



**HAL**  
open science

# Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante.

Thomas Huguet

## ► To cite this version:

Thomas Huguet. Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Insa Lyon, 2018. Français. NNT: . tel-01957377v1

**HAL Id: tel-01957377**

**<https://hal.science/tel-01957377v1>**

Submitted on 17 Dec 2018 (v1), last revised 10 May 2019 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2018LYSEI113

**Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon**

*Opérée au sein de*  
**INSA Lyon**

*Ecole Doctorale N°ED160*  
**Électronique, Électrotechnique et Automatique**

*Spécialité du doctorat*  
**Génie Électrique**

*Soutenue publiquement le 6 décembre 2018 par*  
**Thomas Huguet**

---

**Vers une meilleure exploitation des dispositifs  
de récupération d'énergie vibratoire bistables**

Analyse et utilisation de comportements  
originaux pour améliorer la bande passante

---

Devant le jury composé de

Manuel Collet	DR	École Centrale de Lyon	CNRS 09	Président
Élie Lefeuvre	PU	Université Paris Sud	CNU 63	Rapporteur
Morvan Ouisse	PU	ENSMM Besançon	CNU 60	Rapporteur
Claire Jean-Mistral	MCF	INSA Lyon	CNU 60	Examinatrice
Guilhem Michon	PU	ISAE Supaéro	CNU 60	Examinateur
Guylaine Poulin-Vittrant	CR	Université de Tours	CNRS 08	Examinatrice
Mickaël Lallart	MCF	INSA Lyon	CNU 63	Directeur de thèse
Adrien Badel	PU	Université Savoie-Mont-Blanc	CNU 63	Co-directeur de thèse
Olivier Druet	DR	Université Lyon 1	CNRS 41	Invité



**Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a> INSA : R. GOURDON	<b>M. Stéphane DANIELE</b> Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 <a href="mailto:gerard.scorletti@ec-lyon.fr">gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Philippe NORMAND</b> UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:philippe.normand@univ-lyon1.fr">philippe.normand@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 Avenue Jean CAPELLE INSA de Lyon 69 621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 <a href="mailto:emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Luca ZAMBONI</b> Bât. Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.26.23.45.52 <a href="mailto:zamboni@maths.univ-lyon1.fr">zamboni@maths.univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIÈRE</b> INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 <a href="mailto:jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://ed483.univ-lyon2.fr">http://ed483.univ-lyon2.fr</a> Sec. : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>M. Christian MONTES</b> Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:christian.montes@univ-lyon2.fr">christian.montes@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

J'ai le plaisir d'adresser ici quelques mots à toutes les personnes à qui je dois un grand merci pour leur aide, leur soutien ou leur amitié sur lesquels j'ai pu m'appuyer durant ces trois années de thèse. Un grand merci, avant tout, à mes tuteurs Mickaël Lallart et Adrien Badel pour m'avoir accueilli dans ce projet dans lequel je me suis scientifiquement épanoui.

Un grand merci à toi Mickaël pour ton soutien scientifique précieux. Même si nos différents caractères ont parfois fait des étincelles, je tiens à te dire que la qualité de tes remarques et la rigueur de ton travail m'ont beaucoup apportés durant ces trois années. J'ai particulièrement profité de ton élan perpétuel à toujours pousser plus loin et aller chercher plus haut. Je pense notamment aux différents articles et à ce manuscrit de thèse qui n'auraient pas été ce qu'ils sont sans tes encouragements.

Un grand merci à toi Adrien pour ton enthousiasme contagieux et ton écoute bienveillante. Je te dois une bonne part de l'engouement actuel que j'ai pour la recherche universitaire. J'ai eu notamment beaucoup de plaisir à discuter avec toi de tous les sujets scientifiques rencontrés pendant cette thèse "avec les mains" (loin des équations j'entends). Échange d'énergie, dynamique, électronique, automatique... toutes ces conversations ont grandement attisé mon intérêt pour les sciences en général, merci donc.

Je tiens ensuite à remercier Olivier Druet de l'institut Camille Jordan d'avoir eu la gentillesse de m'accorder de son temps (dans un emploi du temps très chargé). Son approche mathématique a été d'une aide considérable dans la recherche autour du critère de robustesse de stabilité.

J'adresse mes sincères remerciements d'une part à messieurs les Professeurs Élie Lefeuvre et Morvan Ouisse qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir être rapporteurs de ce manuscrit et d'autre part à tous les membres du jury de thèse qui ont accepté de s'intéresser à mes travaux. Leurs retours m'aideront à prendre du recul sur ces trois ans de thèse.

Je remercie bien évidemment tous les doctorants du laboratoire LGEF pour l'atmosphère pétillante et le bouillon multiculturel que vous avez apportés pendant ces trois années. Merci à vous : Grinta Francesco, Gangsta Foamie, Mister B. Bhawaan, Espresso Giulia, Future translator Yan et Innocent Ziyin. Rendez-vous au Bieristan à l'occasion. Plus généralement, merci à tout le laboratoire LGEF et à tout le laboratoire SYMME de m'avoir accueilli dans ces conditions. Merci notamment aux piscines de Laurence, de Pierre-Jean et Quyen, de David pour nous avoir sauvé des surchauffes estivales. Merci à vous mama Zina et misses Evelyne pour l'attention que vous avez portée à la bonne santé de nous autres doctorants.

Enfin, un grand merci infini au terreau familial (on ne le dit jamais assez), à leur joie de vivre et à leur soutien sans limite pendant (et avant et après) cette thèse. Un grand merci tout particulier à ma supercherie Maude qui a eu la dure responsabilité d'une part de me côtoyer au quotidien et d'autre part de relire et corriger ce manuscrit dans son intégralité (tâches, je dois le dire, qui ont été réalisées avec une certaine virtuosité).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Pourquoi faire de la récupération d'énergie? . . . . .	2
1.2	Quelle source d'énergie choisir? . . . . .	4
1.3	Comment récupérer l'énergie vibratoire? . . . . .	7
	· Générateurs à déformation directe . . . . .	8
	· Générateurs inertiels . . . . .	9
1.4	Acteurs principaux dans l'étude des générateurs bistables . . . . .	16
1.5	Présentation du plan de cette thèse . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Agrandir la bande passante avec les comportements sous-harmoniques</b>	<b>19</b>
2.1	Prototype 1 : mise en équation du générateur bistable électromagnétique . . . . .	20
2.2	Résolution numérique . . . . .	23
2.3	Les comportements sous-harmoniques dans la littérature . . . . .	25
2.4	Résolution analytique . . . . .	26
	· Cas général . . . . .	26
	· Validation avec l'étude classique du comportement harmonique 1 . . . . .	28
2.5	Stabilité aux petites perturbations . . . . .	30
2.6	Résultats théoriques . . . . .	32
2.7	Validation expérimentale . . . . .	37
	· Banc d'essai et identification . . . . .	37
	· Résultats et discussion . . . . .	39
2.8	Validité du modèle mathématique . . . . .	41
	· Méthodes d'identification de l'amortissement linéaire . . . . .	41
	· Prise en compte de l'amortissement non linéaire . . . . .	44
	· Prise en compte de la raideur réelle . . . . .	47
	· Conclusion sur la validité du modèle théorique . . . . .	49
2.9	Conclusion . . . . .	49



<b>3</b>	<b>Robustesse de stabilité des différents comportements</b>	<b>51</b>
3.1	La robustesse de stabilité dans la littérature . . . . .	52
3.2	Définition . . . . .	53
3.3	Résultats théoriques . . . . .	60
3.4	Validation expérimentale . . . . .	62
	· Banc d'essai et identification . . . . .	62
	· Résultats et discussion . . . . .	63
3.5	Réponse fréquentielle des générateurs bistables : exploitation du modèle . . . . .	66
	· Influence des paramètres . . . . .	67
	· Comparaison avec le générateur linéaire équivalent . . . . .	73
3.6	Conclusion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Le saut d'orbite</b>	<b>79</b>
4.1	Le saut d'orbite dans la littérature . . . . .	80
4.2	Les différentes stratégies . . . . .	81
4.3	Prototype 2 : modélisation du générateur bistable piézoélectrique . . . . .	83
	· Mise en équation . . . . .	85
	· Étude de stabilité aux petites perturbations . . . . .	90
	· Robustesse de stabilité . . . . .	91
	· Réponse fréquentielle théorique et expérimentale . . . . .	95
4.4	Étude expérimentale du saut d'orbite par modification du niveau de flambement . . . . .	98
	· Méthode . . . . .	98
	· Résultats et discussion . . . . .	100
	· Considérations énergétiques . . . . .	105
4.5	Conclusion . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Circuit d'interface AC-DC entre le générateur et la charge</b>	<b>109</b>
5.1	Les circuits d'interface dans la littérature . . . . .	110
	· Circuit standard . . . . .	110
	· Circuit SSHI-parallèle . . . . .	112
	· Circuit SECE . . . . .	113
	· Comparaison . . . . .	114
	· Autres circuits . . . . .	116
	· Circuits d'interface pour le générateur bistable . . . . .	117
5.2	Modélisation du générateur bistable couplé au circuit SECE . . . . .	118

· Mise en équation . . . . .	118
· Étude de stabilité aux petites perturbations . . . . .	125
· Robustesse de stabilité . . . . .	127
5.3 Réponse fréquentielle théorique et validation expérimentale . . . . .	130
· Banc d'essai et identification . . . . .	130
· Résultat et discussion . . . . .	133
· Exploitation du modèle . . . . .	135
5.4 Conclusion . . . . .	139
<b>6 Conclusion</b>	<b>141</b>
6.1 Présentation synthétique des travaux menés durant cette thèse . . . . .	142
6.2 Perspectives . . . . .	146
<b>Annexes</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>167</b>



# 1

## Introduction

*Ce chapitre présente le contexte général dans lequel s'inscrit le sujet de cette thèse : la récupération d'énergie vibratoire. La première partie de cette introduction tente de répondre aux questions globales suivantes : pourquoi faire de la récupération d'énergie ? quelle source choisir ? Une fois l'attention portée sur la vibration comme source potentielle d'énergie, ce chapitre dresse un panorama des différentes manières de la convertir en énergie électrique à l'aide d'une étude bibliographique complète. La solution la plus prometteuse en termes de bande passante a été choisie comme sujet de cette thèse : les générateurs non linéaires bistables. Cette introduction se terminera par une présentation des principaux acteurs concernant l'étude de ces générateurs ainsi que par la présentation du plan de cette thèse.*

## 1.1 Pourquoi faire de la récupération d'énergie ?

L'engouement de ces vingt dernières années concernant la récupération d'énergie ambiante est très probablement lié à la prolifération de capteurs isolés autonomes sans fil utilisés pour prélever des informations en temps réel dans des environnements variés. En effet, l'une des clefs principales de la réussite d'un projet quelconque réside dans sa capacité à pouvoir prédire ce qui va arriver. De cette connaissance, des moyens d'actions pourront être mis en place afin de réduire l'impact des futurs événements perturbateurs et de mieux tirer profit des futurs événements bénéfiques. Ainsi, un agriculteur a tout intérêt à pouvoir prédire la météo afin d'adapter sa façon de cultiver en temps réel ou, de la même manière, une compagnie aérienne a tout intérêt à pouvoir prédire l'état de santé de ses avions afin de programmer des révisions en cas de besoin. Ces prédictions sont élaborées en prélevant certaines informations pertinentes sur l'objet d'étude qui, une fois traitées (analyses de tendance, d'occurrence, de cause à effet, élaboration de modèles mathématiques, etc.), permettent de formuler des scénarios possibles pour l'avenir ainsi qu'une probabilité qu'ils se réalisent. Plus la quantité de données (pertinentes) prélevées est importante, plus la prédiction sera précise et aura de chance de se réaliser. C'est en partie pour cette raison, couplée aux différentes avancées en électronique et en communication (notamment en terme de consommation), que les capteurs isolés sans fil, de moins en moins chers et de plus en plus compacts, suscitent autant d'intérêt et se déploient en réseaux entiers.

Une étude menée en 2016 par Rashid et Rehmani liste tous les domaines d'activité principaux utilisant ces réseaux de capteurs sans fil [1]. Ils mettent notamment en avant leur utilisation dans le domaine du transport (régulation de trafic, communication entre véhicules, logistique des transports en commun, signalement des places libres en parking, etc.), dans le domaine météorologique (surveillance de volcan, prédictions météo, etc.), dans le domaine de la santé (capteurs implantés, télésurveillance, aide à domicile, etc.) ou encore dans le domaine de la maintenance prédictive (suivi de l'état de santé des structures dans le génie civil, des machines en milieu industriel ou plus largement des composants sous contraintes tous milieux confondus afin de planifier leur maintenance future). La grande variété des domaines concernés laisse présager une augmentation du nombre de ces réseaux de capteurs sans fil dans les années à venir. La Figure 1.1 présente, à titre d'exemple, un accéléromètre piézoélectrique autonome sans fil utilisé pour mesurer le niveau de vibrations d'un moteur électrique afin de suivre son état de santé et ajuster ses interventions de maintenance dans le temps (entreprise ACOEM [2]).

La solution la plus répandue pour rendre ces capteurs sans fil autonomes en énergie consiste à embarquer avec le capteur une batterie lithium primaire (c'est-à-dire, non rechargeable) [3]. Cette solution, appliquée à un réseau contenant un grand nombre de capteurs, pose trois contraintes majeures ici résumées en trois mots clefs : autonomie, compacité et température (plus généralement sévérité de l'environnement). Afin de mieux comprendre l'origine de ces trois contraintes, analysons les performances des batteries principalement utilisées pour ce type d'application : les batteries primaires lithium/ion. Penella et al. ont évalué les caractéristiques moyennes d'une de ces batteries à partir d'une étude menée sur sept batteries différentes du commerce [3]. Ils trouvent une densité d'énergie moyenne de  $2,88 \text{ kJ.cm}^{-3}$ , une densité de puissance moyenne de  $18 \text{ }\mu\text{W.cm}^{-3}$ . Pour calculer l'autonomie de ces batteries, prenons le cas d'un capteur sans fil transmettant un paquet de données toutes les 30 min. Le prélèvement de ces données et leur envoi coûte typiquement 450 mJ (22 mA sous 3,3 V pendant 6,2 ms [4]). Ainsi, ce capteur consomme en moyenne 250  $\mu\text{W}$ . Une batterie primaire lithium/ion du commerce de type AA (exemple : Energizer L91 [5]), ayant un volume de  $8 \text{ cm}^3$ , pourra alors alimenter ce capteur pendant 2,92 ans.



**Figure 1.1** – Exemple de capteur de vibrations utilisé pour de la maintenance préventive de machines tournantes [2].

La première et principale problématique engendrée par l'utilisation de batteries apparaît ici. L'autonomie calculée d'environ trois ans pour une batterie de 8 cm<sup>3</sup> reste relativement faible par rapport à la durée de vie des capteurs sans fil. Ces capteurs nécessiteront donc plusieurs interventions pour changer leur batterie vide. Il est possible d'augmenter l'autonomie de ces batteries en augmentant leur volume (dans l'exemple précédent la relation est linéaire) mais cette solution fait apparaître une nouvelle contrainte liée à la compacité des capteur sans fil. De plus, la problématique d'autonomie des batteries est aggravée par deux autres aspects liés à leur utilisation : le phénomène d'auto-décharge dans le temps, d'autant plus élevée que la température est haute, ainsi que la problématique de mesure de leur état de charge à un instant donné (leur remplacement doit donc être effectué de manière préventive avant décharge complète si les informations mesurées sont importantes). Pour revenir sur l'exemple présenté en Figure 1.1, il est facile d'imaginer que la gestion d'un parc contenant plusieurs centaines de machines tournantes chacune équipée de plusieurs capteurs sans fil pour lesquels un changement de batterie est nécessaire au mieux tous les trois ans représente une charge de travail et un coût important.

La deuxième problématique des batteries comme source d'énergie concerne leur compacité. L'exemple présenté en Figure 1.1 est sans équivoque : la batterie occupe dans ce cas particulier plus de la moitié du volume total du capteur sans fil. Une étude menée par Paradiso et Starner [6] laisse présager que cet encombrement tend à s'aggraver dans les années à venir. Cette étude, reprise en Figure 1.2, compare en effet l'évolution des performances des différents composants informatiques de 1990 jusqu'à 2003. Le constat est le suivant : l'électronique se densifie plus rapidement que les unités de stockage d'énergie dont la densité de puissance est la seule à suivre une tendance logarithmique. Dans les années à venir, les capteurs seront donc probablement de plus en plus compacts là où les batteries risquent de garder la même densité de puissance. La proportion du volume global des capteurs sans fil occupé par la batterie est problématique à l'heure actuelle et aura donc à priori tendance à s'aggraver dans les années à venir.

Enfin, la troisième problématique est liée aux contraintes d'utilisation des batteries qui se

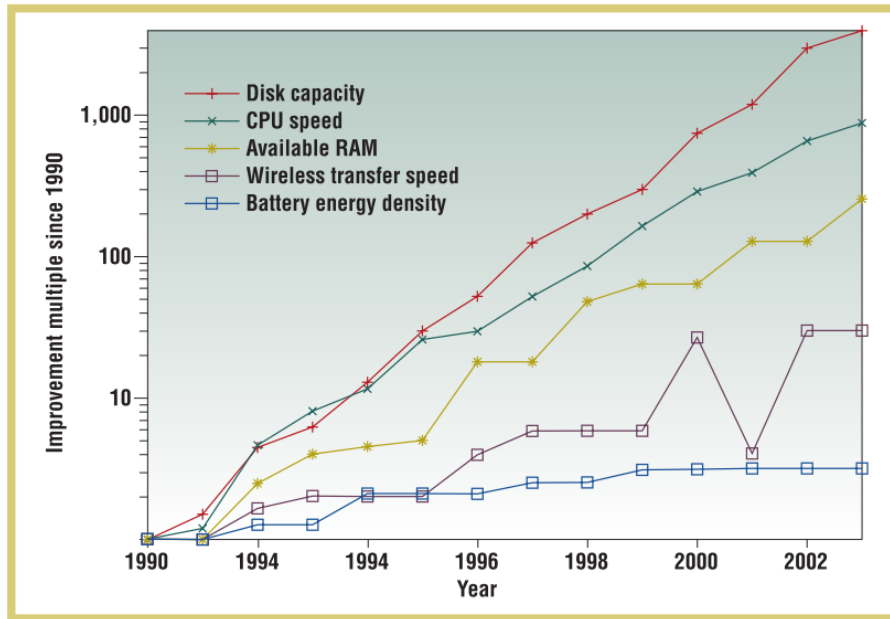


Figure 1.2 – Évolution des principaux composants informatiques de 1990 à 2003 [6].

dégradent dans des environnements à forte température. Outre le phénomène d’auto-décharge aggravé par la température, la limite haute d’utilisation des batteries lithium primaires varie de 60 °C pour les batteries Li-MnO<sub>2</sub> (80 % du marché des batteries lithium primaires) à 85 °C pour les batteries Li-(CF)<sub>x</sub> (notamment utilisées dans le secteur militaire et aérospatial) [7].

Pour répondre à ces trois problématiques que sont l’autonomie (liée à la fréquence des opérations de maintenance), la compacité et les contraintes de température d’utilisation des capteurs isolés sans fil, toutes les trois engendrées par le recours aux batteries embarquées, la recherche se concentre actuellement sur la récupération d’énergie ambiante. En récupérant directement l’énergie dans l’environnement immédiat des capteurs de manière continue, il n’est plus nécessaire d’embarquer une grande quantité d’énergie et dispense donc de l’utilisation de batteries. Les capteurs gagnent ainsi en indépendance et peuvent être oubliés pour toute leur durée de vie. Il y a également de bonnes raisons de penser que l’utilisation de récupérateurs d’énergie permette d’améliorer la compacité des capteurs sans fil et de soulager leur contrainte en température comme le montre la section qui suit.

## 1.2 Quelle source d’énergie choisir ?

La question est d’abord de savoir quelles sont les énergies présentes dans l’environnement de ces capteurs afin de pouvoir mettre en lumière celles susceptibles de les alimenter tout au long de leur vie. D’un point de vue très général, examinons d’abord les principales sources d’énergie disponibles sur terre. La Figure 1.3 présente un bilan des grandes concentrations énergétiques présentes à la surface du globe (lui-même représenté sur le schéma par le rectangle en pointillés gris). L’unique apport d’énergie vient du soleil sous formes de radiations électromagnétiques essentiellement situées dans la partie visible du spectre. L’unique restitution d’énergie vient de l’émission des sources chaudes présentes sur terre sous formes de radiations électromagnétiques situées essentiellement dans la partie infrarouge du spectre. Entre les deux, l’énergie transite sur terre sous différentes formes dont les principales sont illustrées en Figure 1.3. À l’heure actuelle, la consommation énergétique mondiale tire profit de plusieurs de ces sources :

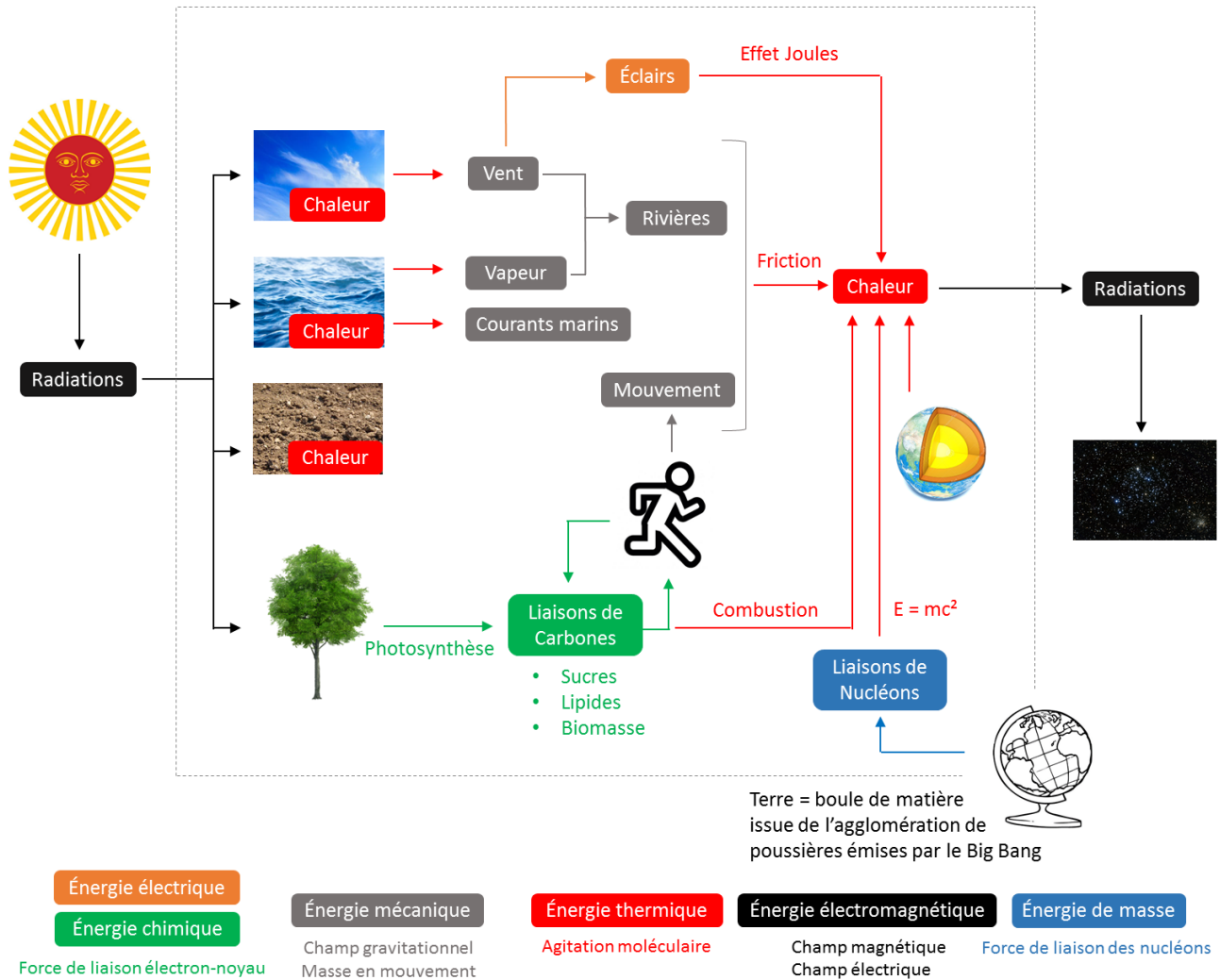
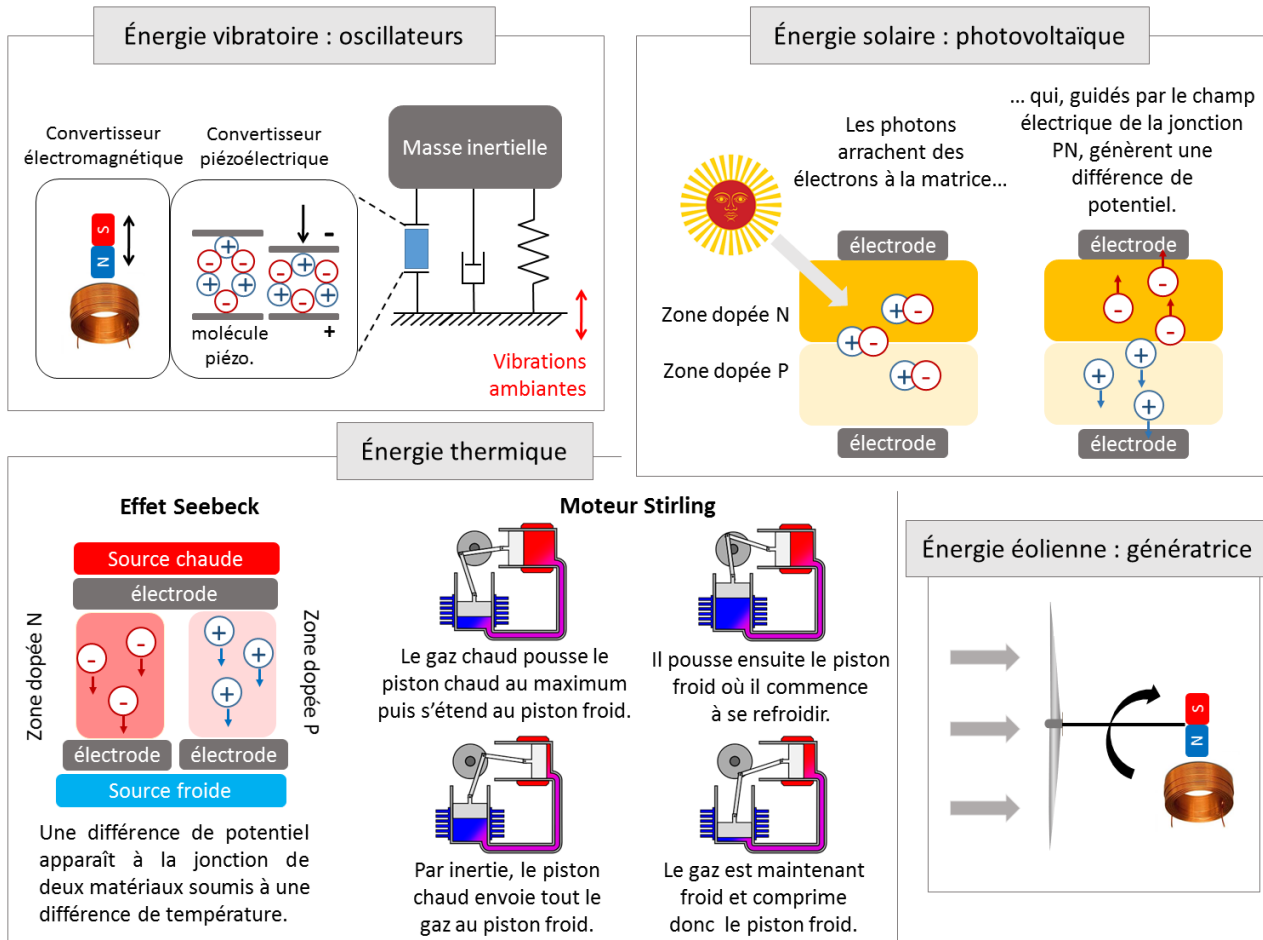


Figure 1.3 – Grandes concentrations énergétiques sur terre.

la source la plus utilisée est de loin l'énergie potentielle chimique des liaisons carbonées avec 91 % de la consommation totale d'énergie primaire (charbon, pétrole, gaz naturel, biomasse, déchets). Puis vient l'exploitation de l'énergie mécanique avec 4 % de la consommation totale d'énergie primaire (hydroélectricité, éolien) suivie par l'énergie de masse avec 2 % de la consommation totale d'énergie primaire (nucléaire). Enfin l'énergie thermique (géothermie) et l'énergie électromagnétique (solaire photovoltaïque) comptabilisent à eux deux moins de 1 % de la consommation totale d'énergie primaire. Ces chiffres sont tirés des données brutes fournies par l'agence internationale de l'énergie pour la consommation de 2015 [8], données mises en forme dans l'article Wikipédia concernant ce sujet [9].

Les sources présentées Figure 1.3 ne sont pas toutes exploitables pour l'alimentation de capteurs autonomes sans fil. Nous avons principalement retenu quatre sources susceptibles d'être récupérées dans l'environnement direct d'un capteur isolé : l'énergie solaire, l'énergie éolienne, l'énergie vibratoire (présente à chaque fois qu'il y a du mouvement) et l'énergie thermique. Les principes physiques les plus utilisés pour convertir ces énergies en énergie électrique sont illustrés en Figure 1.4. Ces quatre sources ont toutes reçu beaucoup d'attention ces quinze-vingt dernières années pour les dispositifs de taille réduite (de quelques millimètres à quelques centimètres). Dans un article très complet intitulé *Wireless Sensor Networks With Energy Harvesting* publié par Basagni et al. dans *Mobile Ad Hoc Networking*, les auteurs proposent une étude comparative de ces différentes sources pour l'alimentation de réseaux de capteurs sans fil





**Figure 1.4** – Principes permettant de convertir les différentes énergies considérées en énergie électrique. Source des dessins du moteur Stirling : [10].

autonomes [11]. Le Tableau 1.1 résume cette étude. Premier constat : la densité de puissance récupérable pour toutes ces sources atteint un maximum supérieur à la densité de puissance d’une batterie lithium primaire. Un oscillateur linéaire piézoélectrique (masse de 10 g, amortissement mécanique de  $0,10 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ , fréquence de résonance de 160 Hz) placé sur une source de vibrations (accélération de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  et fréquence de 160 Hz) propose par exemple une densité de puissance maximale sept fois supérieure à celle d’une batterie (respectivement  $125 \mu\text{W.cm}^{-3}$  et  $18 \mu\text{W.cm}^{-3}$ ). Cet aspect laisse présager que la récupération d’énergie permettra d’améliorer la compacité des capteurs sans fil. Deuxième constat : la température maximale d’utilisation des générateurs associés à toutes ces sources est moins contraignante que celle d’une batterie lithium primaire.

L’abondance et la prévisibilité de ces différentes sources les prédisposent cependant à des domaines d’application particuliers. Il est donc nécessaire de se fixer un domaine cible afin de choisir parmi ces sources d’énergie. Voici l’angle choisi pour cette thèse : le but est de pouvoir alimenter des capteurs déployés en milieu industriel ou dans le transport pour surveiller l’état de santé des machines ou des pièces en mouvement. Ces dernières, soumises à des contraintes mécaniques répétitives, présentent des risques de rupture en fatigue et doivent souvent être contrôlées au cours de leur durée de vie. Ces capteurs suivent généralement l’évolution de certains indicateurs révélateurs de cet état de santé (niveaux de vibration, température, consommation électrique) et permettent de planifier des interventions de maintenance au cas par cas [2]. Les éléments suivis sont majoritairement : les moteurs et génératrices électriques, les roulements à

**Table 1.1** – Comparaison des différentes sources d'énergie susceptibles d'alimenter des capteurs isolés sans fil [11].

Source	Condition	Densité de puissance	Efficacité des générateurs	Puissance récupérable	Température maximale
Batterie	Lithium	18 $\mu\text{W.cm}^{-3}$ [3]	–	–	85°C [3]
Solaire	Soleil	1,5 $\text{mW.cm}^{-2}$	5-30%	0,8-4,5 $\text{mW.cm}^{-2}$	Efficacité réduite
	Nuages	150 $\mu\text{W.cm}^{-2}$	5-30%	8-45 $\mu\text{W.cm}^{-2}$	de 4,5% chaque
Thermique	Intérieur	100 $\mu\text{W.cm}^{-2}$	5-30%	5-30 $\mu\text{W.cm}^{-2}$	+10°C [12] <sup>d</sup>
	<sup>a</sup>	5,0 $\text{mW.cm}^{-2}$	0,1-3%	5-150 $\mu\text{W.cm}^{-2}$	600°C [13]
Vibrations	<sup>b</sup>	200 $\mu\text{W.cm}^{-3}$	10-50% [14]	20-100 $\mu\text{W.cm}^{-3}$	Piézo 150°C [15] <sup>e</sup>
	<sup>c</sup>	380 $\mu\text{W.cm}^{-3}$	~5%	~20 $\mu\text{W.cm}^{-3}$	Electromag 230°C [16] <sup>f</sup>
Éolien					230°C [16] <sup>f</sup>

<sup>a</sup>  $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ <sup>b</sup> Récupérateur linéaire :  $A = 10 \text{ m.s}^{-2}$   $M = 10 \text{ g}$   $\mu_{\text{méca}} = 0,10 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$   $f_0 = 160 \text{ Hz}$   $P_{\text{récup max}} = A^2 M^2 / 8 \mu_{\text{méca}}$  [14]<sup>c</sup> Vitesse du vent de  $5 \text{ m.s}^{-1}$ <sup>d</sup> Au dessus de la température normale d'utilisation de  $25^\circ\text{C}$ <sup>e</sup> Perte irréversible de la polarisation<sup>f</sup> Perte irréversible de la magnétisation

billes, les pompes, les compresseurs, les pièces mécaniques sous forte contrainte mécanique ou thermique (mâts de réacteurs d'avion, barrages, conduites forcées, etc.) [2]. La majeure partie de ces équipements se trouve dans un environnement coupé de l'extérieur donc privé de soleil, de lumière artificielle et de vent. Ces deux sources ne sont donc pas retenues pour l'alimentation des capteurs ciblés. Reste l'énergie thermique et l'énergie vibratoire qui présentent chacune un potentiel similaire dans ce cas particulier (même si l'obtention d'une différence de température nécessaire pour l'exploitation de l'énergie thermique peut poser problème dans certains environnements trop confinés). Ces deux sources sont donc envisageables. Cette thèse se concentre sur l'une d'entre elles : l'énergie vibratoire.

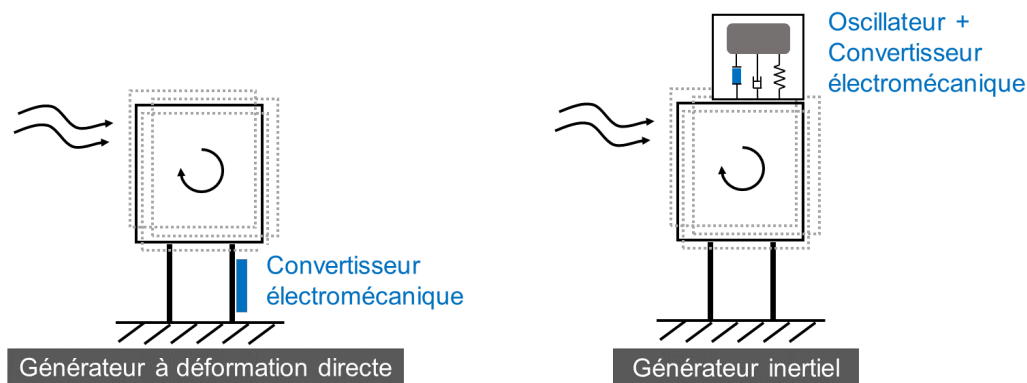
### 1.3 Comment récupérer l'énergie vibratoire ?

Le Tableau 1.2 présente l'ordre de grandeur des amplitudes et des fréquences d'accélération disponibles sur différentes sources de vibrations courantes [17].

**Table 1.2** – Amplitude et fréquence fondamentale de l'accélération pour différentes sources de vibrations [17].

Source de vibrations	Accélération ( $\text{m.s}^{-2}$ )	Fréquence (Hz)
Moteur de voiture	12	200
Support d'une machine outil 3 axes	10	70
Support d'un mixer	6,4	121
Sèche linge	3,5	121
Personne tapant nerveusement des talons	3	1
Tableau de bord d'une voiture	3	13
Support d'une porte après sa fermeture	3	125
Petit four micro-ondes	2,5	121
Tuyaux de ventilation d'un bureau	1,5	60
Fenêtre proche d'une rue passante	0,7	100
Ordinateur avec un CD	0,6	75
Deuxième étage d'un immeuble occupé	0,2	100

Cette section fait le point sur les stratégies et prototypes différents développés par la communauté scientifique liée à la récupération d'énergie vibratoire. Cet état de l'art est également bien résumé dans les trois articles suivant (allant du cas le plus général des récupérateurs d'énergie vibratoire au cas particulier des récupérateurs non linéaires bistables étudiés dans cette thèse) : *Review of vibration-based energy harvesting technology : mechanism and architectural approach* écrit par Siang et al. qui proposent une vue d'ensemble de la récupération d'énergie vibratoire [18] ; *On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting : a critical review and discussion* écrit par Daqaq et al. qui se concentrent quant à eux sur des générateurs particuliers : les générateurs inertiels non linéaires [19] ; *A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems* écrit par Harne et al. qui se focalisent finalement sur les générateurs inertiels non linéaires bistables, objets de cette thèse [20]. Les générateurs pour la récupération d'énergie vibratoire peuvent être séparés en deux grandes catégories distinctes illustrées en Figure 1.5.



**Figure 1.5** – Les deux grands principes de récupération d'énergie vibratoire. Ici, l'exemple pris pour la source de vibrations est une machine tournante soumise à des sollicitations intérieures ou extérieures.

## Générateurs à déformation directe

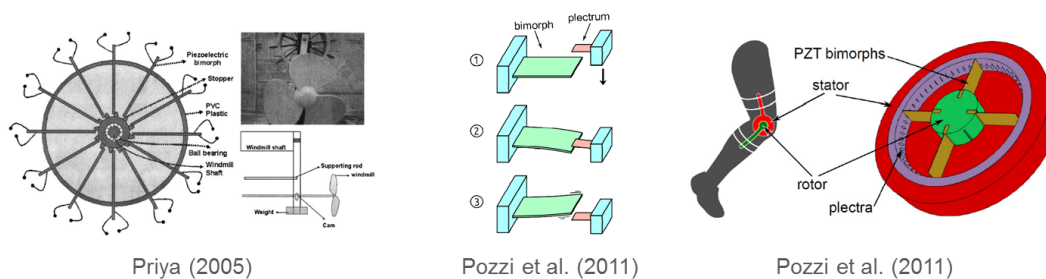
La première catégorie est constituée par les générateurs à déformation directe. Ces derniers, uniquement composés d'un convertisseur électromécanique (généralement piézoélectrique), sont directement placés sur le chemin de contrainte mécanique engendrée par les vibrations. Ils voient ainsi les déformations réelles de l'élément sur lequel ils sont placés qu'ils convertissent en potentiel électrique. La Figure 1.6 présente trois exemples de prototypes de générateurs à déformation directe. Ces générateurs offrent l'avantage de ne pas dépendre du point de fonctionnement de la source (amplitude et fréquence) contrairement aux générateurs inertiels. Leur efficacité n'est donc pas affectée par une source dont le point de fonctionnement varie au cours du temps (ce qui est toujours plus ou moins le cas en conditions réelles). La mise en place et la maintenance



**Figure 1.6** – Exemples de générateurs à déformation directe. De gauche à droite : [21], [22], [23].

de ce type de dispositifs posent cependant problème. Le couplage mécanique de ces générateurs avec la source est délicat : plusieurs points d'ancrages sont nécessaires pour transmettre les déformations. La solution la plus répandue est de coller l'élément piézoélectrique sur le chemin de contrainte. Cette solution pose un problème majeur : le système ne peut pas être déplacé facilement. Il ne pourra donc pas suivre le capteur si ce dernier vient à être changé de place. De plus, en cas d'endommagement, il ne pourra pas être changé aisément (décollage-recollage).

Un autre type de générateur à déformation directe a également été développé : le générateur *frequency-up*. Sa particularité réside dans le fait que le convertisseur électromécanique n'est plus directement couplé à la déformation. Le couplage se fait par le biais d'une pièce intermédiaire qui vient ponctuellement exciter le convertisseur. Quelques exemples sont illustrés en Figure 1.7.



**Figure 1.7** – Exemples de générateurs à déformation directe de type *frequency-up*. De gauche à droite : [24], [25], [25].

La partie mobile du générateur, couplée à la source en mouvement, vient tendre puis relâcher subitement une poutre qui vibre alors à sa fréquence de résonance (plus haute que la fréquence de la source). Un convertisseur électromécanique s'assure ensuite de convertir cette vibration non entretenue. L'énergie est donc extraite de la source de manière discrète à chaque interaction entre la partie mobile et la partie fixe du générateur. Elle est convertie en énergie vibratoire de plus haute fréquence pour être ensuite récupérée par le convertisseur électromécanique. Pour ce type de générateur, seul deux points d'ancrages suffisent : un sur la source en mouvement (pour la partie mobile) et un sur son support (pour le convertisseur). Il est donc plus facile à mettre en place et à déplacer que le générateur à déformation directe précédent. Il nécessite cependant d'être placé sur une partie de la source située proche du support et dont l'amplitude de vibration est suffisante pour que la partie mobile actionne le convertisseur.

## Générateurs inertiels

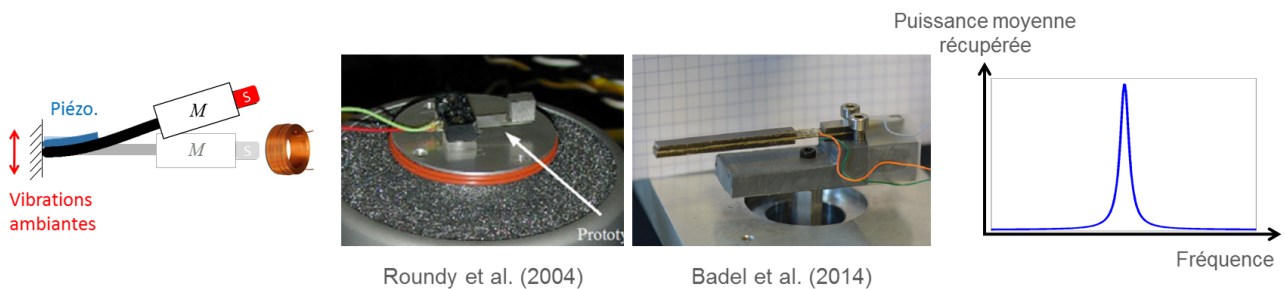
Afin d'améliorer l'implémentation, la maintenance, et la mobilité des générateurs pour la récupération d'énergie vibratoire, il est souhaitable de pouvoir les encapsuler dans une coque. Celle-ci pourra alors être simplement vissée en un seul point d'ancrage sur n'importe quelle source de vibrations. Le convertisseur électromécanique placé à l'intérieur de la coque doit cependant toujours disposer de deux références ayant un mouvement relatif l'une par rapport à l'autre pour pouvoir convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique. L'ajout d'une masse inertielle est la solution classique : le déplacement de cette masse par rapport à la coque joue ainsi le rôle de deuxième référence. Cette masse est suspendue à la coque à l'aide d'un ressort afin qu'elle n'aille pas percuter les parois (synonyme de perte d'énergie). Le système oscillant ainsi formé implique, une fois excité, un mouvement relatif de la masse par rapport à la source

à l'intérieur même de la coque. Ce mouvement est alors imposé à un convertisseur électromécanique placé en parallèle du ressort qui génère ainsi une différence de potentiel électrique (voir Figure 1.4). Les convertisseurs les plus utilisés dans la littérature sont le convertisseur électromagnétique (un aimant en déplacement relatif par rapport à une bobine) et le convertisseur piézoélectrique (qui subit la déformation du ressort). Une étude menée par Arroyo et al. montre que l'utilisation de l'un ou l'autre de ces convertisseurs mène à une puissance récupérée comparable pour un même oscillateur mécanique (le convertisseur piézoélectrique est cependant plus intéressant en terme de miniaturisation) [26]. Les générateurs électromagnétiques présentent en effet des coefficients de couplage électromécanique élevés mais des pertes électriques élevées tandis que les générateurs piézoélectriques présentent des coefficients de couplage électromécanique faibles mais des pertes électriques également faibles.

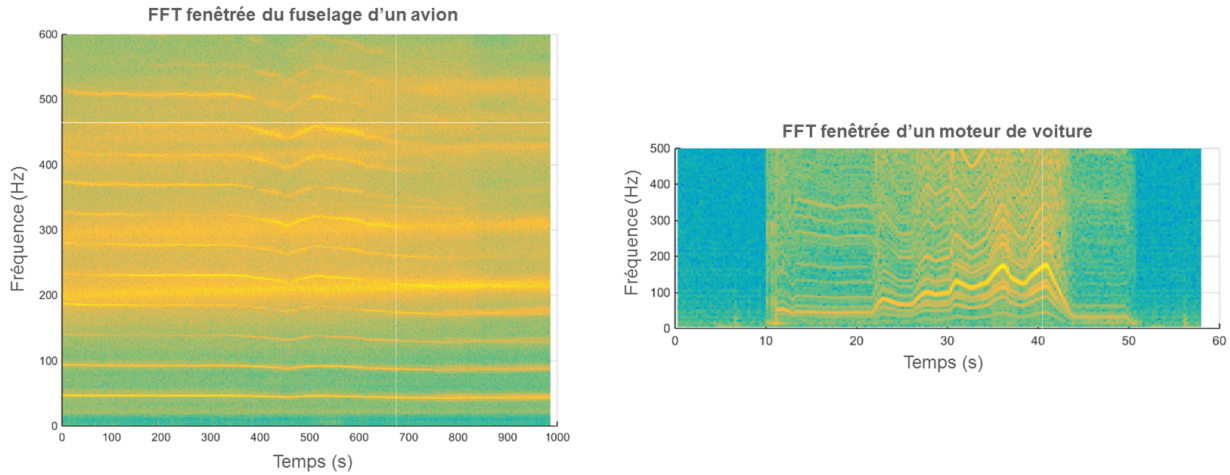
### Générateurs Linéaires

Les générateurs inertiels linéaires sont réalisés à l'aide d'un oscillateur mécanique masse-ressort linéaire (la force de rappel  $F$  imposée par le ressort sur la masse est proportionnelle à la déformation  $x$  du ressort :  $F = -kx$ ). Le principe le plus répandu pour réaliser ce type de générateur est la poutre encastrée-libre. La Figure 1.8 présente ce principe, deux exemples de prototype ainsi que la réponse fréquentielle attendue. Les convertisseurs électromécaniques les plus utilisés pour ce type de générateurs sont tous les deux illustrés sur le schéma de principe de la Figure 1.8 (convertisseur électromagnétique et convertisseur piézoélectrique). En général, les générateurs ne sont équipés que de l'un d'entre eux. Pour une source de vibrations générant une accélération sinusoïdale d'amplitude  $A$ , la puissance moyenne récupérable maximale par un générateur inertiel linéaire est atteinte à la fréquence de résonance et ne dépend que de  $A$ , de sa masse  $M$  et du coefficient d'amortissement mécanique  $\mu$  (relation entre la vitesse de la masse et la force générée par les différents frottements mécaniques) :  $P_{moy.max.} = A^2 M^2 / 8\mu^2$  [14]. Cette puissance moyenne maximale est atteinte lorsque le coefficient d'amortissement généré par la conversion d'énergie (mécanique vers électrique) est égale au coefficient d'amortissement mécanique. Optimiser un générateur inertiel linéaire revient donc à embarquer la masse la plus grande possible (en respectant les contraintes de volume imposées), à ajuster sa fréquence de résonance à la source de vibrations puis à régler l'amortissement lié à la conversion d'énergie jusqu'à égaliser l'amortissement mécanique.

Ce dernier point pose problème. D'une part la source de vibrations n'est jamais purement sinusoïdale et sa fréquence prépondérante jamais durablement fixe. Pour illustrer ceci la Figure 1.9 présente sous forme de FFT fenêtrée l'évolution au cours du temps des vibrations d'un moteur de voiture et des vibrations du fuselage d'un avion en vol [29]. À chaque instant



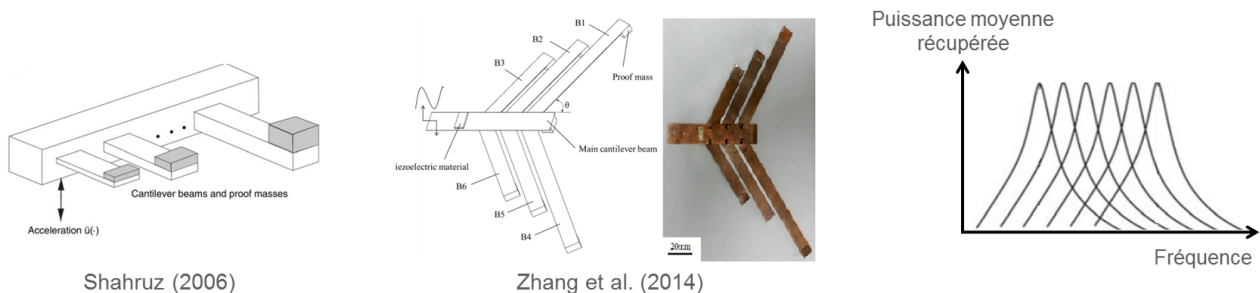
**Figure 1.8** – Principe et exemples de générateurs inertiels linéaires. Le convertisseur électromécanique est généralement piézoélectrique ou électromagnétique. De gauche à droite : [27], [28].



**Figure 1.9** – Exemples de l'évolution des vibrations au cours du temps d'un moteur de voiture et du fuselage d'un avion en vol [29]. L'amplitude des différentes composantes fréquentielles de ces vibrations est graduée sur une échelle de couleurs allant du bleu (faibles amplitudes) au jaune (fortes amplitudes).

la vibration est décomposée dans le domaine fréquentiel. L'amplitude de chacune des composantes fréquentielles est représentée en niveau d'intensité de couleur (du bleu pour les faibles amplitudes au jaune pour les fortes amplitudes). Sur la FFT fenêtrée de gauche, la vibration comporte un grand nombre d'harmoniques ainsi qu'une composante de forte amplitude et de large bande spectrale à 200 Hz. Sur la FFT fenêtrée de droite, la vibration possède une composante dominante qui varie fortement au cours du temps (entre 50 Hz et 150 Hz). Le générateur linéaire propose quant à lui une bande passante relativement faible de quelques Hertz autour de sa fréquence de résonance [18]. En dehors de cette bande passante, la puissance récupérée chute drastiquement. Il devient donc compliqué d'ajuster un générateur linéaire à une source de vibrations comme celles illustrées en Figure 1.9 (source à large bande spectrale ou source à fréquence variable).

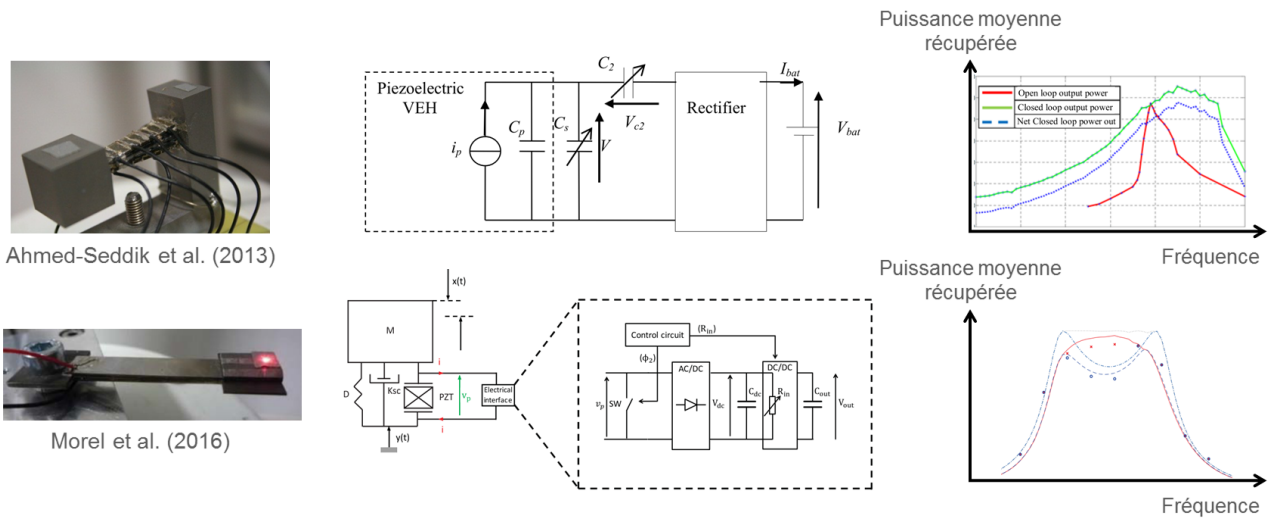
Pour répondre à cette problématique de bande passante, une partie de la recherche s'est focalisée sur une approche présentée en Figure 1.10. Celle-ci consiste à placer plusieurs générateurs linéaires en parallèle. Chacun de ces générateurs est réalisé de sorte que sa fréquence de résonance soit légèrement différente de celle des autres. Le générateur multimodal ainsi formé possède alors une réponse fréquentielle large bande composée de la somme des réponses fréquentielles des différents générateurs linéaires. Cet agrandissement global de la bande passante se fait cependant au détriment de la densité de puissance de ce type de générateur. Pour une fréquence d'excitation donnée, un seul des générateurs linéaires entre en résonance. De fait, un seul d'entre eux propose une puissance récupérée maximale. Les autres générateurs linéaires ne sont pas utilisés et occupent un volume qui ne récupère pas ou peu d'énergie. Les générateurs



**Figure 1.10** – Exemples de générateurs inertiels multimodaux. De gauche à droite : [30], [31].

multimodaux sont donc réservés aux applications qui nécessitent une grande bande passante sans contraintes de volume ou de poids.

Une autre approche consiste à jouer sur le circuit d'interface entre le générateur linéaire et la charge. Ce circuit affecte directement le comportement du convertisseur électromécanique qui lui-même joue un rôle sur les propriétés mécaniques de l'oscillateur linéaire. Il est alors possible, par exemple, de modifier en temps réel la fréquence de résonance du générateur avec des circuits d'interfaces semi-actifs en utilisant une partie de l'énergie électrique récupérée pour augmenter ou réduire la raideur vue par la masse. Pour ce faire, il convient de connecter au générateur un circuit électrique qui génère, par le biais du convertisseur électromécanique, une force sur la masse proportionnelle à son déplacement [32–35]. Certains de ces circuits sont présentés en Figure 1.11.



**Figure 1.11** – Exemples de générateurs inertiels linéaires dont le circuit d'interface permet d'agrandir la bande passante. De haut en bas : [32], [35].

Cette approche, en émergence, nécessite cependant un générateur fortement couplé : une grande partie de la puissance mécanique disponible doit être convertie en puissance électrique afin que le circuit électrique ait suffisamment d'influence sur les propriétés mécaniques du générateur. Ce dernier point requiert des matériaux piézoélectriques coûteux et fragiles (PMN-PT ou PZN-PT [36]). Il est également à noter que cette approche est sensiblement différente de celle étudiée pour le générateur multimodal. La première consiste à ajuster la fréquence de résonance en temps réel alors que la deuxième cherche à réaliser un générateur large bande.

### Générateurs non linéaires

Toujours dans l'objectif d'agrandir la bande passante proposée par les générateurs inertiels, une partie de la communauté s'est penchée sur les oscillateurs non linéaires qui proposent des réponses fréquentielles particulières. Un état de l'art de la récupération d'énergie vibratoire via générateurs non linéaires a été réalisé par Daqaq et al. dans une étude intitulée *On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting : a critical review and discussion* [19].

Un premier type de générateur non linéaire est présenté en Figure 1.12 : le générateur monostable. Les trois manières les plus courantes de le réaliser sont illustrées sur cette figure. L'idée générale est d'obtenir un oscillateur dont la force de rappel  $F$  exercée par le ressort sur

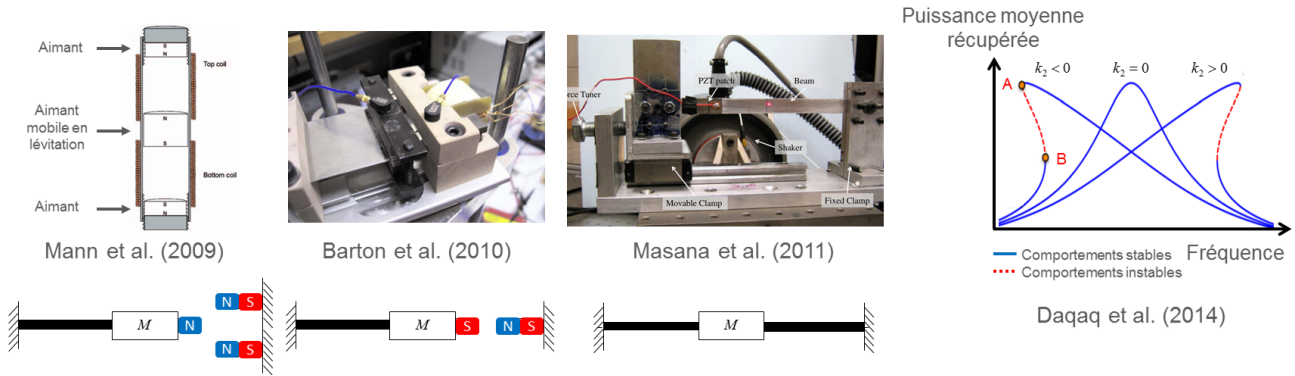


Figure 1.12 – Exemples de générateurs non linéaires monostables. De gauche à droite : [37], [38], [39] [19].

la masse dépend du déplacement  $x$  de manière non linéaire. La force de rappel obtenue est souvent approximée par  $F = -k_1x - k_2x^3$  avec  $k_2 > 0$  dans le cas d'un générateur monostable raidissant et  $k_2 < 0$  dans le cas d'un générateur monostable assouplissant ( $k_2 = 0$  représente le cas linéaire). Les principes illustrés sont les suivants : (i) une poutre encastree-libre (oscillateur linéaire) complétée par un aimant sur la masse et par deux aimants le repoussant de part et d'autre de la position centrale ( $x = 0$ ); (ii) une poutre encastree-libre complétée par un aimant sur la masse et par un aimant l'attirant en position centrale; (iii) une poutre encastree-encastree. Contrairement à d'autres générateurs non linéaires, le générateur monostable ne possède qu'une position statique stable (la position centrale). Pour tous ces différents principes, la force de rappel exercée sur la masse en direction de sa position d'équilibre stable est liée de manière non linéaire au déplacement de cette dernière à cause de l'influence des aimants ou de la double liaison encastree. Cette force de rappel est globalement plus grande (en valeur absolue) que dans le cas d'un générateur linéaire. Ce type de générateur est généralement équipé soit d'un convertisseur piézoélectrique soit d'un convertisseur électromagnétique (non représentés sur les schémas de la Figure 1.12). Comme le montre la réponse fréquentielle, la puissance moyenne récupérable maximale théorique d'un générateur monostable est identique à celle d'un générateur linéaire équivalent (obtenu pour  $k_2 = 0$ ) mais sa bande passante est plus grande. Seul inconvénient, sur la plage de fréquences délimitée en Figure 1.12 par les points A et B, deux comportements différents peuvent être stabilisés en régime permanent : un comportement offrant une grande puissance moyenne récupérée (orbite haute) ou un comportement offrant une faible puissance moyenne récupérée (orbite basse). Cette particularité (plusieurs comportements stables possibles sur une même plage de fréquences) est propre aux générateurs non linéaires. Il est possible de passer de l'un à l'autre de ces comportements en imposant une perturbation extérieure comme illustré en Figure 1.13. Cette particularité des générateurs non linéaires constitue ici une faiblesse puisque l'orbite intéressante pour la récupération d'énergie (l'orbite haute) n'est pas automatiquement atteinte.

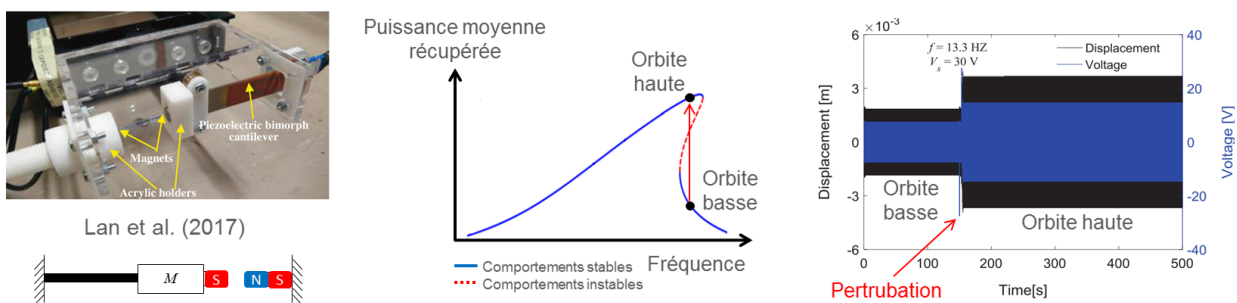


Figure 1.13 – Exemple de saut d'orbite pour un générateur non linéaire (ici monostable) [40].



Un deuxième type de générateur non linéaire, objet de cette thèse, est présenté en Figure 1.14 : le générateur bistable. Un état de l'art de ce type de générateur a été réalisé par Harne et al. dans leur étude intitulée *A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems* [20]. Les trois manières les plus courantes de réaliser un générateur bistable sont illustrées en Figure 1.14 : (i) une poutre encastrée-libre complétée par un aimant sur la masse et par deux aimants l'attirant de part et d'autre de la position centrale; (ii) une poutre encastrée-libre complétée par un aimant sur la masse et par un aimant le repoussant de la position centrale; (iii) une poutre encastrée-encastrée précontrainte jusqu'au flambement. La force de rappel  $F$  exercée par le ressort sur la masse est cette fois-ci de la forme  $F = k_1x - k_2x^3$ . Contrairement au générateur monostable, le générateur bistable possède deux positions statiques stables distinctes. La puissance théorique moyenne récupérable maximale par ce type de générateur est identique à celle d'un générateur linéaire équivalent (cette propriété fait l'objet d'une étude au Chapitre 3, Section 3.5 de cette thèse). Sa bande passante est quant à elle plus grande que celle du générateur linéaire et plus grande que celle du générateur monostable. C'est la raison pour laquelle ce type de générateur a été étudié lors de cette thèse. L'inconvénient des générateurs bistables est le même que celui des générateurs monostables : plusieurs comportements coexistent sur certaines plages de fréquences. Les comportements intéressants pour la récupération d'énergie (les orbites hautes) ne sont donc pas automatiquement atteints.

Le générateur monostable et le générateur bistable sont les deux générateurs inertiels non linéaires qui ont reçu le plus d'attention ces dix dernières années pour leur potentiel en terme de bande passante (et donc d'adaptabilité à des sources vibratoires dont la fréquence évolue au cours du temps). Il existe cependant d'autres types de générateurs inertiels non linéaires. La Figure 1.15 présente certains d'entre eux. Les générateurs à deux degrés de libertés (réalisés à partir de deux oscillateurs linéaires ou deux oscillateurs non linéaires ou une combinaison des deux) autorisent plusieurs fréquences de résonance en proposant des résonances couplées entre les deux systèmes oscillants. Cette particularité entraîne dans certains cas un agrandissement de la bande passante totale. Le générateur tristable (trois positions stables), dans la continuité des générateurs monostables et bistables, offre des comportements intéressants sur une grande plage de fréquences (orbites hautes). Il possède également des comportements moins intéressants (orbites basses) coexistant sur cette plage de fréquences. Il en va de même pour le générateur linéaire avec butoirs qui possède une raideur non linéaire par morceaux (lors de chaque rebond sur les butoirs). Enfin le générateur *frequency-up* représenté sur la Figure 1.15 et le générateur 3D permettent de récupérer de l'énergie vibratoire dans toutes les directions à l'aide d'un design conférant à la masse un maximum de degrés de liberté. Dans le cas du générateur *frequency-up* représenté sur la Figure 1.15, la masse est d'ailleurs totalement libre (absence d'un quelconque

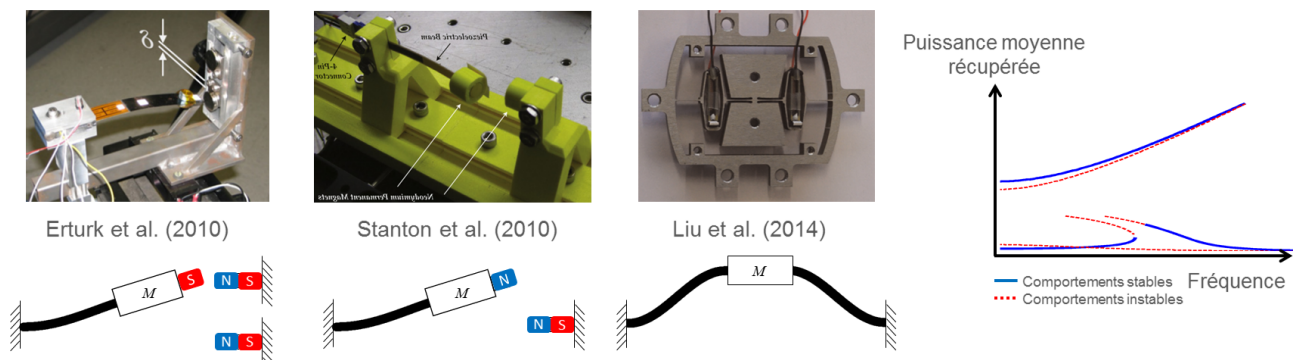


Figure 1.14 – Exemples de générateurs non linéaires bistables. De gauche à droite : [41], [42], [43].

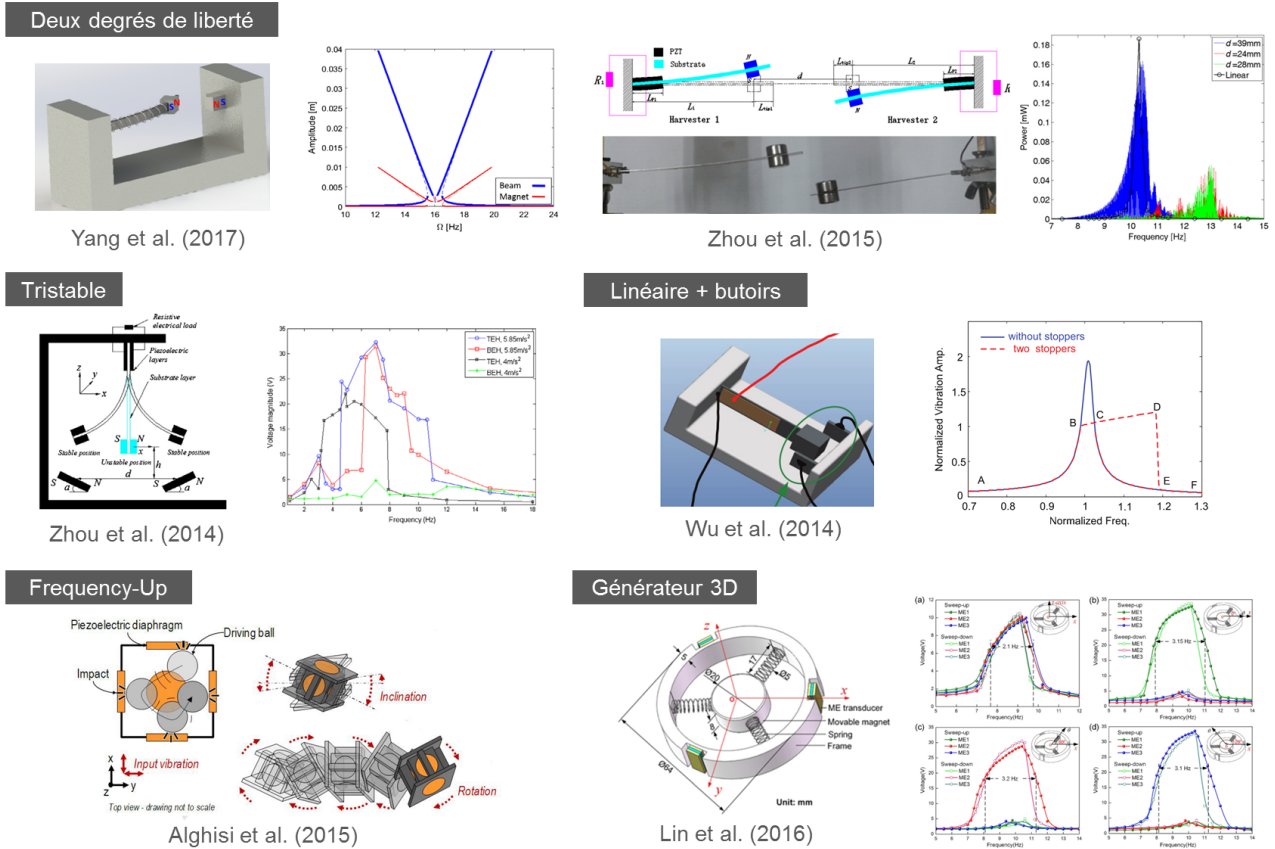


Figure 1.15 – Exemples d’autres générateurs inertiels non linéaires. De gauche à droite puis de haut en bas : [44], [45], [46], [47], [48], [49].

système raidissant) et vient régulièrement percuter les convertisseurs piézoélectriques placés sur les parois.

En conclusion, il existe de multiples façons de convertir l’énergie vibratoire d’une source en énergie électrique. En étant directement placés sur le chemin de contraintes de la source, les générateurs à déformation directe offrent une solution qui ne dépend pas du point de fonctionnement de cette dernière (amplitude et fréquence). Cependant, leur implémentation, leur maintenance, et leur mobilité posent problème. Ils nécessitent plusieurs points d’ancrage sur la source afin d’assurer le couplage mécanique. Pour répondre à cette problématique, la communauté s’est intéressée aux générateurs inertiels qui ne demandent qu’un seul point d’ancrage facilitant ainsi leur implémentation. Parmi eux, les générateurs linéaires proposent une densité de puissance intéressante mais ne sont efficaces qu’à leur fréquence de résonance. Pour des sources de vibrations fluctuantes (quelques Hertz suffisent), la puissance moyenne récupérée par ces générateurs s’effondre rapidement. La communauté a par conséquent mis en avant des générateurs capables de récupérer de l’énergie sur une plus grande bande passante : les générateurs inertiels non linéaires. Ces derniers ont cependant un inconvénient : plusieurs comportements périodiques différents peuvent être stabilisés sur la plage de fréquences utile (le passage de l’un à l’autre peut s’obtenir en imposant une perturbation extérieure). Certains comportements sont intéressants pour la récupération d’énergie (les orbites hautes) et d’autres non (les orbites basses). Le challenge proposé par ces générateurs non linéaires est donc de pouvoir atteindre les orbites hautes à chaque fois que cela est possible.

Le générateur choisi dans cette étude est le générateur inertiel non linéaire bistable. Il a été choisi pour sa facilité d’implémentation (un seul point d’ancrage sur la source) et pour la plage

de fréquences utile qu'il propose (la plus prometteuse à l'heure actuelle). Il a notamment été préféré aux générateurs "exotiques" présentés en Figure 1.15 pour avoir déjà fait ses preuves en terme de performances. L'attention sera ici plus précisément portée sur le générateur bistable réalisé à l'aide d'une poutre flambée (sans aimants) pour des raisons d'intégrabilité (problématique du support en matériau paramagnétique avec les aimants).

## 1.4 Acteurs principaux dans l'étude des générateurs bistables

La Figure 1.16 présente, à l'heure actuelle, les acteurs principaux dans l'étude des générateurs bistables pour la récupération d'énergie vibratoire. Cette figure est basée sur le nombre de publications lues durant cette thèse. Elle n'est donc pas exhaustive mais donne une idée des équipes et universités travaillant sur le sujet. Chaque université est représentée par un point sur la carte dont la taille dépend du nombre de publications lues provenant de cette université. Au delà de deux publications, le nom de l'université en question est affiché sur la carte ainsi que le nom des auteurs apparaissant le plus sur ces publications. Chaque université s'est distinguée par l'étude d'une thématique particulière des générateurs bistables (bien qu'en réalité, elles étudient toutes plusieurs thématiques en parallèle). Chaque université est donc associée à sa thématique préférentielle à l'aide du code couleur des points sur la carte.

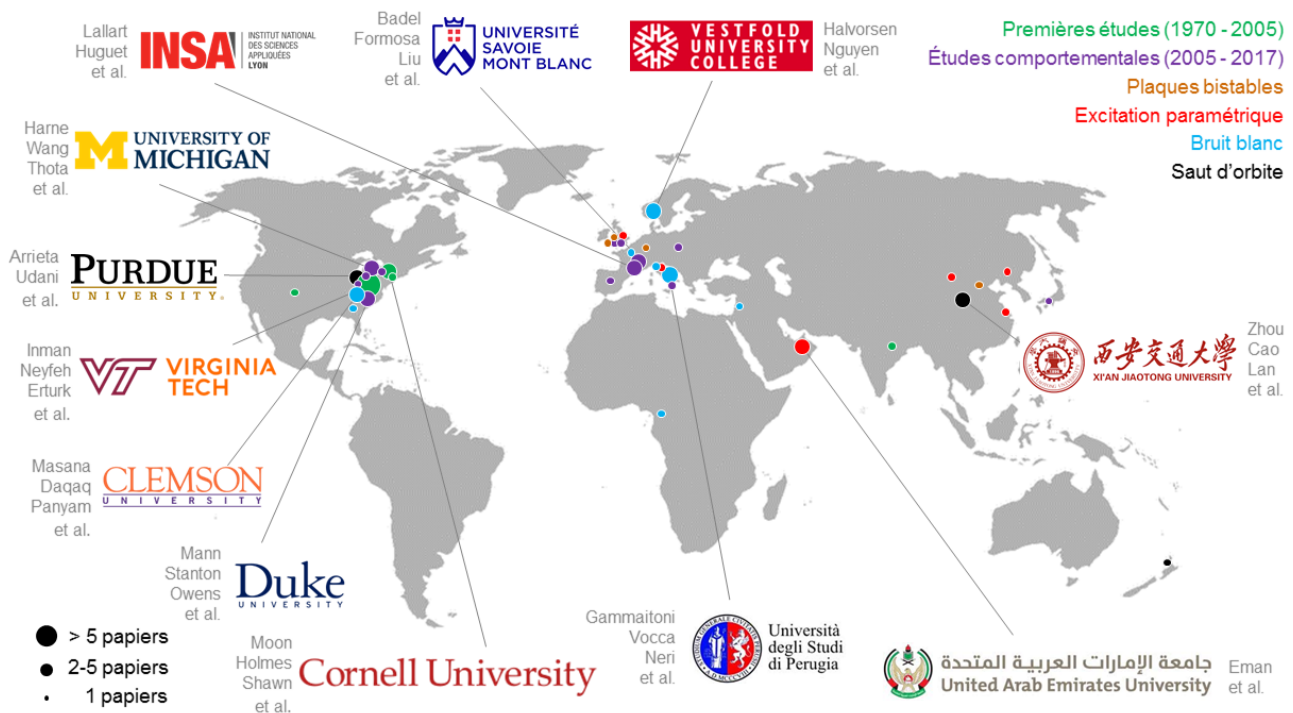


Figure 1.16 – Acteurs principaux dans l'étude des générateurs bistables pour la récupération d'énergie vibratoire (basé sur le nombre de publications étudiées durant cette thèse)

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux menés d'une part à l'INSA de Lyon par le laboratoire LGEF avec une composante principale axée sur les circuits d'interface AC-DC non linéaire pour la récupération d'énergie vibratoire [50–52] et d'autre part à l'Université Savoie-Mont-Blanc par le laboratoire SYMME avec une composante principale axée sur les générateurs inertiels non linéaires [53–55]. Ces laboratoires ont cependant tous les deux des activités liées à ces deux aspects de la récupération d'énergie vibratoire (électronique d'interface et mécanique

non linéaire) : [56, 57] (LGEF), [35, 58] (SYMME).

