



HAL
open science

De la géométrie et du calcul des infiniment petits: les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)

Sandra Bella

► To cite this version:

Sandra Bella. De la géométrie et du calcul des infiniment petits: les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706). Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université de Nantes, 2018. Français. NNT: . tel-01942296

HAL Id: tel-01942296

<https://hal.science/tel-01942296>

Submitted on 3 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601

Mathématiques et Sciences et Technologies

de l'Information et de la Communication

Spécialité : Histoire des Mathématiques

Par

Sandra Bella

De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)

Thèse présentée et soutenue à l'UFR des sciences et techniques, le 23 octobre 2018

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629

Rapporteurs avant soutenance :

KNOBLOCH Eberhard Professeur, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (Allemagne)
PEIFFER Jeanne Directrice de recherche, Centre Alexandre Koyré, UMR 8560

Composition du Jury :

Président :

GOLDSTEIN Catherine Directrice de recherches CNRS, IMJ-PRG Paris

Examineurs :

MALET Antoni Professeur des universités, Universitat Pompeu Fabra, Barcelone (Espagne)

SAINT RAYMOND Xavier Professeur des universités de Nantes

Directeur de thèse :

BARBIN Evelyne Professeure des universités émérite, Université de Nantes

Co-directeur de thèse :

RABOUIN David Chargé de recherche CNRS, Laboratoire SPHERE, UMR 7219

Al meu pare

Remerciements

Nous voulons remercier notre directrice de thèse, Evelyne Barbin, qui par sa rigueur, son exigence et sa disponibilité à toute épreuve, a permis largement l'aboutissement d'un travail satisfaisant. Nous voudrions remercier tout autant notre co-directeur, David Rabouin, pour son acuité, sa confiance et son optimisme, il a apporté sans aucun doute un supplément d'âme à notre travail.

Nous remercions Jeanne Peiffer et Eberhard Knobloch de nous avoir fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de notre thèse, Catherine Goldstein, Antoni Malet et Xavier Saint-Raymond, celui d'en être les membres du jury.

Nous avons été souvent amenés à nous déplacer pour consulter des archives et des manuscrits. Nous remercions tout particulièrement Florence Greffe aux Archives de l'Académie des sciences pour son aide précieuse.

Des chercheurs estimés ont bien voulu éclaircir nos questions et nous fournir des références essentielles : Sophie Audidière, Niccolò Guicciardini, Jeanne Peiffer, Claudine Pouloin, Christophe Schmit et Claire Schwartz.

Pour les traductions latines, nous remercions les compétences de David Rabouin, Pierre et Paula Iselin, ainsi que celles d'Annie Michel-Pajus.

Notre travail a nécessité des déplacements pour des consultations de fonds anciens et pour assister à des colloques ou des universités d'été. Nous remercions Norbert Schappacher, directeur du GDR Histoire des Mathématiques 3398 et l'Université de Nantes de nous en avoir amplement facilité l'accès.

La bataille n'était pas gagnée d'avance et nous remercions nos camarades Mónica Blanco Abellán, Frédéric Métin et Richard Gomez de leurs encouragements.

L'écriture de la thèse est un chemin épineux et parfois solitaire. Nous avons bénéficié, tout au long, de ces *petites choses* qui font de l'ordinaire un vrai luxe. Que soient remerciés Ramon et Caterina pour leur soutien, Paul D. pour sa constance, Véronique M-N. pour ces douces heures amicales autour d'un thé, Madame Reynaud pour sa cuisine succulente (et pour sa bonté), et quelques autres êtres merveilleux, ils ont permis de continuer à faire vibrer la belle basse obstinée qui a été posée jadis dans mon cœur.

Résumé

Cette thèse essaie de reconstituer l'histoire de la réception du calcul leibnizien dans les milieux savants français (1690-1706). Nous repérons deux lieux : d'abord au sein d'un groupe autour de Malebranche, initié au calcul par Jean Bernoulli, puis à l'Académie des sciences. Dans les deux cas nous mettons en avant les horizons d'attente des acteurs. Alors que cet épisode a été beaucoup étudié en termes de rupture, nous insistons, par une analyse des sources primaires – dont plusieurs inédites – sur le fait que l'appropriation du calcul s'effectue aussi grandement sur le fond de pratiques en usage. Dans la première partie, nous examinons l'héritage mathématique à partir duquel est reçu le calcul de Leibniz par le groupe autour de Malebranche. Cette analyse nous permet de montrer que leur appropriation s'appuie sur des pratiques partagées et non sur un terrain vierge comme on l'a trop souvent supposé. Nos mathématiciens réalisent que l'algorithme différentiel permet de donner une étoffe nouvelle à des notions déjà impliquées dans les méthodes d'invention précédentes. Dans la seconde partie, nous étudions la genèse et la structuration du premier ouvrage de calcul différentiel écrit par l'Hospital et publié en 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes*. Après cette publication, le calcul devient très présent à l'Académie. Une crise y éclate entre partisans et adversaires du calcul. L'examen de leurs discours, objet de notre troisième partie, permet de préciser les notions telles que celle de différentielle ou de courbe, ainsi que la manière dont il est possible d'interpréter géométriquement les résultats issus des calculs.

Mots clés :

Histoire des Mathématiques - Infiniment petit - Calcul différentiel - Académie des sciences - Guillaume de l'Hospital - Pierre Varignon - Jean Bernoulli - Gottfried Wilhelm Leibniz

Abstract

This thesis is an attempt to reconstruct the reception history of Leibnizian calculus in French learned milieux (1690-1706). Two areas have been located: first among members of Malebranche's circle, introduced to calculus by Jean Bernoulli, then the Académie des Sciences. In either case, the purpose is to highlight the horizon of expectation of the participants. Whereas this episode has been widely studied in terms of disruption, it is argued, through an analysis of primary sources –some of which un-edited– that calculus was greatly appropriated against a background of practices in use. The first chapter examines the mathematical heritage from which calculus was received by Malebranche's circle. This analysis enables me to show that their appropriation rested on shared practices, and was not a virgin land, as has often been supposed. Our mathematicians realized that the differential algorithm fleshed out notions already involved in previous invention methods. The second chapter studies the genesis and construction of the first book of differential calculus written by L'Hospital and published in 1696, entitled *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes* [*Analysis of the infinitely small for the intelligence of curbs*]. After this publication, calculus became very present at the Académie. A crisis arose between supporters and detractors of calculus. A close examination of their discourses –the object of my third chapter– helps clarify such notions as those of differential and curb, as well as the way it is possible to geometrically interpret the results from calculus.

Keywords :

History of Mathematics - Infinitely small - Differential calculus - Académie des sciences - Guillaume de l'Hospital - Pierre Varignon - Jean Bernoulli - Gottfried Wilhelm Leibniz

SOMMAIRE

Remerciements.....	3
Résumé.....	5
SOMMAIRE.....	7
Abréviations.....	13
Introduction générale.....	15
1. Genèse de la thèse.....	15
2. La problématique de la thèse.....	20
2.1) Autour de Malebranche (1690-1696).....	20
2.2) Comprendre les dissonances à l'Académie (1696-1706).....	26
3. Une méthodologie pour mener une enquête.....	29
4. Plan détaillé de la thèse.....	32
5. Sources primaires.....	35
Première partie : Héritage des méthodes d'invention à l'aube de la réception du calcul leibnizien (1635-1692).....	37
CHAPITRE 1 L'héritage des méthodes calculatoires des tangentes.....	39
Introduction.....	39
1) La méthode des cercles tangents dans <i>La Géométrie</i>	44
1.1) <i>La Géométrie</i> : « essai de cette méthode ».....	44
1.2) La méthode des cercles tangents de Descartes : la tangente comme racine double.....	47
2) Fermat : généraliser le calcul des tangentes.....	51
2.1) Méthode des <i>Maximis et minimis</i> : l'adégalité ou la « comparaison feinte ».....	52
2.2) À la recherche d'une méthode générale pour calculer les tangentes.....	55
3) Interprétations et améliorations des méthodes des tangentes.....	70
3.1) La méthode des tangentes de Descartes-Hardy-Debeaune.....	71

3.2) La nullité de e : une évidence calculatoire.....	76
3.3) « e » comme « infinité parvam » ou « infiniment petit ».....	82
3.4) La <i>Nova methodus</i> : la disparition de e ?	90
Conclusion.....	95
CHAPITRE 2 Des méthodes par indivisibles au calcul avec indivisibles et infiniment petits	99
Introduction.....	99
1) La démonstration « à la manière des Anciens ».....	102
2) Les méthodes de Cavalieri-Torricelli et les confrontations directes à la composition du continu.....	106
2.1) Cavalieri et ses critiques.....	106
2.2) Les méthodes des indivisibles de Torricelli.....	113
3) Roberval et Pascal, un langage des indivisibles pour démontrer	121
4) <i>L'Arithmétique de l'infini</i> de Wallis : une voie pour inventer ou pour démontrer ? Objections de Fermat.....	150
5) Techniques de « transmutations » et infiniment petits : Grégory et Barrow	159
Conclusion.....	166
CHAPITRE 3 Autour de Malebranche : l'horizon d'attente avant les leçons de Jean Bernoulli (1690 – 1692).....	171
Introduction.....	171
1) Expliquer la disparition du e - Les premières méthodes des tangentes (1690-1691).....	181
1.1) La première méthode des tangentes de l'Hospital (1690).....	181
1.2) L'Abbé de Catelan : de nouveaux arguments (1691)	183
2) Le polygone à une infinité de côtés, éclaircissements sur son statut	192
2.1) Le cercle comme polygone à une infinité de côtés : proposition ou demande ? Les <i>Éléments de géométrie</i> de Lamy	193
2.2) La méthode des tangentes de l'Hospital (1692) : l'articulation entre le polygone à une infinité de côtés et le calcul.....	197

3) Démontrer <i>l'Arithmétique des infinis</i> , le contentieux avec Wallis	205
3.1) Prestet : <i>l'Arithmétique des infinis sans géométrie</i> (1689)	205
3.2) Leibniz : au-delà de Wallis (les opuscules des <i>Acta Eruditorum</i>)	212
3.3) « <i>L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur</i> » : étude d'un manuscrit de l'Hospital (1692)	221
3.3) Autres formulations de « <i>Arithmétique des infinis</i> »	229
Conclusion.....	232
Deuxième partie : La genèse de <i>l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes</i> (1692-1606)	235
CHAPITRE4 Réception et interprétation du calcul leibnizien autour de Malebranche (décembre 1691- juin 1696).....	237
Introduction.....	237
1) Premiers contacts avec le calcul leibnizien (1691-1692).....	242
1.1) <i>De calculo differentialum</i> : premier contact avec la symbolique leibnizien	242
1.2) Les cahiers de calcul intégral de Malebranche, première période (1692-1693)..	248
2) L'apprentissage de Guillaume de l'Hospital (décembre 1692- juin 1696).....	264
2.1) Jean Bernoulli, professeur de l'Hospital	264
2.2) À la recherche d'un traitement calculatoire des problèmes liés à la courbure : Réception et assimilation de la « différentielle de la différentielle » par le Marquis de l'Hospital	269
2.3) « Il y a longtemps que je sçais que vous êtes universel » : la relation l'Hospital-Leibniz	292
3) L'Hospital et le groupe autour de Malebranche	311
4) La première interprétation varignonienne du calcul leibnizien, une articulation avec un héritage barrownien	316
Conclusion.....	332
CHAPITRE 5 Le traité <i>Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes</i> (1696) et sa première lecture varignonienne	337

Introduction.....	337
1) La Préface : un plaidoyer pour <i>l'Analyse des infinis</i>	344
1.1) L'émergence de l'Analyse des infinis : le récit d'un progrès	345
1.2) Cette analyse « qui penetre jusques dans l'infini même »	346
2) Les définitions et les suppositions de l'Analyse des infiniment petits	349
2.1) Des définitions	349
2.2) Les demandes ou suppositions	363
2.3) Enquête sur l'origine de quelques « fondements » de l'analyse des infinis de l'Hospital	369
3) <i>L'Analyse des infiniment petits</i> : la conquête de la généralité.....	382
3.1) Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes : le devenir des <i>Nouveaux Éléments</i>	382
3.2) Une structure au service de la généralité.....	393
3.3) Descartes subsumé : la section X	396
4) Varignon, lecteur de l'Analyse des infiniment petits	400
4.1) Des méthodes des tangentes	400
4.2) Réflexions sur les méthodes précédentes de M ^r de Fermat, Barrow et Leibnitz : les aveux de Varignon	411
Conclusion.....	421
Troisième partie : Le calcul leibnizien à l'Académie (1696-1706)	427
CHAPITRE 6 La gestation d'une crise à l'Académie (1693-1699).....	429
Introduction.....	429
1) Huygens, Leibniz et l'Hospital : discussion sur le statut du calcul	433
1.1) Huygens académicien	433
1.2) 21 Nov. 1692, comment cette quadrature fut libérée des ténèbres	443
1.3) Les trois manières du Marquis	444
1.4) Conclusion : calculer vs calculer.....	449

2)	Sur le statut des infiniment petits, éclaircissements de Leibniz auprès de Wallis et Jean Bernoulli (1698-1699).....	452
2.1)	L'échange Wallis-Leibniz : <i>nihil</i> VS infiniment petit	452
2.2)	L'échange avec Jean Bernoulli : « réalités » vs fictions	456
3)	Une officialisation de l'Analyse des infiniment petits : la lecture de Joseph Sauveur	458
4)	Indéfiniment et infiniment petits : une pratique partagée à l'Académie.....	463
3.1)	Philippe de la Hire : un mathématicien du <i>vieux style</i>	463
3.2)	Galloys, hommage à Roberval	469
3.3)	Le retour de la « belle Hélène », nouvelles démonstrations de l'isochronisme de la cycloïde : La Hire-Varignon	472
5)	Les problèmes physico-mathématiques : épreuve déterminante pour le calcul leibnizien.....	476
4.1)	Le problème de la brachystochrone : un enjeu pour le calcul leibnizien.....	479
4.2)	Varignon : généraliser des problèmes mécaniques à l'aide du calcul leibnizien ...	493
6)	Les méthodes algébriques et les courbes : le dessein de Rolle	504
7)	Le règlement académique de janvier 1699 et ses conséquences.....	512
	Conclusion.....	518
	CHAPITRE 7 Une Crise et ses dénouements à l'Académie des sciences (1700-1706).....	523
	Introduction.....	523
1)	Définir la « différentielle » : débat autour du statut des infiniment petits du calcul leibnizien.....	527
1.1)	Sur les fondements : l'attaque frontale de Michel Rolle.....	527
1.1)	La position de Leibniz : l'épisode au <i>Journal de Trévoux</i>	534
1.2)	Le « Système de l'infini » sans fondements.....	541
2)	Les critiques du calcul en tant que calcul.....	552
2.1)	L'offensive à l'Académie : La méthode de Hudde vs calcul leibnizien.....	552

2.2) L'interdiction de dispute transgressée : le débat déplacé au <i>Journal des Sçavans</i>	569
3) Vers les dénouements	588
3.1) Le calcul leibnizien pratiqué	588
3.2) Quelques éclaircissements des méthodes rivales.....	605
3.3) Fontenelle, un récit de la réception du calcul leibnizien à l'Académie	613
Conclusion.....	634
Conclusion générale.....	637
Bibliographie.....	647
Sources primaires	647
Manuscrits	647
Imprimés.....	651
Sources secondaires.....	669
Liste des illustrations.....	687

Abréviations

Manuscrits

FR

Manuscrit de la Bibliothèque nationale française cote français suivi du numéro, suivi du ou des folios.

FL

Manuscrit de la Bibliothèque nationale française cote latin suivi du numéro, suivi du ou des folios.

PVARS

Procès-verbaux de séances de l'Académie Royale des sciences, [**PVARS**, suivi de la date, le tome et les pages].

Imprimés

AE

Acta eruditorum

AI

L'Hospital (de), Guillaume, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, De l'Imprimerie Royale, Paris, 1696, [**AI** suivi de la page].

AIII B

Leibniz, G.W., *Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* [**A** suivi du numéro de la série en chiffres romains du numéro du tome, de la page].

HARS ou MARS

Fontenelle (de), Bernard le Bouyer, *Histoire de l'Académie des Sciences, avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, tirez des registres de l'Académie*. [**HARS**, suivi de l'année et de la page ; pour les mémoires **MARS**, suivi de l'année et de la page].

JS

Journal des Sçavants [**JS**, suivi de la date].

LCD

Bernoulli, Jean, *Lectiones de calculo differentialium*, Paul Schafheitlin, Naturforschende Gessellschaft in Basel, Basel : Naturforschende Gesellschaft, 1922, [**LCD**, suivi de la page].

Mathematica

Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes, Mathematica*, tome XVII-2, édité par Pierre Costabel, Librairie philosophique J. Vrin, 1968. [**Mathematica** suivi de la page].

OF

Fermat, Pierre, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publiques, Paris, Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, (1891-1912), tomes I, II, III, V, [**OF**, suivi du tome et la page].

OH

Huygens, Christiaan, *Œuvres complètes*, publiée par la Société hollandaise des Sciences, Martinus Nijhoff, La Haye, 1888-1950, [**OH**, suivi du tome et de la page].

Introduction générale

Il faut sans cesse ramener des preuves
qu'on part prélever dans le sous-sol de la terre
et de l'ombre de l'histoire¹.

Pascal Quignard

1. Genèse de la thèse

Nos premières recherches ont eu pour objet le calcul leibnizien et ses premières lectures en France. Elles ont abouti à la rédaction d'un mémoire de master d'histoire des sciences et des techniques de l'université de Nantes intitulé « Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696) »². En 1960, André Robinet publie un article intitulé « Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France »³ dans lequel il recense de nombreux manuscrits, principalement mathématiques, qu'il date sur une période allant de 1690 à 1705. Ces manuscrits témoignent d'une activité collective de plusieurs savants, regroupés autour du philosophe Nicolas Malebranche (1638-1715) et dont le marquis Guillaume de l'Hospital (1661-1704) est l'un des membres les plus actifs. Certains de ces manuscrits portent certes sur l'appropriation du nouveau calcul de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), mais dans nombre d'entre eux, les auteurs s'inspirent de méthodes antérieures, provenant en partie de mathématiciens

¹ Quignard, Pascal, *Sur le jadis*, Dernier Royaume II, Gallimard, Paris, 2002, p. 21.

² Bella, Sandra, *Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696)*, Mémoire pour l'obtention du Master 2 Histoire des Sciences et des Techniques, Université de Nantes, sous la direction de Dominique Bénard, juin 2010.

³ Robinet, André, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°4, Paris, 1960, p. 287-308.

étrangers, notamment les Anglais Isaac Barrow (1630-1677) et John Wallis (1616-1703). Une partie de ces manuscrits a été retranscrite et commentée par Pierre Costabel dans un volume des *Œuvres complètes* de Malebranche publié en 1967¹. Cette publication a été une base pour notre mémoire, lequel a consisté à analyser les résolutions de problèmes de géométrie, principalement des recherches de tangentes ou de points d'inflexion, ou encore d'obtention de quadratures, à l'aide de méthodes précédant la connaissance du calcul de Leibniz. Il s'agissait ensuite de comparer ces résolutions avec celles obtenues avec l'aide du nouveau calcul. Nous avons été attentifs à la manière dont ces mathématiciens interprétaient et manipulaient les nouveaux signes de l'algorithme leibnizien. L'échange épistolaire entre l'Hospital et Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien déjà au fait du calcul, montrait qu'un passage par un questionnement sur la signification des symboles était nécessaire au Marquis pour s'approprier « l'Analyse des infinis », cette conclusion était particulièrement illustrée par la recherche d'un traitement calculatoire de la notion de courbure.

Ce mémoire constitue une première approche de la réception du calcul leibnizien, mais nos analyses se sont révélées insuffisantes car, pour la période à laquelle il s'intéresse, il ne nous a pas permis de comprendre, sous tous ses aspects, comment l'adhésion au calcul leibnizien a été possible : en particulier il ne nous a pas permis de saisir les enjeux historiques et épistémologiques de l'élaboration par l'Hospital du premier ouvrage portant sur le calcul différentiel intitulé *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (AI), et publié en 1696². Cet ouvrage a pour dessein de présenter le calcul différentiel avec ses règles et ses principaux usages pour l'étude des courbes. Expliquons-nous.

En 1684, Leibniz publie dans le journal savant *Acta Eruditorum*, un article intitulé « Nouvelle méthode pour chercher les *Maxima* et les *Minima*, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les quantités fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique »³. Il y présente son calcul en introduisant les toutes

¹ Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes, Mathematica*, tome XVII-2, édité par Pierre Costabel, Librairie philosophique J. Vrin, 1968. Sera désigné par « *Mathematica* ».

² *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie royale, Paris, 1696. Dorénavant « AI ».

³ « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum* (AE), octobre 1684, p. 467

nouvelles notations dx, dy, \dots pour les différences ou différentielles des lettres indéterminées¹ x et y , puis fournit les règles de différenciation.

Il convient tout de suite de remarquer que cette publication s'ajoute à la liste de méthodes de recherche de tangentes ou de *maxima* et *minima*, inventées pour les premières environ cinquante ans auparavant. Le titre de l'article souligne le confort calculatoire de cette nouvelle méthode qui permet de traiter directement avec des quantités irrationnelles et fractionnaires. Ainsi, en suggérant que les méthodes calculatoires qui la précèdent étaient moins commodes, l'auteur s'adresse à une communauté de géomètres, jusque-là « embarrassés » par les difficultés calculatoires, et susceptibles d'approuver favorablement les atouts de la nouvelle méthode. Cette publication n'est pas isolée, les années suivantes, entre 1684 et 1691, Leibniz publie, à la suite, d'autres articles aux *Acta eruditorum*, dans lesquels il montre les avantages de son calcul pour d'autres applications et par rapport à d'autres méthodes, notamment pour les quadratures², ou pour des problèmes physico-mathématiques³. Ces articles tardent à être diffusés et ne sont au début que l'affaire de quelques mathématiciens, essentiellement les frères Bernoulli. Ces derniers publient également des articles où ils résolvent des problèmes géométriques ou physico-mathématiques avec lesquels ils illustrent combien le nouveau calcul s'y applique aisément. Une sorte d'émulation s'instaure dans le but de produire de plus en plus de résultats via le calcul différentiel, et ainsi montrer sa fécondité au sein de la « République des Lettres ».

Parce que le calcul leibnizien est présenté comme nouveau, il convient de souligner d'emblée que sa lecture par ceux qui le reçoivent, s'effectue nécessairement en l'articulant aux nombreuses méthodes calculatoires pour l'étude des courbes, dont ils héritent et qu'ils pratiquent. Le calcul leibnizien n'arrive pas en *terres vierges*, il est lu par des mathématiciens avec des usages acquis.

Le calcul littéral de Viète avait conduit Descartes (1596-1650) et Fermat (1607-1665) à élaborer des méthodes calculatoires pour construire des normales ou des tangentes. Ces méthodes ont été lues, interprétées et améliorées par leurs héritiers immédiats ou tardifs, français ou étrangers, Jean de Beaugrand (1584-88 ?-1640), Pierre Hérigone (1580-1643),

¹ « literam indeterminatam », *ibid*, p. 467.

² Par exemple, « De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium aque infinitorum », *AE*, janvier 1689.

³ « De linea isochrona in qua grave sine acceleratione descendit et de controversia cum Dn. Abbate D.C., *AE*, avril 1689, « De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcuque medias proportionales et Logarithmos », *AE*, juin 1691.

John Wallis, Fran Van Schooten (1615-1660), Christiaan Huygens (1629-1695) ou Isaac Barrow. Ces auteurs publient des ouvrages pour lesquels leurs lectures des méthodes de Descartes et Fermat sont reconstituées selon leurs interprétations.

Ces méthodes font intervenir des lettres censées représenter des longueurs – par exemple le signe « e » pour désigner le terme *excrementum* signifiant augmentation –, dont le devenir au cours du procédé calculatoire dépend de la méthode pratiquée, et pouvant disparaître une fois le résultat obtenu. L'introduction d'entités, dont on suppose l'existence pendant un calcul, afin d'obtenir un résultat n'est pas une démarche nouvelle. Au XVI^e siècle Bombelli introduit des entités qui permettent de résoudre l'équation irréductible du troisième degré. Ces quantités ont une définition qui rend impossible leur existence géométrique puisque leur carré est négatif. Cependant, Bombelli ne s'occupe pas de la réalité de telles quantités, il fournit des règles opératoires permettant de les manipuler et d'être utiles à l'obtention de l'expression des racines. À la fin du calcul, ces quantités ont disparu. Leur statut consiste exclusivement à « feindre ». Dans ce contexte, nous appellerons par le terme « fiction » toute entité qui, au cours de l'application d'une méthode, est supposée être et qui peut disparaître lorsque le résultat est établi. Cette acceptation n'implique pas l'existence ou la non-existence de cette entité¹.

À la même époque, de nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes de quadratures ont été inventées. En considérant des « éléments », nommés « indivisibles », comme s'ils composaient le continu de la grandeur, Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) et Blaise Pascal (1623-1662), élaborent des méthodes – dites des « indivisibles » – permettant de comparer des aires ou de des volumes de figures géométriques. La supposition d'indivisibles pour comparer ou, plus tard, pour calculer des aires, implique donc aussi d'admettre des fictions comme « les racines ineffables »² de l'algèbre. Cependant, en raison du statut labile de la notion d'« indivisible », car lié à la difficile question de la composition du continu, l'avancement de ces méthodes ne se réalise pas sans entraves, leur développement

¹ À ce sujet on pourra consulter Clero, Jean-Pierre, *Les raisons de la fiction, les philosophes et les mathématiques*, Armand Colin, Paris, 2004.

² Cavalieri, Bonaventura, *Exercitationes Geometricae Sex*. Bononiae, (...) Typis Iacobi Montji, MDCXLVII. *Superiorum permissu, Jacobi Monti*, 1647, p. 202.

s'accompagne immédiatement et durablement d'objections philosophiques ou métamathématiques¹ qui remettent en question leur exactitude.

Il existe, depuis l'Antiquité, des propositions qui énoncent la manière de construire des tangentes ou qui établissent la quadrature de certaines courbes particulières, mais leurs auteurs ne livrent pas le moyen par lequel ils sont parvenus à ces résultats et se contentent d'exposer leurs démonstrations, basées sur un raisonnement par l'absurde. Les méthodes de tangentes ou les méthodes des indivisibles, qui émergent au XVII^e siècle sont en revanche des méthodes « directes », qui montrent la voie de leur découverte. Elles sont appelées « méthodes d'invention »², en raison du terme latin « *invenire* », signifiant « découvrir » ou « trouver ». Pour certains géomètres, la méthode n'a de valeur qu'heuristique. Ainsi, parvenir au résultat en usant d'une méthode d'invention ne dispense pas nécessairement d'une démonstration « à l'ancienne ». Soulignons que ce n'est pas le cas par exemple pour un auteur comme Descartes : à ses yeux, le chemin calculatoire qui mène au résultat vaut pour démonstration³. Il est important de souligner que la valeur démonstrative d'un résultat obtenu par une méthode d'invention est une question cruciale dans le développement de l'exercice mathématique au XVII^e siècle⁴. En ce qui concerne les méthodes calculatoires, cette question peut d'ores et déjà être formulée plus précisément. Il convient premièrement d'évaluer l'autonomie d'un calcul, c'est-à-dire savoir si un résultat obtenu par un calcul vaut pour démonstration, et deuxièmement de juger de quelle manière le statut des éléments impliqués dans ce calcul intervient dans cette appréciation.

La question de l'autonomie d'un calcul et celle du statut octroyé aux éléments manipulés lors de ce calcul sont au cœur de la compréhension des difficultés liées à l'adhésion à une méthode calculatoire. Le calcul leibnizien, en tant que méthode

¹ Jullien, Vincent, « Explaining the Sudden Rise of Methods of Indivisibles », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 8-10.

² Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, Ellipses, Paris, 2006.

³ Descartes, René, « Objections et réponses », *Œuvres de Descartes*, publiées par Adam-Tannery, Edition Vrin, Paris, 1996, AT, IX, a, p. 121, « L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes ; en sorte que si le lecteur le veut suivre, et jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée ».

⁴ Ce sujet a été largement traité par Barbin, Evelyne, « Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^e siècle », *Fragments d'histoire des mathématiques II*, Paris, APMEP, 1987, p. 125-159 ou « Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle » dans « Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 40, 1992, p. 29-49.

calculatoire, partage avec les autres méthodes cette même problématique. Cependant, il ne serait question ici de faire un amalgame. Notre remarque, tout au contraire, incite bien plutôt à suivre une démarche comparative qui conduit à différencier entre les formes que prennent ces difficultés dans l'exercice d'une méthode calculatoire autre que le calcul leibnizien et dans l'exercice de celui-ci.

2 La problématique de la thèse

Cette thèse a pour objet la reconstitution de l'histoire de la réception du calcul leibnizien dans les milieux savants français (1690-1706). Nous repérons deux lieux : d'abord au sein d'un groupe autour de Malebranche, initié au calcul par Jean Bernoulli, puis à l'Académie des sciences.

2.1) Autour de Malebranche (1690-1696)

La première partie de notre travail s'étend de 1690 à 1696. Le cercle qui se forme autour de Malebranche est héritier de méthodes d'invention. En raison de cet héritage, nous avons jugé nécessaire dans un premier temps d'examiner ces méthodes, puis de comprendre de quelles manières ils en héritent. Leurs écrits montrent qu'ils sont coutumiers de l'analyse cartésienne ou des méthodes calculatoires de Fermat. Il s'agit tout d'abord de saisir quelles sont leurs conceptions et leurs pratiques avant leur rencontre avec le calcul leibnizien : comment perçoivent-ils un calcul ? Quelle valeur lui octroient-ils ? Quelle est leur expérience avec les symboles ?

Dans un deuxième temps, nous apprécierons les changements que le calcul leibnizien introduit dans ces pratiques¹ et de quelles manières leurs conceptions sont transformées à son contact. Pendant son séjour parisien s'étalant de décembre 1691 à décembre 1692, Jean Bernoulli fait bénéficier l'Hospital de leçons de calcul différentiel et intégral. Il partage ensuite partiellement les manuscrits de ces cours avec le groupe autour de Malebranche. Cette période s'achève par la publication de l'ouvrage du Marquis de l'Hospital en 1696.

¹ De manière générale, nous entendons par « pratique mathématique » une expression qui désigne les mathématiques comme elles s'effectuent de manière purement factuelle. Nous empruntons à Paolo Mancosu, ici et tout au long de notre travail, le sens de cette expression, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, New York, 1996, p. 4.

Interroger les modalités de cette première réception du calcul leibnizien autour de Malebranche est notre première question.

1690-1696 : Apprentissages et interprétations

Plusieurs études ont ouvert la voie d'une analyse de cette réception.

André Robinet a étudié particulièrement le rapport de Malebranche avec les mathématiques. Dans son article « La philosophie malebranchiste des mathématiques »¹, il relève que le philosophe est un cartésien pour expliquer sa prudence à l'égard de l'utilisation de l'infini en mathématique. Cependant, Robinet souligne que contrairement à Descartes, Malebranche a une préférence pour l'arithmétique au détriment de la géométrie². En s'appuyant sur la représentation d'un Malebranche aux idées cartésiennes plutôt conservatrices, Robinet estime que :

L'adhésion de Malebranche et du groupe des mathématiciens qui l'entouraient aux mathématiques de l'infini constitue l'un des plus spectaculaires revirements de l'histoire de la philosophie et du mouvement des idées³.

Pour lui, cette « conversion », de Malebranche et de « ses amis », au calcul de l'infini, « rien ne permettait » de s'y attendre et « on est surpris de les voir s'acclimater peu à peu aux nouvelles conceptions »⁴.

Nous ne partageons pas ce genre de propos. Pour y souscrire, il faudrait supposer premièrement que toute pratique mathématique est entièrement déterminée et prescrite par des considérations philosophiques, et deuxièmement qu'il existe entre les conceptions philosophiques des points d'irréductibilité qui empêcheraient de développer une certaine manière de s'exercer aux mathématiques. Tel serait le cas de la supposée opposition entre les philosophies de Descartes et de Leibniz⁵. À notre sens, le travail de Robinet part de présupposés dont la radicalité ne permet pas de prendre en compte la dimension historique et sociale de la réception du calcul leibnizien par « Malebranche et ses amis ». De plus, il postule que l'adhésion au calcul leibnizien par Malebranche conduit à celle de « ses amis ».

¹ « La philosophie malebranchiste des mathématiques », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 14, n°3, Paris, 1961.

² *Ibid*, p. 207.

³ *Ibid*, p. 205.

⁴ *Ibid*, p. 230.

⁵ À ce sujet, Belaval, Yvon, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960.

Il n'explique pas cette implication et il ne précise pas non plus ce qu'il entend par « amis », à l'exception du Marquis de l'Hospital qui en fait partie¹. De fait, il utilise l'expression « groupe malebranchiste » sans la légitimer. Dans l'article « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », il désigne ce « groupe » par un ensemble d'individus qui ont été proches ou très proches de Malebranche², mais sur une période qui s'étale entre 1690 et la mort de celui-ci en 1715. Cela représente une période trop longue pour caractériser le passage des méthodes d'invention au calcul leibnizien. Ce flou terminologique nous a conduits à réfléchir sur l'appellation « groupe malebranchiste » et, comme nous le verrons plus avant, nous l'avons mise à l'épreuve pour différencier les moments de la réception du calcul leibnizien.

La thèse et les travaux récents de Claire Schwartz³ sont une élaboration critique à l'encontre de la position d'André Robinet. En s'appuyant sur une étude historique du réseau qui a pu inspirer Malebranche et sur une étude technique des commentaires par Malebranche des leçons de Jean Bernoulli, elle démontre qu'il n'y pas eu, un « revirement » dans sa pensée mais tout au contraire une cohérence entre cette dernière et ce qu'il y a de cartésien dans sa pensée.

Le travail d'édition de Pierre Costabel, précédemment cité, constitue une source d'intérêt en ce qui concerne les travaux collaboratifs de Malebranche et du cercle réuni autour de lui, surtout pour la période s'étalant de 1690 à 1694. L'objectif de l'édition de Costabel est de rendre compte d'un « mouvement scientifique en France et de la part que Malebranche y a prise »⁴. Il s'agit d'une « réforme mathématique » entreprise par Malebranche dans laquelle sont présents de manière plus ou moins active, l'Hospital, Louis Byzance (1647-1722), Louis Carré (1663-1711), Charles-René Reyneau (1656-1728), Jean Prestet (1648-1690), Pierre Varignon (1654-1722) et François de Catelan (*floruit* 1676-1710).

¹ En fait, Robinet écrit « Malebranche et ses amis » ou « Le marquis de l'Hospital et ses amis » sans jamais préciser qui sont dans l'ensemble désigné par « amis ». Si l'on se réfère à l'article « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », il désigne « groupe malebranchiste » un ensemble d'individus qui ne peuvent collaborer tous au même moment.

² L'Hospital et Madame de l'Hospital, Reyneau, Jaquemet, Byzance, Bernard Lamy, Varignon, Carré, Montmort, Sauveur, Saurin, Guisnée, Renée d'Elisagaray, Fontenelle, Pagnac, Nicole, Privat de Molières, ...

³ Schwartz, Claire, *Malebranche et les mathématiques*, thèse de doctorat en Philosophie, sous la direction de Denis Kambouchner et de Richard Glauser, soutenue à Paris, Université Paris I, en co-tutelle avec Neuchâtel, 2007, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, Presses universitaires Paris-Sorbonne, à paraître en septembre 2018, « Leibniz et le "groupe malebranchiste" : La réception du calcul infinitésimal », *Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hildesheim/ Zurich/New York, Olms, Tome I*, p. 223-236.

⁴ *Mathematica* p. 1.

Une partie des manuscrits retranscrits appartient à l'époque qui précède les cours de Jean Bernoulli, c'est-à-dire entre 1690 et 1692, et illustrent ce que Costabel appelle la recherche d'une « voie moyenne entre l'analyse cartésienne et les méthodes nouvelles [c'est-à-dire les méthodes de Barrow et de Wallis] »¹. Ces manuscrits mettent en évidence la familiarisation du groupe avec les techniques analytiques de Barrow conduisant entre autres à la production d'une méthode de tangente par l'Hospital. Ce qu'ils appellent « Arithmétique des infinis », en référence à l'ouvrage de Wallis, consiste en des quadratures de coniques via cette méthode de tangentes. Une partie de l'édition est consacrée aux leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli ; en particulier une comparaison est effectuée entre le contenu d'une copie produite par Carré et les leçons telles qu'elles ont été publiées dans les œuvres complètes de Jean Bernoulli. La comparaison de tracés de figures par des graphismes différents permet à Costabel de tirer des conclusions intéressantes sur les différences de degrés d'appropriation du calcul par ces mathématiciens. Les cahiers de calcul intégral de Malebranche, qui sont l'objet principal de cette édition, sont minutieusement commentés.

En ce qui concerne la manière dont ces mathématiciens articulent leurs pratiques des méthodes d'invention avec le calcul leibnizien, Costabel fournit quelques indications. Pour l'Hospital, il affirme :

Alors qu'il demandait souvent à son jeune professeur « à quoi bon se servir dans le calcul différentiel de la lettre caractéristique d » pour dx et dy au lieu de se contenter des notations a et e « à la manière de Barrow », ce n'est que progressivement qu'il a compris où se situait la nécessité d'une « caractéristique » et ce qui constituait le succès de celle de Leibniz. (...)À partir de 1693 cependant l'Hospital, en raison des problèmes de plus en plus complexes que sa correspondance avec Bernoulli l'obligeait à étudier, a approfondi sa compréhension et mûri son projet d'un traité de calcul différentiel (...)²

A contrario, il souligne de quelle manière Malebranche « maltraite les différentielles avec la conscience la plus tranquille et dans le seul but de trouver un automatisme, un *procédé* qui lui paraisse plus mécanique »³.

¹ *Ibid*, p. 5.

² *Ibid*, V.

³ *Ibid*.

Dans cette édition, Costabel examine à travers quelques exemples l'articulation entre les pratiques du cercle autour de Malebranche et le calcul de Leibniz. Toutefois, son examen mérite d'être précisé et prolongé.

Dans cette même édition de Costabel, il est très peu question de Varignon. Ceci est cohérent puisqu'entre 1690 et 1693, ce dernier ne fait pas partie du cercle le plus proche de Malebranche et ne participe donc pas au projet collectif de « Réforme mathématique ». Pierre Costabel, dans son article « Pierre Varignon et la diffusion du calcul différentiel et intégral »¹ et surtout Jeanne Peiffer dans son article « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton »², fournissent des renseignements sur l'initiation de Varignon aux méthodes barrowniennes, et soulignent l'indépendance de celle-ci avec celle du cercle autour de Malebranche. Varignon commence à accéder au calcul leibnizien presque exclusivement grâce à l'échange épistolaire avec Jean Bernoulli, à partir de décembre 1692. Il n'a donc pas accès aux leçons de Jean Bernoulli. Pour la période allant de 1692 à 1696. Les commentaires de l'édition de la correspondance de Jean Bernoulli avec Varignon³, éditée par Pierre Costabel et Jeanne Peiffer, montrent les hésitations et les difficultés rencontrées par Pierre Varignon lors de cet apprentissage.

Le calcul différentiel rendu public

L'Hospital, par contre, a bénéficié des leçons de Jean Bernoulli, d'abord à Paris (de décembre 1691 jusqu'à environ juillet 1692, puis à sa maison de campagne à Oucques où il invite le jeune professeur jusqu'à son départ en décembre 1692). À partir des leçons de calcul différentiel⁴. L'Hospital élabore le premier traité de calcul différentiel qui est publié en juin 1696 par l'intermédiaire de Malebranche. La publication de la correspondance entre Jean Bernoulli et l'Hospital a permis à l'éditeur Otto Spiess de montrer qu'un nombre très important de résultats de l'AI sont des découvertes propres à Jean Bernoulli⁵. Pour certaines

¹ « Pierre Varignon et la diffusion du calcul différentiel et intégral », *Les conférences du Palais de la découverte*, série D, Editions du Palais de la découverte, Paris, 1966.

² « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Leibniz'auseinandersetzung mit vorgängern und zeitgenossen*, *Studia Leibnitiana*, supplementa XXVIII, 1990, p. 244-266.

³ *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon erster teil: 1692-1702*, Bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, unter Benutzung von Vorarbeiten von Joachim Otto Fleckenstein Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

⁴ Inédites jusqu'à leur publication en 1922 par le professeur Schafheitlin, *Lectiones de calculo differentialium*, Paul Schafheitlin; Basel, Naturforschende Gesellschaft, 1922.

⁵ À cet égard, le tableau dressé par Otto Spiess dans lequel il met en correspondance les articles de l'AI avec un résultat figurant dans les leçons de calcul différentiel de Jean Bernoulli ou dans une lettre échangée entre les

d'entre elles, l'Hospital les avait reçues moyennant un contrat établissant un traitement annuel de 300 livres versé au jeune professeur¹.

Dans La Préface de l'AI, l'Hospital reconnaît « devoir beaucoup aux lumières de M^{rs} Bernoulli, surtout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue »², c'est-à-dire Jean. À la réception de l'ouvrage, en février 1697, ce dernier félicite l'Hospital :

Vous m'avez fait trop d'honneur en parlant si avantageusement de moi dans la préface ; quand je composerai quelque chose, à mon tour je ne manquerai pas de vous y donner la revanche. Vous expliquez les choses fort intelligemment ; j'y trouve aussi un bel ordre et les propositions bien rangées ; enfin tout est admirablement bien fait, et mille fois mieux que j'aurais pu faire³.

Jean Bernoulli connaissait donc bien les intentions du Marquis et approuvait le projet. Après la lecture de l'ouvrage, il n'adresse pas immédiatement une quelconque revendication. Cependant, plus tard, en 1704 il soupçonne l'Hospital de s'être attribué certaines règles particulières dont celle de l'article 163⁴ de l'AI. Dans une lettre à Varignon, il juge que la Préface de l'Hospital est « trop vague » en ce qui concerne son propre apport dans l'élaboration de l'ouvrage, de sorte que le public ne peut « juger que la plupart des règles, que je lui avais fournies par écrit, et qu'il n'avait fait autres choses que les digérer et mettre en ordre »⁵. Dans une autre lettre, il déclare fermement à Varignon que l'Hospital « n'a pas eu plus de part à la production de ce livre que d'avoir traduit en français la matière que je luy avois donné(e) la plus part en latin (...) »⁶.

L'Hospital a effectué volontairement des emprunts aux leçons de calcul différentiel, qu'il a traduites en français. En outre, il a repris plus ou moins directement des résultats

deux savants, est probant, *Der Briefwechsel von Johan Bernoulli*, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band 1, Bâle, Birkhäuser Verlag, 1955, hrsg. Von O. Spiess, Birkhäuser, Basel, 1955, p. 151.

¹ Spiess, Otto, *Der Briefwechsel von Johan Bernoulli*, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 1. *op. cit.*, p. 123-156 et « Une édition de l'œuvre des mathématiciens Bernoulli », *Archives internationales d'histoire des sciences*, HS, Paris, 1947, p. 359-362.

² AI, Préface.

³ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital mi-février 1697, *Der Briefwechsel von Johan Bernoulli*, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 1, *op. cit.*, p. 341.

⁴ AI, *op. cit.*, p. 145.

⁵ Lettre de Jean Bernoulli à Pierre Varignon du 18 juillet 1705, *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 3, *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon zweiter teil: 1702-1714*, Bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, p. 171.

⁶ Lettre de Jean Bernoulli à Pierre Varignon du 26 février 1707, *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 215.

fournis par Bernoulli dans ses lettres. Son traité est donc indubitablement un emprunt, certes indirect et partiel, mais qui pourrait même être considéré comme un plagiat¹. Néanmoins cela ne dispense pas d'étudier la présentation du Marquis. Notre intérêt porte sur les choix d'exposition de cet emprunt – pour définir les notions nouvelles du calcul différentiel, pour formuler les suppositions, expliquer les règles de calcul – et sur la manière d'agencer, soit les problèmes ou les propositions à l'intérieur d'une section, soit les sections entre elles. Nous considérons qu'examiner en quoi consiste ce « bel ordre et les propositions bien rangées » doit faire partie d'une étude de la réception du calcul². Nous souhaitons analyser cet ouvrage en tant que synthèse de la lecture hospitalienne du calcul leibnizien, mais aussi en tant qu'écrit destiné à faire connaître ce calcul à un public plus large³

Dans une partie de sa thèse⁴, Mónica Blanco Abellán compare la résolution de problèmes communs aux leçons de calcul différentiel de Jean Bernoulli et à *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* du Marquis de l'Hospital. Son travail présente plusieurs intérêts dont l'un est de pointer souvent la généralité des propositions chez l'Hospital par rapport à celles des leçons de Jean Bernoulli⁵.

2.2) Comprendre les dissonances à l'Académie (1696-1706)

Une périodisation de notre étude s'est imposée. Son premier moment (1690-1696) correspond à l'époque durant laquelle le groupe autour de Malebranche reçoit le calcul de Leibniz.

¹ Pour une typologie de l'emprunt, on pourra consulter : Maurel-Indart, Hélène, *Du plagiat*, édition revue et augmentée, Gallimard, Paris, 2011, p. 266-299. L'auteur récapitule les formes d'emprunt sous forme d'un tableau récapitulatif très instructif (p. 292).

Pour une analyse de l'accusation de plagiat par Jean Bernoulli : Eneström, Gustaf, « Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de *l'Analyse des infiniment petits* », *Bibliotheca Mathematica*, N°3, Stockholm, 1894.

² Une traduction en anglais récente de l'AI est précédée d'une préface avec des commentaires intéressants mais qui ne satisfont pas à notre dessein, Bradley, Robert E, Petrilli, Salvatore J., Sandifer, C. Edward, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits*, an annotated translation with source material by Johann Bernoulli, *Science Networks Historical studies*, 50, Springer, 2015.

³ Bella, Sandra, « L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes : ouvrage de recherche ou d'enseignement ? », *Les ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, coordonné par E. Barbin et M. Moyon, PULIM, 2013.

⁴ *Hermenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII : de l'Analyse des infiniment petits de l'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)*, memoria presentada per aspirar al grau de Doctor de Matemàtiques, director : Dr Josep Pla i Carrera, UAB, departament de Matemàtiques, juliol 2004.

⁵ En outre, Bernoulli aurait tendance à considérer des coordonnées orthogonales alors que pour les mêmes problèmes, l'Hospital adapte les coordonnées à la nature de la courbe.

Elle est couronnée par la publication de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* en 1696. Cette publication marque aussi l'entrée officielle dans la sphère publique du calcul leibnizien, en particulier à l'Académie royale des sciences. L'Hospital, à partir de 1693, puis Varignon, à partir de 1694, avaient déjà lu des mémoires utilisant le calcul leibnizien pendant les séances académiques. Cependant, dans les milieux savants, en particulier celui de l'Académie des sciences, le calcul leibnizien est encore une affaire de peu de personnes, essentiellement les deux que nous venons de mentionner. Comment sont reçus ces mémoires par leurs pairs ?

L'Académie est une institution, créée par Colbert en 1666, elle a eu plusieurs générations d'académiciens¹. Varignon traite de « vieux stile »². certains de ses pairs mais sans les nommer. L'abbé Galloys (1632-1707), académicien depuis 1669³, fait partie de la plus vieille génération. Il est également professeur de grec au Collège Royal, poste qui lui sied bien puisqu'il est grand admirateur de l'Antiquité. De même, le renommé géomètre Philippe de la Hire (1640-1718) a été nommé académicien en 1678⁴ grâce à son ouvrage sur les coniques⁵ dans lequel les démonstrations suivent strictement la manière des Anciens. Il a été par ailleurs proche de Varignon lorsqu'il fréquentait son logement, rue Saint-Jacques vers 1685⁶.

Les critiques explicites envers le calcul leibnizien ne débutent que plus tard. Elles viennent de Michel Rolle, académicien depuis 1685. Le désaccord tenace et paradoxal entre partisans et adversaires du calcul qui s'installe à l'Académie nous a conduits à interroger les manières avec lesquelles les deux camps s'affilient au même héritage, c'est-à-dire comment ils interprètent de manière si opposée les écrits de leurs prédécesseurs et comment cette lecture leur permet de légitimer leur position. Comprendre ce désaccord est notre deuxième question.

¹ Sturdy, David J., *Science and social status, the members of the Académie des Sciences, 1666-1750*, The Boydell Press, 1995.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 6 août 1697, *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 124.

³ Pour plus de renseignements sur Galloys, Sturdy, David J., *Science and social status, op. cit.*, p. 87-90.

⁴ *Ibid*, p. 196.

⁵ La Hire, Philippe (de), *Nouveaux Elémens des sections coniques*, Pralard, Paris, 1679.

⁶ Niderst, Alain, *Fontenelle. À la recherche de lui-même (1657-1702)*, Editions A.G. Nizet, Paris, 1972, p. 345-352.

Peu d'études historiques ont été réalisées sur la période qui précède le débat (1696-1700)¹.

En 1989, Paolo Mancosu² remarque à juste titre que rares sont les travaux consacrés au débat académique³, et mise à part une étude de Michel Blay, tous ignorent l'aspect du fondement du calcul qui se joue au cours du débat.

Dans son article « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley »⁴, Michel Blay relève les difficultés liées au statut des différentielles soulevées par Rolle. Ils les rapprochent de celles énoncées par Georges Berkeley environ trente ans plus tard dans son ouvrage *l'Analyste*⁵, et il souligne qu'elles :

vont rester d'ailleurs sous des formes voisines les points forts de toute la critique du nouveau calcul tant que ce dernier n'aura pas trouvé jusqu'au XIX^e siècle, dans les relations formelles, sa véritable essence⁶.

Blay a ouvert les recherches sur le débat, cependant, nous sommes prudents vis-à-vis de ce genre d'affirmation qui s'appuie, à notre sens, sur une décontextualisation historique des critiques adressées au calcul. Nous ne pouvons souscrire à une approche qui conduirait

¹ Une étude récente, que nous n'avons pas pu malheureusement consulter a été publiée en juin 2018 : Shank, J. B., *Before Voltaire, The origin of "Newtonian" Mechanics, 1680-1715*, The University of Chicago Press, Chiacago & London, juin 2018.

² « The metaphysics of the calculus: A Foundational debate in the Academy of Sciences, 1700-1706 », *Historia Mathematica*, 16, 1989, p. 224.

³ Sur l'histoire du calcul, on pourra se référer à Boyer, C.B., *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, INC, New York, 1939, Whiteside, Derek Thomas, « Patterns of Mathamtical thought in the later Seventeenth Century », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 1, No. 3 (27.7.1961), p. 311-388, Kline, Morris, *Mathematical thought from Ancient to modern times*, New York, Oxford University Press, 1972, p. 342-390.

Pour le débat, outre les articles sur Varignon de Pierre Costabel et Jeanne Peiffer précédemment cités, Fleckenstein, Joachim Otto, « Pierre Varignon und die mathematischen Wissenchaften im Zeitalter des Cartesianismus », *Archives internationales d'histoire des sciences*, n°5, octobre 1941, Montucla, Jean-Etienne, *Histoire des Mathématiques*, tome second, Jombert, Paris, 1754, partie IV, livre II (p. 73-156) et livre VI (p. 297-368), Sergescu, Petre , « Un épisode de la « bataille » pour le triomphe du calcul différentiel : la polémique Rolle-Sarin 1702-1705 », *L'Ouvert* 78, 1995.

⁴ « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 39, N°3, Paris, 1986. Cet article est repris dans « Les débats à l'Académie royale des Sciences (1693-1706) », *La naissance de la mécanique analytique*, Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris, 1992, p. 17-62.

⁵ Berkeley, George, *The Analyst: Or, a discourse addressed to an infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysts are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith, by the autor of the minute philosopher*, Tonson, Londres, 1734.

⁶ Blay, Michel, « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley », *op. cit.*, p. 232.

à affirmer que le calcul posséderait « une véritable essence » et que celle-ci se révélerait à une époque plus tardive. Pour nous, les difficultés liées à la réception du calcul leibnizien font partie intégrante de la compréhension des notions qui y sont impliquées.

Paolo Mancosu¹ propose une lecture intéressante du débat. Il donne des indications pour expliquer pourquoi les deux camps ne réussissent pas à se rencontrer dans un terrain d'entente. Varignon ne convainc pas son adversaire Rolle de l'existence des différentielles en expliquant que ce sont « des quantités moindre qu'aucune donnée » et en se référant ainsi aux Anciens. Par ailleurs, pour Rolle, algébriste, les quantités variables du calcul différentiel sont du pur non-sens². Les mathématiciens de l'Académie ont tenté de se procurer un référence commune au formalisme leibnizien mais dans l'état de l'art, cet essai ne pouvait qu'échouer, tant que les règles des quantités finies et infinitésimales étaient supposées être celles de l'algèbre³.

Varignon, pour définir la notion de différentielle comme quantité variable, s'inspire de l'idée de flux, présente dans les *Principia* de Newton. Cette référence à Newton a conduit l'historien Schrubing à affirmer que la réception du calcul leibnizien en France se nourrit des mathématiques anglaises⁴ dont on doit tenir compte.

3 Une méthodologie pour mener une enquête

Ces travaux de qualité, dont nous nous sommes nourris pour notre étude, ne permettent donc pas de répondre de manière pleinement satisfaisante. Nous nous sommes tournés vers l'examen des sources primaires. L'accès à celles-ci est devenu aujourd'hui pour la plupart aisée grâce à leur numérisation massive : ouvrages anciens, manuscrits mathématiques, journaux savants, procès-verbaux de l'Académie des sciences sont à notre disposition de manière confortable et au quotidien. Comment trier dans cette multitude de documents ? Comment les lire pour en tirer des conclusions ?

Dans son essai *Sur le Jadis*, Pascal Quignard destine quelques lignes à la démarche de l'historien. Le passé est « un immense corps dont le présent est l'œil » et dont les vestiges sont peu à peu dispersés et délaissés de signification :

¹ « The metaphysics of the calculus: A Foundational debate in the Academy of Sciences, 1700-1706 », *op. cit.*, et *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, *op. cit.* p. 150-177.

² Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, *op. cit.*, p. 168.

³ *Ibid*, p. 173.

⁴ Schubring, Gert, *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer, 2005, p. 189-190.

L'historien épouse les causes qui réussissent dans la succession des années, des générations, des siècles, des millénaires. Elles ne donnent ses soins qu'aux témoignages qui les font persister ou qui les réaniment¹.

Dès lors, « il y a des absents sans retour, des effacés du souvenir du monde » qui pourtant peuvent représenter des « grandes œuvres » mais « dont le désir ne s'est pas soumis ».

Des écrits comme « faits » et comme « répartis dans un dialogue »

Notre démarche ne souhaitait pas laisser de côté des absents, dont le témoignage pouvait enrichir précieusement l'étude. Or des faits sont bien là : Byzance recopiant maladroitement le tracé d'une figure des leçons de Bernoulli, Malebranche remplissant par des commentaires les feuilles blanches de ses cahiers de calcul intégral, l'Hospital lisant un mémoire à l'Académie ou Rolle accusant le calcul différentiel d'être un déguisement, et tant d'autres.

Il existe une histoire de l'émergence du calcul leibnizien dans laquelle il triompherait après « un siècle d'anticipation » :

Le temps était venu, dans la deuxième moitié du 17^e siècle, pour que quelqu'un organise les points de vue, les méthodes et les découvertes impliquées dans l'analyse infinitésimale en un nouvel objet qui se caractérise par une méthode de procédure distincte².

Cette histoire écarte certains faits, certes clairement liés à la réception et au développement du calcul mais qui n'apporte rien à son récit. Paul Veyne indique que « les faits n'existent pas isolément »³. L'objet d'une étude n'a pas à tenir compte de tous les faits mais de mettre en relation ceux qui permettent d'expliquer l' « intrigue ». Celle-ci est « le tissu de l'histoire » découpé selon la question que pose l'historien. Or, pour nous, ces faits demandaient à être constitués en « faits comme tels », c'est-à-dire à être organisés autour

¹ « Le passé », Quignard, Pascal, *Sur le jadis*, Dernier Royaume II, Gallimard, Paris, 2002, p. 20.

² « The time was indeed ripe, in the second half of the seventeenth century, for someone to organize the views, the methods, and discoveries involved in the infinitesimal analysis into a new object characterized by a distinctive method of procedure », Boyer intitulé « A century of anticipation » le chapitre qui précède l'invention du calcul leibnizien et newtonien, Boyer, Carl, *The History of the calculus*, op. cit. p. 187.

³ Veyne, Paul, *Comment on écrit l'histoire, suivi de Foucault révolutionne l'histoire*, Seuil, Paris, 1978, p. 36.

de notre intrigue¹. Chacun d'eux demandait à être *pris au sérieux* et il nous fallait un chemin à suivre pour les interpréter et les organiser : une méthode.

Les acteurs de notre intrigue sont des lecteurs d'écrits mathématiques. Les savants autour de Malebranche lisent et interprètent des textes et c'est à partir de ces lectures qu'ils reçoivent le calcul leibnizien. Chacun des adversaires, Rolle ou Varignon, revendique être le lecteur le plus fidèle des écrits de ses prédécesseurs.

Pour clarifier le terme de « réception », nous avons emprunté des notions à la théorie de la réception et notamment à celle de Hans Robert Jauss. En se focalisant sur la relation texte-lecteur, plutôt que sur celle de texte-auteur, « l'esthétique de la réception » cherche à reconstituer « l'horizon d'attente »² du lecteur ou d'un ensemble de lecteurs d'une œuvre afin de décrire la réception de celle-ci ou ceux-ci et les effets qu'elle produit. L'horizon d'attente est « le système de références objectivement formulable »³ dans lequel un nouveau texte est lu. Il suppose pour être caractérisé de connaître l'expérience que le public a du genre dont relève le texte et aussi « la forme et la thématique d'œuvres antérieures » dont l'œuvre nouvelle présuppose la connaissance ». Ce dernier aspect est crucial puisque nous travaillons sur la réception d'un collectif de lecteurs partageant un même héritage.

Mikhaïl Bakhtine fournit les outils conceptuels pour distinguer les différentes réceptions que nous analysons⁴. Pour lui, un texte est toujours un énoncé ou un ensemble d'énoncés adressés à quelqu'un, c'est-à-dire « orienté vers ce qu'est cet interlocuteur ». Le texte est toujours une réponse faisant partie d'un dialogue que l'auteur entretient avec un ensemble d'unités : les « destinataires »⁵, dont le contour dépend du contexte de son écriture. Cet ensemble constitue ce qui est désigné par la « sphère d'échanges »⁶ : les textes ou les figures qui précèdent l'auteur et auxquels il se réfère, ceux qui lui sont

¹ Prost, Alain, *Douze leçons sur l'histoire*, Paris, Seuil, 1996, p. 245-247 : « La construction de l'intrigue est l'acte fondateur par lequel l'historien découpe un objet particulier dans la trame événementielle infinie de l'histoire. Mais ce choix implique bien davantage : il constitue des faits comme tels ».

² Jauss, Hans Robert, « L'histoire de la littérature : un défi à la théorie littéraire », *Pour une esthétique de la réception*, Gallimard, Paris, 1978, p. 49.

³ *Ibid*, p. 54.

⁴ Bakhtine, Mickhaïl, *Esthétique de la création verbale*, traduction Aucouturier, Gallimard, Paris, 1979.

⁵ Todorov, Tzvetan, *Mikhaïl Bakhtine Le principe dialogique, suivi des Écrits du cercle de Bakhtine*, Seuil, Paris, 1981, p. 69.

⁶ *Ibid*, p. 298. Bakhtine emprunte au domaine musical le terme de « polyphonie » pour décrire le processus dans lequel un texte répond à d'autres textes et en anticipe d'autres.

contemporains ou encore ceux à qui il lègue son écrit, les héritiers. L'approche bakhtinienne des textes mathématiques est une composante pour notre analyse¹.

L'hypothèse de « groupe » pour comprendre la réception

Nous avons pointé plus haut notre prudence sur la dénomination « groupe malebranchiste » initiée par Robinet. Néanmoins, nous sommes attentifs au statut d'un cercle constitué autour de Malebranche avec des projets mathématiques, et dont certains des membres font partie ensuite des défenseurs du calcul à l'Académie. Savoir si « Malebranche et ses amis » se vivaient comme un « groupe » ou si leurs contemporains les considéraient comme tel, puis dans quel sens il y avait « groupe »², sont des questions qui ont été présentes en toile de fonds dans l'avancement de notre recherche.

4 Plan détaillé de la thèse

Notre analyse des sources primaires nous a conduit à organiser notre thèse en trois parties selon trois moments de la réception : celle autour de Malebranche, la restitution de cette réception sous forme de l'ouvrage *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* et enfin sa réception à l'Académie.

Première partie :

Héritage des méthodes d'invention à l'aube de la réception du calcul leibnizien

La première partie a pour but d'analyser l'héritage mathématique des acteurs à partir duquel ils reçoivent le calcul de Leibniz.

¹ Pour cette approche, on pourra consulter : Barbin, Evelyne, « Une approche bakhtinienne des textes d'histoire des sciences », dans Rey, Anne-Lise (éd.), *Méthode et histoire*, Paris, Garnier, 2013, p. 217-232, Barbin, Evelyne, "Dialogism in Mathematical writing: historical, philosophical and pedagogical issues" dans Katz, Victor, Tzanakis, Costas, (éds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*, Mathematical Association of America, 78, 2011, p. 9-16. Contrairement à ce que considère Bakhtine, le texte mathématique connaît aussi le « discours comme objet d'orientation », cité dans Todorov, Tzvetan, *Mikhail Bakhtine Le principe dialogique*, op. cit., p. 29.

² Des recommandations méthodologiques sont fournies par Claire Lemerrier et Emmanuelle Picard dans un annexe de leur article récent, « Annexe : quelques recommandations pratiques », Lemerrier, Claire, Picard, Emmanuelle, « Quelle approche prosopographique ? » dans Laurent Rollet, Philippe Nabonnand, (dir), *Les uns et les autres. Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Presses Universitaires de Nancy; Éditions Universitaires de Lorraine, p. 605-630, ainsi que par Catherine Goldstein dans son compte-rendu de deux études prosopographique de Charles Hermite, « Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite ».

Le premier chapitre s'intéresse aux méthodes calculatoires des tangentes et à leurs interprétations avant la publication de la méthode différentielle de Leibniz.

Ces méthodes introduisent une lettre « e », son rôle est d'être un auxiliaire indispensable à l'exécution du calcul qui conduit à la détermination de la tangente.

Dans la méthode de Leibniz, le « e » a disparu et est remplacé par la caractéristique dx . Pour saisir de quelle façon est reçu le calcul leibnizien, il était indispensable de saisir l'articulation entre les notions auxquelles renvoie chacune de ces notations, et pour cela, il fallait retracer l'histoire de ce mystérieux « e », l'histoire des justifications de sa disparition au cours du calcul et celui de son effacement au profit du « dx ».

Le deuxième chapitre d'intéresse à l'émergence des méthodes des indivisibles et à leur devenir calculatoire. Nous nous intéressons aux étapes qui conduisent à l'introduction de méthodes calculatoires pour la détermination de quadratures. Nous voulons dégager les idées fondamentales que suppose l'utilisation de ces méthodes, afin de saisir de quelles manières elles ont été interprétées en France à l'aube de l'arrivée du calcul intégral leibnizien, en particulier si les résultats issues de ces méthodes peuvent être considérés comme des preuves.

Enfin, dans le chapitre 3, nous étudions les travaux du cercle autour de Malebranche entre 1690 et 1692. Cette étude a pour but de signifier « l'horizon d'attente » du groupe autour de Malebranche. Plus précisément, en examinant les méthodes des tangentes qu'ils utilisent, nous recherchons quels sont les procédés calculatoires qui sont perçus par eux comme « évidents ». Nous analysons aussi leur appropriation du langage infinitiste, en particulier, nous sommes attentifs à leurs façons d'introduire des notions comme le « polygone avec une infinité de côtés » et à leurs lectures de *l'Arithmetica infinitorum* de Wallis.

Deuxième **partie** :

La genèse de *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692-1696)

En décembre 1691, Jean Bernoulli effectue un séjour à Paris d'une durée d'un an, au cours duquel l'Hospital reçoit des cours de calcul différentiel et intégral qu'il conserve sous forme d'un manuscrit.

Le chapitre 4 s'intéresse tout d'abord aux lectures des leçons bernoulliennes par les mathématiciens du groupe autour de Malebranche à partir de l'horizon d'attente que nous avons décrit dans le chapitre précédent. Au début il s'agit pour eux de simples traductions des signes « dx » et « dy » en « e » et « a » mais ils réalisent peu à peu que la richesse de l'algorithme conduit à étoffer ces nouvelles entités.

En raison de son engagement sans faille pour l'apprentissage et l'appropriation le nouveau calcul, nous examinons très en détail de quelles manières Guillaume de l'Hospital s'approprie le nouveau calcul en différenciant les apports dus aux échanges avec Leibniz de ceux avec Jean Bernoulli. Enfin, nous examinons la première lecture varignonienne du calcul à partir de son héritage barrownien.

L'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes* est publié en juin 1696. Dans le chapitre 5, nous examinons de quelles manières sont présentés et agencés quelques aspects du calcul leibnizien comme sont les principales définitions et suppositions. Nous considérons aussi le mode d'exposition que choisit l'Hospital et nous questionnons ses choix.

Le manuscrit intitulé « Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes »¹ est la première lecture varignonienne de l'*Analyse des infiniment petits*. Nous nous intéressons à la manière dont il rend compte du calcul leibnizien et aux réflexions originales à son sujet.

Troisième partie : Le calcul leibnizien à l'Académie (1696-1706)

Dans cette partie nous confrontons l'horizon d'attente partagé des membres du groupe autour de Malebranche avec d'autres horizons d'attente qui s'expriment dans l'Académie royale des sciences.

Dans le chapitre 6, au vue des critiques qui vont être adressées au calcul leibnizien, nous étudions la pratique des académiciens avant le débat en juillet 1700. Nous examinons de quelles manières la pratique des infiniment petits est partagée et assumée par la Compagnie. Nous examinons ensuite comment le calcul leibnizien gagne un terrain de reconnaissance en exhibant des résolutions de problèmes physico-mathématiques ou en élaborant des applications originales à l'étude du mouvement.

¹ Varignon, Pierre, « Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes », FR. 12262.

Les nouveaux règlements de 1699 permettent à des membres du groupe autour de Malebranche d'être nommés académiciens. Ils conduisent également chacun des académiciens à positionner davantage leurs travaux.

En juillet 1700, Rolle attaque les « suppositions fondamentales de la Géométrie des infiniment petits »¹, puis en décembre 1700, il remet en question l'exactitude des résultats obtenus par le calcul leibnizien dans l'étude des courbes². Dans le chapitre 7 nous examinons de quelles manières les arguments des deux parties s'affilient à leur héritage commun et comment ils tentent de trouver une entente malgré des horizons d'attente différents.

Pour discerner et saisir les deux moments de cette réception, nous nous appuyerons sur la diversité des horizons d'attente d'individus et de communautés partageant un même héritage mais se distinguant par leurs âges et par leurs intérêts mathématiques.

5. Sources primaires

Rappelons qu'André Robinet a établi une liste de manuscrits rédigés par le cercle autour de Malebranche et que Pierre Costabel en a édité une partie. Cependant, la plupart ne sont pas numérisés. Nous avons analysé nombre de manuscrits, certains non édités : FR 5060, FR 24302, FR 24306, FR 24235, FR 24236, FR 24237, FR 24238, FR 25 245, FR 25302, FR 25306 Seule la consultation à la Bibliothèque Richelieu, rue Vivienne à Paris, nous les rend accessibles. Un manuscrit non répertorié ni par Robinet, ni par Costabel, se trouve à la Bibliothèque nationale et porte la cote FR 12262. Il peut être attribué avec certitude à Pierre Varignon et s'intitule « Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes ».

Notre sujet conduit à tenir compte des modes de circulation des écrits sur le calcul leibnizien.

Les correspondances entre savants (principalement Descartes, Huygens, Leibniz et Jean Bernoulli) que nous avons consultées a fait pour la plupart objets d'éditions complètes. Des lettres échangées à l'intérieur du cercle de Malebranche se trouvent au Fonds Adry des Archives municipales de Honfleur. Nous avons consulté abondamment des journaux savants, surtout les *Acta Eruditorum* et le *Journal des Sçavants*. Deux références

¹ PVARs, tome 19, fol. 218V et 287V.

² « Extrait de l'écrit de M^r Rolle contre le Géométrie des infiniment petits », 1^{er} décembre 1700, RPVARs, tome 19, fol. 394R-396V.

méthodologiques nous ont inspirés pour cette tâche : les travaux de Jeanne Peiffer¹ ou Jean-Pierre Vittu².

Les dossiers des académiciens et les Pochettes de séances sont consultables aux Archives de l'Institut, quai Conti à Paris. Le guide d'Éric Brian et de Christiane Demeulenaere-Douyere³ est de grande utilité à cet égard.

¹ Peiffer, Jeanne, « Faire des mathématiques par les lettres », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(1998), p. 143-157.

² Peiffer, Jeanne, Vittu, Jean-Pierre, « Les Journaux savants, formes de communication et agents de la construction des savoirs (17^e-18^e siècles) », *Dix-Huitième siècle*, 2008/1, n°40, p. 281-300 et Vittu, Jean-Pierre, « Périodiques » dans Blay, Michel, Halleux, Robert, (dir) *La science classique, XVI^e-XVIII^e siècle, dictionnaire critique*, Flammarion, Paris, 1998, p. 140-147.

³ Brian, Eric et Demeulenaere-Douyere, Christiane, (dir), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : guide de recherches*, Paris : TEC & DOC-Lavoisier, 1996.

Première partie :

Héritage des méthodes d'invention

à l'aube de la réception du calcul leibnizien

(1635-1692)

CHAPITRE 1

L'héritage des méthodes calculatoires des tangentes

Introduction

Les écrits chez les Anciens admettent des études de courbes particulières dans lesquelles apparaissent des résultats sur les tangentes, par exemple celle du cercle dans les *Éléments* d'Euclide¹, celle des coniques dans le traité d'Apollonius², ou celle de la spirale chez Archimède³. Chaque courbe est traitée indépendamment des autres, les propositions sur la tangente sont en relation avec d'autres propositions concernant cette courbe particulière, elles sont ordonnées selon la déduction logique. Comme pour toutes les démonstrations des Anciens, celles des propositions sur les tangentes procèdent par double réduction par l'absurde, et ainsi elles évitent tout recours à l'infini et sont reconnues par les géomètres du XVII^e siècle comme parfaitement rigoureuses. Cependant elles sont souvent longues et surtout elles supposent que l'énoncé de la proposition soit connu à l'avance. Ainsi, elles ne permettent pas de savoir quelle est la voie qui a permis de trouver le résultat et par conséquent l'étude d'une certaine courbe ne peut pas de manière générale, être mise à profit pour l'étude d'une autre courbe. Or, des préoccupations, parfois motivées par la Philosophie naturelle, incitent les géomètres du XVII^e siècle à s'intéresser à de nouvelles courbes. Celles-ci répondent à des problèmes liés aux trajectoires de boulets à canons, de taille

¹ Euclide, *Les Elements*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1994.

² Apollonius de Perge, *Les coniques*, œuvres traduites par Paul Ver Eecke, Bruges, Desclée de Brouwer, 1923.

³ Archimède, *Des spirales*, Paris, Belles Lettres, 1971.

de verre, de recherche de longitudes, et bien d'autres¹. Si ces géomètres ne nient pas la perfection démonstrative des résultats grecs à laquelle ils sont pour la plupart très attachés, ils considèrent que l'ignorance de la voie par laquelle les Anciens sont parvenus aux résultats est un défaut considérable. Pour l'étude des nouvelles courbes, il est en effet urgent d'élaborer des méthodes d'invention qui permettent de façon générale de trouver une tangente. Il ne s'agit plus d'examiner isolément une courbe et d'énoncer, entre autres, le résultat sur la tangente, mais d'obtenir une méthode valable pour toutes les courbes ou un ensemble de courbes. Les Anciens n'ont pas légué les méthodes et sont de ce fait souvent accusés d'avoir voulu caché leur voie de découverte.

Descartes énonce clairement cette critique :

chaque fois qu'ils [les Anciens] sont par un heureux hasard sur quelque chose de certain et d'évident, ils ne font jamais paraître qu'enveloppé dans diverses tournures énigmatiques, soit qu'ils redoutent que la simplicité de l'argument ne diminue l'importance de leur trouvaille, soit que par malveillance ils nous refusent la vérité toute franche².

De ce fait, il est aussi l'un des premiers à proposer une méthode des cercles tangents, exposée dans *La Géométrie*, qui découle de sa méthode universelle pour résoudre les problèmes de géométrie. Il s'agit d'une méthode analytique calculatoire qui permet d'obtenir théoriquement toute tangente à toute courbe à laquelle on peut associer une équation algébrique, c'est-à-dire celles qu'il désigne par « géométriques ». D'autres géomètres élaborent des méthodes qui tiennent compte de particularités distinctives de la courbe, par exemple la méthode de Roberval permet de rechercher une tangente à une courbe partir des caractéristiques cinématiques de celle-ci. Plus tard, Barrow fournit des résultats sur la construction de tangentes pour des courbes définies à partir d'autres courbes dont on connaît les tangentes³. Contrairement à la méthode de Descartes, ces deux méthodes ne sont pas calculatoires.

¹ On pourra consulter l'ouvrage d'Evelyne Barbin dans *La révolution mathématique au XVIIe, Ellipses*, Paris, 2006, p. 108-138.

² Descartes, René, *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes par Jacques Brunschwig, Le livre de Poche, Classiques Garnier Multimédia, collection « Classiques Garnier », Paris, 1997, règle III, p. 83.

³ *Lectiones geometricae, in quitus (presertim) Generalia Curvarum linearum symptomata declarantur*, Johannem Dunmore, Londini, 1670.

Descartes estime que sa recherche ordonnée à l'aide de l'algèbre vaut pour démonstration et ne nécessite pas une preuve supplémentaire à la manière des Anciens. Cette conviction au sujet de sa méthode n'est pas une attitude partagée de tous ses contemporains ou de tous ses successeurs. Son rival Fermat expose des méthodes de tangentes plus générales puisqu'elles ne s'appliquent pas seulement aux courbes géométriques. Dans ces méthodes, apparaît un élément « ϵ » qui disparaît au cours du calcul. Son introduction est primordiale pour l'application de sa méthode, ce « ϵ » est l'acteur principal du déroulement du calcul. Cependant, son statut n'est pas clairement explicité, ce qui peut être source de critiques. En fait, si Fermat se permet une telle audace dans ses méthodes, c'est parce qu'en contrepartie il assure la vérité de ses résultats en les démontrant à la manière des Anciens. De ce fait, il ne lui est pas nécessaire de justifier ses méthodes bien qu'il puisse y être amené lorsque certains de ses contemporains l'interrogent sur leur bien-fondé. Pour Fermat, appliquer une méthode conduit à des résultats mais il est nécessaire de garantir leur vérité. Cette attitude est donc opposée à celle de Descartes.

Force est de constater que le calcul (en tant que calcul) apparaît comme un excellent outil de découverte mais n'est pas toujours considéré comme preuve et sa légitimité n'est pas reconnue de la même façon par tous les géomètres. Ce point est important et guidera notre étude : de quelles façons s'articule la découverte par le calcul avec les démonstrations à l'ancienne ? Un résultat obtenu par le calcul peut-il valoir comme preuve ?

Si par son élaboration la méthode de Descartes s'applique directement et uniquement à des courbes exprimables par des expressions algébriques, nous verrons que Fermat essaie de se ramener à celles pour lesquelles sa méthode s'applique plus confortablement. Or, si certaines courbes possèdent des équations pouvant être théoriquement réduites à des équations algébriques, cette réalisation n'est pas toujours aisée du point de vue calculatoire, ainsi qu'en témoignent celles qui contiennent des quantités irrationnelles. Ces difficultés sont réelles dans la pratique de ces géomètres¹.

¹ Comme le souligne Enrico Giusti : « En réalité, la vraie limite entre les courbes assujetties au calcul et celles qui échappent à toute méthode ne se situe pas à la frontière entre les courbes algébriques et les transcendentes, mais plutôt à l'intérieur des courbes algébriques, et précisément entre celles obtenues en égalant à zéro un polynôme, et celles dont l'équation renferme un certain nombre de racines : bref entre les courbes rationnelles et les irrationnelles (...) car on sait très bien qu'il est toujours possible de réduire à une forme rationnelle toute équation renfermant des radicaux. Et cependant la division n'est

À la fin du XVII^e siècle, en 1684, Leibniz publie un mémoire intitulé « Nouvelle méthode pour chercher les *Maxima* et les *Minima*, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique¹ » Par ce titre, Leibniz indique à la République des Lettres que sa méthode est nouvelle et que sa nouveauté tient en partie à sa simplicité calculatoire : les quantités fractionnaires et irrationnelles n'entraveront plus le déroulement des calculs.

Au début du XVIII^e siècle, lorsqu'à l'Académie Royale des Sciences un débat éclate à propos de l'utilisation du calcul leibnizien², les acteurs, quel que soit leur camp, vont se référer aux méthodes des tangentes de Fermat, Descartes, et Barrow. Qu'ils attaquent ou qu'ils défendent le nouveau calcul, chaque partie s'affilie à cet héritage. C'est sur cette situation paradoxale que démarre notre questionnement. Les attaquants du nouveau calcul formulent plusieurs critiques. Tout d'abord, le calcul leibnizien n'est qu'un « déguisement » des méthodes de Fermat ou de Barrow, il n'y a que les « expressions » qui sont changées et il n'apporte rien de nouveau. À leur tour, lorsqu'ils présentent leur propre méthode, les attaquants sont inculpés des mêmes accusations. D'autre part, les critiques du calcul leibnizien rappellent que ce dernier introduit des infiniment petits dont le statut existentiel est labile. Employer ces « entités » fragilise l'exactitude des pratiques. Or, les ancêtres de ces « entités » sont les éléments « e » : celui introduit par Fermat puis ceux toujours présents dans les interprétations et améliorations des méthodes, cartésienne ou fermatienne.

Dans ce chapitre, nous enquêtons auprès des géomètres du XVII^e siècle qui inventent des méthodes de tangentes auxquelles les contemporains du calcul leibnizien s'affilient. Nous avons choisi de nous rapporter à des mathématiciens comme Descartes et Fermat car leur apport dans ce domaine est décisif. Leurs méthodes ayant été interprétées et modifiées dans les décennies qui suivent, nous nous attacherons à analyser ces changements qui ont aussi été reçus par les mathématiciens contemporains du calcul leibnizien. Notre investigation s'attachera à

pas moins réelle, car cette équivalence n'était pas évidente pour tous, et en tout cas, exception faite des courbes les plus simples, la réduction effective de l'équation surpassait les forces des calculateurs les plus patients » dans « Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz » dans *Studia Leibnitiana*, 14 (1), 1986, p. 30.

¹ « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quabtitates moratur et singulare pro illis calculis genus », *Acta Eruditorum (AE)*, octobre 1684, p. 467-473.

² Ce sujet sera traité au chapitre 7 de notre travail.

suivre notamment le devenir statuaire du e : est-il un objet géométrique ? une simple fiction calculatoire ? C'est notre première question.

Par ailleurs, en indiquant la caducité de l'obstacle calculatoire lié aux quantités irrationnelles, Leibniz promeut le caractère original de sa méthode parmi tant d'autres qui la précèdent. Il est vrai que des problèmes liés au calcul, comme celui qu'il dit surmonter, sont effectivement l'objet d'inquiétudes de la part des géomètres du XVII^e siècle et nous consacrons une étude à cette question afin de mesurer la justesse de l'affirmation du philosophe allemand : la nouveauté de la méthode leibnizienne repose-t-elle uniquement sur sa facilité calculatoire ? Comment sont présentées ses autres caractéristiques ? C'est notre deuxième question.

Alors que les affirmations d'affiliation sont fermes de la part des deux camps adverses lors du débat académique, il est requis d'analyser à partir de quelles lectures ces académiciens interprètent et proclament la singularité de leur héritage. Ce travail préliminaire nous semble indispensable ? non seulement pour distinguer les critiques historiquement émises envers d'autres méthodes de celles qui sont spécifiquement adressées au calcul leibnizien, mais aussi pour saisir dans quelle mesure l'héritage des méthodes des tangentes permet ou non un climat propice à la réception du calcul leibnizien.

1) La méthode des cercles tangents dans *La Géométrie*

1.1) *La Géométrie* : « essai de cette méthode »

Descartes publie *Le Discours de la Méthode*¹ en 1637. Dans cette même édition sont publiés, à la suite du *Discours*, *La Dioptrique*, *Les Météores* et *La Géométrie*, qu'il désigne comme : « essais de cette méthode ». Son dessein est de montrer comment sa méthode permet de résoudre les problèmes de géométrie. Un constat d'insatisfaction à la lecture des Anciens l'amène à vouloir changer la pratique des géomètres. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, il l'exprime ainsi :

Mais, ni pour l'une ni pour l'autre je ne réussissais à mettre la main sur des auteurs capables de me satisfaire entièrement : car j'avais beau lire chez eux une foule de choses concernant les nombres, dont je reconnaissais la vérité après avoir fait les calculs nécessaires ; et concernant les figures aussi, ils me plaçaient juste sous les yeux, pour ainsi dire, beaucoup de vérités, et ils tiraient des conclusions à partir de certaines autres qui en dérivait ; et pourtant, pourquoi en est-il ainsi, et comment l'avaient-ils trouvé ?²

Les Anciens fournissent des vérités mais ne donnent pas le moyen d'y parvenir. Ce défaut est ce qui motive Descartes à élaborer une méthode de découverte. Celle-ci consiste en « la mise en ordre et la disposition des objets vers lesquels il faut tourner le regard de l'esprit, pour découvrir quelque vérité ». Pour se faire, les choses composées doivent se réduire à des choses simples³ qui sont celles « dont la connaissance est si nette et si distincte que l'esprit ne peut les diviser en plusieurs autres qui seraient plus distinctement connues⁴ » puis, en partant de ces dernières « élever par les mêmes degrés jusqu'à la connaissance de toutes les autres ». Cependant cette déduction n'est pas une déduction logique comme celle des démonstrations des Anciens⁵. L'application de sa méthode à la géométrie doit

¹ Descartes, René, *Discours de la méthode pour bien conduire la raison, et chercher la vérité des sciences plus la Dioptrique, les météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*, Leyde, 1637. Nous la noterons *La Géométrie*.

² Descartes, René, *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes par Jacques Brunschwig, Le livre de Poche, Classiques Garnier Multimédia, collection « Classiques Garnier », Paris, 1997, règle IV, p. 93.

³ Règle III, *ibid*, p. 86-87. et règle V, *ibid*, p. 98. La règle suivante explique comment distinguer les choses simples des complexes.

⁴ Règle XII. Parmi les choses simples, il cite la figure, l'étendue, le mouvement.

⁵ Evelyne Barbin le souligne : « La déduction cartésienne n'est donc pas une déduction logique de propositions, mais une déduction relationnelle des choses. Elle ordonne la géométrie et le mécanisme cartésiens, alors que dans les Essais physiques et dans les Principes de la philosophie, président

permettre de savoir de quelle façon on parvient à la résolution d'un problème. Cette nouvelle pratique de la géométrie, que Descartes fait donc découler de l'application de sa Méthode devient la seule possible à ses yeux, car d'après lui, le seul chemin sûr pour la connaissance et son renouvellement est celui où sa (la) Méthode peut se déployer. La démarche géométrique, décrite dans *La Géométrie*, est donc nécessairement la seule compatible avec ses supposés méthodiques. On peut d'ailleurs remarquer que l'article défini apposé à « Géométrie » insiste bien sur cette unicité.

Quelle forme prend cette géométrie ?

Dans les premières pages *la Géométrie*, Descartes commence par expliquer ce que sont en géométrie les choses simples et les relations simples qui les relient. Les choses simples sont les droites (finies) et les relations simples qui peuvent les relier sont des opérations arithmétisées :

Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction de racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division ; ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en a ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une , que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une des deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication (...). Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible¹.

Descartes entreprend une arithmétisation de la géométrie dans le but de « préparer à être connues » les lignes qu'on cherche. Les cinq opérations arithmétiques s'appliquent aux grandeurs. La juxtaposition géométrique de deux droites correspond à leur addition ou leur soustraction. L'introduction d'une droite unité permet de considérer la multiplication, la division ou l'extraction de racines de droites comme une opération interne. Les grandeurs : ligne, surface et corps peuvent être comparées (au moyen de relations algébriques ou équations) puisque cette commune mesure permet leur homogénéisation : en multipliant deux droites, on obtient non pas un rectangle mais une autre droite. Descartes prend le soin de

respectivement un ordre de discours et un ordre de doctrine » in Barbin, Evelyne: « Descartes et les mathématiques » dans *Les philosophes et mathématiques*, IREM, Ellipses, Paris, 1996, p. 49.

¹ *La Géométrie*, p. 287.

détailler la traduction géométrique des cinq opérations élémentaires de l'arithmétique.

De façon générale, lorsque l'on veut aborder la résolution d'un problème géométrique, Descartes annonce à ses lecteurs que :

(...) on doit d'abord le considérer comme desja fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussy bien à celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connuës, et inconnuës, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation (...) ¹

L'analyse d'un problème consiste donc premièrement à le décomposer en éléments simples (des droites connues ou inconnues) puis à établir des relations entre elles pour aboutir à une équation. L'utilisation du calcul littéral s'avère incontournable, les éléments de la décomposition sont nommés par des lettres qui sont manipulées algébriquement.

Le rôle de l'écriture symbolique est fondamental dans l'analyse cartésienne. Elle s'adapte comme outil parfaitement adéquat à la mise en œuvre de la méthode. On peut passer distinctement d'un signe à un autre et embrasser distinctement plusieurs choses à la fois. La légitimité de la résolution s'appuie sur le calcul algébrique et le parallélisme établi entre chacune de ses opérations arithmétiques et chacune des opérations géométriques.

On peut remarquer que par le biais de l'écriture symbolique, Descartes résout le problème directement « abstraction faite de ce que certains de ses termes sont connus et d'autres inconnus »², les deux ont la même valeur cognitive. Peu importe qu'une chose soit réelle ou non, ce qui préside est l'ordre de la connaissance : « il faut procéder autrement que si nous parlions d'elle en tant qu'elle existe réellement³ ». Il est important de souligner que pour Descartes obtenir un résultat en suivant sa méthode vaut pour démonstration : il n'est pas nécessaire de le démontrer par la voie

¹ *La Géométrie*, p. 300

² La règle XVII précise cette pensée, *ibid*, p. 184

³ Règle XII, p. 139.

des Anciens. Ceci revient à dire que Descartes pense qu'un raisonnement à l'aide de calcul peut avoir le statut de démonstration.

La méthode des cercles tangents de *La Géométrie* est fidèle aux prescriptions analytiques cartésiennes. C'est pourquoi il fallait la décrire.

1.2) La méthode des cercles tangents de Descartes : la tangente comme racine double

Le livre I de *La Géométrie* décrit une méthode générale pour résoudre des problèmes en utilisant uniquement des droites et des cercles. Descartes destine le livre II à « la nature des courbes ». Ce livre est important parce que son auteur a pour dessein, en écrivant *la Géométrie*, de résoudre des problèmes géométriques en utilisant des courbes autres que les droites et cercles, lesquelles ?

Dans les premières pages du livre II, Descartes critique la classification des courbes par les Anciens¹. S'ils ont bien distingué parmi les problèmes de géométrie, ceux qui peuvent être construits à l'aide de droites et de cercles, de ceux qui le sont à l'aide de coniques ou encore d'une autre ligne plus composée, ils n'ont pas effectué des distinctions supplémentaires pour ce dernier type de courbes². Ils les ont appelées : « mécaniques », car on se sert d'une quelconque « machine » pour les décrire. Le nombre important de nouvelles courbes qui apparaissent au XVII^e siècle induit la question de savoir quels sont les critères de la connaissance d'une courbe. La description de sa construction par une machine peut s'avérer satisfaisante mais les avis diffèrent sur le type de construction acceptable³. Pour Descartes qualifier une courbe de mécanique uniquement car elle est construite par une machine n'est pas un critère pertinent : ne faudrait-il pas alors y classer aussi celles qui sont construites à l'aide d'un compas et d'une règle ? Ce n'est pas non plus le manque de justesse de l'instrument qui fait qu'une courbe soit mécanique ou pas, puisque ce qui compte en géométrie est la justesse du raisonnement. Descartes propose alors une définition plus précise de ce qu'il entend par « courbes géométriques » : il intègre dans ce domaine

¹ Pour une étude captivante de la rhétorique mise en place par Descartes pour présenter sa classification : Descotes, Dominique, « Aspects littéraires de *La Géométrie* de Descartes », *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 55, n°154, Brepols, juin 2005, p. 163-191.

² Une courbe peut être composée mais être décrite par une suite de mouvements bien réglés et selon un ordre : c'est la clef de la nouvelle classification de Descartes qui s'accorde avec sa philosophie méthodique.

³ Pour un développement de cette problématique, on peut consulter : Bos, Henk, « On the representation of Curves in Descartes's *Géométrie* », *Archive for History of exact Sciences*, 24, 1981, p. 295-338.

toutes celles qui peuvent être décrites « par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers sont entièrement réglés par ceux qui les précèdent »¹. C'est ainsi que l'on peut toujours avoir une connaissance « exacte » de leur mesure. Ces courbes correspondent en fait à celles qui possèdent une équation algébrique².

Le premier livre de *La Géométrie* a donné des outils pour connaître des propriétés de ces courbes³ à partir de leur équation. Après avoir fourni quelques exemples d'obtention d'équations de courbes⁴, Descartes s'intéresse particulièrement « aux grandeurs des angles qu'elles [les courbes] font avec quelques autres lignes. » Il réduit ce problème à savoir « tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, aux points où elles se sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prens icy pour le mesme, qui coupent leurs contingentes », c'est-à-dire que pour connaître l'angle que font deux courbes, il suffit de connaître l'angle que font leur normales au point de rencontre. Descartes indique que ce problème est le même que celui de déterminer l'angle que font les tangentes des deux courbes entre elles et met ainsi en parallèle le problème des tangentes avec le problème des normales. Il propose alors sa méthode de recherche des « lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir », c'est-à-dire la recherche de la normale en un point d'une courbe. Il affirme que : « j'ose dire que c'est cecy le problème le plus utile, et le plus général non seulement que je sçache, mais même que j'aye jamais désiré de sçavoir en géométrie »⁵.

Pour trouver la normale en un point d'une courbe, Descartes se place dans le cadre de *la Géométrie*.

Il considère une courbe AC d'axe AG par rapport auquel s'écrit l'équation de la courbe. Il souhaite trouver la normale CP au point C de la courbe. Pour cela, il

¹ *Ibid*, p. 316.

² Descartes dit « le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite ». Il affirme l'équivalence entre courbes algébriques et « courbes qui peuvent être tracées par un mouvement continu » mais ne la démontre pas. Il faut attendre le travail de Kempe, au XIX^e siècle pour une démonstration partielle du résultat. On peut consulter à ce sujet, Bos, Henk, « On the representation of Curves in Descartes's *Géométrie* », *op. cit.*, p. 324-325.

³ « Connaître les diamètres, les aissieux, les centres, et autres lignes, ou points, à qui chaque ligne courbe aura un rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres », *ibid*, p. 341.

⁴ *Ibid*, p. 320-322.

⁵ *Ibid*, p. 342. Pour comprendre la teneur de ce propos, il faut le relier aux recherches en optique engagées par Descartes, notamment dans son travail sur les courbes optiques. On pourra consulter le travail d'Evelyne Barbin dans *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, *op. cit.*, p. 108-138.

suppose « la chose faite », c'est-à-dire la normale CP tracée (où P est un point de l'axe FG). Il pose $AM = y$, $PC = x$, $CP = s$ et $AP = v$.

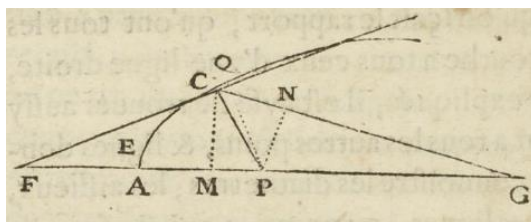


fig. 1

Les choses connues sont x et y , alors que v et s sont recherchés¹.

Descartes établit ensuite une relation générale – valable quelle que soit la courbe considérée – entre y , x , s et v . Puisque l'angle entre CP et CF est droit :

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2 \quad (1)$$

La substitution de x ou y dans cette dernière équation à l'aide de l'équation de la courbe permet d'obtenir une relation dans laquelle intervient soit x , soit y qui constitue la première équation. Mais, puisqu'il a deux inconnues, selon les règles de l'algèbre, il faut obtenir encore une deuxième équation.

Pour la trouver, Descartes décrit attentivement la situation géométrique qui conduit l'application de sa méthode, ce qui permet de donner une interprétation décisive en termes algébriques. À cause de son importance, nous la restituons dans sa totalité :

Et à cet effet il faut considérer que si ce point est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C , y touchera la ligne courbe CE , sans la couper : mais que si ce point P , est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné du point A , qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C , mais aussy necessairement, en quelque autre. Puis il faut aussy considérer, que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE , l'équation par laquelle on cherche la quantité x , ou y , ou quelque autre semblable, en supposant PA & PC estre connus, contient nécessairement deux racines, qui sont inégales. (...) Mais plus ces deux points, C , & E , sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines ; & enfin elles sont entièrement esgales, s'ils sont tous deux ioins en un ; c'est-à-dire si ce cercle, qui passe par C , y touche la courbe CE sans la couper.

De plus, il faut considérer, que lorsqu'il y a deux racines esgales en une équation, elle a nécessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy même la quantité

¹ Tout au long de notre travail, nous choisissons de noter exclusivement les choses inconnues en lettres italiques en opposition aux choses données par le problème.

connue qui lui est esgale [factorisable par $(x - e)^2$ ou par $(y - e)^2$], & qu'après cela si cete derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque ; affin qu'il puisse y avoir separement équation entre chascun des termes de l'une, & chascun des termes de l'autre »¹.

Descartes décrit une situation géométrique dans laquelle on passe du cercle sécant au cercle tangent continûment : un point peut être « tant soit peu plus proche, ou plus esloigné » du point C où l'on cherche la normale, « plus ces deux points, C , & E , sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines ». Le deuxième point s'approche du premier donc l'abscisse du deuxième point (qui correspond à l'une des racines) s'approche de l'abscisse de C , jusqu'au moment où « enfin » elle lui est égale. Dans son écriture, Descartes change ensuite de paragraphe – « De plus » – pour expliquer que dans le cas d'une racine double, la forme de l'équation est du type $(y - e)^2Q(x)^2$. Il distingue la forme de l'équation avec deux racines distinctes de celle de l'équation avec une racine double, ce sont deux cas qui dans le cadre algébrique dans lequel il se place, sont bien distincts³. Bien sûr, le problème de Descartes n'est pas de s'occuper du cas général (celui de la sécante) et encore moins d'établir un lien entre les deux cas, mais d'identifier le cas de la normale et de le circonscrire algébriquement. Il n'empêche que l'introduction de l'interprétation algébrique crée l'alternative sécant/tangent sans qu'une continuité entre ces deux cas puissent être pensée : la continuité du mouvement du cercle sécant vers le cercle tangent est définitivement oubliée. Descartes parvient ainsi à justifier le caractère algébrique de sa méthode des cercles tangents qui s'applique à tout type de courbes algébriques.

Traisons, à la manière de Descartes, un exemple⁴, celui de la parabole de paramètre p et d'équation : $x^2 = py$

En éliminant x dans l'équation (1), on obtient $y^2 + py - 2vy - s^2 + v^2 = 0$

Or, si cette équation a deux racines égales elle doit être de la forme : $(y - e)^2$

¹ *Ibid*, p. 346.

² $Q(x)$ est un polynôme qui compense le degré de l'équation.

³ Pour pouvoir faire le lien entre ces deux formes d'équations, il faudrait se placer dans un cadre mathématique d'espaces de polynômes (tout à fait anachronique de Descartes) dans lequel la limite d'une suite de polynômes aurait un sens.

⁴ Nous ne traitons pas le cas de l'ellipse alors que c'est celui que fournit Descartes comme premier exemple car dans la suite de notre travail, nous reprendrons l'exemple de la parabole avec d'autres méthodes, ce qui nous permettra de mieux les comparer.

On compare alors cette dernière équation avec $(y - e)^2 = y^2 - 2ey + e^2$

En identifiant les coefficients, cela donne $py - 2vy = -2ey$ et $v^2 - s^2 = e^2$

D'où : $v = e + \frac{p}{2}$ puis comme $e = y$ la quantité connue qui lui est égale, $v = y + \frac{p}{2}$

Il est important de remarquer que des difficultés calculatoires ardues surgissent lors de l'application de la méthode à des courbes algébriques dont l'équation présente des puissances impaires en x ou en y , absentes, comme on le verra, lorsqu'il s'agit de chercher une tangente¹ mais ce n'est pas une préoccupation pour Descartes².

2) Fermat : généraliser le calcul des tangentes

Pierre de Fermat (1601-1665) est juriste mais marque très tôt un intérêt pour les mathématiques. Homme très cultivé, il a des connaissances encyclopédiques en ce qui concerne les textes des Anciens (grecs ou latins) dont il admire la rigueur, en particulier, il ne cesse de faire référence à des mathématiciens grecs comme Diophante et Pappus.

Le 9 février 1665, le *Journal des Sçavants* publie³ son éloge. Retenu comme excellent dans toutes les « parties des Mathématiques », il a laissé, dit le rédacteur, plusieurs écrits dont « une méthode de *maximis et minimis*, qui sert non seulement à la détermination des problèmes plans et solides ; mais encore à l'invention des touchantes et des lignes courbes, des centres de gravité des solides, et aux questions numériques ». Cependant l'écrit reste imprécis sur le contenu des ouvrages et la teneur mathématique des méthodes promettant d'y revenir plus tard « lorsqu'on aura recouvert ce qui en a été publié, et qu'on aura obtenu de M. son fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore été ». En fait, le rédacteur ne précise pas que Fermat

¹ Voir plus loin comment Fermat explique que son choix de considérer la tangente plutôt que le cercle tangent est lié à ce problème.

² Sébastien Maronne souligne le choix cartésien du cercle plutôt que celui de la tangente. À écouter les commentateurs modernes – il cite Duhamel – Descartes devait connaître la notion de tangente qui permettait de simplifier sa méthode et ne pouvait pas ignorer les éventuelles complications calculatoires auxquelles était confrontée sa méthode dans Maronne, Sébastien, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661*, thèse de doctorat dirigé par M. Panza, Paris Diderot, 2007, p.149-152. En fait, son choix de cercles tangents plutôt que de droites tangentes est très fortement lié à des préoccupations optiques. Evelyne Barbin montre que « les problèmes optiques, et en particulier la taille des verres, ont amené Descartes à introduire l'idée et le terme courbure » dans *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, op. cit., p. 137. En ce sens, il ne vaut pas attendre une « réponse moderne » comme le suggère Maronne (op. cit., p. 154) pour se rendre compte que le choix de Descartes provient d'une intention de s'intéresser à la courbure de la courbe.

³ *Journal des Sçavants* (JS), février 1665, p. 14.

a, au cours de sa vie, écrit plusieurs méthodes de *maximis et minimis*, rédigées souvent conjointement à des méthodes de recherches de tangentes¹.

2.1) Méthode des *Maximis et minimis* : l'adégalité ou la « comparaison feinte »

Fermat écrit le mémoire intitulé *Methodus ad disquirendam maximam et minimam. De Tangentibus curvarum*² qui circule dans Paris, vers 1636, dans les mains d'Espagnet, Roberval, Mersenne et Descartes. Ce dernier juge la présentation obscure et accuse Fermat de ne donner aucune justification. C'est ainsi que débute une querelle sur les méthodes des tangentes³. En 1638, Fermat reformule sa méthode de *Maxima et minima* dans un écrit intitulé *Ad eandem methodum*⁴. Dans cet opuscule, il prend soin de justifier davantage sa méthode, en particulier il affirme que pour élaborer sa méthode il s'est servi des écrits de Diophante, de la géométrie de Pappus et du langage de Viète [*Vietaeis verbis utar*].

