



HAL
open science

Approche probabiliste des trajectoires quantiques

Clément Pellegrini

► **To cite this version:**

Clément Pellegrini. Approche probabiliste des trajectoires quantiques. Probabilités [math.PR]. Université de Toulouse 3 Paul Sabatier, 2018. tel-01973627

HAL Id: tel-01973627

<https://hal.science/tel-01973627v1>

Submitted on 8 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES DE L'UNIVERSITE PAUL SABATIER (TOULOUSE III)

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique

Approche Probabiliste des Trajectoires Quantiques

Clément PELLEGRINI

Soutenue à Toulouse le vendredi 7 décembre 2018 devant le jury :

Stéphane ATTAL (Université Claude Bernard Lyon I),	Examineur
Franck BARTHE (Université Paul Sabatier Toulouse III)	Examineur
Patrick CATTIAUX (Université Paul Sabatier Toulouse III)	Coordinateur
Benoit COLLINS (Kyoto University)	Rapporteur
Djalil CHAFAI (Université Paris-Dauphine)	Rapporteur
Gersende FORT (Université Paul Sabatier Toulouse III)	Présidente
Alain JOYE (Université Joseph Fourier Grenoble I)	Rapporteur
Didier POILBLANC (Université Paul Sabatier Toulouse III)	Examineur

Table des matières

1	Introduction : Trajectoires quantiques	9
2	Etude et modélisation de certaines trajectoires quantiques	17
2.1	Modèle des trajectoires quantiques	17
2.1.1	Mesure directe	17
2.1.2	Trajectoires quantiques discrètes	19
2.1.3	Trajectoires quantiques continues	23
2.1.4	Du discret au continu	26
2.2	Marche quantique ouverte continue	29
2.3	Stabilité des filtres quantiques	36
2.4	Variables obtuses complexes et martingales normales complexes	40
2.4.1	Canaux quantiques classiques	41
2.4.2	Variables obtuses complexes	43
2.4.3	Martingale normale	53
3	Comportement en temps long de certaines trajectoires quantiques	59
3.1	Equations maîtresses stochastiques non démolition	59
3.2	Sous-espace attractif	64
3.3	Mesure invariante des trajectoires quantiques discrètes	68
3.3.1	Existence et unicité	68
3.3.2	Convergence exponentielle	73
3.3.3	Exemples	76
3.4	Mesure invariante des trajectoires quantiques continues	78
4	Perspectives	85

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement aux rapporteurs de cette habilitation. Je suis content que des personnes d'une si grande qualité scientifique et humaine aient accepté de relire mon manuscrit et de donner leur avis sur mon travail. Depuis que j'ai débuté la recherche, j'ai toujours eu la chance de cotoyer Alain Joye. En particulier grâce à lui et d'autres membres de l'ex ANR Ham-Mark, j'ai découvert des facettes du métier de chercheur qui m'ont certainement permis de manière directe ou indirecte (rien à voir avec les mesures) d'en être arrivé là aujourd'hui. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant d'avoir accepté de relire mon habilitation. Je voudrais également adresser un immense merci à Benoit Collins d'avoir accepté de rapporter mon HDR, je tiens à le remercier pour son intérêt et sa disponibilité et pour avoir pu se libérer et faire partie du jury. Enfin grâce à l'activité scientifique de Toulouse, j'ai eu la chance de rencontrer des gens de grande qualité et c'est grâce à l'ANR Stab (1,2,3,4,5 ou 6 je ne me rappelle plus) que j'ai pu croiser la route de Djalil Chafaï. C'est un honneur pour moi qu'il ait accepté de donner son avis sur mes travaux de recherche. Ensuite je tiens à remercier tout particulièrement Patrick Cattiaux d'avoir accepté d'être mon parrain pour cette habilitation. En dehors de ce parrainage et du co-encadrement de Hugo, ton accueil à mon arrivée a été à l'origine de ma bonne intégration à Toulouse. Depuis que je suis arrivé à Toulouse, j'ai le plaisir d'organiser chaque année les rencontres entre le laboratoire de physique théorique de Toulouse et l'institut de mathématiques de Toulouse. Didier Poilblanc a toujours répondu présent pour ces journées qui font désormais parties du paysage toulousain ; merci d'avoir accepté de participer à ce jury. La première fois que je suis venu à Toulouse, c'était en thèse et c'est Franck Barthe qui m'avait invité pour un séminaire, merci pour ton accueil et pour avoir accepté aujourd'hui de faire partie de ce jury. Merci également à Gersende Fort d'avoir accepté de présider ce jury, j'en profite pour te remercier pour ton implication au sein de l'institut et de l'équipe. Enfin c'était important pour moi qu'il soit présent aujourd'hui, merci à Stéphane Attal de compléter mon jury. Il y a un peu de ta patte dans tous mes travaux de recherche, c'est un réel plaisir de t'avoir eu comme directeur de thèse et de t'avoir comme ami aujourd'hui. Ta bienveillance et ta fermeté m'ont permis d'avancer dans mes premiers pas dans la recherche et ton soutien a toujours été complet.

Je vais continuer la liste des remerciements avec les locaux de l'étape et donc à l'ensemble des collègues de l'institut de mathématiques de Toulouse et particulièrement à ceux de l'équipe de probas-stats. J'adresse une dédicace toute particulière à ceux qui font tourner la baraque et un immense merci à Françoise qui nous apporte un super soutien au

quotidien. J'en profite pour remercier également tout le personnel administratif. Merci à Reda et Fabrice qui ont su faire un saut quantique et collaborer avec moi sur des questions de méca-qu, votre liste de publis vous en remercie !

A l'IMT, j'ai la chance d'avoir rencontré de véritables amis (et collaborateurs pour certains) : Javier insoumis volontaire, Phi² le rang A dont tout rang B rêve, Chtimi une pointe de finesse dans ce monde de matheux (certains y verront un raisonnement par l'absurde). Je ne vais certainement pas oublier mes co-bureaux, Fabulous qui est parti à Angers, une vraie perte pour Toulouse, Séb cross-fitteur punk dont le dynamisme scientifique et extra-scientifique forme une bulle de fraîcheur et Aldo qui a déjà relevé toutes mes fautes d'orthographe, avec qui j'ai partagé beaucoup de choses et avec qui j'espère en partager encore beaucoup. Je vous dois beaucoup, si je me suis tout de suite senti accueilli à Toulouse et si c'est encore un réel plaisir d'être là, c'est grâce à vous. Vous êtes tous plus ou moins à l'origine des "LSM" et ça c'est une réelle plus value. J'ai vécu des moments forts avec vous et j'espère en vivre encore plein d'autres. Pour finir avec les toulousains, un petit clin d'oeil à Manon, Thierry, Fanny, Pierre, Francesco, François, Agnès, Mireille, Cathy... Une pensée pour Kathy qui était une collègue précieuse et avec qui j'ai eu la chance de travailler dans la prépa agreg.

Extérieur à l'IMT (pas tant que ça) un véritable groupe s'est formé autour des "probabilités classiques appliquées à la mécanique quantique" comme se moqueraient certains de mes collègues. Parmi ce groupe je compte également de nombreux amis et collaborateurs : spéciale dédicace à la "Attal family" : Yan, Ion, Julien, Ivan, Simon. Grâce à notre dernière ANR et au savoureux mariage de la physique théorique et des probabilités j'ai eu la chance de rencontrer Tristan. Merci pour ta persévérance à lire des manuscrits dactylographiés et à la martingale de Martin qui ont permis de résoudre un super problème ! Je suis vraiment content que tu sois pour de bon à Toulouse et j'espère que notre collaboration et amitié durera longtemps. Et pour finir avec le milieu académique merci à Hugo d'avoir essuyé les plâtres avec ce premier encadrement de thèse.

En grandissant (ou vieillissant ? ou alors parce que j'ai maintenant des enfants) on réalise qu'on ne remercie jamais assez ses parents. Alors merci d'avoir toujours été là et d'être toujours présents encore aujourd'hui.

Loin devant les mathématiques et devant tout le reste, c'est vous qui m'apportez le plus dans la vie ; Sab¹, Eylie² et Sahel³. Vous êtes le moteur de ma vie et le remède contre la page blanche. Je reconnais que vivre avec un chercheur n'est pas évident mais sachez que c'est vous qui m'offrez les plus beaux problèmes ouverts.

Pour parfaire tout cela une pensée à tous nos potes de Seysses : Florent, Marie, Thomas, Lorena, Martin, Carotte, Emma, Hervé, Serge et Christine. Enfin, je terminerai en saluant

1. Un nouveau titre a essayé de se souvenir !

2. "J'ai rien compris, c'est un langage secret (Eylie 9 ans qui assistait à un de mes enseignements)" elle a 10 ans c'est moins grave que les étudiants présents ce jour là

3. "Bon travail papa, fait pas trop de fautes en maths (Sahel 5 ans avant d'aller à l'école)" quelle perspicacité ! Elle rajoutera un jour de colère "Papa il est nul en maths", il faut que je lui rappelle de ne pas trop croire Aldéric sur parole.

mon grand père qui ne sera pas présent cette fois-ci pour expliquer les probabilités à l'un de mes collègues !

Chapitre 1

Introduction : Trajectoires quantiques

Mes travaux de recherche s'orientent essentiellement autour de l'étude des trajectoires quantiques. Les trajectoires quantiques sont des processus de Markov à temps discret ou continu qui décrivent l'évolution de systèmes quantiques soumis à des mesures indirectes [66, 76, 75, 78, 23, 133, 93, 53, 40, 41, 116, 118, 119].

L'étude des trajectoires quantiques s'inscrit plus généralement dans la théorie des systèmes quantiques ouverts [78, 1, 66, 13, 14, 15, 5, 83]. Cette théorie a pour objectif de décrire la dynamique de systèmes quantiques en interaction avec un environnement (bain de chaleur, laser, jet de photons...).

On distingue souvent deux approches pour étudier un système \mathcal{S} en interaction avec un environnement \mathcal{E} : l'approche *hamiltonienne* et l'approche *markovienne*. L'approche hamiltonienne concerne l'étude du système $(\mathcal{S} + \mathcal{E})$ à travers la description complète de l'hamiltonien décrivant l'interaction des deux systèmes [62, 64]. A partir de cette description, on déduit des propriétés du système réduit \mathcal{S} . Les outils souvent employés dans cette approche sont ceux de la théorie des opérateurs, étude spectrale, théorie ergodique etc... La philosophie de l'approche markovienne consiste à "oublier" la dynamique de l'environnement et à ne s'intéresser qu'à l'évolution réduite du système \mathcal{S} [78, 134, 104, 85, 83]. Cette approche est souvent motivée par le fait que l'environnement est un système complexe difficile à décrire. Dans certaines situations, nous n'avons pas accès aux données complètes de ce système. Dans d'autres situations, la description complète du système n'a pas d'intérêt.

Mes travaux s'inscrivent principalement dans l'approche markovienne. D'un point de vue mathématique, le système quantique \mathcal{S} que l'on cherche à étudier est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ et l'ensemble des états est décrit par les *matrices densités*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \{\rho \in \mathcal{I}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}) \mid \rho = \rho^*, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}$$

où $\mathcal{I}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ désigne l'ensemble des opérateurs à trace sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ (on étudiera essentiellement des situations où $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ est de dimension finie). L'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang 1 est un sous ensemble particulier de \mathcal{D} . Un tel projecteur est appelé *état pur*.

Dans ce manuscrit, nous considérerons deux types d'évolution pour les états de \mathcal{S} : des évolutions discrètes en temps et des évolutions continues en temps. Typiquement, une évolution discrète en temps est décrite par une famille de matrices densités $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\rho_{n+1} = \phi(\rho_n), n \in \mathbb{N}$$

ou de manière équivalente

$$\rho_n = \phi^n(\rho_0), n \in \mathbb{N}.$$

L'application ϕ s'appelle un *canal quantique*. Le terme canal est emprunté à la théorie de l'information quantique. C'est ce type d'opération qui permet de transmettre de l'information en utilisant les principes de la mécanique quantique [134, 112, 47, 77, 100, 99]. Mathématiquement, il s'agit d'une application complètement positive¹ dont la forme typique est donnée par

$$\phi(\rho) = \sum_{i \in I} V_i \rho V_i^*, \quad (1.1)$$

où $V_i, i \in I$ sont des opérateurs sur \mathcal{H}_S qui satisfont $\sum_{i \in I} V_i^* V_i = I$. Les opérateurs V_i s'appellent des opérateurs de Kraus.

En ce qui concerne une évolution typique en temps continu, elle est décrite par une famille de matrices densités $(\rho_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant une équation différentielle ordinaire de la forme

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt$$

ou de manière équivalente

$$\rho_t = e^{t\mathcal{L}}(\rho_0),$$

où \mathcal{L} est un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ appelé *opérateur de Lindblad* ou *lindbladien* [104, 85, 66, 83]. Une telle équation est appelée *équation maitresse*. L'opérateur \mathcal{L} s'écrit génériquement sous la forme

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{i \in I} L_i \rho L_i^* - \frac{1}{2} \{L_i^* L_i, \rho\}, \quad (1.2)$$

où les $L_i, i \in I$ sont des opérateurs sur \mathcal{H}_S .

Les deux types d'évolutions que nous venons d'évoquer modélisent la dynamique du système \mathcal{S} en l'absence de mesure.

La question de la mesure en mécanique quantique est une question primordiale. En effet, pour étudier l'évolution d'un système quantique, il faut pouvoir l'observer : mesurer sa vitesse, sa position... Cependant, observer directement un système quantique perturbe ce dernier de manière irrémédiable. Des effets tels que *l'effet de Zénon quantique* indiquent qu'observer continuellement et directement un système \mathcal{S} a pour effet de geler celui-ci. Pour contourner ce type d'obstacle on effectue des mesures dites indirectes. Cela consiste à effectuer une mesure sur l'environnement \mathcal{E} lorsque celui-ci a fini d'interagir avec \mathcal{S} . Grâce à

1. Une application complètement positive ϕ est une application linéaire positive c'est à dire qui envoie les opérateurs positifs sur des opérateurs positifs et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $I_{\mathbb{C}^k} \otimes \phi$ est encore une application positive. De manière générale, elles sont toutes de la forme (1.1)

l'intrication entre \mathcal{S} et \mathcal{E} , après interaction, le résultat de la mesure indirecte permet d'obtenir une information partielle sur \mathcal{S} . De plus, conditionnellement aux résultats de mesures, on peut décrire l'évolution de \mathcal{S} . Dans ce contexte, l'évolution de \mathcal{S} devient aléatoire. Dans le cadre des évolutions discrètes, elle est décrite par une chaîne de Markov $(\tilde{\rho}_n)$ à valeurs dans \mathcal{D}_S . Typiquement, les transitions sont décrites de la manière suivante :

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \frac{V_i \tilde{\rho}_n V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)}, \quad \text{avec probabilité } \text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*), i \in I. \quad (1.3)$$

Dans le cadre continu, l'évolution de \mathcal{S} est décrite par un processus de Markov $(\tilde{\rho}_t)$ à valeurs dans \mathcal{D}_S . De tels processus apparaissent génériquement comme solutions d'équations différentielles stochastiques de type saut-diffusion de la forme

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t &= \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{t-})dt \\ &+ \sum_{i \in I_1} (L_i \tilde{\rho}_{t-} + \tilde{\rho}_{t-} L_i^* - \text{Tr}[\rho_{t-}(L_i + L_i^*)]\rho_{t-}) d\tilde{W}_i(t) \\ &+ \sum_{i \in I_2} \left(\frac{L_i \rho_{t-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{t-} L_i^*]} \right) (d\tilde{N}_i(t) - \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{t-} L_i^*]), \end{aligned} \quad (1.4)$$

où $(\tilde{W}_i(t), i \in I_1)$ sont des mouvements browniens indépendants et $(\tilde{N}_i(t), i \in I_2)$ sont des processus de Poisson d'intensités $\left(\int_0^t \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_s L_i^*] ds \right), i \in I_2$. Ce type d'équation est communément appelé *équation maitresse stochastique* [66, 23, 40, 41, 57, 15, 116, 118, 119].

Dans les deux cas les processus $(\tilde{\rho}_n)$ et $(\tilde{\rho}_t)$ sont appelés *trajectoires quantiques* discrètes respectivement continues.

L'étude et la compréhension de ces modèles ont été cruciales dans de nombreux domaines de la mécanique quantique théorique et appliquée. Ces modèles sont au coeur de nombreuses avancées dans le domaine de l'optique quantique (expériences de photo-détection, détection hétérodyne et homodyne...) et de l'information quantique. En particulier, ils jouent un rôle primordial dans les expériences de contrôle quantique qui nécessitent de pouvoir maîtriser et observer l'évolution de \mathcal{S} de manière continue. Des expériences récentes ont permis, grâce à ce type de modèle, de pouvoir manipuler et observer des particules sans les détruire (ce qui est impossible avec des mesures directes), c'est le cas des expériences menées par l'équipe de Serge Haroche au LKB à Paris et qui ont été récompensées par le prix Nobel de Physique en 2012 [93, 92, 84]. Ces expériences ont donné lieu à divers travaux théoriques autour des trajectoires quantiques non démolition [33, 32, 21] et du contrôle quantique [4, 2, 123]

La justification du modèle discret est assez simple, la manière la plus intuitive est d'utiliser les modèles d'interactions répétées [17]. Dans ce cadre, l'environnement est décrit par une chaîne de systèmes quantiques auxiliaires indépendants et identiques. Chaque système vient interagir avec \mathcal{S} (l'un après l'autre) et après interaction une mesure est effectuée sur le système auxiliaire qui vient d'interagir. L'aléa vient du fait que, contrairement à la mécanique classique, le résultat d'une mesure en mécanique quantique est aléatoire et que

conditionnellement à ce résultat, le système \mathcal{S} est modifié suivant les principes de *réduction du paquet d'onde*. Les schémas d'interactions répétées suivies de mesure indirecte sont habituellement appelés *mesures quantiques répétées* [106, 101, 116, 118, 119]. Dans la littérature, ces modèles ont été moins étudiés que les modèles continus. Mais, récemment les modèles d'interactions répétées avec ou sans mesure ont donné lieu à de nombreux travaux (retour à l'équilibre, propriétés spectrales [71, 69, 70, 68, 72], production d'entropie [50, 94], principe de Landauer, thermodynamique [91, 90], statistique quantique [127, 132, 50], étude de modèles concrets [32, 34, 135, 105]...)

La justification des modèles continus est moins directe. On peut distinguer trois approches mathématiques différentes justifiant rigoureusement ces modèles. La première approche est basée sur le *calcul stochastique quantique* [114, 107] et plus précisément sur la théorie du filtrage quantique [15, 60, 56, 59, 43, 44, 46, 45, 39, 42, 86, 87, 125]. Cette approche a notamment été développée et popularisée par Viacheslav Belavkin. Elle utilise la théorie des équations différentielles stochastiques quantiques qui permettent de modéliser l'évolution du système \mathcal{S} en contact avec l'environnement. En particulier, dans ce cadre, l'environnement agit comme un bruit "quantique" et ces modèles sont les analogues quantiques des équations de Langevin classiques.

Une seconde approche est basée sur le calcul stochastique classique et la notion d'état à priori et à posteriori [23, 25, 27, 24]. Le point de départ est la définition d'une équation différentielle stochastique linéaire pour l'évolution de l'état "non normalisé"² de \mathcal{S} . L'interprétation en termes de mesures quantiques est alors le résultat d'un changement de mesure type Girsanov. L'utilisation du calcul d'Itô permet alors d'obtenir l'équation non linéaire (1.4) après normalisation de l'état.

La troisième approche fait le pont entre l'évolution discrète (1.3) et l'évolution continue (1.4). En particulier, les modèles continus peuvent être obtenus comme limites des modèles discrets. Pour cela, on introduit un scaling en temps h dans les opérateurs V_i . En imposant des conditions asymptotiques précises pour les opérateurs V_i , on montre que lorsque h tend vers zéro le modèle discret converge en loi vers le modèle continu. Pour obtenir ces résultats, les outils principaux sont la convergence de générateurs de Markov et des propriétés de tension [81, 97]. Cette approche a été développée dans mes travaux de thèse. En particulier, la justification des modèles génériques (1.4) ont fait l'objet des articles [116, 118, 119].

Ces trois approches sont équivalentes et ont des connections importantes. Le lien entre la deuxième approche et la troisième approche est assez claire principalement car elles font appel toutes les deux à des probabilités classiques (changement de mesure, calcul d'Itô, générateur de Markov, tension de processus stochastiques) en opposition à la première approche qui opère dans le monde des probabilités dites quantiques (algèbre d'opérateur, calcul stochastique quantique, algèbre de Von Neumann). C'est dans ce cadre, où l'interaction entre \mathcal{S} et l'environnement est décrit par des équations différentielles stochastiques quantiques. Ce type de modèle peut être justifié comme limite continue de modèles d'interactions répétées. C'est en particulier l'objet des travaux de Stéphane Attal et Yan Pautrat [17]. Introduire des mesures dans ce cadre a été le moteur des travaux effectués pendant

2. non normalisé signifie que l'état n'est pas de trace 1

mon doctorat.

Mes premiers pas dans la recherche ont donc été rythmés par l'étude des trajectoires quantiques à travers les liens entre les modèles discrets et les modèles continus : "comment justifier des modèles continus complexes à l'aide de modèles discrets intuitifs". En particulier, la flexibilité et la richesse des outils développés dans ce cadre, m'ont permis de continuer dans cette voie pendant mes premières années post-thèse. Cette partie de mes activités de recherche concerne un aspect orienté principalement autour de la modélisation de trajectoires quantiques. Ainsi, en présence d'une problématique concernant les trajectoires quantiques j'ai deux réflexes. Si le modèle est continu, je me demande comment le justifier à l'aide d'un modèle discret et d'un passage à la limite et si le modèle est discret je me demande quelle est sa limite continue naturelle. En particulier, en adoptant cette démarche, inspirée de mon directeur de thèse Stéphane Attal, j'ai pu dériver différents modèles de trajectoires quantiques pendant et après ma thèse [116, 117, 118, 119, 122, 110, 121, 18, 120, 3, 8].

Un de mes premiers objectifs "post-thèse" était de comprendre quelles étaient les trajectoires quantiques en présence d'un bain thermique à température positive. En effet, les résultats de ma thèse concernaient essentiellement des situations où l'environnement était à température nulle. Guidés par le modèle d'interactions répétées avec un environnement à température positive décrit dans [12] par Stéphane Attal et Alain Joye, avec Stéphane Attal nous avons dérivé des équations maîtresses stochastiques à température positive [18]. J'ai également utilisé l'approche basée sur les liens entre les modèles discrets et continus pour dériver les modèles de "marche quantique ouverte en temps continu" [120]. Ces modèles sont les analogues quantiques des chaînes de Markov classiques à temps continu. Ils correspondent à des marches aléatoires sur un graphe dont les transitions dépendent d'un degré interne gouverné par un état quantique. Le modèle discret a été développé dans [19, 20] et les résultats de [120] concernent la limite continue naturelle. Ces marches aléatoires quantiques offrent des questions intéressantes et présentent des comportements non standards. Pour les marches discrètes, les propriétés habituelles des chaînes de Markov ont été étudiées dans [11, 31, 74, 73, 103, 102]. Hugo Bringuier, en thèse sous ma co-tutelle et celle de Patrick Cattiaux a étudié des problèmes similaires dans le cadre de son doctorat pour les marches continues.

En dehors de l'aspect modélisation, l'approche discrète permet également de montrer des propriétés qualitatives sur les processus continus. En effet, certaines propriétés sont évidentes pour les trajectoires quantiques discrètes alors qu'elles sont plus délicates à montrer directement pour les trajectoires quantiques continues. En utilisant la convergence des modèles discrets vers les modèles continus, certaines propriétés satisfaites par les processus discrets se transmettent à la limite pour les modèles continus. Mentionnons par exemple qu'il n'existe pas de preuve directe montrant que la solution de l'équation (1.4) est à valeurs dans les matrices densités. En effet, montrer que la solution est à valeurs dans les opérateurs positifs est une question difficile. En revanche, par construction, le processus discret est à valeurs dans les matrices densités donc à valeurs dans les opérateurs positifs et cette propriété se transmet naturellement à la limite. Avec Pierre Rouchon et Hadis Amini nous avons utilisé ce type de raisonnement pour montrer des propriétés de stabilité

des filtres quantiques en temps continu [3].

Toujours dans l'esprit de dériver des modèles continus à partir de modèles discrets, dans [8], nous étudions la convergence en loi de variables aléatoires obtuses vers des martingales normales complexes. Ce travail est motivé par l'étude de modèles d'équations de Langevin quantiques qui en réalité sont des modèles classiques.

Le chapitre 2 présentera en détail ces résultats. En ce qui concerne l'aspect modélisation des trajectoires quantiques, j'ai également employé l'approche basée sur le calcul stochastique et les changements de mesure dans les papiers [22, 28, 29]. Ces papiers concernent des modèles avec présence de mémoire dits non-markoviens. Nous ne détaillerons pas ces résultats dans ce manuscrit et nous renvoyons à [22, 28, 29] pour les détails.

Après avoir défini et justifié les modèles de processus de Markov décrivant les trajectoires quantiques discrètes et continues, il est naturel d'étudier les propriétés qualitatives de ces modèles et notamment d'aborder les questions habituelles relatives aux processus de Markov. En particulier, parmi les questions centrales celle concernant le comportement en temps long de ces processus est une question particulièrement intéressante. Cette question est liée à celle de l'existence et de l'unicité de la mesure invariante. En dimension finie, l'ensemble des matrices densités étant un ensemble compact, le théorème de Markov-Kakutani assure l'existence d'une mesure invariante. En ce qui concerne l'unicité de la mesure invariante le problème est plus cossu. En particulier, les processus décrivant les trajectoires quantiques ne rentrent pas dans le cadre des techniques markoviennes usuelles pour traiter ce genre de problème (les transitions sont singulières rendant les approches habituelles inefficaces). Alors que pour les évolutions sans mesure, les résultats de comportement en temps long et la classification des états invariants des applications (1.1) et (1.2) ont été largement étudiés, dans la littérature, il y a très peu de résultats concernant le comportement en temps long des trajectoires quantiques [26]. Un des résultats principaux concerne des propriétés de convergence en moyenne de Césaro [101] ou alors des propriétés de purification [106, 26] (sous certaines hypothèses en temps long les trajectoires quantiques se rapprochent de processus à valeurs dans les états purs). Dans les papiers [49] et [48] avec Yan Pautrat, Tristan Benoist et Martin Fraas, nous résolvons le problème de l'unicité de la mesure invariante. Nous montrons également la convergence exponentielle vers cette mesure invariante. Pour cela nous avons utilisé des techniques issues de la théorie ergodique et des produits de matrices aléatoires. Cette question m'avait été posée par Stéphane Attal lors de ma thèse et sa résolution a grandement participé à mon envie de rédiger mon habilitation.

Dans un autre cadre avec Tristan Benoist, nous avons étudié le comportement en temps long de trajectoires continues pour les modèles dits "non démolition" [51]. Ces modèles sont directement reliés à l'expérience de Serge Haroche. Ils ont été traités de manière théorique dans [32, 33] dans un cadre discret. Dans [51], on montre en particulier, que ces trajectoires quantiques se concentrent en temps long sur des états purs particuliers appelés états pointeurs. On donne une estimation de la vitesse de convergence en termes d'une entropie relative. Dans ce travail, on montre qu'en temps long ce modèle de mesure indirecte reproduit le modèle de mesure directe de l'état initial de \mathcal{S} . Toujours dans le cadre

”non démolition” mais dans le cadre discret avec Tristan Benoist et Fabrice Gamboa nous avons étudié des questions d’estimation de paramètres. Dans un autre registre, en utilisant une approche similaire à celle développée dans [51], nous avons étudié des problèmes de stabilité de sous espace dans [52].

Les travaux autour de la mesure invariante [49] et [48] ainsi que [51] feront l’objet du chapitre 3. Dans ce chapitre, nous aborderons également le problème de stabilité de sous espace [52]. En effet, nous verrons que sous certaines conditions les trajectoires quantiques convergent vers des sous espaces particuliers de \mathcal{H}_S . Ce type de résultat est motivé par des problèmes de contrôle quantique et de préparation d’états.

Le manuscrit sera structuré de la manière suivante.

Dans le chapitre 2, nous commencerons par décrire plus précisément les modèles des trajectoires quantiques discrètes et continues. Nous ferons ensuite le lien entre ces deux modèles en rappelant les outils développés pendant ma thèse. On adoptera une approche légèrement différente de celle présentée dans mes travaux de thèses. Ici, l’approche adoptée permet de présenter les idées du passage des modèles discrets aux modèles continus sans noyer le lecteur dans des détails trop techniques. Ce chapitre est complété par l’appendice A où nous donnons plus de détails. Nous présenterons ensuite les résultats des articles [120, 3, 8] qui concernent des travaux récents basés sur le passage du discret au continu.

Le chapitre 3 concerne des résultats de comportement en temps long de certaines trajectoires quantiques. En particulier, nous présentons le modèle de convergence des trajectoires quantiques non démolition [51]. Ensuite nous parlerons du problème de stabilité de sous espace [52]. Enfin nous étudierons le problème de la mesure invariante des trajectoires quantiques discrètes et continues [48, 49].

Nous concluons cette habilitation avec un chapitre présentant quelques perspectives de recherche.

Chapitre 2

Etude et modélisation de certaines trajectoires quantiques

2.1 Modèle des trajectoires quantiques

Dans cette section, nous allons préciser les modèles probabilistes permettant de décrire proprement les trajectoires quantiques. Nous ferons en particulier référence à cette section tout le long du manuscrit. On commence par présenter le modèle de mesure directe, ceci nous permettra en particulier de faire référence à une sémantique que nous utiliserons dans la suite. Ensuite on décrit les modèles probabilistes des trajectoires quantiques discrètes et continues puis on fait le lien entre les deux modèles avec les résultats de convergence.

