviter les réflexions.



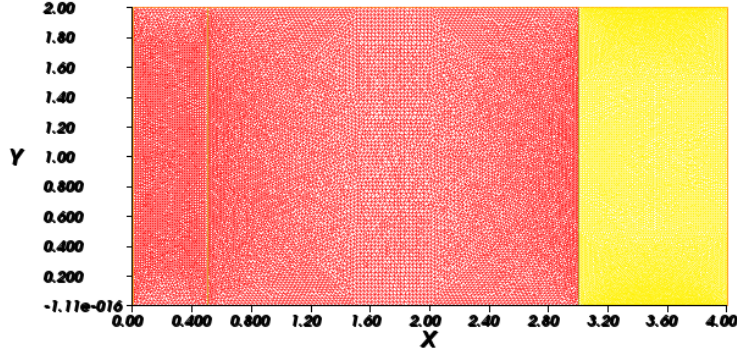


FIGURE 6.2 – Le maillage du domaine.

L'onde plane est générée grâce à une source définie par  $E = Einc = exp(-ikx)$ , elle est disposée sur la ligne droite située à  $x=1$ . Elle permet avec les conditions limites périodiques d'obtenir un front d'ondes rectilignes. L'onde incidente se propage vers la droite dans le milieu, l'onde réfléchie, revient sur la source et est absorbée.

Il faut maintenant réécrire le problème dans cette nouvelle approche bidimensionnelle. Utilisant l'identité  $\nabla \times (\nabla \times \tilde{E}) = -\Delta \tilde{E} + \nabla(\nabla \cdot \tilde{E})$ , avec  $\nabla \cdot \tilde{E} = 0$ , le problème dimensionné (2.35) du chapitre II, pour une onde se propageant suivant la direction Ox, polarisée électriquement suivant Oy, devient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{E} - k_r^2 \tilde{E} = 0 \text{ dans } \Omega_r, \\ -\Delta \tilde{E} - k_c^2 \tilde{E} = 0 \text{ dans } \Omega_c. \\ -\Delta \tilde{E} - k^2 \tilde{E} = 0 \text{ dans } \Omega_a. \\ \partial_n \tilde{E} = -ik \tilde{E} \text{ sur } \Gamma_g, \\ \partial_n \tilde{E} = -ik_r \tilde{E} \text{ sur } \Gamma_d, \\ \tilde{E} = Einc \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

avec  $k_r = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 - i\omega \mu_0 \sigma_r}$ ,  $k_c = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_c \mu_0 - i\omega \mu_0 \sigma_c}$  et  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  respectivement, les constantes de propagation dans la résine, le carbone et l'air. Nous étudions le problème 6.33 pas à pas pour trois cas simples, et nous rajoutons à chaque cas un paramètre, une contrainte.

### 6.1.1.1 Test 1, le module du champ électrique E constant

L'objectif de la première simulation est de valider le modèle numérique avec le cas le plus simple. On considère que le diélectrique, sans fibre, a une permittivité relative égale  $\epsilon_r = 1$  ce qui correspond à mettre de l'air dans tout le domaine. On veut vérifier la validité des conditions limites et la bonne tenue du logiciel à notre problème. Le champ incident est transverse et égal à  $E_{inc} = 1$ , il faut donc trouver en module, un champ constant et égal à 1 partout. On considère, par exemple une fréquence  $f = 0.85 \times 10^9 \text{ Hz}$ , on a donc une longueur d'onde  $\lambda = 0.353\text{m}$ . On choisit le pas de discrétisation avec un nombre de mailles  $N_x = 40$  suivant Ox pour qu'au moins une longueur d'onde soit discrétisée. Après implémentation sur Freefem ++, il s'est avéré que l'on devait raffiner le maillage et prendre un nombre de mailles suivant Ox de  $N_x = 120$ . La figure 6.2 illustre ce dernier maillage. La source sera finalement éloignée de l'extrémité gauche, sinon les résultats sont faussés. Dans toutes nos simulations, nous calculons le module du champ électrique.

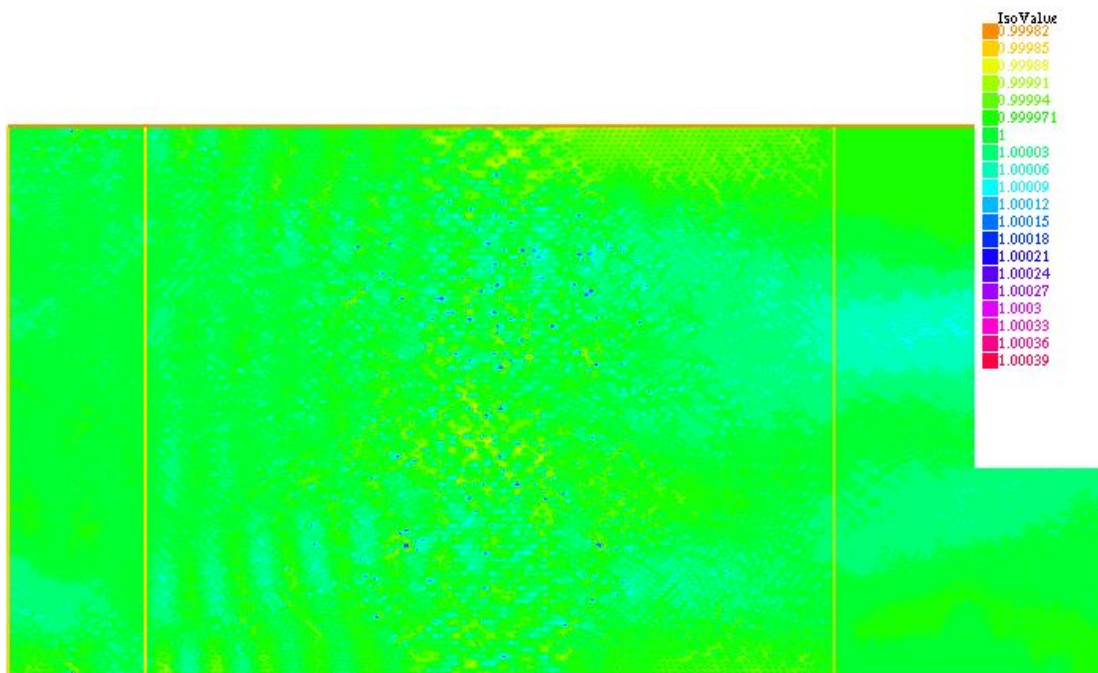


FIGURE 6.3 – Maillage du domaine air + diélectrique.

Le résultat obtenu est présenté sur la figure 6.3, il correspond bien au résultat escompté, le module du champ électrique est constant partout et égal à l'onde incidente.

### 6.1.1.2 Test 2, l'onde plane se propage dans l'air et le diélectrique

Maintenant on intègre le matériau dans nos simulations, le champ incident est caractérisé par l'onde plane définie par  $E = E_{inc} = \exp(-ikx)$  qui va se propager dans l'air puis dans la résine. Cette opération est utilisée sous Freefem++ grâce au mot clé sous Freefem ++ "region". Ceci est particulièrement utile pour définir des fonctions discontinues telles que celles pouvant se produire lorsqu'une partie du domaine est diélectrique et l'autre conducteur. Par conséquent, la permittivité relative dans l'air vaut  $\varepsilon_r = 1$  et dans la résine  $\varepsilon_r = 5$ , la conductivité électrique de la résine est  $\sigma_r = 10^{-12} S/m$ . On connaît une solution dans le domaine fréquentiel lorsqu'une onde plane se propage suivant Ox et polarisée suivant Oy, faisons le calcul.

#### Solution en domaine fréquentiel

Le comportement d'une interface entre deux milieux homogène illuminés par une onde électromagnétique a été modélisé analytiquement par le physicien Harrington, voir [1]. Lorsque l'onde passe du milieu air avec les paramètres  $(\mu_0, \varepsilon_0, k)$  au milieu diélectrique de paramètres  $(\mu_0, \varepsilon_0, \varepsilon_r, k_x)$  une partie est transmise et une autre est réfléchie. L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise et celle de l'onde réfléchie peuvent être calculées à partir des équations de Maxwell et des conditions de transmission à l'interface. Les conditions de transmission tangentielle s'écrivent pour le champ électromagnétique :

$$\begin{aligned} E_t &= E \times n, \\ H_t &= H \times n, \end{aligned} \tag{6.2}$$

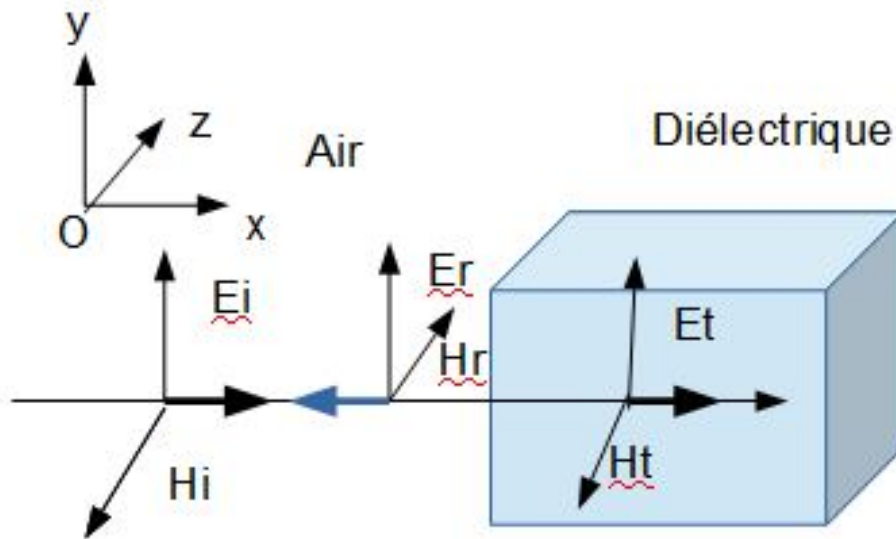


FIGURE 6.4 – Schéma de propagation de l'onde plane polarisée.

Donc pour une onde plane polarisée électriquement suivant Oy se propageant suivant Ox, l'onde électromagnétique incidente s'écrit

$$\begin{aligned} E_{y,i} &= E_0 \exp(-ikx), \\ H_{z,i} &= -\frac{k}{\mu_0\omega} E_0 \exp(-ikx), \end{aligned} \quad (6.3)$$

avec  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  et  $k_x = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r}$ .  
L'onde réfléchie s'écrit

$$\begin{aligned} E_{y,r} &= E_r \exp(ikx), \\ H_{z,r} &= \frac{k_x}{\mu_0\omega} E_r \exp(ikx), \end{aligned} \quad (6.4)$$

et l'onde transmise

$$\begin{aligned} E_{y,t} &= E_t \exp(-ik_x x), \\ H_{z,t} &= -\frac{k_x}{\mu_0\omega} E_t \exp(-ik_x x), \end{aligned} \quad (6.5)$$

L'onde se propage dans les deux milieux air et diélectrique.

On considère, pour simplifier, qu'à l'interface  $x = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} E_{y,i}(0) + E_{y,r}(0) &= E_{y,t}(0), \\ H_{z,i}(0) + \frac{k_x}{\mu_0\omega} E_r &= H_{z,t}(0). \end{aligned} \quad (6.6)$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} E_0 + E_r &= E_t, \\ -\frac{k}{\mu_0\omega} E_0 + \frac{k_x}{\mu_0\omega} E_r &= -\frac{k_x}{\mu_0\omega} E_t. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La résolution de ce système 6.7, en simplifiant par  $\mu_0$ , nous donne l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et du champ électrique transmis :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{k - k_x}{k + k_x} E_0, \\ E_t &= \frac{2k}{k + k_x} E_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

L'amplitude complexe du champ E de l'onde transmise  $E_t$  définit la proportion d'onde électromagnétique qui a traversé la plaque. le module est compris entre 0 et  $E_0$ .

Soient les champs électriques réfléchis et transmis :

$$\begin{aligned} E_{y,r} &= \frac{k - k_x}{k + k_x} E_0 \exp(ikx), \\ E_{y,t} &= \frac{2k}{k + k_x} E_0 \exp(-ik_x x). \end{aligned} \quad (6.9)$$

La figure 6.5 illustre la propagation du champ électrique dans l'air et le diélectrique avec la permittivité relative dans le diélectrique  $\varepsilon_r = 5$ .

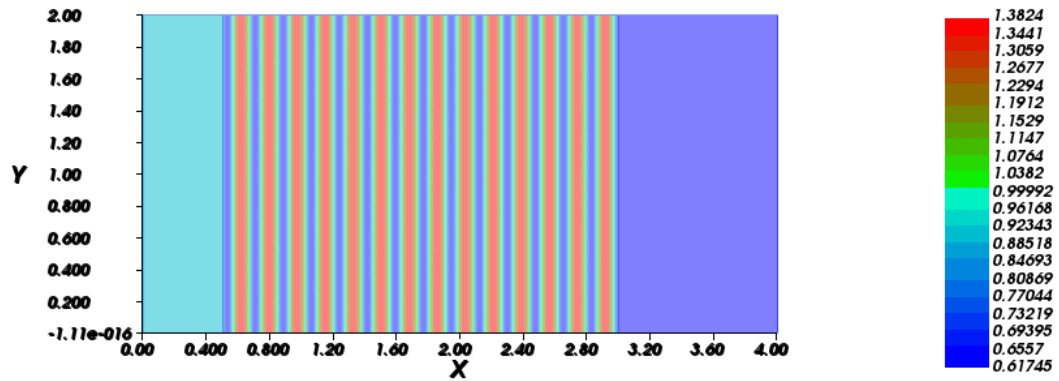


FIGURE 6.5 – Représentation numérique par éléments finis de la solution du problème de l'onde plane se propageant dans l'air et le diélectrique.

L'amplitude maximale est de 1.38. L'amplitude du module est liée au fait que l'onde réfléchie revient sur la source et est absorbée par celle-ci. Ce qui explique le fait que le module soit constant sur la gauche. Il n'y a juste que la source qui émette et se propage vers la droite. On situe bien l'onde incidente sur la gauche et sa transmission dans le diélectrique en  $x=3$ .

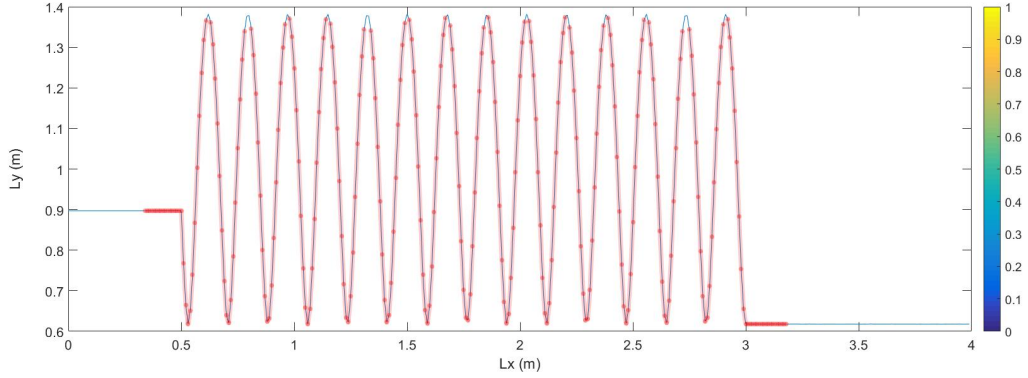


FIGURE 6.6 – Application numérique du champ électrique dans l'air et le diélectrique. la courbe bleue représente le module de E calculé par éléments finis, les points rouges représentant la solution analytique.

Figure 6.6, la formulation analytique de la propagation du champ électrique dans l'air et le diélectrique donnée par  $E_{y,t} = \frac{2k}{k+k_x} E_0 \exp(-ik_x x)$  a été reconstruite sur Matlab et comparée à celle calculée par éléments finis. On remarque que ces deux formulations concordent, ce qui vient valider notre modèle numérique sur Freefem.