## 1.5 Présentation du plan de cette thèse

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent l'utilisation des générateurs bistables et sont articulés en quatre chapitres. Le premier présente une étude analytique des différents comportements en régime permanent du générateur bistable soumis à une excitation sinusoïdale d'amplitude constante (résolution par la méthode de la balance harmonique et étude de la stabilité aux petites perturbations). Ce chapitre met en évidence des comportements non étudiés précédemment pour la récupération d'énergie : les comportements sous-harmoniques pour lesquels la masse oscille à une fréquence plus basse que la fréquence d'excitation ( $n$  fois plus basse pour l'orbite sous-harmonique  $n$ ). L'étude théorique de ces comportements est complétée par un nouveau critère présenté au chapitre suivant : la robustesse de stabilité. Ce critère définit la stabilité des comportements du générateur bistable lorsque ces derniers sont soumis à des perturbations plus grandes que celles prises en compte dans l'étude de la stabilité aux petites perturbations. Ces perturbations peuvent, en conditions réelles, provenir de la source non parfaite ou peuvent représenter la non-perfection du générateur dans sa conception réelle. La robustesse de stabilité est définie par l'impulsion minimale nécessaire pour déstabiliser le comportement considéré. Plus la robustesse de stabilité d'un comportement est grand, plus il est difficile de le déstabiliser. Ce critère permet une analyse théorique plus pertinente de la réponse fréquentielle proposée par le générateur bistable. Ces travaux s'attardent ensuite sur une des problématiques principales de ces générateurs : les comportements intéressants pour la récupération d'énergie ne sont pas les seuls à pouvoir être stabilisés sur la plage de fréquences utile. Le chapitre suivant étudie donc différentes stratégies permettant de passer efficacement d'un comportement offrant une faible puissance récupérée (orbite basse) à un comportement offrant une forte puissance récupérée (orbite haute). Ces stratégies de saut d'orbite consistent à jouer directement sur les paramètres principaux du générateur bistable (raideur, flambement, *etc.*) à des instants bien particuliers. Enfin le dernier chapitre se concentre sur le circuit d'interface AC-DC entre le générateur et la charge permettant d'alimenter cette dernière à une tension continue (contrainte posée par une grande partie des applications visées). Ce chapitre détaille notamment l'influence de ce type de circuits sur les différents comportements du générateur en incluant le critère de robustesse de stabilité développé pendant cette thèse.



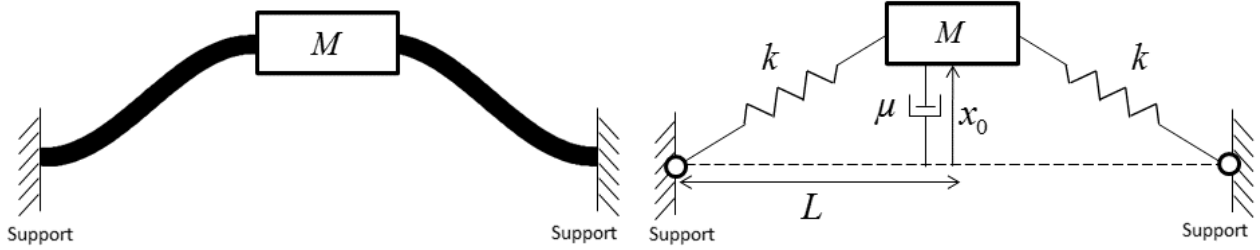
# 2

## Agrandir la bande passante avec les comportements sous-harmoniques

*Ce chapitre détaille l'étude théorique et expérimentale des différents comportements d'un générateur bistable soumis à une excitation sinusoïdale d'amplitude constante. Un modèle mathématique non linéaire est présenté puis résolu analytiquement à l'aide de la méthode de la balance harmonique. Chaque solution de ce modèle représente un comportement possible du générateur bistable en régime permanent dont la stabilité sera caractérisée par une étude aux petites perturbations. Contrairement au générateur linéaire, une des particularités du générateur bistable réside dans le fait que plusieurs comportements peuvent coexister sur une même plage de fréquences. Lorsque que l'excitation se trouve sur une de ces plages, le générateur bistable pourra se stabiliser sur l'un ou l'autre de ces comportements en régime permanent. Il pourra également changer de comportement s'il est soumis à une perturbation extérieure. L'étude présentée dans ce chapitre révèle de nouveaux comportements intéressants pour la récupération d'énergie : les comportements sous-harmoniques pour lesquels la masse oscille à une fréquence inférieure à celle de l'excitation. Ces comportements n'ont jusqu'à maintenant pas reçu beaucoup d'attention pour la récupération d'énergie car la technique commune de caractérisation des générateurs bistables (balayage fréquentiel) ne permet pas de les atteindre. N'ayant encore jamais été exploités, ils pourraient cependant permettre au générateur bistable d'agrandir sa bande passante en proposant de nouvelles plages de fréquences sur lesquelles une récupération efficace est envisageable.*

## 2.1 Prototypé 1 : mise en équation du générateur bistable électromagnétique

Le système étudié dans ce chapitre est un générateur bistable composé de deux éléments distincts : un oscillateur bistable présenté en Figure 2.1 et un élément permettant la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique. Ce dernier est constitué d'un aimant lié à la masse, couplé à une bobine liée au support. Cette solution permet ainsi de convertir l'énergie mécanique disponible dans le système en énergie électrique.



**Figure 2.1** – Schéma du principe et de la modélisation mathématique de l'oscillateur bistable (ici représenté dans une de ses deux positions d'équilibre).

Dans cette étude, l'oscillateur bistable est réalisé à partir d'une poutre et d'une masse  $M$  située en son centre. La poutre est encadrée au support par ses deux extrémités. La position de la masse par rapport au support est noté  $x$ . Une précontrainte de compression est appliquée à cette poutre (selon l'axe horizontal) jusqu'à obtenir son flambement. Le système masse/poutre devient alors bistable : la masse peut occuper deux positions stables distinctes, notées  $\pm x_0$ , de part et d'autre de l'axe horizontal. La précontrainte menant au flambement est maintenue constante tout le long de l'expérience afin d'assurer la bistabilité de l'oscillateur. Le modèle mathématique à constantes localisées associé à ce système est détaillé en Figure 2.1. Dans ce modèle, la masse est liée au support par deux ressorts de raideur  $k$  et des liaisons pivots supposées parfaites. L'amortissement  $\mu$  que subit la masse est considéré comme proportionnel à sa vitesse (donc majoritairement lié aux frottements de l'air à vitesse modérée). La longueur  $L$  définit la distance entre le centre de la masse et le support lorsque  $x = 0$ . L'effet de la gravité est négligé (le système pouvant être disposé à l'horizontale). Le support est soumis à une accélération sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude constante  $A$  représentant la source de vibration à convertir en énergie électrique. L'équation mécanique suivante régit alors le comportement de cet oscillateur bistable :

$$M(\ddot{x} + A \cos(\omega t)) = -2k \left( \sqrt{x^2 + L^2} - \sqrt{x_0^2 + L^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} - \mu \dot{x} \quad (2.1)$$

$$= -2k \left( 1 - \frac{\sqrt{x_0^2/L^2 + 1}}{\sqrt{x^2/L^2 + 1}} \right) x - \mu \dot{x} \quad (2.2)$$

Le coefficient de flambement de l'oscillateur bistable est défini par le rapport entre la position d'équilibre de la masse  $x_0$  et la longueur  $L$ . Plus le coefficient de flambement est faible, plus la force nécessaire pour que la masse passe d'une position d'équilibre à l'autre est faible. Dans la suite de cette étude le coefficient de flambement est choisi faible devant 1 afin de faciliter l'apparition de comportements pour lesquels la masse oscille d'une position d'équilibre à l'autre pour des accélérations représentatives d'applications réelles (quelques  $\text{m.s}^{-2}$  pour un moteur

électrique typique). Avec cette hypothèse, il est possible d'approcher l'Équation (2.2) par :

$$M(\ddot{x} + A \cos(\omega t)) = -2k \left( 1 - \left( 1 + \frac{x_0^2}{2L^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2L^2} \right) + o\left(\frac{x^2}{L^2}\right) \right) x - \mu \dot{x} \quad (2.3)$$

$$= -k \left( \frac{x^2}{L^2} - \frac{x_0^2}{L^2} + o\left(\frac{x^2}{L^2}\right) \right) x - \mu \dot{x} \quad (2.4)$$

L'équation mécanique régissant le comportement de l'oscillateur bistable pour un faible coefficient de flambement est donc une équation de Duffing [59] :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{x_0}{L} \sqrt{\frac{2k}{M}} \\ Q = \frac{x_0}{L} \frac{\sqrt{2kM}}{\mu} \end{cases} \quad (2.6)$$

Il s'agit de la loi la plus utilisée dans la littérature pour décrire le comportement théorique de l'oscillateur bistable dans le cadre de la récupération d'énergie vibratoire (voir les reviews de Pellegrini et al. [60], de Harne et al. [20] ou de Daqaq et al. [19]).

Pour de petites oscillations de la masse autour d'une des positions d'équilibre ( $x = x_0 + \Delta x$  avec  $\Delta x \ll x_0$ ), l'Équation (2.5) devient linéarisable selon :

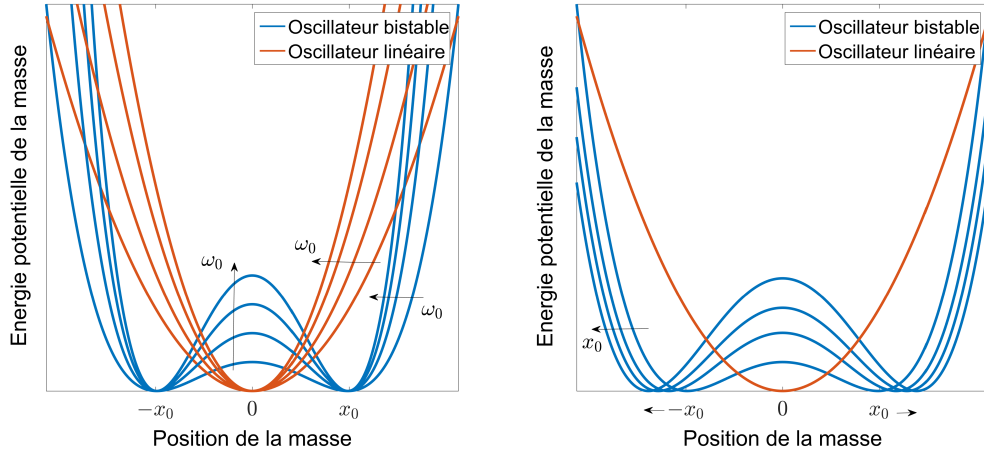
$$\ddot{\Delta x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x x_0 + x_0^2}{x_0^2} - 1 \right) (x_0 + \Delta x) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\Delta x} = -A \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \ddot{\Delta x} + \omega_0^2 \Delta x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\Delta x} + o(\Delta x) = -A \cos(\omega t) \quad (2.8)$$

Ainsi  $\omega_0$  et  $Q$  représentent la pulsation naturelle et le facteur de qualité mécanique de l'oscillateur linéaire équivalent obtenu pour de petites oscillations de l'oscillateur bistable autour d'une de ses positions d'équilibre [54]. Afin de mieux visualiser la particularité de l'oscillateur bistable, la Figure 2.2 présente l'allure de l'énergie potentielle de la masse en fonction de sa position et la compare à celle d'un oscillateur linéaire. L'influence des paramètres  $\omega_0$  et  $x_0$  y est également illustrée. La masse du système oscillant peut ici être vue comme une bille se déplaçant sur les courbes d'énergie potentielle. La vitesse et la position de la bille correspondent à la vitesse et à la position de la masse. L'excitation est, elle, prise en compte en bougeant ces courbes de droite à gauche avec la même amplitude (en déplacement) et la même fréquence. Les deux positions d'équilibre de l'oscillateur bistable correspondent aux deux puits formés par les courbes d'énergie potentielle. Plus la barrière d'énergie potentielle centrale est faible, plus il sera facile de faire passer la bille d'une position stable à l'autre. Pour une excitation donnée, la bille peut soit rester confinée dans un des deux puits (comportement intra-puits ou orbite basse) soit passer alternativement d'un puits à l'autre (comportement inter-puits ou orbite haute).

Afin de réaliser un générateur capable d'alimenter en énergie électrique un système isolé, il convient d'ajouter à l'oscillateur bistable un convertisseur électromécanique afin de pouvoir





**Figure 2.2** – Influence de la pulsation naturelle  $\omega_0$  et de la position stable  $x_0$  sur l'énergie potentielle de la masse pour un oscillateur linéaire et pour un oscillateur bistable.

convertir une partie de l'énergie mécanique de la masse en énergie électrique. Pour le premier prototype expérimental de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser un convertisseur électromagnétique composé d'un couple aimant-bobine. L'aimant est placé sur la masse tandis que la bobine est fixée au support. Lors de l'oscillation de la masse, le mouvement de l'aimant dans la bobine assure ainsi la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique. Dans un premier temps, afin de pouvoir valider le modèle mathématique en cours de construction, toute l'énergie électrique convertie est simplement dissipée par effet Joule dans une résistance connectée à la bobine. L'équation générale régissant le comportement du générateur bistable est donc maintenant composée de deux parties : la partie mécanique, régie par l'Équation (2.5) à laquelle vient s'ajouter l'influence du convertisseur électromagnétique, et la partie électrique régie par la loi de Kirchhoff :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{\beta}{M} I = -A \cos(\omega t) \\ RI = \beta \dot{x} - r_L I - L_0 \dot{I} \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec  $R$  la résistance connectée à la bobine et  $I$  le courant la traversant. Le terme  $\beta$  représente le facteur de force électromagnétique équivalent du couple aimant-bobine comme défini par Arroyo et al. [26]. Le module de l'impédance de la bobine est donnée par l'expression  $\sqrt{r_L^2 + (\omega L_0)^2}$  où  $L_0$  correspond à son inductance et  $r_L$  à sa résistance interne. Pour la bande de fréquence considérée dans cette étude (20-200 Hz), le terme inductif  $(\omega L_0)^2$  est négligeable devant le terme résistif  $r_L^2$  (à titre d'exemple, la bobine utilisée pour réaliser le prototype expérimental a une inductance de 5 mH et une résistance interne de 18  $\Omega$  donnant un terme inductif maximal de 39  $\Omega^2$  à 200 Hz et un terme résistif de 324  $\Omega^2$ ). Ainsi, dans la suite de cette étude, l'impédance de la bobine est considérée comme purement résistive. L'équation régissant le comportement du générateur bistable devient donc :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R + r_L)} \right) \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

L'effet du convertisseur électromagnétique est donc équivalent à un amortissement venant s'ajouter à l'amortissement mécanique (lui-même causé principalement par les frottements de l'air sur la masse - assertion vérifiée plus tard en Section 2.8) [61]. L'énergie mécanique convertie

en énergie électrique par le générateur bistable est alors équivalente à l'énergie dissipée dans cet amortissement électromagnétique :

$$\text{Energie convertie} = \int_0^t \frac{\beta^2}{R + r_L} \dot{x}^2 dt \quad (2.11)$$

Les paramètres du modèle mathématique caractérisant le générateur bistable sont récapitulés dans le Tableau 2.1. Les valeurs correspondent à celles du premier prototype de cette thèse. L'identification de ces valeurs est détaillée lors de la présentation des résultats expérimentaux de ce chapitre. La valeur de la résistance  $R$  connectée à la bobine a été choisie égale à la valeur de la résistance interne  $r_L$  de la bobine afin d'optimiser l'énergie maximale convertie (adaptation d'impédance).

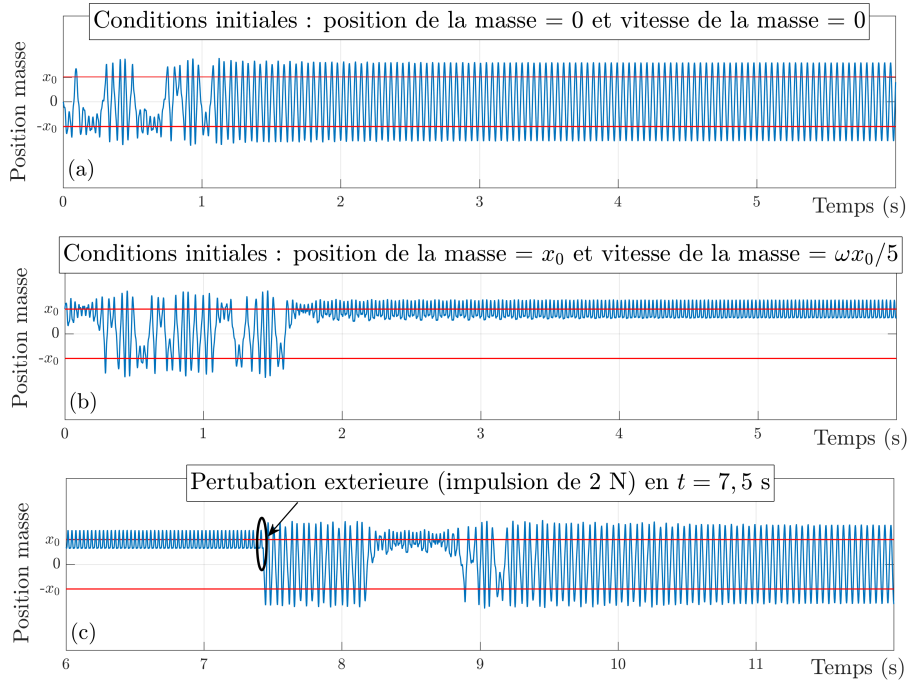
La section suivante aura pour but de résoudre l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable afin d'étudier son comportement en régime permanent, et ce en fonction de la fréquence d'excitation.

## 2.2 Résolution numérique

L'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable est une équation non linéaire. Cette équation admet une ou plusieurs solutions en régime permanent pour une même excitation. Dans le cas où plusieurs solutions existent, elles se distinguent par leurs conditions initiales (position et vitesse de la masse à l'instant  $t = 0$ ). Ceci signifie que, pour une excitation donnée, plusieurs comportements différents sont possibles en régime permanent pour le générateur bistable. Chacun d'entre eux est atteignable après une phase transitoire pour des conditions initiales de la masse particulières. Les Figures 2.3(a) et 2.3(b) illustrent cette particularité à l'aide d'une résolution numérique de l'Équation (2.10) (méthode Runge Kutta 4) pour deux conditions initiales différentes. Les deux comportements en régime permanent atteints sont effectivement différents. Il est également possible de passer de l'un à l'autre de ces comportements en appliquant une perturbation à la masse comme le montre l'exemple présenté en Figure 2.3(c). Cette perturbation est en effet synonyme de changement des conditions initiales. Pour tous les exemples présentés en Figure 2.3, les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles détaillées dans le Tableau 2.1. L'excitation est une accélération sinusoïdale d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$  et de fréquence 70 Hz.

**Table 2.1** – Paramètres du générateur bistable : prototype 1.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0, 29$	mm
Masse inertielle	$M$	30	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	229	rad.s <sup>-1</sup>
Facteur de qualité mécanique	$Q$	113	–
Amplitude de l'excitation	$A$	5	m.s <sup>-2</sup>
Fréquence de l'excitation	$\omega$	20 – 200	Hz
Facteur de force électromagnétique	$\beta$	0, 5	N.A <sup>-1</sup>
Résistance interne de la bobine	$r_L$	18	$\Omega$
Résistance de charge	$R$	18	$\Omega$



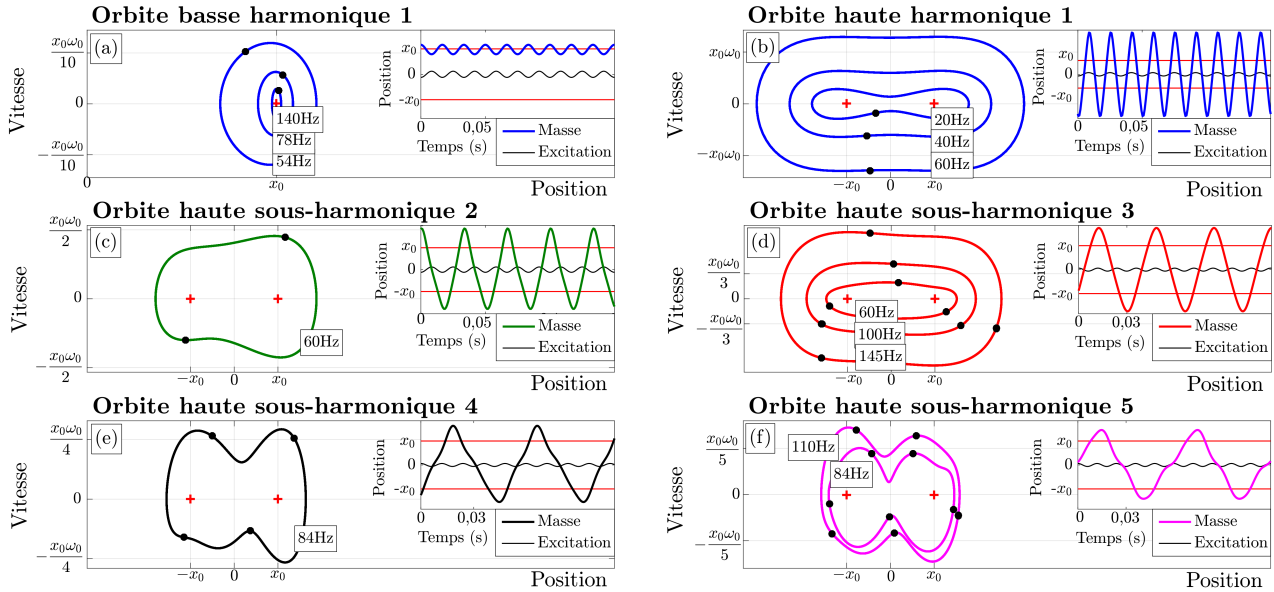
**Figure 2.3** – Signaux temporels numériques montrant différents comportements possibles du générateur bistable en régime permanent pour une même excitation ( $5 \text{ m.s}^{-2}$  à 70 Hz).

Une étude numérique résolvant l'Équation (2.10) pour différentes conditions initiales a permis d'isoler quelques comportements possibles à titre d'exemple (sélectionnés sur une plage de fréquences d'excitation allant de 20 à 200 Hz). Dans cette étude, les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont également celles du Tableau 2.1. Certains de ces comportements coexistent sur des plages de fréquences données, d'autres non. Pour chacun des comportements atteints, la Figure 2.4 présente un signal temporel et plusieurs portraits de phase (vitesse de la masse en fonction de sa position) à différentes fréquences d'excitation. Chaque portrait de phase est complété avec sa section de Poincaré (points noirs représentant les instants où la position du support atteint un maximum).

En Figure 2.4(a), la masse oscille autour d'une position d'équilibre et ne franchit pas la position  $x = 0$  ce qui correspond à une orbite basse (comportement intra-puits). En Figure 2.4(b), la masse oscille d'une position d'équilibre à l'autre (en passant régulièrement par la position  $x = 0$ ) ce qui correspond à une orbite haute (comportement inter-puits). En particulier, l'orbite harmonique 1 est atteinte lorsque la masse oscille à la même fréquence que l'excitation comme c'est le cas pour les comportements détaillés en Figure 2.4(a) (orbite basse harmonique 1) et Figure 2.4(b) (orbite haute harmonique 1).

Ces deux comportements sont bien connus dans le milieu de la récupération d'énergie pour la raison suivante : pour chacun d'eux, il est possible de trouver une plage de fréquences sur laquelle ils sont seuls à exister. Par conséquent, ils sont donc rapidement visibles car automatiquement atteints lorsque l'excitation passe par une de ces plages de fréquences. Les deux comportements harmonique 1 sont les seuls à présenter ce type de particularité.

En faisant varier les conditions initiales, il est cependant possible d'atteindre d'autres orbites. En particulier les orbites sous-harmoniques pour lesquels la masse oscille à une fréquence plus faible que l'excitation (pour l'orbite sous-harmonique  $n$ , la masse oscille à une fréquence  $n$  fois plus faible que la fréquence d'excitation). Les orbites hautes sous-harmoniques 2 à 5 sont présentées en Figure 2.4(c) à (d). Bien que les orbites basses sous-harmoniques existent, elles ne



**Figure 2.4** – Portraits de phase, sections de Poincaré (points noirs) et signaux temporels numériques de différents comportements en régime permanent du générateur bistable.

sont pas illustrées car elles sont peu intéressantes pour la récupération d'énergie à cause de leur faible amplitude d'oscillation. De même, les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre supérieur à 5 existent mais présentent des amplitudes plus faibles que les orbites présentées (l'amplitude des orbites sous-harmoniques diminue avec leur ordre).

### 2.3 Les comportements sous-harmoniques dans la littérature

Ces comportements sous-harmoniques ont déjà été présentés dans des travaux purement mécaniques portant sur l'étude systématique des systèmes oscillants non linéaires [62–65]. Ils ne proposent cependant pas d'application réelle pour ces comportements et se contentent de les mettre en lumière. Des travaux portant sur la récupération d'énergie vibratoire ont également noté leur présence lors de l'étude de générateurs non linéaires notamment ceux de Arrieta et al. [66] ainsi que ceux de Syta et al. [67]. Ces études ne se focalisent cependant pas sur ces comportements et les considèrent comme de simples curiosités.

Les comportements sous-harmoniques n'ont donc jusqu'à présent pas reçu beaucoup d'attention dans la communauté liée à la récupération d'énergie. La raison pourrait être liée à la méthode communément utilisée pour obtenir la réponse fréquentielle des générateurs bistables et plus largement des générateurs non linéaires : la méthode du balayage fréquentiel. Pour obtenir tous les comportements en régime permanent du générateur en fonction de la fréquence d'excitation, cette méthode consiste à imposer une excitation sinusoïdale d'amplitude constante et à faire varier sa fréquence de manière lente et continue sur toute la plage de fréquences étudiée, d'abord en montant puis en descendant. Si la plage de fréquences d'un comportement est entièrement incluse dans celle d'un autre, alors il n'apparaîtra pas avec la méthode du balayage fréquentiel. Pour avoir une chance de l'atteindre, il faut se placer sur sa plage de fréquences et appliquer une perturbation au générateur (c'est-à-dire, changer ses conditions initiales contrairement à ce que propose la méthode du balayage fréquentiel). Toutes les orbites sous-harmoniques présentent ce type de singularité : leur plage de fréquences est toujours entièrement incluse dans celle de l'orbite haute harmonique 1 ou dans celle de l'orbite basse harmonique 1. Ainsi, ces comportements ne sont pas visibles avec un balayage fréquentiel

qui ne révèle que les comportements atteignables automatiquement (donc existant seuls sur une partie de leur plage de fréquences) à savoir les deux orbites harmonique 1. Ceci explique sans doute le peu de considération qu'ont reçu les comportements sous-harmoniques pour la récupération d'énergie.

Comme les orbites sous-harmoniques apparaissent à des fréquences particulières, ils pourraient cependant avoir un impact positif sur la bande passante globale des générateurs bistables en proposant de nouvelles plages de fréquences sur lesquelles une orbite haute existe pour la récupération d'énergie. L'étude analytique et l'étude expérimentale qui suivent ont pour but d'évaluer la pertinence de ces comportements pour la récupération d'énergie vibratoire. Ces études constituent la première originalité de cette thèse.

## 2.4 Résolution analytique

Ces orbites s'avèreraient énergétiquement intéressantes sous deux conditions : premièrement, l'énergie récupérée lorsque le générateur bistable se trouve sur une des ces orbites doit être de même ordre de grandeur que celle récupérée sur l'orbite haute harmonique 1. Deuxièmement, leurs plages de fréquences doivent permettre d'agrandir la bande passante globale du générateur sur laquelle une orbite haute existe. Une étude analytique des comportements du générateur bistable en régime permanent est menée dans cette section afin d'évaluer ces deux conditions.

### Cas général

La suite présente donc la méthodologie utilisée pour résoudre analytiquement l'Équation (2.10) régissant le comportement des générateurs bistables dans le but d'isoler leurs comportements sous-harmoniques en régime permanent et d'évaluer leur pertinence pour la récupération d'énergie. Trois hypothèses ont été faites : (i) le générateur bistable est en régime permanent périodique ; (ii) la réponse est approchable par une série de Fourier tronquée à l'ordre  $N$  ; (iii) le comportement étudié est supposé être l'orbite sous-harmonique  $n$ . La réponse recherchée est donc composée d'un terme périodique prépondérant  $\omega/n$  (avec  $\omega$ , la pulsation de l'excitation) suivie de ses harmoniques  $k\omega/n$  avec  $k$  variant de 2 à  $N$  ainsi que d'un terme constant correspondant au déplacement moyen de l'orbite. La réponse recherchée, solution de l'Équation (2.10), est donc de la forme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \quad (2.12)$$

Où  $a_0$  représente la moyenne temporelle du déplacement de l'orbite considérée. Si  $a_0$  est nul, alors la solution est une orbite haute. Si  $a_0$  est proche de  $x_0$  ou  $-x_0$ , alors la solution est une orbite basse. Comme la réponse recherchée est en régime permanent, les  $2N + 1$  inconnues  $(a_0, a_k, b_k), k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  sont indépendantes du temps. L'Équation (2.12) est introduite dans l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable pour donner l'expression présentée en Équation (2.13).

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \right) \\
& + \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \right)^3 \\
& - \frac{\omega_0^2}{2} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \right) \\
& + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) \frac{d}{dt} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \right) = -A \cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Le terme au cube est développé à l'aide de la formule du multinôme de Newton. Tous les produits de sinus et cosinus ainsi que tous les termes sinus ou cosinus élevés à un certain exposant sont ensuite développés pour aboutir à la formule détaillée par l'Équation (2.14). À noter que la constante  $b_0$  est une constante artificielle qui a été ajoutée dans l'Équation (2.14) afin d'en simplifier la notation. Cette constante est nulle ( $b_0 = 0$ ). À noter également que la deuxième somme apparaissant dans cette formule se fait sur toutes les combinaisons possibles des trois variables  $(i, k, s)$ , chacune prise dans l'ensemble des entiers naturels allant de 0 à  $N$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\{ \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 a_k + \frac{\omega_0^2}{2} a_k - \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) k \frac{\omega}{n} b_k \right] \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 b_k + \frac{\omega_0^2}{2} b_k + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) k \frac{\omega}{n} a_k \right] \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
& - \sum_{(i,k,s) \in \llbracket 0, N \rrbracket^3} \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} \left\{ (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s - b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i+k+s) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
& \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s + b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i+k-s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s - b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i-k+s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad + (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s + b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i-k-s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s + a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i+k+s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s + a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i+k-s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s - a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i-k+s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
& \quad \left. + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s - a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i-k-s) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad -A \cos(\omega t) = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les termes qui composent l'Équation (2.14) représentent les différentes forces périodiques qui agissent sur la masse. L'équation décrit quant à elle la façon dont elles s'équilibrent. La forme de la réponse recherchée en régime permanent décrite par l'Équation (2.12) est une série de Fourier tronquée dont les termes harmoniques supérieurs à  $N\omega/n$  sont considérés comme négligeables

devant les autres termes. De la même façon, les termes de force présents dans l'Équation (2.14) dont la pulsation excède  $N\omega/n$  sont aussi considérés comme négligeables devant les autres termes. Seuls  $2N + 1$  termes de force restent finalement dans l'Équation (2.14) : un terme constant,  $N$  termes sinus dont la pulsation varie de  $\omega/n$  à  $N\omega/n$  et  $N$  termes cosinus dont la pulsation varie de  $\omega/n$  à  $N\omega/n$ . La méthode de la balance harmonique est alors utilisée : les  $2N + 1$  termes restant ont tous des pulsations et/ou des phases différentes et leur somme est nulle, ainsi chacun d'eux est considéré comme nul. Cette méthode aboutit à un système non linéaire soluble de  $2N + 1$  équations et  $2N + 1$  inconnues.

Pour un générateur donné défini par les paramètres  $(M, x_0, \omega_0, Q, \beta, r_L, R)$  et pour une excitation donnée  $A \cos(\omega t)$ , ce système d'équations admet une ou plusieurs solutions réelles du fait de sa non linéarité. Chaque solution représente un comportement sous-harmonique  $n$  possible pour le générateur bistable en régime permanent. Ces derniers sont donc définis par un jeu unique de  $2N + 1$  constantes  $(a_{s0}, a_{sk}, b_{sk})$  avec  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  vérifiant :

$$x_s(t) = a_{s0} + \sum_{k=1}^N \left\{ a_{sk} \cos\left(k \frac{\omega}{n} t\right) + b_{sk} \sin\left(k \frac{\omega}{n} t\right) \right\} \quad (2.15)$$

Où  $x_s$  représente la position de la masse au cours du temps pour le comportement sous-harmonique  $n$  considéré et où le jeu de constante  $(a_{s0}, a_{sk}, b_{sk})$  avec  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  est une solution approchée de l'Équation (2.14) par la méthode de la balance harmonique.

Pour obtenir la réponse fréquentielle du générateur bistable détaillant tous les comportements sous-harmoniques possibles en régime permanent, l'Équation (2.10) est résolue de cette manière pour plusieurs fréquences d'excitation et pour plusieurs valeurs de  $n$ . Du fait de ces résolutions successives et de la non linéarité du système d'équations à résoudre, plusieurs comportements pourront ainsi être trouvés (et donc pourront coexister) sur la même plage de fréquences. Il s'agit ici d'une propriété caractéristique des générateurs régis par une loi de comportement non linéaire. Le générateur adoptera alors l'un ou l'autre de ces comportements en régime permanent en fonction des conditions initiales (position et vitesse de la masse). À noter qu'il sera également possible de passer d'un comportement à l'autre en régime permanent en appliquant une perturbation au générateur (ce qui revient à changer ses conditions initiales).

## Validation avec l'étude classique du comportement harmonique 1

Afin de valider le cas général, prenons l'exemple bien connu de l'étude du comportement harmonique 1 ( $n = 1$ ) du générateur bistable. Pour cette étude la réponse recherchée en régime permanent peut être modélisée pour une série de Fourier du premier ordre ( $N = 1$ ) :

$$x_{\text{harmonique}_1}(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \quad (2.16)$$

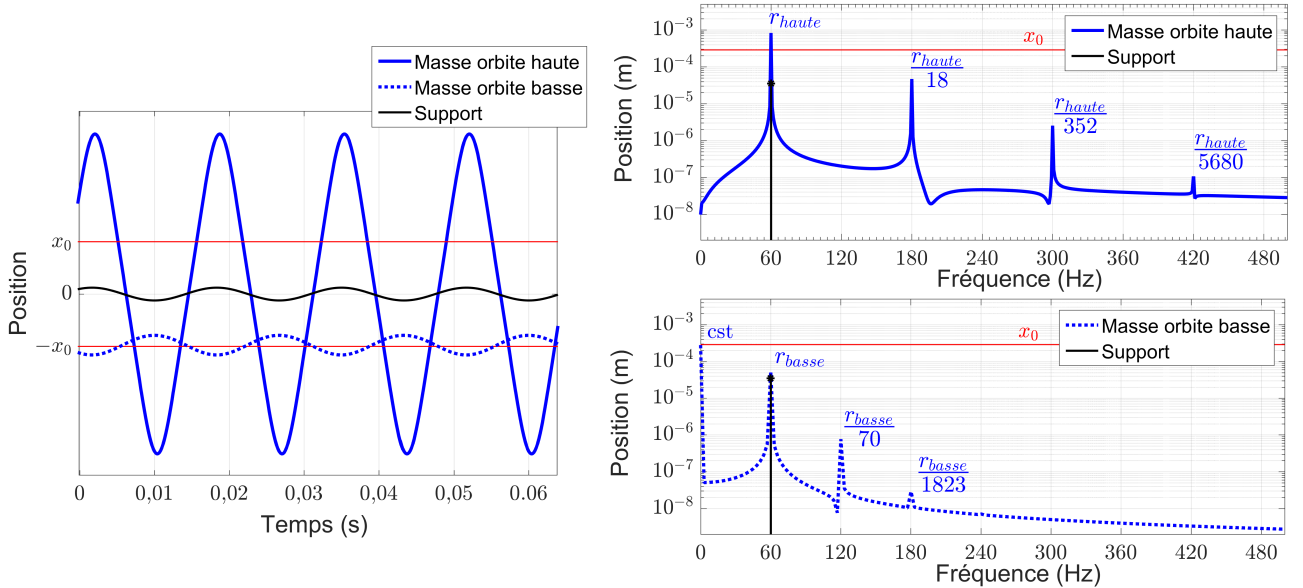
Des exemples de signaux temporels du comportement harmonique 1 et de leur décomposition en série de Fourier, tous issus de l'étude numérique, sont présentés en Figure 2.5 afin de justifier cette hypothèse.

La réponse recherchée est introduite dans l'équation régissant le comportement du générateur bistable pour donner l'expression détaillée en Équation (2.14) avec  $(n, N) = (1, 1)$ . La deuxième somme de cette formule se fait sur toutes les combinaisons possibles des trois variables  $(i, k, s)$ , chacune prise dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ , soit  $2^3 = 8$  combinaisons possibles. En regroupant

les termes de même pulsation, il vient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_0^2}{2} a_0 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (2a_0^3 + 3a_0 a_1^2 + 3a_0 b_1^2) \\
 & + \left[ \omega^2 a_1 + \frac{\omega_0^2}{2} a_1 - \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) \omega b_1 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (3a_1^3 + 8a_0^2 a_1 + 3a_1 b_1^2 + 4a_1 a_0^2) \right] \cos(\omega t) \\
 & + \left[ \omega^2 b_1 + \frac{\omega_0^2}{2} b_1 + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) \omega a_1 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (3b_1^3 + 8a_0^2 b_1 + 3b_1 a_1^2 + 4b_1 a_0^2) \right] \sin(\omega t) \\
 & - \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (a_0 a_1^2 - a_0 b_1^2) \cos(2\omega t) \\
 & - \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (a_0 a_1 b_1 + a_0 b_1 a_1) \sin(2\omega t) \\
 & - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (a_1^3 - 3a_1 b_1^2) \cos(3\omega t) \\
 & - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (3a_1^2 b_1 - b_1^3) \sin(3\omega t) \\
 & - A \cos(\omega t) = 0
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

La série de Fourier représentant la réponse recherchée est tronquée à la première harmonique. Ainsi, toutes les pulsations supérieures à  $\omega$  sont considérées comme négligeables. De la même manière, tous les termes de force de l'Équation (2.17) dont la pulsation est supérieure à  $\omega$  sont négligés ne laissant que trois termes : un terme constant et deux termes de pulsation  $\omega$ . La méthode de la balance harmonique est alors appliquée : chacun de ces trois termes est considéré comme nul. Cette méthode donne donc un système non linéaire soluble de trois inconnues ( $a_0, a_1, b_1$ ) et trois équations détaillées en Équation (2.18).



**Figure 2.5** – Exemples de signaux temporels du comportement harmonique 1 et de leur décomposition en série de Fourier (étude numérique)



$$\begin{cases} \frac{\omega_0^2}{2} a_0 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (2a_0^3 + 3a_0 a_1^2 + 3a_0 b_1^2) = 0 \\ \omega^2 a_1 + \frac{\omega_0^2}{2} a_1 - \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) \omega b_1 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (3a_1^3 + 12a_0^2 a_1 + 3a_1 b_1^2) - A = 0 \\ \omega^2 b_1 + \frac{\omega_0^2}{2} b_1 + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \right) \omega a_1 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} (3b_1^3 + 12a_0^2 b_1 + 3b_1 a_1^2) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Ce système étant non linéaire, il peut admettre plusieurs solutions réelles. Chacune d'entre elles correspond à un comportement harmonique 1 possible de générateur bistable en régime permanent à la pulsation d'excitation  $\omega$ . À noter que tous ces comportements possibles peuvent être séparés en deux grandes catégories : les orbites hautes (pour lesquelles  $a_0 = 0$ ) et les orbites basses (pour lesquelles  $a_0 \neq 0$ ). Ce système est résolu pour différentes pulsations d'excitation afin d'obtenir la réponse fréquentielle du générateur bistable décrivant tous les comportements harmonique 1 possibles en régime permanent en fonction de la fréquence d'excitation. La réponse fréquentielle complète du générateur bistable incluant les comportements sous-harmoniques est obtenue en procédant de la même manière pour différentes valeurs de  $n$ .

## 2.5 Stabilité aux petites perturbations

La section précédente a permis de résoudre analytiquement l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable afin d'isoler tous les comportements sous-harmoniques possibles en régime permanent en fonction de la fréquence d'excitation (certains d'entre eux pouvant coexister sur la même plage de fréquences). Chaque comportement solution de l'Équation (2.10) est noté  $x_s$  dont l'expression est décrite par l'Équation (2.15). Une étude de stabilité aux petites perturbations est alors menée pour chacun de ces comportements. La méthode détaillée dans cette section est une méthode communément utilisée dans toute étude portant sur les équations différentielles [68]. Dans la suite, les vecteurs seront soulignés une fois et les matrices deux fois.

L'idée générale de cette analyse consiste à ajouter une petite impulsion aux différents comportements du générateur bistable et d'étudier l'évolution de la réponse au cours du temps. La réponse à cette impulsion notée  $x$  est décomposée en deux termes : la solution en régime permanent étudiée  $x_s$  et une composante  $z$ , appelée perturbation, engendrée par l'impulsion. À tout instant, la perturbation est considérée comme négligeable devant la solution en régime permanent  $x_s$  :

$$\begin{cases} x(t) = x_s(t) + z(t) \\ \|z(t)\| \ll \|x_s(t)\| \end{cases} \quad (2.19)$$

Si  $z$  tend vers 0, la solution  $x_s$  est stable aux petites perturbations. Si  $z$  tend vers l'infini, la solution est instable aux petites perturbations (donc non atteignable en conditions réelles). L'impulsion initiale (introduite à l'instant  $t = t_0$ ) est modélisée par des conditions initiales non nulles de la perturbation  $z$  :

$$\text{impulsion} = \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

L'Équation (2.19) est introduite dans l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable puis linéarisée par rapport à  $z$  (petit devant  $x_0$ ) pour donner l'équation différentielle suivante, régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(t)^2 & -\frac{\omega_0}{Q} - \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Avec  $\underline{\underline{M}}(t)$  une matrice carrée  $2 \times 2$ , à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , connue à chaque instant  $t$ . Cette matrice est périodique de période  $T = 2\pi n/\omega$  ( $x_s$  est un comportement sous-harmonique  $n$ ). La matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  de l'Équation (2.22) est alors introduite. Par définition, elle donne la relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{\underline{M}}(t)\underline{\underline{R}}(t, t_0) \\ \underline{\underline{R}}(t+T, t_0+T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \end{cases} \quad (2.23)$$

La matrice résolvante est une matrice carrée  $2 \times 2$ , à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , qui peut être numériquement calculée à chaque instant  $t$ . En effet, en intégrant numériquement l'Équation (2.22) de  $t_0$  à  $t$  à deux reprises, il est possible de remonter à  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$ . Pour ce faire, les deux intégrations numériques doivent partir de deux conditions initiales de la perturbation égales aux deux vecteurs de la base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \dot{z}_1(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{intégration numérique de}}{\text{l'Équation (2.22) de } t_0 \text{ à } t} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_2(t_0) \\ \dot{z}_2(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{intégration numérique de}}{\text{l'Équation (2.22) de } t_0 \text{ à } t} \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ainsi, la matrice résolvante est calculable en chaque instant. Il est à noter que cette matrice détermine entièrement la convergence ou la divergence de la perturbation quel que soit l'impulsion initiale. L'étude de stabilité de la solution en régime permanent  $x_s$  est donc ramenée à l'étude de convergence de la matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$ .

La matrice  $\underline{\underline{M}}(t)$  est une matrice périodique de période  $T$  donc la théorie de Floquet s'applique [69]. Ainsi, il existe deux matrices carrées  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , l'une indépendante du temps  $\underline{\underline{B}}$  et l'autre  $2T$  périodique  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  telles que :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0)e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \quad (2.25)$$

La matrice  $\underline{\underline{B}}$  est à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , elle admet donc exactement deux valeurs propres complexes ( $\lambda_1, \lambda_2$ ). Ces valeurs propres sont elles aussi indépendantes du temps. Il existe donc une matrice de passage  $\underline{\underline{P}}$  inversible et indépendante du temps telle que :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0)\underline{\underline{P}}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} \underline{\underline{P}} \quad (2.26)$$

Comme la matrice  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  est périodique dans le temps et comme la matrice  $\underline{\underline{P}}$  est indépendante du temps, alors la convergence de la matrice résolvante (donc la stabilité de la solution en régime permanent) est entièrement définie par les valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$  :

$$x_s \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la matrice  $\underline{\underline{B}}$  afin de pouvoir calculer ses valeurs propres. Pour ce faire, il est important de constater que la matrice  $\underline{\underline{B}}$  est directement liée à la matrice résolvante évaluée en  $t = 2T$  et  $t_0 = 0$  :

$$\underline{\underline{R}}(2T, 0) = \underline{\underline{Q}}(2T, 0)e^{-2T\underline{\underline{B}}} \quad (2.28)$$

$$= \underline{\underline{Q}}(0, 0)e^{-2T\underline{\underline{B}}} \quad (2.29)$$

$$= e^{-2T\underline{\underline{B}}} \quad (2.30)$$

Or la matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  est, elle, numériquement calculable en suivant l'Équation (2.24). Cette matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  admet deux valeurs propres complexes  $(\beta_1, \beta_2)$  qui sont par conséquent directement liées aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de la matrice  $\underline{\underline{B}}$  :

$$\begin{cases} \beta_1 = e^{-2\lambda_1} \\ \beta_2 = e^{-2\lambda_2} \end{cases} \quad (2.31)$$

Ainsi, la stabilité de la solution en régime permanent se trouve déterminée par le module des valeurs propres de la matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  :

$$x_s \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta_1| < 1 \\ |\beta_2| < 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

En conclusion, la stabilité aux petites perturbations de la solution en régime permanent  $x_s$  est déterminée par le module des valeurs propres  $(\beta_1, \beta_2)$  de la matrice résolvante (définie par l'Équation (2.23)) évaluée en  $(t = 2T, t_0 = 0)$ . Cette matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  est calculée grâce à deux intégrations numériques de l'Équation (2.22) dont les valeurs initiales correspondent aux vecteurs de la base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  (voir Équation (2.24)). La solution  $x_s$  est alors stable aux petites perturbations si et seulement si  $|\beta_1|$  et  $|\beta_2|$  sont tous les deux inférieurs à 1.

## 2.6 Résultats théoriques

L'étude théorique présentée jusqu'ici consiste donc à trouver une solution approchée de l'équation régissant le comportement des générateurs bistables à l'aide de la balance harmonique pour isoler tous les comportements sous-harmoniques possibles en régime permanent et ce en fonction de la fréquence d'excitation. La stabilité de ces comportements aux petites perturbations est ensuite définie en leur injectant une petite perturbation et en analysant l'évolution du terme lié à cette perturbation au cours du temps (convergent ou divergent). Dans le cas où cette perturbation diverge, le comportement en régime permanent sera qualifié donc non atteignable physiquement.

La suite présente les résultats théoriques obtenus en appliquant cette méthode. Les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles détaillées dans le Tableau 2.1. Elles correspondent au premier prototype réalisé pendant cette thèse qui sera présenté dans la section expérimentale qui suit. Les différents systèmes d'équations non linéaires ont été résolus à l'aide du logiciel Matlab et plus particulièrement à l'aide de la fonction `lsqnonlin`. La série de Fourier utilisée pour décrire la réponse en régime permanent des différents comportements recherchés a été tronquée à l'ordre  $N = 6$ . Pour justifier cette hypothèse, la Figure 2.6 présente des exemples de décomposition en série de Fourier des différents comportements recherchés (étude numérique). Il est intéressant de noter sur cette figure que les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre impair (1, 3 et 5) sont composées uniquement d'harmoniques impaires de la fondamentale et d'une composante continue faible. Les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair (2 et 4) sont quant à elles composées de toutes les harmoniques de la fondamentale et d'une composante continue non négligeable.

La Figure 2.7 présente trois réponses fréquentielles différentes afin de décrire les comportements possibles en régime permanent du générateur. La première réponse fréquentielle, Figure 2.7(a), montre l'amplitude d'oscillation de chaque comportement (différence entre la position maximale et la position minimale de la masse divisée par deux). La seconde montre la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. La troisième détaille la puissance moyenne convertie dans la résistance  $R$  connectée au convertisseur d'énergie électromagnétique. La valeur de cette résistance a été choisie égale à la résistance interne de la bobine afin de maximiser le transfert d'énergie par adaptation d'impédance. Sur cette dernière figure, seuls les comportements stables (physiquement atteignables) ont été représentés.

Afin de simplifier le raisonnement, la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum est calculée dans la suite en considérant que l'expression du déplacement de la masse peut être approchée par sa composante harmonique fondamentale. Pour être plus précis, l'hypothèse consiste à dire que l'instant où la position de la masse atteint un maximum est le même que l'instant où la composante fondamentale du déplacement de la masse atteint un maximum. Cette hypothèse est illustrée en Figure 2.8 sur quelques exemples.

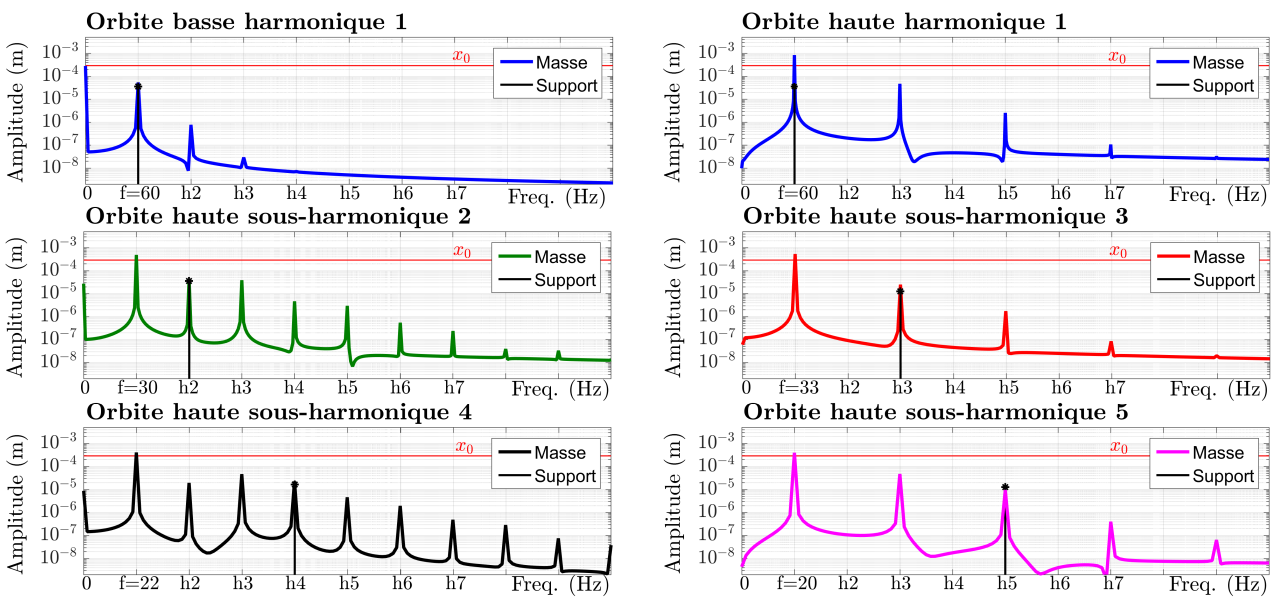


Figure 2.6 – Exemple de décompositions en série de Fourier des différents comportements recherchés (étude numérique). En abscisse, "f" désigne la composante fondamentale et "h" désigne les différentes harmoniques.

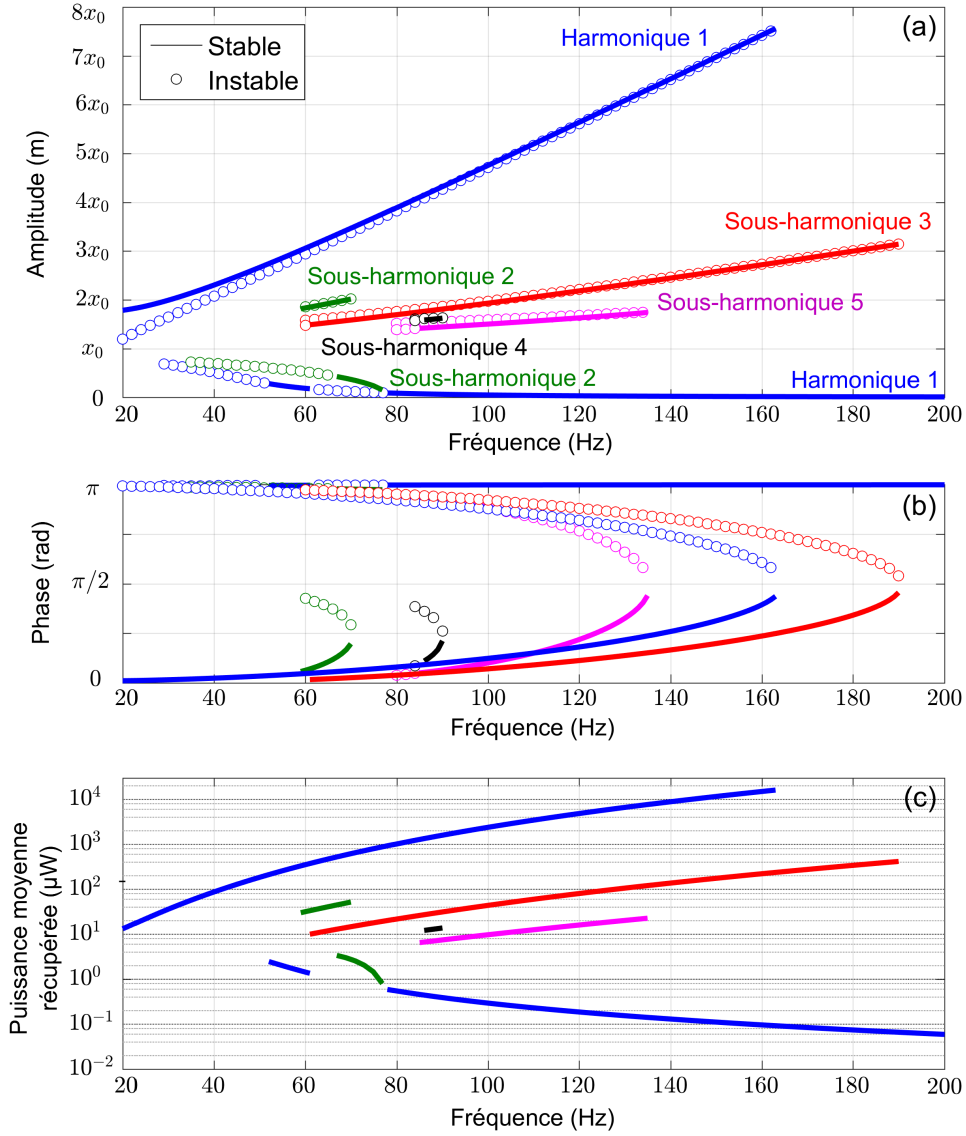
Cette phase est calculée de la manière suivante. La composante fondamentale du déplacement de la masse s'écrit :

$$\begin{aligned} x_{\text{fondamentale}}(t) &= a_1 \cos\left(\frac{\omega}{n}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos\left(\frac{\omega}{n}t + \psi\right) \quad \text{avec} \quad \psi = \tan^{-1}\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) + \pi \quad (\text{si } a_1 < 0) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Soit  $t_1$  l'instant où la masse atteint un maximum :

$$[\text{Phase du déplacement de la masse en } t_1] = \frac{\omega}{n}t_1 + \psi = 0 \pmod{2\pi} \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow t_1 = -\psi \frac{n}{\omega} \pmod{2\pi \frac{n}{\omega}} \quad (2.35)$$



**Figure 2.7** – Spectres analytiques du générateur bistable pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$  : (a) amplitude des différents comportements (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (c) puissance moyenne récupérée sur les comportements stables.

L'excitation est une accélération monochromatique d'amplitude constante  $A \cos(\omega t)$ . Le déplacement de l'excitation est donc de la forme  $A/\omega^2 \cos(\omega t + \pi)$ . La phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (en  $t_1$ ) s'écrit donc :

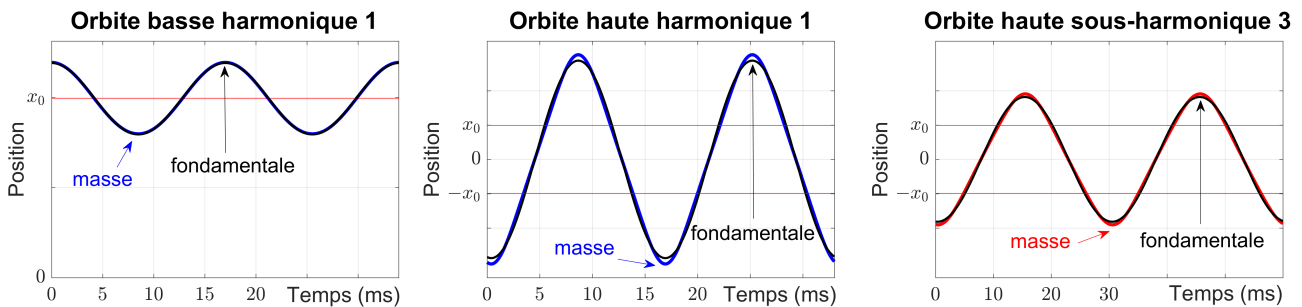
$$\begin{aligned} [\text{Phase du déplacement de l'excitation en } t_1] &= \omega t_1 + \pi \pmod{2\pi} \\ &= -n\psi + \pi \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (2.36)$$

La Figure 2.7(b) détaille la valeur de cette phase pour chaque comportement. Si cette phase vaut zéro, alors le déplacement de l'excitation atteint un maximum quand la position de la masse atteint un maximum. Si cette phase vaut  $\pi$ , alors le déplacement de l'excitation atteint un minimum quand la position de la masse atteint un maximum. Il est important d'appuyer ici sur le fait que la phase calculée est celle du déplacement de l'excitation lorsque la position de la masse atteint un maximum. Cette phase est généralement positive : le déplacement du support est en avance par rapport au déplacement de la masse. Cette manière de caractériser la relation entre le mouvement de la masse et celui de l'excitation est peu commune puisque habituellement la phase calculée est celle du déplacement de la masse quand le déplacement de l'excitation atteint un maximum. Elle aura néanmoins un avantage pour l'étude des comportements sous-harmoniques comme discuté ci-après.

Les réponses fréquentielles présentées ici sont bien plus riches en comportements que celles habituellement présentées dans la littérature. Sept comportements différents sont visibles sur la Figure 2.7(a) : cinq orbites hautes pour lesquelles l'amplitude est supérieure à  $x_0$  et deux orbites basses pour lesquelles l'amplitude est inférieure à  $x_0$ . La valeur moyenne dans le temps des orbites hautes vaut zéro (ou bien est proche de zéro pour les orbites hautes sous-harmonique d'ordre pair). La valeur moyenne dans le temps des orbites basses est proche de  $x_0$  ou de  $-x_0$ . Elles ne sont pas représentées sur ces réponses fréquentielles car elles n'apportent pas d'information supplémentaire (les orbites hautes et basses sont déjà différenciables par leur amplitude).

Les cinq orbites hautes de la Figure 2.7(a) vont de l'harmonique 1 à la sous-harmonique 5. Bien que les orbites hautes sous-harmoniques existent au delà de l'ordre 5, elles n'ont pas été représentées ici car la puissance récupérée qui leur est associée est trop faible (l'amplitude d'oscillation de la masse des orbites hautes sous-harmoniques diminue avec leur ordre).

Les deux orbites basses représentées sont l'harmonique 1 et la sous-harmonique 2. Ces orbites sont évidemment peu intéressantes pour la récupération d'énergie. Elles sont cependant présentées afin de connaître les plages de fréquences sur lesquelles les orbites hautes ne sont pas automatiquement atteintes. Sur ces plages de fréquences, le générateur bistable pourra donc se



**Figure 2.8** – Différence entre le signal du déplacement de la masse (polychromatique) et le signal de sa composante harmonique fondamentale (étude analytique). L'orbite basse et l'orbite haute harmonique 1 sont excitées à 60 Hz. L'orbite haute sous-harmonique 3 est excitée à 100 Hz.

stabiliser en régime permanent soit sur une orbite haute soit sur une orbite basse en fonction des conditions initiales. Les orbites basses sous-harmoniques d'ordre supérieur à 2 existent mais ont toutes une plage de fréquences incluse dans celle de l'orbite basse harmonique 1. Elles n'apportent donc pas d'information supplémentaire et ne sont pas présentées en Figure 2.7(a). Pour rappel, la Figure 2.4 présentée plus tôt détaille un signal temporel et plusieurs portraits de phase obtenus numériquement pour chacun des comportements présentés ici.

Il est à noter que seulement deux comportements existent seuls sur une certaine plage de fréquences : l'orbite haute harmonique 1 et l'orbite basse harmonique 1. Ce sont donc les seuls comportements qui apparaissent automatiquement sur la plage de fréquences étudiée. Pour atteindre les autres comportements sur leur plage de fréquences respective, il faudra alors forcer le générateur bistable à changer d'orbite en changeant ses conditions initiales (en lui appliquant une perturbation extérieure par exemple).

La Figure 2.7(b) révèle quant à elle une caractéristique intéressante des orbites hautes stables du générateur bistable. La phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum croît de manière monotone sur toute leur plage de fréquences. De plus, cette phase commence systématiquement à 0 et finit systématiquement à  $\pi/2$  pour les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre impair et  $\pi/4$  pour les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair. Il est donc possible de se servir de ce critère pour définir les limites de la plage de fréquences théorique de chaque orbite haute : la limite inférieure sera dorénavant définie comme la fréquence pour laquelle la phase vaut 0 tandis que la limite supérieure (communément appelée la fréquence de coupure) sera dorénavant définie comme la fréquence pour laquelle la phase vaut  $\pi/2$  pour les sous-harmoniques impairs et  $\pi/4$  pour les sous-harmoniques pairs. En conditions expérimentales, lorsque le générateur bistable se stabilise en régime permanent sur un certain comportement, ce critère permet de déterminer si le générateur se trouve proche du début ou de la fin de la plage de fréquences théorique de ce comportement. Cette particularité a déjà été rapportée dans les travaux de Harne et al. pour les comportements harmonique 1 [70]. Elle est ici étendue aux comportements sous-harmoniques du générateur bistable. Si la phase avait été définie de manière plus classique (en calculant la phase du déplacement de la masse quand la position de l'excitation atteint un maximum plutôt que l'inverse comme ici), chaque comportement sous-harmonique d'ordre impair aurait eu une fréquence de coupure définie par une phase de  $\pi/2n$  et chaque comportement sous-harmonique d'ordre pair aurait eu une fréquence de coupure définie par une phase de  $\pi/4n$  ( $n$  étant l'ordre du comportement sous-harmonique considéré). Le fait de définir la phase différemment dans cette étude permet d'avoir un critère unique pour la fréquence de coupure de tous les comportements sous-harmoniques d'ordre impair ( $\pi/2$ ) et un critère unique pour la fréquence de coupure de tous les comportements sous-harmoniques d'ordre pair ( $\pi/4$ ). Il est à noter que, pour les sous-harmoniques d'ordre pair, le déplacement de la masse comporte une composante continue (voir Figure 2.6). La phase du déplacement de l'excitation donne ainsi des résultats différents que l'on prenne un maximum ou un minimum du déplacement de la masse. Pour nos représentations, nous avons systématiquement choisi la solution qui est comprise entre 0 et  $\pi/2$ .

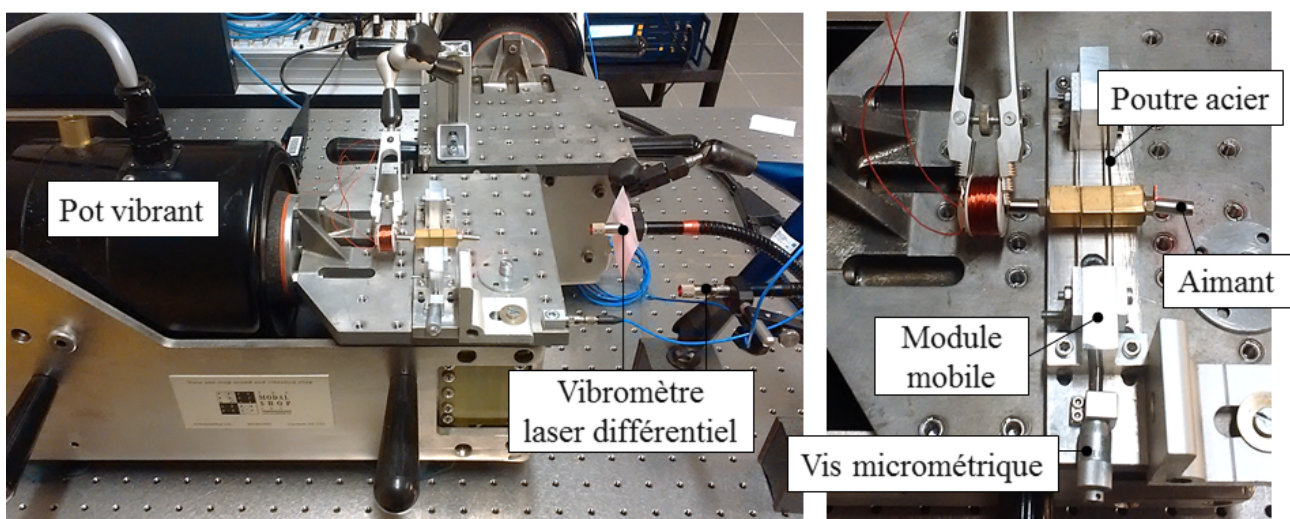
La Figure 2.7(c) présente la puissance moyenne récupérée sur chacun des comportements du générateur bistable. Il est à noter qu'une partie de l'orbite haute sous-harmonique 3 n'est pas incluse dans la plage de fréquences de l'orbite haute harmonique 1 (de 160 Hz à 170 Hz). L'utilisation de cette orbite sous-harmonique 3 permettrait donc d'agrandir légèrement la bande passante du générateur bistable. Cependant, la puissance moyenne récupérée sur cette dernière (avec un maximum de 416  $\mu$ W) est relativement faible comparée à celle récupérable sur l'orbite

harmonique 1 (avec un maximum de 17 mW) diminuant, a priori, la pertinence de ce comportement sous-harmonique 3 pour la récupération d'énergie d'un point de vue théorique en ne considérant que le critère de stabilité aux petites perturbations.

## 2.7 Validation expérimentale

### Banc d'essai et identification

La Figure 2.9 montre le premier prototype expérimental de cette thèse ainsi que le banc de mesure utilisé. L'oscillateur bistable a été réalisé de la manière suivante : une masse composée de trois cubes en laiton vient pincer deux lamelles parallèles en acier ressort. Ces lamelles sont ensuite fixées à deux modules en aluminium eux-même liés au support. L'un de ces deux modules peut se translater par rapport au support alors que l'autre est fixe. Une vis micrométrique permet de pousser ce module mobile dans la direction du module fixe afin de faire flamber les deux lamelles d'acier pour obtenir un oscillateur bistable. Lors de cette expérience, les deux modules en aluminium ont été rapprochés de  $1,5 \mu\text{m}$  menant à des positions stables de  $\pm 0,29 \text{ mm}$ . Ainsi, le coefficient de flambement de l'oscillateur bistable, défini par le rapport entre la position stable  $x_0$  et la longueur des lamelles d'acier, est maintenu petit devant 1 (environ 1 %) afin de pouvoir accéder aux orbites hautes pour des niveaux d'accélération accessibles pendant l'expérience (ici  $5 \text{ m.s}^{-2}$ ) et représentatifs des niveaux d'accélération présents en conditions réelles. De plus, ce faible niveau de flambement confirme la validité de l'équation mécanique de Duffing utilisée en Équation (2.5) pour modéliser l'oscillateur bistable. L'utilisation de deux lamelles d'acier plutôt qu'une a, quant à elle, permis d'enlever un degré de liberté non désirable à la masse (rotation selon l'axe passant par les deux modules en aluminium). Deux aimants ont ensuite été placés de part et d'autre de la masse afin de conserver la symétrie du système. L'un d'eux est couplé à une bobine elle-même connectée à une résistance pour former le convertisseur électromagnétique. Les dimensions et caractéristiques de tous ces éléments sont détaillées dans le Tableau 2.2.



**Figure 2.9** – Prototype 1 : générateur bistable électromagnétique réalisé à partir de deux poutres flambées (à l'aide d'une vis micrométrique) et placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante.



**Table 2.2** – *Dimensions du prototype 1.*

Élément	Valeur	Unité
Masse inertielle (trois cubes en laiton et deux aimants)	30	g
Cube en laiton (1)	$10 \times 10 \times 10$	$\text{mm}^3$
Lamelle d'acier (1)	$28 \times 10 \times 0,1$	$\text{mm}^3$
Rapprochement des deux modules (pour le flambement)	1,5	$\mu\text{m}$
Positions stables	$\pm 0,29$	mm

Le prototype a été monté sur un pot vibrant commandé par une boucle d'asservissement afin de lui imposer une accélération sinusoïdale d'amplitude constante de  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . La position de la masse et la position du support ont été mesurées à l'aide de deux vibromètres laser. L'étude expérimentale a été conduite de façon à explorer la totalité des plages de fréquences de chaque comportement du générateur bistable visible sur le spectre théorique présenté en Figure 2.7. La méthodologie suivante a été employée : (i) la fréquence d'excitation est fixée de manière à être dans la plage de fréquences théorique du comportement souhaité, puis (ii) des impulsions de tension carrées de 5 ms et d'amplitude allant de 10 V à 50 V sont envoyées sur la bobine afin de générer des impulsions de force sur la masse. Ces perturbations extérieures reviennent à changer les conditions initiales de la masse et sont donc susceptibles de créer des changements de comportement du générateur bistable en régime permanent. Ces impulsions sont ponctuellement envoyées sur la bobine jusqu'à obtenir le comportement souhaité. (iii) Une fois celui-ci atteint, la fréquence d'excitation est lentement augmentée ou diminuée sans changement brusque afin de ne pas déstabiliser ce comportement et permettre ainsi d'explorer toute sa plage de fréquences. Pour ce faire, le changement de fréquence est effectué en assurant la continuité de l'accélération et de ses dérivées dans le temps. Les limites expérimentales de la plage de fréquences du comportement étudié sont atteintes lorsque le changement lent et sans à coup de la fréquence d'excitation induit malgré tout un changement de comportement du générateur bistable en régime permanent. (iv) À chaque nouveau régime permanent atteint, les données suivantes sont prélevées pendant 5 secondes : position relative de la masse par rapport au support (à l'aide du vibromètre laser), phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (à l'aide du vibromètre laser) et puissance moyenne récupérée (à l'aide de la mesure de la tension efficace aux bornes de la résistance connectée à la bobine). Le schéma Simulink utilisé lors de cette étude expérimentale est détaillé en Annexe, Figure A.1.

L'identification des paramètres du modèle théorique présenté en Équation (2.10) a ensuite été réalisée pour ce premier prototype. Le résultat de cette identification correspond aux valeurs présentées lors de l'étude théorique de ce chapitre et sont rappelées dans le Tableau 2.3. La masse dynamique  $M$  a été considérée comme étant égale à la masse des trois cubes en laiton et des deux aimants (la masse des lamelles d'acier est négligée). La valeur des positions stables  $\pm x_0$  a été mesurée à l'aide du vibromètre laser. La pulsation naturelle  $\omega_0$  a été mesurée en soumettant le générateur bistable à une excitation sinusoïdale d'amplitude constante la plus faible possible (environ  $0.1 \text{ m.s}^{-2}$ ). Dans ces conditions le générateur bistable se comporte comme un oscillateur linéaire dont la pulsation naturelle est égale à  $\omega_0$  comme le montre l'Équation (2.8) [54]. Le facteur de qualité  $Q$  influe, quant à lui, principalement sur la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. Ainsi, ce paramètre a été ajusté afin que la mesure expérimentale de cette phase corresponde avec le modèle théorique pour un point du spectre particulier : le point limite supérieur expérimental de la plage fréquentielle de l'orbite haute sous-harmonique 3 ( $\pi/4$  à 163 Hz).

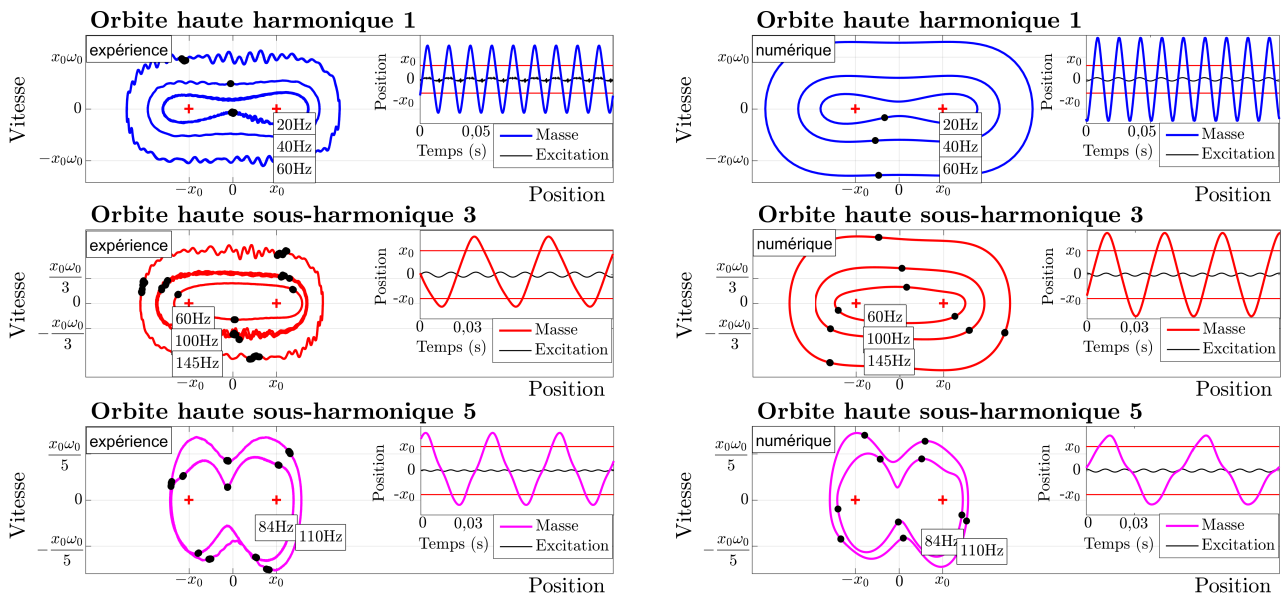
**Table 2.3** – Paramètres du générateur bistable : prototype 1.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0,29$	mm
Masse inertielle	$M$	30	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	229	rad.s <sup>-1</sup>
Facteur de qualité mécanique	$Q$	113	–
Amplitude de l'excitation	$A$	5	m.s <sup>-2</sup>
Fréquence de l'excitation	$\omega$	20 – 200	Hz
Facteur de force électromagnétique	$\beta$	0,5	N.A <sup>-1</sup>
Résistance interne de la bobine	$r_L$	18	$\Omega$
Résistance de charge	$R$	18	$\Omega$

## Résultats et discussion

La Figure 2.11 présente toutes les orbites hautes atteintes et stabilisées expérimentalement et les compare aux résultats analytiques tirés du modèle mathématique développé précédemment. Seules trois orbites hautes ont été atteintes et ont pu être maintenues dans le temps expérimentalement (au moins 30 secondes) : l'orbite haute harmonique 1, l'orbite haute sous-harmonique 3 et l'orbite haute sous-harmonique 5. Les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair n'ont pas pu être maintenues dans le temps. La Figure 2.10 présente quant à elle, pour chaque comportement expérimental atteint, une mesure du signal temporel et des mesures de portraits de phase à différentes fréquences ainsi que leur section de Poincaré respective (points noirs représentant les instants où la position du support atteint un maximum). Ces mesures sont comparées aux résultats numériques dérivés du modèle théorique.