Sa méthode de *Maxima et minima* se présente sous forme d'un algorithme appliqué directement sur un exemple. Il considère un segment AC qu'il lui faut partager en un point B de sorte que le volume du solide $AB^2 \times BC$ soit maximal. Pour ce faire, il utilise les notations algébriques de Viète⁵ [*notis Algebraicis*] $AC = b$, l'inconnue $AB = a$. Il s'agit de maximiser le volume exprimé par $ba^2 - a^3$.

Décrivons les étapes de son algorithme : il faut

Premièrement : remplacer a par $a + e$ dans l'expression $ba^2 - a^3$:

$$ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$$

¹ Les deux principales références des écrits de Fermat seront la publication de 1679 : *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani, Accesserunt selectae quaedam ejusdem Epistolae, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas aut Physicam pertinentibus scriptae*, Joannis Pech, Toulouse, 1679 (VO) et les *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publiques, Paris, Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, (1891-1912), tomes I, II, III, V(O)F Le tome III est la traduction française des textes du tome I, nous donnerons les références des deux tomes lorsque nous citerons un texte latin du tome I.

Cette première méthode est publiée dans OF, t. I, p. 133-136 et t. III, p. 121-123, puis VO, p. 63.

² VO, p.63, OF, t. I p. 134-136 et III p. 121-123.

³ Pour la querelle entre Fermat et Descartes, on pourra consulter Barbin, Evelyne, *op. cit.*, p. 180-193, Maronne, Sébastien, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661 op. cit.*, p. 291-332, Mahoney, M.,S., *The mathematical carrer of Pierre de Fermat: 1601-1665*, second edition, UP, cop. 1994, p. 170-200.

⁴ OF, vol. I, p. 139 et vol. III, p. 126, VO, p. 66. Il est écrit en 1638 après le premier opuscule « *Methodus ad disquirendam maximam et minimam. De Tangentibus curvarum* ».

⁵ Comme Viète, Fermat utilise les voyelles pour les inconnues et les consonnes pour les choses connues.

Deuxièmement : comparer à la première expression du solide « comme s'ils étaient égaux » [*tranquam essent aequalia*] « même s'ils ne le sont pas [*licèt reverà aequalia non sint*] ».

Il faut donc adégaler $ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$ à $a^2b - a^3$

soit :

$$ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3 \sim a^2b - a^3$$

Les règles sur les égalités s'appliquent sur les adégalités, c'est-à-dire que l'on peut soustraire ou ajouter aux quantités comparées des choses égales de sorte que¹ :

$$be^2 + 2bae \sim 3ae^2 + 3a^2e + e^3$$

Troisièmement : diviser par e autant qu'on peut le faire².

D'où

$$be + 2ba \sim 3ae + 3a^2 + e^2$$

Quatrièmement : effacer [*deleo*] tous les homogènes qui sont affectés de e .

Après cette dernière étape, Fermat affirme que l'on ne compare plus, comme auparavant, par « comparaison feinte » ou « adégalité » mais que l'on a établi une « vraie équation » [*compararationes fictas & adaequalitates, sed veram aequationem*].

Il obtient ensuite en résolvant l'équation : $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

Pour justifier que, par cette méthode, il est bien parvenu à obtenir le maximum du volume cherché, il fait appel à une idée que Pappus avait développée pour résoudre un problème de minimum :

En cet endroit, Pappus appelle un rapport minimum *monachòn kai élachiston* [singulier et minimum], parce que, si l'on propose une question sur des grandeurs données, et qu'elle soit en général satisfaite par deux points, pour les valeurs maxima ou minima, il n'y aura qu'un point qui satisfasse. C'est pour cela que Pappus appelle minimum et singulier (c'est-à-dire unique).

Fermat résout par sa méthode d'adégalisation un problème de Pappus : il trouve une solution et vérifie qu'elle convient¹. Dans l'opuscule *Methodus de Maxima et Minima*²

¹ Nous adoptons pour le confort de lecture la notation \sim de l'édition d'Adam-Tannery pour signifier « adégaler ». Fermat n'utilise aucune notation pour signifier « adégaler » mais dit qu'il procède par « comparaison par adégalisation ».

² Fermat fait référence à Viète en ce point : « il faut reiterer la division, jusqu'à ce qu'on ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e , ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté [*afficiatur*] de e ».

dans lequel Fermat éclaircit davantage les liens qu'il tisse entre ses inspirations principales, qui sont Pappus et Viète, pour justifier sa méthode. D'après Fermat, l'idée de l'unicité de l'extremum, qu'il tient de Pappus, a une traduction en algèbre de Viète :

En étudiant la méthode de la synchrèse et de l'anastrophe de Viète, et en poursuivant soigneusement son application à la recherche de la constitution des équations corrélatives, il m'est venu à l'esprit d'en dériver un procédé pour trouver le maximum ou le minimum et pour résoudre ainsi aisément toutes les difficultés relatives aux conditions limites, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes.

Les maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens, quoique Commandin avoue ignorer ce que signifie dans Pappus le terme *monachos* (singulier). Il suit de là que, de part et d'autre du point constitutif de la limite [*puncti determinationis constitutivi parte*], on peut prendre une équation ambiguë [*ancipitem*³]; que les deux équations ambiguës ainsi prises sont dès lors corrélatives, égales et semblables⁴.

Dans le chapitre XVI de *De Aequationum Recognitione*⁵, Viète définit ce que sont des équations corrélées :

Mais deux équations doivent être comprises comme corrélées lorsqu'elles sont à la fois semblables, et en outre constituées de mêmes grandeurs données, tant par les degrés que par les constantes. Cependant les racines sont différentes, pour cette raison que les formules des équations, par leur nature peuvent être satisfaites par deux ou plusieurs racines dont la qualité ou le signe des termes différent⁶.

¹ OF, tome III, p. 127. Sur l'idée de Pappus et sa reprise par Fermat, on peut consulter l'explication d'Evelyn Barbin dans *La révolution mathématique au XVIIe siècle, op. cit.*, p. 174-176.

² OF, tome I, p. 147, tome II, p. 131.

³ Le sens premier de ce mot est « d'avoir deux têtes », cela a donné incertain, douteux, ambiguë ou équivoque.

⁴ *Ibid*, I, p. 148, III, p. 131.

⁵ Viète, François, *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo, quibus nihil in hoc genere simili aut secundum, huic auctori hactenus visum*, Parisiis, 1615.

⁶ Cité dans Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat: 1601-166.*, p. 148 : « Due autem equationes correlate intelliguntur, quum ambe similes sunt, & praeterea iisdem datis magnitudinibus constant, sive adfectionum parabolis, sive adfectionum homogeneis aequationum formulae de duabus pluribusve radicibus ex sui constitutione sunt explicabiles, vel in eis diversa est adfectionum qualitas, seu nota. » Le terme « corrélé » est équivalent ici à « ambigu ». Hérigone dans son *Cursus Mathematici* donne une définition « d'équation ambiguë » : « L'équation ambiguë est celle dont la puissance peut être expliquée par diverses racines. Or, à une quelconque grandeur donnée on luy peut trouver une équation ambiguë, dont la puissance pourra être expliquée par autant de racines, qu'il y aura d'unités en son exposant. » Il

Lorsqu'on dispose de deux équations corrélées, on peut, en les comparant, exprimer les coefficients de l'équation à l'aide des racines.

Soit par exemple l'équation $bA^2 - A^3 = c$ où c et b sont des constantes et où c est inférieur au maximum de la quantité $bA^2 - A^3$.

Une équation corrélée à celle-ci serait $b(A+E)^2 - (A+E)^3 = c$ (en notant $A+E$ l'autre racine de l'équation)

Par la synchronèse de Viète: $bA^2 - A^3 = b(A+E)^2 - (A+E)^3$ soit $b(A^2 - (A+E)^2) = A^3 - (A+E)^3$

Ce qui donne :

$$b(2A + E) = \frac{A^3 - (A+E)^3}{E}$$

$$\text{puis, } b(2A + E) = 3A^2 + 3AE + E^2$$

En vertu de l'unicité de l'extremum, les racines doivent être égales donc $E = 0$, d'où :

$$2bA = 3A^2 \text{ soit } \frac{b}{A} = \frac{3}{2}.$$

Lorsque Fermat considère deux équations corrélées, A et $A+E$ sont deux racines distinctes car E est non nul et positif. La division par E qu'il est amené à effectuer est donc correcte. Lorsque l'extremum est atteint, les racines deviennent égales, ce que Fermat traduit par une annulation de E [*nihilum*]¹. Il ne lui semble pas nécessaire de statuer davantage sur le statut de E , le cadre algébrique dans lequel il se place l'en dispense.

2.2) À la recherche d'une méthode générale pour calculer les tangentes

Fermat affirme que sa méthode de maxima et minima va s'appliquer à la recherche de tangentes.

donne comme exemple l'équation $8a - aa = 15$ dont 3 et 5 sont racines dans Hérigone, Pierre, *Cursus Mathematici*, tome second, chez Henry le Gras, Paris, 1634, p. 190.

¹ Sur ce point, Mahoney remarque que la genèse de la méthode de Fermat implique une contradiction inhérente qui est cette division par zéro. La méthode s'appuie sur une fausse hypothèse et sur la généralité de la théorie des équations de Viète. Dans le but d'appliquer la méthode de synchronèse, Fermat émet l'hypothèse (fausse) que l'équation admet deux racines distinctes, il obtient ainsi des relations générales valables quel que soit les coefficients de l'équation même dans le cas particulier de la racine double : « In his own mind, Fermat saw no division by 0. The division by $x - y$ belonged to the general examination of the equation ; setting x equal to y belonged of a particular case. », (x et y représentent les racines de l'équation), *op. cit.*, p. 156-157.

Première méthode (où l'on traite principalement les coniques)

Les premiers exemples d'application de sa méthode sont souvent des coniques. Dans l'opuscule *Ad eandem methodum*¹, Fermat recherche la tangente DM au point D à une ellipse ZDN d'axe ZN et de centre R .

Il pose $OZ = b$, $ON = g$. L'inconnue est $OM = a$. Il considère un point V que l'on prend « à discrétion » [*ad libitum*].

Il trace IEV parallèle à DO avec E sur l'ellipse et I sur la tangente DM . La convexité de l'ellipse permet d'affirmer que tous les points de la tangente DM sont en dehors de l'ellipse alors :

$$IV > EV \quad \text{et} \quad \frac{DO^2}{EV^2} > \frac{DO^2}{IV^2}$$

Mais, la propriété de l'ellipse se traduit par :

$$\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{ZO \cdot ON}{ZV \cdot VN}$$

Or²

$$\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{OM^2}{VM^2}$$

d'où

$$\frac{ZO \cdot ON}{ZV \cdot VN} > \frac{OM^2}{VM^2}$$

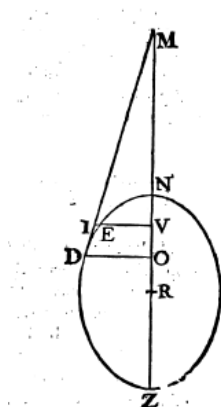


fig. 2

Il pose ensuite³ $OV = e$.

¹ *OF*, t. I, p. 134-136, t. III, p. 121-123.

² En vertu de la similitude des triangles ODM et VIM .

³ « Fingamus sumptam ad libitum aequalem E »

On a donc $ZO \cdot ON = bg$, $ZV \cdot VN = bg - be + ge - e^2$, $OM^2 = a^2$, $VM^2 = a^2 + e^2 - 2ae$

En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus, on obtient : $\frac{bg}{bg-be+ge-e^2} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$

Soit : $bga^2 + bge^2 - 2bgae > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2$

D'après sa méthode, il affirme qu'il faut comparer par adégalisation les deux membres de l'inégalité¹, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e :

$$bge - 2bga \sim -ba^2 + ga^2 - a^2e$$

Puis, il faut supprimer les termes où apparaît e , ce qui donne enfin l'égalité² :

$$-2bga = -ba^2 + ga^2$$

Et en résolvant cette équation : $\frac{2b}{a} = \frac{b-g}{g}$ ³.

Fermat n'explique pas pourquoi l'adégalisation de ces deux expressions est une opération pertinente, il reste également muet sur l'extremum visé par l'adégalisation. Si son raisonnement peut s'appliquer à d'autres coniques pour lesquelles le type d'inégalité du début pourrait être produit⁴, il ne dit rien non plus sur la possibilité d'application de sa méthode à des courbes⁵ autres que les coniques. Dans tous les cas, il convient de remarquer que cette méthode ne s'applique qu'à des expressions polynomiales.

Il ne s'offusque pas de ces insuffisances et conclut : « Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses applications qui pourraient en confirmer la haute valeur ».

Deuxième méthode : la propriété spécifique de la courbe (environ 1638) ou la sécante adégalisée à la tangente

Descartes exprime des reproches à cette dernière présentation, notamment il souligne le manque de justification du lien entre la méthode des *maximis et minimis* et l'obtention de la tangente⁶. Dans une longue lettre en réponse¹, dans le souci de

¹ « Oportet igitur juxta meam methodum comparare haec duo producta per adaequalitatem ».

² « Quos duos terminos juxta methodum aequare oportet »

³ Ce qui donne une construction simple de la tangente comme quatrième proportionnelle de choses connues.

⁴ Fermat n'applique pas l'adégalisation aux deux membres de l'inégalité, ce qui aurait pu être interprété comme le cas d'égalité lorsque le point I se confond en D . Sa méthode est fondée sur une conception de l'adégalisation qui porte sur des objets géométriques : longueurs, aires, volumes, etc et non pas sur des rapports.

⁵ Pour écrire cette inégalité il faut connaître la convexité de la courbe ce qui est intimement lié à la position de la tangente.

⁶ Lettre de Descartes à Mersenne de janvier 1638, *OD*, t. I, p. 486-493.

clarifier sa méthode des tangentes et de débrouiller son lien avec la méthode des *maximis et minimis* auprès de Descartes², Fermat expose en fait une autre méthode qu'il veut plus générale et plus commode. Comme sa méthode « mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été », il se propose dans cette lettre d'exposer à nouveau sa méthode. Soit une courbe *ZCA* de diamètre *CB*. Il faut trouver la tangente *AD* au point *A*. Pour les choses connues, il pose : $AB = b$ et $BC = d$, $BD = a$ est l'inconnue. Il considère un point *F* pris « à discrétion » et pose $FB = e$. La droite *FIE* parallèle à *BA* coupe la courbe en *I* et la tangente en *E*.

On a³ : $CF = d - e$ et $FE = \frac{ba-be}{a}$. Cette dernière relation est établie sans avoir encore considéré la spécificité de la courbe, elle est donc générale et est à la base de sa nouvelle méthode, pour cette raison, nous l'appellerons « la relation fondamentale ».

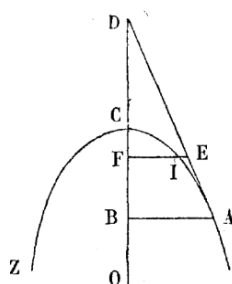


fig. 3

Fermat remarque que cette procédure peut être reproduite sur n'importe quelle courbe : « nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes *CF* et *FE* que nous venons de leur donner »⁴. Le point *E* de la tangente est hors de la courbe et selon la convexité de celle-ci, *EF* sera soit supérieur, soit inférieur à *FI* : « car la règle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe » :

¹ « Méthode de *maximis et minimis* expliquée et envoyée par M. de Fermat à M. Descartes », *OF*, t. II, p. 154-162. La lettre date du 20 juillet 1638.

² Il sait que cette lettre sera également lue par les savants autour de Mersenne puisque celui-ci en possède une copie. A la fin de cette lettre il fait d'ailleurs référence à ses pairs : « Je désire seulement qu'il [Descartes] sache que nos questions de *maximis et minimis* et de *tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner », *ibid*, p. 162.

³ En vertu des triangles semblables *ABD* et *efd*.

⁴ *Ibid*, p. 155.

Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle était égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI , suivant la propriété spécifique de la courbe¹.

Fermat considère le point E comme s'il était sur la courbe et obtient une autre valeur d'appliquée plus simple. Cette « feinte » lui permet d'adégaleriser cette appliquée avec l'appliquée exacte du point A et d'obtenir une deuxième relation entre a et e . La technique d'adégalisation autorise Fermat de ne plus se soucier du sens de la convexité. Cette dernière relation jointe à la relation fondamentale $FE = \frac{ba-be}{a}$ sont la clef du déploiement de l'algorithme.

Son premier exemple concerne la recherche de la tangente à la parabole, puis, pour montrer que sa méthode ne s'applique pas qu'à des coniques mais qu'elle est tout à fait « générale », il traite l'exemple de la courbe que Descartes lui avait proposée en défi².

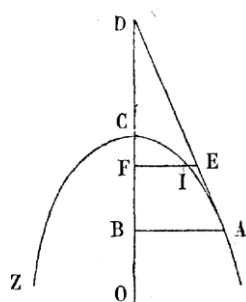


fig. 4

Il s'agit de la courbe appelée « nœud galand » et dénommée plus tard « folium de Descartes ». Elle est caractérisée par le fait que « quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme A , tirant la perpendiculaire AB , les deux cubes CB et BA soient

¹ *Ibid*, p. 155.

² Lettre de Descartes à Mersenne, 18 janvier 1638, *op. cit.*, p. 126 : « (...) sa règle prétendue n'est pas universelle comme il lui semble, et elle ne peut s'étendre à aucune des questions qui sont un peu difficiles, mais seulement aux plus aisées, ainsi qu'il pourra éprouver si, après avoir mieux digérée, il tâche de s'en servir pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe BDN , que je suppose être telle qu'en quelque lieu de sa circonférence qu'on prenne le point B , ayant tiré la perpendiculaire BC , les deux cubes BC et CD soient ensemble égaux au parallélépipède des deux mêmes lignes BC , CD et de la ligne p ».

égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme N , et sous les deux lignes CB et BA »¹.

Fermat reprend les notations du début de son exposé (car elles sont générales), on a : $CF = d - e$ et $FE = \frac{ba-be}{a}$. Il considère que le point E est sur la courbe et adégale les cubes de CF et FE avec le parallélépipède de côtés n , FC et FE ².

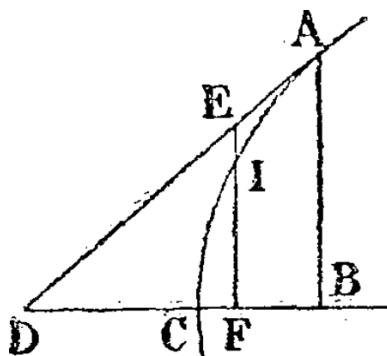


fig. 5

La somme $CF^3 + FE^3$ donne :

$$d^3 - e^3 - 3ed^2 + 3de^2 + \frac{b^3a^3 - b^3e^3 - 3eb^3a^2 + 3ab^3e^2}{a^3}$$

Il adégale cette expression au parallélépipède de côtés n , CF et FE :

$$d^3 - e^3 - 3ed^2 + 3de^2 + \frac{b^3a^3 - b^3e^3 - 3eb^3a^2 + 3ab^3e^2}{a^3} \sim \frac{ndba - ndbe - nbae - nbe^2}{a}$$

En multipliant par a^3 les deux membres comparés :

$$d^3a^3 - e^3a^3 - 3ed^2a^3 + 3de^2a^3 + b^3a^3 - b^3e^3 - 3eb^3a^2 + 3ab^3e^2 \sim ndba^3 - ndbea^2 - nba^3e - nba^2e^2$$

En ôtant les choses communes (car $d^3a^3 + b^3a^3 = ndba^3$), en divisant par e , puis en ôtant tout ce qui se trouve « mêlé avec e » et enfin en divisant par a^2 , il obtient alors

$$\text{l'égalité : } 3d^2a + 3b^3 = ndb + nba \text{ et trouve : } a = \frac{ndb-3b^3}{3d^2-nb}.$$

Dans sa reformulation, si Fermat considère que FE est égal à FI , c'est qu'il suppose que l'on peut considérer que FE et FI coïncident sur la portion FB . Si l'on examine son algorithm, l'adégalité devient égalité lorsque e disparaît, c'est-à-dire lorsque E coïncide avec A et FE et FI coïncident avec AB .

¹C'est-à-dire, en termes modernes, dont l'équation avec des axes orthogonaux est : $x^3 + y^3 = nxy$ où n est une constante.

²Cette figure illustre la lettre de Fermat mais ne ressemble pas au folium.

Cependant, quelle est la recherche d'extremum que cette situation implique ? Fermat ne précise pas pourquoi il est pertinent d'appliquer son algorithme des *maximis et minimis* dans cette nouvelle méthode.

Descartes prétend avoir montré que la méthode de Fermat est fautive et qu'elle manque de fondement. Pour répliquer à Descartes, Fermat explique, à la suite de l'exemple du folium, que lorsqu'il a été amené à inventer une méthode des tangentes, il a d'abord cherché¹ le point O sur l'axe de telle sorte que OA soit la plus courte des lignes menées d'un point O de l'axe. Il montre que si OA réalise ce minimum alors la distance OA est la normale. C'est donc le point O qui est donné et non le point A .

Sa démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde. Si AD n'est pas la touchante alors on peut tracer une perpendiculaire passant par O à la touchante (distincte de la droite AD). Cette perpendiculaire ne rencontre pas la touchante en A et elle coupe la courbe avant de couper la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre O et la courbe est plus courte que la perpendiculaire qui est elle-même plus courte que OA , ce qui est absurde². Une fois ce point O trouvé, il suffit de tracer une perpendiculaire pour obtenir la tangente. L'origine de sa méthode des tangentes est donc une recherche de normales.

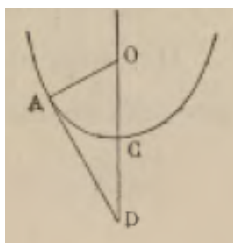


fig. 6

Il montre sur l'exemple de la parabole³ comment s'applique cette méthode de normales. Pour cela, il est contraint de considérer les quantités élevées au carrées : OA^2 et OI^2 , il s'agit alors, selon la méthode des *maximis et minimis*, d'adégaleriser OI^2 à OA^2 . De cette façon, il trouve bien le résultat connu⁴, mais le point E n'intervient

¹ fig.4.

² *Ibid*, p. 159.

³ « Je veux chercher le point O , en sorte que OA soit la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la parabole, *ibid*, p. 160.

⁴ *Ibid*, p. 161, a est égal à un demi-côté droit de la parabole.

nullement dans cette démonstration. La justification de l'adégalisation de FI et FE n'apparaît donc pas davantage comme conséquence de la recherche d'un minimum.

En outre, Fermat n'avait pas été satisfait de sa méthode des normales :

C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son carré sont d'ordinaires malaisés à trouver par cette voie ; la raison est prise des asymmétries [incommensurables] qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque sur $d - e$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'ôte pas non plus tous les inconvénients (...)¹.

Comme pour la méthode des cercles tangents cartésienne, Fermat pointe l'embarras que lui occasionne la manipulation des expressions comportant des asymmétries (c'est-à-dire des expressions irrationnelles)². Ce désagrément lui paraît satisfaisant pour justifier qu'il est préférable d'adégaler AE et AI :

Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, [sa méthode de recherche de normale et celle de Descartes], il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés [les asymmétries].

Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée [méthode avec la propriété spécifique de la courbe], car CF restant toujours $d - e$, et FE , $\frac{ba-be}{a}$, je ne vois rien qui empêche qu'on ne puisse le comparer, en prenant, si vous voulez, $d - e$ pour y et $\frac{ba-be}{a}$ pour x , sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode³.

Les embarras du calcul

Même s'il n'explique finalement pas en quoi sa nouvelle méthode est une recherche d'extremum, Fermat dévoile un argument d'ordre pratique. Pour rendre les

¹*Ibid*, p. 161.

²Ce dernier exemple ne montre pas les inconvénients calculatoires de sa méthode des normales. Nous laissons le soin au lecteur de s'en convaincre en l'appliquant au folium.

³*Ibid*, p. 162.

calculs moins embarrassants¹, il est amené à utiliser une adégalité. La considération de la propriété spécifique sur la tangente permet d'écrire une égalité de rapports entre côtés de triangles semblables et ne fait pas intervenir un calcul de longueurs faisant apparaître des radicaux. Pour Fermat, prendre l'ordonnée de la tangente au lieu de l'ordonnée de la courbe n'est pas juste une astuce calculatoire mais le principe et la « perfection » à propos de sa nouvelle méthode.

La question de la simplification des calculs revient dans un autre opusculé daté de 1640 intitulé *Ad eandem Methodum*², Fermat expose à nouveau cette dernière méthode des tangentes. Cet opusculé est intéressant pour notre propos car non seulement la présentation de la méthode des tangentes est plus développée que dans la lettre à Descartes que nous avons commentée, mais parce qu'il y traite nombreux exemples de courbes, parmi celles-ci certaines ne sont pas « celles de Descartes ». Fermat argumente la généralité de sa méthode :

Les lignes courbes dont nous cherchons les tangentes ont leurs propriétés spécifiques exprimables, soit par des lignes droites seulement [expressions algébriques], soit encore par des courbes compliquées comme on voudra avec des droites ou d'autres courbes³.

Pour illustrer le premier cas, Fermat traite la tangente de la cissoïde, et fournit des indications pour traiter la conchoïde. Ensuite, il se concentre sur des exemples de « courbes compliquées » dont les propriétés spécifiques sont « exprimables comme on voudra avec des droites ou d'autres courbes ». Pour traiter celles-ci, il conseille fortement d'appliquer certaines règles simplificatrices d'expressions :

Pour le second cas, que jugeait difficile M. Descartes, à qui rien ne l'est, on y satisfait par une méthode très élégante et assez subtile.

Tant que les termes sont formés seulement de lignes droites, on les cherche et on les désigne d'après la règle précédente. D'ailleurs pour éviter les radicaux [*asymetriae*], il est permis de substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes trouvées d'après la méthode précédente. Enfin, ce qui est le point important, aux arcs de courbes on peut

¹ Pour la question du traitement des radicaux par Fermat, on peut consulter, Giusti, Enrico, « Les méthodes des maxima et minima de Fermat » dans *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, tome XVIII, n° S2 (2009), p. 58-85.

² « Ad eandem methodum », *OF*, I, p.158, III, p. 140, *VO*, p. 69. Il date de l'année 1640. (à distinguer avec l'autre opusculé vu plus haut, qui a le même titre daté de 1638).

³ *Ibid*, p. 140-141.

substituer les longueurs correspondantes des tangentes déjà trouvées, et arriver à l'*adégalité*, comme nous l'avons indiqué : on satisfera ainsi facilement à la question¹.

Fermat propose donc une manière supplémentaire pour éviter les asymétries lorsque les termes ne sont plus uniquement « formés de lignes droites », c'est-à-dire le cas de courbes qui dépendent algébriquement de la longueur d'un arc d'une autre courbe algébrique dont on sait tracer la tangente. La cycloïde appartient à cette catégorie puisqu'elle peut être caractérisée par une relation liant l'ordonnée de la cycloïde avec la longueur de l'arc de son cercle générateur et par ailleurs toute tangente au cercle est connue. Dans ce cas on peut substituer (pour une abscisse donnée) l'ordonnée d'un point de la courbe génératrice par l'ordonnée correspondante sur sa tangente (connue). De plus, Fermat indique également une autre possibilité pour éviter les radicaux : on peut substituer un arc de courbe par la longueur de sa tangente. Il souligne que cet artifice est à ses yeux « important » en partie pour éviter des radicaux, mais pas seulement. Cependant il ne précise pas davantage en quoi il est indispensable. Nous reviendrons sur ce point.

Voyons comment Fermat applique ces deux préceptes pour la recherche de la tangente à la cycloïde *HRIC* de cercle générateur *COMF*. Par la propriété spécifique de la cycloïde, $RD = DM + \text{arc } CM$.

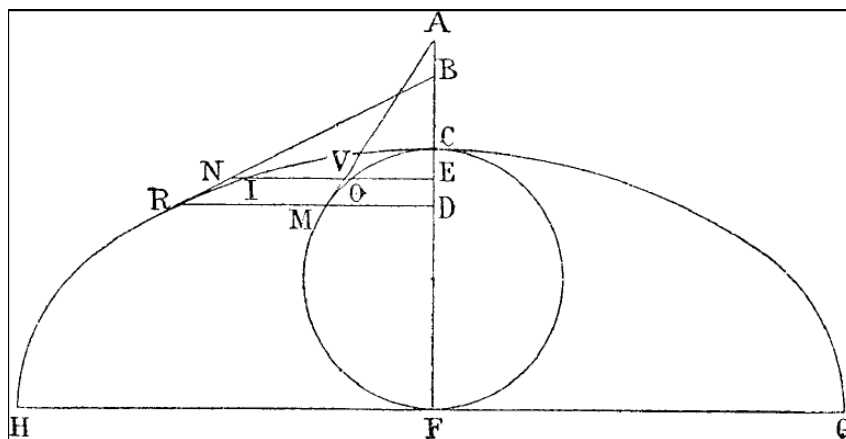


fig. 7

Il s'agit de mener la tangente *RB* au point *R*. Par celui-ci, Fermat mène une perpendiculaire *RMD* à l'axe *CDF*. *M* est le point du cercle qui a la même abscisse que *R*. Il trace la tangente *MA* au cercle en *M* (ce qui est un résultat connu). Puis, il considère un point *N* sur la tangente à la cycloïde et trace la perpendiculaire *NIVOE*

¹*Ibid*, p. 143.

qui coupe la cycloïde en I , la tangente MA au point V , le cercle en O . Ce qui est cherché est $DB = a$, Par construction, il a trouvé $DA = b$, $MA = d$ et les données sont $MD = r$, $RD = z$, l'arc de cercle $CM = n$ et enfin la droite arbitraire [*utcumque assumpta*] $DE = e$. Or

$$\frac{NE}{RD} = \frac{BE}{BD} \text{ et } NE = \frac{za - ze}{a}.$$

La propriété spécifique de la cycloïde s'applique au point N de la tangente. Suivant la méthode, Fermat adégale¹ NE à EI c'est-à-dire, $OE + \text{arc } CO$:

$$NE \sim OE + \text{arc } CO \sim OE + \text{arc } CM - \text{arc } MO$$

Or, l'expression de OE comportant des radicaux, Fermat la remplace par EV qu'il peut exprimer plus facilement selon le principe qu'il a énoncé auparavant.

Quant à la possibilité d'exprimer l'arc MO , Fermat n'ajoute rien, se contentant de le substituer par le segment de tangente MV qui lui correspond. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Fermat trouve aisément les expressions de MV et EV en considérant les triangles semblables MDA et VEA : $\frac{EV}{MD} = \frac{AE}{AD}$ et $\frac{MV}{ED} = \frac{AM}{AD}$. Il obtient :

$$EV = \frac{rb - re}{b} \text{ et } MV = \frac{de}{b},$$

d'où :

$$\frac{za - ze}{a} \sim \frac{rb - re}{b} + n - \frac{de}{b},$$

En multipliant par ab les deux membres de l'adégalité :

$$zba - zbe \sim zba - rae + bna - dae,$$

soit : $zbe \sim rae + dae$, il divise par e : $zb \sim ra + da$, et n'a pas besoin d'ôter des termes en e .

La dernière adégalité est donc une égalité² : $\frac{r+d}{b} = \frac{z}{a}$.

On peut remarquer que si l'on ne suit pas le conseil de règle simplificatrice, et qu'on ne remplace pas EO par EV , les calculs deviennent certes plus « embarrassants »³ mais non pas insurmontables. En revanche, sans expression analytique de l'arc MO , il n'est pas possible de continuer les calculs.

¹ Dans le texte, Fermat écrit « debet aequari », c'est-à-dire « doit être » : il s'agit bien d'une adégalisation.

² Cette égalité lui permet de donner une construction de DB qui apparaît comme quatrième proportionnelle.

³ On trouve $EO = \sqrt{(s - e)(2\rho - s + e)}$ (où ρ est le rayon du cercle générateur et $s = CD = \sqrt{n^2 - r^2}$).

Les deux préceptes qu'énonce Fermat conduisent effectivement à des simplifications réelles. Cependant la raison pour laquelle il est possible de remplacer sur une portion ϵ , un arc par un segment ou une ordonnée d'une courbe par l'ordonnée sur la tangente, ou encore de considérer la propriété spécifique de la courbe sur la tangente, est absente de cet opusculé¹. Il ne donnera d'ailleurs pas explicitement aucune explication. Son but est de fournir une méthode féconde, les résultats une fois obtenus peuvent être démontrés rigoureusement à la manière des Anciens. Cependant, il est possible de retrouver l'origine de ses préceptes dans d'autres textes.

Dans le traité *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica*², Fermat rappelle l'avis de nombreux géomètres qui pensent que « c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une courbe »³. Il s'agit de problèmes « rectification de courbes », c'est-à-dire, une courbe étant donnée, de construire une droite qui ait la même longueur que la courbe. L'anglais Wren avait découvert la rectification de la cycloïde en 1658 et la construction de celle-ci suppose l'égalité de la circonférence du cercle avec la base de la cycloïde. Fermat affirme que le cas de la cycloïde n'est pas une exception et annonce qu'il peut démontrer « l'égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique⁴ et pour laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite ». Il se propose donc de montrer la rectification de la parabole semi-cubique.

Comme on va le voir, l'idée de remplacer un arc de courbe par un segment de même longueur apparaît naturellement dans ce contexte de problème de rectification, même si ici Fermat ne fait nullement allusion à qu'elle puisse conduire à des simplifications calculatoires.

¹Pour des interprétations divergentes et contemporaines, on peut consulter l'article de Katz, Michail G., Schaps, David, M., Shnider, Steven, « Almost equal : the method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond » in *Perspectives on Science*, 21 (3), published by The MIT Press, Fall 2013, p. 283-324, ou Herber, Breger, « The mysteries of adaequare : a vindication of Fermat », *Archive for History of Exact Sciences*, 46, 3 (1994), p. 193-219.

²OF, t. I, p. 211-254 ; t. III, p. 181-213. Ce mémoire fut publié du vivant de Fermat.

³Il fait référence à la cycloïde : « il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde ».

⁴Il s'agit de la parabole semi-cubique.

La proposition VI est particulièrement intéressante à cet égard, elle énonce que lorsqu'on considère deux courbes dont la première est définie de telle sorte que son ordonnée soit égale à l'arc correspondant de la deuxième courbe, alors, si l'on sait tracer la tangente à la deuxième courbe en un point donné, on peut en déduire une construction de la tangente à la première courbe au point qui lui correspond :

Soient une courbe quelconque ONR , de la nature des précédentes [concaves vers un même côté], dont O est le sommet, OVI l'axe (ou l'ordonnée, car la démonstration est la même dans les deux cas). Je forme sur elle une autre courbe OAE , telles que ses ordonnées soient égales aux arcs correspondants de la première courbe ; c'est-à-dire $VA = \text{arc } ON, IE = \text{arc } OR$, et ainsi de suite. Je mènerai comme suit la tangente en un point donné de cette nouvelle courbe. Soit E le point donné, je mène l'ordonnée EI qui coupe la première courbe en R . Je mène en ce point R la tangente RC à la première courbe. Cette tangente rencontre l'axe au point C . Je pose $\frac{RC}{CI} = \frac{IE}{IB}$, et je joins EB . Je dis que EB est tangente en E , à la nouvelle courbe EAO .¹

Ce passage énonce que si l'on connaît le rapport $\frac{RC}{CI}$ (connu si l'on connaît la tangente en R) et l'ordonnée IE , il est facile de construire² IB qui représente la sous-tangente à la deuxième courbe au point E .

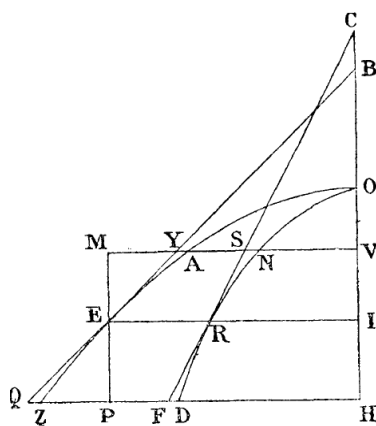


fig. 8

Nous pouvons souligner que, même si Fermat n'insiste pas sur ce point, si l'on considère un point Y de la tangente EB , on a toujours :

¹ *Ibid*, p. 195. Pour arriver au résultat, Fermat montre que pour tout point Y de la droite EB , on a $YV > VA$. Puis, il prouve la même inégalité pour un point de EB situé de l'autre côté du sommet O . Ces démonstrations utilisent la proposition I qui établit un encadrement d'un arc de courbe par des segments de tangentes. La démonstration de cette dernière proposition se fait par un raisonnement par l'absurde, *ibid*, p. 181-183.

² Cela se fait aisément à la règle et au compas.

$$VY = EI - RS^*$$

En effet, dans l'une des étapes de sa démonstration, Fermat considère la parallèle EP à l'axe et prouve que $MY = RS$.

Pour ce faire, il part de $\frac{EI}{IB} = \frac{VY}{VB} = \frac{MY}{ME}$ (VYB, EIB et MYE sont semblables). De $\frac{RC}{CI} = \frac{RS}{VI}$ et de l'hypothèse $\frac{EI}{IB} = \frac{RC}{CI}$, il trouve : $\frac{MY}{ME} = \frac{RS}{VI}$. Mais comme $VI = EM$, il a $MY = RS$.

Or au point A , on a : $VA = EI - \text{arc } RN$, ainsi la construction du point Y s'obtient en remplaçant l'arc RN par le morceau de tangente RS^1 . Cette proposition établit donc une correspondance entre les tangentes de deux courbes via la relation entre les deux courbes : aucune autre connaissance de la deuxième courbe n'est nécessaire pour en déduire ses tangentes. En termes calculatoires, ceci veut dire que la connaissance de l'expression analytique de la deuxième courbe n'est pas nécessaire pour construire la tangente cherchée. Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'on ne connaît pas une telle expression puisque l'on peut s'en passer et pourtant trouver la tangente par le calcul.

Tel est le cas de la cycloïde dont il n'existe pas d'équation en termes analytiques mais dont l'ordonnée de chaque point s'obtient comme somme d'un segment et d'une longueur d'arc de cercle. Fermat utilise le résultat intermédiaire (*) de cette proposition lorsqu'il s'agit de remplacer l'arc MO par VM^2 . Il n'agit donc pas du tout par approximation mais tout au contraire, il sait que sa démarche est exacte. De même, le fait de remplacer OE par EV a pour but de rendre le traitement calculatoire plus aisé mais le calcul aurait été possible sans le faire³.

En définitive, ces manipulations permettent essentiellement à Fermat de travailler avec des expressions polynomiales qui sont les seules sur lesquelles l'algorithme peut s'appliquer directement.

¹ On en déduit une construction rapide de EB en reportant la longueur RS à partir de M .

² La cycloïde est définie par $RD = \text{arc } CM + MD$. Elle apparaît comme la somme de deux courbes : l'une définie comme dans la proposition VI et une autre dont l'ordonnée s'exprime par des radicaux. Pour trouver la tangente à la première courbe, la proposition VI permet rigoureusement de remplacer l'arc MO par le segment MV .

³ On élève au carré la quantité et on travaille avec une expression polynomiale en appliquant ordinairement l'algorithme.

Fermat prolonge sa méthode à un champ plus large de courbes que celui de Descartes. Pour ce faire, il ajoute des règles de simplification pour être en mesure d'appliquer son algorithme, en étant convaincu que ces règles sont fondées.

Si l'exemple de la cycloïde est célèbre, Fermat ne s'en contente pas. Il affirme dans une lettre à Mersenne que sa méthode s'applique à des courbes dont les « appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes¹ :

Pour la *tangente de la roulette*, bien loin d'en faire un mystère, je vous veux faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette même méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à des lignes droites [c'est-à-dire les géométriques], me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes.

S'il ne précise pas quel est le type de « relation » à d'autres courbes, il décrit la construction de la tangente à deux courbes définies toutes les deux à partir d'une relation à une autre courbe. La première est un ovale « de laquelle le sphéroïde est au cercle circonscrit comme le double du diamètre à la circonférence du cercle ».

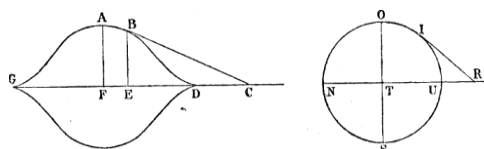


fig. 9

La deuxième *ABF* est définie à partir d'une parabole de même axe *AG* et même sommet *A* et telle que l'appliquée *FG* soit égale à la portion de parabole *AE*.

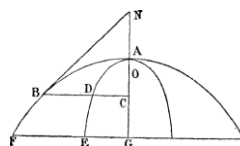


fig. 10

Comme on l'a vu, diverses sources inspirent Fermat dans la conception des méthodes d'invention. Sauf si des explications lui sont demandées, il ne cherche pas spécialement à légitimer leur bien-fondé. Son intérêt porte sur la fécondité de ses méthodes, c'est-à-dire leur capacité à fournir des résultats par des calculs qui soient le

¹ Lettre de Fermat à Mersenne du 22 octobre 1638, *OF*, II, p. 169.

moins « embarrassants » possibles. Démontré à la manière des Anciens, le résultat obtenu par les méthodes atteint le statut de vérité¹. Fermat sait qu'il peut y avoir systématiquement recours.

Il en va autrement pour Descartes qui, par *La Géométrie*, présente une pratique mathématique cohérente, certes circonscrite aux seules courbes géométriques, mais qui a l'avantage de générer une méthode universelle². Sa méthode des cercles tangents convient quelle que soit la courbe géométrique donnée par son équation. Cette délimitation aux seules courbes géométriques n'est pas à évaluer négativement. Pour Descartes, connaître les limites de la raison humaine offre au contraire la possibilité de mathématiques exactes. Dans sa méthode des cercles tangents, la traduction de la situation géométrique en termes algébriques fait apparaître des objets mathématiques, notamment le « e » représentant la racine double, dont l'interprétation est sans ambiguïté. La méthode des cercles tangents est exemplaire du souci cartésien d'évidence et de clarté.

3) Interprétations et améliorations des méthodes des tangentes

L'appréciation portée à propos de Descartes n'est pas reductible aux méthodes de Fermat. Certes, pour sa première méthode, celui-ci élucide le statut du « e » dans un cadre algébrique en faisant appel à la théorie des équations de Viète. En revanche, un statut univoque du « e » ne s'impose pas lorsqu'il apparaît dans les adégalisations de la deuxième méthode. Bien que son souci ne soit pas de justifier la légitimité de l'adégalisation pour sa deuxième méthode, nous verrons que ce manque d'explicitation conduit à des interprétations labiles du statut du « e ».

Fermat meurt en 1665. La plupart de ses écrits ne sont pas publiés de son vivant³. Ses mémoires et des copies de ses lettres circulent dans toute l'Europe.

¹ Si Fermat pratique la géométrie des Anciens dans toute sa rigueur, Mahoney souligne que : « Fermat provided tangible evidence, as none of his contemporaries could, that the problem-solving benefits of algebraic analysis far outweighed the loss of intuitive understanding that a concrete picture and tactile operations of geometric construction seemed to provide. In doing so, he spoke directly to a new generation of mathematicians for whom utility had become more important than esthetics. In a very real sense, Fermat presided over the death of the classical Greek tradition in mathematics. », *The mathematical career of Pierre de Fermat: 1601-1665*, op. cit., p. 364-365.

² On peut consulter à ce sujet, Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique*, op. cit.

³ Pour une chronologie des publications de Fermat, on peut consulter OF, t.I, ix-xiii et l'appendice « Bibliographical essay and chronological conspectus of Fermat's works » de l'ouvrage de Mahoney, M.S., *The mathematical career of Pierre de Fermat: 1601-1665*, op. cit., p. 411. Nous empruntons les informations à cette dernière étude.

Mersenne, Hérigone, Frenicle, Wallis, Lalouvière et Clerselier ont une petite partie des écrits de Fermat, mais l'essentiel reste entre les mains des correspondants de Fermat, en particulier de Pierre de Carcavi. Dans une lettre datée du 26 mars 1665, Christiaan Huygens prie Carcavi d'intervenir auprès des héritiers de Fermat pour rendre publics les écrits du savant toulousain¹. Samuel Fermat gère les publications de son père à partir de 1670, en particulier, il publie plusieurs de ses textes en 1679 sous le titre *Varia Opera mathematica*, qui inclut des mémoires importants (la plupart de ceux que nous avons étudiés) et une toute petite partie de sa correspondance.

Par ailleurs, le hollandais Van Schooten publie deux nouvelles éditions de *La Géométrie* de Descartes² en y ajoutant de nombreux commentaires et des mémoires d'autres mathématiciens. La première est une traduction latine, publiée en 1649 avec ses propres commentaires et ceux de De Beaune puis la deuxième est une édition en deux volumes publiée en 1659-60. Cette dernière, lue en abondance à la fin du XVII^e et au début du XVIII^e, présente en particulier la méthode des tangentes de Fermat³ (p. 142).

La circulation des écrits de Descartes et Fermat conduisent à des reformulations et interprétations de leurs méthodes de tangentes.

3.1) La méthode des tangentes de Descartes-Hardy-Debeaune

Descartes justifie Fermat : e substitué par zéro

En mai 1638, Descartes écrit à son ami Hardy. Il veut, par cette lettre, justifier la méthode de Fermat :

¹ « J'avois aussi quelques questions dignes de luy que je m'en allay luy proposer lors que je receus cette triste nouvelle. J'espere cependant qu'on ne laissera pas perdre ce qu'il y reste de ses écrits, et puis que vous avez tousjours esté de ses intimes amis, je ne doute pas que vostre intervention aupres de ses heritiers ne soit de grande efficace pour tirer de l'obscurité de si excellentes reliques », Lettre de Huygens à Carcavi du 26 mars 1665, *OH*, t. 5, p. 279.

² Descartes, René, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune, ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*, Paris, chez Jean Maire, 1649 (troisième édition, Amsterdam, 1683) et Descartes, René, *Geometria à Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Ex officinâ Ionnis Maire, Lugduni Batavorum, 1649 et Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune, ... gallice conscriptis, in latinam linguam versa et commentariis illustrata ope et studio Francisci a Schooten, ... Editio secunda. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus (...)* (deux volumes), 1659-1661. Pour l'histoire de ces publications, on peut consulter : Maronne, Sébastien, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661*, op. cit., p. 11-30.

³ Descartes, René, *Geometria*, op. cit., p. 142.

Mais pource que j'ai mis, dès mon premier écrit, qu'on pourrait la rendre bonne en la corrigeant, et que j'ai toujours depuis soutenu la même chose, je m'assure que vous ne serez pas marri que je vous en dise ici le fondemen.¹

En particulier il souhaite rendre compte de l'étape par laquelle les homogènes sont effacés. Pour ce faire, il traite un exemple qui selon lui peut convenir pour illustrer cette règle.

Contrairement à *La Géométrie*, Descartes va, non pas chercher un cercle tangent à une courbe mais trouver la droite tangente. Nous ne choisissons pas de présenter le même exemple que Descartes mais nous allons traiter le cas d'une autre courbe qui fût traitée plus tard par Debeaune en s'inspirant, entre autres, de cette lettre pour présenter une méthode des tangentes. Nous analysins celle-ci immédiatement après en restant pour autant fidèles au style de la lettre de Descartes.

À la manière de Descartes, considérons une courbe ABD d'axe AF , dont est cherchée la tangente en B . Pour cela, soit d'abord un point D de la courbe distinct de B . La droite BD est donc sécante à la courbe en deux points distincts et coupe l'axe en E . Le rapport $\frac{BC}{DF}$ est supposé connu et égal à $\frac{g}{h}$.

Posons : $AC = y$, $CB = x$, $FD = x'$ (choses connues), et $EC = v$ et $CF = e$.

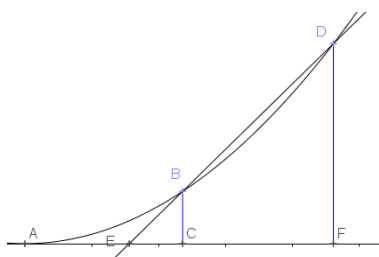


fig. 11

ECB et efd sont deux triangles semblables donc :

$$\frac{v}{x} = \frac{v+e}{x'} = \frac{h}{g}.$$

Ce qui donne

$$x' = \frac{xv+xe}{v} \quad (1)$$

Nous pouvons remarquer que cette relation est valable quelle que soit la courbe considérée.

¹ Œuvres de Descartes, édition d'Adam-Tannery, tome II, Vrin, Paris, 1964-1974, p. 169-173.

Ici, la relation au point B entre x et y est donnée par $x = \frac{y^2}{b+y}$ (dans laquelle b est un segment donné). Donc, au point D : $x' = \frac{(y+e)^2}{b+y+e}$ (2)

Des égalités (1) et (2), il résulte :

$$\frac{(y+e)^2}{b+y+e} = \frac{xv+xe}{v} = \frac{y^2(v+e)}{(b+y)v}$$

ou

$$(y+e)^2(b+y)v = y^2(v+e)(b+y+e)$$

En développant et en simplifiant :

$$2yvbe + eevb + y^2ve + eevy = y^2ee + y^2be + y^3e \quad (3)$$

Enfin, en divisant par e^1 :

$$2yvb + evb + y^2v + evy = y^2e + y^2b + y^3 \quad (4)$$

Or, l'égalité $\frac{g}{h} = \frac{v}{v+e}$ permet de trouver « aisément l'une des deux quantités » v ou e , que l'on substitue à l'autre égalité : « c'est ici le chemin ordinaire de l'analyse pour trouver le point E »². Il écrit que le problème de la sécante à une courbe passant par un point donné se traite de façon générale en suivant les règles ordinaires prescrites par *La Géométrie*. Le cas de la tangente est un cas particulier :

Maintenant, pour appliquer tout ceci à l'invention de la tangente (ou, ce qui est le même de la plus grande), il faut seulement considérer que, lorsque EB est la tangente, la ligne DF n'est qu'une avec BC , et toutefois qu'elle doit être cherchée par le même calcul que je viens de mettre, en supposant seulement la proportion d'égalité au lieu de celle que j'ai nommée de g à h .

Si $g = h$, comme, $\frac{v}{v+e} = \frac{h}{g}$ ou $gv = hv + he$, on a : $e = 0$ et l'équation devient :

$$2yvb + y^2v = y^2b + y^3,$$

ce qui donne

$$v = \frac{yb+y^2}{2b+y}.$$

Lorsque la droite BF est tangente, on $e = 0$ et Descartes remarque :

¹ Descartes divise par e : « Et enfin pourceque le tout peut se diviser par e », *ibid*, p. 63.

² *Ibid*, p.63.

En posant $e = qv$ (q est connu puisque $\frac{g}{h}$ l'est), l'équation d'inconnue v est $(qb + qy)v^2 + (2yb + y^2 - qy^2) + y^2b - y^3 = 0$ qui se résout aisément.

D'où il est évident que pour trouver la valeur de la quantité a [v] il ne faut substituer un zéro à la place de tous les termes multipliés par e (...) c'est-à-dire qu'il ne faut que les effacer. Car une quantité réelle étant multipliée par une autre quantité imaginaire, qui est nulle, produit toujours rien. Et ceci est l'élosion des homogènes de M. de Fermat, laquelle ne se fait nullement gratis en ce sens-là.

En suivant *La Géométrie* Descartes affirme légitimer « l'élosion des homogènes » de la méthode de Fermat en montrant que cette procédure a une explication « évidente » dans le cadre de l'algèbre¹. Le cas particulier de la tangente correspond à $e = 0$ et pourtant Descartes a divisé par e au cours de la résolution générale. Cette division lui était nécessaire sans quoi le calcul ne peut pas se poursuivre. Descartes s'en soucie-t-il? Il ne semble accorder au e qu'un faible statut : il est rien, non réel, imaginaire.

Sans s'attarder, Descartes précise aussi que l'invention de la tangente est équivalente à la recherche de la plus grande, c'est-à-dire le rapport $\frac{h}{g}$ qui devient égal à 1. Au moment de l'écriture de cette lettre, il pense ainsi achever ce que Fermat n'a pas établi puisque ce dernier n'a pas dit en quoi la méthode des tangentes était une application de la méthode de *maximis et minimis*. Comme son but est d'intégrer la méthode de Fermat dans le cadre de *La Géométrie*, il ne s'attarde pas sur l'intérêt du schéma des deux triangles semblables et sur la relation fondamentale « $FE = \frac{ba-be}{a}$ » qu'avait déjà perçue Fermat en considérant la propriété spécifique de la courbe sur la tangente².

La méthode des tangentes de De Beaune : réduire Fermat à Descartes

De Beaune a été instruit des différentes étapes de la dispute entre Descartes et Fermat³, en particulier il connaît la lettre de Descartes à Hardy dans laquelle le

¹ Evelyne Barbin commente pour ce passage : « Pour Descartes, il y a chez Fermat une « élosion des homogènes » non assumée. Tandis que nous trouvons chez Descartes ce que nous pouvons appeler une « identification des homogènes ». Cette identification est complètement assumée, et assurée dans le cadre de la théorie des équations algébriques. Ainsi, le fondement de la méthode cartésienne réside entièrement dans la conception des courbes géométriques, à savoir dans la possibilité de leur associer une équation », *La révolution mathématique au XVIIe siècle*, op. cit., p. 190.

² Sur ce point, on pourra consulter Sébastien Maronne, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661*, op. cit., p. 330-331.

³ Comme en atteste la lettre de Descartes à Mersenne datant du 20 février 1639 : « Monsieur de Beaune me mande (...) que vous lui avez fait voir toute notre dispute de M. [de Fermat] & et de moy, touchant sa règle pour les tangentes. Je serois bien aise qu'il vist aussi ce que i'en ay une fois écrit à M. Hardy [paragraphe précédent] » dans Descartes, *Œuvres de Descartes*, op. cit., II, p. 526.

philosophe présente une justification de la méthode de Fermat en fondant cette dernière par *La Géométrie*.

Il présente lui-même une méthode des tangentes publiée dans l'édition latine de *la Geometria* en 1659¹. Il commence par remarquer que la méthode qu'il expose consiste à trouver une équation en y qui aura deux « valeurs distinctes » si la quantité v ne correspond pas à la tangente, et à une seule valeur dans le cas contraire². C'est pour cela qu'il annonce qu'il sera amené à comparer l'équation trouvée avec celle-ci : $yy - 2ey + ee$.

Il considère alors une courbe AM de sommet M dont il cherche la tangente PM et la normale MN . BC est un segment donné de longueur b .

Pour ce faire, il pose $AL = y$, $LM = x$. Il considère ensuite un triangle APK tel que AK soit parallèle à la tangente PM . Puis il pose, $AP = v$ et $PK = s$.

L'équation de la courbe AM est :

$$\frac{b+y}{y} = \frac{y}{x} \text{ ou } x = \frac{y^2}{b+y}$$

Par construction, les triangles APK et LMP sont semblables donc $\frac{v}{s} = \frac{y-v}{x}$ d'où :

$$x = \frac{ys - vs}{v} = \frac{y^2}{b+y}$$

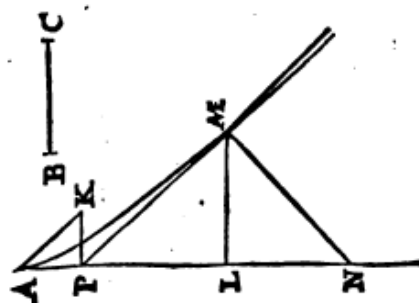


fig. 12

Il obtient l'équation quadratique en y :

$$y^2 = \frac{bs - vs}{v - s} y - \frac{bvs}{v - s},$$

à comparer avec : $y^2 = 2ey - ee$.

Ainsi : $\frac{bvs}{v-s} = e^2$ donc $s = \frac{ve^2}{bv+e^2}$ et $\frac{bs-vs}{v-s} = 2e$ donc $s = \frac{2ev}{b-v+2e}$

Donc, en démêlant, $v = \frac{be}{2b+y}$.

¹ *Op. cit.*, p. 131-133

² « Notandum hic est, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expositum, consistere in invenienda aequatione, in qua linea y vocata sumi potest pro duabus quantitatibus diversis, cum linea vocatur v ad tangentem non resertur ».

Debeaune considère, sans le dire, que $y = e$ et écrit $v = \frac{by}{2b+y}$, ce qui lui donne la valeur de¹ PL égale à $\frac{yb+y^2}{2b+y}$. Il n'a pas besoin de diviser par e .

Dans le développement, le triangle APK fonctionne comme objet auxiliaire de l'analyse du problème. Debeaune a supposé le problème résolu – c'est-à-dire le rapport entre v et s est égal à celui de l'ordonnée et la sous-tangente – et cherche, comme le prescrit *La Géométrie*, deux relations entre les inconnues v et s qui lui permettent d'obtenir leurs valeurs. Sa méthode n'est valable que pour les courbes qui possèdent une équation algébrique.

3.2) La nullité de e : une évidence calculatoire

Nous avons vu comment Descartes lorsqu'il légitimait l'élimination des homogènes déclarait qu'il était « évident » d'annuler le e . Il s'agissait dans ce cas d'une évidence calculatoire. Plusieurs présentations de la méthode de Fermat sont proposées du vivant de celui-ci, puis pendant des décennies qui suivent sa mort. Dans toutes, il est question de la nullité de e . Nous proposons d'examiner dans quelle mesure cette annulation se dépend de son évidence calculatoire en devenant davantage un automatisme algorithmique.

Beaugrand : nommer par o ce qui deviendra nul (1640²)

Beaugrand est critique de la méthode de Descartes car il ne la trouve pas assez simple :

Si tu prends la peine de chercher les tangentes des mesmes lignes par l'invention que le Sr des Cartes s'attribue et qu'il dit n'estre pas une de ses moindres de sa méthode, il te sera facile de juger combien celle-cy est plus simple, facile et générale, et particulièrement si tu suppose [sic] que les ordonnées ne rencontrent pas leur diamètre à angles droits, comme il est nécessaire en sa méthode, si on veut s'embarrasser dans un labyrinthe dont l'issue serait extraordinairement difficile³.

Il imagine la méthode dont Apollonius aurait pu se servir pour trouver les tangentes aux coniques. De cette méthode, il ne peut évidemment pas en être certain

¹ C'est le même résultat que celui qu'obtient Descartes (la notation v diffère).

² *OF*, t. V., p. 100-114. La datation n'est pas certaine, elle pourrait être de l'automne 1638 ou du printemps 1640, on pourra consulter Sébastien Maronne, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661*, op. cit., p. 264, note 83.

³ *Ibid*, p. 105.

puisque d'Apollonius, comme de tous les Anciens, il n'a aucune trace de leur manière de découvrir. Cependant, il prétend qu'Apollonius a usé d'un « artifice » différent de celui de Descartes et qu'il est valable pour toutes sortes de courbes :

Pour te faire connoistre les deffauts de la façon du S. des Cartes pour trouver les lignes droites qui coupent les courbes données à angles droits, je veux te monstrier l'artifice dont il est vraysemblable que Apollonius s'est servy pour trouver les tangentes des sections coniques, qui est général et qui peut estre employé à toutes sortes de lignes courbes.

Dans sa présentation¹ Beaugrand introduit la notation « o » qui remplace le « e » des présentations précédentes. La justification de ce changement est explicitée lors de la recherche de la tangente à l'ellipse : « nous nommerons (...) la ligne DG o , pour la rayson que je toucheray ci-après. (...) la ligne GD soit o , c'est-à-dire nulle »². L'introduction du « o » est la clef de sa méthode, comme il le souligne, avant de traiter la recherche de la tangente à la conchoïde de Nicomède :

Afin que tu puisses considérer l'usage de la quantité nulle que j'introduis en la recherche des tangentes, je veux t'en donner encore un exemple en la première conchoïde de Nicomède, puisque le S. des Cartes advoue luy mesme que si on voulait trouver la tangente de cette ligne par la méthode qu'il a expliqué, on s'engagerait dans un calcul autant ou plus long que aucun de ceux qu'il a faicts auparavant³.

Descartes avait effectivement annoncé des difficultés calculatoires et Beaugrand le cite littéralement : « On pourrait en cherchant dans la ligne BH [axe de la conchoïde] le point par où cette ligne CG [normale], selon la méthode icy expliquée, s'engager dans un calcul autant ou plus long qu'aucun des précédents »⁴.

¹ Il ne mentionne pas Fermat. Ce lui sera reproché, voir *OF*, t. V, p. 114.

² *Ibid*, p. 102-103.

³ *Ibid*, p. 110-111. Van Schooten effectue une recherche de tangente à la conchoïde par la méthode de Descartes (édition de 1649 et reprise en 1659) puis par la méthode de Fermat dans le commentaire à *La Géométrie*, *op. cit.*, p. 249-253 puis 253-255. Dans la première, Van Schooten obtient une équation du troisième degré qu'il compare à une autre équation qui possède une racine double. Dans la deuxième il cherche la normale en un point C de la conchoïde, pour ce faire, il cherche le point P sur l'axe de la conchoïde tel que la distance PC soit minimale et applique la méthode de Fermat mais nous analysons cet exemple plus loin.

⁴ *La Géométrie*, p. 352-352.

Suivons Beaugrand dans la considération de la conchoïde : Soit la conchoïde DCM dont on cherche la tangente KC en C où K est le point d'intersection avec l'axe. Nommons $AE = b$, $EC = d$ et $BE = k$ puis, $KE = a$ et $EI = o$.

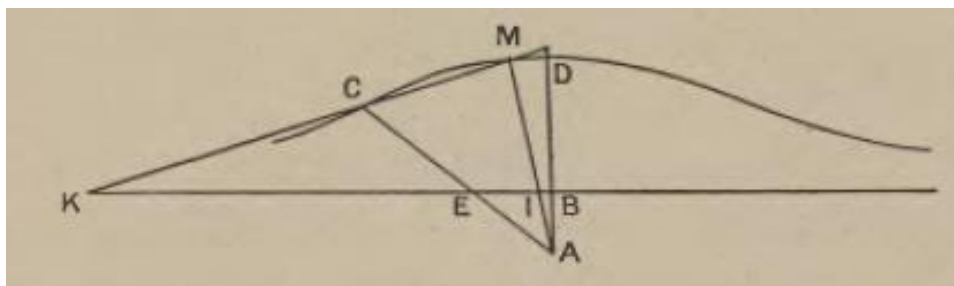


fig. 13

Au début M est un point « qu'il faut concevoir au commencement estre différent du point C ». Il exprime ensuite le carré de IA de deux façons différentes :

D'une part¹, $IA^2 = b^2 - 2ko + o^2$, puis², $IA = \frac{ab-od}{a+o}$. D'autre part, en élevant au carré la deuxième expression de IA , puis en « multipliant, divisant et ostant de cette équation les quantitez qui s'effacent mutuellement », il obtient une égalité dont il range les termes selon la disposition qui suit :

$$\left. \begin{array}{l} oaa + ooo \\ +2abb + bbo \\ + 2aoo \end{array} \right\} \text{ sera esgal à } \left\{ \begin{array}{l} +2kaa \\ +4kao - 2bad \\ +2koo + ddo \end{array} \right.$$

Puis, il affirme que : « Si KCM touche cette conchoïde, il est nécessaire que EI soit nulle, ostez toutes les quantitez où o se rencontre, et puis vous connoistrez que la valeur de a est $\frac{b^2+bd}{k}$ »³. Il donne ensuite une construction de cette tangente.

Il est à remarquer que sa résolution s'effectue en deux étapes : d'abord il résout algébriquement le problème de la sécante (C et M sont distincts) puis en rendant o absolument nul, il obtient la valeur EK correspondant à la tangente. Sa démarche n'est en rien différente de la démarche de Descartes lorsqu'il justifie la méthode de Fermat dans la lettre à Hardy.

¹ En vertu des triangles rectangles BAE et ABI , on a : $IA^2 = BA^2 + IB^2$ et $BA^2 = b^2 - k^2$. Or $IB^2 = (EB - EI)^2 = (k - o)^2$. D'où : $IA^2 = b^2 - k^2 + (k - o)^2 = b^2 - 2ko + o^2$.

² Beaugrand se réfère à un résultat de Ptolémée et Théon pour exprimer MA et en déduire IA , *ibid*, p. 114.

³ *Ibid*, p. 112.

Hérigone : « *e est zéro* » (1649)

Hérigone (1580-1643) publie une présentation de l'application de la méthode des *Maxima* et *minima* et de la méthode des tangentes dans son *Cursus mathematicus*¹. Cet ouvrage est un cours mathématique « démontré d'une nouvelle, brieve et claire méthode, par notes réelles et universelles, qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue ». Son dessein est d'exposer l'essentiel des connaissances scientifiques de son époque pour un public large. Le texte est en latin mais une traduction française figure en regard.

Pour la méthode des *Maxima* et *minima*, Hérigone traite quatre questions puis traite ensuite la recherche des tangentes à quelques coniques. La méthode des tangentes est présentée comme corollaire de la méthode de *Maxima* et *Minima* : « Par la même méthode, on trouvera aussi les tangentes de toutes sortes de lignes courbes, en des points donnez en icelles ».

La première question traitée consiste à chercher « le plus grand rectangle contenu sous le segment d'une ligne droite donnée »². Nous choisissons de traiter cet exemple en raison de sa simplicité et parce que notre intention est de constater s'il y a des modulations sur le statut du « *e* ».

Les résolutions des questions sont structurées selon deux étapes : analyse 1 et analyse 2. La première consiste à donner des notations et la deuxième à la résolution proprement dite.

Suivons Hérigone³ : il considère un segment EF et un point G .

Il pose $b = EF$ et $a = EG$, on a $GF = b - a$. Le rectangle EGF est donc égal à $ab - a$. Puis, il débute sa deuxième étape : il suppose « *e est zéro* » et fait $a + e = EG$ et $b - a - e = GF$, le rectangle EGF est donc égal à $ab - a^2 - 2ae + eb - e^2$.

Puis il écrit l'égalité : $ab - a^2 = ab - a^2 - 2ae + eb - e^2$. En simplifiant les termes communs, il a $2ae + e^2 = eb$, puis il divise par e , ce qui donne : $2a + e = b$. Il a recours ensuite à son hypothèse « *e est zéro* » pour supprimer le terme « *e* » et obtenir $2a = b$.

La recherche des tangentes à des coniques est présentée ensuite. Nous ne donnons ces résolutions, qui ne sont pas nouvelles par rapport aux présentations de la

¹ *Supplementum cursus mathematici continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affecturum Effectiones*, Chez Henry le Gras, Paris, 1642, Proposition XVI, « De maximis et minimis », p. 59-69. Les *Cursus mathematici* est constitué de six volumes et est publié à Paris entre 1634 et 1642.

² *Ibid*, p. 59.

³ Nous adaptons ces notations à celles que nous avons utilisées dans ce chapitre.

première méthode de Fermat mise à part l'introduction de notations symboliques et du « zéro » introduit dans la méthode des *maximis et minimis*¹.

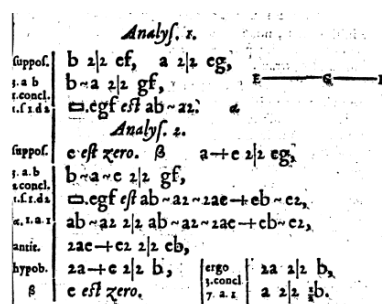


fig. 14

L'introduction de « e » ne s'effectue plus au moment de la présentation des données comme la plupart des autres auteurs. Hérigone se contente de présenter abruptement et sans aucun type d'explication une application de sa procédure sur un exemple. Dans son premier opuscule *Methodus ad disquirendam maximam et minimam. De Tangentibus curvarum*, Fermat avait présenté de façon générale mais très laconiquement sa méthode puis l'avait appliquée sur plusieurs exemples. Par ces exemples, le statut de « e » comme élément géométrique apparaissait, notamment dans la recherche de tangentes². Hérigone réduit le texte de Fermat à sa seule teneur algorithmique. Le « e » ne signifiant plus une longueur, est ainsi réduit à un simple rôle fonctionnel de calcul, une simple lettre dont la seule réalité est d'être supposée nulle. La nouveauté qu'ose la présentation d'Hérigone est donc de nommer par zéro une entité qui ne l'est pas, tout simplement parce qu'elle le devient par nécessité de l'algorithme.

Cette raréfaction de sens géométrique doit être interrogée. Hérigone écrit un manuel dont le destinataire est l'étudiant et non pas forcément l'un de ses pairs. Il juge peut-être sans intérêt de fournir tous les détails significatifs de la méthode de Fermat. Ainsi, en délivrant la présentation de trop de considérations, il fournit cependant une méthode calculatoire dont l'intérêt pragmatique pour l'élève est sans doute recherché.

Van Schooten : inutile de présenter e (1659)

Dans son commentaire au livre II de *La Géométrie*, Van Schooten présente la méthode des tangentes de Fermat à partir de l'exemple de la conchoïde, qu'il vient

¹ *Ibid*, p. 65-69.

² « Ponatur *CE* esse a : ponatur *CI* esse e », *OF*, t. I, p. 135.

tout juste de traiter par la méthode de Descartes¹. Il annonce qu'il utilisera une méthode des *maximis et minimis* qu'il détiend de Fermat et qu'Hérigone a fait voir dans le supplément de ses *Cursus Mathematici*².

Suivons Van Schooten dans son traitement de la conchoïde : CE est une conchoïde de pôle G et de règle AB , P est un point de l'axe.

Van Schooten avertit que chercher une normale CP revient à trouver le minimum parmi les carrés des longueurs CP^2 , où P se trouve fixé sur l'axe³.

Il pose : $GA = b$, $AE = LC = c$, $AM = y$, et $PA = v$. $GM = b + y$ donc⁴ $GC = \frac{bc+cy}{c}$.

Comme $GM^2 = bb + 2by + yy$, il trouve :

$$CP^2 = \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by + vv + 2vy.$$

Van Schooten, sans aucune explication, mande de poser $AM = y + e$ et trouve la nouvelle expression de :

$$CP^2 = \frac{bbcc + 2bccy + ccyy + 2bcce + 2ccey + ccee}{yy + 2ey + ee} - bb - 2by - 2be + vv + 2vy + 2ve$$

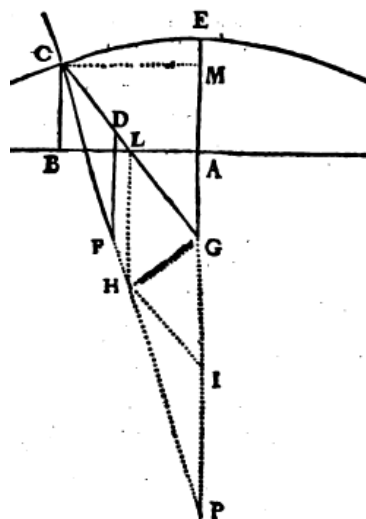


fig. 15

¹ La figure 15 lui sert pour la présentation des deux méthodes.

² Descartes, René, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, op. cit.*, p. 253 : « Verùm enim verò quoniam lineae CP alio quoque modo investigari que unt, beneficio Methodi de Maximis & Maximis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosanao Consiliarius, quam Herigonijs in supplemento Cursus sui Mathematici (...) »

³ « Deinde quaero quadratum ex PC , supponendo illud esse minimum quadratorum omnium, quae quae fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. », *ibid.*, p. 245.

⁴ Théorème de Thalès dans le triangle GCM .

Il égalise les deux expressions trouvées puis effectue les simplifications habituelles (suppression des termes communs puis division par e), puis néglige les termes en e ou en e^2 , ce qui lui donne la valeur de $v = \frac{bbcc}{y^3} + \frac{bc}{y^2} + b$.

Chez Van Schooten, l'introduction du e apparaît en cours de résolution. Il ne semble pas nécessaire à l'auteur de le présenter au début de son analyse comme c'est le cas pour les autres données. Van Schooten accentue ainsi le caractère algorithmique de la présentation d'Hérigone dont il hérite.

3.3) « e » comme « infinitè parvam » ou « infiniment petit »

Huygens (1667) versus Sluse

Van Schooten enseigne les mathématiques à Christiaan Huygens entre 1645 et 1647. À cette occasion il écrit un texte sur lequel Huygens va réaliser ses premiers apprentissages¹ et où sont exposées la méthode des *Maximis et minimis* et celle des tangentes. Van Schooten rappelle l'existence de l'exposé d'Hérigone puis les présente à son tour d'une manière similaire à ce que nous avons décrit plus haut. À sa lecture, Huygens ne semble pas satisfait de la présentation schootenienne car il juge qu'avec ce dernier on ne saisit pas de quelle façon il a découvert la règle².

En septembre 1652³, Huygens applique la méthode des *Maximis et minimis* en se référant à Fermat « *secundum Fermattij regulam* ». Il donne une explication de la règle en se plaçant dans un cadre algébrique : ses arguments sont du même type que ceux avancés par Fermat. Au maximum, $y = 0$ (le rôle de y est identique à celui de e) les deux racines deviennent égales⁴. Douze ans plus tard, le 13 avril 1667, Huygens présente une « Démonstration de la règle des *maxima* et des *minima* » et « Une règle pour trouver des tangentes aux lignes courbes »⁵ devant l'assemblée de l'Académie des Sciences. Ce texte est important non seulement pour des raisons épistémologiques

¹ Huygens, Christiaan, *Œuvres complètes*, publiée par la Société hollandaise des Sciences, Martinus Nijhoff, La Haye, t. XI, 1908, p. 3-4. (Noté par la suite *OH*, suivi du n° de tome et de l'année de publication). Ce manuscrit contient des cours portant sur les résultats de Diophante, Apollonius, Pappus, Viète, Descartes et Fermat.

² « inventionem hujus regulae non perceptit, quae est hujusmodi », *ibid*, p. 20.

³ *OH*, t. XII, 1910, p. 59.

⁴ *Ibid*, p. 61-62. Nous détaillons plus loin.

⁵ *Procès-verbaux de l'Académie Royale des Sciences (PVARs)*, année 1667, fol. 113. Une traduction française à laquelle nous nous référons est proposée dans *OH*, t. X, p. 230.

(que nous allons commenter), mais aussi en raison de sa publication tardive¹ dans une compilation de travaux d'académiciens. Cette compilation est une initiative de l'académicien La Hire qui, à partir de 1686, souhaite publier un recueil d'ouvrages et de mémoires des premiers académiciens, en particulier ceux de Frénicle, de Roberval mais aussi de Huygens. Il sollicite ce dernier pour proposer des publications parmi ses mémoires académiques. Entre autres, Huygens choisit son exposé de la méthode de *maximum* et *minimum* et celui des tangentes. Ce recueil de prestige n'est publié finalement qu'en 1693. Il a circulé et a été abondamment lu dans les milieux savants à la fin du XVIIIe siècle.

En 1667, avant de commencer sa présentation, Huygens rappelle que Fermat est le premier inventeur de la règle « pour déterminer les valeurs maximales et minimales dans les questions géométriques », mais qu'il n'a pas « communiqué le fondement ». Il prétend avoir trouvé ce dernier et de plus, avoir abrégé la règle. Sa règle s'accorde avec celle de John Hudde mais, dit-il, elle est plus « générale » et plus « élégante »². Huygens présente la règle de *Maxima* et *minima* en l'appliquant à des exemples, le premier étant le même que celui par lequel il avait débuté son mémoire de 1652. Nous allons examiner les différences entre les deux présentations.

Dans un premier exemple, il considère un segment ED et deux points A et B . Il cherche un point C sur ED tel que $CA^2 + CB^2$ soit minimal. Pour que ceci ait lieu, Huygens affirme qu'il est nécessaire qu'il y ait de part et d'autre deux points F et G tels que l'on ait

$$FA^2 + FB^2 = GA^2 + GB^2 > CA^2 + CB^2.$$

Il pose $EA = a$, $BD = b$, $ED = c$, puis GF « égale à une ligne donnée e ». Il cherche $EG = x$ tel que l'on ait $FA^2 + FB^2 = GA^2 + GB^2$.

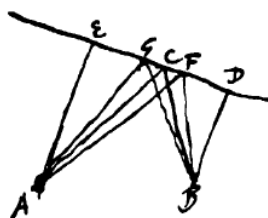


fig. 16

¹ *Divers ouvrages de mathématiques et de physique, par Messieurs de l'Académie royale des Sciences*, 1693, p. 326-335.

² *OH, op. cit.*, p. 229. Huygens fait référence à la présentation de Van Schooten pour cette dernière dans les commentaires à *La Géométrie* de Descartes

Il exprime alors $FA^2 + FB^2$ et $GA^2 + GB^2$ puis égale les deux quantités, ce qui lui donne :

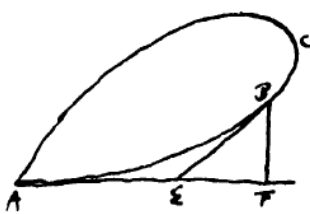
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$$

Or, Huygens affirme qu'en prenant « e infiniment petite [*infinitè parvam*] la même équation donnera la valeur de EG lorsqu'elle est égale à EF . De cette façon nous aurons déterminé le point cherché C pour lequel $CA^2 + CB^2$ est minimal »¹. Il poursuit en effectuant les étapes habituelles : ôter les termes égaux, diviser par e puis ôter les termes qui contiennent e « puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne contiennent pas de e »².

Dans le texte de 1652, Huygens avait débuté de la même façon, en écrivant l'expression $CA^2 + CB^2$, une fois avec $EC = x$ et l'autre avec $EC = x + e$ puis il avait comparé la différence de ces deux expressions avec une expression du second degré ayant une racine double. Contrairement à la version de 1667, Huygens n'utilise pas le terme « infiniment petit [*infinitè parvam*] ».

Dans la version de 1667, Huygens décrit également la « Règle pour trouver les tangentes des lignes courbes »³. À nouveau, il souligne que Fermat a insuffisamment expliqué son fondement et que même si Descartes a tenté une explication, il juge celle-ci également insatisfaisante et promet que la sienne est meilleure. Pour expliquer la règle, Huygens l'applique au folium de Descartes d'axe AF .

Il pose $AF = x$, $FB = y$. On a : $x^3 = xya - y^3$ où a est une longueur donnée. Pour trouver la sous-tangente $FE = z$, Huygens donne l'algorithme que nous présentons sous cette forme⁴:

 <p style="text-align: center;">fig. 17</p>	
Mettre tous les termes de l'équation dans un seul membre	$x^3 - xya + y^3 = 0$

¹ *Ibid*, p. 230.

² *Ibid*, p. 232.

³ *Ibid*, p. 243.

⁴ Nous disposons sous forme de deux colonnes l'application de l'algorithme au folium pour la lisibilité.

Multiplier tous les termes dans lesquels se trouve y par la dimension à laquelle se trouve y. Cette somme est le numérateur.	$-xya + 3y^3$
Multiplier tous les termes dans lesquels se trouve x par la dimension à laquelle se trouve x. Puis diviser par x. Cette somme sera le dénominateur.	$3x^2 - ya$

Il obtient alors $FE = \frac{-xya + 3y^3}{3x^2 - ya}$.

Prêtons attention, pour l'instant, à l'explication qu'Huygens avance : il considère une courbe quelconque BDK et la sécante BD , le point D « fort proche de B »¹. Il pose $AB = x$, $BF = y$, FG est une longueur donnée e , il cherche $EF = z$. En vertu de la similitude des triangles EBF et EDG , il obtient $GD = y + \frac{ey}{z}$, relation qui est vraie pour n'importe quelle courbe.

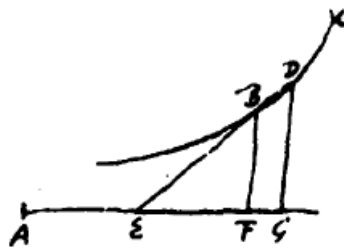


fig. 18

Il revient alors sur le folium de Descartes. Comme le point D est sur la courbe, il peut remplacer dans l'équation x par $x + e$ et y par $y + \frac{ey}{z}$.

Il obtient :

$$x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3 + y^3 + \frac{3ey^3}{z} + \frac{3e^2y^3}{z^2} + \frac{e^3y^3}{z^3} - axy - aey - \frac{aeyx}{z} - \frac{ae^2y}{z} = 0$$

Puisque $x^3 - xy^2 + y^3 = 0$, il supprime ces trois termes du premier membre. Tous les termes restants étant multiples de e , il divise par e puis néglige dans les termes restants ceux qui contiendraient e . Cela il peut le faire car il affirme :

L'équation ainsi obtenue donnera la droite z ou FE , bien entendu dans le cas où BE est considéré comme une tangente de sorte que FG ou e est infiniment petite. Car les termes dans lesquels e est resté représenteront alors des quantités infiniment petites ou entièrement évanouissantes [*infinite parva sive omnino evanescentes continebunt*].

¹ « ipsi B proximo ».

Les termes restants, affirme Huygens, donnent la valeur de z (c'est bien le cas). Ceci explique « l'origine et la règle de Fermat. » Il va ensuite fournir la raison de son abréviation¹. Ainsi, Huygens présente une justification de la méthode des tangentes en utilisant le langage des infiniment petits. Alors que pour le traitement d'exemples semblables, en 1652, il n'avait nul besoin de considérer des infiniment petits, il choisit volontairement en 1667 une telle présentation.

Huygens, s'adressant à l'Académie Royale des Sciences, a forcément le souci de la compréhension de son propos. On peut donc avancer qu'en 1667 dans le cadre d'une institution savante, le terme « quantité infiniment petite » fait partie du savoir partagé et qu'il n'est pas *a priori* choquant de l'utiliser. Cela voudrait dire qu'il peut être habituel d'accepter des explications mathématiques par le biais de cette terminologie.

René-François Sluse (1622-1685), chanoine de la cathédrale de Liège, est un mathématicien de renommée qui correspond avec les plus éminents savants de son temps, surtout Pascal (1623-1662), Huygens et le président de la Royal Society, Henri Oldenburg (1619-1677). Entre ses nombreux travaux, Sluse présente une méthode des tangentes pour les courbes géométriques qu'il énonce sous forme de règle. Cette règle est quasi identique à celle de Huygens alors que chacun des auteurs la justifie différemment comme nous allons le voir.

Dans deux lettres à Pascal, Sluse affirme posséder une règle des tangentes qu'il applique à des courbes appelées « perles » en raison de leur forme². Entre temps il améliore sa méthode³ et le 18 août 1662, il informe Huygens qu'il est en possession d'une méthode des tangentes et l'applique à une courbe⁴. Le 12 janvier 1663, il revient sur le même sujet en précisant que sa règle est indemne de tout « ennui calculatoire »⁵. Huygens affirme dans une lettre à Oldenburg qu'il possède la même

¹ Sa démarche est purement algorithmique. Il remarque que lorsqu'il cherche à obtenir z à la manière de Fermat cela revient à appliquer la formule qu'il donne. L'explication est donnée p. 248-254. Nous ne la détaillons pas ici car elle n'a pas d'intérêt particulier par rapport à notre propos.

² C. Le Paige, « Correspondance de R.F. Sluse », *Bulletino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e Fisiche*, pubblicato per Da B. Boncompagni, tome XVII, Roma, 1884, p. 423. L'auteur de l'article indique que la découverte de Sluse s'est faite en deux étapes. Il possède une méthode avant 1655 qu'il l'améliore entre 1655 et 1660.

³ Rosenfeld, L., « René-François de Sluse et le problème des Tangentes », *Isis*, vol. 10, n°2, juin 1928, p. 416-434.

⁴ *Ibid*, p. 605.

⁵ *Ibid*, p. 607, « calculi molestiâ »

règle que Sluse – c’est celle que nous venons d’analyser – il dit la détenir de Hudde et d’en avoir une « démonstration à sa façon ». Celui-ci l’aurait secrètement communiquée à Huygens et Van Schooten¹. Presque dix ans plus tard, en 1672, la règle de Sluse est publiée sous forme d’une lettre dans les *Philosophical Transactions*², adressée à Oldenburg dans laquelle Sluse décrit sa règle puis l’applique à quelques courbes. Il rappelle les atouts de sa règle qui sont sa brièveté, sa facilité et le peu de travail calculatoire qu’exige son application³. Il ne donne pas de démonstration de sa règle dans cet article mais que quelques indications⁴. En revanche, il existe un manuscrit non publié dans lequel Sluse démontre sa règle⁵. Si nous ne détaillons pas sa démonstration qui n’a jamais été publiée⁶ de son vivant, nous indiquons qu’elle repose sur des procédures exclusivement algébriques et qu’elle ne fait pas intervenir, comme chez Huygens, le terme « infiniment petit ». Les termes qui sont une puissance de e supérieur à deux, dont s’était immédiatement débarrassé Huygens dans sa démonstration en raison de leur caractère « infiniment petites ou entièrement évanouissantes », sont conservées jusqu’à la fin de la preuve de Sluse. Ce témoignage confirme l’idée selon laquelle Huygens trouve plus simple d’expliquer sa règle par le biais de considérations sur les infiniment petits.

La présentation de Barrow (1670) : le triangle caractéristique

Barrow (1630-1677) est un mathématicien anglais, professeur à Cambridge⁷ En 1670, il publie les *Lectiones Opticae et Geometricae*⁸. La partie *Lectiones geometricae* est constituée de treize leçons. La plupart des démonstrations et constructions de Barrow sont géométriques et ne font pas appel à des calculs algébriques. Au début de la leçon VI, Barrow annonce son intention d’exposer une méthode pour construire des tangentes à une courbe mais « circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio

¹ Giusti, Enrico, « Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz », *op. cit.*, p. 36.

² *Philosophical Transactions*, 1672, 7, p. 5143-5147. La lettre date du premier janvier 1672.

³ « Brevis mihi visa est, ac facilis, (...) & quae absque ullo calculi labore de omnes omnino líneas extendatur ».

⁴ Rosenfeld, L., « René-François de Sluse et le problème des Tangentes », *op. cit.*, p. 417.

⁵ *Ibid*, « Demonstratio Regulae generalis ducendi tangentes ad quaslibet curvas Geometricas », appendice 2, p. 431-434.

⁶ Des éclaircissements de cette démonstration sont donnés dans Rosenfeld, L., « René-François de Sluse et le problème des Tangentes », *op. cit.*, p. 423-426.

⁷ Il obtient la première chaire lucasienne en Géométrie en 1663 de laquelle il démissionne en faveur de son disciple Isaac Newton.

⁸ Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae, in quibus praesertim generalia curvarum linearum symptomata declarantur*, London, 1670.

investigatorum simul ac demonstrationem expeditam », c'est-à-dire sans l'embaras des calculs¹. Les leçons allant de VI à X contiennent des propositions autour de la recherche de tangentes et se présentent sous forme de problèmes².

Cependant, malgré sa réticence aux calculs, Barrow donne, en appendice à la leçon X, une méthode permettant de trouver des tangentes sous forme d'un algorithme. De plus, comme on va le voir, il présuppose des infiniment petits. Il déclare qu'il ne voyait pas *a priori* pourquoi donner une méthode supplémentaire après toutes ces propositions :

Même si je ne sais pas vraiment si après tant de méthodes aussi divulguées et aussi utilisées, comme celles dont on a traité, il y a quelque avantage à le faire. Du moins, je le fais sous le conseil d'un ami³, d'autant plus volontiers, qu'il paraît qu'en comparaison aux autres, celle-ci semble plus abrégée et générale⁴.

Pour trouver la tangente MT en un point M de la courbe, Barrow considère un arc MN « indéfiniment petit » [*indefinitè parvum statuo*]. Il nomme $AP = n$, $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$, puis mande de comparer le rapport $\frac{MR}{NR}$ au rapport $\frac{MP}{TP}$. au moyen d'une équation obtenue par le calcul.

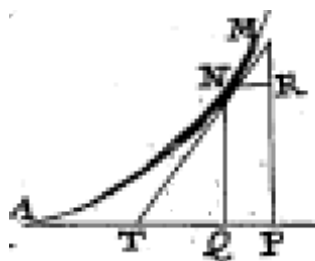


fig. 19

Pour ce faire, il décrit les différentes étapes de la procédure algorithmique : il faut substituer dans l'équation de la courbe n par $n + e$ et m par $m + a$, ce qui donne une deuxième équation dont on soustrait la première. On élimine les termes

¹*Ibid*, p. 45.

²Chaque problème consiste à trouver la tangente à une courbe définie par une relation à une autre courbe dont on sait tracer la tangente. Les descriptions de constructions de tangentes ne se déduisent que par des arguments purement géométriques. Nous reviendrons sur ces leçons dans les chapitres 3 et 4 pour décrire comment le Marquis de l'Hospital s'inspire de ces lectures pour élaborer l'ouvrage qui l'a rendu célèbre.

³Sûrement Isaac Newton.

⁴*Ibid*, p. 80 (traduction par nos soins).

contenant une puissance de a ou e , ou de quelque produit de a ou e car « ces termes seront rien »¹ puis on rejette tous les termes qui ne contiennent pas de a ou e . Il affirme que l'on obtient la valeur de la sous-tangente $PT = t$ en formant le rapport $\frac{me}{a}$.

La formule de Barrow se déduit immédiatement si on suppose que lorsque l'arc MN est assez petit, il peut être pris pour la corde MN . En effet, dans ce cas le triangle de dimensions infiniment petites MNR et le triangle fini MTP sont semblables et on obtient l'égalité $TP = \frac{me}{a}$. Or, à la fin de l'énoncé de son algorithme, Barrow indique que

Lorsqu'une partie [*particula*] infiniment petite intervient dans les calculs, je substitue cette particule à sa tangente ou à n'importe quelle ligne droite qui lui soit égale, à cause de l'indéfinie petitesse de la partie de la courbe².

On peut remarquer que le fait de substituer un arc indéfiniment petit par un segment de droite indéfiniment petit lors de calculs semble être admissible dans la pratique. De plus, même s'il ne le mentionne pas, Barrow admet que la notion de similitude de triangles demeure entre un triangle fini et un autre de dimensions infiniment petites.

Par la suite, il applique sa méthode que sur cinq exemples, certains déjà traités précédemment sans calcul. Par rapport à la règle de Sluse/Huygens, la méthode de Barrow aboutit à des calculs plus encombrés. Sluse le fait remarquer à Oldenburg dans la lettre datée du 22 novembre 1670³. Cependant, la méthode de Barrow n'est pas réservée exclusivement aux courbes qui possèdent une équation algébrique comme c'est le cas de la règle de Huygens/Sluse. Améliorer cette dernière pour pouvoir l'appliquer à toute courbe est donc une question importante.

¹ « etenim isti termi nihil valebunt ».

² « Quòd si calculum ingrediatur curvae cujuspiam indefinita particula ; substituaturs ejus loco tangentis particula ritè sumpta ; vel ei quaevis (ob indefinitam curvae parvitatem) aequipollens recta, *ibid*, p. 81.

³ C. Le Paige, « Correspondance de R.F. Sluse », p. 652 : « (...) in Clar.^{mi} Barrovii Lectionibus, (...) praeclara multa et auctore digna observavi, et non mediocriter in primis sum gavisus, eandem ipsi occurrisset ducendarum tangentium methodum, qua olim usus fueram. Verum in aliam mecum incidet longe faciliorem, et quae vix ullam calculi molestiam requirat, si paulo ulterius eadem via progressus fuerit ».

3.4) La *Nova methodus* : la disparition de e ?

En octobre 1684, Leibniz rend publique sa méthode des tangentes dans un article du journal *Acta Eruditorum*¹. Cette publication fait suite à une demande de contribution de la part du directeur de la revue Otto Mencke. Bien que les préoccupations mathématiques de Leibniz ne portent pas spécialement sur la recherche d'extremum et de tangentes, un concours de circonstances liées à des publications précipitées de son ami Tschirnhaus le pousse à choisir ce sujet plutôt qu'un autre².

Il a élaboré sa méthode depuis au moins 1675 comme les manuscrits peuvent en attester³. Il connaît les principales méthodes de tangentes – Fermat, Descartes, Hudde, Sluse – avec leurs limites et leurs défauts et assure que la sienne y pallie :

Mais comme Messieurs Fermat, des Cartes et Slusius ont supposé que la nature de la courbe soit exprimée par une équation purgée des grandeurs rompues et irrationnelles, il est aisé de juger que pour les oster il faut que le calcul grossisse quelquefois horriblement, et que l'on monte à des dimensions tres hautes, dont la depression par après est tres difficile, mais absolument nécessaire, puisque je feray voir par une autre voye, qu'on n'avait pas besoin de monter si haut. J'ay donc trouvé le moyen d'éviter toute cette reduction inutile de fractions et grandeurs irrationnelles, et j'ay découvert une Methode generale pour mener les touchantes des lignes Courbes Analytiques ou autres qui a autant d'avantage sur toutes celles qui ont esté publiées jusqu'icy, que celle de Mons. Slusius a sur la méthode de Messieurs Fermat et des Cartes, et je trouve à propos de la publier à cause de la grande étendue de cette matière, que Mons. Des Cartes luy même a jugé estre la plus utile partie de la geometrie, et dont il a souhaitté le plus de venir à bout. Mais pour m'expliquer nettement et succinctement je suis obligé d'introduire de nouveaux caractères, et de leur donner un algorithme nouveau, c'est-à-dire des regles toutes particulieres pour leur addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines et solution des equations⁴.

¹ *Op.cit.* Nous utiliserons la traduction de Marc Parmentier, „ *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des *Acta Eruditorum*, trad. Marc Parmentier, Librairie philosophique J. Vrin, 1989, p. 104-117.

² Hess, Heinz-Jürgen, « Zur Vorgeschichte der « Nova Methodus » (1676-1684) dans « 300 Jahre Nova Methodus », *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, 14, 1984, p. 73. Le mathématicien Tschirnhaus, en vue d'une pension académique, publie dans les *Acta* dès 1682 quelques articles concernant une méthode des tangentes. Ces articles contiennent des erreurs que Leibniz remarque. Il aurait souhaité attendre de publier sa méthode (il a tout juste l'algorithme) pour l'incorporer comme une partie d'un système plus vaste d'une science de l'infini. Cependant, les erreurs et la possible attribution par Tschirnhaus de sa méthode (Leibniz lui a présentée lors de son séjour parisien), poussent Leibniz à proposer cet article.

³ *Ibid*, Hess, H.J. publie dans ce numéro spécial des manuscrits décisifs.

⁴ « Méthode nouvelle des Tangentes », *Ibid*, p. 93.

Dans ce passage, Leibniz rappelle les principaux défauts des méthodes des tangentes y compris celle de Sluse, même s'il considère qu'elle est la plus aboutie. Elle est certes la plus féconde mais elle exige, pour être appliquée, que l'équation de la courbe soit sans expressions fractionnaires ou irrationnelles. Or, la transformation de l'équation afin d'ôter ce type d'expressions demande des calculs qui grossissent « horriblement ». Il affirme que par sa méthode, le souci dû à la difficulté de ce genre n'aura plus lieu car il a trouvé une façon qui évite cette « réduction inutile ». Cependant, pour ce faire, il lui est nécessaire d'introduire de « nouveaux caractères » accompagné d'un « algorithme » qui permet d'opérer sur eux. Il affirme donc que la question de la pénibilité des calculs rencontrée tout au long de notre analyse des différentes méthodes des tangentes est ce qui est à l'origine de l'élaboration de sa nouvelle méthode. Il échange ce même genre de propos avec Newton : « On voit bien que dans la méthode de Sluse, il faut éliminer une à une toutes les irrationnelles, ce qui suppose un calcul immense »¹.

Dans l'article de 1684, Leibniz ne cite pas ses prédécesseurs même si le titre rappelle leurs difficultés calculatoires. Son exposé commence directement par la présentation de sa méthode :

Il considère plusieurs courbes qu'il nomme VV, WW, YY, ZZ d'axe AX. Les ordonnées sont VX, WX, YX, ZX qu'il note respectivement v , w , y , z et AX, leur abscisse (commune) est notée x , les tangentes à chacune des courbes coupent l'axe respectivement en B, C, D, E.

Un segment de droite choisi arbitrairement [*arbitrio assumta*] qu'il note dx . Il définit alors dv par le rapport² : $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{XB}$ et appelle dv la « différence » de v . Il définit de la même manière dw , dy , dz . Il donne ensuite des règles de calcul pour trouver les différences de différentes expressions : sommes, produits, quotients, puissances et irrationnelles. Ces règles s'appliquent donc directement sur les expressions et évitent la considération de l'équation dans sa globalité³.

¹ Seconde lettre à Newton citée dans Leibniz, G-W, *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 99.

² Leibniz commet en fait une erreur puisqu'il écrit VB au lieu de XB (et WC, YD et ZE au lieu de XB, XC et XE).

³ « Or les Méthodes en usage ne comportent aucun passage semblable (...) il faut commencer par éliminer des fractions et des irrationnelles (où entrent les indéterminées) », *ibid*, p. 111.

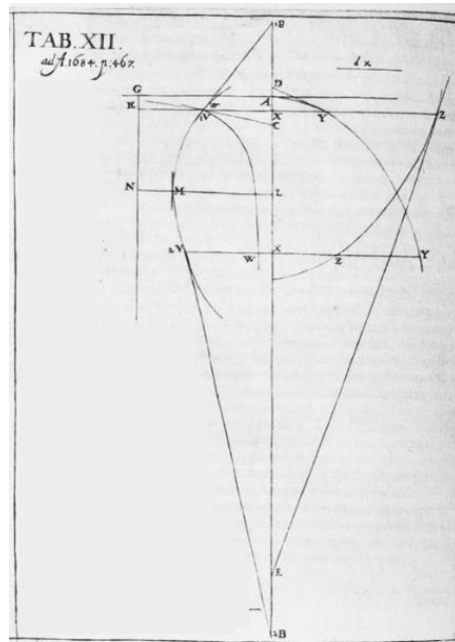


fig. 20

Dans le même paragraphe destiné aux règles de son algorithme, il signale que « dans ce calcul x et dx sont traités sur le même pied, de même que y et dy , ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle »¹. Par ce propos Leibniz introduit – mais sans utiliser le vocable – la notion de variabilité dans le statut de x et dx ². De sorte qu’il peut considérer la « différence des différences » ce qu’il effectue plus loin dans le texte lorsqu’il estime la convexité d’une courbe par le signe de la différentielle seconde³.

Pour montrer la fécondité de son algorithme il l’applique à une courbe d’équation « compliquée » :

$$\frac{x}{y} + \frac{(a + bx)(c - xx)}{(ex + fxx)^2} + ax\sqrt{gg + yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh + lx + mxx}} = 0$$

pour laquelle il pose $a + bx = n, c - xx = p, ex + fxx = q, gg + yy = r, hh + lx + mxx = s$, pour obtenir l’équation : $\frac{x}{y} + \frac{np}{qq} + ax\sqrt{r} + \frac{yy}{\sqrt{s}}$. Il prend la différence de chacun des termes pour revenir ensuite à la première équation. Par cet exemple, il montre qu’il n’a pas besoin de transformer les équations comme le faisaient ses prédécesseurs, chaque terme étant traité indépendamment des autres.

¹ *Op. cit.*, p. 106.

² Marc Parmentier commente : « il est donc essentiel que les différentielles, y compris celle de l’abscisse, soient pleinement des variables, c’est-à-dire demeurent complètement indéterminées, cette indétermination s’étendant au choix de telle ou telle différentielle comme constante ».

³ Nous reviendrons sur cette présentation de la différentielle seconde dans les chapitres 4 et 5, retenons que son introduction est facilitée par l’utilisation de la notion de variable.

Remarquons que la définition de dx n'assure rien de certain sur son statut, en particulier rien ne contredit le fait qu'il puisse être un segment fini. La preuve des règles de son calcul fait intervenir l'élimination d'homogènes. La justification de cette élimination donne des indications sur le statut de dx . Cependant, Leibniz choisit ici de ne pas développer ces preuves alors qu'il les connaît. En particulier, dans une lettre à Newton, il explique minutieusement la règle du produit en indiquant que dans l'égalité $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Le $dxdy$ n'étant pas homogène aux autres termes doit être effacé¹. Par ailleurs, dans son manuscrit « *Elementa calculi novi* » le $dxdy$ est omis car ce terme est « infiniment petit respectivement au reste »². En 1684, il précise également que la différentielle dx peut être considérée comme proportionnelle à la différence, accroissement ou diminution élémentaire [*momentaneis*] de x .