### 6.1.1.3 Test 3, l'onde plane se propage dans l'air, le composite avec ses fibres de carbone

Nous débutons notre troisième cas en ajoutant une rangée horizontale de fibres de carbone de diamètre  $10\mu m$  dans le diélectrique, le domaine étant semi périodique (bords inférieur et supérieur), une rangée suffit. Nous gardons toujours les mêmes paramètres en ajoutant les fibres de carbone ; maintenant la formulation variationnelle du problème s'écrit, en script Freefem ++ :

$$\begin{aligned}
 \text{problemMaxwell}(E, v) = & \text{int2d}(\Omega)(dx(E) * dx(v) + dy(E) * dy(v)) \\
 & - \text{int2d}(\text{air})(k^2 * E * v) \\
 & - \text{int2d}(\text{dielecrique})(k_r^2 * E * v) \\
 & - \text{int2d}(\text{fibre})(k_c^2 * E * v) \\
 & + \text{int1d}(\Gamma_g)(1i * k^2 * E * v) \\
 & + \text{int1d}(\Gamma_d)(1i * k_r * E * v) \\
 & + \text{int1d}(\Gamma)(2 * 1i * k * Einc * v)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

avec les constantes de propagation :  $k_r = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 - i\omega \mu_0 \sigma_r}$ , dans le diélectrique,  $k_c = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_c \mu_0 - i\omega \mu_0 \sigma_c}$  dans les fibres de carbone et  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$  dans l'air. La perméabilité relative du carbone étant égale à  $\varepsilon = 2.5$ , la perméabilité relative du diélectrique étant égale à  $\varepsilon = 5$ , nous prenons une conductivité des fibres  $\sigma_c = 40000 S/m$

et celle du diélectrique  $\sigma_r = 10^{-12} S/m$ . Le champ incident est toujours caractérisé par l'onde plane définie par  $E = E_{inc} = \exp(-ikx)$ .

La description de la géométrie et le maillage sont donnés sous Freefem ++ par le script :

```

2 : int ncuts = 60; //parfois erreur maillage (changer de nombre)
3 : int n3=18;
4 : real L=1e-3;
5 : real e=1e-5;;
6 : real a=e/L;
7 : real interf = 3*a;
8 : real pw = 0.5*a;
9 : real longy = 1*a;
10 : real longx = 9*a;
11 : real d=0.5*a;
12 : real r=d/2;
13 :
14 : // Domaine
15 : border gam1(t = 0, interf){x=t;y=0; label= 1;};
16 : border gam2(t = 0, longx-interf){x=interf+t;y=0; label= 1;};
17 : border gam3(t = 0, longy){x=longx;y=t; label= 2;};
18 : border gam4(t = 0, longx-interf){x=longx-t;y=longy; label= 3;};
19 : border gam5(t = 0, interf){x=interf-t;y=longy; label= 3;};
20 : border gam6(t = longy, 0){x=0;y=t; label= 4;};
21 : border gam7(t = 0, longy){x=pw;y=t; label= 5;};
22 : border gam8(t = 0, longy){x=interf;y=t; label= 6;};
23 :
24 : border c32(t=0,2.0*pi) {x=r*cos(t)+4*a; y=r*sin(t)+0.5*a; label=7;};
25 : border c33(t=0,2.0*pi) {x=r*cos(t)+5*a; y=r*sin(t)+0.5*a; label=7;};
26 : border c34(t=0,2.0*pi) {x=r*cos(t)+6*a; y=r*sin(t)+0.5*a; label=7;};
27 : border c35(t=0,2.0*pi) {x=r*cos(t)+7*a; y=r*sin(t)+0.5*a; label=7;};
28 : border c36(t=0,2.0*pi) {x=r*cos(t)+8*a; y=r*sin(t)+0.5*a; label=7;};
29 :
30 : // Maillage du domaine
31 : mesh Th=buildmesh(gam1(2*ncuts) + gam2(2*ncuts) + gam3(2*ncuts) + gam4(2*ncuts) + gam5(2*ncuts)
32 : + gam6(2*ncuts)+ gam7(2*ncuts)+ gam8(2*ncuts)+c32(n3)+c33(n3)+c34(n3)+c35(n3)+c36(n3));
33 : plot (Th) ;

```

La transmission de l'onde de l'air dans le composite est modélisé par le script de Freefem ++

```

63 : int rg=Th(0.5*a,0.5*a).region;
64 : int rd=Th(interf+0.1*a,1.0*a).region;
65 : int rm=Th(interf/2+pw/2,1.0*a).region;
66 :
67 : int[int] incl(9);
68 :
69 :
70 : incl(0)=Th(3.10*a,0.5*a).region;
71 : incl(1)=Th(3.20*a,0.5*a).region;
72 : incl(2)=Th(3.30*a,0.5*a).region;
73 : incl(3)=Th(3.40*a,0.5*a).region;
74 : incl(4)=Th(3.50*a,0.5*a).region;
75 : incl(5)=Th(3.60*a,0.5*a).region;
76 : incl(6)=Th(3.70*a,0.5*a).region;
77 : incl(7)=Th(3.80*a,0.5*a).region;
78 : incl(8)=Th(3.90*a,0.5*a).region;
--

```

La figure 6.7 illustre le problème 6.10 pour 11 fibres et une fréquence  $f = 1Ghz$



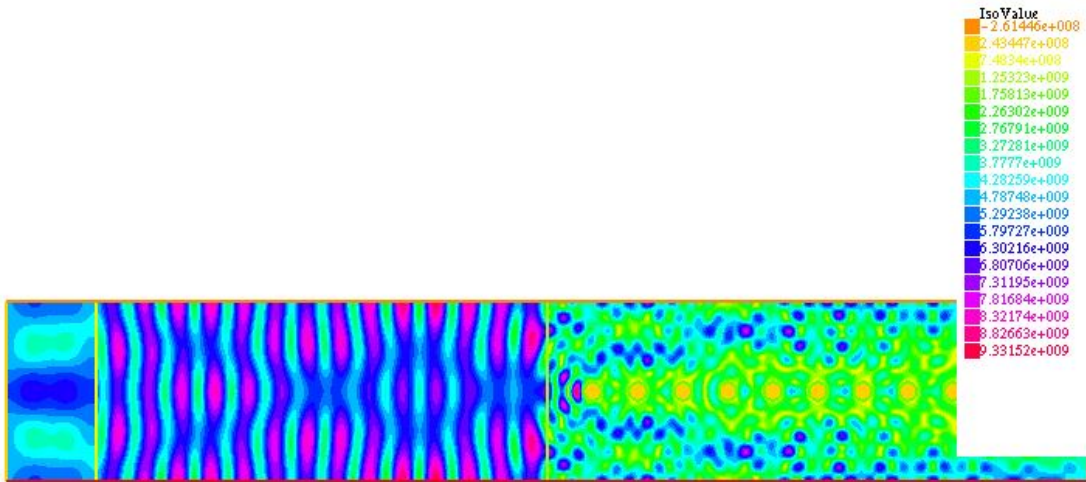


FIGURE 6.7 – Représentation de la solution du problème direct avec onze fibres et un rayon  $r = 5mm$ , pour une fréquence  $f = 1GHz$ .

Conclusion : Les trois cas tests ont permis de valider un modèle numérique fiable. Nous avons pu comparer dans le cas simple du composite sans fibre, la solution du problème air-diélectrique direct calculée grâce aux éléments finis, avec la solution analytique.

## 6.1.2 Homogénéisation

L'homogénéisation est utilisée lorsque la longueur d'onde est très élevée par rapport à la taille des hétérogénéités et à la période du réseau. L'onde plane voit le support comme un milieu homogène. Dans ce cas, la simulation numérique directe, qui prend en compte toutes les hétérogénéités du composite, de l'ordre du micron ici, est extrêmement compliquée. Le concept d'homogénéisation facilite grandement la modélisation.

Dans cette deuxième partie du chapitre, notre objectif est de valider la méthode d'homogénéisation en comparant la solution numérique d'une version simplifiée du problème sans dimension avec la solution du modèle homogénéisé.

### 6.1.2.1 Solution du problème adimensionné

Le domaine global adimensionné est composé de l'air, dont on considère ici que sa conductivité électrique est nulle, et du matériau composite avec ses fibres de carbone de diamètre  $\phi = 10\mu m$  avec des conditions périodiques sur les bords supérieur et inférieur du domaine. La source incidente de l'onde est toujours située à l'extrémité gauche du domaine. Nous calculons le module du champ électrique pour 5 fibres. Le signal de

la source incidente est gouverné par l'onde plane définie par  $E_{inc} = \exp(-ikx)$ . Nous allons tout d'abord adimensionner le problème à l'échelle du composite.

Nous rappelons les paramètres de notre problème. Nous prenons les paramètres du modèle théorique du chapitre II, tout d'abord l'épaisseur de la plaque composite caractéristique est  $L = 10^{-3} m$  et la taille des hétérogénéités  $e = 10^{-5} m$  ce qui permet de définir le petit paramètre  $\varepsilon = \frac{e}{L} = 10^{-2}$ . Nous choisissons la pulsation caractéristique  $\bar{\omega} = 10^6 rad/s$  ainsi que la conductivité caractéristique  $\bar{\sigma} = 40000 S/m$ . La résine est nano-chargée donc la conductivité du diélectrique est  $\sigma_r = 0.001 S/m$ . On rappelle que la conductivité électrique caractéristique, ici est définie par rapport à la borne supérieure de Wiener.

En effet le contenu volumique du renfort, également appelé fraction volumique de la fibre, est le rapport du volume de renforcement sur le volume total. La fraction volumique de la résine est alors définie par

$$f_r = 1 - f_c. \quad (6.11)$$

La fraction volumique de la fibre de carbone est alors définie par, voir 2.54

$$f_c = \frac{\pi}{4} \cdot \alpha^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \frac{R^2}{e^2}, \quad (6.12)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ .  $f_c$  sera maximale pour  $e = 2R$  donc pour  $f_c = \frac{\pi}{4}$ . Le modèle théorique a été étudié avec la fibre occupant tout le volume c'est à dire  $\alpha$  très proche de 1. La conductivité caractéristique s'obtient par la définition suivante

$$\bar{\sigma} = f_c \sigma_c + (1 - f_c) \sigma_r. \quad (6.13)$$

Avec  $\sigma_r$  la conductivité dans la résine et  $\sigma_c$  la conductivité dans la fibre de carbone.

Avec les valeurs caractéristiques nous avons les calculs d'adimensionnement suivants. Tout d'abord l'expression  $\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  adimensionnée devient :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\bar{\omega}^2 \times L^2}{c^2} \\ &= 1.11 \times 10^{-10}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

Soit en fonction du petit paramètre  $\alpha = \varepsilon^5$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\bar{\omega} \times L^2}{\delta^2} \\ &\simeq 1, \end{aligned} \quad (6.15)$$

Les constantes de propagation dans l'air  $k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}$ , dans la résine nano-chargée  $k_r = \sqrt{\omega \alpha \varepsilon_r - i\omega\beta\Sigma_r}$  et dans la fibre de carbone  $k_c = \sqrt{\omega\alpha \varepsilon_r - i\omega\beta\Sigma_c}$ . Avec  $\Sigma_r = \frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} = 0.001/40000$  et  $\Sigma_c = \frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} = 1$  et on considère ici que  $\Sigma_a = 0$ .

Le problème en fonction du petit paramètre  $\varepsilon = 0.01$  s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta E^\varepsilon - k_r^{\varepsilon^2} E^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_r^\varepsilon, \\ -\Delta E^\varepsilon - k_c^{\varepsilon^2} E^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_c^\varepsilon. \\ -\Delta E^\varepsilon - k^2 E^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_a. \\ \partial_n E^\varepsilon = -ik E^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_g, \\ \partial_n E^\varepsilon = -ik_r^\varepsilon E^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_d, \\ E_{inc} = \exp(-ikx) \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Attention, de ne pas confondre le petit paramètre  $\varepsilon$  avec la permittivité du matériau.

Avec les constantes de propagation en fonction de  $\varepsilon$  dans l'air  $k = \sqrt{\omega^2 \alpha}$ , de dans le composite dépendant de  $\varepsilon$  :

$$k_r^\varepsilon = \sqrt{\omega^2 \varepsilon^5 \epsilon_r - i\omega \times \varepsilon^4} \quad (6.17)$$

$$k_c^\varepsilon = \sqrt{\omega^2 \varepsilon^5 \epsilon_c - i\omega \times 1} \quad (6.18)$$

dans la fibre de carbone. Les conductivités en fonction de  $\varepsilon$  s'écrivant  $\Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4$  et  $\Sigma_c^\varepsilon = 1$ , la fibre remplissant le volume de la cellule. C'est à dire à l'échelle de la plaque de composite la conductivité de la fibre est d'ordre 1 et celle de la résine nano-chargée est très petite devant celle de la fibre, d'ordre  $\varepsilon^4$ .

Ecrivons la formulation variationnelle de notre problème en fonction du petit paramètre  $\varepsilon$ . Soit l'espace suivant :

$$Y(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \nabla \cdot u|_{\Omega_a^\varepsilon} \in L^2(\Omega_a^\varepsilon), \nabla \cdot u|_{\Omega_r^\varepsilon} \in L^2(\Omega_r^\varepsilon), \nabla \cdot u|_{\Omega_c^\varepsilon} \in L^2(\Omega_c^\varepsilon)\}. \quad (6.19)$$

Notre espace variationnel est :

$$Y^\varepsilon(\Omega) = \{u \in Y(\Omega) \mid (ku|_{\Omega_a^\varepsilon} \cdot n = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot n, \\ (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon)u|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot n|_{\Omega_c^\varepsilon} = (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon)u|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot n|_{\Omega_c^\varepsilon}\}. \quad (6.20)$$

La formulation variationnelle du problème 6.16 est alors : Trouver  $E^\varepsilon \in Y^\varepsilon$

$$a(E^\varepsilon, v) = L(v), \quad v \in Y^\varepsilon \quad (6.21)$$

La forme sesquilinéaire  $a : Y^\varepsilon \times Y^\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par

$$a^\varepsilon(E^\varepsilon, v) = \int_{\Omega} \nabla E^\varepsilon \overline{\nabla v} - \int_{\Omega_a} k^2 E^\varepsilon \overline{v} - \int_{\Omega_r} k_r^2 E^\varepsilon \overline{v} \\ - \int_{\Omega_c} k_c^2 E^\varepsilon \overline{v}. \quad (6.22)$$

et

$$L(v) = - \int_{\Gamma_g} ik E^\varepsilon \overline{v} - \int_{\Gamma_d} ik_r E^\varepsilon \overline{v} - \int_{\Gamma} 2ik E_{inc} \overline{v}. \quad (6.23)$$

**Coercivité de  $a^\varepsilon$**

$a^\varepsilon$  se réécrit

$$\begin{aligned}
 a^\varepsilon(E^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega} \nabla E^\varepsilon \overline{\nabla v} - \int_{\Omega_a} \omega^2 \varepsilon^5 E^\varepsilon \bar{v} \\
 &- \int_{\Omega_r} \omega^2 \varepsilon^5 \varepsilon_r E^\varepsilon \bar{v} - \int_{\Omega_c} \omega^2 \varepsilon^5 \varepsilon_c E^\varepsilon \bar{v} \\
 &+ \int_{\Omega_r} \omega \Sigma_r^\varepsilon E^\varepsilon \bar{v} + \int_{\Omega_c} \Sigma_c^\varepsilon E^\varepsilon \bar{v}
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

La démonstration de la coercivité de  $a^\varepsilon$  est identique à la proposition (3.15) du chapitre III. On peut ainsi conclure sur l'existence et l'unicité de la solution grâce au Théorème Lax-Milgram.

**Géométrie du domaine :** Le composite est construit avec une répétition périodique de  $\varepsilon$  cellules élémentaires  $\mathcal{Z}$  toutes égales grâce à la mise à l'échelle  $\varepsilon = 0.01$ . Pour résoudre le problème homogénéisé on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro.