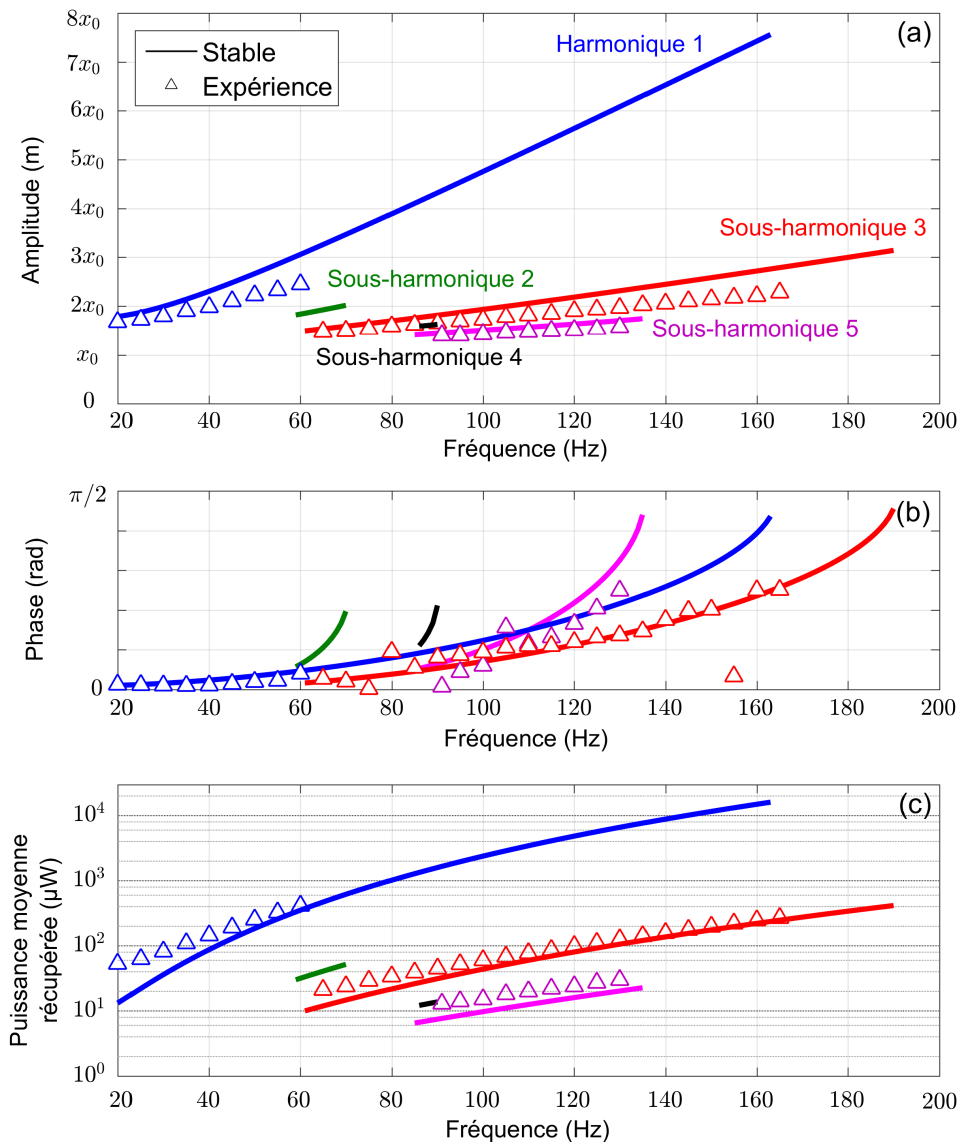
Le modèle théorique et les résultats expérimentaux concordent pour tous les points qui ont pu être atteints expérimentalement. Les amplitudes des différents comportements expérimentaux correspondent au modèle. Il en va de même pour la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum et pour la puissance moyenne récupérée. Par contre, certains points théoriques n'ont pas pu être atteints lors de cette expérience. Les plages



**Figure 2.10** – Portraits de phase, sections de Poincaré (points noirs) et signaux temporels des comportements expérimentaux (colonne de gauche) observés en régime permanent avec le prototype 1 et comparés aux comportements obtenus numériquement (colonne de droite) à l'aide du modèle théorique.

de fréquences expérimentales des différents comportements sont systématiquement plus courtes que celles prédites par le modèle. La mesure de phase confirme que les différents comportements expérimentaux n'atteignent pas leur fréquence de coupure théorique. Les phases mesurées sont systématiquement inférieures à la limite théorique de  $\pi/2$ . Bien que cette différence de plage de fréquences soit acceptable pour l'orbite haute sous-harmonique 5 (écart relatif de 22 % entre le modèle et l'expérience qui affichent des plages de fréquences respectives de 50 Hz et 39 Hz), et pour l'orbite haute sous-harmonique 3 (écart relatif de 22 % entre le modèle et l'expérience qui affichent des plages de fréquences respectives de 128 Hz et 100 Hz), cette différence atteint des valeurs rédhibitoires pour l'orbite haute harmonique 1 (écart relatif de 72 % entre le modèle et l'expérience qui affichent des plages de fréquences respectives de 143 Hz et 40 Hz).

Il y a donc deux points qui s'opposent ici au sujet de la pertinence du modèle théorique : (i) les orbites atteintes durant l'expérience ont toutes les caractéristiques prédites par le modèle théorique (amplitude, phase et puissance récupérée) mais (ii) leur plage de fréquences ne correspond qu'en partie avec ce dernier. Cette différence entre modèle et expérience semble



**Figure 2.11** – Spectres analytiques et expérimentaux des orbites hautes et stables du générateur bistable pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$  : (a) amplitude (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (c) puissance moyenne récupérée.

s'accroître pour les comportements de forte amplitude. Elle remet en question l'élaboration du modèle mathématique utilisé pour obtenir ces résultats théoriques. La section suivante a pour but d'évaluer la pertinence de ce modèle en analysant ses hypothèses les plus fortes.

## 2.8 Validité du modèle mathématique

Les différences observées entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales pourraient potentiellement être imputables à un modèle mathématique trop simpliste. Cette section explore l'influence de trois hypothèses fortes faites pour construire ce modèle mathématique. (i) Le facteur de qualité (ou l'amortissement linéaire) du générateur bistable est ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour un point du spectre particulier (fréquence de coupure expérimentale du comportement sous-harmonique 3 :  $\pi/4$  à 163 Hz). (ii) La force d'amortissement est considérée comme proportionnelle à la vitesse de la masse (amortissement linéaire) donc principalement causée par les frottements de la masse dans l'air. Les autres formes d'amortissement non linéaires sont négligées. (iii) Les oscillations de la masse restent faibles devant la grandeur  $L$ . La raideur du générateur bistable s'écrit donc sous la forme d'un polynôme impair de degré trois (équation de Duffing [59]).

### Méthodes d'identification de l'amortissement linéaire

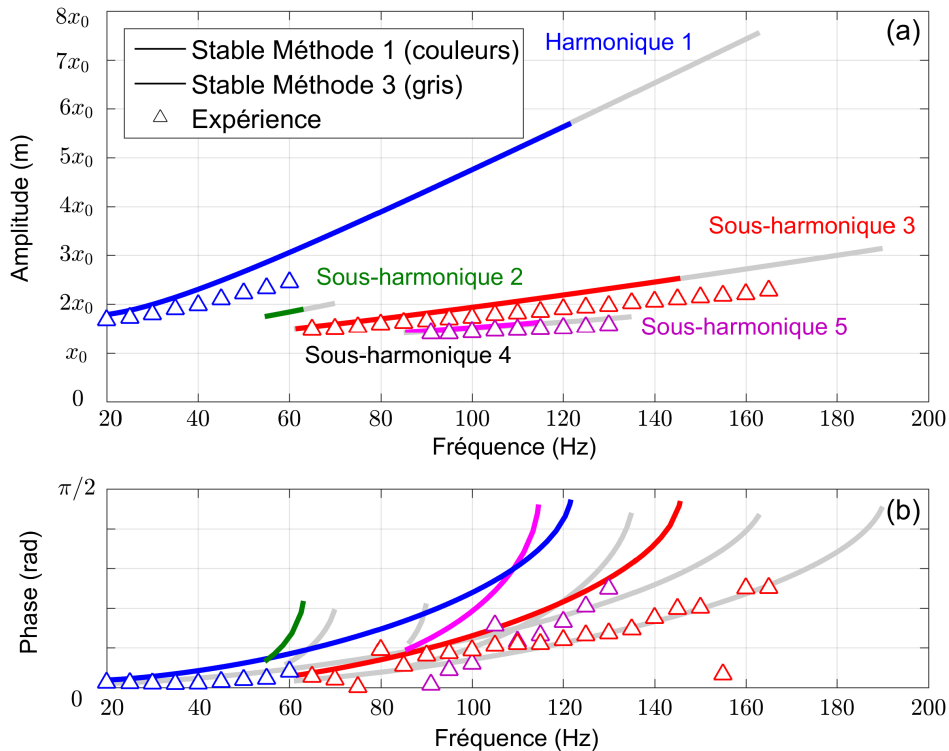
Dans la littérature relative à la récupération d'énergie, les études théoriques et expérimentales des générateurs bistables n'aboutissent pas aux écarts observés en Figure 2.11. Ces études, qui se concentrent sur le comportement harmonique 1, affichent une bonne correspondance entre modèle théorique (identique à celui développé ici) et résultats expérimentaux. Il est à noter que ces différentes études ne présentent pas la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. Nous pensons que la différence entre nos résultats et ceux présents dans la littérature pourrait être liée à la méthode d'identification du facteur de qualité du générateur bistable qui varie d'une étude à l'autre (et qui n'est d'ailleurs pas toujours explicite). Plus précisément, nous pensons que cette différence pourrait s'expliquer par la méthode employée pour l'identification de l'amortissement mécanique  $\mu$  du système oscillant bistable.

Dans cette thèse, l'amortissement mécanique du générateur bistable est supposé linéaire donc directement proportionnel à la vitesse de la masse. Cette modélisation, la plus répandue dans la littérature [19, 20, 60], revient à dire que ce dernier est principalement causé par les frottements de la masse dans l'air à faible vitesse.

Trois méthodes différentes d'identification de cet amortissement sont utilisées dans la littérature. Méthode 1 : l'amortissement est directement mesuré sur le prototype expérimental. Pour ce faire, ce dernier est soumis à une excitation faible afin qu'il se comporte comme un oscillateur linéaire (voir Équation (2.8)). L'amortissement est alors mesuré à travers le facteur de qualité de cet oscillateur linéaire équivalent, défini comme étant le rapport de sa fréquence propre par la largeur de bande à  $-3$  dB de son pic de résonance. Cette méthode est celle qui est le plus utilisée dans la littérature [43, 71–74]. Méthode 2 : L'amortissement est ajusté de manière à ce que la fréquence de coupure théorique de l'orbite haute harmonique 1 corresponde à celle observée expérimentalement. En effet augmenter l'amortissement revient à diminuer la fréquence de coupure théorique de chaque comportement (et vice versa) [75]. Méthode 3 : L'amortissement

est ajusté de manière à ce que la phase du déplacement de l'excitation théorique quand la position de la masse atteint un maximum corresponde à celle observée expérimentalement. En effet cette dernière est directement affectée par l'amortissement mécanique : plus l'amortissement est grand, plus la fréquence de coupure théorique des différents comportements est faible, plus leur phase croît rapidement jusqu'à sa valeur limite atteinte à la fréquence de coupure théorique ( $\pi/2$  pour les comportements sous-harmoniques impairs et  $\pi/4$  pour les comportements sous-harmoniques pairs). Cette méthode a été mise en place et utilisée dans nos publications [76, 77] ainsi que dans cette thèse. Plus particulièrement, le facteur de qualité du générateur (directement lié à l'amortissement mécanique) a ici été ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour un point du spectre particulier : le point limite supérieur expérimental de la plage fréquentielle de l'orbite haute sous-harmonique 3 ( $\pi/4$  à 163 Hz). Cette méthode aboutit à un amortissement mécanique de  $0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  (facteur de qualité de  $Q = 113$ ).

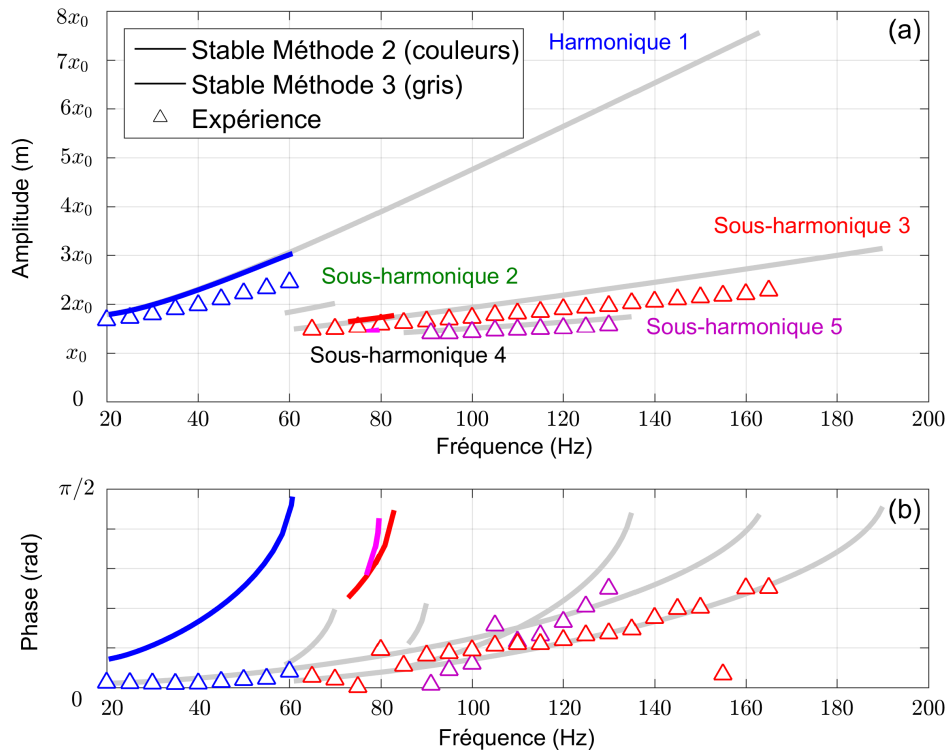
La Figure 2.12 rappelle les résultats obtenus avec la Méthode 3 (courbes grises) et les compare avec ceux obtenus avec la Méthode 1 (courbes en couleurs). Cette dernière aboutit à un amortissement mécanique de  $0,11 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  (facteur de qualité de  $Q = 60$ ). La Figure 2.13 rappelle également les résultats obtenus avec la Méthode 3 (courbes grises) et les compare avec ceux obtenus avec la Méthode 2 (courbes en couleurs). Cette dernière aboutit à un amortissement mécanique de  $0,45 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  (facteur de qualité de  $Q = 15$ ). Pour ces deux figures, la réponse fréquentielle du générateur bistable est tracée précisant, pour chaque comportement, l'amplitude et la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. La puissance récupérée n'a pas été tracée sur ces figures car cette donnée n'apporte



**Figure 2.12** – Comparaison des spectres analytiques et expérimentaux pour des méthodes d'identification différentes de l'amortissement mécanique. Les courbes en gris correspondent à la Méthode 3 employée dans cette thèse (identification de l'amortissement grâce à la phase donnant  $\mu = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  et  $Q = 113$ ). Les courbes en couleurs correspondent à la Méthode 1 (mesure directe de l'amortissement donnant  $\mu = 0,11 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  et  $Q = 60$ ).

pas plus d'information que celle donnée par le couple amplitude/phase à propos de la pertinence du modèle théorique. Les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles du prototype 1 de cette thèse, récapitulées dans le Tableau 2.3.

La Méthode 1 d'identification (mesure directe de l'amortissement sur le système linéaire équivalent) présentée en Figure 2.12 ne change pas significativement l'amplitude théorique d'oscillation des différents comportements comparée à la Méthode 3 d'identification (ajustement de l'amortissement à la phase). Seule leur plage de fréquences respective est modifiée. Ainsi, la fréquence de coupure théorique apparaît plus tôt pour chacun d'entre eux puisque le facteur de qualité mesuré est plus bas que celui identifié par la Méthode 3. Ce constat amène le suivant : la phase du déplacement de l'excitation théorique quand la position de la masse atteint un maximum est fortement modifiée par le changement de facteur de qualité. Ce changement entraîne une forte décorrélation avec les phases mesurées lors de l'étude expérimentale. Par exemple, la phase mesurée pour le comportement harmonique 1 à 50 Hz est de  $0,02\pi$ . La Méthode 3 prédisait une phase théorique de  $0,03\pi$  là où la Méthode 1 prédit une phase théorique de  $0,06\pi$ . Contrairement aux résultats théoriques obtenus avec la Méthode 3, ceux obtenus avec la Méthode 1 ne permettent donc pas de prédire de manière satisfaisante l'allure des comportements du prototype qui ont pu être stabilisés lors de l'étude expérimentale. La raison vient peut être du fait que l'amortissement est mesuré sur le système linéaire équivalent pour une excitation très faible devant celle utilisée pour l'étude expérimentale. Pour ce faible niveau d'excitation, l'amortissement linéaire dû aux frottements de l'air sur la masse n'est peut-être plus prépondérant devant les autres formes d'amortissement (frottements internes des différents matériaux, frottements secs, frictions des pièces en mouvement les unes par rapport aux autres, etc...).



**Figure 2.13** – Comparaison des spectres analytiques et expérimentaux pour des méthodes d'identification différentes de l'amortissement mécanique. Les courbes en gris correspondent à la Méthode 3 employée dans cette thèse (identification de l'amortissement grâce à la phase donnant  $\mu = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.s$  et  $Q = 113$ ). Les courbes en couleurs correspondent à la Méthode 2 (identification de l'amortissement grâce à la fréquence de coupure expérimentale de l'harmonique 1 donnant  $\mu = 0,45 \text{ N.m}^{-1}.s$  et  $Q = 15$ ).

Ceci expliquerait le fait que l'amortissement mesuré avec la Méthode 1 ( $\mu = 0,11 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ ) soit plus grand que celui identifié avec la Méthode 3 ( $\mu = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ ) puisqu'il prendrait en compte des formes d'amortissement négligeables devant les frottements de l'air à plus fort niveau d'excitation.

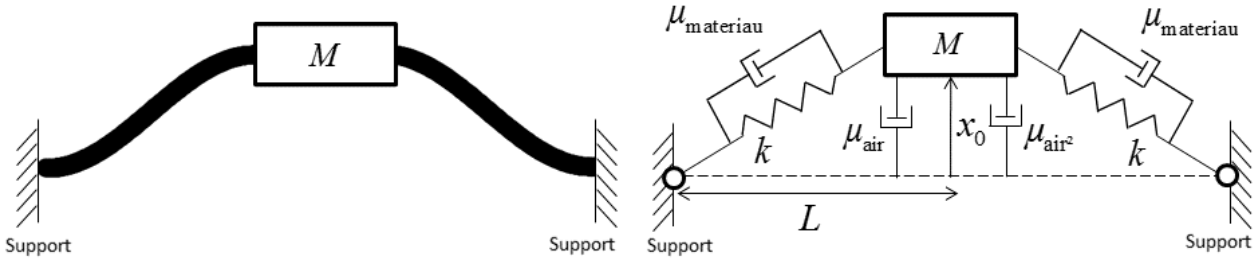
Le même constat peut être fait pour la Méthode 2 d'identification (ajustement de l'amortissement à la fréquence de coupure expérimentale de l'harmonique 1) présentée en Figure 2.13 : pour les différents comportements du générateur bistable obtenus expérimentalement, l'amplitude d'oscillation prédite par la théorie est proche de celle mesurée mais la phase prédite diffère significativement de la mesure. Pour revenir sur l'exemple pris précédemment, la phase mesurée pour le comportement harmonique 1 à 50 Hz est de  $0,02\pi$ . La Méthode 3 prédisait une phase théorique de  $0,03\pi$  contre  $0,26\pi$  pour la Méthode 2. Ainsi, contrairement aux résultats théoriques obtenus avec la Méthode 3, ceux obtenus avec la Méthode 2 ne permettent pas non plus de prédire de manière satisfaisante l'allure des comportements du prototype qui ont pu être stabilisés lors de l'étude expérimentale. Cette fois-ci, la raison est sans doute liée au fait que la Méthode 2 considère que la fréquence de coupure atteinte expérimentalement correspond à la fréquence de coupure théorique. Cette hypothèse n'est soutenable que si les différents comportements ne sont définis que par leur amplitude d'oscillation. Avec la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum, la fréquence de coupure théorique est définie de manière plus précise pour chaque comportement. Cette dernière est atteinte pour une phase de  $\pi/2$  pour les sous-harmoniques impaires et  $\pi/4$  pour les sous-harmoniques paires. La mesure expérimentale des différentes phases des comportements du prototype apporte donc une information importante contredisant l'hypothèse faite pour la Méthode 2 : les fréquences de coupure théoriques n'ont pas pu être atteintes expérimentalement.

En conclusion, seule la Méthode 3 (ajustement de l'amortissement à la phase) permet de prédire de manière complète les caractéristiques (amplitude et phase) des différents comportements atteints expérimentalement. C'est la raison pour laquelle cette méthode a été employée pour les études expérimentales de cette thèse. Malgré cette bonne prédiction des comportements atteints expérimentalement, il persiste encore une différence entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales observées pour chaque comportement.

## **Prise en compte de l'amortissement non linéaire**

Une autre idée pour expliquer les différences observées entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales consiste à dire que l'amortissement du générateur bistable n'est pas réductible à un amortissement linéaire. L'amortissement mécanique est en réalité engendré par deux facteurs : d'une part les frottements de l'air sur la masse et d'autre part les frottements internes des matériaux en mouvement. Le modèle mathématique prenant en compte ces deux composantes est représenté en Figure 2.14.

Le coefficient  $\mu_{\text{air}}$  représente l'amortissement proportionnel à la vitesse de la masse causé par les frottements de l'air (considéré comme prépondérant dans cette thèse). Le coefficient  $\mu_{\text{air}^2}$  représente l'amortissement proportionnel au carré de la vitesse de la masse causé par les frottements de l'air à plus forte vitesse. Enfin, le coefficient  $\mu_{\text{matériau}}$  représente l'amortissement causé par les frottements internes des matériaux en mouvement.

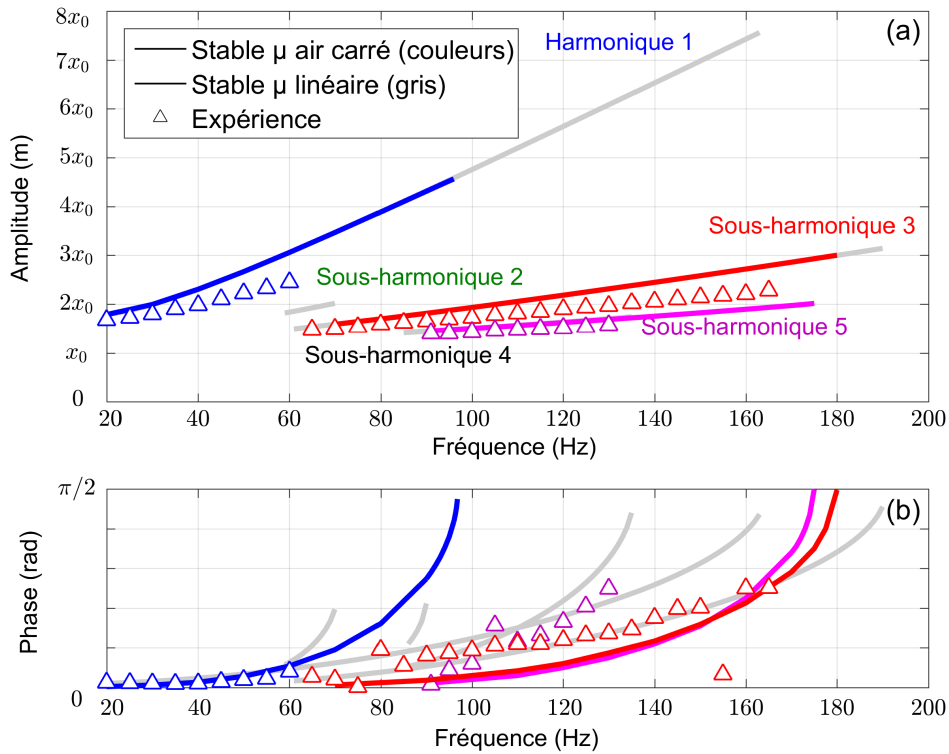


**Figure 2.14** – Schéma du principe et de la modélisation mathématique de l’oscillateur bistable prenant en compte les différents types d’amortissement. L’oscillateur est ici représenté dans une de ses positions d’équilibre.

Les forces d’amortissement s’exerçant sur la masse s’écrivent donc :

$$F_{\text{amortissement}} = \underbrace{\mu_{\text{air}} \dot{x}}_{\text{amortissement linéaire}} + \underbrace{\mu_{\text{air}^2} \dot{x}^2 + 2\mu_{\text{matériau}} \frac{x}{L} \dot{x}}_{\text{amortissement non linéaire}} \quad (2.37)$$

Des études numériques ont été menées afin de reconstituer les réponses fréquentielles théoriques du générateur bistable pour chacun de ces amortissements. La méthode utilisée est similaire à la méthode expérimentale développée dans ce chapitre : le comportement du générateur bistable est perturbé à l’aide d’impulsions de force sur la masse (impulsions carrées de 5 ms de différentes amplitudes) jusqu’à obtenir le comportement voulu en régime permanent. Sa plage de fréquences théorique est ensuite explorée en modifiant lentement et de manière continue la fréquence d’excitation. Les limites de la plage de fréquences du comportement considéré sont atteintes lorsque la phase du déplacement de l’excitation vaut 0 quand la position de la masse



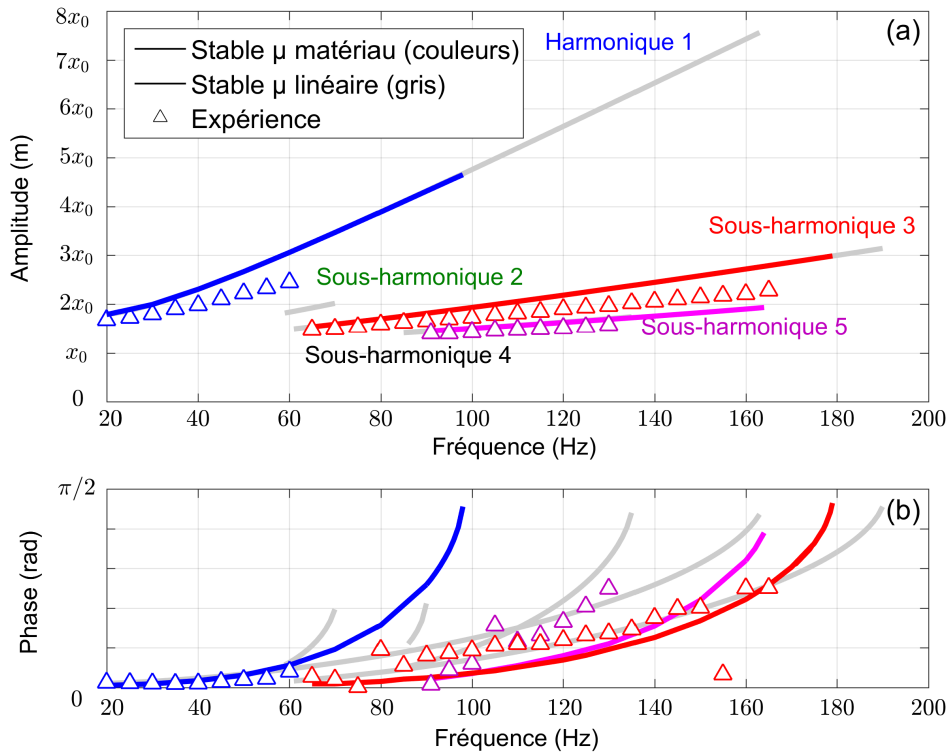
**Figure 2.15** – Comparaison des spectres numériques et expérimentaux pour des formes d’amortissement différentes. Les courbes en gris correspondent à un amortissement linéaire  $\mu_{\text{air}} = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}^1$  (modèle utilisé dans cette thèse). Les courbes en couleurs correspondent à un amortissement lié à la vitesse de la masse au carré  $\mu_{\text{air}^2} = 0,25 \text{ N.m}^{-2}.\text{s}^2$ .



atteint un maximum (début de la plage de fréquences théorique) et vaut  $\pi/2$  pour les sous-harmoniques impaires ou  $\pi/4$  pour les sous-harmoniques paires (fin de la plage de fréquences théorique). Comme pour les études précédentes, les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles détaillées dans le Tableau 2.3 (paramètres du premier prototype de cette thèse).

La Figure 2.15 rappelle les résultats obtenus pour un amortissement linéaire  $\mu_{\text{air}}$  (courbes grises) et les compare avec ceux obtenus pour un amortissement non linéaire  $\mu_{\text{air}^2}$  (amortissement proportionnel au carré de la vitesse de la masse). La Figure 2.16 rappelle également les résultats obtenus pour un amortissement linéaire  $\mu_{\text{air}}$  (courbes grises) et les compare avec ceux obtenus pour un amortissement non linéaire  $\mu_{\text{matériau}}$  (amortissement lié aux frottements internes des matériaux).

Pour ces deux figures, la réponse fréquentielle du générateur bistable est tracée précisant, pour chaque comportement, l'amplitude et la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. La puissance récupérée n'a pas été tracée sur ces figures car cette donnée n'apporte pas plus d'information que celle donnée par le couple amplitude/phase à propos de la pertinence du modèle théorique. Pour chacune de ces études, le coefficient d'amortissement est ajusté de manière à ce que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour la fréquence de coupure expérimentale du comportement sous-harmonique 3 ( $\pi/4$  à 163 Hz). Cette méthode a en effet été jugée comme la plus pertinente dans la sous-section précédente. Elle donne les coefficients suivants :  $\mu_{\text{air}} = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  (correspondant au facteur de qualité de  $Q = 113$ ),  $\mu_{\text{air}^2} = 0,25 \text{ N.m}^{-2}.\text{s}^2$  et  $\mu_{\text{matériau}} = 140 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ .



**Figure 2.16** – Comparaison des spectres numériques et expérimentaux pour des formes d'amortissement différentes. Les courbes en gris correspondent à un amortissement linéaire  $\mu_{\text{air}} = 0,06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  (modèle utilisé dans cette thèse). Les courbes en couleurs correspondent à un amortissement lié aux frottements internes des matériaux  $\mu_{\text{matériau}} = 140 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ .

Le constat est le même que pour les différentes méthodes d'identification de l'amortissement linéaire présentées dans la sous-section précédente : les amplitudes des comportements atteints expérimentalement sont correctement prédites par les trois modélisations de l'amortissement mais ce n'est pas le cas des phases du déplacement de l'excitation quand la masse atteint un maximum. L'allure des comportements expérimentaux est donc bien prédite par ces trois modélisations mais leur position par rapport à l'excitation n'est pas toujours bonne. Par exemple, la phase mesurée pour le comportement harmonique 5 à 130 Hz est de  $0,25\pi$ . L'amortissement  $\mu_{\text{air}}$  prédit une phase théorique de  $0,33\pi$  contre  $0,08\pi$  pour  $\mu_{\text{air}^2}$  et  $0,11\pi$  pour  $\mu_{\text{matériau}}$ .

La modélisation considérant un amortissement purement linéaire (causé par les frottements de la masse dans l'air à faible vitesse) semble donc être celle qui se rapproche le plus des comportements observés expérimentalement. C'est donc cette dernière qui est prise en compte dans cette thèse. Malgré cela, il persiste encore une différence entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales observées pour chaque comportement.

### Prise en compte de la raideur réelle

La dernière hypothèse forte faite pour obtenir le modèle mathématique régissant le comportement du générateur bistable pouvant expliquer la différence entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales observée en Figure 2.11 concerne la raideur équivalente du système. Le modèle à constantes localisées utilisé dans cette thèse est rappelé en Figure 2.17. L'action des ressorts sur la masse est donc définie par l'expression suivante :

$$F_{\text{ressorts}} = -2k \left( \sqrt{x^2 + L^2} - \sqrt{x_0^2 + L^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} \quad (2.38)$$

$$= -2k \left( 1 - \frac{\sqrt{x_0^2/L^2 + 1}}{\sqrt{x^2/L^2 + 1}} \right) x \quad (2.39)$$

Le modèle de la raideur équivalente polynômiale d'ordre trois est alors obtenue en considérant que le coefficient de flambement du générateur bistable, défini par le rapport entre la position d'équilibre  $x_0$  et la longueur  $L$ , est faible devant 1. Ainsi, l'action des ressorts sur la masse est simplifiée pour obtenir :

$$F_{\text{ressorts}} = -\frac{kx_0^2}{L^2}x - \frac{k}{L^2}x^3 \quad (2.40)$$

Cette hypothèse simplificatrice pourrait également expliquer la différence observée entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales des différents comportements du générateur.

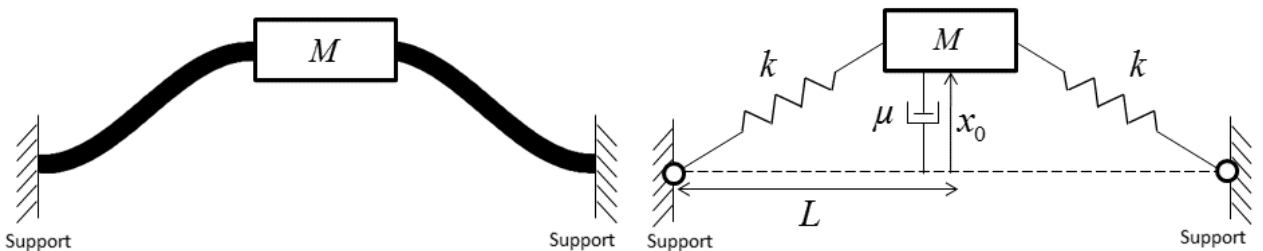
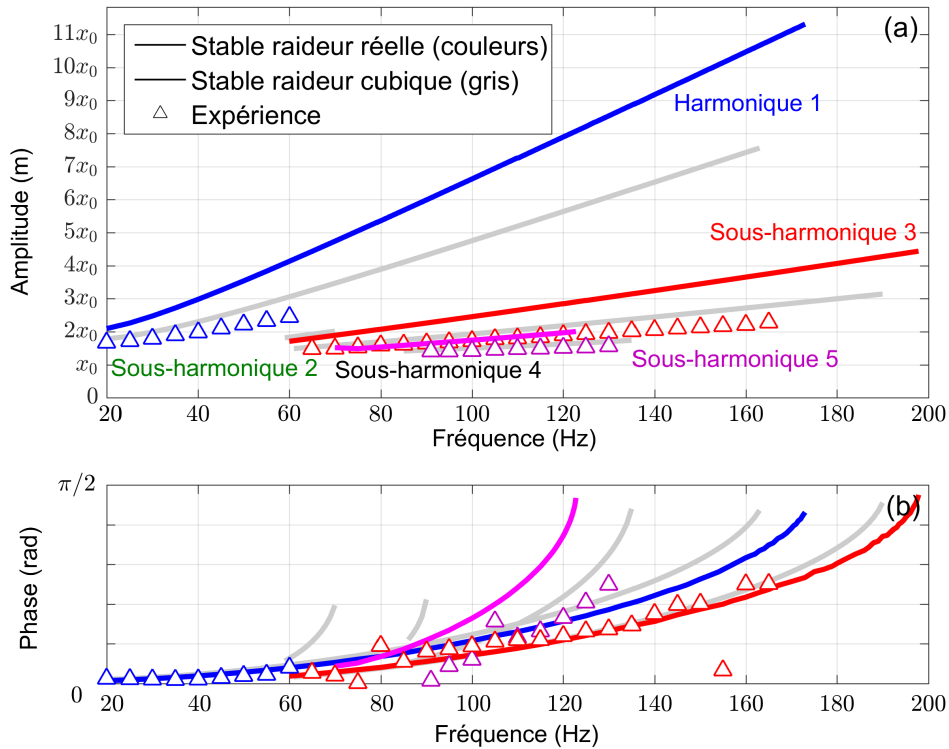


Figure 2.17 – Schéma du principe et de la modélisation mathématique de l'oscillateur bistable (ici représenté dans une de ses deux positions d'équilibre).

La Figure 2.18 rappelle les résultats obtenus pour une raideur polynômiale d'ordre trois (courbes grises) et les compare avec ceux obtenus numériquement pour la raideur réelle définie par l'Équation (2.39) (courbes en couleurs).

La méthode utilisée pour explorer numériquement la réponse fréquentielle numérique du générateur bistable est similaire à la méthode expérimentale développée dans ce chapitre (le comportement souhaité est obtenu à l'aide d'impulsions de forces sur la masse et sa plage de fréquences est déterminée en modifiant lentement et de manière continue la fréquence d'excitation). Pour la même raison que dans les sous-sections précédentes, la puissance récupérée n'a pas été tracée sur ces figures (cette donnée n'apporte pas plus d'information que celle donnée par le couple amplitude/phase à propos de la pertinence du modèle théorique). Pour chacune de ces études, le facteur de qualité est ajusté de manière à ce que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour la fréquence de coupure expérimentale du comportement sous-harmonique 3 ( $\pi/4$  à 163 Hz). Cette méthode a en effet été jugée comme la plus pertinente dans la sous-section traitant des méthodes d'identification de l'amortissement linéaire. Elle donne  $Q = 113$  pour la raideur polynômiale d'ordre trois et  $Q = 194$  pour la raideur non simplifiée. Les valeurs utilisées pour les autres paramètres sont celles détaillées dans le Tableau 2.3 (paramètres du premier prototype de cette thèse).

Les prédictions théoriques des comportements du générateur bistable semblent plus satisfaisantes avec le modèle de la raideur polynômiale d'ordre trois qu'avec la raideur non simplifiée. Les amplitudes d'oscillations sont plus proches de celles observées expérimentalement tout comme les phases du déplacement de l'excitation quand la masse atteint un maximum (notamment pour le comportement sous-harmonique 5). Les deux modèles demeurent tout de même assez proches l'un de l'autre. Ce résultat est pour le moins inattendu. Nous pensons que les résultats avec la raideur non simplifiée seraient légèrement meilleurs que ceux de la



**Figure 2.18** – Comparaison des spectres numériques et expérimentaux pour différents modèle de raideur équivalente. Les courbes en gris correspondent à un raideur polynômiale d'ordre trois (modèle utilisé dans cette thèse). Les courbes en couleurs correspondent à un raideur non simplifiée.

raideur polynômiale car cette dernière s'éloigne légèrement du modèle à constantes localisées initial (masse + ressorts). La conclusion aurait été la suivante : le modèle simplifié de la raideur polynômiale d'ordre perd légèrement en précision de prédiction comparé au modèle initial mais reste justifié compte tenu de la différence observée avec les résultats expérimentaux. Face aux résultats présentés en Figure 2.18, cette conclusion devient : le modèle simplifié de la raideur polynômiale d'ordre trois présente de meilleurs résultats comparé au modèle initial et semble donc totalement justifié. Cette anomalie reste pour l'instant inexpliquée.

## **Conclusion sur la validité du modèle théorique**

Ces différentes études ont donc analysé et justifié les trois hypothèses faites pour construire le modèle mathématique exploité dans cette thèse : (i) Le facteur de qualité (ou l'amortissement linéaire) du générateur bistable est ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour la fréquence de coupure expérimentale du comportement sous-harmonique 3 ( $\pi/4$  à 163 Hz) ; (ii) La force d'amortissement est considérée comme proportionnelle à la vitesse de la masse (amortissement linéaire) donc principalement causée par les frottements de la masse dans l'air. Les autres formes d'amortissement non linéaires sont négligées ; (iii) Les oscillations de la masse restent faibles devant la grandeur  $L$ . La raideur du générateur bistable peut donc être approximée par un polynôme impair de degré trois.

Avec ce modèle mathématique, tous les comportements expérimentaux qui ont pu être atteints et stabilisés dans le temps concordent avec les prédictions théoriques pour les deux critères majeurs les définissant : l'amplitude d'oscillation de la masse et la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (voir Figure 2.11). Cette section a montré que ce constat n'était plus valable si une des trois hypothèses étudiées était changée.

Malgré cela, il persiste encore une différence entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales observées pour chaque comportement : tous les points théoriques prédits par ce modèle n'ont pas pu être atteints. Les fréquences de coupure expérimentales des différents comportements du générateur bistable apparaissent systématiquement plus tôt que les fréquences de coupure théoriques.

## **2.9 Conclusion**

Nous avons donc vu dans ce chapitre comment construire le modèle mathématique permettant de prédire les différents comportements du générateur bistable électromagnétique incluant l'étude de la stabilité aux petites perturbations. Ce modèle a mis en évidence des comportements du générateur encore peu exploités par la communauté scientifique liée à la récupération d'énergie vibratoire : les comportements sous-harmoniques. L'étude de validation expérimentale a, en particulier, révélé le comportement sous-harmonique 3 (pour lequel la masse oscille à une fréquence trois fois plus petite que celle de l'excitation) dont la plage de fréquences pourrait permettre d'agrandir la bande passante globale du générateur.

La confrontation de ce modèle aux résultats expérimentaux est cependant paradoxale. D'une part, le modèle théorique et les résultats expérimentaux concordent pour tous les points qui ont pu être atteints expérimentalement, et ce pour les deux critères principaux que sont : l'amplitude d'oscillation de la masse et la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. Mais d'autre part, les plages de fréquences expérimentales des différents

comportements sont systématiquement plus courtes que celles prédites par le modèle. Ainsi, dans l'étude théorique, le comportement sous-harmonique 3 ne semble pas être intéressant pour agrandir la bande passante alors que l'étude expérimentale prouve le contraire.

La validité du modèle mathématique (et particulièrement de ses hypothèses les plus fortes) a donc été étudiée. L'analyse a notamment porté sur l'influence de trois hypothèses : (i) Le facteur de qualité du générateur bistable, qui est ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour un point du spectre particulier ; (ii) La force d'amortissement qui est considérée comme proportionnelle à la vitesse de la masse (amortissement linéaire) ; (iii) La raideur du générateur bistable qui s'écrit sous la forme d'un polynôme impair de degré trois. Les résultats ont montré que ces hypothèses étaient pertinentes. En effet, changer l'une d'entre elles entraîne une mauvaise concordance théorie-expérience pour les points atteints expérimentalement.

L'idée qui a alors émergé afin d'expliquer la différence observée entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales est la suivante : les comportements stables présentés pourraient ne pas tous avoir la même robustesse face aux perturbations extérieures en conditions réelles (l'excitation n'est jamais parfaitement sinusoïdale et les défauts de la structure peuvent être vus comme des perturbations). Certains points théoriques ne sont donc peut-être pas atteignables expérimentalement car peu robustes et donc vite déstabilisés par ces perturbations. L'étude de stabilité aboutissant aux résultats théoriques de la Figure 2.11 a été faite avec une perturbation infinitésimale. Ainsi, elle renseigne sur la sensibilité de chaque comportement aux perturbations infimes. Qu'en est-il des perturbations extérieures plus importantes ? L'idée esquissée ici est la suivante : les comportements du générateur dits "stables", donc peu sensibles aux perturbations infimes, peuvent avoir des sensibilités différentes aux perturbations plus grandes inhérentes aux conditions réelles. Un même comportement pourrait également avoir une sensibilité différente à ces perturbations selon la position choisie sur sa plage de fréquences. Cette différence de sensibilité pourrait expliquer les variations observées entre théorie et expérience : les points théoriques qui n'ont pas pu expérimentalement être atteints ou maintenus dans le temps sont peut-être trop sensibles aux perturbations subies lors de l'expérience.

# 3

## Robustesse de stabilité des différents comportements

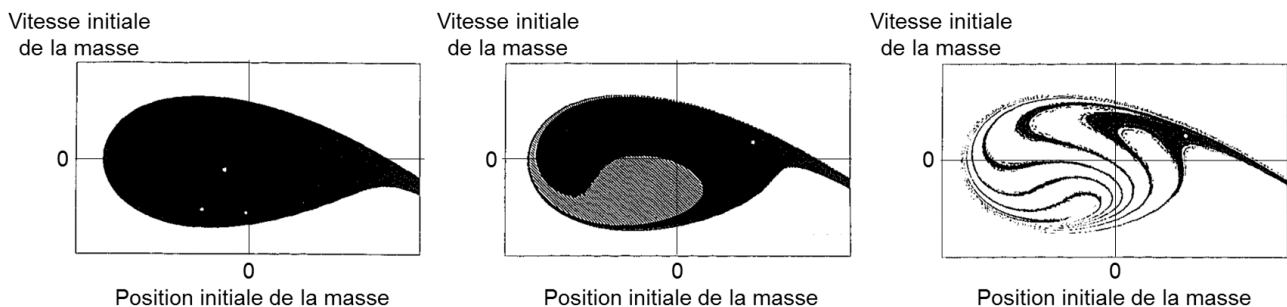
*Le chapitre précédent a proposé d'utiliser les comportements sous-harmoniques des générateurs bistables afin d'augmenter la bande passante accessible pour la récupération d'énergie vibratoire. Les premiers résultats montrent que le modèle analytique présenté est pertinent pour décrire tous les comportements qui ont été atteints expérimentalement. Les caractéristiques de ces comportements coïncident en effet avec les prédictions théoriques (amplitude d'oscillation de la masse, puissance récupérée mais également phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum). Le modèle prédit cependant, pour chaque comportement, des plages de fréquences plus grandes que celles mesurées expérimentalement. L'idée qui sera développée dans ce chapitre soutient que la différence observée entre les plages de fréquences théoriques et expérimentales tient au fait que les comportements définis comme stables aux petites perturbations pourraient ne pas tous avoir la même sensibilité aux perturbations plus grandes rencontrées en conditions réelles. Certains comportements (ou certaines plages de fréquences de certains comportements) ne sont peut-être pas assez robustes (donc trop sensibles aux perturbations extérieures) pour pouvoir être atteints et stabilisés expérimentalement. Ce chapitre présente donc un nouveau critère semi-analytique développé pendant cette thèse : le critère de robustesse de stabilité. Il caractérise la sensibilité des comportements du générateur bistable aux perturbations non négligeables. Plus un comportement est robuste selon ce critère, moins il sera sensible aux perturbations extérieures et plus il sera facile à atteindre et à maintenir dans le temps. En dessous d'un certain seuil de robustesse, les comportements seront considérés comme inutilisables pour la récupération d'énergie en conditions réelles.*

### 3.1 La robustesse de stabilité dans la littérature

La notion de robustesse (c'est-à-dire, de sensibilité des comportements aux perturbations en conditions réelles) est déjà présente dans quelques études sur les oscillateurs bistables. L'étude la plus proche de cette notion a été réalisée par Harne et al. en 2017 [72]. Elle consiste à ajouter du bruit blanc au signal sinusoïdal d'excitation sur plusieurs simulations numériques et à vérifier si le comportement étudié se maintient ou pas. Plus le nombre de simulations aboutissant à un maintien de l'orbite considérée est grand, plus cette orbite sera qualifiée de robuste. Cette approche a ainsi été utilisée pour caractériser la robustesse de l'orbite haute harmonique 1.

L'étude menée par Lansbury et al. [78] est, elle, très proche de la notion de robustesse sans toutefois aboutir à un critère explicite. Cette étude porte sur les bassins d'attraction de l'oscillateur bistable. Ces derniers sont obtenus en effectuant plusieurs simulations numériques pour différentes conditions initiales du générateur (position et vitesse de la masse à  $t = 0$ ) et en relevant, pour chacune d'entre-elles, le comportement en régime permanent atteint. Le diagramme des bassins d'attraction représente alors les différents comportements en régime permanent atteints en fonction des conditions initiales du générateur (diagramme à deux dimensions). Trois exemples sont illustrés en Figure 3.1 pour trois amplitudes d'accélération différentes (croissantes de gauche à droite). Les points noirs ou gris représentent les cas où le comportement s'est stabilisé sur l'orbite basse harmonique 1. Les points blancs représentent les cas où le comportement s'est stabilisé sur l'orbite haute harmonique 1. La robustesse de l'orbite haute harmonique 1 pourrait alors être définie de la manière suivante : sur ce diagramme, plus l'aire du bassin d'attraction associée à l'orbite haute harmonique 1 est grande, plus cette orbite sera facile à atteindre, plus elle sera robuste. La résolution de ces diagrammes est de  $640 \times 350$  (ce qui signifie qu'ils requièrent 224000 simulations numériques différentes).

Les deux méthodes exposées souffrent cependant du même problème : leur mise en œuvre est délicate compte tenu du grand nombre de simulations numériques à effectuer pour obtenir la robustesse de stabilité de tous les comportements du générateur sur toute sa plage de fréquences utile. Le nouveau critère de robustesse de stabilité proposé ici, développé en collaboration avec Olivier Druet (Institut Camille Jordan), s'attaque au problème sous un autre angle. Il s'agit d'appliquer une impulsion générique à la masse du générateur bistable afin de perturber le comportement en régime permanent puis de calculer l'énergie minimale que doit avoir cette impulsion pour rendre le comportement instable. Plus l'énergie de l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité est grande, plus il est difficile de déstabiliser le comportement étudié et plus ce comportement sera robuste. Ce critère quantitatif est calculé en suivant la méthode mathématique connue sous le nom de "bootstrap method" développée dans le cadre de l'étude de stabilité des équations différentielles non linéaires [68, 79]. Il présente un avantage de taille



**Figure 3.1** – Exemple de diagrammes des bassins d'attraction pour plusieurs amplitudes d'excitation (croissantes de gauche à droite) [78].

comparé aux critères numériques proposés par Lansbury et al. ou Harne et al. : son temps de calcul est bien plus faible grâce à son approche semi-analytique. De plus, l'étude de robustesse est ici étendue aux comportements sous-harmoniques.

### 3.2 Définition

Ce chapitre se focalise sur les comportements sous-harmoniques en régime permanent du générateur bistable mis en évidence dans le chapitre précédent. Plus précisément, ce chapitre se concentre sur les comportements sous-harmoniques qui ont été jugés comme stables aux petites perturbations. L'idée derrière le nouveau critère de robustesse de stabilité est de perturber ces comportements définis comme stables aux petites perturbations avec une perturbation plus grande (sous la forme d'une impulsion) et de calculer l'énergie minimale que doit avoir cette impulsion pour rendre ces comportements instables. Plus cette énergie est grande, plus ces comportements seront considérés comme robustes. Le critère de robustesse de stabilité est plus précisément défini comme un rapport sans unité entre d'une part l'énergie de l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité et d'autre part la quantité d'énergie moyenne apportée par l'excitation pendant une des périodes de cette excitation (valeur normative). La suite montre comment déterminer l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement étudiée.

Prenons donc un comportement sous-harmonique  $n$  en régime permanent solution, pour une fréquence d'excitation donnée, de l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable. Cette solution s'écrit donc sous la forme d'une série de Fourier (voir Équation (2.15)) :

$$x_s(t) = a_{s0} + \sum_{k=1}^N \left\{ a_{sk} \cos\left(k \frac{\omega}{n} t\right) + b_{sk} \sin\left(k \frac{\omega}{n} t\right) \right\} \quad (3.1)$$

Considérons également que ce comportement est défini comme stable aux petites perturbations. De la même manière que pour l'étude de stabilité aux petites perturbations menée en Section 2.5, la réponse perturbée  $x$  du générateur bistable est décomposée en une somme de deux termes : la solution stable étudiée  $x_s$  et une composante  $z$ , appelée perturbation, engendrée par l'impulsion. Mais cette fois-ci, la perturbation  $z$  n'est plus considérée comme petite devant la position d'équilibre  $x_0$ .

$$x(t) = x_s(t) + z(t) \quad (3.2)$$

L'impulsion est modélisée par un ajout de vitesse pure  $\Lambda$  à la masse (donc modification instantanée de son énergie cinétique) en imposant des conditions initiales non nulles au terme  $z$  ( $\Lambda$  peut être positif ou négatif) :

$$\begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La stabilité du comportement étudié est alors définie, pour une impulsion de vitesse  $\Lambda$  donnée, par l'évolution de la perturbation  $z$  au cours du temps (convergente pour les comportements stables sous cette impulsion et divergente pour les autres). On note  $|\Lambda_{\min}|$  l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement étudié (c'est-à-dire, la vitesse initiale minimale pour



laquelle  $z$  tend vers l'infini). La robustesse de stabilité est alors définie comme suit :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2}M\Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T MA \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \quad (3.4)$$

Où  $T$  représente la période du comportement en régime permanent étudié  $x_s$  qui, dans le cadre de cette étude, est un comportement sous-harmonique d'ordre  $n$  (donc  $T = 2\pi n/\omega$  avec  $\omega$  pulsation de l'excitation).

La suite de ce raisonnement a pour but d'étudier l'évolution de la perturbation  $z$  en fonction de l'amplitude de l'impulsion de départ  $\Lambda$  afin de déterminer l'amplitude minimale  $|\Lambda_{\min}|$  conduisant à l'instabilité du comportement stable étudié. La méthode présentée s'inspire d'une méthode mathématique connue sous le nom de "bootstrap method" développée pour l'étude de stabilité des équations différentielles non linéaires [68, 79]. L'Équation (3.2) est introduite dans l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable pour obtenir l'équation différentielle régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 - \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(t)^2 & -\frac{\omega_0}{Q} - \frac{\beta^2}{M(R+r_L)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(t)z(t)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2}z(t)^3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\underline{M}(t)}_{\text{terme linéaire}} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(t)z(t)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2}z(t)^3 \end{pmatrix}}_{\text{terme non linéaire}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La matrice  $\underline{M}(t)$  est identique à celle obtenue lors de l'étude aux petites perturbations menée en Section 2.5 (voir Équation (2.22)). Il est donc possible d'introduire la même matrice résolvante  $\underline{R}(t, t_0)$  donnant la relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  lorsque le terme non linéaire de l'Équation (3.5) est nul. La matrice résolvante est donc uniquement reliée à la matrice  $\underline{M}(t)$ . Pour rappel, cette matrice résolvante est calculable numériquement à tout instant  $t$  en utilisant l'Équation (2.24). L'état de la perturbation à l'instant  $t$  s'écrit alors comme la somme de deux parties : d'une part, une partie directement définie par la matrice résolvante et donc liée au terme linéaire de l'Équation (3.5) et d'autre part, une partie corrective liée au terme non linéaire de l'Équation (3.5).

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{R}(t, t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \underline{R}(t, s) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(s)z(s)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2}z(s)^3 \end{pmatrix} ds \quad (3.6)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{M}(t)\underline{R}(t, t_0) \\ \underline{R}(t+T, t_0+T) = \underline{R}(t, t_0) \end{cases} \quad (3.7)$$

De la même manière que pour l'étude de stabilité aux petites perturbations, il est possible d'appliquer la théorie de Floquet [69] puisque la matrice  $\underline{M}(t)$  est une matrice périodique de période  $T$ . Il existe donc deux matrices carrées  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , l'une indépendante

du temps  $\underline{B}$  et l'autre  $2T$  périodique  $\underline{Q}(t, t_0)$  telles que :

$$\underline{R}(t, t_0) = \underline{Q}(t, t_0)e^{-(t-t_0)\underline{B}} \quad (3.8)$$

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2)$  les deux valeurs propres complexes de la matrice  $\underline{B}$ . Comme le comportement étudié est stable aux petites perturbations, alors ces deux valeurs propres ont des parties réelles positives (voir Équation (2.27)). On note  $\lambda$  la valeur minimale des parties réelles de ces deux valeurs propres :

$$\lambda = \min(\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2)) \quad (3.9)$$

La valeur limite  $|\Lambda_{\min}|$  est alors déterminée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Soit  $H$  l'hypothèse suivante : quelle que soit l'enveloppe exponentielle décroissante choisie, il est possible de trouver un instant  $\tau$  à partir duquel la perturbation  $z$  sort de cette enveloppe.

$$H = \forall \delta > 0, \exists \tau \geq t_0 :$$

$$\underbrace{(\forall t \in [t_0, \tau], |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)})}_{H1} \cap \underbrace{(\forall t \in ]\tau, +\infty[, |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)})}_{H2} \quad (3.10)$$

Ainsi,  $H$  vraie implique que la perturbation  $z$  tend vers l'infini et donc que le comportement étudié est instable pour le  $\Lambda$  choisi. La négation de l'hypothèse  $H$  est :

$$\bar{H} = \exists \delta > 0 : \forall \tau \geq t_0,$$

$$\underbrace{(\exists t \in [t_0, \tau] : |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)})}_{H3} \cup \underbrace{(\exists t \in ]\tau, +\infty[ : |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)})}_{H4} \quad (3.11)$$

En  $t_0$ , la perturbation est supposée être un ajout de vitesse pure. Ainsi  $z(t_0) = 0$  comme indiqué en Équation (3.3). Ceci implique que l'hypothèse  $H3$  est toujours fausse pour  $\tau = t_0$ . Ainsi,  $\bar{H}$  vraie implique  $H4$  vraie ce qui signifie qu'il est possible de trouver une enveloppe exponentielle décroissante contenant la perturbation  $z$ .  $\bar{H}$  vraie implique donc que le comportement étudié est stable pour le  $\Lambda$  choisi.

Dans la suite, l'hypothèse  $H$  est considérée comme vraie. Le but de ce qui suit sera de trouver l'impulsion minimale  $\Lambda_{\min}$  à partir de laquelle cette hypothèse n'est plus valable. Ce  $\Lambda_{\min}$  sera alors l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement étudié. Le point critique de l'hypothèse  $H$  se situe à  $t = \tau$  pour lequel la perturbation sort de n'importe quelle enveloppe choisie :

$$\forall \delta, \exists \tau : |z(\tau)| = \delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} \quad (3.12)$$

La valeur de la perturbation en  $t = \tau$  est également donnée par l'Équation (3.6) :

$$z(\tau) = \Lambda \left[ \underline{R}(\tau, t_0) \right]_{(1,2)} + \int_{t_0}^{\tau} \left[ \underline{R}(\tau, s) \right]_{(1,2)} \left( -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(s) z(s)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} z(s)^3 \right) ds \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} = \left| \Lambda \left[ \underline{R}(\tau, t_0) \right]_{(1,2)} + \int_{t_0}^{\tau} \left[ \underline{R}(\tau, s) \right]_{(1,2)} \left( -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(s) z(s)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} z(s)^3 \right) ds \right| \quad (3.14)$$

À noter que seule la composante (1, 2) de la matrice résolvante apparait dans cette équation. En résumé, le terme de gauche de cette équation représente la valeur de n'importe quelle enveloppe exponentielle décroissante de laquelle la perturbation est supposée sortir à l'instant  $\tau$  selon l'hypothèse  $H$ . Le terme de droite représente la valeur de la perturbation à l'instant  $\tau$  tirée de l'équation régissant le comportement du générateur bistable.

L'idée va d'abord être de majorer la perturbation à l'instant  $\tau$  (c'est-à-dire, le terme de droite de l'Équation (3.14)) en fonction de l'impulsion  $\Lambda$ . La valeur majorante de la perturbation à l'instant  $\tau$  sera alors plus grande que n'importe quelle enveloppe exponentielle décroissante (c'est-à-dire, le terme de gauche de l'Équation (3.14)). Or, plus l'impulsion  $\Lambda$  imposée au comportement en régime permanent est faible, plus la perturbation sera petite et aura des chances de converger (c'est à dire ne pourra plus sortir de n'importe quelle enveloppe exponentielle décroissante). Il conviendra alors de trouver l'impulsion minimale  $\Lambda_{\min}$  à partir de laquelle la valeur majorante de la perturbation à l'instant  $\tau$  ne peut plus être supérieure à n'importe quelle enveloppe exponentielle décroissante.

Tout d'abord, voici le raisonnement menant à la majoration de la perturbation à l'instant  $\tau$ . Premièrement, essayons de majorer les composantes de la matrice résolvante :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0)e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \quad (3.15)$$

Comme la matrice  $\underline{\underline{B}}$  admet deux valeurs propres complexes  $(\lambda_1, \lambda_2)$  indépendantes du temps, alors il existe une matrice inversible  $\underline{\underline{P}}$  indépendante du temps telle que :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0)\underline{\underline{P}}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} \underline{\underline{P}} \quad (3.16)$$

$$= \underline{\underline{Q}}(t, t_0)\underline{\underline{P}}^{-1} \begin{pmatrix} e^{(\lambda-\lambda_1)(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda-\lambda_2)(t-t_0)} \end{pmatrix} \underline{\underline{P}}e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (3.17)$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underbrace{\underline{\underline{Q}}(t, t_0)}_{2T \text{ périodique}} \underbrace{\underline{\underline{P}}^{-1} \begin{pmatrix} e^{(\lambda-\lambda_1)(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda-\lambda_2)(t-t_0)} \end{pmatrix} \underline{\underline{P}}}_{\text{Périodique ou décroissant dans le temps}} \quad (3.18)$$

Ainsi, pour un instant initial  $t_0$  donné, chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparait dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + 2T]$ . De plus, la matrice résolvante vérifie (voir Équation (3.7)) :

$$\underline{\underline{R}}(t + T, t_0 + T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \quad (3.19)$$

Donc chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparait dans  $(t, t_0) \in [t_0, t_0 + 2T] \times [0, T]$ . La matrice composée des maxima de chaque composante de  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  est appelée  $\underline{\underline{C}}$ . Elle est indépendante du temps et indépendante de l'instant initial  $t_0$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2, [\underline{\underline{C}}]_{(i,j)} = \max_{\substack{t_0 \in [0, T] \\ t \in [t_0, t_0 + 2T]}} \left| e^{\lambda(t-t_0)} [\underline{\underline{R}}(t, t_0)]_{(i,j)} \right| \quad (3.20)$$

La matrice  $\underline{\underline{C}}$  est donc calculable en évaluant la matrice résolvante sur deux périodes pour

plusieurs conditions initiales. Pour rappel, la matrice résolvante est elle-même calculable numériquement en utilisant l'Équation (2.24). La majoration de la matrice résolvante devient donc possible :

$$\forall(t, t_0), \forall(i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2, \left[ \underline{\underline{R}}(t, t_0) \right]_{(i,j)} \leq e^{-\lambda(t-t_0)} \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(i,j)} \quad (3.21)$$

De plus, l'hypothèse *H1* donne directement une majoration possible de  $z$  lorsque  $t \in [t_0, \tau]$  qui permet ainsi de majorer le terme dans l'intégrale de la perturbation à l'instant  $\tau$ . Ces majorations appliquées à l'Équation (3.14) donnent finalement :

$$\begin{aligned} \delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} &\leq \Lambda e^{-\lambda(\tau-t_0)} \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \left( \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(s) \left( \delta e^{-\lambda(s-t_0)} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} \left( \delta e^{-\lambda(s-t_0)} \right)^3 \right) ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} &\leq \Lambda e^{-\lambda(\tau-t_0)} \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \\ &\quad + \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} \delta^2 \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \int_{t_0}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} x_s(s) e^{-2\lambda(s-t_0)} ds \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} \delta^3 \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \int_{t_0}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} e^{-3\lambda(s-t_0)} ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta &\leq \Lambda \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \\ &\quad + \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} \delta^2 \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \int_{t_0}^{\tau} x_s(s) e^{-\lambda(s-t_0)} ds \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} \delta^3 \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{(1,2)} \int_{t_0}^{\tau} e^{-2\lambda(s-t_0)} ds \end{aligned} \quad (3.24)$$

Il convient maintenant de majorer les deux intégrales de cette inégalité. La majoration de la deuxième intégrale ne pose pas de problème particulier :

$$\int_{t_0}^{\tau} e^{-2\lambda(s-t_0)} ds = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 - e^{-2\lambda\tau} \right) \leq \frac{1}{2\lambda} \quad (3.25)$$

La majoration de la première intégrale est un peu plus complexe. Le comportement stable étudié  $x_s$  est décomposable en une série de Fourier décrite en Équation (3.1). La première intégrale devient donc :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} x_s(s) e^{-\lambda(s-t_0)} ds &= \int_{t_0}^{\tau} \left( \sum_{k=1}^N \left\{ a_{sk} \cos \left( k \frac{\omega}{n} s \right) + b_{sk} \sin \left( k \frac{\omega}{n} s \right) \right\} \right) e^{-\lambda(s-t_0)} ds \\ &= \sum_{k=1}^N a_{sk} \int_{t_0}^{\tau} \cos \left( k \frac{\omega}{n} s \right) e^{-\lambda(s-t_0)} ds + \sum_{k=1}^N b_{sk} \int_{t_0}^{\tau} \sin \left( k \frac{\omega}{n} s \right) e^{-\lambda(s-t_0)} ds \end{aligned} \quad (3.26)$$

Afin de simplifier les notations, on pose dorénavant  $\omega_k = k\omega/n$ . Le terme  $e^{\lambda t_0}$  est ensuite mis en facteur puis la formule d'Euler est utilisée pour exprimer les termes en sinus et cosinus. Le résultat est détaillé en Équation (3.27).

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\tau} x_s(s) e^{-\lambda(s-t_0)} ds &= e^{\lambda t_0} \sum_{k=1}^N a_{sk} \int_{t_0}^{\tau} \frac{e^{(i\omega_k - \lambda)s} + e^{(-i\omega_k - \lambda)s}}{2} ds \\
&\quad + e^{\lambda t_0} \sum_{k=1}^N b_{sk} \int_{t_0}^{\tau} \frac{e^{(i\omega_k - \lambda)s} - e^{(-i\omega_k - \lambda)s}}{2i} ds \\
&= \left[ e^{\lambda t_0} \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{2} \left( \frac{e^{(i\omega_k - \lambda)s}}{i\omega_k - \lambda} + \frac{e^{(-i\omega_k - \lambda)s}}{-i\omega_k - \lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{\lambda t_0} \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{2i} \left( \frac{e^{(i\omega_k - \lambda)s}}{i\omega_k - \lambda} - \frac{e^{(-i\omega_k - \lambda)s}}{-i\omega_k - \lambda} \right) \right]_{t_0}^{\tau} \tag{3.27} \\
&= \left[ e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{2(\lambda^2 + \omega_k^2)} \left( e^{i\omega_k s} (-i\omega_k - \lambda) + e^{-i\omega_k s} (i\omega_k - \lambda) \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{2i(\lambda^2 + \omega_k^2)} \left( e^{i\omega_k s} (-i\omega_k - \lambda) - e^{-i\omega_k s} (i\omega_k - \lambda) \right) \right]_{t_0}^{\tau} \\
&= \left[ e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{2(\lambda^2 + \omega_k^2)} \left( \frac{\omega_k}{i} (e^{i\omega_k s} - e^{-i\omega_k s}) - \lambda (e^{i\omega_k s} + e^{-i\omega_k s}) \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{2i(\lambda^2 + \omega_k^2)} \left( -i\omega_k (e^{i\omega_k s} + e^{-i\omega_k s}) - \lambda (e^{i\omega_k s} - e^{-i\omega_k s}) \right) \right]_{t_0}^{\tau}
\end{aligned}$$

Il est maintenant possible de revenir en notation sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\tau} x_s(s) e^{-\lambda(s-t_0)} ds &= \left[ e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\omega_k \sin(\omega_k s) - \lambda \cos(\omega_k s)) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\lambda(s-t_0)} \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\omega_k \cos(\omega_k s) + \lambda \sin(\omega_k s)) \right]_{t_0}^{\tau} \\
&= e^{-\lambda(\tau-t_0)} \left( \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\omega_k \sin(\omega_k \tau) - \lambda \cos(\omega_k \tau)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\omega_k \cos(\omega_k \tau) + \lambda \sin(\omega_k \tau)) \right) + \Psi \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Avec  $\Psi$  une constante indépendante de  $\tau$  définie par :

$$\begin{aligned}
\Psi &= \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \cos(\omega_k t_0) - \omega_k \sin(\omega_k t_0)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \sin(\omega_k t_0) + \omega_k \cos(\omega_k t_0)) \tag{3.29}
\end{aligned}$$

L'intégrale à majorer vaut donc 0 en  $\tau = t_0$  et tend vers  $\Psi$  lorsque  $\tau$  tend vers l'infini en oscillant à la fréquence  $\omega_k = k\omega/n$ . Dans la suite, cette intégrale est considérée comme toujours

inférieure à  $|\Psi|$ . De plus,  $\Psi$  est périodique de période  $T = 2\pi n/\omega$  par rapport à l'instant initial d'impulsion  $t_0$ . Il devient donc possible de majorer l'intégrale indépendamment de  $\tau$  et de  $t_0$  de la manière suivante :

$$\int_{t_0}^{\tau} x_s(s) e^{-\lambda(s-t_0)} ds \leq \max_{t_0 \in [0, T]} |\Psi| \quad (3.30)$$

En conclusion, considérer l'hypothèse  $H$  vraie permet de majorer la perturbation à  $t = \tau$  présentée en Équation (3.14) à l'aide de la majoration de la matrice résolvante en Équation (3.21) et de la majoration des deux intégrales de l'Équation (3.24) respectivement décrites en Équation (3.25) et en Équation (3.30). Ainsi, si  $H$  est vraie, alors la majoration de la perturbation à  $t = \tau$  donne l'inégalité suivante (indépendante de  $\tau$  et de  $t_0$ ) :

$$\forall \delta > 0, \quad 0 \leq \underbrace{C - \delta + B\delta^2 + D\delta^3}_{f(\delta, \Lambda)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D = \frac{\omega_0^2}{4\lambda x_0^2} [\underline{C}]_{(1,2)} \\ B = \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} [\underline{C}]_{(1,2)} \max_{t_0 \in [0, T]} |\Psi| \\ C = \Lambda [\underline{C}]_{(1,2)} \end{cases} \quad (3.31)$$

La fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est un polynôme de degré trois par rapport à sa variable  $\delta$ . Elle admet donc un seul minimum pour  $\delta > 0$ . Ce minimum est atteint en  $\delta_0$  défini par :

$$\delta_0 = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 3D}}{3D} \quad (3.32)$$

Pour un  $\Lambda$  donné, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est positif alors la fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est toujours positive pour tout  $\delta > 0$  donc l'Équation (3.31) est toujours vérifiée. Par contre, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est négatif alors l'Équation (3.31) n'est plus vérifiée quelque soit  $\delta > 0$ . Ainsi  $f(\delta_0, \Lambda)$  négatif implique que l'hypothèse  $H$  est fautive et donc que la solution est stable pour l'impulsion  $\Lambda$ . La limite entre solution stable et solution instable est par conséquent atteinte pour une impulsion  $\Lambda_{\min}$  vérifiant  $f(\delta_0, \Lambda_{\min}) = 0$ . Ce point limite existe et est unique car  $f(\delta_0, \Lambda)$  est une fonction linéaire en  $\Lambda$ . Le critère de robustesse de stabilité qui dépend de l'impulsion minimale  $\Lambda_{\min}$  entraînant l'instabilité de la solution étudiée  $x_s$  devient :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2} M \Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T M A \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \\ \Lambda_{\min} = \frac{\delta_0 - B\delta_0^2 - D\delta_0^3}{[\underline{C}]_{(1,2)}} \end{cases} \quad (3.33)$$

Avec  $E_{\text{excitation}}$  la quantité d'énergie moyenne apportée par la source à la masse par période d'excitation et  $T$  la période du comportement en régime permanent sous-harmonique  $n$  étudié. Les comportements stables aux petites perturbations ont une faible robustesse de stabilité lorsque l'impulsion minimale conduisant à leur instabilité est faible. Les orbites hautes à faible robustesse de stabilité seront donc plus difficiles à atteindre et plus difficiles à maintenir dans le temps en conditions réelles. La moindre perturbation entraînera leur instabilité et le générateur bistable passera sur une orbite basse. Ce nouveau critère est donc utile pour déterminer si les orbites hautes considérées comme stables aux petites perturbations seront assez robustes pour

la récupération d'énergie en conditions réelles.

### 3.3 Résultats théoriques

L'étude analytique des comportements du générateur bistable développée dans le chapitre précédent est reprise en incluant cette fois-ci le critère de robustesse de stabilité. Les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont identiques à celles utilisées au chapitre précédent et correspondent au prototype 1 de cette thèse (voir Tableau 2.3). En résumé, cette étude analytique consiste à résoudre l'Équation (2.10) régissant le comportement du générateur bistable à l'aide de la balance harmonique afin d'isoler tous les comportements sous-harmoniques possibles en régime permanent en fonction de la fréquence d'excitation. La stabilité de ces comportements aux petites perturbations est ensuite évaluée en leur injectant une impulsion infinitésimale et en suivant l'évolution de la perturbation au cours du temps (divergente pour les comportements instables et convergente pour les comportements stables). Les orbites hautes définies comme stables aux petites perturbations sont alors sélectionnées comme étant des comportements éligibles pour la récupérations d'énergie (les fortes amplitudes de ces comportements entraînent de forts niveaux d'énergie).

Le nouveau critère de robustesse de stabilité, défini par l'Équation (5.52), est alors appliqué à ces comportements afin de déterminer si leur stabilité est suffisamment robuste pour pouvoir les utiliser en conditions réelles (c'est-à-dire, en présence de perturbations non infinitésimales). En effet, ce critère prend en compte l'impulsion minimale qu'il faut imposer à ces comportements pour les rendre instables. Plus l'énergie associée à cette impulsion minimale est grande, plus il est difficile de déstabiliser le comportement étudié et donc plus ce comportement sera robuste.

La Figure 3.2 présente les résultats de cette étude théorique à l'aide de trois réponses fréquentielles différentes. La Figure 3.2(a) détaille l'amplitude d'oscillation de la masse pour chaque orbite haute du générateur bistable définie comme stable aux petites perturbations. Pour chacun de ces comportements, la Figure 3.2(b) précise la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. Enfin, la Figure 3.2(c) introduit le nouveau critère de robustesse de stabilité appliqué à ces comportements. Pour plus de détail sur le calcul de la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum, le lecteur pourra consulter le chapitre précédent, Section 2.6.

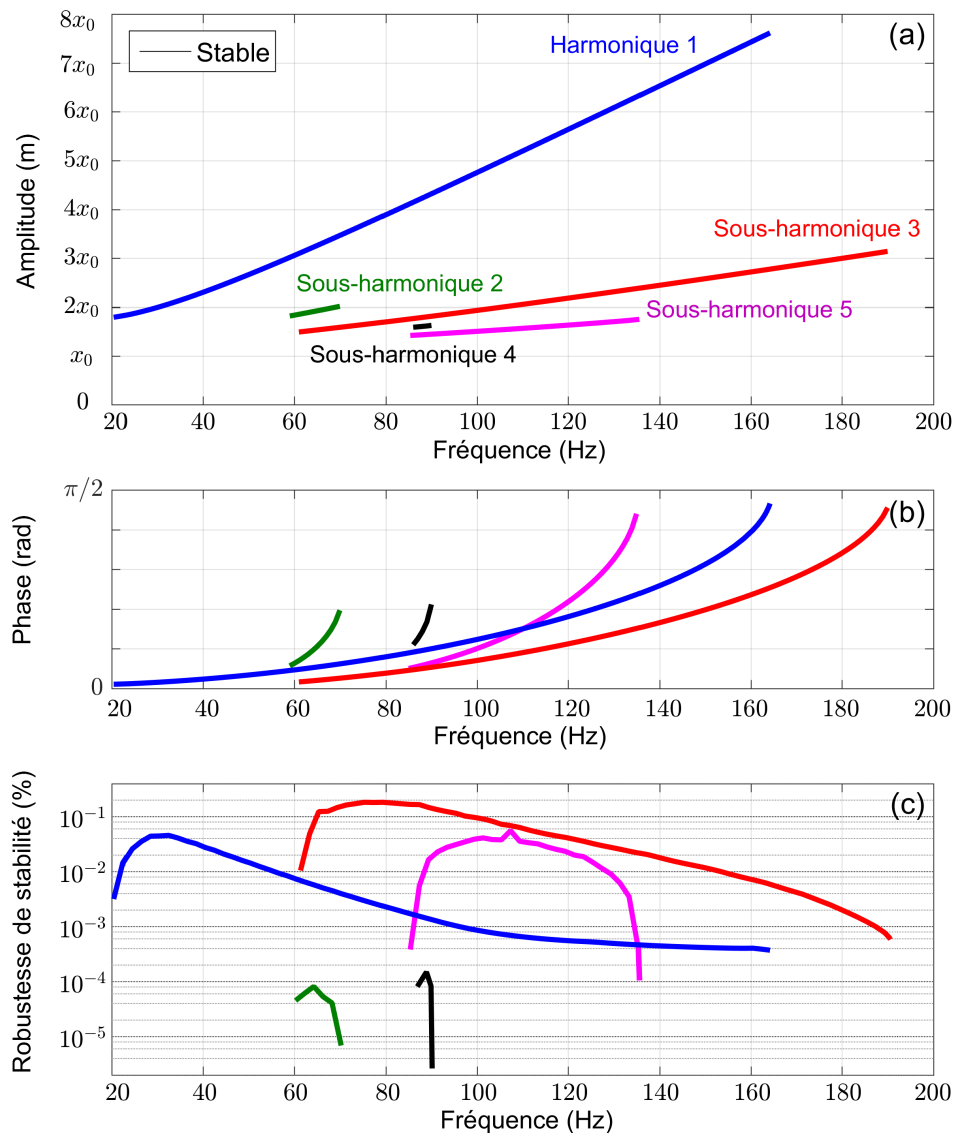
Pour les mêmes raisons qu'au chapitre précédent, les orbites hautes sous-harmoniques ne sont pas présentées au-delà de l'ordre 5 bien que les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre supérieurs existent car la puissance récupérée qui leur est associée est trop faible (l'amplitude d'oscillation de la masse des orbites hautes sous-harmoniques diminue avec leur ordre). Pour rappel également, la Figure 2.4 détaille, à titre d'exemple, un signal temporel et plusieurs portraits de phase pour chacun des comportements visibles en Figure 3.2.