Enfin, il indique que son algorithme permet aussi de trouver les tangentes des courbes transcendentes, c'est-à-dire toute courbe dont l'équation ne peut pas se ramener à une équation polynomiale. Rappelons que les courbes dont l'équation est fractionnaire ou irrationnelle ne rentrent pas dans ce cadre et peuvent être traitées directement par les règles de l'algorithme. Il est intéressant de remarquer que le titre de l'article ne fait pas mention des transcendentes alors que le libellé insiste sur l'efficacité à traiter les autres types d'expressions. Comment donc le nouveau algorithme traite-t-il les transcendentes ?

(...) de la manière la plus universelle, sans recourir à des hypothèses particulières qui ne sont pas toujours vérifiées, pourvu seulement qu'on s'en tienne à ceci : dans son principe trouver la *tangente* consiste à tracer une droite joignant deux points infiniment proches de la courbe, c'est-à-dire tracer le côté d'un polygone *infinitanulaire* qui à mes yeux équivalait à la courbe. Or on peut toujours représenter cette distance infiniment petite par une différentielle connue dv , ou par une relation qui la fait intervenir, c'est-à-dire par une tangente connue³.

Ce passage est très intéressant car c'est la première fois qu'apparaissent dans l'article les vocables « infiniment petit » et « infiniment proches ». Leibniz les fait intervenir au moment de considérer la recherche de tangentes aux transcendentes.

¹ Cité dans Parmentier, M., *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 103.

² Cité dans Hesse, H., op. cit., p. 101.

³ *Ibid*, p. 111.

Or, sans qu'il l'ait mentionné pour les autres cas, pour trouver « l'équation différentielle de la tangente »¹, le « principe du polygone infinitangulaire » est également indispensable. Ainsi, le dx ou le dv qui tout au long de l'article sont les côtés du triangle semblable à celui fait par l'ordonnée et la sous-tangente représentent sans aucun doute des « infiniment petits ». Leibniz appelle ce triangle « triangle caractéristique ».

Il resterait à préciser ce qu'entend Leibniz par « infiniment petit » dans ce contexte. La seule lecture de la *Nova Methodus* ne permet pas de répondre². Leibniz ne cherche pas ici à éclaircir ce vocable.

Notre travail consistera désormais à étudier la réception de ce texte fondateur du calcul différentiel. En particulier, il s'agira d'examiner la manière dont sa lecture et son interprétation ont été articulées aux méthodes de tangentes qui le précèdent. Nous continuerons à suivre le devenir de l'élément « e ».

¹ *Ibid*, p. 110.

² Nous reviendrons sur la notion de « polygone infinitangulaire » en relation avec les méthodes de quadrature dans « Leibniz : au-delà de Wallis ? », §3.3, chapitre 3.

Conclusion

Notre premier chapitre se donnait pour tâche de répondre principalement à deux questions.

La première question concernait le devenir du statut de l'élément « e » qui apparaît dans presque toutes les méthodes de tangentes sauf justement dans la *Nova methodus*. Tout au long de notre étude, la question de la légitimité de ces méthodes calculatoires demeurait en toile de fonds.

e : un statut en devenir

Sur quelle base les mathématiciens acceptent-t-ils une situation dans laquelle ce qui est désigné par « e » et supposée non nul, le devient absolument au cours du calcul ?, comment accepter l'« élision des homogènes » ?

Chez Descartes – lorsqu'il présente sa méthode des cercles tangents, mais aussi chez Fermat lorsqu'il traite avec des expressions algébriques – le sens de « e » est clairement établi comme entité algébrique dans un cadre mathématique cohérent, celui de la méthode des coefficients indéterminés ou celui de la synchronisation de Viète. Lorsque Descartes justifie l'« élision des homogènes », il fait appel à une évidence calculatoire. Tandis que ceux qui reçoivent les mémoires de Fermat n'octroient pas un statut univoque à « e ». Nous avons examiné dans quelle mesure cette annulation se dépend de son évidence calculatoire en devenant davantage une procédure algorithmique. Beaugrand (1640) accorde encore à « e » – qu'il note « o » – le statut d'une longueur *en instance de devenir nulle*, Hérigone (1649) et Van Schooten (1659), dans leurs présentations oublient de rappeler cette origine et appauvrissent le caractère géométrique de « e » pour valoriser sa capacité auxiliaire dans la démarche calculatoire. Nous assistons ainsi à une flexion de la signification du « e » au cours de ces trois présentations successives.

Avec Barrow (1670) et Huygens (1667), nous assistons à une dernière modification du statut de e . S'il conserve ses caractéristiques calculatoires, c'est-à-dire que lui et ses puissances s'effacent en cours ou à la fin du calcul, ce n'est plus l'argument de nullité de e qui explique cette élision mais l'introduction du terme « infiniment petit ». Certes, en pratique calculatoire, les règles sont les mêmes mais ce changement argumentatif est à interroger. Les améliorations des méthodes des tangentes sont guidées par une volonté de généralité et de commodité calculatoire.

Une méthode des tangentes est d'autant plus féconde si elle est générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique à un ensemble de courbes le plus vaste possible et si son application ne produit pas de calculs fastidieux. Nous avons constaté les efforts fournis par les mathématiciens pour ramener leurs recherches de tangentes à un traitement d'expressions algébriques. Dans ce cas, l'argument de la « nullité de e » suffit à expliquer l'élosion en fin de calcul ; quelle nécessité y-a-t-il alors d'introduire le terme « infiniment petit » ? Pour comprendre ce changement, il convient de regarder dans quel domaine autre que celui de recherche de tangentes, le « e » est apparu. C'est ce que nous envisageons dans le prochain chapitre. L'histoire du devenir de e ne s'arrête donc pas ici.

L'embaras résolu ?

Nous avons remarqué que l'application de la méthode cartésienne des cercles tangents peut conduire rapidement à des calculs laborieux. Soucieux de ce défaut, certains mathématiciens, tels que Beaune, tentent des améliorations. Des difficultés calculatoires apparaissent également lorsqu'on traite des expressions irrationnelles ou fractionnaires ou encore des courbes non algébriques. Sans cesse, Fermat répète que ces expressions l'« embarrassent ». Pour rendre confortable l'utilisation de sa méthode, c'est-à-dire en se ramenant à des équations algébriques qu'il sait mieux gérer, il est le premier à consacrer une partie de ses recherches à trouver des principes permettant d'alléger ces calculs. Pour y parvenir, il invente des techniques pour se débarrasser des asymétries mais il formule aussi des règles supplémentaires et souvent audacieuses comme celle d'estimer un arc par une ligne droite, ou celle de prendre l'ordonnée de la tangente pour l'ordonnée. Nous avons montré que Fermat n'énonçait pas ces règles de façon gratuite mais qu'il pouvait montrer à la manière des Anciens, leur bien-fondé. Il n'empêche que ses mémoires sont dépourvus de telles explications et c'est ainsi qu'ils sont et seront lus.

Il nous faut conclure avec la seconde question. Leibniz affirmait que sa *Nova methodus* était une nouveauté : la nouveauté de la méthode leibnizienne repose-t-elle uniquement sur sa facilité calculatoire ? Comment sont présentées ses autres caractéristiques ?

Par sa méthode résout-il uniquement les complications calculatoires résultant de l'application des méthodes des tangentes dont Fermat et ses successeurs ne cessent de se plaindre ? Ces nouvelles entités – les différentielles – peuvent-elles être reçues

autrement que comme des moyens de favoriser un confort calculatoire ? La *Nova Methodus* leibnizienne fournit une solution notoire à l'inconfort du traitement des expressions irrationnelles et fractionnaires car elle s'applique aux expressions directement et non aux égalités. Elle apporte également une aisance pour le traitement des courbes transcendantes définies à partir d'autres courbes dont on connaît les tangentes : « il s'agit de déterminer dz en fonction de dy , mais dy serait connue »¹. Dans ce sens, il est indéniable qu'elle est « nouvelle ». Il convient de se demander de quelle façon cette nouveauté a pu être reçue à partir de l'héritage des méthodes des tangentes que nous avons étudiées. Les règles de Sluse, Barrow et Huygens se traduisent facilement en notations leibniziennes, par exemple, la formule de Barrow qui donne la sous-tangente : $t = \frac{ye}{a}$ devient $t = y \frac{dx}{dy}$. Dans le cadre des méthodes des tangentes, une réception qui identifie le « e » et le dx est cohérente et permet de comprendre certains arguments du débat académique. Pourtant, dans la *Nova Methodus*, le sens de dx diversifie celui de e . La différence – ou différentielle – est celle d'une quantité qui va être qualifiée de « variable », alors que « e » ne fait aucunement référence à cette notion. D'ailleurs, Leibniz présente la notation dx conjointement à dy, dz, \dots . Pour ceux qui reçoivent l'algorithme différentiel, en saisir la nouveauté demande de mettre en relation la lecture de cet opuscule avec d'autres afin de comprendre la portée du calcul différentiel dans un domaine plus large que celui des méthodes des tangentes. Cette remarque motive notre deuxième chapitre où nous allons étudier certains aspects des méthodes de quadratures. Informés des méthodes de tangentes et des modifications du statut du e , nous pouvons affirmer à ce stade que l'un des enjeux des réceptions du calcul différentiel est la manière dont les héritiers articulent le « e » et les « dx, dy, dz, \dots ».

¹ « *Nova methodus* », *op. cit.*, p. 112.

CHAPITRE 2

Des méthodes par indivisibles au calcul avec indivisibles et infiniment petits

Introduction

Nous avons vu que l'on trouve énoncées chez les Anciens des propositions concernant les tangentes à des courbes particulières. De la même manière, des propositions concernant les quadratures de figures ou de cubatures de solides existent, toujours accompagnées de démonstrations procédant par un double raisonnement par l'absurde et ne permettant pas de connaître la voie par laquelle le géomètre a obtenu les résultats. Or, la recherche d'aires, de volumes ou celle de centres de gravité sont des sujets d'intérêt pour les géomètres du XVII^e siècle. Des méthodes directes et générales leur sont nécessaires pour obtenir des nouveaux résultats alors que les écrits anciens ne leur offrent pas une voie pour y parvenir. Les mêmes raisons que celles qui ont motivé l'élaboration des méthodes des tangentes amènent les géomètres à proposer des méthodes indispensables pour résoudre des problèmes de quadratures¹. Ces méthodes étant directes, elles impliquent des considérations sur la composition du continu, en particulier de quelle manière son infinie division s'effectue : potentiellement ou actuellement. Les géomètres introduisent la notion essentielle d'« indivisibles » en empruntant un vocable propre à la physique naturelle. Le principe des méthodes est de comparer les indivisibles de

¹ À ce sujet, on peut consulter l'article de Barbin, Evelyne, « Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle » dans *Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des sciences n°40*, Société française des sciences et des techniques, Paris, 1992.

chaque figure pour en déduire un rapport entre leurs aires. Deux types de méthodes sont distinguées selon qu'elles utilisent des indivisibles homogènes ou hétérogènes aux figures. Bien que ces méthodes reçoivent des critiques provenant essentiellement du domaine de la physique, d'autres difficultés leur sont reprochées du point de vue mathématique. Ainsi, les mathématiciens qui proposent des méthodes par indivisibles sont amenés à fournir des réponses aux objections et paradoxes. Nous verrons que, selon les deux types d'indivisibles considérés, les géomètres sont astreints à fournir des précisions sur les procédures des méthodes, afin de rendre celles-ci légitimes aux yeux de leurs pairs. Tel est le cas de l'opération de « prendre toutes les lignes » chez Cavalieri ou aussi de l'identification entre une figure constituée d'homogènes et la figure à quarrer¹.

Nous avons vu que, pour les méthodes des tangentes, l'existence mathématique du « e » correspond à celle d'un simple élément du processus calculatoire. Ce type d'existence n'est nullement remis en question et ne présente aucune difficulté épistémologique aux mathématiciens du XVII^e. Il est important de remarquer qu'il en va d'emblée différemment pour les « indivisibles ». En revanche, savoir si le processus inventif peut avoir un statut de preuve demeure une question pour les géomètres, comme il l'était pour les méthodes des tangentes. Plus précisément, il s'agit de savoir si l'usage d'une méthode d'indivisibles peut être ramené à une démonstration *ad absurdum*. Nous serons attentifs tout au long de ce chapitre aux relations que le géomètre construit entre la démonstration à la manière des Anciens et la preuve possible par indivisibles, afin de mieux comprendre le statut de ces « indivisibles ».

Ce chapitre s'intéresse au processus historique et conceptuel des différentes étapes qui conduisent à l'introduction de méthodes calculatoires pour la détermination d'aires curvilignes. Nous ne prétendons pas écrire une histoire du calcul – cela a déjà été effectué² – mais nous voulons dégager les idées fondamentales que suppose l'utilisation de ces méthodes afin de saisir de quelle façon elles ont été

¹ Jullien Vincent, « Explaining the Sudden Rise of Methods of indivisibles » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Science Networks. Historical Studies, vol. 49, Birkhäuser, p. 7.

² Les références sont multiples, sans être exhaustif, Boyer, Carl., B., *The history of the calculus and its conceptual development*, Doyer Publications, New York, 1939, Jullien Vincent, *Seventeenth-century indivisibles revisited*, op. cit., Cléro, Jean-Pierre, Le Rest, Evelyne, *La naissance du calcul infinitésimal au XVII^e siècle*, Centre national de la recherche scientifique, Centre de documentation Sciences humaines, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences n°16, Paris, 1981, Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, New York, 1996.

héritées et interprétées en France à l'aube de l'arrivée du calcul intégral leibnizien. Pour ce faire, nous commençons par préciser brièvement ce que veut dire démontrer « à la manière des Anciens ». Ensuite nous abordons deux auteurs italiens, Bonaventura Cavalieri et Evangelista Torricelli, car leurs travaux représentent les premières confrontations directes avec le continu. Nous destinons un passage aux écrits de Roberval et de Pascal en raison de leur élaboration inédite d'un langage propre à la pratique de méthodes d'indivisibles. Le langage des indivisibles pascalien est assimilé par les mathématiciens français de la fin du XVII^e siècle. Il est important pour la suite de notre travail d'en dégager les principaux aspects pour les rendre présents lors de notre analyse à venir dans les deux prochains chapitres. Dès ce chapitre, nous analyserons la réception de cette méthode par Antoine Arnauld et sa présentation dans son traité de géométrie. Enfin, nous destinons une étude de l'arithmétisation des quadratures par Wallis, étape audacieuse car elle permet de ramener la question des quadratures à un calcul. Ses raisonnements peuvent-ils être considérés comme des preuves ? Le débat avec Fermat permet de saisir les termes de cette question et en dévoile certaines difficultés.

À la fin du XVII^e siècle le calcul leibnizien établit que les quadratures se ramènent à des problèmes inverses de tangentes. Pourtant, les méthodes des tangentes et les méthodes des indivisibles sont historiquement distinctes car elles ne cherchent pas à résoudre le même type de problème géométrique et elles ne rencontrent pas nécessairement les mêmes sortes de critiques (sauf celle liée au statut de preuve accordée à la méthode). Ce chapitre a aussi pour but d'expliquer la rencontre de ces deux types de méthodes et de quelle manière elle implique une union du point de vue notionnel des « indivisibles » et l'élément « e », auparavant éloignés.

1) La démonstration « à la manière des Anciens »

Les démonstrations des quadratures des Anciens reposent sur le livre V des grandeurs des *Éléments* d'Euclide et s'accordent avec la composition du continu d'Aristote. Dans *Les Eléments*, Euclide (-323 - -285), compile les résultats connus à l'époque hellénistique sans fournir aucune indication heuristique de comment les énoncés et les démonstrations ont été trouvés. Bâti à partir d'axiomes, de demandes, de définitions, de propositions et de théorèmes qui se suivent selon un discours déductif, *Les Eléments* apparaissent comme une véritable construction logique. Les autres écrits grecs suivent la même manière.

Dans *La Physique*, Aristote étudie la nature comme « principe de mouvement et de changement ». Il y répond aux paradoxes du mouvement de Zénon d'Élée en distinguant entre deux infinités : infinité en divisibilité et infinité en étendue et en définissant le continu : « J'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles »¹. Il remarque que, dans le mouvement, deux continus interviennent : la droite et le temps. Il relie ainsi la notion de mouvement à celle d'infini :

Or, le mouvement semble appartenir aux continus, et l'infini se manifeste en premier lieu dans le continu, c'est pourquoi il arrive souvent à ceux qui définissent le continu de se servir en outre de la notion d'infini, le continu étant divisible à l'infini².

Aristote établit l'impossibilité de l'infini en acte mais reconnaît son existence en puissance, c'est-à-dire que son existence se manifeste dans le geste itéré et indéfini de division ou dans celui d'addition :

Par ailleurs, il est clair que l'infini existe dans le temps et dans les hommes et dans la division des grandeurs. En effet, d'une manière générale, l'infini existe dans le fait de prendre toujours autre chose, et que cette chose soit toujours limitée mais toujours différente³.

De plus, il montre qu'il est impossible qu'un « continu soit formé d'indivisibles » et qu'il est manifeste qu'un continu est « toujours divisé en parties toujours divisibles ». Il n'est donc pas possible de considérer une grandeur comme

¹ Aristote, *Physique*, VI, trad. Servens, Vrin, Paris, 1999, p. 221-223.

² Aristote, *La Physique*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1999, 200 b12.

³ *Ibid*, 206 a9

composée actuellement de parties indivisibles : « par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point, un indivisible »¹, plus généralement :

Il est donc manifeste d'après ce qui a été dit que ni une ligne ni une surface ni aucun continu en général ne sera insécable, en raison non seulement de ce qu'on vient de dire mais aussi parce qu'il arriverait que l'insécable soit divisé².

Aristote considère que les mathématiciens « n'ont pas besoin et ne font pas l'usage de l'infini, mais seulement d'une grandeur aussi grande qu'ils le désirent »³. Ce point de vue aristotélicien est cohérent avec les écrits mathématiques des géomètres grecs, et en particulier les *Éléments* d'Euclide. Les premières définitions du livre I concernent le point, la ligne et la surface. Le point, seul indivisible, est défini comme « ce dont il n'y a aucune partie »⁴, la ligne est ce qui est dépourvue de largeur et la surface est ce qui a seulement longueur et largeur. De sorte que la relation qui lie ces trois objets géométriques est d'être chacun la frontière du suivant⁵. L'évitement de toute considération sur la composition du continu est donc présent dès le début du traité.

Le livre V est central car il expose la théorie eudoxienne des proportions ou de rapports, qui est une réponse à la « crise » de l'irrationalité à laquelle se heurte l'école pythagoricienne en découvrant l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté. Cette crise recouvre l'impossibilité d'associer un nombre ou un rapport de nombres à un rapport de grandeurs que ce soit pour des longueurs, des aires ou des volumes⁶. La théorie eudoxienne permet de comparer des rapports de grandeurs, rationnels aussi bien qu'irrationnels⁷, à condition que les grandeurs mises en rapport soient homogènes⁸. Deux grandeurs sont dites avoir un rapport lorsque : « L'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser

¹ *Ibid*, 231a21.

² *Ibid*, 233b1.

³ *Ibid*, 207b1.

⁴ *Éléments*, *op. cit.*, livre I, p. 151.

⁵ « les limites des lignes sont des points », « Les limites des surfaces sont des lignes. »

⁶ Cette crise aboutit à la séparation entre l'arithmétique et la géométrie, ce que rendent manifeste les *Éléments* qui contiennent trois livres d'arithmétique bien distingués des autres.

⁷ Respectivement livre X et livre XII.

⁸ Définition 3, livre V, *ibid*, vol. 2, p. 36.

l'une l'autre »¹. La cinquième définition établit la condition d'égalité de deux rapports :

Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand les équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante².

En notations modernes, cela signifie que : pour quatre grandeurs A, B, C, D , on a $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, si, pour tous les mA et mC équimultiples de A et C et tous les nB et nD équimultiples de B et D , on a $mA > nB$ et $mC > nD$ ou $mA = nB$ et $mC = nD$ ou $mA < nB$ et $mC < nD$. Cette définition eudoxienne de l'égalité des rapports est essentielle pour les démonstrations par double réduction par l'absurde. Ces preuves possèdent inévitablement la même structure. Lorsque l'on veut démontrer que quatre grandeurs A, B, C et D vérifient $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, on considère qu'il existe une grandeur E , quatrième proportionnelle³ à trois grandeurs données telles que $\frac{A}{B} = \frac{C}{E}$. Puis, on démontre que $E < D$ est absurde puis que $E > D$ l'est aussi.

Toutes les résolutions grecques de problèmes de quadrature ou cubature prennent par conséquent une forme d'exposition unique, que ce soit chez Euclide ou dans les traités d'Archimède ou d'Apollonius.

La proposition 1 du livre X énonce un théorème qui est au fondement de ces résolutions :

Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une [grandeur] plus grande que sa moitié, puis du reste une [grandeur] plus grande que sa moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée⁴.

Pour les géomètres grecs, déterminer l'aire d'une figure plane est un problème de construction, il s'agit de construire par intersection de droites et cercles un carré

¹ Définition 4, livre V, *ibid*, vol. 2, p. 38. Cette définition établit la condition pour que deux grandeurs soient comparables. Il a été nommé plus tard l'axiome d'Archimède.

² Définition 5, livre V, *ibid*, vol. 2, p. 41.

³ Proposition 12, Livre VI, *ibid*, vol. 2, p. 183.

⁴ Proposition 1, Livre X, *ibid*, vol. 3, p. 87.

dont l'aire est égale à cette figure : il est alors dit qu'on obtient la « quadrature » de cette figure. De même, on trouve la « cubature » d'un solide en construisant un cube qui est le même volume qu'un solide donné. Les quadratures de toutes les figures rectilignes sont obtenues dans le livre II des *Éléments*¹. Les quadratures de figures curvilignes sont obtenues par la comparaison de rapports de figures curvilignes avec celle de figures rectilignes. Un cas de quadrature de figure non rectiligne est traité au livre XII, il s'agit du cercle. En se plaçant dans le cadre de la théorie des proportions de grandeurs, développée au livre V, Euclide énonce l'égalité des rapports entre les aires des cercles et les carrés de leurs diamètres². Pour établir l'égalité entre le rapport des cercles $ABCD$ et $EFGH$ et le rapport des carrés de leurs diamètres, il suppose qu'il existe un figure S telle que : carré BD : carré FH :: cercle $ABCD$: S . Il démontre ensuite que chacun des cas : $S <$ cercle $EFGH$ et $S >$ cercle $EFGH$ conduit à une contradiction.

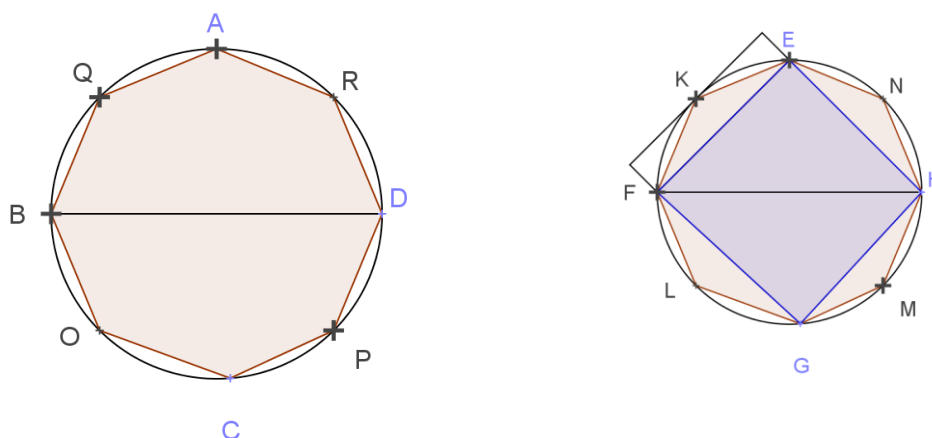


fig. 21

Dans la *Mesure du cercle*, Archimède utilise aussi une double démonstration par l'absurde, mais contrairement à Euclide qui met en rapport des grandeurs homogènes (cercle avec cercle et carré avec carré), il montre l'égalité entre l'aire d'un cercle et celle d'un triangle rectangle dont l'un des apothèmes est égal à la circonférence du cercle³.

Cette manière normée de démontrer des résultats reçoit une appellation de la part des géomètres du XVII^e siècle : c'est une démonstration « à la manière des Anciens ».

¹ Propositions 35 à 45 du livre I (p. 262-277) et la proposition 14 du livre II (p. 361-365).

² Proposition 2 du livre XII, *ibid*, vol. 4, p. 263-271.

³ Archimède, *Les Œuvres complètes*, traduction de Van Eecke, t. II, Vaillant-Carmame, Liège, 1960, p. 127-128.

Cette façon indirecte de procéder pour démontrer est caractéristique chez les Anciens, elle a l'avantage d'éviter toute considération sur l'infini. Cette rigueur si elle peut séduire le lecteur du XVII^e siècle a pourtant le défaut de ne pas montrer la voie de l'invention, celle par laquelle les énoncés ont été trouvés. Ainsi, la question de savoir comment Archimède a trouvé le rapport de quatre tiers dans la quadrature de la parabole.

Ce défaut est relevé par tous les géomètres du siècle. La démonstration à l'ancienne est source d'insatisfaction car elle a le défaut de ne pas laisser entrevoir la manière de résoudre de nouveaux problèmes. Or, la recherche d'aires et de volumes ou la détermination de centres de gravité sont des sujets d'intérêt pour les géomètres du XVII^e siècle. Les géomètres recherchent donc des méthodes directes et générales pour découvrir ou inventer des résultats, ce que la manière des Anciens est incapable de leur offrir. C'est donc par nécessité que les géomètres sont amenés à proposer des méthodes plus directes, indispensables à la découverte¹. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) propose une méthode directe qui un exemple de ce type de tentative.

2) Les méthodes de Cavalieri-Torricelli et les confrontations directes à la composition du continu

2.1) Cavalieri et ses critiques

Bonaventura Cavalieri est né à Milan où il étudie la théologie, puis la géométrie à l'Université de Pise en tant que membre de l'ordre des jésuites. Il devint titulaire de la prestigieuse chaire de mathématiques à Bologne en 1629 et le reste jusqu'à sa mort en 1647.

Le but de Cavalieri est de proposer une méthode directe de quadratures ou de cubatures. Il élabore sa méthode vers les années 1620. Il publie *Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota*² en 1635. Comme le titre de l'ouvrage l'indique, le dessein de l'auteur est de promouvoir une nouvelle méthode qui traitera des grandeurs continues (leurs quadratures et cubatures) au moyen de considérations

¹ À ce sujet, on peut consulter l'article de Barbin, Evelyne, « Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle », *op. cit.*

² Cavalieri, Bonaventura, *Geometria Indivisibilium Continuum Nova quadam ratione promota*, Authore P. Bonaventura Cavalerio Mediolan, Ordinis Iesuatorum S. Hieronymi. D.M. Mascaralleae Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore. Ad Illustriss. Et Reverendiss. D. D. Ioannem Ciampolum, Bononiae, Typis Clementis Ferronij. Illustriss, M. DC. XXXV. Superiorum permissu, Bologne, Gio. Battista Ferroni, 1635. Par la suite, *Geometria*.

sur les indivisibles¹. En utilisant le vocable « indivisible », dont le sens est labile et la notion controversée², il prend le risque d'être mal interprété. En effet, on a vu que pour Aristote, le continu est indéfiniment divisible, c'est-à-dire que chaque partie obtenue après une division peut être à son tour divisée, de la même façon que peut l'être le tout. Les parties obtenues, au fur et à mesure de ce processus sont donc homogènes au tout mais ne sont jamais actuellement atteintes. L'existence d'indivisibles ou d'atomes qui constitueraient le continu est impossible³.

La notion d'« omnes lineae »

Cavalieri écrit d'abord les six premiers livres de son ouvrage mais craignant des critiques, il ajoute un septième livre où il présente sa méthode plus simplement. Peu avant sa mort, en 1647, il donne une dernière présentation de sa méthode dans un ouvrage intitulé *Exercitationes geometricae sex*⁴. Par ce dernier, il veut défendre sa méthode contre les attaques qui lui ont pu être adressées, notamment par le mathématicien jésuite Guldin dans son ouvrage *Centrobarryca* en 1642⁵.

L'idée relativement simple de Cavalieri est de comparer deux figures⁶ en s'intéressant à la manière dont elles sont engendrées par des lignes, ce qui constitue ses « indivisibles ». Du rapport des indivisibles de chacune des figures il en déduit le rapport de leurs aires. Cavalieri sait que cette déduction est délicate et il consacre un long développement à l'expliquer.

¹ Cavalieri a l'idée d'utiliser les indivisibles vers 1620. Comme le fait remarquer, Alexandre Koyré, Cavalieri a été mésinterprété et cette mésinterprétation commence dès le début par le titre de l'ouvrage que l'on cite en latin par l'abréviation « Geometria indivisibilibus » ou en traduisant injustement cet abrégé par : « Géométrie des indivisibles » en se rendant par-là coupable soit d'une incompréhension, soit d'un contresens flagrant. En effet le titre de de l'ouvrage de Cavalieri ne pourrait être abrégé raisonnablement qu'en *Geometria ... continuarum*, *Géométrie des continus ...*, le terme : *indivisibilibus* étant à l'ablatif et non au génitif (...) » dans « La pensée scientifique de Bonaventura Cavalieri », *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, ouvrage publié avec le CNRS, PUF, Paris, 1966, p. 298.

² Sur ce sujet la recherche historique est prolifique. Sans aucune intention d'être exhaustif, on peut citer Celeyrette, Jean, « From Aristotle to the Classical Age, the Debates Around Indivisibilism », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 19-30 ; Mancosu Paolo, *op. cit.* et Giorello, Giliuo, *Lo Spettro e il libertino, teología, matemática, libero pensiero*, Arnoldo Montadori Editore, Milano, 1985.

³ En outre, des arguments théologiques contre l'atomisme dont on ne parlera pas, mais qui s'articulent et s'accommodent avec la philosophie aristotélicienne font de celle-ci l'enseignement officiel aux universités et dans les collèges.

⁴ Bonaventura, Cavalieri, *Exercitationes Geometricae sex, Bononiane, (...) Typis Iacobi Montji, MDCXLVII. Superiorum permissu, Jacobi Monti*, Bologne, 1647. Par la suite : *Exercitationes*.

⁵ Giusti, Enrico, *Bonaventura and the Theory of indivisibles*, Edizioni Cremonese, p. 55 et suivantes.

⁶ On se contentera dans notre exposé de se limiter aux cas des figures planes.

Il considère une figure F qu'il suppose encadrée par deux plans parallèles P et P' , contenant chacun d'eux une tangente à F (D et D' respectivement). En faisant coulisser parallèlement¹ [*transitus*] la « règle » de direction D (ou D') sur la figure F , il s'intéresse aux positions successives de cette « règle », c'est-à-dire aux intersections des parallèles à D et de F , qui sont des segments de droites :

Si par deux tangentes opposées d'une figure plane quelconque, deux plans sont menés parallèlement l'un à l'autre, perpendiculaires ou inclinés par rapport au plan de la figure, et indéfiniment étendus en toute partie, et que l'un deux soit bougé parallèlement à l'autre jusqu'à qu'il lui soit congruent : les parties simples des lignes droites, qui dans la totalité du mouvement sont les intersections du plan mouvant et de la figure donnée, prises ensemble sont nommées : *Toutes les lignes* [*Omnes lineae*] de la figure, prenant l'une d'elles comme règle²

Cavalieri nomme transit droit celui pour lequel les plans sont perpendiculaires au plan de la figure et oblique dans le cas contraire.

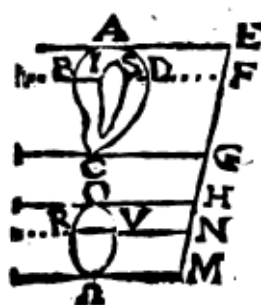


fig. 22

La règle est AE .

L'agrégat³ de ces lignes obtenues par ce processus de transit dans « la totalité du mouvement » est donc appelé par Cavalieri : « *omnes lineae* » selon la règle D . Pour une figure donnée les *omnes lineae* sont déterminées par le choix d'une direction ou d'une règle⁴. Elles ne sont pas à comprendre comme une somme de lignes ou d'indivisibles, mais comme la trace du « transit » d'une règle pendant le temps de parcours total du

¹ Sur le plan déterminé par les parallèle AB et CD .

² *Geometria*, *op. cit.*, livre II.

³ Cavalieri utilise les termes de « *congeries* » ou « *aggregatum* ».

⁴ Figure extraite de Cavalieri, Bonaventura, *ibid*, p. 8. On notera l'agrégat des lignes l de la figure F selon la règle R par $Om_F(l)_R$ que l'on emprunte à K. Andersen dans son article « Cavalieri's Method of Indivisibles », *Archive for History of exact Sciences*, 31 1985, p. 291-367.

plan sur la figure F . Pour respecter l'intention de Cavalieri, il est important de souligner, que le transit de cette ligne droite parallèlement à elle-même sert à caractériser les indivisibles plutôt qu'à décomposer la figure selon des indivisibles. Il veut éviter la supposition d'un continu composé d'indivisibles. Cette hypothèse lui semble superflue pour son projet de quadratures ou cubatures, mais aussi épineuse en raison du rejet de l'atomisme par la philosophie officielle¹. Dans sa définition de transit, Cavalieri considère également que les *omnes lineae* peuvent être obtenues par un transit oblique. Ici, pour comparer les *omnes lineae* générées par des transits droits ou obliques, il considère deux parallélogrammes $F = IKLM$ et $F' = IKNO$, puis deux plans parallèles $P = AKBI$ et $P' = LMNC$ de sorte que $IKLM$ est perpendiculaire à ces deux plans. Les *omnes lineae* de F obtenues par le transit droit sont les mêmes que ceux de F' obtenues par le transit obliques étant donné qu'à chaque instant, $PQ = TV$.

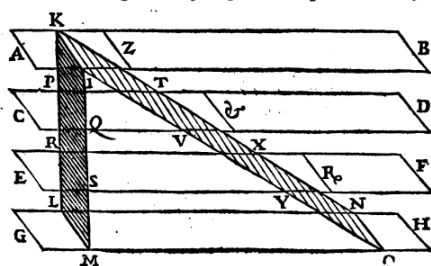


fig. 23

Cependant, les parallélogrammes n'ont pas la même aire même s'ils ont la même collection de lignes. Pourquoi ? Cavalieri explique que ce n'est pas surprenant car les intersections créées par le mouvement [*fluentis*] de descente sont moins serrées pour le parallélogramme $KNOI$ que pour $KLMI$, cette différence d'espacement explique la différence des aires. Cavalieri compare cette situation au tissage de deux toiles : $KLMI$ a une maille plus serrée que celle de $KNOI$ ².

Après avoir expliqué la manière d'obtenir les *omnes lineae* d'une figure, Cavalieri veut légitimer que ces *omnes lineae* soient l'objet de la géométrie, c'est-à-dire qu'ils ont le statut de grandeur. Ainsi la nouvelle géométrie qu'il présente à ses contemporains aurait sa place dans le cadre de la théorie des proportions euclidienne.

¹ On pourra consulter : Giusti, Enrico, *Bonaventura and the Theory of Indivisibles*, op. cit., p. 26.

² *Exercitationes*, op. cit., p. 16 : « Ergo, $KLMI$ se habet ad instar tela spissioris, et, $KNOI$, rarioris ». Cet exemple éclaire l'idée que se fait Cavalieri des *omnes lineae*. Ils sont la trace d'un mouvement bien défini. Dans ce sens, on peut affirmer que Cavalieri la notion de temps est intrinsèque à sa définition des *omnes lineae*.

Pour pouvoir parler de raison entre deux *omnes lineae*, il lui est nécessaire de justifier leur statut de grandeur. Pour ce faire, il montre que n'importe quelle collection de *omnes lineae* peut être multipliée pour dépasser une autre *omnes lineae*. Aussi, les *omnes lineae* ont des propriétés propres aux grandeurs puisqu'elles peuvent être ajoutées et soustraites¹.

Ensuite, il étend à un nombre infini de proportions, la proposition euclidienne qui affirme que :

$$\text{si } \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \dots = \frac{m_K}{n_K} \text{ alors } \frac{\sum_{i=1}^{i=K} m_i}{\sum_{i=1}^{i=K} n_i} = \frac{m_1}{n_1}$$

Ce prolongement est sans aucun doute audacieux car il suppose la validité d'une propriété dans le passage du cas fini au cas infini³. Pourtant il est indispensable à Cavalieri car il lui permet d'énoncer explicitement dans *Geometria* que les *omnes lineae* d'une figure ont le statut de grandeurs⁴. Les *omnes lineae* ayant obtenu un statut de grandeur, Cavalieri peut enfin comparer les *omnes lineae* de deux figures. Dans ce but, il lui faut démontrer deux résultats qui sont la clef de sa méthode. Par commodité nous supposons que les deux figures ont la même hauteur, ce qui n'est bien sûr pas toujours le cas, Cavalieri considère aussi le cas général en se ramenant au cas particulier de figures de même hauteur⁵. Premièrement, lorsqu'on considère deux figures *F* et *F'* ayant une règle commune *R* et telles que chaque paire d'indivisibles est

¹ Cavalieri, *Geometria*, *op. cit.*, p. 111.

² Autrement dit si à chaque antécédent à chaque conséquent, alors tous les antécédents sont à tous les conséquents.

³ Giulio Giorello remarque que par cette procédure Cavalieri effectue une « double extrapolation qui consiste à : 1) considérer non seulement un nombre fini, mais un nombre infini de proportions (prudemment Cavalieri parle de « nombre indéfini des antécédents et des conséquents ») ; 2) identifier l'expression *omnia antecedentia* (tout simplement une abréviation de *summa omnium antecedentium*) avec *omnes lineae*. » dans Cahier n°9 des « Journées Galilée – Galilée et la théorie du mouvement » tenues à Nice en mai, p. 3. Ce même type de remarque est énoncé par Giusti, *op. cit.*, p. 38-39.

⁴ *Ibid*, p. 108 : « Quarumlibet planarum figurarum omnes lineae ... sunt magnitudines inter se rationem habentes. » Cependant, dès son émergence, la notion de « *omnes lineae* » en tant que grandeur pose problème à Cavalieri. Dans une lettre qu'il adresse Galilée le 15 décembre 1621, il explique : « À cause du fait que l'ensemble de toutes les lignes est infini, il ne rentre pas dans la définition des grandeurs qui ont une proportion » (« pare che tutte le linee d'una data figure sieno infinite, è però fuor della diffinitione delle grandezze che hano proportion »)

Pour ce qui concerne l'essai par Cavalieri de fonder des « *omnes lineae* » comme grandeurs, on peut consulter Andersen, « Cavalieri's Method of Indivisibles », *op. cit.*, p. 315-321. Giusti note que Cavalieri reconnaît la faiblesse de ce genre de démonstrations comme en témoigne une lettre qu'il adresse à Torricelli, Giusti, Enrico, *op. cit.*, p. 63.

⁵ Pour des développements, on peut consulter, Koyré, Alexandre, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, *op. cit.*, p. 308-313, Andersen, Kirsten, « Cavalieri's Method of Indivisibles », *op. cit.*, p. 323-329 ou Giusti, Enrico, *Bonaventura and the Theory of Indivisibles*, *op. cit.*, p. 36-37.

toujours dans un même rapport, alors $Om_F(l)_R$ et $Om_{F'}(l)_R$ seront dans ce même rapport : « *ut unum ad unum, ita omnes ad omnes* ». Deuxièmement, il énonce que le rapport entre $Om_F(l)_R$ et $Om_{F'}(l)_R$ est le même que celui des aires de chacune des figures F et F' .

Ces deux résultats lui permettent d'énoncer son principal théorème. Si chacune des paires de lignes simultanément interceptées vérifient :

$$\frac{BR}{RD} = \frac{AM}{ME} \text{ alors : } \frac{F}{F'} = \frac{AM}{ME}$$

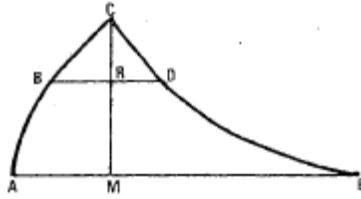


fig. 24

Dans cet exemple pris dans l'illustration de son théorème, il considère deux figures

$$F = AMC \text{ et } F' = MEC.$$

La règle est la direction AE^2 .

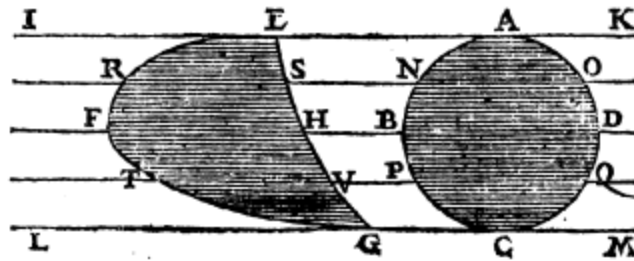


fig. 25

Ce théorème est central dans la *Geometria* puisqu'il permet de ramener la recherche de rapport entre les aires de deux figures à la recherche du rapport entre leurs *omnes lineae*³.

¹ *Geometria*, p. 115. Cavalieri montre d'abord que les « omnes lineae » ont le même rapport que chacune des paires d'indivisibles puis utilise ce résultat pour démontrer l'égalité du rapport des aires avec le rapport des *omnes lineae*.

² La figure extraite de *Exercitationes*, p. 4.

³ Cavalieri ne se contente pas de ce théorème et donne d'autres versions, voir Andersen, Kirsten, *op. cit.*, p. 329-330.

Dans *Exercitationes*, livre IV, Cavalieri, en considérant les « puissances » des indivisibles d'une figure (Si les trois premières puissances ont un statut géométrique, pour les autres Cavalieri parle de « potestates imaginariae » (p.247), parviendra à la quadrature des paraboles d'équation $y = x^n$, où n est un entier, (p. 281).

La notion d'« omnes lineae », enjeux des critiques

Le principal critique de Cavalieri est le mathématicien jésuite Guldin. Ce dernier a écrit un ouvrage intitulé *Centrobaryca* dans lequel il étudie la manière d'obtenir les centres de gravité et comment ces derniers peuvent être utilisés pour les quadratures et les cubatures¹. Cet ouvrage contient les principales critiques adressées à Cavalieri auxquelles celui-ci répond dans l'exercitatio III (sections allant de I à XIII) des *Exercitationes*². Guldin l'attaque essentiellement sur deux points³. Premièrement il accuse Cavalieri de composer le continu par les *omnes lineae*. Deuxièmement, en mettant en doute la possibilité d'étendre une relation entre un nombre fini d'éléments à un nombre infini et dans le fait de pouvoir comparer deux infinis, il remet en question la construction mathématique de Cavalieri qui veut légitimer les *omnes lineae* comme grandeurs :

Puisque les *omnes lineae* ou toutes les parties possibles ne sont ou ne peuvent pas être données, il ne peut y avoir une raison de lignes à lignes, ou de parties à des parties; D'ailleurs des choses qui n'existent pas, ou ne peuvent exister ne sauraient être comparées. Nous n'ajoutons pas davantage à cette question, qui est claire pour tous les géomètres⁴.

Cavalieri se défend en précisant que sa méthode n'implique aucune position vis-à-vis de la composition du continu⁵. Il légitime aussi la possibilité de comparer des infinis car dit-il :

¹ Mancosu, Paolo, *Philosophy of mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth century*, op. cit., p. 51.

² « In qua disutiuntur ea, quae a Paulo Guldino e Societate Jesu in eiusdem *Centrobaryca* prefatae Geometriae indivisibilium objijciuntur ».

³ Pour un développement de ces idées, on pourra consulter, Mancosu, Paolo, op. cit., p. 51. Guldin accuse également Cavalieri d'avoir plagié Kepler. Ce dernier a considéré dans *Stereometria Doliorum* (1615) qu'un arc de cercle peut être pris pour un segment de ligne droite, ce que Guldin sur interprète comme une considération d'indivisibles. Ainsi Cavalieri en le plagiant travaillerait également avec des indivisibles.

⁴ Guldin, Paul, *Centrobaryca*, Vienne, 1633-1642, livre IV, p. 342-343. Cité dans Mancosu, op. cit., p. 55. Traduction adaptée.

⁵ *Geometria*, scholie à la proposition 1 du livre II, p. 111. Andersen affirme que Cavalieri développe sa méthode dans la supposition qu'il y a bien une différence entre le plan et les « omnes lineae » et que le lien entre les deux peut s'expliquer en introduisant le paramètre t du temps qui est donné implicitement par le mouvement de la règle. Elle regrette que de nombreux historiens aient mésinterprété les *omnes lineae* comme somme de lignes, « Cavalieri's Method of Indivisibles », op. cit., p. 307-308.

Maintenant, toutes les lignes et les plans sont infinis relativement à quelque chose même s'ils sont infinis relativement au nombre, ils ne le sont pas par rapport à la grandeur, étant donné que les lignes et plans individuels sont finis et que leurs agrégats sont délimités partout par les côtés. Pour cette raison l'intellect reconnaît que l'on peut effectuer sur eux des additions et des soustractions, quel que soit le nombre d'indivisibles que l'on imagine ajoutés ou soustraits¹.

Avec ce genre de justification, Cavalieri sait néanmoins qu'il ne va pas convaincre son adversaire, son but est donc autre que celui d'atteindre la conviction de ce dernier. La publication des réponses à Guldin lui permet d'avancer des arguments pour convaincre ses contemporains que sa méthode est tout à fait admissible à condition de consentir à quelques abstractions intellectuelles tout à fait similaires à celles des algébristes lorsqu'ils calculent avec des « racines ineffables ». Ces derniers arrivent malgré ces obscurs détours [*obscuras ambages*] à la résolution de problèmes².

En outre, la réflexion sur l'application de la méthode des indivisibles de Cavalieri est intimement liée à l'existence de paradoxes. Heurtant le bien-fondé de la méthode cavalierienne, ils ne poussent pas seulement Cavalieri à formuler des précisions mais ils inspirent au mathématicien Torricelli sa propre version de la méthode.

2.2) Les méthodes des indivisibles de Torricelli

La méthode vaut-elle pour preuve ?

Evangelista Torricelli (1608-1647) prend connaissance de la *Geometria* dès sa publication. Même s'il montre au début une attitude sceptique envers la méthode cavalierienne³, il s'intéresse à la nature des indivisibles qui y sont mis en jeu et comment ils sont utilisés dans les problèmes géométriques. Dans ce but, il teste la méthode de Cavalieri dans différentes situations géométriques, mais, de façon expresse, il ne suit pas les prescriptions cavalieriennes de la *Geometria*. De cette façon, il aboutit à des situations paradoxales qui incitent sa réflexion. En aucune manière, il cherche à produire des paradoxes dans le seul but de contredire Cavalieri. Il s'attache

¹ *Exercitationes, op. cit.*, p. 199. Traduction adaptée de Paolo Mancosu, *Philosophy of mathematics & Mathematical practice in the Seventeenth century, op. cit.*, p. 54.

² *Ibid*, p. 203.

³ Andersen, Kirst, « Cavalieri's Method of Indivisibles », *op. cit.*, p. 355.

plutôt à trouver quelle conception des indivisibles rendrait leur usage fécond pour les problèmes de quadrature et de cubature.

Torricelli élabore en quelques années sa propre méthode des indivisibles qui est utilisée dans plusieurs traités, notamment dans *De dimensione parabolae*¹. Dans ce dernier, il démontre la quadrature de la parabole de 21 façons différentes, dix utilisent la manière des Anciens et les autres « per modam indivisibilium geometriam pluribus modes absoluta » dont il prône l'avantage d'être plus rapide et directe, en somme « la voie royale ». Il choisit de présenter d'abord les démonstrations à l'ancienne sans cacher leur caractère laborieux et les fait suivre des autres démonstrations que la méthode par indivisibles rend plus rapides et brillantes. Ce choix d'ordre n'est pas anodin. Outre qu'il veut montrer la supériorité de la méthode directe, il veut aussi souligner l'articulation possible entre les deux manières. Par l'observation de la manière de démontrer des Anciens, il conçoit qu'elle fait intervenir l'infini car elle suppose implicite que l'on puisse répéter indéfiniment l'opération de circonscription et inscription. Ainsi, il fait le pari qu'une attention portée sur la manière des anciens peut ouvrir une voie pour la connaissance du rôle que l'infini peut jouer en géométrie².

L'énoncé de la quadrature de la parabole est connu depuis Archimède : une parabole est égale à quatre tiers de son triangle inscrit. Pour une preuve à l'ancienne, il faut montrer que l'aire de la parabole ne peut être ni inférieure ni supérieure à l'aire de ce triangle. Torricelli relève une situation générale qui intervient lorsqu'il faut démontrer ce résultat : la possibilité de circonscrire et d'inscrire une courbe par deux séries de parallélogrammes dont la différence peut être rendue aussi petite que l'on veut. L'énonciation de ce résultat pour la parabole est le lemme XV³, qu'il utilise pour montrer d'autres lemmes mais aussi pour la dernière quadrature à l'ancienne de la parabole :

Étant donné un triligne mixte compris entre une ligne parabolique, sa tangente et une droite parallèle au diamètre ; il est possible d'inscrire dans ce triligne une figure

¹ *De dimensione parabolae* dans Torricelli, Evangelista, *Opera Geometrica*, Florentiae, typis Amardis Masse et Laurentii de Landis, 1644.

² Bascelli, Tiziana, « Torricelli's Indivisibles » in *Seventeenth-century Indivisibles Revisited*, op. cit., p. 110.

³ Torricelli, Evangelista, *De dimensione parabolae*, op. cit., p. 45. Traduction par nos soins.

constituée de parallélogrammes de hauteurs égales, qui diffère du triline mixte moins que toute grandeur donnée¹.

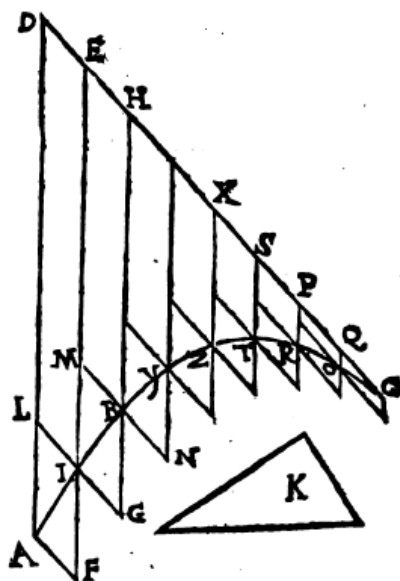


fig. 26

Pour prouver ce lemme, il démontre le résultat pour les parallélogrammes inscrits puis il s'occupe ensuite de la circonscription. Soit K une grandeur donnée. AD étant donnée, en bissectant suffisamment le segment DC , on peut rendre l'aire du parallélogramme AE inférieure à K . En traçant les lignes $EI, HB, \dots, XZ, ST, PR, QO$, la différence entre le triline et l'aire inscrite est inférieure à la somme des parallélogrammes $CO, RO, RT, TZ, \dots IA$. Or, cette somme est exactement la même que celle du parallélogramme AE^2 donc la différence entre le triline et l'aire inscrite est inférieure à K .

Bien que cette démonstration se trouve dans la partie réservée aux démonstrations à l'ancienne, son intérêt réside dans la possibilité de sa généralisation à toute autre courbe et, comme nous allons le voir, elle incite Torricelli à concevoir une surface composée par une somme d'éléments homogènes au tout (pas nécessairement des parallélogrammes) aussi petits qu'il est nécessaire, et qu'il continue à appeler indivisibles. Pour lui, ceci n'a rien d'incohérent ou d'inexact car il conçoit qu'il est toujours à même de démontrer à l'ancienne que la différence entre une somme finie d'homogènes et l'aire de la figure peut être rendue aussi petite que l'on veut.

¹ Proposition X, *ibid*, p. 54.

² Il suffit de voir que $CO = OP$ donc $CO + OR = OP$. Puis, $OP = RS$ donc $OP + RT = TP$ donc $OC + OR + RT = TP$ et ainsi jusqu'à BM .

De quelle manière Torricelli utilise-t-il la notion d'indivisible ? Les onze preuves de la quadrature de la parabole utilisant les indivisibles témoignent que leur usage ne s'effectue pas toujours sous la même forme. Examinons l'une d'entre elles.

Dans la proposition XI¹, il s'agit de trouver la quadrature du segment de parabole ABC de diamètre AB dont DC est la tangente en C (qu'il sait construire). Pour cela, Torricelli considère le cône de base le cercle de diamètre AD et de sommet C et le cylindre de bases les cercles de diamètres AD et EC .

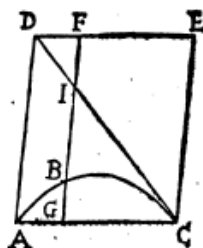


fig. 27

Il observe que les droites parallèles FG produites par le transit de AD correspondent à tous les cercles de diamètre FG du cylindre. Par ailleurs, il a prouvé que :

$$\frac{FG}{IB} = \frac{DA}{IB} = \frac{DC^2}{CI^2} = \frac{\text{cercle de diamètre } FG}{\text{cercle de diamètre } IG} = \frac{\text{cercle } FG}{\text{cercle } IG}$$

Comme tous les FG sont égales à DA et tous les cercles de diamètre FG sont égaux au cercle de diamètre FA , il peut appliquer un lemme énoncé plus haut², et affirmer que :

Toutes [omnes] les premières ensemble [de la proportion], à savoir le parallélogramme AE , sera à toutes les secondes ensemble, à savoir le triline $ABCD$, comme toutes les troisièmes ensemble, à savoir le cylindre AE , à toutes les quatrièmes ensemble, à savoir le cône ACD ³.

C'est-à-dire que, en termes modernes :

¹ *Ibid*, p. 56.

² Le lemme 18 énonce « si fuerit prima magnitudo ad secundam, ita tertia ad quartam ; Et hoc quotiescunq libuerit. Fuerintq, omnes primae interse, item omnes tertia magnitudines inter se aequales. Erunt omnes primae simul ad omnes secundas, ut sunt omnes tertiae simul, ad omnes quartas magnitudines. », *ibid*, p. 50. Mais la démonstration démontre le résultat pour un ensemble fini et Torricelli généralise à l'infini sans justifier.

³ « Ergo per Lemma 18, erunt omnes primae simul, nempe parallelogrammum AE , ad omnes secundas simul, nempe ad trilenium $ABCD$, ut sunt omnes tertia simul, nempe cylindrus AE , ad omnes quartas simul hoc est ad conum $ABCD$ ».

$$\frac{\text{parallélogramme AE}}{\text{triligne ABCD}} = \frac{\text{cylindre}}{\text{cône}} = \frac{1}{3}$$

De cette égalité, il déduit que le segment de parabole est égal à un tiers du triangle ADC donc à quatre tiers de son triangle inscrit. Notons que, dans sa démonstration, Torricelli identifie toutes les lignes droites soit à un parallélogramme soit à un triligne, de même que tous les cercles sont identifiés soit au cylindre, soit au cône. Il s'agit, pour lui, de concevoir une figure comme la somme de ses lignes. Torricelli ne commente pas ici ce raccourci et n'explique pas non plus ce qu'il faut entendre par « toutes les lignes »¹. L'identification de la figure à une somme de lignes surinterprète ou mésinterprète Cavalieri qui, comme nous l'avons vu, a pris le soin de bien distinguer les *omnes lineae* d'une figure à la figure elle-même. Dans la proposition XV, exemple que nous ne développons pas, Torricelli énonce explicitement l'identification de la parabole avec agrégat infini de triangles². Cette identification peut paraître audacieuse, l'est-elle en réalité ? Il exhibe la construction réglée de cet agrégat de triangles en montrant que l'on peut rendre la différence entre la parabole et la somme des triangles aussi petite que l'on veut. L'identification ne s'effectue donc pas gratuitement.

De la fécondité des paradoxes torricelliens

Torricelli a élaboré une autre méthode des indivisibles dans laquelle il suppose qu'un agrégat infini de grandeurs [*aggregatum omnium infinitorum*] puisse composer et saturer la figure. Nous avons vu comment l'observation des démonstrations à l'ancienne lui a suggéré ce genre d'interprétation du continu mais elle n'en est pas la seule origine. L'observation des règles de la méthode cavalierienne est aussi déterminante pour aboutir à une telle conception³. Nous avons dit qu'elle menait Torricelli à formuler certains paradoxes. Comment l'attention portée à ceux-ci lui inspire-t-il une autre conception de méthode par indivisibles ? Pour répondre, soyons attentifs à la formulation de certains de ces paradoxes.

¹ Andersen, K., *op. cit.*, p. 357. Elle ajoute que Torricelli utilise le terme *omnes* dans des situations dans lesquelles il veut clairement dire somme finie ou infinie d'un nombre d'éléments.

² *Ibid*, p. 68.

³ Pour un développement des paradoxes de Torricelli, on pourra consulter l'article de François De Gandt, « les indivisibles de Torricelli », dans *l'œuvre de Torricelli, science galiléenne et nouvelle géométrie*, (éd) par François de Gandt, Nice, Les Belles Lettres, Publication de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines de Nice, I, 32 (1987), p. 147-206.

Le paradoxe qui suit est exemplaire¹ de la démarche torricellienne. Dans ses *Opera Geometrica*, Torricelli considère un rectangle $ABCD$ de longueur AB et de largeur BC . À partir d'un point E situé sur la diagonale, il mène deux segments EF et EG parallèles à AB et BC respectivement. EF étant plus grand que EG , il en est de même pour toutes les parallèles EF par rapport à leur correspondant EG . Par conséquent, toutes les lignes EF prises ensemble dans le triangle ABD sont plus grandes que toutes les lignes EG dans le triangle CDB . Le triangle ABD est donc plus grand que son symétrique BCD , ce qui est absurde.

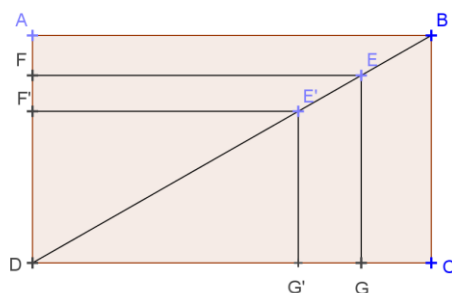


fig. 28

Il n'y a bien sûr aucun paradoxe si on prend soin d'utiliser la méthode cavalierienne correctement. Le balayage des deux figures que constituent ces deux triangles ne se fait pas à l'aide d'une même règle, il n'est donc pas surprenant encore une fois d'aboutir à un paradoxe. Pour l'utiliser correctement, ce que fait d'ailleurs Cavalieri dans sa *Geometria*, Livre II, proposition 19², il faut effectuer un dépeçage des deux triangles en prenant des segments opposés et homologues parallèles à la règle BC :



fig. 29

Comment Torricelli résout ces paradoxes ? Il considère que les indivisibles ne sont pas des droites mais des « éléments » de surface, c'est-à-dire des parties homogènes au tout et qui sont comparables entre elles. Voici comment.

¹ De Gandt le qualifie « d'exemple fondamental ».

² *Geometria*, p. 146.

Il est facile de montrer que dans un rectangle, les semi-gnomons $ABEF$ et $EBCG$, ont la même aire. Torricelli suppose que cette propriété soit maintenue au dernier instant. Or, les segments AB et BC étant inégaux en longueur, il leur assigne une épaisseur inversement proportionnelle à leur longueur. Ainsi, les paradoxes sont résolus : dans le rectangle, l'indivisible EF et l'indivisible EG sont égaux en « quantité » :

Et si la division est faite, ou supposée faite, nous aurons à la place des semi-gnomons, une ligne BC égale à une ligne BA . Je dis égale en quantité, non en longueur, parce que même si elles sont toutes les deux des indivisibles, BC sera, en relation à BA , aussi large que l'autre est long. Et en vérité si tous les deux occupent adéquatement le point B , il est nécessaire que CB , qui est plus proche d'être perpendiculaire, soit aussi plus large que la ligne AB , qui est davantage inclinée¹.

Les propriétés des « derniers vestiges » ont une importance cruciale pour Torricelli, à l'inverse de Cavalieri pour qui, comme l'exemple d'un autre paradoxe, celui du bol², le montre, ne doivent pas être pris en considération lorsqu'ils sont isolés.

Torricelli propose à Cavalieri un autre problème : un triangle quelconque AGH de hauteur HD qui coupe le côté AG en deux segments AD et DG , DG étant supérieur à AD . Par la suite, le segment HD sert de règle. Dans le triangle HAD , chaque segment IC parallèle à HD a son correspondant LE de même longueur dans le triangle HDG , de sorte que toutes les lignes IC prises ensemble, c'est-à-dire le triangle AHD , sont égales à toutes les lignes LE , c'est-à-dire le triangle HDG , ce qui est bien sûr absurde.

Dans cet exemple, la règle cavalierienne est mal utilisée car les deux triangles ne sont pas balayés par le même transit. Dans sa lettre de 1644, Cavalieri explique cette erreur. On suppose prises toutes lignes KB , de transit droit, dans le triangle AHD : il y en a autant que de points sur AD . À chacun de ces points, on associe un point sur AH et le même nombre de parallèles KM (obtenues par transit oblique) et en conséquence le même nombre de lignes parallèles à AG dans le triangle HDG .

¹ Torricelli, Evangelista, *Opere di Evangelista Torricelli*, edizione de Gino Loria and Giuseppe Vassura, Faenza G. Montanari, I, part. 2, p. 322.

² De Gandt, François, *Les indivisibles de Torricelli*, op. cit., p. 168-171.

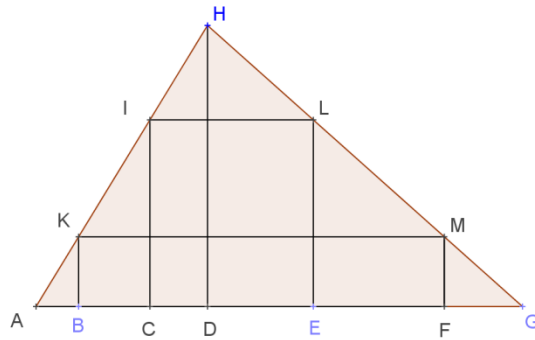


fig. 30

Mais ces dernières lignes sont moins nombreuses que celles que l'on obtiendrait par transit droit dans le triangle HDG , étant donné qu'il y a moins de points sur AD que sur DG . Ces lignes ne sont pas celles que l'on obtiendrait par un transit complet et donc ne permettent pas de mesurer l'aire de HDG . Pour renforcer cette explication, Cavalieri propose une analogie avec un tissu dont HD serait la trame, avec le même nombre de fils dans les deux triangles, le tissu du triangle HDG sera moins serré que celui de HAD . Dans *Exercitationes*, il reprend cet exemple et la précision qu'il avait déjà énoncée dans *Geometria* concernant le type de transit¹ : les deux figures doivent être balayées par le même transit pour conserver un « même degré de rareté ou d'épaisseur » pour toutes les lignes², dans l'exemple, KB et IC n'ont pas le même espacement que leurs correspondantes EL et FM . Soulignons que dans cet exemple Cavalieri ne veut pas suggérer une quelconque notion d'épaisseur d'indivisible, il ne s'intéresse pas à l'« indivisible » pris isolément.

En partant d'un questionnement sur la nature et l'utilisation des indivisibles de Cavalieri, Torricelli conçoit pourtant une notion d'indivisible étrangère et d'une certaine manière opposée à Cavalieri. Bien sûr, en concevant ainsi les indivisibles, Torricelli explique les paradoxes, mais avec ce choix, il a surtout en tête de résoudre d'autres problèmes géométriques cruciaux de son époque : la recherche de tangentes³ et de quadratures, le premier n'étant pas résolvable par la méthode de Cavalieri.

¹ Voir *infra*.

² « ut retineamus semper eundem in omnibus lineis spissitudinis, vel raritatis gradum (...) » *Exercitationes, op. cit.*, Addition XIII, p. 16.

³ On pourra consulter De Gandt, « Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli) », *op. cit.*, p. 114-116 et Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique, op. cit.*, p. 308-309. On reviendra sur cet exemple plus en avant dans 3.2).

Dans la méthode cavalérienne, le filtre de la « *regula* » permet d'analyser la grandeur en des « des éléments composants » et non l'inverse¹ : Cavalieri prend soin d'expliquer le procédé de détermination de ces « éléments composants » par la description du transit de la *regula*, ils n'ont pas à être conçus comme éléments composant le continu. La notion d'*omnes lineae* reste abstraite pour les contemporains de Cavalieri même si cela n'empêche pas leur utilisation. Les indivisibles de Torricelli sont un tout autre objet : ils résultent d'une division infinie du continu et héritent de certaines propriétés de grandeurs continues et finies.

3) Roberval et Pascal, un langage des indivisibles pour démontrer

En France, les travaux de Cavalieri sont connus directement par la lecture de ses ouvrages, mais aussi par le biais de celle de Torricelli. En France Jean de Beaugrand introduit Cavalieri qu'il a rencontré pendant son voyage en Italie en 1635 et duquel il possède une copie de la *Geometria*, Mersenne en reçoit également une de Cavalieri². Cette théorie est largement diffusée et utilisée : Descartes établit une explication de la quadrature de la cycloïde en utilisant les *omnes lineae* cavalériennes³.

Le mathématicien Roberval (1602-1675), par exemple, non seulement résout des problèmes à l'aide d'indivisibles dès 1630, comme en attestent certains de ses manuscrits⁴, mais n'hésite pas à les utiliser dans ses cours au Collège Royal duquel il a obtenu la prestigieuse chaire depuis 1634. Nombreux travaux de Roberval n'ont été publiés que tardivement et de façon posthume⁵ en 1693, en particulier ceux qui

¹ Koyré, Alexandre, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Paris, 1954, PUF, 1966, p. 303-304. Koyré différencie « éléments composants » des « éléments déterminants » ou « constitutifs » qui sont de même nature (homogènes) à ce qu'ils composent.

² Giusti, Enrico, *op. cit.*, p. 52.

³ Descartes résout ce problème dans une lettre à Mersenne datée du 27 mai 1638, *Œuvres de Descartes*, II, p. 135. On pourra consulter l'article Jullien, Vincent, « Descartes and the use of Indivisibles » dans *Seventeenth-century Indivisibles Revisited*, *op. cit.*, p. 165-175. Voir aussi « Descartes et le problème de la cycloïde » dans Cléro, Jean-Pierre, Le Rest, Evelyne, *La naissance du calcul infinitésimal au XVII^e*, Centre de documentation Sciences humaines, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences n°16, Paris, 1981, p. 51-61.

⁴ Vincent Jullien montre que Roberval résout plusieurs problèmes à l'aide d'indivisibles indépendamment de la méthode de Cavalieri. Plusieurs manuscrits l'attestent comme les *Fragments sur l'aire et le solide de la trochoïde* ou *De trochoïde ejusque spatio* que Jullien date avant la publication cavalérienne dans Jullien, Vincent, *Philosophie naturelle et géométrie au XVII^e siècle*, Collection Sciences, techniques et civilisations de Moyen Âge à l'aube des lumières, Honoré Champion, Paris, 2006, p. 402.

⁵ « Divers ouvrages de M. de Roberval » dans *Divers ouvrages de mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'Académie royale des Sciences*, Imprimerie Royale, Paris, 1693.

concernent les indivisibles¹. Cela s'explique par le fait que certaines chaires du Collège royal sont renouvelables que tous les trois ans; c'est le cas de la chaire de mathématiques. Gilles Personne de Roberval se représente au concours pendant vingt-et-un ans. Pour conserver un avantage sur ses concurrents au concours, il ne publie presque aucun de ses résultats concernant les avancées de ses recherches dont nous avons cependant le témoignage par son abondante correspondance avec Mersenne et Torricelli. Il participe également aux débats scientifiques avec ses contemporains, Descartes, Fermat, Pascal et fait partie de l'Académie Royale des Sciences dès sa création en 1666.

En 1647, Roberval souligne la différence qui existe entre sa méthode et celle de Cavalieri : ses indivisibles ne sont pas de même nature que ceux de Cavalieri. Dans un de ses échanges épistolaires avec Torricelli, c'est ainsi qu'il l'affirme :

Il y a cependant, entre la méthode de Cavalieri et la nôtre une petite différence. Celui-ci, en effet, considère les indivisibles de toute surface selon [*secundùm*] une infinité de lignes, les indivisibles de tout volume selon une infinité de surfaces.

C'est pourquoi, la plupart parmi les géomètres ordinaires comme parmi les demi-savants prétentieux, qui veulent passer pour savants et qui, à défaut d'autre chose, peuvent seulement ceci, se dresser face aux œuvres des grands hommes, envieux que ces œuvres n'aient pas été réalisées par eux. Comme si Cavalieri voulait que les surfaces soient réellement constituées de lignes ou les volumes de surfaces. (...)

Mais notre méthode, sans être à l'abri de tout reproche, évite au moins ceci, comparer des hétérogènes. Nous considérons en effet nos infinis ou indivisibles [*infinita nostra seu indivisibilia*] comme suit. Nous concevons que la ligne est composée comme si elle était constituée de lignes infinies ou indéfinies en nombre, la surface des surfaces, le solide de solides, l'angle d'angles, le nombre indéfini d'unités indéfinies, et mieux le plan par plan de plans par plan et ainsi de suite, en effet chacune de ces catégories a ses propres propriétés [*utilitates*]².

Quand Roberval écrit ce passage, il s'est déjà enquis de la méthode de Cavalieri. Il constate que celui-ci établit un lien entre la surface et les *omnes lineae*, mais il comprend que ce lien est tout autre que celui de la composition, contrairement à ce

¹ Nous n'avons pas relevé aucune lecture de mémoire concernant la méthode des indivisibles au registre de l'Académie Royale des Sciences alors que Roberval lit sa méthode pour tracer des tangentes par le moyen de mouvements composés pendant des séances en décembre 1668 et janvier 1669.

² Lettre de Roberval à Torricelli, juin 1647, *Divers ouvrages ...*, *op. cit.*, p. 286, traduction très largement inspirée de Jullien, Vincent, *Philosophie naturelle et géométrie au XVII^e*, *op. cit.*, p. 406.

que ceux certains mathématiciens prétendent. En revanche, Roberval affirme que sa méthode, comme celle de Torricelli, n'a pas le « défaut » d'avoir affaire à des hétérogènes.

Le langage des indivisibles, une nouvelle façon de démontrer

Le *Traité des indivisibles*¹ débute par un passage qui avertit d'une règle fondamentale pour tirer des « conclusions par le moyen des indivisibles » :

il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme un carré à carré, de cube à cube, de carré-carré à carré carré, ou selon quelque autre puissance².

Pour évaluer la somme de toutes ces lignes, Roberval explique qu'il faut se considérer que :

d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes on se servira de points ; et puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont en telle chose en ladite raison.

Ce passage est obscur mais Roberval fait suivre cette affirmation d'un exemple particulièrement simple et qui lui sert à éclaircir son propos.

Il s'agit de comparer le nombre de points contenus dans un triangle rectangle isocèle avec le nombre de points de son carré (double) et de montrer que ce calcul est équivalent au calcul du rapport des deux aires des figures. Le côté du triangle est divisé en quatre points, puis en cinq, puis en six, il peut l'être indéfiniment. Chacun des points de la division est surplombé d'une ligne de points en progression arithmétique. En partant du schéma de la figure, Roberval calcule le nombre de points, ce calcul correspond à additionner les termes d'une suite en progression arithmétique :

¹ Jullien affirme que le traité est achevé avant 1660, *ibid*, p. 402. Il est publié en 1693 dans *Divers ouvrages ...*, *op. cit.*, p. 190-245.

² Sur ce passage, Vincent Jullien donne des précisions. Si une ligne a une longueur égale à a , on peut très facilement faire une division en n parties toutes égales entre elles de longueur ε : « chacune des « petites parties » de n importe laquelle de ces divisions se donne immédiatement à connaître comme un produit, produit d'une certaine « mesure » par la quantité de référence ε . Ces divisions génèrent donc de petites surfaces », *Philosophie naturelle et géométrie au XVII^e*, *op. cit.*, p. 413.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'ycelles prises autant de fois qu'il y en a de petites, comme un triangle au carré qui a pour costé la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy¹, que la surface contient la moitié de l'espace qui aurait 4 comme costé comme le triangle ; et encore qu'il ne fallust pas 10 points pour achever le carré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable , parce que le triangle n'excède jamais la moitié du carré que de la moitié de son costé : or y ayant une infinité de costez audit carré pris dans les indivisibles, la moitié d'un iceux n'entre pas en considération : ainsi ce triangle-icy qui a 4, de costé n'excède la moitié du carré collatéral, c'est-à-dire qui a pareil costé) que de 2 qui est $\frac{1}{4}$ de la dite moitié, ou la moitié du costé. Si le triangle avait 5 de costé, il n'excéderait que de $\frac{1}{5}$ de la moitié du carré collatéral : s'il y en a 6, il n'excédera que de $\frac{1}{6}$, et ainsi de suite ; et puis qu'on voit que l'excès diminue toûjours, il s'anéantira enfin dans la division infinie.

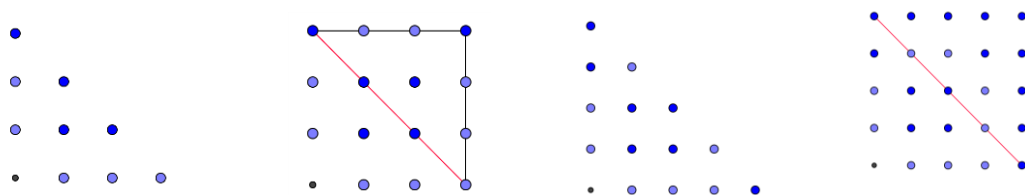


fig. 31

Ce passage semble comporter une ambigüité. En effet, Roberval affirme que le rapport de la somme de tous les premiers entiers avec le plus grand pris autant de fois qu'il y a de termes est égal à un demi. Le résultat est exact si l'on considère que la somme comporte un nombre infini de termes mais dans ce cas que signifierait « la plus grande » et « prises autant de fois qu'il y en a de petites » ? L'ambivalence de l'énoncé s'estompe par l'explication qu'il fait suivre. Il se place dans la même situation de comptage mais à l'ordre fini. Si l'on considère les n premiers entiers, on a, en notations modernes,

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \text{ ou } \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Roberval veut donner la valeur du nombre de points contenus dans la figure du triangle dont le côté est composé de n points. Il traite tout d'abord un cas élémentaire, celui où $n = 4$: alors qu'il sait bien que le nombre total de points est de dix, la

¹ Première des figures ci-dessous (fig. 31).

formule donne la moitié de 4^2 , c'est-à-dire huit. Il manque donc les deux points qui se trouvent sur la diagonale pour avoir le bon compte. Certes, ici l'excès est considérable mais Roberval a pris le soin d'indiquer plus haut que la règle est valable à condition que la division du côté soit infinie : « pris dans les indivisibles, la moitié d'un iceux n'entre pas en considération ». Si $n = 5$ ou $n = 6$, la formule reste toujours fautive mais l'excès s'amointrit et Roberval anticipe son pur « anéantissement ».

De semblables explications sont données pour des sommes de lignes (ou points) qui sont « de carré à carré »¹ puis de cube à cube, et les suivants. Ainsi, pour la somme des carrés, il explique : « (...) si les lignes suivaient entr'elles l'ordre des carrés, à la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, serait à la dernière prise autant de fois, comme la somme des carrés au cube (...) » Or la somme des carrés au cube est égale à

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Il y a donc les termes $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ au numérateur ou $\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ qui excèdent le $\frac{1}{3}$. Cependant, Roberval explique que dans la division infinie elle ne ferait que le tiers ; car « ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube de la moitié du plus grand carré $\frac{1}{6}$ du côté »². Or dans le cube il y a une infinité de carrés, et partant la moitié d'iceux n'est pas considérable, et encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou côté du même cube ».

La méthode de Roberval s'en trouve clarifiée :

Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, et compose la ligne entière. L'infinité de lignes représente l'infinité de petites superficies qui composent la superficie totale.

En concevant une surface comme composée d'une infinité de petites lignes, il peut considérer aussi qu'à leur tour ces lignes sont composées en dernière instance par des points. Ainsi compter le nombre de points³ de deux surfaces et en donner le rapport est la même chose qu'évaluer le rapport de l'aire de deux surfaces. Bien sûr, cette méthode n'a d'intérêt que si l'on connaît la règle de progression entre le nombre

¹ *Ibid*, p. 190.

² *Ibid*, p. 190.

³ Bien évidemment le nombre de points est infini mais il s'agit en fin de compte d'un rapport de deux infinis qui va être nécessairement fini puisque les surfaces sont de grandeur finie.

de points de chacune des lignes et si on sait évaluer arithmétiquement la somme d'une suite de nombres en une telle progression (ce qui est le cas pour la somme des puissances). Roberval met en pratique ces résultats arithmétiques pour obtenir la quadrature de la parabole mais il ne l'effectue pas immédiatement et préfère détailler d'abord des quadratures d'autres courbes comme la cycloïde. Avant d'entamer sa quadrature, Roberval fait référence à Fermat. En effet, ce dernier a écrit un traité de quadratures vers 1658 où il réalise les quadratures de tout paraboloïde et hyperboloïde¹. Il conçoit une méthode basée sur la recherche de somme de séries et utilise le procédé d'adégalisation. Ce texte n'est publié qu'en 1679 dans le recueil *Varia Opera*².

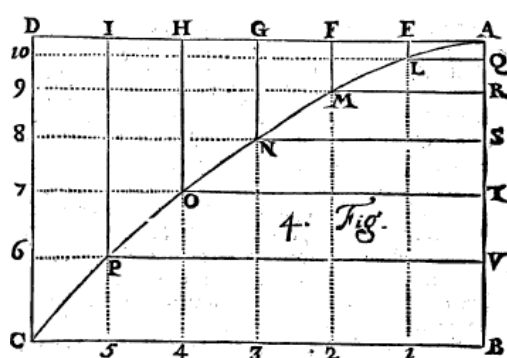


fig. 32

Dans la quadrature de la parabole simple de diamètre AB et de touchante AD , Roberval divise cette dernière en « infinies parties égales » et tire des points de cette division les ordonnées correspondantes et des lignes de même longueur que AB .

Or, par définition de la parabole :

$$\frac{EL}{FM} = \frac{LQ^2}{MR^2} \text{ et } \frac{FM}{GN} = \frac{MR^2}{NS^2}$$

¹ Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, op. cit., p. 244.

² *Ibid*, p. 195 : « De la parabole ». Fermat écrit son traité de quadratures vers 1658 où il réalise les quadratures de tout paraboloïde et hyperboloïde. Ses recherches sont plus anciennes (Mahoney, op. cit., p. 244). Pour ce faire, il conçoit une méthode sophistiquée basée sur la recherche de somme de séries et le procédé d'adégalisation. Ce texte n'est publié qu'en 1679 dans le recueil *Varia Opera* (p. 44-57) et a pour titre « De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrantibus infinitis parabolis et hyperbolis usus » OF I, p. 255-288, OF III, p. 216-240. Ce traité est peu connu et assez obscur pour ses contemporains. On pourra consulter à ce propos : Paradís, Jaume, Pla Josep, Vialer, Pelegrí « Fermat's method of quadrature », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14 (2008), p. 10-11.

et « ainsi de toutes les autres lignes.» Ainsi Roberval remarque que EL, FM, GN, HO, \dots sont entre-elles comme les carrés 1, 4, 9, ..., il peut donc utiliser le résultat du début de son traité¹, et déduire que :

(...) il est donc vrai que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, comme la somme des quarez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarez, partant le triline $CPONMLAD$ sera le tiers du rectangle $CDAB$, & par ainsi la parabole $ABCPONMLA$ sera les deux tiers du parallélogramme ou quarré $CDAB$, ce qui a esté démontré par Archimède d'une autre manière².

Dans ce passage, les « lignes » dont parle Roberval sont des rectangles de hauteur EL, FM, GN, \dots et qui ont tous une même largeur supposée décroître indéfiniment. Mais, il ne s'agit pas de calculer directement la somme de ces rectangles, l'analogie avec le schéma de la disposition de points en progression de carré à carré suffit pour obtenir le résultat.

Ces procédés arithmétiques de quadratures circulent dans les milieux savants. Blaise Pascal s'en inspire dans son ouvrage, *Potestatum numericarum summa*³, il pose le problème général de trouver la somme de puissances d'entiers en une quelconque progression⁴ et donne les résultats sans les démontrer. Il affirme que pour peu que l'on soit familier avec la méthode des indivisibles, on peut en déduire la dimension des espaces curvilignes, en particulier celui des paraboles de tout degré (ce qu'il fait immédiatement après) mais aussi d'un très grand nombre d'autres courbes. Pour les paraboles, il explique :

La somme d'un certain nombre de lignes est au carré du plus grand comme 1 :2

La somme des carrés est au cube du plus grand comme 1 :3

La somme des cubes est à la puissance quatrième comme 1 :4

Le canon général concernant la progression naturelle en commençant par l'unité.

¹ On est donc dans la situation

² *Ibid*, p. 195.

³ Pascal, Blaise, « *Potestatum numericarum summa* », Œuvres de Blaise Pascal, de l'Imprimerie de Crapelet, nouvelle édition, tome cinquième, à Paris, chez Lefevre, 1819, p. 107-117.

⁴ « *Datis quot cunque numeris, in quâlibet progresione, à quovis numero initium sumentes, invenire summam quarumvis potestatum earum ?* »

La somme de toutes les lignes d'une même puissance est à la puissance suivante du plus grand comme l'unité est à l'exposant de cette dernière puissance¹.

Or, Pascal n'ignore pas non plus que la valeur de ces sommes n'est pas exactement égale à ce qu'il affirme lorsque la somme est finie. Sauf, qu'en prenant soin d'indiquer qu'il se place dans le cadre de la méthode des indivisibles, c'est-à-dire qu'il traite avec des grandeurs continues, il déclare qu'il peut considérer que lorsque des grandeurs d'un autre genre sont additionnées à une grandeur de genre supérieur, rien [*nihil*] n'est en fait ajouté à cette grandeur². Nous verrons plus loin comment Pascal généralise l'idée de « somme d'indivisibles ».

Rappelons que Roberval choisit de débiter ses exemples de quadratures non pas par la parabole mais par d'autres courbes dont la roulette³ et la conchoïde sphérique. Nous allons analyser la résolution de cette dernière quadrature⁴, particulièrement significative de la démarche robervallienne.

Roberval débute également en précisant la spécificité de la conchoïde qui « se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une même ligne soit courbe, soit droite, et que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont *B1, D2, E3, F4, G5, &c*⁵. »

Une division du cercle *CGBR* en « parties infinies égales⁶ » : *B, D, F*, etc, induit sur la conchoïde une division en 1, 2, 3, etc. Roberval affirme :

Or toutes ces lignes qui divisent la circonférence du cercle commençant au point C et finissant en 1, 2, 3, 4, 5 ; &c. divisent tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent et deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoy que dans le fini il y ait quelque chose à dire) ;⁷

¹ *Ibid*, p. 116.

² « In continuâ quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere. Sic punta lineis, lineae superficiebus, superficies solidis, nihil adjiciunt : seu ut numericis, in numerico tractatu verbis utar, radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, etc. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt », *ibid*, p. 116.

³ Roberval utilise indistinctement le mot « roulette », « cycloïde » ou « trochoïde ».

⁴ Pour la quadrature de la cycloïde, voir par exemple, Jullien, Vincent, « Roberval's Indivisibles », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, *op. cit.*, p. 190-192.

⁵ *Ibid*, p. 198.

⁶ Pour les mêmes raisons que pour la quadrature de la roulette, les divisions doivent être égales.

⁷ *Ibid*, p. 198.

Les divisions égales du cercle $CGBR$ produisent des triangles semblables CBD , CDE , CEF , etc, composant le cercle, et des triangles semblables $C12$, $C23$, $C34$, etc, composant la conchoïde¹. De plus, ces triangles peuvent être considérés comme les secteurs correspondants, grâce à, dit-il, « la force des indivisibles ».

Cette supposition lui permet de comparer le secteur $C12$ avec CBD (ou CBV) puis le secteur CBV avec le secteur $C1918$: $\frac{C12}{CBD} = \frac{C12}{CBV} = \frac{C1^2}{CB^2}$ et $\frac{CBD}{C1918} = \frac{CB^2}{C19^2}$

Par ailleurs :

$$C1^2 = CB^2 + B1^2 + 2CB \times B1, \text{ et } C19^2 = CB^2 + B19^2 - 2CB \times B1$$

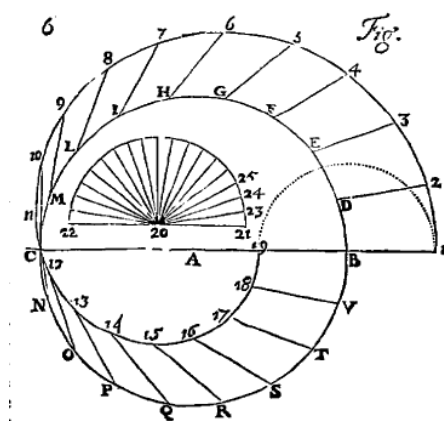


fig. 33

On a donc :

$$C1^2 + C19^2 = 2(CB^2 + B1^2).$$

d'où :

$$\frac{C12 + C1819}{CBD} = \frac{2(CB^2 + B1^2)}{2CB^2} = \frac{CB^2 + B1^2}{CB^2}$$

On peut continuer à établir le même type de rapports entre les secteurs $C23$ et CED d'une part, puis $C1817$ et CVT d'autre part, et continuer indéfiniment. Roberval ne le fait pas et après avoir établi que :

$$\frac{C12 + C1819}{CBD} = \frac{CB^2 + B1^2}{CB^2}$$

¹ Ce sont les secteurs qui composent la conchoïde. Les triangles sont « presque semblables » : puisque si l'on considère que les divisions égales se font selon un angle θ , que l'on note par $b = B1$ et par $a = CB$, on a : $C1 = a + b$, $C2 = a \cos\theta + b$, $C3 = a \cos(2\theta) + b$, etc. L'aire du triangle $C12$ est et l'aire du triangle $C23$ est, le rapport des deux aires est donc, ce qui est proche de 1 lorsque θ est très petit.

Il conclut : « & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrés $CB, B1$ au quarré CB , ou bien comme les secteurs $C12, C1918$ aux secteurs CBD, CBV »¹.

Roberval construit alors un demi-cercle de rayon $B1$ et effectue autant de divisions qu'il en a faites pour le grand cercle $CGBR$. Comme $B20B21 = B12$, on a $CB^2 + [2021]^2$, donc le rapport $\frac{CB^2 + [2021]^2}{CB^2}$ est le même que celui de l'espace du cercle $CGBR$ et du demi-cercle ensemble à l'espace du cercle entier.

Il conclut enfin que l'aire de la conchoïde est au cercle en même raison que le cercle et le demi-cercle est au cercle².

Les triangles ou secteurs mis en scène dans cette quadrature sont homogènes au disque ou la conchoïde. Ici aussi Roberval a introduit des indivisibles qui lui semblent les plus appropriés à la configuration. Comme il l'affirmait à sa lettre à Torricelli, sa méthode n'est pas à confondre avec la méthode cavalierienne. Cet exemple de quadrature qu'il a résolue met en évidence une pratique coutumière avec des homogènes, obtenue par une division indéfinie et qui sont supposés composer les figures dont il veut comparer les aires.

Par ailleurs, Roberval commence ses raisonnements en supposant une infinie division réalisée (sur une ligne ou une figure) même si de fait, il raisonne sur une figure partagée qu'en un nombre fini de divisions égales. De ce fait, chacune des quadratures possède deux étapes. Alors que la décomposition de la figure en indivisibles est indéfinie, il est contraint de porter d'abord un discours sur un moment de ce processus, c'est-à-dire sur une configuration nécessairement finie. Puis, il conclut par des considérations sur l'infini. L'établissement des rapports entre triangles (ou secteurs) ne peut se faire que sur un nombre (certes très grand) mais fini de divisions. Mais pour articuler le passage entre le discours, portant sur du fini à celui, portant sur l'infini, il anticipe le moment de la division accomplie. Se référant à une figure décomposée de façon finie, il use souvent de prolepses : les triangles peuvent être considérés comme semblables et « convertis » en secteurs, « par la force

¹ *Ibid*, p. 199.

² « Et tout l'espace de la conchoïde est à l'espace du cercle comme les carrés $CB, B1$ au carré CB , ou bien comme les secteurs $C12, C1918$ aux secteurs CBD, CBV ».

Dans le commentaire de ce passage, Vincent Jullien tient à préciser qu'il « ne faut pas évidemment pas le comprendre comme une addition euclidienne, mais comme un passage de ce rapport à « tous les rapports » dans Jullien, Vincent, *Philosophie naturelle et géométrie*, *op. cit.*, p. 429.

des indivisibles »¹. Par ce genre de remarque, il s'autorise à considérer des objets curvilignes (secteurs, trapèzes curvilignes, ...) comme s'ils en étaient d'autres rectilignes, pour lesquels la manipulation est plus simple. Son raisonnement tient indubitablement à une supposition téméraire, celle de penser que de « faire comme si, alors que » ne changera rien au résultat. Il n'ignore pas la hardiesse de sa manière, comme l'atteste des énoncés comme le « quoy que dans le fini il y ait quelque chose à dire »². Dans le fini, on ne peut pas considérer qu'un triangle curviligne est rectiligne mais cela est possible par « la force des indivisibles ».

Roberval ne prétend à aucun moment du traité que sa démarche parvienne à démontrer le résultat d'une quadrature. Les indivisibles servent « à tirer des conclusions », « à tirer des conséquences », à « expliquer » la roulette » ou à « spéculer » sur l'hyperbole. Il s'agit bien pour lui d'une méthode qui est estimable car elle produit des résultats. Pourtant, l'évocation récurrente de l'infini n'a rien d'une formule magique. Pourquoi ?

Il a élaboré un ouvrage, qui reprend les *Éléments* euclidiens³ et dont certaines propositions témoignent de sa préoccupation de légitimer les simplifications dont il use librement dans le *Traité des indivisibles*. Le livre VI de ses *Eléments*, destiné à la théorie des proportions, contient une proposition qui s'avère cruciale à ce propos. Elle affirme que si l'on considère A, B, C et D quatre grandeurs telles que⁴ : quelle que soit la grandeur E , on ait: $\frac{A+E}{B} > \frac{C}{D}$ et $\frac{A-E}{B} < \frac{C}{D}$ alors $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Par ailleurs, dans la proposition 34 du livre VIII, Roberval considère un cercle et résout le problème de construire deux polygones réguliers, l'un circonscrit et l'autre inscrit à ce cercle, de telle sorte que la différence de leurs longueurs soit

¹ Nous avons déjà signalé que dans le cas de la cycloïde Roberval fait comme si les trapèzes mixtilignes deviennent des trapèzes rectilignes. Dans un autre exemple « Proportion de la circonférence du cercle à son diamètre » (traité juste après celui de la cycloïde), Roberval considère un secteur $AB\delta$ où AB est un diamètre, et affirme que si nous « feignons » une division infinie, la ligne $A\delta$ devient un diamètre et que le secteur $AB\delta$ peut être considéré comme un triangle.

² *Ibid*, p. 198.

³ *Éléments de géométrie* de G. P. de Roberval, textes présentés par Vincent Jullien, Vrin, Paris, 1996. Roberval annonce l'achèvement de son ouvrage à l'Académie peu avant sa mort. La datation des manuscrits s'étend de 1642 (la grande majorité des écrits sont achevés vers 1644) à 1674, *ibid*, p. 26-27. Les propositions auxquelles nous ferons référence font partie des premiers écrits.

⁴ « 42. Prop., Théo.

Soient quatre grandeurs A, B, C, D autres que des nombres et telles qu'il ait raison de A à B et raison de C à D , et que pour peu que l'on augmente A , il y ait plus grande raison de A , ainsi augmentée, à B que de C à D et pour peu que l'on diminue A il y ait moins de raison de A , ainsi diminuée, à B que de C à D . Je dis 1^e que A sans augmentation, ni diminution, est à B comme C à D . », *ibid*, p. 344.

inférieure à une longueur donnée « si petite qu'on voudra »¹. Ces deux propositions lui servent à montrer l'égalité du rapport des longueurs de deux cercles avec le rapport de leurs diamètres et celles du rapport des aires de deux disques avec le rapport des carrés de leurs diamètres². La lecture de ces démonstrations montre que Roberval peut de façon exacte – c'est-à-dire dans le cadre de la géométrie des Anciens – maîtriser la différence entre un arc et le segment de l'arc. Par conséquent, il peut s'autoriser à prendre une figure mixtiligne pour une figure rectiligne, lors de ses quadratures directes. Même s'il ne redémontre pas les résultats de quadrature par des démonstrations par l'absurde, les libertés qu'il s'est octroyées sont tout à fait légitimées par la possibilité de démontrer leur bien-fondé par la voie des Anciens.

Roberval n'est pas isolé dans cette préoccupation. Nous avons déjà indiqué cette attitude chez Torricelli, nous verrons plus loin dans quelle mesure elle est partagée par d'autres mathématiciens.

En 1658, Pascal publie sept traités³ dans lesquels il développe sa « doctrine des indivisibles » puis l'applique à toutes sortes de problèmes. S'intéressant à l'obtention de quadratures, centres de gravité et rectifications de courbes, il développe et généralise la notion « somme de lignes »⁴. Par exemple, il considère qu'au lieu de partager la base d'une courbe en divisions égales et de « sommer les ordonnées », il est également possible de diviser l'arc de courbe en divisions égales et de sommer les lignes engendrées, qu'il appelle « sinus »⁵. Dans la figure 34, le triligne CMF est divisé « indéfiniment » en parties égales par des points Z mais dans la figure 4, c'est l'arc qui est divisé en parties égales par les points D , DE est un sinus. Il est remarquable que

¹ Sa démonstration est basée sur procédé dichotomie suffisant pour atteindre une longueur inférieure à celle qui est proposée.

² Livre VIII, propositions 36 et 41 pour les cercles et les disques propositions 37 et 42 pour les arcs et les secteurs, *ibid*, p. 441-449.

³ *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy, en luy envoyant Une méthode générale pour trouver les centres de gravité de toutes sortes de grandeurs, un Traité des trilignes et de leurs onglets. Un Traité des Sinus d'un quart de Cercle. Un Traité des Arcs de Cercle. Un traité des Solides circulaires. Et enfin un Traité général de la Roulette, contenant la solution de tous les Problèmes touchant LA ROULETTE qu'il avait proposez publiquement au mois de juin 1658, Paris, 1658.* Parmi les études qui ont été consacrées à ces traités, nous nous référerons souvent aux ouvrages de Descotes, Dominique, *Blaise Pascal. Littérature et géométrie*, Presses Universitaires Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2001 et celui de Merker, Claude, *Le chant du cygne des indivisibles*, PUFC, 2001, Cortese, João, *L'infini en poids, nombre et mesure : La comparaison des incomparables dans l'œuvre de Blaise Pascal*, thèse de Doctorat en épistémologie et histoire des sciences, dirigée par David Rabouin et Luis César Guimarães Oliva, présentée et soutenue publiquement à l'Universidade de São Paulo le 30 octobre 2017.

⁴ Merker, Claude, *Le chant du cygne des indivisibles*, *op. cit.*, p. 23-24.

⁵ Définitions, *Lettre de M. Dettonville à Mr de Carcavy*, *op. cit.*, p. 18-19.

Pascal use du mot « indéfini » alors que Roberval use des mots « infiniment » ou « indéfiniment » de manière indistincte. De plus, le caractère indéterminé des divisions indéfinies de Pascal est souligné par le fait que tous les points de la division ont la même étiquette.

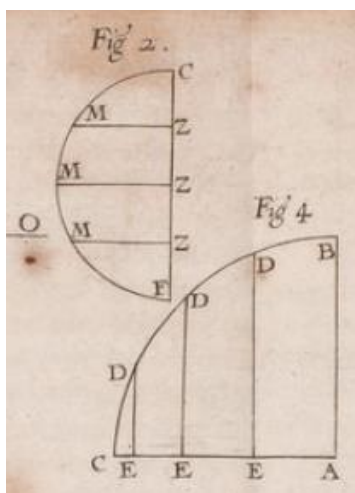


fig. 34

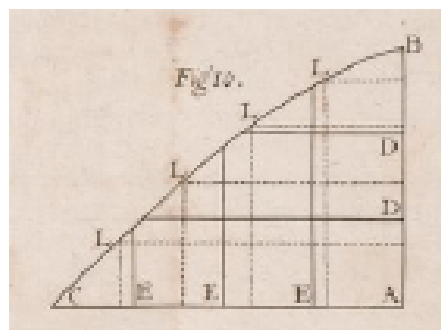


fig. 35

Pascal anticipe que sa méthode pourrait être sujette à des critiques. Aussi, il prend soin de placer des « avertissements » dans ses traités qui ponctuent son discours. En général, ces avertissements ont pour rôle de préciser ou d'éclaircir la démonstration qui vient ou va être faite, en particulier il fait des remarques importantes sur la légitimité de l'intervention de ses indivisibles. Dans la lettre à Carcavy, il clarifie très précisément ce qu'il entend par « somme de lignes » :

(...) puis qu'on n'entend autre chose par là [la somme des ordonnées] sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demy cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. (...)

De sorte que quand on parle de *la somme d'une multitude de lignes* on a toujours égard à une certaine droite, par des portions égales et indéfinies de laquelle elles sont multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées), il faut sous-entendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées¹.

¹ *Ibid*, p. 10-11. Pour un développement très pédagogique de ces notions, Merker, Claude, *Le chant des cygnes des indivisibles*, p. 113-136.

De sorte que, lorsque Pascal dit « la somme des ZM », il faut entendre par ZM une ligne multipliée par la longueur ZZ (donnée par la division indéfinie), c'est-à-dire, dans le langage du XVII^e siècle, un rectangle¹. De même, lorsqu'il dit la « somme des DM », il faut entendre qu'il somme des rectangles curvilignes de hauteur le sinus DE et de largeur (constante) l'arc indéfiniment petit DD . Les « indivisibles » de Pascal sont donc supposés être des grandeurs homogènes au tout.

Pascal n'utilise aucune symbolique dans la présentation de ses démonstrations ce qui ne l'empêche pas de parvenir à des résultats très élaborés. Nous donnons comme exemple, une proposition parmi celles qui se trouvent dans le *Traité des sinus du quart de cercle*.

Dans ce dernier traité, il montre que la « somme des sinus » d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon² (figure 36). Ici, la « somme des sinus » correspond donc à la somme d'un nombre indéfini de rectangles de dimensions le sinus ED et un arc DD de la division indéfinie.

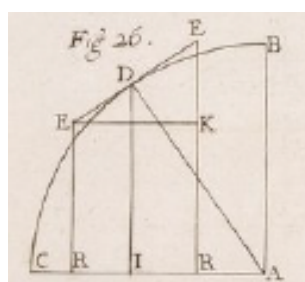


fig. 36

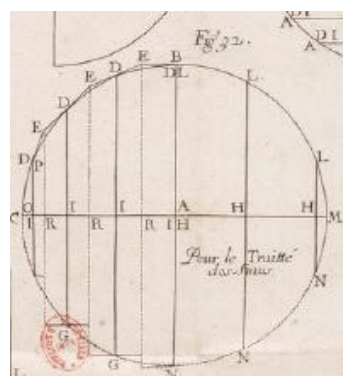


fig. 37

Pour être démontrée, cette proposition nécessite le lemme suivant :

Soit ABC un quart de Cercle ; dont le rayon AB soit considéré comme axe, et le rayon perpendiculaire AC comme base ; soit d'un point quelconque dans l'arc, duquel soit mené le sinus DI sur le rayon AC , et la touchante DE , dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menées les perpendiculaires ER sur le rayon AC .

Je dis que le rectangle compris du sinus DI & de la touchante EE , est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles) & le rayon AB ³.

¹ Viète appelle cette opération une « duction ».

² Proposition 1, p. 1.

³ Ce lemme se démontre facilement en considérant les triangles semblables EEK et DIA : donc le produit de DI par EE est le même que celui de DA par EK soit celui de AB par RR .