2.1.1 Mesure directe

Commençons par fixer quelques notations. Tout au long du manuscrit sauf mention spéciale on considérera un système \mathcal{S} décrit par un espace de Hilbert \mathcal{H}_S de dimension finie, typiquement $\mathcal{H}_S = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'ensemble des états est donc

$$\mathcal{D}_S = \{\rho \in M_d(\mathbb{C}) \mid \rho = \rho^*, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}.$$

On utilisera également les notions usuelles de bra et ket. Les vecteurs de \mathcal{H}_S seront donc notés par des ket $|x\rangle$, $x \in \mathcal{H}_S$. Un bra noté $\langle y|$ représentera la forme linéaire agissant sur les kets $\langle y||x\rangle = \langle y, x\rangle$, pour tout $|x\rangle \in \mathcal{H}_S$. Un état pur, projecteur sur $\mathbb{C}|x\rangle$, avec $\|x\| = 1$ sera noté $|x\rangle\langle x|$. On identifiera souvent le projecteur sur $\mathbb{C}|x\rangle$ avec le vecteur $|x\rangle$.

Présentons maintenant le principe de mesure directe en mécanique quantique. Pour cela on considère une matrice densité $\rho \in \mathcal{D}_S$. Une quantité physique est décrite par une observable A qui est un opérateur auto-adjoint dont la décomposition spectrale est donnée par

$$A = \sum_{i=0}^p \lambda_i P_i.$$

Le résultat de la mesure est un résultat aléatoire à valeurs dans le spectre de $A : \{\lambda_i, i = 0, \dots, p\}$. De manière précise on a

$$\mathbb{P}[\text{observer } \lambda_i] = \text{Tr}[\rho P_i], \quad i = 0, \dots, p.$$

Puisque ρ est un opérateur positif et que $\sum_{i=0}^p P_i = I$, on a bien défini une mesure de probabilité. Dans la suite, on identifiera souvent la valeur λ_i et son indice i de sorte que $\mathbb{P}[\text{observer } \lambda_i] = \mathbb{P}[X = i]$ où X est la variable aléatoire qui vaut i si on a observé λ_i . On identifiera donc X au résultat de la mesure. Ajouté à ce modèle probabiliste, le principe de réduction du paquet d'onde nous dit que conditionnellement à l'observation de λ_i (ou de i) l'état ρ est modifié et devient

$$\rho_1(i) = \frac{P_i \rho P_i}{\text{Tr}(P_i \rho P_i)}, \quad i = 0, \dots, p.$$

Finalement ρ_1 est une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{D}_S décrite par

$$\rho_1 = \sum_i \frac{P_i \rho P_i}{\text{Tr}(P_i \rho P_i)} \mathbf{1}_{X=i}.$$

De manière équivalente, on parlera également de mesure le long d'une base orthonormée $\{|\alpha\rangle, \alpha \in A\}$ de \mathcal{H}_S . Implicitement, cela signifie que l'on considère la mesure d'une observable diagonale dans cette base. De plus on supposera cette observable non dégénérée dans le sens où ses espaces propres associés sont de dimension 1. On utilisera alors une autre identification, on dira que l'on observe l'un des vecteurs $|\alpha\rangle$ à travers la mesure et on aura

$$\mathbb{P}[\text{observer } |\alpha\rangle] = \text{Tr}[\rho |\alpha\rangle\langle\alpha|], \quad \alpha \in A.$$

Cet abus de langage est renforcé par le fait que conditionnellement à l'observation de $|\alpha\rangle$, la réduction du paquet d'onde transforme l'état ρ en $|\alpha\rangle\langle\alpha|$.

Pour finir cette section décrivons ce qui se passe dans le cas d'un état pur. Si $|x\rangle$ désigne un état pur décrivant l'état du système \mathcal{S} , alors on observera le résultat i avec probabilité $\|P_i x\|^2$, le système est alors modifié et son état devient

$$|x_1(i)\rangle = \frac{|P_i x\rangle}{\|P_i x\|}, \quad i = 0, \dots, p.$$

Concernant la mesure le long d'une base $\{|\alpha\rangle, \alpha \in A\}$, on peut exprimer $|x\rangle$ suivant cette base c'est à dire

$$|x\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle\alpha, x\rangle |\alpha\rangle.$$

Ainsi la probabilité d'observer $|\alpha\rangle$ est $|\langle\alpha, x\rangle|^2$ et l'état devient $|\alpha\rangle$ après la mesure.

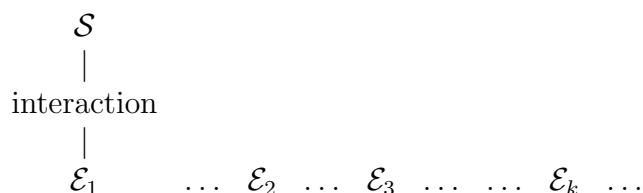
2.1.2 Trajectoires quantiques discrètes

Cette section concerne la présentation du modèle probabiliste des trajectoires discrètes. En particulier, nous allons revenir sur la présentation du modèle décrit par (1.3)

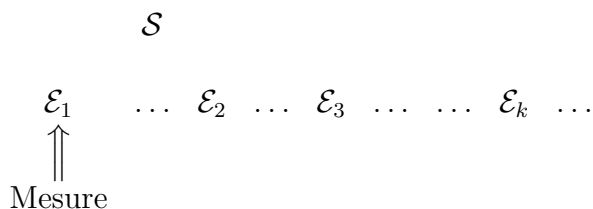
Afin de motiver le modèle des trajectoires quantiques discrètes, nous commençons par esquisser le modèle des interactions répétées [17]. Le système \mathcal{S} interagit avec une chaîne infinie de systèmes quantiques auxiliaires $\mathcal{E}_i, i \in \mathbb{N}$. Les systèmes \mathcal{E}_i sont identiques et indépendants c'est à dire que chaque système auxiliaire est décrit par le même espace de Hilbert $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ et le même état de référence que l'on notera γ et il n'y a pas d'interactions entre les parties de la chaîne. La chaîne totale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_k + \dots$ est décrite par

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \bigotimes_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p.$$

Les copies interagissent les unes après les autres avec \mathcal{S} et après interaction une mesure est effectuée sur la copie qui vient juste d'interagir :



puis



La mesure sur un système \mathcal{E}_1 est décrite à l'aide d'une observable

$$A = \sum_{i=0}^p \lambda_i P_i$$

où les opérateurs P_i correspondent aux projecteurs spectraux de A . Comme nous considérons une mesure indirecte, cette observable est un opérateur sur \mathcal{H}_1 (à différencier de la section précédente où l'observable était un opérateur sur \mathcal{H}_S). Dans le contexte de la section 2.1.1 précédente, la mesure indirecte de A correspond en fait à la mesure directe de l'observable $I \otimes A$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_1$ décrivant le système couplé $(\mathcal{S} + \mathcal{E}_1)$. Un résultat d'une mesure donnera donc une valeur aléatoire $i \in \{0, \dots, p\}$ correspondant aux nombres de valeurs propres distinctes. Conditionnellement à ce résultat l'état de \mathcal{S} sera modifié selon la réduction du paquet d'onde. Après la première mesure le système \mathcal{E}_1

disparaît (il n'interagit plus avec \mathcal{S}), la seconde copie peut venir interagir et ainsi de suite. On parle donc de mesures indirectes répétées car une succession de mesures est réalisée sur une chaîne de systèmes auxiliaires après interaction avec \mathcal{S} .

Ici nous allons présenter un modèle suffisamment général de trajectoires quantiques discrètes qui nous permettrons d'illustrer tous les résultats présentés dans cette habilitation. Nous ne rentrerons pas plus dans le formalisme qui décrit la suite d'interaction et la suite de mesures. Nous nous concentrerons seulement sur le modèle probabiliste résultant de ce schéma (des détails plus complets sont présentés dans l'appendice A et le modèle des interactions répétées est présenté dans la section 2.4). On considère un canal quantique

$$\phi(\cdot) = \sum_{i=0}^p V_i \cdot V_i^*$$

où $V_i, i = 0, \dots, p$ sont des opérateurs sur \mathcal{H}_S (on notera qu'il y a autant d'opérateurs de Kraus que de valeurs propres différentes, cela correspond à une mesure idéale et on renvoie à l'appendice A pour une justification).

Décrivons maintenant l'espace de probabilité attaché au modèle de mesures indirectes répétées. On considère pour cela l'espace

$$\Omega = \{0, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$$

muni de la tribu cylindrique notée \mathcal{C} . L'espace Ω correspond physiquement aux résultats obtenus lors des mesures indirectes. Typiquement comme dans l'expérience de Serge Haroche, un atome, préparé dans un état précis interagit avec une cavité (qui correspond à notre système \mathcal{S}). On mesure l'état de l'atome après interaction et on obtient par exemple le résultat 0 si l'atome est excité ou 1 si l'atome n'est pas excité. Puis un autre atome, identique au précédent (même état etc...) vient interagir avec la cavité et ainsi de suite. On obtient donc une suite de 0 et de 1 correspondant aux résultats successifs "excités" ou "non excités". Cette suite de résultats va nous permettre de décrire l'évolution de l'état de la cavité. Plus généralement, on considère un état $\tilde{\rho}_0 \in \mathcal{D}_S$ décrivant l'état initial de \mathcal{S} . Une première mesure indirecte de l'observable A donne un résultat $i \in \{0, \dots, p\}$ avec la probabilité

$$\mathbb{P}[\text{observer } i] = \text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_0 V_i^*).$$

Conditionnellement à cette observation, l'état $\tilde{\rho}_0$ est alors modifié et devient

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{V_i \tilde{\rho}_0 V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_0 V_i^*)}, \quad i = 0, \dots, p.$$

L'état $\tilde{\rho}_1$ est donc maintenant l'état de référence de \mathcal{H}_S . On répète la procédure, \mathcal{H}_S muni de l'état $\tilde{\rho}_1$ agit avec la deuxième copie \mathcal{E}_2 suivant le même schéma que la première interaction puis on effectue une mesure sur \mathcal{E}_2 après interaction. Un deuxième résultat de mesure donne alors un résultat $k \in \{0, \dots, p\}$ avec probabilité

$$\text{Tr}(V_k \tilde{\rho}_1 V_k^*) = \text{Tr}(V_k V_i, \tilde{\rho}_0 V_i^* V_k^*).$$

De même conditionnellement à ce résultat l'état $\tilde{\rho}_1$ est modifié et devient

$$\tilde{\rho}_2 = \frac{V_k \tilde{\rho}_1 V_k^*}{\text{Tr}(V_k \tilde{\rho}_1 V_k^*)} = \frac{V_k V_i \tilde{\rho}_0 V_i^* V_k^*}{\text{Tr}(V_k V_i \tilde{\rho}_0 V_i^* V_k^*)}$$

et ainsi de suite. On définit alors une probabilité \mathbb{P} sur Ω en posant pour un cylindre de taille n : $C_{i_1, \dots, i_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$

$$\mathbb{P}(C_{i_1, \dots, i_n}) = \text{Tr}(V_{i_n} \dots V_{i_1} \tilde{\rho}_0 V_{i_1}^* \dots V_{i_n}^*).$$

On vérifie aisément que cette probabilité est bien définie car elle satisfait le critère de consistance de Kolmogorov. Si on note (W_n) le processus défini par

$$W_n(\omega) = V_{\omega_n} \dots V_{\omega_1},$$

pour tout $\omega \in \Omega$, alors sous $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$ le processus $(\tilde{\rho}_n)$, défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\tilde{\rho}_n = \frac{W_n \tilde{\rho}_0 W_n^*}{\text{Tr}(W_n \tilde{\rho}_0 W_n^*)},$$

décrit entièrement notre trajectoire quantique. On notera X_n le résultat de la n ème mesure, c'est à dire

$$X_n(\omega) = \omega_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\omega \in \Omega$. Sauf cas très particulier, la suite (X_n) est non-markovienne (on verra dans la Section 3.3.3 que toute chaîne de Markov classique peut être vue comme une trajectoire quantique et dans ce cas le processus (X_n) est markovien). En utilisant la définition de X_n , on a la description suivante de notre trajectoire quantique

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{V_i \tilde{\rho}_n V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)} \mathbf{1}_{X_n=i}$$

où les variables aléatoires $(\mathbf{1}_{X_n=i})$ satisfont

$$\mathbb{P}[\mathbf{1}_{X_n=i} = 1] = \mathbb{P}[X_n = i] = \text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$. On notera que le couple $(\tilde{\rho}_n, X_n)$ est une chaîne de Markov. Dans la section 2.1.4 concernant la convergence des modèles discrets vers les modèles continus, l'outil de base sera la convergence des générateurs de Markov [81]. A cette occasion, on utilisera la convention suivante pour définir le générateur de Markov associé à $(\tilde{\rho}_n)$:

$$\mathcal{A}f(\tilde{\rho}) = \sum_{i=0}^p \left[f \left(\frac{V_i \tilde{\rho} V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho} V_i^*)} \right) - f(\tilde{\rho}) \right] \text{Tr}(V_i \tilde{\rho} V_i^*),$$

pour tout état $\tilde{\rho} \in \mathcal{D}_S$ et toute fonction $f \in C^2(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ à support compact. Dans le Chapitre 3 Section 3.3 nous ferons référence au générateur de Markov suivant

$$\Pi f(\tilde{\rho}) = \sum_{i=0}^p \left[f \left(\frac{V_i \tilde{\rho} V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho} V_i^*)} \right) \right] \text{Tr}(V_i \tilde{\rho} V_i^*).$$

Le choix de \mathcal{A} au lieu de Π est motivé par la notion de problème de martingale [81, 97] qui est un outil central de [119]. En particulier, si $f \in C^2(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ est à support compact, le processus suivant

$$\left(f(\tilde{\rho}_n) - f(\tilde{\rho}_0) - \sum_{i=1}^n \mathcal{A}f(\tilde{\rho}_i) \right)$$

définit une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $(\tilde{\rho}_n)$.

Notons encore deux faits importants. Premièrement si on prend la moyenne sur les résultats de mesures on retrouve l'évolution sans mesure c'est à dire

$$\mathbb{E}[\tilde{\rho}_n] = \phi^n(\tilde{\rho}_0),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout état $\tilde{\rho}_0$. Deuxièmement, si $\tilde{\rho}_0$ est un état pur c'est à dire qu'il existe x_0 tel que $\tilde{\rho}_0 = |x_0\rangle\langle x_0|$ alors le processus $(\tilde{\rho}_n)$ est à valeurs dans l'ensemble des états purs, c'est à dire les projecteurs de rang 1. Plus précisément, on peut définir une chaîne de Markov (x_n) , définie par

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{V_i x_n}{\|V_i x_n\|} \mathbf{1}_{X_n=i},$$

telle que $\tilde{\rho}_n = |x_n\rangle\langle x_n|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut noter dans ce cas que

$$\mathbb{P}[\mathbf{1}_{X_n=i} = 1] = \text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*) = \|V_i x_n\|^2,$$

pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La description des trajectoires quantiques que nous venons de donner fait explicitement référence à l'écriture du canal quantique sous la forme de Kraus $\phi(\cdot) = \sum_{i=0}^p V_i \cdot V_i^*$. Cependant il n'y a pas unicité de l'écriture du canal quantique ϕ et une écriture différente de la forme de Kraus donnera une trajectoire quantique différente. Le théorème dit de Gisin, Horne, Josza et Wootters suivant explique la flexibilité dans le choix de la forme de Kraus.

Théorème 2.1 (Théorème GHJW) *Deux représentations de Kraus*

$$\phi(\rho) = \sum_{i=0}^p V_i \rho V_i^* \quad \text{et} \quad \phi'(\rho) = \sum_{i=0}^k M_i \rho M_i^*,$$

avec par exemple $p \leq k$, représentent le même canal quantique c'est à dire $\phi = \phi'$ si et seulement si il existe une matrice unitaire $(u_{ij})_{i,j=0,\dots,k}$ telle que

$$V_i = \sum_{j=0}^k u_{ij} M_j,$$

où la liste des V_j a été complétée par des zéros si $p < k$.

Dans ce qui suit on considérera simplement les situations où on a le même nombre d'opérateurs de Kraus pour deux écritures différentes c'est à dire $p = k$ dans le théorème précédent. Ainsi pour une écriture différente du canal quantique

$$\phi(\cdot) = \sum_{i=0}^p M_i \cdot M_i^*$$

on a une trajectoire quantique différente

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{M_i \tilde{\rho}_n M_i^*}{\text{Tr}(M_i \tilde{\rho}_n M_i^*)} \mathbf{1}_{X_n=i}$$

ou

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{M_i x_n}{\|M_i x_n\|} \mathbf{1}_{X_n=i},$$

dans le cas d'une évolution en termes d'états purs. Ici on a $\mathbb{P}[\mathbf{1}_{X_n=i} = 1] = \text{Tr}(M_i \tilde{\rho}_n M_i^*)$ ou $\|M_i x_n\|^2$. En réalité d'un point de vue interprétation physique cela correspond à un choix différent d'observables sur l'environnement. Comme nous le verrons dans la section traitant des résultats de convergence la forme de la trajectoire quantique détermine la nature des bruits apparaissant dans la limite continue.

Remarque : Ici nous avons pris le parti de décrire un modèle particulier de trajectoire quantique. Sans entrer dans les détails cela concerne une situation où l'état de l'environnement est un état pur et l'observable mesuré n'a que des sous espace propre de dimension 1. Ce choix est motivé par une présentation concise des résultats obtenus pendant mes travaux de thèse. En particulier, ils permettent de comprendre assez intuitivement le passage des modèles discrets aux modèles continus. Ils illustrent ainsi les résultats obtenus dans les articles [116, 118, 119] et font abstraction de nombreux détails techniques qui nuisent à la compréhension de la démarche initiale. De plus nous aurons besoin de la description en termes d'états purs pour parler de mesure invariante dans la Section 3.3.

Le modèle que nous avons décrit ci-dessus peut donc se généraliser en remplaçant par exemple les opérations $V_i \cdot V_i^*$ par des applications complètement positives $\phi_i(\cdot) = \sum_k V_{ki} \cdot V_{ki}^*$ de telle sorte que $\phi = \sum_i \phi_i$. Ces modèles décrivent diverses situations, état de l'environnement non pur, spectre de l'observable dégénéré, mesure imparfaite... On peut également considérer des modèles non homogènes en faisant dépendre les V_i de l'instant n , c'est le cas des expériences avec contrôle par exemple [117]. Dans un soucis de complétude, nous présentons les différentes situations dans l'appendice A (hormis le cas non homogène).

2.1.3 Trajectoires quantiques continues

Cette section a pour objectif de dresser le cadre mathématique de l'étude du modèle décrit par l'équation (1.4) présentée dans le chapitre introductif. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ où vivent l mouvements brownien indépendants $(W_i(t))_{i=1, \dots, l}$

et $p-l$ processus ponctuels de Poisson sur \mathbb{R}^2 notés $(N_j)_{j=l+1,\dots,p}$. On suppose les processus de Poisson indépendants et indépendants des mouvements browniens. On considère un opérateur de Lindblad de la forme

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{i=1}^p L_i \rho L_i^* - \frac{1}{2} \{L_i^* L_i, \rho\}, \rho \in \mathcal{D}_S$$

où $L_i, i = 1, \dots, n$ et H sont des opérateurs sur \mathcal{H}_S .

Soit $\tilde{\rho}_0 \in \mathcal{D}_S$, on peut alors définir l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t &= \tilde{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{s-}) - \sum_{i=l+1}^p (L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \tilde{\rho}_{s-} \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]) ds \\ &+ \sum_{i=1}^l \int_0^t (L_i \tilde{\rho}_{s-} + \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{s-} (L_i + L_i^*)] \tilde{\rho}_{s-}) d\tilde{W}_i(s) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} - \tilde{\rho}_{s-} \right) \mathbf{1}_{0 < x < \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} N_i(ds, dx). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Une telle équation admet une unique solution à valeurs dans les matrices densités. Pour faire le lien avec la formulation donnée dans l'introduction, il faut noter que les processus $(\tilde{N}_i(t))$ définis par

$$t \mapsto \tilde{N}_i(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 < x < \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} N_i(ds, dx), t \geq 0, i = l+1, \dots, p \quad (2.2)$$

sont des processus de Poisson d'intensité donnée par

$$t \mapsto \int_0^t \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds, i = l+1, \dots, p.$$

En particulier, les processus suivant définis pour $t \geq 0$ par

$$t \mapsto \tilde{N}_i(t) - \int_0^t \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds$$

sont des martingales [119]. Cette formulation permet de définir proprement les processus de comptage $(\tilde{N}_i(t))$ [97, 65]. On utilisera la notation $(\tilde{N}_i(t))$ dans la suite.

D'un point de vue physique et notamment interprétation en termes de signal observé à travers une mesure indirecte, les processus $(\tilde{N}_i(t))$ sont souvent reliés à des problèmes de détection de photons présentant des sauts dans les processus observés. Pour la partie diffusive les signaux observés sont décrits par des processus $(y_i(t)), i = 1, \dots, l$, définis par

$$dy_i(t) = dW_i(t) + \text{Tr}[\tilde{\rho}_{t-} (L_i + L_i^*)] dt, i = 1, \dots, l.$$

On peut maintenant décrire le générateur de Markov associé au processus $(\tilde{\rho}_t)$. Il est donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(\tilde{\rho}) &= D_{\tilde{\rho}}f(\mathcal{L}(\tilde{\rho})) \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} D_{\tilde{\rho}}^2 f \left(L_i \tilde{\rho} + \tilde{\rho} L_i^* - \text{Tr}(\tilde{\rho}(L_i + L_i^*)) \tilde{\rho}, L_i \tilde{\rho} + \tilde{\rho} L_i^* - \text{Tr}(\tilde{\rho}(L_i + L_i^*)) \tilde{\rho} \right) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \left(f \left(\frac{L_i \tilde{\rho} L_i^*}{\text{Tr}(L_i \tilde{\rho} L_i^*)} \right) - f(\tilde{\rho}) - D_{\tilde{\rho}}f \left(\frac{L_i \tilde{\rho} L_i^*}{\text{Tr}(L_i \tilde{\rho} L_i^*)} \right) \right) \text{Tr}(L_i \tilde{\rho} L_i^*), \end{aligned} \quad (2.3)$$

pour tout état $\tilde{\rho} \in \mathcal{D}_S$ et toute fonction $f \in C^2(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ à support compact.

Au même titre que le cas discret, les équations que nous venons de décrire préservent la pureté. Attention ce n'est pas le cas en général. Ici cette propriété est vraie car il y a autant de bruits que d'opérateurs L_i (pour le cas discret, l'idée est sensiblement la même : il y a autant de résultats possibles lors de la mesure que d'opérateurs de Kraus). Ainsi si $\tilde{\rho}_0 = |x_0\rangle\langle x_0|$, il existe un processus (x_t) tel que $\tilde{\rho}_t = |x_t\rangle\langle x_t|$ pour tout $t \geq 0$. Le processus (x_t) est décrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} dx_t &= V(x_t) + \sum_{i=1}^l \left(L_i - \frac{1}{2} v_i(t-) I \right) x_{t-} d\tilde{W}_i(t) \\ &+ \sum_{j=l+1}^p \left(\frac{L_j}{\sqrt{I_j(t-)}} - I \right) x_t d\tilde{N}_j(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

où on a défini les quantités suivantes

$$\begin{aligned} V(x_{t-}) &= \left(-iH + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l L_i^* L_i + \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^p L_j^* L_j \right) x_{t-} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l v_i(t-) \left(L_i - \frac{1}{4} v_i(t-) \right) x_{t-} + \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^p I_j(t) x_{t-}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$v_i(t-) = \langle x_{t-}, (L_i + L_i^*) x_{t-} \rangle, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.6)$$

$$I_j(t-) = \langle x_{t-}, L_j^* L_j x_{t-} \rangle = \|L_j x_{t-}\|^2, \quad j = l+1, \dots, p. \quad (2.7)$$

Les équations du type (2.1) sont habituellement appelées équations maîtresses stochastiques et les équations du type (2.4) sont appelées équations de Schrödinger stochastiques. Dans les deux cas, les solutions sont appelées trajectoires quantiques.

Comme pour le cas discret, si on prend la moyenne de ces trajectoires on retrouve l'évolution sans mesure c'est à dire

$$d\mathbb{E}[\tilde{\rho}_t] = \mathcal{L}(E[\tilde{\rho}_t])dt.$$

En particulier, $(E[\tilde{\rho}_t])$ est solution de l'équation maîtresse définie par l'opérateur de Lindblad \mathcal{L} . Dans le cadre continu, cette observation est à l'origine de ce qu'on appelle "monte

carlo wave function method” qui a débouché sur de nombreuses applications numériques [66, 109]. En effet, numériquement, il est très intéressant d’exploiter la version état pur. Ainsi en générant un grand nombre de trajectoires (x_t) solutions de (2.4), on peut obtenir la solution de l’équation lindbladienne

$$d\mathbb{E}[|x_t\rangle\langle x_t|] = \mathcal{L}(E[|x_t\rangle\langle x_t|])dt$$

par une méthode de Monte Carlo. Le gain peut être assez significatif car générer une solution (x_t) nécessite de gérer d paramètres complexes (ceux de la taille du vecteur x_t) alors que générer la solution de l’équation de Lindblad nécessite de travailler avec des matrices densités et donc de gérer d^2 paramètres ce qui peut s’avérer très coûteux.

Pour finir notons que l’écriture de l’opérateur de Lindblad \mathcal{L} bénéficie du même principe de flexibilité que celui des canaux quantiques. On a naturellement des équations maitresses stochastiques différentes suivant les écritures de l’opérateur de Lindblad.

2.1.4 Du discret au continu

Maintenant que nous avons présenté les modèles discrets et continus, cette section est consacrée aux résultats montrant comment on obtient les modèles continus comme limites des modèles discrets [116, 117, 118, 119, 122, 110, 121, 18, 120, 3, 8]. Cette approche a comme avantage d’être relativement intuitive et permet de développer divers modèles. La démarche est d’introduire un paramètre de temps dans le modèle des interactions répétées. En particulier, on considère que le temps d’interaction entre le système \mathcal{S} est les systèmes \mathcal{E}_i de la chaîne est h . Ce paramètre est supposé tendre vers zéro par la suite. Pour obtenir des limites non triviales, il faut rescaler proprement les opérateurs V_i [17]. Des résultats similaires de limites continues ont également été développés dans [58, 61, 32]

Ici nous allons juste décrire l’idée directrice et nous référons à [119] pour tous les détails. Comme annoncé, on considère que les opérateurs $V_i, i = 0, \dots, p$ dépendent d’un paramètre de temps h et satisfont les conditions asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} V_0(h) &= I + hL_0 + o(h) \\ V_i(h) &= \sqrt{h}L_i + o(h), i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où les opérateurs L_i sont ceux de la section précédente (cf [17] pour une explication de ce choix de conditions asymptotiques). La condition $\sum_i V_i V_i^* = I$ impose

$$L_0 = -iH + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p L_i L_i^*.$$

Concentrons nous sur la trajectoire quantique décrite par

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{V_i(h)\tilde{\rho}_n V_i(h)^*}{\text{Tr}(V_i(h)\tilde{\rho}_n V_i(h)^*)} \mathbf{1}_{X_n=i}. \quad (2.9)$$

On note $\mathcal{A}^{(h)}$ son générateur de Markov. Le développement asymptotique des probabilités d'apparition des résultats i , pour $i = 0, \dots, p$ donne une forte indication sur quels types d'équations on obtient à la limite. Pour le cas (2.9) on a les développements asymptotiques suivants pour les probabilités de transition

$$\mathrm{Tr}(V_0(h)\tilde{\rho}_n V_0(h)^*) = 1 - h\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_n(L_0 + L_0^*)) + o(h), \quad (2.10)$$

$$\mathrm{Tr}(V_i(h)\tilde{\rho}_n V_i(h)^*) = h\mathrm{Tr}(L_i\tilde{\rho}_n L_i^*) + o(h), i = 1, \dots, p. \quad (2.11)$$

Quand h va tendre vers zéro, on voit donc que souvent on obtient le résultat 0 et rarement les résultats i . De plus, les asymptotiques sont typiquement celles de processus de Poisson. Il est alors intuitif de s'attendre à obtenir un comportement avec des sauts à la limite. A partir du processus $(\tilde{\rho}_n)$, on définit un processus en temps continu $(\tilde{\rho}_{[t/h]})$. On a le théorème de convergence suivant.

Théorème 2.2 *Soit $(\tilde{\rho}_n)$ la trajectoire quantique décrite par (2.9). On considère que les opérateurs $V_i, i = 0, \dots, p$ satisfont les conditions asymptotiques (2.8). Le processus $(\tilde{\rho}_{[t/h]})$ converge alors en loi vers la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t &= \tilde{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^p \int_0^t \left(\frac{L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*}{\mathrm{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} - \tilde{\rho}_{s-} \right) \left(d\tilde{N}_i(s) - \mathrm{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur la convergence du générateur $\mathcal{A}^{(h)}$ du processus (2.9) vers le générateur \mathcal{A} (cf (2.3)) dans le cas où on a que des sauts (c'est à dire $l = 0$). Une propriété de tension du processus $(\rho_{[t/h]})$ ainsi que la solution du problème de martingale associée à \mathcal{A} permet d'achever la preuve de la convergence en distribution [81].