La robustesse de stabilité présentée en Figure 3.2(c) confirme les observations expérimentales du chapitre précédent : les orbites hautes du générateur bistable n'ont pas toutes la même sensibilité aux perturbations extérieures. Les comportements sous-harmoniques d'ordre pair sont, de manière générale, beaucoup moins robustes que les comportements sous-harmoniques d'ordre impair. Les orbites hautes sous-harmoniques 2 et 4 seront donc plus difficiles à atteindre et à maintenir expérimentalement.

Les orbites hautes sous-harmonique d'ordre impair (l'harmonique 1 et les sous-harmoniques 3 et 5) sont, elles, globalement moins sensibles aux perturbations extérieures puisque leur

robustesse de stabilité est plus grande. Cette dernière évolue cependant le long de leur plage de fréquences respective. Leur robustesse de stabilité semble atteindre un maximum au début de leur plage de fréquences puis celle-ci diminue à mesure que la fréquence d'excitation s'approche de leur fréquence de coupure théorique (pour laquelle la phase du déplacement de l'excitation est de  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum) et à mesure que leur amplitude d'oscillation augmente. Ainsi, pour ces comportements sous-harmoniques d'ordre impair, plus la fréquence d'excitation augmente, plus leur robustesse de stabilité diminue, plus ils seront difficiles à atteindre et à maintenir dans le temps en conditions réelles.

Ce nouveau critère de robustesse de stabilité semble donc être qualitativement pertinent puisqu'il permet d'expliquer plusieurs observations faites lors de l'étude expérimentale menée dans le chapitre précédent à savoir : (i) les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair ne sont pas atteignables expérimentalement et (ii) les plages de fréquences des orbites hautes sous-harmoniques d'ordre impair situées proches des fréquences de coupure théoriques ne sont



**Figure 3.2** – Spectres analytiques des orbites hautes du générateur bistable pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$  incluant le nouveau critère de robustesse de stabilité : (a) amplitude des différents comportements (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (c) robustesse de stabilité.



pas atteignables expérimentalement (voir Figure 2.11). Ces premières remarques semblent également être en accord avec les observations faites par Harne et al. [72] dans leurs travaux sur la robustesse du comportement harmonique 1 avec une approche différente consistant à ajouter un bruit blanc artificiel à la vibration ambiante. Le critère introduit dans cette thèse présente cependant un avantage : sa définition semi-analytique permet de réduire fortement les temps de calcul qui lui sont associés comparé à ceux du critère numérique proposé par Harne et al.

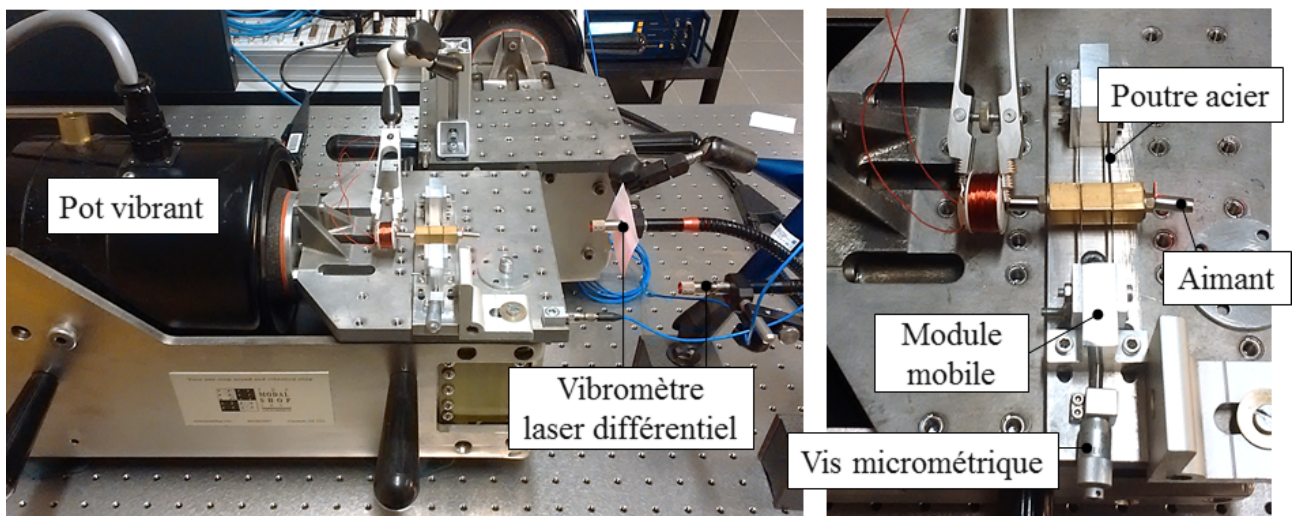
Reste à juger de la pertinence quantitative de ce nouveau critère en le confrontant aux résultats expérimentaux. Pour cela, une limite de robustesse de stabilité doit être empiriquement définie. Les comportements ayant une robustesse de stabilité au dessus de cette limite seront considérés comme assez robustes pour être utilisés pour de la récupération d'énergie en conditions réelles. À l'inverse, les comportements ayant une robustesse de stabilité au dessous de cette limite ne seront pas retenus. Ce critère permet ainsi de jeter un nouveau regard sur les comportements du générateur bistable en venant compléter la caractérisation de leur stabilité obtenue par une simple étude aux petites perturbations.

### 3.4 Validation expérimentale

Les résultats expérimentaux utilisés ici sont repris du chapitre précédent pour les confronter au nouveau modèle théorique incluant la robustesse de stabilité. La méthode employée pour obtenir ces résultats, détaillée au chapitre précédent Section 2.7, est résumée ici pour des raisons de clarté.

#### Banc d'essai et identification

La Figure 3.3 montre le générateur bistable et le banc d'essai utilisé. L'oscillateur bistable est réalisé à l'aide d'une masse composée de trois cubes en laiton venant pincer deux lamelles parallèles en acier ressort APX4. Ces lamelles sont encastrées dans deux modules en aluminium. L'un d'eux est mobile par rapport au support. Une vis micrométrique permet de rapprocher



**Figure 3.3** – *Prototype 1 : générateur bistable électromagnétique réalisé à partir de deux poutres flambées (à l'aide d'une vis micrométrique) et placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante.*

ce module mobile de son homologue afin de faire flamber la structure pour obtenir un système bistable. La conversion d'énergie mécanique en énergie électrique est assurée par un couple aimant-bobine.

Ce prototype est placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante de  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . La position de la masse et la position du support ont été mesurées à l'aide de deux vibromètres laser. Les différents comportements sous-harmoniques du générateur bistable ont été atteints en appliquant des impulsions de tension carrées sur la bobine générant ainsi des impulsions de force sur la masse. Ces impulsions perturbent en effet le générateur bistable et sont susceptibles de lui faire changer de comportement en régime permanent. Une fois le comportement souhaité atteint, la fréquence d'excitation est lentement augmentée ou diminuée sans changement brusque afin de ne pas déstabiliser ce comportement et permettre ainsi d'explorer toute sa plage de fréquences. Tout le long de l'expérience, la puissance moyenne convertie a été évaluée en mesurant la tension aux bornes de la résistance connectée à la bobine ( $P_{\text{moy}} = U_{\text{efficace}}^2/R$ ). Cette dernière a été choisie égale à la résistance interne de la bobine afin d'optimiser l'énergie maximale convertie (adaptation d'impédance). Le schéma Simulink utilisé lors de cette étude expérimentale est détaillé en Annexe, Figure A.1.

L'identification de la pulsation naturelle  $\omega_0$  du générateur bistable a été faite sur le générateur linéaire équivalent obtenu pour une excitation d'amplitude faible [54]. Le facteur de qualité  $Q$  a été ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum corresponde avec le modèle théorique pour le point limite supérieur de la plage fréquentielle de l'orbite haute sous-harmonique 3. Les valeurs de tous les paramètres de ce prototype 1 sont rappelées dans le Tableau 3.1.

**Table 3.1** – Paramètres du générateur bistable : prototype 1.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0,29$	mm
Masse inertielle	$M$	30	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	229	$\text{rad.s}^{-1}$
Facteur de qualité mécanique	$Q$	113	–
Amplitude de l'excitation	$A$	5	$\text{m.s}^{-2}$
Fréquence de l'excitation	$\omega$	20 – 200	Hz
Facteur de force électromagnétique	$\beta$	0,5	$\text{N.A}^{-1}$
Résistance interne de la bobine	$r_L$	18	$\Omega$
Résistance de charge	$R$	18	$\Omega$

Enfin la valeur de la limite de robustesse de stabilité a été identifiée empiriquement. Seuls les comportements situés au dessus de cette limite seront considérés comme assez robustes pour la récupération d'énergie en conditions réelles. Cette limite a été définie comme étant la valeur de la robustesse de stabilité de l'orbite haute sous-harmonique 3 lorsque celle-ci atteint sa fréquence de coupure expérimentale (située à 163 Hz).

## Résultats et discussion

La Figure 3.4 présente les résultats expérimentaux (identiques à ceux obtenus au chapitre précédent) et les confronte au nouveau modèle théorique incluant la robustesse de stabilité. Ces résultats sont présentés par quatre réponses fréquentielles différentes précisant pour chaque comportement : l'amplitude d'oscillation de la masse, la phase du déplacement de l'excitation

quand la position de la masse atteint un maximum, la robustesse de stabilité et la puissance moyenne convertie dans la résistance connectée à la bobine. Seuls les comportements susceptibles d'être intéressants pour la récupération d'énergie sont présentés sur ces graphes, à savoir les orbites hautes définies comme stables aux petites perturbations. Une séparation est ensuite faite entre d'une part les comportements stables et robustes et d'autre part les comportements stables mais pas assez robustes pour la récupération d'énergie (le seuil étant fixé par la limite de robustesse de stabilité). Les comportements définis comme stables et robustes sont à comparer avec les points expérimentaux qui représentent les comportements qui ont pu être atteints et maintenus dans le temps (plus de 30 secondes) durant l'expérience.

Que le critère de robustesse de stabilité soit pris en compte ou non, le modèle théorique et les résultats expérimentaux concordent pour tous les points atteints expérimentalement. Les amplitudes des différents comportements expérimentaux correspondent bien au modèle. Il en va de même pour la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum et pour la puissance moyenne récupérée sur chaque orbite.

Par contre, tous les points admissibles selon la théorie classique (tous les points stables aux petites perturbations) n'ont pu être atteints lors de l'expérience. Les plages de fréquences des comportements admissibles pour la théorie classique ne correspondent pas aux plages de fréquences des comportements expérimentaux qui sont systématiquement plus courtes.

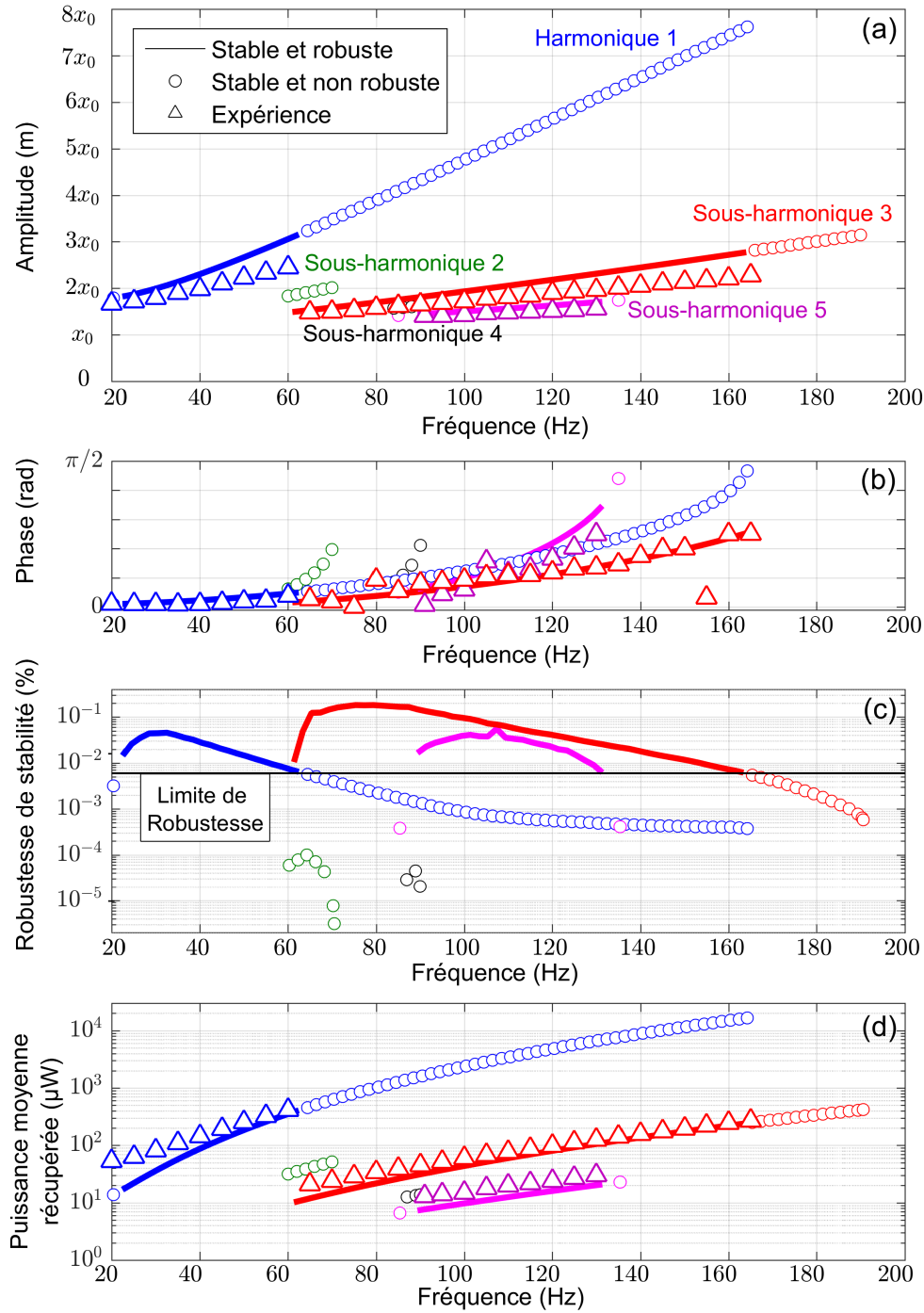
Sur ce dernier point, le constat est clair : l'ajout du critère de stabilité permet une bien meilleure coïncidence : les plages de fréquences des comportements admissibles avec ce critère (comportements stables et robustes) correspondent parfaitement aux plages de fréquences des comportements expérimentaux. L'écart relatif entre les plages de fréquences des comportements admissibles par le modèle et celles des comportements expérimentaux passent, en ajoutant le critère de stabilité, de 22 % à 7 % pour l'orbite sous-harmonique 5 (théorie classique 50 Hz - théorie avec robustesse 42 Hz - expérience 39 Hz), de 22 % à 3 % pour l'orbite sous-harmonique 3 (théorie classique 128 Hz - théorie avec robustesse 103 Hz - expérience 100 Hz) et surtout de 72 % à 5 % pour l'orbite harmonique 1 (théorie classique 143 Hz - théorie avec robustesse 42 Hz - expérience 40 Hz).

Il est également à noter que les orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair n'ont pas pu être atteintes ou maintenues dans le temps expérimentalement contrairement aux prédictions de la théorie classique mais conformément aux prédictions de la théorie incluant le critère de stabilité (toutes sont en-dessous du seuil).

Ce nouveau modèle permet donc une prédiction quantitative précise des comportements du générateur bistable. Le modèle analytique et les résultats concordent maintenant de manière très satisfaisante validant ainsi l'idée selon laquelle les comportements stables du générateur bistable n'ont pas tous la même sensibilité aux perturbations inhérentes aux conditions réelles. Par conséquent, la robustesse de stabilité est plus pertinente que les pistes explorées à la fin du chapitre précédent remettant en cause les hypothèses faites pour construire le modèle mathématique.

Quelques remarques supplémentaires peuvent être tirées de ces résultats : d'abord, le comportement harmonique 1 est beaucoup moins intéressant que ne le laissait présager la théorie de stabilité aux petites perturbations. Sa plage de fréquences accessible pour la récupération d'énergie est au moins divisée par trois : de 20-163 Hz à 20-62 Hz en ajoutant le critère de robustesse de stabilité. La puissance maximale récupérée sur ce comportement est elle divisée par quarante : de 17 mW à 0,41 mW en ajoutant le critère de robustesse de stabilité. À l'opposé, le comportement sous-harmonique 3, globalement plus robuste que le comportement

harmonique 1, gagne en intérêt pour la récupération d'énergie en conditions réelles. Il est, en effet, moins affecté par l'ajout de ce nouveau critère. Sa plage de fréquences n'est dépréciée que de 20 % en passant de 62-190 Hz à 62-165 Hz après ajout du critère de robustesse de stabilité. La puissance maximale récupérée n'est, elle, dépréciée que de 40 % en passant de 0.42 mW à 0,24 mW. Ainsi, la puissance maximale récupérée sur le comportement sous-harmonique 3 est maintenant du même ordre de grandeur que celle récupérée sur le comportement harmonique 1



**Figure 3.4** – Spectres analytiques et expérimentaux des orbites hautes du générateur bistable pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$  incluant le nouveau critère de robustesse de stabilité : (a) amplitude des différents comportements (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (c) robustesse de stabilité (d) puissance moyenne récupérée.

(respectivement 0,24 mW et 0,41 mW). De plus, le comportement sous-harmonique 3 apparaît sur une plage de fréquences totalement différente de celle du comportement harmonique 1. Le comportement sous-harmonique 3 permet donc d'élargir significativement la bande passante globale du générateur bistable en proposant de nouvelles plages de fréquences sur lesquelles une orbite haute existe pour la récupération d'énergie. Le prototype utilisé pour cette phase d'expérimentation récupère ainsi en moyenne plus de 100  $\mu$ W sur une plage de fréquences qui passe de 25 Hz en n'utilisant que le comportement harmonique 1 (de 35 Hz à 60 Hz) à 70 Hz en combinant le comportement harmonique 1 et sous-harmonique 3 (de 35 Hz à 60 Hz et de 120 Hz à 165 Hz). Avec cette moyenne de 100  $\mu$ W, il est possible d'alimenter un capteur isolé sans fil consommant 450 mJ par paquet transmis (22 mA sous 3,3 V pendant 6,2 ms [4]) avec, en moyenne, un paquet envoyé toutes les 1,25 h.

En conclusion, le nouveau critère de robustesse de stabilité permet une bien meilleure compréhension des comportements du générateur bistable en évaluant la difficulté avec laquelle ils peuvent être maintenus dans le temps en conditions réelles (soumis à des perturbations extérieures plus ou moins grandes). Plus ils seront difficiles à maintenir dans le temps (dû à une forte sensibilité aux perturbations extérieures), moins ils seront robustes selon ce critère. Son application met en valeur un comportement en particulier des générateurs bistables jusqu'à maintenant ignoré pour la récupération d'énergie : le comportement sous-harmonique 3 (pour lequel la masse oscille à une fréquence trois fois inférieure à celle de l'excitation). Pour notre prototype, l'utilisation de ce comportement sous-harmonique 3, couplé au comportement harmonique 1, permet de tripler la plage de fréquences sur laquelle le prototype récupère en moyenne plus de 100  $\mu$ W comparée à la plage de fréquences obtenue en n'utilisant que le comportement harmonique 1 (70 Hz pour la combinaison des deux comportements contre 25 Hz pour le comportement harmonique 1 seul).

Ce modèle mathématique incluant le nouveau critère de robustesse de stabilité aura l'occasion d'être éprouvé une seconde fois dans le chapitre suivant pour le deuxième prototype développé durant cette thèse. Sa pertinence sera une nouvelle fois confirmée par la bonne correspondance entre réponse fréquentielle théorique prédite et réponse fréquentielle expérimentale (voir Figure 4.8).

### **3.5 Réponse fréquentielle des générateurs bistables : exploitation du modèle**

Le modèle mathématique présenté jusqu'à maintenant semble donc être pertinent pour décrire le comportement du générateur bistable. Les prédictions théoriques qui en émanent sont en accord avec les mesures réalisées sur deux prototypes différents (voir Figure 3.4 et Figure 4.8). Dans la suite, ce modèle mathématique est exploité pour deux études distinctes : premièrement l'étude de l'influence des différents paramètres du générateur bistable sur sa réponse fréquentielle puis l'étude comparative entre générateur bistable et générateur linéaire. Les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles du prototype 1. Elles sont détaillées dans le Tableau 3.1.

### Influence des paramètres

Le schéma du modèle mathématique à constantes localisées utilisé dans cette thèse est rappelé en Figure 3.5. L'équation de comportement qui en découle donne :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R + r_L)} \right) \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (3.34)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{x_0}{L} \sqrt{\frac{2k}{M}} \\ Q = \frac{x_0}{L} \frac{\sqrt{2kM}}{\mu} \end{cases} \quad (3.35)$$

Le jeu de paramètres choisi pour identifier le générateur bistable est le suivant :  $(M, k, x_0, L, \mu, \beta, R, r_L)$ . La suite consiste à étudier l'influence de certains de ces paramètres sur la réponse fréquentielle du générateur pour une amplitude d'excitation constante égale à  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . Premièrement, la grandeur  $x_0$  est couplée à la longueur  $L$  de manière bijective (une valeur de  $x_0$  n'est obtenue que pour une seule valeur de  $L$  et vice et versa). L'influence de la longueur  $L$  sur la réponse fréquentielle du générateur bistable pourra donc être directement déduite de l'influence de  $x_0$ . Ensuite, le coefficient de frottement  $\mu$  et la résistance interne de la bobine  $r_L$  sont supposés ne pas pouvoir être changés significativement. Ces paramètres seront donc considérés comme constants. Enfin, la résistance  $R$  connectée à la bobine est choisie constante égale à la résistance interne de la bobine afin d'optimiser l'énergie maximale convertie (adaptation d'impédance). L'influence de tous ces paramètres ne sera donc pas étudiée dans la suite.

Les paramètres restants sont  $(M, k, x_0, \beta)$ . L'objectif, ici, est de pouvoir disposer de pistes afin d'améliorer les performances du prototype 1 de cette thèse. L'influence de ces paramètres sera donc étudiée autour des valeurs de ce prototype détaillées dans le Tableau 3.1. Pour chaque étude, un de ces paramètres sera modifié en gardant les autres constants. Il est à noter que ce prototype est faiblement couplé. Son facteur de force électromagnétique  $\beta$  (représentatif du couplage entre l'aimant et la bobine) est en effet relativement faible. Ceci signifie que l'amortissement électrique  $\mu_{elec} = \beta^2 / (R + r_L)$  de ce prototype est faible devant son amortissement mécanique  $\mu = M\omega_0 / Q$  (respectivement  $0.007 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$  et  $0.06 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ ). L'étude qui suit n'est donc valable que pour ce type de générateur situé en deçà de l'optimum de conversion d'énergie (atteint lorsque  $\mu_{elec} = \mu$ ).

Les Figures 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9 montrent l'influence du facteur de force électromagnétique  $\beta$ ,

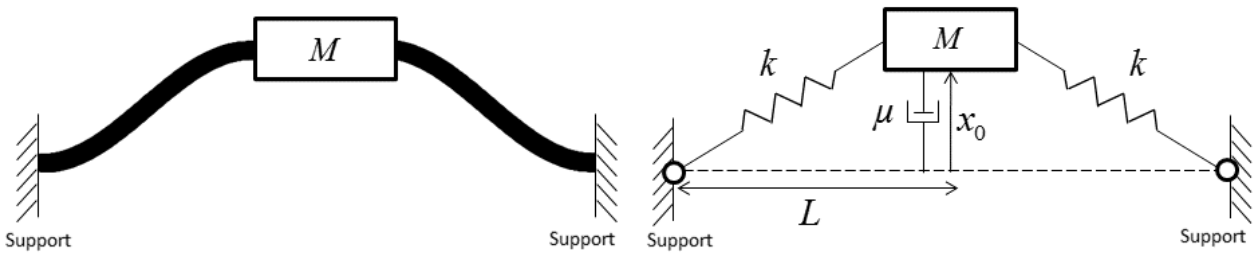


Figure 3.5 – Schéma du principe et de la modélisation mathématique de l'oscillateur bistable (ici représenté dans une de ses deux positions d'équilibre).

de la masse  $M$ , de la raideur des ressorts  $k$  et de la valeur des positions stables  $x_0$  sur la réponse fréquentielle du prototype 1. Seuls deux comportements sont étudiés sur ces figures. Il s'agit des deux comportements ayant été jugés comme les plus pertinents pour la récupération d'énergie vibratoire dans ce chapitre, à savoir, l'orbite haute harmonique 1 (sur laquelle on trouve le point de fonctionnement maximisant la puissance moyenne récupérée) et l'orbite haute sous-harmonique 3 (proposant une plage de fréquences utile complémentaire à celle de l'orbite haute harmonique 1 tout en assurant une puissance moyenne récupérée intéressante). Les différentes réponses fréquentielles présentent donc l'influence de  $\beta$ ,  $M$ ,  $k$  et  $x_0$  sur ces deux comportements. Chacun d'eux est caractérisé à l'aide de trois grandeurs : l'amplitude d'oscillation de la masse, la robustesse de stabilité et la puissance moyenne récupérée.

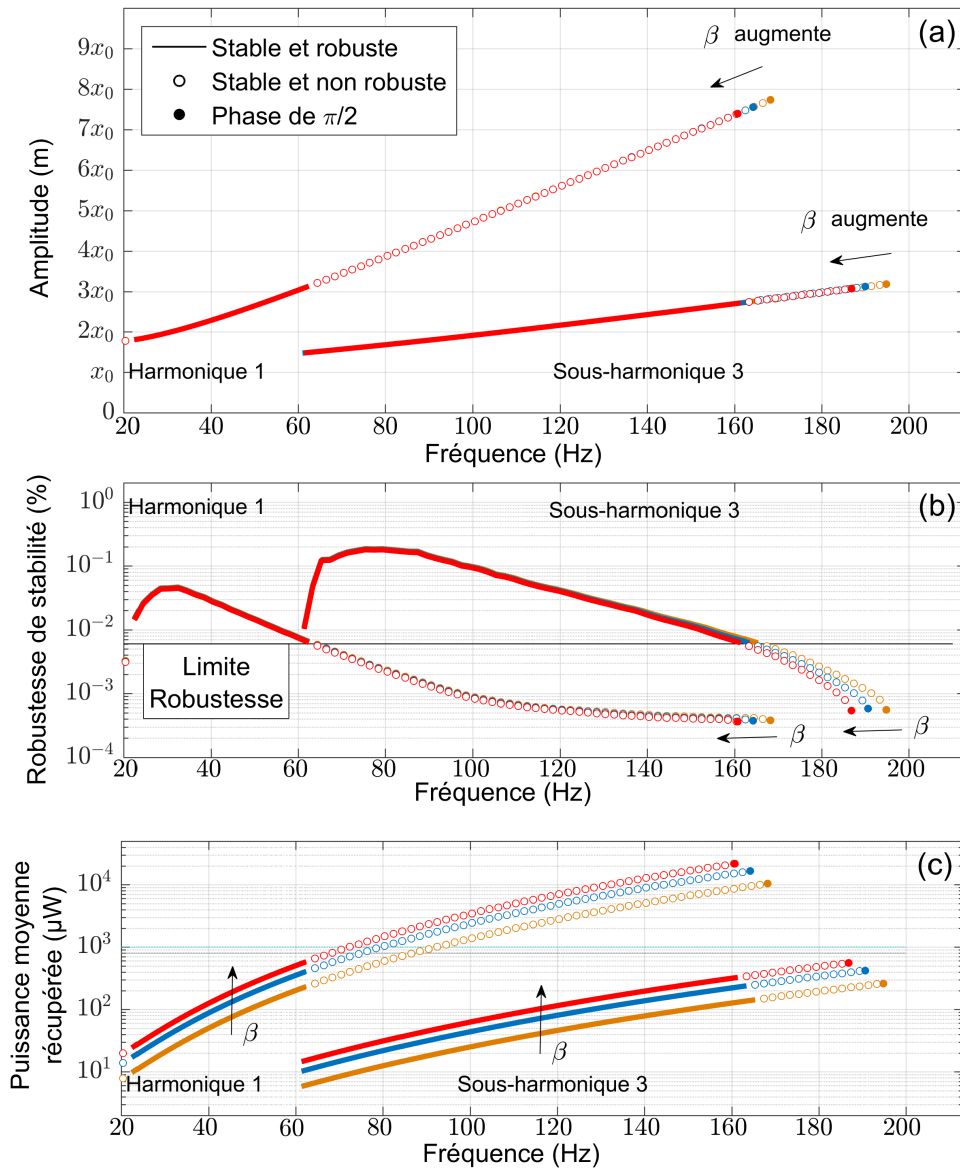
Malgré son importance pour la définition des comportements du générateur bistable, la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum n'a pas été représentée sur ces spectres. La lisibilité du graphe représentant cette dernière n'est en effet pas bonne (les courbes s'entremêlent et se confondent). Pour les comportements sous-harmoniques d'ordre impair, cette phase commence à 0 et croît de manière monotone jusqu'à atteindre systématiquement  $\pi/2$  pour la fréquence de coupure théorique (voir Figure 3.4). Elle est donc indispensable pour caractériser la fréquence de coupure théorique des comportements étudiés. Ainsi, la solution suivante a été retenue afin de faire apparaître ce critère sans diminuer la lisibilité des figures présentées : chaque point de fonctionnement du générateur bistable pour lequel la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum a été représenté par un rond plein. Ces ronds pleins correspondent donc à la limite supérieure théorique (fréquence de coupure) des comportements considérés. Deux règles de représentation ont également été posées pour améliorer l'analyse comparative de ces réponses fréquentielles : (i) les courbes bleues sont identiques pour les quatre figures. Elles sont obtenues pour les valeurs correspondant aux paramètres du prototype 1. (ii) Le maximum et le minimum de l'axe des ordonnées et de l'axe des abscisses sont les mêmes pour les Figures 3.6(a), 3.7(a), 3.8(a) et 3.9(a). Il en va de même pour les autres sous-figures.

Sur la Figure 3.6, lorsque le facteur de force électromagnétique  $\beta$  augmente (donc lorsque le couplage du générateur augmente) : (1) l'amplitude d'oscillation de la masse pour une fréquence d'excitation donnée reste constante pour les deux comportements ; (2) mais leur fréquence de coupure théorique (définie par une phase de  $\pi/2$ ) diminue entraînant une diminution de la bande passante théorique du générateur ; (3) leur fréquence de coupure réelle (définie par la limite de robustesse de stabilité) diminue également mais de manière moins prononcée entraînant une légère diminution de la bande passante utilisable du générateur en conditions réelles ; (4) ceci est expliqué par la robustesse de stabilité des deux comportements qui diminue légèrement ; (5) la puissance récupérée pour une fréquence d'excitation donnée augmente ; (6) la puissance récupérée maximale théorique et la puissance récupérée maximale réelle augmentent également (ceci s'explique par le fait que le couplage, initialement faible, est ici amélioré). Afin d'optimiser le prototype 1, il convient donc d'augmenter le facteur de force afin d'augmenter la puissance récupérée sur toute la bande passante du générateur. À partir d'une certaine valeur, il conviendra ensuite de trouver un compromis entre puissance récupérée (en augmentant  $\beta$ ) et bande passante (en diminuant  $\beta$ ). À noter que, pour cette analyse, le facteur de force varie mais reste relativement faible (générateur faiblement couplé donc en deçà de l'optimum de conversion d'énergie).

Sur la Figure 3.7, lorsque la masse  $M$  augmente : (1) l'amplitude d'oscillation de la masse pour une fréquence d'excitation donnée augmente pour les deux comportements ; (2) leur fréquence de coupure théorique (définie par une phase de  $\pi/2$ ) augmente également entraînant

une augmentation de la bande passante théorique du générateur ; (3) leur fréquence de coupure réelle (définie par la limite de robustesse de stabilité) reste constante pour le comportement harmonique 1 et augmente pour le comportement sous-harmonique 3 entraînant une augmentation globale de la bande passante utilisable du générateur en conditions réelles ; (4) ceci est expliqué par la robustesse de stabilité qui augmente pour les deux comportements ; (5) la puissance récupérée pour une fréquence d'excitation donnée augmente ; (6) la puissance récupérée maximale théorique et la puissance récupérée maximale réelle augmente également. Afin d'optimiser le prototype 1, il convient donc d'augmenter la masse  $M$  afin d'augmenter la puissance récupérée et la bande passante du générateur (dans la limite des contraintes volumiques imposées).

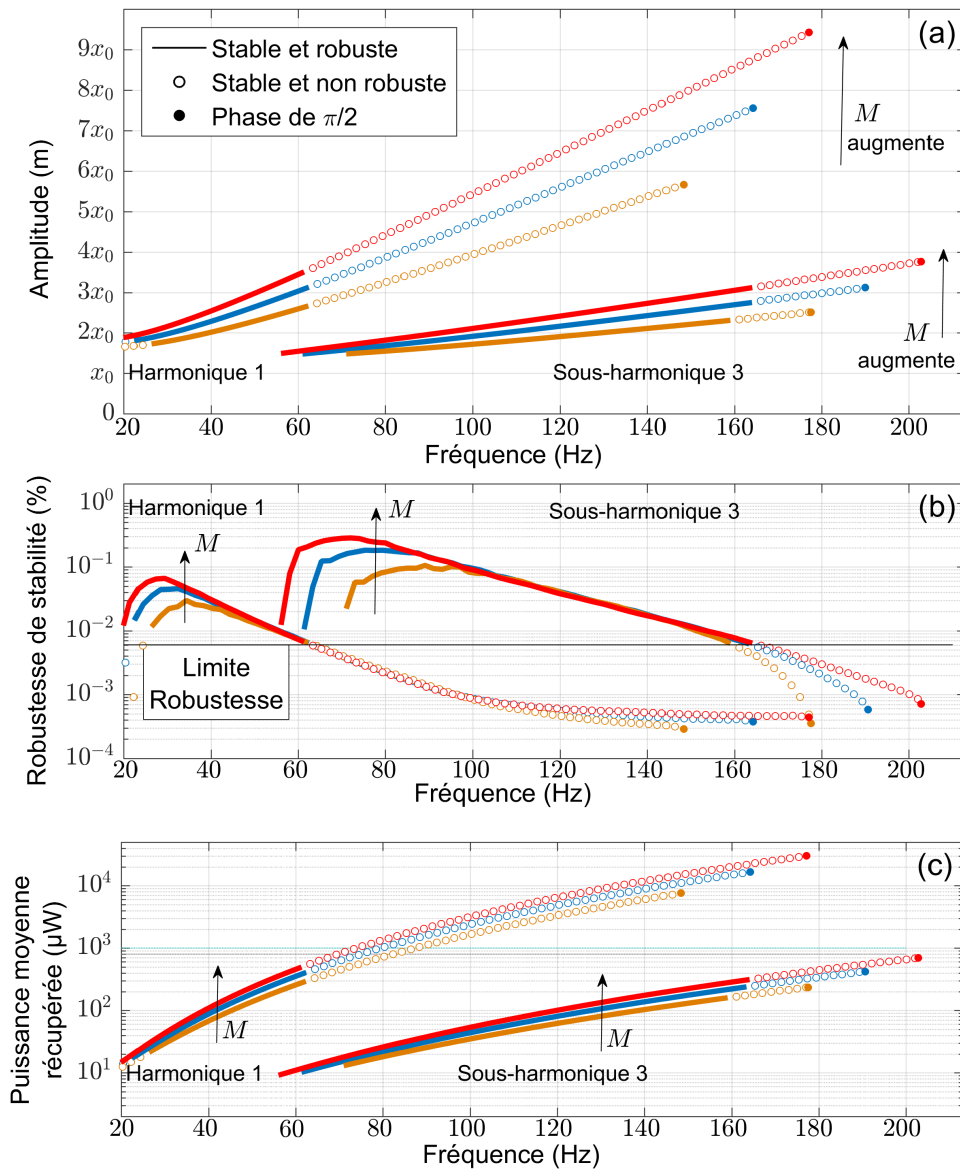
Sur la Figure 3.8, lorsque la raideur des ressorts  $k$  augmente : (1) l'amplitude d'oscillation



**Figure 3.6** – Influence du facteur de force électromagnétique  $\beta$  sur la réponse fréquentielle analytique du générateur bistable pour une excitation de  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . Valeurs présentées :  $0,4 \text{ N.A}^{-1}$  (courbes oranges),  $0,5 \text{ N.A}^{-1}$  (valeur du prototype 1 - courbes bleues) et  $0,6 \text{ N.A}^{-1}$  (courbes rouges). Ces valeurs correspondent respectivement à des amortissements électriques équivalents de  $0,004 \text{ N.m.s}^{-1}$ ,  $0,007 \text{ N.m.s}^{-1}$  et  $0,010 \text{ N.m.s}^{-1}$ . Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est atteinte lorsque la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.



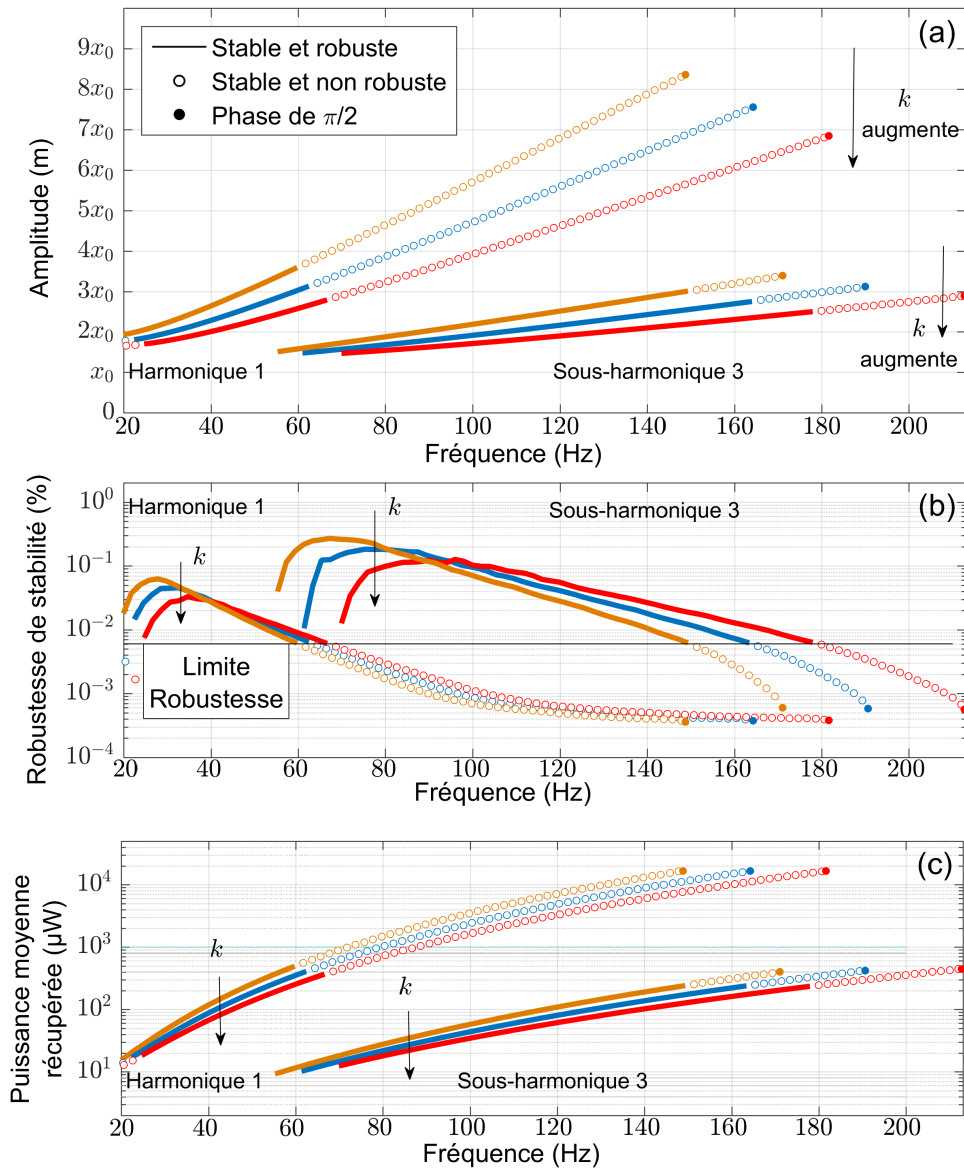
de la masse pour une fréquence d'excitation donnée diminue pour les deux comportements ; (2) leur fréquence de coupure théorique (définie par une phase de  $\pi/2$ ) augmente ; (3) leur fréquence de coupure réelle (définie par la limite de robustesse de stabilité) augmente ; (4) la robustesse de stabilité atteint une valeur maximale moins élevée pour les deux comportements mais atteint moins rapidement la limite de robustesse ; (5) la puissance récupérée pour une fréquence d'excitation donnée diminue ; (6) la puissance récupérée maximale théorique et réelle reste sensiblement constante. Au fond, les courbes de puissance semblent simplement se décaler vers la droite (vers les hautes fréquences) lorsque  $k$  augmente. Ce décalage affecte de manière plus significative le comportement sous-harmonique 3 que le comportement harmonique 1. La raideur des ressorts  $k$  peut donc être utilisée pour ajuster la plage de fréquences utile du prototype 1 en la décalant vers les hautes ou vers les basses fréquences sans compromis sur



**Figure 3.7** – Influence de la masse  $M$  sur la réponse fréquentielle analytique du générateur bistable pour une excitation de  $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Masses présentées : 20 g (courbes oranges), 30 g (valeur du prototype 1 - courbes bleues) et 40 g (courbes rouges). Ces valeurs correspondent respectivement à des pulsations naturelles de  $197 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (31 Hz),  $229 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (36 Hz),  $278 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (44 Hz). Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est atteinte lorsque la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.

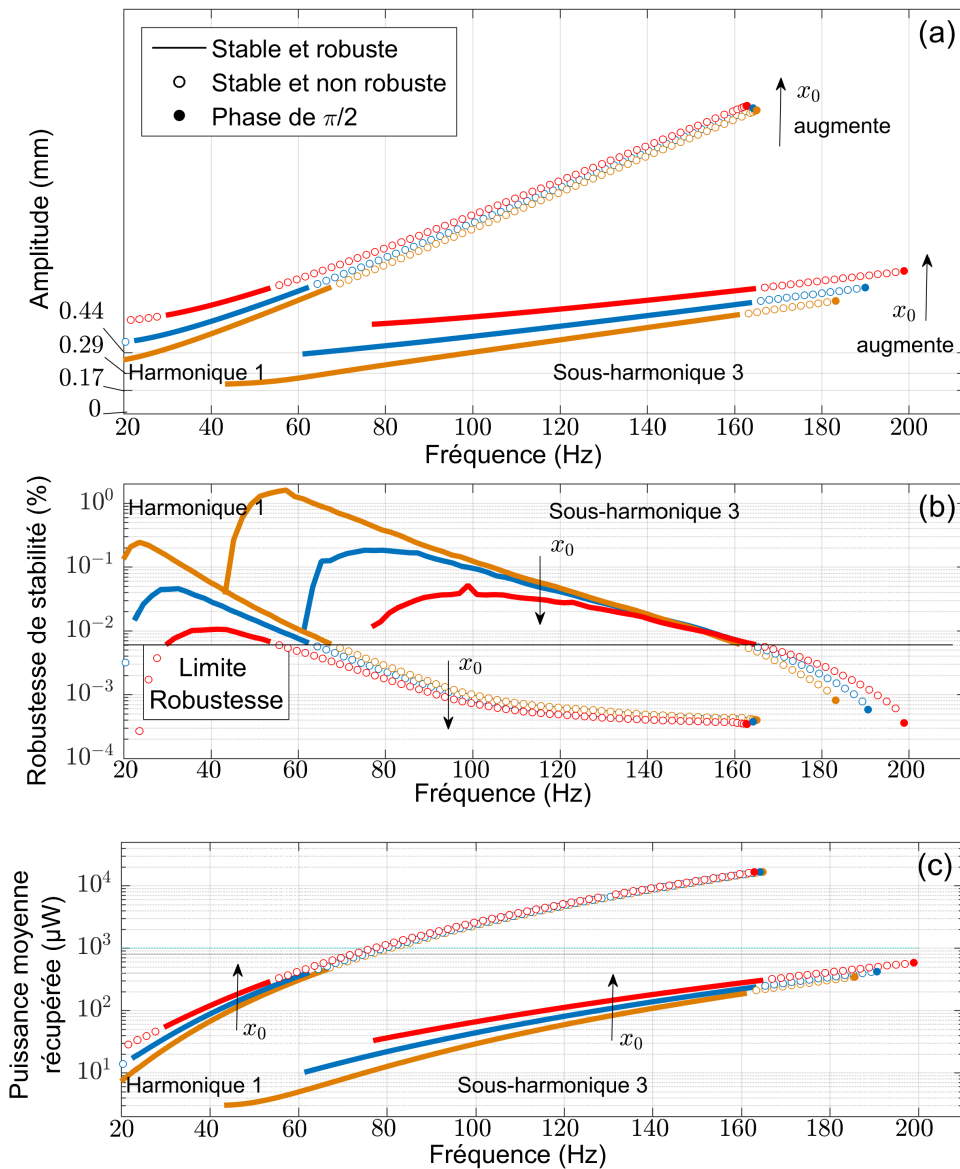
la puissance récupérée. Il est également possible de contrôler la distance entre les plages de fréquences des deux comportements pour obtenir, par exemple, une plage de fréquences globale continue.

Enfin, sur la Figure 3.9, lorsque la valeur des positions stables  $x_0$  augmente : (1) l'amplitude d'oscillation de la masse pour une fréquence d'excitation donnée augmente pour les deux comportements ; (2) la fréquence de coupure théorique (définie par une phase de  $\pi/2$ ) du comportement harmonique 1 diminue légèrement tandis que la fréquence de coupure théorique du comportement sous-harmonique 3 augmente ; (3) la fréquence de coupure réelle (définie par la limite de robustesse de stabilité) suit la même tendance : elle diminue pour le comportement harmonique 1 et augmente pour le comportement sous-harmonique 3. De manière générale, la



**Figure 3.8** – Influence de la raideur des ressorts  $k$  sur la réponse fréquentielle analytique du générateur bistable pour une excitation de  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . Raideurs présentées :  $4,7 \text{ kN.mm}^{-1}$  (courbes oranges),  $7,1 \text{ kN.mm}^{-1}$  (valeur du prototype 1 - courbes bleues) et  $10,6 \text{ kN.mm}^{-1}$  (courbes rouges). Ces valeurs correspondent respectivement à des pulsations naturelles de  $153 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $24 \text{ Hz}$ ),  $229 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $36 \text{ Hz}$ ),  $344 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $55 \text{ Hz}$ ). Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est atteinte lorsque la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.

plage de fréquences du comportement harmonique 1 en conditions réelles diminue lorsque  $x_0$  augmente tandis que celle du comportement sous-harmonique 3 augmente. La bande passante totale du générateur semble, elle, globalement diminuer avec  $x_0$ . (4) La robustesse de stabilité diminue pour les deux comportements; (5) la puissance récupérée pour une fréquence d'excitation donnée augmente; (6) la puissance récupérée maximale théorique semble être constante pour le comportement harmonique 1 et augmente pour le comportement sous-harmonique 3; (7) la puissance récupérée maximale réelle diminue pour le comportement harmonique 1 et augmente pour le comportement sous-harmonique 3. L'optimisation du prototype 1 à l'aide de  $x_0$  est donc plus délicate. Il convient donc de trouver un compromis entre puissance récupérée à chaque fréquence (en augmentant  $x_0$ ), puissance récupérée maximale (en diminuant  $x_0$ ) et bande passante (en diminuant  $x_0$ ).



**Figure 3.9** – Influence de la valeur des positions stables  $x_0$  sur la réponse fréquentielle analytique du générateur bistable pour une excitation de  $5 \text{ m.s}^{-2}$ . Valeurs présentées :  $0.17 \text{ mm}$  (courbes oranges),  $0.29 \text{ mm}$  (valeur du prototype 1 - courbes bleues) et  $0.44 \text{ mm}$  (courbes rouges). Ces valeurs correspondent respectivement à des pulsations naturelles de  $135 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $21 \text{ Hz}$ ),  $229 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $36 \text{ Hz}$ ),  $350 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $56 \text{ Hz}$ ). Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est atteinte lorsque la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.

Ces différentes études soulignent une nouvelle fois l'importance du critère de robustesse de stabilité. Les conclusions quant à l'amélioration du prototype 1 changent si ce critère est ou n'est pas pris en compte. Ceci est notamment le cas pour l'influence de la valeur des positions stables  $x_0$  : l'étude classique de stabilité aux petites perturbations ne prédisait pas de grands changements de fréquence de coupure pour le comportement harmonique 1 alors que l'étude incluant le critère de robustesse de stabilité nous indique que cette dernière est belle et bien affectée.

Tous ces résultats ne sont valables que pour des générateurs bistables pour lesquels la résistance  $R$  a été fixée égale à la résistance interne  $r_L$  de la bobine (adaptation d'impédance) afin d'optimiser la puissance maximale convertie atteinte à la fréquence de coupure théorique. De même, tous ces résultats ne sont valables que pour des générateurs bistables faiblement couplés (amortissement électrique bien inférieur à l'amortissement mécanique).

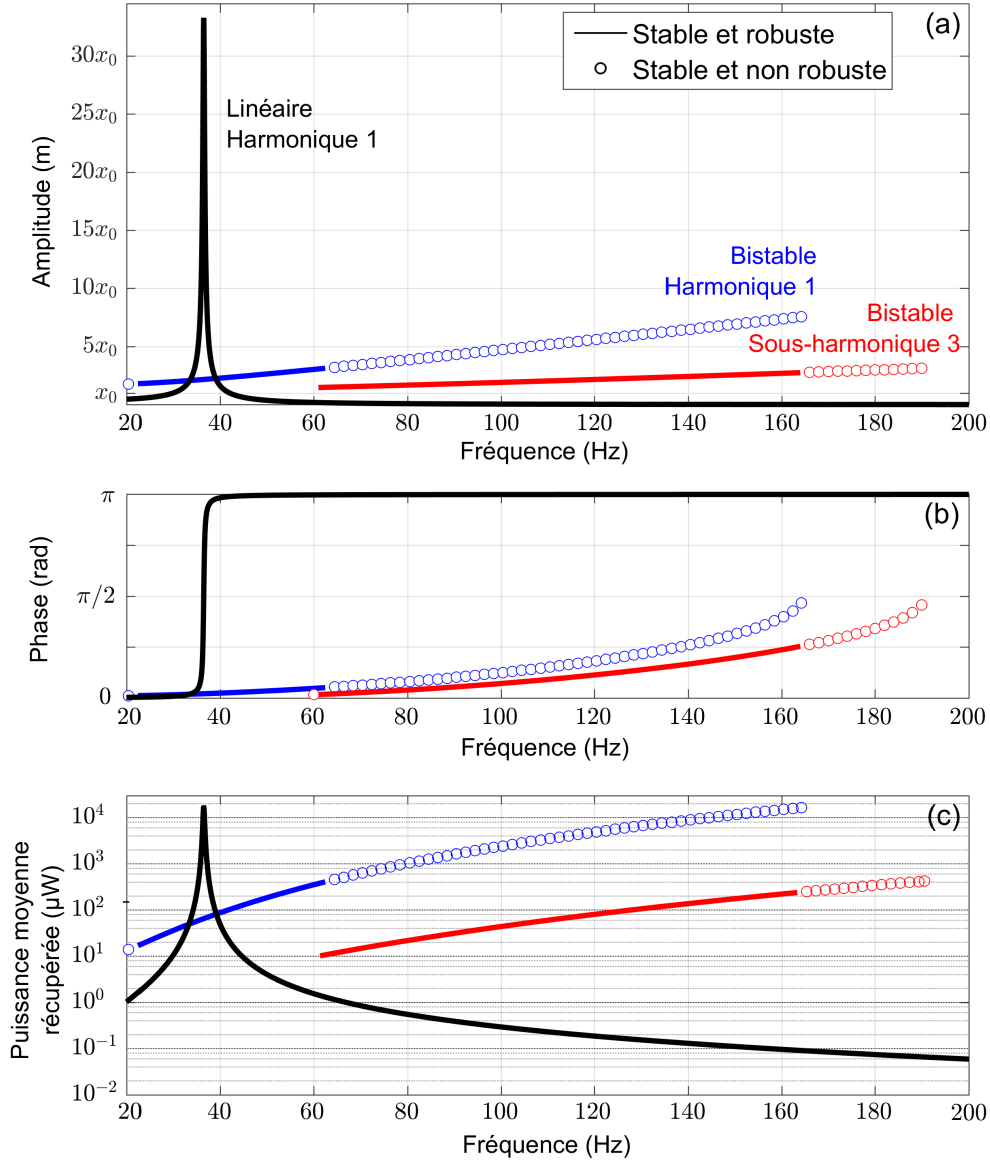
### Comparaison avec le générateur linéaire équivalent

Pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$ , la Figure 3.10 présente la réponse fréquentielle du prototype 1 de générateur bistable utilisé dans cette thèse et la compare à la réponse fréquentielle du générateur linéaire équivalent. La Figure 3.10(b) détaille la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum. Cette phase est positive pour les deux générateur car le déplacement de l'excitation est en avance sur le déplacement de la masse. Les valeurs des paramètres du générateur bistable sont détaillées dans le Tableau 3.1. Les paramètres du générateur linéaire équivalent correspondent aux paramètres de générateur bistable lorsque celui-ci est soumis à une petite excitation. Il se comporte alors comme un oscillateur linéaire oscillant autour d'une de ses deux positions d'équilibre  $x_0$  tel que  $x = x_0 + \Delta x$  avec  $\Delta x \ll x_0$  [54]. Ce générateur linéaire possède la même masse  $M$  que le générateur bistable, la même pulsation naturelle  $\omega_0$ , le même facteur de qualité  $Q$  et le même facteur de force électromagnétique  $\beta$ . La résistance  $R$  connectée à la bobine est, de la même manière que pour le générateur bistable, fixée égale à la résistance interne de la bobine  $r_L$  afin d'optimiser la puissance maximale récupérée (adaptation d'impédance). Le générateur linéaire équivalent a déjà été mis en évidence dans le chapitre précédent par l'Équation (2.8). Les équations régissant le comportement de ces deux générateurs sont rappelées ici :

$$\text{Générateur bistable : } \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R + r_L)} \right) \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (3.36)$$

$$\text{Générateur linéaire équivalent : } \ddot{x} + \omega_0^2 x + \left( \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\beta^2}{M(R + r_L)} \right) \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (3.37)$$

La première observation tirée de la Figure 3.10 concerne la puissance moyenne récupérée : le maximum atteint avec le générateur linéaire (à sa fréquence de résonance) est identique au maximum atteint avec le générateur bistable (à la fréquence de coupure théorique du comportement harmonique 1 définie par une phase du déplacement de l'excitation égale à  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum). Comme nous allons le voir, cette propriété singulière peut être directement déduite des équations constitutives des deux générateurs. Dans la suite,



**Figure 3.10** – Comparaison des réponses fréquentielles du générateur bistable (prototype 1 de cette thèse) et du générateur linéaire équivalent pour une excitation d'amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$ .

pour simplifier les notations, les différents amortissements sont notés comme suit :

$$\begin{cases} \mu_{\text{méca}} = M \frac{\omega_0}{Q} \\ \mu_{\text{élec}} = \frac{\beta^2}{R + r_L} \end{cases} \quad (3.38)$$

Pour le générateur linéaire comme pour le générateur bistable, la puissance récupérée en fonction du temps est définie par :

$$P_{\text{récupérée}}(t) = \mu_{\text{élec}} \dot{x}(t)^2 \quad (3.39)$$

La puissance moyenne récupérée maximale est donc atteinte lorsque la valeur efficace de la vitesse de la masse est maximale. Cette condition se produit à la résonance pour le générateur

linéaire et à la fréquence de coupure théorique du comportement harmonique 1 pour le générateur bistable. Ces deux événements sont définis par le même critère : ils sont atteints si et seulement si la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  lorsque la position de la masse atteint un maximum. En sachant que :

$$\begin{cases} \text{Accélération de l'excitation} = A \cos(\omega t) \\ \text{Vitesse de l'excitation} = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) \\ \text{Déplacement de l'excitation} = -\frac{A}{\omega^2} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Alors, la puissance moyenne récupérée maximale est atteinte pour :

$$\begin{cases} x_{\max}(t) = -b \sin(\omega t) \\ \dot{x}_{\max}(t) = -b\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_{\max}(t) = b\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (3.41)$$

La constante  $b$ , à déterminer, représente l'amplitude des oscillations de la masse lorsque la puissance moyenne récupérée maximale est atteinte. Pour le générateur linéaire, la substitution de l'Équation (3.41) dans l'Équation (3.37) donne :

$$\begin{aligned} (b\omega^2 - b\omega_0^2) \sin(\omega t) + \left( A - \frac{1}{M}(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})b\omega \right) \cos(\omega t) &= 0 \\ \implies \text{balance harmonique} \begin{cases} \omega = \omega_0 \\ b = \frac{AM}{\omega(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})} \end{cases} & \quad (3.42) \end{aligned}$$

Pour le générateur bistable, la substitution de l'Équation (3.41) dans l'Équation (3.36) donne :

$$\begin{aligned} \left( b\omega^2 - b^3 \frac{3\omega_0^2}{8x_0^2} + b\frac{\omega_0^2}{2} \right) \sin(\omega t) + b^3 \frac{\omega_0^2}{8x_0^2} \sin(3\omega t) + \left( A - \frac{1}{M}(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})b\omega \right) \cos(\omega t) &= 0 \\ \implies \text{balance harmonique pour l'harmonique 1} \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{3b^2\omega_0^2}{8x_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2}} \\ b = \frac{AM}{\omega(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})} \end{cases} & \quad (3.43) \end{aligned}$$

Ainsi, la puissance récupérée maximale est identique pour le générateur bistable et pour le générateur linéaire équivalent :

$$P_{\text{récupérée max}}(t) = \mu_{\text{élec}}(b\omega \cos(\omega t))^2 \quad (3.44)$$

$$= \mu_{\text{élec}} \frac{A^2 M^2}{(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})^2} \cos^2(\omega t) \quad (3.45)$$

La remarque tirée de la Figure 3.10 peut donc être directement déduite des équations de comportements : la puissance moyenne maximale récupérée avec le générateur linéaire à la résonance

est identique à la puissance moyenne maximale récupérée avec le générateur bistable à la fréquence de coupure théorique du comportement harmonique 1. Leur expression analytique est donnée par :

$$P_{\text{moyenne récupérée max}} = \frac{\mu_{\text{élec}}}{2(\mu_{\text{méca}} + \mu_{\text{élec}})^2} A^2 M^2 \quad (3.46)$$

Cependant, la Figure 3.10 montre que la fréquence de coupure théorique du générateur bistable n'est pas assez robuste pour être maintenue dans le temps en conditions réelles. La puissance moyenne maximale calculée précédemment n'est donc pas atteignable pour ce type de générateur. Elle passe ainsi de 17 mW pour la fréquence de coupure théorique (163 Hz) à 0,41 mW pour la fréquence de coupure réelle (62 Hz). Du point de vue de la puissance moyenne maximale récupérée, le générateur bistable est donc moins performant que le générateur linéaire équivalent [55].

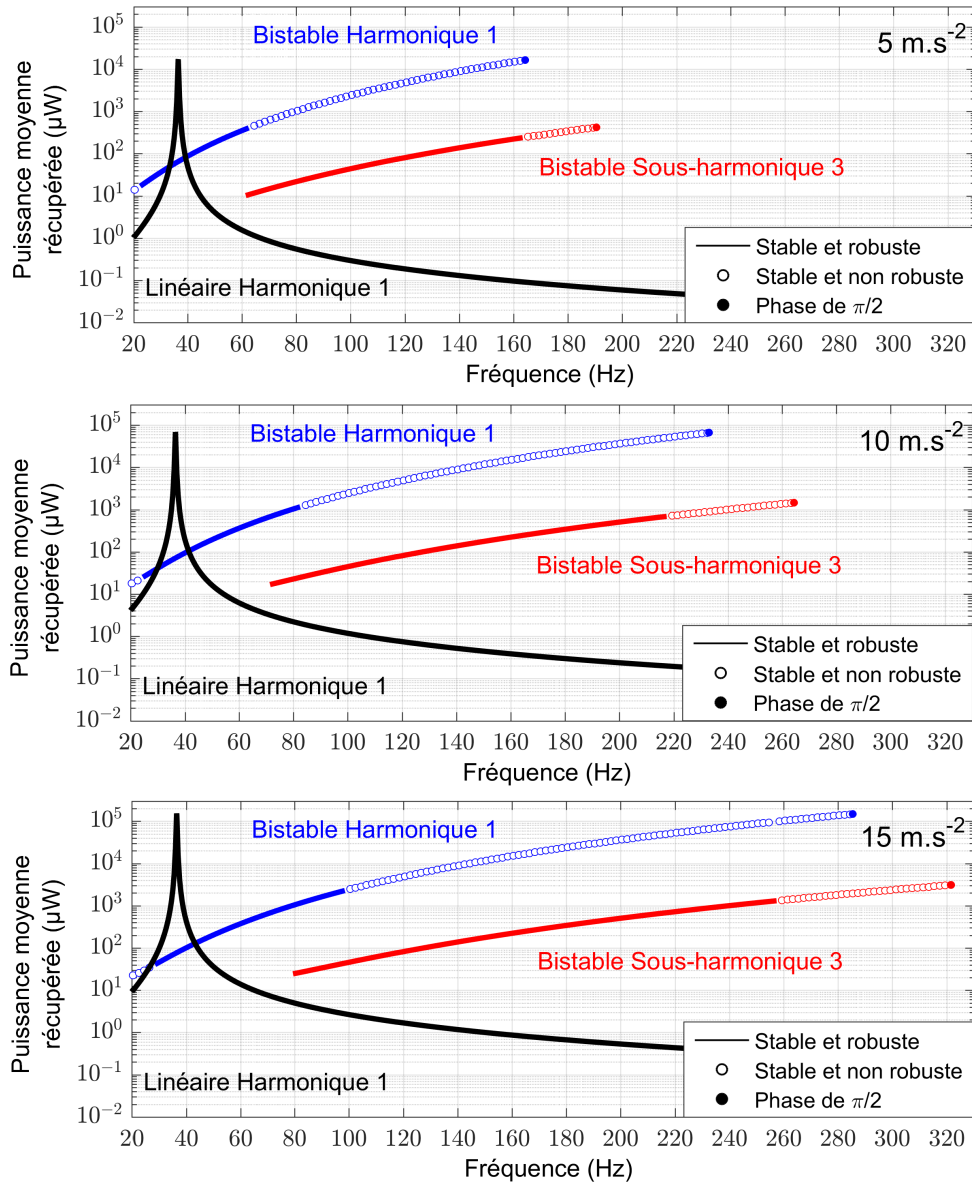
D'un autre côté, les mouvements de la masse sont plus grands dans le cas du générateur linéaire avec 10 mm d'amplitude contre 2,2 mm pour la fréquence de coupure théorique du générateur bistable et 0,9 mm pour sa fréquence de coupure réelle. Cette fois-ci, le générateur bistable semble être plus pertinent que le générateur linéaire équivalent en terme d'espace occupé par le mouvement de la masse.

Enfin, les deux générateurs n'ont pas la même bande passante. La plage de fréquences pour laquelle les générateurs récupèrent en moyenne plus de 100  $\mu\text{W}$  vaut 5 Hz pour le générateur linéaire (de 34 Hz à 39 Hz) et 57 Hz pour le générateur bistable (de 41 Hz à 62 Hz pour le comportement harmonique 1 et de 127 Hz à 163 Hz pour le comportement sous-harmonique 3) donnant à ce dernier plus de pertinence dans les cas où la fréquence de la source de vibration ambiante varie au cours du temps (avec cette moyenne de 100  $\mu\text{W}$ , il est possible d'alimenter un capteur isolé sans fil consommant 450 mJ par paquet transmis - 22 mA sous 3,3 V pendant 6,2 ms [4] - avec, en moyenne, un paquet envoyé toutes les 1,25 h).

Dans cette étude, le nouveau critère de robustesse de stabilité vient donc pondérer l'intérêt du générateur bistable pour la récupération d'énergie vibratoire ambiante. Sa puissance moyenne récupérée maximale est fortement diminuée avec ce critère et devient bien plus faible que celle du générateur linéaire équivalent (observation validée par l'expérience). Cette faiblesse est cependant contrebalancée par sa grande bande passante comparée à celle du générateur linéaire. Cette dernière reste pertinente même après l'ajout du critère de robustesse de stabilité en partie grâce à l'exploitation du comportement sous-harmonique 3. L'utilisation de l'un ou l'autre de ces générateurs sera donc liée aux fluctuations de la fréquence de la source de vibration ambiante. Pour une source à fréquence fixe et stable, le générateur linéaire sera plus intéressant. Pour une source à fréquence fluctuante (ici  $\Delta f > 5$  Hz), le générateur bistable sera préféré. Cette conclusion est différente de celle obtenue en considérant l'étude théorique classique des générateurs bistables (sans critère de robustesse de stabilité) qui aurait privilégié ce dernier dans tous les cas de figure (source à fréquence stable ou fluctuante).

La Figure 3.11 montre comment la comparaison générateur linéaire - générateur bistable évolue avec l'amplitude de l'excitation. Les éléments permettant de comparer ces deux générateurs (puissance moyenne maximale réelle et plage de fréquences assurant au moins 100  $\mu\text{W}$ ) tirés de cette figure sont récapitulés dans le Tableau 3.2. Les avantages respectifs des deux générateurs semblent s'accroître avec l'amplitude d'excitation. Plus l'excitation est grande, plus la puissance moyenne maximale du générateur linéaire sera grande par rapport à celle du générateur bistable mais plus la plage de fréquences du générateur bistable assurant au moins

100  $\mu\text{W}$  sera grande devant celle du générateur linéaire.



**Figure 3.11** – Comparaison des réponses fréquentielles du générateur bistable (prototype 1 de cette thèse) et du générateur linéaire équivalent pour une excitation d’amplitude  $5 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $15 \text{ m.s}^{-2}$ . Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est atteinte lorsque la phase du déplacement de l’excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.

**Table 3.2** – Puissance moyenne maximale atteignable et plage de fréquences assurant au moins  $100 \mu\text{W}$  du générateur bistable et du générateur linéaire équivalent en fonction de l’amplitude de l’excitation.

Excitation ( $\text{m.s}^{-2}$ )	5	10	15	5	10	15
Générateur linéaire	17 mW	68 mW	154 mW	5 Hz	9 Hz	14 Hz
Générateur bistable	0,4 mW	1,2 mW	2,3 mW	57 Hz	132 Hz	188 Hz



## 3.6 Conclusion

Nous avons donc vu dans ce chapitre un critère semi-analytique innovant permettant de compléter le modèle développé au chapitre précédent : le critère de robustesse de stabilité. Il caractérise la sensibilité des comportements du générateur bistable aux perturbations non négligeables (inhérentes aux conditions réelles d'utilisation). Plus un comportement est robuste plus il sera facile à atteindre et à maintenir dans le temps. En dessous d'un certain seuil, les comportements sont considérés comme inutilisables pour la récupération d'énergie. Le modèle mathématique incluant la robustesse de stabilité s'avère être en parfaite adéquation avec les résultats expérimentaux.

Ce modèle complet a ensuite été utilisé afin d'analyser l'influence des différents paramètres du générateur bistable sur sa réponse fréquentielle. Cette étude théorique a été menée autour des valeurs du prototype 1 de cette thèse et n'est donc valable que pour des générateurs faiblement couplés (amortissement électrique bien inférieur à l'amortissement mécanique). Les pistes d'amélioration des performances du prototype 1 sont les suivantes. (i) Le facteur de force  $\beta$  doit être amélioré afin d'augmenter la puissance récupérée sur toute la bande passante du générateur. À partir d'une certaine valeur, il conviendra ensuite de trouver un compromis entre puissance récupérée (en augmentant  $\beta$ ) et bande passante (en diminuant  $\beta$ ). (ii) La masse  $M$  doit être augmentée afin d'augmenter la puissance disponible et donc récupérée ainsi que la bande passante du générateur (dans la limite des contraintes volumiques et/ou massiques imposées). (iii) La raideur des ressorts  $k$  peut être utilisée pour ajuster la plage de fréquences utile du prototype en la décalant vers les hautes ou vers les basses fréquences sans compromettre la puissance récupérée. Il est également possible de contrôler la distance entre la plage de fréquences du comportement harmonique 1 et celle du comportement sous-harmonique 3. (iv) La valeur des positions stables  $x_0$  est plus délicate à optimiser. Il s'agit de trouver un compromis entre puissance récupérée à chaque fréquence (en augmentant  $x_0$ ), puissance récupérée maximale (en diminuant  $x_0$ ) et bande passante (en diminuant  $x_0$ ).

La suite de ce chapitre a permis d'établir une comparaison théorique entre le générateur bistable et son générateur linéaire équivalent. Le nouveau critère de robustesse de stabilité pondère l'intérêt du générateur bistable puisque qu'il prédit une puissance moyenne récupérée maximale plus faible (le point de fonctionnement maximal n'étant pas assez robuste pour la récupération d'énergie). Sa bande passante reste cependant intéressante même après l'ajout du critère en partie grâce à l'exploitation du comportement sous-harmonique 3. L'intérêt de l'un ou l'autre de ces générateurs dépend finalement des caractéristiques de la source de vibration ambiante. Pour une source à fréquence fixe et stable, le générateur linéaire sera plus intéressant. Pour une source à fréquence fluctuante ( $\Delta f > 5$  Hz dans le cas considéré), le générateur bistable sera préféré.

# 4

## Le saut d'orbite

*Le modèle mathématique développé jusqu'ici semble donc être en mesure de prédire les comportements du générateur bistable électromagnétique. Deux comportements en régime permanent ressortent en particulier pour la récupération d'énergie : l'orbite haute harmonique 1 et l'orbite haute sous-harmonique 3. Ces deux comportements permettent au générateur bistable d'offrir une large plage de fréquences utile sur laquelle l'énergie convertie est suffisamment élevée pour pouvoir être utilisée comme source d'alimentation de capteurs isolés sans fil. Cependant, il existe également des comportements de faible amplitude (ne proposant qu'une faible quantité d'énergie convertie) coexistants avec les orbites hautes sur la majeure partie de cette plage de fréquences utile. Il s'agit notamment de l'orbite basse harmonique 1 et de l'orbite basse sous-harmonique 2 (la plage de fréquences de l'orbite basse sous-harmonique 3 est, elle, complètement incluse dans celle de ces deux comportements). Sur cette plage de fréquences, en régime permanent, le générateur bistable se stabilise donc soit sur une orbite haute soit sur une orbite basse en fonction de ses conditions initiales et offre ainsi soit une forte soit une faible puissance moyenne récupérée. Il convient alors de pouvoir sauter d'une orbite basse à une orbite haute chaque fois que cela est nécessaire. Ce saut d'orbite est obtenu en perturbant intelligemment les orbites basses du générateur bistable avec une quantité d'énergie la plus faible possible. Ce chapitre présente plusieurs stratégies permettant d'introduire un saut des orbites basses vers les orbites hautes en jouant directement sur les paramètres du générateur bistable.*

## 4.1 Le saut d'orbite dans la littérature

Plusieurs stratégies de saut d'orbite ont déjà été présentées dans la littérature pour des générateurs non linéaires. La première d'entre-elles vise à perturber mécaniquement les orbites basses à l'aide d'une impulsion afin d'introduire un saut vers les orbites hautes. Des preuves de concept ont été apportées notamment par Erturk et al. [41] qui ont appliqué des impulsions manuelles sur la masse puis par Wu et al. [48] et Lan et al. [40] qui ont appliqué des impulsions sur la masse à l'aide du convertisseur lui-même utilisé comme actionneur (soit piézoélectrique soit électromagnétique). Zhou et al. [80] ont quant à eux réalisé une étude numérique et expérimentale de ce concept de perturbation mécanique impulsionnelle en envoyant un projectile sur la masse lorsque celle-ci se trouve sur une orbite basse.

Une autre stratégie de sauts d'orbites appelée *Fast Burst Perturbation* (FBP) a été proposée par Sebald et al. dans leur étude numérique [57] et expérimentale [56]. Elle consiste à créer une nouvelle excitation en parallèle de l'excitation ambiante et de l'appliquer au générateur jusqu'à ce que ce dernier se stabilise sur une orbite haute. Pour ce faire, le convertisseur électromécanique est, ici aussi, utilisé comme actionneur sur lequel est appliqué une tension sinusoïdale à la fréquence de résonance du système sur plusieurs périodes (allant de une à vingt). Masuda et al. [81] ont proposé une stratégie similaire. De la même manière que pour la technique FBP, ils créent une nouvelle excitation en parallèle de l'excitation ambiante mais, cette fois-ci, directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Ce dispositif, obtenu à l'aide d'une résistance négative appliquée au convertisseur électromagnétique, agit comme un amortisseur négatif. Il est connecté à chaque fois que le générateur non linéaire se trouve sur une orbite basse et est maintenu jusqu'à obtenir une orbite haute stable. Udani et al. [82] et Mallick et al. [83] se sont également penchés sur le concept d'excitation parallèle. Leur étude numérique et leur étude expérimentale consistent à ajouter une excitation à l'excitation ambiante de manière à ce que l'excitation résultante soit déphasée par rapport à l'excitation ambiante. Les deux changements de phase générés par cette nouvelle excitation (un premier changement en l'allumant puis un deuxième changement en l'éteignant après plusieurs cycles) sont susceptibles, sous certaines conditions, d'introduire un saut des orbites basses vers les orbites hautes. Enfin, la dernière stratégie présentée, notamment par Dykman et al. [84] et par Almog et al. [85], est appelée résonance stochastique. Pour cette stratégie, le saut d'orbite est obtenu en perturbant les orbites basses du générateur non linéaire avec un bruit blanc.

Toutes ces études proposent des preuves de concept très intéressantes que ce soit par étude numérique et/ou expérimentale. Quelques informations manquent cependant afin de pouvoir juger de leur pertinence et de leur applicabilité en conditions réelles. Il est ainsi indispensable de connaître les probabilités de saut offertes par ces stratégies, et ce sur toute la plage de fréquences utile du générateur non linéaire (c'est à dire toute la plage de fréquences sur laquelle une orbite haute stable et robuste existe). Les études précédentes sont majoritairement des preuves de concept et ne se concentrent que sur quelques exemples de saut d'une orbite basse à une orbite haute pour quelques fréquences d'excitation. Il est également indispensable de connaître le coût énergétique de ces stratégies (qui n'est précisé que dans certaines de ces études). Le produit de ce coût par la probabilité de saut ramené à la puissance convertie par le générateur sur son orbite haute donne le temps moyen nécessaire avant de pouvoir récupérer l'énergie dépensée pour le saut d'orbite. Ce temps calculé sur toute la plage de fréquences utile du générateur permettra alors de juger si la stratégie proposée est pertinente ou pas en conditions réelles.

Ce chapitre propose d'étudier des stratégies de saut d'orbite en modifiant en temps réel

des paramètres du générateur bistable à poutre flambée. La stratégie jugée la plus prometteuse sera testée sur toute la plage de fréquences utile du générateur bistable en faisant ressortir les probabilités de saut d'une orbite basse vers une orbite haute ainsi que le temps nécessaire avant de pouvoir récupérer l'énergie dépensée.