Pour démontrer la proposition, Pascal mène, de chacun des point D de la division de l'arc, la touchante DE qui coupe la touchante « voisine » au point E . De chacun de ces points E , il trace une perpendiculaire ER . D'après le lemme, chaque sinus DI multiplié par EE est égal au rectangle par le rayon AB . Pour conclure, il affirme que la somme de tous les DI par EE (qui, écrit-il, sont égaux entre eux) est égale à la somme de tous les RR multipliés par AB . Il affirme également que la somme des RR n'est autre que AO .

Pour prouver ce dernier résultat, il a donc supposé premièrement que l'on peut prendre EE pour DD et deuxièmement que la somme des RR est égale à AO . Explique-t-il ces affirmations ? Il fait suivre cette démonstration d'un avertissement dans lequel il défend le bien-fondé de ces suppositions :

Quand j'ay dit que toutes les distances ensemble RR , sont egales à AO , & et de mesme que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD : On n'a pas deu en estre surpris, puisqu'en on sçait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie ; néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie ; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes egales entr'elles EE ne diffère de l'arc entier BD , ou la somme de tous les arcs egaux DD , que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la somme des RR , de l'entière AO .

Vers qui est dirigé cet avertissement ? Il est manifeste que Pascal ne s'adresse pas à n'importe quel lecteur. Les interjections « On n'a pas deu en estre surpris » ou « puisqu'en on sçait assez encore » supposent que le lecteur est *déjà* justement un personne avertie dont on ne craint pas la « surprise ». Ainsi plus qu'un avertissement, il s'agit de rappeler à un lecteur, comme si c'était l'un de ses pairs [« on sçait »], un principe supposé admis et assumé en géométrie. Ici, il est question de considérations mathématiques qui ne sont pas toujours les mêmes selon que l'on se place dans l'ordre du fini ou de l'indéfini. Que se passe-t-il si l'on introduit l'indéfini ? Pascal répond qu'il est connu que l'indéfini rend la touchante égale à l'arc et la somme des RR à AO .

Dans quelle mesure cet avertissement légitime les raccourcis audacieux de Pascal ? Dans quelle mesure lui et ses lecteurs peuvent-ils être d'accord ?

Pascal suppose que son lecteur connaît les démonstrations archimédiennes de circonscription et inscription. Dans ce cadre, on pourrait montrer à la manière des anciens que « la somme de toutes les touchantes égales entr'elles EE ne diffère de l'arc entier BD ». L'avertissement a donc pour rôle de rappeler la possibilité de légitimer à la manière des Anciens des procédures propres à la méthode des indivisibles. Cependant, son intention n'est pas de recourir aux démonstrations archimédiennes, mais au contraire de persuader que la validité des preuves par les indivisibles suffit désormais pour conduire à des énoncés vrais.

Dans *la Lettre à Carcavy*, Pascal affirme que :

Tout ce qui est desmontré par les véritables règles des indivisibles se demonstrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens, & qu'ainsi l'une de ces Méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler, ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois avertyes ce qu'on entend par là. Et c'est pourquoy je ne feray aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles la somme des lignes, ou la somme des plans ; (...) somme des ordonnées, qui semble n'estre pas Géométrie à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, & qui s'imaginent que c'est pécher contre la Géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfiny de lignes ; ce qui vient de leur manque d'intelligence, puisqu'on entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfiny de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme ne diffère de l'espace du demy cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée¹.

Par ce passage, Pascal avertit que les preuves par les indivisibles et les démonstrations à la manière des Anciens ne sont qu'une manière différente de s'exprimer et ont la même valeur démonstrative² : « les véritables règles des indivisibles » permettent de démontrer aussi rigoureusement que le ferait une démonstration à l'ancienne. Une fois « avertyes ce qu'on entend par là », c'est-à-dire des règles de traduction, le géomètre ne perd rien en rigueur mais gagne en simplicité.

L'analyse des textes pascaliens et robervalliens montre que les raccourcis de langage qu'ils s'autorisent ne se font pas gratuitement. Particulièrement chez Pascal où un soin est apporté à préciser la définition d'un mot ou une expression, ou à

¹ Pascal, *Lettres de A. Dettonville*, op. cit., p. 10-11.

² À ce sujet, Cortese João, *L'infini en poids, nombre et mesure : La comparaison des incomparables dans l'œuvre de Blaise Pascal*, op. cit., p. 390-412.

préciser dans quel sens il est employé. Par exemple, un plan ne saurait être défini par un « nombre indéfini de lignes » dans le cadre de la géométrie des Anciens. S'il faut entendre « ligne » par rectangle de « largeur indéfiniment petite » – c'est-à-dire comme rectangle de largeur aussi petite que l'on veut – Pascal ne se focalise nullement sur l'individualité du « rectangle- indivisible ». Dans la « doctrine des indivisibles », affirmer que la somme de rectangles constitue la figure renvoie à la possibilité de prouver par une démonstration de double raisonnement par l'absurde que la figure et cette « somme de lignes » ne diffèrent que d'une quantité aussi petite que l'on veut. Le contrôle de cette différence est rendu possible par la supposition de l'indéfinie division. En définitive, Pascal avertit le lecteur qu'il ajoute des nouvelles définitions au dictionnaire du géomètre¹. Ces définitions sont des « définitions de noms ». Comme il l'explique dans son opuscule *l'Esprit géométrique*, ce sont les seules dont usent les géomètres car « leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abrèger le discours, en exprimant, par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire en plusieurs termes »². Il est remarquable que le mot « indivisible » apparaisse presque toujours couplé avec « règles », « doctrine » et « langage ». En effet, à une seule reprise Pascal utilise « indivisible » pris isolément pour préciser la relation entre une somme triangulaire et une somme pyramidale : la première est une indivisible par rapport à la deuxième. Il ne choisit donc pas le mot « indivisible » pour l'ajouter à son dictionnaire de définitions de noms³. De la sorte, l'élaboration de ce « langage des indivisibles » permet une nouvelle pratique qui est assurée de la vérité de ses résultats.

Le langage des indivisibles : évident ? le témoignage d'Arnauld

Dès leur apparition, les méthodes par indivisibles circulent dans les cercles savants français. Certains géomètres leur reconnaissent un caractère heuristique mais pas nécessairement le statut de démonstration. D'autres refusent leur utilisation car

¹ Le sens du terme « indivisible » dans « doctrine des indivisibles » doit être distingué de celle présente dans *De l'esprit géométrique*. Pascal y fait l'analogie indivisible/étendue et zéro/unité *De l'esprit géométrique*, GF-Flammarion, Paris, 1985, p. 74-84. Pour comprendre la locution « doctrine des indivisibles » ou « méthode des indivisibles », il faut la penser sans séparer le mot « indivisible » de l'expression entière. Pour une analyse intéressante à ce propos, Cortese, João, *L'infini en poids, nombre et mesure : La comparaison des incomparables dans l'œuvre de Blaise Pascal*, op. cit., p. 439-444.

² Pascal, Blaise, *De l'esprit géométrique*, op. cit., p. 69.

³ Voir à ce propos : Cortese, João et Rabouin, David, « Sur les indivisibles chez Pascal » dans Agnès Cousson (dir), *Passions géométriques. Mélanges en l'honneur de Dominique Descotes*, Honoré Champion, à paraître.

ils les jugent génératrices de paralogismes et impropres à l'exactitude mathématique, de ce fait ils ne s'autorisent que la manière des Anciens. Or, parmi les enseignants¹, la question de la place à accorder aux méthodes par indivisibles dans l'enseignement se pose. Certains professeurs, tels les jésuites André Tacquet (1612–1660) et Antoine Lalouvière (1620–1660) jugent les méthodes par indivisibles inexactes et de ce fait s'abstiennent de les présenter car en user reviendrait à discréditer la discipline. Mais, les positions des deux jésuites sont différentes. Dans son ouvrage *Cylindricorum et annularium libri* (1651 et 1659), Tacquet reconnaît l'utilisation des indivisibles à des fins heuristiques peut être bénéfique, mais il exhibe plusieurs exemples de paradoxes l'amenant à conseiller le scepticisme vis-à-vis de ces méthodes. Chaque preuve par indivisibles est suivie d'une démonstration à l'ancienne. Dans son principal ouvrage *Veterum geometria promota*, livre VI (1660), Antoine de Lalouvière se montre complètement hostile aux indivisibles et ne recommande que les démonstrations à l'ancienne².

Bien qu'aucun ouvrage d'enseignement ne soit destiné exclusivement à la présentation d'une méthode par indivisibles, certains auteurs peuvent en revanche s'y référer en leur accordant quelques paragraphes. Ce choix de l'auteur peut être analysé et mis en relation avec ses idées sur l'enseignement. La preuve directe par indivisibles est promue par de nombreux géomètres, tels Nardi, parce qu'elle procure l'évidence et que cette qualité doit primer sur la certitude. L'argument d'évidence apparaît dans le contexte de l'enseignement indépendamment d'une éventuelle présentation des indivisibles³. En effet, comme nous le verrons, ce recours à l'argument d'évidence est souvent la conséquence d'une critique de la manière dont sont exposés les *Eléments* euclidiens, souvent jugés convaincants mais non éclairants pour l'élève. Dans les « Réponses aux secondes objections », Descartes écrit que « dans la façon d'écrire des géomètres, je distingue deux choses, à savoir l'ordre et la manière de démontrer »⁴.

¹ Aude Le Dividich remarque que la communauté des savants et celle des enseignants sont de moins en moins dissociables à cette époque, dans « L'enseignement des mathématiques en France au XVII^e siècle (1600–1670) », *La science à l'époque moderne*, Presses de l'Université Paris-Sorbonne, bulletin 21, Paris, 1996, p. 35.

² On pourra consulter : Dominique Descotes, « Two jesuits against the indivisibles » dans *Seventeenth-century indivisibles revisited*, *op. cit.*, p. 249–274.

³ On peut consulter Evelyne Barbin, « Démontrer, convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle » les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences, *op. cit.*, p. 29–38. Une partie de l'article est consacrée à Arnauld et Nicole.

⁴ « Réponses aux deuxièmes objections », *Œuvres de Descartes*, tome IX, *op. cit.*, p. 121.

L'ordre cartésien implique d'aller des choses simples aux composées. Si l'ordre est bien une exigence fondamentale de la démonstration, il se manifeste différemment selon les deux manières de démontrer distinguées par Descartes. Celles-ci sont l'analyse (ou résolution) et la synthèse (ou composition¹). Descartes loue l'analyse car « si le lecteur la veut suivre et jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins ainsi la chose démontrée, et ne la rendra pas moins sienne que si lui-même l'avait démontrée ». L'analyse demande de « l'attention » et n'est pas propre à « convaincre les lecteurs opiniâtres ou peu attentifs ». Tandis que la synthèse, en examinant « les causes par les effets » démontre clairement et comble ces lecteurs à qui elle « arrache le consentement ». Mais elle ne satisfait pas ceux qui veulent connaître la voie d'invention. D'après Descartes, la raison pour laquelle les anciens géomètres préféraient la synthèse est qu'ils voulaient cacher leur voie de découverte. Nous avons vu² que Descartes élabore *La Géométrie* dans le but de fournir une méthode analytique pour résoudre des problèmes et non pas pour exposer synthétiquement des résultats géométriques connus.

Le janséniste Antoine Arnauld (1612-1694) est attentif aux remarques et critiques que Descartes adresse à la synthèse. Ami de Pascal qu'il a connu à Port-Royal³, il partage avec lui des préoccupations pédagogiques : la manière de présenter les mathématiques fait souvent l'objet de leur discussion, ils s'accordent en particulier à dire que l'ordre d'exposition des *Éléments* d'Euclide est insatisfaisant. Vers 1655, Pascal lance un défi à son ami : réécrire entièrement *les Eléments* en suivant un ordre nouveau. La rédaction de ce qui deviendra les *Nouveaux Éléments de Géométrie*⁴ débute à ce moment-là mais ils ne sont publiés qu'en 1667⁵.

Comme nous le verrons, Arnauld introduit l'idée de la « naturalité » de l'ordre d'exposition dans le dessein de privilégier le caractère éclairant d'un énoncé plutôt

¹ *Ibid.*

² Chapitre 1, paragraphe « la méthode des cercles tangents de Descartes ».

³ Pascal devient janséniste très tôt dans sa vie. Arnauld défend le jansénisme en France et sera destitué de son poste à la Sorbonne pour cette raison.

⁴ Arnauld, Antoine, *Nouveaux éléments de géométrie ; contenant Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles démonstrations des propositions les plus communes, De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, De nouvelles mesures de l'angle, dont on ne s'estoit point encore avisé, Et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des Lignes*, Paris, chez Charles Savreux, Librairie Juré, 1667. Pour une présentation des *Nouveaux Eléments*, on pourra consulter : *Géométries de Port-Royal*, Edition critique par Dominique Descotes, Honoré Champion Editions, Paris, 2009, p. 20-42.

⁵ D'autres éditions suivront en 1683 et 1693.

que le caractère certain. Quelle forme cet ordre prend-t-il dans l'exposition synthétique qu'Arnauld élabore dans ses *Nouveaux Éléments* ?

Pour l'expliquer il nous faut examiner comment il réinvestit les préceptes cartésiens. Avec Pierre Nicole, il a écrit un traité intitulé *La logique ou l'Art de penser*¹. Dans le chapitre II de la quatrième partie² Arnauld et Nicole reprennent l'idée selon laquelle pour connaître et aboutir à une science véritable il faut suivre une méthode dont ils décrivent les principes. Une méthode concerne tout « ce qui regarde la démonstration », celle-ci

ne consiste pas d'ordinaire en un seul argument, mais dans une suite de plusieurs raisonnements, par lesquels on trouve invinciblement quelque vérité ; et même il sert peu pour bien démontrer, de savoir des règles des syllogismes, ce à quoi l'on manque très peu souvent ; mais que le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché³.

Dans ce passage, ils affirment que pour bien démontrer il est davantage requis la capacité à bien arranger les pensées que la maîtrise de l'art du syllogisme. Cet arrangement ou ordre doit toujours débiter par ce qu'ils nomment « l'intelligence » c'est-à-dire la connaissance par l'évidence, afin de partir de choses simples pour avancer vers des choses composées. Ils rappellent qu'une méthode est l'art de « bien disposer une suite de pensées, soit pour découvrir la vérité quand nous l'ignorons, soit pour la prouver aux autres, quand nous la connaissons déjà ». Ainsi, deux sortes de méthodes sont d'usage : l'une pour « découvrir la vérité » qu'ils appellent « analyse ou méthode d'invention », et l'autre « pour faire entendre aux autres » la vérité trouvée, qu'ils nomment « méthode de doctrine »⁴ et dont se servent les géomètres pour exposer leurs découvertes. Ils reprochent à cette dernière d'être susceptible de pâtir de quelques défauts dont le premier est d'« avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plutôt que de l'éclairer »⁵. Pour atteindre la vérité, des arguments convaincants ne suffisent pas à l'esprit qui « cherche encore

¹ Arnauld, Antoine et Nicole, Pierre, *La logique ou l'art de penser*, notes et postface de Charles Jourdain, Editions Gallimard, Paris, 1992, p. 272.

² Arnauld et Nicole indiquent en note de bas de page que ce qui est dit dans ce chapitre est une reprise d'un manuscrit que M. Clerselier leur a prêté. Il s'agit des *Regulae* cartésiennes, *ibid*, p. 282.

³ *Ibid*, p. 272.

⁴ *Ibid*, p. 281-282.

⁵ *Ibid*, p. 307.

une connaissance que celle qu'il a ». Pour être satisfait l'esprit nécessite connaître la vérité « par des raisons de la nature de la chose même ». Conséquents de ce dernier défaut, d'autres s'ajoutent, par exemple celui de « prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves » mais le « plus grand des défauts » est celui de « n'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature ». « L'ordre de la nature » n'est pas celui du syllogisme mais c'est celui qui part des choses « les plus simples et les plus générales pour passer ensuite aux plus composées et plus particulières ». Le non-respect de cet ordre conduit à des renversements qui « défigurent » la géométrie. Les *Éléments d'Euclide* sont exemplaires de ce défaut car

après avoir traité de l'étendue dans les quatre premiers livres, il traite généralement des proportions de toutes sortes de grandeurs dans le cinquième. Il reprend l'étendue dans le sixième, et traite des nombres dans le septième, huitième et neuvième, pour recommencer au dixième à parler de l'étendue. Voilà pour le désordre général¹.

Pour exposer des éléments de géométrie, la manière euclidienne ne convient donc pas car elle ne suit pas un « vrai ordre de la nature ». Cette critique est à l'origine de l'écriture des *Nouveaux Eléments* qui s'élaborent dans le souci constant de présenter les propositions sous un angle dans lequel le caractère éclairant ait l'ascendant sur leur certitude². Autrement dit, *Les Nouveaux Eléments* sont le résultat d'une réflexion sur ce que doit être une méthode de doctrine qui permette une exposition de la vérité suivant un ordre naturel. Il faut préciser que ce traité est destiné à l'enseignement et qu'Arnauld considère que l'ordre naturel est celui qui est le plus à même pour exposer dans le but d'enseigner.

L'ordre suivi dans le traité³ commence par la ligne droite et la circulaire, les droites perpendiculaires, et les lignes terminées par une circonférence, il passe ensuite aux angles car « c'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles, qui sont plus composés que les lignes, tenant quelque chose des surfaces.⁴ » puis aux

¹ *Ibid*, p. 310.

² Sur une étude de cette approche s'appuyant sur des exemples géométriques, on pourra consulter : Barbin, Evelyne, *La Révolution mathématique, op. cit.*, p. 286-298 et l'article cité « Démontrer, convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle ».

³ *Géométries de Port-Royal*, édition critique par Dominique Descotes, Paris, Honoré Champion Editions, 2009, p. 109.

⁴ *Ibid*, p. 453.

« lignes proportionnelles » et aux « lignes réciproques ». Ce n'est qu'à la fin qu'il aborde les surfaces « considérées selon leur angle et leurs côtés », puis selon leur aire.

Le livre XV¹ s'occupe de la « mesure de l'aire des parallélogrammes, des triangles et autres polygones ». Un long paragraphe concernant la méthode des indivisibles y est consacré. Alors que le souci principal d'Arnauld est de privilégier l'ordre naturel, quel rôle joue l'introduction de la méthode des indivisibles pour la cohérence du propos de son ouvrage ?

Au début de ce livre, Arnauld rappelle² que pour mesurer un parallélogramme, il faut choisir un des côtés (la longueur) qui donne la première dimension. Le deuxième côté ne permet pas de mesurer la largeur car « étant oblique il ne mesurerait pas la distance entre les côtés opposés qui avaient été pris pour la longueur »³. Ainsi, il faut prendre la perpendiculaire entre le premier côté et son opposé, c'est-à-dire la hauteur. Le fait que ces deux dimensions « mesurent » le parallélogramme suffit à Arnauld pour justifier l'égalité d'un parallélogramme et d'un rectangle ayant une même base et placés entre deux parallèles :

Or de là il s'ensuit que le rectangle de base et de cette perpendiculaire appelée la hauteur du parallélogramme est égal à ce parallélogramme, puisque n'ayant tous deux que deux dimensions, longueur et largeur, la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale, et que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une perpendiculaire égale dans l'un et dans l'autre⁴.

On peut remarquer la différence de cette démonstration avec celle d'Euclide⁵. L'idée de celle-ci est de décomposer chacun des parallélogrammes en morceaux superposables mais elle ne suit pas un ordre allant de plus simple au plus composé, comme le fait Arnauld. Selon lui, l'argument d'évidence qu'il avance devrait satisfaire ceux qui « cherchent plutôt à s'assurer de la vérité, qu'à en pouvoir convaincre les autres » mais il ajoute :

¹ *Ibid*, p. 305.

² Livre XIV : « Idée générale de la mesure des surfaces », *ibid*, p. 282.

³ Livre XIV, 1 : « C'est pourquoi nulle surface ne se mesure proprement par soi-même, que le rectangle », *Ibid*, p. 284.

⁴ *Ibid*, p. 306.

⁵ Euclide, *Les Eléments*, *op. cit.*, Livre I, proposition 35, p. 262.

Néanmoins pour plus grande certitude, on peut employer deux voies pour prouver cette proposition : l'une nouvelle appelée la *Géométrie des indivisibles*; et l'autre ancienne et plus commune. Nous expliquerons l'une et l'autre¹.

Arnauld fournit une présentation de la méthode des indivisibles intitulée « Nouvelle méthode appelée la Géométrie des indivisibles »². Il la fait suivre de cinq applications, la première étant celle de l'égalité de deux parallélogrammes placés entre deux parallèles puis trois théorèmes concernant parallélogrammes et triangles placés entre deux parallèles, la dernière est un théorème sur le cercle. Nous pouvons remarquer que dans la première des démonstrations il place la méthode des indivisibles aux côtés de la voie des Anciens. Sa présentation débute par l'explication de son principe :

Quoique les géomètres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ni la surface de lignes, ni le solide de surfaces, néanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démontrer une infinité de choses, en considérant les surfaces comme si elles étaient composées de lignes, et les solides de surfaces. (...).

Le fondement de cette nouvelle Géométrie est de prendre pour l'aire d'une surface la somme des lignes qui la remplissent [...]³

Il est important de signaler qu'Arnauld et Nicole s'opposent à l'idée de composition du continu par des indivisibles : « il n'y rien de plus clair que cette raison, que deux néants d'étendue ne peuvent former une étendue (...) »⁴. Si la question de la composition du continu fait partie des choses inconcevables⁵, il affirme l'existence de l'infinie divisibilité de l'étendue car « la géométrie nous en fournit des preuves aussi claires que d'aucune des vérités qu'elle nous découvre ». Or Arnauld présente la méthode des indivisibles en expliquant que bien qu'elle soit fondée sur une fausse hypothèse – la composition du continu par des indivisibles – elle permet aux

¹ Arnauld, Antoine, *Nouveaux Eléments*, *op. cit.*, p. 306.

² *Ibid*, p. 306-313.

³ *Ibid*, p. 306.

⁴ *La logique ou l'art de penser*, *op. cit.*, p. 279.

⁵ Une chose peut être inconcevable mais claire. L'infinie divisibilité est une idée claire mais il n'est pas possible de comprendre « comment cela peut se faire ». Arnauld et Nicole préconisent la considération d'idées inconcevables car « il est avantageux de faire sentir quelquefois à son esprit sa propre faiblesse, par la considération de ces objets qui le surpassent », *op. cit.*, p. 281.

géomètres de «démontrer une infinité de choses». Le principe de la méthode est ainsi énoncé :

deux surfaces sont estimées égales quand l'une et l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales ; soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celles de l'autre somme ; soit qu'il se fasse une compensation ; en sorte par exemple, que deux d'une somme qui pourront être inégales entre elles, soient égales à deux prises ensemble de l'autre somme qui seront égales entre elles.

Pour éviter des paralogismes, il conseille de suivre deux règles. Pour que des lignes « soient censées remplir l'espace », il ne faut considérer que des lignes parallèles entre elles, qu'elles soient droites ou circulaires. Puis, pour s'assurer de l'égalité du nombre de lignes alors que par leur nombre infini elles ne sauraient être dénombrées, il indique que ce qui fait qu'une somme de lignes est censée être égale à une autre somme «c'est que toutes les lignes d'un côté et d'autre [c'est-à-dire chacune des lignes des figures] coupent perpendiculairement deux lignes égales ». Il détaille cette affirmation : deux lignes b et m sont égales lorsque le nombre de perpendiculaires qui peuvent couper l'une coupent aussi l'autre, car écrit-il :

(...) étant visible qu'il n'y a point de raison pourquoi on en puisse faire passer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une et l'autre étant toujours égales jusques à l'infini, on pourra toujours de part et d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes parallèles entre elles, et qui contiendront toujours de part et d'autre un espace parallèle égal¹.

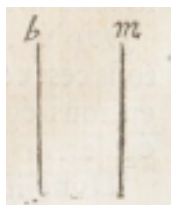


fig. 38

Par cette dernière précision Arnauld indique que la condition de parallélisme engendre un espacement égal entre les indivisibles et c'est ce qui fait que l'on puisse considérer deux sommes égales². Il souligne l'importance de l'application stricte de

¹ *Ibid*, p. 738-739.

² Cette condition est une reformulation dans un cas particulier de la condition pascalienne qui veut que les « droites des divisions desquelles elles naissent sont égales ».

cette règle dont dépend le bien-fondé de la méthode en ajoutant qu'en aucun cas elle dépend d'une éventuelle conception de la composition du continu :

Et c'est à proprement de là que dépend la vérité de cette nouvelle méthode (et non que le continu soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait même appeler par quelques-uns, la géométrie de l'infini¹.

Ainsi, les appellations « méthode des indivisibles » ou « géométrie de l'infini » sont impropres car elles indiquent un faux fondement de cette méthode. Ce qui lui importe ici est de souligner l'importance de la règle d'application et d'avertir que l'usage de cette méthode n'implique aucune considération sur la composition du continu².

Arnauld applique enfin la méthode en fournissant la nouvelle preuve du théorème affirmant l'égalité des parallélogrammes placés entre deux parallèles. Cette preuve est intéressante car il prend le soin de vérifier que la condition d'espacement des indivisibles est vérifiée : il y a bien deux sommes égales de lignes puisque les parallélogrammes étant entre deux parallèles, ils ont une hauteur commune qui « mesure » chacune des sommes. Par ailleurs, chacune des lignes étant parallèle à la base, les lignes sont égales entre elles. Il est intéressant de remarquer que l'argument essentiel dans cette preuve par indivisibles, comme dans la preuve arnaldienne, provient de l'existence de cette hauteur commune qui dans un cas mesure la somme de lignes et dans l'autre mesure la distance entre les deux côtés d'un parallélogramme. Arnauld présente donc les deux preuves en partant de la même idée simple. La dernière application, à l'aide d'indivisibles circulaires, porte sur le théorème énonçant l'égalité entre l'aire du cercle et le triangle rectangle ayant pour cathètes le rayon et la circonférence³. Ce théorème n'a pas été prouvé auparavant à la manière arnaldienne comme les autres – sur les parallélogrammes et les triangles – l'ont été. Cela est effectué un peu plus loin ; il montre d'abord que l'aire d'un polygone régulier est égale au « rectangle du rayon droit (qui est la perpendiculaire du centre à

¹ *Ibid*, p. 739. Nous pouvons remarquer que ces avertissements sont finalement trop prudents puisque la condition de parallélisme et celle de perpendicularité sont peut-être suffisantes mais pas toujours nécessaires dans le traitement par les indivisibles.

² Pascal obtient la rectification de la cycloïde en se ramenant au calcul d'une somme de lignes partant d'un même point, « Lettre à Huygens de Zulichem », *Lettres de A. Dettonville, op. cit.*

³ *Ibid*, p. 310-311.

l'un de ses côtés) et de la moitié de son périmètre »¹ et en déduit par « analogie du cercle à un polygone infini »² le résultat pour le cercle. Dans le discours arnaldien, l'argument d' « analogie » a une valeur d'évidence puisqu'il est placé selon un ordre naturel à la suite de la proposition concernant les polygones. En rappelant que cette proposition a déjà été prouvée par la « première méthode, qui est la Géométrie des indivisibles », il indique qu'on peut également la prouver par « la voie d'Archimède ». Il décrit les principales étapes de ce que devrait être cette preuve et en finissant par un « Donc etc » : laisse-t-il le lecteur désireux de terminer la rédaction ?

Il est intéressant de comparer la présentation de ce théorème avec celles d'autres traités de géométrie contemporains d'Arnauld. En 1671, le jésuite Pardiès (1636-1674) écrit des *Éléments de géométrie*³ dans lesquels il choisit de fournir une preuve du théorème à la manière des Anciens. Pour ce faire, il montre d'abord la possibilité d'encadrer le cercle par des polygones de plus en plus serrés puis se sert de la possibilité de construction de ces derniers pour montrer, par un raisonnement par double réduction par l'absurde, le résultat souhaité. À la fin de cette démonstration, il commente :

Cette sorte de démonstration que nous venons d'employer, et qu'on appelle de l'impossible, est une des plus belles inventions de l'antiquité ; et toute la Géométrie des indivisibles est fondée là-dessus : de sorte qu'il y a sujet de s'étonner que quelques nouveaux Auteurs l'ayent rejetée comme défectueuse & indirecte. Que si l'on en vient à ce point de délicatesse, que de ne pouvoir souffrir une démonstration, si elle ne prouve directement & positivement ; il sera fort aisé de donner à celle-cy un tour qui la rende régulière & directe : car on n'a qu'à poser pour principe, que si deux quantitez déterminées a et b sont telles, que tout autre quantité imaginable, qui serait plus grande ou plus petite que b , serait aussi plus grande ou plus petite que a , ces deux quantitez a et b sont égales. Et ce principe posé, qui est en effet très manifeste de soy-même, on prouvera directement que ce triangle est égal au cercle, puisque toute figure imaginable (inscrite) plus petite que le cercle, est aussi plus petite que le triangle ; & que toute figure (circonscrite) plus grande que le cercle, est aussi plus grande que le triangle⁴.

¹ *Ibid*, p. 310.

² Nous n'avons pas trouvé l'appellation « polygone infini » précédemment dans le texte.

³ Pardiès, Ignace Gaston, *Éléments de géométrie ou par une méthode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimède, d'Appolonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux Géomètres*, Chez Sébastien Marbre-Cramoisy, Paris, 1671.

⁴ *Ibid*, livre IV, p. 35.

Ce commentaire est très intéressant car Pardiès affirme que la méthode des indivisibles est fondée sur la géométrie des Anciens, ce qui veut dire que son bien-fondé tient à ce qu'elle peut être légitimée par des démonstrations à l'ancienne. Il est étonné que des géomètres – l'allusion à Arnauld est patente – jugent celle-ci « défectueuse » ou « indirecte ». Selon lui il est très simple de fournir une démonstration directe à partir d'une démonstration à l'ancienne : il donne le principe de cette traduction. Cependant, il n'est pas d'avis que la manière des Anciens puisse être exclusive. Dans la préface de son traité, il blâme les défauts de l'exposition euclidienne¹ :

(...) c'est que dans l'exactitude rigoureuse qu'ils [Euclide et les auteurs ordinaires] ont de ne laisser passer sans démonstration rien de qui se peut démontrer, pour facile qu'il paroisse d'ailleurs, il arrive souvent que ce qui eust été clair, si on se sust contenté de le proposer à l'esprit, tel qu'il proist naturellement, devient difficile & embarrassé lorsqu'on veut le réduire à une démonstration régulière.

Il est remarquable que ses critiques soient proches de celles que peut formuler Arnauld et Nicole dans *La logique ou l'art de penser*. La position que Pardiès préconise pour exposer la géométrie se trouve éclaircie par le passage suivant :

Quelqu'un sans doute trouvera mauvais que j'aye laissé la méthode ordinaire de ranger les définitions, les principes & les propositions ; & il croira peut-estre que je fais tort à la Géométrie de luy oster ce qui l'a toujours fait passer pour la Science la plus exacte. Un autre me reprochera que j'ay gardé quelques vieilles façons de démonstrer, après que les modernes par cette politesse si propre au temps où nous sommes, ont donné des démonstrations bien *plus naturelles*, & ont fait voir la différence qu'il y entre *éclairer l'esprit*, & *le convaincre*. On me dira encore que je me suis négligé en beaucoup de choses ; que j'ay avancé plusieurs propositions sans les démonstrer ; que je cite souvent des endroits qui ne prouvent pas directement ce qui est en question (...)

À tout cela je réponds en un mot, que dans le dessein que j'avois d'enseigner la Geometrie avec toute la facilité possible, la voye que j'ay suivie m'a semblé la plus propre : ce qui ne mempeschera pas neantmoins de profiter des avis que les personnes intelligentes auront la bonté de me donner.

¹ Préface.

Avec ce propos, il explique que ce qui compte est de trouver une voie moyenne, la plus propre à faciliter l'enseignement, en conservant ce qu'il peut être utile de la manière d'exposer euclidienne tout respectant l'ordre naturel. Il convient de souligner qu'il ne choisit aucune preuve à l'aide d'indivisibles dans son ouvrage, contrairement à Arnauld qui leur octroie une place.

Quel rôle peut donc tenir l'introduction de cette méthode dans le traité arnaldien ? Arnauld n'a pas formulé de préférence pour les preuves par indivisibles par rapport aux démonstrations à l'ancienne alors que selon certains géomètres – tel son ami Pascal – leur caractère direct est l'argument privilégié pour les considérer comme des preuves par évidence, préférables à la manière des Anciens. Arnauld avoue n'avoir « rien vu de ce en a été écrit », ce qui est peut-être vrai au moment où il écrit la première édition¹. Cependant, aucun changement n'est apporté à sa présentation dans l'édition suivante². Il est important de rappeler qu'en écrivant les *Nouveaux Eléments* le dessein principal d'Arnauld n'est pas de fournir des résultats nouveaux mais d'exposer dans un ordre naturel les principaux éléments connus de géométrie. Son intention n'est donc pas particulièrement d'expérimenter les avantages heuristiques promis par l'utilisation de la méthode par indivisibles. Il est donc cohérent que ses exemples d'application soient finalement assez élémentaires. En revanche, nous avons rappelé que le processus inventif de l'application de la méthode des indivisibles peut valoir comme preuve. Chacune des figures est disséquée en éléments simples – les indivisibles – comparés un à un pour restituer ensuite chacune des figures par sommation. En ce sens, le processus suit un ordre qui va du simple au

¹ Descotes montre qu'il est très probable que Pascal ait entretenu Arnauld sur la méthode des indivisibles. Des passages des *Nouveaux Eléments* montrent que bien qu'Arnauld connaisse le *Triangle arithmétique* et *Potestatum numericarum summa*, il ne retient que des démonstrations élémentaires, dans « Port-Royal et les indivisibles », *Le rayonnement de Port-Royal, mélanges en l'honneur de Philippe Sellier*, textes réunis par Dominique Descotes, Antony McKenna et Laurent Thirouin, Honoré Champion, Paris, 2001, p. 186-199. Pascal lui offre un exemplaire de ses *Lettres de A. Dettonville*. Cet exemplaire se trouve à la bibliothèque de la Faculté de Médecine de Montpellier. Nous l'avons consulté : les *marginalia* (certains sont de la main d'Arnauld) témoignent tout juste d'explicitations élémentaires.

² La deuxième édition est de 1683. Arnauld a vraisemblablement une connaissance assez élémentaire de la méthode par indivisibles et il nourrit peut-être même un sentiment de scepticisme à son égard. Descotes explique qu'il avait consulté l'avis de Pascal à propos d'un ouvrage de l'anglais Thomas White : *Exercitatio geometrica de Geometria Indivisibilium, et proportione spiralis ad circulum*. L'auteur de l'ouvrage se montre très critique envers l'utilisation des indivisibles et exhibe plusieurs paradoxes. Pascal montre qu'ils sont mal posés, « Port-Royal et les indivisibles », *op. cit.*, p. 193-196.

composé¹. Mais, est-il sûr qu'Arnauld estime que cet ordre est naturel ? Autrement dit dans quelle mesure les « indivisibles » sur lesquels s'appuie la preuve sont-ils des choses « simples » ? Arnauld ne le définit pas. Est-il une ligne sans épaisseur ? Ou une portion dont la largeur est une partie aliquote de la perpendiculaire qui mesure les sommes ? Arnauld et Nicole jugent indispensable pour suivre une méthode de composition – « qui est la plus importante, en ce que c'est celle dont on se sert pour expliquer toutes les sciences » – de suivre la règle consistant à « ne laisser aucune ambiguïté dans les termes » et de « ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans les définir »². La méthode des indivisibles ne respecte-t-elle donc pas tous les réquisits nécessaires pour suivre la méthode de composition ?

Arnauld ne donne pas explicitement de préférence entre la manière des Anciens et la méthode des indivisibles pour prouver des propositions, même s'il insiste sur les défauts de la première. Ni l'une, ni l'autre ne parviennent à exaucer le vœu qui nourrit l'élaboration des *Nouveaux Éléments* : respecter l'ordre naturel et en particulier bannir absolument les démonstrations par l'absurde. Il est possible, ce qui est courant à l'époque, qu'il ait souhaité placer dans le corps de son ouvrage une nouveauté³ si louée par son ami Pascal, sans que cela conduise à une incohérence par rapport à la volonté de respecter l'« ordre naturel » des propositions. Il informe ainsi ses lecteurs d'une autre possibilité de preuve.

¹ Dans son article « Démontrer, convaincre ou éclairer ... », *op. cit.*, p. 10, après avoir rappelé les défauts de la méthode de doctrine énoncés par Arnauld, Evelyne Barbin affirme « Nous ne sommes pas étonnés de trouver dans *les Nouveaux Éléments* d'Arnauld de 1667, un chapitre consacré à la géométrie des indivisibles. » S'il est certain qu'Arnauld n'est pas fermé aux nouveautés, il est clair que dans son discours la méthode d'invention est uniquement une manière de découvrir et qu'elle ne substitue pas la méthode de doctrine qu'il tente d'améliorer par la rédaction de son traité.

² Quatrième partie, chapitre III, « De la méthode de composition, et particulièrement de celle qu'observent les géomètres » dans *La logique ou l'art de penser*, *op. cit.*, p. 288-289.

³ Dans son article « L'enseignement des mathématiques en France au XVII^e siècle (1600-1670) », Aude le Dividich indique qu'à cette époque « Il y a donc cette façon de procéder par empilement successif, par juxtaposition, qui est tout à fait caractéristique dans l'enseignement des mathématiques », *op. cit.*, p. 42.

4) *L'Arithmétique de l'infini* de Wallis : une voie pour inventer ou pour démontrer ? Objections de Fermat

L'Arithmétique de l'infini

De l'autre côté de la Manche, John Wallis (1616-1703) est certainement celui qui développe avec le plus de détermination l'idée selon laquelle la recherche des quadratures d'aires ou de volumes peut s'effectuer à l'aide de calculs arithmétiques.

Wallis nomme la méthode des indivisibles par « méthode de Cavalieri », même s'il la découvre cette locution par le biais des ouvrages de Torricelli¹. Les indivisibles sont à l'œuvre pour la première fois dans son traité *De Sectionibus conicis Tractatus*². Il va en user pour déterminer des quadratures et des cubatures de cylindres, cônes et sections coniques. La première proposition est destinée à préciser ce qu'il considère être le principe de la méthode des indivisibles. Selon lui, une figure peut être vue comme constituée d'un nombre infini [*ininitis*] de lignes parallèles ou, préfère-t-il écrire – une infinité de parallélogrammes de même altitude, égale à " $\frac{1}{\infty}$ ", expression dans laquelle « ∞ » dénote « le nombre infini ». Ainsi désignée, la hauteur est une partie aliquote « infiniment petite [*infinita parva*] »³ et « toutes les hauteurs » ensemble font la hauteur de la figure. Wallis introduit ici le vocable « infiniment petit » et n'écrit pas « indivisible ». En outre, il ne distingue pas « infiniment petite » de « nulle » car dit-il c'est comme si elle n'avait pas de « quantité » : « *nam hoc est nulla, quantitas infinite parva perinde est atq, non quanta* ».

Cependant, dans cette situation, ces « infiniment petits » interviennent avec le même rôle par rapport à la composition de la figure que celui des « indivisibles » chez Roberval ou Pascal.

¹ Il connaîtra l'ouvrage de Cavalieri bien plus tard, voir Wallis, John, *The Arithmetic of infinitesimals*, translated from latin to english with an introduction by Jacqueline A. Stedall, Springer, New York, 2004, introduction p. 2.

² *De Sectionibus Conicis, nova methodo Expositis, tractatus*, oxonii, Typis Leon Lichfield, Academiae. Typographi, Impensis Tho. Robinson, anno 1655, Pars Prima « De Figuris planis juxta Indivisibilium methodus considerandis », proposition 1.

³ « Suppono in limile (justâ Bonaventurae Cavallerii Geometria Indivisibilium) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari : Vel potiùs (quod ego mallet) ex infinitis Parallelogrammis aequè altis ; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva ; (esto enim ∞ nota numeri infinitis) adeoq ; omnium simul altitudo aequalis altitudini figurae. », *ibid*, p. 4. Traduction par nos soins.

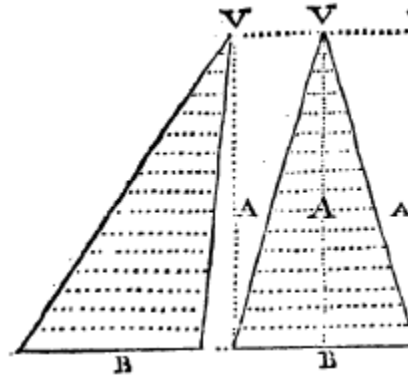


fig. 39

Dans la proposition 3, Wallis considère un triangle de base A et de base B. Il suppose que le triangle est composé d'une infinité de lignes ou de parallélogrammes parallèles à la base du triangle, les aires de ces derniers suivent une progression arithmétique, en commençant par zéro jusqu'au dernier terme qui est la base du triangle. Puis, il rappelle la formule donnant la somme finie d'une suite arithmétique [*arithmeticos regula*] et l'applique, alors qu'il s'agit ici d'une somme infinie. Si l'on suppose, écrit-il, qu'il y a un nombre ∞ de termes, le dernier terme est l'aire du dernier parallélogramme qui vaut $\frac{A}{\infty} B$ et le premier est nul donc la somme de tous ces termes qui est l'aire du triangle est : $\frac{\frac{A}{\infty} B + 0}{2} \infty$, c'est-à-dire $\frac{AB}{2}$.

Cette quadrature est un exemple élémentaire de la démarche de Wallis : plutôt que de sommer géométriquement des indivisibles géométriques comme le fait Torricelli, les sommations peuvent, dans la mesure du possible, être arithmétiques. De façon analogue à ce calcul d'aire du triangle par le biais de la sommation des termes d'une suite à progression arithmétique, l'aire d'un rectangle correspond à la somme d'une suite à termes constants, l'aire de la parabole à la somme de la suite de carrés d'entiers.

Dès lors, le souci principal de Wallis est de rechercher de la valeur des sommes des termes de ces suites puis d'utiliser ces résultats pour fournir la solution à un certain nombre de problèmes géométriques, le plus important étant celui de la quadrature du cercle. L'utilisation des indivisibles apparaît alors comme le pont entre les quadratures ou cubatures et les calculs arithmétiques. Cette idée est développée et

approfondie dans son ouvrage *Arithmetica infinitorum*¹. La première partie de l'*Arithmetica infinitorum* est consacrée à l'étude des séries des puissances de nombre entiers. Il affirme, d'une façon similaire à celle de Roberval et de Pascal, que : $\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^p}{(n+1)n^p}$ peut être pris pour $\frac{1}{p+1}$ pour p égal à 1, 2 et 3². Pour obtenir le rapport de la somme des carrés au nombre de termes multiplié par le carré du plus grand, il déclare qu'il procède de façon inductive [*per modum inductionis*]. Il examine la somme de deux, trois et jusqu'à six termes (en commençant par 0) et remarque que, en notations modernes : $\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^2}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$. L'excès à un tiers est toujours égal au rapport de 1 au produit de six par la racine carrée du dernier terme, c'est-à-dire n . Or, il est patent [*patet*] que ce terme diminue au fur et à mesure que le nombre de termes augmente devenant moindre qu'aucun assignable, et s'évanouissant [*evaniturus*] à l'infini. Le même type de preuve est proposé pour la somme des cubes. Chacune de ces propositions est suivie d'applications géométriques qui sont guidées par le même type de raisonnement par indivisibles que celui de l'exemple du triangle vu plus haut. De la formule de la somme des carrés, il énonce entre autres, que le rapport du volume du cône ou de la pyramide est au cylindre ou au prisme (de même hauteur et de même base) comme³ 1 est à 3. La plupart de ces résultats sont connus, certains par les Anciens. À ce stade, Wallis se borne à confirmer que sa méthode obtient les mêmes résultats que ceux obtenus par les Anciens, ce qui n'est pas rien puisque par-là elle gagne une certaine légitimité. Il précise qu'il ne joindra pas de démonstrations à l'ancienne, mais il invite quiconque auquel il semblera nécessaire de les chercher, à loisir, par inscription ou circonscription des figures, ou par d'autres présentations comme celles d'Archimède dans son ouvrage dédié aux spirales⁴.

Dans le but d'obtenir d'autres résultats géométriques, il est utile à Wallis de généraliser la formule pour les sommes des autres puissances. Il affirme que le même raisonnement basé sur la méthode inductive est reproductible. Certes, les termes qui

¹ Wallis, John, *Arithmetica infinitorum sive nov methodus inquirendi in curvilinearum Quadraturam, aliaq diffiliora Mathesos Problemata*, Oxonii, Typis Leon ; Lichfield, Academiae Typographi, Impensis Tho. Robinson, Anno 1655.

² Propositions 2, 19-21, 39-41.

³ Beaucoup de résultats concernent les spirales et bien sûr la quadrature de la parabole simple et cubique.

⁴ *Ibid*, p. 34. L'ouvrage d'Archimède auquel Wallis fait référence est *De lineis Spirabilis*.

excèdent $\frac{1}{p+1}$ sont plus de plus en plus emmêlés, note-t-il, mais ils décroissent continûment jusqu'à devenir inférieur à tout assignable. Il conclue, en notations modernes, que : $\frac{\sum_{k=0}^{k=\infty} k^p}{(n+1)n^p} = \frac{1}{p+1}$.

Ensuite, expliquant succinctement sur un exemple et par un raisonnement basé sur l'interpolation entre deux entiers mais qu'il¹, il généralise les formules qu'il a obtenues pour p entier à tout rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ ². Ainsi, en notations modernes,

la nouvelle formule est : $\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^{\frac{p}{q}}}{(n+1)n^{\frac{p}{q}}} = \frac{q}{p+q}$. Ce résultat est important car il permet de quarrer tout paraboloïde à puissance qu'elle soit entière ou qu'elle soit fractionnaire³.

Dans ces exemples, dans le dessein de trouver une méthode générale de quadrature et cubature, Wallis s'autorise souvent à utiliser un raisonnement basé sur l'induction, ce raisonnement étant, écrit-il, utile à l'investigation. De la formule

arithmétique $\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^{\frac{p}{q}}}{(n+1)n^{\frac{p}{q}}} = \frac{q}{p+q}$, il déduit par l'application de la « méthode de Cavalieri »

nombreux résultats géométriques.

¹ Pour un développement explicatif de ce raisonnement, on peut consulter : Malet, Antoni et Panza, Marco, « Wallis on indivisibles » dans Jullien, Vincent, *Seventeenth-Century indivisibles revisited*, op. cit., p. 323-324.

² Propositions 64, *Ibid*, p. 62.

³ Pour connaître d'autres applications géométriques de toutes les formules (avec exposants entiers ou fractionnaires), on peut consulter les explications de Malet, Antoni et Panza, Marco, op. cit., p. 307-328. Wallis ne s'arrête pas ici. Il veut encore exploiter sa méthode arithmétique et donner sens à des indices négatifs. Il définit la multiplication (respectivement la division) de deux séries qui s'obtient en multipliant (respectivement en divisant), dans l'ordre, le terme de la première série avec celui de la deuxième. La série obtenue est une série de puissances sauf lorsque dans la division l'indice de la première est inférieure à la deuxième, dans ce cas les termes de la série obtenue ont un exposant négatif, Wallis appelle de telles séries, « les séries réciproques », elles correspondent à des hyperboloïdes. Il établit que le rapport entre l'aire entre l'hyperboloïde et l'aire du rectangle est de $\frac{q}{q-p}$, il distingue trois cas: ce rapport est positif si $\frac{p}{q} < 1$, « infini » si $\frac{p}{q} = 1$ et plus qu'infini si $\frac{p}{q} > 1$. (Propositions 102 à 105, p. 76-79).

	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$		
	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$		
	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$		
	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$		
	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$		
			$\frac{q}{p+q}$				

fig. 40

En anticipant des critiques qu'on pourrait lui adresser, il répète souvent dans son texte que celui qui le voudra pourra soumettre ses résultats à une démonstration à l'ancienne. Cependant, lui refuse de s'y soumettre. Dans une scholie, après la proposition 107¹, rendant compte d'un tel refus, il suppose que les Anciens devaient avoir des méthodes d'invention similaires à la sienne mais qu'ils les ont caché préférant qu'on admire leurs démonstrations. Lui, comme d'autres mathématiciens modernes – il cite Viète, Oughtred, Harriot, Cavalieri, Torricelli, Descartes – considèrent comme nécessaire cette nouvelle analyse non seulement pour découvrir du nouveau mais aussi pour « ressusciter » les résultats des Anciens par une autre voie. Il ajoute que sa manière d'exposer, en montrant sa voie d'invention, permet au lecteur d'être à même de produire d'autres découvertes.

Les critiques de Fermat

La manière de procéder dans l'*Arithmetica infinitorum* ne laisse pas indifférents certains mathématiciens². Dans une lettre du 15 août 1657³, Fermat explique à Digby

¹ Scholie, *ibid*, p. 83.

² Pour les rapports querelleux entre Wallis et des mathématiciens français, on pourra consulter : Stedall, Jacqueline, « John Wallis and the French : his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes », *Historia Mathematica*, 3, 2012, p. 265-279.

³ Lettre du 15 août 1657, *OF*, t. II, p. 342. Fermat a lu l'*Arithmetica Infinitorum*, comme il l'apprend à Digby dans la lettre du 20 avril, *ibid*, p. 337. Dès cette lettre, plusieurs critiques sont formulées notamment concernant la quadrature (arithmétique) du cercle que propose Wallis (et dont nous parlerons pas ici) :

qu'il avait déjà obtenu les quadratures des paraboles et des hyperboles « infinies ¹ » mais qu'il n'est pas persuadé de la manière de faire de Wallis :

(...) mais sa façon de démontrer, qui est fondée sur induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimède, fera quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes démonstratifs depuis le début jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve pas ; mais, toutes ses propositions pouvant être démontrées *viâ ordinaria, legitimâ et Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles que n'en contient son livre, je ne sais pourquoi il a préféré cette manière par notes algébriques à l'ancienne, qui est et plus convaincante et plus élégante, ainsi que j'espère lui faire voir à mon premier loisir².

La critique de Fermat est double : non seulement il déclare que Wallis a une façon d'exposer ces résultats qui ne convient pas aux apprenants, pour lesquels il préconise un discours par syllogismes, mais il pointe aussi son manque d'élégance : l'introduction de « notes » algébriques est jugée comme une faute de goût. En ce qui concerne le raisonnement par induction, Fermat ajoute :

(...) Car on pourrait proposer telle chose et prendre telle règle pour la trouver qu'elle serait bonne à plusieurs particuliers et néanmoins fautive en effet et non universelle. De sorte qu'il faut être circonspect pour s'en servir, quoiqu'en y apportant la diligence requise, elle puisse être fort utile, mais non pas pour prendre, pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura déduit, comme fait le sieur Wallis : car, pour cela, on ne se doit contenter de rien moins que d'une démonstration (...) ³

Il n'interdit donc pas de se servir de la méthode par induction mais il limite son utilisation à l'heuristique : une démonstration est nécessaire en complément pour valider. Dans une lettre de décembre 1657 adressée à Digby, Wallis répond à ces critiques :

S'il me rappelle à l'exemple d'Archimède, exemple qui à vrai dire, m'eût suffisamment justifié, si j'avais voulu employer la même méthode de démonstration, je ne crois pourtant pas que votre savant correspondant ignore que les hommes les plus sérieux et les plus doctes regrettent précisément, et sont bien près de considérer comme un défaut,

« Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans son dit traité, je n'en suis pas pleinement persuadé car ce qui se déduit par comparaison en Géométrie, je n'en suis pas toujours véritable ».

¹ Fermat affirme avoir dévoilé ses quadratures dans une lettre à Torricelli mais celle-ci a été perdue.

² *Ibid*, p. 343.

³ *Ibid*, p. 352.

qu'Archimède ait caché de la sorte les traces de ces procédés de recherche (...) J'aurais certes plutôt attendu des remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement non seulement où j'étais arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie ; pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve ; d'autres peuvent le faire mais on s'en plaint assez¹.

Wallis reprend ses arguments énoncés dans certains passages dans l'*Arithmetica* pour défendre son choix de méthode au détriment des preuves apagogiques qu'il juge défectueuses. Il s'agit d'une élection dictée par une « philosophie »² de pratique mathématique : il préfère faire partager sa voie d'invention plutôt que de consacrer des lignes à des démonstrations par l'absurde. Il n'interdit pas que l'on puisse recourir à ces dernières et il répète sans cesse la liberté de chacun de choisir : « j'ai même indiqué plusieurs fois (*Arithm. Inf.*, pag. 38, 83 et ailleurs) qu'il était facile de le faire ; mais j'ai dit aussi pourquoi je ne l'avais pas fait moi-même »³. L'utilisation de l'induction et des « notes algébriques » relèvent également d'un choix. Wallis le revendique :

J'ai agi dans mon droit, suivant la voie qu'il me plaisait ; il a de même le plein droit d'en suivre une autre, s'il le préfère ; mais je ne doute pas que ce qu'il blâme, d'autres le loueront⁴.

On a vu, dans notre premier chapitre, que Fermat utilise des méthodes d'invention et en fait part soit par échange épistolaire, soit par des mémoires destinés à un public restreint de savants. Dans ce cadre d'échanges, lui et ses pairs décrivent volontiers leur pratique heuristique. Mais, Fermat juge aussi nécessaire de faire suivre ses découvertes par une démonstration apagogique. Tandis que, pour Wallis, les preuves par voie d'invention prennent un nouveau statut. Non seulement elles sont fructueuses mais jouissent de légitimité pour être exposées dans un traité sans qu'il soit nécessaire de recourir à des démonstrations à l'ancienne. Il est intéressant de constater que Wallis utilise un vocabulaire emprunté au domaine du droit. Dans la République de Lettres, il fait valoir son « droit » à choisir sa pratique et à asseoir sa légitimité.

¹ *OF* t. III, p. 439-440.

² Scholie : « Verum ergo mallem philosophando ».

³ *OF*, t. III, p. 440.

⁴ *Ibid*, p. 440.

En 1685, dans le dessein d'offrir un traité complet d'algèbre en anglais, Wallis publie *Treatrise of Algebra*¹. Un chapitre est destiné à l'épisode de critiques adressées par Fermat². Il reprend plusieurs des réponses qu'il avait communiquées à Digby et les développe. Il insiste sur le fait que Fermat n'a pas compris le dessein de l'*Arithmetica infinitorum*. Il ne s'agissait pas de montrer « une méthode de démonstration pour des choses déjà connues » mais de proposer « une voie d'investigation pour trouver des choses encore inconnues »³. Ce préambule lui permet de revenir à la critique concernant la méthode d'induction dont Fermat a reconnu la seule utilité pour l'investigation. Pour lui, l'induction ne permet pas seulement de découvrir une règle générale. En sus, lorsque le résultat de l'investigation s'offre à la vue comme évident [*obvious*], une démonstration supplémentaire n'est pas nécessaire (même si elle est possible). Il précise que l'on peut agir de la sorte lorsque la considération des cas particuliers conduit à l'observation d'un processus régulier et ordonné et qu'aucun fondement d'une quelconque suspicion invalidant la généralisation⁴ du processus n'existe. Il montre par un exemple comment l'évidence joue un rôle déterminant pour conclure. Il considère successivement les suites des puissances des nombres entiers jusqu'à la puissance cinq. En observant les premiers termes, il remarque successivement que les différences de la suite des entiers sont égales à 1, les secondes différences des termes de la suite des carrés sont toutes égales à 2, les troisièmes différences des cubes sont égales à 6, les quatrièmes différences des puissances de 4 sont égales à 24 et enfin que les cinquièmes différences des puissances cinquièmes sont égales à 120. Comme :

$$1 \times 2 = 2, 2 \times 3 = 6, 6 \times 4 = 24 \text{ et } 24 \times 5 = 120,$$

¹ Wallis, John, *A Treatise of algebra, both historical and practical*, printed by John Caswell, London, 1685. Wallis prône l'utilisation de l'algèbre et considère sa supériorité par rapport à la géométrie. On peut consulter : Pycior, Helena, M., « English mathematical thinkers take sides on Early Modern algebra : Thomas Hobbes and Isaac Barrow against John Wallis in *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra Through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, p. 135.

² Chapitre LXXIX : « Of Mons. Fermat's Exceptions to it [*Arithmetica infinitorum*] », *ibid*, p. 305.

³ « which was not so much to shew a Method of Demonstrating thing already known (...) as to shew of *Investigation* or finding out of things yet unknown. », *ibid*, p. 305.

⁴ « And so it is, when we find the Result of such Inquiry, to put into a regular orderly Progression (of what nature soever) which is observable to proceed according to one and the same general Process ; and where there is no ground of suspicion why it should fail, or of any case which might happen to alter the course of the Process », *ibid*, p. 306.

il conclue que cette relation est la loi suivie par les n -ièmes différences des n -ièmes puissances. D'après lui, il n'y a aucune raison de suspecter que ce processus cesse de continuer selon cette loi et qu'il y a « dans la nature du nombre, un fondement suffisant pour cette régularité [*sequel*] »¹ Bien qu'il n'interdit pas une démonstration cas par cas, il conseille d'acquiescer « à cette évidence qui apparaît à notre vue »².

Pour obtenir les formules des sommes des puissances, des considérations du même type sont émises. Ce dernier exemple lui permet d'affirmer que la méthode d'induction constitue non seulement une voie de découverte mais aussi une voie pour démontrer :

De cette façon, ma règle générale étant acceptée (comme suffisamment démontrée) [la règle de la somme des puissances] (...): les conséquences ayant été régulièrement déduites, sont donc démontrées; en dépit des dérogations de Monsieur Fermat au procédé par induction; qui est, par d'autres géomètres aisément admis, et fréquemment utilisé³.

Pour conclure à la généralité d'une observation, Wallis est attentif à que « les conséquences soient régulièrement déduites ». Il invite donc l'entendement à juger de son propre processus de déduction et à conclure s'il y a évidence ou pas.

Trente ans séparent cet écrit des critiques de Fermat. Ce témoignage montre que non seulement il est maintenant accepté d'obtenir des résultats à l'aide de méthodes d'invention mais que pour certains comme Wallis, cette voie d'invention constitue une démonstration aussi légitime qu'une démonstration apagogique.

Si Wallis confirme que tous ses résultats peuvent être retrouvés par des démonstrations à l'ancienne, il n'insiste pas pour que cela soit effectué et valorise ses méthodes d'investigation, que ce soit par l'utilisation d'indivisibles ou par l'induction⁴, qu'il considère comme les meilleures voies pour lesquelles il faut désormais réserver tous les efforts de recherche. En ce qui concerne « la méthode de Cavalieri », il est

¹ *Ibid*, p. 307.

² « acquies in that evidence which appears upon view ».

³ *Ibid*, p. 309 : « In like manner, my general Rule being agreed (as sufficiently demonstrated,) (...) : All such consequences as are from hence regularly deduced, are accordingly well demonstrated ; notwithstanding *Mos.Fermat's* exceptions to a Process by Induction ; which is, by other Geometers readily admitted, and is of frequent use. »

⁴ Dans la dédicace au mathématicien Oughthred qui précède l'*Arithmetica infinitorum*, il déclare que sa méthode est tout à fait nouvelle et qu'elle « prend son commencement là où Cavalieri finit sa *Methodus indivisibilium* », *op. cit.*, « Dedicatio ».

proche du point de vue pascalien en ce qui concerne l'idée selon laquelle il s'agit d'un langage qui raccourcit les démonstrations sans avoir à envier la rigueur de la méthode des Anciens¹.

Pour Wallis et bien d'autres, il n'est pas possible que les Anciens aient ignoré les méthodes directes permettant de trouver des quadratures. Ces méthodes existaient, répètent les géomètres du XVII^e siècle, mais ne leur sont pas parvenues. Comment ces derniers expliquent-ils les raisons de cette occultation ? Les Anciens, écrivent-ils, sont attachés à montrer l'ordre logique des propositions qui suscite l'admiration. Telle est l'intime conviction de ces géomètres. Une détermination en découle, celle d'exposer leurs découvertes sans jamais les séparer de la voie par laquelle ils y sont parvenus. Mais si leur attitude témoigne sans aucun doute d'un détachement vis-à-vis des Anciens, ils ont le souci constant de montrer la légitimité de leur méthode à obtenir des énoncés vrais. Si le moyen pour y parvenir consiste à compléter leurs résultats par une démonstration à l'Ancienne, qui prouve irréfutablement la vérité de leur résultat, d'autres, comme Pascal ou Wallis s'octroie le droit de s'en passer, c'est-à-dire qu'ils estiment que la méthode elle-même vaut pour preuve.

5) Techniques de « transmutations » et infiniment petits : Grégory et Barrow

Un autre genre de techniques de quadratures et de rectifications de courbes apparaît au cours de la deuxième moitié du XVII^e siècle, par le vocable latin « *transmutatione* » pour désigner un certain type de transformation d'une courbe en une autre courbe dans le but de quarrer ou rectifier la première. À notre connaissance ce vocable apparaît pour la première fois publié dans un des appendices de la version latine de *La Géométrie* en 1657. Il s'agit d'une lettre du hollandais Van Heuraet adressée à Van Schooten dont laquelle il décrit une transformation générale d'une courbe en

¹ Dans un paragraphe destiné à présenter la « méthode de Cavalieri », Wallis affirme que la méthode d'exhaustion n'est pas différente en substance de la « méthode de Cavalieri » et que cette dernière est un déguisement de la première : « The Method of Exhaustions, (by inscribing and circumscribing figures, till their different becomes less than any assignable,) is a little disguised, in (what hath been called,) *Geometria indivisibilium*, *The Geometry of indivisibles*, or *Method of indivisibles* (...) Which is not, as to the substance of it, really different from the Method of Exhaustions, (used both by Ancients and Moderns,) but grounded on it, and demonstrable by it : But is only a shorter way of expressing the same notion in other terms. » dans *A treatise of algebra, both historical and practical*, printed by John Caswell, London, 1685, p. 285.

une autre dans le but de ramener la rectification de la première à la quadrature de la seconde¹. Ici, cette transformation utilise le triangle formé par la normale, l'ordonnée et l'axe. L'idée de ces méthodes est de réduire le problème de la quadrature (ou rectification) d'une courbe à celle de la quadrature d'une autre courbe en utilisant une transformation [*transmutatione*] géométrique. La quadrature de la deuxième courbe n'est pas forcément connue mais peut être prise comme canon, par exemple la quadrature de l'hyperbole. La comparaison des deux figures s'effectue en comparant leurs « indivisibles » dont la forme dépend de la transformation. Ces techniques apparaissent dans le *Traité des indivisibles* de Roberval² et sont au cœur, de la deuxième partie du traité de quadratures de Fermat (1679)³, de l'ouvrage de James Gregory intitulé *Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi & mensurae*⁴ (1668) et des *Lectiones geometricae* (1670) de Barrow. Le traité de Fermat est publié tardivement en 1680 et les techniques abordées ne sont pas basées sur les mêmes idées que celles des deux Britanniques⁵, qui sont largement diffusées. De plus le texte n'est pas d'un abord facile comme en témoigne Huygens qui le juge obscur⁶. Pour ces raisons, les techniques de transmutation de Fermat n'ont pas d'impact sur la pratique savante française contrairement à celles de Gregory ou surtout celles de Barrow puis plus tard celles de Leibniz. Le cas de Roberval est différent. Ses

¹ « Henrici van Heuraet epistola de Transmutatione curvarum linearum in rectas », *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, op. cit.*, p. 517-520.

² *Traité des indivisibles, op. cit.*, p. 241-243.

³ « De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrantibus infinitis parabolis et hyperbolis usus », *OF*, t. I, p. 255-285.

D'après Mahoney, *Before Newton, op. cit.*, p. 228, Fermat l'aurait composé vers 1658 en réponse à l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis. Ce traité n'aurait pas eu beaucoup d'impact en particulier à cause de leur seule application aux courbes algébriques dans « Fermat's Treatise on quadrature: a new reading », *op. cit.*, p. 4

⁴ Grégory, James, *Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi & mensurae*, Patavii, 1668.

⁵ Fermat a étudié la résolubilité des équations algébriques à l'aide des procédés de « transmutatione » et « emendatione » qu'il détient de Viète. Il souhaite les appliquer aux équations de courbes en vue de déterminer leur « quadrabilité ». En langage moderne, ces transformations correspondent à des changements de variable et à des intégrations par parties dans « Fermat's Treatise on quadrature: a new reading », *op. cit.*, p. 3.

⁶ Lettre à Leibniz du 4 septembre 1691, Huygens, C., *OH*, t. X, p. 132 : « J'ay recherché la dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les œuvres posthumes de Mr. Fermat, mais ce Traité est imprimé avec tant de fautes, et de plus si obscur, et avec des démonstrations suspectes d'erreur, que j'en ay pas su profiter ».

techniques de transmutation sont très proches de celles de Gregory¹ mais elles ne sont diffusées en France que lors de la publication de son traité en 1693.

Dans la préface de *Geometriae pars universalis*, Gregory souligne que les défauts de l'analyse algébrique sont saillants lorsqu'il s'agit de mesurer les « quantités des courbes » – [*quantitatum curvarum*] – il annonce que les quadratures peuvent être résolues :

si est fournie la propriété essentielle d'une figure donnée, une méthode sera donnée pour transformer [*transmutandi*] la figure en une autre d'égale et ayant des propriétés connues et puis en transformant la dernière en une autre, et ainsi de suite jusqu'éventuellement la figure soit transformée en une quantité connue².

Dans les *Lectiones Geometricae*, Barrow reprend ce même type de techniques que Gregory sauf que contrairement à celui-ci³ ses démonstrations ne s'effectuent pas à l'ancienne. En effet, il loue toutes les méthodes d'invention comme celles des tangentes, celles des maxima et minima ou celles des indivisibles car elles sont « plus faciles pour la résolution de toutes sortes de problèmes, pour l'invention de théorèmes, et pour la construction et démonstration de problèmes et théorèmes »⁴. Pour cette raison, nous choisissons d'examiner ses exposés plutôt que ceux de Gregory.

À la lecture XI, Barrow annonce que la première partie de son travail – la recherche de tangentes – est achevée et qu'il va fournir des théorèmes qui relient la mesure des grandeurs aux tangentes et aux perpendiculaires aux courbes⁵. Dans les leçons qui suivent, il fournit quatre types de transformations d'une courbe à laquelle on fait correspondre sa courbe des sous-normales ou sa courbe

¹ Plus tard, l'académicien Jean Galloys accuse Jacques Grégory d'avoir plagié Roberval. Celui-ci avait transmis ses découvertes à Torricelli qui les auraient transmises à Grégory lorsque celui-ci séjourna en Italie. Nous reviendrons sur cet épisode au chapitre 6.

² « si modo e data cuiuscunque figura proprietate essentiali, daretur methodus eam transmutandi in aliam aequalem cognitatis proprietates habente, & juis in aliam, & sic deinceps, donec tandem transmutatio fiat in aliquam quantitatem cognitam. » (notre traduction).

³ Malet, Antoni, « Isaac Barrow's Indivisibles » dans *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, *op. cit.*, p. 280.

⁴ Barrow, Isaac, *The usefulness of Mathematical Learning Explained and Demonstrated*, translated by John Kirkby, London, 1734, p. 90. Cet ouvrage est une traduction en anglais des *Lectiones Mathematicae*.

⁵ *Ibid*, p. 85 : « Reliquis utcunque patratris, apponemus ial quae magnitudinum è tangentibus (seu è perpendicularibus ad curvas) Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata [...]. »

des sous-tangentes ou celle obtenue par changement d'axes ou sa courbe des tangentes. Nous examinons ce dernier type.

La courbe des tangentes, e enrichi

Barrow considère une courbe AMB d'axe AD et BD perpendiculaire à l'axe. M est un point de la courbe AMB et MT est la tangente qui coupe l'axe en T . La courbe KZL est construite de la façon suivante : à partir de chaque point M de AB , il trace la droite MFZ parallèle à BD coupant AD en F et de sorte que $\frac{TF}{FM} = \frac{R}{FZ}$ où R est la longueur d'un segment donné quelconque. Ainsi, la courbe AMB est « transmutée » en la courbe KZL qui est appelée la courbe des tangentes en raison de la proportion décrite ci-dessus. Dans ces conditions il affirme que l'aire $ADLK$ est égale au rectangle formé par R et DB .

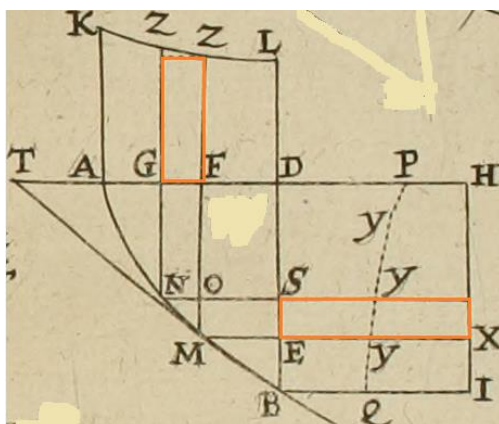


fig. 41

Pour démontrer ce résultat, il considère le point N tel que MN soit une « petite partie de la courbe indéfiniment petite » [*indefinitè parvâ curva AB particulâ*]. Comme dans les autres démonstrations, N provient d'une division indéfinie de AD en parties indéfiniment petites et égales entre elles. Le triangle curviligne MNO peut alors être pris pour un triangle rectiligne (appendice de la leçon X¹). Il est alors semblable à TFM et il peut écrire :

$$\frac{NO}{MO} = \frac{TF}{FM} = \frac{R}{FZ} = \frac{DH}{FZ} \text{ (en prenant } DH = R), \text{ ou encore :}$$

$$NO \times FZ = MO \times DH \text{ ou } GF \times FZ = ES \times EX$$

De sorte que Barrow affirme qu'étant donné que tous les rectangles [*omnia rectangula*] $GF \times FZ$ diffèrent minimalement [*minimè different*] de

¹ Voir le paragraphe sur Barrow au chapitre 1.

ADLK et que le même nombre de rectangles $ES \times EX$ composent [*componant*] le rectangle *BIHD*, le résultat est clair [*satis liquet*].

Cette démonstration est fort intéressante. En effet, dans notre étude, nous avons traité séparément les méthodes des tangentes et les méthodes par indivisibles car elles n'avaient aucune raison d'être jointes, mises à part le fait qu'elles sont des méthodes d'invention. Or ici, pour la première fois, des résultats issus de méthodes de tangentes bénéficient à l'élaboration de la transformation décrite dans cet exemple : assigner à une courbe sa courbe des tangentes. En fait, pour la plupart des méthodes de transmutation les résultats des méthodes des tangentes (ou de normales) sont mis à profit pour construire la courbe en sa « transmutée ». Ici, Barrow réinvestit le triangle caractéristique présent dans sa méthode algorithmique qu'il avait présentée dans l'appendice de la leçon X. Nous rappelons qu'il s'était montré récalcitrant à l'exposer à cause de son caractère calculatoire.

Comme dans d'autres méthodes des tangentes de ses contemporains, il introduit un triangle semblable à celui formé par l'ordonnée et la sous-tangente. Considérer que ce triangle est infinitésimal, c'est affirmer que les longueurs, notées e et a , sont des infiniment petits. Le « e » qui apparaît ici est celui qui était introduit dans les méthodes des tangentes. Or, comme nous l'avons vu, d'autres géomètres n'avaient pas trouvé nécessaire de considérer « e » comme un infiniment petit et ils affirmaient simplement la nullité de e . Il n'en est pas de même lorsque les segments de ce triangle sont mis à profit pour construire des parties infiniment petites constituantes d'une figure, comme dans la démarche de la plupart des méthodes de transmutation. Ici, les longueurs indéfiniment petites des rectangles indéfiniment petits *GFZZ* et *XES* correspondent respectivement aux longueurs $NO = e$ et $MO = a$ du triangle infinitésimal. Dans le cadre des techniques de transmutation, le statut de e comme infiniment petit s'impose.

Ceci pourrait être démontré de manière apagogique, mais pourquoi faire ?

C'est par cette question¹ que finit la première démonstration de la leçon XI des *Lectiones Geometricae*. Barrow considère que toute démonstration à l'aide

¹ « Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum ? », *Lectiones geometricae*, op. cit., p. 85 (notre traduction)

d'indivisibles peut être reproduite par une démonstration à l'ancienne. Il n'est pas gêné d'argumenter ses preuves à l'aide d'affirmations comme « différent minimalement ». Il estime que la manière de démontrer à l'ancienne n'a pas à s'imposer alors que la sienne, directe, suffit et montre la voie de découverte. Cependant, il anticipe sur les réactions de ses contemporains qui le liront et qui pourront juger sa preuve insuffisante. À l'égard de ceux qui ne seraient pas convaincus de la légitimité de ses preuves, il adresse un appendice qu'il introduit de la sorte :

En ce qui concerne la brièveté et surtout la perspicacité, les résultats précédents sont prouvés par des arguments directs [*recto discursu*], pour lesquels non seulement la vérité est suffisamment confirmée de manière convaincante mais aussi les origines apparaissent limpides [*limpidiùs*]. Cependant, de peur que quiconque qui n'est pas habitué à raisonner de cette façon puisse avoir difficulté, nous ajouterons les quelques notes suivantes qui à la fois confirment notre méthode et aideront aussi à démontrer avec facilité nos propositions *ad absurdum*¹.

Nous donnons les étapes de sa démonstration.

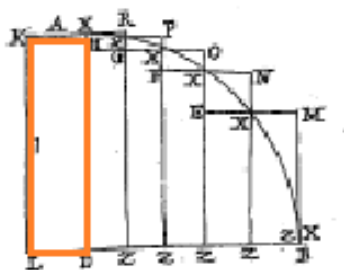


fig. 42

Il considère une courbe ADB d'axe DB divisé indéfiniment en parties égales ZZ puis construit deux agrégats de parallélogrammes à l'aide des ordonnées de la courbe de sorte à obtenir la figure $C = ADBMXNXOXPXRA$ circonscrite et la figure $I = HXGXFXEXZDH$ inscrite. Il considère une grandeur S inférieure à C et supérieure à I . Il montre par un double

¹ « Brevitati simul ac perspicuitati (huic autem praecipuè) consulentes praecedentia recto discursu comprobata dedimus ; quali non modo veritas, opinor, fati firmatur, at ejusdem origo limpidiùs apparret. Verùm nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adsuetus, haereat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiatur quorumque subsidio non difficilè consiciantur Propositorum demonstrationes apagogicae. », Barrow, Isaac, « Appendicula 2 », *Lectioe Geometricae, op. cit.*, p. 115. (notre traduction).

raisonnement par l'absurde que l'aire $AXBD$ entre la courbe et l'axe est égale à S .

Il suppose d'abord que $AXBD$ est inférieur à S . Soit $ADLK$ le rectangle représentant la différence entre S et $AXBD$. $ADZR$ peut être rendu inférieur à $ADLK$ à cause de l'indéfinie petitesse de AR et il est la somme des rectangles $AHXR, XPXG, XOXF, \dots$. Comme $AHXR$ est plus grand que le triligne AXR , que $XPXG$ est plus grand que XXP , ..., il résulte que $ADZR$ est supérieur aux trilignes pris ensemble.

Ainsi $AXBD + ADZR > C$, a fortiori $AXBD + ADLK > C$, c'est-à-dire $S > C$, ce qui est absurde. Une démonstration analogue est proposée pour l'hypothèse contraire.

Il est intéressant de remarquer que dans cette démonstration « à l'ancienne » Barrow se sert également des quantités infiniment petites. Le fait-il par ironie ? D'autres mathématiciens comme Gregory ou Newton fournissent des preuves différentes. Une méthode rigoureusement à l'ancienne est proposée par Gregory. Il considère aussi un rectangle qui joue le même rôle que $AKLD$ mais le nombre de rectangles qui composent les figures circonscrites et inscrites sont en nombre fini. Dans le Lemme II du livre I des *Principia*, Newton considère également un agrégat de parallélogrammes en nombre quelconque inscrits et circonscrits. Leur nombre augmentant à l'infini, il affirme que les dernières raisons entre la figure circonscrite, la figure curviligne et la figure inscrite sont en rapport d'égalité¹.

Dans toutes ces preuves il s'agit de maîtriser la différence entre la figure circonscrite et la figure inscrite. L'intérêt de cette diversité de preuves tient à la façon de montrer que cette différence est nulle, en particulier à comment l'introduction de la notion d'infiniment petit permet le contrôle de cette différence. Du statut mathématique octroyé à ces infiniment petits résulte la diversité des preuves. Ces témoignages montrent que le statut de preuve des méthodes par indivisibles n'est pas stabilisé en cette fin du XVII^e siècle.

¹ Une étude comparant ces trois auteurs par rapport à ce type de démonstration a été réalisée par Malet, Antoni, *Studies on James Gregory (1638-1675)*, A dissertation presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy, Princeton, octobre 1989, p. 241-248.

Conclusion

De Cavalieri à l'invention du calcul intégral leibnizien cinquante années s'écoulaient. À la fin du XVII^e siècle, aux yeux des savants, Cavalieri reste l'inventeur de la méthode des indivisibles. Pendant cette période, les géomètres se réfèrent à la « méthode de Cavalieri » alors que les leurs ne diffèrent parfois de celle-ci que par le type d'indivisibles considérés. Invoquer la méthode de Cavalieri est le signe de quelque chose qui fédère les géomètres. Les héritiers reconnaissent dans l'œuvre de Cavalieri une méthode féconde qui permet de mettre en rapport des figures (ou solides) en comparant « toutes leurs lignes » (ou « tous leurs plans »). Même s'ils diffèrent sur leur manière de concevoir et d'utiliser des indivisibles dans leur pratique, ils considèrent que dans le domaine des quadratures et des cubatures la première confrontation directe au continu a lieu avec Cavalieri.

Dans le but de comprendre comment l'héritage français des méthodes des indivisibles et la réception du calcul leibnizien s'articulent, notre chapitre ambitionnait de répondre à deux questions. Il s'agissait en premier lieu d'examiner comment les géomètres français liaient leur pratique avec les méthodes usant d'indivisibles – donc impliquant des considérations sur le continu et l'infini – et la « méthode de doctrine », c'est-à-dire l'exposé d'une démonstration à l'ancienne. En deuxième lieu, nous voulions dégager parmi les modifications apportées à ces méthodes celles qui ont créé un climat propre à la réception de la méthode calculatoire de Leibniz.

Assurer la traduction des procédures directes en démonstrations à l'ancienne

Nous avons examiné comment Cavalieri établit que les *omnes lineae* sont des grandeurs afin de se placer dans le cadre de la géométrie euclidienne. Il consacre de nombreux développements afin de clarifier l'opération « prendre des *omnes lineae* », en particulier il précise la règle concernant l'espacement des indivisibles. Torricelli prouve que la quadrature de la parabole par des indivisibles homogènes – même s'il déclare que sa preuve peut être reproduite à d'autres courbes – est parfaitement

reconductible à une démonstration à l'ancienne : il suffit de montrer que la différence entre les polygones inscrit et circonscrit est inférieure à n'importe quelle grandeur donnée. Ce type de légitimation perdue, preuves en sont le traité de Gregory et l'annexe de la leçon XI de Barrow que nous avons analysés. Un « devoir de rigueur » produit un constant souci d'établir la concordance entre la procédure d'invention et la démonstration à l'ancienne, absente dans le contexte des méthodes des tangentes. En même temps la plupart de ces géomètres partagent l'enthousiasme lié à la fécondité de ces nouvelles méthodes qu'ils estiment être la « voie royale ».

Ou comment la « force des indivisibles » tend les arcs

Pour les géomètres du XVII^e légitimer la procédure d'une méthode en la rapportant à une démonstration à l'ancienne consiste à montrer qu'un espace rectiligne diffère aussi peu que l'on veut d'une courbe. En revanche, il est inédit d'affirmer explicitement que la mesure du courbe par le droit est possible à condition de pratiquer l'infini : un arc peut être pris pour une corde, un triangle curviligne par un triangle, une courbe pour un polygone. Une fois que ces assimilations infinitistes sont confirmées par des démonstrations à l'ancienne – en montrant que la différence entre l'objet rectiligne et le curviligne est inférieure à une grandeur donnée quelle que soit sa petitesse – il devient superflu, aux yeux de ces géomètres, de légitimer ces situations infinitistes. Lorsqu'ils résolvent un problème, il leur semble très souvent suffisant de rappeler ces assimilations en invoquant, à la manière de Roberval, « la force des indivisibles ».

Pascal développe plus qu'aucun autre un « langage des indivisibles » en fournissant, grâce à ses nombreux « avertissements », le manuel d'utilisation qui l'accompagne : « tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur des anciens ». Il rassure son lecteur : la manière des Anciens et la sienne sont des manières de faire qui ne diffèrent que par la « manière de parler », elles sont donc équivalentes du point de vue de la rigueur. Le recours à la démonstration à l'ancienne est toujours possible mais il y a une certaine lassitude à y recourir, pire, c'est une faute de goût : préférer la *libido dominandi* de celui qui veut étaler des résultats à la *libido sciendi* de celui qui conserve assez « d'humilité pour chercher plutôt la clarté qui sert que la performance qui fait valoir »¹.

¹ Descotes, Dominique, *Géométries de Port Royal*, op. cit., Introduction, p. 29-30.

Mais, le gain se réduit-il à l'obtention de raccourcis de discours ? Dépourvu de symbolisme, le langage des indivisibles n'est pas encore un calcul. Néanmoins il rend possible son émergence car il nomme ce qui sera l'objet justement d'un calcul. Trop réticent aux algébristes « qui se tuent dans leur cabinet », Pascal refuse d'user de symbolique¹ en géométrie. Roberval, Pascal et surtout Wallis inaugurent une « arithmétique des infinis », dont le principe est de penser une aire comme une série de rectangles dont la largeur constante est « indéfiniment petite ». La « factorisation » par cet « indéfiniment petit » conduit à un calcul de série numérique dans lequel il est nécessaire d'accepter que l'on néglige certains termes : des « indivisibles par rapport aux autres ».

La question de l'émergence du calcul

Wallis a un point de vue sur l'algèbre discordant avec celui de Pascal. Sa conviction est que l'introduction du symbolisme est nécessaire pour l'obtention de résultats plus généraux. Il est impératif que l'algèbre, qu'il considère comme supérieure à la géométrie, ne soit plus assujettie aux représentations géométriques². Il est convaincu que le symbolisme et la conceptualisation sont intimement entrelacés et permettent ensemble d'inventer³ et d'aller bien plus loin. En témoigne son *Arithmetica infinitorum* dans laquelle les jeux d'interpolation sur les puissances lui permettent d'obtenir des résultats généraux et inédits sur les quadratures⁴ de courbes et de solides.

La rencontre finale des méthodes des tangentes et les méthodes des indivisibles

Nous avons montré que dans les méthodes de transmutation, l'élément « e » qui était auparavant un élément intégré à un procédé calculatoire, sans perdre ce statut, s'enrichit d'un nouveau rôle : celui de représenter la longueur infiniment

¹ Pascal, dans un manuscrit récemment retrouvé, utilise des signes symboliques. Dominique Descotes analyse et énonce parmi ses conclusions : « Obviously, Pascal's writing here is not a symbolical in the sense that the algebraic writing of Descartes is, for instance, and does not lend itself to the type of functional interpretation that we can apply to the formulae of the *Géométrie* (...) Pascal's symbolism is not that of an analyst (...) His symbolism is that of a writer (...) » dans « An unknown mathematician manuscript by Blaise Pascal », *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 518-519.

² Pycior, Helena, M., « The Arithmetic formulation of Algebra in John Wallis's *Treatise of Algebra* » dans *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra Through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, p. 107-133.

³ *Ibid*, p. 117.

⁴ « This move to a general concept of power evidenced Wallis's strong commitment to mathematical generality combined with a powerful faith in "interpolation" as a reliable path to generalized results. », *ibid*, p. 117.

petite d'un rectangle infiniment petit. Dans les écrits de Barrow la notation demeure et elle persiste dans les écrits des savants français, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Un riche héritage est reçu par les savants français de la fin du XVII^e siècle. Les écrits mathématiques de Fermat, Descartes, et ses commentateurs, puis ceux de Pascal et de Roberval constituent la matrice de pensée mathématique en France. À ces écrits s'ajoutent les apports mathématiques européens comme ceux de Gregory, Barrow, Wallis, Newton et enfin Leibniz.

Par la suite, nous jugeons utile de préciser une terminologie. Dans notre étude, parce que l'héritage français les inclut à la fois, nous désignerons par « méthodes infinitistes » toute méthode utilisant explicitement des infiniment petits ou des indivisibles. En effet, il est incontestable que les écrits de Pascal et de Roberval étudiés dans ce chapitre relèvent de ce cas, comme en relève l'arithmétique des infinis de Wallis ainsi que les méthodes de transmutation. Que dire des méthodes des tangentes étudiées au premier chapitre ?

Certes, le « e » ne désigne pas un infiniment petit dans les méthodes de Fermat. Désigné explicitement par « zéro » dans ses interprétations – chez Hérigone, Beaugrand – il n'est pas pour autant un infiniment petit. Nommé enfin « infiniment petit » par des géomètres comme Huygens et Barrow, a-t-il le même statut que celui que l'infiniment petit possède dans les méthodes des indivisibles ? Il sera question justement de préciser ce statut lors des débats académiques.

Nous devons trancher. En raison de la multiplicité d'interprétations octroyées à « e » dans les méthodes calculatoires de recherche de tangentes, nous pensons qu'il n'est pas satisfaisant de classer ces méthodes sous l'appellation de méthodes infinitistes.

L'histoire de la réception du calcul leibnizien commence par l'articulation de l'héritage de ces fructueuses méthodes d'invention avec le calcul leibnizien. C'est l'objet de notre prochain chapitre.

CHAPITRE 3

Autour de Malebranche : l'horizon d'attente avant les leçons de Jean Bernoulli (1690 – 1692)

Introduction

Nous avons vu que Descartes, Fermat, Pascal, Roberval et leurs commentateurs ont laissé des écrits importants concernant les méthodes pour les tangentes et les quadratures, mais, depuis, les mathématiques françaises connaissent peu de renouvellement dans ce domaine. De plus, peu de ces travaux ont été publiés. De Pascal sont publiés *Les lettres de A. Dettonville* en 1654 et *Le Triangle arithmétique* en 1665, une partie des mémoires de Fermat est publié en 1679. Aucun ouvrage de Roberval n'est publié, ne sont conservés que les procès-verbaux des mémoires lus lors des séances à l'Académie Royale des Sciences¹. En revanche, pendant la deuxième moitié du XVII^e siècle, la publication d'ouvrages européens permet aux savants français de recevoir une littérature riche en exposés de méthodes de tangentes et de quadratures. Nous avons vu que le Hollandais Van Schooten donne une version latine de *La Géométrie* de Descartes. De nombreux commentaires et appendices y sont ajoutés, notamment des améliorations algébriques de la méthode de Descartes due à John Hudde, une présentation d'une méthode des tangentes par Fermat et la méthode pour

¹ Nous rappelons que le *Traité des indivisibles* n'est publié par La Hire qu'en 1693.

rectifier les courbes de Van Heuraet. D'Angleterre, arrivent les *Lectiones Geometricae* d'Isaac Barrow, (1670), l'*Arithmetica infinitorum* (1655) et *A Treatise of Algebra* (1685) de John Wallis, la *Geometria pars universalis* (1668) de James Gregory et *Les Principia* (1687) de Isaac Newton.

Face à ce manque de renouveau des mathématiques françaises, une entreprise collective de mathématiciens se forme vers 1690 autour de l'oratorien Nicolas Malebranche (1639-1715), afin d'entamer une « réforme mathématique »¹ dont le principal dessein est de s'instruire et de s'appropriier les nouveautés européennes. Cette entreprise collective ne démarre en 1690 : comment a-t-elle émergé ?

Avec ce chapitre, nous souhaitons analyser la manière avec laquelle ces mathématiciens ont intégré les méthodes d'invention arrivées à leur connaissance au début des années 1690 et avant que Jean Bernoulli les initie au calcul leibnizien. En nous plaçant dans le cadre des méthodes des tangentes, nous examinons dans quelle mesure le processus calculatoire est perçu par eux comme allant de soi ou s'il nécessite d'être accompagné de discours explicatifs. Nous étudions aussi comment ils s'approprient le langage infinitiste, en particulier, nous sommes attentifs à leurs façons d'introduire des notions comme le « polygone avec une infinité de côtés » et à leurs lectures de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis.

Aborder ces questions est indispensable pour apprécier et comprendre le climat et le contexte dans lesquels vont s'articuler leurs pratiques mathématiques avec celles que suppose le calcul leibnizien. Étant donné que celui-ci apparaîtra plus tard à leurs yeux comme subsumant leurs pratiques, nous voulons estimer dans quelle mesure l'introduction du calcul leibnizien a pu être éprouvée par eux comme relevant d'une certaine proximité avec leurs pratiques des méthodes d'invention.

Malebranche et Leibniz : premiers échanges sur les mathématiques

En 1669, Malebranche côtoie le milieu du Duc de Roannez², l'ami intime de Pascal. Apprécié de cette société, il est choisi pour faire partie de ceux qui sont

¹ La formule est de Pierre Costabel dans *Mathematica*, Introduction.

² Ménard, Jean, *Pascal et les Roannez*, p. 897. Après la mort de Pascal, son ami intime le Duc de Roannez continue à raviver « l'esprit pascalien » : « le duc apparaît en effet plus que jamais comme le chef d'un groupe dont l'esprit doit beaucoup à Pascal, où la dévotion selon la spiritualité de Port-Royal s'allie à des curiosités scientifiques et à un goût de la morale développé par l'expérience de la vie mondaine. Ce groupe, que nous avons vu se former à la fin de 1660 aux côtés de Pascal et sous l'impulsion du duc, demeure solidement constitué. Il acquiert de nouveaux membres, et surtout, parce que tous ne sont pas

chargés de la publication de la première édition des *Pensées*¹. Nous trouvons dans cette liste des proches de Malebranche qui correspondent avec lui jusqu'au moins 1680. Des personnalités comme Arnauld, Nicole et Gilles Filleau des Billettes (1634-1720) sont présents. C'est dans ce milieu, qu'il fréquente, que Leibniz fait la connaissance de Malebranche pendant son séjour parisien entre 1672 et 1676². Ils correspondront ensuite épistolairement sur des sujets philosophiques et scientifiques³.

En 1674, Malebranche est nommé enseignant de mathématiques à l'Oratoire de Paris⁴. Il convient de souligner que l'une des caractéristiques de la congrégation oratorienne est d'être perméable aux nouveaux savoirs et d'en souhaiter et permettre une certaine diffusion dans leurs enseignements. À cet effet, elle entreprend la rédaction et la publication d'ouvrages destinés aux enseignements dans les collèges oratoriens⁵. Dans cet esprit, Malebranche souhaitant le développement de publications liées à l'enseignement et, repérant chez son tout nouvel élève Jean Prestet (1648-1691) des qualités mathématiques, il le charge de la composition d'un traité d'arithmétique et d'algèbre, qui est publié en 1675 sous le titre *Éléments de Mathématiques*⁶.

Pendant la période qui va jusqu'en 1690, Malebranche s'occupe peu de mathématiques, destinant la plupart de ses efforts à l'élaboration d'écrits philosophiques, notamment les premiers tomes de sa principale œuvre, *De la recherche de la vérité*⁷. Sa disponibilité pour des nouvelles mathématiques est modeste. Dans une lettre datée du 13 janvier 1679, Leibniz lui explique en quoi l'analyse – surtout celle de Descartes – doit être améliorée :

Je reconnois de plus en plus l'imperfection de celle [l'analyse] que nous avons. Par exemple, elle ne donne pas un moyen seur pour resoudre les problemes de l'Arithmetique

proprement des « pascalins », des amis nombreux, entre lesquels l'unité est surtout faite par la familiarité de tous avec le duc de Roannez », p. 872.

¹ L'édition date de 1670.

² Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes*, tome XVIII, Vrin, Paris, p. 57.

³ Robinet, André, *Malebranche et Leibniz, Relations personnelles*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1955.

⁴ « P. Nicolas Malebranche de Paris, receu en l'Institution de Paris le 20 janvier 1660, prestre le 20 sept. 1664. Destiné pour enseigner les mathématiques (...) », Malebranche, Nicolas, *Œuvres*, tome XVIII, *op. cit.*, p. 80.

⁵ Costabel, Pierre, « L'oratoire de France et ses collèges » dans *Enseignement et diffusion des sciences en France*, ouvrage collectif dirigé par René Taton, Hermann, Paris, 1964, p. 75.

⁶ Prestet, Jean, *Éléments de Mathématiques*, éditions Pralard, Paris, 1675.

⁷ Le premier tome de *De la recherche de la vérité* est imprimé en 1674, le deuxième tome en 1676, *Œuvres complètes*, tome XVIII, *op. cit.*, p. 79 et 111.

de Diophante, elle ne peut pas donner *methodum tangentium inversam* c'est-à-dire trouver la ligne courbe *ex data tangentium ejus proprietate*; elle ne donne point de voye pour tirer les irrationnelles des equations des plus hauts degrés. Elle est bien éloignée des problemes des quadratures. Enfin, je pourrois faire un livre des recherches où elle n'arrive point, et où quelque Cartésien que ce soit ne sçauroit arriver sans inventer quelque methode au-delà de la methode de Des Cartes¹.

Pour Leibniz, l'analyse cartésienne est limitée et obsolète, des améliorations sont nécessaires car elle ne peut pas résoudre des problèmes fondamentaux, tel est le problème inverse des tangentes qui le préoccupe tellement dès les années 1675. En adressant ces critiques, celui-ci vise également les *Éléments* de Prestet qu'il juge insuffisants. Il souhaiterait que le jeune oratorien rectifie son ouvrage car il l'estime capable : « Je voudrois savoir si vostre M. Prestet continue à travailler dans l'analyse. Je le souhaite parce qu'il y paroist propre »². En réponse à cette lettre, Malebranche explique que Prestet entré dans les ordres, ne peut guère s'occuper de mathématiques : « il y a environ 2 ou 3 ans que je l'ai mis à l'Oratoire et depuis ce tems il n'a point pensé à l'Algebre. Il va neanmoins revoir son livre pour l'édition nouvelle quand elle se fera »³. Puis, il formule le souhait que son illustre correspondant publie ses nouveautés car « Le public vous seroit Monsieur très obligé si vous vouliez donner au jour la Methode que vous avez pour pousser ces sciences comme vous le faites espérer »⁴. Cependant les questions soulevées par Leibniz dans la lettre précédente ne produisent aucun commentaire de sa part. Mais, peut-il en saisir toute l'importance en 1679 ?

Quelques années plus tard, au début de 1685, dans une lettre à son ami Tschirnhaus, Leibniz déplore le retard mathématique de Malebranche :

Il y a une quantité de jolies pensées dans la *Recherche de la vérité*, mais il s'en faut de beaucoup que l'auteur ait pénétré bien avant dans l'analyse et généralement dans l'art d'inventer, et je ne pouvois m'empêcher de rire, quand je voyois qu'il croit l'Algebre la première et la plus sublime des sciences, et que la vérité n'est qu'un rapport d'égalité et d'inégalité, que l'Arithmétique et l'Algebre sont les seules sciences qui donnent à l'esprit

¹ Lettre de Leibniz à Malebranche du 13 janvier 1679, *Œuvres complètes*, tome XVIII, *op. cit.*, p. 144.

² *Ibid.*

³ Lettre de Malebranche à Leibniz, mars-avril, 1679, *ibid.*, p. 145. Bien qu'il veuille reprendre son ouvrage, Prestet n'y parvient que fort tardivement, en 1689, sous le titre *Nouveaux Éléments de Mathématiques*, Éditions Pralard, Paris, 1689.

⁴ *Ibid.*, p. 146.

toute la perfection et toute l'estendue dont il est capable, enfin que l'Arithmetique et l'Algebre sont ensemble la veritable Logique. Et cependant, je ne voy pas que luy-même ait grande connoissance de l'Algebre. Les louanges qu'il donne a l'Algebre se devoient donner à a Symbolique en general, dont l'Algebre n'est qu'un echantillon assés particulier et assés borné¹.

Bien qu'il reconnaisse et apprécie les talents philosophiques de Malebranche, Leibniz estime que sa conception des mathématiques est « bornée » et caduque. L'oratorien ne se rend pas compte qu'il réduit le calcul symbolique à l'algèbre. Or, pendant ces années Leibniz mène une reflexion sur le rôle des symboles qui le conduit à l'élaboration de ce qu'il appelle la caractéristique géométrique² dont nous reparlerons plus loin. Il est convaincu que celle-ci subsume l'algèbre. Il fait part de cette idée dont il est enthousiaste à un grand nombre de ses correspondants³, qui pour la plupart ne saisissent pas l'ampleur de son projet : c'est le cas de Malebranche qui semble hermétique aux considérations de son ami allemand. Dans cette dernière lettre, l'appréciation de Leibniz est en conformité avec l'état d'avancement mathématique de Malebranche, dans la mesure où à cette époque celui-ci a d'autres centres d'intérêt et d'autres préoccupations.

À partir de 1680, suite à la publication du *Traité de la Nature et de la Grâce*, Malebranche et Arnauld rentrent dans un conflit qui s'étale jusqu'à la mort du janséniste. Une virulente lutte est entamée contre tous les écrits malebranchistes qui s'opposent aux thèses arnaldiennes. Les jansénistes parviennent à faire condamner certains ouvrages dans lesquels Malebranche refuse ceux d'Arnauld⁴. Pendant cette période houleuse, Malebranche est épaulé par l'Abbé François de Catelan (floruit 1676 – 1710). En l'absence de Prestet, ce dernier est devenu depuis 1678 son secrétaire libre et le reste jusqu'en 1694⁵. Avec une fidélité sincère et un franc dévouement, Catelan

¹ *Ibid*, p. 345.

² Nous ne développons pas ce point ici. On pourra consulter *La caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit et annoté par Marc Parmentier, Vrin, Paris, 1995.

³ Voir les lettres à Galloys et Huygens de septembre 1679.

⁴ Cette condamnation réussit après plusieurs tentatives: l'une entre 1684-1697 qui échoue et l'autre entre 1689-1690 qui parvient en 1690 à la publication du Décret dans Malebranche, *Œuvres*, tome XX, *op. cit.*, p. 225-228.

⁵ Robinet, André, « L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 11, n°4, Paris, 1958, p. 291.

s'acquitte de diverses missions de publication que Malebranche lui confie¹. Après des années d'intrigues, en 1690, les jansénistes ont gain de cause et Malebranche est directement atteint par les décrets de la Congrégation de l'Index² qui condamnent une partie de son œuvre philosophique et théologique.

Cette mise à l'index touche profondément le philosophe qui décide de se tourner vers des domaines moins polémiques comme les sciences, qu'il a délaissées depuis quinze ans. Cependant, cette mise à l'index arrive trop tard pour qu'elle atteigne la réputation de Malebranche. Nombreux sont ceux qui le reconnaissent comme maître de pensée religieuse, philosophique et scientifique. Il reçoit à l'Oratoire de multiples visites qui emplissent « sa chambre d'un va-et-vient continuel »³.

L'entreprise réformatrice dans le milieu malebranchiste

Les plus réguliers des visiteurs de Malebranche constituent le noyau d'un groupe de mathématiciens⁴ qui va s'engager dans cette « réforme mathématique »⁵ qui semble nécessaire à Leibniz. Plusieurs de leurs écrits de la période de 1690-1692 nous sont connus et nous pouvons constituer, à partir de là, une liste de ceux qui ont participé à un titre ou à un autre à l'entreprise. Nous avons ajouté à cette liste le Père Bernard Lamy car Malebranche le reconnaît comme un de ses amis proches et qu'il recommande la lecture de ses ouvrages dans la Recherche de la vérité.

Ces mathématiciens ne forment pas un groupe homogène, autant par leur investissement que par leur production écrite. Mais nous notons que 6 d'entre eux sont des oratoriens et parmi les trois restants, il y a un enseignant (Varignon). Le Marquis de l'Hospital a une particularité dans ce groupe qui ne doit pas être

¹ Catelan est associé aux questions de l'attribution des *Conversations chrétiennes*. Leibniz ignore si ce traité est de la main de Malebranche ou de Catelan (lettre du 22 juin 1679) *Correspondance et Actes, 1638-1689, op. cit.*, p. 157. Il est probable que Catelan ait accepté la paternité de l'ouvrage pour éviter des poursuites à Malebranche. Il surveille la parution du *Traité de la nature et de la grâce* en 1680. Le 16 juillet 1683, il informe Malebranche de la saisie des *Méditations chrétiennes*, *ibid*, p. 251.