Pour voir apparaître de la diffusion à la limite, il faut considérer un autre type de trajectoires quantiques correspondant à une autre écriture de la forme de Kraus du canal ϕ . Par exemple

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{M_i(h)\tilde{\rho}_n M_i(h)^*}{\mathrm{Tr}(M_i(h)\tilde{\rho}_n M_i(h)^*)} \mathbf{1}_{X_n=i} \quad (2.13)$$

avec $M_i = \sum_j u_{ij} V_j$. On voit alors facilement que si $u_{i0} \neq 0$ la forme asymptotique correspondante est de la forme

$$\mathrm{Tr}(M_i(h)\tilde{\rho}_n M_i(h)^*) = u_{i0} + \sqrt{h} \dots$$

et si $u_{i0} = 0$ de la forme

$$\mathrm{Tr}(M_i(h)\tilde{\rho}_n M_i(h)^*) = h \dots$$

Ainsi typiquement la première forme asymptotique donnera un comportement diffusif. En effet, intuitivement le développement asymptotique ressemble fortement à celui apparaissant dans le théorème de Donsker. La deuxième forme asymptotique, comme dans le cas

précédent, invite à considérer un comportement de type saut. De manière générale, en jouant donc sur la forme de Kraus, on peut obtenir toutes les évolutions du type (2.1) comme limite de trajectoires quantiques discrètes. Par exemple si on pose

$$M_0 = \sum_{i=0}^p \frac{1}{\sqrt{p+1}} V_i \quad (2.14)$$

$$M_i = -\frac{1}{\sqrt{p+1}} V_0 + \frac{1}{\sqrt{p+1}} V_i, \quad i = 1, \dots, l \quad (2.15)$$

$$M_i = V_i, \quad i = l+1, \dots, p \quad (2.16)$$

alors on a la théorème suivant.

Théorème 2.3 *Soit $(\tilde{\rho}_n)$ la trajectoire quantique décrite par (2.13). On considère que les opérateurs $V_i, i = 0, \dots, p$ satisfont les conditions asymptotiques (2.8) et les opérateurs $M_i, i = 0, \dots, p$ sont choisis suivant (2.14). Le processus $(\tilde{\rho}_{[t/h]})$ converge alors en loi vers la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t &= \tilde{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^l \int_0^t (L_i \tilde{\rho}_{s-} + \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{s-} (L_i + L_i^*)] \tilde{\rho}_{s-}) d\tilde{W}_i(s) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \left(\frac{L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} - \tilde{\rho}_{s-} \right) (d\tilde{N}_i(s) - \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds). \end{aligned} \quad (2.17)$$

De même ce théorème repose sur la convergence des générateurs et une propriété de tension.

La description du lien entre modèles discrets et continus est différente de celle présentée dans l'article [119]. Dans cet article on se focalise plutôt sur la forme des observables mesurées sur l'environnement mais les résultats sont complètement équivalents. Notons que dans [119], on considère des observables plus générales avec des spectres dégénérés par exemple (pour le lecteur intéressé par [119], la discussion sur le fait que $u_{i0} \neq 0$ ou non est à rapprocher de la discussion sur $p_{i0} \neq 0$ ou non pour les projecteurs spectraux).

Remarque : Dans le cas où les mesures ne sont "pas parfaites" c'est à dire où les opérations $V_i \cdot V_i$ sont remplacées par des applications complètement positives, les résultats de convergences sont similaires. Comme nous l'avons signalé, nous avons fait le choix de présenter seulement des modèles avec des mesures parfaites car ils sont suffisamment illustratifs de la méthode adoptée pour justifier les modèles continus.

Terminons cette section par quelques considérations sur les modèles de trajectoires quantiques avec température positive. Les résultats obtenus dans le cadre de ma thèse concernent le cas où l'état de référence γ de chaque sous système de l'environnement est dans un état pur $\gamma = |e_0\rangle\langle e_0|$. Ce choix est guidé par les travaux de Stéphane Attal et Yan

Pautrat en ce qui concerne la limite continue des interactions répétées [17]. En effet, pour obtenir les équations de Langevin quantiques, à partir du modèle discret, il faut définir proprement l'environnement $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ et ceci se fait en référence à un état pur. Cette situation correspond physiquement à un cas où la température de l'environnement est nulle.

Pour modéliser un état pour des modèles à température positive, on considère un état de Gibbs γ de la forme

$$\gamma = \frac{e^{-\beta H_R}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_R})},$$

où β correspond à une quantité proportionnelle à l'inverse de la température et H_R correspond à l'hamiltonien décrivant l'évolution libre de chaque copie. En particulier, cet état n'est plus un état pur. Pour pouvoir dériver la limite continue dans le cadre d'un environnement à température positive, il faut transformer l'état de Gibbs en un état pur projecteur. Cela s'effectue en utilisant la transformation GNS. Cette transformation permet de transformer l'état γ en un état projecteur dans un espace de Hilbert plus grand [63]. Ainsi des équations de Langevin quantiques à température positive ont été obtenues comme limites de modèles discrets dans [12] en combinant les résultats de [17] à température nulle et la transformation GNS. C'est cette idée qui a été adaptée dans [18] pour obtenir les équations maîtresses stochastiques avec chaleur ; il s'agit en effet de combiner les résultats de [119] à température nulle et la transformation GNS. Ainsi on dérive des équations maîtresses stochastiques avec température. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails et nous renvoyons à l'appendice A. En particulier, dans cette appendice on donne des éléments permettant d'entrevoir quelles équations apparaissent à la limite.

2.2 Marche quantique ouverte continue

Les marches quantiques ouvertes sont des modèles d'évolution quantique qui apparaissent comme un analogue des marches aléatoires classiques sur un graphe. Il s'agit de décrire la position d'une particule quantique sur un graphe.

Les modèles en temps discret ont été introduits et développés par Stéphane Attal, Christophe Sabot, Francesco Petruccione et Ilya Sinaysky dans [19, 20]. Récemment ce type de modèle a attiré de nombreux développements du fait de la très grande analogie avec les modèles classiques de chaîne de Markov. En particulier, les notions classiques d'irréductibilité, de période, d'ergodicité, de récurrence, de transience et de retour à l'origine ont été étudiées en détail et présentent des comportements non standards ce qui renforce l'attrait de ces modèles [11, 31, 74, 73, 103, 102]. Un outil central pour aborder ces questions sont les trajectoires quantiques qui s'intéressent notamment à la position de la particule quantique sur le graphe.

D'un point de vue concret en termes d'applications des développements théoriques ont été mis en avant pour l'utilisation de ces modèles dans différents domaines : transport en biologie, contrôle [126]... Dans le domaine des applications, cette théorie est moins mature que la théorie des marches quantiques unitaires qui sont notamment utilisées dans le monde du calcul quantique. Les marches quantiques ouvertes sont également différentes

des marches unitaires en ce qui concerne les résultats mathématiques décrivant ces deux modèles. Par exemple, en termes de statistiques asymptotiques, type théorème centrale limite, les marches unitaires quantiques présentent des phénomènes complètement différents des marches aléatoires classiques (la vitesse typique est en n au lieu du classique \sqrt{n} et la loi limite n'est pas gaussienne [98]) alors que les marches quantiques ouvertes en temps long présentent des comportements proches des comportements classiques [11, 73, 67]. Des liens entre les deux modèles (unitaires et ouvertes) ont déjà été soulignés [11].

De la même manière qu'il existe une théorie des chaînes de Markov à temps continu, on peut définir une extension naturelle continue des marches quantiques ouvertes. On peut notamment dériver et justifier ces modèles à partir des modèles en temps discret. On appellera ces modèles *marches quantiques ouvertes continues*. Cette approche permet également d'obtenir les trajectoires quantiques attachées à ces marches. Le papier [120] concerne la dérivation des modèles continus à partir des modèles discrets ainsi que les trajectoires quantiques associées. On peut également ajouter qu'il existe des modèles de marche unitaire quantique continue mais que les obtenir à partir de modèles discrets est une question qui pour l'instant n'est pas totalement tranchée à ma connaissance. Un autre modèle continu obtenu à partir des modèles discrets a été dérivé par Denis Bernard, Michel Bauer et Antoine Tilloy [35]. En particulier, ils ont obtenu un modèle diffusif appelé "mouvement brownien quantique ouvert" qui est un modèle naturel de diffusion alors que les modèles obtenus dans [120] sont des modèles poissonniens. Dans [35], les auteurs considèrent une limite continue en temps et en espace alors que les modèles dérivés dans [120] sont obtenus à partir de limites continues en temps seulement et donc la particule quantique continue de sauter sur chaque site du graphe.

Afin de motiver les modèles continus, nous allons brièvement rappeler le modèle des marches quantiques ouvertes introduites par Stéphane Attal et al dans [19, 20]. Comme annoncé plus haut, il s'agit de l'évolution d'une particule quantique sur un graphe connecté ou sur un réseau. De manière plus précise, on considère un graphe V avec les arrêtes orientées $\{(i, j); i, j \in V\}$. L'espace \mathbb{C}^V représente le système quantique qui va décrire la position de la particule. On le muni d'une base orthonormée $\{|i\rangle, i \in V\}$. L'espace décrivant le mouvement de la particule sur le site $i \in V$ est noté \mathcal{H}_S . La combinaison de la position de la particule et son mouvement sont donc donnés par le système composite $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^V$. Sur cet espace, on considère un sous ensemble de matrices densités de la forme

$$\mathcal{D}' = \left\{ \rho = \sum_{i \in V} \rho_i \otimes |i\rangle\langle i|, \rho_i = \rho_i^*, \rho_i \geq 0, i \in V \mid \sum_{i \in V} \text{Tr}(\rho_i) = 1 \right\}.$$

Ici V peut être de cardinal fini.

Maintenant nous allons décrire les opérateurs qui interviendront dans la définition de notre modèle de marches quantiques ouvertes. Pour chaque arrête (i, j) on considère un opérateur B_i^j sur \mathcal{H}_S . Ces opérateurs vont décrire les transitions des sites i à j . Pour chaque $i \in V$, on suppose

$$\sum_{j \in V} (B_i^j)^* B_i^j = I, \quad (2.18)$$

où la série est supposée absolument convergente (si V est infini). Comme pour les chaînes de Markov classiques où "la somme des probabilités partant d'un site est égale à 1", ici on peut comprendre cette condition comme : "la somme de tous les effets partant du site i est égale à I ". Pour résumer, à chaque site $i \in V$, on associe une application complètement positive sur les états de \mathcal{H}_S :

$$\mathcal{M}_i(\rho) = \sum_j B_i^j \rho (B_i^j)^* . \quad (2.19)$$

Maintenant décrivons la dynamique totale sur l'espace $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^V$. Pour cela, on dilate les opérateurs B_i^j en des opérateurs sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^V$ en posant

$$M_i^j = B_i^j \otimes |j\rangle\langle i| .$$

Ainsi l'opérateur M_i^j retranscrit exactement l'idée de passer du site i à j . L'effet sur le degré interne, c'est à dire sur l'état sur \mathcal{H}_S , est ainsi décrit par l'opérateur B_i^j . Les conditions précédentes font de l'application

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_i \sum_j M_i^j \rho (M_i^j)^* \quad (2.20)$$

une application complètement positive sur l'espace total $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^V$.

A ce stade, on peut décrire l'action de \mathcal{M} sur \mathcal{D}' . Pour cela considérons un état ρ de la forme

$$\rho = \sum_i \rho_i \otimes |i\rangle\langle i| ,$$

alors après calcul on a

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_i \left(\sum_j B_j^i \rho_j (B_j^i)^* \right) \otimes |i\rangle\langle i| . \quad (2.21)$$

Comme pour une chaîne de Markov classique, sur le site i on a la contribution de toutes les parties de l'état qui sont parties de j et qui ont fini en i . La quantité $\mathcal{M}(\rho)$ joue le rôle de μP qui apparaît habituellement dans le cas classique pour décrire la loi de la première évolution d'une chaîne de Markov. En effet lorsque l'on considère une chaîne de Markov classique, parmi les éléments nécessaires pour décrire cette chaîne, on se donne une mesure initiale μ , jouée dans le cas quantique par un état initial ρ . On se donne également les transitions décrites par une matrice P , jouée par l'application \mathcal{M} dans le cas quantique.

En termes de mesure, on va s'intéresser à la mesure de la position. Pour un état initial de la forme

$$\rho^{(0)} = \sum_i \rho_i^{(0)} \otimes |i\rangle\langle i| ,$$

si on mesure la position $|i\rangle$, on obtient le modèle suivant : la particule est en position i avec probabilité $\text{Tr}(\rho_i^{(0)})$. On définit alors une mesure de probabilité q_0 telle

$$q_0(i) = \text{Tr}(\rho_i^{(0)}), i \in V .$$

Après une évolution l'état $\rho^{(0)}$ devient

$$\rho^{(1)} = \mathcal{M}(\rho^{(0)}) = \sum_i \left(\sum_j B_j^i \rho_j^{(0)} (B_j^i)^* \right) \otimes |i\rangle\langle i|.$$

La probabilité de trouver la particule en position i est $\sum_j \text{Tr} \left(B_j^i \rho_j^{(0)} (B_j^i)^* \right)$. On définit de même une probabilité q_1 telle que

$$q_1(i) = \sum_j \text{Tr} \left(B_j^i \rho_j^{(0)} (B_j^i)^* \right), i \in V.$$

Décrivons encore une étape

$$\rho^{(2)} = \mathcal{M}^2(\rho^{(0)}) = \sum_i \sum_j \sum_k B_j^i B_k^j \rho_k^{(0)} (B_k^j)^* (B_j^i)^* \otimes |i\rangle\langle i|$$

on a alors la probabilité q_2 telle que

$$q_2(i) = \sum_j \sum_k \text{Tr} (B_j^i B_k^j \rho_k (B_k^j)^* (B_j^i)^*), i \in V.$$

On peut alors noter que ce résultat est différent du cas classique réglé par les relations de Chapman Kolmogorov. Si tel avait été le cas on aurait dû s'attendre à une relation de la forme

$$\sum_j \sum_k \text{Tr} (B_j^i \rho_j (B_j^i)^*) \text{Tr} (B_k^j \rho_k (B_k^j)^*) \neq \sum_j \sum_k \text{Tr} (B_j^i B_k^j \rho_k (B_k^j)^* (B_j^i)^*).$$

En réalité ce n'est pas si étonnant que cela car on ne regarde que les résultats de mesures et comme on l'a déjà mentionné la suite des résultats de mesures n'est pas markovienne. Finalement on définit une marche quantique ouverte de la façon suivante.

Définition 2.1 Soit \mathcal{M} une application de la forme (2.21). Une marche quantique ouverte est donc la donnée de $\rho^{(n)} = \mathcal{M}^n(\rho^{(0)})$ et la distribution associée q_n telle que

$$q_n(i) = \text{Tr}(\mathcal{M}^n(\rho^{(0)}) \otimes |i\rangle\langle i|), i \in V.$$

De manière récursive, on peut écrire

$$\rho^{(n)} = \sum_i \rho_i^{(n)} \otimes |i\rangle\langle i|,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec

$$\rho_i^{(n+1)} = \sum_j B_j^i \rho_j^{(n)} B_j^{i*}, i \in V.$$

Remarque : Considérons une chaîne de Markov classique (X_n) sur un graphe V de matrice de transition $P = (p_{ij})$ et de mesure initiale μ . Si on pose

$$B_j^i = \sqrt{p_{ij}}I, i, j \in V$$

et $\rho^{(0)} = \sum_{i \in V} \mu(i) \rho \otimes |i\rangle\langle i|$ alors on voit facilement que

$$q_n(i) = \mathbb{P}[X_n = i],$$

pour tout $i \in V$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi toute chaîne de Markov homogène classique sur un graphe peut être vu comme un cas particulier de marche quantique ouverte. C'est une des principales motivations d'étude de ces modèles.

La mesure de la position i n'est pas vraiment une mesure indirecte dans le sens où la position fait partie du système (et on ne le rafraichit pas après la mesure comme dans le cas des interactions répétées). On peut néanmoins définir un modèle de trajectoires quantiques. Partant d'un état $\rho^{(0)}$, celui ci devient

$$\tilde{\rho}^{(0)}(i) = \frac{1}{\text{Tr}(\rho_i)} \rho_i \otimes |i\rangle\langle i|,$$

si la particule a été mesurée dans la position i . Notons X_0 la position de la particule $\rho^{(0)}$, on a donc

$$\mathbb{P}[X_0 = i] = \text{Tr}(\rho_i^{(0)}), i \in V.$$

On peut donc appliquer \mathcal{M} sur l'état $\tilde{\rho}^{(0)}$ et on mesure à nouveau la position i . Cela définira un état $\tilde{\rho}^{(1)}$ et ainsi de suite. On itère ce procédé et on note (X_n) la suite de variables aléatoires qui donne la position de l'état lors des mesures successives. On définit donc une chaîne de Markov $(\tilde{\rho}^{(n)} = \rho_n \otimes |X_n\rangle\langle X_n|)$ qui est résumée dans la proposition suivante.

Proposition 2.4 ([19]) *En répétant l'application \mathcal{M} et en mesurant les positions successives sur \mathbb{C}^V , on obtient une suite d'état aléatoire $(\tilde{\rho}^{(k)})$ sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathbb{C}^V$. Cette suite est une chaîne de Markov. Plus précisément si au temps k l'état est $\rho \otimes |j\rangle\langle j|$, alors au temps $k + 1$ l'état peut prendre les valeurs*

$$\frac{1}{p^i(\rho)} B_j^i \rho (B_j^i)^* \otimes |i\rangle\langle i|, \quad i \in V,$$

avec probabilité

$$p^i(\rho) = \text{Tr} (B_j^i \rho (B_j^i)^*).$$

Maintenant que l'on a rappelé le modèle des marches quantiques ouvertes, il est naturel d'étudier leur limite continue. Pour cela on introduit un paramètre de temps h dans les opérateurs B_j^i et des conditions asymptotiques sur ces opérateurs en fonction de h . Naturellement les scalings sont inspirés de ceux décrits dans la section 2.1.4. L'opérateur $\mathcal{M}(h)$ décrivant les marches quantiques ouvertes dépend donc du paramètre de temps h . En particulier, on a le théorème suivant qui est exprimé pour un graphe V éventuellement infini.

Proposition 2.5 *Supposons qu'il existe des opérateurs $L_i^i, i \in V$ et $R_j^i, i \neq j, (i, j) \in V^2$, tel que*

$$\sum_{i \neq j} \|R_j^i\|^2 < +\infty \quad (2.22)$$

et tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i \in V} \left\| \frac{1}{h} (B_i^i(h) - I) - L_i^i \right\| = 0 \quad (2.23)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i \neq j \in V} \left\| \frac{1}{\sqrt{h}} B_j^i(h) - R_j^i \right\|^2 = 0. \quad (2.24)$$

Soit $(\rho^{(k)})$ l'évolution décrivant la marche quantique ouverte définie par l'opérateur $\mathcal{M}(h)$. Alors $\rho^{(t/h)}$ converge en norme opérateur vers $\tilde{\eta}(t) = \sum_i \eta_i(t) \otimes |i\rangle\langle i|$, où $\eta_i(t)$ satisfait

$$\frac{d}{dt} \eta_i(t) = L_i^i \eta_i(t) + \eta_i(t) (L_i^i)^* + \sum_{j \neq i} R_j^i \eta_j(t) (R_j^i)^* \quad (2.25)$$

Il existe des opérateurs auto-adjoints bornés H_k tel que les opérateurs L_k^k peuvent s'écrire

$$L_k^k = -iH_k - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} R_j^i R_j^i^*.$$

On peut alors réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{d}{dt} \eta_i(t) = -i[H^i, \eta_i(t)] + \sum_{j \neq i} \left(R_j^i \eta_j(t) (R_j^i)^* - \frac{1}{2} \{ (R_i^j)^* R_i^j, \eta_i(t) \} \right). \quad (2.26)$$

En ce qui concerne les modèles physiques, ce type d'équation est un cas particulier d'équations appelées équations maîtresses de Lindblad non-markovienne []. Dans ce cadre, on s'intéresse souvent à l'évolution réduite décrite par la famille $(\varrho(t))$ définie par

$$\varrho(t) = \sum_{j \in V} \eta_j(t), t \geq 0.$$

Ce type d'équation est appelée non-markovienne car on ne peut pas les décrire sous la forme $\varrho(t) = e^{t\mathcal{L}}\varrho(0)$ où \mathcal{L} serait un opérateur type Lindblad. Cependant on peut décrire un opérateur \mathcal{L} sous forme lindbladienne sur l'espace $\mathcal{H}_S \otimes C^V$ tel que

$$\tilde{\eta}(t) = e^{t\mathcal{L}}\tilde{\eta}(0)$$

avec \mathcal{L} définit par

$$\mathcal{L}[\tilde{\eta}] = [H, \tilde{\eta}] + \sum_{i \neq j \in V} \left(S_j^i \tilde{\eta} (S_j^i)^* - \frac{1}{2} \{ (S_j^i)^* S_j^i, \tilde{\eta} \} \right), \quad (2.27)$$

où on a défini

$$H = \sum_{i \in V} H_i \otimes |i\rangle\langle i|, \quad S_j^i = R_j^i \otimes |j\rangle\langle i|, i \neq j \in V.$$

En ce qui concerne les trajectoires quantiques on a le résultat suivant. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définis des processus ponctuels de Poisson sur \mathbb{R}^2 indépendants $N^{ij}, i \neq j, (i, j) \in V^2$.

Théorème 2.6 *Soit $\rho^{(0)}$ un état sur \mathcal{S} et soit $\tilde{\rho}^{(0)}$ l'état aléatoire résultant de la mesure de la position initiale. Soit $(\tilde{\rho}^{(k)})$ la chaîne de Markov décrivant la trajectoire quantique résultant des mesures successives de la position et $(\tilde{\rho}^{(t/h)})$ le processus correspondant. Alors le processus $(\tilde{\rho}^{(t/h)})$ converge en loi vers le processus $(\tilde{\rho}(t))$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) = & \tilde{\rho}^{(0)} + \int_0^t \mathcal{K}(\tilde{\rho}(s-)) ds \\ & + \sum_{i \neq j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{S_j^i \tilde{\rho}(s-)(S_j^i)^*}{\text{Tr}[S_j^i \tilde{\rho}(s-)(S_j^i)^*]} - \tilde{\rho}(s-) \right) \mathbf{1}_{0 < x < \text{Tr}[S_j^i \tilde{\rho}(s-)(S_j^i)^*]} N^{ij}(dx, ds), \end{aligned} \quad (2.28)$$

avec

$$\mathcal{K}(\tilde{\rho}) = \mathcal{L}(\tilde{\rho}) - \sum_{i \neq j} \left(S_j^i \tilde{\rho}(S_j^i)^* - \tilde{\rho} \text{Tr}[S_j^i \tilde{\rho}(S_j^i)^*] \right).$$

A ce stade, on peut renforcer l'analogie avec les chaîne de Markov en temps continu. En effet, l'opérateur \mathcal{K} préserve la position dans le sens où \mathcal{K} est de la forme $\mathcal{K} = \sum_i \mathcal{K}_i \otimes |i\rangle\langle i|$ où les \mathcal{K}_i sont des super-opérateurs "non-linéaires" sur \mathcal{H}_S . La première mesure a pour effet de localiser la particule sur une position i ainsi la particule reste sur cette position pendant un certain temps avant de sauter sur un autre site j . Le saut est décrit par l'opérateur S_j^i correspondant au saut réglé par le processus de Poisson N^{ij} . Puis la particule reste ensuite sur le site j et ainsi de suite. Les temps de sauts sont réglés par des processus de Poisson donc obéissent à des lois exponentielles (qui dépendent ici du degré interne de la particule en chaque site). C'est typiquement l'analogie des chaînes de Markov à temps continu qui elles sautent de site en site à des temps exponentiels. On a le résultat suivant qui appuie cette analogie.

Proposition 2.7 *Soit $h > 0$. Pour tout $(i, j) \in V^2$ on pose*

$$B_j^i(h) = \sqrt{p_{ji}(h)} I.$$

avec les conditions asymptotiques suivantes

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= 1 - hq_{ii} + o(h) \\ p_{ji}(h) &= hq_{ji} + o(h) \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \quad (2.29)$$

où

$$q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j \quad (2.30)$$

$$q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ji}, \quad \forall i \in V. \quad (2.31)$$

Soit $\rho(0) = \sum_i \rho_i(0) \otimes |i\rangle\langle i|$ et soit $\tilde{\rho}^{(0)}$ l'état aléatoire décrivant la mesure de la position sur le graphe. Soit $(\tilde{\rho}^{(k)})$ la chaîne de Markov associée aux opérateurs B_j^i ci-dessus. Soit $(\tilde{\rho}^{(t/h)})$ le processus en temps continu et soit $(\tilde{\rho}(t))$ sa limite quand h tend vers zéro.

On définit le processus (X_t) par

$$X_t = \sum_{i \in V} i \mathbf{1}_{\text{Tr}[\tilde{\rho}(t)I \otimes |i\rangle\langle i|] = 1},$$

pour tout $t \geq 0$, i.e

$$X_t = i \quad \text{si} \quad \text{Tr}[\tilde{\rho}(t)I \otimes |i\rangle\langle i|] = 1.$$

Alors (X_t) est une chaîne de Markov à temps continu de matrice de transition $Q = (q_{ji})$. La mesure initiale est donnée par $P[X_0 = i] = \text{Tr}(\rho_i(0)), i \in V$.

Une marche quantique ouverte à temps continu est donc décrite par un semi-groupe (T_t) dont le générateur est \mathcal{L} donné par (2.27). Il est donc naturel de se poser les questions habituelles de la théorie classique : ergodicité, irréductibilité, récurrence, transience etc... C'est le cadre du sujet de recherche de la thèse de Hugo Bringuier. Dans un premier temps il a établi des propriétés statistiques asymptotiques telles que Théorème Central Limite, Principe de Grande Déviation [67]. Dans un deuxième avec Yan Pautrat et Ivan Bardet nous avons étudié les propriétés de récurrence, de transience et d'irréductibilité [96] puis nous voulons aborder la théorie du potentiel dans ce cadre, [95]. Au sujet des questions de récurrence et de transience, remarquons que dans la théorie classique des chaînes de Markov continues, si on note (X_t) une telle chaîne et si on note (T_n) les temps de sauts, toutes les propriétés de la chaîne sont obtenues en regardant la chaîne de Markov au temps de saut (X_{T_n}) [113]. En particulier, cette chaîne de Markov (X_{T_n}) est une chaîne de Markov discrète et toutes les propriétés de transience et de récurrence se transmettent à la chaîne continue. Ceci est essentiellement dû au fait que les temps entre les sauts sont i.i.d. Dans notre cadre cette propriété n'est pas vérifiée car le degré interne introduit une non-homogénéité. En particulier, la marche quantique ouverte continue au temps de saut n'est pas une marche quantique ouverte (discrète). Une étude à part entière est nécessaire.

2.3 Stabilité des filtres quantiques

Ici on se fixe une forme de Kraus pour un canal quantique $\phi(\cdot) = \sum_{i=0}^p V_i \cdot V_i^*$ avec la possibilité d'obtenir toutes les limites continues possibles selon le choix des V_i .

L'idée des mesures indirectes est directement liée aux questions de la théorie des chaînes de Markov cachées et de la théorie du filtrage. A partir des observations indirectes que

peut-on dire de l'évolution du système \mathcal{S} . En particulier, cette question prend tout son sens si on ne connaît pas l'état initial de notre système. Imaginons que l'état de notre système est $\tilde{\rho}_0$ mais que celui-ci n'est pas connu, d'après le modèle probabiliste décrit dans la section 2.1.2, on voit bien que la distribution des résultats de mesures (X_n) est directement reliée à $\tilde{\rho}_0$. Ainsi la connaissance de $\tilde{\rho}_0$ et les résultats de mesures permettent d'actualiser l'état ($\tilde{\rho}_n$) au fur et à mesure. En revanche lorsque l'on ne connaît pas $\tilde{\rho}_0$, il n'est pas possible de décrire la trajectoire quantique. Dans ce cas on utilise une estimation de cette trajectoire. On actualise cette estimation suivant les résultats de mesures que l'on obtient lors de l'expérience. Le but est de savoir si cette estimation se rapproche de la vraie trajectoire quantique. En d'autres termes, l'objectif est de savoir sous quelles conditions la vraie trajectoire s'affranchit de sa condition initiale. Dans le jargon de la théorie du filtrage une trajectoire quantique s'appelle un filtre quantique et on parle alors de filtre stable lorsque celui ci s'affranchit de sa condition initiale.

Comme précisé dans l'introduction, l'approche discrète peut permettre d'obtenir des propriétés qualitatives sur le processus continu. Ces propriétés sont parfois délicates à montrer directement voire il n'existe pas de preuve directe tout simplement. C'est en particulier, le cas pour le problème de la stabilité des filtres. Plus précisément, on montre qu'une distance particulière entre la vraie trajectoire et son estimation est une sur-martingale. Cette propriété est délicate à démontrer dans le cas continu alors qu'elle est vraie dans le cas discret et que la preuve est certes pas immédiate mais accessible [124]. Rappelons le cadre discret présenté dans [124]. On se place donc dans une situation où l'on ne connaît pas l'état initial du système $\tilde{\rho}_0$. On choisit alors un état arbitraire $\hat{\rho}_0$ et on définit le processus suivant

$$\hat{\rho}_{n+1} = \sum_{i=1}^p \frac{V_i \hat{\rho}_n V_i^*}{\text{Tr}(V_i \hat{\rho}_n V_i^*)} \mathbf{1}_{X_n=i} \quad (2.32)$$

où ($\mathbf{1}_{X_n=i}$) est une famille de variable aléatoire satisfaisant $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{X_n=i} = 1) = \text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)$, $i = 0, \dots, p$, $n \in \mathbb{N}$. Ici le processus ($\tilde{\rho}_n$) correspond à la vraie trajectoire quantique et c'est elle qui règle les distributions des résultats de mesures. En effet, si on connaît le vrai état $\tilde{\rho}_0$, la vraie trajectoire est décrite par

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=1}^p \frac{V_i \tilde{\rho}_n V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)} \mathbf{1}_{X_n=i}. \quad (2.33)$$

En particulier, si $\hat{\rho}_0 = \tilde{\rho}_0$ alors $\hat{\rho}_n = \tilde{\rho}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le processus ($\hat{\rho}_n$) est donc une estimation de la vraie trajectoire quantique. La question naturelle est de savoir si les processus se rapprochent en temps long et en particulier, si la distance entre le vrai processus et son estimé converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Dans la littérature le problème n'est pas traité dans sa généralité et divers résultats existent [124, 131] essentiellement dans le cas discret. Un résultat assez général en temps discret établit le fait que la fidélité entre la vraie trajectoire et son estimation est une sur-martingale [124]. Rappelons que la fidélité entre deux états permet de définir une distance (voir ci-dessous). Pour tout état σ

et μ dans \mathcal{D}_S , on définit la fidélité entre σ et μ par la quantité

$$F(\sigma, \mu) = \text{Tr}^2(\sqrt{\sqrt{\sigma}\mu\sqrt{\sigma}}).$$

En particulier, on a que $\sqrt{1 - F(\cdot, \cdot)}$ est une distance et donc que $F(\sigma, \mu) = 1$ si et seulement si $\sigma = \mu$. Le résultat concernant la propriété de sur-martingale de la fidélité entre $(\tilde{\rho}_n)$ et $(\hat{\rho}_n)$ est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 2.8 *Soit $(\tilde{\rho}_k, \hat{\rho}_k)$ la chaîne de Markov décrite par :*

$$(\tilde{\rho}_k, \hat{\rho}_k) = \left(\frac{V_i \tilde{\rho}_{k-1} V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_{k-1} V_i^*)}, \frac{V_i \hat{\rho}_{k-1} V_i^*}{\text{Tr}(V_i \hat{\rho}_{k-1} V_i^*)} \right),$$

avec probabilité $\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_{k-1} V_i^*)$, $i = 0, \dots, p$.