La figure 6.8 représente la solution du problème direct adimensionné  $E^\varepsilon$  pour une fibre de diamètre  $\varepsilon$  et un cas test de fréquence  $f = 500Ghz$ .

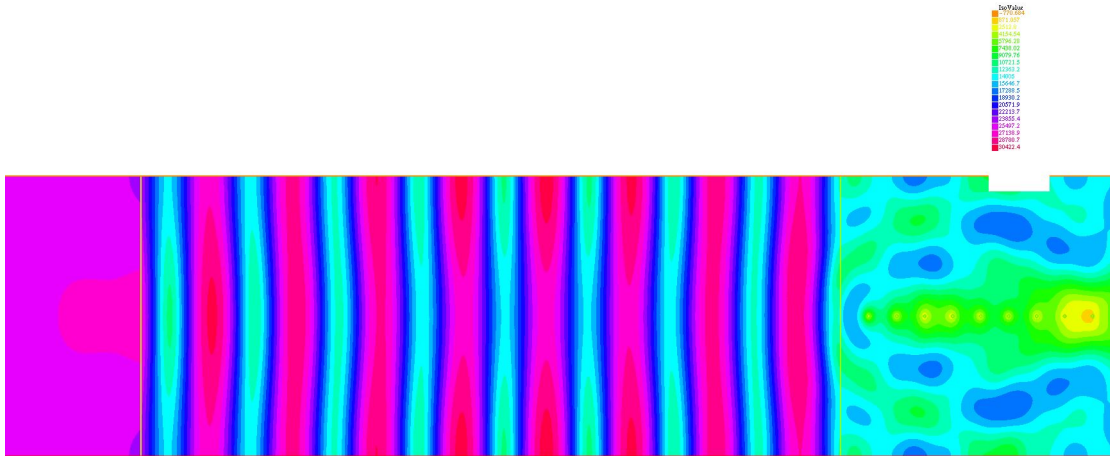


FIGURE 6.8 – Représentation du module du champ électrique solution du problème direct adimensionné pour le cas test  $f = 500Ghz$ .

**6.1.2.2 Solution du problème homogénéisé pour le matériau composite**

Le problème homogénéisé s'obtient ici de manière classique grâce au développement asymptotique à deux échelles, avec  $x$  la variable macroscopique et  $\frac{x}{\varepsilon}$ , noté  $y$ , la variable microscopique.

On a un développement asymptotique de  $E^\varepsilon$  de la forme :

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(x) &= E_0(x, y) + \varepsilon E_1(x, y) + \varepsilon^2 E_2(x, y) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i E_i(x, y), \end{aligned} \quad (6.25)$$

les fonctions  $E_i$  sur  $\Omega \times \mathcal{Z}$ , sont  $\mathcal{Z}$  périodiques. On a également :

$$\nabla E_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \nabla_x E_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y E_i(x, \frac{x}{\varepsilon}). \quad (6.26)$$

On remplace dans le problème (6.16)  $E^\varepsilon$  par son développement asymptotique (6.25). L'identification des puissances successives de  $\varepsilon$  au problème (6.16) nous permet de résoudre de nouveaux problèmes. Le premier en  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  est

$$\begin{cases} -\Delta_y E_0(x, y) = 0 \text{ dans } \mathcal{Z} \\ y \mapsto E_0(x, y) \text{ est } \mathcal{Z} - \text{périodique} \end{cases} \quad (6.27)$$

Ce qui revient à dire que le champ électrique  $E_0$  ne dépend que de la variable macroscopique  $x$ .

$$E_0(x, y) = E(x). \quad (6.28)$$

Puis le problème en  $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\begin{cases} -\Delta_y E_1(x, y) - 2\nabla_y \nabla_x E_0(x, y) = 0 \text{ dans } \mathcal{Z} \\ y \mapsto E_1(x, y) \text{ est } \mathcal{Z} - \text{périodique} \end{cases} \quad (6.29)$$

$E_0$  ne dépendant que de  $x$ , le problème devient

$$\begin{cases} -\Delta_y E_1(x, y) = 0 \text{ dans } \mathcal{Z} \\ y \mapsto E_1(x, y) \text{ est } \mathcal{Z} - \text{périodique} \end{cases} \quad (6.30)$$

Donc  $E_1$  est donné par  $E_1 = E(x)$ .

Enfin le troisième problème en  $\varepsilon^0$  est défini par

$$\begin{cases} \Delta_y E_2(x, y) = -\nabla_y \nabla_x E_1(x, y) - \Delta_x E_0(x, y) + i\omega \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) E_0(x, y) = 0 \text{ dans } \mathcal{Z} \\ \partial_n E_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \\ y \mapsto E_2(x, y) \text{ est } \mathcal{Z} - \text{périodique} \end{cases} \quad (6.31)$$

Il vient en remplaçant  $E_0$  et  $E_1$

$$\begin{cases} -\Delta E(x) + i\omega \theta_1 E(x) = 0 \text{ dans } \mathcal{Z} \\ \partial_n E = 0 \text{ sur } \Gamma_d. \end{cases} \quad (6.32)$$

$$\theta_1 = \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{1}_C(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Finalement, le problème homogénéisé s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta E + i\omega\theta_1 E = 0 \text{ dans } \Omega_r \cup \Omega_c, \\ -\Delta E - k^2 E = 0 \text{ dans } \Omega_a. \\ \partial_n E = -ikE \text{ sur } \Gamma_g, \\ \partial_n E = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \\ E_{inc} = \exp(-ikx) \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (6.33)$$

On représente et on compare figures 6.9 et 6.10 la solution du problème homogénéisé et celle du problème direct adimensionné.

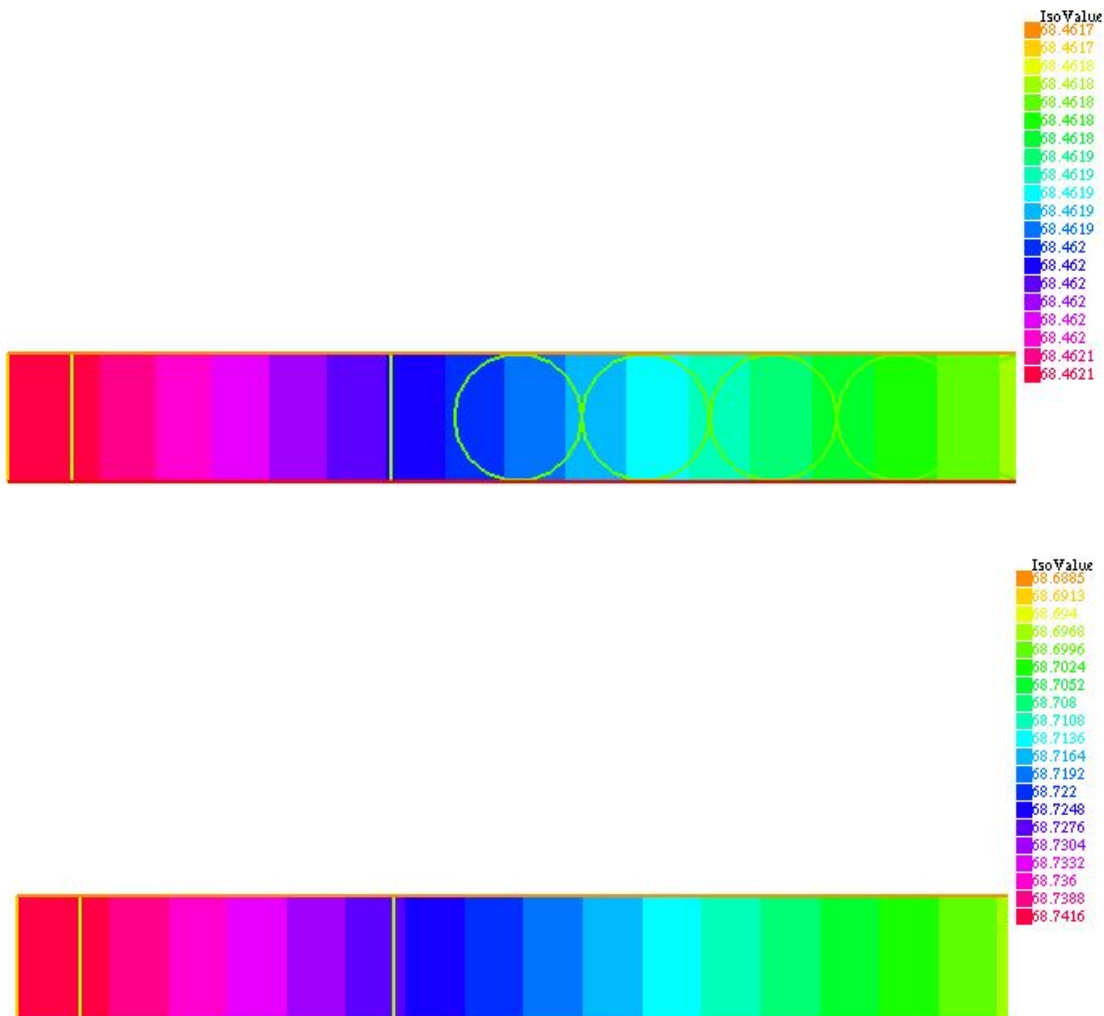


FIGURE 6.9 – Module du champ électrique, solution du problème homogénéisé

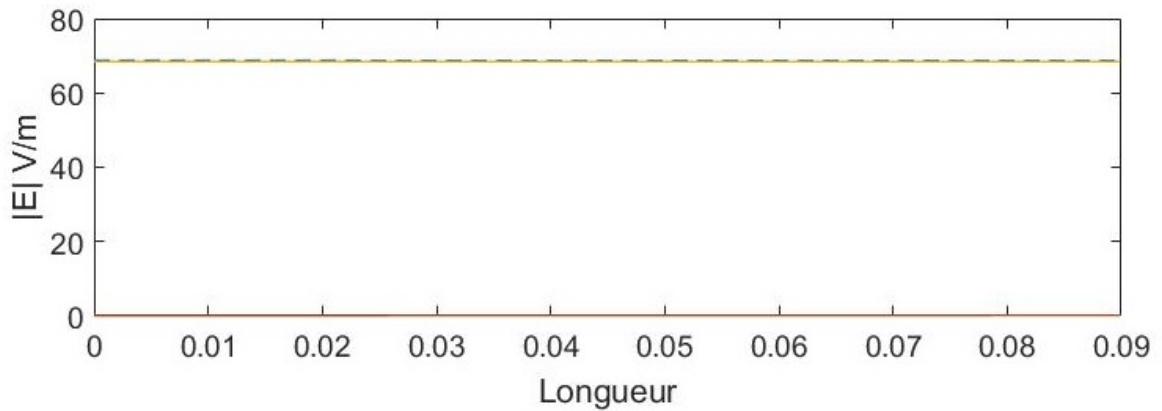


FIGURE 6.10 – Comparaison entre la solution du problème direct adimensionné  $E^\varepsilon$  (tiret bleu) et le problème homogénéisé  $E$  (ligne jaune)

On remarque dans les illustrations des solutions du problème direct et celui homogénéisé, les résultats sont proches. L'erreur de l'ordre de 2.8%.

### 6.1.2.3 Coefficient de transmission pour une onde plane

On rappelle que le coefficient de transmission est défini par  $t = \frac{E_t}{E_i}$ . Nous allons calculer pour différentes fréquences le coefficient de transmission sur 5 fibres par éléments finis, lorsque la résine est nano-chargée ou pas. Maintenant le diamètre de la fibre n'occupe que la moitié du volume. Les résultats de la comparaison pour une résine nano-chargée ou pas, sont donnés dans le tableau suivant :

Fréquences	résine non chargée	résine nano-chargée
1Khz	$1.7774 \cdot 10^{-9}$	$1.24 \cdot 10^{-9}$
100Khz	$3.63 \times 10^{-11}$	$3.6 \times 10^{-11}$
1Mhz	$3.35 \times 10^{-11}$	$3.22 \times 10^{-11}$
100Mhz	$7.39 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-4}$
1Ghz	<b>0.85</b>	<b>0.51</b>

TABLE 6.1 – Coefficient de transmission, pour les diverses pulsations.





# APPLICATIONS AU CAS DE L'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE PROVOQUÉE PAR L'ARC DE Foudre ET D'UNE IMPULSION ELECTROMAGNÉTIQUE DANS UN COMPOSITE

---

Nous abordons maintenant de manière exploratoire, des applications au modèle théorique. En particulier, la source sera tour à tour l'onde électromagnétique la plus énergétique provoquée par l'arc de foudre appelée onde A, puis une impulsion électromagnétique (IEM) provoquée par une explosion nucléaire. Ceci est une première approche, ces impulsions sont toutes deux définies par une double exponentielle temporelle, nous prendrons leur transformée de Fourier pour effectuer notre étude en mode fréquentiel.



## 7.1 Application au cas de l'onde électromagnétique provoquée par l'arc de foudre

En particulier l'onde incidente du problème sera remplacée par l'impulsion électromagnétique provoquée par l'arc en retour de type A de la foudre. Mais décrivons tout d'abord le phénomène. Les formes d'ondes typiques des décharges successives de courant liées au foudroiement sont décrites figure 7.1. L'onde A correspond au courant généré par la décharge du premier arc de foudre. C'est l'agression la plus forte et énergétique mise en jeu lors du foudroiement. Elle est décrite par une double exponentielle dans le domaine temporel. Le contenu spectral de l'onde A est compris entre 1 Hz et quelques dizaines de Khz. le caractère basse fréquence du phénomène va conditionner notre choix de modélisation, faisant appel notamment à notre modèle principal développé dans les précédents chapitres.

Dans ce paragraphe, nous décrivons d'abord le processus de foudre avec les différentes formes d'ondes. La forme d'onde A génère un courant très élevé et très énergétique et est à l'origine de fortes variations du champ électromagnétique. Le but de ce paragraphe est d'obtenir le coefficient de transmission du composite pour différentes fréquences.

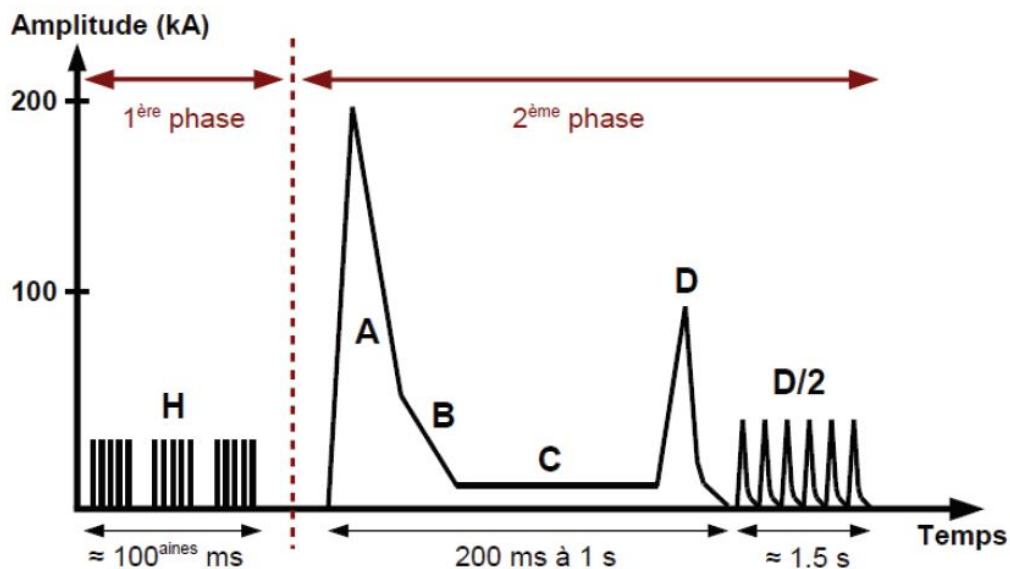


FIGURE 7.1 – Le processus complet décrit ici est composé de deux phases : la formation du canal ionisé et la seconde caractérisée par les décharges successives.