² Celui-ci concerne la condamnation du *Traité de la Nature* de 1680 mais aussi son édition de 1684 qui contient des additions et des éclaircissements, la *Défense de Malebranche contre la ville*, les *Lettres par lesquelles il répond aux Réflexions philosophiques et théologiques d'Arnauld* et ses *Lettres touchant celles de Monsieur Arnauld*. Ce décret fut complété postérieurement : le 4 mars 1709, la *Recherche de la vérité* dans son édition latine de 1691 et le 15 janvier 1714, les *Entretiens sur la métaphysique* et le *Traité de morale* de l'édition 1684 sont également indexés.

³ Expression d'André Robinet in Malebranche, *Œuvres*, tome XX, *op. cit.*, p. 140.

⁴ Ce groupe est nommé « groupe malebranchiste » dans André Robinet, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°4, Paris, 1960.

⁵ Nous rappelons que l'expression « Réforme mathématique » est de Pierre Costabel, *Mathematica*, p. i.

négligée, ainsi que celle de l'Abbé de Catelan. Il est important de noter aussi, pour notre propos, qu'ils n'appartiennent pas tous à la même génération, depuis Byzance et Prestet, nés en 1647 et 1648, jusqu'aux deux plus jeunes, L'Hospital et Carré, nés en 1661 et 1663.

C'est aussi dans ce contexte générationnel qu'il faut souligner que l'héritage mathématique de ce groupe est riche par son éclectisme. Nous suivrons ce groupe jusqu'à la fin de notre étude. Dans les premiers temps, la pensée de Descartes est une référence de taille pour tous ses membres. L'abbé de Catelan est un défenseur zélé des conceptions cartésiennes, qu'elles soient physiques ou mathématiques. Prestet et Malebranche sont scrupuleusement attachés à la méthode cartésienne, mais selon des conceptions différentes¹.

	(Naissance-Mort)	Entrée Oratoire Ordonné	Enseignement
Nicolas Malebranche	(1638-1715)	1660 1664	Oratoire
Bernard Lamy	(1640-1715)	1662 1667	Professeur à Saumur, Angers, Grenoble.
Louis Byzance	(1646-1722)	1677 1690	
Jean Prestet	(1648-1690)	1675 1680	Professeur à Nantes, Angers.
François de Catelan	vers 1650- vers 1710		Abbé
Pierre Varignon	(1654-1722)		Formé chez les jésuites Professeur Collège Mazarin
Charles-René Reyneau	(1656-1728)	1676 1680	Professeur à Nantes, Angers
Guillaume de l'Hospital	(1661-1704)		
Louis Carré	(1663-1711)	1683 (sortie 1694)	

fig. 43

Par ailleurs, l'imprégnation pascalienne est présente. Le marquis de l'Hospital en témoigne. Dès son plus jeune âge, il est introduit dans le milieu « pascalien » du duc de Roannez duquel Malebranche était très proche. Par le Duc, l'Hospital reçoit sa formation mathématique, où la présence d'un contenu pascalien est certaine. Il est donc coutumier des travaux mathématiques de Pascal et d'Arnauld. Il est important de rappeler que dans ce milieu où règne « un esprit de curiosité universelle et le goût

¹ Pour une étude des mathématiques malebranchistes, voir Schwartz, Claire, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, Presses universitaires Paris-Sorbonne, à paraître.

de la science »¹ sont présents des personnages de la vie savante parisienne mais aussi européenne². Grâce à la fréquentation de cette société, l'Hospital est remarqué, dès l'âge de quinze ans, pour ses aptitudes mathématiques³.

Il convenait de situer le contexte dans lequel se constitue le projet d'une « réforme mathématique »⁴, qui apparaît sous bien des aspects comme une œuvre collective. Plusieurs manuscrits attestent de cet aspect : écrits de la main des divers membres du groupe, plusieurs graphies peuvent parfois se superposer dans le même manuscrit⁵ témoignant d'un travail authentiquement collaboratif.

Il est indispensable de rappeler que la période qui nous intéresse commence après que Leibniz ait publié des opuscules majeurs concernant son nouveau calcul, notamment la *Nova Methodus*. Celui-ci tarde à être diffusé, en partie à cause de la guerre de la ligue d'Augsbourg qui empêche la circulation du courrier. En 1692, Carré est chargé de recopier plusieurs articles des *Acta Eruditorum*⁶. La *Nova Methodus* en fait partie : l'erreur commise par Leibniz – confondant l'hypoténuse et le cathète – est reprise sans que Carré s'en aperçoive. Dans une lettre à Leibniz datée de novembre 1694, l'Hospital affirme que six ans auparavant il avait pris connaissance de cet article et l'avait étudié :

Il y a environ six ans que les Actes de Leipsic m'étant tombés entre les mains, j'y ai trouvé vôtre méthode des tangentes, qui me plut si fort que je composai des ce temps quelques écrits, ou je l'expliquois plus au long, et je donnois les demonstrations de toutes vos regles⁷.

¹ Mesnard, J., *Pascal et les Roannez*, *op. cit.*, tome II, p. 896.

² *Ibid.*, p. 897 : Nicole, Arnauld, le prêtre oratorien Malebranche, Filleau Des Billettes, Huygens, Leibniz.

³ *Ibid.*, p. 897-898 : Un problème de mathématique, qui avait été résolu par un ecclésiastique, proche du duc de Rouanez, est proposé à Arnauld qui soumet le problème « à un jeune homme qui demeure dans la même maison que M. de Rouannet et qui a beaucoup d'ouverture pour la Géométrie. Il s'appelle M. le Marquis de Sainte-Mesme [L'Hospital] ». Celui-ci résout le problème et envoie sa solution à Arnauld qui la trouve « fort belle ».

⁴ Tous les ouvrages européens cités précédemment font partie de l'inventaire de la bibliothèque de Malebranche après décès dans Malebranche, *Oeuvres*, t. XX, *op. cit.*, p. 234-283.

⁵ Une majorité est de main de Louis Carré du fait de son rôle de copiste. Un relevé de ces manuscrits a été effectué par André Robinet dans « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *op. cit.*

⁶ FL 17860, fols 1R-90V. Pour la datation : Robinet, André, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *op. cit.*, p. 292.

⁷ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 30 novembre 1694, AIII 5B, p. 232.

Cette affirmation est vraisemblable puisqu'il rédige plusieurs écrits entre 1690 et 1692, traitant en particulier de méthodes de tangentes¹. Si dans cette lettre il prétend reprendre et développer la méthode leibnizienne, il n'utilise nullement ce qui fait en grande partie sa nouveauté : le symbolisme. Nous serons plus à même de juger de cette affirmation dans la suite de notre travail, l'adoption du nouveau calcul leibnizien par l'Hospital fait l'objet d'une grande partie de notre chapitre 4. En revanche, par cette lettre, l'Hospital témoigne de l'intérêt qu'il porte vers 1690 aux améliorations calculatoires apportées aux méthodes des tangentes et à la façon de les exposer. Il fait part de ses écrits de 1690 à Malebranche qui les accueille avec enthousiasme :

J'ai lu ces vacances les écrits du marquis de l'Hospital, qui m'ont fait passer deux mois fort agréablement. Je pense qu'il fera imprimer cet hiver, si ses affaires lui laissent pour cela le temps nécessaire, et vous verrez le plus fin des mathématiques, expliqué avec beaucoup de netteté et en peu de paroles².

Malebranche voit dans le Marquis l'espoir de publications qui permettraient de renouveler les mathématiques. Parallèlement, l'Abbé de Catelan s'obstine à prolonger les applications de l'algèbre cartésienne à l'étude des courbes, notamment pour l'étude des tangentes. Prestet, puis l'Hospital, étudient l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis qu'ils reçoivent conjointement aux critiques qui lui avaient été adressées, notamment par Fermat. Ils souhaitent s'approprier l'« Arithmétique des infinis » par des démonstrations « géométriques » et non pas par des raisonnements inductifs qu'ils estiment peu scrupuleux.

Pour analyser comment les membres du groupe autour de Malebranche ont assimilé les méthodes d'invention, les pratiquent et les commentent, nous examinons dans un premier temps leurs explications de la « disparition » du e dans les méthodes des tangentes qu'ils aménagent. Ceci dans le but d'apprécier leur réception vis-à-vis du processus calculatoire. Nous examinons ensuite de quelle manière ils s'approprient

¹ Nous nous intéressons aux manuscrits FR. 24236- folios 1-8 et à FR. 25306. Ce dernier est un volume d'environ 400 pages comprenant quatre traités paginés de façon indépendante. Le premier s'intitule « Traité des coniques », le deuxième, qui nous concerne, traite de la méthode des tangentes et la méthode des maximum et minimum, le troisième, auquel nous nous intéresserons dans le paragraphe suivant concerne l'Arithmétique des infinis de Wallis et le dernier s'intitule « De la dimension des Solides et de leurs surfaces convexes ». Pierre Costabel date ces manuscrits sur une période allant de 1690 à 1692.

² Lettre de Malebranche à Montmort, décembre 1690, Malebranche, Nicolas, *Œuvres*, tome XIX, p. 567.

le langage infinitiste, et en particulier, leurs introductions de notions comme le « polygone à une infinité de côtés ». Dans un troisième temps nous étudions leur réception à l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis, dont il nous est apparu éclairant de la comparer avec la lecture critique que Leibniz en a fait quelques années avant eux.

1) Expliquer la disparition du e - Les premières méthodes des tangentes (1690-1691)

1.1) La première méthode des tangentes de l'Hospital (1690)

La première méthode des tangentes que propose le Marquis date de 1690¹. Son écrit débute par la supposition « Les lignes courbes se peuvent considérer comme des polygones d'une infinité de petits côtés égaux » lui permettant de fournir la « définition » suivante :

Ainsi, chercher une tangente à une courbe considérée comme un polygone d'une infinité de cotés, c'est chercher une ligne qui rencontrant un de ses côtés ne le coupe point et ne fasse avec lui qu'une même ligne. Car si on demande que tel point d'une ligne courbe soit touché ou coupé seul, il est clair que le petit côté du polygone qui détermine en cet endroit la courbure de la ligne, étant continué ou ne faisant qu'une même ligne avec une autre, il sera tangente à la courbe².

L'Hospital n'ajoute aucun commentaire ni à cette supposition ni à sa définition qui sont les principes de sa méthode. Or, l'égalité des côtés n'est pas nécessaire pour la recherche de tangente. La méthode est présentée directement à l'aide de l'exemple de la parabole d'équation $px = y^2$. Pour tirer la tangente nh d'un point h , il considère « un point r si proche du point h que le triangle rhs soit infiniment petit, ou que la ligne rh soit commune à la courbe et à la droite ». Dans ces conditions, hs est à rs comme y est à nd .

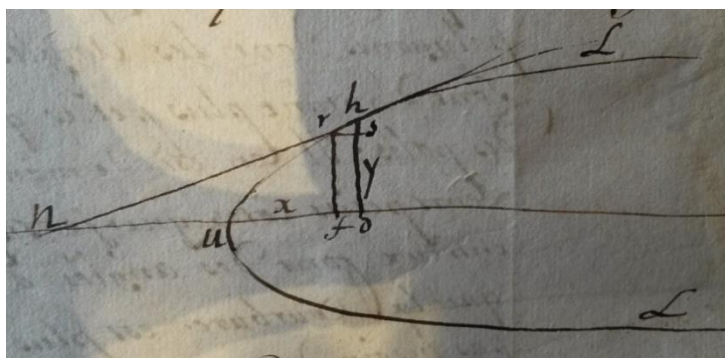


fig. 44

Il nomme alors hs par a , fd par e et nd par t : ce sont les mêmes notations que Barrow.

¹ FR 24236.

² FR 24236, fol. 1.

Comme $px = y^2$, au point r :

$$px - pe = yy - 2ay + aa$$

et en soustrayant ces deux équations, il obtient :

$$e = \frac{2ay}{p} - \frac{a^2}{p}, \text{ d'où } t = \frac{2yy}{p} - \frac{ay}{p}.$$

Or $ay = 0$, d'où :

$$t = \frac{2yy}{p} = 2x.$$

Sa démarche est basée sur le même principe que Barrow sauf que ce dernier stipule d'effacer dès le début tous les termes qui apparaissent et qui sont des puissances de a ou e . D'ailleurs après cet exemple l'Hospital remarque que dans l'équation $px - pe = yy - 2ay + aa$, « on peut négliger le carré aa pour abrégé, parce que ce carré ne sert à rien pour découvrir ce qu'on cherche et qu'il ne sert qu'à allonger le calcul ».

Il traite ensuite les cas du cercle, de l'hyperbole équilatère, de l'ellipse. Puis, il s'intéresse à la courbe d'équation $y^3 = bxx$. L'application de la méthode le conduit à l'équation : $3ayy - 3aay + a^3 = 2bex - bee$ mais comme les termes $3aa, a^3$ et bee sont encore jugés « inutile à la résolution » il écrit $3ayy = 2bex$ et $e = \frac{3ayy}{2bx}$, puis déduit que $t = \frac{3}{2}x$.

Ces exemples l'amènent à affirmer que sa méthode est générale pour toutes les lignes géométriques « lorsqu'on a l'équation qui exprime leur nature ». Pour soutenir son affirmation, il prouve la formule de la sous-tangente de tous les types de paraboles et hyperboles, c'est-à-dire de toute courbe dont l'équation est $y^q = b^{q-p}x^p$ ou $x^p y^q = b^q c^p$ dans laquelle p et q sont des entiers positifs. Pour ce faire, il remarque que lorsque l'on développe $(x - e)$ à n'importe quelle puissance, par exemple 10, les deux premiers termes qui apparaissent dans le développement sont x^{10} et $-10ex^9$, de même dans le développement de $(x - e)^q$, les deux premiers termes qui apparaissent sont $x^q - qex^{q-1}$. Or, l'Hospital souligne qu'il est « inutile » de considérer les autres termes dans le calcul¹.

Ainsi, si $y^q = x^p b^{q-p}$ alors

$$(y - a)^q = y^q - qay^{q-1} \text{ et } b^{q-p}(x - e)^p = b^{q-p}x^p - b^{q-p}pex^{p-1}.$$

¹ *Ibid*, fol. 4.

En faisant la soustraction habituelle, il obtient $qay^{q-1} = pex^{p-1}b^{q-p}$ et comme $ta = ye$, il peut « mettre y pour a et t pour e » d'où :

$$t = \frac{qy^q}{px^{p-1}b^{q-p}} = \frac{qx^p b^{q-p}}{px^{p-1}b^{q-p}} = \frac{q}{p}x.$$

Lorsque les équations renferment des incommensurables, il conseille d'élever les racines « jusqu'à qu'il n'y en ait plus » ou encore de procéder à l'aide de la formule généralisée :

$${}^q\sqrt{\sqrt{(x-e)^p}} = (x-e)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} - \frac{p}{q}ex^{\frac{p-q}{q}}$$

qu'il justifie à l'aide de considérations sur les puissances¹.

Ici, il est manifeste que l'Hospital reprend la méthode de Barrow présentée en appendice à la leçon X. Pour l'appliquer aisément et généralement aux paraboles et hyperboles, il formule la règle selon laquelle dans le développement du binôme, seul les deux premiers termes doivent être conservés pour le calcul. Il ne démontre pas ce résultat. Les cas des premières puissances lui suffisent pour se rendre compte que les autres termes sont « inutiles » pour l'obtention du résultat, il les annule donc absolument. Pour la recherche pratique de tangentes, ils sont en effet sans importance et ainsi leur statut n'a pas besoin d'être davantage interrogé.

1.2) L'Abbé de Catelan : de nouveaux arguments (1691)

Vers 1690, l'Abbé de Catelan gravite autour des milieux cartésiens où il rencontre des savants tels Régis et Rolle, il côtoie très fréquemment les membres du groupe autour de Malebranche, tels Prestet, Varignon, Sauveur et l'Hospital. Souvent présent lors de leurs discussions, il est informé des recherches oratoriennes en cours².

Muni de connaissances qu'il estime suffisantes, il publie en 1691 un ouvrage intitulé *Principe de la science générale des lignes courbes ou un des principaux éléments de la géométrie universelle*³ qu'il fait précéder d'un autre ouvrage dans lequel il explique comment traiter avec des puissances de certaines quantités. Dans ce dernier, il souligne que lorsqu'on sait « opérer sur les puissances » on peut découvrir les propriétés d'une « infinité de courbes ». Cette compilation de résultats prend le titre de *Logistique pour la science générale des lignes courbes ou manière universelle et infinie*

¹ Il obtient des résultats similaires pour « les hyperboles à l'infini », *ibid*, fol. 7V.

² Robinet, André, « L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 11, n°4, Paris, 1958, p. 291.

³ Catelan, François, *Principe de la science générale des lignes courbes ou un des principaux Éléments de la Géométrie universelle*, Lambert Roulland, Paris, 1691. Nous le noterons par la suite par « *Principe* ».

d'exprimer et de comparer les puissances des grandeurs¹. Il précise ce qu'il entend par logistique :

Un art d'exprimer par des caractères sensibles les divers rapports que l'esprit découvre entre les grandeurs dont il compare les idées. Cet art est à l'égard des mathématiques ce qu'est l'écriture à l'égard des langues. Il consiste dans certaines manières d'employer les lettres de l'alphabet, & les chiffres pour signifier toutes les différentes comparaisons que l'on peut faire d'une grandeur avec une autre où avec l'unité. Nous n'avons pas le dessein d'entrer icy dans le détail de cette matière².

Ce passage est à rapprocher de la conception de l'algèbre de Malebranche duquel Catelan s'inspire. Malebranche nomme par « analyse » l'algèbre et la théorie des équations. L'utilité de l'analyse tient à ce qu'elle permet d'« augmenter l'étendue de l'esprit » :

Mais quoiqu'il en soit, il me paraît qu'on ne peut augmenter l'étendue et la capacité de l'esprit en l'enflant, pour ainsi dire, et en lui donnant plus de réalité qu'il n'en a naturellement, mais seulement en les ménageant avec adresse. Or c'est ce qui se fait parfaitement par l'arithmétique et l'algèbre.

Il affirme aussi que « l'analyse est l'art d'employer les calculs de l'algèbre et de l'arithmétique, à découvrir tout ce qu'on veut savoir sur les grandeurs et sur leurs rapports ». Ainsi pour Malebranche l'analyse est un « art unique de découverte et d'expression – ou de découverte par leur expression – de vérités »³. Catelan juge assez important cet art pour lui consacrer un ouvrage entier avant que de l'appliquer à l'étude des lignes courbes. Nous verrons comment cet ouvrage est investi dans *Principe de la science générale des lignes courbes*.

Dans celui-ci, Catelan a pour dessein de montrer qu'en se plaçant dans la lignée de Descartes, on peut obtenir la majorité des propriétés des courbes. Il regrette que ses contemporains ne cherchent pas à creuser dans cette voie qui lui semble absolue :

¹ Catelan, *Logistique pour la science générale des lignes courbes ou manière universelle et infinie d'exprimer et de comparer les puissances des grandeurs*, Lambert Roulland, Paris, 1691.

² *Ibid*, p. 3-4.

³ Schwartz, Claire, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, Presses universitaires Paris-Sorbonne, à paraître.

Il serait à souhaiter que la plupart de ceux qui cultivent les Sciences aujourd'hui reconnussent mieux ce qu'elles doivent aux Principes que M^r. Descartes nous a laissez dans ses Ecrits, & qu'ils voulussent examiner les ouvrages de plus près et plus à fond, avant que d'entreprendre de nouvelles recherches sur les mêmes sujets ; Ils jugeraient peut-être qu'il est plus utile à la perfection & à l'augmentation des Sciences d'éclaircir & de pousser ses principes, que d'en chercher et de se proposer d'en établir des nouveaux. Si l'on pouvait commencer à les en convaincre par l'extrait qu'on donne icy d'un petit écrit composé dans le dessein de faire voir avec quelle facilité la Géométrie universelle se peut se perfectionner par le Principe de ce Sçavant géomètre [Descartes] pour les Tangentes des Lignes Courbes, lorsqu'on sçait l'appliquer dans toute son étenduë (...)¹

L'affirmation de Catelan est sans équivoque : les principes cartésiens sont loin d'être épuisés dans l'étude des courbes, il s'agit pour lui de montrer que leur approfondissement conduit à des applications ou améliorations de qualité, en particulier pour la méthode des tangentes. Il conseille vivement de suivre la voie cartésienne plutôt que de chercher par des voies « nouvelles » Son propos est péremptoire : le goût de la nouveauté pour la nouveauté est vain. Comme il écrit ceci dans l'année 1691, si sa critique s'adresse déjà au calcul leibnizien², elle l'est tout en l'ignorant car ce nouveau calcul n'est pas du tout encore l'affaire du groupe autour de Malebranche, encore moins d'autres savants français³.

Dans son ouvrage, il utilise souvent des exemples traités par les membres du groupe autour de Malebranche, comme en attestent les manuscrits de cette époque. L'ouvrage se divise en deux parties : la première énonce les différentes méthodes (principalement sous forme d'algorithme), puis dans la deuxième partie, Catelan, en utilisant les résultats de la « logistique », tente des preuves du bien fondé de ses méthodes. Il convient de remarquer que Catelan fait de très nombreuses erreurs dans

¹ Catelan, François, *Principe*, *op. cit.*, p. 2.

² Il s'agit peut-être de Barrow dont les travaux sont explorés par les membres du groupe, mais il pourrait aussi s'agir de Michel Rolle qui a remis en question une règle cartésienne concernant les racines d'une équation. Lettre de l'Abbé de Catelan à Malebranche (non datée), Honfleur, Fonds Adry, 15, ii 4, fol. 47-48 : « Voici mon Reverend Père, le prétendu paralogisme que M. l'Abbé de Lannion se vantait d'avoir trouvé dans les Elemens des Mathématiques ; c'est une remarque que le petit Rolle a faite sur une Règle de M^r Descartes pour les racines des Equations rapportée en deux mots par le Père Prestet qui ne l'aurait pas examinée à fond, et à qui vous envoie s'il vous plaist la remarque de Rolle par laquelle il paroist que cette règle n'est pas générale ».

³ On ne partage pas l'affirmation de Montucla : « Il y eut d'abord des Géometres, sans attaquer directement la nouvelle méthode [le calcul leibnizien], cherchèrent à en obscurcir le mérite. Tel fut entr'autres l'Abbé de Catelan, Cartésien zélé jusqu'à l'adoration (...) », *Histoire des Mathématiques*, volume 2, Jombert, Paris, 1754, p. 360.

cet ouvrage qui vont être corrigées par le Marquis de l'Hospital¹. Ce dernier lui signifie directement, par voie postale ou via des publications dans le *Journal des Sçavants*².

La première méthode concerne la recherche des « sécantes perpendiculaires » à une courbe, c'est-à-dire les normales, et des tangentes : ce que nous allons analyser.

L'énoncé de la méthode est précédé d'un extrait de l'édition latine de *La Géométrie* de Descartes dans lequel celui-ci affirme que la recherche des normales est « le problème le plus utile, et le plus général non seulement que je sçache, mais même que j'aye jamais désiré de sçavoir en géométrie ». La deuxième édition latine de Van Schooten (1659) circule dans le milieu malebranchiste. Cette dernière présentait, comme nous l'avons vu, la méthode algébrique des tangentes de De Beaune et la méthode de Fermat. Van Schooten traite également la recherche de la normale à la conchoïde par la méthode cartésienne³. Nous rappelons que pour ces exemples aucun infiniment petit n'intervient et qu'il s'agit uniquement de procédures algébriques.

Voici comment Catelan présente sa méthode : il considère une courbe *CGB* de diamètre *AP*. Il s'agit de trouver un point *R* sur le diamètre tel que la droite *RG* soit perpendiculaire à *CBG*. Pour appliquer sa méthode il faut suivre quatre étapes de calcul qu'il décrit puis qu'il l'applique immédiatement à la parabole simple d'équation $y^2 = ax$. Cette procédure est « démontrée » plus loin dans son ouvrage.

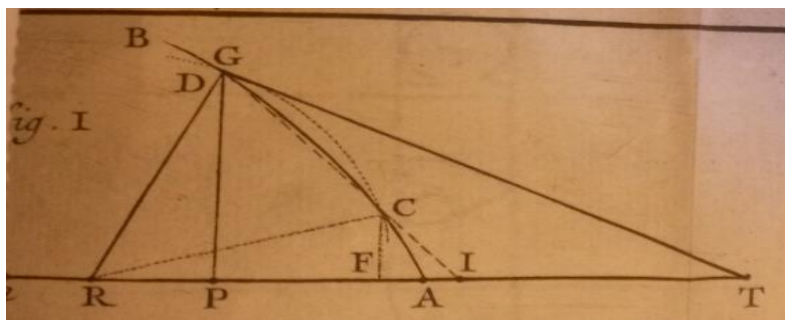


fig. 45

¹ Le Marquis prétend que Catelan a la stratégie de donner à lire son ouvrage et de tirer profit des remarques bienvenues pour corriger et améliorer son écrit.

² Nous reviendrons sur certaines de ses erreurs dans le chapitre 4.

³ Descartes ne développe pas le cas de la conchoïde car il affirme qu'il faudrait « s'engager dans un calcul autant ou plus long qu'aucun des précédents », *La Géométrie, op. cit.*, p. 352.

Nous présentons sa méthode et sa première application sous forme de tableau :

Méthode de Catelan	Application à la parabole d'équation $y^2 = ax$
1) Substituez dans le lieu [équation de la courbe]	$(y - \frac{ro}{y})^2 = yy - 2ro + \frac{rro}{yy}$
y par $y - \frac{ro}{y}$	$a(x - o) = ax - ao$
x par $\pm o$.	
On obtient « l'expression transformée du lieu »	$yy - 2ro + \frac{rro}{yy} = ax - ao$
2) Retranchez le lieu	$-2ro + \frac{rro}{yy} = -ao$
3) Divisez par toutes les puissances de o , puis effacez les termes qui sont multiples de o	On divise par $-o$:
	$2r - \frac{rro}{yy} = a$
	$2r = a$
4) Résoudre l'équation linéaire en r .	$r = \frac{a}{2}$

Catelan fait suivre le cas de la parabole d'autres exemples de courbes algébriques : l'hyperbole puis de façon générale des courbes d'équation $y^n = a^{n-p}x^p$ dans lesquels n et p sont des entiers relatifs. Il traite aussi avec des équations dans lesquelles apparaissent des signes radicaux et pour lesquels il a présenté une astuce calculatoire afin de s'en débarrasser¹, très proche de celle exposée par l'Hospital. L'application de la recherche de la normale à la courbe d'équation $y^n = a^{n-p}x^p$ se déroule donc ainsi :

¹ Ibid, p. 32-37.

Méthode de Catelan	Application à la courbe d'équation $y^n = a^{n-p}x^p.$
1) Substituez dans le lieu [équation de la courbe] y par $y - \frac{ro}{y}$ x par $x \pm o$. On obtient « l'expression transformée du lieu »	$\left(y - \frac{ro}{y}\right)^n = y^n - nroy^{n-2}$ $a^{n-p}(x - o)^p = a^{n-p}x^p - poa^{n-p}x^{p-1}$ $y^n - nroy^{n-2} = a^{n-p}x^p - poa^{n-p}x^{p-1}$
2) Retranchez le lieu	$-nroy^{n-2} = -poa^{n-p}x^{p-1}$
3) Divisez par toutes les puissances de o , puis effacez les termes qui sont multiples de o	On divise par $-o$: $nry^{n-2} = pa^{n-p}x^{p-1}$ on divise par y^n ou $a^{n-p}x^p$ $\frac{nr}{yy} = \frac{p}{x}$
4) Résoudre l'équation linéaire en r .	$\frac{nr}{p} = \frac{yy}{x}$ $\frac{nr}{p}, y \text{ et } x \text{ sont en proportion continue.}$ (il peut donc construire cette normale)

Dans cette application Catelan a donc écrit les deux pseudo-égalités :

$$a^{n-p}(x - o)^p = a^{n-p}x^p - poa^{n-p}x^{p-1}$$

et

$$y^n - nroy^{n-2} = a^{n-p}x^p - poa^{n-p}x^{p-1}$$

Cependant, ces dernières ont fait l'objet d'un paragraphe de la *Logistique pour la science générale des courbes*. Il est intéressant de voir de quelle manière il justifie ces

égalités et de la comparer aux explications de l'Hospital¹. Cette justification fait l'objet de la Remarque VIII² :

Les puissances de la somme ou de la différence de *zéro* & de quelque Grandeur x ou semblable, sçavoir,

$x^2 \pm 2xo + oo : x^3 \pm 3x^2o + 3xoo \pm ooo : x^4 \pm 4x^3o + 6xxoo \pm 4xooo + oooo : \&$
ainsi à l'infini, sont les mesmes que $x^2 \pm 2xo : x^3 \pm 3x^2o : x^4 \pm 4x^3o$: C'est-à-dire en général, $x^p \pm px^{p-1}o$.

Il affirme :

que *zero plusieurs fois* ne vaut pas plus *qu'une seule fois zéro*, & que dans ces sortes de Puissances le second terme multiplié par o étant *zéro*, le 3^e, multiplié par oo estant *zero de zero*, le 4. multiplié par ooo estant *zero de zero de zero* & ainsi de suite jusqu'à l'infini, chaque terme après le premier est toujours *zero* à l'égard de celui qui le précède immédiatement ; si bien qu'il suffit d'écrire le premier & le second pour marquer ces Puissances ont pour racine la somme ou la différence de deux Grandeurs dont l'une est conçue *infiniment petite* à l'égard de l'autre, comme un *Point* par rapport à une *ligne*, ou une *ligne* par rapport à un *Plan*, ou bien une ligne plus petite que toute autre donnée.

Écrit en italique, Catelan semble attribuer à l'énoncé³ portant sur la comparaison des « zéros » un statut de règle. « *zero plusieurs fois* ne vaut pas plus *qu'une seule fois zéro* » est trivialement vraie pour un zéro absolu mais il se trouve que ce qui est nommé « zéro » est certes quelque chose qui deviendra nul mais qui justement ne l'est pas encore. L'enjeu est précisément de contrôler l'expression précédente lorsque le nommé « zéro » en en train de devenir un vrai zéro. Ces « zéros » apparaissent inévitablement au cours des calculs bien qu'ils n'interviennent pas, comme l'avait fait remarquer l'Hospital, pour l'obtention finale du résultat de la sous-normale. Catelan ne rappelle pas cet argument calculatoire ici car il est dans la partie consacrée à la logistique et non pas dans la partie consacrée à son application à la recherche calculatoire de tangentes. La manière de commenter la formule

¹ Il ne s'agit pas pour nous de comparer la rigueur des deux écrits qui n'ont pas du tout le même statut puisqu'ils ne s'adressent pas au même public.

² *Logistique*, p. 13.

³ Descartes avait justifié la règle d'élosion des homogènes de Fermat en usant ce genre d'argument dans la lettre de Descartes à Hardy (date supposée le 3 mai 1638) : « d'une quantité réelle étant multipliée par une autre imaginaire, qui est nulle, produit toujours rien. Et ceci est l'élosion des homogènes de M. de Fermat, laquelle ne se fait nullement gratis en ce sens-là ». On pourra se référer au chapitre 1.

« $x^p \pm px^{p-1}o$ est pris pour $(x + o)^p$ » est également intéressante. Le deuxième terme est conçu comme: « infiniment petit à l'égard de l'autre [premier terme] ». Pour préciser cette relation entre les deux termes, il utilise l'analogie entre un point et une ligne ou une ligne par rapport à un point. Entend-t-il « infiniment petit » par « hétérogène et de dimension inférieure » ? Ce n'est pas sûr puisqu'il ajoute que ce deuxième terme peut être conçu comme « une ligne plus petite que toute autre donnée ». Il ne semble pas faire de différence entre un indivisible (ligne, point) ou ce qu'il nomme « zéro », « infiniment petit » ou « grandeur plus petite que toute autre donnée » puisqu'il les utilise l'un pour l'autre. Doit-on conclure à une impression d'amalgame et de confusion ?

Alors qu'il revendique sa filiation cartésienne, Catelan témoigne d'une pratique calculatoire débordant du cadre strict de l'algèbre de son maître dans lequel il ne lui est pas possible de statuer sur ces « zéros de zéros ». Un autre passage de son ouvrage atteste de cette difficulté. Il s'agit du paragraphe qu'il consacre à la « Démonstration de la méthode qu'on donne icy, et de ses différents usages, fondée sur le principe de M. Descartes pour les tangentes »¹. Cette « démonstration » a pour but de rendre compte de l'origine de l'expression $y - \frac{ro}{y}$ substituant y dans la première étape de sa méthode.

Avant de débiter sa démonstration, il a besoin d'établir des égalités concernant des triangles intervenant dans sa preuve : si R est un point de l'axe et G et C sont deux points du cercle de centre R et de rayon GR alors : $RF^2 + FC^2 = RP^2 + PG^2$.

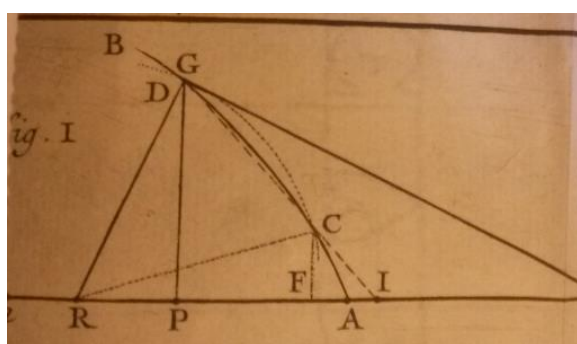


fig. 46

Il pose $AP = x$, $GP = y$, $RP = r$, $FC = z$ et $PF = o$ ou zero « parce qu'elle est réduite à un point lorsque les points C & G étant confondus les deux Appliquées

¹ *Principe*, op. cit., p. 117.

FC & GP sont réunies en une seule, qui aboutit à la Tangente *GT*, & à son rayon *RG* »,

$$FR = FP + PR = r + o.$$

L'égalité $RF^2 + FC^2 = RP^2 + PG^2$

se traduit par :

$$r^2 + 2ro + oo + zz = r^2 + y^2$$

$$oo + zz = y^2 - 2ro$$

puis en ajoutant $\frac{r^2 oo}{y^2}$ et en multipliant par y^2 :

$$r^2 o^2 + o^2 y^2 + z^2 y^2 = r^2 o^2 + y^4 - 2roy^2.$$

Pour finir, Catelan effectue une simplification qu'il argumente ainsi :

Mais les deux premiers termes multiples de zéro [du premier membre] sont nuls à l'égard du troisième qui est réel, et avec qui ils ont le même rapport qu'un point à l'égard d'un carré, ainsi il n'y ajoutent rien (...)

d'où :

$$z^2 y^2 = r^2 o^2 + y^4 - 2roy^2$$

ou

$$zy = y^2 - ro \quad \text{ou} \quad z = y - \frac{ro}{y}.$$

Catelan emprunte à nouveau des arguments propres au langage des indivisibles - « le même rapport qu'un point à l'égard du carré » - qu'il détourne en vue de justifier des égalités algébriques. Mais il ajoute quelque chose de nouveau : ces quantités ne sont pas « réelles ». De quelle réalité parle-t-il dont ces éléments manqueraient ? Dans ce contexte de procédé calculatoire, il nous semble qu'il entend que ces termes n'ont pas de « réalité » pour l'efficacité du calcul. On peut observer également que le même type de remarque aurait pu être fait pour les termes $r^2 o^2$ et $-2roy^2$ à l'égard de y^4 . Mais, bien entendu, en faisant disparaître ces termes, il n'aurait pas obtenu l'égalité souhaitée.

Comme nous l'avons dit, l'ouvrage contient des erreurs, et l'une d'elles - concernant la recherche du point d'inflexion - va être spécialement l'objet d'une suite d'objections de l'Hospital publiées dans le *Journal des Savants* de l'année 1692¹. Dans l'avant dernière de ces objections², le Marquis conclue que malgré les corrections

¹ Nous évoquerons à nouveau cet exemple dans le chapitre 4.

² JS, 1692, p. 489.

apportées à la méthode de Catelan, elle n'a rien d'une nouveauté. Elle est la même que celle que Barrow, il suffit, dit-il, de changer les notations : « le reste suit mot à mot sans rien y changer ». Il ajoute que les autres idées de l'ouvrage sont tirées de l'article de Leibniz de 1684.

Nous avons vu que ces éléments d'ordre deux apparaissent dès l'application de la méthode de Fermat et presque quelle que soit la méthode calculatoire de recherche de tangentes : l'application de la méthode des cercles tangents cartésienne n'en produit pas même si Descartes a affaire à elles lorsqu'il justifie la méthode de Fermat. Les méthodes de tangentes prescrivent leur effacement immédiat. Cette règle n'est pas toujours accompagnée d'une justification. Quand celle-ci a lieu, elle est réduite à un simple argument de commodité calculatoire : par leur pratique les mathématiciens se rendent compte que ces termes devenant nuls à la fin du calcul ne servent pas à l'obtention du résultat, au contraire ils alourdissent les calculs, il leur est donc préférable de les ôter dès le début. Comme leur seul but est d'obtenir un résultat par le moyen du calcul, ils estiment n'avoir nul besoin de préciser davantage le statut de « nullité » octroyé à ces éléments. Par sa présentation de sa méthode des tangentes, l'Hospital est dans la continuité de ces prédécesseurs vis-à-vis de ce genre de considérations. Cependant, malgré ses maladresses, le témoignage de l'Abbé de Catelan est intéressant car il introduit des commentaires empruntés dans le domaine des indivisibles dans le but d'expliquer la disparition de ces éléments¹.

2) Le polygone à une infinité de côtés, éclaircissements sur son statut

Nous allons examiner comment l'Hospital est amené à introduire la notion de polygone à une infinité de côtés afin d'obtenir des simplifications calculatoires dans son appropriation de la méthode des tangentes en 1692. Nous commençons par étudier l'introduction de cette notion dans les *Éléments de géométrie* du cartésien Bernard Lamy en 1685 et 1695.

¹ Dans le cadre des méthodes de tangentes, nous ne connaissons pas d'autres témoignages.

2.1) Le cercle comme polygone à une infinité de côtés : proposition ou demande ? Les *Éléments de géométrie* de Lamy

Dans la voie de réarrangement des *Éléments* euclidiens, Arnauld sera suivi par l'enseignant oratorien¹ Bernard Lamy (1640-1715). En 1685, deux ans après la deuxième édition des *Nouveaux Éléments*, Lamy publie un ouvrage intitulé *Elémens de Géométrie*². Cet ouvrage aura deux éditions : la première est publiée en 1685 puis en 1692 sans changement (sauf le titre qui devient « Nouveaux éléments de géométrie ou la mesure du corps »), puis une deuxième édition qui connaît huit publications dont les quatre dernières sont posthumes³. Lamy a enseigné la philosophie et les mathématiques à l'Université d'Angers. Profondément cartésien, il introduit la méthode du Livre I de *La géométrie* dans ses ouvrages. Comme Arnauld, il préconise d'introduire les objets de la géométrie selon un « ordre naturel », du simple au composé, et il estime lui aussi que les écrits des Anciens ne satisfont pas le besoin de clarté :

Je ne veux pas dire que les démonstrations qu'on voit dans les Ouvrages des Anciens, manquent du côté de la vérité, puis qu'elles sont certaines ; mais elles pechent contre la netteté & la clarté, étant trop longues et embaraßées. (...) [avec les démonstrations à l'ancienne] Ils [les élèves] ne sont point assujettis à un ordre qui pût conduire le Lecteur de ce qu'il connaît à ce qu'il ne connaissait pas, sans autre travail que celui d'une attention médiocre⁴.

¹ Selon Aude Dividich, il y a peu de traces d'enseignement des mathématiques chez les oratoriens antérieur à 1670, Le Dividich, Aude, « L'enseignement des mathématiques en France au XVIIe siècle (1600-1670) », *La science à l'époque moderne*, Presses de l'Université Paris-Sorbonne, bulletin 21, Paris, 1996, p. 32. Bernard Lamy constitue donc l'un des premiers oratoriens auteurs d'ouvrages d'enseignement.

² Lamy, Bernard, *Les Éléments de géométrie ou de la mesure des corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné : les plus belles propositions d'Archimède et l'Analyse par le RP Lamy*, Grenoble, à Paris, chez André Pralard, 1685. Nous nous référerons aux éditions de 1685 (ou 1692), celle de 1695. Si aucun changement n'est effectué nous ne reporterons principalement à la 1^{ère} édition de 1685.

³ 1695, 1701, 1704, 1710, 1731, 1732, 1734 et 1740.

Nous nous référerons aux éditions de 1685 (ou 1692), à celle de 1695 ou à une autre plus tardive si nous voulons indiquer un changement de formulation ou de contenu. Si aucun changement n'est effectué nous ne reporterons principalement à la 1^{ère} édition de 1685.

⁴ Il affirme sa filiation à Arnauld sur ce point dans la Préface des *Elémens de Géométrie* : « (...) C'est dans les Elémens de Monsieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel, qui n'est point dans ceux d'Euclide ».

Contrairement à l'ouvrage d'Arnauld, une partie des *Éléments de Géométrie* de Lamy est consacrée à la notion de corps. Lamy structure son ouvrage en traitant les dimensions de la plus simple (la longueur), à la plus complexe (le solide).

Dès sa première version des *Éléments de Géométrie*¹, Lamy justifie l'appellation « polygone d'une infinité de côtes » destiné au cercle. Dans cet ordre, il commence par énoncer la demande qu'un polygone circonscrit (respectivement inscrit) soit plus grand (respectivement plus petit) que son cercle. Il montre que pour un cercle et un polygone qui lui est circonscrit (respectivement qui lui est inscrit) donnés, on peut toujours trouver un autre polygone circonscrit (respectivement inscrit) dont le périmètre et la surface soient inférieures (respectivement supérieures) au premier. Par ces résultats, il énonce qu'un polygone, qu'il soit circonscrit ou inscrit à un cercle, « qui a une infinité de côtes, ne diffère point du cercle »². À partir de 1695, des modifications sont apportées à ce livre. Lamy, au lieu d'émettre deux demandes, énonce trois « propositions évidentes » qui ont le même statut que ce qu'il appelle « demande » dans la version de 1685³. Les deux premières demandes sont identiques à la version de 1685 mais la troisième affirme qu'« un cercle peut être pris pour un polygone d'une infinité de côtes ». Ainsi, ce qui était une proposition qu'il prenait le soin de justifier devient une demande. Remarquons que par construction, ces polygones ont des côtés égaux. Lamy commente le caractère « évident » de cette proposition :

Car par exemple, si un polygone dont le diamètre est petit avait un million de côtes, il est évident qu'il ne différencierait pas sensiblement d'un cercle. Si dis-je on conçoit dans un cercle autant de côtes qu'il y a de points sensibles, ce sera un polygone & un cercle en même temps⁴.

Ainsi, pour comprendre un cercle comme un polygone à une infinité de côtés, il faut identifier ces « points sensibles » avec les côtés d'un polygone. Que veut-il dire par « point sensible » ? Dans la première section du premier livre, un point est défini

¹ *Ibid*, Livre II, section 4, p. 95 et suivantes.

² *Ibid*, p. 96-97. Nous avons vu qu'Arnauld ne prend pas le soin ni de commenter, ni de justifier cette considération.

³ Pour Lamy une supposition ou demande est « une proposition qui n'est pas si évidente qu'un Axiome, mais aussi qu'on ne peut contester ; ainsi on demande qu'on accorde, pour n'être pas obligé de la démontrer » dans « Définitions de quelques termes dont on se sert dans les mathématiques ».

⁴ *Ibid*, 1695, p. 118.

par « ce qui n'a aucune partie et qui par conséquent est indivisible »¹. Lamy ponctue cette définition par un commentaire : « c'est-à-dire que c'est une grandeur dont on ne considère point les parties dans lesquelles elle peut être divisée »². Des définitions analogues sont données pour la ligne, qui est une longueur dont on ne considère pas la largeur. Ainsi, l'union des mots « point » et « sensible » s'apparente à un oxymore. Dans l'édition de 1695, Lamy ajoute que la ligne peut être aussi considérée comme « la trace d'un point qui se meut ou change de place ». Ainsi, le point s'identifie à une trace, c'est-à-dire « sensiblement » à un côté de petite taille. De cette manière, pour Lamy, il n'y a donc pas de contradiction à considérer « un polygone & un cercle en même temps ».

Un autre point mérite d'être remarqué. Nous avons vu que dans la version de 1685, sa justification s'appuyait sur la possibilité d'encadrer le cercle par les polygones successifs de manière de plus en plus serrée. En 1695, même s'il a déjà énoncé la demande que nous venons de commenter, il reprend la même démarche qu'en 1685 et réaffirme, cette fois-ci sous forme de corollaire³, qu'un « polygone inscrit d'une infinité de côtés peut être pris pour un cercle ». Nous pouvons nous interroger sur ce curieux réagencement d'énoncés qui brouille le statut de demande et de corollaire. Veut-il montrer que le caractère évident de sa demande était bien légitimé par le développement qui la suit ? Cela n'aurait rien de déconcertant car le public qu'il vise est essentiellement celui des élèves. Ainsi, un retour explicatif pour asseoir la cohérence d'une demande et effacer toute trace d'arbitraire est alors à interpréter comme souci pédagogique.

À ce stade de son développement, il peut utiliser cette conception du cercle pour montrer que l'aire d'un cercle est la même que celle d'un triangle ayant pour base sa circonférence et pour hauteur son rayon car il a démontré ce résultat pour un polygone inscrit. Il va de soi que ce qui est valable pour un nombre fini de côtés, l'est aussi pour un nombre infini mais Lamy s'abstient de faire appel à « l'analogie » comme l'avait fait Arnauld⁴.

La fin du livre II termine par une scholie :

¹ *Op. cit.*, 1695, p. 8.

² *Ibid.*, p. 8. Dans une édition plus tardive il ajoute : « car tout ce qui est étendu a des parties. Or si le point n'est pas un rien, il est étendu ; ainsi on dit qu'il est sans parties, parce que l'on ne fait point attention à celles qu'il peut avoir, et qu'on le considère comme indivisible ».

³ Corollaire premier, *ibid.*, 1695, p. 119.

⁴ On pourra se référer au chapitre 2.

Il est facile, un cercle étant donné, de trouver une surface dont la différence avec celle de ce cercle soit plus petite qu'une grandeur donnée.

Cet énoncé est indispensable pour démontrer des résultats concernant l'aire d'un cercle par un double raisonnement par l'absurde. Alors que ce résultat aurait permis de justifier, à la manière des Anciens, sa conception du cercle comme polygone d'une infinité de côtés, Lamy choisit de le placer en dernier. Cet ordre d'énonciation est à prendre au sérieux et n'est pas arbitraire. À notre sens, par cette prédilection de disposition, il hiérarchise le type de démonstration. Considérer qu'un cercle est un polygone d'une infinité de côtés permet des démonstrations directes, comme le confirme le résultat ci-dessus. Aussi, Lamy est assuré du bien-fondé de sa démarche car le vocable « polygone d'une infinité de côtés » non seulement lui permet une démonstration directe mais, comme la scholie le montre, comporte également la possibilité de reprendre cette démonstration à la manière des Anciens. De la sorte, prononcer ici le mot « infini » ne pose aucune difficulté à Lamy car il n'y a rien de contradictoire. En effet, dans ce contexte, le mot « infini » ne doit pas être compris séparément de « polygone ». « Polygone infini » est une formulation qui renvoie à une démarche contrôlée de démonstration directe. Lamy a bien pris le soin d'expliquer que lorsqu'on fait une démonstration d'une proposition en considérant un cercle comme « un polygone d'une infinité de côtés », on aurait pu aussi la démontrer à l'ancienne, en considérant un polygone aussi proche que l'on aurait souhaité du cercle. Dès lors, cette proximité aurait permis d'attribuer au cercle des propriétés du polygone, en raisonnant à l'ancienne. Ce n'est pas ce que choisit Lamy. Nous avons vu que dans d'autres traités, comme celui de Pardiès, un choix opposé à celui de Lamy est effectué.

Lamy souhaite présenter la géométrie dans un ordre naturel, et c'est dans celui-ci que s'inscrit la légitimation du vocable « polygone d'une infinité de côtés », qui s'ajoute au dictionnaire du géomètre comme une « définition de nom ». Le soin particulier qu'il apporte pour donner sens à ce vocable est particulièrement accentué dans l'édition de 1695 dans laquelle il a également présenté la méthode des indivisibles et en a donné quelques applications¹.

¹ Barbin, Evelyne, *La Révolution mathématique*, op. cit., p. 301.

2.2) La méthode des tangentes de l'Hospital (1692) : l'articulation entre le polygone à une infinité de côtés et le calcul

Le deuxième livre du manuscrit FR 25306¹ n'a pas de titre et porte sur une « méthode très facile et très générale de trouver les tangentes à toute sorte de lignes courbes ». Contrairement à sa première méthode, celle-ci ne se restreint pas aux courbes géométriques. Les premières pages sont destinées à la manière de traiter avec les exposants². Ensuite, avant d'entamer l'exposé de sa méthode, l'Hospital développe le bien-fondé des suppositions sur lesquelles elle repose.

Pour ce faire, il considère une courbe AMO d'axe AE . M a pour ordonnée EO . MK est la tangente en M et l'arc MN est un « arc infiniment petit ». Par des considérations géométriques³ et utilisant le fait que l'arc MN est infiniment petit, il prouve que « la raison de RN à ND est plus grande qu'aucune raison que l'on puisse assigner »⁴.

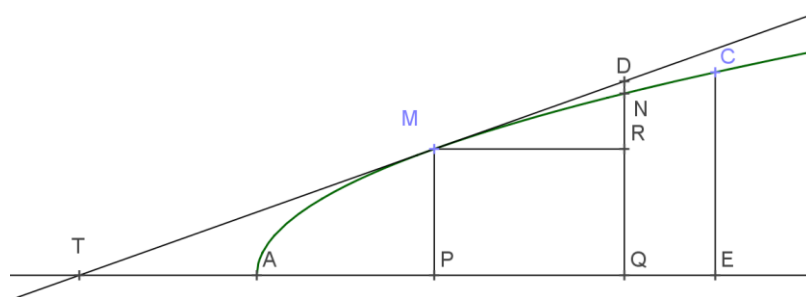


fig. 47

De ce résultat, il déduit :

Corollaire premier

Il est évident que la raison de RN à ND est infiniment grande et qu'ainsi l'on doit en calculant regarder ND comme étant égale à zéro, c'est-à-dire que l'arc MN étant pris infiniment petit, les points N et D se confondent et la portion MD de la tangente avec l'arc MN .

¹ Dans les quatre livres de ce manuscrit FR 25306 il n'y a aucune figure.

² *Ibid*, fol. 1-4.

³ L'Hospital précise qu'il démontre les résultats dans le cas convexe mais que la preuve est la même pour le cas concave.

⁴ *Ibid*, fol. 5.

Ce corollaire est intéressant car l'Hospital précise que par « infiniment petit » il entend ce qu'il peut considérer comme nul lorsqu'il effectue des calculs. Ces préliminaires géométriques ont donc pour but de justifier des éventuelles simplifications calculatoires. De ce corollaire, il déduit :

Corollaire 3^{ème}

Si l'on mène la droite MN sous-tendante de l'arc MN , je dis qu'on la peut prendre pour cet arc, car le point M étant commun à cette droite, et à la tangente MD et le point N confondant avec le point D , il est évident qu'on peut le prendre pour la tangente MD , et par conséquent pour l'arc MN .

Puis, comme ce raisonnement est valable quel que soit le point O de la courbe, qui peut être aussi proche que l'on veut de N , il ajoute :

D'où je conclus que l'on peut considérer une ligne courbe comme un polygone d'une infinité de costez infiniment petits, lesquels déterminent par leurs angles la courbure de la ligne¹.

Nous pouvons remarquer qu'ici, contrairement aux autres cas que nous avons analysés, le polygone à une infinité de côtés a des côtés non nécessairement égaux. L'Hospital annonce explicitement le principe de sa méthode. Comme dans le premier corollaire il sollicite son lecteur en lui demandant de considérer comme évident son principe. En faisant de la sorte, il lui est possible en toute légitimité de présenter à son lecteur la méthode des tangentes : « Méthode très facile et très générale pour trouver les tangentes de toutes sortes de Lignes Courbes ». Dans celle-ci, il considère une ligne Courbe quelconque AMO dont il faut tirer la tangente MT . En supposant le problème résolu, il pose : $MP = y$, AP ou $EP = x$, « selon qu'il est plus commode » et $PT = t$. Il rappelle que comme l'arc MN est infiniment petit, N peut être considéré commun à la courbe et à la tangente, il pose $MR = e$ et $NR = a$.

Son but étant de trouver le rapport de NR à RM , qui est le même que celui de MP à PT , il énonce les étapes calculatoires qu'il faut suivre. Elles sont identiques à celles de Barrow ainsi que le relève Byzance, relecteur de ce manuscrit, en écrivant en marge « Barrow lect. 10 ». L'Hospital développe ensuite quatorze exemples. Les dix

¹ *Ibid*, fol. 6-7.

premiers concernent des courbes géométriques, le premier, le même que celui de Barrow, est la courbe d'équation $x^3 + y^3 = b^3$. Le résultat obtenu est généralisé à toutes les courbes dont l'équation est $x^p + y^p = b^p$.

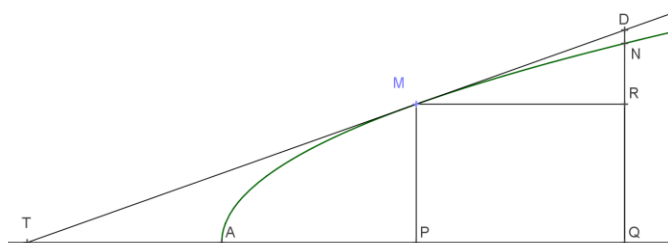


fig. 48

Pour ce faire, il ne retient que les premiers termes du développement $(x + e)^p$ et de $(y + a)^p$, comme pour sa première méthode. Ensuite il s'applique aux courbes d'équation $\sqrt[q]{x^p} + \sqrt[q]{y^p} = \sqrt[q]{b^p}$ pour lesquelles il argumente également le bien-fondé de la règle des deux premiers termes qui s'écrit dans ce cas : $\sqrt[q]{(x \pm e)^p} = \sqrt[q]{x^p} \pm \frac{p}{q} \sqrt[q]{x^{p-q}}$. Il ne lui est donc pas nécessaire d'ôter les incommensurables.

Pour chacun des exemples qui suivent, en rappelant que l'application de sa méthode conduit à des puissances de e ou a qui lui sont inutiles car « égales à zéro », l'Hospital invente des astuces pour abrégier son calcul mais doit raisonner au cas par cas et être attentif aux notations¹. Il choisit également des exemples comportant des incommensurables² ou des fractions³ et les traite directement, c'est-à-dire qu'il ne cherche pas à se débarrasser ni de radicaux ni de fractions pour se ramener à une égalité du même type que l'exemple 1 (c'est-à-dire polynomiale). D'ailleurs il pointe à deux reprises ce choix. La première se situe après l'exemple 6^e dans laquelle il écrit :

Il est inutile d'avertir que l'on aurait pû trouver dans ces trois derniers exemples les valeurs de t en ôtant d'abord les incommensurables et opérant ensuite dans les égalités comme dans l'exemple 1^{er}⁴.

¹ Dans l'exemple 5, il effectue ce que nous appellerions un « changement de variable ». La définition de la courbe donne l'expression $GI = \sqrt{b^2 - y^2}$ où G est un point qui dépend du point M dont on cherche la tangente. Il pose $n = \sqrt{b^2 - y^2}$. Si x devient $x - e$ alors n devient $n + v$. Par l'application de la méthode, il obtient $b^2 e = 3n^2 v$ et en déduit que $t = 3n - 3x$.

² Exemples 5 à 8.

³ Exemples 9 et 10.

⁴ *Ibid*, fol. 23.

Laissant le choix au lecteur d'agir comme il le voudra, il ne juge pas opportun d'effectuer ces calculs, préférant d'autres stratégies. Le dernier exemple de courbe géométrique est suivi d'un « avertissement » :

Il est clair, ce me semble, pour peu d'attention que l'on fasse sur des exemples que nous venons de donner, que cette méthode s'étend généralement sur toutes les lignes courbes géométriques (j'entends selon la pensée de Mr Descartes, celles dont on peut exprimer les rapports de tous les points avec ceux d'une ligne droite par une équation) sans qu'il soit nécessaire d'ôter les incommensurables, ni les fractions, ce qui est presque toujours d'une difficulté insurmontable comme l'on voit dans les exemples 7. 8. et 10ème.

Par cet avertissement, l'Hospital affirme la généralité de sa méthode qui peut s'appliquer à toutes les courbes géométriques. Il précise que celles-ci sont celles dont on peut exprimer un « rapport de tous les points avec ceux d'une ligne droite par une équation ». Évoquant les difficultés, voire les impossibilités, qui peuvent survenir lorsque l'on veut ôter des incommensurables ou des fractions, il déclare que sa méthode n'est pas sujette à cet inconfort et ajoute qu'elle est aussi plus générale parce qu'elle pourra aussi s'appliquer à des courbes mécaniques :

C'est en cecy principalement que cette méthode excelle par dessus celle de Descartes et Fermat, comme aussi en ce qu'elle est beaucoup plus simple, et plus générale, ce que l'on reconnaîtra aisément, si l'on veut se donner la peine de les comparer, comme il y a quelque adresse à faire l'application de cette méthode sur les lignes mécaniques, nous en faciliterons les moyens par les exp qui suivent.

Ainsi, L'Hospital tout en se plaçant dans la continuité des méthodes de Descartes et de Fermat, affirme les surpasser pour deux raisons. La première est qu'il n'a pas à se soucier d'ôter des incommensurables et les fractions. Fermat avait fourni une méthode élaborée pour ôter les incommensurables dans l'appendice d'un mémoire intitulé « *Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus* »¹ mais ce mémoire n'est pas encore publié au moment où l'Hospital écrit. Même si l'Hospital en avait eu connaissance, son dessein n'est pas de se débarrasser de

¹ « Appendix ad superiorem methodum », *OF*, t. I, p. 184-188, t. III, p. 159-163. Fermat avait fait part de sa découverte à Carcavy dans une lettre datée du 20 août 1650. Il lui annonce qu'il n'a pas voulu « différer à vous envoyer ma méthode générale pour le débrouillement des asymmétries » mais ne lui donne finalement que quelques indications dans *OF*, t. II, p. 285.

radicaux mais de développer des techniques permettant de travailler directement sur des expressions, qu'elles soient incommensurables ou fractionnaires. De plus, il affirme que sa méthode peut traiter avec les courbes mécaniques : les exemples qui suivent en sont la preuve. S'il est indiscutable que de ce point de vue il surpasse Descartes en élargissant le domaine des courbes étudiées, il convient d'examiner ce qu'il apporte par rapport à Fermat qui comme nous l'avons vu traite des courbes mécaniques. D'autre part la ressemblance de la méthode du Marquis avec celle de Barrow – jointe aux *marginalia* de ce manuscrit se référant au mathématicien anglais – nous conduit à examiner si les *Lectiones geometricae* ont été pour l'Hospital une source d'inspiration pour son étude des courbes mécaniques. Barrow s'intéresse en effet à la recherche de tangentes de courbes non géométriques et caractérisées par une relation dépendant de l'arc d'une autre courbe dont on sait tracer les tangentes. Dans la première proposition de la lecture X, il est question de ce type de courbe :

Soit AEG une ligne courbe quelconque et AFI une autre ligne reliée à la première de telle sorte que pour toute ligne droite EF tracée parallèlement à une ligne droite donnée de position (qui coupe AEG en E et AFI en F), EF est toujours égal à l'arc AE de la courbe AEG , mesuré à partir de A ; aussi soit la ligne droite ET qui touche la courbe AEG en E , et soit ET égal à l'arc AE ; joignez TF ; alors TF touche la courbe AFI ¹.

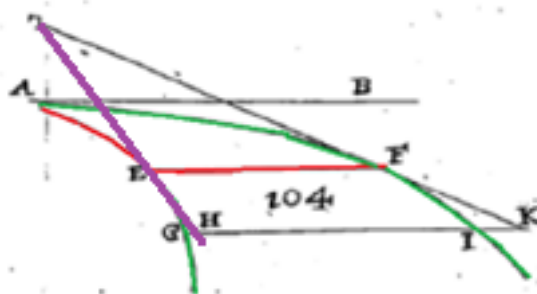


fig. 49

Pour démontrer ce résultat, Barrow considère un point G sur la courbe AG et le point K point de rencontre des droites TK et GK . Il écrit $GK = GH + HK$. Comme ETF et GTK sont semblables et que ETF est isocèle, il a $HK = HT$ donc

$$GK = GH + HT.$$

Or, d'après les propositions 21 et 22 de la leçon VII,

¹ *Lectiones geometricae*, op. cit., p. 75. Traduction du latin par nos soins.

$$GH + HT \geq \text{arc } AG = GI^1.$$

Donc le point K est situé en dehors de la courbe AFI , donc TK est touchante en F .

Cette proposition correspond au cas de la cycloïde lorsque la courbe AEG est un cercle. L'Hospital donne quatre exemples de recherche de tangentes sur des courbes non géométriques. Le premier exemple est justement celui de la cycloïde². Suivons sa démarche :

AMO est une moitié de cycloïde dont ADE est la moitié du cercle générateur, il cherche la tangente MT au point M . Pour ce faire il « imagine » deux petits triangles MRN (où N est un point infiniment proche de M) et DGI (dont le côté DG est connu par la tangente connue DG). Pour connaître le rapport de PM à PT , il cherche à évaluer celui entre NR et RM qui lui est égal.

Il mène du point M la droite MS parallèle à DG . il a alors : $NR = RS + SN$. Or $RS = GI$ et $NS = DG$ (car $NS = NG - DM$, or NG est égal à l'arc AG et DM est égal à l'arc AD , donc $NS = AG - AD = DG$ ³) donc $NR = GI + GD$. Or, ces deux termes sont liés à DI .

En notant

$$AP = x, PD = y, PM = z, AE = b, PQ = DI = MR = e, GI = a, NR = v,$$

l'équation du cercle étant $yy = bx - xx$, il obtient « par la méthode » :

$$a = \frac{be-2ex}{2y} \text{ et } aa = \frac{bbe-4beex+4eexx}{4yy}$$

donc :

$$aa + ee = \frac{bbe-4beex+4eexx+4eeyy}{4yy}.$$

En substituant yy par $bx - xx$ dans le produit $4eeyy$, il obtient :

$$aa + ee = \frac{bbe}{4yy}$$

Donc en vertu du triangle rectangle DGI ,

$$\sqrt{aa + ee} = \frac{be}{2y} = DG,$$

d'où :

$$v = \frac{be-2ex}{2y} + \frac{be}{2y} = \frac{be-ex}{y}$$

¹ *Lectiones geometricae, op.cit.*, Lect VIII, propositions 21 et 22, *ibid*, p. 62.

² Comme toutes les propositions sont exemptes de figures, nous avons tenté une reconstitution de la configuration que le texte appelle. Nous nous sommes inspirés de la figure de la cycloïde qui apparaît dans *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (figure 7).

³ L'Hospital remplace les arcs par les segments car M et N sont infiniment proches donc D et G aussi.

or, $\frac{be-ex}{y} \cdot e :: z.t$ donc $t = \frac{yz}{b-x}$ et en remplaçant b par $\frac{yy+xx}{x}$ (car $yy = bx - xx$), il a enfin :

$$t = \frac{xz}{y}.$$

La décomposition de NR en $RS + SN$ du début de son calcul n'a rien d'hasardeux. L'Hospital suit une décomposition que lui imposent les hypothèses du problème : il sait qu'il peut traduire par une expression analytique chacun de ces termes en utilisant la connaissance de la tangente au cercle (SR est connu par GI qui est l'un des côtés du triangle infiniment petit associé à la tangente du cercle) ou la propriété caractéristique de la cycloïde. Cette traduction algébrique de la figure procure une évidence calculatoire.

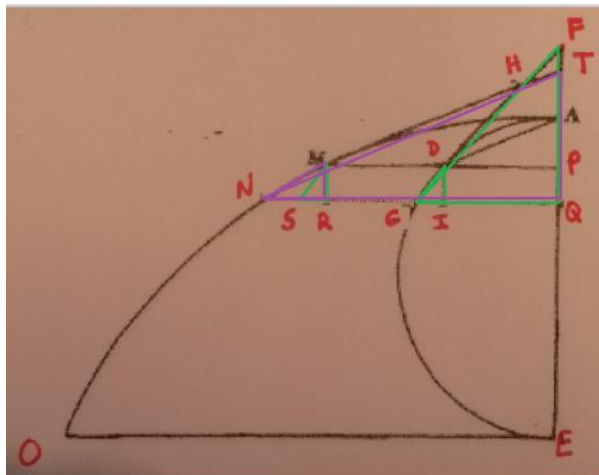


fig. 50

Il fournit ensuite deux constructions. La deuxième est celle de Barrow. Elle ne dépend pas de la propriété caractéristique de la cycloïde puisque la supposition que la courbe ADE soit un cercle n'intervient pas dans la définition des triangles MSN et HDM . Elle est donc valable quelle que soit la paire de courbes définie comme dans la proposition 1 de la leçon X de Barrow. L'Hospital ne manque pas de le remarquer, toujours sans citer Barrow¹:

Cette remarque nous fournit un moyen très facile de déterminer les tangentes d'une infinité de lignes courbes car soit une ligne courbe quelconque ADE (dont je suppose que l'on sache mener les tangentes) et soit une de ses portions quelconques $AD = x$, et que l'on décrive une autre quelconque AMO en sorte néanmoins que l'on puisse exprimer le rapport de DM , que j'appelle y à la portion AD de la première courbe par une égalité.

¹ En *marginalia*, cependant, Byzance note « Barrow, Lect X, prop.1 ».

Il ne faut pour déterminer les tangentes de cette dernière courbe *AMO*, qu'opérer sur cette égalité comme la méthode enseigne pour trouver la valeur de t^1 .

Par le calcul, l'Hospital parvient à obtenir la tangente à la cycloïde. L'expérience de ce calcul l'amène à se rendre compte de la généralisation possible du cas de la cycloïde. Il suffit, dit-il, d'« opérer sur cette égalité ». En affirmant dans un premier temps que sa méthode est générale car elle s'applique aux courbes mécaniques, il se place au-delà de Descartes. S'il fait suivre cette remarque d'autres traitements sur des courbes définies de façon similaire², comme peut l'être la spirale, il ne range pas ces exemples dans des catégories de problèmes plus généraux. À l'inverse, Barrow structure son traité sous forme de problèmes généraux dont les traitements de certaines courbes célèbres sont un cas particuliers. De la même façon que la cycloïde apparaît comme un cas particulier de la proposition 1 de la leçon X, la conchoïde l'est de la proposition 12 de la leçon VIII³, la spirale de la proposition 7 de la leçon X et la quadratrice de Dinostrate de la proposition 10 de la leçon X⁴. Pour Barrow, ce qui prime est uniquement la relation entre les deux courbes dont la tangente de l'une est connue. Ces relations permettent de classer le type de problèmes de tangentes et chacune des courbes célèbres relève d'au moins un de ces cas.

Dans la section destinée aux tangentes, il conclut ainsi :

¹ *Ibid*, folio 34.

² « Soit par exemple $y^3 + x^3 + x^2y = y^2x - b^3 + b^2y - b^2x + bx^2 - by^2$ l'égalité qui exprime le rapport de *DM* à l'arc *AD* », « Exemple 12^{ème} Soit la ligne courbe *ADB*, dont je suppose que l'on sache mener les tangentes, et soit une autre courbe *AMO* de telle nature qu'ayant mené une droite quelconque *PDM* parallèle à *EB*, la portion *AD* de la 1^{ère} ligne courbe soit à *PM* en raison donnée de r à s , il faut du point *M* mener la tangente *MT* », « Exemple 14^{ème} Soit décrite dans le cercle *ADG* dont le rayon est *AO* et le centre *O*, la spirale *AMO*, telle qu'ayant mené un rayon quelconque *OD* coupant la spirale en *M*, la circonférence entière *ADGA* soit à l'arc *DGA*, comme *OD* est à *OM*, et qu'il faille du point donné *M* mener la tangente *MT* » et son prolongement « Si l'on veut qu'une puissance quelconque de la circonférence *ADGA* soit à la même puissance que l'arc *DGA* comme la puissance du rayon *OD* ».

³ « Soit *XEM* une courbe de tangente *ER* en *E*; soit également *YFN* une autre courbe reliée à la première de sorte que si une ligne droite *DEF* est tracée par un point *D* l'interceptée *EF* est toujours égale à une droite donnée *Z* ».

⁴ « Soit *AEH* une courbe donnée, *AD* une ligne droite donnée où le point *D* y est déterminé, et soit *DH* une droite donnée de position ; Soit également une courbe *AGB* telle que pour toute droite *GD* passant par *G* de *AGB*, coupant *AEH* en *E* et pour toute droite *GF* parallèle à *DH* coupant *AD* en *F*, la raison de l'arc *AE* à *AF* est une raison donnée », *ibid*, p. 77.

Les exemples que nous venons de donner sont plus que suffisants pour faire voir le moyen d'appliquer la méthode sur toutes les lignes géométriques, et sur la plupart des mécaniques, de sorte que je ne crois pas qu'on puisse souhaiter de mieux sur ce sujet (...)¹.

Sans utiliser le calcul, Barrow classe les problèmes de tangente de manière générale. L'Hospital ne parvient pas à élaborer une classification aussi générale dans une version calculatoire.

3) Démontrer l'Arithmétique des infinis, le contentieux avec Wallis

Nous avons analysé au chapitre précédent les critiques que Fermat adresse à Wallis. La façon de démontrer de ce dernier ne le satisfait pas. Certains mathématiciens du groupe autour de Malebranche héritent de cette insatisfaction et ils sont déterminés à fournir une démonstration qui leur semble légitime. Nous analysons deux textes contemporains : l'un de Jean Prestet (1689) et l'autre de l'Hospital (1692).

3.1) Prestet : l'Arithmétique des infinis sans géométrie (1689)

Nous ne savons pas quelle fût exactement l'origine de l'élaboration des *Éléments de Mathématiques*² de Jean Prestet. Nous rappelons qu'à cette époque, Malebranche est chargé de l'enseignement des mathématiques à la maison de l'Oratoire et le jeune Prestet est devenu son secrétaire³. Dans l'esprit oratorien de renouveau, Malebranche souhaite le développement de publications liées à l'enseignement. Repérant chez Prestet une certaine habileté pour les mathématiques, il est probable qu'il lui ait confié la responsabilité de cet ouvrage. Le jeune prêtre se voyait honoré de cette tâche alors qu'il n'avait pas encore professé aucun enseignement. La rédaction est achevée vers 1670⁴, leur contenu complète celui de l'ouvrage d'Arnauld. La difficulté de trouver des

¹ FR 25306, deuxième livre, fol. 46-47.

² Prestet, Jean, *Éléments de Mathématiques*, Editions Pralard, Paris, 1675.

³ André Robinet propose le terme de « valet » : « les oratoriens ont droit d'avoir un « valet » dans Robinet, André, « Jean Prestet ou la bonne foi cartésienne (1648-1691) », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°2, Paris, 1960, p. 95.

⁴ Robinet, André, *ibid*, p. 1.

éditeurs s'engageant à publier des écrits « modernes » et de vision « cartésienne » retarde la publication des *Éléments* de près de cinq ans¹.

Quelques mois avant la publication de l'ouvrage, alors qu'il effectue son séjour parisien, Leibniz rencontre Prestet en compagnie de Malebranche. Ce dernier reconnaît en Leibniz un mathématicien de grand talent dont il estime avoir tout « à apprendre en mathématiques et en physique »². Ainsi, Malebranche et Prestet en vue de la finition des *Éléments*, sollicitent son avis sur leur contenu. Malgré ces précautions, l'ouvrage est publié sans que Prestet n'applique guère de modifications, de plus, le retard de publication a pour effet de rendre leur contenu caduc. Certes, Malebranche a collaboré avec Prestet pour ce traité, mais, contrairement à ce qu'a pu soupçonner John Wallis³, Prestet en est le seul auteur.

Leibniz trouve dans l'ouvrage non seulement de la clarté et de l'ordre⁴ mais reconnaît des qualités à la présentation de l'algèbre de Viète et de Descartes « rendue plus familière aux Arithméticiens ». Cependant, il est essentiellement déçu en raison de nombreuses lacunes. Parmi celles-ci, Prestet aurait dû insérer « les règles de réduction de Hudde, les limites des équations et les méthodes de *Maximis* et *Minimis* de Descartes et Fermat »⁵. Aussi, Prestet n'aurait pas suffisamment développé « les sommes des progressions » qui

fait une Analyse à part, d'autant plus que Viète et des Cartes même n'en avaient point de connaissance. Cependant c'est elle qui donne les quadratures, les centres de gravité et une infinité de problèmes très importants dans les mécaniques⁶.

Prestet a destiné pourtant une section aux « Proportions et progressions arithmétiques »⁷ dans laquelle il consacre un paragraphe à la résolution du « dixième problème » en énonçant un procédé pour obtenir la somme finie des puissances des

¹ « Les retards provinrent surtout de la nécessité de trouver les protections suffisantes pour publier dans un milieu hostile, des travaux « modernes » de stricte obéissance cartésienne. », *ibid*, p. 96.

² Robinet, André, *Malebranche et Leibniz, Relations personnelles, op. cit.*, p. 15.

³ Dans la préface de son autre ouvrage *Nouveaux Éléments* (voir plus loin). Prestet affirme que Wallis « attribue [*les Éléments*] à un personne plus habile que moi ».

⁴ « J'y trouve assez de méthode et assez [d'ordre] de clarté pour instruire une personne qui y apportera un peu d'attention. », *ibid*, p. 57.

⁵ *Ibid*.

⁶ *Ibid*.

⁷ *Éléments*, Livre V, p. 168.

termes d'une suite arithmétique de premier terme a et de différence b ¹. Il l'applique à des exemples numériques, certains étant exactement les mêmes que ceux proposés par Pascal dans son traité « *Potestatum numericarum summa* »², édité posthumément en 1665. Mais alors que Pascal, par des considérations sur les indivisibles, en déduit le résultat pour une somme infinie des puissances des nombres entiers, Prestet énonce la formule uniquement pour une somme finie tout en précisant qu'il tient ces résultats de Pascal lequel « les juge fort utiles dans la Géométrie des indivisibles pour mesurer l'aire de toutes sortes de paraboles, & d'une infinité d'autres figures »³. Cette remarque est placée sans aucun commentaire supplémentaire. Le lien entre la mesure des aires et le résultat de sommes finies de puissances n'est pas du tout explicité. Prestet le connaît-il ?, ou ne veut-il pas entrer ici dans des considérations délicates ?

Prestet reprend les *Eléments* en vue d'une deuxième édition plus « digeste » qui est publiée en 1689 sous le titre *Nouveaux Elémens de Mathématiques*⁴. Si Malebranche patronne les *Elémens*, il en va autrement pour les *Nouveaux Elémens* : le philosophe a délaissé l'étude des mathématiques depuis quinze ans et les nouveautés qui apparaissent⁵ dans l'ouvrage sont entièrement de la main de Prestet⁶. Leibniz encourage ce projet comme en témoigne la lettre de mars 1679 qu'il adresse à Malebranche : « Je voudrais savoir si votre M. Prestet continue à travailler dans l'analyse. Je le souhaite parce qu'il y paraît propre »⁷. Pendant les années qui séparent ces deux publications, le jeune prêtre a acquis une expérience dans l'enseignement

¹ *Ibid*, p. 178.

² Pascal, Blaise, *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière*, Paris, Chez Guillaume Desprez, 1665, p. 34-41. Cet ouvrage ne figure pas dans l'inventaire de la bibliothèque de Malebranche.

³ « Conclusio. Quantum haec notitia ad spatiorum curvilinearum dimensiones conferat, fatiscorunt qui in indivisibilium doctrinâ tantisper versati sunt. Omnes enim omnium generum Parabolae illicò quadrantur, & alia innumera facillimè mensurantur », *ibid*, p. 40.

⁴ Prestet, Jean, *Nouveaux Elémens de mathématiques*, Editions Pralard, Paris, 1689.

⁵ Prestet ne se contente pas de donner un large aperçu des connaissances arithmétiques et algébriques, il va obtenir de nouveaux résultats. Il effectue des développements d'analyse diophantienne rationnelle, travaille sur la combinatoire et la théorie algébrique des équations et donnera une interprétation des incommensurables. Pour un travail critique sur la lecture du personnage mathématicien de Prestet, on pourra se référer à « *Prolégomènes : l'auteur, le contexte et les textes* », Asselah, Kenza-Katia, *Arithmétique et algèbre dans la seconde moitié du XVII^{ème} siècle français : les « Elémens et nouveaux élémens de mathématiques. » de Jean Prestet*, thèse soutenue sous la direction de Roshdi Rashed, Paris 6, 2005.

⁶ Lettre de Malebranche à Leibniz mars 1679 : « L'auteur des Elémens est maintenant prêtre à l'oratoire et depuis ce temps il n'a point pensé à l'Algèbre. Il va néanmoins revoir son livre pour l'Edition nouvelle quand elle se fera. », Robinet, André, *Malebranche et Leibniz, relations personnelles, op. cit.*, p. 106.

⁷ Lettre de Leibniz à Malebranche du 13 Janvier 1679, *Relations personnelles, op. cit.*, p. 105.

dans les collèges¹ et, malgré ses occupations religieuses il a pu consacrer un peu de temps à approfondir ses connaissances mathématiques². Les *Nouveaux Elémens* se veulent, comme l'ouvrage de 1675, une compilation des connaissances essentielles à l'apprentissage et à l'approfondissement des mathématiques.

Dans son nouveau traité, les résultats des sommes des puissances sont repris dans le livre XII sous forme également de problème³ (numéro VIII) :

connaissant la somme entière d'une progression arithmétique, & le premier terme, et la différence ou l'excès dont le second surpasse le premier : pour trouver la somme des quarez, ou des cubes, ou de telles autres puissances qu'on voudra de termes.

Cet énoncé concerne une somme finie de termes et est équivalent à celui des *Elémens*. Pour le prouver, Prestet utilise des théorèmes⁴ établis par des raisonnements combinatoires dans le livre VII et par l'utilisation de la table des puissances dont il a expliqué la formation dans le livre III⁵. Il établit les formules des sommes des puissances entières jusqu'à l'ordre six et affirme que les cas des puissances supérieures peuvent être traités en suivant le même type de raisonnement « à l'infini ».

Il fait suivre immédiatement par un paragraphe intitulé « Arithmétique des infinis » dans lequel il expose les premières propositions arithmétiques de *l'Arithmetica infinitorum* de Wallis. Avant d'aborder les résultats arithmétiques, Prestet exprime quelques considérations sur la conception des indivisibles :

Si une grandeur est conceuë comme divisée en plusieurs parties égales, & chaque partie en beaucoup d'autres égales, & chaque nouvelle encore en diverses parties égales, & ainsi de suite sans jamais s'arrêter jusques à l'infini ; le dernier terme de ces divisions & subdivisions infinies, auquel pourtant on n'arriverait jamais, seroit le zéro même ; & le

¹ De 1675 à 1680, Prestet abandonne les sciences exactes pour suivre la préparation à la prêtrise à l'Oratoire. Il est envoyé à Nantes en 1680 pour occuper la chaire de professeur de mathématiques mais n'y reste pas longtemps, arrivant au moment le plus critique de l'offensive jésuite. Il est ensuite dirigé vers Saumur le 2 décembre 1680 puis à Angers en 1681 où il ne reste que trois ans, son élève Reyneau le succèdera dans ce poste pendant de nombreuses années.

² Lorsque *les Elémens* sont publiés, Prestet a 23 ans, il a été formé aux mathématiques par Malebranche, il confesse que sa formation aurait dû être complétée : « j'avais commencé d'étudier les premiers principes de l'analyse et de la géométrie. Et ainsi, il n'est pas vraisemblable que j'eusse pu lire et digérer en si peu de temps une foule de livres », *Nouveaux Elémens*, tome II, Préface.

³ *ibid*, p. 405.

⁴ *Ibid*, p. 175.

⁵ « Formation de la table des puissances », *Ibid*, p. 81-83.

plus approchant seroit une partie infiniment petite & presque insensible à la raison même, puisque même nôtre esprit n'aurait plus de prise sur elle ; comme le point dans la ligne, ou la ligne dans le plan, ou le plan dans le solide¹.

SECONDE TABLE.
Pour la composition des Puissances.

Pour la page 80^e de la 1^{re} partie.
Que tout déborde hors du Livre, & regarde la page 81^e.

1										
1a	1b									
1aa	2ab	1bb								
1a ³	3aab	3abb	1b ³							
1a ⁴	4a ³ b	6aabb	4ab ³	1b ⁴						
1a ⁵	5a ⁴ b	10a ³ bb	10aab ³	5ab ⁴	1b ⁵					
1a ⁶	6a ⁵ b	15a ⁴ bb	20a ³ b ²	15a ² ab ³	6ab ⁴	1b ⁶				
1a ⁷	7a ⁶ b	21a ⁵ bb	35a ⁴ b ²	35a ³ ab ³	21a ² ab ⁴	7ab ⁵	1b ⁷			
1a ⁸	8a ⁷ b	28a ⁶ bb	56a ⁵ b ²	70a ⁴ ab ³	56a ³ ab ⁴	28a ² ab ⁵	8ab ⁶	1b ⁸		
1a ⁹	9a ⁸ b	36a ⁷ bb	84a ⁶ b ²	126a ⁵ ab ³	126a ⁴ ab ⁴	84a ³ ab ⁵	36a ² ab ⁶	9ab ⁷	1b ⁹	
1a ¹⁰	10a ⁹ b	45a ⁸ bb	120a ⁷ b ²	210a ⁶ ab ³	252a ⁵ ab ⁴	210a ⁴ ab ⁵	120a ³ ab ⁶	45a ² ab ⁷	10ab ⁸	1b ¹⁰

fig. 51

Dans ce passage, Prestet indique que la division itérée ne saurait parvenir à sa fin, c'est-à-dire à ce qu'il appelle le « zéro absolu », mais qu'il y a quelque chose qui n'est pas le zéro même et qui est encore pensable malgré être « presque insensible à la raison ». Cette partie est nommée « partie infiniment petite ». Il indique que ce sont ce genre de considérations qui sont le principe de « l'arithmétique nommée des infinis et le système de la géométrie des indivisibles ». Ces derniers sont à « la mode » des géomètres car ils permettent de gagner du temps et que leurs règles sont moins « sévères qu'une Géométrie plus exacte & plus lumineuse ». Cependant, il met en garde contre les « paralogismes où elle engage insensiblement, lorsqu'on en fait usage sans apporter toutes les précautions nécessaires ». Parmi les célébrités dans ce domaine, il cite Wallis et Bouilliaud qui ont traité de l'Arithmétique des infinis, mais il remarque que le premier :

ne prouve que par induction, quoi-qu'il soit aisé de les tirer avec Monsieur Paschal de la proposition précédente, dont elles sont une suite naturelle, comme je l'avais insinué dans mon ancien ouvrage, & comme on le verra clairement dans les propositions suivantes².

Les mêmes critiques de Fermat adressées à Wallis sont renouvelées¹. Fermat est d'ailleurs explicitement évoqué à la fin des preuves car il « a fort bien reconnu le

¹ Ibid, p. 405.

² Ibid, p. 406.

défaut de la méthode de M^r Wallis pour les conclusions que l'on vient de former », mais Prestet ajoute que Fermat « s'est contenté de prouver seulement pour la somme des termes par une méthode qui ne peut aller plus loin ».

Quelle est donc la preuve que propose Prestet qui serait « naturelle » et découlant des résultats pascaliens ?

Il s'agit de trouver l'expression du rapport entre la somme des puissances d'entiers commençant par 0 et le produit du plus grand des entiers élevé à cette puissance par le nombre de termes. Il note $1d$ la différence ou le deuxième terme de la suite et zd le dernier terme. En utilisant le résultat du problème VIII, il trouve que la somme de ces entiers est $\frac{dzz + 1dz}{2}$ puis que la somme des carrés est $\frac{zzdd + 1zzdd}{3} + \frac{z^3 dd + zzzd}{6zd}$ et en divisant par le produit de z^2 (le plus grand au carré) et de $z + 1$ (le nombre de termes), il obtient $\frac{1}{3} + \frac{1}{6zd}$. Il opère le même type de raisonnement pour obtenir des formules jusqu'à la somme des puissances sixième d'entiers comme lors du huitième problème. Puis il énonce le corollaire final :

Si la progression arithmétique, qui commence par 0, & où tous les termes se suivent selon l'ordre des nombres naturels, s'étendent jusqu'à l'infini ; la somme des quarrés seroit à autant de fois le plus grand carré qu'il y a de termes comme 1 est à 3 car $\frac{1}{3} + \frac{1}{6zd}$ comprend une fraction $\frac{1}{6zd}$ plus petite que telle autre qu'on voudra proposer : Comme il est aisé de le voir, en mettant successivement pour zd chacun des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Car les valeurs successives de la fraction $\frac{1}{6zd}$ seront $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24},$ &c. De sorte que si le nombre zd augmente à l'infini, ainsi qu'on le suppose ; la fraction sera infiniment petite, & de nulle valeur. Et par conséquent le rapport $\frac{1}{3} + \frac{1}{6zd}$ sera au juste $\frac{1}{3}$.

Contrairement à Wallis dans l'*Arithmetica infinitorum*, Prestet ne raisonne pas par induction pour obtenir la formule correspondant à la somme finie. En revanche, pour parvenir à la formule pour une somme infinie de carrés, il argumente en faisant appel au langage des infiniment petits de façon très similaire à Wallis³. Pour les cas des autres sommes des puissances, il raisonne « par un raisonnement semblable », par exemple pour le cas de somme des cubes, le terme $\frac{1}{4zd}$ qui s'ajoute à $\frac{1}{4}$ est estimé pour

¹ Voir chapitre 2.

² *Ibid*, p. 407-408.

³ Voir chapitre 2.

différentes valeurs croissantes de z . De l'observation de sa décroissance (d'ordre géométrique par un facteur $\frac{1}{4}$), il déduit que la somme infinie est égale à $\frac{1}{4}$. De même pour la somme des puissances de 4, le reste des termes qui s'ajoutent à $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire $\frac{3}{10zd} + \frac{1}{30zzdd} - \frac{1}{30z^2da} - \frac{1}{30z^3d^3}$, est « infiniment petit ou de nulle valeur ». Le raisonnement par induction est donc ici présent chez Prestet de la même façon que nous l'avions observé chez Wallis.

Prestet déduit ensuite le rapport de la somme des racines des entiers¹ (par interpolation) et d'autres résultats identiques à ceux énoncés par Wallis. Ce paragraphe destiné à l'*Arithmétique des infinis* s'achève par le commentaire suivant :

Il y a encore d'autres propositions utiles & curieuses & tirées des mêmes principes, qu'on pourra voir dans le Traité de Monsieur Wallis. Et ceux qui sont versez dans la Géométrie prendront plaisir à considérer la juste application qu'il fait de cette nouvelle espèce d'Arithmétique aux figures mêmes les plus composées².

Dans les *Elémens*, l'évocation rapide à Pascal pour les applications géométriques avait une visée purement informative. Ici, à nouveau, Prestet ne présente aucune des propositions géométriques qui découlent des propositions arithmétiques mais il renvoie à Wallis. Or, si à l'époque des *Elémens*, Prestet, par sa jeunesse, pouvait ignorer le projet de *l'Arithmetica infinitorum*, cela est peu probable quinze ans plus tard³. Nous avons vu dans le chapitre 2 que le dessein de Wallis est de s'enquérir de formules arithmétiques pour s'en servir pour des résultats géométriques. Dans le cas des formules des puissances, il interprète les sommes comme des aires de paraboles et d'hyperboles. Or cette interprétation nécessite la géométrie des indivisibles : Wallis explicite soigneusement ce passage. À la lecture intégrale de ce paragraphe consacré à l'Arithmétique des infinis, des questions sur l'agencement de la présentation se posent. En effet, Prestet énonce des considérations sur la divisibilité infinie, l'infiniment petit et le zéro absolu et affirme qu'elles sont le principe de

¹ *Ibid*, p. 409.

² *Ibid*, p. 416.

³ Dans la Préface des *Nouveaux Éléments*, Prestet explique que lorsqu'il publia les *Éléments*, il ne connaissait presque rien aux auteurs étrangers : « Lors même qu'on m'avertit du Livre de Monsieur Wallis, je ne sçavois que le nom d'un seul des Auteurs Anglois », mais il sait reconnaître la valeur de Wallis : « Je dirai même en particulier à la louange de M^r Wallis que j'ay peu vû de Mathématiciens qui sçachent joindre comme luy la clarté & la netteté à une érudition très-profonde (...) ».

l'Arithmétique des infinis et de la Géométrie des indivisibles. Mais rien dans la suite permet au lecteur ni de savoir de quelle manière une somme infinie de termes peut représenter une somme infinie d'indivisibles, ni non plus de savoir comment une somme infinie d'indivisibles représente une aire. S'il précise que les divisions doivent être « égales », il ne tire pas un profit explicatif de cette information pourtant si cruciale.

3.2) Leibniz : au-delà de Wallis (les opuscules des *Acta Eruditorum*)

Dans les *Acta Eruditorum* de l'année 1686, Leibniz fournit un compte-rendu de l'ouvrage *Treatrise of Algebra* de Wallis publié l'année précédente¹. En 1673, pendant son séjour parisien, Leibniz se familiarise avec les méthodes par indivisibles homogènes et travaille l'*Arithmetica infinitorum*² de Wallis. Dans sa recension, il reconnaît ce dernier comme étant le premier à énoncer les résultats concernant les quadratures générales des paraboles et hyperboles :

Enfin le très éminent Géomètre John Wallis rendit raison de l'existence d'une infinité d'hyperboloïdes possédant une aire calculable, bien que de longueur infinie, et fournit un critère probable [*probabili*] permettant de les distinguer des Hyperboloïdes dont l'aire n'est pas calculable ; bien qu'il relève d'une induction, le résultat est particulièrement ingénieux³.

Cependant, le raisonnement de Wallis est fautif : « son affirmation n'était fondée que sur une conjecture (...) c'est pourquoi beaucoup de gens conservaient des raisons de douter »⁴. Fin 1675, Leibniz écrit à deux de ses correspondants français, Jean Gallois (1632-1707) et Jean-Paul de la Roque (?-1691)⁵. Parmi ses occupations et responsabilités, Gallois est membre de l'Académie des Sciences depuis 1672. De plus, il est très lié au *Journal des Sçavants* qu'il a fondé et qu'il dirige jusqu'en 1674 date à

¹ L'article des *Acta* concernant le compte-rendu de *Treatrise of Algebra* de Wallis n'était pas signé mais des recherches peuvent montrer qu'il est de la main de Leibniz, Stedall, Jacqueline, « John Wallis and the French : his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes » dans *Historia Mathematica*, 39 (2012), 265-279. Stedall attribue dans sa bibliographie le patronyme à Leibniz.

² Hofmann, Joseph E, *Leibniz in Paris 1672-1676*, traduction de l'allemand de *Die entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)*, Oldenburg Verlag, Munich, 1949, traduction publiée en 1974, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. 51.

³ Scholie de la proposition XI, Leibniz, G.W., *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*, tr. par Marc Parmentier, Vrin, Paris, 2004, p. 97.

⁴ *Ibid*, p. 289.

⁵ Lettre à Gallois, fin 1675, AIII, 1, p. 356. Lettre à La Roque, fin 1675, *ibid*, p. 335.

laquelle La Roque en devient directeur¹. Leibniz a trouvé une façon singulière d'exprimer la quadrature du cercle. S'adressant à ses correspondants, il souhaite que sa découverte soit rendue publique par le biais de ce journal :

La quadrature Arithmétique du Cercle, et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres, il y a déjà quelques années ; leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public : Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées, pour donner une seule qui soit nouvelle et considérable ; j'ay recours à vostre journal, qui nous donne le moyen de publier un theoreme, sans faire un livre².

Les contenus des deux lettres est très similaire. Aucune publication ne paraît dans le journal³, le manuscrit « farci d'un grand nombre de propositions repassées » reste également sans publication⁴ du vivant de Leibniz⁵. Il porte le titre de « De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis ». Les *Acta Eruditorum* publient en 1682 l'opuscule « Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit »⁶ qui reprend certaines questions traitées dans les deux lettres, mais ne démontre aucun résultat. En 1692, Louis Carré fait une copie de ce mémoire pour servir au projet collectif autour de Malebranche⁷.

Dans ces deux lettres et dans l'opuscule, nous trouvons des précisions sur ce que Leibniz entend apporter au problème de la quadrature du cercle :

¹ On pourra consulter la page biographique de ce journaliste : <http://dictionnaire-journalistes.gazettes18e.fr/journaliste/461-jean-paul-de-la-roque> (consulté le 31 juillet 2018).

² Lettre à La Roque.

³ Nous n'avons pas trouvé la raison pour laquelle aucune décision n'est prise pour une publication.

⁴ Le texte avait été confié par Leibniz à son ami Soudry chargé d'une édition mais celui-ci décède en 1678. Le manuscrit finit par être renvoyé à Hanovre mais il s'égaré au chemin. Il faut attendre 1993 pour une publication intégrale du traité : *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, kritisch herausgeben und kommentiert von Eberhard Knobloch, Göttingen, 1993.

⁵ Nous nous référons à l'édition française parue en 2004 citée plus haut.

⁶ « De vera Proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa » dans Leibniz, *Naissance du calcul différentiel, op. cit.*, p. 61. Nous le citerons sous le nom « Vera Proportione » Pour ce paragraphe nous nous référons à ces deux lettres et à l'opuscule « Vera proportione » car les contenus sont très semblables. Nous préciserons lorsqu'un propos n'est présent que dans les lettres et absent dans l'opuscule.

⁷ FL 17860.

Ceux qui ont cherché la Quadrature du Cercle le plus souvent n'ont pas même trouvé des acheminements pour y aller peu. (...) Il est constant que la meilleure voye de rendre les problèmes de Géométrie traitables, est celle de les rapporter aux nombres. Ce que Viete et des Cartes ont fait dans les problemes rectilignes, en les reduisant aux equations d'Algebre, comme si on ne cherchait que des nombres. Mais dans les Problèmes Curvilignes lorsqu'il s'agit de trouver les centres de gravité et la dimension des lignes courbes, des figures, des surfaces et des solides, on ne peut pas encor renfermer l'inconnue qu'on cherche dans une équation ; (...) Cependant, là où les équations manquent, la nature nous a fourni un autre moyen de rapporter les problèmes aux nombres, qui est celui de la progression des nombres, dont il faut trouver la somme, pour donner la dimension de quelques figures curvilignes¹.

Il relève que les problèmes de quadrature ne se résolvent pas toujours par l'algèbre mais qu'ils peuvent néanmoins l'être par le calcul : la technique des séries [« la progression des nombres »] peut y remédier « naturellement ». Il cite d'abord Archimède car c'est le premier qui s'en est servi pour quarrer la parabole puis sont nommés Cavalieri, Fermat et Wallis qui ont « poussé la chose plus en avant. » Pour le cercle, certains géomètres ont fourni des moyens de donner des « approximations » – il cite entre autres Ludolph de Cologne – mais celles-ci « ne relèvent rien de satisfaisant (...) si on ne trouve pas comment prolonger de tels nombres à l'infini ² ». Dans la lettre à Gallois, comme dans les autres textes, il affirme que personne avant lui n'a réussi à trouver une série qui exprime les ordonnées irrationnelles du cercle en termes rationnels. Pour l'obtenir, il a cherché et obtenu par une transformation, une figure « équivalente³ au Cercle » et rationnelle, c'est-à-dire de même aire, et telle que « les ordonnées sont rationnelles lorsque les abscisses sont rationnelles »⁴. Dans son manuscrit, il déclare que cette transformation ne s'applique pas uniquement au cercle mais à toute figure : « la mienne [méthode] fut celle de réduire toutes les figures, quelque qu'en soit l'équation, à des figures rationnelles équipollentes [*aequipollentem transmutari*]⁵ Quel est donc le caractère « extraordinaire » de cette transformation ?

Pour la quadrature arithmétique du cercle Leibniz a trouvé une transformation inédite du cercle en une courbe rationnelle. Il explique :

¹ Lettre à Gallois, AII 1, p. 358. Ce thème est repris dans l'opuscule de 1682, *op. cit.*, p. 71.

² « De vera proportione », *op. cit.*, p. 74.

³ Leibniz peut dire également « équipollente », *Quadrature arithmétique du cercle*, *op. cit.*, p. 139, ou « figure commensurable à une figure donnée » dans une lettre à La Roque fin 1675.

⁴ *Ibid*, p. 359.

⁵ *La Quadrature arithmétique*, *op. cit.*, p. 309.

La raison pourquoy ceux qui ont écrit la Geometrie des Indivisibles, et de l'Arithmetique des infinis, n'ont pas fait la même remarque, est parce qu'on est accoustumé de ne resoudre les figures que par des ordonnées parallèles, en une infinité de petits rectangles, au lieu que j'ay trouvé un moyen general de resoudre utilement toute figure en une infinité de petits Triangles aboutissant à un point, par le moyen des ordonnées convergentes¹.

Dans la lettre à La Roque, il nomme cette transformation une « métamorphose » et il affirme l'avoir trouvée par combinaison². Elle permet de transformer une courbe en une autre en la décomposant en « petits triangles » ayant un sommet commun. Leibniz insiste sur la généralité du théorème portant sur l'existence de cette transformation et affirme qu'il est :

un des plus généraux et des plus fertiles de toute la Géométrie. Et on peut demonstrier par là Géométriquement non seulement toutes les quadratures connues, des Paraboloeides et Hyperboloeides, et le fondement de l'Arithmétique des infinis, que le célèbre Mons. Wallis n'avoit établi au commencement que par induction. Je porte icy les choses plus avant, et on peut dire que cecy est une promotion de la Géométrie, comme je feray voir tantost. Cavalieri et autres résolvent les figures en rectangles, par les ordonnées parallèles ; j'ouvre icy un chemin nouveau, et je vais voir qu'on les peut résoudre utilement en triangles, par des convergentes, ce qui augmentera de beaucoup la Geometrie des indivisibles.

Cette transformation n'est pas décrite dans l'opuscule « De Vera proportione » mais elle l'est dans les deux lettres adressées aux correspondants français. La démonstration, présente dans le manuscrit, reste inédite jusqu'à sa publication en 1993. Pour démontrer le résultat Leibniz a besoin d'un lemme assez élémentaire :

Si par les trois angles du triangle (ABC) passent trois parallèles (AD, EB, FC) , ce triangle sera la moitié d'un rectangle (EFG) compris sous l'intervalle de deux de ces parallèles et sous (FG) égale à (AD) l'intervalle entre l'angle (A) ou passe (EF) la troisième, et le point

¹ *Ibid*, p. 359.

² « J'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationnelles, c'est-à-dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Métamorphoses ; et les ayant essayées par une combinaison très aisée (car je pouvois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, différentes et néanmoins dépendentes de la circulaire) j'ay trouvé bien tost le moyen que je m'en vays expliquer », *ibid*, p. 346.

affirme qu' « on est accoustumé de ne resoudre les figures ». Si le nombre de triangles et rectangles augmente à l'infini, il affirme que le polygone devient la courbe *ABM* et que l'espace gradiforme *EXRE* devient un espace curviligne. Le rapport entre chaque rectangle et chaque triangle étant double, il en déduit que les aires des deux figures sont dans le même rapport. Ni dans aucune des lettres, ni dans l'opuscule, il fournit une preuve de ce théorème comme il l'effectue dans son manuscrit¹. Il justifie la « dégradation » du polygone et celle de l'espace gradiforme en espace curviligne en expliquant :

Je suppose icy qu'un curviligne n'est qu'un polygone infinitangle, suivant la manière de raisonner receue aujourd'huy ; pour parler clairement et en peu de mots, puisque tant d'autres ont fait voir, qu'il est aisé de la réduire à celle des anciens par les inscrits et circonscrits².