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\tilde{\rho}_p, \hat{\rho}_p, p \leq k)$, alors on a

$$\mathbb{E}[F(\tilde{\rho}_{k+1}, \hat{\rho}_{k+1}) | \mathcal{F}_k] \geq F(\tilde{\rho}_k, \hat{\rho}_k),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $(F(\tilde{\rho}_k, \hat{\rho}_k))$ est une sur-martingale positive.

Ce résultat permet entre autre de conclure que pour n'importe quel modèle de trajectoire quantique, le vrai processus et son estimation ont tendance à se rapprocher au moins en espérance. La propriété de sur-martingale et de positivité permet également de conclure que la fidélité entre les deux processus converge, le but ultime étant de savoir dans quel cas a-t-on convergence vers 1 ? Nous verrons dans le chapitre suivant des cas où l'on peut conclure mais en général il n'y a pas convergence vers 1. La question est liée à des problèmes d'observabilité, il faut que les résultats de mesures donnent suffisamment d'informations. En particulier, dans la situation où deux états différents donnent les mêmes probabilités pour les résultats de mesures, le filtre ne peut pas s'affranchir de sa condition initiale et donc il n'y aura pas convergence vers 1.

Ce théorème se généralise en remplaçant les opérations $V_i \cdot V_i^*$ par des applications complètement positives et la version générale du Théorème 2.8 est exprimée dans [124]. Comme évoqué ci-dessus, la fidélité permet de définir une distance sur les états

$$D(\sigma, \mu) = \sqrt{1 - F(\sigma, \mu)}.$$

Les canaux quantiques sont des contractions pour cette distance dans le sens où

$$D(\phi(\sigma), \phi(\mu)) \leq D(\sigma, \mu),$$

pour tout canal quantique ϕ . On peut alors se demander si cette propriété est en réalité la raison pour laquelle on obtient la propriété de sous-martingale pour $(D(\tilde{\rho}_k, \hat{\rho}_k))$ (la propriété de sur-martingale pour F implique celle de sous-martingale pour D). Dans [124], l'auteur exhibe une autre distance pour laquelle les canaux quantiques sont des contractions mais pour laquelle la propriété de sous-martingale est en défaut. Jusqu'ici la seule distance pour

laquelle une propriété de sous-martingale a été obtenue est la distance D définie à partir de la fidélité.

Notre intérêt dans cette section est d'établir le même type de résultat pour les trajectoires quantiques continues. Dans ce cas l'équation satisfaite par l'estimation $(\hat{\rho}_t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_t &= \hat{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\hat{\rho}_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^l \int_0^t (L_i \hat{\rho}_{s-} + \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \text{Tr}[\hat{\rho}_{s-}(L_i + L_i^*)] \hat{\rho}_{s-}) \left(dy_i(s) - \text{Tr}[\hat{\rho}_{s-}(L_i + L_i^*)] ds \right) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \int_0^t \left(\frac{L_i \hat{\rho}_{s-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \hat{\rho}_{s-} L_i^*]} - \hat{\rho}_{s-} \right) \left(d\tilde{N}_i(s) - \text{Tr}[L_i \hat{\rho}_{s-} L_i^*] ds \right).\end{aligned}\quad (2.34)$$

où les processus $(\tilde{N}_i(t))$ et $(y_i(t))$ sont les vrais signaux observés correspondant à la vraie trajectoire quantique

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_t &= \tilde{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^l \int_0^t (L_i \tilde{\rho}_{s-} + \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{s-}(L_i + L_i^*)] \tilde{\rho}_{s-}) \left(dy_i(s) - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{s-}(L_i + L_i^*)] ds \right) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \left(\frac{L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} - \tilde{\rho}_{s-} \right) \left(d\tilde{N}_i(s) - \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds \right).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Dans la littérature un résultat partiel existe dans le cadre continu mais il concerne une situation où la vraie trajectoire quantique est à valeurs dans les états purs [80]. Dans ce cas la fidélité est nettement plus facile à calculer. En effet, si $\sigma = |\psi\rangle\langle\psi|$ et μ une matrice densité quelconque alors

$$F(\sigma, \mu) = \langle \psi, \mu \psi \rangle^2.$$

Dans le cas général, il faut pouvoir calculer la dérivée (au sens d'Itô) de la fidélité $F(\tilde{\rho}_t, \hat{\rho}_t) = \text{Tr}^2(\sqrt{\sqrt{\tilde{\rho}_t} \hat{\rho}_t \sqrt{\tilde{\rho}_t}})$ mais l'analyse est très délicate et les calculs très fastidieux voire difficile à mener hors du cas où la trajectoire est à valeurs dans les états purs. En revanche, en utilisant la convergence du modèle discret vers le modèle continu, on montre que le couple $(\tilde{\rho}_t, \hat{\rho}_t)$ peut être obtenu comme limite d'un modèle discret $(\tilde{\rho}_n, \hat{\rho}_n)$ et on établit le résultat suivant [3].

Théorème 2.9 *Soit $(\tilde{\rho}_t, \hat{\rho}_t)$ le processus de Markov solution de (2.35) et (2.34). On note*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\tilde{\rho}_s, \hat{\rho}_s, s \leq t),$$

pour tout $t \geq 0$, alors on a

$$\mathbb{E}[F(\tilde{\rho}_t, \hat{\rho}_t) | \mathcal{F}_s] \geq F(\tilde{\rho}_s, \hat{\rho}_s),$$

pour tout $0 < s < t$. En particulier, $(F(\tilde{\rho}_t, \hat{\rho}_t))$ est une sur-martingale positive.

Dans l'article [3], nous avons établi ce résultat en toute généralité en prenant également en compte les imperfections de mesure.

2.4 Variables obtuses complexes et martingales normales complexes

Nous finissons ce chapitre consacré au lien entre des modèles discrets et des modèles continus par une section qui n'est pas directement reliée aux trajectoires quantiques. Cette section fait référence aux travaux [8, 79, 9]

Le résultat exposé dans [8] concerne un résultat de convergence des variables aléatoires obtuses complexes vers les martingales normales complexes. Le cas réel avait été déjà étudié en détail dans [16, 10]. Le cas complexe présente de nombreuses subtilités et fait intervenir une approche algébrique intéressante comme nous allons le voir dans cette section.

Avant de présenter les variables obtuses de manière abstraite, nous allons motiver leur apparition dans le contexte des systèmes quantiques ouverts. L'idée directrice est de décrire comment obtenir un certain type de canal quantique. Les canaux quantiques qui nous intéressent dans ce cadre, sont de la forme

$$\phi(\cdot) = \sum_{i=1}^{N+1} p_i U_i \cdot U_i^* \quad (2.36)$$

où les opérateurs $U_i, i = 1, \dots, N + 1$ sont des opérateurs unitaires et les quantités (p_i) forment un vecteur de probabilité (le choix du paramètre $N + 1$ est utilisé ici pour harmoniser les notations avec les sections suivantes).

Jusqu'ici nous n'avons pas eu besoin de faire appel au théorème de Stinespring qui permet de décrire un canal quantique comme l'évolution réduite d'une interaction entre \mathcal{H}_S et un espace \mathcal{K} auxiliaire. Pour les résultats présentés dans cette section, nous aurons besoin de ce théorème. Pour exprimer le théorème de Stinespring nous avons besoin de faire référence à l'outil de la trace partielle que nous rappelons ici. On considère un système couplé $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$ où $\{e_i, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{K})\}$ désigne une base orthonormée de \mathcal{K} . Soit $A = \sum_{ij} A_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|$, un opérateur sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$, alors on note $\text{Tr}_{\mathcal{K}}$ l'opérateur de trace partielle défini par

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}(A) = \sum_i A_{ii}.$$

On a donc le théorème de Stinespring suivant.

Théorème 2.10 *Soit*

$$\phi(\cdot) = \sum_i V_i \cdot V_i^*$$

un canal sur \mathcal{H}_S alors il existe un espace de Hilbert \mathcal{K} , un état σ sur \mathcal{K} et un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$ tels que

$$\phi(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^* = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \sigma)U^*),$$

pour tout état ρ sur \mathcal{H}_S .

Nous allons étudier un certain type d'opérateur unitaire sur un système couplé $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$. Pour cela on considère $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{N+1}$ muni d'une base orthonormée $\{|f_i\rangle, i = 1, \dots, N+1\}$ et on considère

$$U = \sum_i U_i \otimes |e_i\rangle\langle f_i| \quad (2.37)$$

Si γ est un état sur \mathcal{H} un simple calcul montre

$$U(\rho \otimes \gamma)U^* = \sum_{i,j} U_i \rho U_j^* \otimes |e_i\rangle\langle f_i| \gamma |f_j\rangle\langle e_j| \quad (2.38)$$

$$= \sum_{i,j} \langle f_i| \gamma |f_j\rangle U_i \rho U_j^* \otimes |e_i\rangle\langle e_j|. \quad (2.39)$$

On a donc en prenant la trace partielle

$$\phi(\rho) = \sum_i \langle f_i| \gamma |f_i\rangle U_i \rho U_i^*, \quad (2.40)$$

qui est de la forme (2.36). On généralise facilement cette approche en considérant des unitaires de la forme

$$U = \sum_i U_i \otimes R_i \quad (2.41)$$

où les opérateurs R_i sont des isométries partielles et $R_i R_j^*, i \neq j$ (cf Théorème 2.11 ci-dessous). Si les rangs des opérateurs R_i sont supérieurs strictement à 1 cela impose de considérer un espace auxiliaire \mathcal{K} de dimension supérieure à $N+1$. Les opérateurs du type (2.37) sont des cas particuliers de (2.41).

Dans les travaux [9] et [79] deux questions sont abordées. Le travail [79] est plutôt orienté information quantique dans le sens où l'on s'intéresse à la structure des canaux du type (2.36). On appellera ces canaux quantiques-classiques. Le travail [9] fait le lien entre les canaux du type (2.36) et la notion de variables obtuses ainsi que des limites continues qui feront intervenir des martingales normales complexes. Commençons par exposer les résultats de [79].

2.4.1 Canaux quantiques classiques

Dans l'article [79], on s'intéresse au problème suivant : quels sont les unitaires sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$ tel que pour tout état γ sur \mathcal{K} on ait

$$\phi_\gamma(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \gamma)U^*) = \sum_{i=1}^{N+1} p_i(\gamma) U_i \rho U_i^* ? \quad (2.42)$$

A travers les travaux [8, 9], il a été conjecturé que seuls des unitaires de la forme (2.41) sont susceptibles de donner des canaux quantiques de la forme (2.42). La question peut même prendre une forme plus générale en permettant aux opérateurs U_i de dépendre de l'état γ . Essentiellement dans l'article [79], nous avons répondu à cette question sous l'hypothèse que les probabilités ($p_i(\cdot)$) peuvent être étendues en des applications linéaires. En particulier, elles peuvent s'écrire de la forme

$$p_i(\gamma) = \text{Tr}(M_i \gamma), i = 1, \dots, N + 1,$$

pour tout état γ avec des opérateurs positifs M_i .

La première remarque que l'on peut faire est qu'on peut regrouper un certain nombre d'unitaires U_i . En effet, tous les unitaires qui sont proportionnels. On considérera donc des canaux de la forme (2.36) où les U_i ne sont pas reliés. On dit que deux unitaires sont reliés si ils satisfont la définition suivante.

Définition 2.2 *On dit que deux opérateurs unitaires U et V sont reliés, et on le note $U \sim V$, si il existe une constante λ dans \mathbb{C} avec $|\lambda| = 1$, telle que*

$$U = \lambda V.$$

En particulier, dans [79], on montre le résultat suivant qui répond partiellement à la conjecture.

Théorème 2.11 *Un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}$ donne des canaux quantiques du type (2.42) avec des probabilités de la forme*

$$p_i(\gamma) = \text{Tr}(M_i \gamma),$$

pour tout état γ si et seulement si il peut s'écrire

$$U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes R_i, \quad (2.43)$$

avec U_i des opérateurs unitaires sur \mathcal{H}_S et R_i des isométries partielles $R_i : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{N+1} R_i R_i^* = \sum_{i=1}^{N+1} R_i^* R_i = I_k \quad (2.44)$$

et $U_i \not\sim U_j$ pour tout $i \neq j$.

De plus la décomposition (2.43) est unique à permutation et \sim près.

L'hypothèse de linéarité est naturelle. En effet, l'expression (2.42) implique que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tous états γ et σ on a

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda\gamma+(1-\lambda)\sigma}(\rho) &= \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \lambda\gamma + (1-\lambda)\sigma)U^*) \\ &= \lambda \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \gamma)U^*) + (1-\lambda) \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \sigma)U^*) \\ &= \lambda \phi_{\gamma}(\rho) + (1-\lambda) \phi_{\sigma}(\rho), \end{aligned} \quad (2.45)$$

pour tout état $\rho \in \mathcal{D}_S$. Ainsi, on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tous états γ et σ

$$\sum_i p_i(\lambda\gamma + (1 - \lambda)\sigma)U_i\rho U_i^* + \sum_i \left(\lambda p_i(\gamma) + (1 - \lambda)p_i(\sigma) \right) U_i\rho U_i^*,$$

pour tout état $\rho \in \mathcal{D}_S$. En particulier, si les applications $\rho \rightarrow U_i\rho U_i^*$, $i = 1, \dots, N + 1$ sont linéairement indépendants on en déduit que

$$p_i(\lambda\gamma + (1 - \lambda)\sigma) = \lambda p_i(\gamma) + (1 - \lambda)p_i(\sigma),$$

pour tout $i = 1, \dots, N + 1$ et pour tous états γ et σ . La linéarité en découle. En revanche si il existe des constantes α_i tel que pour tout état ρ

$$\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i U_i \rho U_i^* = 0,$$

c'est à dire que les applications $\rho \rightarrow U_i\rho U_i^*$, $i = 1, \dots, N + 1$ sont liées, on va pouvoir changer arbitrairement les $p_i(\cdot)$ et briser la linéarité. En effet, considérons un γ telle $p_i(\gamma) > 0$, pour tout $i = 1, \dots, N + 1$ alors on peut trouver ϵ suffisamment petit tel que $p_i(\gamma) + \epsilon\alpha_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, N + 1$ et on alors

$$\phi_\gamma(\rho) = \sum_i p_i(\gamma)U_i\rho U_i^* = \sum_i (p_i(\gamma) + \epsilon\alpha_i)U_i\rho U_i^*$$

et on peut faire cela arbitrairement sur tous les $(p_i(\beta))_{i=1, \dots, r}$ du moment que $p_i(\beta) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, N + 1$. On rompt donc toute les linéarités. Ce type de phénomène nous a empêché de traiter la conjecture en toute généralité. On voit clairement que le fait de pouvoir changer arbitrairement les probabilités apporte une difficulté de taille. Même en imposant de la continuité pour les probabilités en fonction de l'état de l'environnement nous ne sommes pas arrivés à résoudre le problème. Notons que dans le cas où la dimension de \mathcal{H}_S et \mathcal{K} est 2 nous avons traité le problème en toute généralité.

2.4.2 Variables obtuses complexes

Dans l'article [8], nous étudions les variables aléatoires obtuses et leur lien avec les martingales normales à travers une convergence en loi. Le problème original est d'essayer de décrire quelles sont les évolutions quantiques qui en réalité sont classiques, ceci fait l'objet du travail [9]. En particulier, on considère qu'un canal quantique $\phi(\cdot) = \sum_i p_i U_i \cdot U_i$ a un comportement classique dans le sens où par exemple la trajectoire quantique associée est de la forme

$$\rho_{n+1} = \sum_i U_i \rho_n U_i^* \mathbf{1}_{X_n=i},$$

où les (X_n) sont ici des variables *i.i.d* satisfaisant $\mathbb{P}[X_1 = i] = p_i$. Ici une opération de la forme $U_i\rho U_i^*$ est classique dans le sens où c'est une évolution unitaire c'est à dire

l'évolution d'un système fermé (sans interaction avec un environnement). On dit aussi que l'environnement agit de manière classique dans le sens où l'effet de l'environnement se traduit simplement par un choix aléatoire d'une évolution unitaire. Nous allons voir comment un opérateur de la forme

$$U = \sum_i U_i \otimes |f_i\rangle\langle f_i|$$

est associé à des variables obtuses.

Décrivons maintenant la notion de variable obtuse. Pour cela présentons tout d'abord la notion de système obtus.

Définition 2.3 *Un système obtus sur \mathbb{C}^N est une famille de $N + 1$ vecteurs v_1, \dots, v_{N+1} tels que*

$$\langle v_i, v_j \rangle = -1$$

pour tout $i \neq j$. Cette famille se prolonge en une famille orthogonale de $N + 1$ vecteurs sur \mathbb{C}^{N+1} définis par

$$\widehat{v}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}.$$

A chaque système obtus, on associe la distribution de probabilité suivante

$$p_i = \frac{1}{\|\widehat{v}_i\|^2} = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}, i = 1, \dots, N + 1.$$

On a les propriétés suivantes

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N+1} p_i v_i = 0, \quad \text{and}, \quad \sum_{i=1}^{N+1} p_i |v_i\rangle\langle v_i| = I_{\mathbb{C}^N}. \quad (2.46)$$

Nous pouvons maintenant définir les variables obtuses complexes.

Définition 2.4 *Une variable aléatoire obtuse X sur \mathbb{C}^N est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un système obtus v_1, \dots, v_{N+1} avec probabilités p_1, \dots, p_{N+1} . La propriété (2.46), entraîne que la variable aléatoire X est centrée réduite, c'est à dire pour tout i*

$$\mathbb{E}[X^i] = 0$$

et pour tout i, j

$$\text{cov}(X^i, X^j) = \mathbb{E}[\overline{X^i} X^j] - \mathbb{E}[\overline{X^i}] \mathbb{E}[X^j] = \delta_{i,j},$$

où X^1, \dots, X^N désignent les coordonnées du vecteur X dans \mathbb{C}^N .

On peut réaliser la variable aléatoire X sur son espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose en effet $\Omega = \{1, \dots, N + 1\}$, avec la tribu \mathcal{F} correspondant à toutes les parties de Ω , la mesure de probabilité \mathbb{P} est donnée par $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ et X est définie par $X(i) = v_i$. En notant v_i^k les coordonnées de v_i pour $k = 1, \dots, N$, on a $X^k(i) = v_i^k$.

Nous aurons également besoin de la variable X^0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qui prend presque sûrement la valeur 1.

Dans la suite nous allons associer un objet algébrique à tout système obtus. Cet objet algébrique s'appelle un 3-tenseur dont nous donnons la définition ci dessous.

Définition 2.5 *Un 3-tenseur S sur \mathbb{C}^{N+1} est une application linéaire de \mathbb{C}^{N+1} dans $\mathbb{C}^{N+1} \otimes \mathbb{C}^{N+1}$, c'est à dire une collection de coefficients $(S_k^{ij})_{i,j,k=0}^N$ définissant l'action suivante sur \mathbb{C}^{N+1} :*

$$(S(x))^{ij} = \sum_{k=0}^N S_k^{ij} x^k.$$

Nous allons voir que les variables aléatoires obtuses sur \mathbb{C}^N peuvent être associées à des trois tenseurs particuliers sur \mathbb{C}^{N+1} . Ces 3-tenseurs sont reliés à la notion de 3-tenseurs complexes doublement symétriques dont la définition est la suivante.

Définition 2.6 *Un 3-tenseur $(S_k^{ij})_{i,j,k=0}^N$ sur \mathbb{C}^{N+1} est appelé 3-tenseur complexe doublement symétrique si il satisfait*

$$S_k^{ij} \text{ est symétrique en } (i, j), \quad (2.47)$$

$$\sum_{m=0}^N S_j^{im} S_m^{kl} \text{ est symétrique en } (i, k), \quad (2.48)$$

$$\sum_{m=0}^N S_j^{im} \overline{S_k^{lm}} \text{ est symétrique en } (i, k). \quad (2.49)$$

Les variables obtuses sont naturellement associées à des 3-tenseurs complexes doublement symétriques. C'est ce qui est exprimé dans le résultat suivant.

Proposition 2.12 *On considère une variable aléatoire obtuse X sur \mathbb{C}^N . Alors il existe un unique 3-tenseur complexe doublement symétrique S sur \mathbb{C}^{N+1} tel que*

$$X^i X^j = \sum_{k=0}^N S_k^{ij} X^k, \quad (2.50)$$

pour tous $i, j = 0, \dots, N$. Ce 3-tenseur S est décrit par

$$S_k^{ij} = \mathbb{E}[X^i X^j \overline{X^k}], \quad (2.51)$$

pour tous $i, j, k = 0, \dots, N$.

Nous avons également la relation suivante pour tous $i, j = 0, \dots, N$

$$\overline{X^i} X^j = \sum_{k=0}^N \overline{S_j^{ik}} X^k. \quad (2.52)$$

Une question naturelle est de s'intéresser à la réciproque de ce résultat. Si on se donne un 3-tenseur complexe doublement symétrique peut-on lui associer une variable obtuse ?

La réponse est affirmative et elle est basée sur une propriété de diagonalisation. En effet, les 3-tenseurs complexes doublement symétriques apparaissent exactement comme les 3-tenseurs qui peuvent être diagonalisés dans une même base orthonormée. Ce résultat est prouvé dans [8] en utilisant une factorisation due à Takagi. Donnons quelques détails des idées développées dans [8]. Rappelons la définition d'être diagonalisable pour un 3-tenseur.

Définition 2.7 *Un 3-tenseur S sur \mathbb{C}^{N+1} est dit diagonalisable en base orthonormée $(a_m)_{m=0,\dots,N}$ de \mathbb{C}^{N+1} si il existe des nombres complexes $(\lambda_m)_{m=0,\dots,N}$ tels que*

$$S = \sum_{m=0}^N \lambda_m a_m^* \otimes a_m \otimes a_m . \quad (2.53)$$

En d'autres termes

$$S(x) = \sum_{m=0}^N \lambda_m \langle a_m, x \rangle a_m \otimes a_m \quad (2.54)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^{N+1}$.

A ce stade on peut commencer à percevoir comment un système obtus pourra être naturellement associé à un 3-tenseur diagonalisable. En effet, si on considère un 3-tenseur S diagonalisable comme ci-dessus, pour tout m tel que $\lambda_m \neq 0$ on pose $v_m = \lambda_m a_m$. La famille $\{v_m; m = 1, \dots, K\}$ est alors une famille orthogonale de \mathbb{C}^{N+1} et on a

$$S(v_m) = v_m \otimes v_m$$

pour tout m . On peut exprimer (2.54) en fonction des vecteurs v_m , on a

$$S(x) = \sum_{m=1}^K \frac{1}{\|v_m\|^2} \langle v_m, x \rangle v_m \otimes v_m . \quad (2.55)$$

Ici on commence à voir comment le système obtus va apparaître, c'est à dire à partir du système orthogonal apparaissant à travers la diagonalisation. Avant de préciser ce fait dans le cas de nos 3-tenseurs complexes doublement symétriques, montrons que ceux ci sont toujours diagonalisables. Pour cela on utilise le résultat de Takagi suivant.

Théorème 2.13 (Factorisation de Takagi simultanée) *Soit $\mathcal{F} = \{A_i; i \in \mathcal{J}\}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ symétriques. Soit $\mathcal{G} = \{\overline{A_i} A_j; i, j \in \mathcal{J}\}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- i) Il existe une matrice U unitaire telle que, pour tout i dans \mathcal{J} , la matrice $U A_i U^t$ est diagonale.*
- ii) La famille \mathcal{G} est composée d'éléments qui commutent deux à deux.*

Ainsi en remarquant que les conditions de symétries impliquent que la famille

$$\{\overline{S_i} S_j, i, j = 1, \dots, N\}$$

est composée d'éléments qui commutent deux à deux, ce résultat nous donne l'existence d'un opérateur unitaire U tel que les matrices S_k satisfont

$$S_k = U D_k \overline{U}^{-1}, \quad (2.56)$$

avec $D_k = \text{diag}(\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^N)$ des matrices diagonales. On montre alors que ce sont les vecteurs colonnes de cet opérateur unitaire qui correspondent aux vecteurs a_m de la diagonalisation. Ce résultat est détaillé dans [8]. Finalement dans le cas des variables obtuses on a le résultat suivant qui précise le lien entre variables obtuses et les tenseurs complexes doublement symétriques.

Théorème 2.14 *Soit S un 3-tenseur doublement symétrique de \mathbb{C}^{N+1} satisfaisant également la relation*

$$S_k^{i0} = \delta_{ik}$$

pour tous $i, k = 0, \dots, N$. Alors le système obtus \mathcal{V} tel que

$$S(x) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{\|v\|^2} \langle v, x \rangle v \otimes v \quad (2.57)$$

est composé exactement de $N + 1$ vecteurs v_1, \dots, v_{N+1} , qui satisfont tous $v_i^0 = 1$.

En particulier, la famille de $N+1$ vecteurs de \mathbb{C}^N , obtenus en considérant les N dernières coordonnées de chaque v_i forment un système obtus \mathbb{C}^N .

Pour pouvoir utiliser ces résultats dans le cadre des unitaires classiques, nous avons besoin d'introduire un isomorphisme qui permet d'identifier une variable aléatoire comme un opérateur de multiplication sur un espace de Hilbert. Notons que ce type de procédure est à la base des probabilités quantiques. En effet, les marches aléatoires peuvent être réalisées comme des opérateurs de multiplication sur des espaces de Hilbert particuliers, appelés "Bébé Fock" par Paul André Meyer [6, 115, 107]. Ceci fait référence aux espaces de Fock qui eux sont les espaces de Hilbert où l'on peut réaliser les processus de Poisson ou le mouvement brownien comme opérateur de multiplication [16, 107, 6, 115, 114].

On considère une variable obtuse X sur \mathbb{C}^N et son 3-tenseur S associé. On considère également l'espace de probabilité canonique associé à cette variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X)$. L'espace de Hilbert naturellement associé à cette variable aléatoire sera $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X)$ qui est un espace de Hilbert de dimension $N + 1$. On remarque que la famille $\{X^0, X^1, \dots, X^N\}$ forme une base orthonormée de cet espace. A la variable X , on associe alors l'opérateur unitaire suivant :

$$\begin{aligned} W_X : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X) &\longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \\ X^i &\longmapsto e_i, \end{aligned}$$

où $\{e_0, \dots, e_N\}$ est la base orthonormée canonique de \mathbb{C}^{N+1} . L'opérateur W_X est appelé isomorphisme canonique de X .

A travers les isomorphismes W_X on transfère de manière canonique toutes variables aléatoires obtuses sur \mathbb{C}^N dans un même espace. D'un point de vue probabiliste on perd cependant un certain nombre d'informations par cette opération. En identifiant X^i à e_i on perd toutes les données sur la loi, l'indépendance Néanmoins on récupère ces informations en considérant l'opérateur de multiplication par X^i , défini de la manière suivante.

Définition 2.8 Sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X)$, pour chaque $i = 0, \dots, N$, on considère l'opérateur de multiplication

$$\mathcal{M}_{X^i} : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X) & \longrightarrow & L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_X) \\ Y & \longmapsto & X^i Y. \end{array}$$

Sur l'espace \mathbb{C}^{N+1} muni de sa base canonique $\{e_0, \dots, e_N\}$ on considère la base des matrices associées a_j^i , for $i, j = 0, \dots, N$ définies par

$$a_j^i e_k = \delta_{i,k} e_j.$$

Nous verrons plus loin que ces opérateurs peuvent être interprétés comme des bruits discrets.

Maintenant à travers les isomorphismes W_X , nous allons voir que les variables obtuses sur \mathbb{C}^N admettent une représentation simple faisant intervenir leurs 3-tenseurs associés. En particulier, on a le résultat suivant.

Théorème 2.15 Soit X une variable aléatoire obtuse sur \mathbb{C}^N , avec un 3-tenseur associé S et l'isomorphisme canonique W_X . Alors on a, pour tout $i = 0, \dots, N$

$$W_X \mathcal{M}_{X^i} W_X^* = \sum_{j,k=0}^N S_k^{ij} a_k^j. \quad (2.58)$$

L'opérateur de multiplication par $\overline{X^i}$ est donné par

$$W_X \mathcal{M}_{\overline{X^i}} W_X^* = \sum_{j,k=0}^N \overline{S_j^{ik}} a_k^j. \quad (2.59)$$

Maintenant que nous avons fait le lien entre les variables obtuses et leurs opérateurs de multiplication associés, nous allons décrire comment les variables obtuses apparaissent de manière naturelle à travers les unitaires de la forme $U = \sum_i U_i \otimes |f_i\rangle\langle f_i|$. Pour cela on considère la situation suivante : l'état de référence de \mathcal{K} est e_0 et l'opérateur unitaire

$$U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle \phi_i|$$

est tel que

$$\langle \phi_i, e_0 \rangle \neq 0$$

pour tout i . On démontre le théorème suivant dans [9].