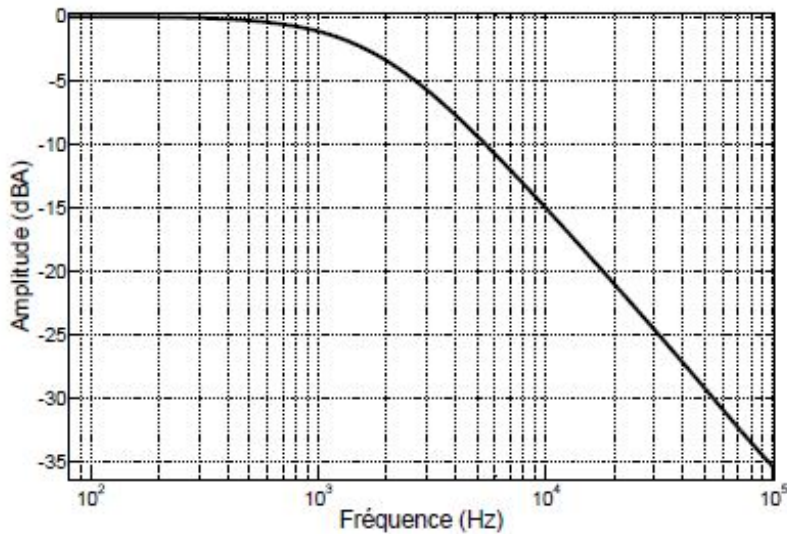


FIGURE 7.2 – Représentation à diverses fréquences de l'onde A.

Les effets de champ magnétique sont la principale raison pour laquelle la tension est induite sur les avions par les courants de foudre qui circulent sur l'aéronef. Dans l'espace autour et à l'extérieur d'un conducteur de longueur infinie, nous rappelons que le champ magnétique est

$$H_d = \frac{I}{2\pi r} \text{ A/m}, \quad (7.1)$$

Dans notre exemple on considère la formulation suivante de l'onde A dans le domaine fréquentiel voir [37] :

$$E(\omega) = E_0[1/(i\omega + \alpha) - 1/(i\omega + \beta)], \quad (7.2)$$

Où  $\alpha = 79237s^{-1}$  est l'inverse du temps de décroissance et  $\beta = 4.001 \times 10^6s^{-1}$  l'inverse du temps de montée et avec source la fonction donnée par 7.2.

Illustration du champ électrique et magnétique pour  $f = 10 \text{ Mhz}$

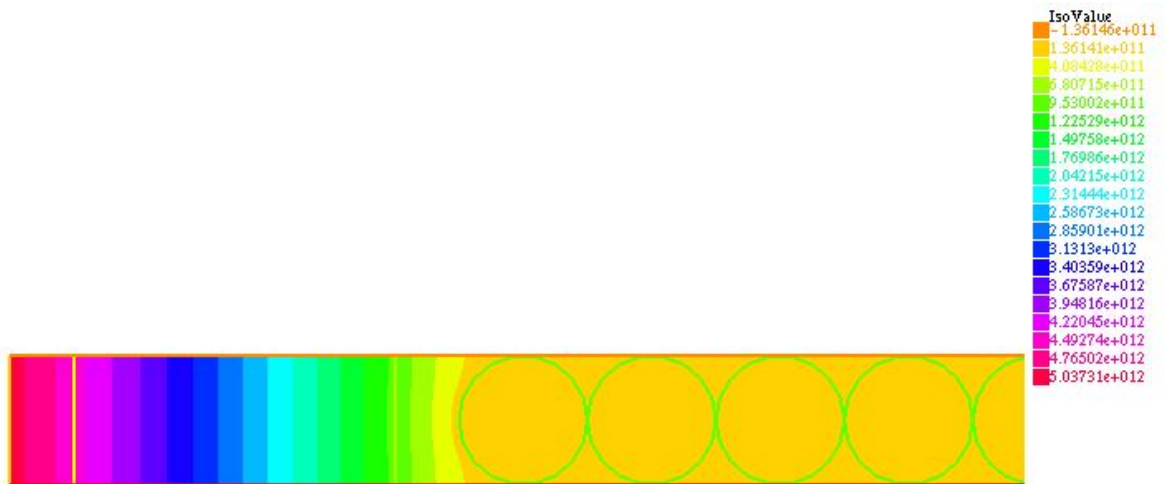


FIGURE 7.3 – Représentation du module du champ électrique, pour  $f = 10\text{MHz}$ , la résine est nanochargée, le diamètre des fibres est  $\phi = 10\mu\text{m}$ .

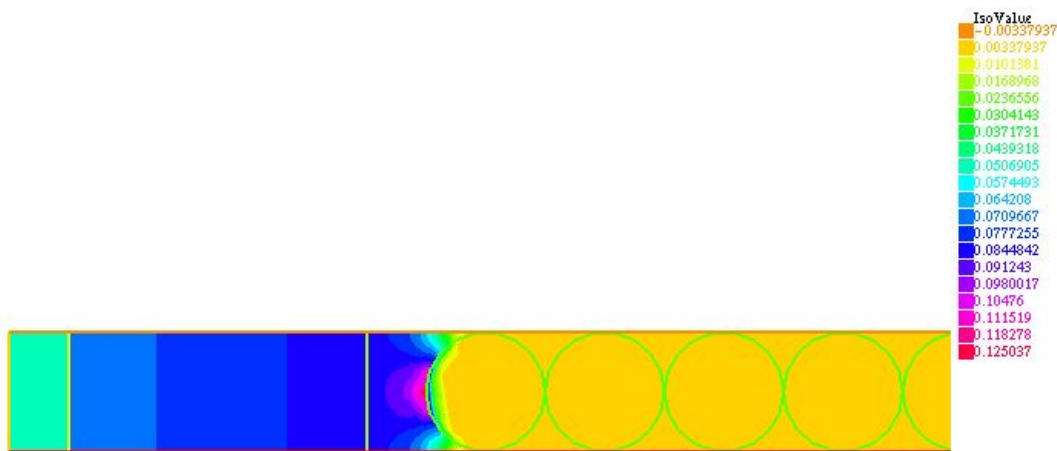


FIGURE 7.4 – Représentation du module du champ magnétique, pour  $f = 1\text{MHz}$ , la résine est nanochargée et le diamètre des fibres  $\phi = 10\mu\text{m}$ .

La recherche sur les impulsions électromagnétiques (IEM) nucléaires, (NEMP en anglais), ont eu une grande influence sur les travaux liés aux effets indirects de la foudre, en partie parce que l'IEM nucléaire est un phénomène du domaine temporel, tout comme la foudre. Pratiquement tous les travaux analytiques sur les effets indirects de la foudre ont été influencés par la recherche sur les IEM. La plupart des simulations numériques concernant l'analyse de la foudre dans les avions ont été développées à

l'origine pour les IEM.

## 7.2 Impulsion Electromagnétique

Après un état de l'art sur les différents types d'IEM d'après les travaux E. Savage et al, [41], [42], nous allons évaluer dans ce chapitre la propagation d'une IEM nucléaire de type  $E_1$  dans un composite. L'étude de la propagation des champs électriques nous permettra de déterminer le coefficient de transmission du champ électrique, dans un composite conducteur. C'est pourquoi nous allons aussi évaluer l'énergie dissipée dans le composite par effet Joule.

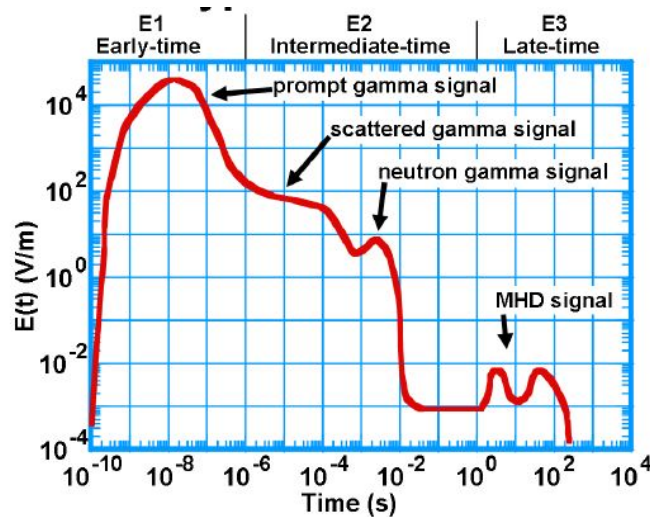


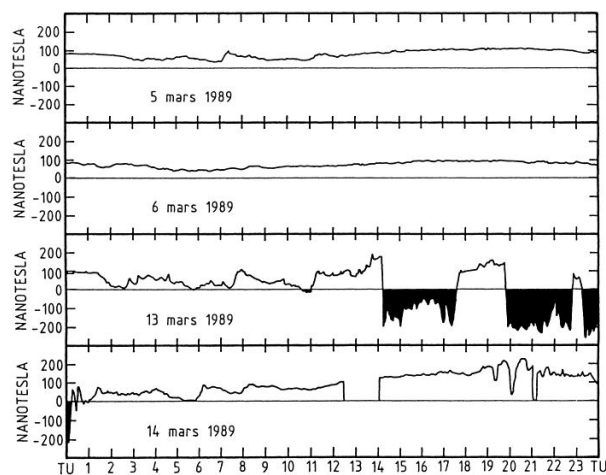
FIGURE 7.5 – L'environnement IEM. Source [41]

L'IEM correspond à des ondes électromagnétiques brèves et de très forte amplitude résultant d'effets causés par un orage solaire, la foudre ou de dispositifs nucléaires et de puissances impulsionnelles fabriquées par l'homme. Le risque est la destruction d'une grande variété d'équipements électriques et électroniques. Un engin nucléaire explosant à des altitudes comprises entre 30 et 400 kilomètres génère une IEM avec des amplitudes de l'ordre de dizaines de kilovolts par mètre avec un rayon d'effets allant de quelques centaines à des milliers de kilomètres. Cet effet IEM en haute altitude se couple aux systèmes électriques et électroniques en général et peut les désactiver, mais il présente les risques les plus élevés pour les réseaux de longue distance, y compris l'énergie électrique et les communications à longue distance.

L'impulsion électromagnétique d'origine nucléaire comprend trois formes d'ondes :  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ , voir figure 7.5. L'onde  $E_1$  est une impulsion rapide, selon [41] (le temps de

montée est de l'ordre de la nanoseconde, où des centaines de nanosecondes) qui perturbe les systèmes en général, y compris les systèmes électriques à longue distance, les ordinateurs, les capteurs et les systèmes de contrôle électroniques. La forme d'onde  $E_2$  est plus longue et beaucoup plus faible en amplitude que la forme d'onde  $E_1$  et se manifeste dans le régime microseconde et milliseconde. Les impulsions de courant  $E_2$  sont comparables aux courants induits par les impacts de foudre. La forme d'onde  $E_3$  est une impulsion de faible amplitude et de longue durée qui persiste pendant des centaines de secondes et qui induit des courants géomagnétiques dans les grands conducteurs électriques, qui peuvent ensuite endommager les composants tels que des transformateurs de puissance. Les effets de forme d'onde  $E_3$  sont comparables à ceux des effets géomagnétiques solaires. En raison de cette similitude entre une impulsion  $E_3$  due à une explosion nucléaire et un orage géomagnétique induit par le soleil, on fait référence à l'énergie de ces orages comme IEM solaire. Pour rappel ci dessous l'orage géomagnétique du 13 mars 1989 qui provoqua un blackout électrique sur la province de Québec.

En effet, l'intense activité solaire de mars 1989 perturba la magnétosphère terrestre, et vit ses effets se manifester jusqu'au niveau du sol. Le champ magnétique atteignit le niveau record de parfois plus de 2000 nT, voir figure 7.6, les données de la NASA, entraînant de nombreuses perturbations ionosphériques : variations de l'orbite des satellites, perturbations des systèmes de navigation et des télécommunications.



Provided by the NASA Astrophysics Data System

FIGURE 7.6 – Données sur le champ magnétique de la NASA le 13 mars 1989.

En effet, le 13 mars 1989, à 1H28 TU débuta un puissant orage magnétique, la figure 7.6 témoigne d'un début de compression magnétosphérique. Le déplacement record de la magnétopause vers la terre allait engendrer l'apparition d'aurores boréales à des latitudes rarement atteintes, telle que le Texas par exemple. Plusieurs

réseaux électriques en Amérique du Nord ont ressenti l'effet de la tempête et signalé des incidents, allant de fluctuations mineures jusqu'à la défaillance de lignes et au bris d'équipements. C'est toutefois au Québec que les conséquences de cette tempête ont été les plus graves. Le choc a créé une trentaine de brusques variations du champ magnétique terrestre, provoquant le déclenchement des mécanismes de protection des lignes de transport d'électricité, isolant le réseau de la Baie-James et entraînant une panne d'électricité générale qui a duré 9 heures. Ce fut la province de Québec qui dut souffrir de ce blackout.

La plupart des études sur les IEM se concentrent sur les formes d'ondes  $E_1$ , l'impulsion d'énergie initiale importante, ou les formes d'ondes  $E_3$  de plus longue durée. Les IEM nucléaires ont été étudiées pour la première fois au début des années 1960, ainsi que leur interaction avec des objets complexes tels que les avions, les satellites, les navires dans [40].

Concrètement, une explosion nucléaire produira des rayons  $\gamma$ , qui excitent les molécules de l'air dans la haute atmosphère pour générer des électrons Compton. Ces électrons Compton se déplacent parallèlement aux rayons  $\gamma$  et tournent autour des lignes de champ géomagnétique. Les électrons secondaires sont induits lorsque les électrons Compton ionisent les molécules d'air. Le courant Compton primaire et le courant secondaire contribuent tous deux au champ électrique rayonné, qui forme une IEM en haute altitude.

Nous rappelons que l'effet Compton concerne la diffusion des électrons libres ou peu liés. Ici, l'électron est expulsé dans une direction donnée, c'est l'électron Compton. Le rayon  $\gamma$  incident est quant à lui diffusé dans une direction qui fait un certain angle avec la direction de l'électron Compton. Lorsque l'énergie du rayon incident croît, l'énergie emportée par l'électron Compton devient de plus en plus importante.

### 7.2.1 Impulsion électromagnétique nucléaire de type $E_3$

L'environnement électromagnétique  $E_3$  a deux phases voir [42], tous deux produisant des menaces importantes pour les systèmes électriques.

- 1. La première a une période de 1 à 10 secondes et est connue comme la «Blast Wave».
- 2. La seconde a une période de 10 à 300 secondes et est connue sous le nom de Heave Wave.

L'onde de choc où «Blast Wave» correspond à l'expansion d'une boule de feu nucléaire qui expulse le champ géomagnétique et crée une bulle magnétique. En effet, environ 75% de l'énergie d'une explosion nucléaire exo atmosphérique est émise sous forme de rayons X. Les rayons X émis vers le bas sont absorbés dans l'atmosphère, généralement entre 80 et 110 km d'altitude. La grande majorité des 25% restants de l'énergie, correspondant à l'énergie cinétique, ou l'énergie du mouvement, des débris, est devenue très ionisée et a donc une conductivité électrique élevée. Les débris se déploient vers l'extérieur, poussant le champ géomagnétique en avant de la région



conductrice, et cela forme une «bulle magnétique». L'expansion initiale de la bulle est déterminée par la vitesse des débris, qui est supérieure à 1000 km/s, et elle dépend de l'altitude à laquelle la détonation a lieu. Pour les altitudes inférieures à 300 km, l'effet dominant, ralentissant l'expansion, est la densité de l'atmosphère à l'extérieur de la bulle : la bulle devient asymétrique car elle s'étend plus facilement en hauteur dans l'air plus raréfié que vers le bas dans l'air plus dense. Pour les altitudes plus élevées, l'expansion est ralentie par la pression magnétique, qui est anisotrope. Mais l'anisotropie de la pression magnétique est telle que la bulle se dilate plus rapidement le long des lignes de champ que perpendiculairement aux lignes de champ magnétique.