## 4.2 Les différentes stratégies

La postulat de départ de cette thèse concernant cette thématique était de pouvoir assurer des sauts d'orbites pour le générateur bistable en modifiant temporairement les paramètres de ce dernier. Comme l'énergie mécanique moyenne stockée dans le système oscillant (énergie potentielle plus énergie cinétique) est plus grande pour une orbite haute que pour une orbite basse, l'idée générale du saut d'orbite est d'apporter d'une manière ou d'une autre de l'énergie à la masse lorsque le générateur bistable se trouve sur une orbite basse afin de perturber son mouvement et de potentiellement atteindre une orbite haute en régime permanent. Le but des stratégies étudiées ici est donc d'apporter de l'énergie à la masse en modifiant temporairement les paramètres du générateur bistable. L'équation qui régit le comportement de ces oscillateurs (sans se soucier pour l'instant de la récupération d'énergie) est l'équation mécanique de Duffing suivante (pour plus de détails sur l'obtention de cette équation, le lecteur pourra consulter le Chapitre 2, Section 2.1) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} = -A \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{x_0}{L} \sqrt{\frac{2k}{M}} \\ Q = \frac{x_0}{L} \frac{\sqrt{2kM}}{\mu} \end{cases} \quad (4.2)$$

Cette équation est tirée du modèle à constantes localisées rappelée en Figure 4.1. Elle met en évidence cinq paramètres jouant un rôle sur le comportement de l'oscillateur bistable : la masse  $M$ , la raideur  $k$ , la valeur des positions stables  $x_0$ , la longueur  $L$  (le rapport  $x_0/L$  représente le niveau de flambement de l'oscillateur) et l'amortissement  $\mu$ . La modification de la masse  $M$  en temps réel a été jugée comme peu réalisable techniquement. Ce paramètre n'a donc pas été retenu pour le saut d'orbite. La modification de l'amortissement  $\mu$  a lui déjà été réalisé par Masuda et al. [81] (à l'aide d'une résistance négative connectée au convertisseur

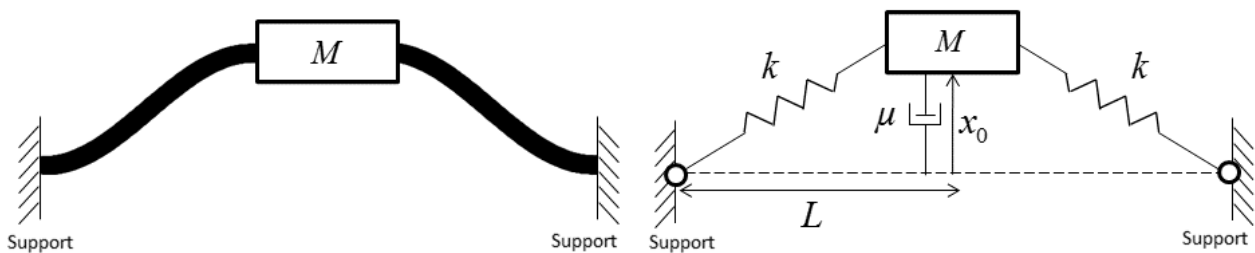
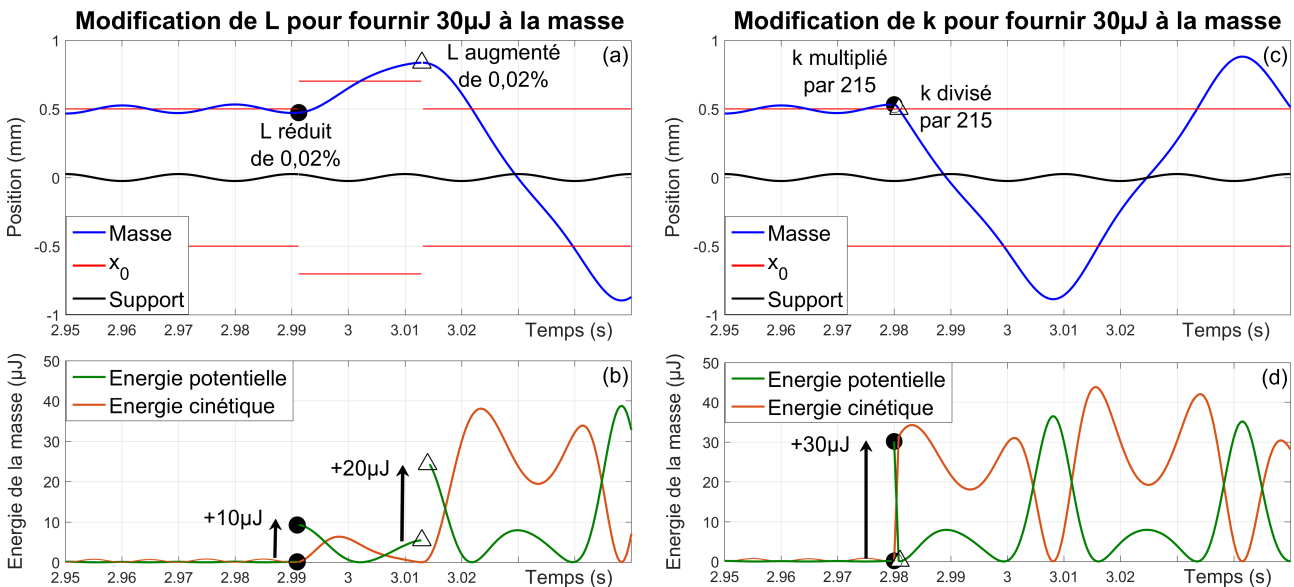


Figure 4.1 – Schéma du principe et de la modélisation mathématique de l'oscillateur bistable (ici représenté dans une de ses deux positions d'équilibre).

électromagnétique qui génère une force sur la masse proportionnelle et de même signe que sa vitesse). Afin de proposer une nouvelle stratégie de saut à l'issue de cette étude (pour disposer de plusieurs stratégies différentes) ce paramètre n'a pas été retenu. La valeur des positions stables  $x_0$  est quand à elle supposée couplée à la longueur  $L$  de manière bijective (une valeur de  $x_0$  n'est obtenue que pour une seule valeur de  $L$  et vice et versa). Ainsi, nous ne considérerons ici que la longueur  $L$  en sachant que celle-ci modifie collatéralement la valeur des positions stables  $x_0$  et le niveau de flambement de l'oscillateur bistable.

L'attention sera donc portée sur le saut d'orbite via modification temporaire de la raideur  $k$  ou de la longueur  $L$  (c'est-à-dire, du niveau de flambement). La Figure 4.2 présente le principe utilisé afin d'apporter de l'énergie à la masse (ici  $30 \mu\text{J}$ ) en modifiant temporairement ces deux paramètres de manière optimale. Les valeurs utilisées pour cette étude numérique sont détaillées dans le Tableau 4.1. Elles correspondent au prototype 2 de cette thèse présenté dans la section suivante. L'identification de ces valeurs est détaillée lors de la présentation des résultats expérimentaux de ce chapitre. Pour l'un comme pour l'autre de ces principes, l'étude démarre alors que l'oscillateur bistable se trouve sur une orbite basse (la masse oscille autour d'une de ses deux positions d'équilibre). L'amplitude de l'excitation est de  $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  et sa fréquence de  $50 \text{ Hz}$ .

Le principe utilisé pour apporter  $30 \mu\text{J}$  à la masse en modifiant temporairement la longueur  $L$  est le suivant : la longueur  $L$  est d'abord instantanément réduite de  $0,02 \%$  comme le montre l'exemple numérique illustré en Figure 4.2(a). Ceci a pour effet d'augmenter la valeur de la position stable  $x_0$  et d'augmenter le niveau de flambement de l'oscillateur bistable. La Figure 4.2(b) montre que cette opération entraîne une augmentation instantanée de l'énergie potentielle de la masse (ici  $10 \mu\text{J}$ ) puisque la distance entre cette dernière et la position d'équilibre  $x_0$  augmente (c'est-à-dire, la force de rappel exercée par les ressorts sur la masse vers la position d'équilibre augmente en valeur absolue). La longueur  $L$  est ensuite maintenue constante jusqu'à ce que la position de la masse atteigne un maximum. Elle est alors augmentée instantanément de  $0,02 \%$  pour reprendre sa valeur initiale réduisant de fait la valeur de la position stable  $x_0$  et le niveau de flambement de l'oscillateur bistable à leurs valeurs initiales respectives. La Figure 4.2(b)



**Figure 4.2** – Exemples numériques présentant le principe utilisé pour apporter  $30 \mu\text{J}$  à la masse en modifiant la longueur  $L$  ou la raideur  $k$  de l'oscillateur bistable dans le but d'introduire un saut de l'orbite basse vers une orbite haute.

**Table 4.1** – Paramètres de l'oscillateur bistable : prototype 2.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0,50$	mm
Masse inertielle	$M$	17,3	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	121	rad.s <sup>-1</sup>
Facteur de qualité mécanique	$Q$	87	–
Amplitude de l'excitation	$A$	2,5	m.s <sup>-2</sup>
Fréquence de l'excitation	$\omega$	15 – 85	Hz

montre que cette opération entraîne une nouvelle augmentation instantanée de l'énergie potentielle de la masse (ici 20  $\mu\text{J}$ ) puisque la distance entre cette dernière et la position d'équilibre  $x_0$  augmente de nouveau (c'est-à-dire, la force de rappel exercée par les ressorts sur la masse vers la position d'équilibre augmente en valeur absolue). L'instant choisi pour cette deuxième opération est défini de façon à ce que l'énergie potentielle apportée à la masse durant cette opération soit maximale. En effet, imposer l'augmentation de la longueur  $L$  (donc la diminution de  $x_0$ ) lorsque la position de la masse atteint un maximum permet d'assurer une distance masse/position d'équilibre la plus grande possible en fin d'opération assurant ainsi une énergie potentielle finale maximale. L'énergie totale apportée à la masse dans cet exemple en modifiant temporairement la longueur  $L$  de 0,02 % est donc bien de 30  $\mu\text{J}$ .

Le principe utilisé pour apporter 30  $\mu\text{J}$  à la masse en modifiant temporairement la raideur  $k$  est le suivant. La raideur  $k$  est d'abord instantanément multipliée par 215 comme le montre l'exemple numérique illustré en Figure 4.2(c). Comme l'énergie potentielle de la masse est directement proportionnelle à la raideur  $k$ , multiplier cette raideur revient à multiplier l'énergie potentielle du même facteur. Cet effet est visible en Figure 4.2(d). Pour maximiser la quantité d'énergie apportée à la masse lors de cette opération (ici 30  $\mu\text{J}$ ), la raideur  $k$  est donc multipliée quand l'énergie potentielle du système est maximale (c'est-à-dire, quand la position de la masse est maximale). La raideur  $k$  est ensuite maintenue constante jusqu'à ce que la masse passe par une position d'équilibre. À cet instant, l'énergie potentielle de la masse est nulle. La raideur  $k$  est alors instantanément divisée par 215 afin de retrouver sa valeur initiale sans retirer d'énergie au système. L'énergie totale apportée à la masse dans cet exemple en modifiant temporairement la raideur  $k$  d'un facteur 215 est donc bien de 30  $\mu\text{J}$ .

Bien que ces deux principes permettent tous les deux d'apporter 30  $\mu\text{J}$  à la masse, ils ne sont pas équivalents en terme d'applicabilité. En effet, un changement temporaire de la longueur  $L$  de 0,02 % semble techniquement réalisable là où une multiplication temporaire de la raideur  $k$  par 215 sera plus compliquée à mettre en place. Ainsi, le principe retenu dans la suite de cette thèse pour apporter de l'énergie à la masse dans le but d'introduire un saut d'orbite consiste à modifier temporairement la longueur  $L$  comme illustré par la Figure 4.2(a). Cette stratégie sera appelée stratégie de saut d'orbite par modification de la longueur  $L$  ou stratégie de saut d'orbite par modification du niveau de flambement.

### 4.3 Prototype 2 : modélisation du générateur bistable piézoélectrique

Afin de pouvoir expérimenter cette stratégie, un nouveau prototype a été conçu permettant la modification du niveau de flambement du générateur bistable en temps réel. Il s'agit du

deuxième prototype de cette thèse visible en Figure 4.3. Un schéma simplifié de son principe est présenté en Figure 4.4. Le prototype 2 est ainsi réalisé à partir de deux unités distinctes. L'ensemble composé de la masse, des poutres et du premier convertisseur piézoélectrique appelé *Piézo de récupération* forme le générateur bistable à proprement parler, objet de cette étude. La seconde unité est composée du deuxième convertisseur piézoélectrique appelé *Piézo de flambement*. Il est utilisé en tant qu'actionneur et permet de modifier le niveau de flambement du générateur bistable à loisir. L'ajout de cet actionneur est une solution parmi d'autres pour pouvoir modifier le niveau de flambement du générateur (preuve de concept). L'étude qui suit ne s'attarde pas sur l'optimisation de cette solution en particulier (rendement, taille de l'actionneur etc...) mais s'intéresse exclusivement à l'apport d'énergie potentielle à chaque changement du niveau de flambement.

En Figure 4.4, chacun des convertisseurs piézoélectriques est modélisé par deux composants travaillant en parallèle : un ressort modélisant la raideur mécanique du matériau piézoélectrique et un élément assurant la conversion électromécanique. La raideur du *Piézo de récupération* a été choisie petite devant la raideur du *Piézo de flambement* afin que ce dernier n'influe pas sur

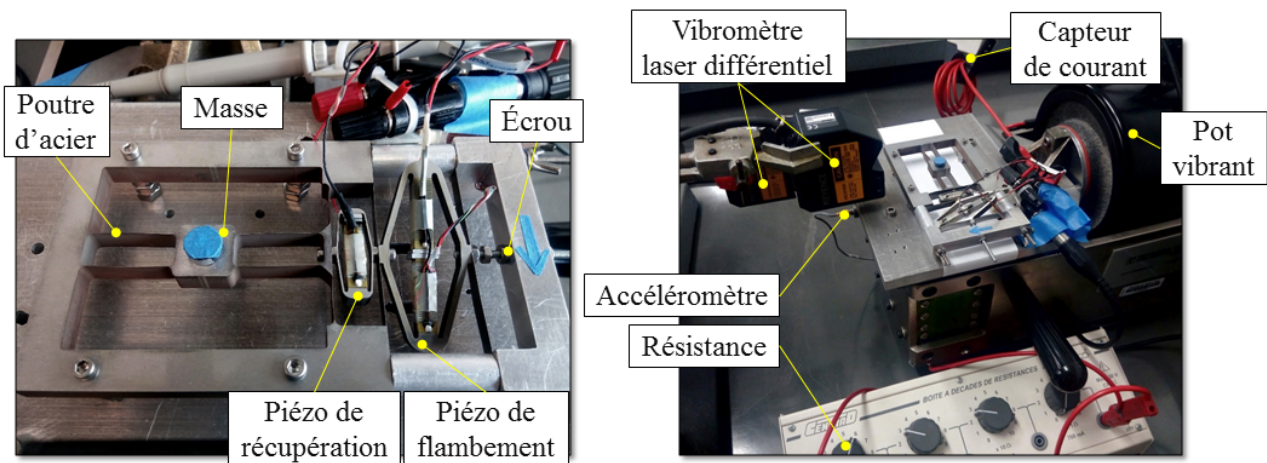


Figure 4.3 – Prototype 2 : générateur bistable piézoélectrique réalisé à partir de deux poutres flambées (à l'aide de l'écrou) et placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante.

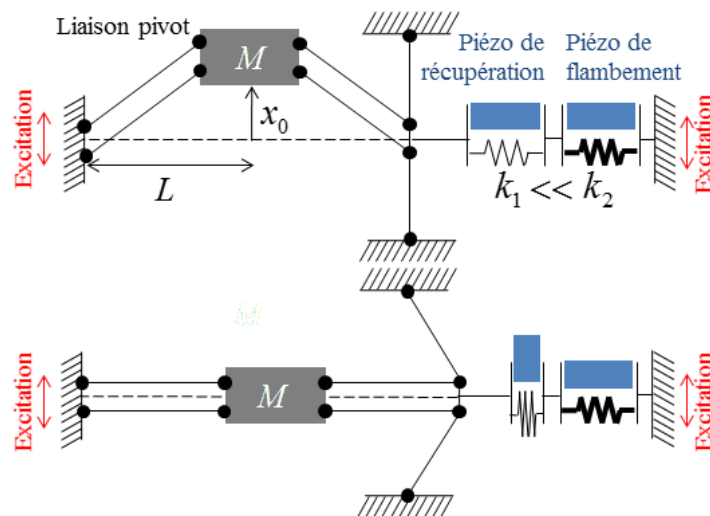


Figure 4.4 – Schéma du principe et de la modélisation mathématique du prototype 2 représenté dans une de ses deux positions d'équilibre stables  $x = \pm x_0$  et dans sa position d'équilibre instable  $x = 0$ .

le comportement du générateur bistable pendant les périodes où son niveau de flambement est maintenu constant. Les poutres de part et d'autre de la masse sont doublées afin de lui enlever un degré de liberté indésirable (rotation selon l'axe perpendiculaire au plan du schéma).

Du point de vue technique, le prototype visible en Figure 4.3 a été obtenu en usinant une pièce unique d'acier APX4 par électroérosion (*electrical discharge machining*) afin de faire apparaître la masse, les poutres et le cadre. Les deux éléments piézoélectriques sont ensuite directement assemblés à cette pièce. Les liaisons pivots sont assurées par la flexibilité des poutres fines d'acier (liaisons souples). Le prototype est pré-flambé à l'aide d'un écrou qui, quand il est vissé, entraîne une translation de la vis liée au *Piézo de flambement* vers la masse. Le *Piézo de récupération* et le *Piézo de flambement* sont deux actionneurs piézoélectriques de chez Cedrat Technologies appelés APA (*Amplified Piezoelectric Actuator*), APA 120S et APA 100M respectivement. Ils sont composés de deux éléments : une coque elliptique d'acier inoxydable et un empilement de céramiques piézoélectriques interdigitées placées sur le grand axe de cette coque. La forme elliptique des coques agit comme un transformateur mécanique. Elle amplifie le long de son grand axe les contraintes appliquées à son petit axe. À l'opposé, elle diminue le long de son grand axe les déformations appliquées à son petit axe. Ces actionneurs APA permettent ainsi d'optimiser l'utilisation des céramiques piézoélectriques qui peuvent supporter de grandes forces mais de petites déformations. Les dimensions principales du prototype 2 sont détaillées dans le Tableau 4.2.

**Table 4.2** – Dimensions du prototype 2.

Élément	Valeur	Unité
Masse inertielle	17,3	g
Épaisseur du block d'acier APX4	8,0	mm
Masse d'acier	$16 \times 16 \times 8,0$	$\text{mm}^3$
Épaisseurs des poutres	0,070	mm
Longueur des poutres horizontales	25	mm
Longueur des poutres verticales	17	mm
Raideur $k_1$ du <i>Piézo de récupération</i>	0,30	$\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$
Raideur $k_2$ du <i>Piézo de flambement</i>	1,9	$\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$

La suite de cette section reprend le modèle théorique (incluant le critère de robustesse de stabilité) développé pour le générateur bistable électromagnétique au Chapitre 2 et au Chapitre 3 pour l'étendre au générateur bistable piézoélectrique afin de déterminer la réponse fréquentielle théorique de ce nouveau prototype. Cette fois-ci, la construction du modèle est présentée de manière succincte. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux Chapitres 2 et 3.

### Mise en équation et résolution analytique

Le but de cette pré-étude est donc d'obtenir la réponse fréquentielle théorique du générateur bistable piézoélectrique composant le prototype 2 afin de connaître tous ses comportements possibles en régime permanent. Dans cette section, le *Piézo de flambement* n'intervient pas et n'influe donc pas sur le comportement du générateur bistable (sa raideur est grande devant celle du *Piézo de récupération*). L'équation mécanique du générateur traduisant l'équilibre des



forces exercées sur la masse s'écrit :

$$M(\ddot{x} + A \cos(\omega t)) = -k_1 \underbrace{\left(2L - 2\sqrt{l^2 - x^2}\right)}_{\text{variation longueur piézo}} \frac{x}{l} - \mu\dot{x} - \alpha v \frac{x}{l} \quad (4.3)$$

Avec  $x$  la position de la masse au cours du temps,  $A$  et  $\omega$  l'amplitude et la fréquence de l'excitation,  $\mu$  le coefficient d'amortissement de la masse dans l'air (amortissement supposé linéaire) et  $l$  la longueur d'une des quatre poutres de l'oscillateur bistable. La constante  $\alpha$  représente le facteur de force du *Piézo de récupération*. La tension aux bornes de ce dernier est notée  $v$ . Les autres grandeurs sont illustrées sur la Figure 4.4. Dans cette étude, le coefficient de flambement  $x_0/L$  est supposé faible devant 1. L'équation mécanique du générateur devient :

$$\begin{aligned} M(\ddot{x} + A \cos(\omega t)) &= -k_1 \left(2L - 2\sqrt{x_0^2 + L^2 - x^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x_0^2 + L^2}} - \mu\dot{x} - \alpha v \frac{x}{\sqrt{x_0^2 + L^2}} \\ &= -k_1 \left(2L - 2L\sqrt{1 + (x_0^2 - x^2)/L^2}\right) \frac{x}{L\sqrt{1 + x_0^2/L^2}} - \mu\dot{x} - \alpha v \frac{x}{L\sqrt{1 + x_0^2/L^2}} \\ &\approx k_1 \frac{x_0^2 - x^2}{L^2} x - \mu\dot{x} - \alpha v \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (4.4)$$

La seconde équation établit l'équilibre électrique dans le circuit composé d'une part par le *Piézo de récupération* (équivalent à un générateur de courant proportionnel à la vitesse de variation de longueur et à une capacité  $C_0$  en parallèle) et d'autre part par la résistance de charge  $R$  connectée à ce convertisseur :

$$\begin{aligned} C_0\dot{v} &= \alpha \frac{d}{dt} \underbrace{\left(2L - 2\sqrt{l^2 - x^2}\right)}_{\text{variation longueur piézo}} - \frac{v}{R} \\ &= \alpha \frac{d}{dt} \left(2L - 2\sqrt{x_0^2 + L^2 - x^2}\right) - \frac{v}{R} \\ &= \alpha \frac{2x\dot{x}}{\sqrt{x_0^2 + L^2 - x^2}} - \frac{v}{R} \\ &\approx 2\alpha \frac{x}{L} \dot{x} - \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'équation générale régissant le comportement du générateur bistable piézoélectrique à faible flambement est ainsi composée de l'Équation (4.4) et de l'Équation (4.5) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{\alpha}{ML} xv = -A \cos(\omega t) \\ C_0\dot{v} = 2\frac{\alpha}{L} x\dot{x} - \frac{1}{R}v \end{cases} \quad (4.6)$$

Avec

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{x_0}{L} \sqrt{\frac{2k_1}{M}} \\ Q = \frac{x_0}{L} \frac{\sqrt{2k_1 M}}{\mu} \end{cases} \quad (4.7)$$

Les constantes  $\omega_0$  et  $Q$  sont respectivement la pulsation naturelle et le facteur de qualité mécanique du générateur linéaire équivalent, obtenu pour de petites oscillations de la masse autour d'une des positions d'équilibre de l'oscillateur bistable ( $x = x_0 + \Delta x$  avec  $\Delta x \ll x_0$ ) [54]. L'énergie mécanique convertie en énergie électrique par le générateur bistable est équivalente à l'énergie dissipée dans la résistance de charge :

$$\text{Energie convertie} = \int_0^t \frac{v^2}{R} dt \quad (4.8)$$

Afin d'obtenir la réponse fréquentielle du générateur bistable, il convient de trouver tous les comportements en régime permanent solution de l'Équation (4.6). L'attention est ici portée sur les comportements sous-harmoniques pour lesquels la masse oscille à une fréquence inférieure à celle de l'excitation ( $n$  fois inférieure pour le comportement sous-harmonique  $n$ ). Cette solution, formée par les deux inconnues  $x$  et  $v$ , est approchée par deux séries de Fourier tronquées à l'ordre  $N$ , composées chacune d'un terme périodique prépondérant  $\omega/n$  suivi de ses harmoniques  $k\omega/n$  avec  $k$  variant de 2 à  $N$  ainsi que d'un terme constant :

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos\left(k\frac{\omega}{n}t\right) + b_k \sin\left(k\frac{\omega}{n}t\right) \right\} \\ v(t) = p_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ p_k \cos\left(k\frac{\omega}{n}t\right) + q_k \sin\left(k\frac{\omega}{n}t\right) \right\} \end{cases} \quad (4.9)$$

Où  $a_0$  et  $p_0$  représentent les moyennes temporelles du déplacement et de la tension aux bornes de la résistance. Si  $a_0$  est nul, alors la solution est une orbite haute. Si  $a_0$  est proche de  $x_0$  ou  $-x_0$ , alors la solution est une orbite basse. Comme la réponse recherchée est en régime permanent, les  $4N + 2$  inconnues ( $a_0, a_k, b_k, p_0, p_k, q_k$ ),  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  sont indépendantes du temps. La forme générale de cette solution est justifiée par les exemples présentés en Figures 4.5 et 4.6 obtenus à l'aide d'une résolution numérique de l'Équation (4.9). Ces Figures présentent, pour chaque comportement : un signal temporel de la position  $x$  de la masse, un signal temporel de la tension  $v$  aux bornes du *Piézo de récupération* et une décomposition en série de Fourier de

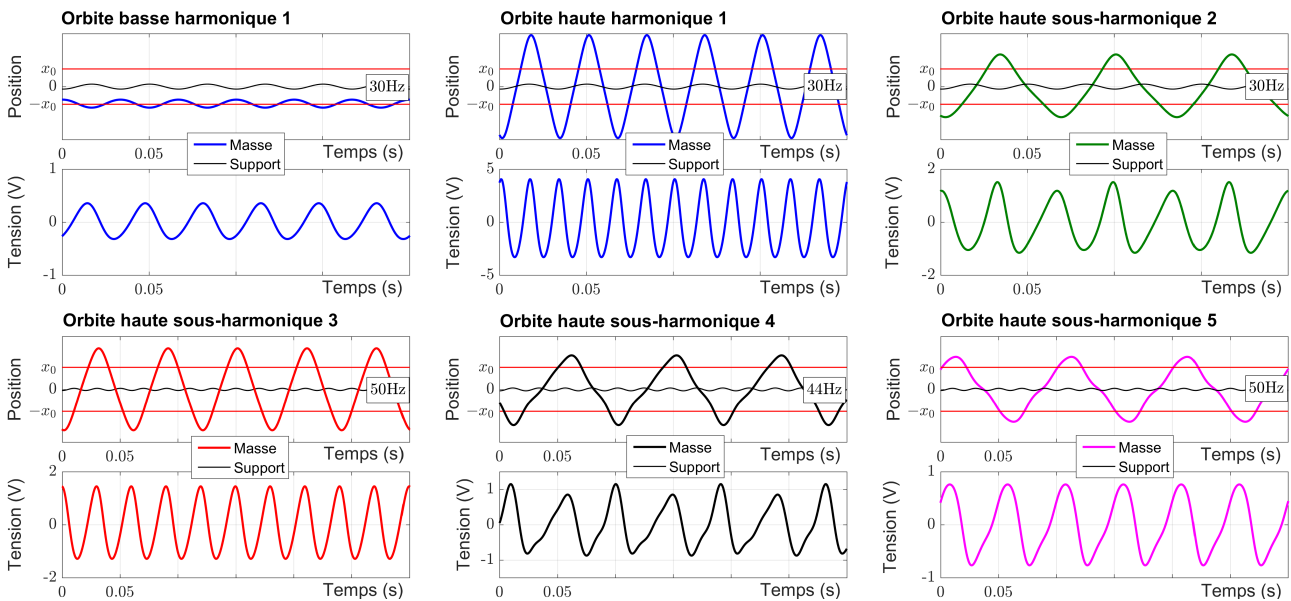
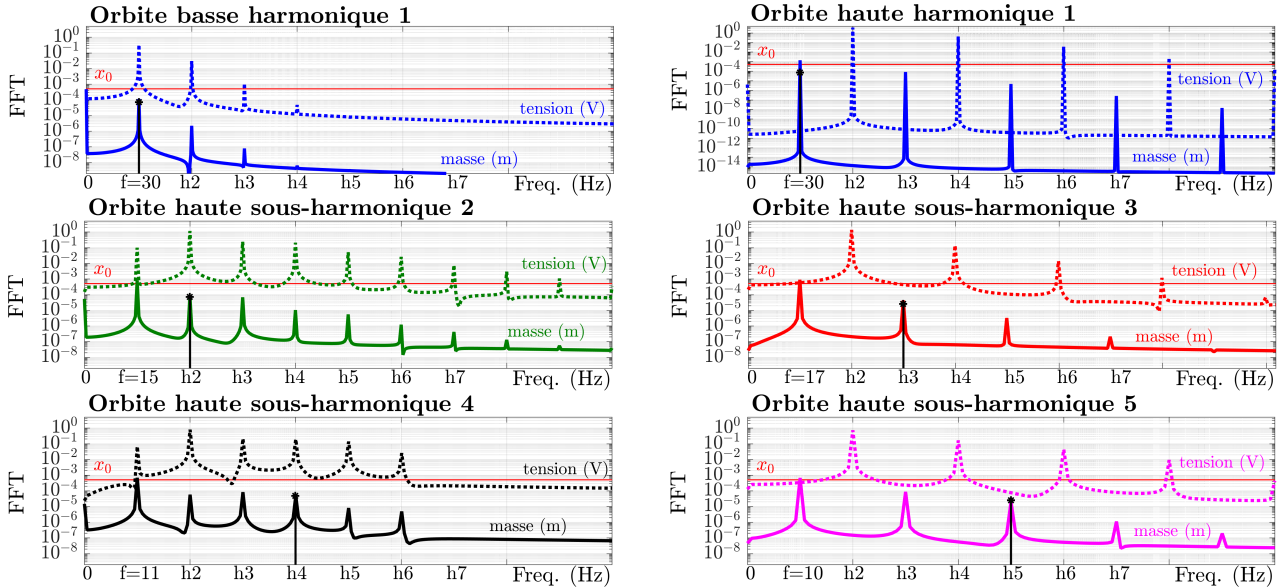


Figure 4.5 – Exemple de signaux temporels des différents comportements recherchés (étude numérique).



**Figure 4.6** – Exemple de décompositions en série de Fourier des différents comportements recherchés (étude numérique). En abscisse, "f" désigne la composante fondamentale du déplacement de la masse et "h" désigne ses différentes harmoniques. L'excitation monochromatique est représentée par un trait noir vertical (déplacement du support).

ces derniers.

Il est intéressant de noter sur la Figure 4.6 que le déplacement de la masse des orbites hautes sous-harmoniques d'ordre impair (1, 3 et 5) sont composées uniquement d'harmoniques impaires de la fondamentale (h3, h5, h7...) et d'une composante continue faible. La tension est, elle, composée d'une fondamentale de fréquence deux fois supérieure à la fondamentale du déplacement de la masse puis de toutes ses harmoniques. Le déplacement de la masse des orbites hautes sous-harmoniques d'ordre pair (2 et 4) sont quant à elles composées de toutes les harmoniques de la fondamentale et d'une composante continue non négligeable. La tension est cette fois-ci composée des mêmes harmoniques que le déplacement de la masse (avec une composante prépondérante de fréquence deux fois supérieure à la fondamentale du déplacement). Cette dernière remarque explique la forme générale considérée pour la solution analytique.

Pour toutes les orbites hautes, le rapport deux qui existe entre la fréquence fondamentale du déplacement de la masse et la fréquence prépondérante de la tension est visible sur les signaux temporels illustrés en Figure 4.5. Ce phénomène est dû à la symétrie du générateur bistable par rapport à sa position d'équilibre instable  $x = 0$  : le *Piézo de récupération* se déforme de la même manière pour les  $x$  positifs et pour les  $x$  négatifs. Ainsi, les maxima de tension (correspondants aux maxima d'élongation du convertisseur) sont atteints pour tous les extrema de déplacement de la masse (maxima et minima). Les minima de tension (correspondants aux maxima de compression du convertisseur) sont atteints à chaque fois que la masse passe par  $x = 0$ .

L'Équation (4.9) est introduite dans l'Équation (4.6) régissant le comportement du générateur bistable puis développée pour aboutir à la formule détaillée en Équation (4.10). À noter que les constantes  $b_0$  et  $q_0$  sont des constantes artificielles qui ont été ajoutées dans l'Équation (4.10) afin d'en simplifier la notation. Ces constantes sont nulles ( $b_0 = q_0 = 0$ ). À noter également que la notation  $(i, k, s) \in \llbracket 0, N \rrbracket^3$  sous une somme signifie que cette somme se fait sur toutes les combinaisons possibles des trois variables  $(i, k, s)$ , chacune prise dans l'ensemble des entiers naturels allant de 0 à  $N$ .

$$\left( \begin{aligned}
 & \sum_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\{ \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 a_k + \frac{\omega_0^2}{2} a_k - \frac{\omega_0}{Q} k \frac{\omega}{n} b_k \right] \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 b_k + \frac{\omega_0^2}{2} b_k + \frac{\omega_0}{Q} k \frac{\omega}{n} a_k \right] \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
 & - \sum_{(i, k, s) \in \llbracket 0, N \rrbracket^3} \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} \left\{ (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s - b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i + k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s + b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i + k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s - b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i - k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s + b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i - k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s + a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i + k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s + a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i + k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s - a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i - k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad \left. + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s - a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i - k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
 & - \sum_{(i, k) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2} \frac{\alpha}{2ML} \left\{ (a_k p_i - b_k q_i) \cos \left( (k + i) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad + (a_k p_i + b_k q_i) \cos \left( (k - i) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (a_k q_i + b_k p_i) \sin \left( (k + i) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad \left. - (a_k q_i - b_k p_i) \sin \left( (k - i) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} - A \cos(\omega t) = 0 \\
 & \sum_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket^2} \left\{ \left( \frac{p_k}{R} + C_0 q_k k \frac{\omega}{n} \right) \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{q_k}{R} - C_0 p_k k \frac{\omega}{n} \right) \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & - \sum_{(j, k) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2} \frac{\alpha}{L} \left\{ j \frac{\omega}{n} (a_k b_j + a_j b_k) \cos \left( (k + j) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad + j \frac{\omega}{n} (a_k b_j - a_j b_k) \cos \left( (k - j) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + j \frac{\omega}{n} (b_k b_j - a_k a_j) \sin \left( (k + j) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad \left. + j \frac{\omega}{n} (b_k b_j + a_k a_j) \sin \left( (k - j) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} = 0
 \end{aligned} \right) \tag{4.10}$$

La forme de la réponse recherchée en régime permanent est une série de Fourier tronquée dont les termes harmoniques supérieurs à  $N\omega/n$  sont considérés comme négligeables devant les autres termes. De la même façon, les termes présents dans l'Équation (4.10) dont la pulsation excède  $N\omega/n$  sont aussi considérés comme négligeables devant les autres termes. La méthode de la balance harmonique est ensuite utilisée sur les  $4N + 2$  termes restants (2 termes constants,  $2N$  termes cosinus et  $2N$  termes sinus). Ces termes ont tous des pulsations et/ou des phases différentes et leur somme est nulle, ainsi chacun d'eux est considéré comme nul. Cette méthode aboutit à un système non linéaire soluble de  $4N + 2$  équations et  $4N + 2$  inconnues dont les solutions sont les comportements en régime permanent sous-harmoniques  $n$  du générateur bistable  $(M, x_0, \omega_0, Q, \alpha, C_0, R)$  pour une excitation  $A \cos(\omega t)$ . Pour obtenir la réponse fréquentielle du générateur bistable détaillant tous ses comportements sous-harmoniques possibles en régime permanent, l'Équation (4.6) est résolue de cette manière pour plusieurs fréquences d'excitation et pour plusieurs valeurs de  $n$ .

### Étude de stabilité aux petites perturbations

La stabilité aux petites perturbations est ensuite évaluée pour tous les comportements en régime permanent  $(x_s, v_s)$ , solutions approchées de l'Équation (4.6). La méthode utilisée est la même que celle présentée au Chapitre 2, Section 2.5 en ajoutant le phénomène piézoélectrique. Une petite perturbation  $(z, w)$  est donc ajoutée au comportement étudié sous forme d'impulsion à l'instant  $t = t_0$  :

$$\begin{cases} x(t) = x_s(t) + z(t) \\ v(t) = v_s(t) + w(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \|z(t)\| \ll \|x_s(t)\| \\ \|w(t)\| \ll \|v_s(t)\| \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{impulsion} = \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \\ w(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

La solution  $(x_s, v_s)$  est stable aux petites perturbations si et seulement si  $(z, w)$  tend vers 0. L'Équation (4.11) est introduite dans l'Équation (4.6) régissant le comportement du générateur bistable puis linéarisée par rapport à  $(z, w)$  pour donner l'équation différentielle suivante, régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2}x_s(t)^2 - \frac{\alpha}{ML}v_s(t) & -\frac{\omega_0}{Q} & -\frac{\alpha}{ML}x_s(t) \\ \frac{2\alpha}{C_0L}\dot{x}_s(t) & \frac{2\alpha}{C_0L}x_s(t) & -\frac{1}{C_0R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Le matrice  $\underline{\underline{M}}(t)$  est périodique de période  $T = 2\pi n/\omega$ . La matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  de l'Équation (4.13) est alors introduite. Par définition, elle donne la relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \\ w(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{\underline{M}}(t)\underline{\underline{R}}(t, t_0) \\ \underline{\underline{R}}(t + T, t_0 + T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \end{cases} \quad (4.14)$$

La matrice résolvante peut être calculée à chaque instant  $t$  en intégrant numériquement l'Équation (4.13) de  $t_0$  à  $t$  à trois reprises :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \dot{z}_1(t_0) \\ w_1(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{l'Équation (4.13) de } t_0 \text{ à } t]{\text{intégration numérique de}} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ w_1(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_2(t_0) \\ \dot{z}_2(t_0) \\ w_2(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{l'Équation (4.13) de } t_0 \text{ à } t]{\text{intégration numérique de}} \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_3(t_0) \\ \dot{z}_3(t_0) \\ w_3(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{l'Équation (4.13) de } t_0 \text{ à } t]{\text{intégration numérique de}} \begin{pmatrix} z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ w_1(t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Cette matrice résolvante détermine entièrement la convergence ou la divergence de la perturbation. L'étude de stabilité de la solution en régime permanent  $(x_s, v_s)$  est donc ramenée à l'étude de convergence de la matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$ . Or  $\underline{\underline{M}}(t)$  est périodique de période  $T$  donc la théorie de Floquet s'applique [69]. Ainsi, il existe une matrice indépendante du temps  $\underline{\underline{B}}$  et une matrice  $2T$  périodique  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  telles que :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \quad (4.16)$$

Comme  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  est périodique, la convergence de la matrice résolvante est entièrement définie par le signe des valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$ . Or cette dernière est directement liée à la matrice résolvante évaluée en  $t = 2T$  et  $t_0 = 0$  :

$$\underline{\underline{R}}(2T, 0) = e^{-2T\underline{\underline{B}}} \quad (4.17)$$

Ainsi, la stabilité de la solution en régime permanent est déterminée par le module des valeurs propres  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  de la matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  :

$$(x_s, v_s) \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta_1| < 1 \\ |\beta_2| < 1 \\ |\beta_3| < 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

### Robustesse de stabilité

Comme pour le cas du générateur bistable électromagnétique, l'idée va maintenant être d'évaluer la robustesse de stabilité de tous les comportements du générateur bistable piézoélectrique définis comme stables aux petites perturbations en leur injectant une impulsion de vitesse  $\Lambda$  plus grande. La méthode utilisée est donc la même que celle présentée au Chapitre 3, Section 3.2 en ajoutant le phénomène piézoélectrique :

$$\begin{cases} x(t) = x_s(t) + z(t) \\ v(t) = v_s(t) + w(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{impulsion} = \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \\ w(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Le robustesse de stabilité est alors définie par le rapport entre d'une part l'énergie minimale que doit avoir cette impulsion pour rendre les comportements instables et d'autre part la quantité d'énergie mécanique moyenne apportée par l'excitation pendant une période (valeur normative) :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2}M\Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T MA \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \quad (4.20)$$

La suite montre comment déterminer l'impulsion minimale  $|\Lambda_{\min}|$  conduisant à l'instabilité du comportement étudié. La méthode résumée ici est expliquée avec plus de détails au Chapitre 3. L'Équation (4.19) est introduite dans l'Équation (4.6) régissant le comportement du générateur bistable pour obtenir l'équation différentielle régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{M}}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix}}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(t) z(t)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} z(t)^3 - \frac{\alpha}{ML} z(t) w(t) \\ \frac{2\alpha}{C_0 L} z(t) \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\text{terme non linéaire}} \quad (4.21)$$

La matrice  $\underline{\underline{M}}(t)$  est identique à celle obtenue lors de l'étude aux petites perturbations (voir Équation (4.13)). La matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  du terme linéaire, identique à celle de l'étude aux petites perturbations, est alors introduite pour obtenir une relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \underline{\underline{R}}(t, s) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(t) z(t)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} z(t)^3 - \frac{\alpha}{ML} z(t) w(t) \\ \frac{2\alpha}{C_0 L} z(t) \dot{z}(t) \end{pmatrix} ds \quad (4.22)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{\underline{M}}(t) \underline{\underline{R}}(t, t_0) \\ \underline{\underline{R}}(t+T, t_0+T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \\ \underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \end{cases} \quad (4.23)$$

Pour rappel : (i) la matrice  $\underline{\underline{B}}$  est indépendante du temps ; (ii) la matrice  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  est  $2T$  périodique ; (iii) la matrice résolvante est calculable numériquement à tout instant  $t$  avec l'Équation (4.15).

Le comportement étudié est stable aux petites perturbations donc les trois valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de la matrice  $\underline{\underline{B}}$  ont des parties réelles positives. On note  $\lambda$  la valeur minimale des parties réelles de ces trois valeurs propres. La valeur limite  $|\Lambda_{\min}|$  est alors déterminée à l'aide

d'un raisonnement par l'absurde. Soit  $H$  l'hypothèse suivante :

$$H = \forall \delta > 0, \exists \tau \geq t_0 :$$

$$\underbrace{\left( \forall t \in [t_0, \tau], \begin{cases} |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |z(t)| \leq (\delta + \Lambda)e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |w(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \end{cases} \right)}_{H1} \cap \underbrace{\left( \forall t \in ]\tau, +\infty[, \begin{cases} |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |\dot{z}(t)| > (\delta + \Lambda)e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |w(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \end{cases} \right)}_{H2} \quad (4.24)$$

Ainsi,  $H$  vraie implique que la perturbation  $(z, w)$  tend vers l'infini et donc que le comportement étudié est instable pour l'impulsion  $\Lambda$ . La négation de l'hypothèse  $H$  est :

$$\bar{H} = \exists \delta > 0 : \forall \tau \geq t_0,$$

$$\underbrace{\left( \exists t \in [t_0, \tau] : \begin{cases} |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |\dot{z}(t)| > (\delta + \Lambda)e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |w(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \end{cases} \right)}_{H3} \cup \underbrace{\left( \exists t \in ]\tau, +\infty[ : \begin{cases} |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |\dot{z}(t)| \leq (\delta + \Lambda)e^{-\lambda(t-t_0)} \\ |w(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \end{cases} \right)}_{H4} \quad (4.25)$$

En  $t_0$ , la perturbation est supposée être un ajout de vitesse pure. Ainsi  $z(t_0) = 0$  comme indiqué en Équation (4.19). Ceci implique que l'hypothèse  $H3$  est toujours fausse pour  $\tau = t_0$ . Ainsi,  $\bar{H}$  vraie implique  $H4$  vraie ce qui signifie que le comportement étudié est stable pour l'impulsion  $\Lambda$ . Dans la suite, l'hypothèse  $H$  est considérée comme vraie. Le but sera alors de trouver l'impulsion minimale  $|\Lambda_{\min}|$  à partir de laquelle cette hypothèse n'est plus valable. Ce  $|\Lambda_{\min}|$  sera alors l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement étudié.

La valeur du déplacement de la perturbation  $z$  en  $t = \tau$  est donnée par l'hypothèse  $H$  et par l'Équation (4.22) :

$$\begin{aligned} \delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} = & \left| \Lambda \left[ \underline{\underline{R}}(\tau, t_0) \right]_{(1,2)} + \int_{t_0}^{\tau} \left[ \underline{\underline{R}}(\tau, s) \right]_{(1,3)} \left( \frac{\alpha}{C_0 L} z(s) \dot{z}(s) \right) ds \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^{\tau} \left[ \underline{\underline{R}}(\tau, s) \right]_{(1,2)} \left( -\frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} x_s(s) z(s)^2 - \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} z(s)^3 - \frac{\alpha}{ML} z(t) w(t) \right) ds \right| \quad (4.26) \end{aligned}$$

À noter que seule la composante (1, 2) et (1, 3) de la matrice résolvante apparaît ici. L'idée est maintenant de majorer le terme de droite de cette équation. Pour cela, il convient d'abord de majorer les termes de la matrice résolvante :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \quad (4.27)$$

Comme la solution étudiée est stable aux petites perturbations, les termes de la matrice  $e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}}$  sont tous contenus dans une enveloppe exponentielle décroissante de coefficient  $\lambda$  (valeur minimale des parties réelles des trois valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$ ). De plus, comme  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  est  $2T$  périodique, alors chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)} \underline{\underline{R}}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparaît



dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + 2T]$ . De plus, la matrice résolvante vérifie :

$$\underline{\underline{R}}(t + T, t_0 + T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \quad (4.28)$$

Ainsi chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparait dans  $(t, t_0) \in [t_0, t_0 + 2T] \times [0, T]$ . La matrice composée des maxima de chaque composante de  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  est appelée  $\underline{\underline{C}}$ . Elle est indépendante du temps et indépendante de l'instant initial  $t_0$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, [\underline{\underline{C}}]_{(i,j)} = \max_{\substack{t_0 \in [0, T] \\ t \in [t_0, t_0 + 2T]}} \left| e^{\lambda(t-t_0)} [\underline{\underline{R}}(t, t_0)]_{(i,j)} \right| \quad (4.29)$$

La majoration de la matrice résolvante devient donc possible :

$$\forall (t, t_0), \forall (i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, [\underline{\underline{R}}(t, t_0)]_{(i,j)} \leq e^{-\lambda(t-t_0)} [\underline{\underline{C}}]_{(i,j)} \quad (4.30)$$

Le terme de droite de l'Équation (4.22) est donc maintenant majorable à l'aide de l'Équation (4.30) et de l'hypothèse *H1*. Après simplification de cette majoration, il vient une inégalité indépendante de  $\tau$  et de  $t_0$  (pour plus de détail sur la majoration et sa simplification, le lecteur pourra consulter la Section 3.2) :

$$\forall \delta > 0, \quad 0 \leq \underbrace{C - E\delta + B\delta^2 + D\delta^3}_{f(\delta, \Lambda)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D = \frac{\omega_0^2}{4\lambda x_0^2} [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} \\ B = \left( \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} \max_{t_0 \in [0, T]} |\Psi| + \frac{\alpha}{ML\lambda} \right) [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} + \frac{2\alpha}{C_0 L \lambda} [\underline{\underline{C}}]_{(1,3)} \\ E = 1 - \Lambda \frac{2\alpha}{C_0 L \lambda} [\underline{\underline{C}}]_{(1,3)} \\ C = \Lambda [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} \end{cases} \quad (4.31)$$

Où  $\Psi$  est une constante indépendante de  $\tau$  définie par :

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \cos(\omega_k t_0) - \omega_k \sin(\omega_k t_0)) \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \sin(\omega_k t_0) + \omega_k \cos(\omega_k t_0)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

La constante  $\omega_k = k\omega/n$  représente ici la pulsation de l'harmonique  $k$  du comportement sous-harmonique  $n$  étudié. La fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est un polynôme de degré trois par rapport à  $\delta$ . Elle admet donc un seul minimum pour  $\delta > 0$ . Ce minimum est atteint en  $\delta_0$  :

$$\delta_0 = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 3D}}{3D} \quad (4.33)$$

Pour un  $\Lambda$  donné, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est positif alors la fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est toujours positive quelque soit  $\delta > 0$  donc l'Équation (4.31) est toujours vérifiée. Par contre, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est négatif alors

l'Équation (4.31) n'est plus vérifiée quelque soit  $\delta > 0$  donc l'hypothèse  $H$  devient fausse sous cette condition. La limite entre solution stable et solution instable est par conséquent atteinte pour une impulsion  $\Lambda_{\min}$  vérifiant  $f(\delta_0, \Lambda_{\min}) = 0$ . Le critère de robustesse de stabilité devient ainsi :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2}M\Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T MA \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \\ \Lambda_{\min} = \frac{\delta_0 - B\delta_0^2 - D\delta_0^3}{\underline{[C]}_{(1,2)} + \frac{2\alpha}{C_0L\lambda} \delta_0 \underline{[C]}_{(1,3)}} \end{cases} \quad (4.34)$$

Avec  $\Lambda_{\min}$  l'impulsion minimale entraînant l'instabilité de la solution étudiée  $(x_s, v_s)$ .

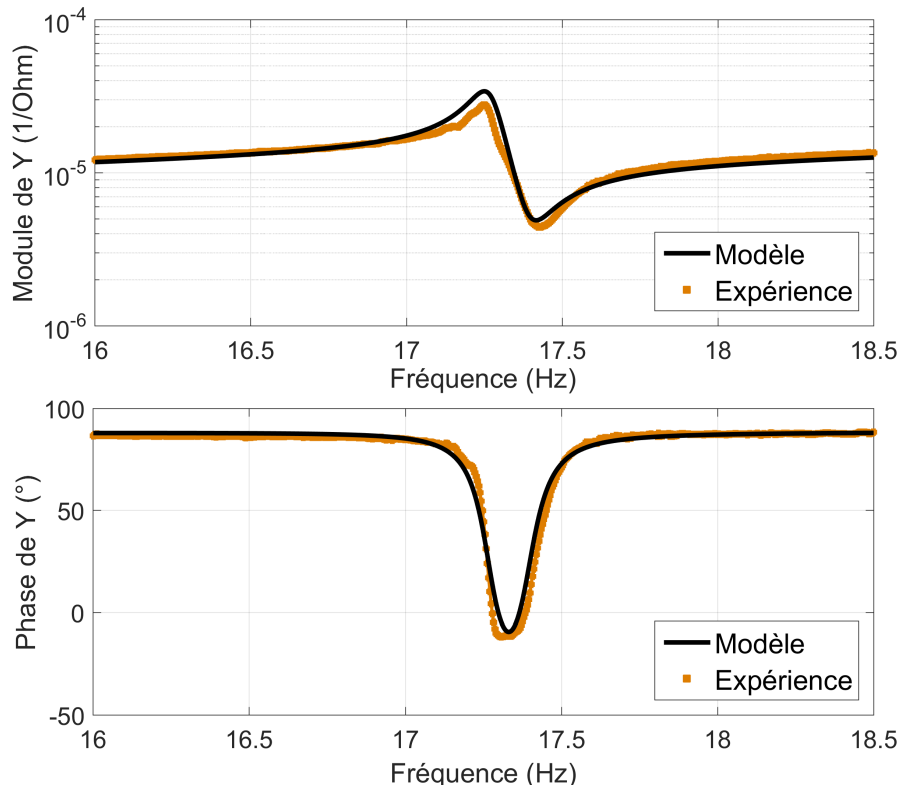
### Réponse fréquentielle théorique et expérimentale

La réponse fréquentielle théorique du prototype 2 est présentée en Figure 4.8. Elle est tirée de la modélisation du générateur bistable piézoélectrique développée dans les sections précédentes. Cette réponse fréquentielle théorique est comparée à la réponse fréquentielle expérimentale du prototype 2. Cette dernière est obtenue de la manière suivante : le prototype est placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante de  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$ . La position de la masse et la position du support ont été mesurées à l'aide de deux vibromètres lasers. Les différents comportements sous-harmoniques du générateur bistable ont été atteints en appliquant des impulsions de tension carrées (20 ms et 30 V) au *Piézo de flambement* générant ainsi des impulsions de force sur la masse. Ces impulsions perturbent le générateur bistable et sont susceptibles de lui faire changer de comportement en régime permanent. Une fois le comportement souhaité atteint, la fréquence d'excitation est lentement augmentée ou diminuée, sans changement brusque, afin de ne pas déstabiliser ce comportement et permettre ainsi d'explorer toute sa plage de fréquences.

Les paramètres  $(\omega_0, Q, C_0, \alpha)$  ont cette fois-ci été identifiés en suivant la procédure développée par Badel et al. [86] qui consiste à mesurer l'admittance complexe  $\underline{Y}$  du *Piézo de récupération* autour de la pulsation naturelle  $\omega_0$  du générateur bistable sans aucune excitation extérieure. Cette admittance est alors utilisée pour ajuster les paramètres du modèle suivant :

$$\begin{cases} \underline{Y} = \frac{I}{V} = jC_0\omega \left( 1 + \frac{k_m^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\frac{\omega/\omega_0}{Q}} \right) \\ k_m^2 = 2 \left( \frac{x_0}{L} \right)^2 \frac{\alpha^2}{MC_0\omega_0^2} \end{cases} \quad (4.35)$$

La Figure 4.7 montre la mesure de l'admittance du *Piézo de récupération* monté sur le prototype 2 ainsi que le modèle ajusté à cette mesure. Les valeurs des paramètres identifiés grâce à cette méthode sont récapitulées dans le Tableau 4.3. Ce tableau regroupe aussi les valeurs des paramètres  $(x_0, L, M)$  qui ont directement été mesurées sur le prototype. La résistance de charge  $R$  a été choisie égale à l'impédance interne du *Piézo de récupération* à la pulsation de résonance afin d'optimiser l'énergie maximale convertie (adaptation d'impédance  $R = 1/C_0\omega_0$ ). La puissance moyenne convertie a été évaluée en mesurant la tension aux bornes de cette résistance connectée au *Piézo de récupération* ( $P_{\text{moy}} = v_{\text{rms}}^2/R$ ). La limite de robustesse de stabilité



**Figure 4.7** – Module et phase de l'admittance du prototype 2 et son modèle ajusté pour l'identification des paramètres  $(\omega_0, Q, C_0, \alpha)$ .

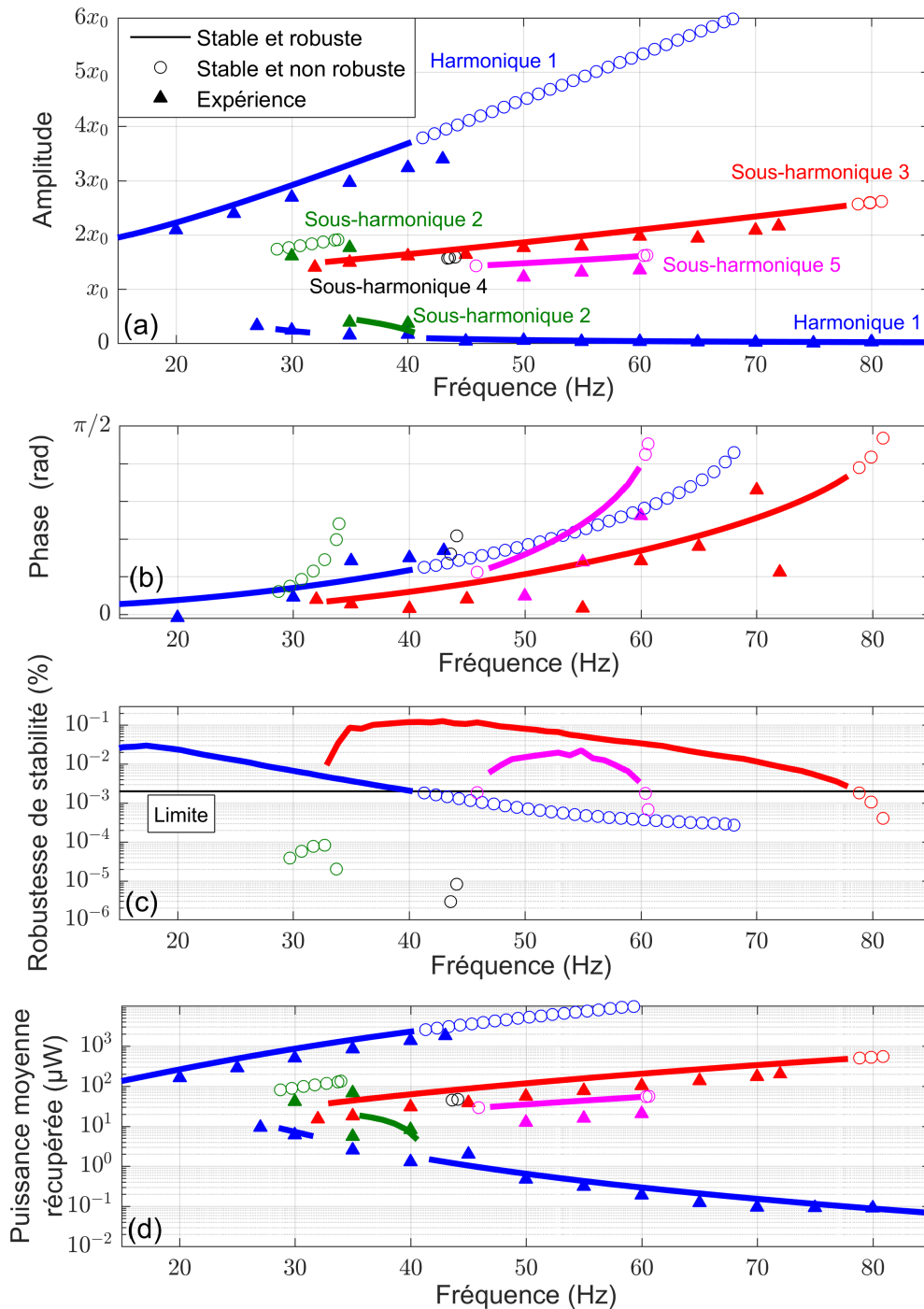
**Table 4.3** – Paramètres du générateur bistable : prototype 2.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0,50$	mm
Distance masse-support	$L$	25	mm
Masse inertielle	$M$	17,3	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	121	$\text{rad.s}^{-1}$
Facteur de qualité mécanique	$Q$	87	–
Amplitude de l'excitation	$A$	2,5	$\text{m.s}^{-2}$
Fréquence de l'excitation	$\omega$	15 – 85	Hz
Facteur de force du Piézo de récupération	$\alpha$	0,096	$\text{N.V}^{-1}$
Capacité bloquée du Piézo de récupération	$C_0$	1,05	$\mu\text{F}$
Résistance de charge	$R$	7,83	$\text{k}\Omega$

a été définie afin que les fréquences de coupure réelles des différentes orbites hautes soient respectées au mieux.

La Figure 4.8 présente donc, pour chaque comportement théorique et expérimental, l'amplitude d'oscillation de la masse (supérieure à  $x_0$  pour les orbites hautes et inférieure à  $x_0$  pour les orbites basses), la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (pour les orbites hautes), la robustesse de stabilité (pour les orbites hautes) et enfin la puissance convertie dans la résistance  $R$ . Pour plus de détail sur le calcul de la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum, le lecteur pourra consulter le Chapitre 2, Section 2.6. Les séries de Fourier utilisées pour décrire la réponse en régime permanent des différents comportements ( $x$  et  $v$ ) ont été tronquée à l'ordre  $N = 6$  (pour justifier ce choix, le lecteur pourra consulter les exemples illustrés en Figure 4.6). Pour les

orbites hautes, les sous-harmoniques d'ordre supérieur à cinq ne sont pas représentées car elles sont peu intéressantes pour la récupération d'énergie (leur niveau d'énergie et leur robustesse de stabilité sont faibles comparés à ceux des comportements tracés en Figure 4.8). Bien que les orbites basses ne soient pas non plus intéressantes pour la récupération d'énergie, certaines d'entre elles sont cependant représentées en Figure 4.8 et ceci afin de connaître toutes les plages de fréquences sur lesquelles les orbites hautes coexistent avec une orbite basse. Sur ces plages de



**Figure 4.8** – Spectres analytiques et expérimentaux du générateur bistable pour une excitation d'amplitude  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$  : (a) amplitude des différents comportements (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (orbites hautes) (c) robustesse de stabilité (orbites hautes) (d) puissance moyenne récupérée.

fréquence, les orbites hautes sont donc susceptibles de tomber sur une orbite basse réduisant, de fait, la quantité d'énergie convertie par le générateur bistable.

La comparaison entre modèle et expérience montre une nouvelle fois la pertinence du critère de robustesse de stabilité développé lors de cette thèse (la première comparaison a été faite pour le prototype 1 au Chapitre 3, Section 3.4, Figure 3.4). C'est uniquement en ajoutant ce dernier qu'il est possible d'obtenir une bonne concordance théorie/expérience notamment pour les fréquences de coupure de chaque comportement. En effet, les différentes fréquences de coupure théoriques (obtenues avec la théorie de la stabilité aux petites perturbations) sont définies par une phase de  $\pi/2$  pour les comportements sous-harmoniques d'ordre impair et  $\pi/4$  pour les comportements sous-harmoniques d'ordre pair. Ces fréquences de coupure théoriques ne sont pas atteignables expérimentalement car leur robustesse de stabilité est trop faible. Les comportements à ces fréquences sont trop sensibles aux perturbations extérieures inhérentes aux conditions réelles pour pouvoir être maintenus dans le temps.

La Figure 4.8 montre des résultats prometteurs pour le générateur bistable du prototype 2. Il offre en effet une bande de fréquence continue de 63 Hz (de 15 Hz à 78 Hz) sur laquelle il existe au moins une orbite haute robuste atteignable le rendant, de fait, très intéressant pour la récupération d'énergie vibratoire large bande. Cependant, une grande partie de la plage de fréquences proposée par ces orbites hautes est également occupée par des orbites basses à faible niveau d'énergie. Il n'est donc pas possible de prédire à l'avance quel comportement en régime permanent adoptera le générateur bistable sur cette plage de fréquences utile en conditions réelles. Dans le cas défavorable où ce dernier se stabilise sur une orbite basse, il convient de pouvoir le faire sauter sur l'orbite haute correspondante en apportant de l'énergie à la masse de manière intelligente. Pour ce faire, la stratégie mise à l'épreuve dans l'étude expérimentale qui suit est le saut d'orbite par modification temporaire du niveau de flambement dont le principe a été détaillé plus tôt dans l'étude numérique présentée en Figure 4.2(a).

## 4.4 Étude expérimentale du saut d'orbite par modification du niveau de flambement

### Méthode

Le prototype 2 utilisé dans l'étude expérimentale qui suit et son principe de fonctionnement sont rappelés en Figure 4.9 et en Figure 4.10. La Figure 4.11 présente l'exemple d'un essai expérimental mené avec ce prototype entraînant un saut d'orbite par modification temporaire du niveau de flambement. La stratégie consiste à sur-flamber rapidement le générateur bistable à un instant donné (points noirs sur la figure) puis à attendre que la masse atteigne sa position maximale pour enfin relâcher le flambement à son niveau initial (triangle blanc sur la figure). Cette stratégie permet ainsi d'apporter à deux reprises de l'énergie potentielle à la masse : une première fois lors du sur-flambement du générateur et une seconde fois lors du retour au flambement initial (pour ces deux événements, la masse se retrouve éloignée de la position d'équilibre et voit ainsi son énergie potentielle augmenter). L'instant de retour au flambement initial a été choisi de façon à maximiser l'énergie potentielle apportée à la masse lors du deuxième événement en assurant, juste après le relâchement du sur-flambement, une distance maximale entre la position de la masse et la position d'équilibre  $x_0$ .

Le changement du niveau de flambement est géré par le *Piézo de flambement* monté sur

le prototype 2 qui modifie la longueur  $L$  lorsqu'une tension lui est appliquée (utilisation en mode actionneur). Pour une tension positive, l'élément piézoélectrique s'allonge ce qui réduit le petit axe de l'ellipse et augmente la longueur  $L$  (le niveau de flambement est réduit). Pour une tension négative, l'élément piézoélectrique se comprime ce qui augmente le petit axe de l'ellipse et augmente la longueur  $L$  (le niveau de flambement est augmenté). La conception de cet actionneur piézoélectrique est telle que la tension à ses bornes doit être comprise entre  $-20$  V et  $+150$  V. Pour une tension inférieure à  $-20$  V, l'élément piézoélectrique risque de sortir de l'ellipse dans laquelle il est précontraint. Pour pouvoir utiliser le *Piézo de flambement* sur une plage de tension symétrique (allant de  $-85$  V à  $+85$  V), un biais constant de  $+65$  V est maintenu à ses bornes. Dans la suite, toutes les tensions qui lui sont appliquées seront exprimées par rapport à ce biais.

Deux paramètres peuvent être ajustés pour cette stratégie : l'instant de sur-flambement et l'amplitude du sur-flambement. Pour cette étude expérimentale, quatre instants différents de sur-flambement peuvent être choisis (points noirs sur la Figure 4.11) : (i) lorsque la position de la masse sur l'orbite basse atteint un maximum ; (ii) lorsque la position de la masse sur l'orbite basse atteint un minimum ; (iii) lorsque la position de la masse sur l'orbite basse passe par  $x_0$  avec une vitesse positive (ou par  $-x_0$  avec une vitesse négative) ; (iv) lorsque la position de la masse sur l'orbite basse passe par  $x_0$  avec une vitesse négative (ou par  $-x_0$  avec une vitesse positive). L'amplitude du sur-flambement est quant à elle proportionnelle à la valeur de la tension négative appliquée au *Piézo de flambement*. Six valeurs différentes ont été étudiées :  $-20$  V,  $-30$  V,  $-40$  V,  $-50$  V,  $-60$  V,  $-70$  V. La stratégie de saut d'orbite par modification du niveau de flambement a été mise à l'épreuve sur toute la plage de fréquences sur laquelle coexistent orbites hautes et orbites basses (de 28 Hz à 78 Hz). Six fréquences d'excitation ont

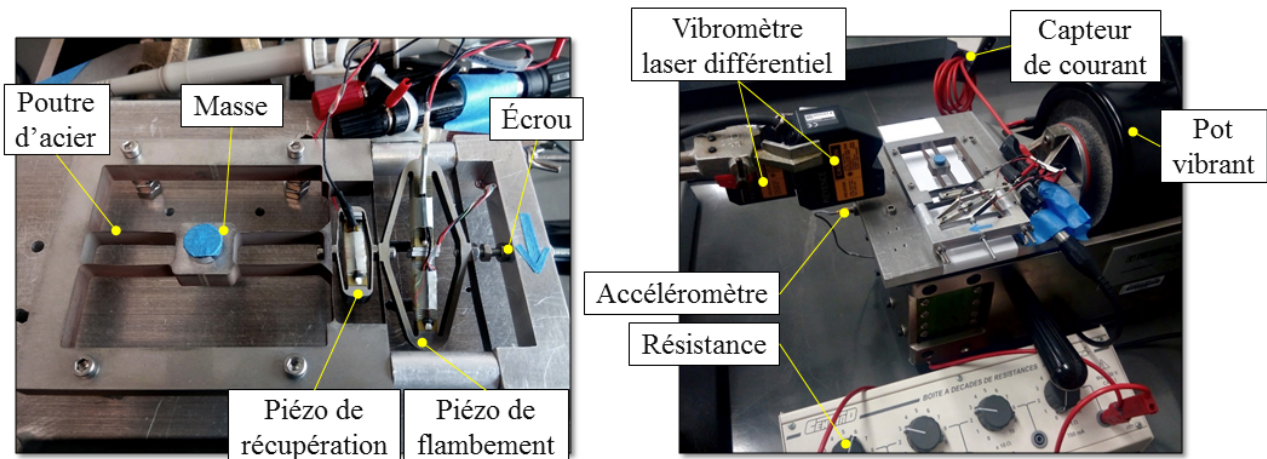


Figure 4.9 – Prototype 2 : générateur bistable piézoélectrique réalisé à partir de deux poutres flambées (à l'aide de l'écrou) et placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante.

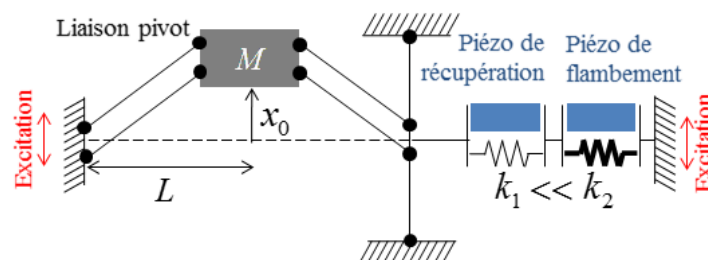


Figure 4.10 – Schéma de principe du prototype 2.

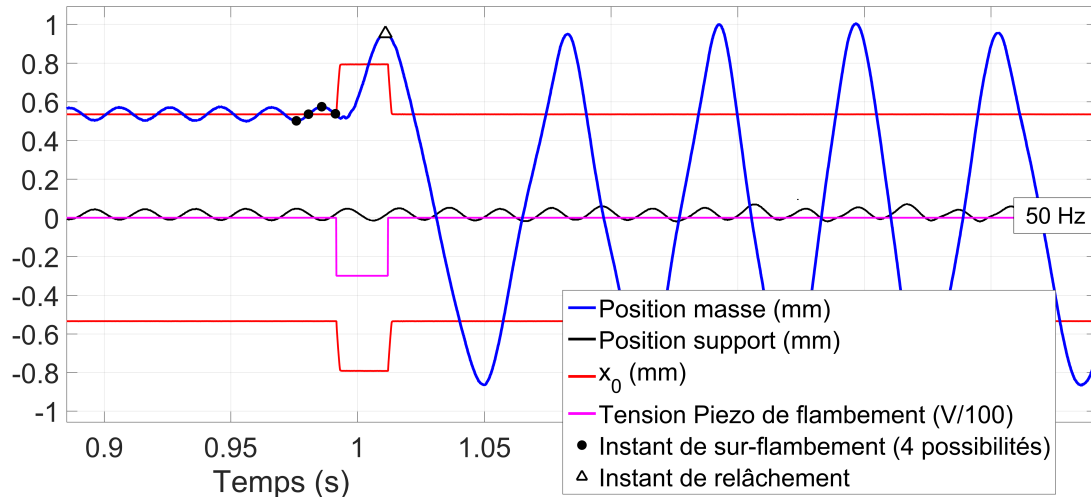


Figure 4.11 – Exemple d'un essai expérimental de saut d'orbite par modification du niveau de flambement.

Table 4.4 – Paramètres variables de l'étude expérimentale de saut d'orbite par modification du niveau de flambement. Les tensions appliquées au Piézo de flambement sont exprimées par rapport au biais.

Paramètre variable	Valeurs étudiées
Instant de sur-flambement (condition de la masse)	<ul style="list-style-type: none"> <li> position maximale</li> <li> position minimale</li> <li> position <math>x_0</math> et vitesse positive</li> <li> position <math>x_0</math> et vitesse négative</li> </ul>
Tension appliquée au Piézo de flambement	-20V -30V -40V -50V -60V -70V
Fréquence d'excitation	30Hz 35Hz 40Hz 50Hz 60Hz 70Hz
Nombre d'essais pour chaque combinaison	30

été sélectionnées afin de couvrir cette plage : 30 Hz, 35 Hz, 40 Hz, 50 Hz, 60 Hz, 70 Hz. Enfin, pour chaque combinaison possible de tous ces paramètres, 30 essais de saut d'orbite ont été effectués afin de pouvoir évaluer les statistiques de saut. Chacun de ces essais commence par une orbite basse harmonique 1 en régime permanent. L'essai se termine lorsque le générateur bistable retrouve un régime permanent. Le Tableau 4.4 résume toutes les variables de cette étude expérimentale. Le schéma Simulink utilisé pour cette étude expérimentale est détaillé en Annexe, Figure A.2.

## Résultats et discussion

La Figure 4.12 présente les données brutes obtenues après les 4320 essais de saut d'orbite. Elle est divisée en quatre sous-figures donnant chacune les résultats pour un instant de sur-flambement donné. Dans chaque sous-figure, la réponse fréquentielle théorique du générateur bistable est tracée comme référence (traits pleins et cercles vides correspondant aux orbites théoriques stables respectivement robustes et non robustes). Les résultats obtenus pour chaque fréquence d'excitation étudiée sont tracés dans des boîtes placées à la verticale de cette fréquence. Chaque boîte représente un comportement sur lequel le générateur bistable s'est stabilisé après un essai de saut d'orbite. La position verticale de chacune de ces boîtes représente l'amplitude d'oscillation de la masse du comportement correspondant.

Par exemple, la Figure 4.12(a) présente les résultats obtenus pour un instant de sur-flambement fixé lorsque la position de la masse sur l'orbite basse atteint un maximum. Pour une excitation de 60 Hz, 30 essais de saut d'orbite ont été faits pour chacune des six tensions appliquées au *Piézo de flambement*. Pour chacun de ces 180 essais la méthodologie est la suivante : une orbite basse harmonique 1 est stabilisée puis le flambement est modifié à l'instant choisi (position maximale) puis relâché lorsque la position de la masse atteint un maximum (c.f. Figure 4.11). On relève alors le comportement en régime permanent qu'adopte le générateur bistable après l'essai. Ces 180 essais à 60 Hz pour six tensions différentes ont ici aboutis à trois comportements différents en régime permanent : l'orbite basse harmonique 1, l'orbite haute sous-harmonique 3 et l'orbite haute sous-harmonique 5. Ces trois comportements sont représentés par les trois boîtes placées à la verticale de 60 Hz aux amplitudes correspondantes. Les 180 essais menés pour le même instant de sur-flambement mais à 40 Hz ont eux aboutis à deux comportements différents en régime permanent : l'orbite basse harmonique 1 et l'orbite haute sous-harmonique 3.

Dans chaque boîte, six bâtons colorés sont tracés. Ils correspondent aux essais de saut d'orbite menés pour les six tensions différentes appliquées au *Piézo de flambement*. La hauteur de ces bâtons représente le nombre d'essais finissant sur le comportement donné par la position de la boîte. Le bas de la boîte correspond à 0 essai et le haut de la boîte à 30 essais (c'est-à-dire, 0 % et 100 % des essais). Par exemple, en Figure 4.12(a), pour une excitation de 60 Hz et pour une tension de  $-20$  V appliquée temporairement au *Piézo de flambement* (en bleu clair), les 30 essais de saut d'orbite ont fini sur l'orbite basse harmonique 1. Pour une tension de  $-30$  V (en bleu foncé), 23 essais ont fini sur l'orbite basse harmonique 1 et 7 essais ont fini sur l'orbite haute sous-harmonique 5. Pour une tension de  $-50$  V (en vert), 19 essais ont fini sur l'orbite basse harmonique 1 et 11 essais ont fini sur l'orbite haute sous-harmonique 3. Ainsi, plusieurs enseignements peuvent être tirés des données expérimentales présentées en Figure 4.12.

(i) Si on ne choisit pas les bons instants et niveaux de sur-flambement, il est globalement difficile de sauter d'une orbite basse à une orbite haute. La majeure partie des essais ont fini sur une orbite basse.

(ii) Les résultats de saut d'orbite sont en accord avec le critère de robustesse de stabilité présenté en Figure 4.8. En effet, la grande majorité des essais ayant fini sur une orbite haute se situe dans la zone où la robustesse de stabilité du générateur bistable est la plus grande (c'est-à-dire, entre 40 Hz et 50 Hz pour la sous-harmonique 3). De plus, peu d'essais ont fini sur les orbites ayant une faible robustesse de stabilité (c'est-à-dire, l'orbite haute sous-harmonique 2, 4 et 5).

(iii) Apporter le plus d'énergie possible à la masse n'est pas une condition suffisante pour maximiser les chances de saut d'orbite. Ainsi, il ne suffit pas d'appliquer la plus grande amplitude de sur-flambement possible. En Figure 4.12(d), pour une excitation de 50 Hz, les 30 essais avec une tension de  $-30$  V (en vert) ont tous fini sur l'orbite haute sous-harmonique 3. Pour une tension plus grande en valeur absolue de  $-70$  V (en rouge foncé), les 30 essais ont pratiquement tous fini sur l'orbite basse harmonique 1. Le saut d'orbite n'est donc pas seulement une question de maximisation d'énergie apportée à la masse. Il s'agit également de savoir quand l'apporter.