Sa justification s'appuie donc sur un argument reconnu de tous : les géomètres s'autorisent à considérer une courbe comme un « polygone infinitangulaire » dans leurs démonstrations car ils peuvent les réduire à une démonstration à l'ancienne en utilisant les polygones inscrits et exinscrits. Or, nous devons rappeler que les preuves qui légitiment la courbe comme polygone à une infinité de côtés concernent uniquement des polygones réguliers ou des espaces gradiformes issus de divisions égales, ce qui n'est pas ici le cas. Leibniz force donc cet argument car il ne peut pas faire valoir l'idée du polygone infinitangulaire de côtés égaux « suivant la manière de raisonner receue aujourd'huy » pour montrer que la courbe peut être assimilée à un polygone infinitangulaire de côtés inégaux :

Et on peut dire que cellecy est aussi rigoureuse que l'autre, puisque cette reduction a esté démontrée generalement, à fin qu'on n'aye pas besoin de la répéter dans chaque démonstration particulière³.

¹ Leibniz, G.W., *Quadrature arithmétique*, op. cit., propositions VI et VII, p. 47-85. Pour une description et commentaires de ces propositions, Knobloch, Eberhard, « Leibniz and the infinite », *Quaderns d'Historia de l'Enginyeria*, volum XVI, 2018, p. 11-31, Rabouin, David, « Infini mathématique et infini métaphysique : d'un bon usage de Leibniz pour lire Cues (... et d'autres) », *Revue Métaphysique et de morale*, N°2, 2011, p. 203-220 et « Leibniz's rigorous foundations of the Method of indivisibles or how to reason with impossible notions », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, op. cit., p. 347-364.

² *Ibid*, p. 361.

³ *Ibid*, p. 361.

En fait, son manuscrit montre qu'il connaît une démonstration qui peut être tenue pour rigoureuse (c'est-à-dire à l'ancienne), cependant il ne souhaite pas la développer ici, car il critique ce type de preuve à cause de leur manque de fécondité :

Je me serais volontiers dispensé de cette proposition car rien ne m'est moins naturel que de suivre certains auteurs dans leurs peu féconds mais ostentatoires scrupules de détail. Se signalant plus par leur labeur que par leur génie (...) Je ne conteste pas pour autant qu'en Géométrie il importe que les méthodes et les principes des inventions, à l'exemple de certains théorèmes essentiels, puissent être tenus pour rigoureusement démontrés, j'ai donc pensé qu'il fallait déférer aux opinions admises.¹

Il est important de signaler que cette preuve ne nécessite pas la considération simultanée de polygones circonscrits et inscrits, comme il l'affirme :

La singularité de la Démonstration est de résoudre la question non par le truchement de figures inscrites et circonscrites mais des seules figures inscrites. (...) cependant, parmi toutes les déductions *ad absurdum*, je crois que la manière de procéder la plus simple, la plus naturelle et la plus proche de la démonstration directe consiste à montrer directement (faute de quoi on est conduit d'ordinaire à un double raisonnement en prouvant que l'une n'est, d'une part pas plus grande, d'autre part pas plus petite que l'autre) qu'il n'y a aucune différence entre deux quantités et que par conséquent ces deux quantités sont égales, et surtout à n'employer qu'un seul terme intermédiaire, qu'il s'agisse d'une figure inscrite ou circonscrite, mais non les deux en même temps².

Ces considérations sur la manière de démontrer ne sont pas dévoilées à ses correspondants. Il préfère mettre en avant la « généralité » et la « fertilité » de son théorème de « métamorphose » qui lui permettent de démontrer « géométriquement » toutes les quadratures connues en particulier celles que Wallis avait déduites par induction³. Il s'agit d'une véritable « promotion » de la géométrie car il n'y a plus à subir l'accoutumance « de ne résoudre les figures que par des ordonnées parallèles, en une infinité de petits rectangles », le choix de la forme du polygone infinitangulaire est plus libre et dépend du problème à résoudre⁴.

¹ Scholie de la proposition VI, *Quadrature arithmétique du cercle*, *op. cit.*, p. 63.

² Scholie suivant la proposition VII, *ibid.*, p. 68-71.

³ Dans *Quadrature arithmétique du cercle*, il déduit entre autres la quadrature de la cycloïde et la courbe logarithmique.

⁴ L'indétermination de la forme du polygone est liée à l'indétermination des variables du calcul différentiel. Comme l'explique Henk Bos, le concept de polygone infinitangulaire implique une

La critique que Leibniz adresse à Wallis ne se réduit pas au manque de rigueur du raisonnement par induction et interpolation mais s'étend également à l'expression que celui-ci a trouvée pour la quadrature du cercle : il estime que cette expression sous forme de produit infini et comportant des irrationnels n'est pas rigoureuse¹. Il applique au cercle la transmutation que nous avons décrite et ramène la quadrature du cercle à celle d'une courbe rationnelle qui a une équation du type $x = \frac{2az^2}{a^2+z^2}$. Les résultats de Mercator concernant le développement en série de $\frac{1}{1+t}$ lui permettent de déduire le résultat sous forme d'une série² : « si le carré du diamètre d'un cercle vaut 1, l'aire du cercle est

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \text{ etc } \gg$$

Leibniz déclare que cette série ainsi exprimée :

Renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre qu'une fraction, et par suite de toute grandeur donnée. Prise en sa totalité, la série exprime donc la valeur exacte³.

Cette série satisfait Leibniz car on peut « prolonger de tels nombres [les termes de la série] à l'infini », c'est-à-dire qu'il existe une loi permettant de calculer le terme rationnel suivant en fonction du précédent. Même si tous les termes ne peuvent être donnés actuellement dans leur totalité, cette loi d'engendrement permet d'embrasser l'infini et d'exprimer « la valeur exacte. » Par-là cette quadrature est « vraie » et « exacte » comme le titre de l'opuscule l'indique.

En outre, Leibniz qualifie cette quadrature d'« arithmétique ». Cette appellation est issue d'une classification qu'il a entreprise en considérant les manières de quarrer. Une quadrature peut être obtenue par le calcul ou par une construction géométrique, dans les deux cas elle s'effectue, soit « rigoureusement », soit de

indétermination : nous ne savons pas a priori de quel type de polygone infinitangulaire la courbe est une extrapolation car nous ignorons comment les différentielles varient le long de la courbe. Pour Leibniz l'indétermination des variables est un atout car le choix de la variable constante est arbitraire dans « The fundamental concepts of the leibnizian calculus », *Lectures in the History of Mathematics, History of Mathematics*, vol. 7, American mathematical society, USA, 1993, p. 88.

¹ Hofmann, Joseph, E., *Leibniz in Paris*, op. cit., p. 52-53.

² Pour une description de l'obtention de ce résultat : Leibniz, G.W., *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 66-69 ou Hofmann, Joseph E., *Leibniz in Paris*, op. cit., p. 59-61.

³ « Vera proportione », op. cit., p. 77.

« manière approchée ». Les quadratures obtenues par un calcul rigoureux sont appelées analytiques. Celles-ci peuvent être « algébriques » lorsqu'elles s'expriment à l'aide de « nombres ordinaires », c'est-à-dire de solutions d'équations communes, « transcendantes », ou « arithmétiques ». Une quadrature arithmétique relève donc de ce cas et consiste en une série « où la valeur exacte du cercle apparaît à travers une suite de termes, de préférence rationnels »¹.

Cette classification des quadratures n'a pas du tout un dessein taxonomique mais relève d'une préoccupation mathématique. Leibniz précise sa pensée dans d'autres opuscules chronologiquement proches de « De Vera Proportione »². Dans « De Geometria recondita », qui est l'opuscule qui suit le compte-rendu de *Treatise of Algebra* dans les *Acta* de 1686, il explique l'importance de savoir si une quadrature peut se ramener à une quadrature algébrique ou pas. Par exemple, il affirme qu'il n'est pas possible d'obtenir une quadratrice algébrique du cercle ou de l'hyperbole³. En revanche, celles-ci permettent de mesurer d'autres figures : dans ce cas il est dit que leurs quadratures dépendent de la quadrature du cercle ou de la quadrature de l'hyperbole. Leibniz souligne l'existence d'une infinité de problèmes qui ne relèvent pas de l'algèbre (comme les quadratures du cercle et de l'hyperbole) et qu'il nomme transcendants. Ils sont importants car ils « peuvent réellement se poser en Géométrie et qu'il faut même les compter parmi les plus fondamentaux »⁴. C'est pour cela qu'il convient d'admettre dans la géométrie des courbes autres que celles qui sont admises dans la *Géométrie* de Descartes, comme la cycloïde.

Par ailleurs, Leibniz pointe le problème des quadratures en tant que cas particulier d'un problème plus général qui est celui de la « Méthode inverse des tangentes », problème « où est enfermée la plus grande partie de la Géométrie transcendante »⁵, et pour lequel il n'est malheureusement pas satisfait quant à sa résolution générale. C'est en développant son calcul qu'il se rend compte du lien étroit qui lie ces problèmes avec ceux des quadratures. Les problèmes inverses des tangentes font partie de ses recherches depuis son séjour parisien entre 1672 et 1676, il échange

¹ *Ibid*, p. 76.

² « De dimensionibus figurarum inveniendis » (1684) dans Leibniz, *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 82 En 1686 avec « De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *op. cit.*, p. 126.

³ « De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *ibid*, p. 134.

⁴ *Ibid*, p. 134.

⁵ *Ibid*, p. 135. Voir aussi : Scriba, Cristoph, J., « The inverse Method of Tangents : A dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677) », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 2, No. 2 (13.1.1964), p. 113-137.

également à ce propos avec Newton par l'intermédiaire du secrétaire de La Royal Society, Oldenburg, sur ces questions¹.

Newton défend l'idée selon laquelle sa méthode des séries peut résoudre la plupart des quadratures ou des problèmes transcendants, mais Leibniz ne partage pas entièrement cette conception. Nous reviendrons sur ces questions² et surtout sur la manière dont Leibniz promeut ses nouvelles idées auprès des savants français pour lesquels le questionnement mathématique sur ces problèmes connaît un retard que nous pouvons estimer à environ quinze ans.

3.3) « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur » : étude d'un manuscrit de l'Hospital (1692)

Pendant la rédaction des *Nouveaux Elémens*, le Marquis avait été sollicité par Malebranche pour guider Prestet vers des sujets inédits éventuellement à inclure dans cet ouvrage. L'Hospital engage Prestet à lire soigneusement les articles publiés par Tschirnhaus dans les *Acta Eruditorum* des années 1682 et 1683 dans lesquels apparaissent une adaptation de la méthode de Fermat pour des problèmes de *maximis et minimis*, une méthode des tangentes³ et une règle sur les équations du troisième degré⁴. Le Marquis juge plusieurs passages des écrits de Prestet insuffisants, peu « naturels » ou incorrects⁵. Il censure Prestet et aboutit à ce qu'il supprime de nombreux paragraphes qui étaient prévus pour la publication⁶. Le 8 juin 1690, Prestet

¹ Sur cet échange on peut consulter l'article de Scriba cité ci-dessus et Hoffman, Joseph, *Leibniz in Paris*, p. 225-249 et 259-276.

² « Leibniz promeut son calcul, premiers éclaircissements » qui est le premier paragraphe du chapitre 4.

³ « Nova methodus determinandi maxima et minima » (1683) et « Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi » (décembre 1682).

⁴ La règle est publiée dans les *Acta Eruditorum* en 1682. Prestet va y trouver quelques défauts et en fait part au Marquis dans une lettre qu'il publie dans le *Journal des savants* (32^{ème} *Journal des Savants* de l'année 1689). La lettre, datée du 22 août, est antérieure à la fin d'impression des *Nouveaux Elémens* (20 Novembre). Prestet donne quelques détails et développements de la question dans *Les Nouveaux Elémens* (*op. cit.*, p. 411-414). Le Marquis va montrer que les critiques de Prestet sont partiellement incorrectes et celui-ci en conviendra. Par conséquent, l'Hospital renonce à publier sa réponse à la lettre de Prestet. Le fonds oratorien comporte trois exemplaires (FR. 24236, fol. 169-177) d'ébauches de la lettre du Marquis.

⁵ *Mathematica* p.10: « Il me semble que le tour que vous prenez pour démontrer le fondement de cette méthode n'est pas assez naturel ».

⁶ *Ibid*, p. 18.

meurt, laissant tous ces écrits à l'Oratoire, en particulier une section portant sur la géométrie qui était prévue comme troisième partie pour les *Nouveaux Elémens*¹.

Le 23 octobre 1690, l'Hospital écrit à Malebranche :

Je ne suis content de l'écrit que je vous ai laissé entre les mains, que depuis que vous paraissez l'approuver. Mon dessein est de changer entièrement l'Arithmétique des infinis. Il me semble que j'ai une manière plus générale et plus facile, de démontrer toutes ces propositions qui, je m'assure, ne vous desplaira pas².

Le manuscrit FR 25306, que des historiens³ ont intitulé les *Nouveaux Elémens du Marquis de l'Hospital*, témoigne de ce projet. Il consiste en un volume d'environ 400 pages comprenant quatre traités paginés de façon indépendante⁴. Des pages blanches devaient laisser place à des figures et ont été couvertes de notes incohérentes de la main de Byzance. De nombreuses *marginalia* ponctuent le texte et seraient également de la main de Byzance qui possédait cette copie avant son internement en 1705.

L'un de ses traités a déjà été l'objet de notre analyse dans la première partie de ce chapitre : il s'agit du deuxième traité innomé et qui portait entre autres sur la méthode de tangentes. Le troisième traité s'intitule « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur ». Dans celui-ci, l'Hospital a l'ambition de démontrer une partie des résultats de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis, plus précisément celle qui va jusqu'à la proposition 190⁵. Il entreprend les démonstrations sans qu'aucun commentaire de son projet ne soit déclaré avant la fin de sa démonstration de la proposition 189 de l'*Arithmetica infinitorum*. Wallis a fourni toute une série de tables qui permettent de connaître la valeur de certaines sommes numériques. Nous avons vu qu'il avait commencé par les sommes de puissances entières puis qu'il continuait avec les sommes de puissances rationnelles d'entiers et puis les sommes de puissances

¹ Le relevé de ses écrits est répertorié par André Robinet, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, n°4, Paris, 1960, p. 307-308.

² Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes, Correspondance et actes, 1690-1715*, Vrin, Paris, 1978, p. 559.

³ C'est ainsi que le désigne Pierre Costabel dans *Mathematica* p. 103.

⁴ D'après Costabel, une fois achevée, la copie de Carré a été immédiatement reliée, *Mathematica*, p.103.

⁵ FR 25306 : « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », fol. 58 : « Ceux qui désirent en voir davantage sur ce sujet, peuvent lire cet auteur dans son traité de l'arithmétique des Infinites depuis la page 170 jusqu'à la fin ; mais pour moi je n'ennuie de ne raisonner que sur des conjectures ».

négatives d'entiers. Pour démontrer ces résultats, il a raisonné par induction et effectué des interpolations. L'Hospital poursuit la critique adressée à Wallis qu'il hérite de ses compatriotes, vers la fin de son traité, il déclare :

Avertissement

La table que nous venons de construire dans ce problème est celle de la prop. 189 de Wallis, et ainsi je crois avoir démontré tout ce que cet auteur n'a prouvé qu'a par induction, dans le Livre de l'Arithmétique des infinis, et non seulement des quadratures des paraboles, et des hyperboles infinies, ce que plusieurs autres ont déjà fait, mais aussi toutes les interpolations dont il s'est servy pour construire ces tables ce que personne jusqu'icy n'avait fait, comme a fort bien remarqué L'auteur des Journaux de Leipsic pag 289 de l'année 1686¹.

En effet, comme nous l'avons vu, dans les *Acta Eruditorum* de l'année 1686, Leibniz fournit un compte-rendu de l'ouvrage *Treatrise of Algebra* de Wallis publié l'année précédente. Dans *Treatrise of Algebra*, le mathématicien anglais destine un paragraphe à présenter son *Arithmetica infinitorum*. Deux autres paragraphes le succèdent, l'un destiné à méthode d'exhaustion et l'autre à la « méthode de Cavalieri »². Wallis choisit cet ordre d'agencement car il veut montrer que l'Arithmétique des infinis est fondée sur la méthode d'exhaustion puis qu'elle représente un progrès par rapport à la méthode des indivisibles³. Pour Leibniz, l'induction dont Wallis se sert est un moyen très fécond pour l'invention mais il estime qu'elle n'est pas démonstrative⁴. Il fait référence également à Boulliau, qui a fourni quelques démonstrations géométriques des résultats de Wallis mais qui a aussi été amené à utiliser l'induction⁵.

¹ *Ibid*, fol. 53-54.

² *Treatrise of Algebra*, *op. cit.*, chapitre 73, p. 280 et chapitre 74, p. 285.

³ « In order to which, it will be necessary to premise somewhat concerning (whai is wont to be called) The *Method of Exhaustions* (on which they [these series] grounded;) and the *Method of indivisibles*, introduces by *Cavalierus*, (which is ashorter way of expressing that Method of Exhaustions;) and of the *Arithmetick of Indifinites*, (which is afurther improvement of that method of Indivisibles) », *ibid*, p. 280.

⁴ « Verum cum talia quae saepe per inductionem inveniuntur, utique accurate et generaliter demonstrari deinde possint, idque non tantum securitatis causa expetatur, sed et ad fontes detegendos, prosit, fatendum est Geometricas demonstrationes tinc merito desiderari, cum magni momenti aliquid ex eo, quod per inductionem repertum est, deducimus », *AE*, juin 1686, p. 287.

⁵ « Itaque si clarissimus Bullialdus omnia demonstrasset in sua *Arithmetica infinitorum*, quae invenit Wallisius in sua, fecisset utique pretium operae insigne. Notat autem Wallisius, & Bullialdum uti tandem coge inductione, cum in paucis tantum gradibus demonstrationes attulerit ».

L'Hospital se propose donc de combler cette insuffisance démonstrative dénoncée encore dans les *Acta*. Pour saisir la teneur de son projet il est important de préciser ce qu'il entend par démontrer l'Arithmétique des infinis « géométriquement ». Cela s'éclaircira par l'examen de la structure de son traité jusqu'à la démonstration de la proposition 189.

Un hommage à Pascal

L'Hospital débute par des lemmes, des corollaires certains déjà rencontrés dans notre étude des transmutations comme nous le verrons plus bas¹, dont il se sert pour obtenir les quadratures de paraboles et d'hyperboles, puis il applique ces résultats pour déduire les tables de Wallis. Sa façon de procéder va donc à l'inverse du mathématicien anglais, qui par l'obtention des tables a déduit certains résultats géométriques, dont les quadratures des paraboles et hyperboles.

Le premier lemme « qui sert de fondement à la mesure des surfaces »² reprend presque à l'identique l'appendice de la leçon XI des *Lectiones Geometricae*, sauf que l'énoncé suppose des divisions égales ou inégales contrairement à Barrow. Cependant, la démonstration ne tient pas compte du fait que les divisions peuvent être inégales, la difficulté de ce cas est évitée. Nous avons reconstitué ci-après la figure du lemme à partir de l'énoncé.

De ce lemme, il déduit un premier corollaire qui énonce qu'une figure « est égale à la somme de tous les rectangles faits de chaque ordonnée par chacune des parties CC qui leur répondent³ puis un deuxième corollaire concernant l'égalité de deux figures placées entre deux parallèles. Pour démontrer ce résultat, il montre qu'une certaine somme de $GE \times CC$ et une certaine somme de $FI \times CC$ sont égales »⁴.

Nous ne reproduisons pas la démonstration car elle ne présente pas ici un intérêt particulier et nous ne tentons pas non plus une reconstitution de la figure. Ces deux corollaires sont suivis d'un « Avertissement »⁵:

¹ Chapitre 2.

² « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », *op. cit.*, fol. 1-4.

³ *Ibid*, fol. 4.

⁴ *Ibid*, fol. 6.

⁵ *Ibid*, fol. 7.

Lorsqu'on trouvera dans la suite ce genre d'expression la somme des droites GC ou GE , l'on a toujours égard à une ligne droite telle que AB que l'on suppose divisé[e] en un nombre infini de petites parties égales aux points C et ce n'est pour abrégé cette autre expression, la somme des parallélogrammes faits par chaque GC et chacune des parties égales CC , laquelle somme comme nous venons de faire voir est égale à l'espace même dont les droites GC peuvent être considérées comme des ordonnées.

L'Hospital imite le style de Pascal non seulement par les expressions utilisées qui sont les mêmes que certaines que l'on trouve dans *Lettres de A. Dettonville*, mais aussi parce qu'il ponctue son traité par des « avertissements » qui précisent le sens de ces expressions, comme le faisait Pascal. Signalons toutefois que Pascal n'écrit jamais « infini » mais « indéfini », pour l'Hospital cette précision ne semble pas être nécessaire. La référence à Pascal peut être parfois directe comme l'exemple suivant en témoigne. De la proposition 132 de *Arithmetica infinitorum*, Wallis obtient la table¹ ci-après.

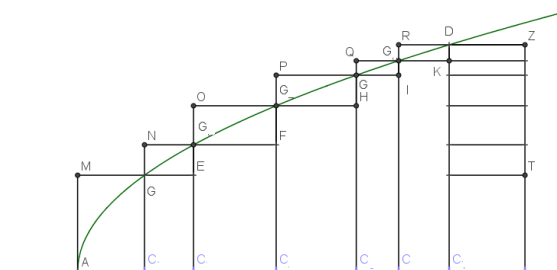


fig. 54

Comme le remarque l'Hospital, cette table « renferme les nombres figurez (...), en supposant que cette table étant continuée à l'infini, continue par ordre tous les nombre figurez, c'est-à-dire qu'elle soit le triangle arithmétique de M^r Pascal »². D'autres remarques concernant Pascal à propos du triangle arithmétique et ses propriétés sont formulées³. Comme pour Prestet, la référence à Pascal est précieuse.

¹ À gauche, la table présente dans le manuscrit (fol.30) et à droite celle de *Arithmetica infinitorum*, *op. cit.*, p. 105.

² *Ibid*, fol. 33.

³ *Ibid*, folios 35-36.

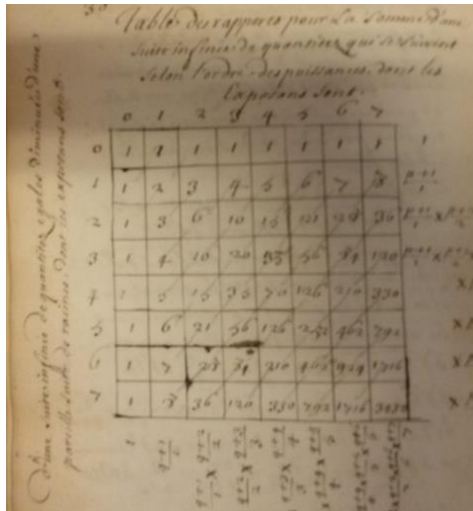


fig. 55

Seriei Equalium multataz ferie

Subdecimanorum	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
Subnonanorum	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43300000	393000000
Suboctanorum	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134218752
Subseptimanorum	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5781300	40350000
Subseximanorum	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
Subquintanorum	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
Subquaternorum	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
Subterranorum	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
Subquadranorum	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Subcuborum	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Subbiquadratorum	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Subrelidua	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Subequalia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Et sic deinceps.

fig. 56

De la Géométrie à l'Arithmétique : démontrer géométriquement l'Arithmétique des infinis

Parmi les techniques de transmutations qu'il connaît par Barrow, l'Hospital choisit la courbe des sous-tangentes. Sa méthode des tangentes¹ lui a permis de déterminer les sous-tangentes de toutes les paraboles et toutes les hyperboles.

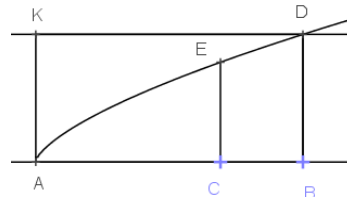


fig. 57

En introduisant la courbe des sous-tangentes, il obtient – lorsque c'est possible² – la quadrature de toutes ces courbes. Par exemple, en considérant la parabole AED d'équation $y^p = x^q d^{p-q}$, $AC = x$, $EC = y$, entourée par le parallélogramme ABDK, il montre que le rapport de l'espace ABDEA est au parallélogramme ABDK comme p est à $p + q$.

Pour en déduire les premières tables de Wallis, l'Hospital considère qu'il a besoin du lemme suivant :

¹ Voir supra : 2.2) La méthode des tangentes de l'Hospital (1692) : l'articulation entre le polygone infinitangulaire et le calcul

² Si l'hyperbole a pour équation $y^p x^q = d^{p+q}$, si $p = q$, l'espace est « infiniment étendu du côté de MN est au parallélogramme ABDK comme 1 est à zéro, c'est-à-dire qu'il est infini par rapport à ce parallélogramme. Si p est plus petit que q , soit $p = 1$ et $q = 2$. L'espace hyperbolique sera au parallélogramme comme 1 est à -1 , c'est-à-dire plus qu'infini », *ibid*, fol. 18.

Si l'on propose d'une part deux suites pareilles de quantitez, dont la 1^{ère} soit composée de quantitez égales x, x, x, x, x , &c et l'autre de quantitez inégales a, b, c, d, f et de l'autre part deux autres pareilles suites, dont la première soit composée de quantitez égales z, z, z, z , etc et de l'autre des quantitez inégales m, n, o, p , &c, mais telles que $x.a :: z.m = \frac{az}{x}$, je dis que la somme de la première suite $4x$ est à la somme de la 2^{ème} suite $a + b + c + d$, comme la somme de la troisième suite $4z$ est à la somme de la 4^{ème} $\frac{az}{x} + \frac{bz}{x} + \frac{cz}{x} + \frac{dz}{x}$ ce qui est évident¹.

Pour justifier ce lemme, il procède comme s'il s'agissait de suites comportant quatre termes, dans ce cas l'explication est en effet « évidente ». L'Hospital ne pointe pas la difficulté qui arrive lorsque le nombre de termes est infini – c'est le cas ici –. Il demande au lecteur d'approuver que ce qui est vrai pour deux, trois ou quatre termes l'est aussi pour n'importe quel nombre de termes, y compris un nombre de termes infini. Ce raisonnement est proche de celui qu'il reproche aussi fermement à Wallis : l'induction. Ce lemme lui permet d'énoncer :

L'équation à la courbe AED est $y^p = x^q d^{p-q}$ donc $y = \sqrt[p]{d^{p-q} x^q}$. Or si l'on suppose que les x fassent une progression arithmétique infinie, dont le premier terme est un point ou zéro, je veux dire que le dernier terme AB que j'appelle b soit divisé en un nombre infini de petites parties égales CC que j'appelle e , la somme des ordonnées y sera à la plus grande de toutes à savoir BD prise autant de fois qu'il y a d'ordonnées, ce qui fait le parallélogramme $ABDK$ comme 1 est à $\frac{q}{p} + 1$, c'est-à-dire comme 1 est à l'exposant de x pris autant dans l'équation $y = \sqrt[p]{d^{p-q} x^q}$ augmenté de l'unité car par le théorème précédent l'espace parabolique est au parallélogramme comme p est à $p + q$.

Or $p . p + q . 1 . 1 + \frac{q}{p}$ ce qu'on peut énoncer de cette manière.

Soit une progression arithmétique infinie $0. e. 2e. 3e. 4e. 5e. \&c$ dont le dernier terme que j'appelle b est connu, et soit une suite infinie de quantitez qui se suivent selon l'ordre de telle puissance, ou de telle racine que l'on voudra de termes de cette progression. Je dis que la somme de toutes les quantitez sera à la plus grande de toutes prise autant de fois qu'il y a de quantitez comme 1 est à l'exposant de cette puissance ou de cette racine augmentée de l'unité².

Une difficulté est notée pour énoncer cette proposition à cause de l'absence de notation pour l'infini. S'il y a bien une infinité de termes, le dernier terme b a été

¹ *Ibid*, fol. 11-12.

² *Ibid*, fol. 12-13.

divisé infiniment pour produire e . Wallis avait introduit la notation $\frac{1}{\infty}$ que l'Hospital connaît mais qu'il ne choisit pas d'utiliser.

Il nous est difficile de comprendre de quelle manière l'Hospital applique son lemme. Nous supposons qu'il met en correspondance deux couples de suites infinies de « quantitez » : d'une part le couple de suites de quantitez (géométriques) qui sont les parties égales du segment AB et de la suite des ordonnées $y = \sqrt[p]{d^{p-q}x^q}$ et d'autre part le couple de la suite des quantitez égales e et de la suite des puissances ou racines de la progression arithmétique $0. e. 2e. 3e. 4e. 5e, etc.$ Or le résultat de la quadrature de la parabole affirme que le rapport de « la somme des ordonnées y » par la plus grande des ordonnées prise autant de fois qu'il y a d'ordonnées est le même que le rapport de l'aire de la parabole par le rectangle $ABDK$, c'est-à-dire le même que celui de p à $p + q$. Le résultat géométrique sur la quadrature lui permet, grâce au lemme (non démontré), de déduire généralement le résultat sur la somme infinie des puissances des termes d'une progression arithmétique infinie. Les quadratures des hyperboles lui permettent de façon analogue d'obtenir les résultats pour les sommes des puissances négatives. En utilisant des résultats géométriques, il a donc expliqué les tables obtenues dans l'*Arithmetica infinitorum*¹. Il considère qu'il a démontré « géométriquement » les tables de Wallis, ce qu'il estimait devoir être fait, puisqu'il ne considère pas l'induction comme une preuve. Une de ses critiques de l'induction est particulièrement intéressante, il écrit : « mais cette sorte de preuve [l'induction] n'éclaire pas l'esprit ni même le convainc pas »². La référence à Port-Royal est manifeste : si Arnauld critiquait les démonstrations qui convainquent plutôt qu'elles n'éclairaient, que dire d'une preuve qui ne parvient même pas à convaincre ? La critique est aiguë. La référence constante à Pascal tout au long du manuscrit laisse supposer que l'Hospital a eu véritablement le dessein d'épouser « l'esprit géométrique » qui insuffle les écrits mathématiques de Port-Royal pour démontrer « géométriquement » l'*Arithmétique des infinis*. Dans ce sens, ce manuscrit témoigne d'un Marquis de l'Hospital héritier direct de l'« esprit géométrique », que partagent Pascal et Arnauld³.

¹ Propositions 44, 54 et 59 de l'*Arithmetica infinitorum*.

² *Ibid*, folio 32.

³ Dans ce sens, nous tenons à remercier Dominique Descotes qui nous a mis sur la piste de cette lignée : « Dans l'ordre de la recherche, c'est le groupe de Malebranche qui hérite de Port-Royal. La lignée de Dettonville se prolonge, dans l'esprit voulu par Pascal, avec l'Analyse des infiniment petits du marquis de l'Hospital, familier du Duc de Roannez et des *pascalins* » dans *Littérature et Géométrie, op. cit.*, p. 331.

L'Hospital a lu la recension du traité d'algèbre de Wallis paru dans les *Acta*. Celle-ci est suivie de l'article « De Geometria recondita » et dans lequel Leibniz pointe le défaut de rigueur de l'expression de la quadrature du cercle wallissienne. Comme on l'a examiné précédemment, il est amené à considérer une taxonomie plus propre à distinguer les quadratures. Il ne nous semble pas que L'Hospital est embrassé la portée des considérations leibniziennes. Dans son écrit, il demeure assujéti à des méthodes dont l'obsolescence se mesure au regard des articles leibniziens.

3.3) Autres formulations de « Arithmétique des infinis »

Les techniques de « transmutations » sont connues par les membres du groupe autour de Malebranche via la lecture de Barrow mais également de celle de James Gregory. Pierre Varignon lit deux mémoires à l'Académie Royale des Sciences concernant la quadrature des paraboles généralisées en 1692¹. La même année, d'autres écrits du groupe autour de Malebranche, concernent l'« Arithmétique des infinis »². Nous nous intéressons particulièrement à celui, autographe de Reyneau :

Proposition déduite de la méthode des tangentes, par laquelle on démontre l'Arithmétique des infinis ou des indivisibles. On peut aussi s'en servir pour quarrer les figures courbes.

Elle est de M^r le Marquis de l'Hospital et le R. P. Malebranche me l'a envoyée le 26 février 1692. Elle est aussi dans Barrow Lect. 11, page 88, article 10.

À notre connaissance, elle contient la première apparition du vocable « arithmétique des indivisibles » valant pour « Arithmétique des infinis ». Le théorème fondamental est énoncé ainsi :

Théorème général de l'arithmétique des indivisibles

La somme d'une suite infinie de quantités, soit directe (c'est-à-dire $\sqrt[p]{x^q}$ ou des y des paraboles (...)), soit réciproque (c'est-à-dire des $\sqrt[p]{\frac{1}{x^q}}$ ou des ordonnées aux asymptotes (...)), ou ce qui est la même chose l'espace parabolique ou hyperbolique, est à

¹ *Registres des Procès verbaux de l'Académie Royale des Sciences (PVAR)*: « Quadrature universelle des paraboles de tous les genres imaginables appliquant la logistique infiniment générale qui vient de paraître sur la méthode de Jacobus Gregorius », samedi 29 mars 1692 et « De la quadrature universelle de tous les genres et de toutes les espèces de Paraboles imaginables », mercredi 9 avril 1692.

² Il s'agit du folio 125 du manuscrit FR 25302 (de la main de Reyneau), et du folio 11R de FR 24236. Ce dernier est une copie non exhaustive du premier, il est de la main de Carré.

la dernière quantité ou y prise autant de fois qu'il y a de quantités ou d' x , c'est-à-dire le produit de AD par ED , ou ED^2 , ou \sqrt{ED} etc, comme 1 est $1 + q$ ou $1 - q$ exposant de x^1 .

Reyneau identifie directement, sans l'aide d'un lemme, la somme infinie des « quantitez » quelconques avec celle des ordonnées. La preuve du théorème s'effectue, comme chez l'Hospital, par l'introduction de la courbe des sous-tangentes mais Reyneau introduit le symbole intégral pour désigner les sommes des ordonnées ou des abscisses. Par exemple, pour les « sommes directes » c'est-à-dire celles des $x^{\frac{q}{p}}$, il écrit $\frac{\int ax}{\int ey} = \frac{q}{p}$ donc « componendo »² : $\frac{\int ax + \int ye}{\int ey} = \frac{q+p}{p}$ et par passage à l'inverse : $\frac{\int ye}{\int ey + \int ax} = \frac{p}{p+q}$. Or, $\int y + \int x$ représente le rectangle AE c'est-à-dire « à la dernière ED prise autant de fois qu'il y a de quantités ou d' x dans AD ³. » En 1692, l'Hospital a déjà reçu quelques cours de calcul intégral, il connaît donc la notation, même s'il l'a pu connaître avant par l'article des *Acta* de 1686 dans lequel Leibniz l'utilise pour la première fois⁴ L'utilisation du symbole intégral rend la démonstration de la quadrature plus souple mais ici ce symbole n'a que pour unique fonction celle de dénoter « la somme de », son lien avec le symbole de différenciation « d » n'apparaît pas.

Reyneau fait part de cet écrit à l'oratorien Claude Jacquemet qui le remercie dans une lettre datée du 27 avril 1692⁵ :

¹ FR 25302, 125R.

² Dans sa démonstration, l'auteur va utiliser deux règles sur les proportions. Pour quatre nombres a, b, c, d avec $a \neq b$ et $c \neq d$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on aboutit en « componendo » à $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ou en « dividendo » à $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. La composition des deux aboutit à $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. La démonstration est triviale mais le résultat ne peut pas s'appliquer dans le cas où $a = b$ ou $c = d$. Ce sera le cas pour l'hyperbole ordinaire.

³ *Ibid*, p. 57.

⁴ Dans « De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *AE*, juin 1686, p. 297.

⁵ *Mathematica*, p. 61. La lettre provient des archives oratoriennes, dossier Jacquemet.

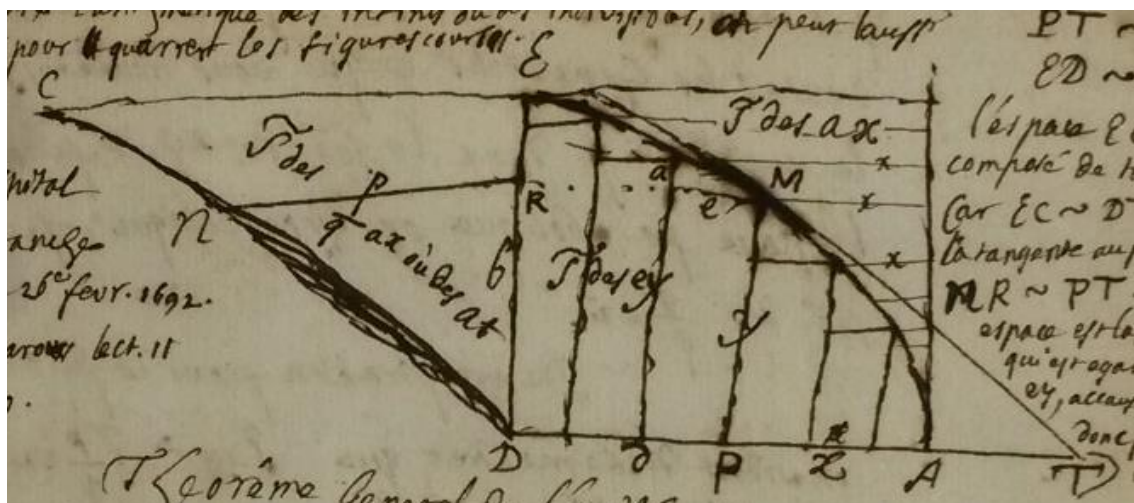


fig. 58

Je vous suis bien aussi obligé de la nouvelle manière de quadrer les paraboles et certaines hyperboles. Quand vous ne m'en auriez point donné l'auteur, je l'aurais reconnu [l'Hospital], ou du moins j'aurais reconnu que ce n'est qu'une application de sa méthode de trouver les tangentes. Cette quadrature des hyperboles n'est pourtant pas nouvelle comme il semble que vous le croyez. Il n'y a que la manière de faire qui est nouvelle. M^r de Fermat en avait donné la quadrature aussi bien que des paraboles dans ses œuvres mathématiques pages 45 et 46¹. (...) De plus M^r Wallis dans son Arithmétique des infinis donne aussi la quadrature de toutes ces hyperboles comme vous l'y pouvez voir (...)

La lettre de Reyneau n'a pas été retrouvée. Nous pouvons remarquer que Jacquemet relativise le caractère inédit du résultat alors que Reyneau est enthousiaste. Ce dernier est au courant de certains travaux de l'Hospital, comme la référence à sa méthode des tangentes l'atteste, mais il ne semble pas attacher de l'importance à la « manière de faire » : Wallis, Fermat, l'Hospital ont tous démontré ces quadratures. Pourtant, nous avons montré qu'en écrivant l'« Arithmétique des infinis démontrée géométriquement », le dessein de l'Hospital est de montrer que la façon de faire de Wallis n'est pas démonstrative. Jacquemet n'est pas sensible à la priorité accordée à la géométrie ?

¹ Il s'agit de l'édition intitulée *Varia Opera* de 1679 (voir chapitre 1)

Conclusion

Dans cette période de renouveau de 1690 à 1692, les membres du groupe constitué autour de Malebranche, en particulier le Marquis de l'Hospital, ont acquis les principales méthodes d'invention européennes. Nous pouvons apporter des précisions concernant le rapport qu'entretiennent ces mathématiciens avec la pratique du calcul. Catelan, en s'attribuant le rôle de continuateur de Descartes, veut montrer que l'analyse cartésienne peut étudier absolument tout ce qui concerne les courbes. Cependant, « l'Analyse de Descartes est imparfaite » déclare Leibniz. Catelan est prêt à montrer le contraire : il est convaincu qu'il est possible d'élaborer une « logistique » fondée sur l'algèbre cartésienne qui permettrait d'englober la connaissance des courbes. Or, lorsqu'il présente sa méthode algébrique des tangentes, il choisit de la justifier par des arguments qui ne sont justement pas propres au cadre de l'algèbre. L'effet comique en découle : prétendant être plus cartésien que Descartes, sa maladresse est un aveu. L'algèbre n'est pas la plus appropriée à l'étude des courbes. Cet exemple de recherche des tangentes n'est d'ailleurs pas celui qui illustre le mieux cette imperfection¹ et il y a bien « un livre de recherches où elle n'arrive point, et où quelque Cartésien que ce soit ne sauroit arriver sans inventer quelque méthode au-delà de la méthode de Des Cartes »². Au-delà du récit des mésaventures mathématiques que Catelan ne cesse de répéter, l'analyse de son exemple montre qu'il partage avec ses contemporains une conception de la procédure calculatoire.

Il a été question souvent de la simplification du développement du binôme et de la règle qui prescrit de ne conserver que les deux premiers termes. En assumant cette règle, ces mathématiciens témoignent d'une adhésion à une forme d'évidence calculatoire : un calcul plus prolix pourrait être développé mais il est entendu qu'il n'est pas nécessaire de l'effectuer. Dans sa deuxième méthode des tangentes, il a été intéressant de remarquer que l'Hospital estime que parfois l'évidence calculatoire tire son origine d'arguments géométriques. Cependant, s'il y a une réelle familiarité avec une « évidence calculatoire », le cadre théorique dans lequel on pourrait, de façon

¹ Nous verrons dans le prochain chapitre les difficultés rencontrées pour la recherche de courbure.

² Lettre de Leibniz à Malebranche de mars 1679.

générale, remplacer une égalité par une autre plus simple n'est pas suffisamment explicite. Autrement dit, la pratique calculatoire de ces mathématiciens n'est pas légitimée par un principe fédérateur comme celui de l'incomparabilité des différentielles qui intervient dans les règles du calcul leibnizien.

Dans « L'Arithmétique des infinis démontrée géométriquement », L'Hospital s'appuie sur la technique de *transmutation* de Barrow de façon originale puisqu'il l'effectue en montrant sa maîtrise du langage des indivisibles pascalien. Son application aux quadratures des paraboles et des hyperboles a pu provoquer son enthousiasme à l'automne 1690 lorsqu'il affirmait à Malebranche pouvoir « changer entièrement l'Arithmétique des infinis ». Cependant, notre étude sur Leibniz montre qu'il existe des préoccupations et des problèmes mathématiques d'une difficulté plus importante et qu'il est urgent pour lui de faire avancer l'art d'inventer. Tel est le message leibnizien.

Deuxième partie :
**La genèse de l'Analyse des infiniment petits
pour l'intelligence des lignes courbes (1692-
1606)**

CHAPITRE 4

Réception et interprétation du calcul leibnizien autour de Malebranche (décembre 1691- juin 1696)

Introduction

Nous avons vu que les principes du nouveau calcul leibnizien et les notions qui l'accompagnent ont été publiés dans quelques articles parus principalement dans les *Acta Eruditorum* entre 1682 et 1686. Au début de son lancement, peu de savants s'en servent. Le cas de l'écossais Craig – qui l'utilise pour une quadrature¹ en 1685 – est isolé, ce sont les frères Bernoulli qui principalement l'emploient. En effet, en 1687, peu après sa nomination à l'Université de Bâle, Jacques Bernoulli demande à Leibniz d'élucider certains aspects de son nouveau calcul². Parti en voyage à travers l'Europe, Leibniz ne lui répond que trois ans plus tard dans une lettre datée du 24 septembre 1690. Jacques Bernoulli n'attend pas la réponse du maître pour s'appropriier de façon autonome le calcul leibnizien, il initie également Jean Bernoulli, son frère cadet de douze ans. Suffisamment armé de connaissances, Jacques Bernoulli publie en mai

¹ Craig, John, *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi*, Londini, 1685.

² Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 15 décembre 1687, Bernoulli, Jacob, *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, bearbeitet und kommentiert von André Weil, mit Beiträgen von Clifford Truesdell und Fritz Nagel, Basel : Birkhäuser Verlag, 1993, p. 47-51.

1690¹ sa solution au problème de la courbe isochrone lancé par Leibniz en 1687², le vocable «intégral» est utilisé pour la première fois. Son article s'achève par un autre défi : Jacques propose de chercher la courbe correspondant à la forme prise par un fil pesant flexible attachés à deux points fixes³.

Ce problème avait déjà intéressé des géomètres, Galilée pensait qu'il s'agissait d'un arc de parabole. Presque simultanément, Leibniz, les frères Bernoulli et Huygens trouvent la courbe-solution. Ce dernier la baptise du nom de « catenaria » ou « chaînette ». Chacune des trois solutions proposent une construction différente : Huygens doit supposer la quadrature d'une courbe algébrique⁴ alors que Jean Bernoulli et Leibniz supposent la quadrature de l'hyperbole. Quelques mois après leurs publications⁵, en septembre 1691, Leibniz publie un article dans les *Acta Eruditorum* intitulé « Examen des solutions au problème de la chaînette ou courbe funiculaire proposées entre autres par M. Jacques Bernoulli ». Cet article est quasi dépourvu de contenu mathématique ou physico-mathématique puisque les trois solutions ont déjà été publiées⁶. Leibniz y retrace l'histoire de la résolution de ce problème et explique comment les différentes résolutions mettent en évidence des relations intimes entre plusieurs courbes dont la spirale logarithmique et la courbe loxodromique⁷. Bien qu'il considère que la chaînette est une courbe « simple » puisqu'elle est prescrite par la nature, il affirme que sans le secours du nouveau calcul, elle n'aurait pas pu être étudiée. De son calcul, il souligne que :

¹ Bernoulli, Jacques, « J.B. Aanalysis problematis antehac propositi, de Inventionione Linea descensus a corpore gravi percurrenda uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur : et alterius cujusdam Problematis Propositio », *AE*, mai 1690, p. 217-219.

² Voir chapitre 3, paragraphe 1.2.

³ Bernoulli, Jacques, « Problema vicissim propodendum hoc esto : Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere suspensus. », *AE*, mai 1690, p. 219.

⁴ La courbe d'équation $xyy = a^4 - ayy$.

⁵ « De solutionibus problematis catenarii vel funicularis in actis junii an. 1691, aliisque, a DN. JAC. Bernoullio propositis » dans Leibniz, G.W., *La Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 200- 209.

⁶ Les articles paraissent tous au mois de juin 1691 dans les *Acta* : « De linea in quam flexile se pondere proprio curvat », (Leibniz), « Solutio problematis funiculari », *AE*, juin 1691 (Jean Bernoulli), « Specimen alterum calculi differentialis .. una cum Addimento ... ad problema Funicularium, aliisque » (Jacques Bernoulli), « Christiani Hugenii, dynastae in Zülichem, solution ejusdem Problematis » (Huygens).

⁷ *Ibid*, p. 203-204.

Il ne fait aucun doute que de cette manière l'Analyse Mathématique ne touche à sa perfection et que les problèmes Transcendants qui jusqu'ici en étaient exclus, ne tombent sous sa coupe¹.

Ceux qui l'ont expérimenté en résolvant des problèmes mathématiques ou physico-mathématiques – les frères Bernoulli et l'Écossais Craig sont cités – le jugent de « grande utilité [*quam summa utilitatis*] »².

Nous avons déjà rencontré dans le discours de Leibniz cet argument en faveur de la nouvelle analyse et selon lequel seule celle-ci peut traiter les transcendentes, contrairement à l'algèbre cartésienne qui les a écartées. Leibniz n'a pas de cesse que de faire admettre l'importance des problèmes transcendants dans la Géométrie. Il est nécessaire d'accepter les courbes qui seules permettent de les construire, puisque celles-ci peuvent être « tracées exactement par un mouvement continu »³. Nous avons vu que cette mise en garde démarre avant même la publication de son algorithme : Leibniz promeut ses idées auprès de Malebranche⁴ et Galloys⁵ en 1679. En 1686, deux ans après la publication de la *Nova Methodus*, il écrit à Arnauld et lui exprime son insatisfaction vis-à-vis de la méthode des tangentes de Sluse bien qu'elle soit la plus perfectionnée avant la sienne. En plus des problèmes liés aux expressions irrationnelles et fractionnaires, il affirme qu'elle :

ne va pas aux lignes que M. Descartes appelle mécaniques, et que j'aime mieux d'appeler transcendentes (...) Je prétends aussi généralement de donner le moyen de réduire ces lignes au calcul (...)»⁶.

Dans cette lettre, Leibniz considère que le terme « mécanique » est impropre pour ce type de courbes et les rebaptise du nom de « transcendentes ». Leur construction, contrairement à ce que prétend Descartes⁷, se fait par « points ou par le mouvement ». Le terme « transcendant » renvoie aussi au fait que ces courbes ne

¹ *Ibid*, p. 206.

² *AE*, septembre 1691, p. 438.

³ « et cum eae exacte ontinouque motu describi possint » dans « De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *AE*, juin 1686, p. 295.

⁴ Lettre à Malebranche du 13 janvier 1679 (précédemment citée).

⁵ Lettre de Leibniz à Galloys décembre 1678 (précédemment citée).

⁶ Leibniz, *Discours de Métaphysique et Correspondance avec Arnauld*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1984, p. 127.

⁷ Voir chapitre 1, paragraphe 1.2.

correspondent à des « questions analytiques qui ne sont d'aucun degré », tels sont le problème de couper l'angle en raison incommensurable ou celui de résoudre une équation dont l'inconnue entre dans l'exposant : leurs équations « passent en effet tous les degrés algébriques »¹.

Le calcul différentiel et l'Analyse des transcendentes prennent une place primordiale à l'intérieur du projet mathématique que Leibniz promeut auprès de ses correspondants français et étrangers. Un de ses correspondants les plus fidèles est Christian Huygens qu'il connaît depuis son séjour parisien et qui l'a initié aux mathématiques². Le savant hollandais est récalcitrant au nouveau calcul car il ne comprend pas toujours la pertinence du calcul de son ami. Un véritable échange s'établit à ce sujet. Ce n'est pas du tout le cas pour les correspondants français qui, contrairement à Huygens, bien qu'ils reçoivent les arguments de Leibniz en faveur de la nouvelle analyse, n'y répondent pas. Nous avons déjà mentionné l'attitude de Malebranche, c'est également le cas pour Arnauld et Galloys. Les préoccupations de Leibniz vont au-delà des réflexions mathématiques de ses correspondants français qui ne semblent pas voir l'intérêt d'établir un échange concernant ces questions. Ainsi, le message de Leibniz peine à être diffusé dans les milieux savants français alors que son application, essentiellement par les frères Bernoulli, dans les domaines mathématique et physico-mathématique ne cesse de s'accroître depuis la publication des articles sur la caténaire.

Un événement crucial pour la réception du calcul leibnizien intervient à la fin de l'année 1691. Le jeune Jean Bernoulli arrive à Paris pour un séjour. Il rencontre le Marquis de l'Hospital chez Malebranche et il convient de l'initier au calcul différentiel et intégral. Ainsi, l'Hospital bénéficie de cours à Paris puis à sa propriété à Oucques. Reparti à Bâle à la fin de l'année 1692, Jean continue à échanger épistolairement avec son élève qui le questionne incessamment sur le sens géométrique à allouer aux différentielles notamment celles d'ordre deux, qui apparaissent lors de l'utilisation de l'algorithme. Les sujets sont très variés, que ce soit dans le domaine purement mathématique (recherche de quadratures, de rectifications, de point d'inflexion, de développées) ou dans celui physico-mathématique : quatre-vingt-quatorze problème³

¹ *Ibid.*

² Hofmann, Joseph, E., *Leibniz in Paris 1672-1676, op. cit.*

³ Les problèmes sont répertoriés dans l'édition de la correspondance, *Der Briefwechsel von Johan Bernoulli, Band I, Birkhäuser, Basel, 1955, p. 515-517.*

sont examinés par les deux savants. Le Marquis publie en septembre 1692, un article au *Journal des Sçavants* concernant le problème de la « courbe de M. de Beaune »¹ dans lequel il utilise le calcul leibnizien. Il ne cesse plus ensuite de rendre public le calcul leibnizien : soit en publiant des articles dans le *Journal des Sçavants* en France, et dans les *Acta Eruditorum* à l'étranger, soit en lisant et publiant des mémoires aux séances de l'Académie Royale des Sciences où il vient tout juste d'être nommé. Pendant cette période le reste du groupe autour de Malebranche continue à s'initier au calcul grâce à l'aide de l'Hospital qui devient leur maître en la matière. Un décalage notable s'établit entre les connaissances du Marquis et l'habileté à les manier et celles de ses amis.

Ce chapitre a pour but de montrer comment s'est opérée l'articulation entre le calcul leibnizien et les méthodes d'invention qui le précèdent. Nous examinons d'abord les premiers contacts du groupe avec le calcul leibnizien, nous attachons une attention particulière à l'usage et à l'interprétation de la nouvelle symbolique. Nous consacrons une étude à l'apprentissage de Guillaume de l'Hospital qui l'amène à une confiance ferme dans l'utilisation du calcul leibnizien. Il revendique sa conviction auprès de ses amis mais aussi à l'étranger. Nous examinons ses arguments. Parmi les proches du groupe autour de Malebranche, Pierre Varignon n'a pas participé aux cours privés de Jean Bernoulli et connaît la nouvelle analyse leibnizienne plus tardivement. En revanche, de manière autonome, il s'instruit des résultats barrowniens et les applique à la résolution de problèmes. Il sera intéressant d'examiner de quelle manière il articule ces connaissances avec le calcul leibnizien dans la résolution de problèmes.

La publication du traité *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* marque la fin de notre chapitre. Son élaboration est principalement le fruit des efforts de l'Hospital qui estime que ce nouveau calcul est d'une extrême valeur mathématique, surpassant tout ce qui le précède.

¹ « Solution du problème de M. de Beaune propos autrefois à M. Descartes et que l'on trouve dans la 79. De ses lettres, tome 3. Par Mr. G*** », JS, septembre 1692.

1) Premiers contacts avec le calcul leibnizien (1691-1692)

Des cours professés par Jean Bernoulli pendant l'hiver 1691-1692, il existe plusieurs manuscrits mais la partie destinée au calcul différentiel y est absente¹. Celle-ci avait été recopiée par Nicolas Bernoulli, un des neveux de Jean. Sa conservation a été ignorée jusqu'à qu'en 1922, date à laquelle l'historien Paul Schafheitlin l'a découverte puis publiée dans sa version latine². Le manuscrit contient trente-neuf feuillets.

1.1) *De calculo differentialium* : premier contact avec la symbolique leibnizien

Nous rappelons que dans une lettre de décembre 1694, l'Hospital affirmait à Leibniz qu'il avait pris connaissance vers 1690 de la *Nova Methodus* et qu'il avait entrepris quelques écrits pour lesquels il affirmait qu'il « l'expliquois [le calcul] plus au long, et je donnois les demonstrations de toutes vos regles »³. Nous avons vu dans le chapitre 3⁴ que l'Hospital a établi la formule de la sous-tangente de la courbe d'équation $y^q = x^p b^{q-p}$ est :

$$t = \frac{qy^q}{px^{p-1}b^{q-p}} = \frac{qx^p b^{q-p}}{px^{p-1}b^{q-p}} = \frac{q}{p}x.$$

Certes, il ne s'agit pas des règles de différenciation telles qu'elles sont énoncées dans l'article de Leibniz, en particulier la caractéristique d y est absente. Dans cette lettre, l'Hospital fait donc référence à cette formule qu'il rapproche – de façon assez naïve – des règles du calcul leibnizien, sans se rendre compte de la supériorité de ces dernières. Les *Lectiones de calculo differentialium* (LCD dorénavant) de Jean Bernoulli représentent donc sa première véritable confrontation au calcul leibnizien.

Nous pouvons diviser ces leçons en trois parties : Bernoulli énonce d'abord les postulats nécessaires au calcul, il en présente ensuite les règles accompagnées de leurs preuves, puis il applique le calcul à la résolution de problèmes. Les premiers concernent la recherche de tangente à des courbes particulières toutes célèbres⁵ (problèmes de I à XI), les suivants sont des problèmes de *Maximis* et *Minimis*

¹ Il s'agit des manuscrits du fonds français FR 25397 et du fonds latin FL 17860.

² Bernoulli, Jean, *Lectiones de calculo differentialium*, Paul Schafheitlin; Naturforschende Gesellschaft in Basel. Basel : Naturforschende Gesellschaft, 1922.

³ Lettre à Leibniz du 30 novembre 1694, AII 6A, p. 232.

⁴ Voir 1.1) La première méthode des tangentes de l'Hospital (1690).

⁵ Parabole simple, parabole biquadratique, paraboles généralisées, ellipse, hyperbole, problème de Fatio, logarithmique, cycloïde, conchoïde, quadratrice de Dinostrate, spirale d'Archimède et cissoïde.

(problèmes de XII à XX) puis le dernier concerne la recherche du point d'inflexion d'une courbe (Problème XXI).

Comme ce cours était destiné à quelques auditeurs et que Bernoulli ponctuait probablement l'avancement de son cours par des remarques orales, il n'y a pratiquement pas d'avertissements ou de commentaires écrits qui, adressés à l'apprenant, rythmeraient autrement le texte. Nous allons essentiellement examiner ici les postulats et la présentation bernoullienne des différentielles.

Postulata

Bernoulli énonce trois postulats :

1. Une quantité diminuée ou augmentée d'une quantité infiniment moindre [*infinities minore*] n'augmente, ni ne diminue.
2. Toute ligne courbe est composée d'une infinité de lignes droites infiniment petites [*infinitis rectis, iisque infinite parvis*].
3. Une figure contenue entre deux ordonnées [*sub duabus ordinatim applicatis*], leur différence d'abscisse, et une portion infiniment petite de quelque courbe est considérée comme un parallélogramme¹.

Nous laissons pour l'instant de côté le commentaire du troisième postulat car il n'est ni évoqué, ni utilisé dans aucun passage des leçons. Il le sera en revanche dans la partie consacrée au calcul intégral que nous examinons plus loin. Il est donc probable que Bernoulli l'ait écrit dans la partie destinée au calcul différentiel, en prévision du cours suivant.

Jean Bernoulli s'est initié au nouveau calcul entre 1687 et 1690 avec l'aide de son frère Jacques. En 1691, il ne connaît Leibniz que par ses écrits, leur correspondance ne démarre que deux ans plus tard. Son cours est donc une interprétation de ses lectures des écrits leibniziens – essentiellement ou exclusivement ce sont des articles des *Acta Eruditorum* – sans qu'il y ait eu aucun échange d'ordre explicatif avec Leibniz. Nous souhaitons comprendre de quelle manière Bernoulli s'inspire des textes leibniziens pour écrire ses leçons, autrement dit, nous voulons savoir dans quelle mesure les LCD leurs sont fidèles.

Plusieurs remarques s'imposent. Bernoulli énonce les postulats à l'indicatif et non au subjonctif. Cela nous permet de supposer qu'il traite les entités « quantité infiniment moindre », « droites infiniment petites » auxquelles les notions du calcul

¹ LCD, *op. cit.*, p. 3.

se réfèrent comme des objets réels¹. Le deuxième postulat fait référence à la notion de polygone d'une infinité de côtés qui est une notion communément admise dans le milieu mathématique comme nous l'avons montré. Elle apparaît bien entendu comme essentielle dans la *Nova Methodus* lorsqu'il y est énoncé que la tangente est un côté d'un tel polygone. Cependant, au lieu d'écrire que la courbe est composée d'une infinité de lignes infiniment petites, Leibniz préfère écrire que la courbe est « pour nous » [*nobis*] « équivalente » au polygone « infinitangulaire ». Le « polygone à une infinité de côtés » a donc un caractère hypothétique. La notion de polygone à une infinité de côtés n'est pas uniquement utilisée pour la méthode des tangentes, de cette hypothèse Leibniz en conçoit le « principe général des mesures des courbes »² : tout ce qui est établi sur un tel polygone (et qui ne dépend pas du nombre de côtés) peut être affirmé de la courbe :

(...) de ce qui constitue d'après moi le principe général des mesures des Courbe, à savoir considérer qu'une figure curviligne équivaut [*sit equipollare*] à un Polygone d'une infinité de côtés, c'est-à-dire devienne d'autant plus vérifié [*verificetur*] qu'on prend un nombre de côtés plus grand, de sorte que l'erreur finisse par être plus petite que toute erreur donnée, on peut également l'affirmer de la courbe³.

Le deuxième postulat n'est pas énoncé dans l'opuscule leibnizien. L'idée qui le sous-tend est que dans une égalité il est possible de négliger des quantités incomparables par rapport à d'autres. Nous avons rencontré cette situation à plusieurs occasions dans notre étude. Elle est coutumière dans les travaux concernant l'Arithmétique des infinis où certains termes étaient considérés comme « indivisibles » ou « infiniment petits » ou « nuls », à l'égard des autres⁴. La manière de justifier de telles simplifications était donc plurivoque, aucun principe n'avait été énoncé clairement les uniformisant. On peut penser que Bernoulli énonce ce postulat, en vue des preuves des règles de différentiation, puisque, comme nous le verrons, il y

¹ Nagel, Fritz, « Nieuwentijt, Leibniz, and Jacob Hermann on infinitesimals » dans *Infinitesimals differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, edited by Ursula Goldenbaum and Douglas Jesseph, Walter de Gruyter, Berlin, 2008, p. 200.

² « Additio ad schedam de dimensionibus figurarum inveniendis », *AE*, 1684, p. 585-587, ou dans Leibniz, *Naissance du Calcul différentiel*, op. cit., p. 94.

³ *Ibid*, p. 94.

⁴ Dans *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer, 2015, p. 188, Gert Schrubring explique : « It is notable, however, that Johann Bernoulli's first postulate corresponds precisely to Newton's basic equation $x + 0 = x$ which Newton had formulated in 1669 in a text privately disseminated ».

fait appel. Leibniz, ne démontrant pas les règles dans son opuscule, n'a donc pas besoin d'énoncer explicitement ce type de postulat même s'il est implicitement évoqué dans l'idée que la courbe et le polygone ne diffèrent que d'une quantité moindre qu'aucune donnée¹.

Pour comprendre davantage l'intérêt de ces postulats au regard de la cohérence du texte, examinons les preuves des règles.

$$e = dx = \textit{differentiae indeterminatae}^2$$

Bernoulli énonce chacune des règles en la faisant suivre d'une preuve. La première règle établit que la différentielle d'une somme est la somme des différentielles de chaque terme³. La preuve est simple. Il suppose que la « différentielle de l'indéterminée [*indeterminatae*] x est $e = dx$ et celle de l'indéterminée y est $f = dy$ ». La somme des deux quantités est $x + y + e + f$ de laquelle il soustrait $x + y$. La différence est donc $e + f = dx + dy$. Il est intéressant ici de remarquer que dans ce passage, Bernoulli dénote également la différentielle dx par e . Ce choix de notation renvoie probablement à la notation de Barrow. Il est possible qu'il soit motivé par un souci pédagogique : pour faire comprendre ce que signifie « dx », Bernoulli renvoie ses élèves à une notation qui leur est connue. Le professeur cherche ensuite la différentielle de $a + x$ où a dénote une quantité fixée [*certam*] et déterminée. Dans la suite, il écrit⁴ que a devient " $a + 0$ ", de sorte qu'il signifie que la différentielle d'une quantité « fixée et déterminée » est nulle mais il n'énonce jamais explicitement la règle $da = 0$. Il faut préciser qu'ici « indéterminé » signifie ce qui est n'est pas fixé et dont la valeur n'est pas assignée⁵. Reste à voir si cette notion coïncide avec la notion de « variable » qui a été repérée dans la *Nova Methodus*.

Pour la preuve de la règle du produit, Bernoulli multiplie $x + e$ par $y + f$ puis il soustrait $x + y$. Le reste est $ey + fx + ef$. Il déclare que, par le postulat 1, ce reste

¹ Voir chapitre 3, §3.2. Dans un autre opuscule publié en 1689 dans les *Acta eruditorum*, Leibniz énonce un lemme extrêmement fin qu'il appelle « lemme des incomparables » auquel il fera référence très souvent ensuite. Nous y reviendrons plus tard dans ce chapitre car nous ne pensons pas que Bernoulli pense à ce lemme lorsqu'il énonce son premier postulat.

² LCD, *op. cit.*, p. 3.

³ « Quantitatum additarum differentialis est summa differentialium ».

⁴ Il dira aussi plus loin « + 0 id est a plus nihil ».

⁵ Son contraire « déterminé » est donc ce qui est fixé. En qualifiant la quantité a de « *certam et determinatam* » il nous semble qu'il insiste sur son caractère constant.

est égal à $ey + fx$ mais il ne dit pas pourquoi ef est infiniment moindre que les deux autres termes¹. Nous n'avons donc pas d'explication supplémentaire sur ce que signifie « infiniment moindre que ». Il énonce et prouve ensuite les règles pour les puissances négatives ou fractionnaires, les quotients, puis les quantités sourdes.

Bernoulli ne définit pas ce qu'est une différentielle : les lecteurs ne peuvent donc pas saisir ce qu'il entend par là sauf en analysant son texte pour savoir comment il traite cette notion. Par l'examen des preuves des règles, nous observons que la présentation bernoullienne fait intervenir des éléments calculatoires proches de ceux que nous avons rencontré dans le chapitre 3, notamment lorsqu'il s'agissait de développer le binôme $(x + e)^p$. Dans ce cas, il était accepté de ne conserver que les deux premiers termes puisque le reste ne servait pas au calcul. Ici, la justification est différente puisque Bernoulli les ôte parce qu'ils sont « infiniment moindre ». Quel est le statut de la différentielle bernoullienne ?

Pour donner des éléments de réponse à cette question, il est utile d'examiner comment Bernoulli aborde « la différentielle de la différentielle [*differentiale differentialis*] ». Elle apparaît une seule fois lorsqu'il traite le problème de point d'inflexion d'une courbe². Un point d'inflexion est celui « qui sépare les deux courbures, quand la courbe passe de concave à convexe, ou viceversa »³. Pour trouver un point d'inflexion, Bernoulli fournit trois manières de procéder, seule la deuxième fait intervenir la différentielle d'ordre deux. Il remarque qu'au point d'inflexion la courbe doit nécessairement être droite ne pouvant être à la fois convexe et concave, cependant cela ne signifie pas que la courbe est droite sur une portion finie mais qu'elle l'est au moins sur deux parties infiniment petites⁴. Il en déduit que pour une portion donnée dx supposée contante, dy l'est également et donc « ddy la différentielle de la différentielle = 0 ». C'est donc lors du dernier problème traité dans ses leçons que Bernoulli considère et traite pour la première fois dy comme une variable, dans un cas particulier, celui où elle devient constante.

¹ Sa démarche est la même pour la différentielle des premières puissances.

² « Problema XXI De inventione puncti flexus curvarum », *LCD*, p. 23.

³ *Ibid*, p. 23.

⁴ « hoc autem non intelligendum est ac si curvae quaedam portio finita esse recta, sed quod saltem duae particulae infintae parvae in directum jaceant », *ibid*, p. 24.

*De l'usage du calcul différentiel pour résoudre des problèmes*¹

Le calcul différentiel sert à résoudre des problèmes : Bernoulli destine trente-et-un feuillets à ce sujet. Pour la recherche de tangentes, chaque courbe est traitée séparément l'une de l'autre, Bernoulli ne cherche pas à identifier des similitudes de traitement entre les différents exemples qui pourraient permettre de les classer et d'énoncer des méthodes plus générales spécifiques à certains types de courbe². Il ne souligne pas non plus que la méthode des tangentes peut s'appliquer autant aux courbes géométriques qu'aux courbes transcendentes. Pourtant cela est un argument important pour Leibniz, qu'il ne cesse de répéter. Les courbes « mécaniques » sont évoquées une seule fois lorsqu'il remarque que la deuxième manière pour trouver les points d'inflexion s'utilise autant pour les courbes mécaniques que pour les géométriques (pourvu que la raison de dx à dy soit connue).

Dans la mesure où ces deux écrits peuvent être confrontés, nous serons amenés plus loin dans notre travail à comparer ces leçons avec l'ouvrage de l'Hospital³. De cette première analyse des *Lectiones de calculo differentialium* nous pouvons conclure que le dessein de Bernoulli est essentiellement d'initier ses élèves au calcul différentiel se limitant aux règles et à quelques applications géométriques. Nous pensons que Bernoulli ne s'immisce pas dans les difficultés des notions auxquelles le calcul se réfère. Sa présentation évite des considérations sur la notion de différentielle qui reste floue. La différentielle peut être traitée comme un élément calculatoire négligeable, mais aussi elle peut être considérée comme une grandeur – segment, élément de courbe – infiniment petite. Pour la résolution de problèmes du même type que ceux traités dans les *LCD*, il est question maintenant de savoir si les élèves de Bernoulli considèrent comme avantageux d'utiliser ce nouveau calcul plutôt que d'autres méthodes comme celle de Barrow.

¹ Titre de la section où démarre l'application du calcul différentiel à la résolution de problèmes.

² Nous reviendrons à ce sujet sur le prochain chapitre.

³ Chapitre 5.

1.2) Les cahiers de calcul intégral de Malebranche, première période (1692-1693)

La Copie parisienne des leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli

Le manuscrit¹ du Fonds latin 17860, folios 91-240 contient plus des cinq sixième des leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli telles qu'elles ont été publiées en 1742² avec son accord. Ce manuscrit est dépourvu des cours de calcul différentiel. La correspondance des textes entre le manuscrit et l'imprimé est parfaite jusqu'à la fin de la leçon 32 (dernière leçon sur les caustiques) puis l'ordre des sections n'est plus la même. À partir de la page 221, le manuscrit reprend le texte imprimé (leçons 46 à 55) et se termine par les leçons 33 à 35³. Ainsi, les leçons 36 à 45 de l'imprimé sont absentes du manuscrit, elles concernent l'étude des figures d'équilibre de fils et de voiles, deux leçons sont consacrées à la chaînette⁴. Ce manuscrit est pratiquement de la main de Carré sauf les titres des figures (folios 241-250) qui sont de la main de Malebranche, les folios 251-252 concernent des *errata* et sont de la main de Byzance (ces corrections ne vont pas au-delà de la deuxième section intitulée *De Quadratura Spatorum* et auraient été apportées ultérieurement vers 1698⁵ à partir des originaux de l'Hospital⁶). La copie Carré (FL 17 860) est donc très proche de la première version des leçons, elle porte également la marque des remarques orales du professeur. Au fonds Bernoulli de Bâle sont déposés plusieurs manuscrits de *Methodo integralium* parmi lesquels le dénoté « cahier C » est le plus ancien et complet. Il est de l'écriture de Stähelin – secrétaire de Bernoulli pendant son séjour parisien – et de celle de Bernoulli. Il appert que le cahier C est une copie des originaux des leçons appartenant à l'Hospital. Ce cahier a été ramené à Bâle par Bernoulli lors de son départ en novembre 1692. La copie de Carré serait celle du cahier C⁷. Elle est partielle car le manuscrit C contient les leçons 36 à 45, ce qui implique que les originaux de l'Hospital

¹ Nous reprenons l'étude très complète faite par Pierre Costabel sur ce manuscrit et l'histoire de ses copies dans « La copie parisienne des leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli », *Mathematica* p. 131-168.

² Bernoulli, Jean, *Opera omnia tam autem sparsim edita quam hactenus inedita, tomus tertius, accedunt Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate*, Lausanne, 1742.

³ Applications mécaniques pour trouver les trajectoires des points pesants soumis à certaines conditions

⁴ Un tableau comparatif du texte imprimé et du manuscrit est fourni dans l'étude de Costabel, *ibid*, p. 133-141.

⁵ *Ibid*, p. 167.

⁶ *Ibid*, p. 151.

⁷ *Ibid*, p. 153. Parmi d'autres arguments, Costabel remarque que toutes les corrections de Byzance dans le manuscrit de Carré sont sur le manuscrit C, la réciproque n'est pas vraie.

les contenaient aussi¹ et que ces leçons ont été professées par Bernoulli pendant l'été 1692 à Oucques, chez l'Hospital².

En définitive, la copie Carré du manuscrit 17860 est celle du cahier C de Jean Bernoulli. Malebranche en a fait probablement la demande à Stähelin en 1692. Carré, secrétaire de Malebranche à cette époque, s'en charge même s'il ne comprend pas forcément tout ce qu'il recopie³.

Les cahiers de calcul intégral de Malebranche, première période (1692-1693)

Malebranche a écrit quatre cahiers⁴ de 36 pages où il reprend les leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli. Il se pourrait qu'il ait travaillé à partir de la copie de Carré dont nous avons parlé plus haut. Le texte présenté par Pierre Costabel dans son édition tient compte de cette hypothèse et met en parallèle la copie de Carré et les cahiers. Cette disposition permet de voir que Malebranche ne reprend pas la totalité des leçons bernoulliennes⁵. Certaines pages n'ont pas de correspondance directe avec le texte de Bernoulli et proviendraient d'échanges avec le Marquis de l'Hospital. Malebranche a prévu une disposition particulière de la pagination : les rectos des folios – c'est-à-dire les pages de droite du cahier – sont réservés aux développements ou aux commentaires, les versos – c'est-à-dire les pages de gauche – sont réservés aux corrections, annotations et compléments. Cette disposition montre qu'il souhaitait pouvoir éventuellement revenir sur des anciennes questions⁶. Ces cahiers témoignent d'un Malebranche transcrivant un savoir qu'il est justement en train d'acquérir et la progression de celle-ci renseigne sur le rapport qu'il établit avec ces nouvelles

¹ *Ibid*, p. 164.

² *Ibid*, p. 165.

³ Un autre manuscrit existe concernant les leçons de calcul intégral bernoulliennes. Il s'agit du manuscrit FR 24235 dont les folios 14-27 sont des planches des mêmes figures que celles du FL 17860 et dont le graphisme principal est celui de Byzance. Ce dernier manuscrit a l'intérêt de montrer que Carré recopie sans vraiment comprendre. Les figures de Byzance dateraient de 1698, date à laquelle il aurait eu un accès direct aux originaux de l'Hospital, *ibid*, p. 164.

⁴ Ce manuscrit est enregistré à la bibliothèque nationale cote FR. 24237, folios 60 à 95. Il a été publié dans *Mathematica* p. 169-294. Costabel date les trois premiers cahiers dans la période 1692-1693 et le quatrième dans la période 1693-1695, *ibid*, p. 175.

⁵ Par ce choix d'édition Costabel suggère que c'est à partir de cette copie que Malebranche aurait travaillé. D'après nous cette hypothèse n'est pas forcément fondée. En effet, il existe des passages en latin dans les cahiers de Malebranche qui n'ont pas de correspondance dans le texte de la copie Carré et qui apparaissent dans l'imprimé. Nous n'avons pas pu pour l'instant malheureusement consulter les manuscrits du Fonds Bernoulli à Bâle pour préciser nos conclusions.

⁶ C'est ce qu'il fit comme le montrent par exemple des ratures à encres différents. Costabel signale qu'il se pourrait que certaines remarques ou corrections ont pu être apportées jusqu'en 1710. Ainsi, ce document doit être interprété historiquement comme un cahier à usage personnel, *ibid*, p. 175-176.

connaissances. Il reprend page par page les leçons de Bernoulli qu'il réexprime en français ou en latin, parfois il se satisfait de simplement recopier intégralement de longs passages : la correspondance entre le cahier I et la première leçon de Bernoulli est frappante. En revanche, elle est moins flagrante entre les cahiers II et III. Le cahier IV est plus hétéroclite, il peut être divisé en quatre documents, le premier correspondrait à des compléments des cahiers II et III, et les trois autres traiteraient de problèmes inverses des tangentes. Nous examinerons ce cahier plus loin dans notre étude.

Avec l'analyse de ces textes¹, nous souhaitons savoir si le rapport que Malebranche entretient avec cette nouvelle symbolique l'amène à considérer la méthode calculatoire comme porteuse d'évidence et de quelle manière ceci se produit. Dans notre étude sur l'Abbé de Catelan, nous avons vu l'intérêt que Malebranche accordait à l'analyse et à l'algèbre car elles permettent d'« augmenter l'étendue de l'esprit » et donnent « plus de réalité » à l'esprit et à l'entendement. Sans entrer dans des considérations philosophiques, il est important pour la suite de notre développement de souligner certains traits de la conception de la vérité chez Malebranche. Pour le philosophe, la vérité (non seulement en mathématiques) se définit comme un « rapport réel soit d'égalité, soit d'inégalité »². Contrairement à Descartes, Malebranche n'exige pas de raisonner à partir d'idées claires et distinctes nécessairement finies et saisies par l'intuition : il accorde en revanche un rôle primordial à la notion « d'exactitude » ou à la nécessité d'une détermination numérique : « la vérité se déplace des idées aux relations entre idée »³. Pour cette raison, il accorde un privilège aux sciences comme l'arithmétique et l'algèbre car elles produisent des égalités⁴. Il ne dévalorise pas pour autant la géométrie qui est très utile pour rendre l'esprit attentif aux choses dont on doit découvrir les rapports exacts⁵. Il nous semble important de souligner ces aspects avant d'aborder l'analyse des textes des cahiers malebranchistes car ils concernent non seulement une méthode

¹ Des études ont été menées sur ces textes auxquelles nous ne manquerons pas de nous référer : Robinet, André, « La philosophie malebranchiste des mathématiques », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 14, n°3, Paris, 1961. L'étude de Costabel cité plus haut aient été prolongée récemment par une analyse à perspective philosophique, il s'agit du travail de Claire Schwartz, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, op. cit.

² Claire Schwartz, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*.

³ *Ibid*, p. 7.

⁴ *Ibid*, p. 99.

⁵ *Ibid*, p. 51.

calculatoire mais un calcul qui a affaire à des notions qui n'apparaissent pas d'emblée au XVII^e siècle comme des notions « claires et évidentes ».

La première leçon : on calcule avec des indéterminées

Nous rappelons que Bernoulli fait suivre les leçons de calcul différentiel par celles concernant « De methodo integralium ». Dans les cahiers de Malebranche, seules ces dernières leçons sont reprises. Une première remarque s'impose : Malebranche ne conserve pas le titre donné par Bernoulli à l'ensemble de ces leçons et le change en « Du calcul intégral »¹. Le fait-il parce qu'il s'agirait uniquement d'assimiler les algorithmes de calcul ?

Jean Bernoulli fait appel à qui a été vu dans les leçons de calcul différentiel qui précèdent. Il débute par des exemples simples d'intégration : l'intégrale de dx est x , celle de $x dx$ est $\frac{1}{2} x^2$ ou $\frac{1}{2} x^2$ plus ou moins une quantité constante, etc, ce qui lui permet de conclure par la formule « $\frac{a}{p+1} x^{p+1}$ est l'intégrale de $ax^p dx$ »². Rien n'est indiqué sur ce que désigne p mais les exemples montrent qu'il s'agit d'un rationnel quelconque. Bernoulli traite le cas³ $p = -1$: $\frac{dx}{x} = \frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} x^1 = 0$, ce qu'évite Malebranche. À la suite de cette formule, le professeur remarque que pour intégrer une quantité il faut essayer de se ramener à cette formule⁴ en considérant une « absolue » [*absolutae*] qui se prend parmi les grandeurs de la différentielle, puis prendre la différentielle de cette absolue et voir s'il y a dans l'expression de la quantité à intégrer une quelconque puissance de cette absolue ou son produit par une grandeur connue ce qui donne moyennant une multiplication par une puissance, la différentielle dont on cherche l'intégrale. Cette longue description obscure est suivie d'exemples clarifiants⁵.

¹ Costabel y voit chez Malebranche « la possession par l'auteur du sens du formalisme de l'algèbre et du mécanisme du changement de variable », *op. cit.*, p. 284.

² *Mathematica*, p. 178.

³ Byzance écrit en oblique « ∞ ».

⁴ *Ibid*, p. 180 : « il faut considérer avant toute chose si la quantité proposée est le produit d'une différentielle quelconque par un multiple de son absolue élevée à une puissance quelconque. Ce qui est le signe que son intégrale peut être trouvée par cette règle ». (traduction par nos soins).

⁵ *Ibid*, p. 180.

Dans le premier, il doit intégrer $dy\sqrt{a+y}$. Il remarque que dy est multiplié par son « absolue » qui est élevée à la puissance $\frac{1}{2}$, il vient : $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1}$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}(a+y)\sqrt{a+y}$.

Il est intéressant de remarquer que Malebranche débute d'emblée en intronisant la formule, clef de la première leçon : « $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$ est l'intégrale de $ax^p dx$ ». La définition d'une « grandeur absolue » suit immédiatement :

On appelle grandeur absolue celle qui est la racine de la puissance qui est l'intégrale de la différentielle.

L'exemple qui suit est plus complexe que ceux proposés par Bernoulli et lui permet de montrer plus amplement l'automatisme de l'algorithme. Il souhaite intégrer la différentielle $\frac{ydy}{\sqrt{b^2+y^2}}$ dont l'« absolue » est $b^2 + y^2$ (choisie parmi les « grandeurs des différentielles »). En se référant à la formule, il écrit :

$$x = b^2 + y^2; dx = 2ydy, p = -\frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}.$$

Puis il substitue dans l'intégrale $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$ et il trouve $\sqrt{b^2 + y^2}$.

Cette notion de « grandeur absolue » est de haute importance puisqu'elle suppose une certaine maîtrise du formalisme algébrique dans le calcul intégral notamment dans le procédé de changement de variable¹. La définition, que Malebranche prend le soin de transcrire, montre qu'il a compris la portée symbolique de cet algorithme et les exemples qu'il propose rendent compte de sa maîtrise. Suivent ensuite des règles plus élaborées², qui permettent de se ramener à la formule générale. Elles font de ce premier cahier un véritable enseignement destiné à un étudiant débutant.

La préoccupation de Malebranche est d'intégrer au plus vite des techniques opératoires. Il intègre ainsi l'aspect algorithmique par les exemples proposés dans le texte de Bernoulli. Dans la page 12 du cahier II³, Malebranche résume la méthode

¹ Note de Costabel, *ibid*, p. 179.

² *Mathematica* p. 185-199.

³ *Ibid*, p. 217 et 219.

générale en expliquant : « La règle générale est contenue dans cette formule : la différence $apx^{p-1}dx$ a pour integr. $\frac{pax^{p-1+1}dx}{p-1+1dx} = ax^p$ ».

En décomposant ainsi à droite le terme de gauche, Malebranche indique de quelle façon il utilise la formule d'intégration. Pour faire comprendre cet éclatement de la formule, il considère une expression pour laquelle Bernoulli n'a pas jugé de développer¹ les étapes de son intégration et dans lequel il faut intégrer la grandeur :

$$A = (x^7 dx - \frac{7}{4} ax^6 dx)(2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}}.$$

Malebranche procède en quatre étapes qu'il numérote. Il commence par remarquer que premièrement $2ax^7 - x^8 dx$ « répond à l'indéterminée x de la formule » puis que deuxièmement l'exposant $-\frac{1}{2}$ correspond au $p - 1$ de la formule. Ainsi, troisièmement, la différentielle de $2ax^7 - x^8$ est $7 \times 2ax^6 dx - 8x^7 dx$ et « répond à la différence de x de la formule ». Enfin, quatrièmement, pour trouver l'intégrale de la grandeur

$$(x^7 dx - \frac{7}{4} ax^6 dx)(2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}}$$

Il élève la grandeur $2ax^7 - x^8$ à la puissance $-\frac{1}{2} + 1$ et il obtient :

$$(x^7 dx - \frac{7}{4} ax^6 dx)(2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}+1}.$$

Il divise le dernier résultat par l'exposant $-\frac{1}{2} + 1$ et par $7 \times 2ax^6 dx - 8x^7 dx$ (qui « répond » au dx de la formule générale) ce qui donne l'intégrale

$$\frac{(x^7 dx - \frac{7}{4} ax^6 dx)(2ax^7 - x^8)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times (7 \times 2ax^6 dx - 8x^7 dx)}$$

qu'il simplifie pour obtenir : $-\frac{1}{4}(2ax^7 - x^8)^{\frac{1}{2}}$.

Soulignons que cet exemple est à l'initiative de Malebranche et que c'est donc de son propre chef qu'il souhaite expliciter méthodiquement toutes les étapes de sa propre démarche calculatoire. Peut-on y discerner un aveuglement du sens de la différentielle au profit d'une algorithmisation réussie des procédés d'intégration² ? Ce

¹ *Ibid*, p. 214.

² Costabel remarque « une curieuse formule générale qui dénote l'attrait des procédés d'écriture et des algorithmes, même si le sens des symboles se trouve ainsi mis à mal. Malebranche donne ici un exemple de confiance naïve », *ibid*, p. 286. Nous ne partageons pas ce point de vue et nous pensons que Malebranche établit avec le calcul un rapport de « connaissance aveugle » nécessaire à l'obtention de

type d'exemple n'est certes pas isolé dans les cahiers, il illustre sans aucun doute un aspect de son expérience du calcul leibnizien dans lequel le philosophe manipule des signes sans se soucier présentement de leur signification géométrique.

De Spatiorum quadratura : les indivisibles calculés

Cette partie correspond à l'application du calcul intégral aux quadratures et rectifications de courbes. Bernoulli débute ce paragraphe en expliquant que la recherche de quadratures fait partie des diverses utilisations du calcul intégral. Le texte de Malebranche omet cette phrase introductrice mais reprend quasi intégralement l'énoncé en latin de l'imprimé de Bernoulli¹. L'hypothèse pour quarrer un espace est de le considérer :

divisé infiniment en parties [*divisa in infinitas partes*] dont chacune est tenue pour une différentielle de l'espace, de sorte que si l'intégrale de cette différentielle, c'est-à-dire la somme de ces parties, est obtenue, de là nous pouvons connaître la quadrature demandée².

Ces *infinitas partes* peuvent être considérées de différentes manières pour faciliter la quadrature³. Les plus courantes des divisions sont celles effectuées par des « lignes parallèles » ou par des « lignes » qui concourent en un point. D'autres types de divisions sont présentées : par des tangentes ou par des normales. Selon la forme ou l'engendrement de la figure, un type de division convient mieux qu'une autre⁴. Il est possible de choisir une division qui soit adaptée à la génération cinématique d'une courbe comme la conchoïde pour laquelle l'infinie division par des trapèzes est la plus adéquate. Remarquons que lorsque Bernoulli ou Malebranche écrivent « lignes », ils entendent des parallélogrammes, des trapèzes, des triangles ou d'autres éléments obtenus par infinie division.

résultats. Il ne s'agit donc pas d'une « confiance naïve » mais d'une confiance qui mène à la fécondité. Nous pensons le prouver dans la suite de notre développement.

¹ Cela indique qu'il est possible que Malebranche n'ait pas travaillé sur la copie Carré mais peut-être sur une autre copie ou directement sur les originaux de l'Hospital.

² « Considerantur spatia ut divisa in infinitas partes quarum unaquaeque pro differentiali spatii haberi potest, ita ut si integrale hujus differentialis, id est summa harum partium habeatur, ex inde quoque innotescat quadratura quaesita », *ibid*, p. 201.

³ « Partes istae infinitae in spatii planis considerari possunt diversis modis prout commodissime permittunt omnes circumstantiae planorum ».

⁴ La division par des lignes parallèles convient à la parabole alors qu'elle ne convient pas à la spirale. Inversement, la division par des lignes concourantes convient à la spirale et pas à la parabole.

Le fait de considérer une figure comme divisée en éléments homogènes au tout n'est pas nouveau pour les membres du groupe autour de Malebranche, familiers du langage pascalien. Par ailleurs, un de leurs manuscrits¹ atteste de l'usage d'« indivisibles » pour « former » une figure :

On peut concevoir dans une figure² comme A ou B des lignes droites ou courbes parallèles entre elles, comme A, B, C D terminées aux extrémités de la figure par des lignes droites perpendiculaires aux 1^{ères} ces lignes formeront de petits parallélogrammes rectangles dont les longueurs occuperont ceux des dimensions de la figure, et dont les largeurs qui sont infiniment petites seront égales entre elles, ces sortes de petites figures, s'appellent les éléments de l'aire, parce qu'elles peuvent former l'aire et on les nomme indivisibles, parce que, quoi qu'elles puissent absolument être divisées, on les considère comme indivisibles³.

Les « éléments de l'aire » ne sont pas obligatoirement des parallélogrammes mais peuvent également prendre la forme de triangles ayant un sommet commun, de trapèzes ou de losanges. Dans les leçons bernoulliennes, un nouveau vocable est utilisé pour nommer ce qu'ils appelaient auparavant « indivisibles » : les « différentielles de l'espace ». Cette modification de nom n'a rien d'arbitraire. Nommé « différentiel » l'indivisible devient l'objet d'un calcul : « si l'intégrale de cette différentielle, c'est-à-dire la somme de ces parties, est obtenue, de là nous pouvons connaître la quadrature demandée ». Le calcul différentiel dote ces éléments géométriques d'une expression analytique dont l'intégrale correspond justement à la quadrature de l'espace.

Avant d'entamer l'analyse de la confrontation malebranchiste avec ces éléments géométrico-différentiels destinés au calcul, il est utile d'observer les figures selon chaque type d'infinie division puis de comparer le tracé de ces figures entre les différents copistes et l'imprimé de 1742. Ceci est rendu possible ici par le tableau que nous présentons par la suite. Dans ce dernier, les figures numérotées de 1 à 5 sont divisées uniformément : divisions égales de l'axe des abscisses (figure 1), ou angles égaux autour du point de concours (figure 2 et 5) ou éléments de courbes égaux (figures 3 et 4). Cette uniformité n'est pas toujours respectée dans les manuscrits : Carré se trompe pour la figure D, ne comprenant pas que l'égalité se fait entre les

¹ FR 24238, fol. 251-252. Nous attribuons ce manuscrit à Reyneau.

² Le manuscrit ne contient pas des planches de figures.

³ *Ibid*, folios 251-252.

éléments de la courbe. Il est probable par conséquent qu'il commette également cette erreur pour la figure C des tangentes mais il est difficile de conclure car la figure n'est pas assez nette. Comme toutes les figures de Byzance sont négligées, il est difficile de savoir si elles sont justes. Mis à part la figure C qui n'est pas nette, les tracés de Malebranche sont soignés et permettent d'avancer qu'il comprend la démarche de Bernoulli.

Comment donc ces infinies divisions conduisent-elles à obtenir une quadrature par le calcul ? Cela dépend du type de division car chacun a une traduction analytique. Si les divisions sont parallèles, en notant x l'abscisse et y l'appliquée alors ydx est le rectangle entre les appliquées et la différentielle des appliquées¹. Si les divisions concourent en un point la différentielle de l'espace est $\frac{1}{2}ydx$ c'est-à-dire est le triangle de côté y et de hauteur l'arc infiniment petit. Il est important de souligner l'identification effectuée entre l'élément différentiel et son expression analytique car elle accentue le caractère calculatoire de la méthode. Bernoulli donne deux exemples que Malebranche reprend à la lettre. Le premier est celui de la parabole de la figure A qui a pour équation $ax = yy$. Son élément différentiel est donc $ydx = dx\sqrt{ax}$ dont l'intégrale est $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} = \frac{2}{3}xy$ soit l'espace cherché. Le deuxième exemple illustre la configuration des divisions concourantes : Bernoulli choisit la spirale logarithmique caractérisée par la constance du rapport $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$. Ainsi, $\frac{1}{2}ydx = \frac{ybdy}{2a}$ dont l'intégrale est $\frac{by^2}{4a}$ qui est l'espace requis².

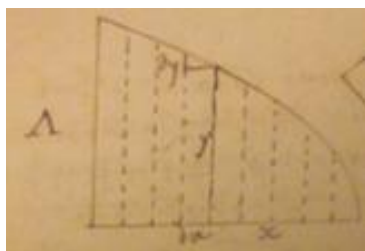


fig. 59

¹ Ici, Bernoulli fait allusion au troisième postulat des *Lectiones de calculo differentialium* dans lequel cet élément devait être considéré comme un parallélogramme. Notons le changement d'expression de « différence des abscisses » par « différentielle des abscisses » et « parallélogramme » par « rectangle ».

² *Mathematica*, p. 204-205.

La quadrature du cercle et de l'hyperbole : disséquer pour calculer

Le problème des quadratures des figures est donc traité par l'intégration de différentielles. Certaines de celles-ci sont intégrables directement par la règle générale « $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$ est l'intégrale de $ax^p dx$ » mais d'autres ne peuvent pas l'être. C'est le cas de l'hyperbole ou du cercle pour lesquelles Bernoulli donne l'expression des différentielles. D'autres espaces différentiels s'expriment justement à l'aide de ces dernières : il est dit dans ce cas que leurs quadratures dépendent de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole :

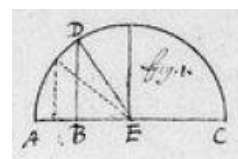
Si, donc, la différentielle d'un espace peut être ramenée à l'une des formules, l'espace en question pourra être égal à un cercle, ainsi qu'à une hyperbole, ou à un segment de cercle, ainsi qu'à celui d'une hyperbole. Mais tous ces espaces dont la différentielle s'exprime par une quantité rationnelle multipliée ou divisée par l'appliquée du cercle ou de l'hyperbole, c'est-à-dire $\sqrt{aa - xx}$, ou $\sqrt{ax - xx}$, ou $\sqrt{aa + xx}$, tous ces espaces, dis-je, peuvent se quarrer à l'aide du cercle ou de l'hyperbole¹.

Il est donc important dans le calcul de l'intégrale d'une différentielle de repérer si son expression comporte les différentielles du cercle ou de l'hyperbole. Or, l'expression de celles-ci diffère selon le choix de coordonnées. Bernoulli prend soin de distinguer les différents cas ($BF = x$, $AF = x$, $HK = x$ et $HI = x$). Entre la copie de Carré et l'imprimé il n'y a aucune modification sauf pour les notations². Une seule page lui suffit au traitement de ces deux cas³.

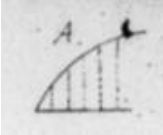



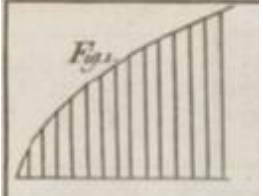

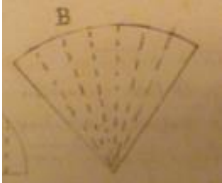




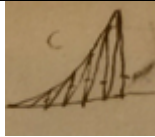

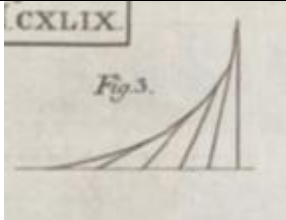
¹*Ibid*, p. 211 : « Omnia autem ista spatia quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem multiplicatam vel divisam per applicatam circuli vel hyperbolae, id est per $\sqrt{aa - xx}$, vel per $\sqrt{ax - xx}$, vel $\sqrt{aa + xx}$ vel $\sqrt{xx - aa}$. Omnia inquam ista spatia aut quadrantur aut circulo vel hyperbolae aequantur, quod ita fit ».

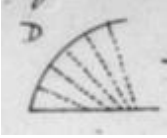
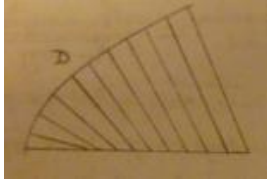
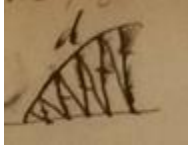

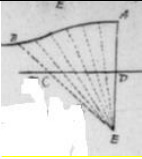
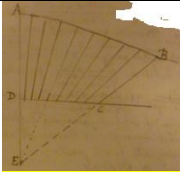
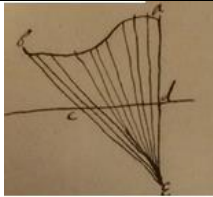

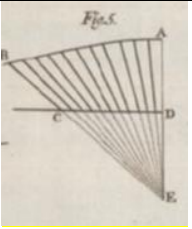
²

Dans l'imprimé Bernoulli distingue un couple de points infiniment proches par une notation en capitale et une autre en majuscule, par exemple F et f ou A et a des couples de points considérés infiniment proches. Dans la copie de Carré, on remarque l'absence de notation d'un point infiniment proche d'un autre : dans la figure le point infiniment proche de D n'est pas nommé, alors qu'il le serait chez Bernoulli. FL 17860, fol. 241.



³ FL 17860, fol. 100, p. 20, *Mathematica, op. cit* p. 206 et Bernoulli, *Opera omnia*, tome 3, *op. cit.*, p. 396.

	Copie Carré (FL 17860)	Malebranche (FR 24 237)	Byzance (FR 24235)	Bernoulli (Manuscrit A de Bâle)	Bernoulli (Imprimé de 1742)
A ou 1					
B ou 2					
C ou 3					

	Copie Carré (FL 17860)	Malebranche (FR 24 237)	Byzance (FR 24235)	Bernoulli (Manuscrit A de Bâle)	Bernoulli (Imprimé de 1742)
D ou 4					
E ou 6					

En revanche, Malebranche apporte une attention particulière à développer chacun des exemples en explicitant l'expression de plusieurs grandeurs différentielles qui apparaissent dans la configuration du cercle ou de l'hyperbole. Ces traitements comportent six pages¹. À titre d'exemple², nous pouvons comparer Bernoulli et Malebranche pour les présentations des éléments différentiels de l'hyperbole équilatère telle que $BD = 2a$ et lorsque $BF = x$. Bernoulli écrit que l'ordonnée $AF = \sqrt{2ax + xx}$ et que par conséquent l'espace différentiel $AFfA$ est égal à $dx\sqrt{2ax + xx}$. Cela lui semble suffisant. Malebranche présente un tableau dans lequel il écrit dans la colonne de gauche « différentielles » – c'est-à-dire l'expression d'un espace différentiel – et dans la colonne de droite « Intégrales » – c'est-à-dire l'expression de l'espace fini correspondant :

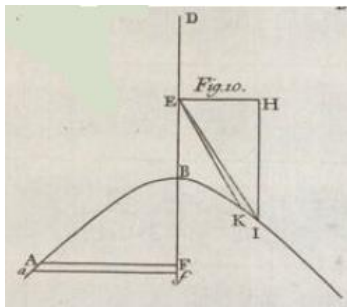


fig. 61

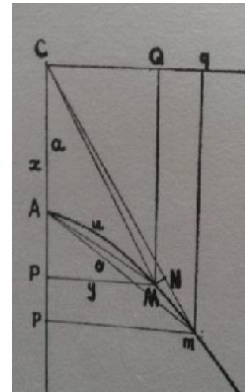


fig. 62

Différentielles	Intégrales
$dx\sqrt{2ax + xx} = Pp \times MP$	APM^3
$\frac{aadx}{2\sqrt{2ax+xx}} = CMN$	CAM
$\frac{axdx}{2\sqrt{2ax+xx}} = AMo$	$AuMo$
$\frac{a+x^2dx}{\sqrt{2ax+xx}} = QMNq$	$CAMQ$

¹ L'hyperbole est traitée deux fois, *Mathematica*, p. 207 et 209 puis 243. Le cercle est traité au folio 21, *ibid*, p. 243-245.

² La figure de gauche est tirée de Bernoulli (1742), celle de droite du manuscrit de Malebranche (daté d'environ 1693 par Costabel).

³ Il s'agit de l'espace mixtiligne APM et non du triangle.

Il démontre ensuite ces formules. Ici, $AP = x$. Les divisions de l'hyperbole étant parallèles, l'espace différentiel de APM est le rectangle $ydx = dx\sqrt{2ax + xx}$ d'où la première formule.

La deuxième formule est obtenue en remarquant que $Mm^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{4ax+3x^2+a^2}{2ax+x^2}$.

$CM^2 = CP^2 + PM^2 = 2x^2 + 4xa + a^2$ donc $CM = \sqrt{2x^2 + 4xa + a^2}$. Comme Nm est la différentielle de CM , il vient

$$Nm = \frac{2x+2a}{\sqrt{2x^2+4xa+a^2}}.$$

Or

$$MN^2 = Mm^2 - Nm^2 = \frac{a^4}{(2ax+x^2)(2x^2+4xa+a^2)}.$$

D'où

$$CMN = MN \times \frac{CM}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2ax+xx}}.$$

Pour la troisième formule, Malebranche remarque que la différence entre la différentielle de $APMu$ (ou APM) et celle du triangle APM est égale à celle de AMu .