La deuxième partie de l'IEM de type  $E_3$  s'appelle l'effet atmosphérique Heave wave. Pour des explosions supérieures à 130 km d'altitude, les débris de bombes et les ions d'air chauffés par le choc descendent le long des lignes de champ géomagnétique jusqu'à ce qu'ils déposent leur énergie à des altitudes proches de 130 km. Ce qui provoque de grands courants circulants dans l'ionosphère. Ces courants ionosphériques induisent un courant dans le sol dans la direction opposée sur une période de 10 à 100 secondes. La conductivité finie du sol signifie que le courant dans le sol est accompagné d'un champ électrique dans la même direction. L'intensité du champ électrique, bien qu'étant de faible amplitude, de l'ordre de dizaines de volts par kilomètre, se produit sur de longues durées et peut donc poser des problèmes pour les longues lignes de puissance et de communication.

### 7.2.2 Impulsion électromagnétique nucléaire de type $E_1$

D'autre part, l'IEM de type  $E_1$  est une impulsion rapide, allant généralement jusqu'à des niveaux de champ électromagnétique élevés qui ne sont généralement pas trouvés dans les événements naturels [1]. L'IEM est causée par un rayonnement gamma de haute énergie qui se déplace radialement loin du cœur de l'explosion nucléaire. Lors de l'explosion nucléaire qui se produit à des altitudes élevées les photons gamma parcourent de grandes distances avant d'interagir avec d'autres particules. Les rayons gamma dirigés vers la Terre interagissent avec l'atmosphère dense et les molécules d'air pour produire des électrons Compton et des ions positifs. Les électrons Compton commencent par se déplacer radialement à une vitesse relativiste, mais sont ensuite agités par le champ magnétique terrestre, qui les dévient. Cela provoque le rayonnement d'une IEM sur une surface massive. En raison de la courbure et de l'inclinaison vers le bas du champ magnétique terrestre au-dessus des Etats-Unis, l'IEM maximale se produit au sud de la détonation et la minimale au nord. Ainsi, l'IEM est produite par l'accélération des particules chargées dans le champ magnétique terrestre. Au sol (la surface de la Terre), et dans l'atmosphère où les humains peuvent être présents (au moins jusqu'à 50 000 pieds), il n'y a aucune radiation d'arme - aucune particule radioactive, aucun rayon gamma, aucun rayon, aucun neutron, aucun rayon bêta, juste un signal EM.

### 7.2.2.1 Description mathématique

Depuis des décennies, il existe de nombreux modèles définissant les IEM nucléaire. Les IEM nucléaires, et en particulier les formes d'ondes  $E_1$  sont caractérisées par des exponentielles doubles tout comme la foudre. Un modèle mathématique a été créé dès le début de la recherche sur ce sujet, et décrit aussi bien le domaine temporel que spectral. Dans ce chapitre, le champ électrique d'une IEM nucléaire est simulé dans le matériau composite. Nous étudions sa propagation dans le réseau de fibres de carbone.

La description en double exponentielle de l'onde IEM nucléaire a été définie dès les débuts de la recherche sur ce genre d'onde, et décrite dans [11].

Nous nous intéressons à l'expression dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$E(\omega) = E_0 k_1 \left( \frac{1}{i\omega + \alpha} - \frac{1}{i\omega + \beta} \right) \left( \frac{V}{m - Hz} \right), \quad (7.3)$$

avec les paramètres suivants :  $k_1$  une constante,  $E_0$  la constante d'intensité du champ électrique,  $\alpha$  la constante de décroissance et  $\beta$  la constante de temps de montée. Cette double exponentielle peut être caractérisée de plusieurs manières. Les équations sont définies grâce à trois variables  $E_0, \alpha, \beta$  qui vont décrire la forme de l'onde. Ces paramètres sont caractérisés par des quantités liées à des formes d'ondes mesurées : le pic maximal du champ électrique, le temps de montée de l'onde entre 10 – 90% puis le temps de décroissance de l'onde où le pic d'amplitude maximal décroît de  $\frac{1}{e}$ . Les premiers à publier, dans leur livre d'ingénierie [25], ces paramètres pour décrire une IEM nucléaire, sont les Laboratoires Bell. Des révisions ont été opérées depuis, corrigeant légèrement ces paramètres. Nous utiliserons dans nos simulations dans ce chapitre, les données de la norme notée IEC 61000 2-9.

Il existe de nombreuses normes d'IEM nucléaires caractérisées par des formes d'ondes en double exponentielle. Ces exemples et un modèle mathématique sont décrits dans [21] pour exprimer les caractéristiques temporelles et spectrales de l'impulsion.

Puisqu'elles sont proches commençons par comparer l'onde foudre avec l'IEM d'origine nucléaire. La figure 7.7 issue de [15] nous présente le temps de montée d'une IEM à haute altitude et l'onde de foudre, les amplitudes étant rapportées à leur valeur de crête.

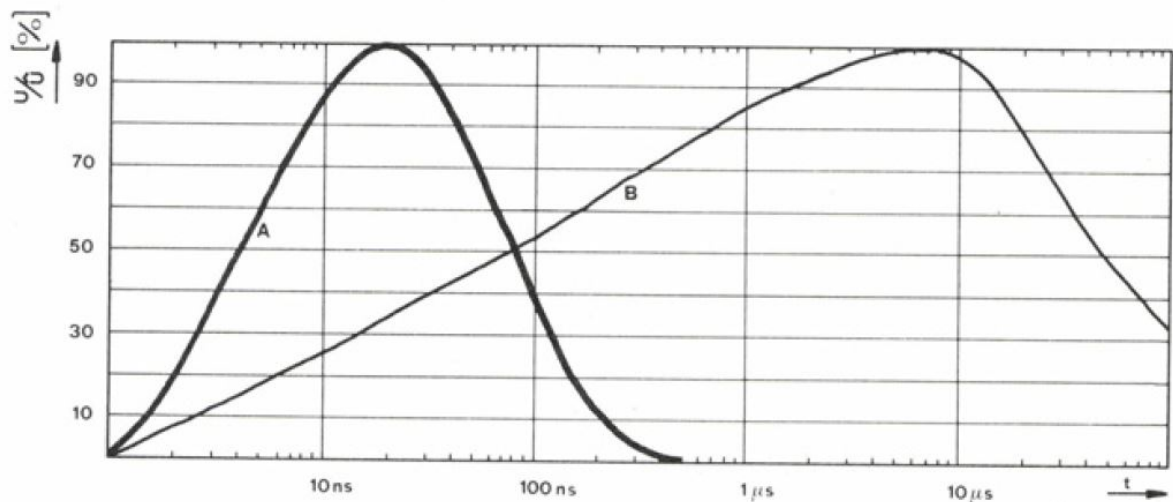


FIGURE 7.7 – Comparaison entre les impulsions IEM et onde de foudre. L'onde A correspond à l'IEM et l'onde B correspond à l'onde de foudre de type  $1.2/50\mu s$ .

L'IEM nucléaire est un signal très puissant, par exemple si on le compare au signal radio FM. Une transmission radio FM à 100 Mhz a une puissance d'émission de 10000 Watts. En fait, le signal FM est plus petit que le champ électrique de l'impulsion de type  $E_1$  d'un facteur  $5.4 \times 10^9$  en puissance. L'IEM nucléaire semble fournir une puissance incroyable.

Voici quelques unes de ces caractéristiques issues de la norme IEC [12] : l'intensité maximale du champ électrique est de  $50000 \text{ V/m}$  pour une puissance maximale de  $6.64 \times 10^6 \text{ W/m}^2$  et une énergie totale de  $W = 0.115 \text{ J/m}^2$ .

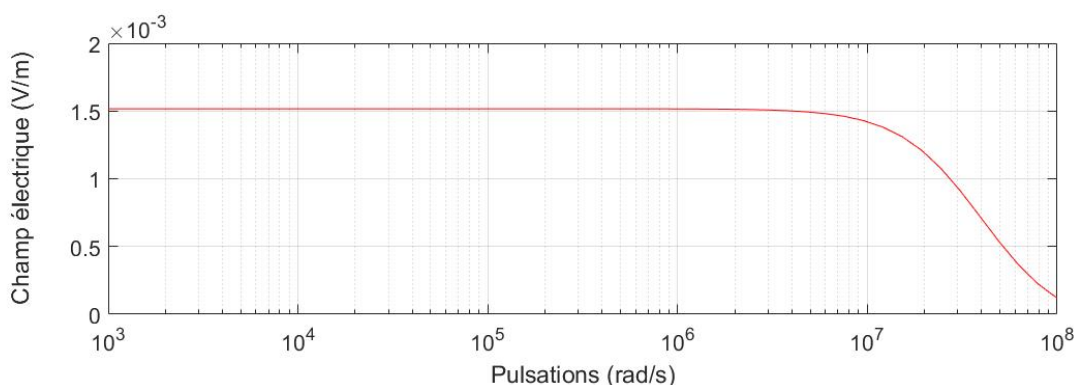


FIGURE 7.8 – Impulsion Electromagnétique  $E_1$  à diverses fréquences.

La figure 7.8 représente le champ électrique  $E(\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi f$ . Lorsque l'on analyse l'impulsion fréquentielle de la figure 7.8 on constate qu'entre

les pulsations  $\omega = 10^7 rad/s$  et  $\omega = 10^8 rad/s$  l'énergie chute à moins de 1%. La gamme de pulsations entre  $\omega = 100 rad/s$  à  $\omega = 10^7 rad/s$  est choisie pour nos simulations sur Freefem++,  $\omega = 2\pi f$ , avec  $f$  la fréquence.

### 7.2.3 Simulations numériques d'IEM nucléaires

Maintenant revenons à notre objectif. On considère dans ce qui suit qu'une IEM d'origine nucléaire illumine notre matériau composite. On résoud le problème direct adimensionné

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta E - k^2 E = 0, \text{ dans } \Omega_a \\ -\Delta E - k_r^2 E = 0, \text{ dans } \Omega_r \\ -\Delta E - k_c^2 E = 0, \text{ dans } \Omega_c \\ \partial_n E = ikE \text{ sur } \Gamma_g \\ \partial_n E = ik_r E \text{ sur } \Gamma_d \\ E = E_{inc} = E(\omega) \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (7.4)$$

avec  $k_r$  et  $k_c$  les constantes de propagation adimensionnées du chapitre précédent.

Maintenant le diamètre des fibres est de  $\phi = 5\mu m$ , il n'occupe plus que la moitié du volume. Notre conductivité caractéristique calculé à partir de la borne supérieure de Wiener, dépend donc de la fraction volumique des fibres. Elle s'écrit  $\bar{\sigma} = f_c \sigma_c + (1 - f_c) \sigma_r = 1962 S/m$ , avec  $f_c = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{16}$ . Nous représentons dans toutes les illustrations ci dessous, le champ électrique et le champ magnétique pour une fréquence de 10 Hz.

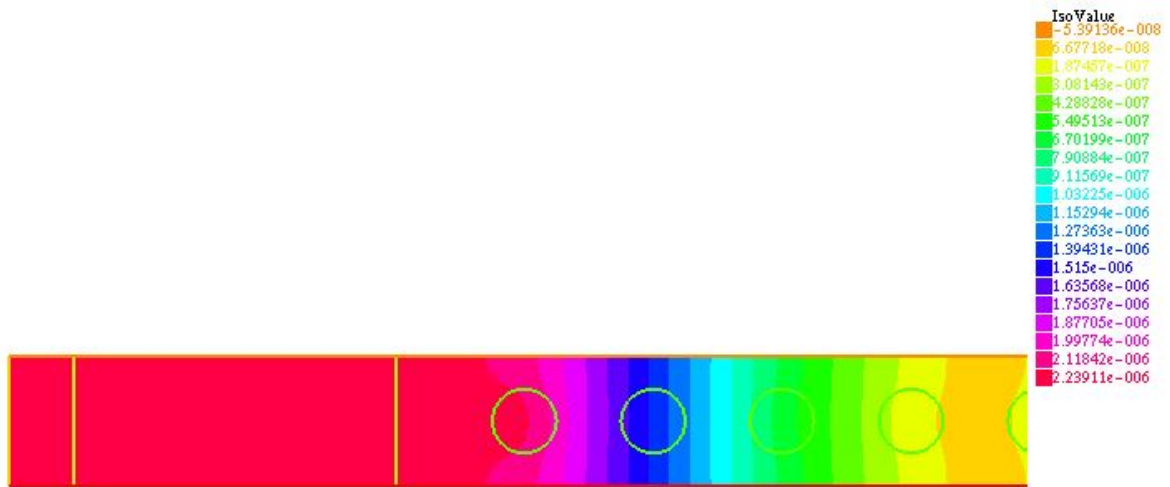


FIGURE 7.9 – Illustration pour  $f = 10Hz$  du module champ électrique, la résine époxy est nano-chargée.

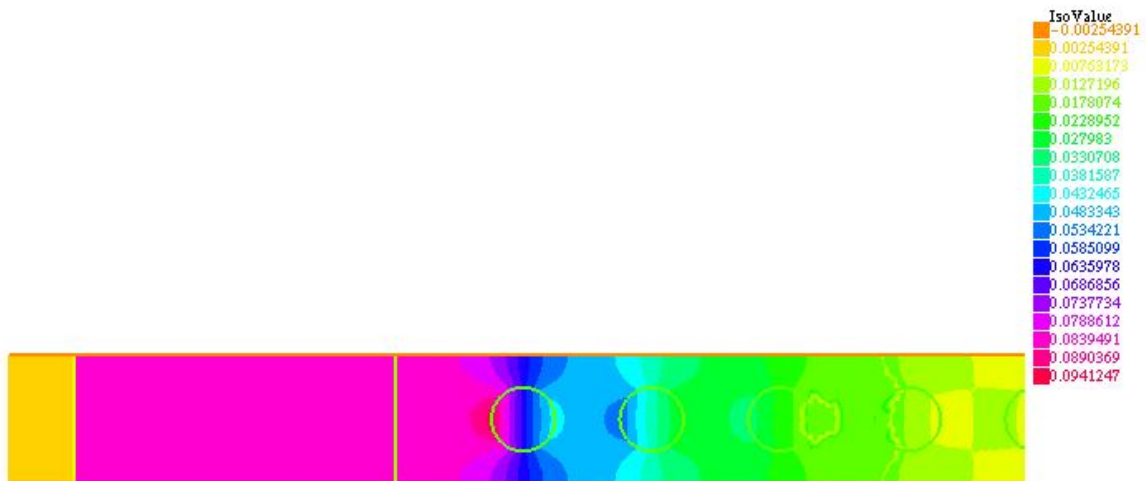


FIGURE 7.10 – Illustration pour  $f = 10Hz$  du module champ magnétique, la résine époxy est nano-chargée.

Nous représentons figures 7.11, le champ électrique pour une fréquence de 100 Hz.

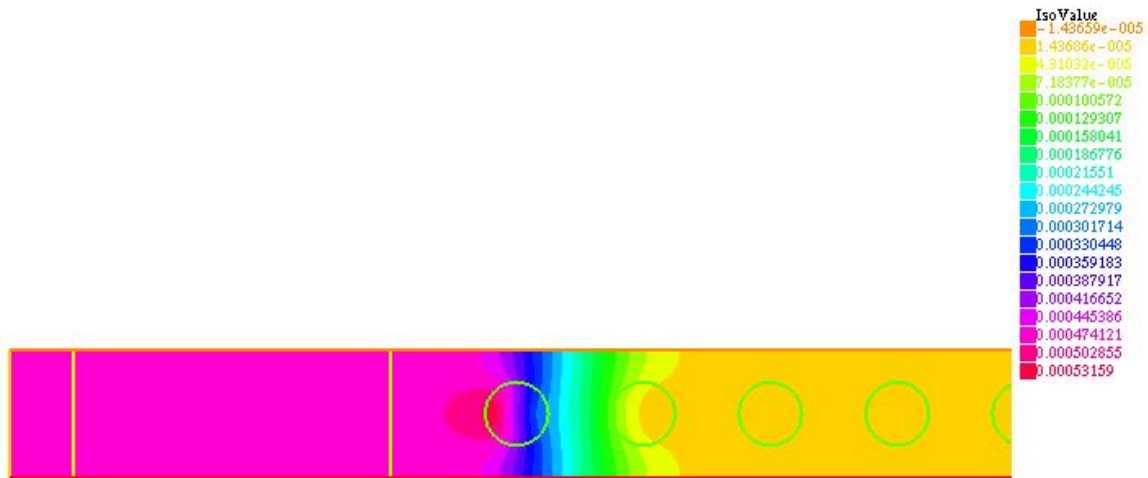


FIGURE 7.11 – Illustration pour  $f = 100Hz$  du module champ électrique, la résine époxy est nano-chargée.