(iv) L'instant de sur-flambement joue un rôle majeur sur les chances de saut d'orbite à une fréquence donnée. En Figure 4.12, pour une excitation de 30 Hz, le saut de l'orbite basse harmonique 1 vers l'orbite haute harmonique 1 n'est observable que pour deux instants de sur-flambement particuliers : lorsque la position de la masse sur l'orbite basse atteint un maximum



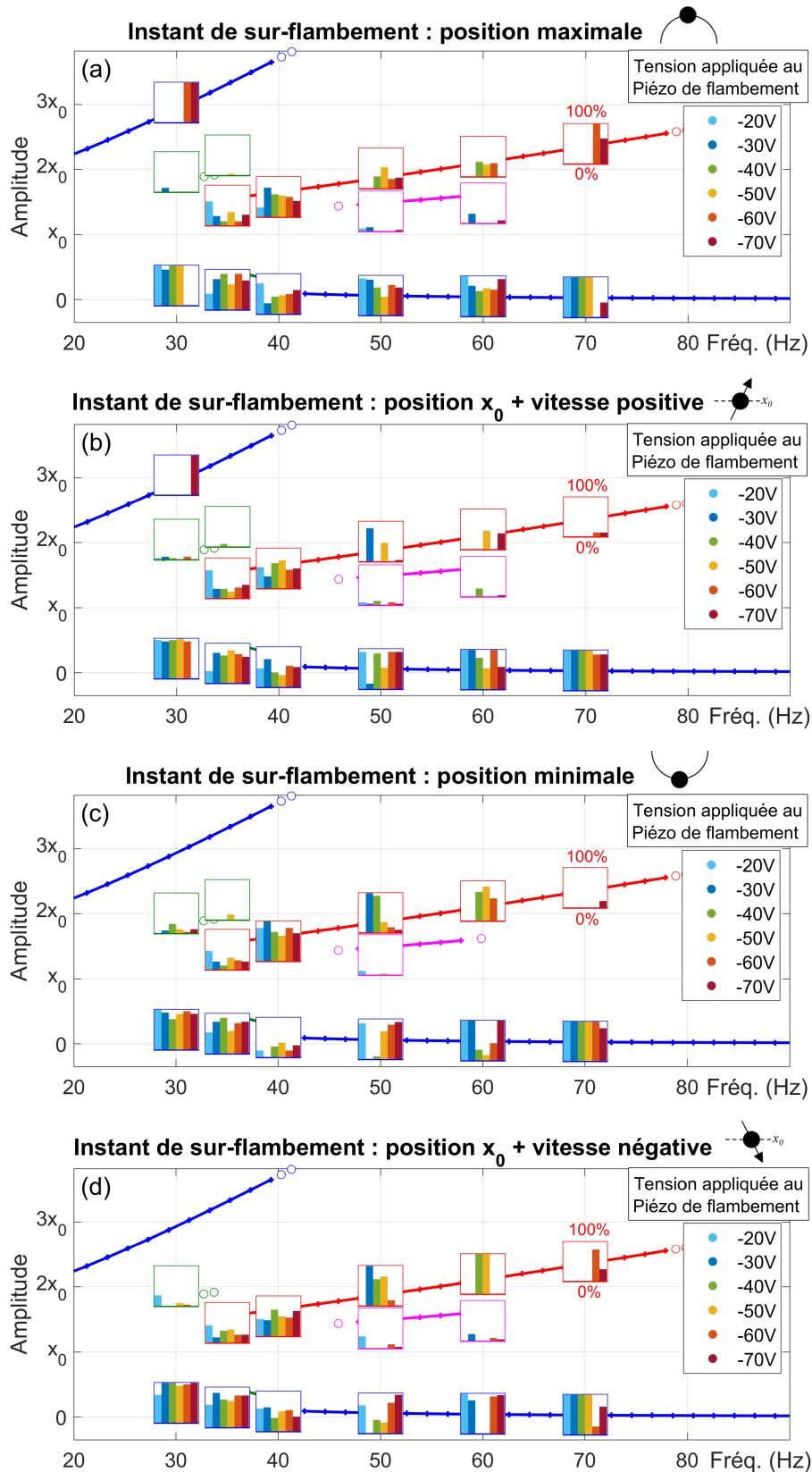


Figure 4.12 – Résultats expérimentaux du saut d'orbite par modification du niveau de flambement. Les boîtes correspondent aux différents comportements stabilisés après les essais de saut d'orbite. Chaque bâton coloré dans ces boîtes correspond aux nombre d'essais finissant sur le comportement donné par la position de ces boîtes. Le bas et le haut de chaque boîte correspondent respectivement à 0 et 30 essais (c'est-à-dire, 0 % et 100 % des essais).

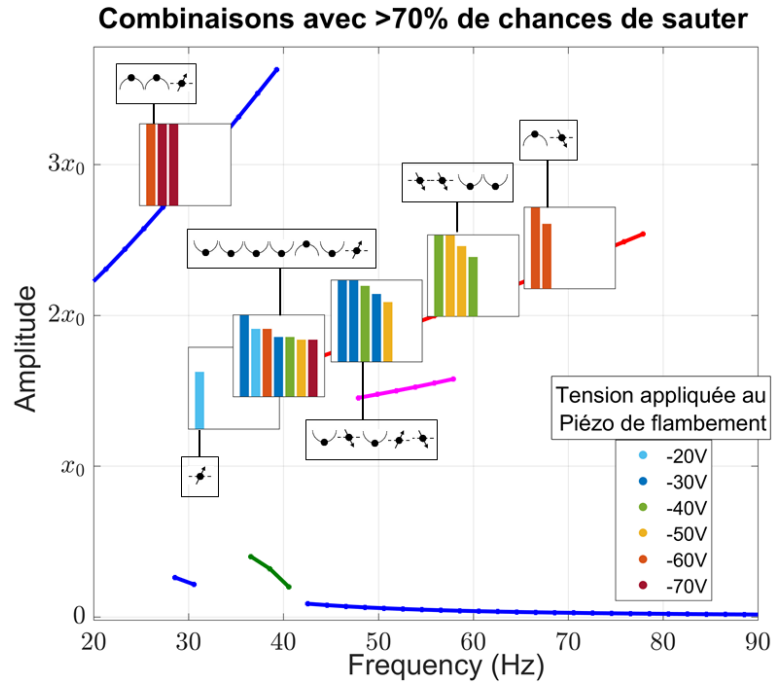
ou lorsque la position de la masse sur l'orbite basse est  $x_0$  avec une vitesse positive. De plus, ces deux instants n'aboutissent pas aux mêmes statistiques de saut. Le premier instant permet de sauter pour des tensions plus faibles (en valeur absolue) que le second (respectivement  $-60$  V et  $-70$  V). Ces différences observées en fonction de l'instant de sur-flambement sont sans doute liées aux différentes interactions énergétiques possibles entre la masse et la source juste après avoir relâché le sur-flambement. La puissance apportée par la source à la masse s'écrit :

$$P_{\text{source} \rightarrow \text{masse}} = -M \underbrace{A \cos(\omega t)}_{\text{acc. support}} \dot{x} \quad (4.36)$$

Ainsi, la source donne de l'énergie si son accélération est de signe opposé à celui de la vitesse de la masse. Elle prend de l'énergie dans le cas contraire. Or, en faisant varier les combinaisons d'amplitude et d'instant du sur-flambement, on change la configuration dans laquelle se trouve la source juste après l'essai. Ainsi, pour certaines combinaisons, la source fournira de l'énergie à la masse après l'essai et pour d'autres, la source prélèvera de l'énergie à la masse après l'essai. Il est donc normal de constater que les chances de saut d'orbite soient affectées par ces deux facteurs.

(v) Il est intéressant de noter que, pour chaque fréquence d'excitation étudiée, il est possible de trouver une combinaison particulière d'amplitude du sur-flambement (c'est-à-dire, de tension imposée au *Piézo de flambement*) et d'instant où ce sur-flambement est appliqué qui permet de sauter avec plus de 70 % de chances sur les 30 essais (l'utilisation de pourcentage est discutable ici au vu du nombre d'essais réalisés - néanmoins, pour des raisons de clarté du texte, les statistiques de sauts seront gardés sous la forme de pourcentages). Plus précisément, il est possible de trouver une combinaison particulière qui permet de sauter avec 100 % de chances à toutes les fréquences étudiées sauf à 35 Hz où cette statistique est de 70 % (21 sauts sur 30 essais). En réalité, il a été possible de trouver une combinaison assurant 100 % de chances de sauter sur une orbite haute à 35 Hz :  $-23$  V appliquée lorsque la position de la masse sur l'orbite basse est  $x_0$  avec une vitesse positive. La conclusion est donc la suivante : pour chaque excitation, il est possible de trouver une combinaison d'amplitude et d'instant de sur-flambement qui permet de sauter à 100 % de chances sur une orbite haute. La marge de manœuvre autour de ces combinaisons particulières en gardant l'assurance de toujours sauter dépendra alors de la robustesse de stabilité de l'orbite haute visée. Plus l'orbite haute visée est robuste, plus il sera possible de modifier les deux variables ajustables (tension et instant) autour de la condition particulière en gardant l'assurance de toujours sauter.

La Figure 4.13 regroupe toutes les combinaisons d'amplitude et d'instant de sur-flambement pour lesquelles les chances de sauter sont supérieures à 70 %. Deux points importants sont soulignés sur cette figure. (i) Pour chaque fréquence d'excitation, plusieurs combinaisons permettent d'assurer 70 % de chances de sauter sur une orbite haute. Le nombre de combinaisons possibles est directement lié à la robustesse de stabilité de l'orbite haute considérée. Plus cette orbite est robuste, plus le nombre de combinaisons possibles est grand. Le nombre maximal de combinaisons est atteint à 40 Hz pour l'orbite haute sous-harmonique 3 (sept combinaisons) et correspond au maximum de robustesse de stabilité de cette orbite (voir Figure 4.8). (ii) Cette figure met en lumière la pertinence de la stratégie de saut d'orbite étudiée : le saut d'orbite par modification du niveau de flambement correctement paramétré assure de grandes chances de sauter sur une orbite haute sur toute la plage de fréquences utile du générateur bistable (ici de 20 Hz à 70 Hz). De plus, ces grandes chances de saut sont conservées pour plusieurs combinaisons amplitude/instant de sur-flambement ce qui rend cette stratégie relativement tolérante pour

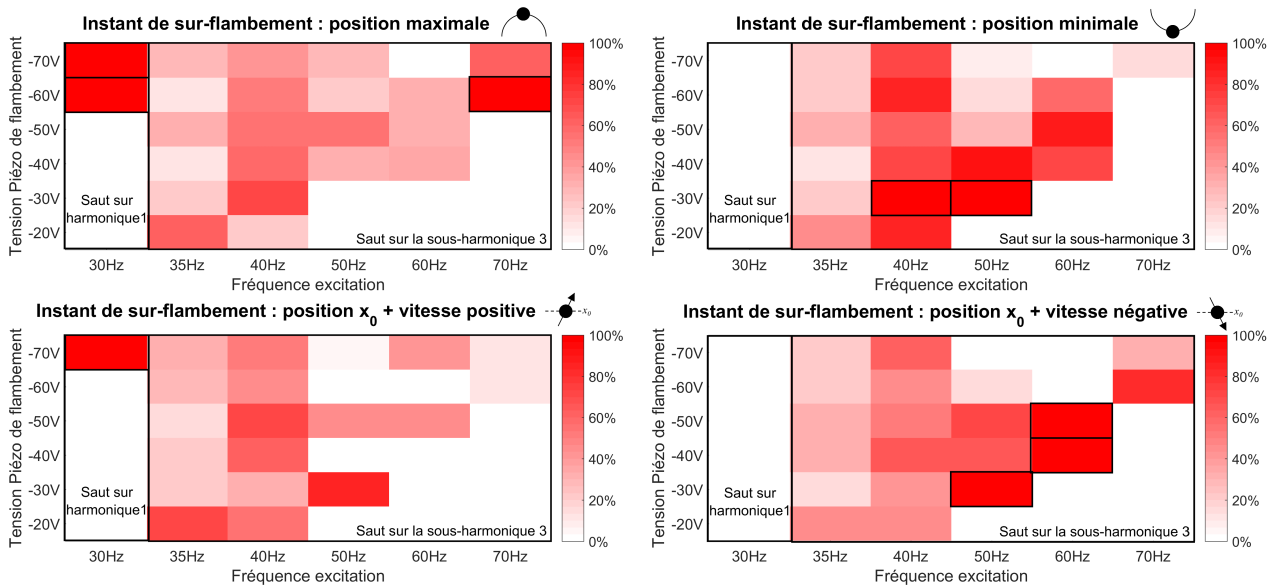


**Figure 4.13** – Combinaisons particulières d’amplitude de sur-flambement (c’est-à-dire, de tension imposée au Piézo de flambement) et d’instant où ce sur-flambement est appliqué pour lesquelles les chances de sauter sont supérieures à 70 %. Chaque bâton coloré correspond aux nombre d’essais finissant sur le comportement donné par la position des boîtes. Le bas et le haut de chaque boîte correspondent respectivement à 0 et 30 essais (c’est-à-dire, 0 % et 100 % des essais).

sa mise en place en conditions réelles.

Une autre façon de présenter les résultats expérimentaux est détaillée en Figure 4.14. La quantité d’information affichée est sensiblement la même que pour la Figure 4.12 mais présentée d’une autre manière. Cette figure affiche directement, en niveaux de rouges, les statistiques de saut vers une orbite haute après les 30 essais, et ce en fonction de la fréquence d’excitation, de l’amplitude du sur-flambement et de l’instant où il est appliqué. Les rectangles à contour noirs représentent les cas où les 30 essais ont aboutis à une orbite haute (c’est-à-dire, 100 % de chances de sauter). Il est intéressant de noter ici que, pour chaque instant de sur-flambement et pour chaque fréquence d’excitation, les chances de saut les plus hautes sont obtenues pour l’amplitude de sur-flambement minimale autorisant un saut d’orbite. Si la tension appliquée au *Piézo de flambement* est trop faible (en valeur absolue), il n’y a aucune chance de sauter parce que l’énergie apportée à la masse n’est pas suffisante. Puis, en augmentant cette tension (en valeur absolue), apparait le premier saut. C’est pour cette tension minimale (en valeur absolue) autorisant un saut d’orbite que les chances de sauter sont les plus grandes. En augmentant encore cette tension (en valeur absolue), les chances de saut diminues.

En conclusion, le saut d’orbite par modification du niveau de flambement est une stratégie qui offre de bonnes probabilités de sauter d’une orbite basse à une orbite haute (de 70 % à 100 % de chances en fonction de la fréquence d’excitation), qui semble techniquement applicable (le niveau de flambement est multiplié par 2,32 au maximum ce qui correspond à une diminution de 0,073 % de la longueur  $L$  pour une tension de -70 V appliquée au *Piézo de flambement*) et qui montre une certaine tolérance quant aux éléments ajustables (amplitude et instant de sur-flambement) en gardant de fortes probabilités de saut. Cette stratégie permet, pour le prototype développé lors de cette étude expérimentale, d’assurer une orbite haute sur une plage de fréquences continue de 50 Hz (allant de 20 Hz à 70 Hz).

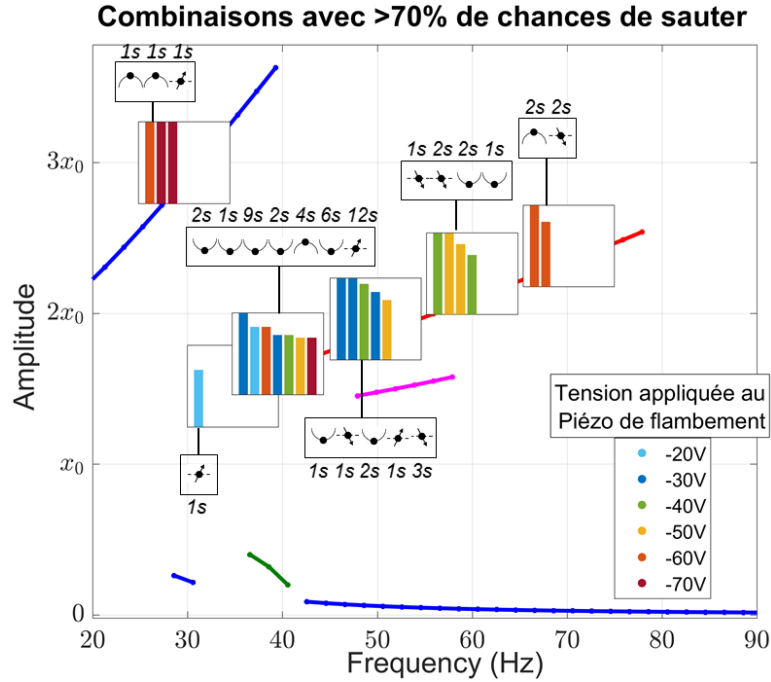


**Figure 4.14** – Résultats expérimentaux du saut d'orbite par modification du niveau de flambement montrant les chances de saut sur une orbite haute après 30 essais en fonction de : (i) la tension appliquée au Piézo de flambement ; (ii) la fréquence d'excitation ; (iii) l'instant de sur-flambement. Les rectangles à contour noir correspondent à 100 % de chance de sauter sur une orbite haute.

### Considérations énergétiques

Les bonnes probabilités de saut ne sont cependant pas suffisantes pour juger de la pertinence de la stratégie considérée. Il convient également d'évaluer le bilan énergétique de cette stratégie. La Figure 4.15 reprend les combinaisons amplitude/instant de sur-flambement assurant des probabilités de saut supérieures à 70 % et ajoute une donnée relative à ce bilan énergétique. Il s'agit du temps nécessaire pour que le générateur bistable récupère l'énergie qui a été dépensée pour sauter sur l'orbite haute. Cette dernière correspond à la somme de l'énergie qui a été apportée à la masse à l'instant de sur-flambement, plus l'énergie qui a été apportée à la masse à l'instant où ce sur-flambement est relâché. On ne prend donc pas en compte ici les pertes de l'actionneur et de circuit électronique utilisé. Ceci n'est pas réaliste mais permet de déterminer le cas le plus favorable qui pourrait être atteint avec un autre système de modification du niveau de flambement. Pour chaque combinaison de la Figure 4.15, le temps précisé correspond donc au temps nécessaire après le saut d'orbite pour retrouver un bilan énergétique positif. Ce dernier a été mesuré expérimentalement pour chaque essai et moyenné sur tous les essais réussis de saut d'orbite. Un signal temporel expérimental avec balance énergétique est présenté en Figure 4.16 à titre d'exemple.

Pour calculer ce temps, deux données ont été mesurées lors de l'expérience : l'énergie apportée à la masse durant l'essai et la puissance moyenne récupérée par le générateur bistable en régime permanent après l'essai (correspondant à la puissance moyenne convertie dans la résistance connectée au *Piézo de récupération*). L'énergie apportée à la masse durant l'essai est quant à elle calculée en sommant les deux ajouts d'énergie potentielle lors des deux modifications du niveau de flambement (sur-flambement et relâchement). Ces deux ajouts d'énergie sont visibles sur l'exemple numérique présenté en Figure 4.16. L'énergie potentielle de la masse doit donc être relevée au cours du temps en mesurant sa position  $x$  et la valeur des positions



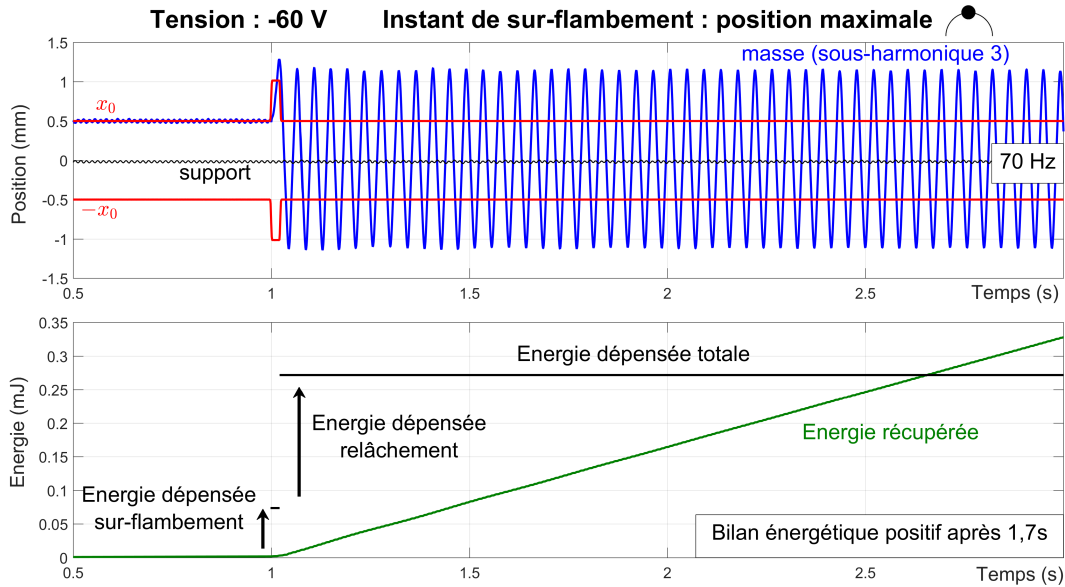
**Figure 4.15** – Combinaisons particulières d'amplitude de sur-flambement (c'est-à-dire, de tension imposée au Piézo de flambement) et d'instant où ce sur-flambement est appliqué pour lesquelles les chances de sauter sont supérieures à 70 % et leur temps nécessaire respectifs pour retrouver une balance énergétique positive (rapport entre l'énergie apportée à la masse durant l'essai et la puissance moyenne récupérée sur l'orbite haute atteinte).

stables  $x_0$  :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{potentielle}}(t) &= \int_0^t F_{\text{ressorts} \rightarrow \text{masse}} \dot{x} dt \\
 &= \int_0^t \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x \dot{x} dt \\
 &= \frac{\omega_0^2}{8} \left( \frac{x^4}{x_0^2} - 2x^2 + x_0^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

La valeur des positions stables change brusquement à deux instants précis (sur-flambement et relâchement) entraînant des incréments d'énergie potentielle. La variation de ces positions stables est obtenue à partir des variations de la tension appliquée au *Piézo de flambement* (relation proportionnelle).

La Figure 4.15 montre que le temps nécessaire pour obtenir une balance énergétique positive après les essais réussis de saut d'orbite est de l'ordre de quelques secondes (de 1 seconde à 12 secondes en fonction des combinaisons amplitude/instant de sur-flambement utilisées). Pour référence, le temps nécessaire pour obtenir une balance énergétique positive lorsque l'essai aboutit à une orbite basse est de 50 secondes pour  $-20$  V et 15,7 minutes pour  $-70$  V. Ce résultat prouve donc que l'énergie utilisée lors d'un essai de saut d'orbite est du même ordre de grandeur que l'énergie récupérée par le générateur bistable sur une orbite haute par seconde (c'est-à-dire, la puissance récupérée) et confirme ainsi la pertinence de la stratégie de saut d'orbite par modification du niveau de flambement qui pourra être auto-alimentée par le générateur.



**Figure 4.16** – Exemple expérimental du bilan énergétique d'un saut sur l'orbite haute sous-harmonique 3 pour une tension de  $-60\text{ V}$  appliquée au Piézo de flambement lorsque que la position de la masse atteint un maximum sur l'orbite basse initiale.

## 4.5 Conclusion

Le modèle théorique exposé dans les chapitres précédents, en parfait accord avec les résultats expérimentaux (confortant ainsi une nouvelle fois la pertinence du critère de robustesse de stabilité), affiche une plage de fréquences continue sur laquelle une orbite haute robuste existe (63 Hz). L'existence d'orbites basses, peu intéressantes pour la récupération d'énergie, sur cette même plage de fréquences, impose néanmoins l'élaboration de stratégies afin de pouvoir sauter de ces orbites basses vers les orbites hautes à chaque fois que cela est nécessaire.

Ces sauts d'orbite, étudiés dans le présent chapitre, sont ainsi obtenus en apportant brièvement de l'énergie à la masse qui sera alors susceptible de se stabiliser sur un comportement de forte amplitude (orbite haute). Ce chapitre s'est ainsi concentré sur les différentes manières d'apporter de l'énergie à la masse en jouant avec les paramètres du générateur bistable. La stratégie la plus prometteuse en terme de faisabilité consiste à modifier le niveau de flambement du générateur bistable à deux reprises : le générateur est d'abord sur-flambé à un instant précis (la masse s'éloigne alors de la position stable et gagne de l'énergie potentielle) puis ce sur-flambement est relâché quand la masse atteint un maximum de déplacement (elle s'éloigne ainsi une nouvelle fois de la position stable et gagne de nouveau de l'énergie potentielle).

L'étude expérimentale de cette stratégie montre de très bons résultats : sur toute la plage de fréquences utile du générateur bistable (ici de 20 Hz à 70 Hz), il est possible de trouver une combinaison d'amplitude et d'instant de sur-flambement qui permet de sauter avec 100 % de chances sur une orbite haute. De plus, ces grandes chances de saut sont conservées pour plusieurs combinaisons d'amplitude et d'instant de sur-flambage ce qui rend cette stratégie relativement tolérante pour sa mise en place en conditions réelles. Elle semble également applicable d'un point de vue technique puisque le niveau de flambement est multiplié par 2,32 au maximum ce qui correspond à une faible diminution (0,073 % dans notre cas) de la longueur séparant la masse de ses points de fixation. Enfin, une étude énergétique a permis d'établir le résultat suivant : le temps nécessaire pour obtenir une balance énergétique positive après un saut d'orbite (temps nécessaire pour récupérer l'énergie dépensée lors du saut) est de l'ordre de quelques secondes

(de 1 seconde à 12 secondes en fonction des combinaisons amplitude/instant de sur-flambement utilisées). Ainsi, le saut d'orbite par modification du niveau de flambement peut être auto-alimenté par le générateur bistable.

La comparaison de cette stratégie avec celles proposées dans la littérature demeure cependant difficile. Les différentes approches présentées au début de ce chapitre n'évaluent pas tous les critères permettant de juger de leur pertinence : grand nombre d'essais expérimentaux sur toute la bande passante du générateur, probabilités de sauts, bilans énergétiques. Il conviendrait donc, dans une analyse future, de compléter ces études afin de pouvoir établir un comparatif hiérarchisant toutes ces approches. De même, il est possible de continuer la réflexion proposée dans ce chapitre en se concentrant sur la réalisation technique du prototype à flambement variable. La solution proposée ici consiste à ajouter un convertisseur piézoélectrique utilisé comme actionneur pour jouer sur la longueur qui sépare la masse de ses points de fixation. Cette solution servant de preuve de concept n'est cependant pas optimale (couplage de l'actionneur, pertes dans son circuit d'alimentation, espace occupé...). Peut-être est-il possible de n'utiliser qu'un seul convertisseur assurant tour à tour le rôle de récupérateur puis celui d'actionneur ou peut-être est-il possible d'imaginer un système mécanique passif permettant de modifier ce niveau de flambement. Une autre piste de réflexion peut également s'attarder sur l'automatisation de cette stratégie pour permettre au générateur de sélectionner la meilleure combinaison amplitude de sur-flambement/instant en fonction des conditions dans lesquelles il se trouve (fréquence de l'excitation), le tout en assurant un bilan énergétique intéressant.

# 5

## Circuit d'interface AC-DC entre le générateur et la charge

*Dans les chapitres précédents, un modèle mathématique a été mis en place, capable de mettre en évidence la réponse fréquentielle du générateur bistable incluant les orbites sous-harmoniques et d'isoler les comportements suffisamment robustes pour la récupération d'énergie. Certains de ces comportements offrent une puissance moyenne récupérée satisfaisante pour l'alimentation de capteurs isolés sans fil (l'orbite haute harmonique 1 et l'orbite haute sous-harmonique 3), d'autres non (les orbites basses). Dans le Chapitre 4, une stratégie a donc été proposée permettant de sauter d'une orbite basse vers une orbite haute en jouant sur le niveau de flambement du générateur. Le bilan de ces chapitres est le suivant : il est maintenant possible de déterminer théoriquement la réponse fréquentielle utile du générateur bistable et d'assurer que tous les comportements intéressants pour la récupération d'énergie soient atteints sur leur plage de fréquences. Toute cette étude a cependant été faite en connectant simplement la charge au générateur (charge considérée comme purement résistive) afin de pouvoir valider le modèle mathématique en cours de construction. Dans cette configuration, la tension vue par la charge est alternative. Les applications visées (capteurs sans fil avec éventuellement un élément de stockage pour compenser un manque momentané de vibration ou un pic de consommation) nécessitent cependant une alimentation à tension continue. Ainsi, le but de ce chapitre est d'étudier l'influence d'un circuit d'interface AC-DC sur les différents comportements du générateur bistable. Pour ce faire, le modèle théorique développé précédemment sera repris, complété puis validé expérimentalement.*



## 5.1 Les circuits d'interface dans la littérature

Plusieurs circuits d'interface AC-DC entre le générateur et la charge ont déjà été proposés par la communauté liée à la récupération d'énergie vibratoire. Ces études ont essentiellement été menées sur des générateurs linéaires à conversion piézoélectrique (le convertisseur piézoélectrique étant le plus prometteur en terme de miniaturisation [26]). Cette section fait le point sur ces différentes solutions en s'appuyant en partie sur les deux articles publiés par Lefeuvre et al. et par Guyomar et al. intitulés *A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems* et *Recent Progress in Piezoelectric Conversion and Energy Harvesting Using Nonlinear Electronic Interfaces and Issues in Small Scale Implementation* [52, 87]. Ces deux publications datent de 2006 et 2011 mais restent toujours d'actualité (un grand nombre de solutions techniques plus avancées, proposées à l'heure actuelle, s'appuient sur les circuits présentés dans ces publications). Dans la suite, la charge est considérée comme purement résistive de résistance  $R$  et doit être alimentée sous une tension continue  $v_{DC}$ .

### Circuit standard

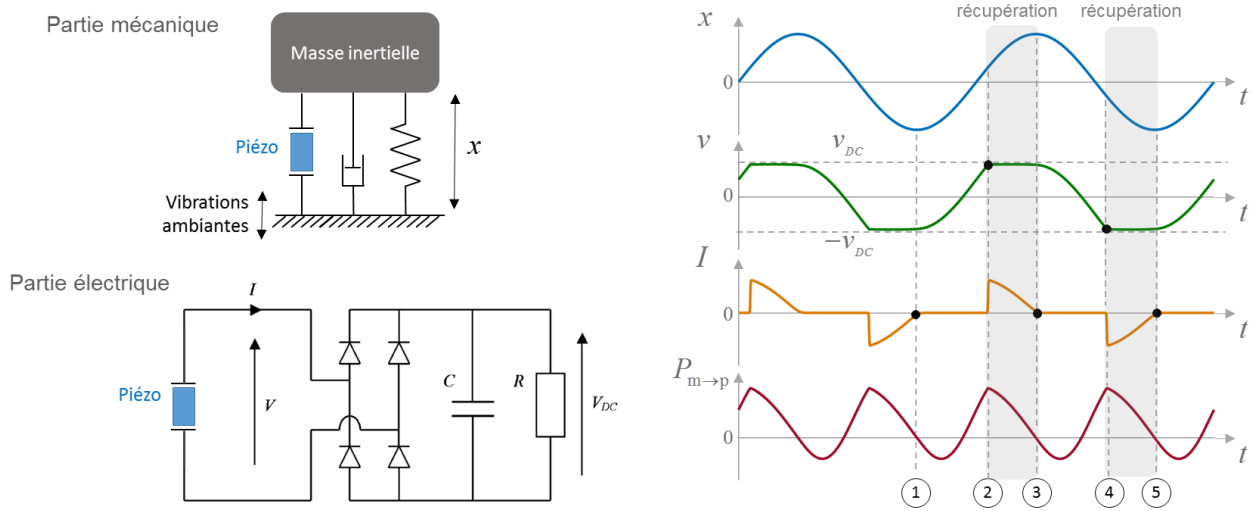
La solution la plus simple et la plus facile à implémenter consiste à utiliser le circuit standard de conversion AC-DC, composé d'un pont redresseur de tension (pont de diodes) et d'une capacité  $C$  permettant de lisser la tension de sortie [88, 89]. Ce circuit et son comportement sont illustrés en Figure 5.1. La capacité de lissage est choisie de façon à ce que la période du circuit  $RC$  soit grande devant la demi-période de la vibration ambiante. Ainsi, en régime permanent, la tension  $v_{DC}$  est considérée comme constante au cours du temps. Les différentes grandeurs tracées sont : la position relative de la masse  $x$ , la tension et l'intensité sortante du convertisseur piézoélectrique  $v$  et  $I$ , la puissance fournie par la masse au convertisseur piézoélectrique  $P_{m \rightarrow p}$ . Cette dernière est calculée à partir des équations régissant le comportement du convertisseur :

$$\begin{cases} F_{p \rightarrow m} = -\alpha v & \text{(partie mécanique)} \\ C_0 \dot{v} = \alpha \dot{x} - I & \text{(partie électrique)} \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec  $\alpha$  et  $C_0$  le facteur de force et la capacité bloquée du convertisseur piézoélectrique. La balance énergétique est alors obtenue en multipliant la partie mécanique par  $\dot{x}$  et en intégrant la partie électrique multipliée par  $v$  :

$$\begin{cases} P_{m \rightarrow p} = \alpha v \dot{x} & \text{(partie mécanique)} \\ \underbrace{1/2 C_0 \dot{v}^2}_{\text{Énergie stockée dans le piézo}} = \underbrace{\int_0^t P_{m \rightarrow p} dt}_{\text{Énergie fournie par la masse}} - \underbrace{\int_0^t v I dt}_{\text{Énergie envoyée vers la charge}} & \text{(partie électrique)} \end{cases} \quad (5.2)$$

À l'étape 1 le pont de diodes est bloqué ( $|v| < v_{DC}$ ). Le convertisseur piézoélectrique est en circuit ouvert ( $I = 0$ ). La tension  $v$  à ses bornes suit donc l'évolution de la position de la masse  $x$  : elle augmente jusqu'à atteindre  $v_{DC}$  (étape 2). Le convertisseur se charge donc jusqu'à une énergie de  $1/2 C_0 v_{DC}^2$ . Le pont de diodes devient alors passant. À partir de cet instant, le convertisseur ne stocke plus d'énergie ( $v$  constant égal à  $v_{DC}$ ) et transfère dorénavant vers la capacité de lissage toute la puissance  $P_{m \rightarrow p}$  qu'il reçoit de la masse ( $I \neq 0$ ). Durant cette phase située entre l'étape 2 et l'étape 3, la masse voit sa vitesse diminuer au cours du temps à mesure qu'elle s'approche de sa position maximale. La puissance qu'elle fournit au convertisseur, bien



**Figure 5.1** – Circuit d'interface standard et son comportement (dessins inspirés de [87]). La grandeur  $P_{m \rightarrow p}$  correspond à la puissance fournie par la masse au convertisseur piézoélectrique. À chaque étape importante, numérotée de 1 à 5, un point noir désigne la grandeur déterminante.

que positive, diminue donc également au cours du temps (voir Équation 5.2) entraînant une diminution du transfert ( $I$  décroît). À l'étape 3, la masse atteint un maximum de déplacement. La puissance qu'elle fournit au convertisseur est nulle, le transfert s'arrête ( $I = 0$ ). Puis la masse commence à descendre et à prendre de l'énergie au convertisseur ( $P_{m \rightarrow p} < 0$ ). La tension  $v$  diminue donc et le pont de diodes se bloque ( $|v| < v_{DC}$ ). Le convertisseur piézoélectrique passe en circuit ouvert ( $I = 0$ ). La tension à ses bornes suit donc l'évolution de la position de la masse : elle décroît jusqu'à atteindre la valeur  $-v_{DC}$  (étape 4). Ainsi, entre ces deux étapes, le convertisseur renvoie d'abord progressivement à la masse toute l'énergie qui n'a pas pu être transférée vers la capacité de lissage ( $1/2C_0v_{DC}^2$ ), puis le convertisseur change de polarité ( $v < 0$ ) et se charge à nouveau jusqu'à  $1/2C_0v_{DC}^2$ . Entre ces deux étapes, la puissance fournie par la masse au convertisseur piézoélectrique est donc tour à tour négative (la masse prend de l'énergie au convertisseur) puis positive (la masse donne de l'énergie au convertisseur). Lorsque la tension atteint  $-v_{DC}$  (étape 4), le pont de diodes devient passant. De la même manière que précédemment, à partir de cet instant, le convertisseur ne stocke plus d'énergie ( $v$  constant égal à  $-v_{DC}$ ) et transfère vers la capacité de lissage toute la puissance  $P_{m \rightarrow p}$  qu'il reçoit de la masse ( $I \neq 0$ ) et ce jusqu'à ce que la masse atteigne un minimum de déplacement (étape 5). La puissance fournie au convertisseur devient nulle, le transfert s'arrête ( $I = 0$ ). Puis la masse commence à monter et commence à prendre de l'énergie au convertisseur ( $P_{m \rightarrow p} < 0$ ). La tension  $v$  diminue en valeur absolue et le pont de diodes se bloque ( $|v| < v_{DC}$ ) et ainsi de suite.

Avec le circuit standard, il y a donc deux phases de récupération d'énergie par période de mouvement de la masse. Elles sont situées entre l'étape 2 et l'étape 3 puis entre l'étape 4 et l'étape 5. En dehors de ces deux phases le convertisseur piézoélectrique est en circuit ouvert, bloqué par le pont de diodes. Pour pouvoir passer ce pont, il doit se charger de la quantité d'énergie  $1/2C_0v_{DC}^2$  alternativement pour  $v$  positif et pour  $v$  négatif. Le passage de l'une à l'autre de ces polarités est obtenue en faisant transiter la quantité d'énergie  $1/2C_0v_{DC}^2$  du convertisseur vers la masse puis de la masse vers le convertisseur. Il y a donc, dans ce type de circuit, une certaine quantité d'énergie réactive qui navigue entre la masse et le convertisseur piézoélectrique sans jamais pouvoir être récupérée (*return phenomenon* [90]). Le problème liée à cette énergie réactive vient des pertes qu'elle engendre à chaque inversion de polarité (pertes mécaniques de frottements). Il faut donc continuellement réinjecter de l'énergie pour compenser ces pertes. Il est à noter que le convertisseur piézoélectrique est directement relié à

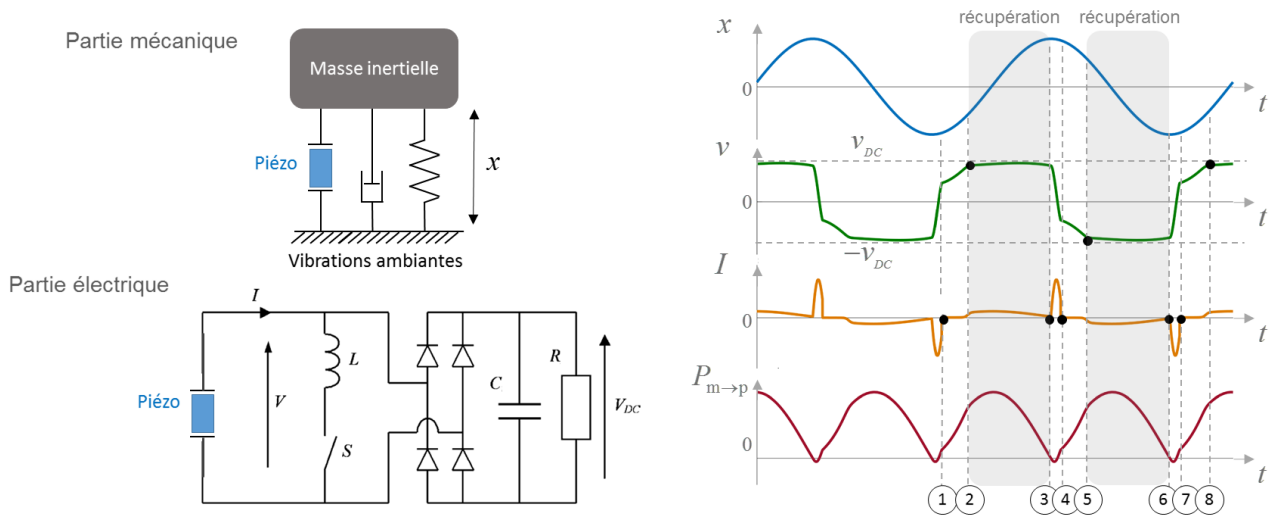
la charge pendant les phases de récupération. L'optimisation de ce type de circuit passe donc par l'optimisation de l'impédance de charge (adaptation d'impédance).

### Circuits SSHI-parallèle

Afin d'obtenir de meilleures performances que celles du circuit d'interface standard, Guyomar et al. ont proposé en 2005 un circuit d'interface non linéaire appelé *Synchronized Switching Harvesting on Inductor* (SSHI) [91]. Ce circuit, illustré en Figure 5.2, est inspiré du *Synchronized Switching Damping on Inductor* (SSDI) développé par Richard et al. dans le cadre de l'amortissement vibratoire de structures mécaniques [50]. Il est composé du circuit standard (pont de diodes et capacité de lissage) auquel est ajouté un couple inductance-interrupteur en parallèle du convertisseur piézoélectrique.

Le principe général est le même que celui du circuit standard : à l'étape 1 le convertisseur piézoélectrique est en circuit ouvert (pont de diodes bloqué et interrupteur ouvert :  $I = 0$ ). La tension suit l'évolution du déplacement de la masse jusqu'à atteindre  $v_{DC}$  (le convertisseur se charge en énergie jusqu'à  $1/2C_0v_{DC}^2$ ). Le pont de diode devient passant (étape 2). À partir de cet instant, l'excédent d'énergie fournie par la masse au convertisseur est directement envoyée à la capacité de lissage ( $v$  constant et  $I \neq 0$ ). Cette phase se termine à l'étape 3 lorsque la masse atteint sa position maximale et qu'elle ne fournit plus d'énergie au convertisseur (vitesse de la masse nulle,  $P_{m \rightarrow p} = 0$  donc  $I = 0$ ). À cet instant (étape 3) la stratégie diffère de celle du circuit standard. Pour le circuit standard, le pont de diodes se bloque et l'énergie contenue dans le convertisseur qui n'a pas pu être transférée à la capacité de lissage ( $1/2C_0v_{DC}^2$ ) est renvoyée vers la masse (énergie réactive : énergie qui s'échange sans pouvoir être récupérée mais qui engendre tout de même des pertes liées aux phénomènes dissipatifs). Pour le circuit SSHI-parallèle, l'interrupteur est commandé pour se fermer à cet instant et permet ainsi au convertisseur de décharger son énergie résiduelle dans l'inductance ( $I$  augmente). Par continuité du courant (inertie de l'inductance relatif au mouvement des électrons), cette dernière se décharge ensuite dans le convertisseur et inverse sa polarité ( $I$  diminue et  $v$  devient négatif). Une fois l'opération terminée ( $I = 0$  : l'inductance est vide), l'interrupteur est commandé pour s'ouvrir (étape 4). Le convertisseur piézoélectrique est donc de nouveau chargé mais avec une tension inversée. Cette tension est légèrement inférieure à  $v_{DC}$  en valeur absolue car une partie de l'énergie s'est dissipée dans la résistance interne de l'inductance et dans l'interrupteur (transistor) lors de l'inversion. À cet instant, le pont de diode est donc bloqué. La tension suit ensuite l'évolution du déplacement de la masse jusqu'à atteindre  $-v_{DC}$  (étape 5). Le pont de diode devient passant. Comme précédemment, à partir de cet instant, l'excédent d'énergie fournie par la masse au convertisseur est directement envoyée à la capacité de lissage ( $v$  constant et  $I \neq 0$ ). Cette phase se termine à l'étape 6 lorsque la masse atteint sa position minimale et qu'elle ne fournit plus d'énergie au convertisseur (vitesse de la masse nulle,  $P_{m \rightarrow p} = 0$  donc  $I = 0$ ). On procède alors à une nouvelle inversion de tension du convertisseur piézoélectrique en commandant l'interrupteur (l'énergie résiduelle  $1/2C_0v_{DC}^2$  est déchargée dans l'inductance puis retournée au convertisseur par continuité du courant). L'interrupteur est alors commandé pour s'ouvrir (étape 7) et le convertisseur se charge en circuit ouvert jusqu'à  $v_{DC}$  (étape 8) et ainsi de suite.

Avec le SSHI-parallèle, il y a aussi deux phases de récupération d'énergie par période de mouvement de la masse. Elles sont situées entre l'étape 2 et l'étape 3 puis entre l'étape 5 et l'étape 6. En dehors de ces deux phases le convertisseur piézoélectrique est découplé de la charge bloqué par le pont de diodes. Pour pouvoir passer ce pont, de la même manière que pour le circuit standard, il doit se charger de la quantité d'énergie  $1/2C_0v_{DC}^2$  alternativement pour  $v$

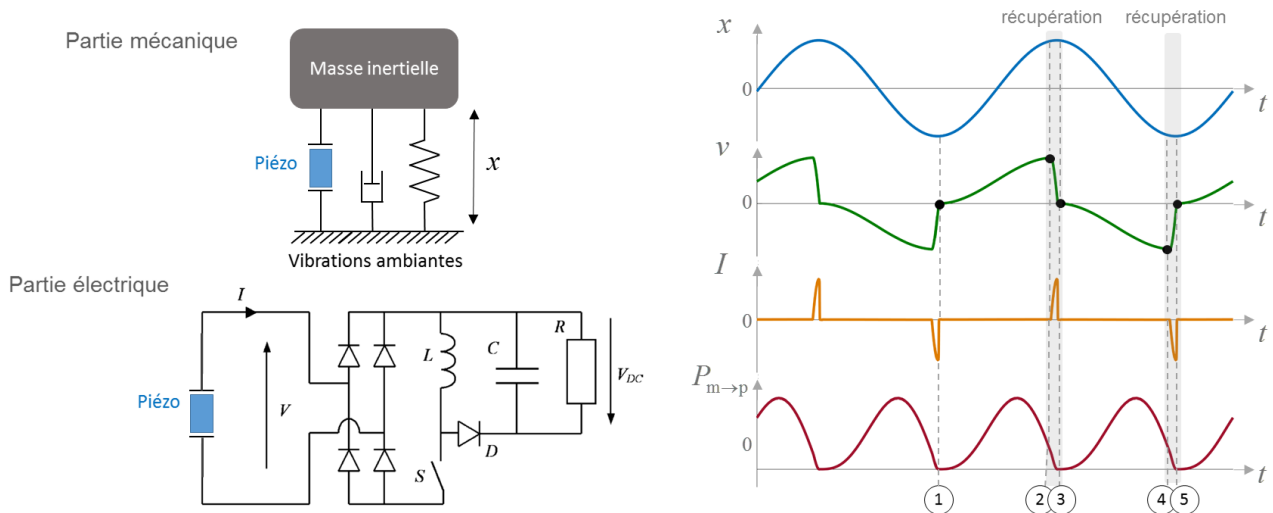


**Figure 5.2** – Circuit d'interface SSHI-parallèle et son comportement (dessins inspirés de [87]). La grandeur  $P_{m \rightarrow p}$  correspond à la puissance fournie par la masse au convertisseur piézoélectrique. À chaque étape importante, numérotée de 1 à 8, un point noir désigne la grandeur déterminante.

positif et pour  $v$  négatif. Contrairement au circuit standard qui faisait transiter cette énergie par la masse lors du changement de polarité du convertisseur, le circuit SSHI-parallèle fait transiter cette énergie par l'inductance en parallèle (en actionnant l'interrupteur). Il y a donc toujours de l'énergie réactive mais elle ne passe plus par la masse ( $P_{m \rightarrow p}$  jamais négatif). Cette énergie réactive ne génère plus de pertes mécaniques pendant l'inversion de tension du convertisseur. Par contre, elle génère maintenant des pertes électriques en passant par l'inductance. L'avantage principal de ce type de circuit vient de sa vitesse d'inversion, bien plus grande que celle du circuit standard (typiquement un dixième de la période d'oscillation de la masse contre un quart pour le circuit standard) ce qui permet d'élever la tension de charge  $v_{DC}$  et donc d'augmenter la puissance moyenne extraite. Il est à noter que le convertisseur piézoélectrique est directement relié à la charge pendant les phases de récupération. L'optimisation de ce type de circuit passe donc, comme pour le circuit standard, par l'optimisation de l'impédance de charge (adaptation d'impédance).

## Circuit SECE

Un autre type de circuit d'interface non linéaire, appelé *Synchronous Electric Charge Extraction* (SECE), a été proposé par Lefeuvre et al. en 2005 [92]. La Figure 5.3 présente son comportement. Le principe est le suivant : à l'étape 1 le convertisseur piézoélectrique est en circuit ouvert (interrupteur ouvert :  $I = 0$ ). La tension suit l'évolution du déplacement de la masse jusqu'à atteindre un maximum (le convertisseur piézoélectrique se charge en énergie). Une fois ce maximum de déplacement (et de tension) atteint, l'interrupteur est commandé pour se fermer (étape 2). Le convertisseur se décharge alors dans l'inductance. Pendant cette phase, la diode  $D$  est bloquée et permet de découpler le convertisseur de la capacité de lissage. Une fois toute l'énergie déchargée ( $v = 0$ ), l'interrupteur est commandé pour s'ouvrir (étape 3). Le convertisseur passe en circuit ouvert tandis que l'inductance se décharge par continuité du courant dans la capacité de lissage (la diode  $D$  devient passante). La tension du convertisseur suit de nouveau l'évolution du déplacement de la masse jusqu'à atteindre un minimum (le convertisseur piézoélectrique se charge en énergie avec une polarité inversée). Une fois ce minimum de déplacement (et de tension) atteint, l'interrupteur est commandé pour se fermer (étape 4). Le convertisseur se décharge de nouveau dans l'inductance puis l'interrupteur est



**Figure 5.3** – Circuit d'interface SECE et son comportement (dessins inspirés de [87]). La grandeur  $P_{m \rightarrow p}$  correspond à la puissance fournie par la masse au convertisseur piézoélectrique. À chaque étape importante, numérotée de 1 à 5, un point noir désigne la grandeur déterminante.

commandé pour s'ouvrir (étape 5). Le convertisseur passe en circuit ouvert tandis que l'inductance se décharge par continuité du courant dans la capacité de lissage et ainsi de suite.

L'idée du circuit SECE est donc de laisser le convertisseur piézoélectrique en circuit ouvert et de le décharger ponctuellement à chaque extremum de tension (ou de déplacement de la masse) dans une inductance. Cette dernière transfère ensuite cette énergie à la capacité de lissage. C'est donc lors de ces décharges qu'a lieu la récupération d'énergie. Il y en a deux par période de mouvement de la masse, situées entre l'étape 2 et l'étape 3 puis entre l'étape 4 et l'étape 5. L'avantage principal de ce type de circuit est le suivant : le convertisseur piézoélectrique est toujours découplé de la capacité de lissage et donc de la charge. Cette particularité est assurée par la diode  $D$  qui se bloque quand l'interrupteur se ferme et conduit quand l'interrupteur s'ouvre. Ce découplage entraîne deux effets bénéfiques : d'abord la charge n'a plus d'influence sur le comportement du générateur. Il n'est donc plus nécessaire de réaliser une quelconque adaptation d'impédance à chaque nouvelle charge à alimenter pour maximiser la quantité d'énergie extraite de la source vibratoire. Ensuite le pont de diode est plus facile à passer avec ce découplage puisque la capacité de lissage n'y est plus directement connectée. Le pont de diode n'est donc plus bloqué pour des tensions inférieure à  $v_{DC}$ . Résultat : l'énergie réactive qui permettait de passer le pont de diode alternativement pour  $v > v_{DC}$  et pour  $v < -v_{DC}$  n'est plus nécessaire. Les pertes qu'elle engendrait (mécaniques pour le circuit standard, électriques pour le circuit SSHI-parallèle) sont supprimées (il reste cependant des pertes liées aux transferts d'énergie dans l'inductance et dans la diode  $D$ ). De plus le circuit SECE travaille sans arrêt contre la masse ( $P_{m \rightarrow p}$  toujours positif). Il passe ainsi tout son temps à récupérer de l'énergie à cette dernière.

## Comparaisons

Dans leur article *A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems* Lefeuvre et al. proposent une étude comparative de quatre circuits d'interface comprenant les trois circuits présentés jusqu'à maintenant [87]. Le quatrième circuit (le SSHI-série) offre des performances très proches du circuit SSHI-parallèle (excepté du point

de vue de la charge optimale) est n'est donc pas détaillé ici. La Figure 5.4 reprend les courbes théoriques publiées dans cette étude. Chacune d'elles donne la puissance moyenne récupérée du générateur linéaire à sa fréquence de résonance en fonction, d'une part, de la résistance de la charge  $R$  et, d'autre part, du coefficient de couplage électromécanique  $k^2$  du générateur linéaire. Ce dernier représente la capacité du générateur à convertir l'énergie mécanique fournie par la source en énergie électrique. Il est défini en circuit ouvert ( $I = 0$ ) pour un régime quasi-statique (l'énergie cinétique de la masse est faible devant son énergie élastique) par l'expression suivante :

$$k^2 = \frac{\text{Énergie électrique stockée dans le convertisseur piézoélectrique}}{\text{Énergie mécanique fournie par la source}} \quad (5.3)$$

$$k^2 = \frac{\alpha^2}{KC_0 + \alpha^2} \quad (5.4)$$

Avec  $\alpha$  et  $C_0$  le facteur de force et la capacité interne et avec  $K$  la raideur du générateur linéaire. Ce coefficient de couplage électromécanique  $k^2$  est lié à la quantité et à la qualité de matériau piézoélectrique présent dans le générateur [87].

La courbe du circuit SECE confirme son principal atout : la puissance moyenne récupérée par le générateur linéaire avec ce circuit ne dépend pas de la charge (découplage à l'aide de l'inductance intermédiaire). Le circuit standard et le circuit SSHI-parallèle ont, eux, un optimum qui dépend de la charge. Afin de mieux pourvoir comparer ces trois circuits, la Figure 5.5 présente, pour chacun d'entre eux, la courbe de puissance moyenne récupérée pour une charge optimale. Cette figure montre que, pour un coefficient de couplage électromécanique faible, le circuit le plus efficace est le circuit SECE suivi par le circuit SSHI-parallèle puis par le circuit

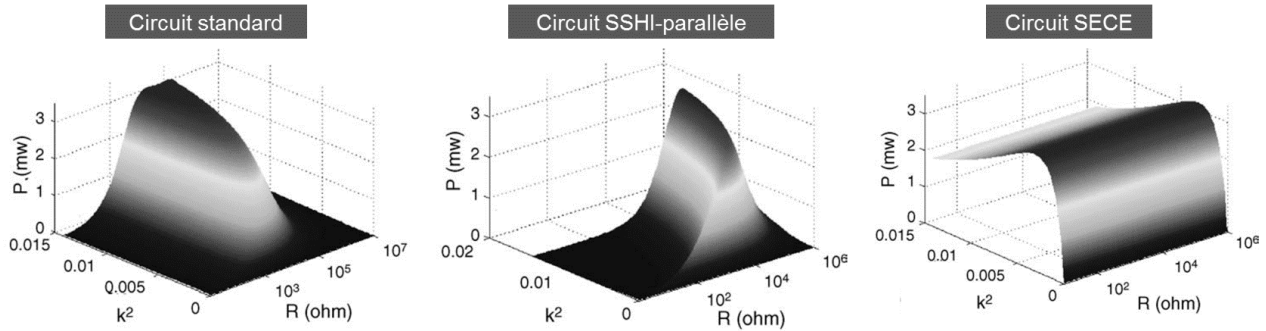


Figure 5.4 – Puissance moyenne récupérée par le générateur linéaire à sa fréquence de résonance en fonction de la résistance de la charge  $R$  et du coefficient de couplage électromécanique  $k^2$  du générateur [87].

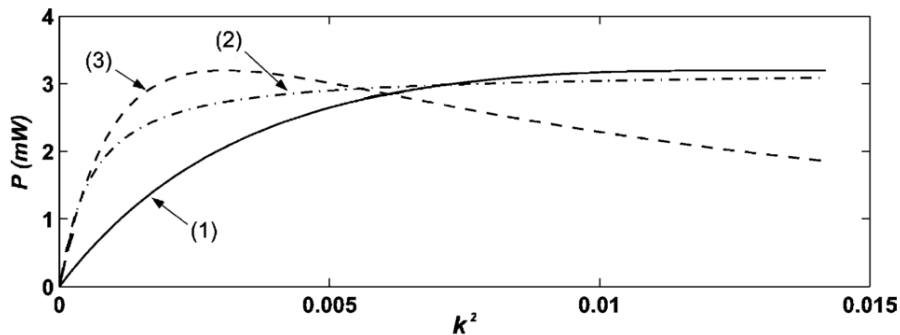


Figure 5.5 – Puissance moyenne récupérée par le générateur linéaire à sa fréquence de résonance pour une charge optimale [87] : (1) circuit standard (2) SSHI-parallèle (3) SECE .

standard. Pour un coefficient de couplage très faible (situation peu visible sur la Figure 5.5) l'ordre des circuit SECE et SSHI-parallèle s'inverse : le circuit SSHI-parallèle devient le circuit le plus efficace. Pour un coefficient de couplage électromécanique fort, le circuit standard et le circuit SSHI-parallèle tendent ensuite vers la même puissance moyenne récupérée alors que l'efficacité du circuit SECE s'effondre. Voici l'explication de cet effondrement. À mesure que le coefficient de couplage augmente, le pourcentage d'énergie mécanique convertie en énergie électrique augmente. Cette énergie électrique étant retirée au générateur, ce dernier s'en trouve de plus en plus amorti (mécaniquement). Ainsi, à mesure que le coefficient de couplage augmente, le pourcentage d'énergie mécanique convertie en énergie électrique augmente mais la quantité d'énergie mécanique fournie par la source diminue. Il y a donc un compromis à trouver entre énergie électrique extraite et énergie mécanique disponible, l'un faisant nécessairement chuter l'autre. Pour le circuit SECE, le compromis optimal est atteint plus tôt que pour les autres circuits. Au-delà, l'énergie électrique extraite est trop grande et amortit trop le système oscillant (l'amortissement "tue" la source).

En conclusion, pour un générateur à fort coefficient de couplage électromécanique, il convient d'utiliser le circuit standard (le plus efficace et le plus facile à implémenter). Pour un générateur à faible coefficient de couplage électromécanique, il convient d'utiliser un circuit d'interface non linéaire type SSHI-parallèle ou SECE. Il est à noter que la plupart des générateurs ont aujourd'hui un coefficient de couplage électromécanique relativement faible à cause des contraintes d'intégration et de prix qui limitent la quantité et la qualité de matériau piézoélectrique embarqué. L'avantage principal du circuit SECE comparé au circuit SSHI-parallèle vient du découplage qu'il propose entre le convertisseur piézoélectrique et la charge. Il ne nécessite donc pas d'adaptation d'impédance particulière à chaque nouvelle charge à alimenter, facilitant ainsi son intégration aux différentes applications visées.

## Autres circuits

De multiples variantes de ces trois circuits principaux (standard, SSHI-parallèle, SECE) ont vu le jour durant les dix dernières années. Le schéma électrique de certains d'entre eux sont présentés en Figure 5.6. Le circuit SSHI-série [87, 93] et le circuit SSHI-MR [94] sont tous les deux dérivés du circuit SSHI-parallèle. Pour le premier, le couple interrupteur-inductance est placé en série avec le convertisseur piézoélectrique afin que l'inversion de tension et la récupération d'énergie se fasse pendant la même phase. Pour le second, le couple interrupteur-inductance est remplacé par deux transformateurs couplés afin de rehausser la tension du convertisseur, de récupérer de l'énergie pendant les phases d'inversion de tension et de s'affranchir du pont de diodes (et donc des tensions de seuils associées). Le circuit OSECE [58] est, lui, inspiré du circuit SECE. Le pont de diodes et l'inductance sont également remplacés par deux transformateurs couplés pour les mêmes raisons. Le circuit *active energy harvesting* [95] et le circuit DSSH [96] couple quant à eux l'approche SECE avec l'approche SSHI. Ces circuits sont étudiés avec plus de détails dans l'article comparatif publié par Guyomar et al. intitulé *Recent Progress in Piezoelectric Conversion and Energy Harvesting Using Nonlinear Electronic Interfaces and Issues in Small Scale Implementation* [52].

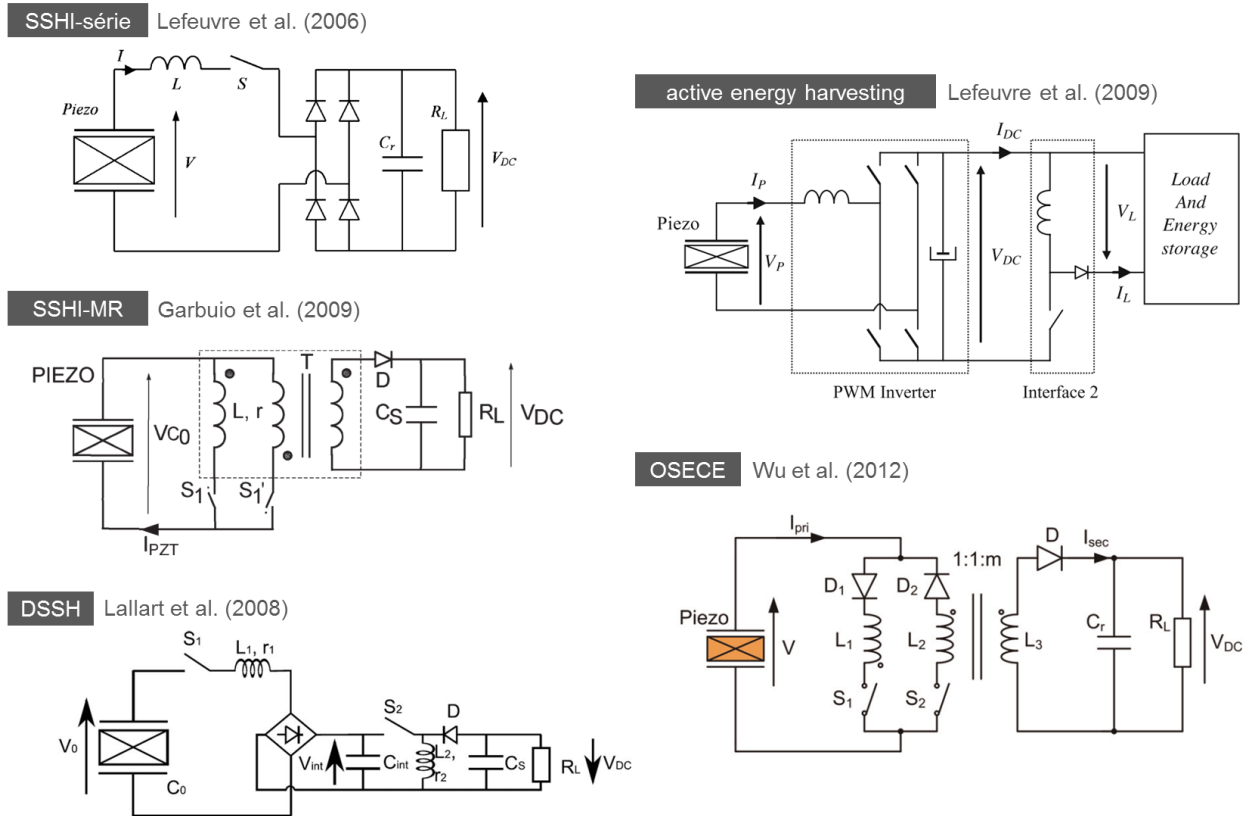


Figure 5.6 – Autres circuits d'interface. De haut en bas puis de gauche à droite : [87], [94], [96], [95], [58].

## Circuits d'interface pour le générateur bistable

Les circuits d'interface présentés jusqu'à maintenant ont presque tous été étudiés avec des générateurs linéaires. Seulement quelques études proposent d'analyser leur influence sur le comportement des générateurs bistables. Liu et al., Chen et al., Alari et al. se sont notamment concentrés sur l'étude numérique et expérimentale du circuit OSECE, SSHI-série et SSHI-parallèle [97–99]. Les résultats sont prometteurs : la puissance récupérée du générateur bistable avec ces circuits est en moyenne deux à trois fois plus grande que celle récupérée avec le circuit standard. Par contre cette augmentation entraîne systématiquement une diminution de la bande passante offerte par ces générateurs même dans le cas de couplages modérés voire faibles.

Afin de mieux appréhender ce compromis entre puissance récupérée et bande passante, ce chapitre propose de reprendre le modèle analytique du générateur bistable développé dans les chapitres précédents en y ajoutant un circuit d'interface non linéaire. Le circuit qui a été choisi pour cette analyse est le circuit SECE qui présente l'avantage d'avoir une efficacité indépendante de la charge. Le schéma électrique, illustré en Figure 5.7, est cependant légèrement différent de celui présenté précédemment. L'idée est toujours d'extraire les charges sur des extrema de tensions du convertisseur piézoélectrique en jouant sur l'ouverture et la fermeture des interrupteurs. Mais contrairement au circuit SECE présenté précédemment, le circuit SECE illustré en Figure 5.7 ne possède pas de pont de diodes. Les diodes réelles (non idéales) limitent en effet l'efficacité du générateur en imposant une tension de seuil avant de devenir passantes. L'interrupteur  $S_1$  est commandé pour se fermer sur un maximum de tension ( $v > 0$ ) jusqu'à décharge complète du convertisseur dans  $L_1$ . L'interrupteur  $S_2$  est commandé pour se fermer sur un minimum de tension ( $v < 0$ ) jusqu'à décharge complète du convertisseur dans  $L_2$ . Les deux inductances  $L_1$  et  $L_2$  se déchargent ensuite respectivement dans les capacités de lissage  $C_1$  et



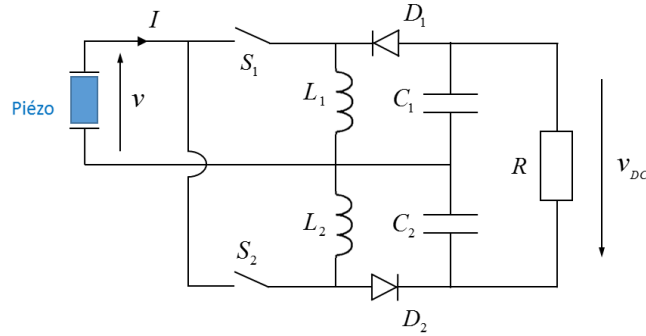


Figure 5.7 – Circuit SECE étudié dans cette thèse couplé au générateur bistable.

$C_2$  qui alimentent la charge de manière continue à la tension  $v_{DC}$ . Les diodes  $D_1$  et  $D_2$  assurent le découplage entre le convertisseur et la charge en se bloquant lorsque  $S_1$  et  $S_2$  sont fermés (plus précisément lorsque l'énergie contenue dans les inductances est totalement transférée aux capacités de lissage).

## 5.2 Modélisation du générateur bistable couplé au circuit SECE

### Mise en équation et résolution analytique

Dans ce chapitre, le générateur bistable considéré est le même que celui présenté au chapitre précédent (prototype 2 de cette thèse). Il s'agit d'un générateur à conversion piézoélectrique dont le principe est rappelé en Figure 5.8. Cette figure présente également le circuit d'interface non linéaire étudié (SECE) ainsi que son comportement. Les capacités de lissage  $C_1$  et  $C_2$  sont choisies de façon à ce que la période du circuit  $RC$  soit grande devant la période de la vibration ambiante. Ainsi, en régime permanent, la tension  $v_{DC}$  est supposée constante au cours du temps. Les interrupteurs sont commandés de façon à décharger le convertisseur piézoélectrique sur des extrema de tension. Ces extrema apparaissent lorsque la déformation du convertisseur change de signe (élongation-compression). Pour le générateur linéaire, ils correspondent aux extrema de déplacement de la masse. Pour le générateur bistable, le maximum d'élongation est atteint pour un extremum de déplacement alors que le maximum de compression est atteint en position  $x = 0$ . Pour le générateur bistable, il y a donc quatre phases de récupération d'énergie par période d'oscillation de la masse (contre deux pour le générateur linéaire).

Le but de cette section est de construire un modèle mathématique qui permette de déterminer la réponse fréquentielle du générateur bistable couplé au circuit SECE. Ce modèle doit ainsi pouvoir isoler tous les comportements possibles en régime permanent de ce système, l'objectif final étant de pouvoir analyser l'influence du circuit SECE sur la puissance récupérée et sur la bande passante du générateur. La suite de cette section reprend le modèle théorique développé d'abord pour le générateur bistable électromagnétique au Chapitre 2 et au Chapitre 3 puis pour le générateur bistable piézoélectrique au Chapitre 4 pour l'étendre au générateur bistable piézoélectrique couplé au circuit SECE. Cette fois-ci, la construction du modèle est présentée de manière plus succincte. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux chapitres précédents. Les équations qui régissent le comportement du générateur bistable piézoélectrique

(obtenues dans le chapitre précédent, Section 4.3) donnent :

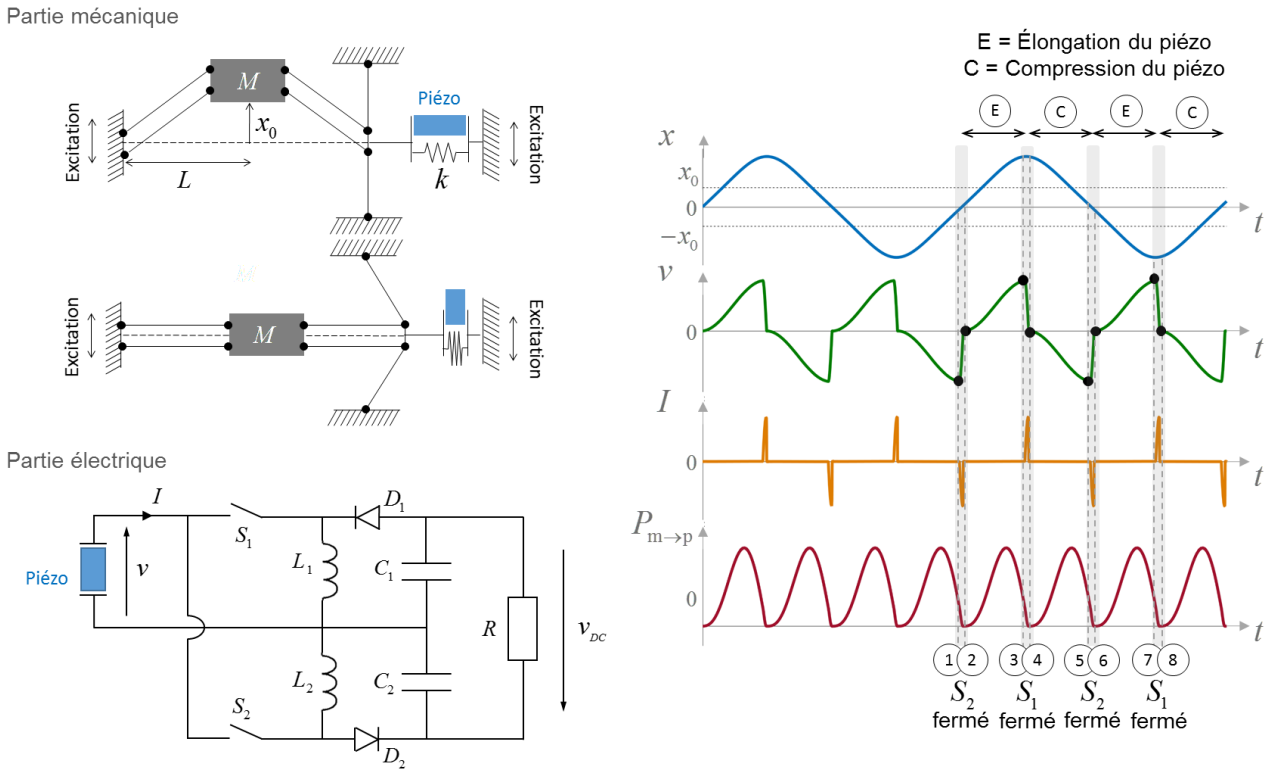
$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{\alpha}{ML} xv = -A \cos(\omega t) \\ C_0 \dot{v} = \frac{2\alpha}{L} x \dot{x} - I \end{cases} \quad (5.5)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{x_0}{L} \sqrt{\frac{2k}{M}} \\ Q = \frac{x_0}{L} \frac{\sqrt{2kM}}{\mu} \end{cases} \quad (5.6)$$

Les grandeurs non représentées sur la Figure 5.8 sont les suivantes. Les constantes  $A$  et  $\omega$  sont respectivement l'amplitude et la pulsation de l'excitation. La variable  $x$  correspond à la position relative de la masse par rapport au support au cours du temps. La constante  $\mu$  représente le coefficient d'amortissement moyen de la masse (amortissement supposé linéaire). Les constantes  $\omega_0$  et  $Q$  sont respectivement la pulsation naturelle et le facteur de qualité mécanique du générateur linéaire équivalent à l'oscillateur bistable obtenu pour de petites oscillations de la masse autour d'une de ses positions d'équilibre ( $x = x_0 + \Delta x$  avec  $\Delta x \ll x_0$ ) [54]. Les constantes  $\alpha$  et  $C_0$  représentent le facteur de force et la capacité bloquée du convertisseur piézoélectrique.

Le circuit SECE doit maintenant être modélisé afin d'obtenir une relation entre  $I$  et  $v$ . Cette modélisation pose cependant problème : le comportement du circuit SECE est régi par



**Figure 5.8** – Schéma et comportement attendu du générateur bistable couplé au circuit d'interface SECE. Le générateur bistable correspond au prototype 2 de cette thèse. Il est représenté dans une de ses deux positions d'équilibre stables  $x = \pm x_0$  et dans sa position d'équilibre instable  $x = 0$ .

une loi définie par morceaux. L'expression de la relation entre  $I$  et  $v$  change en fonction de l'état des interrupteurs et des diodes. Or la méthode de résolution choisie pour isoler les comportements en régime permanent (la balance harmonique) nécessite une loi de comportement unique et valable en tout point de fonctionnement. Pour contourner cette problématique, nous allons modéliser le circuit SECE par une loi reflétant directement son comportement en régime permanent sans passer par les équations électriques. Ce comportement est défini de la manière suivante : (1) le convertisseur est tout le temps en circuit ouvert ; (2) sa tension est remise à zéro périodiquement sur un temps idéalement nul (en pratique négligeable devant la période d'oscillation de la masse). Le signal de tension du convertisseur peut donc être décomposé en deux signaux directement liés au déplacement de la masse comme le montre la Figure 5.9. À noter sur cette figure que les oscillations de la tension du convertisseur piézoélectrique en circuit ouvert ne sont pas nécessairement centrées sur zéro. Pour le générateur bistable, la tension maximale du convertisseur (atteinte pour une élévation maximale de ce dernier de  $x_{\max} - x_0$  avec  $x_{\max}$  pouvant varier de  $1,5x_0$  à  $4x_0$  en fonction du comportement étudié et de la fréquence d'excitation) est en effet rarement égale à sa tension minimale (atteinte pour une compression maximale de  $x_0$ ). Le circuit SECE en régime permanent est donc modélisable par une expression unique valable en tout point de fonctionnement définie par :

$$v_{\text{régime permanent}} = \underbrace{v_{\text{circuit ouvert}}}_{\text{fonction de } x} + \underbrace{\text{Signal carré}}_{\text{fonction de } x} \quad (5.7)$$

Le comportement en régime permanent du générateur bistable couplé au circuit SECE est donc régi par la combinaison de l'Équation (5.5) et de l'Équation (5.7) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{\alpha}{ML} xv = -A \cos(\omega t) \\ v = \underbrace{v_{\text{circuit ouvert}}}_{\text{fonction de } x} + \underbrace{\text{Signal carré}}_{\text{fonction de } x} \end{cases} \quad (5.8)$$

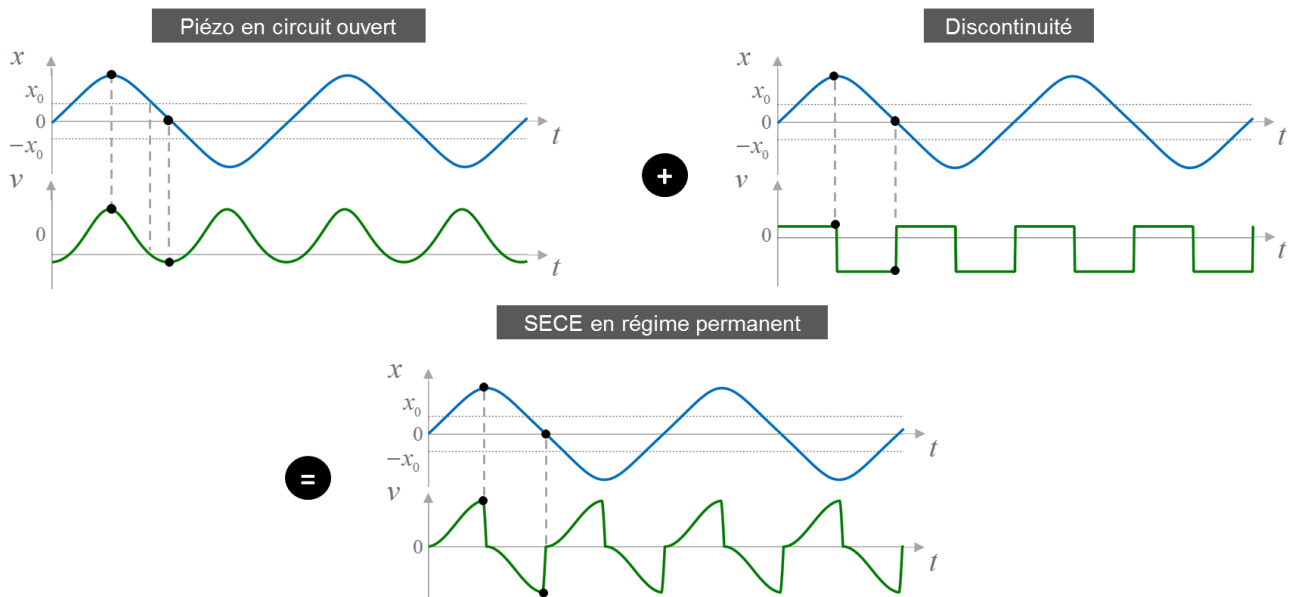


Figure 5.9 – Décomposition de la tension aux bornes du convertisseur piézoélectrique pour un générateur bistable couplé à un circuit SECE en régime permanent.