Théorème 2.16 *Sur l'espace $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{N+1}$, soit*

$$U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

un opérateur unitaire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ agissant classiquement sur \mathcal{H} . Supposons que $\langle\phi_i, e_0\rangle \neq 0$ pour tout i . Alors il existe une variable aléatoire X sur \mathbb{C}^N , avec un 3-tenseur associé S et un isomorphisme canonique W_X , tel que

$$U = A \otimes I + \sum_{j=1}^N B_j \otimes W_X \mathcal{M}_{X^j} W_X^* \quad (2.60)$$

où A, B_1, \dots, B_N sont des opérateurs sur \mathcal{H} .

Plus précisément la variable obtuse X est associée aux probabilités

$$\{|\langle e_0, \phi_i \rangle|^2, i = 1, \dots, N+1\}$$

et aux valeurs

$$v_i^j = \frac{\langle\phi_i, e_j\rangle}{\langle\phi_i, e_0\rangle}, \quad (2.61)$$

$i = 1, \dots, N+1, j = 1, \dots, N$. Les opérateurs A and B_j sont donnés par

$$A = \sum_{i=1}^{N+1} p_i U_i \quad \text{et} \quad B_j = \sum_{i=1}^{N+1} p_i \overline{v_i^j} U_i, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.62)$$

A ce stade nous avons obtenu une description utile de l'opérateur unitaire U qui va nous permettre de pouvoir étudier la limite de modèles d'interactions répétées décrits par de tels opérateurs. Le résultat final va mêler des conditions asymptotiques précises sur les opérateurs A et B_j ainsi que sur les coefficients S_k^{ij} intervenant dans l'expression des opérateurs de multiplication. En particulier, les conditions asymptotiques intervenant dans ces coefficients sont dictés par la limite continue des marches aléatoires obtuses (dans le même esprit que le célèbre Théorème de Donsker qui exprime qu'une marche aléatoire symétrique converge vers un mouvement brownien lorsqu'elle est bien renormalisée).

Pour motiver la suite, il nous faut préciser de manière succincte le modèle des interactions répétées et l'idée des limites continues établies dans [17]. On verra apparaître les conditions asymptotiques adéquates permettant d'obtenir des limites continues. Rappelons que le travail original [17] dans ce domaine est celui qui justifie toutes les conditions asymptotiques que nous avons utilisées dans le cadre des trajectoires quantiques.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 2.1.2 le modèle de l'environnement dans le cadre des interactions répétées est décrit par

$$\mathcal{H}_E = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{K}_n,$$

avec $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est cet espace qui s'appelle "Bébé Fock".

On introduit un paramètre de temps h qui correspond au temps d'interaction entre \mathcal{H}_S et chaque copie \mathcal{K} de la chaîne. Une interaction est décrite par un hamiltonien H_{tot} sur le système couplé $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$, ce qui permet de définir un opérateur unitaire

$$U = e^{-ihH_{\text{tot}}}.$$

Après chaque interaction, la copie de \mathcal{K} qui vient d'interagir s'en va et la copie suivante vient interagir et ainsi de suite. Chaque interaction est décrite par l'opérateur U . L'interaction entre \mathcal{H}_S et la copie numéro k de \mathcal{K} est noté U_k . Cette opérateur agit sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}_k$ comme l'opérateur U et identité sur le reste du produit tensoriel.

On définit alors l'opérateur unitaire

$$V_n = U_n U_{n-1} \dots U_1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $V_0 = I$. Cet opérateur V_n représente l'évolution après n interactions. En reprenant les notations a_j^i pour les éléments de base des matrices, on peut exprimer tout opérateur unitaire U sous la forme

$$U = \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i$$

où les U_j^i sont des opérateurs sur \mathcal{H}_S . En particulier, le caractère unitaire de U se traduit par

$$\sum_k (U_i^k)^* U_j^k = \sum_k U_j^k (U_i^k)^* = \delta_{i,j} I.$$

En notant $a_j^i(n)$ l'opérateur agissant comme a_j^i sur la n ème copie et comme l'identité sur le reste du produit tensoriel on a que

$$U_n = \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i(n).$$

Il est alors facile de voir que l'on a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} V_n \\ &= \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i(n+1) V_n. \end{aligned}$$

Maintenant en observant que l'opérateur V_n commute avec $a_j^i(n+1)$ et en supprimant le symbol \otimes on peut écrire

$$V_{n+1} = \sum_{i,j} U_j^i V_n a_j^i(n+1). \quad (2.63)$$

Maintenant décrivons le modèle ci-dessus avec un unitaire classique. On peut naturellement l'associer à une marche aléatoire obtuse. On reprend les notations $U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ et X la variable aléatoire obtuse associée. On peut alors considérer une suite de variables aléatoires i.i.d (X_n) avec $X_1 \sim X$. Alors l'opérateur U_n s'écrit

$$U_n = A \otimes I + \sum_{j=1}^N B_j \otimes F \mathcal{M}_{X_n^j} F^*, \quad (2.64)$$

où l'opérateur $F \mathcal{M}_{X_n^j} F^*$ agit sur la j ème copie \mathcal{K}_n . L'évolution globale est donc donnée par

$$V_{n+1} = A \otimes V_n + \sum_{j=1}^N B_j \otimes V_n \otimes F \mathcal{M}_{X_n^j} F^*, \quad (2.65)$$

que l'on peut exprimer en termes de 3-tenseurs

$$V_{n+1} = A \otimes V_n + \sum_{j=1}^N \sum_{l,k=0}^N S_k^{jl} B_j \otimes V_n \otimes a_k^j(n). \quad (2.66)$$

A ce stade on introduit donc le paramètre de temps h et on a donc les expressions suivantes dépendant de h

$$V_{n+1}^h = A(h) \otimes V_n^h + \sum_{j=1}^N B_j(h) \otimes V_n^h \otimes F \mathcal{M}_{(X_n^h)^j} F^* \quad (2.67)$$

ou

$$V_{n+1}^h = A(h) \otimes V_n^h + \sum_{j=1}^N \sum_{l,k=0}^N S_k^{jl}(h) B_j(h) \otimes V_n^h \otimes a_k^j(n). \quad (2.68)$$

Ce type d'expression est un cas particulier d'expression du type

$$\tilde{V}_{n+1}^h = \sum_{j,k} L_k^j(h) \otimes \tilde{V}_n^h \otimes a_k^j(n). \quad (2.69)$$

Une expression de ce type définit des opérateurs sur $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{K}$. Le tour de force de [17] est d'injecter ces espaces dans $\bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{K}$ en prenant en compte le paramètre h . Le bon cadre pour définir $\bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{K}$ est d'utiliser un espace de Fock symétrique. On peut alors considérer la limite h tend vers zéro dans (2.69) qui s'exprimera comme un équation différentielle stochastique quantique. Pour cela il faut imposer des conditions asymptotiques précises. La limite continue de ce type d'expression est résumée dans le théorème suivant. Nous aurons besoin de la notation suivante

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j}).$$

Théorème 2.17 *Supposons qu'il existe des opérateurs L_j^i tel que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{L_j^i(h) - I}{h^{\varepsilon_{ij}}} - L_j^i \right) = 0$$

alors la suite d'opérateurs $V_{[t/h]}^h$ converge dans un espace de Fock approprié vers la solution de l'équation

$$dV_t = \sum_{j,k} L_k^j V_t da_k^j(t). \quad (2.70)$$

Les opérateurs $(a_k^j(t))$ sont des opérateurs sur l'espace de Fock qui sont interprétés comme des bruits quantiques. Rentrer dans les détails de ce théorème nécessiterait d'introduire un formalisme assez lourd et donc nous référons aux article [17, 12] pour une compréhension exhaustive de ce résultat. Un des aspects des probabilités quantiques est d'observer que certaines combinaisons d'opérateurs $(a_k^j(t))$ peuvent être interprétées comme des bruits classiques. Ceci fait référence aux faits que certains bruits classiques (en particulier, les martingales normales) peuvent être réalisés (ont les mêmes statistiques) que certains opérateurs de multiplication sur un espace de Fock adéquate [16, 107, 6, 115, 114]. Ces opérateurs dans le cas des martingales normales sont des combinaisons linéaires d'opérateurs $(a_k^j(t))$ faisant intervenir des 3-tenseurs complexes doublement symétriques. A ce stade, retenons simplement qu'une évolution quantique de la forme

$$dV_t = \sum_{j,k} L_k^j V_t da_k^j(t). \quad (2.71)$$

peut parfois se recombinaison et d'écrire sous la forme

$$dV_t = \sum_{j,k} B_k^j V_t dZ_k^j(t), \quad (2.72)$$

où les opérateurs $Z_k^j(t)$ peuvent être interprétés comme des bruits classiques. Dans ce sens nous dirons que ce type d'évolution est classique. L'idée derrière ce phénomène est que l'opérateur $Z_k^j(t)$ peut être remplacé par la variable aléatoire classique $Z_k^j(t)$ dont il est l'opérateur de multiplication. L'équation (2.73) sous sa forme quantique devient alors

$$dV_t = \sum_{j,k} B_k^j V_t dZ_k^j(t), \quad (2.73)$$

qui est une équation différentielle stochastique classique. Dans ce type de situation, l'utilisation des bruits quantiques sur un espace de Fock est superflue car tout peut s'exprimer en termes de variables aléatoires classiques.

Comme évoqué ci-dessus, une équation du type (2.70) est appelée équation différentielle stochastique quantique. Ce type d'équation a été introduite pour dilater les semi-groupes de Markov décrits par les opérateurs de Lindblad. En effet, une équation du type (2.70)

est définie sur un espace $\mathcal{H}_S \otimes \Phi$ où Φ est un espace de Fock symétrique sur un espace de Hilbert (espace de de Fock bosonique). Ainsi si X_Ω représente l'état vide de Φ et si \mathcal{L} est un opérateur de Lindbald, le but est de décrire des équations du type (2.70) afin d'obtenir

$$\rho_t = \text{Tr}_\Phi(V_t(\rho_0 \otimes X_\Omega)V_t^*) = \exp(t\mathcal{L})(\rho_0)$$

Notre motivation est de décrire quelles types d'équations sont obtenues comme limite de variables obtuses. En particulier, cela se traduit par les limites des opérateurs de multiplication introduits dans (2.67).

La suite est donc consacrée aux limites des variables obtuses. Pour cela nous avons besoin de la notion de martingales normales.

2.4.3 Martingale normale

Les martingales normales réelles ont été largement étudiées dans la littérature [10, 16]. Le cas complexe peut dès lors apparaître comme une simple extension anecdotique. Cependant elles revêtent un caractère spécial et présentent des particularités qui les différencient vraiment du cas réel. De plus elles apparaissent naturellement dans notre contexte. La définition suivante fixe le cadre de notre étude.

Définition 2.9 *On considère une martingale X définie sur son espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{C}^N , satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *Le crochet oblique $\langle \overline{X^i}, X^j \rangle_t$ est égale à $\delta_{ij} t$,*
2. *la martingale X possède la propriété de représentation prévisible ; c'est à dire que toute martingale locale centrée sur l'espace canonique de X peut être représentée comme une intégrale par rapport à X .*

Une telle martingale X sur \mathbb{C}^N sera donc appelée martingale normale sur \mathbb{C}^N satisfaisant la PRP.

Soit X une telle martingale, définie sur son espace de probabilité canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{C}^N , alors on peut montrer qu'il existe des processus prévisibles $(\Lambda_t^{ij})_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(S_k^{ij}(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(T_k^{ij}(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ tels qu'on a les propriétés suivantes

$$[X^i, X^j]_t = \int_0^t \Lambda_s^{ij} ds + \sum_{k=1}^N \int_0^t S_k^{ij}(s) dX_s^k, \quad (2.74)$$

$$\langle \overline{X^i}, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t + \sum_{k=1}^N \int_0^t T_k^{ij}(s) dX_s^k. \quad (2.75)$$

On peut alors noter que $\Lambda_t = (\Lambda_t^{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ définit un 2-tenseur, et les familles $S(t) = (S_k^{ij}(t))_{i,j,k=1,\dots,N}$ et $T(t) = (T_k^{ij}(t))_{i,j,k=1,\dots,N}$ définissent des 3-tenseurs. De plus les processus $(\Lambda_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont localement intégrables en temps et les processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(T(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont localement de carré intégrables.

Les équations (2.74) et (2.75) sont appelées équations de structures et sont caractéristiques des martingales normales dans le sens où si un autre processus satisfait les mêmes équations de structures que X alors il a la même loi que X . C'est une extension du célèbre Théorème de Levy qui dit que le mouvement brownien (réel) est caractérisé par la valeur de son crochet droit.

A la lumière des résultats concernant les variables obtuses, il est naturel de s'intéresser à la structure de ces 3-tenseurs. Celle ci est résumée dans le théorème suivant. En particulier, nous allons voir apparaître à nouveau le caractère doublement symétrique qui sera essentiel pour décrire quelles martingales complexes sont des martingales normales.

Théorème 2.18

1) Les processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(T(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ satisfont

$$T_k^{ij}(s) = \overline{S_j^{ik}(s)}, \quad (2.76)$$

presque sûrement, pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$ et pour tous $i, j, k = 1, \dots, N$.

2) Le processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ prend ses valeurs dans l'ensemble des 3-tenseurs doublement symétriques \mathbb{C}^N .

3) Le processus $(\Lambda_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ prend ses valeurs dans les matrices complexes symétriques.

4) Nous avons la relation

$$\sum_{m=1}^N S_m^{ij}(s) \Lambda_s^{mk} = \sum_{m=1}^N S_m^{kj}(s) \Lambda_s^{mi}, \quad (2.77)$$

presque sûrement, pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$ et pour tous $i, j, k = 1, \dots, N$.

5) Nous avons la relation

$$\sum_{m=1}^N \overline{S_j^{km}(s)} \Lambda_s^{im} = S_k^{ij}(s), \quad (2.78)$$

presque sûrement, pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$ et pour tous $i, j, k = 1, \dots, N$.

6) Les processus $(\overline{X_t^i})_{t \in \mathbb{R}^+}$ ont la propriété de représentation prévisible

$$\overline{X_t^i} = \sum_{m=1}^N \int_0^t \overline{\Lambda_s^{im}} dX_s^m.$$

7) Les matrices Λ_t sont unitaires pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Les processus limites de marches obtuses que nous allons obtenir n'ont pas de dépendance en temps dans leurs 3-tenseurs. En particulier, les processus limites seront des martingales complexes dont les équations de structures seront de la forme

$$[X^i, X^j]_t = \Lambda_{ij} t + \sum_{k=1}^N S_k^{ij} X_t^k, \quad (2.79)$$

$$[\overline{X^i}, X^j]_t = \delta_{ij} t + \sum_{k=1}^N \overline{S_j^{ik}} X_t^k. \quad (2.80)$$

A partir de l'étude des 3-tenseurs et de leur diagonalisation on peut déterminer quels sont les processus qui satisfont ces conditions. En particulier, on note $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_p\}$ le système orthogonal associé au 3-tenseur S . On montre que les processus satisfaisant les équations de structures (2.79) et (2.80) sont de la forme

$$X_t = W_t + \sum_{v \in \mathcal{V}} \left(N_t^v - \frac{1}{\|v\|^2} t \right) v, \quad (2.81)$$

où les processus $N^v, v \in \mathcal{V}$ sont des processus de Poisson d'intensité $\|v\|^{-1}$ et (W_t) est un mouvement brownien qui vit dans l'espace orthogonal de \mathcal{V} . L'explication complète de ce résultat est détaillée dans les sections [8] et fait référence aux articles [10, 16] où les auteurs traitent le cas réel. En particulier, le fait que l'on travaille dans le corps des complexes amène de nombreuses subtilités. Par exemple le mouvement brownien complexe usuel $(W_1(t) + iW_2(t))$ n'est pas une martingale complexe normale.

Maintenant que nous avons dressé le portrait des martingales normales complexes nous pouvons détailler les résultats de convergence. On considère une variable aléatoire obtuse X et on introduit à nouveau le paramètre h qui a vocation à tendre vers zéro par la suite. En particulier, la dépendance en h apparaît naturellement dans les coefficients du 3-tenseur associé à X (on notera $X(h)$ la variable obtuse avec la dépendance en h). On a le résultat de convergence suivant, qui comme nous l'avons déjà évoqué, est une extension de résultats type Donsker de convergence en loi.

Théorème 2.19 *Soit $X(h)$ une variable obtuse sur \mathbb{C}^N et $S(h)$ son 3-tenseur complexe doublement symétrique associé. Soit $(X_n(h))_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $X(h)$. On considère la marche aléatoire obtuse suivante*

$$Z_{nh}^h = \sum_{i=1}^n \sqrt{h} X_n(h).$$

Si les limites suivantes

$$M_0^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} S_0^{ij}(h)$$

et

$$M_k^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} S_k^{ij}(h)$$

existent pour tous $i, j, k = 1, \dots, N$, alors le processus (Z_t^h) défini pour tout $t \geq 0$ par $Z_t^h = Z_{[t/h]h}^h$ converge en loi vers la martingale normale complexe Z sur \mathbb{C}^N dont les équations de structures sont

$$[Z^i, Z^j]_t = M_0^{ij} t + \sum_{k=1}^N M_k^{ij} Z_t^k, \quad (2.82)$$

$$[\overline{Z}^i, Z^j]_t = \delta_{ij} t + \sum_{k=1}^N \overline{M}_j^{ik} Z_t^k. \quad (2.83)$$

Dans la même veine et pour amorcer notre résultat appliqué en mécanique quantique on introduit l'opérateur de multiplication.

$$\mathcal{M}_{Z_t^h} = \sum_{k=1}^{[t/h]} \sqrt{h} \mathcal{M}_{X_k^h}.$$

Le théorème suivant est la traduction du théorème précédent en termes de convergence d'opérateurs.

Théorème 2.20 *Supposons qu'il existe des opérateurs M_{ij}^k pour tous $i, j = 1, \dots, N$ et tout $k = 0, \dots, N$ tels que :*

$$M_0^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} S_0^{ij}(h)$$

et

$$M_k^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} S_k^{ij}(h).$$

Alors l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{(Z_t^h)^i}$, converge fortement sur un certain domaine \mathcal{D} vers les opérateurs

$$\mathcal{Z}_t^i = \sum_{j,k=0}^N M_k^{ij} a_k^j(t). \quad (2.84)$$

Ces opérateurs sont les opérateurs de multiplication par Z , la martingale normale complexe satisfaisant

$$[Z^i, Z^j]_t = M_0^{ij} t + \sum_{k=1}^N M_k^{ij} Z_t^k \quad (2.85)$$

et

$$[\overline{Z}^i, Z^j]_t = \delta_{ij} t + \sum_{k=1}^N \overline{M}_k^{ik} Z_t^k. \quad (2.86)$$

Maintenant nous avons tous les ingrédients pour pouvoir décrire le résultat concernant la convergence de (2.67). En particulier, il faut pouvoir combiner le résultat du Théorème 2.17 et les conditions asymptotiques des 3-tenseurs. Il s'avère donc nécessaire d'imposer des conditions asymptotiques sur les opérateurs $A(h)$ and $B_j(h), j = 1, \dots, N$. On a donc le résultat final suivant.

Théorème 2.21 *Supposons qu'il existe une famille d'opérateurs $\{\tilde{A}, \tilde{B}_j, j = 1 \dots, N\}$ telle que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_j(h)}{\sqrt{h}} = \tilde{B}_j$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h) - I}{h} = \tilde{A}$$

Alors le processus $(V_{[t/h]}^h)$ converge vers la solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dV_t = \tilde{A}V_t dt + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_j V_t dZ_t^j.$$

L'équation sous la forme $dV_t = \tilde{A}V_t dt + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_j V_t dZ_t^j$ est celle exprimée dans un espace de Fock approprié. L'intérêt de cette formulation est de pouvoir détecter quelles équations différentielles stochastiques quantiques sont en réalité simplement des équations décrivant des situations classiques. Des travaux complémentaires à cette étude ont été entrepris dans [30, 7] et en particulier, des critères permettant de déterminer si une EDS quantique est en fait classique ont été développés.

Cette section conclut ce chapitre consacré aux résultats concernant le lien entre les modèles discrets et continus à travers les passages à la limite. Le chapitre suivant s'intéresse aux comportements en temps long des trajectoires quantiques.

Chapitre 3

Comportement en temps long de certaines trajectoires quantiques

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des propriétés asymptotiques de certaines trajectoires quantiques. Les deux premières sections sont consacrées à des problèmes de convergence presque sûre. Dans la première section nous nous intéressons à des modèles dits "non démolition" qui correspondent aux modèles des équations de l'expérience de Serge Haroche au LKB. En particulier, on montre que les trajectoires quantiques attachées à ces modèles convergent presque sûrement vers des états appelés états pointeurs et que ce type de modèle reproduit en temps long le principe de réduction du paquet d'onde. La seconde section traite de problème de stabilité exponentielle de sous espaces. En particulier, on montre que sous certaines hypothèses certains sous-espaces sont asymptotiquement stables et on précise à quelle vitesse. Enfin les deux dernières sections traitent du problème important de la mesure invariante des trajectoires quantiques discrètes et continues.

3.1 Equations maîtresses stochastiques non démolition

Comme on l'a vu jusqu'ici une mesure indirecte introduit une perturbation du système \mathcal{H}_S . L'état du système \mathcal{H}_S est en particulier, sans cesse modifié au fur et à mesure que l'on acquiert de l'information à travers les observations indirectes. On peut imaginer que dans certaines situations, on ne veuille pas modifier l'état du système lors des observations indirectes pour ne pas dégrader l'information contenue dans l'état. C'est le cas des expériences dites "non démolition". Il s'agit d'expériences de mesures indirectes qui ne modifient pas certains états propres du système \mathcal{H}_S .

Concrètement, on considère un système \mathcal{S} décrit par un espace de Hilbert \mathcal{H}_S dont on fixe une base orthonormée privilégiée $\mathcal{E}_P = \{|\alpha\rangle, \alpha \in A\}$ où A est un ensemble fini. Les vecteurs de cette base sont appelés états pointeurs. Le principe des mesures "non démolitions" décrit une expérience de mesure indirecte qui ne modifie pas l'état de \mathcal{H}_S si

l'état de \mathcal{H}_S est l'un des vecteurs de \mathcal{E}_P . Un autre intérêt est que ce type d'expérience est relié au principe de réduction du paquet d'onde lié à une mesure directe de l'état initial. En effet, une mesure directe de l'état initial le long de la base \mathcal{E}_P indique que l'état est dans un des états pointeurs avec une certaine mesure de probabilité (cf Section 2.1.1). On montre que la trajectoire quantique décrivant le principe de mesure indirecte non démolition converge vers un état aléatoire à valeurs dans \mathcal{E}_P dont la distribution est la même que celle de la mesure directe de l'état initial. Des détails plus complets et une formulation précise sont donnés dans la remarque ci-dessous.

Dans le contexte des trajectoires quantiques discrètes ce type de modèle a été entièrement décrit dans [32, 33]. Dans [32] des résultats fins de convergence et de vitesse de convergence sont exposés. En particulier, de nombreuses situations sont abordées et traitées en détail. Avec Tristan Benoist, nous avons étudié le modèle des trajectoires continues "non démolition" dans [51]. Cette section concerne ces résultats. Dans le cadre continue nous adopterons la définition suivante d'une expérience dite "non démolition".

Définition 3.1 *Soit \mathcal{E}_P une base orthonormée \mathcal{H} . On dit qu'un processus de mesure satisfait une condition de non démolition pour la base \mathcal{E}_P si tout vecteur de \mathcal{E}_P est stable pour le processus de mesure : c'est à dire pour tout $|\alpha\rangle \in \mathcal{E}_P$, la trajectoire quantique décrivant le processus de mesure satisfait : si il existe s , $\tilde{\rho}_s = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ alors pour tout $t > s$, on a $\tilde{\rho}_t = \tilde{\rho}_s$, presque sûrement.*

En particulier, si à l'instant initial l'état du système est dans un état pointeur cet état n'est pas modifié au cours du processus de mesure.

Décrivons maintenant les modèles que nous avons étudiés dans [51]. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ comme celui de la section 2.1.2. Pour satisfaire la définition précédente, on considère une équation maitresse stochastique de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t &= \tilde{\rho}_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^l \int_0^t (L_i \tilde{\rho}_{s-} + \tilde{\rho}_{s-} L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{s-}(L_i + L_i^*)] \tilde{\rho}_{s-}) d\tilde{W}_i(s) \\ &+ \sum_{i=l+1}^p \int_0^t \left(\frac{L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*}{\text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*]} - \tilde{\rho}_{s-} \right) \left(d\tilde{N}_i(s) - \text{Tr}[L_i \tilde{\rho}_{s-} L_i^*] ds \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{aligned} H &= \sum_{|\alpha\rangle \in \mathcal{E}_P} \epsilon(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ L_i &= \sum_{|\alpha\rangle \in \mathcal{E}_P} c(i|\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ici on remarque que tous les opérateurs intervenant dans la définition de l'opérateur \mathcal{L} sont diagonaux dans la base \mathcal{E}_P . Il est donc clair qu'un processus de mesure décrit par

une équation du type (3.1) avec les conditions (3.2) satisfait la définition précédente. On montre de plus que cette condition est nécessaire et suffisante pour avoir la condition de non démolition. Nous aurons également besoin des quantités suivantes

$$\begin{aligned} r(i|\alpha) &= c(i|\alpha) + \overline{c(i|\alpha)}, \\ \theta(i|\alpha) &= |c(i|\alpha)|^2, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Dans [51], on montre que $(\tilde{\rho}_t)$ converge presque sûrement vers un projecteur $|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|$ où Υ est un vecteur aléatoire à valeurs dans la base \mathcal{E}_P . La distribution de ce vecteur est donnée par :

$$\mathbb{P}[\Upsilon = \alpha] = q_0(\alpha) = \text{Tr}(\tilde{\rho}_0|\alpha\rangle\langle\alpha|), \quad |\alpha\rangle \in \mathcal{E}_P.$$

Remarque : Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de cette section, notons que cette probabilité q_0 est liée à la mesure directe de l'état $\tilde{\rho}_0$. En effet, rappelons (cf section 2.1.1) qu'une mesure directe de l'état $\tilde{\rho}_0$ suivant la base $|\alpha\rangle$ est décrit par le modèle probabiliste

$$\mathbb{P}[\text{observer } |\alpha\rangle] = \text{Tr}(\tilde{\rho}_0|\alpha\rangle\langle\alpha|).$$

Ainsi en temps long le modèle de mesure indirecte non démolition reproduit le phénomène de réduction du paquet d'onde : l'état est projeté aléatoirement sur un état pointeur avec les mêmes probabilités que celles décrites par la mesure directe. On dit souvent que l'on a observé le système sans le détruire !.

Donnons quelques détails de la preuve de ce résultat. Pour cela on introduit les processus $(q_\alpha(t))$, $\alpha \in \mathcal{E}_P$ où

$$q_\alpha(t) = \text{Tr}(\tilde{\rho}_t|\alpha\rangle\langle\alpha|), \quad t \geq 0.$$

Remarquons qu'à t fixé $q_\alpha(t)$ est une distribution de probabilité décrivant la distribution attachée à la mesure directe de l'état $\tilde{\rho}_t$. Le résultat clé est que ces processus sont des exponentielles de Doelans stochastiques. Plus précisément on a le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, les processus stochastiques $(q_\alpha(t))$, $\alpha \in \mathcal{E}_P$ satisfont le système d'équations différentielles stochastiques suivant :*

$$\begin{aligned} dq_\alpha(t) = q_\alpha(t-) \left[\sum_{i=0}^l (r(i|\alpha) - \langle r_i(t-) \rangle) dW_i(s) \right. \\ \left. + \sum_{i=l+1}^p \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\langle \theta_i(t-) \rangle} - 1 \right) (d\tilde{N}_i(t) - \langle \theta_i(t-) \rangle dt) \right], \quad \alpha \in \mathcal{E}_P, \quad (3.3) \end{aligned}$$

avec $\langle r_i(t) \rangle = \sum_{\gamma} r(i|\gamma)q_\gamma(t)$ et $\langle \theta_i(t) \rangle = \sum_{\gamma} \theta(i|\gamma)q_\gamma(t)$, pour tout $t \geq 0$.

En particulier, ces processus $(q_\alpha(t)), \alpha \in \mathcal{E}_P$ sont des (\mathcal{F}_t) martingales. Elles sont solutions d'équation de Doléans et s'expriment donc de la manière suivante

$$\begin{aligned}
q_t(\alpha) &= q_0(\alpha) \times \exp \left[\sum_{i=1}^l \left(\int_0^t (r(i|\alpha) - \langle r_i(s-) \rangle) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t (r(i|\alpha) - \langle r_i(s-) \rangle)^2 ds \right) \right] \\
&\quad \times \prod_{i=l+1}^p \prod_{s \leq t} \left(1 + \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\langle \theta_j(s-) \rangle} - 1 \right) \Delta \tilde{N}_i(t) \right) \times \exp \left[- \int_0^t (\theta(i|\alpha) - \langle \theta_j(s-) \rangle) ds \right] \\
&= q_0(\alpha) \times \exp \left[\sum_{i=1}^l \left(\int_0^t (r(i|\alpha) - \langle r_i(s-) \rangle) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t (r(i|\alpha) - \langle r_i(s-) \rangle)^2 ds \right) \right] \\
&\quad + \sum_{i=l+1}^p \left(\int_0^t \ln \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\langle \theta_j(s-) \rangle} \right) d\tilde{N}_i(s) - \int_0^t (\theta(i|\alpha) - \langle \theta_j(s-) \rangle) ds \right). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Cette formulation illustre à nouveau que si à l'instant initial l'état du système est dans un état pointeur par exemple $|\alpha\rangle$ alors pour tout $t \geq 0$ on a $q_\alpha(t) = 1$ et $q_\beta(t) = 0$ pour tout $\beta \neq \alpha$. En particulier, cela signifie que pour tout $t \geq 0$ on a $\tilde{\rho}_t = |\alpha\rangle\langle\alpha|$.