Nous illustrons figures 7.12 et 7.13, le champ électrique et le champ magnétique pour une fréquence de 1000 Hz.

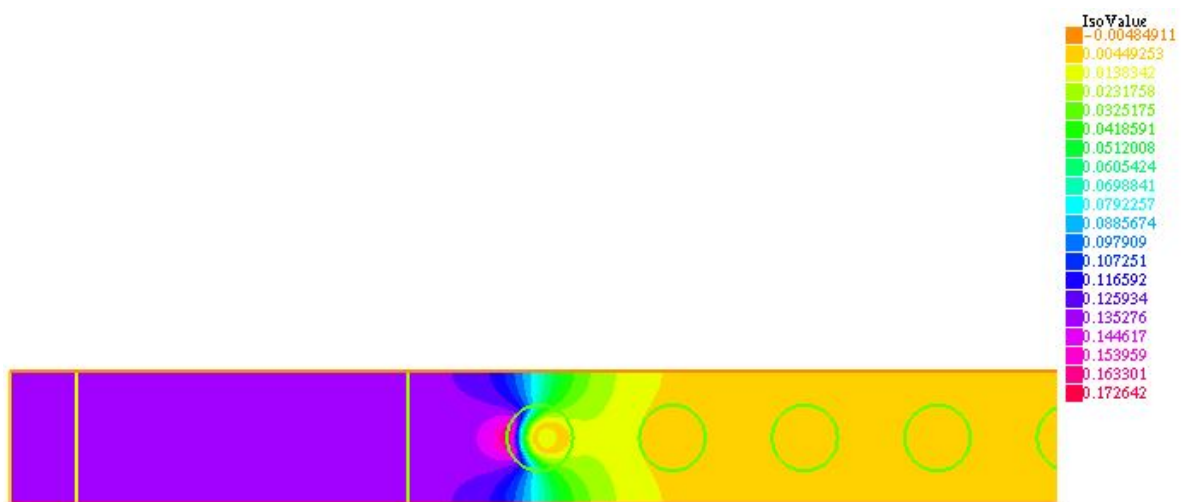


FIGURE 7.12 – Illustration pour  $f = 1000Hz$  du module champ électrique, la résine époxy est nano-chargée.

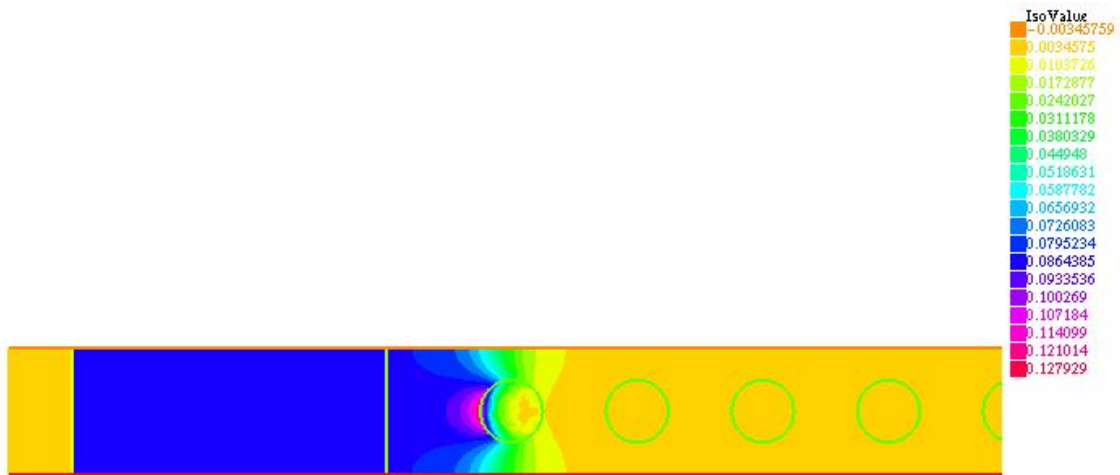


FIGURE 7.13 – Illustration pour  $f = 1000Hz$  du module champ magnétique, la résine époxy est nano-chargée.

Le figure 7.14 représente la propagation du champ électrique dans le matériau composite et provoquée par l'IEM située situé à  $x = 1$  m, pour la fréquence 1 Mhz.

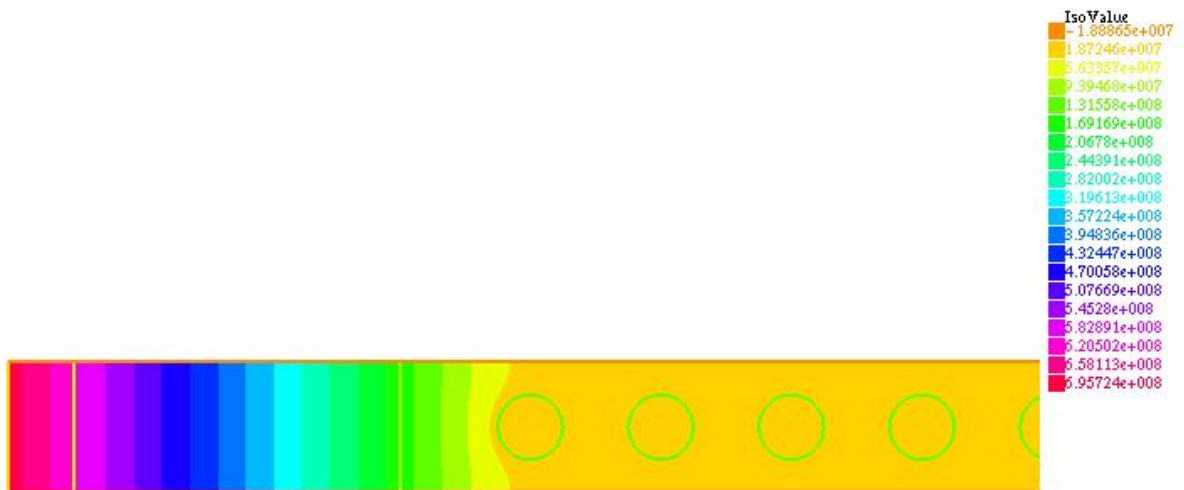


FIGURE 7.14 – Illustration pour  $f = 1Mhz$  du module champ électrique, la résine époxy est nano-chargée.

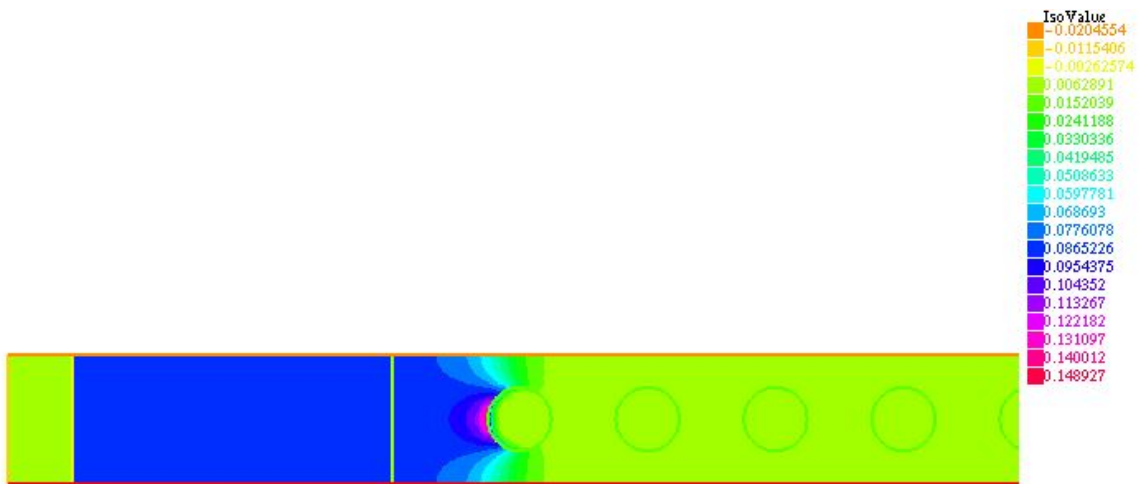


FIGURE 7.15 – Illustration pour  $f = 1MHz$  du module champ magnétique, la résine époxy est nano-chargée.

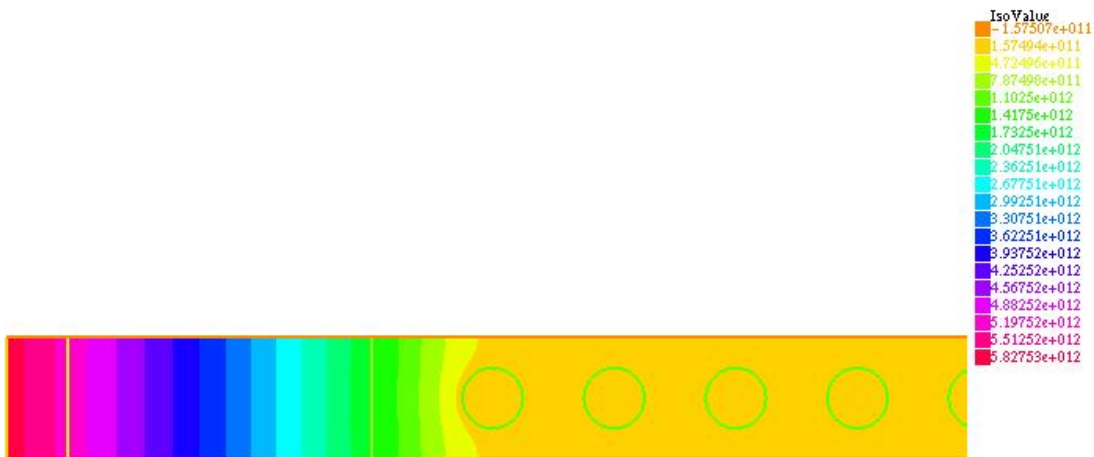


FIGURE 7.16 – Illustration pour  $f = 10MHz$  du module champ électrique, la résine époxy est nano-chargée.



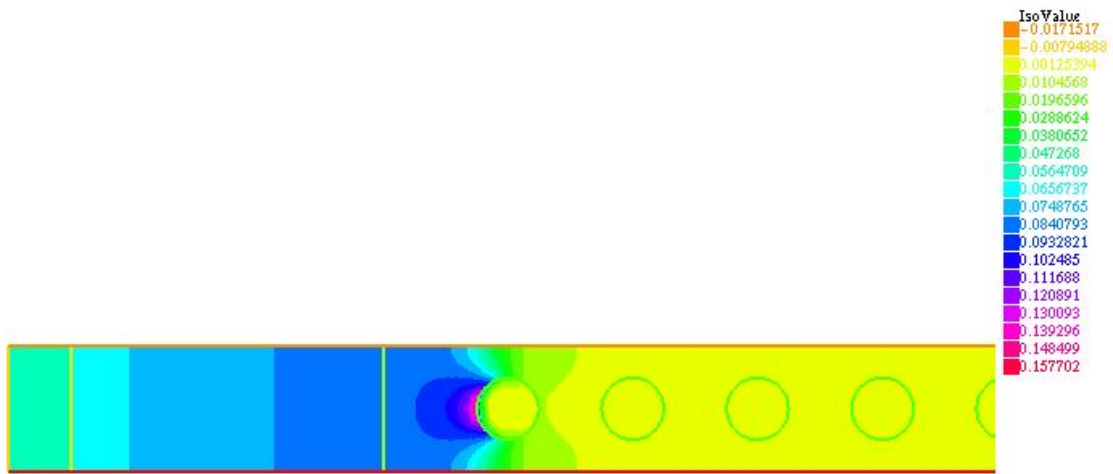


FIGURE 7.17 – Illustration pour  $f = 10\text{MHz}$  du module champ magnétique, la résine époxy est nano-chargée.

Dans les graphiques suivants, on décrit le module du champ électrique

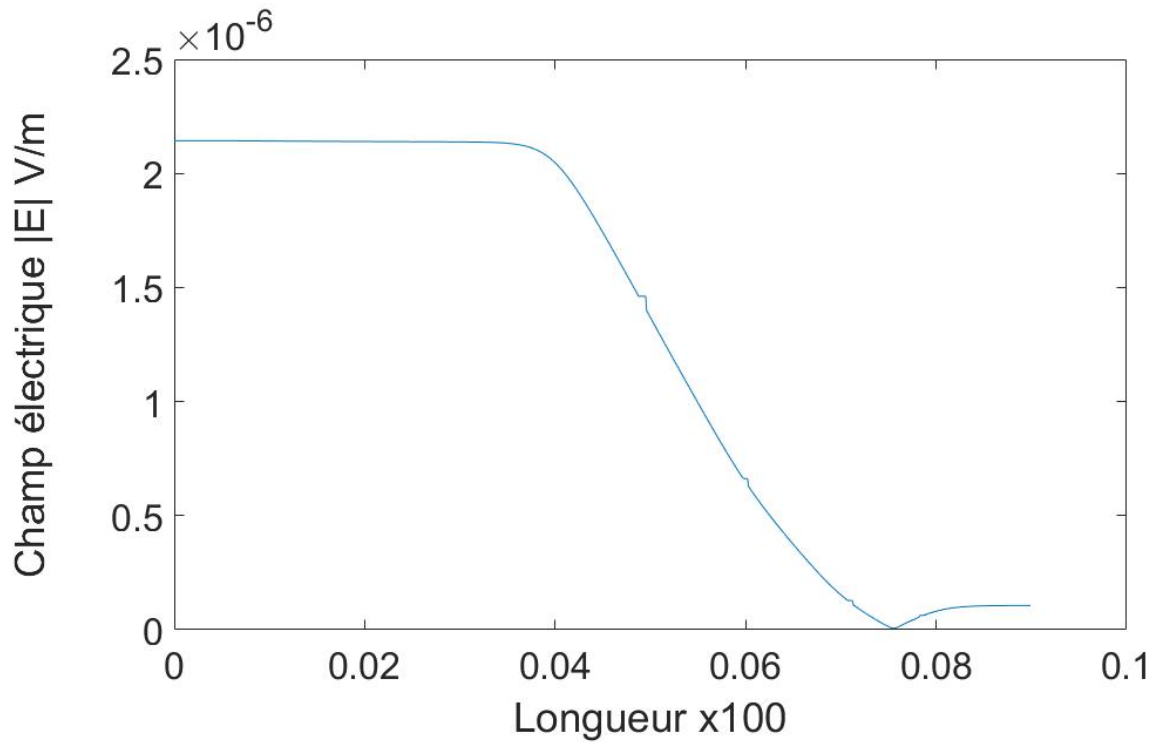


FIGURE 7.18 – Module du champ électrique pour 10 Hz.

Figure 7.18, on trace la propagation du champ électrique le long du composite à très basse fréquence :  $f= 10$  Hz. La source est située en  $x = 1$  m, le champ électrique décroît, brusquement lorsqu'il se propage dans le composite nano-chargé. Dans les basses fréquences le composite ne voit qu'un bout de l'onde, le champ transmis est très faible.