Cette loi de comportement n'est valable que pour les comportements en régime permanent (limite imposée par l'approche proposée). Il ne reste donc qu'une seule variable inconnue dans ce système : le déplacement de la masse  $x$ . Cette dernière sera recherchée sous la forme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \quad (5.9)$$

Avec  $\omega$  la pulsation de l'excitation et  $n$  l'ordre du comportement sous-harmonique considéré. Avant de pouvoir résoudre ce système d'équations, il convient de trouver l'expression de  $v_{\text{circuit ouvert}}$  et celle du signal carré en fonction de  $x$ . L'Équation (5.5) donne la loi de comportement du convertisseur piézoélectrique en circuit ouvert ( $I = 0$ ) :

$$C_0 \dot{v}_{\text{circuit ouvert}} = \frac{2\alpha}{L} x \dot{x} \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow v_{\text{circuit ouvert}} = \frac{\alpha}{C_0 L} (x^2 - x_0^2) \quad (5.11)$$

La constante après intégration temporelle a été choisie de façon à ce que la tension soit nulle pour  $x = x_0$ . Le signal carré est lui décomposé en série de Fourier. Son amplitude notée  $\Theta_{\text{sc}}$  et sa fréquence doivent être égales à celles de la tension en circuit ouvert, sa valeur moyenne notée  $o_{\text{sc}}$  égale en valeur absolue à celle de la tension en circuit ouvert (mais de signe opposé). Le signal carré s'écrit donc :

$$\text{Signal carré} = o_{\text{sc}} + \Theta_{\text{sc}} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left( (2k+1) \left( \frac{2\omega}{n} t + \phi \right) \right) \quad (5.12)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{sc}} &= \frac{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2C_0 L} \left( (|x|_{\text{max}}^2 - x_0^2) - (|x|_{\text{min}}^2 - x_0^2) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2C_0 L} \left( |x|_{\text{max}}^2 - |x|_{\text{min}}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Et :

$$\begin{aligned} o_{\text{sc}} &= - \left( v_{\text{min}} + \frac{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}{2} \right) \\ &= - \frac{\alpha}{C_0 L} \left( |x|_{\text{min}}^2 - x_0^2 \right) - \frac{\alpha}{2C_0 L} \left( |x|_{\text{max}}^2 - |x|_{\text{min}}^2 \right) \\ &= \frac{\alpha}{2C_0 L} \left( 2x_0^2 - |x|_{\text{max}}^2 - |x|_{\text{min}}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dans ces équations, la valeur de  $|x|_{\text{min}}$  dépend du type d'orbite considérée comme le montre la Figure 5.10. Pour une orbite haute  $|x|_{\text{min}} = 0$  ce qui n'est pas le cas pour une orbite basse. La grandeur  $\phi$  dans l'expression du signal carré reste à déterminer. Quand la masse atteint un maximum la partie alternative du signal carré descend et vaut zéro comme le montre la Figure 5.9. Ainsi, quand la masse atteint un maximum, la phase du signal carré doit être égale à  $\pi$  (afin que les sinus soient tous nuls et de dérivées négatives). La grandeur  $\phi$  peut donc être

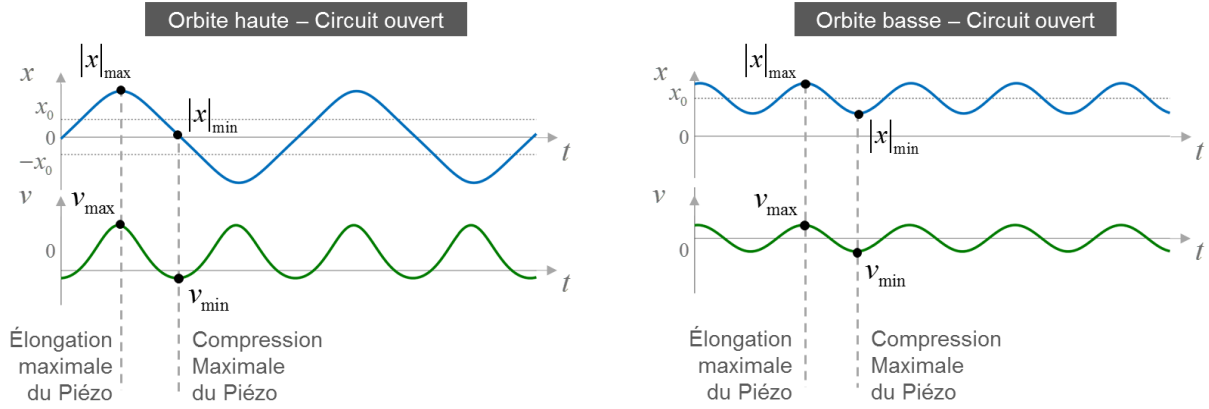


Figure 5.10 – Valeur de  $|x|_{\min}$ ,  $|x|_{\max}$ ,  $v_{\min}$  et  $v_{\max}$  en fonction de l'orbite étudiée.

déterminée en connaissant les instants où la position de la masse atteint un maximum. Afin de simplifier le raisonnement, ces instants sont calculés par la suite en considérant que l'expression du déplacement de la masse peut être approchée par sa composante harmonique fondamentale. Pour être plus précis, l'hypothèse consiste à dire que l'instant où la position de la masse atteint un maximum est le même que l'instant où la composante fondamentale du déplacement de la masse atteint un maximum. Cette hypothèse est illustrée en Figure 5.11 sur quelques exemples. La composante fondamentale du déplacement de la masse s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_{\text{fondamentale}}(t) &= a_1 \cos\left(\frac{\omega}{n}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin\left(\frac{\omega}{n}t + \psi\right) \quad \text{avec} \quad \psi = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \pi \quad (\text{si } b_1 < 0) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Soit  $t_1$  l'instant où la masse atteint un maximum :

$$[\text{Phase du déplacement de la masse en } t_1] = \frac{\omega}{n}t_1 + \psi = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow t_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \frac{n}{\omega} \pmod{2\pi \frac{n}{\omega}} \quad (5.17)$$

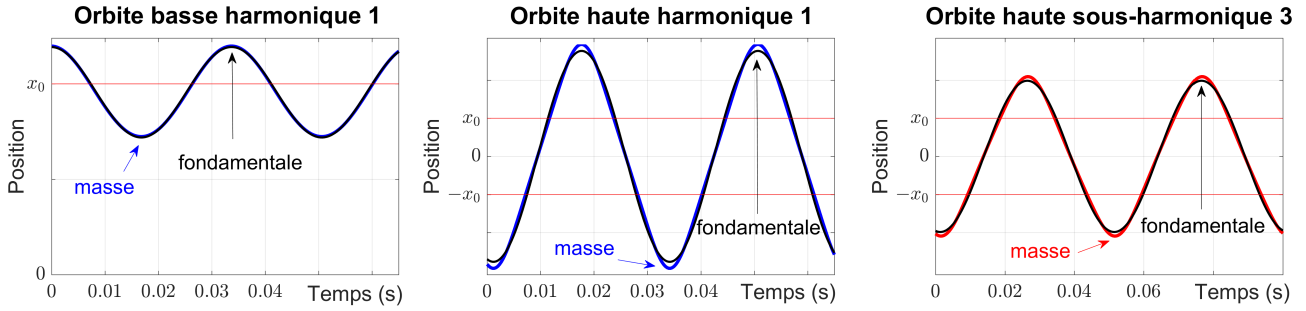
La phase de la composante fondamentale du signal carré doit valoir  $\pi$  en  $t_1$  :

$$[\text{Phase du signal carré en } t_1] = \frac{2\omega}{n}t_1 + \phi \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi &= \frac{2\omega}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \frac{n}{\omega} + \phi \pmod{\left[\frac{2\omega}{n} \left(2\pi \frac{n}{\omega}\right)\right]} \\ &= \pi - 2\psi + \phi \pmod{4\pi} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\Rightarrow \phi = 2\psi \pmod{4\pi} \quad (5.20)$$

Le signal carré est ainsi entièrement déterminé en fonction des caractéristiques du déplacement de la masse  $x$ . Le modèle général du comportement en régime permanent du générateur bistable



**Figure 5.11** – Différence entre le signal du déplacement de la masse (polychromatique) et la signal de sa composante harmonique fondamentale (étude numérique). L'orbite basse et l'orbite haute harmonique 1 sont excitées à 30 Hz. L'orbite haute sous-harmonique 3 est excitée à 60 Hz.

couplé au circuit SECE devient donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{\alpha}{ML} xv = -A \cos(\omega t) \\ v = \frac{\alpha}{C_0 L} (x^2 - x_0^2) + o_{sc} + \Theta_{sc} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N_{bis}} \frac{1}{2k+1} \sin \left( (2k+1) \left( \frac{2\omega}{n} t + 2\psi \right) \right) \end{cases} \quad (5.21)$$

Avec :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) + b_k \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \quad (5.22)$$

Et :

$$\begin{cases} \Theta_{sc} = \frac{\alpha}{2C_0 L} (|x|_{\max}^2 - |x|_{\min}^2) \\ o_{sc} = \frac{\alpha}{2C_0 L} (2x_0^2 - |x|_{\max}^2 - |x|_{\min}^2) \\ \psi = \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{b_1} \right) + \pi \text{ (si } b_1 < 0) \\ |x|_{\max} = |a_0| + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ |x|_{\min} = |a_0| - \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{ (orbite basse) ou } |x|_{\min} = 0 \text{ (orbite haute)} \end{cases} \quad (5.23)$$

Ici, les valeurs de  $|x|_{\min}$  et  $|x|_{\max}$ , utilisées pour définir l'amplitude et la constante du signal carré, sont calculées en considérant également que l'expression du déplacement de la masse peut être approchée par sa composante harmonique fondamentale (voir Figure 5.11). De la même manière que la solution recherchée, la série de Fourier du signal carré est tronquée à un certain ordre noté  $N_{bis}$ . Pour la solution recherchée, les pulsations supérieures à  $N\omega/n$  sont considérées comme négligeables. Les pulsations supérieures à  $N\omega/n$  dans la série de Fourier du signal carré sont donc également considérées comme négligeables :

$$(2N_{bis} + 1) \frac{2\omega}{n} = N \frac{\omega}{n} \quad (5.24)$$

$$\Rightarrow N = 4N_{bis} + 2 \quad (5.25)$$

Dans les résolutions qui vont suivre (méthode de la balance harmonique), le nombre d'harmoniques du signal carré sera dans un premier temps fixé à  $N_{\text{bis}} = 10$ . Le nombre d'harmoniques prises en compte dans la solution recherchée sera donc de  $N = 42$ .

Afin de pouvoir résoudre le système mis en place, l'Équation (5.21) est combinée en une seule équation dépendante de  $x$  puis couplée avec l'Équation (5.22). Le terme au cube est développé à l'aide de la formule du multinôme de Newton. Tous les produits de sinus et cosinus et tous les termes sinus et cosinus élevés à un certain exposant sont développés. Le résultat est détaillé en Équation (5.26). À noter que la constante  $b_0$  est une constante artificielle qui a été ajoutée dans l'Équation (5.26) afin d'en simplifier la notation. Cette constante est nulle ( $b_0 = 0$ ). À noter également que la deuxième somme se fait sur toutes les combinaisons possibles des trois variables ( $i, k, s$ ), chacune prise dans l'ensemble des entiers naturels allant de 0 à  $N$ . La troisième somme se fait, elle, sur toutes les combinaisons possibles des deux variables ( $k, j$ ) avec  $k$  prise dans l'ensemble des entiers naturels allant de 0 à  $N$  et  $j$  prise dans l'ensemble des entiers naturels allant de 0 à  $N_{\text{bis}}$ .

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in [0, N]} \left\{ \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 a_k + \left( \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_0^2}{C_0 M L^2} - \frac{\alpha}{M L} o_{\text{sc}} \right) a_k - \frac{\omega_0}{Q} k \frac{\omega}{n} b_k \right] \cos \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \left( k \frac{\omega}{n} \right)^2 b_k + \left( \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_0^2}{C_0 M L^2} - \frac{\alpha}{M L} o_{\text{sc}} \right) b_k + \frac{\omega_0}{Q} k \frac{\omega}{n} a_k \right] \sin \left( k \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
 - & \sum_{(i, k, s) \in [0, N]^3} \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_0^2}{2 x_0^2} + \frac{\alpha^2}{C_0 M L^2} \right) \left\{ (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s - b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i + k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s + b_i a_k b_s - b_i b_k a_s) \cos \left( (i + k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (a_i a_k a_s + a_i b_k b_s - b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i - k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (a_i a_k a_s - a_i b_k b_s + b_i a_k b_s + b_i b_k a_s) \cos \left( (i - k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s + a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i + k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s + a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i + k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + (b_i a_k a_s + a_i a_k b_s - a_i b_k a_s + b_i b_k b_s) \sin \left( (i - k + s) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad \left. + (b_i a_k a_s - a_i a_k b_s - a_i b_k a_s - b_i b_k b_s) \sin \left( (i - k - s) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
 - & \sum_{\substack{k \in [0, N] \\ j \in [0, N_{\text{bis}}]}} \Theta_{\text{sc}} \frac{4\alpha}{\pi M L} \left\{ \frac{1}{4j + 2} \left[ a_k \sin \left( (4j + 2)\psi \right) - b_k \cos \left( (4j + 2)\psi \right) \right] \cos \left( (k + 4j + 2) \frac{\omega}{n} t \right) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{4j + 2} \left[ a_k \sin \left( (4j + 2)\psi \right) + b_k \cos \left( (4j + 2)\psi \right) \right] \cos \left( (k - 4j - 2) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad + \frac{1}{4j + 2} \left[ a_k \cos \left( (4j + 2)\psi \right) + b_k \sin \left( (4j + 2)\psi \right) \right] \sin \left( (4j + 2 + k) \frac{\omega}{n} t \right) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4j + 2} \left[ a_k \cos \left( (4j + 2)\psi \right) - b_k \sin \left( (4j + 2)\psi \right) \right] \sin \left( (k - 4j - 2) \frac{\omega}{n} t \right) \right\} \\
 & \quad - A \cos(\omega t) = 0 \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Les termes qui composent l'Équation (5.26) représentent les différentes forces périodiques (mécaniques et électromécaniques) qui agissent sur la masse. L'équation décrit, elle, la façon dont ces forces s'équilibrent à chaque instant. La forme de la réponse recherchée en régime permanent est une série de Fourier tronquée dont les termes harmoniques supérieurs à  $N\omega/n$  sont considérés comme négligeables devant les autres termes. De la même façon, les termes de force de l'Équation (5.26) dont la pulsation excède  $N\omega/n$  sont aussi considérés comme négligeables devant les autres termes. Seuls  $2N+1$  termes de force restent finalement dans l'Équation (5.26) : un terme constant,  $N$  termes sinus et  $N$  termes cosinus. La méthode de la balance harmonique est alors utilisée : les  $2N+1$  termes restant ont tous des pulsations et/ou des phases différentes et leur somme est nulle, ainsi chacun d'eux est considéré comme nul. Cette méthode aboutit à un système non linéaire soluble de  $2N+1$  équations et  $2N+1$  inconnues ( $a_0, a_k, b_k$ ) avec  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Les solutions de ce système, toutes définies par un jeu unique ( $a_{s0}, a_{sk}, b_{sk}$ ) avec  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , sont les comportements en régime permanent sous-harmoniques  $n$  du générateur bistable couplé au circuit SECE pour une excitation  $A \cos(\omega t)$  :

$$\begin{cases} x_s(t) = a_{s0} + \sum_{k=1}^N \left\{ a_{sk} \cos\left(k\frac{\omega}{n}t\right) + b_{sk} \sin\left(k\frac{\omega}{n}t\right) \right\} \\ v_s(t) = \frac{\alpha}{C_0L}(x_s(t)^2 - x_0^2) + o_{sc} + \Theta_{sc} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N_{\text{bis}}} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\left(\frac{2\omega}{n}t + 2\psi\right)\right) \end{cases} \quad (5.27)$$

Pour obtenir la réponse fréquentielle complète, l'Équation (5.26) est résolue de cette manière pour plusieurs fréquences d'excitation et pour plusieurs valeurs de  $n$ .

### Étude de stabilité aux petites perturbations

La stabilité aux petites perturbations est ensuite évaluée pour tous les comportements en régime permanent  $x_s$ , solutions de l'Équation (5.21). La méthode utilisée est la même que celle présentée au Chapitre 2, Section 2.5 en ajoutant l'influence du circuit SECE. Une petite perturbation  $z$  est ajoutée au comportement étudié sous forme d'impulsion à l'instant  $t = t_0$  :

$$x(t) = x_s(t) + z(t) \quad \text{avec} \quad \|z(t)\| \ll \|x_s(t)\| \quad \text{et} \quad \text{impulsion} = \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

La solution  $x_s$  est stable aux petites perturbations si et seulement si  $z$  tend vers 0. L'Équation (5.28) est introduite dans l'Équation (5.21) régissant le comportement du générateur bistable couplé au circuit SECE puis linéarisée par rapport à  $z$  pour donner l'équation différentielle suivante, régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & -\frac{\omega_0}{Q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$



Avec :

$$* = \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_0^2}{C_0 M L^2} - \left( \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{3\alpha^2}{C_0 M L^2} \right) x_s(t)^2 - \frac{\alpha}{M L} \left( o_{sc} + \Theta_{sc} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N_{bis}} \frac{1}{2k+1} \sin \left( (2k+1) \left( \frac{2\omega}{n} t + 2\psi \right) \right) \right) \quad (5.31)$$

Le matrice  $\underline{\underline{M}}(t)$  est périodique de période  $T = 2\pi n/\omega$ . La matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$  de l'Équation (5.30) est alors introduite. Par définition, elle donne la relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{\underline{M}}(t) \underline{\underline{R}}(t, t_0) \\ \underline{\underline{R}}(t+T, t_0+T) = \underline{\underline{R}}(t, t_0) \end{cases} \quad (5.32)$$

La matrice résolvante peut être calculée à chaque instant  $t$  en intégrant numériquement l'Équation (5.30) de  $t_0$  à  $t$  à deux reprises :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \dot{z}_1(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{l'Équation (5.30) de } t_0 \text{ à } t]{\text{intégration numérique de}} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_2(t_0) \\ \dot{z}_2(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{l'Équation (5.30) de } t_0 \text{ à } t]{\text{intégration numérique de}} \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(t, t_0) = \left[ \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} \right] \quad (5.33)$$

Cette matrice résolvante détermine entièrement la convergence ou la divergence de la perturbation. L'étude de stabilité de la solution en régime permanent  $x_s$  est donc ramenée à l'étude de convergence de la matrice résolvante  $\underline{\underline{R}}(t, t_0)$ . Or  $\underline{\underline{M}}(t)$  est périodique de période  $T$  donc la théorie de Floquet s'applique [69]. Ainsi, il existe une matrice indépendante du temps  $\underline{\underline{B}}$  et une matrice  $2T$  périodique  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  telles que :

$$\underline{\underline{R}}(t, t_0) = \underline{\underline{Q}}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\underline{\underline{B}}} \quad (5.34)$$

Comme  $\underline{\underline{Q}}(t, t_0)$  est périodique, la convergence de la matrice résolvante est entièrement définie par le signe des valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$ . Or cette dernière est directement liée à la matrice résolvante évaluée en  $t = 2T$  et  $t_0 = 0$  :

$$\underline{\underline{R}}(2T, 0) = e^{-2T\underline{\underline{B}}} \quad (5.35)$$

Ainsi, la stabilité de la solution en régime permanent est déterminée par le module des valeurs propres  $(\beta_1, \beta_2)$  de la matrice  $\underline{\underline{R}}(2T, 0)$  :

$$x_s \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta_1| < 1 \\ |\beta_2| < 1 \end{cases} \quad (5.36)$$

## Robustesse de stabilité

La robustesse de stabilité de tous les comportements définis comme stables aux petites perturbations est évaluée en leur injectant une impulsion  $\Lambda$  plus grande. La méthode utilisée est la même que celle présentée au Chapitre 3, Section 3.2 en ajoutant l'influence du circuit SECE.

$$x(t) = x_s(t) + z(t) \quad \text{et} \quad \text{impulsion} = \begin{pmatrix} z(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Le robustesse de stabilité est alors définie par le rapport entre d'une part l'énergie minimale que doit avoir cette impulsion pour rendre les comportements instables et d'autre part la quantité d'énergie moyenne apportée par l'excitation pendant une période (valeur normative) :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2}M\Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T MA \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \quad (5.38)$$

La suite montre comment déterminer l'impulsion minimale  $|\Lambda_{\min}|$  conduisant à l'instabilité du comportement étudié. La méthode résumée ici est expliquée avec plus de détails au Chapitre 3, Section 3.2. L'Équation (5.37) est introduite dans l'Équation (5.21) régissant le comportement du générateur bistable couplé au circuit SECE pour obtenir l'équation différentielle régissant le comportement de la perturbation :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{M}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{\alpha^2}{C_0ML^2}\right) (3x_s(t)z(t)^2 + z(t)^3) \end{pmatrix}}_{\text{terme non linéaire}} \quad (5.39)$$

La matrice  $\underline{M}(t)$  est identique à celle obtenue lors de l'étude aux petites perturbations (voir Équation (5.30)). La matrice résolvante  $\underline{R}(t, t_0)$  du terme linéaire, identique à celle de l'étude aux petites perturbations, est alors introduite pour obtenir une relation entre la perturbation à l'instant  $t$  et la perturbation initiale à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underline{R}(t, t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \underline{R}(t, s) \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{\alpha^2}{C_0ML^2}\right) (3x_s(s)z(s)^2 + z(s)^3) \end{pmatrix} ds \quad (5.40)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{M}(t)\underline{R}(t, t_0) \\ \underline{R}(t+T, t_0+T) = \underline{R}(t, t_0) \\ \underline{R}(t, t_0) = \underline{Q}(t, t_0)e^{-(t-t_0)\underline{B}} \end{cases} \quad (5.41)$$

Pour rappel : (i) la matrice  $\underline{B}$  est indépendante du temps ; (ii) la matrice  $\underline{Q}(t, t_0)$  est  $2T$  périodique ; (iii) la matrice résolvante est calculable numériquement à tout instant  $t$  en utilisant la méthode détaillée en Équation (5.33).

Le comportement étudié est stable aux petites perturbations donc les deux valeurs propres ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) de la matrice  $\underline{B}$  ont des parties réelles positives. On note  $\lambda$  la valeur minimale des parties réelles de ces deux valeurs propres. La valeur limite  $|\Lambda_{\min}|$  est alors déterminée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Soit  $H$  l'hypothèse suivante :

$$H = \forall \delta > 0, \exists \tau \geq t_0 : \underbrace{\left( \forall t \in [t_0, \tau], |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \right)}_{H1} \cap \underbrace{\left( \forall t \in ]\tau, +\infty[, |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \right)}_{H2} \quad (5.42)$$

Ainsi,  $H$  vraie implique que la perturbation  $z$  tend vers l'infini et donc que le comportement étudié est instable pour l'impulsion  $\Lambda$ . La négation de l'hypothèse  $H$  est :

$$\bar{H} = \exists \delta > 0 : \forall \tau \geq t_0, \underbrace{\left( \exists t \in [t_0, \tau] : |z(t)| > \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \right)}_{H3} \cup \underbrace{\left( \exists t \in ]\tau, +\infty[ : |z(t)| \leq \delta e^{-\lambda(t-t_0)} \right)}_{H4} \quad (5.43)$$

En  $t_0$ , la perturbation est supposée être un ajout de vitesse pure. Ainsi  $z(t_0) = 0$  comme indiqué en Équation (5.37). Ceci implique que l'hypothèse  $H3$  est toujours fausse pour  $\tau = t_0$ . Ainsi,  $\bar{H}$  vraie implique  $H4$  vraie ce qui signifie que le comportement étudié est stable pour l'impulsion  $\Lambda$ . Dans la suite, l'hypothèse  $H$  est considérée comme vraie. Le but sera alors de trouver l'impulsion minimale  $|\Lambda_{\min}|$  à partir de laquelle cette hypothèse n'est plus valable. Ce  $|\Lambda_{\min}|$  sera alors l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement étudié.

La valeur du déplacement de la perturbation  $z$  en  $t = \tau$  est donnée par l'hypothèse  $H$  et par l'Équation (5.40) :

$$\delta e^{-\lambda(\tau-t_0)} = \left| \Lambda \left[ \underline{R}(\tau, t_0) \right]_{(1,2)} + \int_{t_0}^{\tau} \left[ \underline{R}(\tau, s) \right]_{(1,2)} \left( \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{\alpha^2}{C_0 M L^2} \right) \left( 3x_s(t)z(t)^2 + z(t)^3 \right) ds \right| \quad (5.44)$$

À noter que seule la composante (1, 2) de la matrice résolvante apparaît ici. L'idée est maintenant de majorer le terme de droite de cette équation. Pour cela, il convient d'abord de majorer les termes de la matrice résolvante :

$$\underline{R}(t, t_0) = \underline{Q}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\underline{B}} \quad (5.45)$$

Comme la solution étudiée est stable aux petites perturbations, les termes de la matrice  $e^{-(t-t_0)\underline{B}}$  sont tous contenus dans une enveloppe exponentielle décroissante de coefficient  $\lambda$  (valeur minimale des parties réelles des deux valeurs propres de  $\underline{B}$ ). De plus, comme  $\underline{Q}(t, t_0)$  est  $2T$  périodique, alors chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{R}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparaît dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + 2T]$ . De plus, la matrice résolvante vérifie :

$$\underline{R}(t + T, t_0 + T) = \underline{R}(t, t_0) \quad (5.46)$$

Ainsi chaque composante de la matrice  $e^{\lambda(t-t_0)}\underline{R}(t, t_0)$  admet un maximum qui apparaît dans  $(t, t_0) \in [t_0, t_0 + 2T] \times [0, T]$ . La matrice composée des maxima de chaque composante de

$e^{\lambda(t-t_0)} \underline{\underline{R}}(t, t_0)$  est appelée  $\underline{\underline{C}}$ . Elle est indépendante du temps et indépendante de l'instant initial  $t_0$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2, [\underline{\underline{C}}]_{(i,j)} = \max_{\substack{t_0 \in [0, T] \\ t \in [t_0, t_0 + 2T]}} \left| e^{\lambda(t-t_0)} [\underline{\underline{R}}(t, t_0)]_{(i,j)} \right| \quad (5.47)$$

La majoration de la matrice résolvante devient donc possible :

$$\forall (t, t_0), \forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2, [\underline{\underline{R}}(t, t_0)]_{(i,j)} \leq e^{-\lambda(t-t_0)} [\underline{\underline{C}}]_{(i,j)} \quad (5.48)$$

Le terme de droite de l'Équation (5.40) est donc maintenant majorable à l'aide de l'Équation (5.48) et de l'hypothèse  $H1$ . Après simplification de cette majoration, il vient une inégalité indépendante de  $\tau$  et de  $t_0$  (pour plus de détail sur la majoration et sa simplification, le lecteur pourra consulter le Chapitre 3, Section 3.2) :

$$\forall \delta > 0, \quad 0 \leq \underbrace{C - \delta + B\delta^2 + D\delta^3}_{f(\delta, \Lambda)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{\alpha^2}{C_0ML^2} \right) [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} \\ B = \left( \frac{3\omega_0^2}{2x_0^2} + \frac{3\alpha^2}{C_0ML^2} \right) [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} \max_{t_0 \in [0, T]} |\Psi| \\ C = \Lambda [\underline{\underline{C}}]_{(1,2)} \end{cases} \quad (5.49)$$

Où  $\Psi$  est une constante indépendante de  $\tau$  définie par :

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{k=1}^N \frac{a_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \cos(\omega_k t_0) - \omega_k \sin(\omega_k t_0)) \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{b_{sk}}{\lambda^2 + \omega_k^2} (\lambda \sin(\omega_k t_0) + \omega_k \cos(\omega_k t_0)) \end{aligned} \quad (5.50)$$

La constante  $\omega_k = k\omega/n$  représente ici la pulsation de l'harmonique  $k$  du comportement sous-harmonique  $n$  étudié. La fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est un polynôme de degré trois par rapport à  $\delta$ . Elle admet donc un seul minimum pour  $\delta > 0$ . Ce minimum est atteint en  $\delta_0$  :

$$\delta_0 = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 3D}}{3D} \quad (5.51)$$

Pour un  $\Lambda$  donné, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est positif alors la fonction  $f(\delta, \Lambda)$  est toujours positive quelque soit  $\delta > 0$  donc l'Équation (5.49) est toujours vérifiée. Par contre, si  $f(\delta_0, \Lambda)$  est négatif alors l'Équation (5.49) n'est plus vérifiée quelque soit  $\delta > 0$  donc l'hypothèse  $H$  devient fausse sous cette condition. La limite entre solution stable et solution instable est par conséquent atteinte pour une impulsion  $\Lambda_{\min}$  vérifiant  $f(\delta_0, \Lambda_{\min}) = 0$ .

Le critère de robustesse de stabilité devient ainsi :

$$\text{Robustesse} = \frac{\frac{1}{2} M \Lambda_{\min}^2}{E_{\text{excitation}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_{\text{excitation}} = -\frac{1}{n} \int_0^T M A \cos(\omega t) \dot{x}_s dt \\ \Lambda_{\min} = \frac{\delta_0 - B\delta_0^2 - D\delta_0^3}{[\underline{C}]_{(1,2)}} \end{cases} \quad (5.52)$$

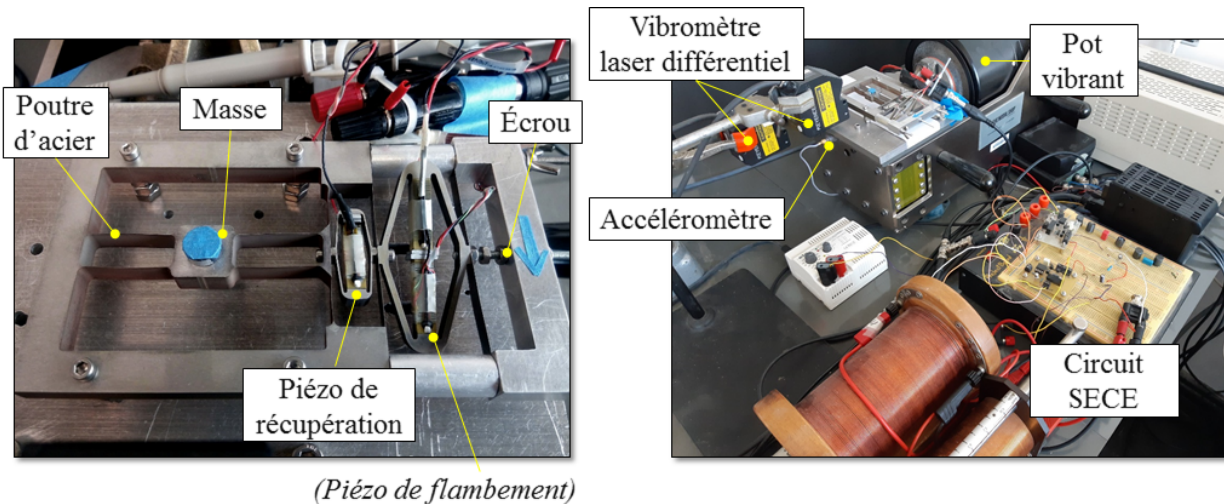
Avec  $\Lambda_{\min}$  l'impulsion minimale entraînant l'instabilité de la solution étudiée  $x_s$ .

### 5.3 Réponse fréquentielle théorique et validation expérimentale

La réponse fréquentielle du générateur bistable couplé au circuit SECE va être tracée et validée expérimentalement pour le prototype 2 de cette thèse (prototype introduit au chapitre précédent).

#### Banc d'essai et identification

La Figure 5.12 présente une photo du prototype et du banc d'essai. Le prototype est pré-flambé à l'aide d'un écrou qui, quand il est vissé, entraîne une translation de la vis liée au *Piézo de flambement* vers la masse. Pour plus de détail sur la réalisation et sur les dimensions de ce générateur bistable, le lecteur pourra se référer au chapitre précédent, Section 4.3. L'identification des paramètres ( $\omega_0, Q, C_0, \alpha$ ) de ce prototype est également détaillée dans cette section. Le Tableau 5.1 récapitule la valeur de tous les paramètres de ce prototype. Le coefficient de couplage électromécanique est celui du générateur linéaire équivalent à l'oscillateur bistable obtenu pour de petites oscillations de la masse autour d'une de ses positions d'équilibre



**Figure 5.12** – Prototype 2 : générateur bistable piézoélectrique réalisé à partir de deux poutres flambées (à l'aide de l'écrou) et placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante. Le Piézo de flambement, qui a été utilisé dans le chapitre précédent, est ici placé en court-circuit. Son influence sur le comportement du générateur est supposée négligeable (raideur grande devant celle du Piézo de récupération). La limite de la carte d'acquisition utilisée (Dspace), de 100  $\mu s$ , impose de fortes valeurs d'inductances. Les deux bobines utilisées lors de cette phase expérimentale sont donc de tailles relativement conséquentes afin de ne pas engendrer de trop fortes pertes électriques. L'optimisation de ces bobines ne rentre pas dans le cadre de cette étude.

**Table 5.1** – Paramètres du générateur bistable (prototype 2) et du circuit d'interface SECE.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Positions stables	$\pm x_0$	$\pm 0,50$	mm
Distance masse-support	$L$	25	mm
Masse inertielle	$M$	17,3	g
Pulsation naturelle	$\omega_0$	121	rad.s <sup>-1</sup>
Facteur de qualité mécanique	$Q$	87	–
Amplitude de l'excitation	$A$	2,5	m.s <sup>-2</sup>
Fréquence de l'excitation	$\omega$	15 – 85	Hz
Facteur de force du convertisseur piézo.	$\alpha$	0,096	N.V <sup>-1</sup>
Capacité bloquée du convertisseur piézo.	$C_0$	1,05	$\mu\text{F}$
Inductances	$L_1$ et $L_2$	500	mH
Capacités de lissage	$C_1$ et $C_2$	1,00	$\mu\text{F}$
Résistance de charge	$R$	100	k $\Omega$
Coefficient de couplage électromécanique	$k_m^2$	2,74	%

( $x = x_0 + \Delta x$  avec  $\Delta x \ll x_0$ ) [54]. Le générateur bistable couplé au circuit SECE a été placé sur un pot vibrant assurant une accélération sinusoïdale d'amplitude constante de 2,5 m.s<sup>-2</sup>. La position de la masse et la position du support sont mesurées à l'aide de deux vibromètres laser. La tension aux bornes du convertisseur piézoélectrique et la tension aux bornes de la résistance  $R$  sont mesurées à l'aide de deux sondes de tension différentielles. Les interrupteurs sont commandés pour se fermer sur des extrema de tension (sur un maximum pour l'interrupteur  $S_1$  et sur un minimum pour l'interrupteur  $S_2$ ) et sont commandés pour s'ouvrir lorsque la tension est nulle. Le schéma électrique de ces interrupteurs est détaillé en Annexe, Figure A.4. Les différents comportements sous-harmoniques du générateur bistable ont été atteints en appliquant des impulsions de tension carrées (20 ms et 30 V) au convertisseur piézoélectrique générant ainsi des impulsions de force sur la masse. Ces impulsions perturbent le générateur bistable et sont susceptibles de lui faire changer de comportement en régime permanent. Une fois le comportement souhaité atteint, la fréquence d'excitation est lentement augmentée ou diminuée, sans changement brusque, afin de ne pas déstabiliser ce comportement et permettre ainsi d'explorer toute sa plage de fréquences. Ce procédé permet ainsi d'obtenir la réponse fréquentielle du générateur bistable couplé au circuit SECE. Le schéma Simulink utilisé lors de cette étude expérimentale est détaillé en Annexe, Figure A.3. Dans la suite, l'attention est uniquement portée sur les deux comportements les plus pertinents pour la récupération d'énergie vibratoire : l'orbite haute harmonique 1 (sur laquelle on trouve le point de fonctionnement maximisant la puissance moyenne récupérée) et l'orbite haute sous-harmonique 3 (proposant une plage de fréquences utile différente de l'orbite haute harmonique 1 tout en assurant une puissance moyenne récupérée intéressante).

La Figure 5.13 et la Figure 5.14 présentent des exemples de signaux temporels obtenus expérimentalement pour l'orbite haute harmonique 1 et pour l'orbite haute sous-harmonique 3. Ces signaux expérimentaux sont comparés aux signaux obtenus avec le modèle mathématique développé dans ce chapitre. La tension théorique aux bornes du convertisseur piézoélectrique s'avère très proche de celle mesurée durant l'expérience. La série de Fourier du signal carré est ici tronquée à l'ordre  $N_{\text{bis}} = 10$ . La série de Fourier du signal de déplacement de la masse est donc tronquée à l'ordre  $N = 42$  (voir Équation (5.25)).

Il convient ici de distinguer deux grandeurs différentes : la puissance moyenne extraite du convertisseur piézoélectrique et la puissance moyenne récupérée par le générateur. Pour calculer la puissance moyenne extraite du convertisseur piézoélectrique, il convient de sommer

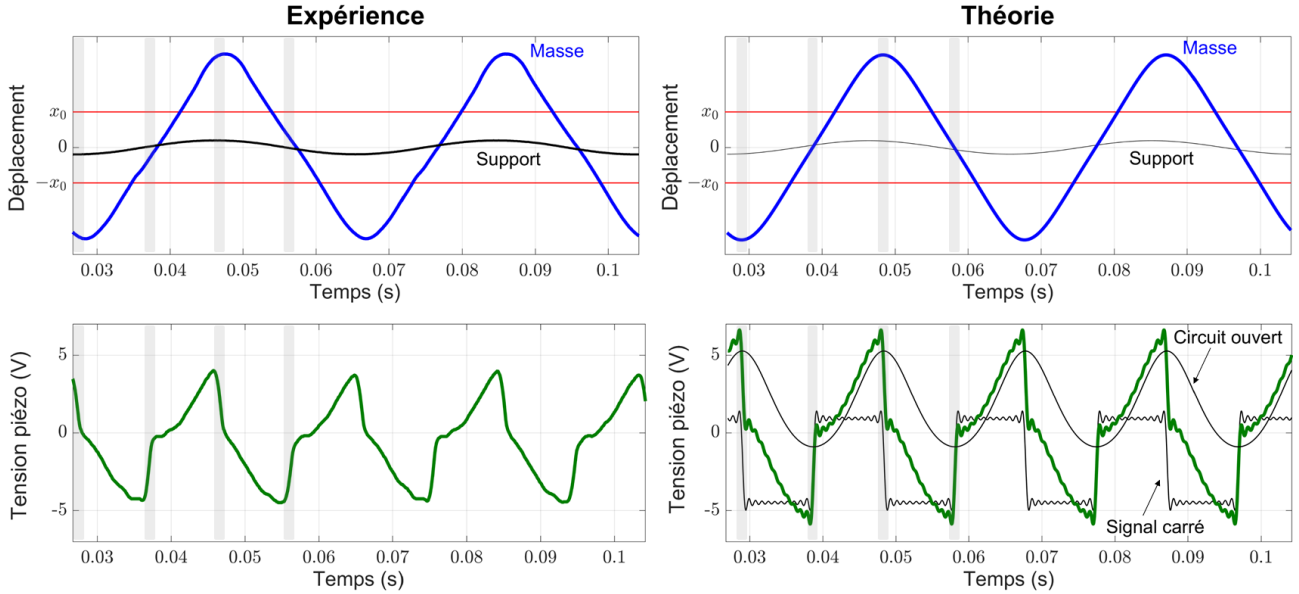


Figure 5.13 – Exemple de signaux temporels du comportement harmonique 1 obtenus avec le prototype 2 couplé au circuit SECE pour une excitation de  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$  à 26 Hz.

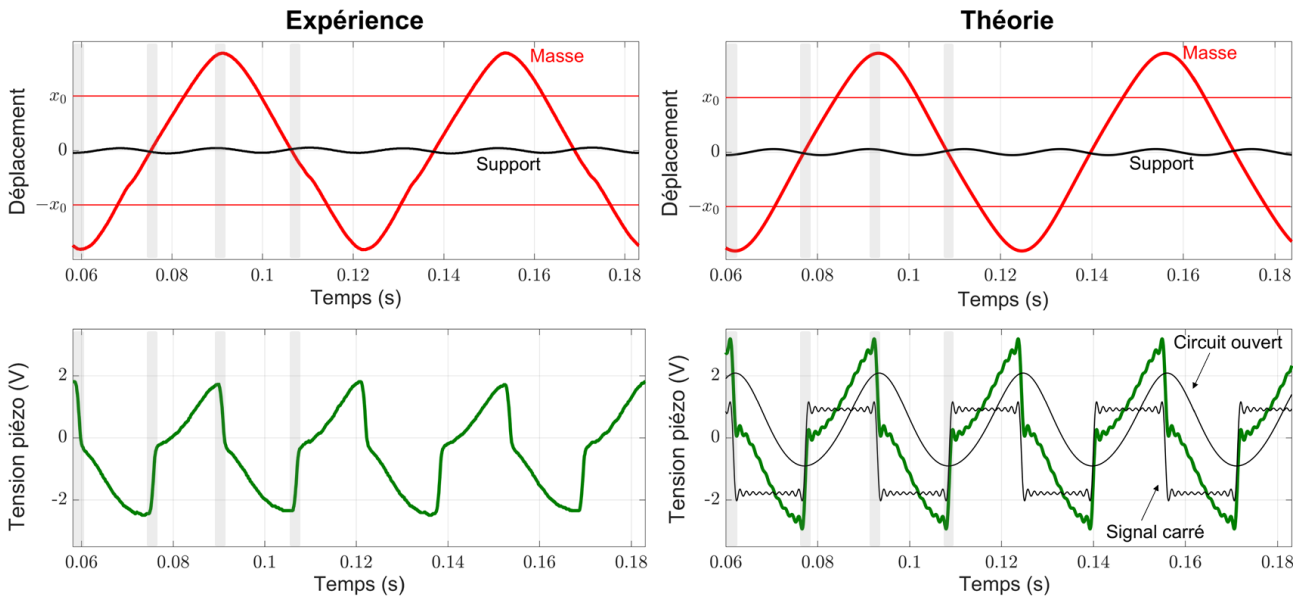


Figure 5.14 – Exemple de signaux temporels du comportement sous-harmonique 3 obtenus avec le prototype 2 couplé au circuit SECE pour une excitation de  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$  à 48 Hz.

toute les quantités d'énergie extraites lors des fermetures d'interrupteurs pendant une période d'oscillation de la masse (au total quatre extractions) puis de les moyenner par le temps de cette période :

$$\langle P_{\text{extraite}} \rangle = \frac{4}{2} C_0 (v_{\text{max}} - v_{\text{min}})^2 \frac{2\pi\omega}{n} \quad (5.53)$$

Avec  $v_{\text{min}}$  et  $v_{\text{max}}$  la valeur minimale et maximale de la tension du convertisseur piézoélectrique en circuit ouvert,  $2\pi\omega$  la fréquence d'excitation et  $n$  l'ordre de la sous-harmonique considérée. La puissance moyenne récupérée par le générateur correspond quant à elle à la quantité d'énergie

moyenne convertie par la résistance de charge  $R$  :

$$\langle P_{\text{récupérée}} \rangle = \frac{v_{DC}^2}{R} \quad (5.54)$$

Contrairement à la puissance moyenne extraite, la puissance moyenne récupérée prend en compte les pertes dans le circuit électrique.

## Résultat et discussion

La Figure 5.15 présente la réponse fréquentielle théorique et expérimentale du générateur bistable couplé au circuit SECE (courbes en couleurs) et les compare à celles du générateur bistable directement couplé à la charge, obtenues dans le chapitre précédent (courbes en gris). Les orbites étudiées sont celles susceptibles d'être utilisées pour la récupération d'énergie vibratoire (l'orbite haute harmonique 1 et l'orbite haute sous-harmonique 3). Les courbes théoriques tracées à partir des valeurs présentées dans le Tableau 5.1 ne comprennent que les comportements stables et robustes car ces derniers sont les seuls à pouvoir être atteints et maintenus dans le temps. La limite de robustesse de stabilité du générateur bistable (prototype 2) a été définie empiriquement lors de l'étude menée au chapitre précédent (Section 4.3). Les courbes théoriques ont été obtenues en considérant un signal carré d'ordre  $N_{\text{bis}} = 10$  et une réponse d'ordre  $N = 42$  (voir Équation (5.25)). La Figure 5.15 présente, pour chaque comportement théorique et expérimental, l'amplitude d'oscillation de la masse, la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum, la robustesse de stabilité et enfin la puissance moyenne extraite et récupérée par le générateur. Pour plus de détail sur le calcul de la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum, le lecteur pourra consulter le Chapitre 2, Section 2.6.

Il est à noter que le modèle mathématique développé pour le générateur bistable couplé au circuit SECE ne prend pas en compte les pertes électriques dans le circuit. La puissance moyenne théorique tracée correspond donc à la puissance moyenne extraite du convertisseur piézoélectrique. Pour les mesures expérimentales, les deux types de puissances ont été relevées (extraite et récupérée). Le prototype étudié ici offre une puissance moyenne récupérée comprise entre 50 % et 90 % de la puissance moyenne extraite (50 % pour le comportement sous-harmonique 3 à 44 Hz ou pour le comportement harmonique 1 à 16 Hz et 90 % pour le comportement sous-harmonique 3 à 58 Hz ou pour le comportement harmonique 1 à 34 Hz).

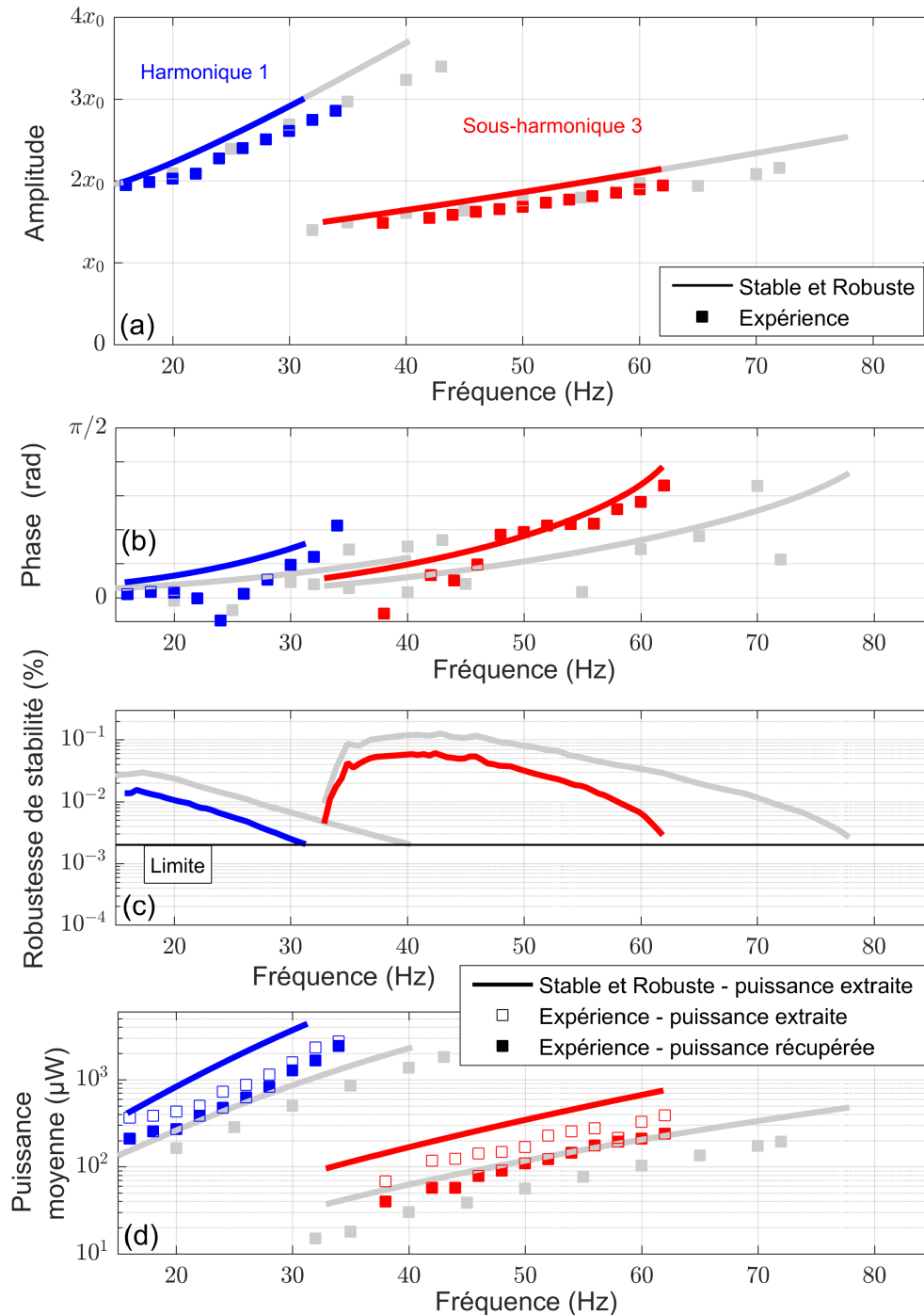
La Figure 5.15 met en évidence plusieurs points intéressants. Premièrement, le modèle théorique développé pour le générateur bistable couplé au circuit SECE est en accord avec les mesures expérimentales. Les amplitudes des différentes grandeurs mesurées ainsi que les plages de fréquences des deux orbites hautes coïncident de manière satisfaisante avec le modèle. Ce dernier pourra donc être utilisé dans des études d'optimisation et de dimensionnement de futurs générateurs.

La Figure 5.15 permet ensuite une comparaison claire entre le circuit SECE et le circuit purement résistif. La puissance moyenne extraite avec le circuit SECE (à une fréquence donnée et pour un comportement donné) est meilleure que celle extraite avec le circuit résistif (Figure 5.15(d)). En raisonnant sur les courbes théoriques, pour le comportement harmonique 1, le circuit SECE permet d'extraire 2,94 fois plus de puissance à 15 Hz (411  $\mu\text{W}$  contre 140  $\mu\text{W}$ ) et 4,33 fois plus de puissance à 30 Hz (3837  $\mu\text{W}$  contre 887  $\mu\text{W}$ ). Pour le comportement sous-harmonique 3, le circuit SECE permet d'extraire 2,59 fois plus de puissance à 33 Hz (96  $\mu\text{W}$



contre  $37 \mu\text{W}$ ) et 3,34 fois plus de puissance à 62 Hz ( $751 \mu\text{W}$  contre  $225 \mu\text{W}$ ).

D'un autre côté, le circuit SECE réduit la plage de fréquences accessible (stable et robuste) de chaque comportement. En raisonnant une nouvelle fois sur les courbes théoriques, la plage de fréquences du comportement harmonique 1 est divisée par 1,56 (de 25 Hz à 16 Hz). Celle du comportement sous-harmonique 3 est divisée par 1,55 (de 45 Hz à 29 Hz). Cette diminution



**Figure 5.15** – Spectres analytiques et expérimentaux du générateur bistable couplé au circuit SECE (courbes en couleurs) et couplé à une simple résistance (courbes en gris) pour une excitation d'amplitude  $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  : (a) amplitude des différents comportements (b) phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum (c) robustesse de stabilité (d) puissance moyenne.

de plage de fréquences vient de la diminution globale de robustesse de stabilité des comportements avec le circuit SECE (Figure 5.15(c)). Le circuit SECE permet en effet d'augmenter la puissance moyenne extraite sans modifier l'amplitude d'oscillation du générateur bistable (Figure 5.15(a)). Ce surplus de puissance extraite vient donc de la source vibratoire. Ceci se traduit par un meilleur couplage mécanique entre la source et le générateur : la phase du déplacement de l'excitation quand la position de la masse atteint un maximum se rapproche de  $\pi/2$  (Figure 5.15(b)). Le générateur bistable extrait ainsi en moyenne plus de puissance de la source vibratoire (la tension aux bornes du *Piézo de récupération* augmente). Avec le circuit SECE, les différents points de fonctionnement se rapprochent donc de la fréquence de coupure théorique, ce qui a pour conséquence de diminuer leur robustesse de stabilité respective.

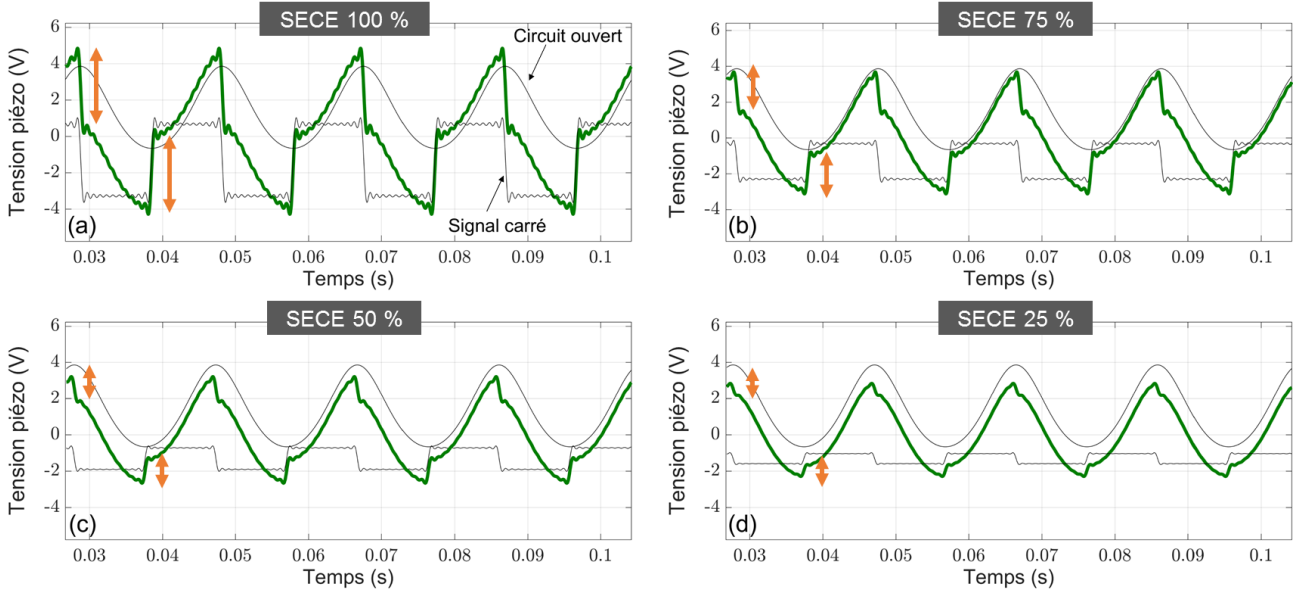
La plage de fréquences sur laquelle le générateur extrait une puissance moyenne supérieure à  $100 \mu\text{W}$  (puissance moyenne nécessaire pour alimenter un capteur isolé sans fil consommant  $450 \text{ mJ}$  par paquet transmis [4] avec, en moyenne, un paquet envoyé toutes les  $1,25 \text{ h}$ ) diminue également avec le circuit SECE. Elle passe (pour les courbes théoriques) de  $56 \text{ Hz}$  pour le circuit purement résistif ( $25 \text{ Hz}$  pour le comportement harmonique 1 et  $31 \text{ Hz}$  pour le comportement sous-harmonique 3) à  $45 \text{ Hz}$  pour le circuit SECE ( $16 \text{ Hz}$  pour le comportement harmonique 1 et  $29 \text{ Hz}$  pour le comportement sous-harmonique 3).

La puissance moyenne maximale extraite est plus grande avec le circuit SECE avec un maximum (courbes théoriques) de  $4383 \mu\text{W}$  à  $31 \text{ Hz}$  contre un maximum de  $2353 \mu\text{W}$  à  $40 \text{ Hz}$  pour le circuit résistif. Le maximum de puissance moyenne extraite pour le comportement sous-harmonique 3 est quant à lui de  $751 \mu\text{W}$  à  $62 \text{ Hz}$  avec le circuit SECE contre  $479 \mu\text{W}$  à  $78 \text{ Hz}$  avec le circuit résistif.

Le bilan comparatif entre ces deux circuits est donc mitigé. Le maximum de puissance moyenne extraite est meilleur avec le circuit SECE. De plus, ce dernier est avantageux sur les plages de fréquences [ $15\text{Hz} - 31\text{Hz}$ ] et [ $41\text{Hz} - 62\text{Hz}$ ] en proposant des puissances extraites de  $2,59$  à  $4,33$  fois supérieures. Le circuit purement résistif reste quant à lui avantageux sur les plages de fréquences [ $32\text{Hz} - 40\text{Hz}$ ] et [ $63\text{Hz} - 78\text{Hz}$ ] en proposant un comportement atteignable plus intéressant. En terme d'intégrabilité, le circuit SECE est plus pertinent que le circuit résistif puisqu'il offre, d'une part, une tension de charge continue  $v_{DC}$  constante et, d'autre part, un découplage entre le générateur et la charge. Il permet donc d'alimenter directement des capteurs sans fil (tension continue) sans se soucier d'une quelconque adaptation d'impédance particulière pour maximiser la puissance extraite de la source vibratoire (découplage générateur-charge).

## Exploitation du modèle

La figure précédente vient de montrer que le circuit SECE avait un impact positif sur la puissance moyenne extraite par le générateur et un impact négatif sur la bande passante globale de ce dernier. Ce rapport entre puissance extraite et bande passante peut cependant être modifié en jouant directement sur un paramètre du circuit SECE : le temps de fermeture des interrupteurs. En réduisant ce temps de fermeture, il est possible de réduire la quantité d'énergie extraite du convertisseur piézoélectrique à chaque extremum de tension. Ainsi, la puissance moyenne extraite diminue (réduisant de fait l'amortissement électrique) en faveur d'une meilleure robustesse de stabilité globale donc d'une meilleure bande passante. La Figure 5.16 illustre cette stratégie à l'aide de courbes issues du modèle théorique. Elle présente quatre signaux temporels représentant la tension aux bornes du convertisseur piézoélectrique pour quatre temps de fermeture différents des interrupteurs. Ces quatre temps de fermeture sont ajustés de manière



**Figure 5.16** – Allure de la tension aux bornes du convertisseur piézoélectrique pour différents temps de fermeture des interrupteurs. À chaque extremum de tension : (i) 100 %, (ii) 75 %, (iii) 50 % ou (iv) 25 % de l'énergie du convertisseur est extraite.

à ce que (i) 100 %, (ii) 75 %, (iii) 50 % ou (vi) 25 % de l'énergie du convertisseur soit extraite à chaque extremum de tension. Cette condition est prise en compte dans le modèle analytique en jouant sur l'amplitude du signal carré. Pour un SECE partiel  $\eta$  % (par exemple  $\eta = 50$  %), la puissance moyenne extraite équivaut à la puissance moyenne extraite maximale multipliée par un facteur  $\eta$ . Soit  $\Theta_{sc}$  l'amplitude du signal carré permettant d'atteindre cette condition :

$$\begin{cases} \langle P_{\text{extraite max}} \rangle &= \frac{4}{2} C_0 (v_{\text{max}} - v_{\text{min}})^2 \frac{2\pi\omega}{n} \\ \eta \langle P_{\text{extraite max}} \rangle &= \frac{4}{2} C_0 (v_{\text{max}} - v_{\text{min}})^2 \frac{2\pi\omega}{n} - \frac{4}{2} C_0 (v_{\text{max}} - v_{\text{min}} - 2\Theta_{sc})^2 \frac{2\pi\omega}{n} \end{cases} \quad (5.55)$$

Avec  $v_{\text{min}}$  et  $v_{\text{max}}$  la valeur minimale et maximale de la tension du convertisseur piézoélectrique en circuit ouvert. Ainsi :

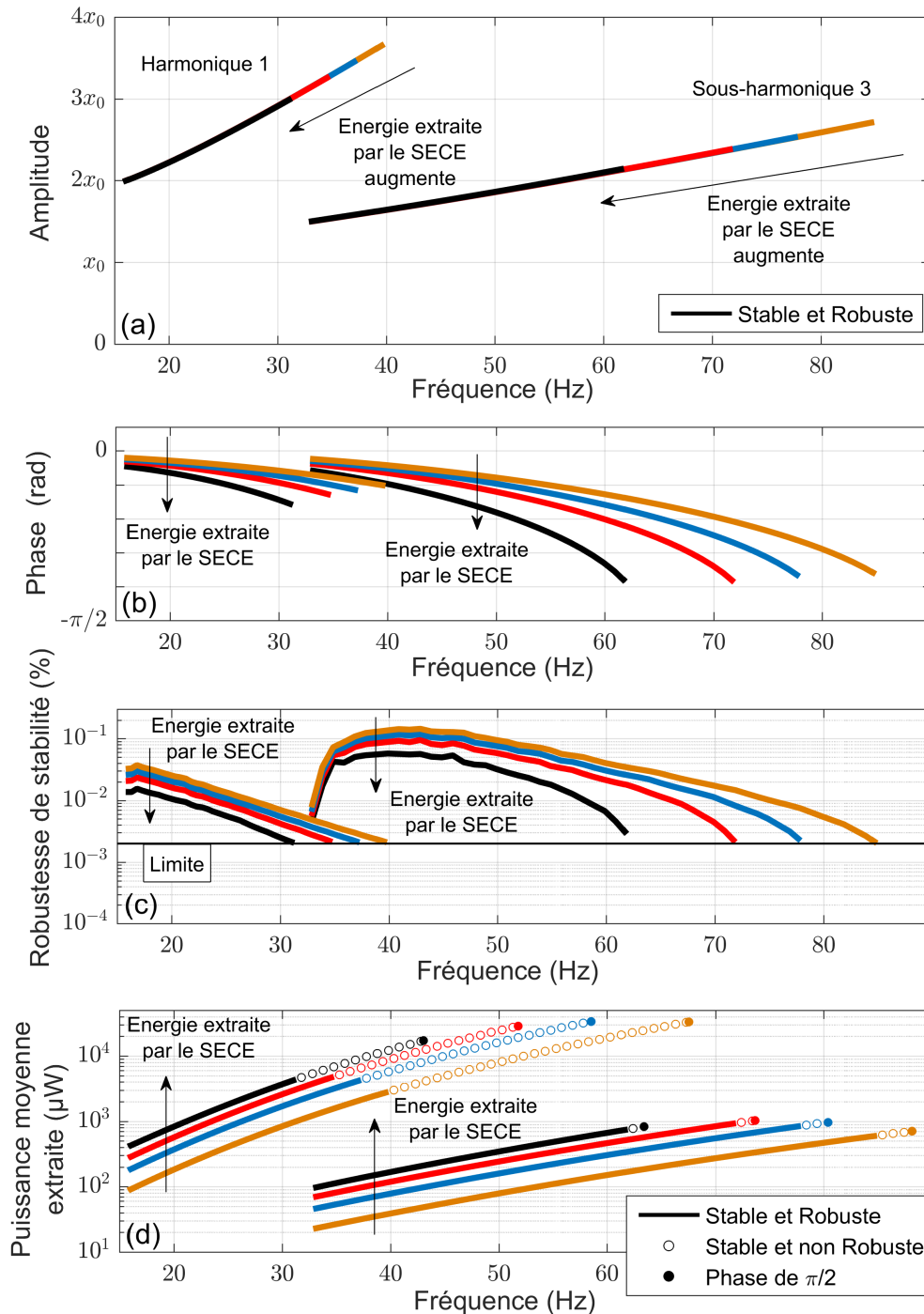
$$\Theta_{sc} = \frac{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}{2} (1 - \sqrt{1 - \eta}) \quad (5.56)$$

Pour un SECE de 100 %, l'amplitude du signal carré doit effectivement être égale à celle de la tension en circuit ouvert. Pour un SECE de 0 %, l'amplitude du signal carré doit bien entendu être nulle. La Figure 5.17 présente les réponses fréquentielles théoriques du générateur bistable couplé au circuit SECE obtenues pour ces quatre temps de fermeture différents. Les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont celles du prototype 2 détaillées dans le Tableau 5.1. Seul les deux comportements intéressants pour la récupération d'énergie sont tracés sur ces spectres : l'orbite haute harmonique 1 et l'orbite haute sous-harmonique 3.

L'allure des différentes réponses fréquentielles est bien celle attendue : plus la quantité d'énergie extraite par le circuit SECE à chaque extremum de tension diminue, plus la puissance moyenne extraite diminue mais plus la robustesse de stabilité de chaque comportement augmente et donc plus la plage de fréquences de ces comportements augmente. En passant de 100 % à 25 % d'énergie extraite à chaque extremum de tension, la puissance moyenne maximale atteinte sur les comportements robustes et stables passe de 4383  $\mu\text{W}$  (31 Hz) à 2836  $\mu\text{W}$

(40 Hz) pour le comportement harmonique 1 et de  $751 \mu\text{W}$  (62 Hz) à  $603 \mu\text{W}$  (85 Hz) pour le comportement sous-harmonique 3. La plage de fréquences passe, elle, de 16 Hz à 25 Hz pour le comportement harmonique 1 et de 29 Hz à 52 Hz pour le comportement sous-harmonique 3.

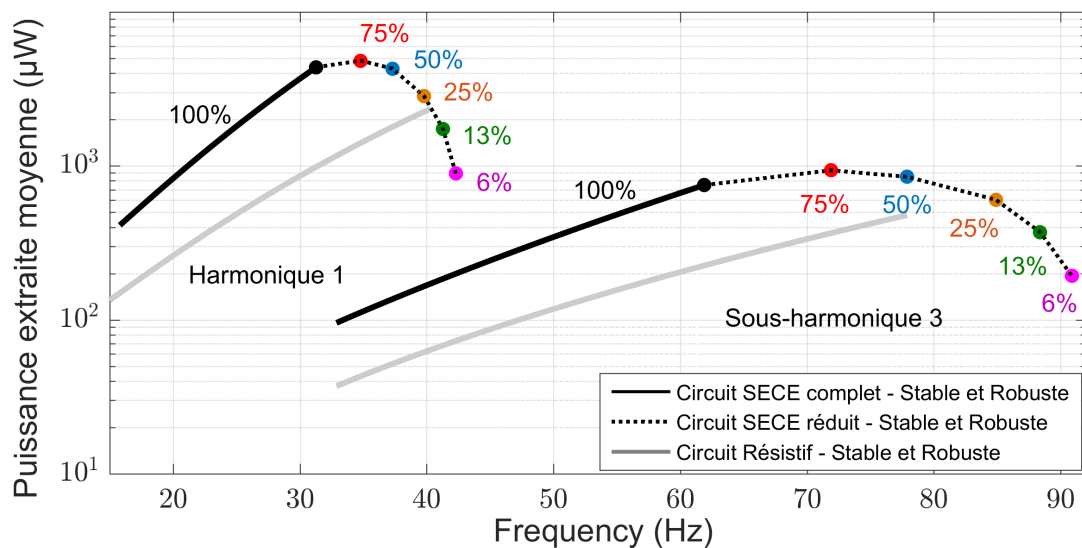
Il est ici intéressant de noter que la puissance moyenne extraite maximale n'est pas atteinte pour un SECE à 100 % mais pour un SECE partiel à 75 % si on ne considère que les orbites



**Figure 5.17** – Influence sur la réponse fréquentielle analytique du générateur bistable de la quantité d'énergie extraite à chaque extremum de tension par le circuit SECE pour une excitation de  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$ . Valeurs présentées : 100 % (courbes noires), 75 % (courbes rouges), 50 % (courbes bleues) et 25 % (courbes oranges). Pour chaque comportement, la fréquence de coupure théorique est précisée en sous-figure (d). Elle est atteinte lorsque la phase du déplacement de l'excitation vaut  $\pi/2$  quand la position de la masse atteint un maximum.

robustes et stables ( $4830 \mu\text{W}$  à 35 Hz) et pour un SECE partiel à 50 % si on considère toutes les orbites stables allant jusqu'à la fréquence de coupure théorique (33,9 mW à 59 Hz). Cette remarque va dans le sens de l'observation faite précédemment lors de l'étude comparative des différents circuits (Figure 5.5) : le circuit SECE peut, dans certains cas, extraire trop d'énergie du générateur. L'amortissement mécanique qui en découle devient trop important, réduisant de fait la quantité d'énergie mécanique disponible et donc l'énergie électrique extraite. Il y a donc un optimum à trouver entre énergie électrique extraite (en jouant sur le SECE partiel) et énergie mécanique disponible, l'un faisant nécessairement chuter l'autre. Cet optimum n'est pas atteint pour le même ajustement du SECE partiel, que l'on considère tous les comportements stables (analyse classique) ou seulement les comportements robustes et stables. L'amortissement engendré par le circuit affecte en effet également la robustesse de stabilité des différents comportements (plus l'amortissement est grand, moins les comportements sont robustes). Cette remarque souligne une nouvelle fois l'intérêt du critère de robustesse de stabilité développé dans cette thèse puisque les conclusions quant à l'optimisation du générateur bistable diffèrent avec ou sans ce critère.

La Figure 5.18 présente la réponse fréquentielle robuste et stable optimale du générateur bistable couplé au circuit SECE (c'est-à-dire, pour un réglage optimal de la quantité d'énergie extraite à chaque extremum de tension en fonction de la fréquence d'excitation). La réponse fréquentielle du générateur bistable couplé à une simple résistance est rappelée à titre de comparaison (courbes grises).



**Figure 5.18** – Réponse fréquentielle du générateur bistable couplé au circuit résistif (courbes grise) ou couplé au circuit SECE (courbes noires) pour lequel la quantité d'énergie extraite à chaque extremum de tension est réglée de manière optimale.

L'apport principal du réglage proposé pour le circuit SECE est le suivant : la plage de fréquences sur laquelle le générateur extrait une puissance moyenne supérieure à  $100 \mu\text{W}$  est maintenant plus grande qu'avec le circuit purement résistif. Le circuit SECE ajustable propose en effet une plage de fréquences de 83 Hz au dessus de  $100 \mu\text{W}$  (27 Hz pour le comportement harmonique 1 et 56 Hz pour le comportement sous-harmonique 3) contre 56 Hz pour le circuit purement résistif (25 Hz pour le comportement harmonique 1 et 31 Hz pour le comportement sous-harmonique 3).

## 5.4 Conclusion

Dans l'optique de l'étude du générateur dans sa globalité et notamment aux interfaces électromécaniques, ce chapitre a mis en évidence l'influence d'un circuit d'interface AC-DC, à savoir le circuit non linéaire SECE (légèrement modifié pour s'accommoder des faibles tensions), sur le comportement du générateur bistable. Le circuit SECE offre en effet l'avantage d'une part d'accroître la puissance extraite pour des couplages faibles, et d'autre part de découpler le générateur de la charge et donc de ne pas se soucier d'une quelconque adaptation d'impédance pour maximiser la puissance extraite de la source vibratoire. Un modèle théorique analytique, dans la continuité de ceux proposés dans les chapitres précédents, a été proposé puis validé expérimentalement. La réponse fréquentielle obtenue montre que ce type de circuit permet d'améliorer la puissance moyenne extraite par le générateur par rapport au cas où ce dernier est directement couplé à la charge (circuit purement résistif). Cette comparaison est valable pour une même fréquence d'excitation sur toute la plage de fréquences atteignable avec le circuit SECE. Il existe cependant une plage de fréquences sur laquelle seul le circuit purement résistif permet de récupérer de l'énergie. Le circuit SECE améliore donc la puissance moyenne extraite mais diminue la bande passante globale du générateur bistable. Afin de répondre à cette problématique de bande passante, une stratégie de réglage du circuit SECE a ensuite été testée à l'aide du modèle théorique. Elle consiste à n'extraire qu'une partie de l'énergie contenue dans le convertisseur piézoélectrique à chaque extremum de tension en jouant sur le temps de fermeture des interrupteurs. La puissance moyenne extraite s'en trouve ainsi diminuée en faveur d'une meilleure robustesse de stabilité globale et donc d'une meilleure bande passante. Le résultat est le suivant : le générateur bistable couplé au circuit SECE ajustable propose une plage de fréquences de 83 Hz au-dessus de  $100 \mu\text{W}$  contre 56 Hz pour le circuit purement résistif. En conclusion, le circuit SECE ajustable est avantageux en terme d'intégrabilité du générateur (tension continue), en terme de puissance extraite et il le devient en terme de bande passante par rapport au circuit purement résistif grâce au contrôle d'énergie extraite à chaque extremum. Cette stratégie est finalement équivalente aux stratégies d'adaptation d'impédance offertes par le circuit standard et par le circuit SSHI-parallèle en fournissant un moyen d'ajuster l'énergie transférée.



# 6

## Conclusion

*Ce chapitre tente d'apporter une conclusion globale aux travaux développés durant cette thèse. Leur motivation première est la suivante : pouvoir proposer une alternative à l'utilisation de batteries pour les capteurs autonomes sans fil. En récupérant de l'énergie dans l'environnement direct de ces capteurs pour leur alimentation, ces derniers pourraient en effet gagner en compacité (plus besoin d'embarquer une grande quantité d'énergie), en autonomie (plus besoin de changer régulièrement les batteries vides) et en tenue dans les environnements sévères (à forte température par exemple). Ces travaux se concentrent plus précisément sur la récupération d'énergie vibratoire, prometteuse en termes de puissance disponible par unité de volume dans un environnement industriel, comparée à l'énergie thermique, solaire ou éolienne (les capteurs se trouvant régulièrement dans un espace fermé). De plus, l'accent est ici porté sur les générateurs inertiels non linéaires (bistables) qui proposent à l'heure actuelle la bande passante de récupération la plus intéressante. Ce manuscrit s'articule ainsi autour de quatre grands axes : (i) la construction du modèle mathématique permettant de prédire les différents comportements du générateur bistable et en particulier les comportements sous-harmoniques ; (ii) l'ajout du critère de robustesse de stabilité pour caractériser les différents comportements améliorant ainsi la précision de ce modèle ; (iii) la mise en place d'une stratégie de saut des orbites basses (comportements peu intéressants pour la récupération d'énergie) vers les orbites hautes en jouant sur le niveau de flambement du générateur ; (iv) l'analyse de l'influence d'un circuit d'interface AC-DC sur les différents comportements du générateur en vue de son intégration future. Ce chapitre reprend de manière synthétique le développement proposé autour de ces quatre axes puis propose des perspectives concernant les futurs travaux envisageables dans la continuité de cette thèse.*



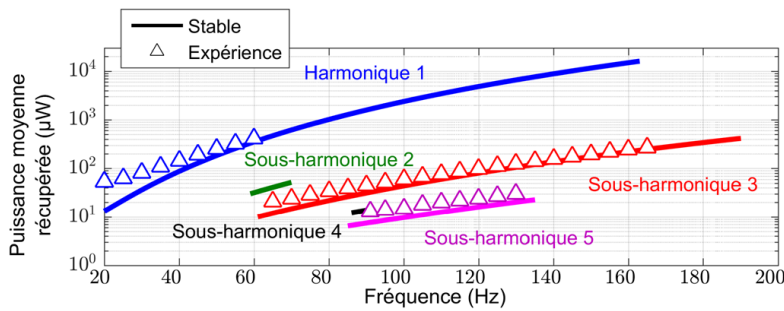
## 6.1 Présentation synthétique des travaux menés durant cette thèse

La synthèse des différentes études menées durant cette thèse est illustrée en Figure 6.1. Le premier grand axe, développé au Chapitre 2, concerne la modélisation mathématique du générateur bistable afin de pouvoir prédire tous les comportements possibles dans lesquels ce dernier peut se stabiliser en régime permanent. La construction de ce modèle concerne ici le générateur à conversion électromagnétique. Il est à noter que le caractère non linéaire de ce type de générateur l'autorise à avoir plusieurs comportements atteignables en régime permanent pour une même excitation. L'un ou l'autre de ces comportements apparaîtra en fonction des conditions initiales du générateur (vitesse et position de la masse). Le modèle développé inclut une résolution semi-analytique à l'aide de la méthode de la balance harmonique et prend en compte la stabilité de chaque comportement aux petites perturbations. Lors de la construction de ce modèle, l'accent est mis sur des comportements originaux pour la récupération d'énergie vibratoire, encore peu exploités par la communauté scientifique : les comportements sous-harmoniques. Lorsque le générateur se stabilise sur l'un d'entre eux, la masse oscille à une fréquence  $n$  fois plus petite que celle de l'excitation (pour le comportement sous-harmonique  $n$ ). Le modèle développé a ainsi permis de tracer la réponse fréquentielle du générateur bistable comprenant ces comportements sous-harmoniques. L'étude de cette réponse fréquentielle a entre autres fait apparaître un critère permettant de définir la limite haute et basse des plages de fréquences de chaque comportement : la phase du déplacement de l'excitation lorsque la masse atteint un maximum. Pour un comportement donné, cette phase vaut systématiquement 0 au commencement de sa plage de fréquences et croît de manière monotone jusqu'à sa fréquence de coupure théorique pour laquelle elle vaut soit  $\pi/2$  pour les comportements sous-harmoniques d'ordre impair soit  $\pi/4$  pour les comportements sous-harmoniques d'ordre pair. Ce critère, déjà établi par Harne et al. [70] pour le comportement harmonique 1, a ici été étendu aux comportements sous-harmoniques.