Abordons maintenant le resultat final de convergence. Celui-ci repose sur une hypothèse d'observabilité décrite dans l'hypothèse suivante

Assumption (ND) : Pour tout (α, β) avec $\alpha \neq \beta$ il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ telle que

- soit $r(i|\alpha) \neq r(i|\beta)$ si $i \leq l$
- ou $\theta(i|\alpha) \neq \theta(i|\beta)$ si $i > l$.

Sous cette hypothèse, on peut exprimer le résultat de convergence.

Théorème 3.2 *Supposons l'hypothèse (ND) satisfaite, alors il existe des variables aléatoires $q_\alpha(\infty), \alpha \in \mathcal{E}_P$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_\alpha(t) = q_\alpha(\infty), \forall \alpha \in \mathcal{E}_P, \quad (3.5)$$

presque sûrement et en norme L^1 .

Les variables aléatoires $q_\alpha(\infty), \alpha \in \mathcal{E}_P$, satisfont

$$\mathbb{P}[q_\alpha(\infty) = 1] = q_0(\alpha), \forall \alpha \in \mathcal{E}_P, \quad (3.6)$$

$$q_\alpha(\infty)q_\beta(\infty) = 0, \forall \alpha \neq \beta, \text{ p.s.} \quad (3.7)$$

En conséquence il existe une variable aléatoire Υ à valeurs dans \mathcal{E}_P telle que

$$\mathbb{P}(\Upsilon = \alpha) = q_\alpha(0), \alpha \in \mathcal{E}_P$$

et telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|, \text{ p.s.}$$

On renforce ce théorème avec l'estimation suivante de la vitesse de convergence.

Théorème 3.3 *Supposons que $\theta(i|\alpha) > 0$, pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_P$ et pour tout $i = l+1, \dots, p$. Supposons que l'hypothèse (ND) soit satisfaite et supposons que $\tilde{q}_\alpha(0) \neq 0$, pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_P$. On a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{q_\alpha(t)}{q_\Upsilon(t)} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (r(i|\alpha) - r(i|\Upsilon))^2 + \sum_{i=l+1}^p \theta(i|\Upsilon) \left[1 - \frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} + \ln \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} \right) \right], \quad (3.8)$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_P$, presque sûrement.

On peut interpréter ce résultat de la manière suivante. La convergence ci dessus exprime en particulier, que

$$q_\alpha(t) = q_\Upsilon(t) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (r(i|\alpha) - r(i|\Upsilon))^2 + \sum_{i=l+1}^p \theta(i|\Upsilon) \left[1 - \frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} + \ln \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} \right) \right] + o(1) \right) \quad (3.9)$$

Ainsi, si pour une réalisation $\Upsilon = \alpha$ pour un certain α alors les probabilités $(q_\beta(t))$ vont s'éteindre exponentiellement vite et $(q_\alpha(t))$ convergera vers 1.

On obtient ce résultat en utilisant le fait que les $(q_\alpha(t))$ sont des martingales bornées. En particulier, cela permet de considérer les changements de probabilités suivants

$$d\mathbb{Q}_\alpha(\cdot) = q_\infty(\alpha) d\mathbb{P}(\cdot), \alpha \in \mathcal{E}_P.$$

On observe alors que

$$\mathbb{Q}_\alpha(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \Upsilon = \alpha), \alpha \in \mathcal{E}_P$$

et que

$$\mathbb{P}(\cdot) = \sum_{\alpha} q_\infty(\alpha) \mathbb{Q}_\alpha(\cdot).$$

On établit alors le résultat de convergence sous chaque probabilité \mathbb{Q}_α et on utilise la formule des probabilités totales pour conclure. En particulier, sous $\mathbb{Q}_\alpha(\cdot)$ les processus observés $(y_i(t))$ et $(\tilde{N}_i(t))$ prennent des formes simples (ils deviennent des browniens standards et des processus de Poisson d'intensité non aléatoire).

On complète ce résultat en résolvant le problème de stabilité du filtre. Si on ne connaît pas l'état de départ $\tilde{\rho}_0$ alors comme dans le cadre de la section 2.3, on définit une estimation du processus $(\tilde{\rho}_t)$ avec un processus $(\hat{\rho}_t)$. On renvoie à la section 2.3 pour la définition de ce processus. On note $(\hat{q}_\alpha(t))_{\alpha \in A}$ les processus associés à $(\hat{\rho}_t)$. On a la proposition suivante.

Proposition 3.4 *Supposons que $\theta(i|\alpha) > 0$, pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_P$ et pour tout $i = l+1, \dots, p$. Supposons que l'hypothèse (ND) soit satisfaite et supposons que $\hat{q}_\alpha(0) \neq 0$, pour tout $\alpha \in$*

\mathcal{E}_P . Soit $(\hat{q}_\alpha(t))$ le processus stochastique qui correspond à l'estimation de $(q_\alpha(t))$. Nous avons le résultat de convergence suivant

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{q}_\Upsilon(t) &= 1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{q}_\alpha(t) \mathbf{1}_{\Upsilon \neq \alpha} &= 0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

presque sûrement. La convergence satisfait le même taux exponentielle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\hat{q}_\alpha(t)}{\hat{q}_\Upsilon(t)} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (r(i|\alpha) - r(i|\Upsilon))^2 + \sum_{l+1}^p \theta(i|\Upsilon) \left[1 - \frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} + \ln \left(\frac{\theta(i|\alpha)}{\theta(i|\Upsilon)} \right) \right],\tag{3.11}$$

presque sûrement.

Finalement on a la stabilité du filtre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}(t) = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|,$$

presque sûrement.

Ce résultat est intéressant car on peut l'utiliser de la manière suivante. Imaginons que notre système soit initialisé dans un état pointeur $\rho_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ pour un certain $|\alpha\rangle \in \mathcal{E}_P$ mais qu'on n'a pas cette information. D'après le Théorème 3.1, on sait que $\Upsilon = \alpha$ presque sûrement. Le théorème précédent nous dit que si on initialise une estimation $\hat{\rho}_0$ tel que $\hat{q}_\alpha(0) \neq 0$ alors l'estimation converge vers l'état pointeur $|\alpha\rangle$. Ainsi seulement avec l'observation indirecte, on est capable d'inférer et de déterminer quelle était l'état initial du système. On a réellement observé le système sans l'observer directement !.

3.2 Sous-espace attractif

Dans cette partie sont présentés les résultats de l'article [52] écrit avec Tristan Benoist et Francesco Ticozzi. L'objectif est d'étudier des sous espaces attractifs de \mathcal{H}_S . Pour diverses raisons, il est souvent intéressant dans les expériences de forcer l'état d'un système quantique à se concentrer dans des sous espaces \mathcal{H}_A de \mathcal{H}_S ou alors d'empêcher un état de s'échapper d'un tel sous espace. Ces sous espaces peuvent avoir certaines propriétés que l'on veut par exemple pouvoir conserver pendant une expérience. On peut vouloir également préparer un système quantique dans un certain état particulier. Le système \mathcal{H}_A est par exemple de dimension 1 si l'on souhaite préparer un système quantique dans un état pur particulier. Ces considérations rentrent dans le cadre de la théorie du contrôle. En particulier, lorsque l'on introduit des mesures indirectes on peut utiliser des modèles type feedback où l'on prend en compte la réponse de la mesure, i.e l'information du signal observé. On peut alors chercher à agir sur les paramètres de l'expérience pour atteindre l'objectif souhaité. On peut également modéliser et contrôler des expériences pour que le système évolue

et atteint son objectif sans action supplémentaire, on parle alors de contrôle en boucle ouverte. Dans ce cadre, mesurer de manière continue un système, peut être utilisé pour accélérer la convergence. Il est alors naturel de chercher à déterminer la forme des évolutions stochastiques ou déterministes permettant d'amener un système quantique dans un sous espace fixé à l'avance.

Dans [129, 130], les auteurs ont dégagé des conditions pour qu'un sous espace \mathcal{H}_A soit stable sous l'action d'une évolution Lindbladienne. Plus précisément les notions d'invariance et d'attractivité (autrement appelé stabilité asymptotique globale) sont abordées.

Ces notions dans le cas d'une évolution lindladienne déterministe ou dans le cas aléatoire d'une équation maitresse stochastique sont précisées dans la définition ci-dessous. On notera (ρ_t) la solution de l'équation de Lindblad donnée par un opérateur $\mathcal{L}(\cdot)$ et $(\tilde{\rho}_t)$ la solution d'une équation maitresse stochastique associée.

Définition 3.2 *Un sous espace \mathcal{H}_A de \mathcal{H}_S est dit invariant*

— *en moyenne si*

$$\rho_0 \in \mathcal{I}_S(\mathcal{H}) \Rightarrow \rho_t \in \mathcal{I}_S(\mathcal{H}), \quad \forall t > 0.$$

— *presque sûrement si*

$$\tilde{\rho}_0 \in \mathcal{I}_S(\mathcal{H}) \Rightarrow \tilde{\rho}_t \in \mathcal{I}_S(\mathcal{H}), \quad \forall t > 0 \quad p.s.$$

Un sous espace \mathcal{H}_A de \mathcal{H}_S est dit globalement asymptotiquement stable (GAS)

— *en moyenne si $\forall \rho_0 \in \mathcal{D}_S$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho_t - P_A \rho_t P_A\| = 0.$$

— *presque sûrement si $\forall \tilde{\rho}_0 \in \mathcal{D}_S$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\rho}_t - P_A \tilde{\rho}_t P_A\| = 0 \quad a.s.$$

Un des objectifs de l'article [51] était d'obtenir le résultat suivant

Théorème 3.5 *Un sous espace \mathcal{H}_A est invariant en moyenne si et seulement si il est invariant presque sûrement.*

Un sous espace \mathcal{H}_A est GAS en moyenne si et seulement si il est GAS presque sûrement.

Ce type de résultat avait été déjà abordé dans le cadre diffusif uniquement avec des résultats plus faibles. En effet, simplement des convergences en probabilité avaient été obtenues [128].

Pour établir le Théorème 3.5 nous avons utilisé une caractérisation de l'invariance ou du fait d'être GAS en termes de décomposition précise des opérateurs L_i apparaissant dans l'expression de l'opérateur de Lindblad. Cette décomposition était déjà connue dans le cas déterministe [129, 130] et avait été utilisée dans le cas diffusif [128]. Pour introduire

cette décomposition nous avons besoin de décomposer l'espace $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_R$ en somme orthogonale. Suivant cette décomposition un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ prendra la forme

$$X = \begin{pmatrix} X_A & X_P \\ X_Q & X_R \end{pmatrix}.$$

En ce qui concerne l'évolution lindbladienne et donc les propriétés en moyenne, dans [129, 130] les auteurs ont obtenus les caractérisations précises suivantes.

Théorème 3.6 *Le sous espace \mathcal{H}_A est invariant en moyenne si et seulement si*

$$\forall j, L_{j,Q} = 0 \text{ et } iH_P - \frac{1}{2} \sum_j L_{j,A}^* L_{j,P} = 0.$$

Théorème 3.7 *Le sous espace \mathcal{H}_S est GAS en moyenne si et seulement si aucun sous espace invariant est inclus dans $\bigcap_j \ker(L_{j,P})$.*

Donnons quelques détails de l'approche que nous avons adoptée dans [52] pour établir le Théorème 3.5. Pour cela on introduit une fonction de Lyapounov V définie par

$$V(\rho) = \text{Tr}(P_R \rho),$$

où P_R correspond au projecteur orthogonal sur \mathcal{H}_R . L'idée centrale dans ce travail est alors d'exploiter une propriété de sous-martingale du processus $(V(\rho_t))$. Pour cela nous aurons besoin de l'estimation suivante

$$V(\mathcal{L}(\rho)) = \text{tr}[P_R \mathcal{L}(\rho)] = - \sum_j \text{tr}[C_{j,P}^* C_{j,P} \rho_R] \leq 0, \quad (3.12)$$

pour tout état ρ . Ici on a utilisé l'expression suivante

$$\mathcal{L}_R(\rho_R) = -i[H_R, \rho_R] + \sum_j C_{j,R} \rho_R C_{j,R}^* - \frac{1}{2} \{C_{j,P}^* C_{j,P} + C_{j,R}^* C_{j,R}\} \rho_R.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(\tilde{\rho}_t) | \mathcal{F}_s) &= V(\tilde{\rho}_s) + \int_s^t \mathbb{E}(V(\mathcal{L}(\tilde{\rho}_u) | \mathcal{F}_s) du \\ &\leq V(\tilde{\rho}_s), \end{aligned}$$

ce qui prouve donc la propriété de sous-martingale.

Ensuite on exploite le fait que V est linéaire et que

$$V(\rho_t) = \mathbb{E}(V(\tilde{\rho}_t)).$$

En effet en remarquant que

$$V(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathcal{H}_A$$

et $V(\rho) \geq 0$ pour tout état ρ alors on a la première partie du théorème. Pour la seconde partie on utilise le fait qu'une sous-martingale positive est presque sûrement convergente et comme ici le processus $(V(\tilde{\rho}_t))$ est borné on a également convergence en norme L^1 , il suit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\rho_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(V(\tilde{\rho}_t)) = \mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\rho}_t) \right]$$

ce qui permet de montrer la seconde partie du Théorème 3.5 après avoir observé que

$$\mathcal{H}_A \text{ est GAS presque sûrement } \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\rho}_t) = 0.$$

Un étude plus précise nous permet de compléter le Théorème 3.5 en précisant la stabilité exponentielle de l'espace \mathcal{H}_A . Cette stabilité exponentielle est exprimée dans le théorème suivant. Il s'agit de donner une estimation de la vitesse de convergence presque sûre.

Théorème 3.8 *Supposons que le sous espace \mathcal{H}_A soit GAS et définissons $V(\rho) = \text{tr}(P_R \rho)$, où P_R est le projecteur orthogonal sur \mathcal{H}_R . Alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(V(\rho_t)) \leq -\alpha_0, \quad (3.13)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(V(\tilde{\rho}_t)) \leq -\alpha_0 \quad p.s. \quad (3.14)$$

De plus, si la condition (SP) : $P_R C_j^ P_R C_j P_R > 0$ pour tout $j = l+1, \dots, p$ est satisfaite, alors il existe $\beta_0 \geq \alpha_0$ telle que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(V(\tilde{\rho}_t)) \leq -\beta_0 \quad p.s. \quad (3.15)$$

Avec l'expression (3.12) on voit que la constante α_0 est relative à la valeur minimale du spectre d'un opérateur. En effet, plus précisément on a

$$\alpha_0 := \min\{-\text{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \text{sp}(\mathcal{L}_R)\}. \quad (3.16)$$

La constante β_0 est moins évidente à introduire et on réfère à l'article [52] pour plus de détails.

La convergence presque sûre (3.13) exprime le fait que la solution de l'équation de Lindblad converge exponentiellement vite vers \mathcal{H}_A (on s'échappe de \mathcal{H}_R exponentiellement vite). La convergence presque sûre (3.14) affirme qu'on obtient le même type d'estimation pour les trajectoires quantiques. La dernière estimation exprime le fait que si on suppose de plus (SP) alors on peut obtenir une estimation meilleure et donc une convergence potentiellement plus rapide. Le terme potentiel réfère au fait que l'on est simplement capable d'obtenir des inégalités pour la stabilité exponentielle. Néanmoins lorsque \mathcal{H}_S est de dimension 2 et \mathcal{H}_A de dimension 1 on obtient des égalités dans le théorème précédent et en particulier, on fournit des exemples où les modèles stochastiques sont meilleurs que les modèles déterministes [51].

3.3 Mesure invariante des trajectoires quantiques discrètes

3.3.1 Existence et unicité

Cette section aborde la question importante de la mesure invariante des trajectoires quantiques dans le cadre discret [49]. Cette question inhérente à la théorie des chaînes de Markov est une question difficile dans ce contexte. En particulier, les techniques usuelles de la théorie des processus de Markov ne s'appliquent pas pour les trajectoires quantiques. Une des principales difficultés réside dans le fait que les transitions sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue.

On se donne une famille d'opérateurs de Kraus $\{V_i, i = 0, \dots, p\}$ et on rappelle que dans le cas discret l'espace décrivant les résultats de mesure est $\Omega = \{0, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu cylindrique. On considère la filtration naturelle (\mathcal{C}_n) où pour $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{C}_n désigne la tribu engendrée par les cylindres de taille n . On considère donc la trajectoire quantique associée aux opérateurs de Kraus $V_i, i = 0, \dots, p$:

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{V_i \tilde{\rho}_n V_i^*}{\text{Tr}(V_i \tilde{\rho}_n V_i^*)} \mathbf{1}_{X_n=i}.$$

Ici nous souhaitons donc présenter les résultats de [49] qui traitent le problème de la mesure invariante de cette chaîne de de Markov.

On peut tout d'abord noter que l'ensemble des états \mathcal{D}_S est un ensemble compact donc il y a toujours existence au moins d'une mesure invariante. La réelle question concerne l'unicité.

Notre étude va se concentrer sur les trajectoires quantiques à valeurs dans les états purs. Une première raison est due au fait que si l'état initial est un état pur alors la trajectoire quantique reste à valeurs dans les états purs. En effet, rappelons si $\rho_0 = |x_0\rangle\langle x_0|$ alors il existe une suite (x_n) telle que $\rho_n = |x_n\rangle\langle x_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle également les transitions de la suite (x_n) :

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^p \frac{V_i x_n}{\|V_i x_n\|} \mathbf{1}_{X_n=i} \quad (3.17)$$

avec $\mathbb{P}[\mathbf{1}_{X_n=i} = 1] = \|V_i x_n\|^2, i = 0, \dots, p$ dans ce cas. En particulier, l'ensemble des projecteurs de rang 1 c'est à dire l'ensemble des états purs est stable et compact donc il y existe au moins une mesure invariante supportée par cet ensemble. Ajouté à cela si on rajoute une hypothèse dite de purification, une trajectoire quantique à tendance à se rapprocher de l'ensemble des états purs. Ce phénomène de purification est basé sur l'hypothèse suivante.

Pur Tout projecteur orthogonal P , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $PV_1^* \dots V_n^* V_n \dots V_1 P \propto P$ pour tout n-uplets (v_1, \dots, v_n) , est de rang 1.

Ici le symbole \propto signifie proportionnel. Cette hypothèse permet d'obtenir le résultat suivant qui a été montré par Hans Maassen et Burkhard Kümmerer [106].

Théorème 3.9 *Supposons que la condition (Pur) soit satisfaite, alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}(\rho_n^2) = 1.$$

Comme pour un état ρ on a $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ si et seulement si ρ est un état pur alors on voit qu'une trajectoire quantique satisfaisant la condition (Pur) a tendance à se concentrer sur l'ensemble des états purs. On peut montrer plus précisément qu'il existe une suite (ϕ_n) de vecteurs de norme 1 telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{\rho}_n, |\phi_n\rangle\langle\phi_n|) = 0,$$

où *dist* désigne n'importe quelle distance sur les matrices. L'hypothèse (Pur) n'est pas évidente à vérifier en pratique. On peut néanmoins remarquer qu'en dimension 2, le seul projecteur orthogonal de rang 2 est l'identité. Ainsi, soit les V_i sont tous proportionnels à un opérateur unitaire soit il y a purification.

Dans la suite on suppose (Pur) satisfaite donc les mesures invariantes des trajectoires quantiques sont supportées uniquement par l'ensemble des états purs.

On étudie donc la chaîne de Markov (3.17). Pour cela on va l'étudier dans le plan projectif

$$P(\mathbb{C}^k) = \{x \in \mathbb{C}^k \mid \|x\| = 1\}$$

quotienté par la relation d'équivalence \sim :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists |\lambda| = 1 \text{ tel que } x = \lambda y.$$

En particulier, l'ensemble des états purs (projecteur de rang 1) est en bijection avec cet ensemble. On muni cet ensemble de sa tribu borélienne \mathcal{B} . On notera \hat{x} la classe d'équivalence d'un élément $x \in P(\mathbb{C}^k)$ et si V est un opérateur tel que $Vx \neq 0$ on pose

$$V \cdot x = \frac{\widehat{Vx}}{\|Vx\|}.$$

On muni cet espace d'une distance

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = \sqrt{1 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}}$$

Cette distance est en particulier, invariante par transformation unitaire, cette propriété sera utilisée dans la suite.

Maintenant nous introduisons un certain nombre de variables aléatoires

$$V_n(\omega) = V_{\omega_n},$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$W_n = V_n \dots V_1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi sur $P(\mathbb{C}^k)$, notre chaîne de Markov s'exprime sous la forme

$$\hat{x}_n = W_n \cdot \hat{x}_0 = V_n \dots V_1 \cdot \hat{x}_0.$$

Par conséquent décrire la chaîne de Markov (\hat{x}_n) revient à décrire le produit de matrices

$$V_n \dots V_1.$$

On notera Π le générateur de Markov associé à la chaîne de Markov (\hat{x}_n). Ce type de situation rentre dans le cadre de la théorie des produits de matrices aléatoires. Cette théorie a été largement étudiée dans la littérature [89, 54, 88, 55, 82]. Les hypothèses habituelles dans ce cadre, sont le choix i.i.d des matrices V_i et des matrices inversibles. Dans notre cas le choix des matrices n'est clairement pas i.i.d et nous n'avons pas de restriction sur la nature des matrices V_i (pas d'inversibilité requise). Une autre hypothèse importante dans le cadre classique de la théorie des produits aléatoires de matrices est la forte irréductibilité qui est : il n'y existe pas d'union non triviale de sous espaces E_1, \dots, E_l où les E_i sont différents de $\{0\}$ et de \mathbb{C}^k telle que

$$V_i \left(\bigcup_{i=1}^l E_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^l E_i, i = 0, \dots, p.$$

Une des motivations initiales des produits de matrices aléatoire est la convergence de la quantité

$$\frac{1}{n} \log \|W_n \cdot \hat{x}\|,$$

qui généralise la loi des grands nombres dans un cadre non-commutatif. Obtenir des résultats pour la convergence de cette quantité passe par l'étude de la chaîne de Markov ($W_n \cdot \hat{x}$). Sous les hypothèse d'inversibilités des V_i et la forte irréductibilité, dans le cadre i.i.d cette chaîne de Markov converge exponentiellement vite vers son unique mesure invariante.

Nous allons donc exposer les résultats de l'article [49] qui traite de la même question mais dans un cadre non i.i.d, non inversible et non fortement irréductible. En revanche, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante.

Irr Il existe un unique état invariant ρ_{inv} pour le canal quantique $\phi(\cdot) = \sum_{i=0}^p V_i \cdot V_i^*$

Pour attaquer le problème de l'unicité de la mesure invariante nous allons considérer l'espace $\Omega \otimes P(\mathbb{C}^k)$ qui va combiner l'évolution de la chaîne de Markov et les résultats de mesures. Si ν désigne une mesure de probabilité initiale sur $P(\mathbb{C}^k)$, pour tout ensemble borélien A et pour tout cylindre $C_{i_1, \dots, i_n} = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\} \in \mathcal{C}_n$ on définit la mesure suivante

$$\mathbb{P}_\nu(C_{i_1, \dots, i_n} \times A) = \int_A \|V_{i_n} \dots V_{i_1} x\|^2 d\nu(x).$$

Pour un état ρ , nous aurons besoin également de définir la mesure de proba \mathbb{P}_ρ par

$$\mathbb{P}_\rho(C_{i_1, \dots, i_n}) = \text{Tr}(V_{i_n} \dots V_{i_1} \rho V_{i_1}^* \dots V_{i_n}^*),$$

pour tout cylindre $C_{i_1, \dots, i_n} \in \mathcal{C}_n$.

Commençons par donner un certain nombre de propriétés satisfaites par la mesure \mathbb{P}_ν . On peut tout d'abord remarquer que cette probabilité satisfait le critère d'extension de Kolmogorov et donc que cette probabilité est bien définie. Il en est de même pour \mathbb{P}_ρ . Une seconde remarque concerne l'espérance par rapport à ν . En particulier, on a

$$\rho_\nu = \mathbb{E}_\nu[|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|]$$

où ρ_ν est une matrice densité. Ainsi on a la propriété suivante concernant la première marginale

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu(C_{i_1, \dots, i_n} \times P(\mathbb{C}^k)) &= \int_{P(\mathbb{C}^k)} \text{Tr}(V_{i_n}, \dots, V_{i_1} |\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| V_{i_1}^* \dots V_{i_n}^*) d\nu(x) \\ &= \text{Tr}(V_{i_n}, \dots, V_{i_1} \rho_\nu V_{i_1}^* \dots V_{i_n}^*) \\ &= \mathbb{P}_{\rho_\nu}(C_{i_1, \dots, i_n}), \end{aligned}$$

pour tout cylindre $C_{i_1, \dots, i_n} \in \mathcal{C}_n$. En particulier, on voit que si ν_a et ν_b désigne deux mesures invariantes on a

$$\mathbb{P}_{\rho_{\nu_a}} = \mathbb{P}_{\rho_{\nu_b}} = \mathbb{P}_{\rho_{inv}}.$$

En effet on a par invariance

$$\rho_{\nu_a} = \mathbb{E}_{\nu_a}[|\hat{x}_0\rangle\langle\hat{x}_0|] = \mathbb{E}_{\nu_a}[|\hat{x}_1\rangle\langle\hat{x}_1|] = \phi(\rho_{\nu_a}),$$

ce qui implique $\rho_{\nu_a} = \rho_{inv}$ d'après l'hypothèse (Irr) et par conséquent l'égalité des probabilités.

Dans la suite, une certaine classe de variables aléatoires va jouer un rôle central. On notera \mathcal{O} l'ensemble des variables aléatoires Z dont la définition ne dépend pas de $P(\mathbb{C}^k)$ c'est à dire

$$Z(\omega, \hat{x}) = Z(\omega, \hat{y}),$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout \hat{x} et \hat{y} dans $P(\mathbb{C}^k)$. Les variables aléatoires suivantes W_n , V_n , $\mathbf{1}_{V_n=V_{i_1}}$ sont des variables aléatoires appartenant à cette classe. Attention ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes de ce qui se passe sur $P(\mathbb{C}^k)$, seule leur définition ne fait pas apparaître de dépendance en $P(\mathbb{C}^k)$.

Etudions la loi de telles variables aléatoires lorsque l'on initialise notre chaîne de Markov avec une mesure invariante. En particulier, nous allons voir que la loi des variables aléatoires ne dépend pas du choix de la mesure invariante initiale. En effet, l'égalité $\mathbb{P}_{\rho_{\nu_a}} = \mathbb{P}_{\rho_{\nu_b}}$ pour deux mesures invariantes ν_a et ν_b implique qu'une variable aléatoire Z appartenant à \mathcal{O} a la même loi sous ν_a ou sous ν_b . Cela vient du fait que $\mathbb{P}_{\rho_{\nu_a}}(C) = \mathbb{P}_{\rho_{\nu_b}}(C)$ pour tout cylindre de base C , on en déduit par un argument de classe monotone que $\mathbb{E}_{\nu_a}(f(Z)) = \mathbb{E}_{\nu_b}(f(Z))$ pour toute fonction continue f d'où le résultat sur la loi de Z .

Notre but maintenant est de montrer que la chaîne de Markov (\hat{x}_n) se rapproche d'un processus composé de variables aléatoires appartenant à l'ensemble \mathcal{O} . En effet, supposons qu'un processus (\hat{o}_n) appartenant à \mathcal{O} satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\hat{x}_n, \hat{o}_n) = 0,$$

alors on a pour toute fonction continue f

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\nu_a}[f(\hat{x}_0)] &= \mathbb{E}_{\nu_a}[f(\hat{x}_n)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\nu_a}[f(\hat{x}_n)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\nu_a}[f(\hat{o}_n)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\rho_{\nu_a}}[f(\hat{o}_n)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\rho_{\nu_b}}[f(\hat{o}_n)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\nu_b}[f(\hat{x}_n)] \\
&= \mathbb{E}_{\nu_b}[f(\hat{x}_0)]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

et l'unicité de la mesure invariante en découle.

Pour montrer l'existence d'un processus (\hat{o}_n) satisfaisant la condition de convergence, on introduit le \mathcal{O} processus suivant

$$M_n = \frac{W_n^* W_n}{\text{Tr}(W_n^* W_n)}, n \in \mathbb{N}.$$

A ce stade, remarquons que ce processus est bien défini. En effet, si ν désigne la mesure initiale, d'une part nous avons que $\mathbb{P}_{\rho_\nu}[\text{Tr}(W_n^* W_n \rho_\nu) = 0] = 0$. D'autre part pour tout état ρ il existe c tel que $\rho \leq cI$ donc

$$\text{Tr}(W_n^* W_n \rho_\nu) \leq c \text{Tr}(W_n^* W_n)$$

donc $\text{Tr}(W_n^* W_n) > 0$ presque sûrement ce qui implique que le processus est bien défini. On a le résultat suivant concernant le comportement en temps long de ce processus

Proposition 3.10 *On suppose que la condition (Pur) est satisfaite. Il existe une variable aléatoire M_∞ qui appartient à \mathcal{O} , tel que le processus (M_n) converge presque sûrement et dans L^1 vers M_∞ .*

En particulier, M_∞ est un projecteur de rang 1 et donc il existe une \mathcal{O} variable aléatoire \hat{z} tel que $M_\infty = |\hat{z}\rangle\langle\hat{z}|$.

On montre en réalité que (M_n) est une martingale sous $\mathbb{P}_{I/k}$ la convergence presque sûre et L^1 pour toute mesure vient du fait $\mathbb{P}_\rho \ll \mathbb{P}_{I/k}$ pour tout état ρ (ceci est dû au fait que pour tout état ρ il existe c tel que $\rho \leq cI/k$).