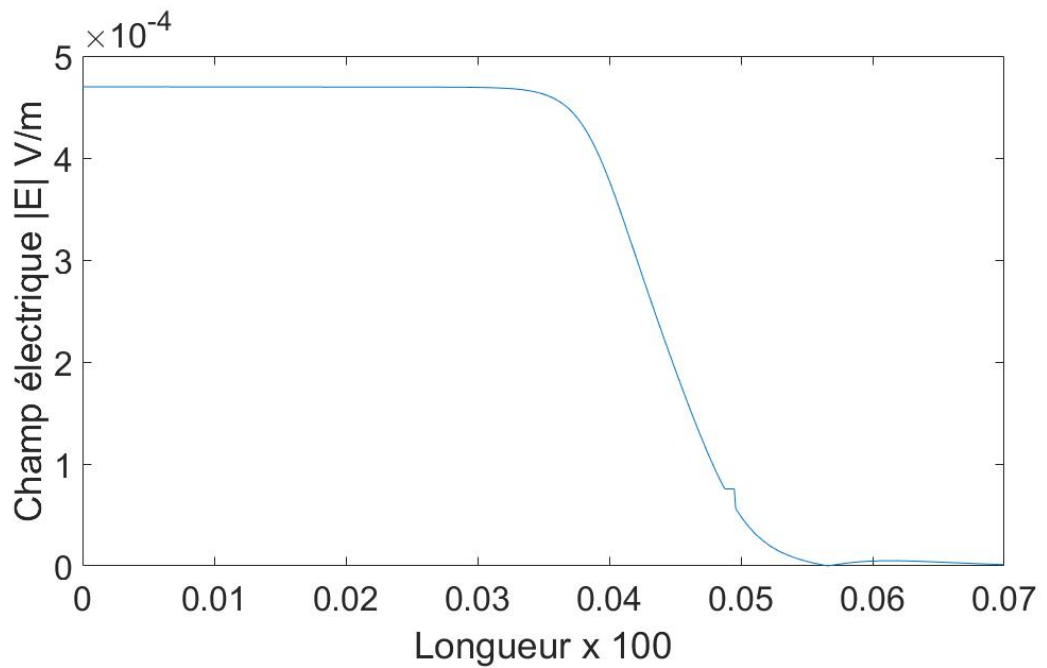


FIGURE 7.19 – Module du champ électrique pour 100 Hz.

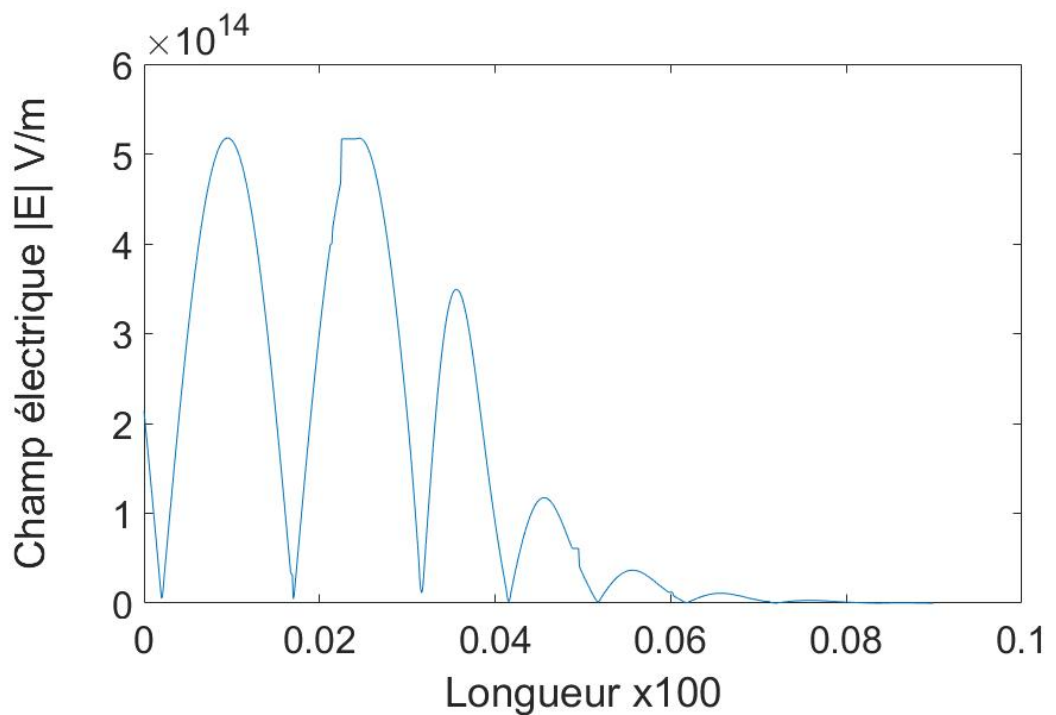


FIGURE 7.20 – Module du champ électrique pour 100 MHz.

### 7.2.3.1 Discussion sur le coefficient de transmission

Le tableau 7.1 présente les coefficients de transmission du champ électrique et du champ magnétique dans le composite pour un composite conducteur c'est à dire pour une résine nano-chargée.  $R_E = \frac{|E_t|}{|E_i|}$  définit le coefficient de transmission du champ électrique et  $R_H = \frac{|H_t|}{|H_i|}$  le coefficient de transmission du champ magnétique.

Fréquences	$R_E$	$R_H$
10Hz	0.072	1
100Hz	0.003	1
1Khz	$1.45 \cdot 10^{-5}$	1
10Khz	$5.69 \times 10^{-6}$	0.12
100Khz	$5.84 \times 10^{-7}$	0.006
1Mhz	$2.7 \times 10^{-8}$	$2.4 \times 10^{-4}$

TABLE 7.1 – Coefficient de transmission, pour les diverses fréquences.

On constate que la transmission du champ électrique est faible notamment lorsque

la fréquence augmente, pour les très basses fréquences, on arrive à une transmission de 7.2% .Pour une fréquence de 1 Mhz il est très faible. Par contre, pour les très basses fréquences le champ magnétique est totalement transmis. Jusqu'à 1 Khz le champ magnétique est transmis à 100%. Il n'est plus transmis que de 0.6% à 100 Khz. Donc les phénomènes très basses fréquences tels que la foudre et les IEM, sont caractérisés par une transmission totale du champ magnétique dans un matériau composite.

### 7.2.3.2 Discussion sur l'énergie dissipée par effet Joule

Lorsqu'un conducteur est sollicité par un courant, les charges électriques interagissent avec les atomes du milieu dans lequel ils se déplacent, constituant une résistance à leurs déplacements. Pour transférer une quantité déterminée de courant électrique, il faut donc fournir une puissance supplémentaire qui sera dissipée sous forme thermique : c'est l'effet Joule du nom du physicien anglais James Prescott Joule qui l'a découvert en 1840.

On va exprimer les pertes par effet Joule au passage de l'IEM dans le cas où la résine est nano-chargée. L'énergie dissipée s'écrit  $\frac{dW}{d\tau} = j.E = \sigma.E^2$ ,  $\tau$  étant le volume. Le tableau suivant 7.2 résume les différentes valeur de l'énergie dissipée en  $J/m^2$  en fonction de la fréquence, avec toujours la conductivité de la résine nano-chargée  $\sigma_r = 0.001 S/m$  et la conductivité des fibres de carbone  $\sigma_c = 40000 S/m$ , pour un diamètre de fibre de  $5 \mu m$  :

Fréquences (Hz)	Energie ( $J/m^2$ )
10Hz	$1.12 \times 10^{-15}$
100Hz	$4.59 \times 10^{-13}$
1Khz	$3.24 \times 10^{-10}$
10Khz	$4.66 \times 10^{-7}$
100Khz	0.004565
1Mhz	2978
100Mhz	$2.20 \times 10^{11}$

TABLE 7.2 – Energie dissipée dans le composite en fonction de la fréquence.

On constate d'après le tableau 7.2 que la dissipation de l'énergie par effet Joule est nettement plus importante dans le matériau nano-chargé à partir de 1 Mhz. On constate que les pertes par effet Joule sont absentes à très basses et basses fréquences. Par contre, elles augmentent et sont très importantes à moyennes fréquences.

A basse fréquence, il n'y a pas de dissipation par effet Joule dans le matériau nano-chargé. Puis elle apparaît, lorsque la fréquence augmente et l'apparition de champs

---

induits.

# CONCLUSION

---

Les avions subissent de nombreuses sollicitations et agressions électromagnétiques. L'emploi croissant des matériaux composites dans le domaine aéronautique nécessite de développer et optimiser de nouveaux modèles pour faire face à ce type d'agression. Cependant même si leur performance est avérée en terme de fiabilité, de résistance et de gain en poids, par contre leur plus faible conductivité électrique par rapport aux anciens avions, ne leur permet plus une protection optimale.

Dans le cas des matériaux composites conducteurs, il est nécessaire de prévoir leur comportement électromagnétique afin de développer des modèles performants face aux diverses perturbations.

L'objectif de cette thèse était de modéliser la réponse du matériau composite aux perturbations électromagnétiques. A cet effet, nous utilisons les méthodes d'homogénéisation appliquées pour le cas d'un matériau périodique. Elle repose d'une part sur l'analyse asymptotique du champ électromagnétique et d'autre part elle apporte une preuve rigoureuse du problème homogénéisé grâce à la convergence double échelle. Il a été constaté que les résultats théoriques étaient confirmés par les résultats des simulations numériques, les résultats du problème direct adimensionné sont proches de ceux du problème homogénéisé.

Après avoir testé notre modèle sur des cas simples, nous avons validé la méthode d'homogénéisation puis nous avons étendu notre étude à la réponse du matériau à l'onde électromagnétique issue de l'arc de foudre en retour de type A, c'est à dire l'onde la plus agressive que puisse subir un avion durant le processus de la foudre.

Nous proposons ensuite l'étude d'une onde encore plus énergétique, une impulsion électromagnétique nucléaire, sa forme en double exponentielle est proche du phénomène de foudre. Cependant, la durée du pic de montée est beaucoup plus rapide de l'ordre de la nanoseconde alors que pour la foudre elles est de l'ordre du la microseconde. Nous calculons le coefficient de transmission, puis l'énergie dissipée par effet Joule dans le composite nano-chargé. Nous constatons qu'à basse fréquence le composite ne dissipe pas d'énergie. Lorsque la fréquence augmente la dissipation est maximale.

**Perspectives** : Le cas d'homogénéisation dans les hautes fréquences, par exemple pour les infrarouges, n'est pas traité dans cette thèse. Elle peut être donc une perspective de travail, avec l'étude de la convergence double échelle dans le cas périodique. Des simplifications avaient été réalisées sur la perméabilité et permittivité relative qui étaient supposées constantes, on pourra donc les introduire sous forme tensorielles.

Les perspectives sont multiples. Cette thèse n'était qu'une première approche. L'objectif est d'améliorer le modèle. Les deux derniers chapitres étaient une introduction

---

aux agressions électromagnétiques. Il reste encore à les étudier dans le détail et notamment dans le domaine temporel. On pourrait aussi, étudier la réponse du matériau composite suivant sa distance à la source d'excitation.





## 7.2.4 Presentation of all cases of tables 1, 2, 3 and 4

- The case 1 corresponds to the air not ionized, a resin not doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective electric conductivity in the direction of the carbon fibers. We have for the effective electric conductivity  $\bar{\sigma} = \sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$ , the resin conductivity is about  $\sigma_r \sim 10^{-10} S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is about  $10^{-14} S.m^{-1}$ . So when we want to calculate the ratio in (2.43)-(2.45) depending on  $\varepsilon$  we get :  $\frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^7$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^9$ .

- In case 2, the air is not ionized, the resin is doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity is in direction of carbon fibers. We have like the case 1  $\bar{\sigma} = \sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$ . The resin conductivity is about  $\sigma_r \sim 10^{-3} S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is about  $10^{-14} S.m^{-1}$ . So  $\frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^4$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^9$ .

- In case 3, the air is not ionized, the resin is not doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity is orthogonal to the fibers.  $\bar{\sigma} = \sigma_r \sim 10^{-10} S.m^{-1}$ . The carbon fiber conductivity is about  $\sigma_c \sim 10^4 S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is about  $10^{-14} S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^7}$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^2$ .

- Case 4 corresponds to the air non ionized, the resin doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity orthogonal to the fibers. The effective electric conductivity is  $\bar{\sigma} = \sigma_r \sim 10^{-3} S.m^{-1}$ . The carbon fiber conductivity is about  $\sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is about  $10^{-14} S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^4}$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^6$ .

- In case 5, the air is ionized, the resin is not doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity is in the direction of the carbon fibers. This one is equal  $\bar{\sigma} = \sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$ , the resin conductivity is about  $\sigma_r \sim 10^{-10} S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is now about  $4242 S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^7$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon$ .

- Case 6 corresponds to the air ionized, the resin doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity in direction of the carbon fibers. This one is equal  $\bar{\sigma} = \sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$ , the resin conductivity is about  $\sigma_r \sim 10^3 S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is now about  $4242 S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_r}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon^4$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \varepsilon$ .

- Case 7 corresponds to the air ionized, the resin not doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity orthogonal to the fibers. The effective conductivity is  $\bar{\sigma} = \sigma_r \sim 10^{-10} S.m^{-1}$ , the carbon fibers conductivity is about  $\sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is now about  $4242 S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^7}$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^6}$ .

- Case 8 corresponds to the air ionized, the resin doped and  $\bar{\sigma}$  is the effective conductivity orthogonal to the fibers. The effective conductivity is  $\bar{\sigma} = \sigma_r \sim 10^{-3} S.m^{-1}$ , the carbon fibers conductivity is about  $\sigma_c \sim 40000 S.m^{-1}$  and the conductivity in the air is now about  $4242 S.m^{-1}$ .  $\frac{\sigma_c}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^4}$  and  $\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

---

## 7.2.5 Structure of the equations depending of $\varepsilon$

For  $\bar{\omega} = 100rad.s^{-1}$ , we have

Case 1

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{11}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^9, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^2. \quad (7.5)$$

Case 2

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{11}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^2. \quad (7.6)$$

Case 3

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{12}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^{10}, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^3. \quad (7.7)$$

Case 4

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{13}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^3. \quad (7.8)$$

Case 5

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^9, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^2. \quad (7.9)$$

Case 6

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^2. \quad (7.10)$$

Case 7

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^{10}, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^3. \quad (7.11)$$

Case 8

$$\eta = 9 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon^3. \quad (7.12)$$

For  $\bar{\omega} = 10^6rad.s^{-1}$

Case 1

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^9, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.13)$$

Case 2

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^9, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.14)$$

---

Case 3

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{10}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^8, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon. \quad (7.15)$$

Case 4

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^{11}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.16)$$

Case 5

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.17)$$

Case 6

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.18)$$

Case 7

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^8, \Sigma_c^\varepsilon = \varepsilon. \quad (7.19)$$

Case 8

$$\eta = 5 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_c^\varepsilon = 1. \quad (7.20)$$

For  $\bar{\omega} = 10^{10} \text{rad.s}^{-1}$

Case 1

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (7.21)$$

Case 2

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^2, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (7.22)$$

Case 3

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^8, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.23)$$

Case 4

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^9, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.24)$$

Case 5

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (7.25)$$

Case 6

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^2, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (7.26)$$

---

Case 7

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.27)$$

Case 8

$$\eta = 1 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.28)$$

For  $\bar{\omega} = 10^{14} \text{rad.s}^{-1}$

Case 1

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.29)$$

Case 2

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^6, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.30)$$

Case 3

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^5, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^4}. \quad (7.31)$$

Case 4

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \varepsilon^7, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.32)$$

Case 5

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^4, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.33)$$

Case 6

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.34)$$

Case 7

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon^3, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^4}. \quad (7.35)$$

Case 8

$$\eta = 0 \text{ and } \Sigma_a^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}, \Sigma_r^\varepsilon = \varepsilon, \Sigma_c^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}. \quad (7.36)$$