La validation expérimentale du modèle révèle en particulier le comportement sous-harmonique 3 qui permet de multiplier par trois la plage de fréquences pour laquelle le générateur récupère en moyenne plus de  $100 \mu\text{W}$  (avec cette puissance moyenne, il est possible d'alimenter un capteur isolé sans fil consommant  $450 \text{ mJ}$  par paquet transmis [4] avec un paquet envoyé toutes les  $1,25 \text{ h}$ ). Pour le prototype utilisé (poutre flambée et convertisseur électromagnétique), cette plage de fréquences passe ainsi de  $25 \text{ Hz}$  en n'utilisant que le comportement harmonique 1 (de  $35 \text{ Hz}$  à  $60 \text{ Hz}$ ) à  $70 \text{ Hz}$  en combinant le comportement harmonique 1 et sous-harmonique 3 (de  $35 \text{ Hz}$  à  $60 \text{ Hz}$  et de  $120 \text{ Hz}$  à  $165 \text{ Hz}$ ). Il est à noter que seule l'expérience montre un intérêt à l'utilisation de la sous-harmonique 3 (pas le modèle théorique).

La confrontation du modèle aux résultats expérimentaux est en effet paradoxale. D'une part, les comportements qui ont pu être atteints et stabilisés expérimentalement sont tous parfaitement prédits par le modèle. En particulier les caractéristiques suivantes concordent : l'amplitude d'oscillation de la masse, la puissance moyenne récupérée et surtout la phase du déplacement de l'excitation lorsque la position de la masse atteint un maximum. Mais d'autre part, certaines zones des plages de fréquences théoriques de chaque comportement n'ont pas pu être atteintes expérimentalement (généralement les zones proches de la fréquence de coupure théorique). La différence entre la plage de fréquences théorique et expérimentale du comportement harmonique 1 est particulièrement embarrassante. De même, dans l'étude théorique, le comportement sous-harmonique 3 ne semble pas être intéressant pour agrandir la bande passante alors que l'étude expérimentale prouve le contraire.

Une étude concernant la validité du modèle mathématique utilisé a donc été menée pour clore le Chapitre 2. Les trois hypothèses majeures permettant de construire ce modèle ont été mises



**Chapitre 2**

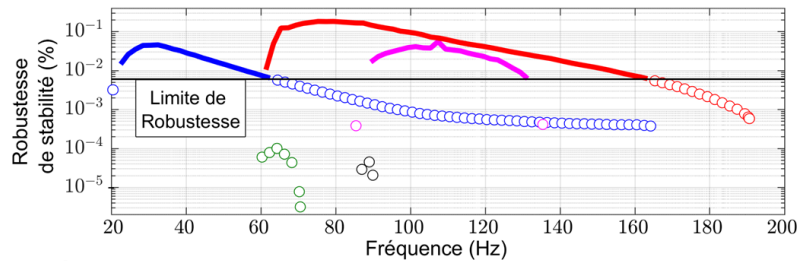
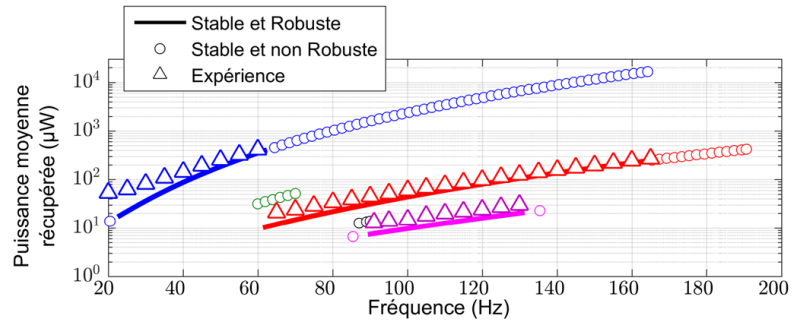
*Problématique*  
Bande passante limitée

*Apport*  
Mise en évidence et intérêt des comportements sous-harmoniques (notamment sous-harmonique 3)

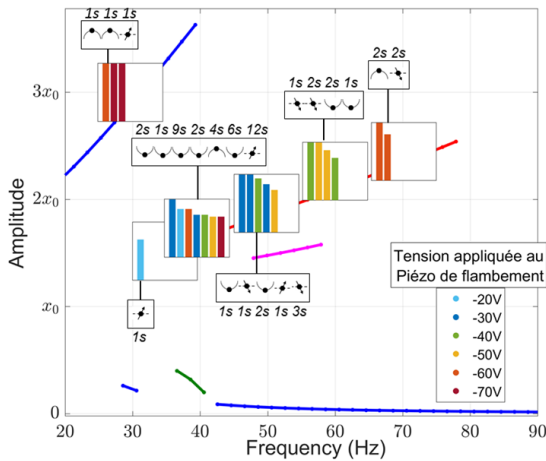
**Chapitre 3**

*Problématique*  
Discordance théorie/expérience (la sous-harmonique 3 intéressante en pratique mais pas en théorie)

*Apport*  
Ajout du critère de robustesse de stabilité et démonstration de sa pertinence



**Combinaisons avec >70% de chances de sauter**



**Chapitre 4**

*Problématique*  
Coexistence d'orbites basses compromettant les capacités de récupérations

*Apport*  
Mise en place d'une stratégie efficace (en termes de statistiques de saut et en termes énergétiques) pour sauter des orbites basses vers les orbites hautes en jouant sur le niveau de flambement du générateur

**Chapitre 5**

*Problématique*  
Intégration du générateur pour alimenter des dispositifs en courant DC

*Apport*  
Analyse de l'influence du circuit SECE sur les comportements du générateur

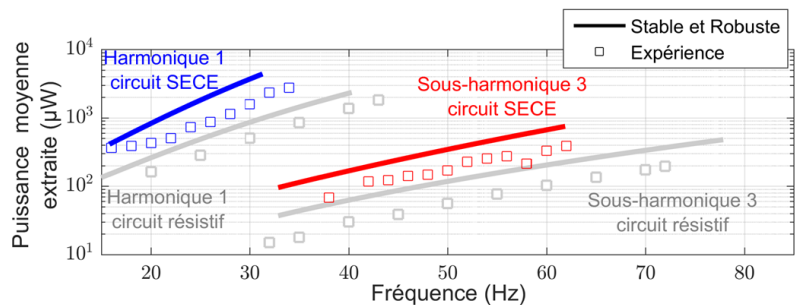


Figure 6.1 – Schéma illustrant les grands axes de cette thèse.

à l'épreuve : (i) le facteur de qualité mécanique du générateur bistable, qui est ajusté afin que la mesure expérimentale de la phase corresponde avec le modèle théorique pour un point du spectre particulier ; (ii) la force d'amortissement qui est considérée comme proportionnelle à la vitesse de la masse (amortissement linéaire) ; (iii) la raideur du générateur bistable qui est approximée par un polynôme impair de degré trois. Les résultats ont alors montré que ces hypothèses étaient pertinentes. En effet, changer l'une d'entre elles entraîne systématiquement une mauvaise concordance entre théorie et expérience pour les comportements atteints expérimentalement. Ainsi, nous pouvons en déduire que les différences observées entre la théorie et l'expérience ne sont pas dues à une mauvaise construction du modèle.

Partant de ce constat, le Chapitre 3 a présenté un critère semi-analytique innovant (développé en partenariat avec l'Institut Camille Jordan) permettant de compléter le modèle théorique précédent afin d'en améliorer les prédictions : le critère de robustesse de stabilité. Ce critère rend compte de la stabilité des différents comportements pour des perturbations plus grandes que dans le cas de l'étude de stabilité classique (perturbations infinitésimales). Les comportements du générateur dits stables selon le critère classique, donc peu sensibles aux perturbations infimes, peuvent en effet avoir des sensibilités différentes aux perturbations plus grandes inhérentes aux conditions réelles (l'excitation n'est jamais parfaitement sinusoïdale et les défauts de la structure peuvent être vus comme des perturbations). Pour être plus précis, le critère de robustesse de stabilité est défini comme le rapport sans unité entre d'une part l'énergie de l'impulsion minimale conduisant à l'instabilité du comportement considéré et d'autre part la quantité d'énergie moyenne apportée par l'excitation pendant une des périodes de cette excitation (valeur normative). Ainsi, plus un comportement est robuste plus il sera facile à atteindre et à maintenir dans le temps (car difficile à déstabiliser). En dessous d'un certain seuil, les comportements sont considérés comme inutilisables pour la récupération d'énergie car trop difficiles à maintenir dans le temps.

Le modèle mathématique incluant la robustesse de stabilité s'avère être en parfaite adéquation avec les résultats expérimentaux. Les comportements théoriques qui n'avaient pas pu être atteints expérimentalement sont ceux qui ont la plus faible robustesse de stabilité (en l'occurrence ceux qui se trouvent en-dessous de la limite). L'exploitation de ce modèle a ensuite donnée une série de figures détaillant l'influence des différents paramètres du générateur bistable (masse, raideur des ressorts, couplage électromécanique, niveau de flambement) sur sa réponse fréquentielle pour de futures optimisations. L'étude réalisée autour des valeurs du prototype électromagnétique de cette thèse, donc valable uniquement pour des générateurs faiblement couplés (amortissement électrique bien inférieur à l'amortissement mécanique), met en évidence les pistes d'amélioration suivantes : (i) Le facteur de force  $\beta$  doit être amélioré afin d'augmenter la puissance récupérée sur toute la bande passante du générateur. À partir d'une certaine valeur, il conviendra ensuite de trouver un compromis entre puissance récupérée (en augmentant  $\beta$ ) et bande passante (en diminuant  $\beta$ ). (ii) La masse  $M$  doit être augmentée afin d'augmenter la puissance disponible et donc récupérée ainsi que la bande passante du générateur (dans la limite des contraintes volumiques et/ou massiques imposées). (iii) La raideur des ressorts  $k$  peut être utilisée pour ajuster la plage de fréquences utile du prototype en la décalant vers les hautes ou vers les basses fréquences sans compromettre la puissance récupérée. Il est également possible de contrôler, grâce à ce paramètre, la distance entre la plage de fréquences du comportement harmonique 1 et celle du comportement sous-harmonique 3. (iv) La valeur des positions stables  $x_0$  est plus délicate à optimiser. Il s'agit de trouver un compromis entre puissance récupérée à chaque fréquence (en augmentant  $x_0$ ), puissance récupérée maximale (en diminuant  $x_0$ ) et bande passante (en diminuant  $x_0$ ).

En conclusion du Chapitre 3, le modèle théorique a été utilisé afin d'établir une comparaison

entre le générateur bistable et le générateur linéaire. Cette comparaison a été réalisée pour une même amplitude d'excitation, une même masse, un même facteur de qualité et une même pulsation naturelle entre les deux générateurs. Le critère de robustesse de stabilité pondère l'intérêt du générateur bistable comparé au générateur linéaire. La puissance moyenne maximale récupérée est plus grande avec le générateur linéaire contrairement aux prédictions du modèle théorique classique sans robustesse (pour lequel les puissances moyennes maximales étaient identiques). La bande passante du générateur bistable reste cependant avantageuse grâce à l'exploitation du comportement sous-harmonique 3. L'intérêt de l'un ou l'autre de ces générateurs dépend finalement des caractéristiques de la source de vibration ambiante. Le générateur linéaire sera plus performant pour une source à fréquence fixe et stable tandis que le générateur bistable sera privilégié pour une source à fréquence fluctuante ( $\Delta f > 5$  Hz dans le cas étudié).

Sur toute la plage de fréquences utile du générateur bistable coexistent deux grands types de comportements : des comportements de forte amplitude (orbites hautes), intéressants pour la récupération d'énergie puisque la quantité d'énergie mécanique moyenne de la masse (c'est-à-dire, la quantité d'énergie mécanique disponible) est élevée et des comportements de faible amplitude (orbites basses) non désirables. Le Chapitre 4 décrit différentes stratégies permettant de sauter des orbites basses vers les orbites hautes. Lors de cette étude, le prototype utilisé est un générateur bistable (poutre flambée) à conversion piézoélectrique. Ce chapitre commence donc par étendre le modèle mathématique développé dans les chapitres précédents (incluant le critère de robustesse de stabilité) à ce type de générateurs. Les stratégies de saut d'orbite qui sont ensuite étudiées ont pour but d'apporter ponctuellement de l'énergie à la masse afin de déstabiliser les orbites basses pour potentiellement atteindre une orbite haute et ce, en jouant directement sur les paramètres du générateur (masse, raideur des ressorts, niveau de flambement, facteur de qualité). La stratégie la plus prometteuse en termes de réalisation technique et de coût énergétique consiste à modifier le niveau de flambement du générateur bistable à deux reprises : le générateur est d'abord sur-flambé à un instant précis (la masse s'éloigne alors de la position stable et gagne de l'énergie potentielle) puis ce sur-flambement est relâché quand la masse atteint un maximum de déplacement (elle s'éloigne ainsi une nouvelle fois de la position stable et gagne de nouveau de l'énergie potentielle). Deux variables peuvent être ajustées pour cette stratégie : l'amplitude de sur-flambement et l'instant de son application.

L'étude expérimentale montre des résultats encourageants : sur toute la plage de fréquences utile du générateur bistable (20 Hz à 70 Hz dans le cas étudié), il est possible de trouver une combinaison d'amplitude et d'instant de sur-flambement qui permet de sauter systématiquement sur une orbite haute (100 % des 30 essais effectués à chaque fréquence d'excitation). De plus, ces grandes chances de saut sont conservées pour plusieurs combinaisons différentes d'amplitude et d'instant de sur-flambage ce qui rend cette stratégie relativement tolérante pour sa mise en place en conditions réelles. Par ailleurs, la stratégie de saut d'orbite par changement de niveau de flambement semble applicable techniquement puisque la diminution de longueur nécessaire pour sur-flamber le générateur (longueur séparant la masse de ses points de fixation) est faible devant cette même longueur. Dans notre cas, une diminution de 0,073 % suffit pour assurer le sur-flambement maximal (valeur des positions d'équilibres multipliée par 2,32). Enfin, une étude énergétique a permis d'établir que le temps nécessaire pour obtenir une balance énergétique positive après un saut d'orbite (temps nécessaire pour récupérer l'énergie dépensée lors du saut) est de l'ordre de quelques secondes (de 1 seconde à 12 secondes en fonction des combinaisons d'amplitude et d'instant de sur-flambement utilisées). Ainsi, l'énergie nécessaire pour le saut d'orbite peut être fournie par le générateur lui-même.

Le dernier chapitre s'intéresse à l'intégration du générateur bistable dans son ensemble.

L'application principale visée étant l'alimentation de capteurs isolés sans fil, il convient donc de coupler au générateur un circuit électronique d'interface convertissant la tension alternative générée par le convertisseur électromécanique en tension continue. Le Chapitre 5 a pour but d'étudier l'influence de ce type de circuit sur les comportements du générateur bistable. Le circuit choisi est le circuit SECE qui présente deux avantages principaux comparé aux circuits standards : il augmente la puissance extraite pour des couplages faibles et il permet de découpler le générateur de la charge (plus besoin de paramétrer une quelconque adaptation d'impédance pour maximiser la puissance extraite). Le modèle mathématique développé dans les chapitres précédents est ici étendu (en ajoutant le circuit SECE) puis validé expérimentalement. Les résultats montrent que la puissance moyenne extraite avec ce type de circuit est supérieure à celle obtenue avec un circuit purement résistif (dans notre cas, de 2,59 à 4,33 fois supérieures en fonction de la fréquence d'excitation). Par contre, la bande passante du générateur est diminuée. Il existe en effet des plages de fréquences sur laquelle seul le circuit purement résistif permet de récupérer de l'énergie. Le circuit SECE améliore donc la puissance moyenne extraite mais diminue la bande passante globale du générateur bistable.

Une stratégie de réglage du circuit SECE a ensuite été développée en utilisant le modèle théorique afin de répondre à cette problématique de bande passante. Elle consiste à n'extraire qu'une partie de l'énergie contenue dans le convertisseur piézoélectrique à chaque extremum de tension en jouant sur le temps de fermeture des interrupteurs. La puissance moyenne extraite est donc diminuée ce qui a pour effet d'augmenter la robustesse de stabilité de chaque comportement et donc d'augmenter leur plage de fréquence utilisable. Grâce à cet ajustement, la bande passante du circuit SECE devient supérieure à celle du circuit purement résistif. Dans notre cas, la plage de fréquences sur laquelle le générateur extrait plus de  $100 \mu\text{W}$  en moyenne passe de 56 Hz pour le circuit purement résistif à 83 Hz pour le circuit SECE ajustable. Ce circuit est donc intéressant en termes d'intégration (tension de sortie continue), en termes de puissance extraite et il le devient en termes de bande passante par rapport au circuit purement résistif (grâce au contrôle d'énergie extraite à chaque extremum).

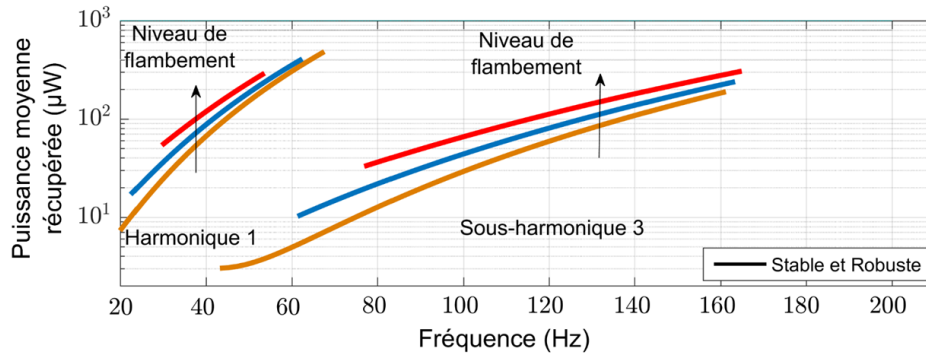
## 6.2 Perspectives

Les perspectives des différentes études menées durant cette thèse sont illustrées en Figure 6.2. Les perspectives envisageables suite à la construction du modèle mathématique menée au Chapitres 2 et 3 concernent l'optimisation des performances du générateur bistable en jouant sur ses paramètres. Ces chapitres ont notamment mis en évidence l'influence du niveau de flambement sur la réponse fréquentielle du générateur. En augmentant ce dernier, la puissance moyenne récupérée augmente mais la plage de fréquences des comportements robustes et stables diminue. Il serait intéressant de pouvoir établir la réponse fréquentielle du générateur pour lequel le niveau de flambement est réglé de manière optimale pour chaque fréquence d'excitation. En développant ensuite une méthode d'automatisation de cet ajustement en conditions réelles, il deviendrait possible d'augmenter de manière significative les performances du générateur. Une étude énergétique doit également être menée afin de comparer l'énergie nécessaire pour cet ajustement du niveau de flambement avec le gain d'énergie moyenne récupérée.

Les perspectives envisageables suite à l'étude de saut d'orbite par modification du niveau de flambement menée au Chapitre 4 concernent la réalisation technique du prototype. La solution qui a été choisie consiste à ajouter un actionneur piézoélectrique afin de modifier temporairement la longueur qui sépare la masse de ses points de fixation. Cette solution servant de

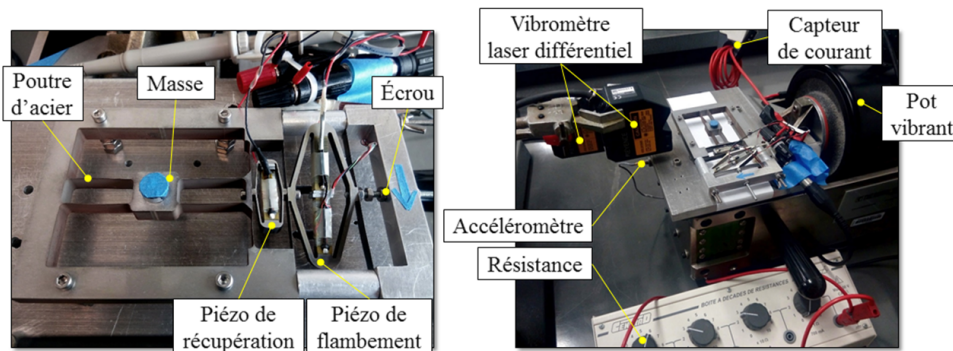
Chapitre 2 et 3

Ajuster le niveau de flambement en temps réel afin d'augmenter la puissance moyenne récupérée sans sortir de la plage de fréquences du comportement stabilisé



Chapitre 4

Optimiser le prototype permettant d'appliquer la stratégie de saut d'orbite par modification du niveau de flambement



Chapitre 5

Ajuster la quantité d'énergie extraite par le SECE partiel en temps réel pour agrandir la bande passante globale du générateur avec ce type de circuit

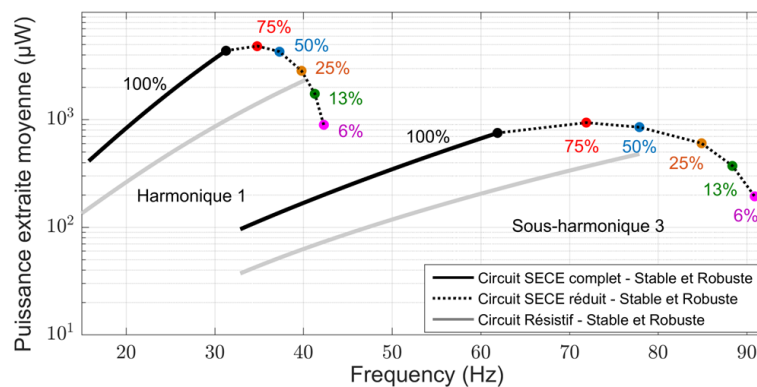


Figure 6.2 – Schéma illustrant les perspectives de cette thèse.

preuve de concept n'est pas optimale (couplage de l'actionneur, pertes dans le circuit d'alimentation, espace occupé...). Il conviendrait donc de poursuivre la réflexion sur cette solution en envisageant, par exemple, de n'utiliser qu'un seul convertisseur assurant tour à tour le rôle de récupérateur puis celui d'actionneur ou encore en remplaçant l'actionneur piézoélectrique par un système mécanique passif stockant de l'énergie et la relâchant au moment voulu pour modifier le niveau de flambement. Il est également possible de mettre en place une méthode d'automatisation de cette stratégie pour permettre au générateur de sélectionner la meilleure combinaison d'amplitude et d'instant de sur-flambement en fonction des conditions dans lesquelles il se trouve (fréquence de l'excitation). La encore, une étude énergétique doit être mise en place afin de comparer l'énergie consommée par cette automatisation avec le gain d'énergie moyenne récupérée.

Enfin, l'étude du circuit SECE menée au Chapitre 5 ouvre également certaines pistes de réflexions. Il serait par exemple intéressant de valider expérimentalement la stratégie de réglage proposée pour le circuit SECE partiel afin de mesurer l'augmentation réelle des performances du générateur. Il pourrait également être utile, pour la communauté scientifique liée à la récupération d'énergie, de développer des modèles théoriques pour les autres circuits d'interface AC-DC présents dans la littérature (circuit standard, circuit SSHI etc...) afin d'établir un comparatif complet de ces circuits pour le générateur bistable (intégrabilité, puissance extraite, bande passante).

De manière plus générale, il semble que le besoin du côté industriel soit bien présent concernant la récupération d'énergie ambiante pour l'alimentation de capteurs isolés sans fil. Pour avoir eu l'occasion de travailler, avant cette thèse, dans une entreprise (ACOEM [2]) spécialisée dans la maintenance conditionnelle (maintenance au cas par cas en fonction de l'état de santé réel des machines) par le diagnostic vibratoire, il m'a été possible de constater que l'alimentation énergétique, et notamment la récupération d'énergie vibratoire, constituait un enjeu d'importance. D'une part, la maintenance conditionnelle bénéficie à l'heure actuelle d'une popularité grandissante en milieu industriel, particulièrement le diagnostic vibratoire. D'autre part, l'enjeu semblait se situer autour du développement de réseaux entiers de capteurs communicants sans fil pour la surveillance vibratoire chez tous les grands industriels. L'autonomie réduite de ces capteurs (batteries à changer tous les trois ans au vue des conditions d'utilisation à relativement forte température) était bel est bien une problématique de premier plan. C'est pour cette raison que le développement de la récupération d'énergie vibratoire apparaît comme pertinente : le besoin est là. De plus, proposer un générateur avec une large plage de fréquences d'utilisation serait évidemment très intéressant pour des questions d'intégration (générateur unique pour des machines fonctionnant à des fréquences différentes, sensibilité réduite aux éventuels changements de fréquences d'excitation, etc...). Le développement de générateurs bistables est donc en parfaite adéquation avec le marché de la maintenance conditionnelle. Cependant, ces générateurs doivent encore franchir une étape importante concernant leur maturité technologique. Il n'existe pour l'instant pas de prototype utilisable en conditions réelles ayant démontré les performances de ces générateurs. Cet aspect représente le principal verrou actuel des générateurs bistables qui restent encore perçus comme une curiosité confinée au milieu académique. Ces générateurs étant maintenant bien compris du point de vue théorique, il serait judicieux de développer des exemples fonctionnels et intégrés afin de les faire connaître en dehors de la communauté scientifique. Pour que ces prototypes soient accueillis dans les meilleures conditions, les futures études auraient tout intérêt à se focaliser en premier lieu sur leur robustesse d'utilisation avant de démontrer leurs performances optimales (point clef pour répondre aux exigences industrielles). Il s'agit notamment de : (i) s'assurer de leur bonne tenue mécanique

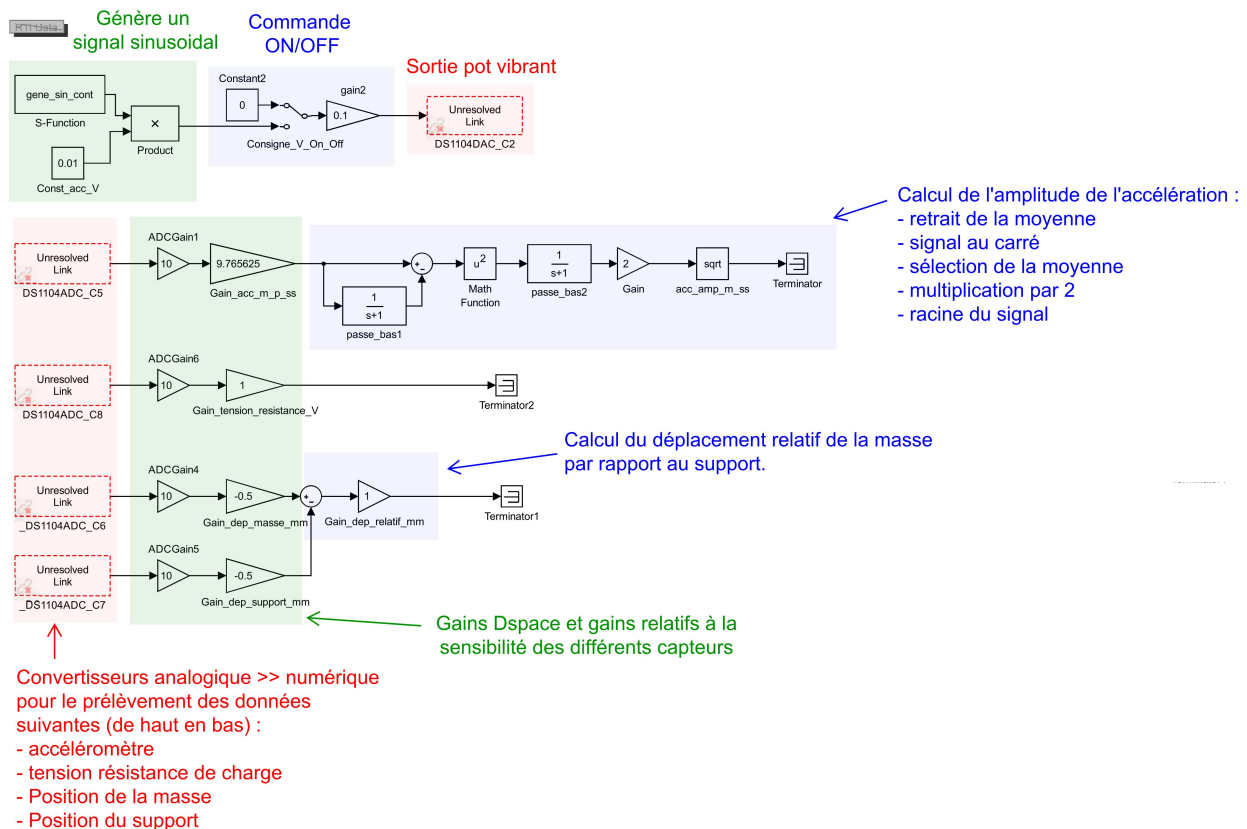
(en rupture et en fatigue) pour une grande variété d'utilisations (résistance aux chocs, à la manipulation, à des niveaux d'accélération variés); (ii) s'assurer de leur bon fonctionnement en toute circonstance (en particulier le maintien des orbites hautes dans le temps); (iii) s'assurer qu'ils puissent fonctionner rapidement avec différents types de charges connectées (petits éléments de stockage, capteurs, état de fonctionnement - veille, calculs, transmission...). Une fois la fiabilité de ces générateurs prouvée, les futurs prototypes pourront s'attarder à afficher les performances optimales des générateurs bistables et les comparer avec d'autres types de générateurs. Cette thèse aura ainsi permis d'avancer sur ces questions de fiabilité avec, premièrement, le développement du critère de robustesse de stabilité permettant de prédire la sensibilité des comportements de ces générateurs aux perturbations extérieures, puis avec une stratégie de saut d'orbite efficace pour assurer le maintien des orbites hautes dans le temps et enfin, avec l'étude du circuit d'interface AC-DC SECE pour une meilleure intégration aux applications visées.





## Annexes aux Chapitres 2 et 3

Le schéma Simulink détaillé en Figure A.1 a été utilisé pour l'asservissement du banc expérimental aux Chapitres 2 et 3 lors de l'étude des comportements sous-harmoniques du générateur bistable. Ce schéma a pour but d'assurer trois fonctions principales : (i) commander le pot vibrant afin que ce dernier impose au prototype une accélération sinusoïdale d'amplitude constante égale à  $5 \text{ m.s}^{-2}$  (pour ce faire il est possible de jouer manuellement sur la constante "Const\_acc\_V" jusqu'à ce que l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée et ce, à chaque changement de fréquence); (ii) automatiser l'acquisition des mesures provenant des différents capteurs. Les grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur (à l'aide du logiciel ControleDesk) sont détaillées dans le Tableau A.1. Le bloc "gene\_sin\_cont" génère un signal



**Figure A.1** – Schéma Simulink pour l'asservissement du banc expérimental utilisé dans les Chapitres 2 et 3 pour l'analyse des comportements sous-harmoniques.

**Table A.1** – *Grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur.*

Paramètre	Rôle
Consigne_On_Off	Permet d'autoriser ou non l'envoi du signal sinusoïdal au pot vibrant.
Const_acc_V	Permet de régler l'amplitude du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant. Cette dernière est ajustée de manière à ce que l'amplitude de l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée.
freq	Permet de régler la fréquence du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant (constante présente dans le bloc "gene_sin_cont").
st	Permet de régler le temps d'échantillonnage (constante utilisée dans le bloc "gene_sin_cont"). Valeur usuelle : 0,1 ms.

sinusoïdal de fréquence "freq". Son rôle est d'assurer la continuité de ce signal (et de sa dérivée) lorsque la fréquence est modifiée en jouant sur sa phase. Si  $\text{freq}[0]$  et  $\text{freq}[1]$  désignent l'ancienne et la nouvelle fréquence, si  $\phi[0]$  et  $\phi[1]$  désignent l'ancienne et la nouvelle phase et si  $t_1$  désigne l'instant où la fréquence est changée, alors le signal généré par le bloc "gene\_sin\_cont" devient :

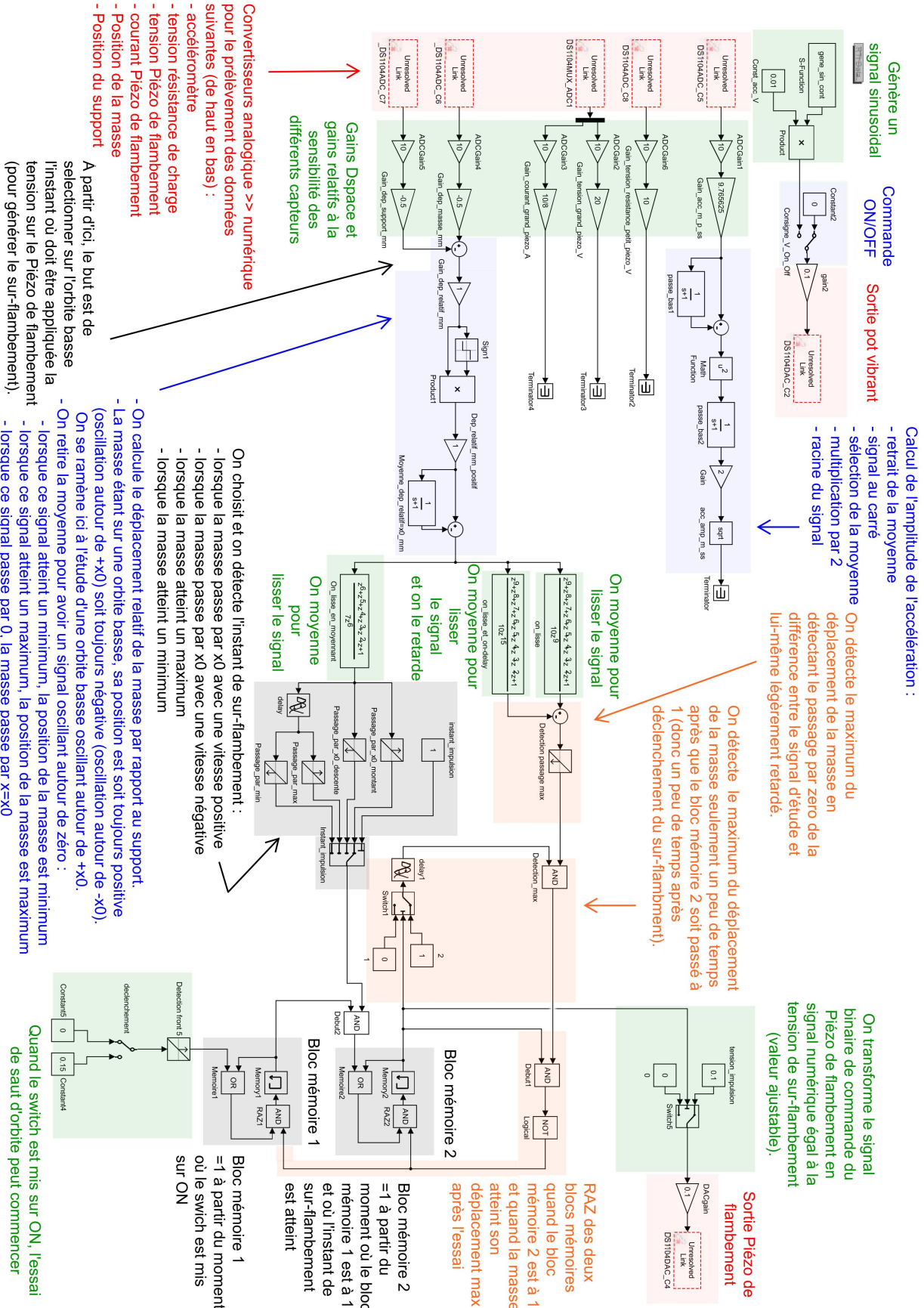
$$\begin{aligned} \text{Avant le changement de fréquence} &= \cos(2\pi\text{freq}[0]t + \phi[0]) \\ \text{Après le changement de fréquence} &= \cos(2\pi\text{freq}[1]t + \phi[1]) \\ \text{avec } \phi[1] &= 2\pi(\text{freq}[0] - \text{freq}[1])t_1 + \phi[0] \end{aligned} \tag{A.1}$$

## Annexes au Chapitre 4

Le schéma Simulink détaillé en Figure A.2 a été utilisé pour l'asservissement du banc expérimental au Chapitre 4 lors de l'étude de saut d'orbite. Ce schéma a pour but d'assurer trois fonctions principales : (i) commander le pot vibrant afin que ce dernier impose au prototype une accélération sinusoïdale d'amplitude constante égale à  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$  (pour ce faire il est possible de jouer manuellement sur la constante "Const\_acc\_V" jusqu'à ce que l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée et ce, à chaque changement de fréquence); (ii) automatiser l'acquisition des mesures provenant des différents capteurs; (iii) commander le *Piezo de flambement* afin de modifier en temps voulu le flambement du dispositif (stratégie de saut d'orbite). Les grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur (à l'aide du logiciel ControleDesk) sont détaillées dans le Tableau A.2. Le bloc "gene\_sin\_cont" génère un signal sinusoïdal de fréquence "freq". Son rôle est d'assurer la continuité de ce signal (et de sa dérivée) lorsque la fréquence est modifiée en jouant sur sa phase comme décrit en Équation (A.1).

**Table A.2** – *Grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur.*

Paramètre	Rôle
Consigne_On_Off	Permet d'autoriser ou non l'envoi du signal sinusoïdal au pot vibrant.
Const_acc_V	Permet de régler l'amplitude du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant. Cette dernière est ajustée de manière à ce que l'amplitude de l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée.
freq	Permet de régler la fréquence du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant (constante présente dans le bloc "gene_sin_cont").
st	Permet de régler le temps d'échantillonnage (constante utilisée dans le bloc "gene_sin_cont"). Valeur usuelle : 0,1 ms.
declenchement	Permet d'autoriser un essai de saut d'orbite.
instant_impulsion	Permet de régler l'instant où est appliqué le sur-flambement.
tension_impulsion	Permet de régler la tension appliquée au <i>Piézo de flambement</i> .



Génère un signal sinusoïdal

Commande ON/OFF

Sortie pot vibrant

Calcul de l'amplitude de l'accélération :

- retrait de la moyenne
- signal au carré
- sélection de la moyenne
- multiplication par 2
- racine du signal

On détecte le maximum du déplacement de la masse seulement un peu de temps après que le bloc mémoire 2 soit passé à 1 (donc un peu de temps après déclenchement du sur-flambement).

On transforme le signal binaire de commande du Piézo de flamblement en signal numérique égal à la tension de sur-flambement (valeur ajustable).

Sortie Piézo de flamblement

RAZ des deux blocs mémoires quand le bloc mémoire 2 est à 1 et quand la masse atteint son déplacement max après l'essai

Bloc mémoire 1 = 1 à partir du moment où le bloc mémoire 1 est à 1 et où l'instant de sur-flambement est atteint

Bloc mémoire 2 = 1 à partir du moment où le bloc mémoire 2 est à 1 et où l'instant de sur-flambement est atteint

Bloc mémoire 1 = 1 à partir du moment où le switch est mis sur ON, l'essai de saut d'orbite peut commencer

On moyenne pour lisser le signal

On moyenne pour lisser le signal et on le retarde

On choisit et on détecte l'instant de sur-flambement :

- lorsque la masse passe par x0 avec une vitesse positive
- lorsque la masse atteint un maximum
- lorsque la masse atteint un minimum

On calcule le déplacement relatif de la masse par rapport au support.

- La masse étant sur une orbite basse, sa position est soit toujours positive (oscillation autour de +x0) soit toujours négative (oscillation autour de -x0).
- On se ramène ici à l'étude d'une orbite basse oscillant autour de +x0.
- lorsque ce signal atteint un minimum, la position de la masse est minimum
- lorsque ce signal atteint un maximum, la position de la masse est maximum
- lorsque ce signal passe par 0, la masse passe par x=0

Gains Dspace et gains relatifs à la sensibilité des différents capteurs

Convertisseurs analogique -> numérique pour le prélèvement des données suivantes (de haut en bas) :

- accéléromètre
- tension résistance de charge
- courant Piézo de flamblement
- Position de la masse
- Position du support

A partir d'ici, le but est de sélectionner sur l'orbite basse l'instant où doit être appliquée la tension sur le Piézo de flamblement (pour générer le sur-flambement).

Figure A.2 – Schéma Simulink pour l'asservissement du banc expérimental utilisé dans le Chapitre 4 pour l'étude de saut d'orbite.

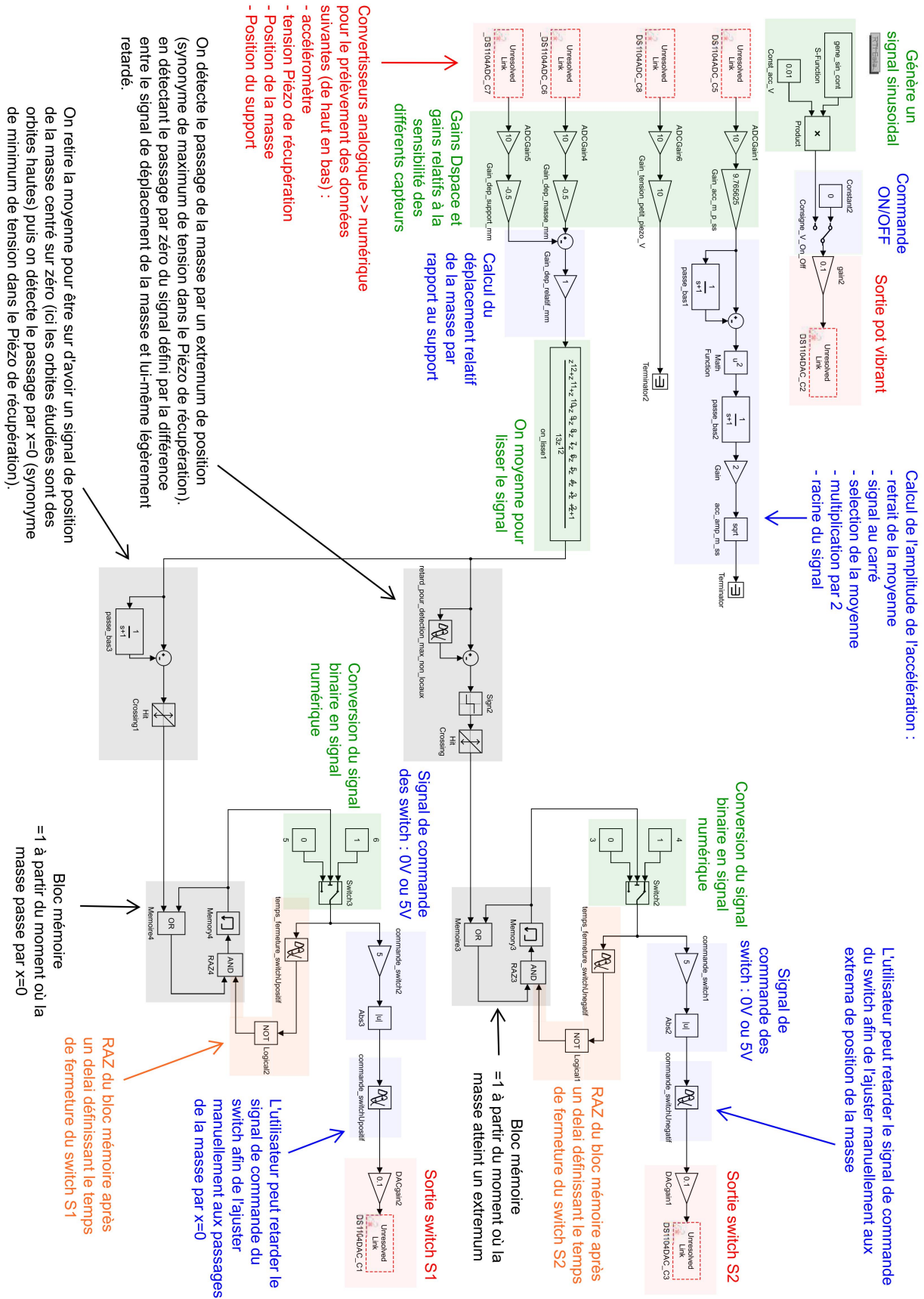
## Annexes au Chapitre 5

Le schéma Simulink détaillé en Figure A.3 a été utilisé pour l'asservissement du banc expérimental au Chapitre 5 lors de l'étude du circuit d'interface SECE. Ce schéma a pour but d'assurer trois fonctions principales : (i) commander le pot vibrant afin que ce dernier impose au prototype une accélération sinusoïdale d'amplitude constante égale à  $2,5 \text{ m.s}^{-2}$  (pour ce faire il est possible de jouer manuellement sur la constante "Const\_acc\_V" jusqu'à ce que l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée et ce, à chaque changement de fréquence); (ii) automatiser l'acquisition des mesures provenant des différents capteurs; (iii) commander les interrupteurs  $S_1$  et  $S_2$  du circuit d'interface SECE. Les grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur (à l'aide du logiciel ControleDesk) sont détaillées dans le Tableau A.3. Le bloc "gene\_sin\_cont" génère un signal sinusoïdal de fréquence "freq". Son rôle est d'assurer la continuité de ce signal (et de sa dérivée) lorsque la fréquence est modifiée en jouant sur sa phase comme décrit en Équation (A.1).

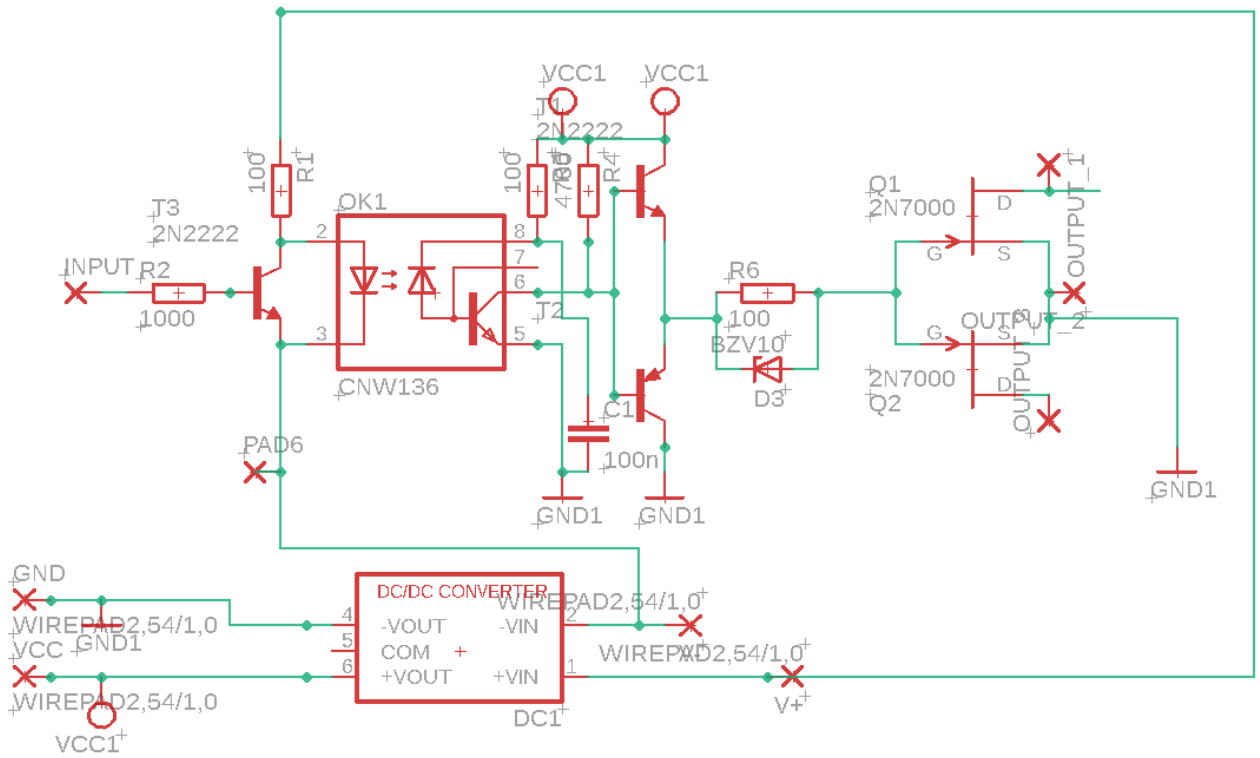
Le schéma de la carte permettant d'assurer le rôle d'interrupteur dans le circuit d'interface SECE étudié au Chapitre 5 est détaillé en Figure A.4. Ce schéma, ainsi que le descriptif qui suit, sont tirés d'un rapport interne au laboratoire LGEF écrit par Cyril Buttay en 2005 [100] : "Il s'agit de deux transistors MOS placés tête-bêche, de manière à obtenir un interrupteur bidirectionnel en courant sans diode. [...] Les MOSFET utilisés sont d'un calibre suffisant pour ne pas craindre les éventuelles surtensions (ils supportent leur courant nominal – 120 A – en avalanche). Ils peuvent cependant se montrer sur-dimensionnés lorsque l'on travaille avec des actionneurs piézoélectriques de faible capacité ( $< 100 \text{ nF}$ ) en raison des capacités parasites des MOSFET eux-mêmes. En raison de leur structure, ces interrupteurs ne nécessitent qu'un bit de commande en provenance de dSPACE."

**Table A.3** – *Grandeurs modifiables en temps réel par l'utilisateur.*

Paramètre	Rôle
Consigne_On_Off	Permet d'autoriser ou non l'envoi du signal sinusoïdal au pot vibrant.
Const_acc_V	Permet de régler l'amplitude du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant. Cette dernière est ajustée de manière à ce que l'amplitude de l'accélération mesurée corresponde à la valeur souhaitée.
freq	Permet de régler la fréquence du signal sinusoïdal envoyé au pot vibrant (constante présente dans le bloc "gene_sin_cont").
st	Permet de régler le temps d'échantillonnage (constante utilisée dans le bloc "gene_sin_cont"). Valeur usuelle : 0,1 ms.
commande_switchUpositif	Permet d'ajuster le signal de commande de l'interrupteur $S_1$ (en introduisant un retard) pour qu'il coïncide avec les maxima de tension du <i>Piézo de récupération</i> .
commande_switchUnegatif	Permet d'ajuster le signal de commande de l'interrupteur $S_2$ (en introduisant un retard) pour qu'il coïncide avec les minima de tension du <i>Piézo de récupération</i> .
temps_fermeture_switchUpositif	Permet d'ajuster le temps de fermeture de l'interrupteur $S_1$ pour ajuster la quantité d'énergie extraite du <i>Piézo de récupération</i> sur ses maxima de tension.
temps_fermeture_switchUnegatif	Permet d'ajuster le temps de fermeture de l'interrupteur $S_2$ pour ajuster la quantité d'énergie extraite du <i>Piézo de récupération</i> sur ses minima de tension.



**Figure A.3** – Schéma Simulink pour l’asservissement du banc expérimental utilisé dans le Chapitre 5 pour l’étude du circuit d’interface SECE.



**Figure A.4** – Schéma de la carte permettant d'assurer le rôle d'interrupteur dans le circuit d'interface SECE étudié au Chapitre 5.





# Bibliographie

- [1] B. Rashid and B.H. Rehmani. Applications of wireless sensor networks for urban areas : A survey. Journal of Network and Computer Applications, 60 :192–219, 2016.
- [2] Oneprod (acoem). <https://oneprod.com>.
- [3] M.T. Penella, J. Albesa, and M Gasulla. Powering wireless sensor nodes : Primary batteries versus energy harvesting. In International Instrumentation and Measurement Technology Conference, Singapore, 5-7 May 2009.
- [4] A. Gutiérrez, C. González, J. Jiménez-Leube, S. Zazo, N. Dopico, and I. Raos. A Heterogeneous Wireless Identification Network for the Localization of Animals Based on Stochastic Movements. Sensors, 9 :3942–3957, 2009.
- [5] Pile lithium/ion primaire energizer l91. <data.energizer.com/pdfs/l91.pdf>.
- [6] J.A. Paradiso and T. Starner. Energy scavenging for mobile and wireless electronics. IEEE Pervasive computing, 4 :18–27, 2005.
- [7] Wikipédia (lithium battery). [https://en.wikipedia.org/wiki/Lithium\\_battery](https://en.wikipedia.org/wiki/Lithium_battery).
- [8] International energy agency. <http://www.iea.org/statistics/statisticssearch/report/?year=2015&country=WORLD&product=Balances>.
- [9] Wikipédia (ressources et consommation énergétiques mondiales). [https://fr.wikipedia.org/wiki/Ressources\\_et\\_consommation\\_%C3%A9nerg%C3%A9tiques\\_mondiales#cite\\_note-AIEMonde-24](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ressources_et_consommation_%C3%A9nerg%C3%A9tiques_mondiales#cite_note-AIEMonde-24).
- [10] Wikipédia (moteur stirling). [https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur\\_Stirling](https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur_Stirling).
- [11] S. Basagni, M.Y. Naderi, C. Petrioli, and D. Spenza. Wireless Sensor Networks With Energy Harvesting. In S. Basagni, M. Conti, S. Giordano, and I. Stojmenovic, editors, Mobile Ad Hoc Networking, chapter 20, pages 701–736. Wiley-Blackwell, 2013.
- [12] H. Sharma, A. Haque, and Z. Jaffery. Solar energy harvesting wireless sensor network nodes : A survey. Journal of Renewable and Sustainable Energy, 10 :023704, 2018.
- [13] D. Champier. Thermoelectric generators : A review of applications. Energy Conversion and Management, 140 :167–181, 2017.
- [14] C.B. Williams and R.B. Yates. Analysis Of A Micro-electric Generator For Microsystems. Sensors and Actuators A : Physical, 52 :8–11, 1996.
- [15] Pi (manufacturer of precision motion systems). [http://www.pi-usa.us/products/PiezoActuators/index.php?ONL\\_AzoNano](http://www.pi-usa.us/products/PiezoActuators/index.php?ONL_AzoNano).

- [16] Supermagnete. [https://www.supermagnete.fr/data\\_table.php](https://www.supermagnete.fr/data_table.php).
- [17] S. Roundy, P.K. Wright, and J. Rabaey. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. Computer Communication, 26 :1131–1144, 2003.
- [18] J. Siang, M.H. Lim, and M. Salman Leong. Review of vibration-based energy harvesting technology : Mechanism and architectural approach. International Journal of Energy Research, pages 1–28, 2018.
- [19] M.F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, and D.D. Quinn. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting : A critical review and discussion. Applied Mechanics Reviews, 66 :40801, 2014.
- [20] R.L. Harne and K.W. Wang. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems. Smart Materials and Structures, 22 :23001, 2013.
- [21] J. Kymissis, C. Kendall, J. Paradiso, and N. Gershenfeld. Parasitic power harvesting in shoes. In Digest of Papers. Second International Symposium on Wearable Computers, Pittsburgh, 9-10 October 1998.
- [22] J. Granstrom, J. Feenstra, H.A. Sodano, and K. Farinholt. Energy harvesting from a backpack instrumented with piezoelectric shoulder straps. Smart Materials and Structures, 16 :1810–1820, 2007.
- [23] S. Pobering, N. Ebermeyer, and N Schwesinger. Generation of electrical energy using short piezoelectric cantilevers in flowing media. In Proc. SPIE 7288, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems, San Diego, California, 6 April 2009.
- [24] S. Priya. Modeling of electric energy harvesting using piezoelectric windmill. Applied Physics Letters, 87 :184101, 2005.
- [25] M. Pozzi and M. Zhu. Plucked Piezoelectric Bimorphs for Knee-joint Energy Harvesting : Modelling and Experimental Validation. Smart Materials and Structures, 20 :055007, 2011.
- [26] E. Arroyo, A. Badel, F. Formosa, Y.P. Wu, and J. Qiu. Comparison of electromagnetic and piezoelectric vibration energy harvesters : Model and experiments. Sensors and Actuators A : Physical, 183 :148–156, 2012.
- [27] S. Roundy and P.K. Wright. A piezoelectric vibration based generator. Smart Materials and Structures, 13 :1131–1142, 2004.
- [28] A. Badel and E. Lefeuvre. Wideband Piezoelectric Energy Harvester Tuned Through its Electronic Interface Circuit. Journal of Physics : Conference Series, 557 :012115, 2014.
- [29] Midé. <https://blog.mide.com/vibration-analysis-fft-psd-and-spectrogram>.
- [30] S.M. Shahruz. Design of mechanical band-pass filters for energy scavenging. Journal of Sound and Vibration, 292 :987–998, 2006.
- [31] G. Zhang and J. Hu. A Branched Beam-Based Vibration Energy Harvester. Journal of Electronic Materials, 43 :3912–3921, 2014.

- [32] B. Ahmed-Seddik, G. Despesse, S. Boisseau, and E. Defay. Self-powered resonant frequency tuning for Piezoelectric Vibration Energy Harvesters. In Journal of Physics : Conference Series, volume 476, page 012069, 2013.
- [33] A. Badel and E. Lefeuvre. Wideband Piezoelectric Energy Harvester Tuned Through its Electronic Interface Circuit. In Journal of Physics : Conference Series, volume 557, page 012115, 2014.
- [34] Y. Cai and Y. Manoli. System Design of A Time-Controlled Broadband Piezoelectric Energy Harvesting Interface Circuit. In IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pages 237–240, 24-27 May 2015.
- [35] A. Morel, R. Grézaud, G. Pillonnet, P. Gasnier, G. Despesse, and A. Badel. Active AC / DC control for wideband piezoelectric energy harvesting. In Journal of Physics : Conference Series, volume 773, page 012059, 2016.
- [36] A. Morel, G. Pillonnet, Y. Wanderoild, and A. Badel. Dielectric Losses Considerations for Piezoelectric Energy Harvesting. Journal of Low Power Electronics, 14 :244–254, 2018.
- [37] B.P. Mann and N.D. Sims. Energy Harvesting from the Nonlinear Oscillations of Magnetic Levitation. Journal of Sound and Vibration, 319 :515–530, 2009.
- [38] D.A.W. Barton, S.G. Burrow, and L.R. Clare. Energy Harvesting From Vibrations With a Nonlinear Oscillator. Journal of Vibration and Acoustics, 132 :021009, 2010.
- [39] R. Masana and M.F. Daqaq. Electromechanical Modeling and Nonlinear Analysis of Axially Loaded Energy Harvesters. Journal of Vibration and Acoustics, 133 :011007, 2011.
- [40] C. Lan, L. Tang, and W. Qinh. Obtaining high-energy responses of nonlinear piezoelectric energy harvester by voltage impulse perturbations. European Physical Journal Applied Physics, 79 :1–15, 2017.
- [41] A. Erturk and D.J. Inman. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable duffing oscillator with electromechanical coupling. Journal of Sound and Vibration, 330 :2339–2353, 2011.
- [42] S.C. Stanton, C.C. McGehee, and B.P. Mann. Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting : Investigation of a bistable piezoelectric inertial generator. Physica D, 239 :640–653, 2010.
- [43] W.Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, Y.P. Wu, N. Bencheikh, and A. Agbossou. A wideband integrated piezoelectric bistable generator : Experimental performance evaluation and potential for real environmental vibrations. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 26 :872–877, 2014.
- [44] W. Yang and S. Towfighian. A Hybrid Nonlinear Vibration Energy Harvester. Mechanical Systems and Signal Processing, 90 :317–333, 2017.
- [45] S. Zhou, J. Cao, W. Wang, S. Liu, and J. Lin. Modeling and experimental verification of doubly nonlinear magnet-coupled piezoelectric energy harvesting from ambient vibration. Smart Materials and Structures, 24 :055008, 2015.

- [46] S. Zhou, J. Cao, D.J. Inman, Ji. Lin, S. Liu, and Z. Wang. Broadband tristable energy harvester : Modeling and experiment verification. Applied Energy, 133 :33–39, 2014.
- [47] D. Alghisi, S. Dalola, M. Ferrari, and V. Ferrari. Triaxial Ball-Impact Piezoelectric Converter for Autonomous Sensors Exploiting Energy Harvesting from Vibrations and Human Motion. Sensors & Actuators : A. Physical, 233 :569–581, 2015.
- [48] Y.P. Wu, A. Badel, F. Formosa, W.Q. Liu, and A. Agbossou. Nonlinear vibration energy harvesting device integrating mechanical stoppers used as synchronous mechanical switches. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 25 :1658–1663, 2014.
- [49] Z. Lin, J. Chen, X. Li, J. Li, J. Liu, Q. Awais, and J. Yang. Broadband and three-dimensional vibration energy harvesting by a non-linear magnetoelectric generator. Applied Physics Letters, 109 :253903, 2016.
- [50] C. Richard, D. Guyomar, D. Audigier, and H. Bassaler. Enhanced semi passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In Proceedings of SPIE : Smart Structures and Materials, volume 3989, pages 288–299, 27 April 2000.
- [51] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre, and C. Richard. Toward Energy Harvesting Using Active Materials and Conversion Improvement by Nonlinear Processing. IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 52 :584–595, 2005.
- [52] D. Guyomar and M. Lallart. Recent Progress in Piezoelectric Conversion and Energy Harvesting Using Nonlinear Electronic Interfaces and Issues in Small Scale Implementation. Micromachines, 2 :274–294, 2011.
- [53] W.Q. Liu. Conception d’un dispositif de récupération d’énergie vibratoire large bande. PhD thesis, Université de Grenoble, 2014.
- [54] W.Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, Y.P. Wu, and A. Agbossou. Novel piezoelectric bistable oscillator architecture for wideband vibration energy harvesting. Smart Materials and Structures, 22 :035013, 2013.
- [55] W.Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, and Y.P. Wu. A new figure of merit for wideband vibration energy harvesters. Smart Materials and Structures, 24 :125012, 2015.
- [56] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and B. Ducharne. Experimental duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. Smart Materials and Structures, 20 :102001, 2011.
- [57] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and B. Ducharne. Simulation of a duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. Smart Materials and Structures, 20 :075022, 2011.
- [58] Y. Wu, A. Badel, F. Formosa, W. Liu, and A. Agbossou. Piezoelectric vibration energy harvesting by optimized synchronous electric charge extraction. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 24 :1445–1458, 2012.
- [59] G. Duffing. Buchbesprechungen. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Journal of Applied Mathematics and Mechanics), 1 :72–73, 1921.

- [60] S.P. Pellegrini, N. Tolou, M. Schenk, and J.L. Herder. Bistable vibration energy harvesters : A review. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 24 :1303–1312, 2013.
- [61] Micro Energy Harvesting. Wiley, 2015.
- [62] F.C. Moon and S.W. Shaw. Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions. Non-linear Mechanics, 18 :465–477, 1983.
- [63] S.A. Emam and A.H. Nayfeh. Nonlinear responses of buckled beams to subharmonic resonance excitations. Nonlinear Dynamics, 35 :105–122, 2004.
- [64] A.F. Arrieta, S.A. Neild, and D.J. Wagg. Nonlinear dynamic response and modeling of a bi-stable composite plate for applications to adaptive structures. Nonlinear Dynamics, 58 :259–272, 2009.
- [65] S.N. Mahmoodi, N. Jalili, and M. Ahmadian. Subharmonics analysis of nonlinear flexural vibrations of piezoelectrically actuated microcantilevers. Nonlinear Dynamics, 59 :397–409, 2010.
- [66] A.F. Arrieta, P. Hagedorn, A. Erturk, and D.J. Inman. A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting. Applied Physics Letters, 97 :104102, 2010.
- [67] A. Syta, G. Litak, M.I. Friswell, and S. Adhikari. Multiple solutions and corresponding power output of nonlinear piezoelectric energy harvesters. The European Physical Journal B, 89 :99, 2016.
- [68] Theory of Ordinary Differential Equations. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [69] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Annales scientifiques de l'ENS, 12 :47–88, 1883.
- [70] R.L. Harne, M. Thota, and K.W. Wang. Concise and high-fidelity predictive criteria for maximizing performance and robustness of bistable energy harvesters. Applied Physics Letters, 102 :053903, 2013.
- [71] F. Cottone, P. Basset, H. Vocca, L. Gammaitoni, and T. Bourouina. Bistable electromagnetic generator based on buckled beams for vibration energy harvesting. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 25 :1484–1495, 2014.
- [72] R.L. Harne and Q. Dai. Characterizing the robustness and susceptibility of steady-state dynamics in post-buckled structures to stochastic perturbations. Journal of Sound and Vibration, 395 :258–271, 2017.
- [73] R. Masana and M.F. Daqaq. Energy harvesting in the super-harmonic frequency region of a twin-well oscillator. Journal of Applied Physics, 111 :044501, 2012.
- [74] W.Y. Tseng and J. Dugundji. Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation. Journal of Applied Mechanics, 37 :292–297, 1971.
- [75] M.I. Friswell, S.F. Ali, O. Bilgen, S. Adhikari, A. W. Lees, and G. Litak. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 23 :1505–1521, 2012.

- [76] T. Huguet, A. Badel, and M. Lallart. Exploiting bistable oscillator subharmonics for magnified broadband vibration energy harvesting. Applied Physics Letters, 111 :173905, 2017.
- [77] T. Huguet, A. Badel, O. Druet, and M. Lallart. Drastic bandwidth enhancement of bistable energy harvesters : Study of subharmonic behaviors and their stability robustness. Applied Energy, 226 :607–617, 2018.
- [78] A.N. Landsbury, J.M. Thompson, and H.B. Stewart. Basin erosion in the twin-well duffing oscillator : two distinct bifurcation scenarios. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2 :505–532, 1992.
- [79] Nonlinear Dispersive Equations : Local and Global Analysis. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006.
- [80] Y.P. Wu, J. Cao, D.J. Inman, S. Liu, W. Wang, and J. Lin. Impact-induced high-energy orbits of nonlinear energy harvesters. Applied Physics Letters, 106 :093901, 2015.
- [81] A. Masuda, A. Senda, T. Sanada, and A. Sone. Global stabilization of high-energy response for a duffing-type wideband nonlinear energy harvester via self-excitation. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 24 :1598–1612, 2013.
- [82] J.P. Udani and A.F. Arrieta. Sustaining high-energy orbits of bi-stable energy harvesters by attractor selection. Applied Physics Letters, 111 :213901, 2017.
- [83] D. Mallick, A. Amann, and S. Roy. Surfing the high energy output branch of nonlinear energy harvesters. Physical Review Letters, 117 :197701, 2016.
- [84] M.I. Dykman and M.A. Krivoglaz. Theory of fluctuational transitions between stable states of a nonlinear oscillator. Sov. Phys. JETP, 50 :30–37, 1979.
- [85] R. Almog, S. Zaitsev, O. Shtempluck, and E. Buks. Signal amplification in a nanomechanical duffing resonator via stochastic resonance. Applied Physics Letters, 90 :013508, 2007.
- [86] A. Badel and E. Lefeuvre. Nonlinear Conditioning Circuits for Piezoelectric Energy Harvesters. In E. Blokhina, A. El Aroudi, E. Alarcon, and D. Galayko, editors, Nonlinearity in Energy Harvesting Systems Nonlinear, pages 321–359. Springer, Cham, 2016.
- [87] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, L. Petit, and D. Guyomar. A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems. Sensors and Actuators A : Physical, 126 :405–416, 2006.
- [88] G.K. Ottman, C.B Archin, H. Hofmann, and G.A. Lesieutre. Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply. In IEEE Transactions on Power Electronics, volume 17, pages 669–676, 97 October 2002.
- [89] G.K. Ottman, H. Hofmann, and G.A. Lesieutre. Optimized Piezoelectric Energy Harvesting Circuit Using Step-Down Converter in Discontinuous Conduction Mode. In IEEE Transactions on Power Electronics, volume 18, pages 696–703, 26 March 2003.
- [90] J.R. Liang and W.H. Liao. Piezoelectric Energy Harvesting and Dissipation on Structural Damping. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 20 :515–527, 2009.

- [91] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre, and C. Richard. Toward Energy Harvesting Using Active Materials and Conversion Improvement by Nonlinear Processing. In IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, volume 52, pages 584–595, April 2005 2005.
- [92] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, and D. Guyomar. Piezoelectric energy harvesting device optimization by synchronous charge extraction. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 16 :865–876, 2005.
- [93] G.W. Taylor, J.R. Burns, S.M. Kammann, W.B. Powers, and T.R. Welsh. The Energy Harvesting Eel : A Small Subsurface Ocean / River Power Generator. In IEEE Journal of Oceanic Engineering, volume 26, pages 539–547, October 2001.
- [94] L. Garbuio, M. Lallart, D. Guyomar, C. Richard, and D. Audigier. Mechanical Energy Harvester With Ultralow Threshold Rectification Based on SSHI Nonlinear Technique. In IEEE Transactions on Industrial Electronics, volume 56, pages 1048–1056, 1 April 2009.
- [95] E. Lefeuvre, G. Sebald, D. Guyomar, M. Lallart, and C. Richard. Materials , structures and power interfaces for efficient piezoelectric energy harvesting. Journal of Electroceramics, 22 :171–179, 2009.
- [96] M. Lallart, L. Garbuio, L. Petit, C. Richard, and D. Guyomar. Double Synchronized Switch Harvesting (DSSH) : A New Energy Harvesting Scheme for Efficient Energy Extraction. In IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, volume 55, pages 2119–2130, 7 October 2008.
- [97] W.Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, Y.P. Wu, and A. Agbossou. Wideband energy harvesting using a combination of an optimized synchronous electric charge extraction circuit and a bistable harvester. Smart Materials and Structures, 22 :125038, 2013.
- [98] Y.Y. Chen, D. Vasic, and Y.P. Liu. Study of a piezoelectric switching circuit for energy harvesting with bistable broadband technique by work-cycle analysis. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 24 :180–193, 2013.
- [99] L. Alari, J.P. Udani, A.F. Arrieta, and F. Braghin. Synchronized switch technique based on dynamical state of bi-stable energy harvesters. In Proceedings of SPIE, volume 10595, pages 1–13, 5 March 2018.
- [100] C. Buttay. Dspace au LGEF : guide local. Technical report, 2005.





# Liste des publications

## Brevets

1. Savelli G., Coronel P., Huguet T., Device with deformable shell including an internal piezoelectric circuit. U.S. Patent Application No 15/176,387, 24 août 2017.
2. Badel A., Formosa F., Huguet T., Récupérateur d'énergie vibratoire, numéro de demande FR1870615, juin 2018.

## Revue internationale

1. Huguet T., Badel A., Lallart M. (2017). Exploiting bistable oscillator subharmonics for magnified broadband vibration energy harvesting. Applied Physics Letters (IF 3.2), 111, 173905.
2. Huguet T., Badel A., Druet O., Lallart M. (2018). Drastic bandwidth enhancement of bistable energy harvesters : Study of subharmonic behaviors and their stability robustness. Applied Energy (IF 7.9), 226, 607–617.
  - Huguet T., Lallart M., Badel A. (soumis en juin 2018). Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification. Mechanical Systems and Signal Processing (IF 4.4).
  - Huguet T., Lallart M., Badel A. (soumis en novembre 2018). Bistable vibration energy harvester and SECE circuit : exploring their mutual influence. Nonlinear Dynamics (IF 4.3).

## Conférences internationales avec actes

1. Huguet T., Badel A., Druet O., Lallart M. (2018). Subharmonic orbits and their stability robustness to greatly enhance the bandwidth of bistable vibration energy harvesters. Proceedings of SPIE (mars 2018 à Denver, Colorado, USA), 10601(D), 1–12. *Présentation orale*.

## Conférences nationales avec actes

1. Huguet T., Badel A., Druet O., Lallart M. (2018). Significant enhancement of bistable energy harvesters bandwidth : subharmonic orbits and their stability robustness. JNRSE (mai 2018 à Besançon, France). *Présentation orale*.
2. Huguet T., Badel A., Lallart M. (2017). Exploiting bistable subharmonic orbits for a wider vibration energy harvesting bandwidth. JNRSE (mai 2017 à Lyon, France). *Poster*.

## Journée GDR sans actes

1. Huguet T., Badel A., Lallart M. (2017). Récupération d'énergie vibratoire non linéaire. GDR SEEDS : "Matériaux actifs et phénomènes couplés" (novembre 2017 à Lyon, France). *Poster*.
2. Huguet T., Badel A., Lallart M. (2017). Récupération d'énergie vibratoire non linéaire : Exploitation des oscillateurs bistables pour améliorer la bande passante des générateurs. GDR SEEDS : "Matériaux actifs et phénomènes couplés" (décembre 2017 à Grenoble, France). *Présentation orale*.





## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : HUGUET

DATE de SOUTENANCE : 6 décembre 2018

Prénoms : Thomas

TITRE : Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2018LYSEI113

Ecole doctorale : Électronique, Électrotechnique et Automatique (EEA)

Spécialité : Génie Électrique

RESUME :

Cette thèse concerne la récupération d'énergie vibratoire dans le but de proposer une alternative aux batteries conventionnelles pour l'alimentation de systèmes autonomes sans fil. Ceci permettrait d'améliorer leur compacité (moins d'énergie stockée), leur tenue dans des environnements sévères (forte température) et de réduire leur besoin d'entretien. Cette étude se concentre plus particulièrement sur les générateurs oscillants bistables, intéressants pour leur grande plage de fréquences utile comparée à celle offerte par les générateurs linéaires (limitée à la zone de résonance). Cette thèse se divise en quatre grandes parties. La première présente la construction du modèle mathématique permettant de prédire les différents comportements du générateur bistable (ces derniers pouvant coexister sur certaines plages de fréquences) incluant l'étude de la stabilité aux petites perturbations. Ce modèle met en évidence des comportements du générateur encore peu exploités pour la récupération d'énergie : les comportements sous-harmoniques dont la plage de fréquences permet d'agrandir la bande passante globale du générateur. Afin d'améliorer la précision du modèle, celui-ci est ensuite complété dans la deuxième partie par un critère semi-analytique : le critère de robustesse de stabilité qui caractérise la sensibilité du générateur aux perturbations extérieures (plus un comportement est robuste plus il sera facile à maintenir dans le temps). Le modèle ainsi obtenu ainsi que le système expérimentale montrent une grande plage de fréquences sur laquelle coexistent des comportements intéressants pour la récupération d'énergie (les orbites hautes) et des comportements non désirables (les orbites basses). La troisième partie de cette thèse présente donc différentes stratégies permettant de sauter des orbites basses vers les orbites hautes en jouant directement sur les paramètres du générateur. Enfin, la quatrième et dernière partie s'attarde sur l'influence du circuit d'interface AC-DC entre le générateur bistable et la charge en vue de son intégration future.

MOTS-CLÉS : Récupération d'énergie - Vibration - Générateur inertiel - Bistable - Comportement sous-harmonique  
Robustesse de stabilité - Saut d'orbite - Circuit d'interface SECE

Laboratoires de recherche : Laboratoire de Génie Électrique et Ferroélectricité (LGEF) -INSA Lyon  
Laboratoire SYstèmes et Matériaux pour la MÉcatronique (SYMME) -Université Savoie-Mont-Blanc

Directeur de thèse : Mickaël Lallart (LGEF)

Co-Directeur de thèse : Adrien Badel (SYMME)

Composition du jury :

Collet, Manuel	DR	École Centrale de Lyon	Président
Lefeuvre, Élie	PU	Université Paris Sud	Rapporteur
Ouisse, Morvan	PU	ENSMM Besançon	Rapporteur
Jean-Mistral, Claire	MCF	INSA Lyon	Examinatrice
Michon, Guilhem	PU	ISAE Supaéro	Examineur
Poulin-Vittrant, Guylaine	CR	Université de Tours	Examinatrice
Lallart, Mickaël	MCF	INSA Lyon	Directeur de thèse
Badel, Adrien	PU	Université Savoie-Mont-Blanc	Co-directeur de thèse
Druet, Olivier	DR	Université Lyon 1	Invité