On peut maintenant aborder la définition du processus \hat{o}_n . Pour cela on considère la décomposition polaire de W_n c'est à dire

$$W_n = U_n D_n,$$

avec U_n une matrice unitaire et D_n une matrice positive. Les deux processus, (U_n) et (D_n) ainsi construits, appartiennent à \mathcal{O} . Il est important de noter que pour tout n , la matrice D_n est proportionnelle à $\sqrt{M_n}$. On définit alors

$$\hat{o}_n = U_n \cdot \hat{z}, n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant l'invariance par transformation unitaire de la distance d et le fait que proportionnel signifie égalité sur $P(\mathbb{C}^k)$, on a alors

$$d(\hat{x}_n, \hat{o}_n) = d(W_n \cdot \hat{x}, U_n \cdot \hat{z}) = d(D_n \cdot \hat{x}, \hat{z}) = d(\sqrt{M_n} \cdot \hat{x}, \hat{z}) \quad (3.19)$$

et en utilisant la convergence de (M_n) vers $|\hat{z}\rangle\langle\hat{z}|$ on a

$$d(\hat{x}_n, \hat{o}_n) \rightarrow 0$$

presque sûrement. On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème 3.11 *Supposons (Pur) et (Irr) satisfaites, alors la chaîne de Markov (\hat{x}_n) décrivant la trajectoire quantique associée à la famille (V_i) admet une unique mesure invariante.*

3.3.2 Convergence exponentielle

On affine ce résultat en montrant la convergence exponentielle vers la mesure invariante. Pour cela on introduit un nouveau processus composé d'éléments de \mathcal{O} qui est relié au maximum likelihood. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{z}_n(\omega) = \operatorname{argmax}_{\hat{x} \in P(\mathbb{C}^k)} \|W_n \hat{x}\|^2 \quad (3.20)$$

et on définit

$$\hat{y}_n = W_n \cdot \hat{z}_n. \quad (3.21)$$

Pour n fixé, on remarque que \hat{z}_n correspond à un vecteur propre associé à la plus grande valeur singulière de W_n . En particulier, celui-ci n'est pas forcément unique mais on peut toujours en choisir un de manière mesurable et surtout ce vecteur est une variable aléatoire appartenant à \mathcal{O} .

Introduisons à présent l'opérateur shift $\theta(v_1, \dots, v_n, \dots) = (v_2, \dots, v_n, \dots)$. Le but de ce qui va suivre est d'expliquer le résultat suivant.

Proposition 3.12 *Supposons que (Pur) soit satisfaite. Alors il existe deux constantes $C > 0$ and $0 < \lambda < 1$ telles que pour toute mesure de probabilité ν sur $(P(\mathbb{C}^k), \mathcal{B})$, on a*

$$\mathbb{E}_\nu(d(\hat{x}_{n+l}, \hat{y}_n \circ \theta^l)) \leq C\lambda^n, \quad (3.22)$$

pour tous entiers l et n .

On a déjà remarqué que la variable aléatoire \hat{z}_n était reliée à la plus grande valeur singulière W_n , nous aurons également besoin de faire intervenir la seconde plus grande valeur singulière. Pour cela on utilise la notion de produit extérieur. Rappelons la définition : pour $p \in \mathbb{N}$ et p vecteurs x_1, \dots, x_p dans \mathbb{C}^k on note $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ la forme bilinéaire alternée

$$(y_1, \dots, y_p) \mapsto \det(\langle x_i, y_j \rangle)_{i,j=1}^p.$$

L'ensemble de tous les vecteurs de la forme $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ forme une famille génératrice de l'ensemble $\wedge^p \mathbb{C}^k$ des formes bilinéaires alternées sur \mathbb{C}^k . On a le produit scalaire suivant

$$\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_p \rangle = \det (\langle x_i, y_j \rangle)_{i,j=1}^p,$$

et on note $\|x_1 \wedge \dots \wedge x_p\|$ la norme associée. Il est immédiat de vérifier que d satisfait

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\| \|y\|}. \quad (3.23)$$

Dans \mathbb{R}^3 par exemple, cela correspond au produit vectoriel et la distance correspond donc à une mesure de l'angle entre deux vecteurs. Pour un opérateur A sur \mathbb{C}^k , on écrit $\wedge^p A$ pour l'opérateur sur $\wedge^p \mathbb{C}^k$ défini par

$$\wedge^p A (x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = Ax_1 \wedge \dots \wedge Ax_p. \quad (3.24)$$

A ce stade on peut exposer le lien avec les valeurs singulières (on pourra se référer à [54]). En particulier, on a $1 \leq p \leq k$

$$\|\wedge^p A\| = a_1(A) \dots a_p(A), \quad (3.25)$$

où $a_1(A) \geq \dots \geq a_k(A)$ sont les valeurs singulières de A rangées en ordre décroissant.

Introduisons à présent la fonction suivante

$$f(n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \|\wedge^2 V_{i_n} \dots V_{i_1}\| = \mathbb{E}_{ch} \left(k \frac{\|\wedge^2 W_n\|}{\text{Tr}(W_n^* W_n)} \right). \quad (3.26)$$

On montre facilement que cette fonction est sous additive et qu'il existe C and $\lambda < 1$ telle que

$$f(n) \leq C\lambda^n.$$

Ce résultat vient du fait que $(f(n))$ converge vers zéro. En effet, on peut remarquer que la seconde valeur singulière de W_n converge vers zéro et que la quantité dans l'espérance ci dessus est bornée, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

En utilisant la propriété de Markov on a que

$$\mathbb{E}_\nu(d(\hat{x}_{n+l}, \hat{y}_n \circ \theta^l)) = \mathbb{E}_{\nu \circ \Pi^l}(d(\hat{x}_n, \hat{y}_n)).$$

En utilisant le lien entre la distance et les produits extérieurs on montre que pour toute mesure ν on a

$$\mathbb{E}_\nu(d(\hat{x}_n, \hat{y}_n)) \leq f(n) \quad (3.27)$$

et la Proposition 3.12 en découle.

Ce résultat indique que notre chaîne de Markov se rapproche exponentiellement vite d'un processus composé de variables aléatoires appartenant à l'ensemble \mathcal{O} . Pour conclure nous allons emprunter des raisonnements issus de la théorie ergodique. En particulier, on montre le résultat suivant.

Proposition 3.13 *Supposons (Irr) satisfaite. Alors il existe deux constantes C and $\lambda < 1$ et il existe un entier m tels que pour toute fonction \mathcal{O} bornée de norme infinie $\|f\|_\infty$, pour tout état $\rho \in \mathcal{D}_k$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| \mathbb{E}^\rho \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f \circ \theta^{mn+r} \right) - \mathbb{E}^{\rho_{inv}}(f) \right| \leq C \|f\|_\infty \lambda^n. \quad (3.28)$$

Ce résultat est un résultat de convergence en variation totale de la loi \mathbb{P}_ρ vers $\mathbb{P}_{\rho_{inv}}$ sous l'action du shift $\theta(v_1, \dots, v_n, \dots) = (v_2, \dots, v_n, \dots)$. Cette propriété est basée sur le théorème suivant. On précisera la signification de l'entier m après l'expression du résultat.

Théorème 3.14 *Supposons (Irr) satisfaite. Alors il existe deux constantes c et $\lambda < 1$, il existe un entier m tels que pour tout état $\rho \in \mathcal{D}_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \phi^{mn+r}(\rho) - \rho_{inv} \right\|_1 \leq c \lambda^n. \quad (3.29)$$

Le résultat ci dessus exprime la convergence exponentielle de l'évolution déterministe décrite par le canal quantique vers l'unique état invariant. En particulier, ce résultat est lié à une notion de période pour l'application ϕ d'où l'entier m dans l'énoncé du théorème. C'est ce même paramètre qui apparaît dans l'expression de la proposition précédente. Pour montrer un tel résultat on utilise la forme de Jordan de l'application ϕ et on montre que l'ensemble des valeurs propres de module 1 forme un sous groupe du disque unité. La littérature dans le domaine des propriétés ergodiques de l'évolution déterministe est très fournie et le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [134]. Le résultat de la Proposition 3.13 se déduit assez facilement après avoir remarquer que

$$\mathbb{E}_\rho(f \circ \theta) = \mathbb{E}_{\phi(\rho)}(f).$$

Finalement on peut recoller tous les morceaux. Dans la suite on ne distinguera pas les constantes intervenant au fil des calculs et C désignera génériquement une constante $C > 0$ et λ une constante $0 < \lambda < 1$. On va étudier la convergence en mesure de Wasserstein. Pour cela on va considérer la quantité

$$W_1 \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \nu \Pi^{mn+r}, \nu_{inv} \right), \quad (3.30)$$

où W_1 désigne la distance de Wasserstein entre deux mesures et où m est le même entier qui intervient dans la Proposition 3.13. On va utiliser la formulation suivante pour la distance de Wasserstein entre deux mesures :

$$W_1(\sigma, \tau) = \sup_{f \in \text{Lip}_1(P(\mathbb{C}^k))} \left| \int_{P(\mathbb{C}^k)} f d\sigma - \int_{P(\mathbb{C}^k)} f d\tau \right|,$$

où $\text{Lip}_1(P(\mathbb{C}^k))$ correspond à l'ensemble des fonctions de Lipschitz de constante de Lipschitz 1. On considère donc une fonction f de constante de Lipschitz 1 et on a en écrivant $n = p+q$

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_\nu \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f(\hat{x}_{mn+r}) \right) - \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{x}_0)) \right| &\leq \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left| \mathbb{E}_\nu(f(\hat{x}_{m(p+q)+r})) - \mathbb{E}_\nu(f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) \right| \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left| \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) - \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{x}_{m(p+q)+r})) \right| \\ &+ \left| \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{E}_\nu(f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) - \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{y}_{mp})) \right|. \end{aligned}$$

En combinant la propriété de Lipschitz et la Proposition 3.12 on a pour toute mesure ν

$$\left| \mathbb{E}_\nu(f(\hat{x}_{m(p+q)+r})) - \mathbb{E}_\nu(f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) \right| \leq C\lambda^{mp},$$

cette propriété étant également vraie pour ν_{inv} . Pour le dernier terme, on utilise la Proposition 3.13,

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{E}_\nu(f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) - \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{y}_{mp})) \right| \leq C\lambda^q.$$

On est alors en mesure d'écrire

$$\left| \mathbb{E}_\nu \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f(\hat{x}_{mn+r}) \right) - \mathbb{E}_{\nu_{inv}}(f(\hat{x}_0)) \right| \leq 3C\lambda^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

ce qui permet d'établir le résultat final (en utilisant $\sqrt{\lambda}$).

Théorème 3.15 *Supposons que (Pur) et (Irr) soient satisfaites. Alors le noyau de Markov Π a une unique mesure invariante ν_{inv} et il existe $m \in \{1, \dots, k\}$, $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ tels que pour toute mesure de probabilité ν sur $(P(\mathbb{C}^k), \mathcal{B})$ on a,*

$$W_1 \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \nu \Pi^{mn+r}, \nu_{inv} \right) \leq C\lambda^n. \quad (3.31)$$

On termine cette section avec des exemples. En particulier, ils permettront de justifier pourquoi nous avons choisi la distance de Wasserstein et pas la variation totale par exemple.

3.3.3 Exemples

Chaîne de Markov classique Considérons une chaîne de Markov classique (X_n) irréductible de matrice de transition $P = (p_{ij})$ à espace d'états finis E de cardinal N . On considère $\mathbb{C}^N = \text{Vect}\{e_i, i = 1, \dots, N\}$. On pose

$$V_{ij} = \sqrt{p_{ij}} |e_i\rangle \langle e_j|$$

On peut remarquer que quelque soit l'état départ \hat{x}_0 après une évolution $V_{ij} \cdot \hat{x}_0$ localise l'état sur un des e_j et ensuite la chaîne de Markov (\hat{x}_n) évolue sur $\{e_i, i = 1, \dots, e_N\}$. On voit également que si $\hat{x}_0 = e_i$ alors la probabilité de voir ij est p_{ij} et si on a vu ij alors \hat{x}_1 devient e_j . Ainsi la chaîne de Markov (\hat{x}_n) reproduit exactement la chaîne de Markov (X_n). Si π désigne la mesure invariante de (X_n), l'unique état invariant de ϕ dans ce cas est

$$\rho_{inv} = \sum_{i=1}^N \pi(i) |e_i\rangle \langle e_i|$$

et on vérifie aisément que la propriété de purification est satisfaite. En particulier, la chaîne de Markov (\hat{x}_n) converge en loi vers une variable aléatoire \hat{x}_∞ à valeurs dans $\{e_i, i = 1, \dots, e_n\}$ de loi π .

Ce type d'évolution n'est pas capté par les modèles de produits de matrices aléatoires. En particulier, les matrices ne sont pas inversibles et pas fortement irréductibles car $\cup e_i$ est stable par les V_{ij}

Encore des chaînes de Markov ou presque Là on se restreint à $\mathbb{C}^2 = Vect\{e_1 = (1, 0)^t, e_2 = (0, 1)^t\}$ et on considère deux opérateurs de Kraus

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Un simple calcul montre que si on part de e_1 ou e_2 on a les transitions

$$e_1 \mapsto \begin{cases} e_1 \text{ avec probabilité } \frac{1}{3} \\ e_2 \text{ avec probabilité } \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$e_2 \mapsto \begin{cases} e_1 \text{ avec probabilité } \frac{1}{4} \\ e_2 \text{ avec probabilité } \frac{3}{4} \end{cases}$$

A nouveau il s'agit d'une chaîne de Markov classique sur deux états. De plus, cette chaîne de Markov est irréductible et apériodique. Ces deux matrices vérifient (Pur) et (Irr) donc la seule mesure invariante est celle de la chaîne à deux états. Donc même si on part d'un état $\hat{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$ on convergera vers la mesure invariante de la chaîne à deux états. Dans le cas de $\hat{x}_0 = (x, y)$ les transitions sont

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x}{\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2}}, \frac{\frac{1}{2}y}{\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2}} \right) \text{ avec probabilité } \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \\ \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}y}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2}}, \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2}} \right) \text{ avec probabilité } \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \end{cases}$$

Cette chaîne de Markov ne semble pas très compliquée mais traiter le problème de la mesure invariante en dehors des outils que nous avons développés est très délicat.

On voit ici que la distance en variation totale n'est pas adaptée à notre cadre. En effet, si on part d'une mesure absolument continue, elle sera toujours singulière par rapport à la

mesure invariante qui est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Donc en variation totale, la loi de la chaîne de Markov partant d'une mesure absolument continue est toujours à distance 1 de la mesure invariante. Il est important de noter que ce type de phénomène empêche d'utiliser les théories usuelles des chaînes de Markov comme celles développées dans [108].

Donnons un exemple où il n'y a pas unicité de la mesure invariante. Pour cela on considère

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Partant de e_1 ou e_2 on a les transitions

$$e_1 \mapsto \begin{cases} e_1 \text{ avec probabilité } \frac{1}{2} \\ e_2 \text{ avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$e_2 \mapsto \begin{cases} e_1 \text{ avec probabilité } \frac{1}{2} \\ e_2 \text{ avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

et à nouveau on a ici une chaîne de Markov dont la mesure invariante est la mesure uniforme sur $\{e_1, e_2\}$. Mais on peut remarquer que l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ est invariant par les deux matrices donc

$$\delta_{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)}$$

est également une mesure invariante. Ici la propriété de purification fait défaut car $V_i^* V_i = \frac{1}{2} Id$.

Un exemple moins trivial Pour des matrices quelconques, le tableau est moins évident. Par exemple si on choisit

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors l'évolution de (\hat{x}_n) ne reproduit aucune chaîne de Markov à espace d'états finis. Les hypothèses (Pur) et (Irr) sont faciles à vérifier, il y a donc une unique mesure invariante. Comme les matrices sont réelles, la mesure invariante est supportée par les vecteurs de norme 1 à coordonnées réelles mais on ne sait rien sur la propriété d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue par exemple. Le problème du support de la mesure et de ses propriétés est une question ouverte.

3.4 Mesure invariante des trajectoires quantiques continues

Ici nous allons nous intéresser au problème de la mesure invariante pour le cas des processus de Markov décrivant les trajectoires quantiques continues. Comme pour les modèles discrets, ils n'entrent pas dans le cadre habituel des techniques utilisées pour étudier

le comportement en temps long des processus de Markov continus. Dans de nombreuses situations même les modèles purement diffusifs ne sont pas elliptiques et les conditions de Hörmander ne s'appliquent même pas. La difficulté est accrue lorsque l'on rajoute des sauts. En dehors de cas particulier ou de situations avec des hypothèses ad-hoc [26] peu de résultats existaient dans le cadre continu. Nous allons ici présenter les résultats de [48] qui répondent à la question de la mesure invariante dans un cadre similaire au cadre discret c'est à dire avec une hypothèse d'unique état invariant pour l'évolution Lindbladienne et une condition de purification. La version continue des produits de matrices aléatoires s'exprime en termes d'équations différentielles stochastiques linéaires matricielles. En particulier, on utilise l'approche basée sur l'utilisation du calcul stochastique classique dans notre propos [23].

Les équations maitresses stochastiques que nous allons étudier ici sont

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t &= \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{t-})dt \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} (L_i\tilde{\rho}_{t-} + \tilde{\rho}_{t-}L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{t-}(L_i + L_i^*)]\tilde{\rho}_{t-}) d\tilde{W}_i(t) \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*}{\text{Tr}[C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*]} \right) (d\tilde{N}_j(t) - \text{Tr}[C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*]).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Comme pour le cas discret, pour des raisons de propriétés de purification on va s'intéresser au modèle décrivant les états purs. L'hypothèse de purification dans le contexte continu s'exprime de la manière suivante

Pur Tout projecteur orthogonal P , tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(L_i + L_i^*)P \propto P$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $PC_k^*C_kP \propto P$, est de rang 1.

Il a été montré dans [26] le théorème suivant.

Théorème 3.16 *On suppose que la condition (Pur) est satisfaite. Soit $(\tilde{\rho}_t)$ la solution de (3.32) alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr}(\tilde{\rho}_t^2) = 1.$$

La condition d'unique état invariant est relative à l'opérateur de Lindblad

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{i=0}^{\infty} \left(V_i\rho V_i^* - \frac{1}{2}\{V_i^*V_i, \rho\} \right),$$

où $\{V_i, i \in \mathbb{N}\} = \{L_i, i \in \mathbb{N}\} \cup \{C_i, i \in \mathbb{N}\}$. On l'exprime de la manière suivante :

\mathcal{L} -erg Il existe un unique état invariant ρ_{inv} tel que $\mathcal{L}(\rho_{inv}) = 0$.

Décrivons précisément l'espace de probabilité dans ce cas. Tout d'abord, pour donner un sens à l'équation (3.32), on considère des opérateurs $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(C_j)_{j \in \mathbb{N}}$ agissant sur \mathbb{C}^k tels que les sommes suivantes

$$\sum_i L_i^*L_i \quad \text{and} \quad \sum_j C_j^*C_j$$

sont fortement convergentes. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ où vivent des mouvements brownien indépendants $W_j, j \in \mathbb{N}$, et des processus de Poisson indépendants $N_k, k \in \mathbb{N}$ d'intensité $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$. Les processus de Poisson et les mouvements browniens sont également indépendants entre eux. On supposera également

$$\lambda = \sum_i \lambda_i < \infty.$$

Comme annoncé, l'équivalent continu du produit de matrices aléatoires est décrit en termes d'équations différentielles stochastiques. En particulier, on considère alors l'équation différentielle stochastique suivante définie pour $0 \leq t$ par

$$\begin{aligned} S_t &= I + \int_0^t \left(K + \frac{\lambda I}{2} \right) S_{u-}^s du + \int_0^t \sum_i L_i S_{u-}^s dW_i(u) \\ &\quad + \int_0^t \sum_j \left(\frac{C_j}{\sqrt{\lambda_j}} - I \right) S_{u-}^s dN_j(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

où

$$K = -iH - \frac{1}{2} \left(\sum_i L_i^* L_i + \sum_j C_j^* C_j \right). \quad (3.34)$$

Si $\tilde{\rho}_0$ ou le vecteur \hat{x}_0 désigne l'état initial, nous allons voir dans la suite que les processus $(\tilde{\rho}_t)$ ou (\hat{x}_t) définis par

$$\tilde{\rho}_t = \frac{S_t \tilde{\rho}_0 S_t^*}{\text{Tr} S_t \tilde{\rho}_0 S_t^*}, \quad \text{ou } \hat{x}_t = S_t \cdot \hat{x}_0,$$

pour tout $t \geq 0$ sont exactement les trajectoires quantiques dans le cas des matrices densités ou des états purs. Dans le cas des états purs on travaille à nouveau dans l'espace $P(\mathbb{C}^k)$. Pour montrer que les processus précédents sont les trajectoires quantiques qui ont été décrites avant, on va utiliser un changement de mesure de probabilité à la Girsanov. En particulier, pour cela nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemma 1 *Soit $\rho \in \mathcal{D}_k$. Pour tout $t \geq 0$, on définit le processus*

$$Z_t^\rho = \text{Tr}(S_t^* S_t \rho).$$

Ce processus stochastique (Z_t^ρ) est une martingale sous \mathbb{Q} .

Ainsi pour $\rho \in \mathcal{D}_k$, ce lemme permet de définir la mesure de probabilité suivante

$$\mathbb{P}_t^\rho(E) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_E Z_t^\rho],$$

pour tout $E \in \mathcal{F}_t$. Le fait que (Z_t^ρ) est une martingale sous \mathbb{Q} implique que (\mathbb{P}_t^ρ) définit une famille de probabilité consistante qui s'étend en une unique mesure de probabilité \mathbb{P}^ρ .

La proposition précise la loi des processus $(W_i(t))$ et $(N_i(t))$ sous la nouvelle loi \mathbb{P}^ρ .

Proposition 3.17 Soit $\rho \in \mathcal{D}_k$. Les processus stochastiques définis pour $t \geq 0$ par

$$W_j(t) - \int_0^t \frac{\text{Tr}(S_{s-}(L_j + L_j^*)S_{s-}\rho)}{\text{Tr}(S_{s-}^*S_{s-}\rho)} ds, \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.35)$$

sont des mouvements browniens sous \mathbb{P}^ρ .

Sous \mathbb{P}^ρ , les processus stochastiques $(N_j(t)), j \in \mathbb{N}$ sont des processus de Poisson d'intensité

$$t \rightarrow \left(\frac{\text{Tr}(S_{t-}C_j^*C_jS_{t-}\rho)}{\text{Tr}(S_{t-}^*S_{t-}\rho)} \right), \quad j \in \mathbb{N}$$

En particulier, les processus définis pour $t \geq 0$ par

$$N_j(t) - \int_0^t \left(\frac{\text{Tr}(S_{s-}C_j^*C_jS_{s-}\rho)}{\text{Tr}(S_{s-}^*S_{s-}\rho)} \right) ds, \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.36)$$

sont des martingales sous \mathbb{P}^ρ

Montrons comment on retrouve tout d'abord l'équation (3.32) pour les matrices densités. Soit $\rho \in \mathcal{D}_k$, on définit $\sigma_t = S_t\rho S_t^*$ pour tout $t \geq 0$. En utilisant le calcul d'Itô, on obtient pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} d\sigma_t &= \mathcal{L}(\sigma_{t-})dt + \sum_{i=0}^{\infty} (L_i\sigma_{t-} + \sigma_{t-}L_i^*) dW_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_j\sigma_{t-}C_j^*}{\lambda_j} - \sigma_{t-} \right) (dN_j(t) - \lambda_j dt). \end{aligned} \quad (3.37)$$

On utilise à nouveau le calcul d'Itô sur le processus $(\tilde{\rho}_t)$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$\tilde{\rho}_t = \frac{\sigma_t}{\text{Tr}(\sigma_t)}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t &= \mathcal{L}(\tilde{\rho}_{t-})dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (L_i\tilde{\rho}_{t-} + \tilde{\rho}_{t-}L_i^* - \text{Tr}[\tilde{\rho}_{t-}(L_i + L_i^*)\tilde{\rho}_{t-}]) (dW_i(t) - \text{Tr}((L_j + L_j^*)S_{t-}\tilde{\rho}_{t-})dt) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*}{\text{Tr}[C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*]} \right) (d\tilde{N}_j(t) - \text{Tr}[C_j\tilde{\rho}_{t-}C_j^*]), \end{aligned} \quad (3.38)$$

C'est donc le lemme qui nous permet de faire le lien avec l'expression (3.32).

Décrivons maintenant ce qui se passe pour l'évolution en termes d'états purs sur $P(\mathbb{C}^k)$. Comme dans le cas discret en vue de résoudre le problème de la mesure invariante, on

considère l'espace $\Omega \times P(\mathbb{C}^k)$. On considère la filtration $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}^k))$ et la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$. On définit une mesure de probabilité sur cet espace. Pour toute mesure de probabilité ν sur $P(\mathbb{C}^k)$, pour tout $E \in \mathcal{F}_t$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(P(\mathbb{C}^k))$ on pose

$$\mathbb{Q}_\nu(E \times A) = \int_{E \times A} \|S_t^*(\omega)S_t(\omega)x\|^2 d\nu(x)d\mathbb{Q}(\omega). \quad (3.39)$$

En remarquant que

$$\mathbb{Q}_\nu(S_t x_0 = 0) = 0,$$

on peut alors définir

$$\hat{x}_t = S_t \cdot x.$$

On montre alors que ce processus satisfait

$$\begin{aligned} d\hat{x}_t &= V(\hat{x}_t) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(L_i - \frac{1}{2}v_i(t-)I \right) \hat{x}_{t-} d\tilde{W}_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_j}{\sqrt{I_j(t-)}} - I \right) \hat{x}_t d\tilde{N}_j(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_{t-}) &= \left(-iH + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} L_i^* L_i + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^* C_j \right) \hat{x}_{t-} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t-) \left(L_i - \frac{1}{4}v_i(t-) \right) \hat{x}_{t-} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} I_j(t) \hat{x}_{t-}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$v_i(t-) = \langle \hat{x}_{t-}, (L_i + L_i^*) \hat{x}_{t-} \rangle, i \in \mathbb{N}, \quad (3.42)$$

$$I_j(t-) = \langle \hat{x}_{t-}, C_j^* C_j \hat{x}_{t-} \rangle = \|C_j \hat{x}_{t-}\|^2, j \in \mathbb{N} \quad (3.43)$$

qui est l'équation de Schrödinger stochastique décrite dans la Section 2.1.3. On considère P^t le semi-groupe de Markov associé à (\hat{x}_t) :

Parmi les propriétés satisfaites par \mathbb{Q}_ν on a comme dans le cas discret

$$\rho_\nu = \mathbb{E}_\nu[|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|]$$

définit un élément de \mathcal{D}_k et en ce qui concerne la première marginale

$$\mathbb{Q}_\nu(E \times P(\mathbb{C}^k)) = \mathbb{P}\rho_\nu(E),$$

pour tout $E \in \mathcal{F}$.

On considère à nouveau les variables aléatoires Z dont la définition ne dépend pas de $P(\mathbb{C}^k)$ i.e $Z(\omega, \hat{x}) = Z(\omega, \hat{y})$, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\hat{x}, \hat{y} \in P(\mathbb{C}^k)$. On note à nouveau \mathcal{O} l'ensemble de telles variables aléatoires. De même que dans le cas discret, sous l'hypothèse, la loi des ces variables aléatoires est la même quelque soit la mesure invariante comme

mesure initiale. On adopte alors la même démarche que celle du cas discret et on montre que le processus (\hat{x}_t) se rapproche d'un \mathcal{O} processus cela grace à une martingale adéquate. Ici le processus qui joue le rôle de (M_n) est (M_t) défini pour tout $t \geq 0$ par

$$M_t = \frac{S_t^* S_t}{\text{Tr}(S_t^* S_t)}. \quad (3.44)$$

Comme dans le cas discret on a que (M_t) converge vers un projecteur de rang 1 sous l'hypothèse Pur. C'est à partir de ce processus que l'on construit le \mathcal{O} processus comme dans le cas discret. Ceci permet de montrer l'unicité de la mesure invariante. On obtient ensuite la convergence exponentielle. Finalement le théorème suivant résume le problème de la mesure invariante dans le cas continu.

Théorème 3.18 *On suppose que les hypothèses (Pur) et (\mathcal{L} -erg) sont satisfaites alors le processus de Markov (\hat{x}_t) admet une unique mesure invariante ν_{inv} . De plus on a la convergence exponentielle suivante : il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tel*

$$W_1(\nu P^t, \nu_{inv}) \leq C e^{-\lambda t},$$

pour tout $t \geq 0$ et toute mesure ν sur $P(\mathbb{C}^k)$.

Remarquons qu'ici il n'y a pas de paramètre m qui rentre en compte car la notion de période n'a pas de pertinence en temps continu.

De nombreux exemples sont présentés dans [48] et nous reportons à l'article pour les détails.

Chapitre 4

Perspectives

Ce chapitre est l'occasion de présenter quelques pistes de recherche que je souhaite aborder dans le futur.

Grandes déviations : Avant nos résultats sur la mesure invariante des trajectoires quantiques, un des théorèmes les plus importants était le théorème ergodique de Hans Maassen et Burkhard Kümmerer qui donnait des résultats sur la convergence de la moyenne de Césaro des trajectoires quantiques. En particulier, sous l'hypothèse (Irr) de la section 3.3, le Théorème ergodique de Hans Maassen et Burkhard Kümmerer donnait le résultat de convergence suivant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\rho}_n = \rho_{inv}$$

mais il n'y avait aucun résultat pour d'autres limites du type $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\rho_n)$ avec des fonctions différentes de l'identité. Il est important de noter que ce résultat permet quand même d'établir des résultats de théorème centrale limite et de grandes déviations pour les résultats de mesures [11, 73].

A l'aide du résultat sur la mesure invariante, on peut obtenir des résultats de loi forte des grands nombres pour la trajectoire quantique c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{\rho}_n) = \int f(|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|) d\nu_{inv}(\hat{x}),$$

pour toute fonction continue. On est également en mesure de donner un théorème centrale limite. En revanche la question des grandes déviations est plus complexe. Une des pistes serait d'essayer d'appliquer des théorèmes types Gartner Ellis mais la propriété d'analyticité nécessaire pour appliquer ce théorème est loin d'être évidentes. Notons que déjà dans le cas des produits de matrices aléatoires i.i.d seuls des principes de grandes déviations locales ont  ete d emontr es.