## 7.2.6 The transmission Maxwell problem

Taking a test function  $V \in C^1(\Omega)$  with compact support in  $\Omega_c^\varepsilon$ , in weak formulation (3.12) associated with the problem ((2.72), (2.75), (2.76)). Since

$$\int_{\Omega} \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} = \langle \nabla \times \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon}, \bar{V} \rangle_{\Omega_c^\varepsilon}, \quad (7.37)$$

we deduce the third equation in (3.13). Similarly, taking  $V \in C^1(\Omega)$  with compact support respectively in  $\Omega_r^\varepsilon$  and  $\Omega_a^\varepsilon$ , we obtain the first and the second equation in (3.13). Now, since  $E|_{\Omega_a^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_a^\varepsilon)$  and  $E|_{\Omega_r^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_r^\varepsilon)$ , let  $V \in C_0^1(\Omega_a^\varepsilon \cup \Omega_r^\varepsilon)$  integrating by parts we get

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a^\varepsilon \cup \Omega_r^\varepsilon} E \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_a^\varepsilon} E|_{\Omega_a^\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} E|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \times E|_{\Omega_a^\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma_{ra}} (E|_{\Omega_a^\varepsilon} \times e_2 - E|_{\Omega_r^\varepsilon} \times n|_{\Omega_r^\varepsilon}) \cdot \bar{V} \, ds. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Since on every point of  $\Gamma_{ra}$   $e_2 = -n|_{\Omega_r^\varepsilon}$  the assumed continuity require

$$E|_{\Omega_a^\varepsilon} \times e_2 = E|_{\Omega_r^\varepsilon} \times n|_{\Omega_r^\varepsilon}, \quad (7.39)$$

we obtain the fourth relation in (3.13). With the same argument on  $\Gamma_{cr}^\varepsilon$ , we obtain the last relation in (3.13). This shows that (3.12) implies (3.13). And, if  $E^\varepsilon$  is solution to (3.13) following that for any regular set  $\hat{\Omega}$  in  $\Omega$  the Stokes's formula gives, for more details see p 57, 58 of P. Monk's book [31] :

$$\forall E, V \in \mathbf{H}(\text{curl}, \hat{\Omega}) \quad \int_{\hat{\Omega}} \nabla \times E \cdot \bar{V} - E \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} = \langle E \times n_{\hat{\Omega}}, \bar{V}_T \rangle_{\partial \hat{\Omega}} \quad (7.40)$$

$\mathbf{H}(\text{curl}, \hat{\Omega})$  has the same definition as  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  with  $\Omega$  replaced by  $\hat{\Omega}$  and where  $V_T = (n \times V) \times n$ , and  $n_{\hat{\Omega}}$  is the unit outward normal of  $\partial \hat{\Omega}$ . For all  $V \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ ,  $V|_{\Omega_r^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_r^\varepsilon)$ ,  $V|_{\Omega_a^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_a^\varepsilon)$  and  $V|_{\Omega_c^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_c^\varepsilon)$ . Hence, fixing any  $E' \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  according to the second equation in (3.13), we have  $\nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_r^\varepsilon)$  then applying (7.40) in  $\Omega_r^\varepsilon$  with  $E = \nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon}$  and  $V$  we get

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_r^\varepsilon} \nabla \times \nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \langle \nabla \times E|_{\Omega_r^\varepsilon} \times n|_{\Omega_r^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{ra}} \\ &\quad + \langle \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon} \times n|_{\Omega_c^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{cr}^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Doing the same for  $\Omega_c^\varepsilon$ , we have

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla \times \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon} \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \langle \nabla \times E|_{\Omega_c^\varepsilon} \times n|_{\Omega_c^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{cr}^\varepsilon}. \quad (7.42)$$

Finally for  $\Omega_a^\varepsilon$ , we have

$$\int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_a^\varepsilon} \nabla \times \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \langle \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \times e_2, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_d} - \langle \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \times e_2, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{ra}}. \quad (7.43)$$

Summing the relations above since in every point of  $\Gamma_{ra}$   $n_{|\Omega_r^\varepsilon} = -e_2$  and in every point of  $\Gamma_{cr}$   $n_{|\Omega_c^\varepsilon} = -n_{|\Omega_r^\varepsilon}$ , it comes

$$\int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \times \nabla \times E^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} + \langle [\nabla \times E^\varepsilon \times n], \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{ra}} + \langle [\nabla \times E^\varepsilon \times n], \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{cr}} - i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times n^\varepsilon \cdot \bar{V}_T \, d\sigma. \quad (7.44)$$

According to (3.12) and the first, second and third equations in (3.13) we have

$$\langle \nabla \times E_{|\Omega_c^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_c^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{cr}} - \langle \nabla \times E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{cr}} + \langle \nabla \times E_{|\Omega_r^\varepsilon}^\varepsilon \times n_{|\Omega_r^\varepsilon}, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{ra}} + \langle \nabla \times E_{|\Omega_a^\varepsilon}^\varepsilon \times e_2, \bar{V}_T \rangle_{\Gamma_{ra}} = 0, \quad (7.45)$$

for all  $V \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  which causes the last two equalities in (3.13) and concludes the first part of the proof.

Reciprocally, integrating by parts (3.13) we have :

$$\forall V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_a^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta + i\omega \Sigma_a^\varepsilon) E^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\Gamma_d} H_d \times n^\varepsilon \cdot \bar{V}_T \, d\sigma, \quad (7.46)$$

and

$$\forall V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_r + i\omega \Sigma_r^\varepsilon) E^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (7.47)$$

and

$$\forall V \in \mathbf{X}^\varepsilon(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \times E^\varepsilon \cdot \nabla \times \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_c^\varepsilon} (-\omega^2 \varepsilon^\eta \epsilon_c + i\omega \Sigma_c^\varepsilon) E^\varepsilon \cdot \bar{V} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (7.48)$$

By adding these three integrals, we get the variational formulation (3.12) associated with the problem ((2.72), (2.75), (2.76)).

Taking the divergence of the first three equations of (3.13) we get (2.78).

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1]
- [2] [http://fr.wikipedia.org/wiki/matau\\_composite](http://fr.wikipedia.org/wiki/matau_composite).
- [3] T. Abboud and I. Terrasse. Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes. *Centre Poly-Média de l'école Polytechnique*, 2007. 3eme trimestre 2007, n ISBN 978-2-7302-1436-0.
- [4] Sihvola A.H. Electromagnetic mixing formulas and applications. *Electromagnetic Waves Series 47*, 199. The Institute of Electrical Engineers.
- [5] Airbus. [https://airbus-h.assetsadobe2.com/is/image/content/dam/products-and-solutions/structure/a350\\_forward\\_fuselage.jpg?wid=800&fit=constrain](https://airbus-h.assetsadobe2.com/is/image/content/dam/products-and-solutions/structure/a350_forward_fuselage.jpg?wid=800&fit=constrain). 2011.
- [6] G. Allaire. Homogenization and Two-scale Convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [7] G. Allaire and M. Brian. Multiscale convergence and reiterated homogenization. *Proc.Roy.Soc.Edinburgh*, F126 :297–342, 1996.
- [8] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani. Homogenisation of degenerate wave equations with periodic coefficients. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(5) :1226–1253, 1993.
- [9] Y. Amirat and V. Shelukhin. Homogenization of time-harmonic maxwell equations and the frequency dispersion effect. *J.Maths.Pures.Appl*, 95 :420–443, 2011.
- [10] A. Back and E. Frénod. Geometric two-scale convergence on manifold and applications to the Vlasov equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Serie S. Special Issue on Numerical Methods based on Homogenization and Two-Scale Convergence*, 8 :223 – 241, 2015.
- [11] Baum.CE.E. Some considerations concerning analytic emp criteria waveforms. *Theoretical Note 285*, 1976.
- [12] A. Bennett. Coupling analyses of the high altitude electromagnetic pulse (hemp) to a satcom system. 2014. A Major Qualifying Project submitted to the faculty of Worcester Polytechnic Institute.
- [13] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 5. North Holland, 1978.
- [14] S. Berthier. Optique des milieux composites. *Ed. Polytechnicia.*, page 67, 1993. Paris.
- [15] J. Bertuchoz. La simulation de l'impulsion électromagnétique d'une explosion nucléaire. *Vorlesung KRIEG IM AETHER*, 1977/1978.

- 
- [16] G. Bouchitte, C. Bourel, and D. Felbacq. Homogenization of the 3d maxwell system near resonances and artificial magnetism. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347 :571576, OPTmonth = , OPTnote = , OPTannote = , 2009.
- [17] D Cionarescu and P. Donato. An introduction to homogenization. *Oxford University Press*, 1999.
- [18] M. Costabel, M. Dauge and S. Nicaise. Corner singularities of maxwell interface and eddy current problems. *Advances and Applications*, 147 :241–256, 2004.
- [19] N. Crouseilles, E. Frenod, S. Hirstoaga, and A. Mouton. Two-Scale Macro-Micro decomposition of the Vlasov equation with a strong magnetic field. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(08) :1527–1559, November 2012.
- [20] E. Frénod, P. A. Raviart, and E. Sonnendrücker. Asymptotic expansion of the Vlasov equation in a large external magnetic field. *J. Math. Pures et Appl.*, 80(8) :815–843, 2001.
- [21] D.V. Giri and D. Prather. Risetime evolution in hemp (high-altitude electromagnetic pulse) e1 waveforms - technology and standards. *IEEE*, 55 :484–491, 2013.
- [22] F. Guenneau, S. Zolla and A. Nicolet. Homogenization of 3d finite photonic crystals with heterogeneous permittivity and permeability. *Waves in Random and Complex Media*, pages 653–697, 2007.
- [23] P.R.P. Hoole and S.R.H Hoole. waves along an unmagnetized lightning plasma channel. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6) :3165–3167, 1988.
- [24] P.R.P. Hoole, S.R.H. Hoole, S. Thirukumaran, R. Harikrishnan, K. Jeevan, and K Pirapaharan. Aircraft-lightning electrostatics using the transmission line model part i : review of the transmission line model. *Progress In Electromagnetics Research M*, 31 :85 – 101, 2013.
- [25] Bell Telephone Laboratories. *EMP Engineering and Design Principles*. Electrical Protection Department,, 1975.
- [26] P. Laroche, P. Blanchet, A. Delannoy, and F. Issac. Experimental studies of lightning strikes to aircraft. *JOURNAL AEROSPACE LAB*, page 112, 2012.
- [27] J.-L. Lions. Some methods in the mathematical analysis of system and their control. *Science press*, 65, 1981. Kexue Chubanshe.
- [28] O. Maurice. Cours : Introduction à la compatibilité electromagnétique des systèmes embarqués et des télmmunications.
- [29] J.C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phisophical transacting of the Royal Society of London*, pages 459–512, 1885.
- [30] J.C. Maxwell. On physical lines of force. *Phisophical transacting of the Royal Society of London*, page 1861, 1885.



- 
- [31] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Numerical Mathematics and scientific computation. Oxford Science publication, clarendon press - oxford edition, 2003.
- [32] J.C. Nédélec. Acoustic and electromagnetic equations ; integral representations for harmonic problems. *Springer-Verlag.*, 2001. Berlin.
- [33] M. Neuss-Radu. Some extensions of two-scale convergence. *Comptes rendus de l'Academie des sciences. Serie 1.*, 322(9) :899–904, 1996.
- [34] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3) :608–623, 1989.
- [35] G. Nguetseng. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21(6) :1394–1414, 1990.
- [36] S. Nicaise, S. Hassani and A. Maghnouji. Limit behaviors of some boundary value problems with high and/or low valued parameters. *Advances in differential equations*, 14(9-10) :875–910, 2009.
- [37] Onera. *Lightning Hazards to Aircraft and Launchers*. AerospaceLab, 2012.
- [38] S. Ouchetto, O. Zouhdi and A. et al. Bossavit. Effective constitutive parameters of periodic composites. *Microwave conference, 2005 European*, IEE :2, 2005.
- [39] H. E. Pak. Geometric two-scale convergence on forms and its applications to maxwell's equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 135A :133–147, 2005.
- [40] D. V. Giri R. L. Gardner F. M. Tesche R L. Hutchins Prather, W. D. and J. C. Giles. Developments in sensors and simulators at the air force weapons laboratory. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 55(3) :431439, 2013.
- [41] E. et al Savage. The early-time (e1) high-altitude electromagnetic pulse (hemp) and its impact on the u.s. power grid. *Rep. Meta-R-320*, 2010. Metatech Corp., Goleta, CA.
- [42] E. et al Savage. The late-time (e3) high-altitude electromagnetic pulse (hemp) and its impact on the u.s. power grid. *Rep. Meta-R-320*, 2010. Metatech Corp., Goleta, CA.
- [43] N. Wellander. Homogenization of the Maxwell equations : Case I. Linear theory. *Appl Math*, 46(2) :29–51, 2001.
- [44] N. Wellander. Homogenization of the Maxwell equations : Case II. Nonlinear conductivity. *Appl Math*, 47(3) :255–283, 2002.
- [45] N. Wellander and B. Kristensson. Homogenization of the Maxwell equations at fixed frequency. *Technical Report*, LUTEDX/TEAT-7103/1-37/(2002), 2002. Departement of Electroscience, P.O. Box 118, S-211 00, Lund, Sweden.
- [46] Pr. Welter. Cours : Matériaux diélectriques. *Master Matériaux*. Institut Le Bel.
- [47] www.airliners.net. <https://www.airliners.net/forum/viewtopic.php?t=1373451>.



---

## **Titre : Méthodes d'homogénéisation et simulations numériques appliquées à la réponse électromagnétique des matériaux multi-échelles complexes**

**Mot clés :** Homogénéisation, Maxwell harmonique, analyse asymptotique, convergence à deux échelles, électromagnétisme, composite

**Resumé :** Les travaux de cette thèse concernent l'homogénéisation d'équations de Maxwell harmoniques tridimensionnelles, modélisant la propagation d'une onde électromagnétique de l'air dans la matériau composite, émanant de la foudre. La problématique des composites étant, par exemple en aéronautique, l'évacuation de la foudre et la protection contre les agressions électromagnétiques. Nous considérons une structure constituée de fibres de carbone incluses périodiquement dans une résine époxy qui sera elle même nano chargée, rendant ainsi accrue la conductivité électrique du composite.

Afin d'obtenir le problème homogénéisé nous utilisons l'analyse asymptotique à deux échelles. Puis nous justi-

fions mathématiquement le résultat par la convergence à deux échelles. La solution du champ électrique est approchée par l'addition du champ électrique moyen et le champ correcteur, dépendant de la microstructure, et solution des problèmes de cellule.

Dans la deuxième partie, nous proposons une validation numérique du modèle simplifié en 2D via des simulations avec le logiciel libre d'éléments finis Freefem ++. Trois cas tests seront présentés avant de valider la méthode d'homogénéisation. Enfin, en guise d'illustration du modèle, deux exemples d'agressions électromagnétiques : l'arc de foudre de type A et une impulsion électromagnétique nucléaire seront testées dans le domaine spectral.

---

## **Title : Homogenization methods and numerical simulations applied to the electromagnetic response of complex multiscale materials**

**Keywords :** Homogenization, Maxwell, harmonic Maxwell, asymptotic analysis, two-scale convergence, electromagnetism, composite

The work of this thesis concerns the homogenization of three-dimensional harmonic Maxwell equations, modeling the propagation of an electromagnetic wave originating from lightning, from air in the composite material. The problem of composites being, for example in aeronautics, the evacuation of the lightning and the protection against the electromagnetic aggressions. We consider a structure made of carbon fibers included in an epoxy resin which will itself be nano-charged, increasing the electrical conductivity of the composite. In order to obtain the homogenized problem, we use asymptotic analysis at two scales. Then we mathematically justify the result by two-scale convergence.

The solution of the electric field is approximated by the addition of the average electric field and the correct field, depending on the microstructure, and solution of the cell problems.

In the second part, we propose a numerical validation of the simplified model in 2D via simulations with the free finite element software Freefem ++. Three test cases will be presented before validating the homogenization method. Finally, as an illustration of the model, two examples of electromagnetic aggression : the Type A lightning bolt and a nuclear electromagnetic pulse will be tested in the frequency domain.