Or la différentielle de $APMu$ est $dx\sqrt{2ax + xx}$ et celle du triangle APM est la différentielle de $\frac{x\sqrt{2ax+xx}}{2}$ soit $\frac{3axdx+2xxdx}{2\sqrt{2ax+xx}}$. Par différence, il vient que la différentielle de AMu est $\frac{axdx}{2\sqrt{2ax+xx}}$. Le même type de considération est effectué pour la quatrième

formule mais nous ne développons pas ici la preuve.

Ses démonstrations minutieuses témoignent de la manière dont Malebranche assimile l'application du calcul intégral aux quadratures. Pour quarrer une figure, il ne s'agit plus de l'interpréter uniquement en relation avec des « indivisibles » mais avec celle d'« éléments différentiels ». Quelle est la différence qu'il perçoit entre ces deux notions ? Nous avons vu plus haut¹ qu'il est admis qu'une figure puisse être conçue comme composée d'« indivisibles » de taille « infiniment petite ». Il s'agit d'une façon de parler, en utilisant le langage des indivisibles il n'est pas requis ni de statuer sur la réalité de ces entités, ni de s'interroger sur la manière qu'elles auraient de constituer le continu de l'étendue : il est simplement retenu que leur « somme » est aussi proche que l'on souhaite de l'aire requise, et cela suffit. Nous pensons que Malebranche

¹ « Seconde partie de Géométrie, les superficies », FR 24238, fol. 250-265. Bien sûr, notre étude sur le langage des indivisibles montre que celui-ci est assimilé.

estime que la notion de différentielle d'espace permet une connaissance plus parfaite que celle apportée par le langage des indivisibles. En quel sens ? L'espace différentiel entretient avec son intégrale une relation descriptible par une égalité, celle-ci est manipulable par le calcul. La relation entre la différentielle et l'intégrale peut donc être décrite de manière « exacte » comme c'est le cas des relations entre grandeurs finies dans le domaine de l'algèbre. Dans la mesure où le nouveau calcul permet d'établir des rapports exacts, Malebranche accepte volontiers d'utiliser les différentielles¹. L'exemple des différentielles de l'hyperbole n'est qu'un échantillon parmi tant d'autres témoignages de cet usage parfaitement assumé des différentielles. La figure n'est plus décomposée en « indivisibles » mais disséquée en espaces différentiels dans le but de la calculer. Les problèmes des figures à quarrer sont désormais devenus des problèmes de différentielles à intégrer. Nous pouvons voir par un dernier exemple comment en reprenant le texte de Bernoulli, Malebranche fait preuve d'aisance calculatoire. Il s'agit d'intégrer² : $ydx = \frac{2xdx}{aa} \sqrt{x^4 - a^4}$. Le choix de la « grandeur absolue » n'apparaît pas d'emblée. Malebranche fait confiance au déroulement des manipulations calculatoires : il multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x^4 - a^4}$ afin que l'expression ne comporte plus le radical $\sqrt{x^4 - a^4}$ au numérateur. Ensuite, il multiplie par x^2 le numérateur et le dénominateur afin de comparer son expression avec la formule générale $\frac{a}{p+1} x^{p+1}$:

$$\frac{2x^5 dx - 2a^4 x dx}{aa\sqrt{x^4 - a^4}} = \frac{2x^7 dx - a^4 x^3 dx}{aa\sqrt{x^8 - a^4 x^4}} - \frac{aax dx}{\sqrt{x^4 - a^4}} = A + B$$

Par la formule générale, l'intégrale de A est : $\frac{x^2}{aa} \sqrt{x^4 - a^4}$.

¹ André Robinet affirme que l'acceptation du calcul leibnizien par le « cartésien » Malebranche implique un revirement : « L'adhésion de Malebranche et du groupe des mathématiciens qui l'entouraient aux mathématiques de l'infini est un des plus spectaculaires revirements de l'histoire de la philosophie et du mouvement des idées » dans « La philosophie malebranchiste des mathématiques », *op. cit.*, p. 205. Claire Schwartz établit que le fait d'assumer pleinement l'utilisation des différentielles ne doit nullement être interprété comme un « revirement » : « Il ne s'agit pas de dire que Malebranche est passé d'une approche normative en termes de méthode et de discipline de l'esprit, à une approche utilitariste des mathématiques. C'est le calcul infinitésimal qui est considéré comme un outil supplémentaire au service des mathématiques – la détermination de rapports exacts – dont la valeur objective et normative n'est pas remise en question. Malebranche ne considère pas que les concepts de la nouvelle mathématique remettent en cause ceux de l'ancienne, mais permettent à cette dernière de s'élargir à la résolution de nouveaux problèmes. Aux yeux de Malebranche, le passage de l'une à l'autre n'implique en aucune manière un « revirement », comme le pensait André Robinet », « Malebranch, mathématique et philosophie », *op. cit.*

² *Mathematica*, p. 255.

Pour évaluer l'intégrale de B, il pose $\sqrt{x^4 - a^4} = z\sqrt{zz - 2aa}$ puis en élevant au carré, il a $x^4 = z^4 - 2aazz + a^4$ donc $x = \sqrt{zz - aa}$ et $dx = \frac{zdz}{\sqrt{zz-aa}}$. En remplaçant dx dans l'expression B, il trouve $B = \frac{aadz}{\sqrt{zz-2aa}}$ qui est « égal à un espace hyperbolique ».

Il prend soin de le démontrer¹.

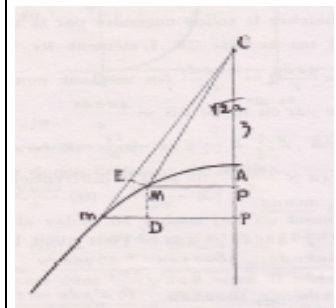
Ce dernier exemple montre encore le rapport qu'entretient Malebranche avec le calcul leibnizien : celui-ci lui permet d'engendrer des rapports exacts concernant une courbe géométrique. L'expression de la différentielle est décomposée en éléments plus simples, chacun d'eux manipulables en termes de calcul et interprétables en termes géométriques.

Nous pouvons désormais apporter une réponse à la question que nous examinions au début de notre paragraphe : est-ce que du rapport qu'entretient Malebranche avec la nouvelle symbolique résulte une évidence calculatoire ?

Le philosophe rappelle « qu'il faut toujours conserver l'évidence dans ses raisonnements, pour découvrir la vérité sans craindre de se tromper »², mais celle-ci est de l'ordre du sentiment. En revanche, la notion d'exactitude est un critère objectif – c'est-à-dire indépendant du sujet connaissant – pour la recherche de la vérité³. De la perception de l'exactitude résultant de la manipulation calculatoire ou de la vision des égalités différentielles découle un sentiment d'évidence :

1

En considérant l'hyperbole telle que $CP = \sqrt{2}a$, on a donc $PM = \sqrt{zz - 2aa}$ et $CE = \sqrt{2zz - 2aa}$
 puis Em, différentielle de CE est égale à $\frac{2zdz}{\sqrt{2zz-2aa}}$
 et Dm, différentielle de PM est $\frac{zdz}{\sqrt{zz-2aa}}$.
 D'où $Mm = \sqrt{Dm^2 + MD^2} = dz \frac{\sqrt{2ZZ-2aa}}{\sqrt{zz-2aa}}$ et $EM = \sqrt{Mm^2 - Em^2} = \frac{2aadz}{\sqrt{(zz-2aa) \times (2zz-2aa)}}$
 donc $\frac{1}{2} CE \times EM = \frac{aadz}{\sqrt{zz-2aa}}$ (aire du secteur hyperbolique CEM).



² Cité dans Claire Schwartz, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*. Elle précise que chez Malebranche l'évidence se produit lorsqu'il y a une « rencontre manifeste avec la vérité », elle relève d'une « forme d'expérience psychologique parfaitement déterminée caractérisée par un sentiment produit par le mouvement de l'esprit se tournant vers la Raison à laquelle il est uni et en laquelle il perçoit la vérité ».

³ *Ibid.*

L'évidence n'est pas mise en défaut dans ces calculs dans la mesure où l'exactitude des résultats s'y manifeste et que leur vérité se révèle ainsi indubitable¹.

2) L'apprentissage de Guillaume de l'Hospital (décembre 1692-juin 1696)

2.1) Jean Bernoulli, professeur de l'Hospital

Nous avons évoqué la relation privilégiée qui s'est instaurée entre Jean Bernoulli et le Marquis de l'Hospital à partir de juillet 1692 : ce dernier invite le savant suisse dans sa maison à Oucques pour la poursuite de son apprentissage du calcul différentiel et intégral. Le retour à Bâle de Jean Bernoulli n'interrompt pas cet échange, tout au contraire : le Marquis est avide de s'améliorer au nouveau calcul leibnizien pour lequel Jean Bernoulli a des compétences évidentes. Dès son arrivée à Bâle en novembre 1692, Bernoulli écrit à l'Hospital. Cette lettre est perdue mais nous pouvons en connaître la teneur grâce à la réponse du Marquis le 8 décembre 1692². Des questions mathématiques très diverses utilisant le nouveau calcul occupent les deux mathématiciens. Dans la même lettre, il est question de l'intégration d'une équation différentielle³, de la recherche de l'enveloppe d'une famille de paraboles dont les sommets sont sur une ellipse donnée – problème en relation avec un article de Leibniz publié en avril 1692⁴, de la théorie des « seriebus infinitis » auxquelles s'intéresse Jacques Bernoulli ainsi que de la manière dont ce dernier « réduit aux développées les caustiques qui se font par réfraction ». La richesse et l'éclectisme des questions n'est pas spécifique à cette première lettre mais est caractéristique de la totalité de leur commerce épistolaire.

Dans cette lettre, l'Hospital sollicite explicitement Bernoulli pour le perfectionnement de son apprentissage : « Vous voyez, Monsieur, que je continue de vous prier de m'instruire et que je me sers de la liberté que vous m'avez donnée là-dessus ». En échange, il lui propose son service inconditionnel :

¹ *Ibid.*

² *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Band 1, op. cit., p. 159.*

³ « Pour ce qui est de la courbe dont la soutangente est $\sqrt{ay + yy}$ (...) »

⁴ « De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in e are analyseos infinitorum usu », *AE*, avril 1692, p. 168-171. Nous reviendrons sur le rôle joué par ce texte pour la réception de la notion de « variable » dans le chapitre suivant.

en revanche si je puis quelque chose pour vous rendre service en ce pays ci ie m'y emploierai avec toute la vivacité possible ayant pour vous une inclination et une estime toute particulière¹.

La proposition est sincère. Sachant que Bernoulli est prêt à quitter son pays natal pour s'établir à Paris, l'Hospital s'engage afin d'aider son ami. Sa présence à Paris et son statut de savant distingué permettent à l'Hospital de faire reconnaître son ami auprès de la communauté savante parisienne. Entre autres il facilite la publication de ses articles au *Journal des Sçavans* :

Ne doutez pas, Monsieur, que je ne fasse tout mon possible pour vous attirer en ce pays ci, j'ai déjà parlé de vous d'une manière avantageuse, c'est-à-dire en vous rendant justice dans l'académie des sciences en leur faisant part de ma solution du problème que vous aviez proposé dans les actes, et à la 1^{re} occasion je parlerai à M^r l'abbé Bignon sur vôtre chapitre et je vous rendrai conte vous assurant que je ne puis avoir un plaisir plus sensible que de pouvoir entretenir souvent et vous marquer de vive voix que je suis tout à fait à vous².

Élu à l'académie comme membre honoraire³ depuis mai 1693, l'Hospital s'adresse en effet directement à l'Abbé Bignon dont il est proche afin d'obtenir pour Bernoulli un poste d'académicien. Or, par ce temps de guerre, les finances académiques pâtissent, les fonds suffisent péniblement à payer les anciens : son président M^r de Pontchartrain ne peut donc plus accepter de nouvelle recrue⁴. Par ailleurs, Varignon, obtenant un poste à l'Observatoire, verrait Jean Bernoulli le remplacer à la chaire du collège Mazarin. L'Hospital en fait part à son professeur : « nous avons la pensée il y a quelque temps, M^r Varignon et moi (...) vous auriez pû avoir sa chaire de Mathematique qui vaut assez de revenu pour subsister honnestement (...) »⁵. Cependant, les pensions de l'académie n'étant plus payées, Varignon préfère finalement ne pas renoncer à sa chaire. Ainsi, malgré ses nombreuses tentatives, l'Hospital ne parvient pas à établir son ami à Paris.

¹ *Ibid*, p. 160.

² Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 4 juillet 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 179.

³ Les membres honoraires ne perçoivent pas de pension.

⁴ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 21 septembre 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 190.

⁵ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 octobre 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 191.

En mars 1694, l'oncle de la Marquise de l'Hospital meurt en laissant un héritage important dont elle est quasiment la seule légataire. L'Hospital doit s'occuper désormais d'affaires foncières – ce dont il se plaint – mais cette circonstance favorise amplement son confort matériel. Il propose à Jean Bernoulli de lui fournir une pension en échange de :

donner par intervalles quelques heures de vôtre temps, pour travailler sur ce que je vous demanderai et de me communiquer aussi vos découvertes en vous priant en mesme temps de n'en faire point de part à d'autres. Je vous prie mesme de ne point envoyer ici à M^r Varignon ni à d'autres de copies des écrits que vous m'avez laissez ; si tost qu'ils seroient publics cela ne feroit mesme plus de plaisir¹.

Il est évident, par le contexte que nous venons de décrire, qu'aider financièrement son ami motive l'Hospital². Jean Bernoulli accepte cette proposition qui par son objet secret est à notre connaissance le premier contrat de cette sorte passé dans l'histoire. C'est à partir de ce moment que Jean Bernoulli effectue presque systématiquement des copies de ses lettres adressées au Marquis³. La formulation de cette proposition est intéressante car elle renseigne qu'en 1694 l'Hospital veut éviter que soient diffusées – même parmi des personnes proches de lui comme Varignon – les copies des leçons de calcul différentiel et intégral.

Cette rente ne peut suffire à Bernoulli qui doit entretenir sa jeune famille. Il fait part de ce désarroi au Marquis en lui expliquant qu'il a besoin de donner :

au public de temps en temps quelque chose d'indifférent qui ne vous regarde pas, que je me feray recommander pour me procurer un jour, la paix étant faite, un établissement solide en quelque académie, car pour ne vous rien celer je ne suis point bien icy à Bâle, pendant que mes parens sont en vie, qui jouissent encor du bien que j'auray un jour, mais qui me seroit nécessaire presentement⁴.

¹ Lettre du 17 mars 1694, *ibid*, p. 202.

² L'Hospital offrait une pension annuelle qui n'était pas nécessairement perpétuelle. Ce contrat a duré environ deux ans : le marquis envoie son dernier versement de 300 livres en juin 1696, quelques mois après que Bernoulli se soit installé à son nouveau poste de Groningue.

³ La première de ces lettres est celle du 22 avril 1694. Celles qui contiennent un contenu mathématique sont recopiées dans Bradley, Robert E., Petrili, Salvatore J., Sandifer, C. Edward, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits, an annotated translation with source material by Johann Bernoulli*, Birkhäuser, 2015, Préface, xiii.

⁴ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 5 mars 1695, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 267.

En février 1694, Huygens propose à l'Hospital pour Jean Bernoulli une chaire de mathématique dans la ville de Groningue¹. Informé des difficultés de son ami bâlois par la dernière lettre citée, l'Hospital lui fait part de cette proposition le 12 mars 1695. Bernoulli occupera cette chaire jusqu'en 1705, année où il retourne définitivement à Bâle pour remplacer à l'Université son frère décédé.

En juin 1696, l'Hospital publie son traité des infiniment petits. Dans sa préface, il reconnaît :

devoir beaucoup aux lumières de M^{rs} Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. Leibniz. C'est pourquoy je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser².

Les articles des frères Bernoulli, souvent commentés dans ses échanges avec le jeune frère, ont permis effectivement à l'Hospital de mesurer l'ampleur des applications du nouveau calcul. Mais surtout, l'élaboration de son ouvrage, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, a bénéficié pour une large part de l'enseignement de Jean Bernoulli et d'une certaine façon il en constitue l'aboutissement. Les leçons parisiennes et les thèmes traités dans leur correspondance forment la substance dans laquelle l'Hospital puise pour structurer son traité. Nous aurons l'occasion dans le chapitre suivant d'analyser de quelle manière il agence ce matériau³. Pendant la période 1692-1696, plusieurs sujets remplissent les lettres des deux savants. Des problèmes de *maximis et minimis* comme la détermination du jour du plus court crépuscule⁴ sont certaines fois l'objet de leur échanges mais les principales questions de l'Hospital se focalisent autour des problèmes liées à la courbure – points d'inflexion, de rebroussement – qu'ils mettent en liaison avec les questions de développées et de caustiques de courbes. Soulignons qu'avant l'arrivée de Bernoulli à Paris, l'Hospital ne connaît que des méthodes algébriques pour déterminer le rayon de

¹ Lettre de Huygens à l'Hospital du 21 février 1695, Huygens, Christiaan, *OH, op. cit.*, tome X, p. 705.

² L'Hospital, Guillaume de, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, op. cit.*, Préface.

³ L'édition de leur correspondance fournit un tableau qui met en correspondance les articles du traité de l'Hospital avec les articles des *LCD*, les pages de l'imprimé de Calcul intégral et certaines de leurs lettres.

⁴ Jean Bernoulli affirme avoir trouvé la solution dans un passage du *Journal des Sçavans* intitulé « Extrait d'une lettre de Monsieur Bernoulli Médecin », janvier 1693, p. 24.

courbure : en 1718, dans une lettre à Montmort, Bernoulli évoquant sa première rencontre avec de l'Hospital fin 1691, se souvient de lui avoir posé un problème de recherche de rayons de courbure :

Le discours tomba enfin sur le rayon de la développée ou du cercle osculateur, pour la recherche duquel il [L'Hospital] se vanta d'avoir une règle toute particulière, tirée de la méthode de *max. et de min.* de Mr. Fermat ; pour en faire un essai, je lui proposai un exemple d'une courbe algébrique (car cette prétendue règle générale ne cadrerait que pour les courbes algébriques et seulement pour le rayon du sommet principal), et se mit à calculer ; après avoir employé près d'une heure à barbouiller plusieurs feuilles de papier, il trouva enfin au juste la valeur du rayon au sommet de cette courbe ; mais il vit bien que je riais de la longueur horrible de cette règle toute bornée qu'elle était, et lui disant que l'affaire de déterminer le rayon de la développée dans toutes sortes de courbes, soit algébriques, soit transcendentes, soit au sommet, soit aux autres points, n'était plus pour nous qu'un jeu d'enfant, qu'on pourrait donner une formule générale par laquelle on trouverait le rayon en autant de minutes qu'il avait employé de quart d'heure : lui, curieux d'en voir l'expérience, me proposa à son tour un exemple d'une courbe plus composée que celle que je lui avais proposée ; je lui en donnais sur le champ la valeur du rayon au sommet, ce qui le frappa tellement de surprise que dès ce moment il devint charmé de la nouvelle analyse des infiniment petits, et lui excita l'envie de l'apprendre de moi¹.

L'échange épistolaire est donc très instructif car il renseigne sur le processus d'intégration chez le Marquis de la notion à laquelle renvoient les appellations « différentielle de différentielle », « différentielle d'ordre deux » ou « différentielle de degré deux ».

Dans les *Lectiones de Calculo Differentialium*, nous avons vu que l'Hospital reçoit la règle affirmant que $ddy = 0$ au point d'inflexion avec des exemples de son application. Le 14 décembre 1692, l'Hospital écrit à Leibniz que « l'usage de votre calcul différentiel est merveilleux pour déterminer tout d'un coup les tangentes, les plus grandes et les moindres quantités, les points d'inflexion »². Ce témoignage montre qu'un an plus tard, l'Hospital reconnaît certains atouts du calcul leibnizien, en particulier ceux de l'usage de la « différentielle de la différentielle » pour les points d'inflexion. Cependant, l'inventeur du calcul ne connaît-il pas la fécondité de la notion

¹ Lettre de Jean Bernoulli à Montmort du 21 mai 1718, Malebranche, *Œuvres complètes*, tome XIX, p. 579-580.

² Lettre du 14 décembre 1692 de l'Hospital à Leibniz, *Mathematische Schriften*, tome II, *op. cit.*, p. 216.

de différentielle de différentielle pour des applications plus vastes que celles de la détermination du point d'inflexion ? Un échange épistolaire long d'un an entre Jean Bernoulli et l'Hospital montre que la règle de Leibniz, énoncée dans la *Nova Methodus*, ne comble pas l'attente de compréhension du jeune Marquis. Entre septembre 1693 et juin 1694, Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hospital consacrent l'essentiel de leur recherche à l'obtention de formules différentielles permettant de trouver, une courbe étant donnée, ses éventuels points singuliers (inflexion et rebroussement). Comme nous allons le voir, dans cette recherche, un questionnement sur le sens géométrique des différentielles de différentielles est très présent, mais l'est aussi la considération des développées dans leur lien avec la détermination du rayon de courbure.

Nous voulons examiner comment l'Hospital saisit le calcul leibnizien comme lieu d'expression privilégié pour les notions liées à la courbure. En effet, de cette expérience il tire un argument supplémentaire pour adhérer au calcul leibnizien. En raison de l'importance que ce sujet constitue pour la réception du calcul leibnizien en France, nous lui consacrons une analyse à part ci-dessous.

2.2) À la recherche d'un traitement calculatoire des problèmes liés à la courbure : Réception et assimilation de la « différentielle de la différentielle » par le Marquis de l'Hospital

La notion de courbure est connue dès le début du XVII^e siècle, elle est souvent liée à des problèmes techniques. Par exemple, Descartes, cherchant à résoudre des problèmes de taille de verre, est amené à examiner les différentes courbures de roues¹ et opte pour la forme hyperbolique. Il décrit aussi la différence d'intensité de mouvement que le verrier doit délivrer selon qu'il s'agit d'une taille de verre convexe ou concave² mais ne le quantifie pas numériquement. De même, dans des problèmes d'optique, lorsqu'il s'agit d'expliquer pourquoi un système de dioptries ne permet pas de réaliser la lentille capable de donner l'image d'un objet étendu, Descartes l'interprète par « l'inégalité de courbure » d'un point à un autre dans l'ellipse ou

¹ Pour la description de l'appareil de taille de verre : lettre du 26 octobre 1629 de Ferrier à Descartes et pour les précisions techniques apportées par Descartes : lettre du 13 novembre 1629 dans Descartes, *Œuvres, op. cit.*, p. 38-69.

² *Ibid.*, p. 59-60 : « vous pourrez perfectionner les figures autant qu'il est possible par la main d'un homme. Mais la proportion de ces mouvements ne se peut avoir que par l'usage [...] pour les verres concaves la roue doit tourner fort vite, et le tour fort lentement, et au contraire pour les convexes. »

l'hyperbole alors qu'elle demeure constante pour le cercle ou la droite¹. Cela témoigne d'un début de la « quantification de la qualité du courbe² » mais qui reste ténue. Alors que les méthodes calculatoires de recherche de tangentes prolifèrent pendant les deux premiers tiers du XVII^e siècle, des problèmes dans lesquels la notion la courbure apparaît existent mais n'ont pas de pendant calculatoire abouti. En effet, le terme de point d'inflexion est présent dans différents textes de mathématiciens comme Roberval, Fermat et Huygens³, par exemple, dans une lettre de Roberval à Fermat, à propos de la conchoïde de Nicomède, le « point d'inflexion » est décrit comme le point où il y a changement de concavité et où la tangente ne laisse plus la courbe d'un même côté. Aussi dans les *Varia Opera*, Fermat y ébauche une méthode pour trouver le point d'inflexion qui serait alors caractérisé par le maximum ou minimum de l'angle de la tangente avec l'axe des abscisses et enfin chez Huygens, il est question à propos aussi de la conchoïde du point « *in confinio inflexionis contrariae* » mais aucune vraie méthode de détermination est décrite⁴.

Dans la *Nova Methodus*⁵ Leibniz présente très rapidement le lien entre les « différences des différences [*differentiae differentiatum*] » et la convexité. En particulier, il fournit une règle pour trouver les points d'inflexion [*puncta flexus contrarii*]⁶ sans l'illustrer : lorsque « l'accroissement est maximal ou minimal, c'est-à-dire, lorsque les accroissements de décroissants qu'ils étaient, deviennent croissants, ou l'inverse »⁷. Deux ans plus tard, en juin 1686, Leibniz publie l'article intitulé « Réflexions originales sur les notions d'angle de contact et d'osculon et sur leur emploi en mathématique pratique, pour remplacer des figures compliquées par d'autres plus simples qui en tiennent lieu »⁸. Cet article est essentiel car Leibniz y rend

¹ Descartes, *Dioptrique* in *Œuvres*, tome VI, *op. cit.*, p. 186.

² Costabel, Pierre, « La courbure et son apparition chez Descartes », *Démarches originales de Descartes savant*, Vrin, Paris, 1982, p. 159-166.

³ *Mathematica*, p. 67.

⁴ Sur ce sujet, on pourra consulter Patricia Radelet De Grave, « La mesure de la courbure et la pratique du calcul différentiel du second ordre » in *Sciences et techniques en perspective*, II^{ème} série, vol. 8, 2004, p. 167-168.

⁵ *Op. cit.*, p. 104-117.

⁶ Règle valable, comme le fait remarquer Marc Parmentier, seulement lorsque l'on considère les valeurs absolues des accroissements, note 46, *ibid*, p. 108.

⁷ *Ibid*, p. 108.

⁸ « *Mediatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad fuguras faciolres sucedaneas difficilioribus substituendas* », *AE*, juin 1686, p. 289-292, ou Leibniz, G-W, *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 122-125.

compte de la notion de cercle osculateur¹ directement liée à la théorie des développées de courbes initiée par Huygens. En revanche, ces descriptions sont très géométriques. Il rappelle que la considération « de parties infiniment petites [*partibus infinite exiguis*] » de n'importe quelle courbe permet d'étudier sa direction puis par la suite d'étudier « les variations de la direction [*mutatio directionis*], autrement dit, sa courbure [*flexura*] »². Or, si les géomètres mesurent cette direction par la tangente, qui est la droite « la plus simple ayant même direction en un point donné », il explique que pour mesurer la courbure il faut considérer parmi les cercles tangents celui qui va « embrasser [*osculari*] » le mieux la courbe, c'est-à-dire celui qui fait avec elle le plus petit angle de contact. L'« angle de contact minimal » est donc, d'après Leibniz, la donnée d'une courbe et de son cercle osculateur. Ainsi, l'angle d'osculatation est minimal parmi les angles de contact, c'est-à-dire dans le sens où il est infiniment plus petit que tout autre angle de contact. Il précise :

C'est pourquoi, tout comme on considère qu'en leur point d'intersection, deux droites concourantes quelconques font le même angle ordinaire, autrement dit rectiligne, que leurs tangentes (puisque leur différence réside dans un angle infiniment petit et même nul [*infinite exiguus, imo nullus*], en regard d'un angle rectiligne) de la même façon, lorsque les tangentes à deux courbes concourantes coïncident, c'est-à-dire lorsque les deux courbes sont tangentes, on considère qu'elles font au point d'intersection le même angle de contact que leurs cercles osculateurs, la différence consistant en un angle d'osculatation, infiniment petit et même nul [*infinite parva, imo nullus*], en regard de l'angle de contact de deux cercles. Ceci nous fait comprendre qu'un angle ordinaire entre deux droites, un angle de contact entre deux cercles, et un angle d'osculatation (premier degré), se trouvent en quelque sorte dans le même rapport qu'un solide, une surface et une ligne. (...)³.

Dans ce passage, Leibniz explique que la notion de courbure correspond à des « degrés de contact » entre deux courbes qu'il compare, par analogie, avec des incomparables géométriques. Son développement est d'ordre qualitatif car il ne fournit aucune expression analytique liée à la notion de courbure et utilisant les

¹ Dans ce texte, Leibniz commet l'erreur d'interpréter la recherche du cercle osculateur comme équivalente à la recherche d'une racine quadruple (et non triple). Pour des précisions, on pourra consulter les commentaires de Parmentier, *ibid*, p. 118-122 et ceux de l'article « Indications générales sur les courbes, les angles de contact et d'osculatation, les développées et autres notions qui s'y rattachent ainsi que sur certaines de leurs applications », *ibid*, p. 222-224.

² *Ibid*, p. 122.

³ *Ibid*, p. 123.

différentielles secondes. En revanche, il se montre enthousiaste car il estime que cette découverte ouvre les portes à toutes sortes d'applications pratiques : il est possible de remplacer un arc d'une courbe inconnue (ou dont le tracé est difficilement réalisable par un appareil) par l'arc de son cercle osculateur. Ainsi, en catoptrique ou dioptrique « pratiques », le cercle « tient lieu [*succedaneum*] de parabole, d'hyperbole ou d'ellipse »¹. Cette idée d'établir des « degrés » d'osculatation entre deux courbes est présente dans les recherches de Leibniz et des frères Bernoulli entre 1691 et 1694 comme en témoignent les articles parus dans les *Acta*². La dénomination de « degrés » tient au fait que ces problèmes concernent d'abord l'osculatation de courbes algébriques et que la recherche d'un certain « degré d'osculatation » se traduit par la résolution d'une équation dont le degré croît selon la précision souhaitée de l'osculatation. Entre 1689 et l'année 1691³, Jacques Bernoulli découvre des formules différentielles du rayon de courbure qu'il ne rend pas publiques mais qu'il divulgue de façon privée à son frère comme en atteste la seizième leçon de *Methodo integralium*⁴ de Jean Bernoulli. Celle-ci est par conséquent connue par l'Hospital. Ces formules font intervenir l'expression « *dd* ». Lorsque ces différentielles sont nommées, elles le sont au début par les vocables « différentielle de différentielle » en français ou « *differentio-differentiali* » en latin. Très rapidement le terme « seconde différence [*secundis differentiis*] » apparaît fréquemment dans les articles des *Acta*. Jacob Bernoulli l'utilise pour résoudre le problème de la voilière dont il exprime la propriété en termes différentiels : « en supposant les petites portions de courbe égaux, les cubes des premières différentielles sont proportionnels aux secondes différences des abscisses »⁵. Le terme « Différentielle de différentielle » est celui qui est retenu dans la plupart des échanges entre Jean Bernoulli et l'Hospital pendant la période 1692-1694. Le terme « ordre »

¹ On pourra, dit-il, en effet remplacer un arc d'une courbe inconnue (ou dont le tracé est difficilement réalisable par un appareil) par l'arc de son cercle osculateur. Ainsi, en catoptrique ou dioptrique « pratiques », « le cercle *tient lieu* de parabole, d'hyperbole ou d'ellipse ».

² Bernoulli, Jacob, « Additamentum ad solutionem curvae causticae fratris John Bernoulli, una cum meditatione de natura evelutarum, etc », *AE*, mars 1692, p. 110, G-W Leibniz, « Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis, *AE*, septembre 1692, p. 440.

³ Radelet-De Grave, Patricia, « La mesure de la courbure et la pratique du calcul différentiel du second ordre », *op. cit.* p. 170.

⁴ «*Inventio centi circuli osculatoris, et evoluta*» dans Bernoulli, Johann, *Opera omnia*, tome 3, *op. cit.*, p. 437.

⁵ «*sumtis aequalitus curvae portiunculis, cubi ex primis diffentiis ordinaturum sunt proportionalis secundis differentiis abscissarum* », «*Curvatura veli* », *AE*, mai 1692, p. 201.

apposé à « différentielle » n'apparaît que vers 1694. Par exemple, dans sa publication¹, en novembre 1694, portant sur la construction des « équations différentielles de premier degré [*primi gradus*] », Jean Bernoulli émet le vœu de réaliser une méthode similaire pour les « différentielles secondes et de tout degré [*differentialis secundi altiorisque gradus*] ». La même année, dans son article portant sur la construction de la courbe isochrone paracentrique², Leibniz rappelle son intérêt pour trouver des moyens de construction des courbes « transcendantes irréductibles à une équation algébrique de degré déterminé ». Dans le cadre de *La Géométrie*, les courbes « géométriques » ont une équation algébrique et peuvent être tracées par une suite ordonnée de mouvements continus. Le degré de l'équation est signe de la complexité de la construction. Probablement par analogie avec l'ordre de difficulté d'un problème géométrique, qui est mesuré par le degré de l'équation, Leibniz nomme le problème inverse des tangentes par « méthode générale des tangentes, soit des différentielles de premier degré [*gradus*] »³. Nous avons vu que Leibniz ne cesse de répéter combien la nouvelle analyse surpasse l'ordinaire, c'est-à-dire celle de Descartes. Cependant, probablement parce que le monde des courbes transcendantes est plus éclectique que celui des courbes de *La Géométrie*, il est plus difficile de trouver des critères pour les ordonner⁴. Le degré de l'équation différentielle associée à une courbe a été retenu comme un des critères.

Le traitement des points d'inflexion avant la rencontre du calcul différentiel

Comme en attestent certains manuscrits⁵, avant 1692, le groupe autour de Malebranche connaît une méthode pour trouver le point d'inflexion d'une courbe algébrique. Cette méthode que les membres du groupe utilisent pour trouver un point d'inflexion s'appuie sur l'idée qu'en ce point la différence entre la sous-tangente et

¹ Bernoulli, Jean, « Modus generalis construendi omnes aequationes differentialis primi gradus », *AE*, novembre 1694, p. 435-437.

² « Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica ... », *AE*, août 1694, p. 364.

³ *Ibid*, p. 368. Parmentier traduit « gradus » par « ordre », *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 295.

⁴ Nous avons vu à la fin du précédent chapitre comment Leibniz dresser une taxinomie des différents types de quadratures. Celles-ci peuvent être des moyens de construction de certaines courbes transcendantes mais non pas les seuls. Viktor Bläsjö étudie les différents moyens de construction des courbes transcendantes essentiellement dans la période 1690-1700. Il montre que contrairement aux courbes algébriques, pour les courbes transcendantes, il a été délicat d'établir un consensus sur les moyens de construction à retenir comme « géométriques » ainsi que d'en établir une hiérarchisation, *Transcendental curves in the Leibnizian Calculus*, Series editor Umberto Botazzini, Academic Press, Elsevier, 2017.

⁵ FR. 5060, fol. 323-324, FR. 24236, fol. 9, FR. 24237, fol. 144 R.

l'abscisse du point (ou la différence entre l'abscisse du point et la sous-tangente) doit être maximale ou minimale. Cette méthode suppose que l'on connaisse la détermination algébrique de la valeur de la sous-tangente et la « méthode des plus grandes »¹. Toutes les deux ont été formulées par l'Hospital. Pour trouver le point d'inflexion ou de recourbement² d'une courbe algébrique, l'Hospital remarque tout d'abord que si une courbe est concave par rapport à une droite alors, si les ordonnées y vont en augmentant, cette augmentation diminue jusqu'au point d'inflexion où est atteint « le plus petit des excès des ordonnées », à l'inverse lorsqu'elle est convexe, si les ordonnées y vont en augmentant, cette augmentation atteint son maximum au point de « recourbement. » Ainsi, il en déduit qu'il suffit de déterminer la valeur de la sous-tangente t qui ajoutée à l'abscisse x , sera maximale ou minimale au point de contour³. Nous donnons un exemple à la suite. Il s'agit d'un premier essai de l'application de la méthode de l'Hospital par Malebranche⁴. L'équation de la courbe est : $b^3 - b^2y = x^2y$. En substituant y par $y - a$ (car y diminue lorsque x augmente) et x par $x + e$, il trouve :

$$b^3 - b^2y + b^2a = x^2y - ax^2 + 2exy - 2exa + e^2y - e^2a$$

puis en soustrayant les deux équations et en éliminant les termes en e^2 et ea :

$$2exy = ab^2 + ax^2.$$

Ainsi, puisque $t = y \frac{e}{a}$, on peut substituer dans l'équation « t pour e et y pour a »

d'où : $2txy = yb^2 + yx^2$ et $t = \frac{b^2 + x^2}{2x}$ ⁵.

¹ Il s'agit de la méthode des tangentes de l'Hospital vue au chapitre 3 qui est suivie de la méthode des plus grandes.

² Dans sa première terminologie, l'Hospital distingue dans les *points de contour* deux types : de *recourbement* lorsqu'il y a passage du convexe au concave dans le sens des abscisses croissantes et d'*inflection* dans le cas opposé.

³ Le manuscrit « Pour trouver le point de contour de la courbe d'équation $b^p y^q = x^p (b - x)^q$ » contient des corrections de la main de Bernoulli indiquant que, pour éviter toute erreur de signe, il faut calculer $t - x$ ou $x - t$, dans *Mathematica*, p. 68. Le manuscrit montre également les difficultés du copiste (Byzance) qui tente l'application de la méthode différentielle avec les notations dx et dy mais dont la maîtrise est plus qu'imparfaite comme le montre sa substitution de dx par x . Cette correction sera prise en compte par Malebranche dans la recherche du point d'inflexion de la courbe d'équation $b^2y = bx^2 - x^3$, *ibid.*, p. 80-82.

⁴ *Ibid.*, p. 73. Il s'agit du manuscrit FR 24235, fol. 120. Les figures reproduites en sont extraites également.

⁵ La méthode « abrégée » donne directement ce résultat, avantage que fait remarquer Malebranche. Ici, les termes du numérateur ne doivent pas changer de signe car en écrivant l'équation sous la forme

$\frac{b^2 + x^2}{b^2} = \frac{b}{y}$, il est « clair que les x croissant, les y diminuent ».

La construction de la tangente¹ permet de dire que lorsque x est proche de 0, la sous-tangente est infiniment grande et donc que la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ainsi, les pentes des tangentes diminuent puis augmentent car « elles touchent en dedans jusqu'à un certain point, et en dehors vers le reste ». Il déduit ainsi l'existence d'un point d'inflexion².

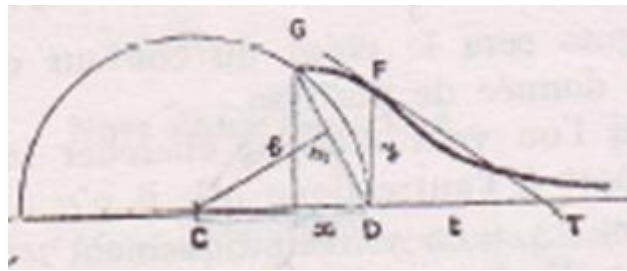


fig. 63

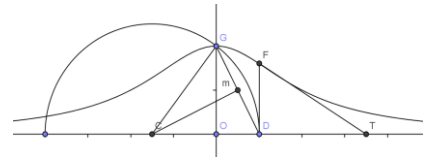
Pour le trouver, il remarque que la pente des tangentes commence par diminuer : « si des points de la courbe depuis G vers le point de contour on tire des tangentes, il est évident qu'elles approcheront D à mesure qu'elles seront tirées plus proches du point de contour » et ainsi « le plus petit DT sera celui qui sera compris entre y et la tangente » : $x + t = z$ doit atteindre le minimum³. La méthode de *maximis et minimis* affirme que lorsque x augmente de e , z augmente de a , la condition d'extremum s'exprime par $a = 0$. Il suffit donc de remplacer x par $x + e$ dans l'expression de z puis de soustraire la première expression à cette dernière.

$$t + x = \frac{b^2 + 3x^2}{2x} = \frac{b^2}{2x} + \frac{3}{2}x = z \text{ se traduit par :}$$

$$-\frac{b^2}{2x^2} + \frac{3}{2} = 0 \text{ c'est-à-dire } x = \sqrt{\frac{1}{3}b^2} \text{ soit } y = \frac{3}{4}b$$

¹

En nommant par D le point de l'axe d'abscisse x et par G le sommet de la courbe, il faut prendre le milieu m de $[DG]$ d'où l'on trace la perpendiculaire à (DG) qui coupe l'axe des abscisses en C . On trace alors le cercle de centre C et de rayon CD . On obtient ainsi les triangles semblables mCG et GOC et comme $DG =$



$$\sqrt{x^2 + b^2} \text{ on a: } \frac{2t}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{x}$$

² Dans la figure ci-dessus, de la main de Malebranche, c'est un point de recourbement qui est tracé.

³ Ici, les précautions pour le calcul de t étant faites, il s'agit bien de $x + t$ dont il faut trouver le minimum.

Cette méthode ne s'applique qu'aux courbes « géométriques ». De plus, cet exemple montre que son utilisation suppose que l'on connaisse le sens de variation des ordonnées y , ce qui a permis de calculer correctement t (sans commettre d'erreur de signe). À partir de l'expression de t , Malebranche peut déduire l'existence d'un point d'inflexion et calculer alors ses coordonnées.

Par ailleurs¹, les notations de Barrow ne sont pas toujours adaptées pour trouver le point d'inflexion, elles mènent à des calculs longs et elles peuvent également parfois conduire à l'erreur.

Les difficultés à traiter algorithmiquement la recherche de points singuliers (points d'inflexion, de rebroussement) : l'échange entre l'Hospital et Jean Bernoulli (avril 1693 - décembre 1694)

Les premiers mois de cette correspondance sont fondamentalement consacrés à l'étude de nouvelles courbes et des problèmes qui l'accompagnent : la rectification de la logarithmique, la chaînette ou la recherche de l'enveloppe de paraboles. Le Marquis exulte de la facilité qu'offre le nouveau calcul pour trouver rapidement l'expression des solutions de problèmes si épineux. À partir d'avril 1693 et jusqu'en décembre 1694, les deux hommes centrent leur recherche sur l'obtention de critères en termes différentiels qui permettraient de trouver, l'équation d'une courbe étant donnée, ses éventuels points singuliers, c'est-à-dire d'inflexion, de rebroussement de première sorte ou de deuxième sorte. Il s'agit donc de décrire à l'aide d'expressions, de formules ou d'égalités, dans lesquelles des différentielles sont impliquées, les conditions de l'existence de ce type de points. La recherche de ces critères est très vite perçue comme intimement liée aux « différentielles de différentielles ». Par-là, la considération des développées apparaîtra très rapidement puisque les formules du rayon de courbure les font expressément intervenir.

L'intérêt de ces textes réside donc dans la recherche d'un procédé algorithmique qui permettrait de trouver et de distinguer les différents points singuliers. Il est important de souligner dès à présent que cette recherche s'accompagne d'un va-et-vient incessant entre le symbole « dd » du calcul qui apparaît dans les différentes formulations analytiques et le sens géométrique à lui octroyer.

¹ On pourra consulter l'étude de Pierre Costabel, *Mathematica* p. 73-87.

Leibniz publie en septembre 1692 un article dans les *Acta* intitulé : « Indications générales sur les courbes, les angles de contact et d'osculation, les développées et autres notions qui s'y rattachent, ainsi que sur certaines de leurs applications¹. Dans celui-ci il explique le lien entre les centres de courbure d'une courbe donnée et la développée :

J'ai remarqué également par la suite que le centre du cercle osculateur d'une courbe donnée se trouve constamment situé sur la courbe permettant d'engendrer la courbe de départ par déroulement d'un fil et qu'il n'y a qu'une seule perpendiculaire (dans sa série) joignant le centre du cercle osculateur à la courbe [...]

La raison pour laquelle la courbe génératrice par développement est le lieu de tous les centres osculateurs à une courbe donnée me semble s'expliquer ainsi : soient A et B deux points d'une courbe, l'intersection C des perpendiculaires à la courbe en A et B fournira le centre d'un cercle qui, s'il est de rayon AC , sera tangent à la courbe en A , en B s'il est de rayon CB , mais si A et B coïncident ou se situent à une distance inassignable [*inassignabiliter*], autrement dit en un point où les deux perpendiculaires se confondent, les deux contacts coïncident et les deux cercles tangents se fondent en un seul qui sera osculateur. Or, c'est précisément par le biais de cette intersection entre deux perpendiculaires différant de manière inassignable [*perpendicularium inassignabiliter differentium*], qu'on trouvera également les courbes de développement, comme il ressort de l'ouvrage de Huygens sur les Pendules².

Cette explication est intéressante car elle permet de comprendre pourquoi la considération de la développée permet d'inventer une méthode pour trouver les centres des cercles osculateurs : trouver le centre du cercle osculateur en un point consiste à trouver le point d'intersection de deux normales « infiniment proches ». C'est en effet la méthode adoptée par Huygens dans son traité *l'Horologium oscillatorium*³. Cette méthode conduit Leibniz à considérer, comme Jacques Bernoulli⁴, qu'au point d'inflexion le cercle osculateur dégénère en une ligne droite car :

¹ « Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis », *AE*, septembre 1692, p. 440-446, ou *Naissance du calcul différentiel, op. cit.*, p. 224-235.

² *Ibid*, p. 225. Quelques changements de notre part pour la traduction.

³ Voir commentaire de M. Parmentier dans *ibid*, note 17, p. 227.

⁴ *AE*, mars 1692, p. 116 : « In omni enim flexu contrario circulus osculator abit in lineam rectam, sit radii infinite magni ; quanquam non vicisim, ubicunque circulus osculator infinite magnus est, ibi requiritur flexus in contrarium ».

Il faut également remarquer que *la courbure minimale et ouverture maximale* ont lieu en un point d'inflexion, et M. Bernoulli [Jacques] a déclaré très justement qu'en ce cas le cercle osculateur dégénère en une ligne droite ; son rayon [du cercle osculateur] est en effet infini, son centre tombant au point d'intersection de la développée et de son asymptote. Car avant de devenir de divergentes convergentes, les deux perpendiculaires très voisines qui jusque-là se coupaient d'un certain côté de la courbe, doivent être parallèles¹.

Dans la lettre du 7 avril 1694², le Marquis interroge Jean Bernoulli sur ce passage dont le contenu ne lui semble pas correct. Il a trouvé un contre-exemple : une courbe possédant un point d'inflexion dont le rayon de courbure n'est pas infini. Pour la construire, il développe une courbe *BAC* possédant une inflexion au point *A* avec une tangente verticale *FG* en ce point. La développante *DAE* s'infléchit en *A* et son rayon de courbure y est nul. À cette courbe il peut même lui faire correspondre une équation :

supposons par exemple que la courbe *DAE* soit la paraboïde $ax^3 = y^5$, il est facile de démontrer qu'elle a un point d'inflexion en *A* et que le rayon de sa développée en ce point est nul ou zéro³.

Le Marquis avait déjà annoncé sa découverte à Huygens dans une lettre datant du 22 mars. Il ajoutait dans celle-ci que Jacques Bernoulli se trompait en affirmant qu'au sommet des paraboïdes, le cercle osculateur a un rayon infiniment grand. Il y a au contraire une infinité de paraboïdes dont le cercle osculateur a un rayon nul. Il précise la règle :

Soit en général m l'exposant des abscisses et n celui des appliquées (je suppose m moindre que n , afin que ces courbes soient convexes par rapport à leurs axes), je dis que si $2m$ surpasse n le rayon de la développée au sommet est nul, et qu'au contraire si $2m$ est moindre que n il sera infiniment grand. Je vous enverrai la démonstration si vous le souhaitez⁴.

¹ *Ibid*, p. 229.

² Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 avril 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 203.

³ *Ibid*, p. 204. La figure (fig. 64) que nous insérons y est aussi extraite. À droite, la développante (en vert) d'équation $ax^3 = y^5$ et la développée (en rouge) qui possède un point d'inflexion pour lequel le cercle osculateur a un rayon nul.

⁴ Lettre de l'Hospital à Huygens du 22 mars 1694, *OH*, tome X, *op. cit.*, p. 585-586. La figure ci-dessous (fig. 65) en est également reprise.

Huygens lui répond tardivement dans la lettre du 16 juin 1694¹. Il confirme les erreurs commises par Leibniz et Jacques Bernoulli en expliquant que pour une parabolöide d'équation $a^d x^m = y^n$, la sous-normale BD qui devient le rayon de la développée pour le sommet E est donnée par $\frac{m}{n} \sqrt[n]{a^{2d} \times x^{2m-n}}$.

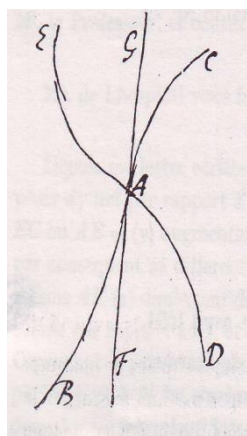
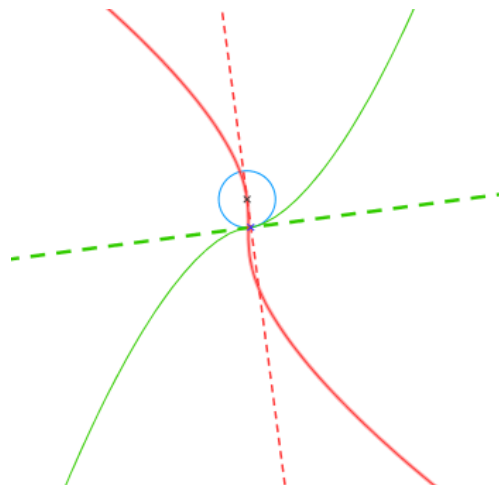


fig. 64



Si $2m > n$, BD devient « infiniment petite en appetissant x » et au contraire lorsque $2m < n$, elle devient « infiniment longue ». Dans la lettre du 4 Octobre 1694², le Marquis affirme que « la démonstration que vous m'envoyez pour ma règle touchant les rayons des développées est conforme à la mienne ».

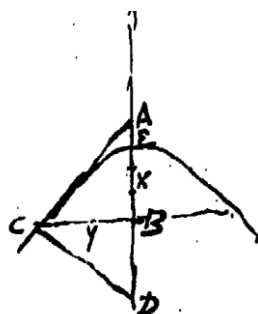


fig. 65

L'Hospital explique que dans son article Leibniz a partiellement raison de dire³ que deux droites infiniment proches⁴ (les rayons de la développée) de convergentes ne peuvent pas devenir divergentes au point d'inflexion sans passer auparavant par le parallélisme. Il n'indique pas que dans ce cas il a supposé la croissance de ces rayons

¹ Lettre de Huygens à l'Hospital du 16 juin 1694, *OH*, t. X, p. 624.

² *Ibid* p. 686.

³ Le résultat de Leibniz et Jacques Bernoulli est vrai à chaque fois que l'on considère le graphe d'une fonction f deux fois continûment dérivable car dans ce cas f' est extrémal au point d'inflexion et l'on a $f'' = 0$ et donc le rayon de la développée infini.

⁴ On pourra consulter le traité de l'Hospital, *AI*, art. 76, p. 74.

en allant au point d'inflexion. En revanche, dans le cas où ces rayons vont en décroissant, ils deviennent nuls au point d'inflexion, donc le cercle osculateur se réduit à un point. Or, puisque la formule du rayon de courbure¹, en supposant dx constant, est donnée par : $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$, la condition d'inflexion en un point se reformule, ddy est infini ou nul.

Ce résultat ne s'accorde pas avec les *Lectiones de Calculo Differentialium* de Jean Bernoulli et surprend le Marquis qui demande des explications. Pour lui, au point d'inflexion, ddy est toujours nul et la valeur du rayon de la développée y est infini. De plus, géométriquement il ne comprend pas que les tangentes infiniment proches puissent devenir « nulles ou zéro » plutôt que parallèles et confondues.

Dans la lettre du 22 avril 1694², Bernoulli approuve la critique du Marquis et donne des explications supplémentaires. La première affirmation est ferme :

sans que cela [que le rayon soit nul] fasse aucune difficulté pour ce qui est de l'expression $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{et\bar{c}}}{-dxddy}$ générale de ce rayon car je nie qu'au point d'inflexion soit toujours $ddy = 0$, bien loin de là il peut aussi être infini par rapport aux autres ddy ; c'est ce qui fait que l'expression générale soit aussi = 0³.

Bernoulli explique la « raison » de ce phénomène :

La raison en est qu'à mesme que la courbure croist, ddy croist aussi, si bien que lorsque la courbure est infinie, c'est-à-dire le rayon de la développée infiniment petit, ddy devient aussi infini par rapport aux autres ; je dis par rapport, car une différentielle de quelque genre que ce soit peut être infiniment plus grande que les autres du même genre, et toutefois infiniment plus petite qu'une différentielle du degrez precedent⁴.

De cette explication il déduit – contrairement à ce qu'il pensait autrefois – qu'il n'est pas nécessaire pour une courbe qui change de convexité de passer par la droiture (et donc que ddy soit égal à 0). Pour agrémente son explication, Bernoulli ajoute qu'il y a bien quelquefois une sorte de « passage par la droiture » mais celui-ci

¹ Cette formule est connue par l'Hospital par *Methodo integralium* de Jean Bernoulli, leçon XVI, « Inventio centri circuli osculatoris, & Evoluta », Bernoulli, Jean, *Opera omnia, op. cit.*, t. III, p. 434-437, ou manuscrit FR 17860, fol. 140-143v. La formule apparaît dans le dernier folio.

² Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 22 avril 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 205.

³ *Ibid*, p. 206.

⁴ *Ibid*, p. 206.

ne doit pas être compté car « cette droiture peut aussi quelquefois n'occuper qu'une différentielle de la courbe infiniment petite par rapport aux autres différentielles. » Pour illustrer son propos, il trace une courbe $ABCFG$ infléchie en D (avec des ddy qui vont en diminuant jusqu'au point d'inflexion) et commente sa figure. Les différentielles de la courbe étant AB , BC , CF et FG et celles de l'axe AH , HI et IK , les parties CD et DE de la différentielle CF sont droites et par là les deux perpendiculaires en D et E sont parallèles mais étant des infiniment petits de la partie CD , elles sont « sautées ».

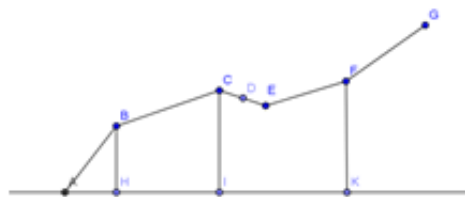


fig. 66

Son explication mériterait d'être précisée et ne peut être jugée entièrement satisfaisante. En effet, par sa figure, on ne saurait distinguer quelle est la différentielle qui est supposée constante car que ce soit celle de l'axe, celle des appliquées ou celles de la courbe, aucune n'est de même taille. Mais elle finit par satisfaire le Marquis comme sa réponse en mai 1694 en témoigne : la courbe peut être considérée comme une infinité de petits arcs qui ont tous leur centre dans la développée et qui sont les différentielles de la courbe. Lorsque le rayon est infiniment petit, l'arc qui, dans ce cas, devient un point est donc un infiniment petit par rapport aux autres arcs et ainsi les perpendiculaires contigües se confondent. Cela peut bien se faire de deux manières car, au point d'inflexion, ddy changeant de signe, soit les ddy vont en croissant ce qui implique que ddy soit infini ou au contraire les ddy vont en diminuant et alors ddy s'annule¹.

Ainsi, les deux hommes finissent par s'accorder sur la validité de ce critère en termes différentiels discriminant les points d'inflexion. L'expression du rayon de courbure a introduit le cas « $ddy = \infty$ ». Pour accepter la validité de ce cas, le retour au sens géométrique de la courbe – comme résultant d'une décomposition en mouvements infinitésimaux de la développée – est essentiel pour l'Hospital.

¹ Lettre de l'Hospital à Bernoulli, mai 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, op. cit, p. 214.

Les deux hommes savent bien que cette condition est seulement nécessaire et que la réciproque est fautive. En effet, l'Hospital affirme « je crois qu'il y a une infinité de courbes qui ne changent point de courbure et qui cependant ont de certains points où $ddy = 0$ »¹ et dans le même sens Bernoulli ajoute : « cependant il est vrai que cela n'est pas réciproque ; car il y a une infinité de courbes qui ont en un certain point le rayon de la développée infini ou infiniment petit sans qu'elles changent de courbure, ce qui se vérifie dans quelque parabolöide »².

En outre, pour Bernoulli, contrairement à ce qu'il avait pu croire jusqu'alors, non seulement le rayon de la développée n'est pas nécessairement infini au point d'inflexion mais la plupart des courbes qui ont un point d'inflexion ont un rayon nul en ce point³. Pour le montrer, il considère une courbe possédant un point d'inflexion mais en lequel le rayon du cercle osculateur est infini. En développant cette courbe, il affirme obtenir une développante ayant également un point d'inflexion mais pour laquelle le rayon du cercle osculateur est infiniment petit. En réitérant le procédé, c'est-à-dire en développant à chaque fois la dernière courbe obtenue, on obtient une suite de courbes ayant chacune un point d'inflexion avec un rayon du « cercle baisseur » infiniment plus petit que le rayon obtenu dans la courbe précédente. Il ne démontre pas ce résultat mais remarque que « cela se voit aisément quand on considère que le premier rayon de la développée est égal à la première différentielle de la même »⁴. Ainsi, sa remarque prend tout son sens : « il est clair qu'il n'y a qu'un seul genre de courbes auxquelles le rayon du cercle baisseur au point d'inflexion est infini, mais il y a une infinité de genres où ce rayon est toujours infiniment petit »⁵.

L'Hospital ne comprenant pas la totalité du résultat, lui demande des explications dans la lettre suivante⁶. Il saisit parfaitement que le rayon de la développante soit infiniment plus petit que le rayon de la développée lorsque celui-ci est infini mais ne comprend pas que, pour la courbe suivante, le rayon au point d'inflexion correspondant soit « infiniment plus petit que celui de la seconde, et ainsi

¹ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 avril 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 204.

² Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 22 avril 1694, *ibid.*, p. 207.

³ *Ibid.*, p. 206 : « en effet je trouve qu'il y autant ou même plus de courbes où le rayon de la développée au point de contour est infiniment petit, que celles où il est infini ».

⁴ *Ibid.*, p. 207.

⁵ *Ibid.*, p. 207.

⁶ Lettre de l'Hospital à Bernoulli de mai 1694, citée plus haut.

de suite »¹. L'explication est donnée dans la lettre suivante, en mai 1694². Bernoulli considère une courbe quelconque abc (qui n'a pas forcément un point d'inflexion) qu'il développe à partir de a obtenant adf . Il développe cette dernière et obtient aeg . Le procédé peut se répéter indéfiniment. Il nomme le premier rayon db , le deuxième ed , etc.

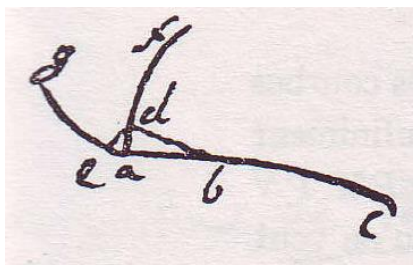


fig. 67

Par cette construction, il obtient une suite de triangles semblables : dab , ead etc. et une suite d'égalités : $\frac{bd}{da} = \frac{de}{ea} = \dots$. Or, du fait de la définition de la développée $da = de = \dots$ et donc la suite d'égalités s'écrit : $\frac{bd}{de} = \frac{de}{ea} = \dots$ de sorte que les « premiers rayons des développées sont des proportionnels continus »³.

En supposant l'angle abd infiniment petit et en vertu de cette proportion, il appert que bd est infini par rapport à de et que de le sera également par rapport à ea . Ce raisonnement ne change rien si ce développement se fait à partir du point d'inflexion de sorte que « le premier est infiniment petit, le second sera infini-infiniment petit et ainsi de suite »⁴. Le problème des points d'inflexion étant réglé, il est question pour les deux hommes d'établir un résultat similaire pour les points de rebroussement. Bernoulli a l'espoir, contrairement au Marquis, que la considération de la développée peut également servir pour cette sorte de points.

Points de rebroussement de la première et de la deuxième sorte, la considération du rayon de courbure

Dans la lettre du 22 avril 1694, Bernoulli considère des courbes qu'il appelle « bicornes » dont « les plus grandes ou plus petites ordonnées » passent par un point

¹ *Ibid*, p. 216.

² Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital, du 21 mai 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit*, p. 217.

³ *Ibid*, p. 222. La figure en est aussi extraite.

⁴ *Ibid*, p. 222.

qu'il appelle de « rebroussement »¹. Dans la lettre du mois de mai 1694², l'Hospital s'étonne que Bernoulli affirme qu'au point de rebroussement, le rayon de courbure est nécessairement nul³. L'Hospital n'est pas d'accord avec cet énoncé et affirme que le rayon peut être égal à infini – comme pour certains paraboloides – mais aussi égal à une valeur déterminée autre que zéro.

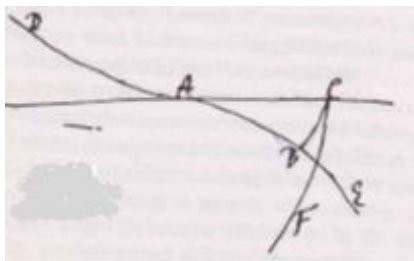


fig. 68

Pour montrer cette dernière affirmation, il considère une courbe DAE qui a pour tangente au point d'inflexion la ligne AC . En développant à partir du point B il obtient une développante BCF « bicorn » qui admet un point de rebroussement en C et dont le rayon de courbure n'est ni nul ni infini. Ainsi, le Marquis conclut que toute considération sur le rayon de courbure « ne peut de rien servir pour trouver ces sortes de points »⁴. Dans sa réponse⁵, Bernoulli est d'accord pour qu'au point de rebroussement, le rayon puisse aussi être égal à l'infini ou à zéro car autrement « la développée d'une partie de la courbe rebrousante ne saurait passer à celle de l'autre partie sans faire un saut manifeste, c'est-à-dire sans que ce rayon fut en même temps négatif et affirmatif, ce qui est absurde »⁶. En revanche, les deux parties de la courbe proposée par le Marquis n'étant pas de convexité opposées, elle n'appartient pas au même genre de courbe « bicorn » dont il était question, de sorte qu'elle ne constitue donc pas un contre-exemple. Bernoulli ne s'avoue point vaincu et affirme que « la considération de la développée peut aussi servir pour trouver le point de rebroussement dans cette seconde sorte de rebrousante »⁷. Il raisonne en considérant une courbe ABC de développée GDE . Il tire d'une part deux rayons CE et BD de la

¹ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 22 avril 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 207

² Lettre de l'Hospital à Bernoulli de mai 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 214.

³ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 26 janvier 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 201. Cette lettre est perdue.

⁴ *Ibid*, p. 215.

⁵ Lettre du 21 mai 1694, *ibid*, p. 217.

⁶ *Ibid*, p. 217.

⁷ *Ibid*, p. 218.

développante puis deux rayons DF et DE de la développée. En supposant C et B infiniment proches, BDC et EFD sont alors deux triangles semblables, il peut écrire :

$$\frac{DE}{DF} = \frac{CB}{BD}.$$

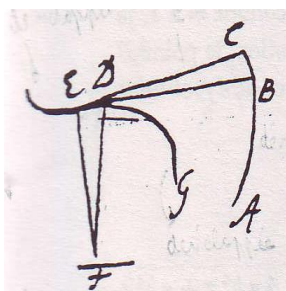


fig. 69

Bernoulli affirme qu'en supposant que le point C est un point de rebroussement de la seconde sorte il faut forcément que le point D qui lui correspond sur la développée soit un point d'inflexion¹. Ainsi, comme au point d'inflexion le rayon DF est infini ou nul, le rapport entre l'arc infiniment petit DE et le rayon DF est soit nul soit infini et à cause de l'égalité donnée plus haut il en est de même pour le rapport entre l'arc infinitésimal CB et le rayon de courbure BD ². C'est ainsi qu'il légitime la règle pour trouver un point de rebroussement de la seconde sorte : « on prendra la différentielle de la courbe et on la divisera par son rayon du cercle biseur ; ce qui vient, doit être fait égal à zéro ou à l'infini »³.

Cependant le Marquis juge⁴ cette règle fautive car elle suppose que la développée d'une rebrousante de deuxième espèce soit une courbe à inflexion, ce qu'un contre-exemple contredira. Pour cela, il considère la courbe EAL , rebrousante de deuxième sorte en A et de tangente AB . En développant à partir du point B , on produit la courbe DBC qui est aussi une rebrousante de deuxième sorte.

¹ Contredit par le Marquis dans la lettre suivante, voir plus bas.

² On peut remarquer que son raisonnement est valable si la développée à point d'inflexion donne une développante avec point de rebroussement de première espèce. Il suffirait alors, pour convaincre le Marquis, qu'il démontre qu'une rebrousante de première sorte provient, après éventuellement un nombre fini de développements, d'une courbe à point d'inflexion (les égalités de rapports données plus haut se renouvelant à chaque développement de courbe). Plus loin dans la lettre il affirme qu'une rebrousante de la seconde sorte est obtenue par déformation d'une courbe à point d'inflexion, le rebroussement de deuxième espèce étant « l'attouchement d'un point d'inflexion avec la partie de la courbe opposée », *ibid*, p. 222.

³ *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. Cit.*, p. 218.

⁴ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 juin 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 223. La figure y est aussi extraite.

Il critique ensuite la façon de Bernoulli de composer les rapports. Il faudrait normalement mettre en rapport d'une part Mm avec Ff et d'autre part les rayons MF et FG car « ce sont des grandeurs de même espèce » et on obtiendrait la formule générale :

$$dx^2 d^3 y dy^2 - 3 dy ddy^2 = 0 \text{ ou à l'infini.}$$

Nous proposons¹ de reconstituer ces calculs. Notons par r' le rayon de la développée en M , par r le rayon de la développée en F et par s l'abscisse curviligne de la courbe LAE . D'après Bernoulli, on a : $\frac{r}{dr'} = \frac{r'}{ds}$. Or, $r' = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx ddy}$ lorsque dx est constant. Ainsi en différentiant :

$$\frac{dr'}{ds} = \frac{\frac{-3}{2} dx ddy (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} (2 dx ddx + 2 dy ddy) - (ddy ddx + dx dddy) (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$$

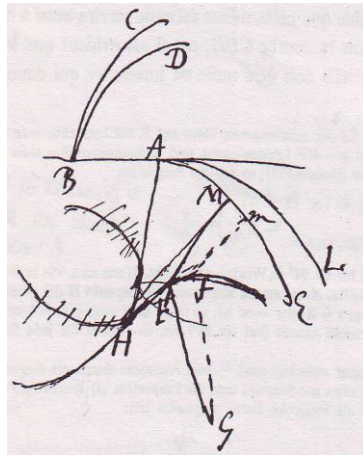


fig. 70

puis comme $ddx = 0$, on peut simplifier :

$$\frac{dr'}{ds} = \frac{-3 dx dy ddy^2 (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + d^3 y dx (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2} = \frac{r}{r'}$$

Or comme r' n'est ni nul ni infini et que r est nul ou infini, le rapport précédent doit être égal à zéro ou à l'infini. De plus, ddy n'étant ni nul ni infini la relation $dx^2 d^3 y dy^2 - 3 dy ddy^2 = 0$ ou à l'infini en découle.

¹ En suivant les indications de la note 2) de l'édition de la correspondance que nous utilisons, *op. cit.*, p. 224.

Le Marquis ajoute que cette relation est aussi valable pour la rebrousante *CBD* car « le rayon *BA* étant un plus petit, sa différentielle doit être nulle ou infinie »¹. On peut remarquer qu'il ne tient pas compte que dans ce cas on a aussi $\frac{r}{r'}$ qui est également égal à zéro ou à l'infini. Ainsi, au point de rebroussement de deuxième sorte on peut aussi avoir un rayon nul ou infini. Cependant, ils sont bien parvenus à établir une relation différentielle permettant de trouver un point de rebroussement de première ou deuxième sorte.

Les théorèmes dorés, le « marquage » de la différentielle seconde

L'Hospital s'intéresse aux formules de rayons de courbure que Jacques Bernoulli a publiées sous l'appellation « théorème doré [*aureum theorem*] » dans un article des *Acta* en juin 1694². Cet article s'intéresse principalement à une courbe que le savant a nommé la « courbe élastique »³. Cependant, avant même de décrire l'obtention de l'équation de cette courbe, il présente les trois formules différentielles de rayon de cercle osculateur en coordonnées cartésiennes (suivant le choix de variable indépendant : ds, dx et dy) en les accompagnant d'une démonstration rapide. Puis, il énonce les mêmes types de formules de rayon de courbure mais cette fois-ci « lorsque les appliquées partent d'un même point »⁴. L'expression de ces dernières a, d'après lui un caractère inédit. En revanche, il ne démontre aucune de ces formules.

Dès la réception des *Acta*, l'Hospital est étonné de cette prétention de Jacques Bernoulli à innover. Le 31 décembre 1694, il écrit à Jean Bernoulli⁵ pour lui rappeler qu'il y a un peu plus d'un an, il utilisait déjà ces théorèmes et qu'il s'en était servi pour la rédaction d'un de ses mémoires. En effet, le Marquis avait lu le 31 août 1693, un

¹ *Ibid*, p. 224. Le début du raisonnement est le même sauf que l'on note par r le rayon de la développée en A et par r' le rayon de la développée en B . Comme en B , le rayon est un minimum on a $\frac{dr'}{ds}$ qui est égal à zéro ou à l'infini ce qui donne en définitive la même relation.

² « Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expnsi. Radii circulorum osculantim in terminis simplicissimis exhibitis, una cum novis quibusdam theorematibus huc ertinentibus, &c. », *AE*, juin 1694, p. 262-270.

³ Il découvre les formules différentielles du rayon de courbure entre 1689 et l'année 1691. Patricia Radelet De Grave, « La mesure de la courbure et la pratique du calcul différentiel du second ordre » dans *Sciences et techniques en perspective*, II^e série, vol. 8, 2004, p.159-178.

⁴ C'est-à-dire, ce qu'en langage moderne nous appelons coordonnées polaires.

⁵ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 31 décembre 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit*, p. 250-252.

mémoire à l'Académie des Sciences concernant les caustiques par réfraction¹ dans lequel il démontrait la formule du rayon de courbure lorsque les appliquées partaient d'un même point. Dans ce mémoire il se plaignait du laconisme dont avait déjà fait preuve Jacques Bernoulli dans un mémoire précédent :

Mr Bernoulli Professeur de Mathématiques à Basle a publié dans les Journaux de Leypsic du mois de Juin, une manière générale de déterminer dans toutes les courbes les points des caustiques par réfraction, en supposant les développées. Mais il supprime son analyse ; & il n'est pas aisé de découvrir, par ce que la plupart des voyes que l'on peut suivre dans cette recherche, menent à des calculs très-pénibles & tres-ennuyeux².

La démonstration présente dans le mémoire est reprise à l'identique dans la lettre à Bernoulli : M et m sont des points infiniment proches. CM est le rayon de courbure. L'Hospital ne l'écrit pas mais il suppose la différentielle ds constante. BE et Be sont perpendiculaires sur les rayons MC et mC respectivement. $BM = y$, $Mm = ds$, $MR = dx$. Il affirme que les triangles MRm , MEB (ou MFB) sont semblables.

Il n'écrit pas que pour affirmer cela il suppose que BEF est infiniment petit par rapport à RBE ³. Il a donc :

$$\frac{ME \text{ ou } MF}{BM} = \frac{MR}{Mm}$$

¹ « Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction, avec une manière nouvelle de trouver les développées » in *Mémoires de l'Académie des sciences*, op. cit., 31 août 1693. Il envoie également la démonstration à Jean Bernoulli dans la lettre du 31 décembre 1694.

² « Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction, avec une manière nouvelle de trouver les développées », 31 août 1693, *Mémoires de Mathématique et de Physique tirez des Registres de l'Académie Royale des Sciences*, Imprimerie Royale, p. 129-133.

³ Les triangles semblables sont ceux qui sont en bleu sur la figure. Il y a donc aussi un triangle de sommets M et B qui est infiniment petit par rapport à MEB ou MEF puisqu'un de ses côtés est infiniment petit par rapport à ME ou MF . Dans le mémoire, on retrouve les mêmes suppositions non explicitées.

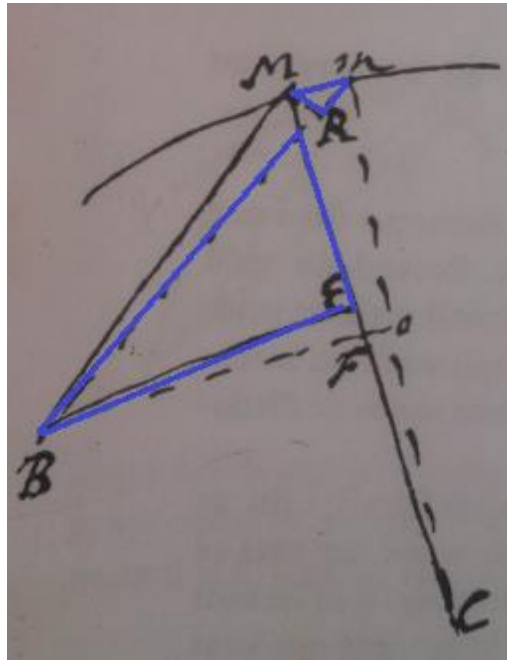


fig. 71

ce qui donne :

$$MF = \frac{ydx}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{BE}{BM} = \frac{Rm}{Mm}$$

d'où :

$$BE = \frac{ydy}{ds}$$

En différenciant et en tenant compte que ds est constant :

$$Ee (= Fe) = d(BE) = \frac{dy^2 + yddy}{ds} \quad (*)$$

Par ailleurs, dans le triangle CMm , Fe est parallèle à Mm donc :

$$\frac{Mm - Fe}{Mm} = \frac{MF}{MC}$$

d'où :

$$MC = \frac{MF \times Mm}{Mm - Fe} = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$$

Qu'y-a-t-il alors d'inédit dans la formulation de Jacques Bernoulli ? Le Marquis l'explique : Jacques Bernoulli a démontré les formules du rayon lorsque les appliquées sont parallèles en « marquant »¹ sur la figure les « différences secondes [*differentiae secundae*]».

¹ La figure ci-dessous est extraite de l'article de Jacob Bernoulli. En supposant une des différentielles constantes, l'auteur peut marquer les différentielles secondes des deux autres variables.

ordre mais n'y sont pas représentées. Ainsi la seule difficulté du Marquis est d'échouer à figurer les différentielles secondes même s'il réussit en revanche à démontrer la formule grâce à l'algorithme leibnizien. Dans la lettre du 12 janvier 1695 Jean Bernoulli lui montre enfin cette figuration et la manière de s'en servir pour obtenir la formule du rayon de courbure¹ :

Vous voulez pourtant sçavoir de quelle manière il se faut prendre si on veut ce même rayon en marquant sur la figure les différences secondes ; voicy comment je le fais².

Bernoulli considère M, m et n trois points infiniment proches. Les appliquées BM, Bm et Bn sont notées par y , les différentielles constantes de la courbe Mm, mn sont notées par ds ; les différentielles des appliquées sont mS et nR , notées par dy , les différentielles « angulaires » MS et mR sont notées dx .

Soit a le point de la droite Mm tel que avec $ma = mn$. Bernoulli trace le cercle de centre m et de rayon ma : par construction l'arc de cercle an est infiniment petit par rapport à l'arc ma . Il considère ensuite le point b tel que l'angle $amb = mBR$. Or $mMS + mSM$ est égal à l'angle externe :

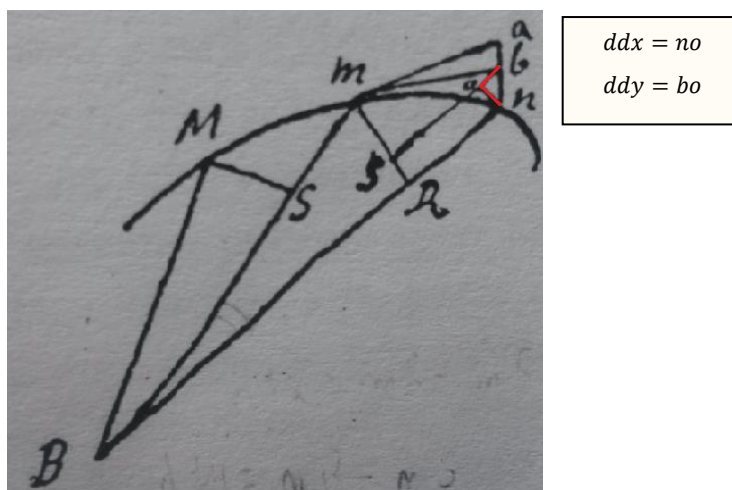


fig. 73

$$amB = amb + bmB = mBR + bmB = mBR + bmR + RmB.$$

En ôtant l'angle droit $mSM = mBR + RmB$, il obtient : $mMS = bmR$ (1)

¹Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 12 janvier 1695, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, op. cit, p. 256. Cette démonstration sera reprise par l'Hospital dans son ouvrage, art. 64.

² *Ibid*, p. 256.

Il considère alors la droite bs parallèle à nB , comme an est infiniment petit par rapport à l'arc ma , il peut supposer que $mb = mn = mM$ (différentielles constantes) (2). Il déduit de (1) et (2) que les triangles mMS et bms sont semblables et égaux.

La différence $mR - ms = on$ est la différence seconde des x c'est-à-dire : $no = ddx$ et $bo = ddy$. Ainsi, $bn = \sqrt{ddx^2 + ddy^2}$. En vertu de l'égalité des triangles, il peut écrire :

$$\frac{Bn}{mR} = \frac{ma}{ab},$$

c'est-à-dire :

$$ab = \frac{mR \times ma}{Bm} = \frac{dsdx}{y}$$

donc :

$$an = ab + bn = \frac{dsdx}{y} + \sqrt{ddx^2 + ddy^2}.$$

Or le rayon de courbure r est la troisième proportionnelle de an à am donc = $\frac{am^2}{an}$ ou encore = $\frac{yds^2}{dsdx + y\sqrt{ddx^2 + ddy^2}}$. En différenciant $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$ (en tenant compte de $dds = 0$) il obtient : $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$, donc $r = \frac{ydxds}{dx^2 \pm yddy}$.

De fait, deux types de démonstrations coexistent : l'une où l'on fait intervenir les différentielles secondes en utilisant les règles symboliques du calcul, l'autre où ces différentielles apparaissent sur la figure et sont parties prenantes d'un raisonnement géométrique. Certes, l'Hospital n'a pas besoin du marquage et de cette représentation géométrique des différences secondes pour adhérer au calcul leibnizien. Cependant, le calcul des différences apparaît dans un cadre mathématique fortement géométrique. Cet exemple montre que l'Hospital reçoit le calcul leibnizien par un va-et-vient entre l'interprétation géométrique des objets auxquels la symbolique leibnizienne renvoie et leur manipulation calculatoire.

2.3) « Il y a longtemps que je sçais que vous êtes universel » : la relation l'Hospital-Leibniz

Le 14 décembre 1692, par l'intermédiaire de Malebranche, débute l'échange épistolaire entre Leibniz et l'Hospital. Leibniz est heureux d'initier ce commerce car il connaît, par le biais de Jean Bernoulli et Huygens, la réputation de bon mathématicien qu'est en train d'acquérir l'Hospital. De son côté, l'Hospital non seulement reconnaît

en Leibniz l'inventeur et le maître de ce nouveau calcul auquel il destine la presque totalité de son temps, mais il lui marque sa plus grande admiration :

Il y a longtemps que je sçais que vous êtes universel, la théologie, l'histoire, les droits des princes, la recherche des mines etc. sont votre occupation ordinaire et a peine avez-vous quelques momens pour les employer aux mathematiques et a la phisique ; cependant les grandes découvertes que vous y avez faites encore tous les jours font assez connoistre de quoi vous êtes capable en ce genre, et on ne sauroit trop se plaindre de ce que vous avez si peu de loisir a y penser¹.

Leibniz est de quinze ans l'aîné du Marquis et apparaît à ses yeux comme « universel ». Cette dissymétrie entre les deux hommes détermine en partie leur relation. L'Hospital ne s'adresse pas à Leibniz de la même façon qu'à son jeune professeur Jean Bernoulli : les lettres sont moins nombreuses (46 contre presque une centaine) et le ton est moins directif.

L'Hospital profite de cet échange pour le questionner essentiellement sur des questions mathématiques, certaines figurent parmi celles qu'il débat avec Jean Bernoulli, ce qui lui permet d'enrichir les réponses. Entre les différents sujets traités par les deux hommes, l'Hospital attend des éclaircissements sur les points d'inflexion, les formules de rayon de courbure, les enveloppes de courbes, la quadrature d'équations différentielles ou le problème inverse des tangentes.

Il est intéressant de constater que de son côté le philosophe promeut son nouveau calcul auprès de l'Hospital de façon analogue à la manière dont il l'effectue dans les journaux, en particulier dans le *Journal des Sçavants*. De plus, il introduit des sujets, absents dans la correspondance entre Bernoulli et l'Hospital, concernant l'origine du calcul et le statut des quantités infiniment petites qui entrent en jeu. Ces témoignages sont importants car ils permettent de mieux saisir la conception que Leibniz a de son calcul et la manière dont il la présente auprès de la communauté savante française, en particulier à l'Hospital qui en est un notable représentant.

¹ Lettre de l'Hospital à Leibniz, AIII 5B, p. 494.

Promouvoir le nouveau calcul : un vœu leibnizien, l'Hospital intermédiaire

En mai 1692, Leibniz publie au *Journal des Sçavants* un article concernant sa résolution du problème de la chaînette¹. Il reprend des arguments en faveur de l'utilisation du nouveau calcul qu'il avait auparavant avancé dans son article sur le même sujet publié dans les *Acta* en septembre 1691². Il explique que l'analyse ordinaire de Viète et de Descartes ne suffisent pas pour traiter tous les problèmes de géométrie, en particulier les problèmes transcendants, « l'Analyse des infinis », – qui est à distinguer de la Géométrie de Cavalieri et de l'arithmétique des infinis de Wallis – le permet. Une partie des principes de ce calcul et de ses applications a été publiée dans les *Acta eruditorum*. La résolution de la courbe isochrone est un exemple caractéristique de la fécondité du nouveau calcul. Ce discours est répété dans sa deuxième lettre à l'Hospital :

on n'est pas encor le maistre des problemes semblables à ceux de Diophante ; et quant à l'analyse des Transcendantes, ce n'est que depuis peu, comme vous sçavés, Monsieur, qu'on commence de s'en servir pour un calcul réglé. La perfection de l'Analyse des Transcendantes ou de la Geometrie où il entre en considération de quelque infini seroit sans doute la plus importante à cause de l'application, qu'on en peut faire aux operations de la nature, qui fait entrer l'infini en tout ce qu'elle fait³.

Mais contrairement à ses précédents interlocuteurs français – Malebranche, Gallois – l'Hospital prouve qu'il comprend la valeur du projet leibnizien et Leibniz le félicite : « Et je suis ravi de voir que vous en avés compris la conséquence. Car si quelqu'un est capable d'y aller bien loin ce sera vous »⁴.

Deux ans plus tard, le 23 août 1694, dans un article intitulé « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des

¹ « De la chaînette, ou solution d'un problème fameux proposé par Galilei, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, avec son usage des logarithmes, & une application à l'avancement de la navigation », *JS*, 31 mars 1692, p. 147-153.

² Voir introduction de ce chapitre.

³ *AIII* 5B, p. 480.

⁴ *Ibid.* À propos de cet article, Huygens avoue à l'Hospital : « Mons^r Leibnitz est assurément très habile, mais il a d cela une envie immodérée de paroistre, comme cela se voit encore dans le 13^e journal de la mesme année lorsqu'il parle sz son Analyse des infinis (...) Mais je vous prie de ne tesmoigner rien de cecy. », lettre du 9 avril 1693, *OH*, t. X, p. 437.

transcendantes »¹. Leibniz revient sur la distinction entre la nouvelle analyse et celles qui la précèdent. Les sujets dont il avait indiqué l'importance entre 1675 et 1679 auprès de Gallois, Malebranche et La Roche – mais qui n'avaient pas suscité de l'intérêt – demeurent, aux yeux de Leibniz, des points essentiels et toujours d'actualité, tels sont ceux qui consistent à « délivrer les différentielles impliquées par le moyen des sommes pures ou quadratures » – méthode inverse des tangentes – ou ceux de « donner effectivement les sommes ou quadratures pour parvenir aux grandeurs ordinaires ou algébriques de l'analyse commune »² pour lesquels l'usage des séries infinies est de grand intérêt. Leibniz préconise le perfectionnement de ces méthodes : les Bernoulli sont les premiers à y avoir contribué. Dans cet article, il reconnaît pour la première fois publiquement les apports du Marquis : « M. le Marquis de l'Hospital y a pris goût aussi, en ayant donné de beaux échantillons »³. Ce passage est important car s'il avait déjà, de façon privée, avoué son estime à l'Hospital, il veut ici marquer l'avancement de la conquête de son calcul en France en présentant le Marquis comme un allié de son combat.

Le choix de la caractéristique

Par ailleurs, Leibniz admet que le calcul de Newton est « quelque chose de semblable » au sien mais il marque sa préférence pour le sien en raison de l'importance de la caractéristique qui est « une grande part de l'art d'inventer » : la sienne donne « plus d'ouverture »⁴. Dans les lettres à l'Hospital, Leibniz insiste sur l'intérêt du choix d'une bonne caractéristique dans le but de découvrir. Une caractéristique doit conduire à l'« ouverture ». Que veut-il ainsi signifier ? Dans la lettre adressée à l'Hospital le 18 mars 1695⁵, il explique que le calcul des différences est le même que celui des sommes, « l'un estant seulement reciproque de l'autre. » Pour justifier cet énoncé, il se borne à écrire : « j'ay trouvé comme $x^{-1} = \frac{1}{x}$ que de même $d^{-1}x = \int x$ ». Cette analogie entre les puissances entières négatives/positives et les intégrations/dérivations est développée plus amplement dans une lettre du 30

¹ « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes », JS, 23 août 1694, p. 404-407.

² *Ibid*, p. 406.

³ *Ibid*, p. 404

⁴ *Ibid*, p. 405.

⁵ *Ibid*, tome 6, p. 315.

septembre 1695¹. Leibniz a fait part de cette analogie « merveilleuse » à Jean Bernoulli dont il estime qu'elle est d' « une ouverture singulière ». Par exemple, par analogie avec :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{xx} + \frac{yy}{x^2} - \frac{y^3}{x^4} \text{ etc} = p^{-1}x.p^0y - p^{-2}x.p^1y + p^{-3}x.p^2y - p^{-4}x.p^3y$$

etc

il peut exprimer :

$$\int xy = d^{-1}(xy) = d^{-1}x.d^0y - d^{-2}x.d^1y + d^{-3}x.d^2y - d^{-4}x.d^3y \text{ etc}$$

En mettant dx à a place de x , il obtient :

$$\int ydx = yx - dy \int x + d^2 y \iint x - d^3 y \iiint x \text{ etc.}$$

Et en posant dx constant, il a :

$$\int ydx = \frac{1}{1}yx - \frac{1}{1.2}xxdy + \frac{1}{1.2.3}x^3d^2y - \frac{1}{1.2.3.4}x^4d^3y \text{ etc}$$

Leibniz se montre optimiste à ce que ce jeu sur les écritures puisse dévoiler des énoncés vrais. Ainsi, le principe « la somme n'estant qu'une différence négative », le conduit à se demander ce que c'est « qu'une difference dont l'exposant est un nombre rompu »². En utilisant l'analogie précédente, il développe la différentielle à exposant fractionnaire sous forme de série et quoique ce développement ne conduise pas à une interprétation géométrique (comme pour les exposants entiers), il prévoit qu'il « y a de l'apparence qu'on tirera un jour des conséquences bien utiles de ces paradoxes »³. Nous voyons encore ici comment Leibniz veut persuader ses pairs de l'utilité et la nécessité d'une pensée symbolique⁴. L'Hospital apprécie ces recherches dans le domaine de l'écriture symbolique mais pas suffisamment pour qu'il soit incité à en effectuer par lui-même⁵.

Le statut des infiniment petits : les déclarations de Leibniz

Dans l'article de 1692, Leibniz fournit des précisions sur son calcul :

¹ *Ibid*, p. 503.

² *Ibid*, p. 505.

³ *Ibid*, p. 505.

⁴ Il ne se borne pas à celle adoptée pour le calcul différentiel mais fait part d'autres inventions : dans la lettre du 28 avril 1693, il décrit la notation qui consiste à utiliser des nombres pour les coefficients d'équations, *op. cit.*, p. 542.

⁵ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 1^{er} décembre 1695 : « Vous ouvrez un grand champ de méditations par l'analogie merveilleuse que vous avez decouverte entre les differences et les puissances, et les consequences que vous en tirez déjà et dont vous avez bien me faire part sont très belles », *ibid*, p. 555.

Elle [l'Analyse des infinis] montre un algorithme nouveau, c'est-à-dire une nouvelle façon d'ajouter, de soustraire, de multiplier, de diviser, d'extraire, propre aux quantitez incomparables, c'est-à-dire à celles qui sont infiniment grandes, ou infiniment petites en comparaison des autres. Elle employe les equations tant finies, qu'infinies ; et dans les finies elle fait entrer les inconnues dans l'exposant des puissances, ou bien au lieu des puissances ou des racines, elle se sert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui est la variation mesme, marquée par certains caractères, et qui consiste dans les différences, ou dans les differences des differences de plusieurs degrez, auxquelles les sommes sont réciproques, comme les racines le sont aux puissances¹.

« De la chaînette » est le premier article publié dans un journal français dans lequel Leibniz promet son nouveau calcul. Le passage ci-dessus est important car il y explique en quoi réside la nouveauté de son calcul : il s'agit avant tout d'un algorithme muni des opérations communes de l'algèbre – addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines – mais qui traite avec des « quantitez incomparables ». Nous pouvons remarquer qu'ici, contrairement à son opuscule « *Nova methodus* », Leibniz ne relève pas le confort calculatoire que procure l'application de son calcul, notamment pour les quantités irrationnelles ou fractionnaires. En revanche, alors qu'il était discret à ce sujet dans « *Nova methodus* », il écrit ici que ce calcul est élaboré en vue fondamentalement de traiter les quantités qu'il appelle « incomparables » et qui sont exactement les infiniment grands ou les infiniment petits en comparaison des autres. Leibniz précise que sa nouveauté consiste également en ce que son algorithme s'occupe de grandeurs variables pour lesquelles il est à même de traiter leurs variations, à l'aide d'un nouveau caractère qui leur est destiné. Cependant, alors qu'il décrit par la suite sa solution au problème de la chaînette, il s'abstient de faire apparaître la caractéristique « *d* ». Il en est de même pour l'article de 1694.

Qu'entend-t-il par « incomparable » ? En 1689, Leibniz publie un opuscule dans les *Acta* intitulé « Les Causes des mouvements des cieux »² dans lequel il emploie des quantités « incomparablement petites » [*quantitates incomparabiliter parvas*]. Il souhaite justifier de les avoir utilisées :

Au cours de la démonstration j'ai employé des quantités incomparablement petites par exemple la différence entre deux grandeurs ordinaires [*communium*] incomparables avec

¹ *Ibid*, p. 448.

² « Tentamen de motuum coelestium causis », *AE*, février 1689.

elles. Il me semble qu'on peut éclairer complètement ceci de la manière suivante. Si on refuse d'employer des infiniment petits on peut adopter des grandeurs aussi petites qu'on le juge suffisant pour qu'elles soient incomparables et pour que l'erreur qu'elles produisent n'ait plus d'importance et même soit inférieure à une erreur donnée¹.

Ce passage est éclairant car Leibniz y explique son mode d'emploi des infiniment petits dans sa pratique mathématique. Nous pouvons remarquer, tout d'abord, qu'ici il ne fait pas de distinction entre le terme quantité « infiniment petite » et « incomparable ». Dans quel contexte situe-t-il ces notions ? Leibniz indique qu'il a effectué une démonstration dans laquelle il a introduit des quantités incomparablement petites. Il insiste sur le fait que la notion d'incomparabilité est une notion relative et fournit des éléments de réponse à une question fondamentale : comment estimer qu'une quantité est incomparable par rapport à une autre ? Selon lui, cette estimation est laissée à l'appréciation de l'utilisateur : « aussi petites qu'on le juge suffisant » pour que l'erreur soit inférieure à l'exigence que ce dernier s'est donnée. Cela ne va pas sans rappeler les explications de la première méthode des tangentes de l'Hospital appliquée aux paraboles généralisées² et dans laquelle il ne gardait que les deux premiers termes : les autres étaient « sans importance » pour le calcul. Leibniz présente donc ces quantités dans le cadre d'une pratique : elles sont des adjuvants de calcul. Nous pouvons souligner donc que son dessein est principalement de rendre compte du confort à utiliser ces quantités. Il est manifeste qu'il ne place pas ses explications dans un contexte métaphysique : ces quantités incomparablement petites apparaissent dans une pratique de calcul et il lui semble important d'éclaircir leur utilisation dans ce cadre.

Pour rendre plus sensible son explication il l'illustre d'exemples dans lesquels deux quantités peuvent être considérées incomparables l'une avec l'autre :

De la même manière qu'on considère la terre comme un point c'est-à-dire son diamètre comme un infiniment petit, au regard du ciel, on peut démontrer [*demonstrari potest*] que si une base est incomparablement plus petite que les côtés d'un angle, l'angle qu'ils

¹ « Itaque si quis nolit adhibere *infinite parvas*, potest assumere tam parvas quam sufficere iudicat, ut sint incomparabiles, & errorem nullius momenti, imo dato minorem, producant », traduction par Marc Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 328.

² On pourra se référer au chapitre 3.

délimitent sera incomparablement plus petit qu'un angle droit et que leur différence sera sans comparaison avec eux (...)¹

Dans ce passage, Leibniz décrit deux situations dans lesquelles il est licite de considérer quelque chose comme incomparable à une autre. Cependant, à première vue, ces deux exemples ne sont pas du même ordre car la taille de la terre est comparable à la taille du ciel parce que ce sont des grandeurs homogènes et finies, alors que la base du triangle est supposée être infiniment petite par rapport aux deux autres côtés. Un triangle ainsi décrit possède deux côtés faisant chacun d'eux presque un angle droit avec la base (ils en diffèrent d'un incomparable par rapport à l'angle droit) de sorte qu'il est infiniment allongé ou son sommet est infiniment loin. Cet objet vérifiant bien la propriété d'un triangle d'avoir la somme des angles égale à deux droits, il n'est donc pas illégitime de le considérer comme tel.

Pour justifier l'utilisation d'incomparables dans son opuscule, il indique également que sa pratique est coutumière chez ses contemporains, comme le suggère l'expression « de la même manière qu'on considère ». L'assimilation à un usage habituel dans la communauté savante apparaît comme un argument. À celui-ci il ajoute celui de la fécondité :

On peut employer des triangles ordinaires semblables aux triangles *inassignables*, qui sont du plus haut intérêt pour faire apparaître les tangentes, les Maxima et Minima, et la courbure des courbes, de même dans presque dans toutes les applications de la géométrie dans la nature, car si on représente [*exponatur*] un mouvement par une courbe ordinaire parcourue en un temps donnée par un mobile, l'impetus c'est-à-dire la vitesse, sera représenté par une ligne infiniment petite, et l'élément de la vitesse, comme l'impulsion de la gravitation ou l'effort [*conatus*] centrifuge, par une ligne infiniment infiniment petite. J'ai voulu faire ces remarques qui interviennent comme des lemmes dans notre *méthode des grandeurs incomparables et dans l'analyse des infinis*².

¹ « Quemadmodum terra pro puncto seu diameter terrae pro linea infinite parva habetur, respectu coeli, sic demonstrari potest, si angula latera habeant basin ipsis incomparabiliter minorem, angulum comprehensum fore recto incomparabiliter minorem, & differentiam laterum fore ipsis differentibus incomparabilem ; (...) » , traduction de Marc Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, p. 328.

² « Et possunt adhiberi triangula communia *inassignabilibus* illis similia, quae in tangentibus, Maximisque & Minimis, & explicanda curvedine linearum usum habent maximum ; item in omni pene translatione Geometriae ad naturam, nam si motus exponatur per lineam communem, quam dato tempore mobile absolvit, impetus seu velocitas exponetur per lineam infinite parvam, & ipsum elementum velocitatis, quale est gravitatis sollicitatio, vel conatus centrifugus, per lineam infinitas

L'introduction des quantités incomparables permet, outre de parvenir à la détermination de tangentes, de maximum ou minimum et de courbure, à « exposer » ou « représenter » mathématiquement des phénomènes de la nature comme sont la vitesse ou l'accélération. Pour résumer, Leibniz accorde à l'utilisation des incomparables toute sa légitimité dans une pratique mathématique et il ne considère pas qu'il est à justifier davantage leur existence et leur utilisation¹.

Bernard Nieuwentijt (1654-1718) est un médecin et mathématicien hollandais. En 1694, il publie deux ouvrages *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinie parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum resolvendis problematibus geometricis*² dans lesquels il critique certaines pratiques mathématiques présentes dans les écrits de ses contemporains : Barrow, Newton et Leibniz qu'il vise particulièrement. Leibniz répond à ces critiques par un article publié dans les *Acta* en juillet 1695 intitulé « Réponses à quelques objections soulevées par M. Bernard Nieuwentijt à propos de la méthode différentielle ou infinitésimale »³. En 1696, Nieuwentijt publie un deuxième ouvrage pour répondre à l'article de Leibniz⁴. Nous ne détaillerons pas la totalité de cette controverse qui a fait l'objet de plusieurs études⁵ mais nous indiquerons les points essentiels soulignés par Leibniz à ce sujet dans deux lettres envoyées à l'Hospital en 1695, l'une datée du 14 juin et l'autre du 12 juillet. Dans la lettre du 14 juin 1695, Leibniz explique que Nieuwentijt a publié deux livres qu'il s'est empressé de lui envoyer et dans lesquels il se plaint de ce que lui, les

infinite parvam. Atque haec lemmatum loco annotanda duxi, pro *Methodo nostra quantitatum incomparabilium ; & analysi infinitorum*, Doctrinae hujus novae *Elementa*. », *ibid*, p. 328

¹ Pour la question de Leibniz et les incomparables, on pourra consulter l'article de Herbert Breger, « On the grain of sand and heaven's infinity » dans « Für unser Glück oder das Glück anderer: Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover, 18.-23. Juli 2016 », vol. 6, édité par Li, Wenchao, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 2017, p. 63-79.

² Nieuwentijt, Bernard, *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amsterdam, 1694 et *Analysis infinitorum seu curvilinearum proprietates ex polygonorum natura deductae*, Amsterdam, 1695

³ « Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas », *AE*, juillet 1695.

⁴ *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et responsio ad nobilissimum G.G. Leibnitzium*, Johannem Wolters, Amsterdam, 1696.

⁵ Mancosu, Paolo, « Early debates with Clüver and Nieuwentijt », *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, *op. cit.*, p. 156-164, Nagel, Fritz, « Nieuwentijt, Leibniz, and Jacob Hermann on infinitesimals », Goldenbaum, Ursula, Jesseph, D., *Infinitesimal Differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, W de G, Berlin, 2008, p. 195, Breger, Herbert, « On the grain of sand and heaven's infinity » (déjà cité plus haut) et la présentation par Marc Parmentier de la réponse de Leibniz dans *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 316-324.

Bernoulli et l'Hospital emploient des « raisonnements fondés sur le Calcul des différences, sans avoir donné des démonstrations de nos principes »¹. En effet, parmi les critiques de Nieuwentijt au calcul deux se focalisent sur son manque de bien-fondé. Premièrement, celui-ci blâme la façon d'éliminer des quantités infiniment petites considérées arbitrairement comme non nulles pendant le calcul puis nulles sans que cela soit justifié. Il rappelle que deux grandeurs sont égales uniquement lorsque leur différence est absolument nulle. Deuxièmement il s'attaque aux différentielles d'ordre supérieur pour lesquelles il n'accorde aucune forme d'existence, elles sont absolument rien [*merum nihil*].