Estimation de paramètres La notion d'estimation de paramètres s'inscrit dans la problématique suivante. Imaginons que nos opérateurs de Kraus V_i dépendent d'un paramètre

θ , est-il possible d'estimer ce paramètre juste en regardant les résultats de mesures ? La réponse est loin d'être évidente. Avec Fabrice Gamboa et Tristan Benoist nous avons résolu ce problème dans le cas des expériences de non démolition [50]. Les outils de base sont ceux de la statistique asymptotique. En particulier, on étudie le maximum de vraisemblance lié à la distribution des résultats de mesures et on montre les propriétés usuelles de normalités asymptotiques. On montre alors que notre estimateur est consistant et qu'il sature la borne de Cramer Rao. Dans le cas des mesures non démolition le fait que les opérateurs soient diagonaux permet à l'aide de changement de mesure à se ramener à des cas où les résultats de mesures sont i.i.d ce qui simplifie grandement l'étude. En effet, dans le cas non démolition les résultats de mesures sont en réalité des mélanges de lois multinomiales et le conditionnement permet de sélectionner une de ces lois.

Dans le cas général, le problème est nettement plus ambitieux et l'un de nos angles d'attaque est d'utiliser la théorie des chaînes de Markov cachées. En particulier, notre premier objectif est de traiter ce problème à la lueur de nos résultats sur la mesure invariante. Ce projet est au stade exploratoire. Montrer que dans ce cadre, l'estimateur est consistant est déjà un problème non trivial.

Epines quantiques Récemment un phénomène d'épines quantiques ou "spike" en anglais a été mis en évidence par Denis Bernard, Michel Bauer et Antoine Tilloy [37, 36, 38]. Il s'agit de modèles de diffusion décrivant des trajectoires quantiques en présence de bruit fort. A l'instar des modèles de diffusion à bruits faibles, la théorie des bruits forts est très peu étudiée. Les travaux de Denis Bernard, Michel Bauer et Antoine Tilloy ont mis en évidence des phénomènes assez particuliers lorsque un paramètre (devant la diffusion) devient très grand. En effet, ils montrent que les diffusions se transforment en processus de saut et entre les sauts des phénomènes de piques apparaissent. Zoomer sur ces piques (c'est à dire en élargissant le temps à l'aide d'un changement de temps) permet de les expliquer à l'aide de mouvement brownien réfléchi. Jusqu'ici seuls des cas particuliers ont été étudiés et cela ouvre un champ de perspectives intéressantes d'un point de vue théorique : théorie du bruit fort, convergence de processus continu vers des processus de saut... Les techniques usuelles de convergence en loi ne semblent pas adaptées dans ce cadre, à cause de problèmes de tension des processus stochastiques impliqués. Des pistes de recherche se dessinent autour de topologie dite de Zheng Meyer ou encore reliées à des problèmes de métastabilité.

Bibliographie

- [1] R. Alicki and K. Lendi. *Quantum dynamical semigroups and applications*, volume 717 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, second edition, 2007.
- [2] H. Amini, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Stabilization of a delayed quantum system : the photon box case-study. *IEEE Trans. Automat. Control*, 57(8) :1918–1930, 2012.
- [3] H. Amini, C. Pellegrini, and P. Rouchon. Stability of continuous-time quantum filters with measurement imperfections. *Russ. J. Math. Phys.*, 21(3) :297–315, 2014.
- [4] H. Amini, R. A. Somaraju, I. Dotsenko, C. Sayrin, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Feedback stabilization of discrete-time quantum systems subject to non-demolition measurements with imperfections and delays. *Automatica J. IFAC*, 49(9) :2683–2692, 2013.
- [5] S. Attal. *Lectures on Quantum Noise Theory, vol I*. To appear. <http://math.univ-lyon1.fr/attal/chapters.html>.
- [6] S. Attal. Approximating the Fock space with the toy Fock space. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 477–491. Springer, Berlin, 2003.
- [7] S. Attal and I. Bardet. Classical and quantum part of the environment for quantum langevin equations. 10 2016.
- [8] S. Attal, J. Deschamps, and C. Pellegrini. Complex obtuse random walks and their continuous-time limits. *Probab. Theory Related Fields*, 165(1-2) :65–116, 2016.
- [9] S. Attal, J. Deschamps, and C. Pellegrini. Complex obtuse random walks and their continuous-time limits. 2018.
- [10] S. Attal and M. Émery. équations de structure pour des martingales vectorielles. In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, volume 1583 of *Lecture Notes in Math.*, pages 256–278. Springer, Berlin, 1994.
- [11] S. Attal, N. Guillotin-Plantard, and C. Sabot. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. *Ann. Henri Poincaré*, 16(1) :15–43, 2015.
- [12] S. Attal and A. Joye. The Langevin equation for a quantum heat bath. *J. Funct. Anal.*, 247(2) :253–288, 2007.
- [13] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. I*, volume 1880 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. The Hamiltonian

- approach, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.
- [14] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. II*, volume 1881 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. The Markovian approach, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.
- [15] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.
- [16] S. Attal and Y. Pautrat. From $(n + 1)$ -level atom chains to n -dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.
- [17] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.
- [18] S. Attal and C. Pellegrini. Stochastic master equations in thermal environment. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 17(4) :389–408, 2010.
- [19] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, and I. Sinayskiy. Open quantum random walks. *J. Stat. Phys.*, 147(4) :832–852, 2012.
- [20] S. Attal, F. Petruccione, and I. Sinayskiy. Open quantum walks on graphs. *Phys. Lett. A*, 376(18) :1545–1548, 2012.
- [21] M. Ballesteros, M. Fraas, J. Fröhlich, and B. Schubnel. Indirect acquisition of information in quantum mechanics. *J. Stat. Phys.*, 162(4) :924–958, 2016.
- [22] A. Barchielli, P. Di Tella, C. Pellegrini, and F. Petruccione. Stochastic Schrödinger equations and memory. In *Quantum probability and related topics*, volume 27 of *QP–PQ : Quantum Probab. White Noise Anal.*, pages 52–67. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2011.
- [23] A. Barchielli and M. Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time*, volume 782 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Heidelberg, 2009. The diffusive case.
- [24] A. Barchielli and A. S. Holevo. Constructing quantum measurement processes via classical stochastic calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 58(2) :293–317, 1995.
- [25] A. Barchielli and A. M. Paganoni. Stochastic differential equations for trace-class operators and quantum continual measurements. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002)*, volume 227 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 53–67. Dekker, New York, 2002.
- [26] A. Barchielli and A. M. Paganoni. On the asymptotic behaviour of some stochastic differential equations for quantum states. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(2) :223–243, 2003.
- [27] A. Barchielli, A. M. Paganoni, and F. Zucca. On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability. *Stochastic Process. Appl.*, 73(1) :69–86, 1998.

- [28] A. Barchielli and C. Pellegrini. Jump-diffusion unravelling of a non-Markovian generalized Lindblad master equation. *J. Math. Phys.*, 51(11) :112104, 18, 2010.
- [29] A. Barchielli, C. Pellegrini, and F. Petruccione. Stochastic schrödinger equations with coloured noise. *EPL (Europhysics Letters)*, 91(2) :24001, 2010.
- [30] I. Bardet. Classical and quantum parts of the quantum dynamics : the discrete-time case. *Ann. Henri Poincaré*, 18(3) :955–981, 2017.
- [31] I. Bardet, D. Bernard, and Y. Pautrat. Passage times, exit times and Dirichlet problems for open quantum walks. *J. Stat. Phys.*, 167(2) :173–204, 2017.
- [32] M. Bauer, T. Benoist, and D. Bernard. Repeated quantum non-demolition measurements : convergence and continuous time limit. *Ann. Henri Poincaré*, 14(4) :639–679, 2013.
- [33] M. Bauer and D. Bernard. Convergence of repeated quantum nondemolition measurements and wave-function collapse. 84, 10 2011.
- [34] M. Bauer, D. Bernard, and T. Benoist. Iterated stochastic measurements. *J. Phys. A*, 45(49) :494020, 17, 2012.
- [35] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. The open quantum Brownian motions. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, (9) :p09001, 48, 2014.
- [36] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. Computing the rates of measurement-induced quantum jumps. *J. Phys. A*, 48(25) :25FT02, 15, 2015.
- [37] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. Zooming in on quantum trajectories. *J. Phys. A*, 49(10) :10LT01, 9, 2016.
- [38] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. Zooming in on quantum trajectories. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 49(10) :10LT01, 2016.
- [39] V. Belavkin. Quantum Itô algebras : axioms, representations, decompositions. In *Quantum probability communications, Vol. XI (Grenoble, 1998)*, QP-PQ, XI, pages 39–54. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.
- [40] V. P. Belavkin. Quantum diffusion, measurement and filtering. I. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 38(4) :742–757, 1993.
- [41] V. P. Belavkin. Quantum diffusion, measurement and filtering. II. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 39(3) :469–487, 1994.
- [42] V. P. Belavkin. Measurement, filtering and control in quantum open dynamical systems. *Rep. Math. Phys.*, 43(3) :405–425, 1999.
- [43] V. P. Belavkin. Quantum demolition filtering and optimal control of unstable systems. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 370(1979) :5396–5407, 2012.
- [44] V. P. Belavkin. Quantum Lévy-Itô algebras and non-commutative stochastic analysis. *Stochastics*, 84(2-3) :393–405, 2012.
- [45] V. P. Belavkin and S. Edwards. Quantum filtering and optimal control. In *Quantum stochasticity and information*, pages 143–205. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

- [46] V. P. Belavkin, J. Heo, and U. C. Ji. Quantum white noise analysis and quantum stochastic equations. In *Quantum probability and related topics*, volume 27 of *QP-PQ : Quantum Probab. White Noise Anal.*, pages 90–124. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2011.
- [47] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. An introduction to quantum entanglement.
- [48] T. Benoist, M. Fraas, Y. Pautrat, and C. Pellegrini. Invariant measure for continuous time quantum trajectories. preprint, 2017.
- [49] T. Benoist, M. Fraas, Y. Pautrat, and C. Pellegrini. Invariant measure for quantum trajectories. arXiv :1703.10773, 2017.
- [50] T. Benoist, F. Gamboa, and P. Clément. Quantum non demolition measurements : parameter estimation for mixtures of multinomials. *to appear in Electron. J. Stat.*, 45, 2018.
- [51] T. Benoist and C. Pellegrini. Large time behavior and convergence rate for quantum filters under standard non demolition conditions. *Comm. Math. Phys.*, 331(2) :703–723, 2014.
- [52] T. Benoist, C. Pellegrini, and F. Ticozzi. Exponential stability of subspaces for quantum stochastic master equations. *Ann. Henri Poincaré*, 18(6) :2045–2074, 2017.
- [53] D. Bernard. *Statistical Aspects of Quantum State Monitoring for (and by) Amateurs*. series of lectures presented at the Artic School on Open Quantum Systems, Finland, Dec. 2105.
- [54] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, volume 8 of *Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [55] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, volume 8 of *Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [56] L. Bouten. Applications of quantum stochastic processes in quantum optics. In *Quantum potential theory*, volume 1954 of *Lecture Notes in Math.*, pages 277–307. Springer, Berlin, 2008.
- [57] L. Bouten, M. a. a. Guță, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.
- [58] L. Bouten and R. Van Handel. Discrete approximation of quantum stochastic models. *J. Math. Phys.*, 49(10) :102109, 19, 2008.
- [59] L. Bouten, R. Van Handel, and M. R. James. An introduction to quantum filtering. *SIAM J. Control Optim.*, 46(6) :2199–2241, 2007.
- [60] L. Bouten, R. van Handel, and M. R. James. A discrete invitation to quantum filtering and feedback control. *SIAM Rev.*, 51(2) :239–316, 2009.

- [61] L. Bouten, R. van Handel, and M. R. James. A discrete invitation to quantum filtering and feedback control. *SIAM Rev.*, 51(2) :239–316, 2009.
- [62] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. C^* - and W^* -algebras, symmetry groups, decomposition of states.
- [63] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. C^* - and W^* -algebras, symmetry groups, decomposition of states.
- [64] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.
- [65] P. Brémaud. *Point processes and queues.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics.
- [66] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems.* Oxford University Press, New York, 2002.
- [67] H. Bringuier. Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks. *Ann. Henri Poincaré*, 18(10) :3167–3192, 2017.
- [68] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Random repeated interaction quantum systems. *Comm. Math. Phys.*, 284(2) :553–581, 2008.
- [69] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Infinite products of random matrices and repeated interaction dynamics. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(2) :442–464, 2010.
- [70] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Repeated and continuous interactions in open quantum systems. *Ann. Henri Poincaré*, 10(7) :1251–1284, 2010.
- [71] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Repeated interactions in open quantum systems. *J. Math. Phys.*, 55(7) :075204, 67, 2014.
- [72] L. Bruneau and C.-A. Pillet. Thermal relaxation of a QED cavity. *J. Stat. Phys.*, 134(5-6) :1071–1095, 2009.
- [73] R. Carbone and Y. Pautrat. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *J. Stat. Phys.*, 160(5) :1125–1153, 2015.
- [74] R. Carbone and Y. Pautrat. Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties. *Ann. Henri Poincaré*, 17(1) :99–135, 2016.
- [75] H. J. Carmichael. *Statistical methods in quantum optics. 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Master equations and Fokker-Planck equations.
- [76] H. J. Carmichael. *Statistical methods in quantum optics. 2.* Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Berlin, 2008. Non-classical fields.
- [77] M. D. Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and Appl.*, 10 :285–290, 1975.

- [78] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1976.
- [79] J. Deschamps, I. Nechita, and C. Pellegrini. On some classes of bipartite unitary operators. *J. Phys. A*, 49(33) :335301, 29, 2016.
- [80] L. Diósi, T. Konrad, A. Scherer, and J. Audretsch. Coupled Ito equations of continuous quantum state measurement and estimation. *J. Phys. A*, 39(40) :L575–L581, 2006.
- [81] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
- [82] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Stat.*, 31(2) :457–469, 1960.
- [83] C. W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum noise*. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004. A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.
- [84] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature*, 446(7133) :297–300, March 2007.
- [85] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of N -level systems. *J. Mathematical Phys.*, 17(5) :821–825, 1976.
- [86] J. E. Gough, M. R. James, and H. I. Nurdin. Quantum filtering for systems driven by fields in single photon states and superposition of coherent states using non-Markovian embeddings. *Quantum Inf. Process.*, 12(3) :1469–1499, 2013.
- [87] J. E. Gough and C. Köstler. Quantum filtering in coherent states. *Commun. Stoch. Anal.*, 4(4) :505–521, 2010.
- [88] Y. Guivarc’h and É. Le Page. Spectral gap properties for linear random walks and Pareto’s asymptotics for affine stochastic recursions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 52(2) :503–574, 05 2016.
- [89] Y. Guivarc’h and A. Raugi. Products of random matrices : convergence theorems. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 31–54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [90] E. P. Hanson, A. Joye, Y. Pautrat, and R. Raquépas. Landauer’s principle for trajectories of repeated interaction systems. arXiv :1705.08281, 2017.
- [91] E. P. Hanson, A. Joye, Y. Pautrat, and R. Raquépas. Landauer’s principle in repeated interaction systems. *Comm. Math. Phys.*, 349(1) :285–327, 2017.
- [92] S. Haroche. Nobel lecture : Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :1083–1102, Jul 2013.
- [93] S. Haroche and J.-M. Raimond. *Exploring the quantum*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2006. Atoms, cavities and photons.

- [94] J. M. Horowitz and J. M. R. Parrondo. Entropy production along nonequilibrium quantum jump trajectories. *New Journal of Physics*, 15(8) :085028, 2013.
- [95] B. Ivan, B. Hugo, P. Yan, and C. Pellegrini. Dirichlet problem and potential theory for continuous time open quantum walks. *preprint*.
- [96] B. Ivan, B. Hugo, P. Yan, and C. Pellegrini. Recurrence and transience of continuous time open quantum walks. *preprint*.
- [97] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [98] N. Konno. A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk. *J. Math. Soc. Japan*, 57(4) :1179–1195, 2005.
- [99] K. Kraus. Operations and effects in the Hilbert space formulation of quantum theory. pages 206–229. *Lecture Notes in Phys.*, Vol. 29, 1974.
- [100] K. Kraus. *States, effects, and operations*, volume 190 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Fundamental notions of quantum theory, Lecture notes edited by A. Böhm, J. D. Dollard and W. H. Wootters.
- [101] B. Kümmerer and H. Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *J. Phys. A*, 37(49) :11889–11896, 2004.
- [102] C. F. Lardizabal and R. R. Souza. On a class of quantum channels, open random walks and recurrence. *J. Stat. Phys.*, 159(4) :772–796, 2015.
- [103] C. F. Lardizabal and R. R. Souza. Open quantum random walks : ergodicity, hitting times, gambler’s ruin and potential theory. *J. Stat. Phys.*, 164(5) :1122–1156, 2016.
- [104] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2) :119–130, 1976.
- [105] S. Lorenzo, F. Ciccarello, G. M. Palma, and B. Vacchini. Quantum Non-Markovian Piecewise Dynamics from Collision Models. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 24(4) :1740011, 16, 2017.
- [106] H. Maassen and B. Kümmerer. Purification of quantum trajectories. In *Dynamics & stochasticity*, volume 48 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 252–261. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2006.
- [107] P.-A. Meyer. *Quantum probability for probabilists*, volume 1538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [108] S. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2009. With a prologue by Peter W. Glynn.
- [109] K. Molmer, Y. Castin, and J. Dalibard. Monte carlo wave-function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10(3) :524–538, Mar 1993.
- [110] I. Nechita and C. Pellegrini. Quantum trajectories in random environment : the statistical model for a heat bath. *Confluentes Math.*, 1(2) :249–289, 2009.

- [111] I. Nechita and C. Pellegrini. Quantum trajectories in random environment : the statistical model for a heat bath. *Confluentes Math.*, 1(2) :249–289, 2009.
- [112] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [113] J. R. Norris. *Markov chains*, volume 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.
- [114] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1992. [2012 reprint of the 1992 original] [MR1164866].
- [115] Y. Pautrat. Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock spaces. In *In memoriam Paul-André Meyer : Séminaire de Probabilités XXXIX*, volume 1874 of *Lecture Notes in Math.*, pages 47–60. Springer, Berlin, 2006.
- [116] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation : the diffusive case. *Ann. Probab.*, 36(6) :2332–2353, 2008.
- [117] C. Pellegrini. Poisson and diffusion approximation of stochastic master equations with control. *Ann. Henri Poincaré*, 10(5) :995–1025, 2009.
- [118] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of the jump-type stochastic Schrödinger equation for two-level systems. *Stochastic Process. Appl.*, 120(9) :1722–1747, 2010.
- [119] C. Pellegrini. Markov chains approximation of jump-diffusion stochastic master equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(4) :924–948, 2010.
- [120] C. Pellegrini. Continuous time open quantum random walks and non-Markovian Lindblad master equations. *J. Stat. Phys.*, 154(3) :838–865, 2014.
- [121] C. Pellegrini and F. Petruccione. Diffusion approximation of stochastic master equations with jumps. *J. Math. Phys.*, 50(12) :122101, 14, 2009.
- [122] C. Pellegrini and F. Petruccione. Non-Markovian quantum repeated interactions and measurements. *J. Phys. A*, 42(42) :425304, 21, 2009.
- [123] P. Rouchon. Quantum systems and control. *ARIMA Rev. Afr. Rech. Inform. Math. Appl.*, 9 :325–357, 2008.
- [124] P. Rouchon. Fidelity is a sub-martingale for discrete-time quantum filters. *IEEE Trans. Automat. Control*, 56(11) :2743–2747, 2011.
- [125] R. C. Santis and A. Barchielli. Quantum stochastic differential equations and continuous measurements : unbounded coefficients. *Rep. Math. Phys.*, 67(2) :229–254, 2011.
- [126] I. Sinayskiy and F. Petruccione. Efficiency of open quantum walk implementation of dissipative quantum computing algorithms. *Quantum Information Processing*, 11(5) :1301–1309, Oct 2012.

- [127] P. Six, P. Campagne-Ibarcq, L. Bretheau, B. Huard, and P. Rouchon. Parameter estimation from measurements along quantum trajectories. pages 1–8, 2015.
- [128] F. Ticozzi, K. Nishio, and C. Altafini. Stabilization of stochastic quantum dynamics via open- and closed-loop control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 58(1) :74–85, 2013.
- [129] F. Ticozzi and L. Viola. Quantum Markovian subsystems : invariance, attractivity, and control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(9) :2048–2063, 2008.
- [130] F. Ticozzi and L. Viola. Analysis and synthesis of attractive quantum Markovian dynamics. *Automatica J. IFAC*, 45(9) :2002–2009, 2009.
- [131] R. van Handel. The stability of quantum Markov filters. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 12(1) :153–172, 2009.
- [132] M. van Horsen and M. a. a. Guță. Sanov and central limit theorems for output statistics of quantum Markov chains. *J. Math. Phys.*, 56(2) :022109, 14, 2015.
- [133] H. M. Wiseman and G. J. Milburn. *Quantum measurement and control*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [134] M. Wolf. *Quantum Channel and Operations, Guided Tour*. Lectures notes.
- [135] M. Ziman, P. Stelmachovic, and V. Buzek. Description of quantum dynamics of open systems based on collision-like models. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 12(1) :81–91, 2005.

A) Cas général des mesures quantiques répétées

Le modèle des interactions répétées est décrit mathématiquement de la manière suivante. L'environnement $(\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_k + \dots)$ où chaque \mathcal{E}_i est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_i \simeq \mathcal{H} = \mathbb{C}^{k+1}$ est décrit par $\mathcal{H}_E = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ et le système couplé $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$.

Chaque sous système est dans un même état de référence β . On note ρ_0 l'état initial de \mathcal{H}_S . Décrivons la première interaction entre \mathcal{H}_S et \mathcal{H}_1 . Le système couplé est donc décrit par $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_1$. L'interaction est donnée par un unitaire

$$U = \exp -i\tau H_{tot}$$

où

$$H_{tot} = H_S \otimes I + I \otimes H_R + H_I$$

où H_S et H_R sont les hamiltoniens décrivant l'évolution libre de \mathcal{H}_S et de \mathcal{H}_1 et H_I est l'hamiltonien d'interaction. Le paramètre τ représente la durée de l'interaction. Après interaction, l'état décrivant $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_1$ est donc

$$\mu = U(\rho \otimes \beta)U^*$$

Comme β est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\{|e_i\rangle, i = 0, \dots, k\}$ où

$$\beta = \sum_i \beta_i |e_i\rangle\langle e_i|.$$

On écrit

$$U = \sum_{ij} U_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|$$

et on considère une observable diagonale

$$A = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|.$$

La probabilité d'observer i est donnée par

$$\text{Tr}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \mu)$$

et si on a mesuré i l'état devient

$$\mu_1(i) = \frac{I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \mu I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|}{\text{Tr}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \mu I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|)}$$

Pour récupérer l'état sur \mathcal{H}_S on utilise la trace partielle $\text{Tr}_{\mathcal{H}_1}$ sur \mathcal{H}_1 , rappelons que pour un opérateur $B = \sum_{ij} B_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|$, la trace partielle est donnée par $\text{Tr}_{\mathcal{H}_1}(B) = \sum_i B_{ii}$ ¹.

1. L'opération trace partielle ne dépend du choix d'une base contrairement à ce que pourrait faire penser les notations que l'on a choisi.

Après calcul, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \mu I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) &= \sum_k \beta_k \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| (U\rho \otimes |e_k\rangle\langle e_k| U^*) I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) \\ &= \sum_k \beta_k U_{ik} \rho U_{ik}^*\end{aligned}\quad (1)$$

et

$$\rho_1(i) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1}(\mu_1(i)) = \frac{\sum_k \beta_k U_{ik} \rho U_{ik}^*}{\mathrm{Tr}(\sum_k \beta_k U_{ik} \rho U_{ik}^*)}$$

Remarque Si un des $\beta_k = 1$ alors les autres sont nuls et on retrouve le cas présenté dans la section 2.1.2. En effet

$$\rho_1(i) = \frac{U_{ik} \rho U_{ik}^*}{\mathrm{Tr}(U_{ik} \rho U_{ik}^*)}$$

Sinon on est dans la situation où on a une application complètement positive

$$\phi_k(\cdot) = \sum_k \lambda_k U_{ik} \cdot U_{ik}^*.$$

Dans le cas où l'observable $A = \sum_i \lambda_i |f_j\rangle\langle f_j|$ pour f_j une autre base orthonormé, on considère l'unitaire V qui satisfait $f_j = V e_j$ on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(I \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \mu I \otimes |f_i\rangle\langle f_i|) &= \sum_k \lambda_k \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| (V \otimes I U \rho \otimes |e_k\rangle\langle e_k| U^* V^* \otimes I) \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) \\ &= \sum_k \lambda_k W_{ik} \rho W_{ik}^*,\end{aligned}\quad (3)$$

où $W = V \otimes I U = \sum_{ij} W_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|$. En particulier, $W_{ij} = \sum_p v_{ip} U_{pj}$ et on retrouve la remarque sur la flexibilité d'écriture du canal.

Pour finir on décrit ce qu'il se passe lorsque l'observable a un spectre dégénéré. On garde le cas d'une observable diagonale $A = \sum_{i=0}^{k'} P_i$. Considérons une sortie possible i avec le projecteur associé $P_i = \sum_{i=l}^p |e_i\rangle\langle e_i|$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(I \otimes P_i | \mu I \otimes P_i) &= \sum_{i=l}^p \sum_k \lambda_k \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(I \otimes |e_i\rangle\langle e_i| U \rho \otimes |e_k\rangle\langle e_k| U^* V^* \otimes I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) \\ &= \sum_{i=l}^p \sum_k \lambda_k W_{ik} \rho W_{ik}^*,\end{aligned}\quad (4)$$

qui rentre dans le cadre des applications complètement positive. Pour une observable diagonale dans une base différente on se réfère au cas précédent.

Finissons cet appendice par quelques remarques sur le cas des équations avec température. Rappelons qu'un état de Gibbs à température T prend la forme

$$\gamma = \frac{e^{-(\alpha/T)H}}{\mathrm{Tr}(e^{-(\alpha/T)H})},$$

avec H opérateur auto-ajoint et $\alpha > 0$. Ainsi il existe une base où γ peut s'écrire sous la forme $\sum_i \beta'_i |e_i\rangle\langle e_i|$ où $\{e_i\}$ est la base qui diagonalise H . Ainsi dans la description de la trajectoire quantique, dans le cas d'une observable diagonale dans la même base que H , apparaissent les applications complètement positive $\phi_k(\cdot) = \sum_k \lambda_k U_{ik} \cdot U_{ik}^*$. Intéressons nous maintenant aux limites continues possibles. Pour cela on utilise ici les conditions asymptotiques suivantes

$$U_{ii} = I + hL_{ii} + o(h) \text{ et } U_{ij} = \sqrt{h}L_{ij} + o(h). \quad (5)$$

Le choix de ces conditions asymptotiques a été justifié proprement dans [17]. On voit alors que asymptotiquement les applications ϕ_k prennent la forme

$$\phi_k(\cdot) = I + h\mathcal{L}_k(\cdot) + o(h)$$

On montre alors dans ce cas qu'il n'y a plus de bruits à la limite. On obtient comme limite continue une équation de type Lindblad

$$d\rho_t = \sum_k \mathcal{L}_k(\rho_t) dt.$$

Dans le cas d'une observable non diagonale on peut se rendre compte que dans l'expression $\sum_k \lambda_k W_{ik} \rho W_{ik}^*$ avec $W_{ij} = \sum_p v_{ip} U_{pj}$ il y a nécessairement un opérateur W_{ik} qui fait apparaître un opérateur U_{ii} (à i fixé, les v_{ij} ne peuvent pas être tous nuls car V est inversible). En conséquence, le premier terme dans le développement limité de chaque ϕ_k est proportionnel à l'identité. Cela implique que le premier terme du développement limité de chaque probabilité d'apparition est une constante. En particulier, cela implique qu'il ne peut pas y avoir de comportement de type saut à la limite. On va voir que seuls des comportements diffusifs persistent. Comme l'opérateur V n'est pas égale à l'identité il y a également nécessairement un terme W_{ik} qui mêle un opérateur U_{ii} avec un opérateur U_{ij} pour $i \neq j$. Une étude asymptotique montre alors que le second terme dans le développement limité sera en \sqrt{h} ce qui est la signature d'un comportement diffusif à la limite.

En particulier, pour ce type de modèle de bain de chaleur il n'y a pas de comportements de type saut et seulement des comportements diffusifs ou déterministes.

Un autre modèle de bain de chaleur consiste à considérer que l'état thermique γ n'est pas une superposition des états $|e_i\rangle\langle e_i|, i = 1, \dots, k$ mais un mélange statistique c'est à dire que γ est un état aléatoire qui prend les valeurs $|e_i\rangle\langle e_i|$ avec probabilité β_i^2 . C'est exactement le modèle aléatoire décrit par une mesure directe sur l'état $\gamma = \sum \beta_i |e_i\rangle\langle e_i|$. On peut donc imaginer le processus de la manière suivante ; on effectue une mesure avant et après interaction. Si on a mesuré i au début et j après interaction l'état résultant du principe de mesure est

$$\rho_1(i, j) = \frac{U_{ji} \rho U_{ji}^*}{\text{Tr}(U_{ji} \rho U_{ji}^*)}$$

Ceci arrive avec probabilité $\beta_i^2 \text{Tr}(U_{ji} \rho U_{ji}^*)$. On remplace U_{ij} par W_{ij} si l'observable mesurée après interaction n'est pas diagonale. Si on effectue une étude asymptotique de ces quantités avec les conditions (5), on peut voir alors que tous les types de comportement sont

possibles (le cas déterministe n'étant plus possible dans ces modèles) et donc on retrouve des équations qui mélangent (ou non) des processus de sauts et de diffusions. L'ensemble des détails des calculs pour ce type de modèle a été présenté dans [111].