Pour Nieuwentijt, une quantité infinitésimale est une quantité qui peut être rendue inférieure à toute autre quantité finie. Ainsi, elle ne saurait pas surpasser une quantité finie par une quelconque multiplication, par conséquent elle est absolument nulle. Il précise que toute quantité peut être divisée en n'importe quel nombre de parties et être rendue ainsi inférieure à toute quantité finie donnée. Il y a donc trois types de « quantités » : les finies, les infiniment petites et les infiniment grandes². Cela suppose – ce que Leibniz récuse – qu'il existe un nombre infiniment grand m de sorte que toute quantité finie b divisée par m devient une quantité infiniment petite $\frac{b}{m}$. La multiplication de cette quantité par elle-même ou par une autre quantité infinitésimale produit « zéro » ou « rien ». Pendant le calcul, il prescrit de conserver les quantités infiniment petites et de considérer leurs produits comme absolument nuls, au risque sinon de produire des absurdités. Pour illustrer la nécessité de cette recommandation il considère l'équation de l'hyperbole $2rx + xx = yy$ (r est non nul) dans laquelle il substitue $x + dx$ à x et $y + dy$ à y et obtient :

$$2rx + 2rdx + x^2 + 2xdx + dx dx = yy + 2ydy + dydy$$

Comme

$$2rx + xx = yy,$$

on a :

$$2rdx + 2xdx + dx dx = 2ydy + dydy \quad (1)$$

Or, l'équation différentielle de $2rx + xx = yy$ est $2rdx + 2xdx = 2ydy$ (2)

¹ *Ibid*, p. 414.

² Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, p. 159.

De (1) et (2), il déduit que $dx dx = dy dy$ puis $dy = dx$. Or, cette dernière égalité signifie que l'hyperbole est une droite, ce qui est absurde. Nous reviendrons sur ce raisonnement. Dans la lettre du 14 juin 1695, Leibniz relate cet épisode à l'Hospital :

Il [Nieuwentijt] croit même que de notre calcul s'ensuit, que lorsqu'on prend les différences des abscisses x égales, celles des ordonnées y et des courbes ou arcs c le devroient estre aussi. Il passe encor plus avant, et blâme quasi tous les Mathématiciens qui ont raisonné sur ces matières ; parce qu'ils n'ont point distingué *infinite parvum a nullo* ; car selon luy pour que deux grandeurs soient égales, il faut que leur difference soit nulle. Il pretend d'avoir trouvé le moyen de rectifier les demonstrations de Geometres ; et il met pour fondement que tout ce qui multiplié par un nombre infini ne devient pas une grandeur ordinaire n'est rien. C'est pour quoy il veut que les quarrés ou rectangles des lignes infiniment petites comme ddx ou $dx dy$ ne sont rien et que c'est pour cela qu'on a raison de les rejeter dans le calcul de M. Fermat. C'est pour cela aussi qu'il ne veut point admettre les grandeurs differentio-differentielles comme ddx ¹.

Leibniz juge que l'intention du mathématicien hollandais est « honnête » et il prévoit de lui répondre dans un article dans lequel il veut montrer pourquoi son attaquant s'est trompé. Afin que ces plaintes cessent, il émet le vœu que l'Hospital fasse paraître bientôt son ouvrage dans lequel il expliquera le calcul. En attendant, il signale qu'il a renvoyé Nieuwentijt à ses lemmes sur les incomparables – que nous avons analysé plus haut – et rappelle à l'Hospital que par « grandeurs incomparables », il entend celles « dont l'une multipliée par un nombre fini que ce soit, ne sçauroit excéder l'autre, de la même façon qu'Euclide la pris dans sa cinquième definition du cinquieme livre »².

La deuxième lettre à l'Hospital est écrite le 12 juillet 1695 après la parution de son article dans les *Acta*. Leibniz revient sur la prescription du mathématicien hollandais : « Il s'imagine qu'on ne doit jamais rejeter en calculant, que ce qui n'est rien absolument, et non pas ce qui est infiniment petit ». Il incrimine Nieuwentijt d'« habiler [*sic*] à sa mode » le calcul leibnizien en remplaçant la notation dx et dy par les lettres « e , v , etc »³. Mais cette notation s'adaptant difficilement aux differentio-differentielles, il prendrait « le parti de les rejeter absolument comme des riens » et conviendrait que le quarré de dx n'est rien. De plus, ce « parti » lui permet d'expliquer

¹ Lettre de Leibniz à l'Hospital du 14 juin 1695, AIII 6A p. 415.

² *Ibid.*

³ Lettre de Leibniz l'Hospital le 12 juillet 1695, *op. cit.*, p. 449.

que dans les calculs de Barrow, Fermat et Sluse « on garde le ϵ et le δ , et on rejette les termes où se trouvent leurs carrés ». Mais, selon Leibniz, la justification de Nieuwentijt est erronée, la vraie raison de cette élimination provient de la notion d'incomparabilité.

Dans sa lettre de réponse, datée du 30 septembre 1695¹, l'Hospital s'accorde avec Leibniz sur le manque de profondeur de l'ouvrage de Nieuwentijt : « Il n'étoit point difficile de répondre a des objections aussi mal fondees que les siennes ». Au souhait leibnizien de promptitude de publication de l'ouvrage dans lequel il expliquera le calcul, il fait savoir que celui-ci² tarde à être imprimé mais qu'il devrait l'être à la fin de l'année. S'il est probable que l'Hospital ait lu l'article de réponse dans les *Acta*, il est presque certain qu'il ne s'en est pas inspiré pour l'écriture de son ouvrage puisque la publication, retardée par ses problèmes de santé, date de juin 1696. Dans son article en réponse à Nieuwentijt, Leibniz reprend des arguments contenus dans les lettres à l'Hospital mais les développe davantage. En premier lieu, il revient sur la définition d'égalité car il considère qu'elle est à l'origine des incompréhensions. Il énonce clairement qu'il juge que deux quantités sont égales lorsque :

Non seulement lorsque leur différence est absolument nulle [*omnino nulla*], mais aussi lorsqu'elle est incomparablement petite, et bien qu'on ne puisse dire que cette différence soit absolument Rien [*Nihil omnino*], elle n'est pourtant pas une quantité comparable à celle dont elle est la différence. Ajoutons à une ligne un point d'une autre ligne, ou une ligne à une surface, nous n'accroissons pas leur grandeur. (...) Car à l'exemple d'Euclide, livre 5, je considère que seules sont comparables des grandeurs homogènes [*homogeneas quantitates*], dont le produit de l'une par un nombre, un nombre fini s'entend, peut surpasser l'autre. Je pose donc que deux grandeurs dont la différence n'est pas de cette nature sont égales, comme l'admit également Archimède et tout le monde auprès de lui. C'est précisément dans ce cas qu'on dit qu'une différence est plus petite que toute grandeur donnée³.

Ce passage est précieux car Leibniz éclaircit sa notion d'incomparabilité. Il pose la définition d'une nouvelle égalité : deux grandeurs sont égales si elles ne

¹ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 3 septembre 1695, *op.cit.*, p. 503.

² Celui qui portera le titre de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

³ « aeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed & quorum differentia est incomparabiliter parva ; & licet ea Nihil omnino dici non debeat , non tanem est quantitas comparabilis cum ipsis , quorum est differentia. », *AE*, juillet 1695, p. 311, traduction par Marc Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 326.

différent que d'une quantité incomparablement petite à l'égard des deux autres. Il est intéressant de remarquer qu'il prend soin de se placer dans le cadre euclidien en rappelant ce que deux grandeurs homogènes sont comparables et souligne ainsi que sa définition n'est rien d'autre qu'une explicitation de notions admises par Archimède. La notion d'incomparable peut s'expliquer dans deux cadres différents : celui du calcul et celui de la géométrie : Leibniz établit leur correspondance. Dans l'article de 1689, il expliquait les incomparables par leur usage : ils peuvent être traités de la même façon que des « grandeurs aussi petites qu'on le juge suffisant » et que « leur erreur qu'elles produisent n'ait plus d'importance et même soit inférieure à une erreur donnée ». Il n'invoquait ni Euclide, ni Archimède. Pour démontrer par double raisonnement par l'absurde l'égalité de deux grandeurs homogènes, il est supposé qu'elles diffèrent d'une grandeur homogène non nulle. Ceci conduit à une absurdité : il n'y a nul besoin de statuer davantage sur cette grandeur puisque il est question de montrer que son existence est contradictoire. Son rôle est celui d'une fiction géométrique utile au raisonnement. Dans la géométrie euclidienne, un cercle et sa tangente sont des objets distincts, nul type de comparaison n'est possible. En revanche, le calcul leibnizien (mais aussi celui de Fermat et de Barrow) en faisant apparaître des termes qui expriment le défaut d'égalité entre le cercle et sa tangente, éclaire dans quel cadre ils peuvent être considérés égaux. Précisons, lorsque l'intérêt est de percevoir le caractère local et rectiligne d'un cercle : il est possible de négliger certains termes : puissances de « e » supérieures à deux chez Fermat ou Barrow ou différentielles d'ordre supérieur à deux chez Leibniz. Celui-ci précise qu'il s'agit aussi d'incomparables au sens géométrique puisque ces éléments d'ordre deux correspondent à des grandeurs hétérogènes à celles qui sont considérées comme égales : la tangente et son cercle sont égalées au détriment de l'angle corniculaire. Deuxièmement, Leibniz répond sur l'objection portant sur l'existence des différentielles. Il explique que ce qui a été dit pour les différentielles de premier ordre s'applique également aux différentielles d'ordre supérieur. Il argumente aussi en faisant appel au caractère variable des différentielles : « Ainsi chaque fois que les termes ne croissent pas uniformément, les accroissements ont alors à leur tour des différences, qui ne sont autres que les différences des différences »¹. Dans « Additio ad

¹ « Ainsi chaque fois que les termes ne croissent pas uniformément, les accroissements ont alors à leur tour des différences, qui ne sont autres que les différences des différences ».

hoc schediasma »¹, il ajoute que « S'il n'existait que des différences premières toutes les quantités croîtraient uniformément, autrement dit toutes les lignes seraient des droites ».

La réception du « principe de continuité » chez l'Hospital

En septembre 1686, Leibniz publie un article² dans la revue hollandaise *Nouvelles de la République des Lettres* dans lequel il critique les lois cartésiennes du mouvement fondées sur l'estimation de la force par la quantité de mouvement. À la fin de l'article, Leibniz défie les cartésiens de trouver la courbe, appelée isochrone, dans laquelle un corps pesant descend uniformément et approche également de l'horizon en temps égaux³. Cet article est immédiatement suivi d'une réponse de l'Abbé Catelan⁴. Cet échange polémique dure jusqu'en avril 1689. Malebranche, dont les conceptions mécaniques sont très cartésiennes, est concerné par le contenu de ces articles et ne cache pas à Leibniz ses réticences à adhérer à la conception leibnizienne de la force⁵.

En juillet 1687, Leibniz publie une lettre⁶ dans la revue hollandaise, à l'attention du philosophe français, dans laquelle il met en avant un « principe général utile à l'explication des loix de la nature » qu'il estime être un argument de taille pour convaincre Malebranche et les cartésiens de leur erreur. Il assure que ce principe tire « son origine de l'infini » et que, s'il est avant tout « absolument nécessaire en

¹ Un mois plus tard, en août 1695, Leibniz fournit des arguments supplémentaires contre les objections de Nieuwentijt, « Additio ad hoc schediasma », *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 335-337.

² « Démonstration courte d'une erreur considérable de M^r Descartes et de quelques autres touchant une loi de la nature selon laquelle ils soutiennent que Dieu conserve dans la matière la même quantité de mouvement, de quoi ils abusent même dans la mécanique », *Nouvelles de la République des Lettres*, art. II, septembre 1686, p. 996-1003.

³ « or cette variété de temps m'a fait penser à un joli problème, que je viens de résoudre présentement et que je veux marquer ici, afin que notre dispute donne quelque occasion à l'avancement de la Science : trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément et approche également de l'horizon en temps égaux. L'analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément ». Nous reviendrons sur ce problème à la fin de ce chapitre.

⁴ « Courte remarque de M. l'Abbé D.C. où l'on montre à M. G. Leibniz le paralogisme contenu dans l'objection précédente », à la suite de l'article de Leibniz.

⁵ Pour une étude de l'échange entre Malebranche et Leibniz concernant la polémique de l'estimation de la force par la quantité de mouvement : André Robinet, *Malebranche et Leibniz, Relations personnelles*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1955, chapitre IV ou « Mathématiques et réforme de la Physique », Schwartz, Claire, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, Presses universitaires Paris-Sorbonne, 2018, *op. cit.*

⁶ « Lettre de M. L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature pour la considération de la sagesse divine, pour servir de réplique à la réponse du R.P.D. Malebranche », *Nouvelles de la République des lettres*, juillet 1687, art. VIII, p. 744-753.

Géométrie », il « réussit encor dans la physique, par ce que la souveraine sagesse, qui est la source de toutes choses, agit en parfait géomètre »¹. Suit l'énoncé du principe :

Lorsque la difference de deux cas peut estre diminuée au dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver ainsi diminuée au dessous de toute grandeur donnée in quaesitis ou dans ce qui en resulte, ou pour parler plus familièrement. Lorsque les cas (ou ce qui est donné) s'approchent continuellement et se perdent enfin l'un dans l'autre, il faut que les suites ou evenemens (ou ce qui est demandé) le fassent aussi. Ce qui dépend encor d'un principe plus general, sçavoir : *Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata*².

Afin d'« entendre » l'énoncé du principe, Leibniz le fait suivre d'exemples qu'il emprunte à la géométrie et à la physique. Puis, grâce à la supposition que le repos peut être considéré comme « une vitesse infiniment petite », il contredit les lois cartésiennes du mouvement. Nous ne nous attardons pas ici à ce dernier développement argumentatif. En revanche, il est intéressant d'examiner la manière de présenter le premier exemple. Leibniz explique que « l'on sçait » que l'on peut traiter le cas d'une ellipse comme le cas d'une parabole car « la différence de l'ellipse et de la parabole peut devenir moindre qu'aucune différence donnée » : il suffit de supposer que l'un des foyers est suffisamment éloigné de l'autre pour que les rayons provenant de ce foyer puisse être considérés presque parallèles. Ces rayons différeront de rayons parallèles « aussi peu que l'on voudra ». Pourvu que la parabole soit considérée comme « une figure qui diffère de quelque Ellipse moins que d'aucune différence donnée », elle vérifiera alors les théorèmes géométriques de l'ellipse « en général ». Le principe stipule donc que les propriétés géométriques sont conservées par le passage continu d'un état à un autre. Pour Leibniz le fait de « pouvoir rendre une différence aussi petite que l'on veut » suppose que ce soit de manière continue. Il rappelle dans « *Cum prodiisset* » l'argument selon lequel son calcul différentiel est le plus propre à traiter les phénomènes de la nature en raison justement du principe de continuité qu'il énonce ainsi :

¹ Lettre de Leibniz à P. Bayle, pour Malebranche, N, *Œuvres*, t. XVIII, p. 453.

² *Ibid* : « Les données étant réglées, les choses recherchées sont aussi réglées ». Une autre façon de l'énoncer : « Si une différence dans les données peut être arbitrairement réduite, alors il en va de même pour les différences qui sont dépendantes dans le recherché », Breger commente que pour Leibniz lorsque le donné et le recherché sont continus alors toute fonction entre eux ne peut être que continue, Herbert Breger, « Le continu chez Leibniz » dans Salanskis/Sinaceur (dir.), *Le labyrinthe du continu*, Paris 1992, p. 77.

Assumo autem hoc postulatum : Proposito quocunque transitu continuo in aliquem terminum desinente, liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur. Exempli gr. si duo sint A et B, illud majus, hoc minus, et manente B, ponatur continue diminui A, donec aequalia siant A et B, licebit ratiocinatione communi complecti tam casus priores, quibus A erat major, quam casum ultimum quo evanescente differentia A et B sunt aequales¹.

Nous avons déjà rencontré ce type de raisonnement dans notre étude puisqu'en décembre 1684, dans son article intitulé « Additio ad schedam de dimensionibus figurarum inveniendis »², Leibniz justifiait en considérant que pour établir des résultats concernant une courbe, il était possible et légitime de la considérer comme un polygone d'une infinité de côtés :

(...) il s'ensuit que tout ce qu'on peut établir quant à un tel Polygone, qui soit ne dépende pas du nombre de côtés, soit devienne d'autant plus vrai qu'on prenne un nombre de côtés plus grand, de sorte que l'erreur finisse par être plus petite que toute erreur donnée, on peut également l'affirmer de la courbe.

Ce principe de raisonnement apparaît donc dans la pensée leibnizienne comme un argument essentiel et « nécessaire ». Leibniz choisit de présenter des exemples qui montrent la fécondité de son application. Plus loin dans son texte, il se sert de son principe pour justifier qu'une égalité puisse « estre considérée comme une inégalité infiniment petite », et qu'on puisse « faire approcher l'inégalité de l'égalité autant que l'on veut ».

Cette lettre décrivant le principe de continuité est bien évidemment connue de Malebranche, de Catelan et de leurs proches mais il n'est pas certain que l'Hospital, alors âgé de 26 ans s'y soit intéressé au moment même de sa publication. En revanche, l'Abbé Foucher (1644-1696), ami de Malebranche et de Leibniz – qu'il a connu lors de son séjour parisien – est au fait de la polémique des forces vives³. Foucher et Leibniz

¹*Historia et Origo Calculi differentialis* a G.G. Leibnitio concripta zur zweiten säcularfeier du Leibnizischer Geburtstapes aus den Handschriften der königlichen bibliothek zu Hannover heurasgegeben von Gerhardt, Hannover, 1846, p. 40.

² *Op. cit.*

³ Lettre de Foucher à Leibniz du 28 décembre 1686 : « J'ai vu dans le Journal de Holende vostre problème avec une réponse qu'on y a faite touchant le principe de la mécanique », *Lettres et opuscules inédits de*

échantent épistolairement de 1679 jusqu'à la mort du chanoine en avril 1696. Foucher sert souvent d'intermédiaire à Leibniz pour publier des articles au *Journal des Sçavants*¹. En particulier, nombre de leurs échanges sont publiés et sont par conséquent connus par la communauté savante.

Foucher ne s'accorde pas avec Leibniz sur la pertinence du principe de continuité, il refuse d'admettre que « la nature n'agit pas par saut » qui en est une reformulation². Dans la lettre du 31 décembre 1691³, Foucher lui explique que bien que Malebranche s'accorde avec Leibniz sur « la manière d'agir de la nature, par des changements infiniment petits et jamais par saut », il doute encore de ce principe car :

je crains que cela ne revienne à l'argument des pyrrhoniens, qui faisoient marcher la tortue aussi vite qu'Achille ; car toutes les grandeurs pouvant être divisées à l'infini, il n'y en a point de si petite dans laquelle on ne puisse concevoir une infinité de divisions que l'on n'épuisera jamais, d'où il suit que ces mouvements se doivent faire tout à coup, par rapport à ces indivisibles physiques et non mathématiques.

Pour Foucher, appliquer ce principe dans la nature est incompatible avec la divisibilité infinie des grandeurs car cela conduit à des paradoxes comme celui de Zénon. Dans sa lettre de réponse, qui sera publiée au *Journal des sçavants* le 2 juin 1692⁴, Leibniz répète que :

mon axiome que la nature n'agit jamais par saut, est d'un grand usage dans la physique. Il détruit les atomes, les petits repos, les globules du second élément, et les autres semblables chimères. Il rectifie les loix du mouvement. Ne craignez point, monsieur, la tortue que les pyrrhoniens faisoient aller aussi vite qu'Achille. Vous avez raison de dire que toutes les grandeurs peuvent être divisées à l'infini. Il n'y en a point de si petite, dans laquelle on ne puisse concevoir une infinité de divisions que l'on n'épuisera jamais. (...) et je crois que la nature peut réduire les corps à la petitesse que la géométrie peut considérer.

Leibniz, précédés d'une introduction par A. Foucher de Careil, Paris, Librairie philosophique de Ladrangé, 1854, p. 59.

¹ L'article sur la chaînette par exemple : « Votre problème de la chaine pendante de Galilée sera inséré dans le premier journal », lettre de Foucher à Leibniz du 31 décembre 1691, *op. cit.*, p. 84.

² « Rien ne se fait tout d'un coup, et c'est une de mes grandes maximes et des plus vérifiées, que la nature ne fait jamais de sauts. J'appelais cela la *Loi de la Continuité*, lorsque j'en parlais autrefois dans les Nouvelles de la République des lettres, et l'usage de cette loi est très considérable dans la physique (...) », *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Garnier-Flamarion, Paris, 1966, Préface, p. 40

³ Lettre de Foucher à Leibniz du 31 décembre 1691, *Lettres et opuscules inédits de Leibniz*, *op. cit.*, p. 84.

⁴ La lettre est non datée, *ibid*, p. 88. Elle est publiée dans le *Journal des Sçavants*, 2 juin 1692, p. 187.

Ainsi, Leibniz assure que son principe de continuité n'a rien à faire avec les conceptions atomistes mais ici il ne développe pas davantage. Dans la lettre du 12 mars 1693, publiée dans le *Journal des Sçavants* le 16 mars 1693¹, Foucher reste dans l'incompréhension du principe leibnizien, il ajoute qu'il ne comprend pas non plus comment le savant allemand puisse admettre « des divisibles et des indivisibles tout ensemble »². Pour lui, cela « redouble la difficulté » car :

en effet pour ajuster les parties du tems avec celles de l'espace que les mobiles parcourent, il faut que l'indivisibilité ou la divisibilité se rencontrent de part et d'autre³.

Dans sa réponse du 3 août 1693, également publiée dans le *Journal des Sçavants*⁴, Leibniz éclaircit et précise comment il faut comprendre les « indivisibles » pour que leur usage soit cohérent avec l'application de son principe :

Quant aux indivisibles, lorsqu'on entend par là les simples extrémités du tems ou de la ligne, on n'y sauroit concevoir de nouvelles extrémités, ni des parties actuelles ni potentielles. Ainsi les points ne sont ni gros ni petits, et il ne faut point de saut pour les passer.

il ajoute :

Cependant le continu, quoiqu'il ait partout de tels indivisibles, n'en est point composé (...)
Le Père Grégoire, de Saint-Vincent, a fort bien montré par le calcul même de la divisibilité à l'infini, l'endroit où Achille doit attraper la tortuë qui le devance, selon la proportion des vitesses. Ainsi la géométrie sert à dissiper ces difficultés apparentes⁵.

¹ Lettre de Foucher à Leibniz du 12 mars 1693, *ibid*, p. 100, *JS*, 16 mars 1693, p. 124-127.

² Il attribue cela à Leibniz car il vient de lire deux de ses anciens traités: *De motus abstracto*, de *Motu concreto*. Dans sa lettre de réponse du 3 août 1693, Leibniz lui explique que ces traités datent de vingt ans et que leur contenu est caduc : « il y a plusieurs endroits sur lesquels je crois être mieux instruit presentement ; et entre autres, je m'explique tout autrement aujourd'hui sur les indivisibles. C'était l'essai d'un jeune homme qui n'avoit pas encore approfondi les mathématiques », *ibid*, p. 119.

³ *Ibid*, p. 102.

⁴ *Ibid*, p. 119, *JS*, 3 août 1693, p. 355.

⁵ *Ibid*, p.120-121.

Le terme « indivisibles » est donc à comprendre dans un sens « idéal »¹ et non réel car sinon cela conduit à des paradoxes : la géométrie, qui est la science du continu « sert à dissiper ces difficultés apparentes ».

Ses explications ne suffisent pas à Foucher, mais il n'est pas le seul à ne pas être convaincu. Nous verrons dans le chapitre suivant que la conception leibnizienne du continu n'est pas toujours bien admise et peut être mécomprise. Leibniz continue à développer des arguments pour « rendre raison des lois de la nature ». Selon lui, la seule considération de la masse est insuffisante et il faut faire appel à la notion de force. Pour défendre cette idée, il publie un article au *Journal des Sçavants* en juin 1695² de teneur strictement métaphysique. Il est question, entre autres, de trouver les « principes d'une véritable unité »³. Foucher répond par une lettre qui est aussi publiée⁴.

Dans une lettre du 12 juillet 1695, Leibniz s'adresse à l'Hospital pour lui demander son avis sur les articles parus en juin et juillet : « Ce sont des mathématiciens qu'il faut demander pour juger, et non pas le vulgaire des philosophes »⁵. La réponse⁶ de l'Hospital témoigne de son intérêt pour les écrits du philosophe allemand⁷. Dans une lettre datée du 30 septembre 1695⁸, ce dernier lui demande de faire part à M. Le Président Cousin, directeur du *Journal des sçavans*, de son vœu d'insérer une réponse à la dernière lettre de Foucher. S'il le sollicite c'est parce que le chanoine est absent de Paris.

La réponse que lui adresse l'Hospital le 1^{er} décembre 1695⁹ est très intéressante à double titre. L'Hospital ne peut pas admettre que la force des corps soit à distinguer de la quantité de mouvement : « je vous avoue que j'ai beaucoup de difficulté de la dessus ». En revanche, il reconnaît à Leibniz l'utilité de son principe de continuité :

¹ Pour une explication philosophique sur ce sujet : Burbage Frank, Chouchan Nathalie, *Leibniz et l'infini*, Presses universitaires de France, 1993, p. 96-116.

² « Systeme nouveau de la nature et de la communication des substances, aussi bien de l'union entre l'âme & le corps. Par M.D.L. », publié en deux fois au *JS*, 27 juin et 4 juillet 1695, p. 294 et 301.

³ *Ibid*, p. 295.

⁴ Lettre de Foucher à Leibniz non datée, *Ibid*, p. 125, *JS*, 12 septembre 1695, p. 422.

⁵ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 12 juillet 1695, *op. cit.*, p. 441.

⁶ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 3 septembre 1695, *op. cit.*, p. 487.

⁷ « Vôtres hypothèse que Dieu en creant un esprit lui donne d'abord toutes les opérations et fonctions dont il est capable, et que les suites ne sont que des developpemens me paroist tres conforme à celle qu'on observe dans la nature », *ibid*, p. 489.

⁸ Lettre de l'Hospital à Leibniz, *op. cit.*, p. 503.

⁹ *Op. cit.*, p. 554.

Il y a encore un principe dont on vous est redevable, et dont je conviens avec vous, et qui est d'une utilité merveilleuse pour résoudre plusieurs questions tant physiques que mathématiques, c'est que la nature n'agit point *per saltum*, et qu'ainsi le repos peut être considéré comme un mouvement infiniment petit etc¹.

Or, la dernière phrase « c'est que la nature n'agit point *per saltum*, et qu'ainsi le repos peut être considéré comme un mouvement infiniment petit » est absente des derniers articles pour lesquels Leibniz sollicitait son avis. L'Hospital s'est donc enquis des lettres adressées à Foucher ou à l'intention de Malebranche et dans lesquelles il est question du principe de continuité. Cela montre que l'Hospital est instruit non seulement de la présentation leibnizienne du principe de continuité mais de comment Leibniz lie ce principe avec sa conception d'« indivisibles ».

3) L'Hospital et le groupe autour de Malebranche

Nous avons vu que les cours de calcul différentiel et intégral de Jean Bernoulli sont très tôt destinés exclusivement au Marquis de l'Hospital. Ce dernier fait preuve d'une disposition particulière pour l'apprentissage du nouveau calcul en articulant ses connaissances avec les nouvelles. Peu de documents existent qui témoignent de la relation entre le Marquis et les autres membres du cercle autour de Malebranche pendant la période 1692-1696. L'Hospital est souvent absent de Paris à cause d'occupations liées à l'héritage de l'oncle de son épouse et de ce fait il est peu disponible. Ses échanges épistolaires se restreignent quasiment à Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens. Cependant, il est notable que l'Hospital a maintenu tout au long de sa vie de très bons rapports avec Malebranche. Mais qu'en est-il pour les autres membres ?

L'Abbé de Catelan, l'opiniâtreté déçue d'un cartésien

Catelan est mêlé à une liste conséquente de polémiques dans lesquelles il veut défendre ses idées profondément cartésiennes. Il attaque Huygens contre la question du centre d'oscillation que ce dernier traite dans son célèbre ouvrage *Horologium Oscillatorium*² publié en 1673. Cette polémique avec Huygens dure environ un an, entre décembre 1681 et septembre 1682, elle est rendue publique par des publications dans

¹ *Ibid*, p. 555.

² Huygens, Christiaan, *Horologium oscillatorium*, OH, tome 9.

le *Journal des Sçavants*¹. Puis, Jean Bernoulli prend parti pour Huygens contre Catelan : cinq articles sont publiés dans le même journal². Enfin nous avons vu que Leibniz engage en septembre 1686 la controverse – dite « des forces vives » dans laquelle Catelan se charge de la défense des positions cartésiennes.

Au chapitre précédent nous avons évoqué la querelle qui s'était engagée entre Guillaume de l'Hospital et Catelan à la suite de la publication des deux traités de ce dernier³. Nous rappelons que ces deux traités sont publiés en 1691. Un compte rendu de la *Logistique* est publié au *Journal des Sçavants* le 4 février 1692. En janvier 1692, une lettre de l'Hospital est publiée dénonçant les erreurs de l'ouvrage intitulé *Principe de la science générale* (non retrouvé⁴). Catelan rectifie l'ouvrage à partir des objections de l'Hospital et publie une autre édition « maquillée » de la précédente en février 1692. De mars à décembre 1692 paraissent cinq articles au *Journal des Sçavants* portant sur d'autres erreurs de *Principe de la Science générale des lignes courbes*. L'Hospital, qui signe par « M. G. », pointe des erreurs commises dans la méthode des normales ou dans celle de la recherche des points d'inflexion. Catelan s'obstine à affaiblir les arguments de l'Hospital sans succès. Dans l'avant dernier article, le 15 décembre 1692, l'Hospital retrace les principales étapes de la controverse. Il soutient que la méthode de Catelan n'a rien de différent par rapport à celle de Barrow, seules les notations sont modifiées. Il ajoute que la méthode pour chercher le point de recourbement et la « manière de former le deuxième terme des puissances incommensurables⁵ » est due à Leibniz⁶, comme le montre d'après lui la publication « *Nova Methodus* ». Ni l'une ni l'autre de ces remarques ne sont parfaitement exactes puisque d'une part Catelan reformule à sa manière ce qu'il a pu apprendre des leçons de Barrow – ce qui ne doit pas être jugé nécessairement illégitime – et d'autre part, la présentation des résultats chez Leibniz diffère complètement de celle de Catelan, ne serait-ce par l'utilisation de la

¹ La bibliographie de Catelan a été établie par André Robinet en deux articles : « L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 11, N°4, Paris, 1958 et « L'Abbé de Catelan, documentation et informations », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, tome 13, n°2, 1960, p. 135-137.

Pour cette polémique on pourra également consulter Montucla, Jean-Etienne, *Histoire des Mathématiques*, 2 volumes, Jombert, Paris, 1754, p. 130-132.

² Du 21 avril 1684 à septembre 1684, « L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *op. cit.*, p. 295.

³ Cette controverse a été étudiée en grande partie par Pierre Costabel dans *Mathematica* p. 89-102.

⁴ « L'Abbé de Catelan, documentation et informations », *op. cit.*, p. 136.

⁵ C'est-à-dire de remplacer $(x + o)^{\frac{p}{q}}$ par $x^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

⁶ JS, 15 décembre 1692, p. 489.

caractéristique. L'Hospital force la critique pour dévaloriser davantage le travail de Catelan : non seulement celui-ci commet des erreurs mais il plagierait. Il n'apporterait donc rien de nouveau et il serait en outre incapable de résoudre les problèmes épineux qui lui ont été proposés :

Il n'a pas jugé à propos de toucher au problème que je lui avois proposé, et dont j'ai fait mettre la solution dans le 34-journal [courbe de Beaune]. Cependant M. Descartes dont il parle si souvent, & de qui il prétend pousser si loin les inventions, n'a pas dédaigné de s'y appliquer, & il dit mesme qu'il ne sçait point qu'aucun des plus celebres Mathématiciens de Paris & de Toulouse ausquels M. de Beaune l'avoit proposé, en eust trouvé la solution. Notre auteur en a usé de la mesme sorte à l'égard des deux problèmes que M. Leibniz lui a proposez dans les Actes de Leipsic [courbe isochrone] (...) Il devoit donc me proposer à son tour quelques problèmes, dont il ne publiast la solution que deux ou trois mois après comme j'ai fait, afin de voir si je n'en pourrois pas venir à bout pendant ce temps. Il devoit aussi chercher la rectification de la courbe de M. de Beaune, en supposant la quadrature de l'hyperbole ; ce que j'ai proposé en dernier lieu dans le journal du 1. Septembre, et dont je donnerai la solution dans la suite. Le Public tireroit au moins quelque utilité de cette dispute (...)¹

Dans ce passage, l'Hospital tire des conclusions de cette dispute. La mathématique que défend Catelan n'invente rien et elle n'est pas apte à résoudre les problèmes de plus en plus ardues. Alors qu'il le juge incapable, il défie Catelan de poser de nouveaux problèmes. L'Hospital décide d'arrêter la querelle ici, même s'il y aura un court article supplémentaire sans que rien de significatif ne soit ajouté. Le temps destiné à contredire les écrits de Catelan est passé : en décembre 1692, il est convaincu que le calcul leibnizien est celui qui apporte les plus de promesses de renouveau, il se destine donc à l'étudier. Cet épisode affaiblit la proximité entre Malebranche et Catelan même si l'abbé n'est définitivement isolé du groupe qu'à partir de 1694².

Varignon : établir une confiance

Pour les autres membres du groupe – mis à part Varignon avec qui il est plus réservé jusqu'en 1694³ – l'Hospital entretient des rapports de camaraderie. Le Père

¹ *Ibid*, p. 489.

² Robinet, André, «L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *op. cit.*, p. 293.

³ Varignon prend parti pour Catelan pour la défense de *Science générale des lignes courbes*. D'après Costabel, le groupe lui tient rigueur de ce « faux pas » jusqu'environ 1694, Bernoulli, Johann, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, band 2, mit Pierre Varignon, 1692-1702, Birkhäuser, Basel, 1988, p. 12-13.

Reyneau, par exemple, effectue un voyage pendant son temps réduit de vacances pour lui rendre visite à sa maison à Oucques pendant l'été 1692¹.

L'examen de la circulation des leçons de calcul différentiel et intégral est utile pour connaître la confiance de l'Hospital envers les membres du groupe. Le Marquis est jaloux de ses leçons bernoulliennes, il permet difficilement que des copies en soient faites. De ce fait elles ne circulent pas facilement, ni avant le départ de Jean Bernoulli ni les premières années qui suivent. J.H. Stähelin, le secrétaire de Jean Bernoulli effectue une copie pour son maître dans laquelle il commet quelques erreurs. Il est très possible que ce soit celle-ci qui ait été utilisée par Byzance et, comme nous l'avons vu, par Malebranche pour ses cahiers de calcul intégral et c'est également possible que Reyneau en fait une copie, ou peut-être est-ce la même que celle avec laquelle travaillaient Byzance et Malebranche. Lorsque Bernoulli fut de retour à Bâle, d'autres copies furent confectionnées. Jacques Bernoulli participa à leur diffusion en s'attribuant un certain mérite en tant que maître de Jean. Varignon apprit en 1694 d'un étranger en transit que le professeur Gautier de Genève aurait reçu le cours complet par l'intermédiaire des frères Bernoulli². Dans une lettre de janvier 1694, il prie Jean Bernoulli de lui faire retranscrire : « Mr. Stehelin les aura sans doute, & il pourra vous les prêter pour me les faire copier : je vous tiendray compte de tout ce qu'il vous aura couté ». Bernoulli assure ne pas disposer de copiste pour ce labeur bien que la raison probable est qu'il souhaite respecter les conditions du contrat établi avec le Marquis³. Varignon ne perd pas espoir et insiste à nouveau dans la lettre du 15 mars 1694⁴ :

Je vous rends très humbles graces de ce que vous voulez bien m'accorder de vos écrits. Quoy qu'à présent vous ne voyez personne qui m'en puisse faire de copie, j'espère neansmoins que dans la suite il s'en pourra trouver quelqu'un : payez le, dis-je s'il vous plaist, fort gracement affin de l'y engager, & je vous tiendray compte de tout.

¹ Lettre de Jean Bernoulli à Pierre Varignon le 24 septembre 1692, *ibid*, p. 24.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 20 janvier 1694, *ibid*, p. 55.

³ Le 26 janvier 1694, Bernoulli écrit une lettre à l'Hospital qui n'a pas été retrouvée. L'Hospital précise dans sa réponse du 17 mars qu'il ne souhaite pas qu'il envoie des copies des leçons à d'autres, il cite en premier Varignon.

⁴ *Ibid*, p. 61-62.

Si l'Hospital exprime une certaine méfiance envers Varignon ce n'est pas le cas des autres membres du groupe. Reyneau le considère comme un maître à consulter¹, et Malebranche lui fait confiance pour examiner les anciens ouvrages de Prestet. De façon générale, en raison de sa position académique depuis novembre 1688, les membres du groupe et Jean Bernoulli s'imposent des relations cordiales avec lui². En outre, Jean Bernoulli ne cesse de rapprocher Varignon et l'Hospital³. La publication de son traité s'approchant, l'Hospital devient moins prudent : à partir de 1695, Varignon est devenu un homme de confiance aux yeux de l'Hospital⁴.

Malebranche et l'Hospital, une amitié collaboratrice

Malebranche connaît l'Hospital de longue date par la fréquentation de milieux savants parisiens, notamment celui du Duc de Roannez. Il apprécie ses talents de mathématicien et le sollicite notamment pour conseiller Prestet. C'est ensemble qu'ils entreprennent de s'initier au nouveau calcul grâce aux cours de Jean Bernoulli pendant l'automne 1691. Nous savons que l'Hospital bénéficie d'un enseignement plus riche de la part de Bernoulli, que ce soit par les cours à Oucques ou par leur échange épistolaire. Doté de connaissances supplémentaires, l'Hospital n'hésite pas à en transmettre certaines à son ami Malebranche. Les *Cahiers de Calcul intégral* témoignent de cette période. On a vu que les cahiers II et III – qui correspondent étroitement à la section « *Quadratura Spatorum* » de Bernoulli – contiennent effectivement des études rédigées entre 1692 et 1693 en collaboration avec le Marquis qui prolongent les leçons de Bernoulli. Suivent ensuite plusieurs résolutions traitées conjointement par les deux amis. Il s'agit de problèmes dont l'Hospital a pris connaissance pendant l'été 1692 en compagnie de Jean Bernoulli dans sa maison à Oucques mais surtout plus tard par leur correspondance⁵ comme le problème de la « tractoria » ou « courbe des chaloupes » et également la rectification de la logarithmique qui l'occupe dès 1692¹.

¹ *Ibid*, Introduction, p. 13.

² *Ibid*, Introduction, p. 13.

³ *Ibid*, Introduction, p. 13.

⁴ *Ibid*, p. 13. Voir aussi *Mathematica* p. 310-311.

⁵ FR 24237, Quadrature du folium de Descartes (fol. 78R et 80R), « Trouver la nature de la courbe dont les différences secondes des abscisses sont proportionnelles aux 1^{eres} diff. des appliquées », « Chercher la nature d'une courbe dont on sait que les 2 différences des abscisses sont proportionnelles aux cubes des différences 1^{ers} des appliquées » (fol. 79R), « Trouver l'espace renfermé par la courbe dont l'équation est $\frac{2xdx}{aa}\sqrt{x^4 - a^4}$ » (fol. 85R), « Trouver la longueur de la logarithmique » (fol. 92R), « Figure pour l'inverse des tangentes etc. » dans lequel il traite chacun des cas d'équation différentielle dans lequel soit la

En 1694², Malebranche sollicite Reyneau pour élaborer un ouvrage élémentaire sur l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie en reprenant éventuellement les écrits de Prestet tandis que l'Hospital prépare sa publication pour « ses sections coniques et le calcul différentiel avec l'application au problème de géométrie ». Malebranche fait donc confiance à l'Hospital pour rédiger des écrits d'une mathématique plus élevée que celle dont doit s'occuper Reyneau. Cependant, l'Hospital est le plus à même de juger ce qui est essentiel : il abandonne la publication du traité sur les coniques et écrit un tout autre traité de calcul différentiel différent de celui qui était prévu³.

L'Hospital a donc une étroite relation avec les membres du groupe autour de Malebranche, il y est considéré comme un mathématicien de valeur. Alors que les centres d'intérêt mathématiques du groupe avant 1692 étaient diversifiés⁴ et ne se réduisaient pas uniquement au nouveau calcul, l'Hospital, par son enthousiasme, convainc qu'il est nécessaire de se focaliser dans son étude quasi exclusive. Nous verrons dans le chapitre 6 comment ce groupe s'implante à l'Académie des Sciences.

4) La première interprétation varignonienne du calcul leibnizien, une articulation avec un héritage barrownien

Nous avons brièvement évoqué ce personnage plus haut. Pierre Varignon⁵ est né à Caen en 1654 dans un milieu modeste, il parvient cependant à suivre une instruction au collège des Jésuites. À cette époque il découvre Euclide puis Descartes.

tangente, soit la perpendiculaire (normale), soit la soustangente, soit la sousperpendiculaire est constante (fol. 86R).

¹ Lettre de l'Hospital à Huygens du 26 juillet 1692, *OH*, t.X, p. 305.

² Lettre de Malebranche à Reyneau le 30 décembre 1694, Malebranche, Nicolas, *Œuvres*, t. XIX, p. 619.

³ Voir chapitre suivant.

⁴ Le fonds oratorien montre que les sujets de recherche ne se limitaient pas aux méthodes d'invention. Le travail de Prestet en algèbre et combinatoire en est un exemple notoire. On pourra consulter les reproductions de manuscrits du groupe traitant de résolution d'équations, géométrie pratique, calcul approché de π , dans *Mathematica*, p. 109- 130.

⁵ Peu d'études ont été consacrées au personnage de Varignon. On peut citer Fleckenstein, Joachim Otto, « Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus », Archives internationales d'histoire des sciences, n°5, octobre 1941, Costabel, Pierre, « Pierre Varignon (1654-1722) et la diffusion du calcul différentiel et intégral », Les conférences du Palais de la découverte, série D, Editions du Palais de la découverte, Paris, 1966, Peiffer, Jeanne, « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Leibniz'auseinandersetzung mit vorgängern und zeitgenossen, Studia Leibnitiana*, supplementa XXVIII, p. 244-266. On pourra lire également avec intérêt la préface de chacun des tomes de la correspondance entre Varignon et Jean Bernoulli.

En 1686, il se rend à Paris¹ où il côtoie les milieux savants, notamment celui de Malebranche. Il estime suffisamment ce dernier pour le consulter à propos de son écrit : *Projet d'une nouvelle Méchanique*, ouvrage qu'il dédiera à l'Académie des Sciences² lors de sa publication en 1687. Varignon est un géomètre talentueux mais il montre avant tout son intérêt pour la mécanique. Les mérites de son *Projet* sont suffisamment appréciés³ pour qu'il soit reconnu par la communauté savante. Or, après le départ de Huygens en Hollande et la mort de Roberval, l'Académie des Sciences vit une pénurie en savants de valeur qui pourraient les remplacer. Dans ces circonstances, elle voit en Varignon un choix de qualité. Il est nommé académicien géomètre en 1688 et la même année il devient le premier titulaire de la chaire de Mathématiques au Collège Mazarin. Cette double position institutionnelle lui confère une notoriété que les proches de Malebranche ne négligent pas en s'adressant à lui. Cependant, nous avons évoqué la réticence, notamment chez l'Hospital, à lui accorder sa pleine confiance jusque vers 1695⁴. Varignon ne contribue donc pas directement au projet, débuté en 1690, dans lequel le groupe autour de Malebranche essaie de combler le retard mathématique en France⁵ en s'appropriant les nouvelles méthodes infinitistes, notamment celles de Wallis et de Barrow. Cependant, non seulement il hérite des méthodes des indivisibles pour obtenir les quadratures⁶ mais il étudie de façon autonome les *Lectiones geometricae* d'Isaac Barrow.

Les mémoires de quadratures

En 1692, Varignon lit à l'Académie des mémoires dans lesquels il s'inspire de passages des *Lectiones geometricae* pour démontrer des théorèmes géométriques ou obtenir des propositions mécaniques. Deux mémoires portent sur la manière d'obtenir

¹ Varignon se lie avec l'Abbé de Saint-Pierre à l'Université de Caen. Ce dernier le loge au Faubourg Saint Jacques à Paris.

² *Projet d'une nouvelle mécanique*, Chez Boudot, Paris, 1687. L'Épître commence par : « Messieurs de l'Académie des Sciences... »

³ Voir par exemple dans Basnage de Beauval, *Histoire des ouvrages des sçavants*, cité dans Peiffer, Jeanne, « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *op. cit.*, p. 246-247.

⁴ Jeanne Peiffer suppose que la réserve vis-à-vis de Varignon pourrait s'expliquer en raison de la crainte de l'Hospital que par sa position d'académicien Varignon profite des travaux du groupe constitué essentiellement d'enseignants (*op. cit.*, p. 253). Cependant la méfiance envers Varignon s'étend au-delà de 1693, date à laquelle l'Hospital est nommé à l'Académie.

⁵ Voir notre chapitre 3.

⁶ Jeanne Peiffer cite Cavalieri, Torricelli, Roberval et Pascal mais souligne ses connaissances de Pascal et Fermat, *op. cit.*, p. 248. Pour la méthode de Cavalieri, voir la lettre à Jean Bernoulli du 19 juillet 1693 dans laquelle Varignon commet une erreur, « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *op. cit.*, p. 42.

des quadratures de paraboloïdes et d'hyperboloïdes : « Quadrature universelle des paraboles de tous les genres imaginables appliquant la logistique infiniment générale qui vient de paraître sur la méthode de Jacobus Gregorius » le samedi 29 mars et « De la quadrature universelle de tous les genres et de toutes les espèces de Paraboles imaginables », le mercredi 9 avril¹. Dans ces mémoires, la notation leibnizienne de l'intégrale n'est pas présente, contrairement aux écrits du cercle autour de Malebranche de la même époque². Il reprend la démonstration du dixième paragraphe de la leçon XI des *Lectiones Geometricae*³ qu'il applique à une parabole « générale » courbe ABC et qu'il décrit par l'équation : $y^p = d^n x^{p-n}$ (où $AB = y, BC = x$ et p, d et q sont des entiers). Pour calculer la valeur de la sous-tangente, Varignon annonce qu'il a utilisé la méthode que l'Abbé Catelan propose dans son ouvrage *Logistique générale*, qui est une méthode raccourcie de celle de Barrow⁴. Or, nous avons vu dans les manuscrits de l'Hospital que celui-ci possédait une méthode pour trouver les tangentes des paraboles (et hyperboles). Varignon n'est donc pas au courant. Le Marquis s'en sert notamment dans sa démonstration de « l'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur »⁵. Rappelons que pour l'Hospital, les résultats de quadratures ne sont qu'une étape pour la démonstration des résultats wallisiens alors qu'ils sont le sujet principal dans le mémoire de Varignon. Il est donc vraisemblable qu'en 1692, celui-ci n'est pas nécessairement au fait des recherches privées du cercle autour de Malebranche.

Pour trouver la quadrature « universelle » de la parabole, Varignon applique donc la méthode décrite dans la leçon XI de Barrow. Rappelons que cette méthode implique une attention importante aux figures puisqu'il s'agit de ramener le problème

¹ « Quadrature universelle des paraboles de tous les genres imaginables appliquant la logistique infiniment générale qui vient de paraître sur la méthode de Jacobus Gregorius », samedi 29 mars 1692, *PVARS*, t. 13, fol. 86V-88R et « De la quadrature universelle de tous les genres et de toutes les espèces de Paraboles imaginables », mercredi 9 avril 1692, *PVARS*, t. 13, 89R-91R. La démonstration est reprise de la leçon XI, proposition X des *LG* de Barrow. Si Varignon se réfère à Gregory dans le titre c'est que Barrow affirme détenir ce résultat de l'écossais : « Hoc perutibile Theorema doctissimo Viro D. Gregorio Aberdonensi debetur, cui sequentia subnectimus », Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae*, *op. cit.*, p. 89.

² Voir dans notre chapitre 3, le paragraphe 3.3 : « L'Arithmétique des infinis » dans le groupe autour de Malebranche ».

³ Comme nous allons le voir, Jeanne Peiffer a raison de souligner que Varignon suit « fidèlement » le texte de Barrow; *op. cit.*, p. 251.

⁴ Voir chapitre 3.

⁵ Voir chapitre précédent.

de la quadrature d'une figure à celle d'une autre¹. Varignon divise son diamètre AB aux points F en une « infinité de petits a tous égaux ». Il a introduit auparavant les notations a et e dans le but de calculer la sous-tangente. Dans la recherche de la quadrature, elles ne sont utiles que pour nommer chacune des divisions égales et à étiqueter les segments tous égaux de la figure. Pour chaque point G de la courbe ABC correspondant à l'une de ces divisions, GT est la tangente qui coupe le segment BC en O . GH est parallèle à AB , $OH = FE$. Par construction :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BT}{AB} \text{ et } \frac{FE}{FB} = \frac{HO}{HG}$$

« Or à cause que les arcs AG, GG, C [sic] sont (hyp) si petits qui se peuvent confondre avec les tangentes »², les triangles AFG et ABT et les triangles GLG et GHO « peuvent être regardés comme semblables », ce qui lui permet d'écrire que :

$$\frac{BT}{AB} = \frac{FG}{AF}$$

et

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FG \text{ ou } BH}{AF}$$

Il en déduit que les parallélogrammes ADF et ABH sont « égaux ». Le raisonnement est analogue pour les autres points G donc « tous les parallélogrammes EFF sont égaux à tous les parallélogrammes GHH qui leur répondent » donc toute « la figure $DABED$ est égale à l'espace parabolique $AGCBA$ »³.

¹ Voir chapitre 2 notre paragraphe sur les méthodes de transmutation.

² *Ibid*, fol. 87V. Au même passage, Barrow écrit « estque jam triangulum GLH simile triangulo TDH (na mob divisionem istam indefinitiam auculus GH rectae instar ceneri potest, eatenus tangenti HT coincidens), *Lectiones geometricae, op. cit.*, p.88.

³ *Ibid*, fol. 87V.

distances parcourues sont comme les carrés du temps. Cependant, sa démonstration procédant par « induction », Varignon se propose de fournir une démonstration « générale ». Comme nous allons le voir, il s'inspire encore ici des *Lectiones Geometricae* de Barrow. Dans sa première leçon, Barrow s'intéresse à la notion de temps dont il éclaire sa relation avec le mouvement. Le temps s'écoulant également¹ [*tempus alveo semper aequali*], il peut être conçu comme uniformément étendu. C'est une quantité mesurable et « nous mesurons non seulement le mouvement par le temps mais le temps par le mouvement »². De ce fait, chacune de ses parties correspond proportionnellement aux parties respectives d'un « mouvement égal [*aequabilis motûs*] » – c'est-à-dire d'un mouvement uniforme –, ou à des parties d'espaces parcourus par un mouvement égal³. Cette remarque conduit Barrow à choisir la plus apte des « représentations » du temps. Le temps consistant en parties semblables entre elles, il est légitime [*rationi consentaneum*] de choisir pour le représenter une grandeur d'une seule dimension. Barrow souligne l'analogie du temps et de la ligne : le temps peut être conçu comme la trace d'un moment à la manière d'un flux continu [*ex unius momenti quasi continuo fluxu*] et divisible par l'instant et de la même manière la ligne peut être conçue comme « la trace d'un point en mouvement, étant d'une certaine manière divisible par un point »⁴.

Barrow explique ensuite que pour évaluer le mouvement, la notion de « force »⁵ est nécessaire car c'est elle qui permet d'expliquer qu'un corps acquiert plus ou moins de vitesse. Il explique que la force peut être conçue comme une grandeur divisible en « parties absolument minimales [*pars absolutè minima*] » qu'il est courant d'appeler « degré de vitesse »⁶. Chacune d'elles peut être également représentée par une ligne. Ainsi, à chaque instant, un corps possède un degré de vitesse mais – Barrow insiste bien sur ce point – qui ne dépend pas du temps précédent⁷. Il précise que toute quantité de vitesse ne peut être connue qu'avec la connaissance conjointe de l'espace

¹ *Ibid*, p. 4.

² « nec ideò temporis quantitatem è motu, sed motûs quantitatem à tempore determinari », *Lectiones geometricae, op. cit.*, p. 6.

³ « Porro, quia tempus, ut ostensum, est quantum uniformiter extensum, cujus omnes partes aequabilis motûs partibus respectivis, seu spatiorum aequabili potu peractorum partibus proportione respondent », *ibid*, p. 6.

⁴ « linea puncti promoti censetur vestigium, a puncto habens quod aliquatenus divisibilis sit. », *ibid*, p. 6.

⁵ Barrow utilise les termes de « vis » ou « *potentia motiva* ».

⁶ « pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas ; », *ibid*, p. 7.

⁷ « Ità quidem in se generatim & absolutà spectata vis ista tempus non implicat (...) », *ibid*, p.7

et du temps de parcours. Ainsi, pour calculer une quantité de vitesse, on procède comme lorsqu'on détermine une superficie, c'est-à-dire grâce à la connaissance de ses dimensions¹. Ces indications montrent comment Barrow légitime une géométrisation des grandeurs physiques.

Pour démontrer le résultat galiléen de la chute des corps, Varignon considère également une ligne AB qui « exprime » le temps. Comme les vitesses sont en proportion avec le temps de chute, chaque vitesse peut être « exprimée » par une ligne, par exemple DE exprime la vitesse du corps acquise depuis A jusqu'à E , ou FG , parallèle à DE , exprime la vitesse du corps depuis A jusqu'à F , et ainsi pour chacun des points de la ligne AB . Ainsi, la « somme » des vitesses est « exprimée » par la « somme » des parallèles : le triangle AMN « exprime » la somme des vitesses acquises depuis A jusqu'à M . En rappelant que ces lignes sont « supposez indefiniment prez les unes des autres », il affirme qu'« il est évident que leurs sommes sont comme les surfaces des triangles ABC , AMN », c'est-à-dire comme le carré de AB au carré de AM (puisque ces deux triangles sont semblables).

Les ressemblances avec Barrow sont manifestes. Après avoir assigné à chaque instant une ligne représentant le degré de vitesse, Barrow affirme qu'étant donné que les instants de temps sont égaux entre eux, la raison des longueurs des espaces ne dépend donc que de la raison des vitesses et non du temps. Ainsi, il justifie que l'agrégat des degrés de vitesses forme une quantité dont chacune des parties sera exactement proportionnelle aux parties respectives de l'espace dans les mêmes instants, et ainsi la quantité qui représente les degrés de vitesses représente aussi l'espace parcouru de manière exacte [*exactè referat*]².

¹ « Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo discernuntur, quo ex superficiei (...), *ibid*, p. 8.

² « Quum enim temporis instantia prorsus aequalia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, (...) aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivae, hoc est iisdem temporibus respondententes particulae, justè proportionantur, adeoque quatum è gradibus istis constans repraesentans magnitudo spatium quoque decursum repraesentare possit, quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractae proportionem inter se servant, exactè referat », *ibid*, p. 9.

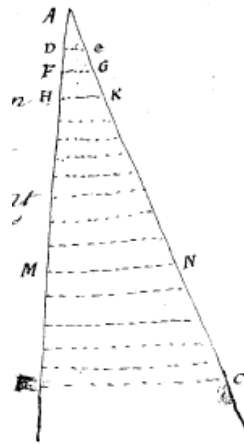


fig. 76

Dans la démonstration du résultat galiléen, Barrow représente le temps par la ligne AE , à chaque instant C correspond un degré de vitesse représenté par une ligne CY parallèle à EY . Les triangles ACY représentent les espaces parcourus depuis le début du mouvement. Ainsi, la raison de ces triangles est dans le même rapport que les vitesses. Il en déduit le résultat galiléen.

Il est donc possible de rapprocher l'écrit de Varignon à celui de Barrow. Pour justifier l'identification de la somme des lignes de degrés de vitesse et les espaces parcourus il invoque le principe « les effets sont proportionnels aux causes »¹.

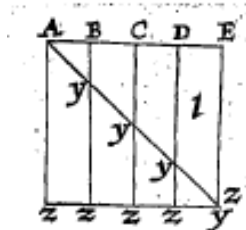


fig. 77

4.2) La première confrontation au calcul de Leibniz et les premiers mémoires

De manière autonome Varignon est amené à aborder le calcul différentiel. En effet, nous rappelons que certaines lettres envoyées à Jean Bernoulli² nous apprennent non seulement qu'il n'a pas été invité à suivre les cours de calcul différentiel de Jean Bernoulli à la fin 1691, mais que les années suivantes il ne parvient pas non plus à accéder aux manuscrits de ces leçons, dont il n'aura plus besoin après

¹ Christophe Schmit explique que l'originalité de Varignon consiste à ne pas identifier « une distance à l'aire d'un triangle » mais qu'il « introduit l'espace par le biais de sa « Règle fondamentale » comme l'effet d'une somme de « forces partielles », « Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17^e et 18^e siècles », *Early Science and medicine*, Brill, Leiden, 2014, p. 505-548, p. 542.

² Voir le chapitre précédent.

la publication en 1696 de *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

Leur correspondance nous est très utile pour connaître ses premières confrontations avec le calcul leibnizien. Dans la lettre datée du 21 janvier 1693, Varignon explique au savant suisse qu'il vient de « déterrer » le calcul différentiel, qu'il juge plus « expéditif que l'ordinaire », cependant, il ne saisit pas encore comment s'appliquent les « différentielles de différentielles », c'est la raison pour laquelle il lui demande de lui proposer des solutions de problèmes dans lesquelles elles interviennent¹. Dans sa réponse, Bernoulli fournit les applications de celles-ci pour la recherche de courbes caustiques. Tout en le remerciant² Varignon lui explique qu'entre-temps son apprentissage l'a conduit à trouver en termes différentiels la formule du rayon de courbure lorsque dx est constant mais qu'il préfère le solliciter pour une vérification : « Voyez si cette solution est la votre »³.

Peu aidé dans l'accès à ces nouvelles connaissances mais avec une ferme volonté de s'initier à la nouvelle analyse, il cherche à se procurer de façon systématique les articles de Leibniz et des Bernoulli parus dans les *Acta Eruditorum*⁴ puisqu'ils constituent la seule littérature disponible pour lui : si en juin 1693, Varignon ne possède que les numéros allant jusqu'en septembre 1688, il dispose en juillet 1694 de tous ceux allant jusqu'à fin 1693.

En janvier 1694, Varignon lit un mémoire intitulé « Démonstration générale de l'arithmétique des infinis ou de la géométrie des indivisibles »⁵, où il utilise pour la première fois le calcul leibnizien. Dans ce mémoire il obtient un théorème concernant les quadratures des paraboles (comme dans le mémoire de 1692) mais aussi de toutes les hyperboles. Au début de son texte, il affirme :

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 21 janvier 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 29.

² Comme nous l'apprend la lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 29 juin 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. p. 35 : « Je vous remercie très humblement de votre calcul des caustiques : je voy bien presentement l'usage que vous faites des differentielles de tous les genres ». La lettre de Bernoulli n'est pas conservée.

³ Lettre du 29 juin 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 3, p. 35.

⁴ Lettre de Varignon du 29 juin 1693, *ibid.*, p. 35 : Varignon affirme posséder les numéros jusqu'en septembre 1688. Lettre du 28 juillet 1694, *ibid.*, p. 67 : Bernoulli lui a envoyé 63 exemplaires qui correspondraient aux numéros d'octobre 1688 à fin 1693.

⁵ « Démonstration générale de l'arithmétique des infinis ou de la géométrie des indivisibles », Pochette de séance du 2 janvier 1694, 2 folios numérotés de 1 à 4.

Pour démontrer ce résultat, il note $AB = x, AC = a, BB = dx, BD = y,$ et $EC = b$. Comme $\frac{a^m}{x^m} = \frac{b^n}{y^n}$, $ba^{\frac{-m}{n}} x^{\frac{m}{n}} = y$. Il indique qu'une « lettre », un S majuscule, signifiera « somme » dans la suite de sa démonstration. Il ne s'agit pas du symbole intégral.

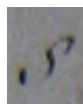


fig. 79

Varignon exprime l'espace $DBBD$ par ydx , de sorte que $S DBBD =$ figure $ABDA$. C'est uniquement ici¹ qu'il fait appel au « calcul de M^r Leibnitz – Act Erud. Oct 1684 »² – puisqu'il utilise la formule classique d'intégration d'une puissance. Il écrit :

$$x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{d(nx^{\frac{m}{n}})}{m+n}$$

donc :

$$S \frac{d(nx^{\frac{m}{n}})}{m+n} = n \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}}$$

puis :

$$nba^{\frac{-m}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = S ba^{\frac{-m}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{nxy}{m+n} = ABDA$$

De ce théorème il déduit deux corollaires dans lesquels, entre autres, il fournit « la valeur générale de toutes les sommes directes » (corollaire 1) et celle des sommes réciproques (corollaire 2³). Une partie du texte des corollaires est consacrée à préciser l'interprétation géométrique de la valeur de ces sommes selon différents cas⁴. En définitive, mise à part l'utilisation du calcul leibnizien pour l'expression de l'espace différentiel et de son intégrale, Varignon procède par le même type de méthode infinitiste que les précédents mémoires, notamment ceux de mars et avril 1692.

¹ Pour Jeanne Peiffer, ce mémoire n'est essentiellement qu'une traduction de son mémoire de 1692 à l'aide des notations leibniziennes, *op. cit.*, p. 254.

² C'est-à-dire l'article « *Nova methodus* ».

³ $\frac{nxy}{m+n}$ pour la valeur générale de toutes les sommes directes et $\frac{nxy}{n-q}$ pour la valeur générale de toutes les sommes réciproques avec $q = -m$.

⁴ Selon le signe de m et de n et selon l'ordre des deux nombres. Lorsque m et n sont positifs, $m > n$ et $m = n$, il interprète la valeur générale de la somme comme un espace parabolique ou un espace triangulaire, Lorsque m et n sont négatifs, il interprète la valeur générale de la somme réciproque comme un espace asymptotique, certains sont qualifiés de « plus qu'infinis ».

Notamment, la considération de la figure, plus que le calcul, est essentielle à sa démonstration.

Cependant, quelques mois plus tard, le 27 novembre 1694, son assimilation du calcul leibnizien est suffisamment sûre pour qu'il puisse lire un mémoire dans lequel il démontre à l'aide uniquement du calcul différentiel les six formules du rayon de la développée¹. Il fait part à Jean Bernoulli de l'enthousiasme que lui procurent les progrès de ses connaissances du nouveau calcul :

(...) je ne sçaurois du tout perdre de vue le charmant & merveilleux calcul differentiel, de sorte qu'il se passe peu de jours que je n'en fasse quelque chose. Devinez si avec cet invincible panchant j'ay pu lire sans transport le mois de Juin des actes de Leipsic cette années, qu'on me prêta il y a quelques jours. Que de pénétration & de profondeur dans tout ce que Mr. Votre frère y dit de la courbure de la lame elastique².

Sur sa lancée, le samedi 18 juin 1695 la lecture du mémoire « Rectification et quadrature de l'évolute du cercle décrite à la manière de Monsieur Hugens » prouve encore sa maîtrise du calcul différentiel pour résoudre des problèmes géométriques. Le mémoire du 30 juillet 1695 portant sur une nouvelle manière de déterminer la courbe isochrone témoigne par ailleurs de sa capacité à l'appliquer à la résolution de problèmes physico-mathématiques³. Dans les premières lignes de ce mémoire, Varignon rappelle que d'autres démonstrations ont été fournies mais que la sienne est une « manière très simple ». Elle découle d'une règle sur la chute des corps dont il avait fait part à l'Académie en juin 1693 par la lecture d'un mémoire⁴. Cette règle lui permet de géométriser le problème physique et d'énoncer que :

¹ « Démonstration de six manières différentes de trouver les rayons des développées, lors même que les ordonnées des courbes qu'elles engendrent, concourent en quelque point que ce soit ; & par conséquent aussi pour les cas où elles sont parallèles entr-elles », Pochette de séance du 27 novembre 1694, Archives de l'ARS. Le 11 décembre 1694, il lit un mémoire sur la manière de trouver les tangentes aux spirales dans lequel il utilise également le calcul différentiel : « Manière générale de trouver les tangentes des spirales de tous les genres, et de tant de révolutions qu'on voudra, avec leurs quadratures indéfinies », Pochette de séance du 11 décembre 1694.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 29 décembre 1694, *op. cit.*, p. 76.

³ « Courbe isochrone lelong de laquelle les corps descendent d'une vitesse uniforme par rapport à l'horizon, en sorte qu'ils s'en approchent également en temps égaux », 30 juillet 1695, *PVARS*, t. 14, fol. 135V-136R.

⁴ « Application de la règle générale des mouvemens accélerez à toutes les hypotheses possibles d'accélération ordonnées dans la chute des corps, *Mémoires de Mathématiques et de physique*, 1693, p. 107-115. Pour un commentaire de cette règle générale, on pourra consulter l'article précédemment cité de Christophe Schmit, p. 533-538.

Le problème se réduit à trouver une courbe $AGBC$ dont les cubes des ordonnées BK, CL , etc soient entre-eux comme les quarrés des tangentes BF, CH , etc qui leur répondent ; c'est-à-dire d'une courbe telle que l'on ait partout : $\frac{BK^3}{CL^3} = \frac{BF^2}{CH^2}$ ¹

À ce stade nul besoin pour le lecteur de prêter attention à la figure. En effet, Varignon résout brièvement le problème de l'isochrone par l'usage exclusif du calcul leibnizien et trouve que la solution est la parabole semi-cubique. Il fait part de cet épisode à Jean Bernoulli dans deux lettres².

Le 12 novembre 1695, il lit un mémoire intitulé « Du déroulement des spirales de tous les genres, ou l'on fait voir qu'elles se déroulent toutes en paraboles de degré seulement plus haut que le leur, avec une méthode générale pour tous les déroulements »³. Dans les premières lignes, il rappelle que Pascal a démontré le résultat pour la spirale d'Archimède⁴ mais que sa démonstration est « si longue qu'il n'est pas aisé de soutenir tout ce qu'il faut d'attention pour l'entendre ». Pascal dédie cette démonstration à son ami Arnauld. Il choisit en effet une démonstration, longue de six pages, à la « manière des anciens » au détriment d'autres méthodes :

Je voulus chercher comme si personne n'y avoit pensé ; & sans m'arrester ny aux methodes des mouvemens, n'y à celles des indivisibles ; mais en suivant celle des anciens, afin que la chose pût estre desormais ferme et sans dispute⁵.

Fermat est également cité pour sa démonstration de la rectification pour toute spirale « à l'infini », mais celle-ci est aussi critiquée en raison de sa « longueur » et son « embarras ». Varignon suppose que c'est en raison de cette présentation

¹ *Op. cit.*, 135V.

² Lettres de Varignon à Jean Bernoulli du 15 août 1695 et du 24 mai 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 90 et 97-98. Dans la deuxième de ces lettres, Varignon résume sa communication à l'Académie. Il lui explique que bien que la résolution de ce problème a été fournie depuis longtemps et de diverses manières, sa démonstration a cela d'original qu'elle résulte de sa « règle pour la chute des corps ».

³ PVARs, 12 novembre 1695, t. 14, fol. 192R-193R.

⁴ *Egalité des lignes spirales & parabolique, lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur A.D.D.S dans Lettres de A. Dettonville, op. cit.*

⁵ *Ibid*, p. 2.

Encore en 1696, alors qu'il est capable de résoudre des problèmes difficiles (comme celui des chaloupes¹) en utilisant la courbe logarithmique, il n'est pas au courant de résultats fondamentaux du nouveau calcul, assimilés en revanche par le cercle autour de Malebranche depuis la période 1692-1693, comme en témoignent certains passages des *Cahiers de calcul intégral* de Malebranche. Dans une lettre du 18 juin 1696 adressée à Jean Bernoulli, il demande des précisions sur le lien entre la rectification de la logarithmique et la quadrature d'un espace hyperbolique :

Je sçavois bien que $\frac{dy\sqrt{a^2+y^2}}{y}$ est la différentielle de la courbe logarithmique ; mais je ne voyois pas, et je ne voy pas encore que $\frac{dy\sqrt{a^2+y^2}}{y}$ soit la différentielle d'un espace hyperbolique. Je voy bien qu'en prenant dans l'hyperbole équilatère BfF, le demi-axe AB = a, sur l'axe conjugué ses abscisses AE = y, l'on aura $dy\sqrt{a^2+y^2} = EFfe$, & que son intégrale se réduira à la quadrature de l'espace ABFE. Mais je ne voy pas de même que $\frac{dy\sqrt{a^2+y^2}}{y} = \frac{EFfe}{AE}$ soit l'élément d'un espace hyperbolique, à cause de l'inconstance du diviseur AE. De grace, une ample explication de tout cela, avec son application cherchée des logarithmiques & la courbe de Beaune, c'est-à-dire la méthode complete pour avoir ces sortes de longueurs².

Si son apprentissage n'est pas encore parachevé, la lecture des mémoires montre incontestablement son adhésion ferme au calcul leibnizien. La pratique de ce dernier le conduit à une confiance absolue dans le processus algorithmique. Sûr qu'il conduit à la brièveté et la généralisation de résultats, sans que des considérations sur la figure ne soient plus nécessaires, Varignon est déjà sous l'emprise de ce « charmant et merveilleux calcul différentiel ».

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 21 janvier 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 29 : « je viens de trouver la courbe que décrivent les chaloupes qu'on traîne le long du bord de la Rivière avec une corde : c'est une Logarithmique d'une nouvelle espèce ».

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli le 18 juin 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 102-103.

Conclusion

La première réception du calcul leibnizien en France (1691-1696) ayant été initiée à partir des leçons professées par Jean Bernoulli, il était donc crucial d'analyser comment s'est opérée l'initiation au calcul leibnizien au sein de ce groupe. Il est incontestable que le Marquis de l'Hospital est le plus actif pour l'acquisition, la maîtrise puis la promotion du calcul, mais chacun des membres a également joué un rôle.

Nous avons rappelé que les leçons de Jean Bernoulli sont destinées à être orales et que, de ce fait, leur trace écrite comporte peu d'indications et de remarques. Ce déficit a conduit à des différences dans l'apprentissage du calcul. Byzance articule les méthodes précédentes avec le nouveau calcul leibnizien par une traduction des procédures via la caractéristique leibnizienne. Les manuscrits – étudiés dans le précédent chapitre – concernant la méthode des tangentes de l'Hospital ou celui sur l'Arithmétique des infinis de Wallis comportent de nombreuses *marginalia* avec la notation différentielle : ce sont des tentatives de traduction de méthodes d'inventions à l'aide de la notation leibnizienne. À l'inverse, des *marginalia* avec les anciennes notations de Fermat ou de Barrow sont présentes dans certains manuscrits traitant le nouveau calcul. Cette façon de procéder est habituelle parmi les membres du groupe : pour mieux appréhender le nouveau signe, il leur est utile de saisir d'abord ce à quoi il renvoie de déjà connu. La richesse de la caractéristique leibnizienne demandant un effort de compréhension supplémentaire, les leçons de Jean Bernoulli en l'état sont dans ce cas d'une aide toute relative. En effet, l'opération de différentiation présente deux aspects dont la distinction doit être appréhendée lors de son apprentissage : le premier est algorithmique et le deuxième géométrique.

Le caractère algorithmique du calcul leibnizien, en prolongeant d'une certaine façon les règles de l'algèbre, conduit à un confort propice à sa réception, à condition d'accepter les règles d'incomparabilité. Cet aspect est clairement explicité dans les leçons bernoulliennes. Chez Malebranche, la conception du nouveau calcul comme un prolongement possible de l'algèbre en tant que générateur de rapports exacts est particulièrement marquée. Il nous a été utile de prendre en compte son approche

pour comprendre que de la perception de ces rapports découle une évidence calculatoire. L'attitude de l'Hospital admet, vis-à-vis du caractère algorithmique du calcul, quelques différences par rapport à celle de Malebranche.

La supériorité calculatoire de la nouvelle analyse est l'argument clef qui convainc l'Hospital. Mais, si l'aspect algorithmique le fascine, il reste attentif à la manière d'interpréter les symboles du calcul. Comme nous l'avons vu, son travail d'apprentissage ne s'est pas limité à intégrer des techniques opératoires de calcul, mais s'est amplement attaché à octroyer un sens géométrique aux éléments différentiels. En effet, l'opération de différenciation a un caractère géométrique : il serait inutile de tenter de comprendre la réception du calcul sans tenir compte de cet aspect. Les différentielles apparaissent presque exclusivement dans des configurations géométriques. Le dx qui symbolise la différence entre deux points « consécutifs » infiniment proches est représenté sur une figure par un segment certes fini, mais qui est supposé infiniment petit. Il en est de même pour les différentielles d'ordre supérieur. Il est primordial de rappeler que l'invention du calcul leibnizien a pour but de résoudre des problèmes de courbes. Or, pour intégrer le cadre géométrique dans lequel ces courbes habitent, ces entités différentielles sont naturellement interprétées géométriquement. Cependant, Malebranche, l'Hospital, Varignon et les membres du groupe autour de Malebranche qui expérimentent le nouveau calcul acceptent une mise entre parenthèses de cette interprétation lorsque l'expérience du calcul a lieu. Ils font alors preuve d'une confiance nécessaire et féconde dans l'algorithme.

Nous avons insisté sur la manière dont Malebranche parvient à interpréter une aire comme l'intégrale d'éléments différentiels dans le but de calculer. Ce que les membres du groupe appelaient quelques années auparavant des « indivisibles » et qui étaient interprétés comme composants du continu, deviennent des êtres hybrides, des indivisibles munis d'une étiquette : leur expression différentielle. L'étude portant sur la recherche d'un traitement calculatoire aux problèmes liés à la courbure montre que pour l'Hospital, le passage par une interprétation géométrique a été essentiel à l'apprentissage et au développement ultérieur de ses recherches. Pour l'obtention de la formule du rayon de courbure, deux voies sont possibles. La première s'effectue par la manipulation calculatoire conduisant à la formule souhaitée. La deuxième – chère à l'Hospital – s'appuie sur un raisonnement à partir d'une figure dans laquelle les

différentielles secondes y sont « marquées » et apparaissent comme des éléments géométriques. Sa confiance en l'aspect purement calculatoire de l'algorithme leibnizien est acquis à condition que le calcul ne produise pas des énoncés équivoques. Il est d'ailleurs significatif que, par exemple, les réponses qu'apporte Jean Bernoulli à l'étonnement de l'Hospital pour « $ddy = \infty$ au point d'inflexion », sont des explications d'ordre géométrique. Bernoulli suppose que l'attente explicative de son élève sera ainsi mieux satisfaite. D'autres exemples de ce genre marquent la réception du calcul leibnizien. Ainsi, celle-ci a exigé que l'intégration des éléments différentiels se réalise en cohérence avec le cadre géométrique dans lequel ils permettent un calcul. Cette intégration conduit à une transformation de la géométrie infinitésimale, telle qu'elle était connue et pratiquée avant que le calcul leibnizien n'apparaisse¹.

À la fin du XVII^e siècle, en particulier lors du débat à l'Académie des Sciences contre le calcul leibnizien, il sera important et difficile pour ceux qui le défendent de convaincre de la pertinence de l'éventuel statut de grandeur à octroyer aux différentielles. À nos yeux, l'attachement à ce statut nécessite pour être compris de connaître l'aspect de la réception dans lequel s'articule le domaine d'expressions différentielles vouées au calcul avec un domaine géométrique de quantités infiniment petites. Pour saisir les enjeux épistémologiques qui se jouent, il est important de comprendre comment ce dernier est redéfini avec la réception du calcul leibnizien.

La première réception du calcul leibnizien est exclusivement celle des mathématiciens regroupés autour de Malebranche. Il s'agit désormais pour leurs membres de le diffuser. En décembre 1694, Malebranche attend de la part de l'Hospital « ses sections coniques et le calcul différentiel avec l'application au problème de géométrie »², mais l'Hospital ressent ces sollicitations comme une « persécution »³; il souhaite la publication d'un autre traité plus élaboré et qui ne traitera que du calcul

¹ Fraser, Craig, « Non standard Analysis, infinitesimals, and the History of calculus » dans *A delicate Balance : global perspectives on innovation and Tradition in the History of Mathematics*, editors David Bowe and Wann-Shang Horng, Springer, 2015, p. 43 « le calcul réunit une algèbre d'expressions différentielles et une géométrie d'infinitésimales discrètes, et la conception résultante forme la base d'une théorie mathématique puissante et couronnée de succès ». (notre traduction)

² Lettre de Malebranche à Reyneau du 30 décembre 1694, *op. cit.*, t. XIX, p. 620.

³ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 22 août 1695, *op. cit.*, p. 304 : « je suis sur le point de faire imprimer mon traité des sections coniques en étant persécuté par le père Malebranche et quelques uns de ses amis, j'y joindrai un petit traité du calcul différentiel, où je vous rendrai toute la justice que vous méritez. Je n'y parlerai point du tout du calcul intégral, laissant cela à M^r Leibniz qui a dessein d'en faire un traité comme vous le savez, sous le titre de *scientia infiniti*, de sorte que ceci sera proprement qu'une introduction au sien (...) »

différentiel. Cet ouvrage, comme on le verra dans le chapitre suivant, est la première présentation française du calcul différentiel. C'est par sa lecture et son étude qu'advient en grande partie la deuxième période de réception du calcul. Ce chapitre a montré que cette deuxième réception sera indubitablement la réception du nouveau calcul ayant subi déjà une interprétation.

CHAPITRE 5

Le traité *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696) et sa première lecture varignonienne

Introduction

Leibniz considère que les premiers articles parus dans les *Acta Eruditorum* décrivant le nouveau calcul ne sont pas suffisants pour exposer l'ampleur de l'« Analyse de l'infini ». Il forme le projet d'écrire un ouvrage, qu'il intitule par avance *Scientia infiniti*, qui présenterait la nouvelle analyse. C'est ainsi qu'il l'explique à Malebranche dans une lettre en 1693 :

Si j'ay un jour quelque loisir, je proposeray un peu plus clairement que je n'ay fait dans les *Actes de Leipzig*, les regles et les usages de ce calcul ; Outre qu'il y a plusieurs *errata* capables d'obscurcir la chose, et c'est pour cela que je crois que plusieurs n'y ont rien compris¹.

Pour ce faire, il sollicite les principaux géomètres européens initiés au nouveau calcul – c'est-à-dire essentiellement les frères Bernoulli et l'Hospital – pour qu'ils apportent leur collaboration. Nombre de ses correspondants – Malebranche, Huygens – insistent pour qu'il débute l'élaboration de cet ouvrage, mais pris par ses nombreuses occupations, il n'y parvient pas².

¹ Lettre de Leibniz à Malebranche fin janvier-début février, Malebranche, Nicolas, *Œuvres*, t. XIX, *op. cit.*, p. 598.

² Pour une étude de ce projet (non abouti), on pourra consulter l'article de Pierre Costabel, « De *Scientia infiniti* », *Aspects de l'homme et de l'œuvre, 1646-1716*, ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique Aubier-Montaigne, Paris, 1968, p. 105-117.

En mars 1695, Malebranche détient un manuscrit de l'Hospital traitant de calcul différentiel qu'il souhaite publier mais, connaissant le projet de Leibniz et craignant l'offusquer, il lui demande son avis. Celui-ci ne voit aucun inconvénient à que cet écrit soit publié. En s'adressant directement à l'Hospital, il montre au contraire son enthousiasme :

Quoyque j'aye dessein de composer quelque chose sur nostre nouveau calcul et autres matières connexes, sous le titre de la Science de l'infini, je n'y suis pas pourtant fort avancé, et j'ay de la matière sans luy avoir encore donné aucune forme. Ainsi cela ne vous doit point empêcher de publier ce que vous avés projeté ; et puisque le R.P. de Malebranche a tiré de vous un écrit, dont vous luy avés laissé la disposition, et qu'il a dessein de faire imprimer¹.

À cette nouvelle, l'Hospital lui explique que son écrit n'est que « peu de chose ». S'il consent à le publier, c'est dans l'espoir que son illustre correspondant offre enfin au public l'ouvrage plus complet « sur la science de l'infini et dont celui-ci ne doit être regardé que comme une introduction »². Leibniz montre encore une fois son entière confiance dans le marquis, et attend avec impatience la lecture de son ouvrage : « Je souhaite de tout mon cœur que nous ayions le bien de voir vostre ouvrage ou je m'attends d'apprendre considerablement »³.

En raison de l'accord passé avec l'Hospital en 1694, Jean Bernoulli se trouve dans une position « embarrassante » par rapport aux sollicitations de Leibniz pour sa collaboration à *Scientia infiniti* :

J'ay reçû ces jours passés une lettre de Mr Leibnits, où il me prie encor de luy communiquer quelques unes de mes découvertes pour les inserer dans son traité de *scientia infiniti* : mais je ne sçay pas comment je me dois comporter à cet egard ; car de quel biais que je prenne la chose je me trouve fort embarrassé ; Il est bien vray que je vous ay promis de ne faire part de mes decouvertes qu'à vous, mais me conseillerez vous de refuser à Mr Leibnits sa demande et de rompre entierement le commerce avec luy ? en

¹ Lettre de l'Hospital à Leibniz le 27 décembre 1694, A III 6A, p. 249.

² Lettre de l'Hospital à Leibniz du 2 mars 1695, *ibid*, p. 295.

³ Lettre de Leibniz à l'Hospital du 20 juillet 1696, A III 7A, p. 25.

vérité cela seroit agir peu honnêtement avec un homme à qui je suis beaucoup redevable (...)¹.

Dans la lettre du 22 août 1695, l'Hospital, pour la première fois, informe Jean Bernoulli de la publication imminente de son traité sur les sections coniques. Il mentionne qu'il y joindra un « petit traité de calcul différentiel » dans lequel « je vous rendrai toute la justice que vous méritez »². Mais ces publications sont retardées : « Mon livre s'imprime fort lentement ayant eu des affaires qui m'en ont détourné, cependant je crois qu'il sera achevé d'imprimer à la fin de cette année »³. Le traité des sections coniques n'est finalement pas publié⁴. Début 1696, l'Hospital tombe malade, ce qui aggrave le retard. Malebranche prend la relève et se charge de la publication. Le 18 février 1696, il déclare :

Je suis occupé à l'impression du livre de Mr. De l'Hospital, qui sera finie dans un mois, c'est de la plus fine géométrie, le titre est *Analyse des Infiniment petits et de l'application de cette analyse à divers problèmes*⁵.

En juin 1696, l'ouvrage est publié anonymement sous un titre un peu différent : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (AI)*, ce qui suggère que l'Hospital a repris en main l'édition⁶. Il en avise Jean Bernoulli en lui rappelant que l'ouvrage ne traite que de calcul différentiel :

[...] mon but n'a été que de faire proprement une introduction à ce que M^r. Leibniz et d'autres pourroient donner dans la suite, je ne doute point que si vous vouliez prendre la peine, vous ne donnassiez tout ce qu'on peut souhaiter dans le calcul integral, et c'est à

¹ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 22 juillet 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 232.

² Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 22 août 1695, déjà citée.

³ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 3 septembre 1695, AIII, 6A, p. 487.

⁴ Un traité sur les sections coniques est publié de façon posthume en 1708 mais il reprend des manuscrits dont la date probable est 1698. Voir plus loin dans ce chapitre au §2).

⁵ Lettre de Malebranche à P. Berrand du 18 février 1696, Malebranche, Nicolas, *Œuvres*, *op. cit.*, t. XIX, p. 632.

⁶ Pour des détails supplémentaires de cette publication, on pourra lire le récit de Pierre Costabel dans *Mathematica* p. 309-312.

quoi on devrait vous exciter de travailler, car il me semble que M^r. Leibniz a trop d'occupations pour pouvoir expliquer les choses comme il seroit à souhaiter¹.

La publication de son ouvrage rend donc l'Hospital plus souple vis-à-vis du vœu de secret qu'il exigeait de Jean Bernoulli. Il envoie un exemplaire à chacun des illustres savants, c'est-à-dire son professeur, le frère de celui-ci et bien sûr Leibniz, un dernier étant réservé à Otto Mencke (1644-1707), directeur des *Acta Eruditorum*².

Avant la publication de l'ouvrage, aucune information concernant son contenu n'est donc divulguée. Il est certes question de calcul différentiel, mais l'Hospital ne dit mot des sections qui seront traitées, ni de la manière de présenter. Que contient-il ?, Comment se présente son contenu ?

Nous avons vu dans les deux précédents chapitres deux facettes de l'Hospital : l'une où il apparaît héritier des méthodes d'invention – en particulier celles de Barrow et Wallis – l'autre où il apprend et se questionne sur le calcul leibnizien en l'articulant à ses connaissances. L'Hospital reçoit le calcul par différents moyens : dans un premier temps il s'agit de cours dont il garde une trace écrite. Sans la présence de Jean Bernoulli à Paris, l'Hospital s'instruit d'articles savants – la plupart issus des *Acta* – dont la lecture le conduit à échanger avec son professeur et Leibniz. L'Hospital apprend donc à pratiquer le calcul essentiellement dans la résolution de problèmes. Cette manière de procéder n'exclut pas pour autant d'interroger « les principes du calcul » et nous avons analysés dans ce chapitre des exemples concernant cet aspect. Ainsi, la publication de *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* est un épisode décisif de la lecture hospitalienne de la nouvelle analyse.

En définitive, l'ouvrage est long de 181 pages auxquelles il faut ajouter 14 pages de Préface. Il est illustré de 156 figures qui rendent plus aisée la lecture des dix sections. La première, intitulée « où l'on donne les Règles du calcul des Différences » prend une forme similaire à la présentation des traités d'éléments euclidiens : définitions, demandes, propositions, celles-ci énoncent les règles du calcul. La Préface l'indique, il s'agit ici de fournir les « principes du Calcul »³. En revanche, le style de toutes les autres sections n'est plus euclidien. Les propositions sont en fait des

¹ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 15 juin 1696, *op. cit.*, p. 319-320.

² Lettre de l'Hospital à Leibniz du 20 juillet 1696, A III 7A, p. 25.

³ AI, Préface.

problèmes généraux qui sont illustrés de nombreux exemples. La plupart des sections – sauf pour les deux dernières – ont un intitulé qui commence par « Usage du calcul des différences pour ». Ainsi l'ouvrage est clairement structuré selon le type de problèmes résolubles à l'aide du calcul différentiel. Les sections sont ordonnées par ordre croissant de complexité et de difficulté des contenus. Les sections II, III et IV s'occupent de recherche de tangentes, d'extremum et de points d'inflexion. Les sections V, VI et VII traitent de la recherche de développées et de caustiques. Ces derniers problèmes sont des cas particuliers des enveloppes de courbes traitées dans la huitième section.

Dans ce chapitre nous examinons quelques aspects du calcul leibnizien tels qu'ils sont présentés dans l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* par l'Hospital. Par cette analyse, nous souhaitons souligner en quoi cet ouvrage représente le témoin matériel de l'achèvement de la première réception française du calcul leibnizien. Par réception, nous entendons ici essentiellement celle de Guillaume de l'Hospital. Lecteur actif, il est déterminé par des usages acquis de pratiques mathématiques en raison de ses lectures de géomètres français (Fermat, Descartes, Pascal) et anglais (Wallis et Barrow), lecture qu'il partage avec ses amis du cercle malebranchiste. Par ailleurs, il est en attente de possibles connaissances qu'il saura intégrer en les articulant à cet héritage.

D'abord, nous nous appuyons sur la lecture de la Préface. Véritable plaidoyer de la nouvelle analyse, elle explicite la conviction que l'analyse des infinis est désormais la seule voie à suivre.

Nous examinons ensuite de quelle manière les principales notions de la nouvelle analyse sont introduites. Une comparaison avec les *Lectiones de calculo differentialium* de Jean Bernoulli est très utile. Ces dernières présentent des lacunes. Premièrement, des définitions cruciales, comme celle de « quantité variable continuellement », font défaut. Deuxièmement, certaines justifications peuvent être jugées insatisfaisantes ou incomplètes aux yeux de l'Hospital qui les modifie et les enrichit à l'aide de ses lectures et échanges. Cette « mise au propre » constitue un élément essentiel pour l'étude de la lecture hospitalienne. Nous recherchons ici en particulier de quelle manière l'Hospital restitue les « principes du calcul ». Est-il fidèle à Leibniz ou de quelle manière s'il s'appuie-t-il sur d'autres écrits comme ceux de

Barrow ou de Newton. L'Hospital appose à ses demandes le qualificatif « d'évidentes ». Nous examinons de quelle manière il justifie cette « évidence ».

En dernier lieu, par une comparaison de l'AI avec le deuxième livre des *Nouveaux Eléments* de l'Hospital et les *Lectiones de calculo differentialium* de Jean Bernoulli, nous montrons de quelle façon l'Hospital ordonne et agence des contenus similaires en vue de montrer le pouvoir généralisateur de l'Analyse des infinis. L'architecture de l'AI en est le reflet.

Dès sa publication, le *Journal des Sçavans* rend compte de l'ouvrage sur un ton élogieux, mais le juge difficile pour les non-initiés :

Le nombre et la sublimité des découvertes dont cet ouvrage est rempli, sont tellement au-dessus de tout ce qui peut s'en dire dans un simple discours, que pour tout extrait, je me trouve réduit à ne donner ici que le catalogue ou la liste des matières qu'il traite ; ce qui ne laissera pas pourtant pas de servir aux connoisseurs pour en entrevoir quelques beautés¹.

Mis à l'écart des leçons bernoulliennes, initié au calcul de manière hautement autonome, Varignon est un des premiers ardents lecteurs de l'AI, comme deux manuscrits concernant le calcul différentiel en attestent. L'un, intitulé « Instructions du calcul différentiel et des méthodes générales pour trouver les tangentes aux lignes courbes »², est un cours privé qu'il rédige, en tant qu'enseignant, et qui vise à récapituler les principales méthodes de tangentes puis à les comparer à celle fournie par le calcul leibnizien. La lecture de ce manuscrit est instructive car elle apporte le premier regard d'un enseignant sur ce qui est supposé être nouveau dans la nouvelle analyse à travers notamment l'exemple de la méthode des tangentes. L'autre manuscrit³, publié en 1722 sous le titre *Éclaircissemens sur l'Analyse des Infiniment petits*, est rédigé entre 1695 et 1707⁴. Il témoigne du travail de relecture de l'AI, en vue d'une

¹ JS, juin 1696, p. 424-428.

² Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes », FR 12262.

³ *Éclaircissemens sur l'Analyse des Infiniment petits*, Chez Rollin, Paris, 1725.

⁴ D'après l'analyse de Pierre Costabel, *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli, Band 3, Der Briefwechsel mit Pierre Varignon zweiter teil: 1692-1702*, Bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, p. 22.

nouvelle publication¹. Ce manuscrit est publié de manière posthume en 1725. Notre analyse s'attachera particulièrement aux commentaires visant à clarifier les définitions et les demandes. L'examen de ces deux écrits nous offre une vue sur l'une des premières interprétations de l'AI, incontournable en raison du rôle important de Varignon dans la réception du calcul leibnizien.

¹ *Mathematica* p. 310.

1) La Préface : un plaidoyer pour *l'Analyse des infinis*

En 1696, le calcul leibnizien, rendu public plus de dix ans en arrière, est de plus en plus diffusé à travers de nombreux articles. Cependant, ces articles s'adressent exclusivement à un cercle restreint de savants. L'absence d'ouvrage traitant l'Analyse des infinis est patente, Leibniz s'en plaint et voudrait que son projet d'écriture la *Scientia Infiniti* émerge au sein de la *République des Lettres*. Se limitant au seul calcul différentiel, l'Hospital a pour dessein de fournir la première présentation structurée de l'Analyse des infinis. Comme nous l'avons rappelé dans notre introduction, bien que l'élaboration de cet ouvrage est exclusivement celle de l'Hospital, elle tire initialement son origine d'un projet commun avec Malebranche. Si bien qu'en écrivant son ouvrage, l'Hospital s'adresse tout d'abord à ses camarades du groupe autour de Malebranche qui comme lui, ont découvert le nouveau calcul par l'enseignement de Jean Bernoulli. Mais sa visée est plus large : en publiant le premier ouvrage traitant de l'Analyse des infinis, il s'adresse à toute la communauté des savants géomètres français avec qui il partage l'héritage de toutes les méthodes d'invention dont il été question dans les trois premiers chapitres.

La Préface, longue de quatorze pages, se divise aisément en deux parties. Dans la première, il y est expliqué en quelques lignes la nouveauté de l'Analyse des infinis. Il y est dressé un récit historique de cette invention de telle sorte que son dénouement – l'invention du nouveau calcul – paraît immanquable. Dans la deuxième, est décrite par ordre chacune des sections. La Préface s'attache donc à présenter la nouvelle analyse comme nécessaire aboutissement des mathématiques qui la précèdent. Notre lecture s'attache à analyser et à préciser quels arguments sont avancés et de quelle manière ils le sont.

Il n'est pas certain que l'Hospital ait écrit la Préface. Fontenelle aurait suggéré en être l'auteur. Cependant fin 1695, il est peu probable qu'il connaissait suffisamment le calcul leibnizien pour être à même d'élaborer une préface rendant compte de tous les enjeux de la nouvelle analyse¹. En absence de certitude nous nommerons l'auteur par « le préfacier ».

¹ C'est l'avis de Pierre Costabel, *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 13.

1.1) L'émergence de l'Analyse des infinis : le récit d'un progrès

La Préface annonce que la nouvelle analyse des infiniment petits est la mieux adaptée à établir « les véritables principes des lignes courbes ». Une telle affirmation s'appuie sur le fait qu'elle est la seule à être capable de comprendre de manière complète la considération des courbes comme polygones d'une infinité de côtés. Il est rappelé que cette considération est certes de « tout temps » mais :

on en étoit demeuré là : ce n'est que depuis la découverte de l'Analyse dont il s'agit ici, que l'on a bien senti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Le début de la Préface invite le lecteur à suivre le récit du chemin parcouru pour atteindre l'Analyse des infinis. Le premier moment est celui des Anciens qui « ont touché qu'à fort peu de courbes » mais « ils ne sont point égarés (...) ils ont fait ce que nos bons esprits auroient fait en leur place ; (...) » Le préfacier décrit ensuite chacune de ce qu'il juge être des étapes historiques cruciales et nécessaires du processus historique qui a produit l'analyse des infinis : « Tout cela est une suite de l'égalité naturelle des esprits et de la succession nécessaire des découvertes ». Des acteurs importants sont cités en raison de leur contribution à l'édifice. Un hommage est rendu à Descartes et son « heureuse hardiesse qui fut traitée de révolte » et par qui « on ouvrit les yeux, et l'on s'avisa de penser ». L'Analyse ordinaire – c'est-à-dire l'algèbre – lui a suffi pour élaborer une méthode des tangentes. Le préfacier célèbre également Pascal dont le mérite est d'avoir établi des résultats importants sur les courbes en considérant « leurs éléments », c'est-à-dire « des infiniment petits ». Remarquons qu'il surinterprète : comme nous l'avons vu, Pascal ne nomme jamais ces éléments par des « infiniment petits ». Le préfacier souligne également que le savant clermontois n'a obtenu ses résultats qu'« à force de tête et sans analyse », c'est-à-dire sans intervention de calcul¹. Par ailleurs, Fermat a amélioré la « méthode des tangentes » de Descartes. Cependant, il est jugé que Barrow le surpasse car il a considéré « de plus près la nature des polygones » en observant le triangle –

¹ Nous savons aujourd'hui grâce à l'existence d'un manuscrit que Pascal disposait d'un langage symbolique propre et indépendant des algébristes contemporains de Descartes, Dominique Descotes, « An unknown mathematical manuscript by Blaise Pascal », *Revue Historia Mathematica*, vol. 37, n°3, août 2010.

caractéristique – semblable au triangle formé par l’ordonnée et la sous-tangente, vision qui lui a inspiré sa méthode calculatoire. Or, cette méthode ne permet pas ni d’ôter les fractions, ni de faire « évanouir » les signes radicaux. Ce défaut est pallié enfin par l’invention leibnizienne.

Nous remarquons ici un genre de discours que nous avons justement rencontré chez Leibniz. En effet, dans nombre de ses articles¹ ce dernier fait précéder une nouveauté en retraçant son histoire. Pour Leibniz la connaissance de ce récit est au moins aussi essentielle que l’invention elle-même car elle permet de progresser dans l’art d’inventer² :

(...) il n’y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité, et parce qu’elles contiennent en elles la source d’une infinité d’autres qu’on pourra en tirer par une certaine combinaison (comme j’ai coutume d’appeler) ou application à d’autres sujets lorsqu’on s’avisera de le faire comme il faut³.

Le chemin de l’invention permet d’autres inventions. L’histoire de l’invention permet de percevoir les efforts fournis par chacun des savants qui se suivent au cours du temps. Soulignons que pour Leibniz l’histoire d’une invention est toujours l’histoire d’un progrès. La Préface de l’*AI* reprend cette idée : l’Analyse des infinis est l’aboutissement nécessaire d’une suite d’événements. Cependant, alors que Leibniz reconnaît souvent les apports de Cavalieri et de Wallis, ces deux mathématiciens sont absents du récit de la Préface. À l’exception de Barrow, le préfacier fait de l’avènement de la nouvelle analyse l’affaire, principalement de mathématiciens français, ceux justement dont l’Hospital et le cercle autour de Malebranche sont les héritiers.

1.2) Cette analyse « qui penetre jusques dans l’infini même »

Une analyse des infiniment petits

Le préfacier indique dès la première phrase que la nouvelle analyse suppose la commune mais que contrairement à celle-ci, qui ne traite qu’avec des grandeurs

¹ Par exemple : « De Vera proportione circuli » pour l’histoire de l’expression de π ou « De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum » pour l’histoire de son calcul.

² Marc Parmentier développe cette idée dans « Introduction, l’optimisme mathématique », *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 43-45.

³ Lettre au directeur du *Journal des Sçavans*, citée par Marc Parmentier, *ibid*, p. 44.

finies, la nouvelle « compare les différences infiniment petites des grandeurs finies », c'est-à-dire découvre « les rapports de ces différences », mais aussi « les rapports de ces différences [différences de différences] » L'expression « établissement de rapports » étant du domaine des grandeurs, le préfacier présente donc la nouvelle analyse comme manipulant les différences comme des grandeurs finies même s'il ne les désigne pas comme telles.

Insistant sur le rôle nécessaire de cette analyse, le préfacier affirme que l'analyse des infinis conduit aux « véritables principes des lignes courbes ». Il cite celui de considérer la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés. Cette idée n'est bien sûr pas nouvelle, mais la dissemblance entre un polygone d'une infinité de côtés et la courbe correspondante trouve dans l'analyse des infinis le lieu idoine et exclusif pour être estimée :

il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'est-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'inflexion ou de rebroussement, les rayons qui s'y réfléchissent, ceux qui s'y rompent, &c.

Ce qui s'avère donc nouveau est de proposer des entités mathématiques – les différences – dont traite l'analyse des infinis et qui sont adaptées à l'étude des courbes vues comme des polygones avec une infinité de côtés. Nous pouvons remarquer que ni dans la Préface, ni dans l'ouvrage, le terme « différentiel » n'est utilisé mais que seul celui de « différence » l'est. Le préfacier insiste sur cette conception en mettant en avant la capacité de cette analyse à établir des rapports entre les différences infiniment petites de quelque genre qu'elles soient – « différences de différences, différences troisièmes, quatrièmes et ainsi de suite » – ou à les comparer entre eux :

Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : & par-là elle fait connaître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis.(...) La comparaison des infiniment petits de tous les genres luy est également facile¹.

¹ *Ibid.*

Le terme « calcul » apparaît dans le texte mais le préfacier n'insiste pas sur cet aspect, en particulier il n'évoque pas l'élaboration de règles propres à l'algorithme différentiel. Seul est signalé « l'indifférence » du calcul aux signes radicaux.

Il est intéressant de comparer ce texte à celui que Leibniz avait publié sous forme d'un article en mars 1692 au *Journal des Sçavants*. Nous avons déjà évoqué cet écrit intitulé « De la chaînette » au chapitre précédent, nous rappelons qu'il s'agit du premier article dans lequel Leibniz rend publique son calcul auprès des savants français en promouvant ses qualités. Prenant comme prétexte les multiples résolutions du problème de la chaînette obtenues par son algorithme, il offre une brève présentation de « son calcul nouveau » ou « Analyse des infinis » dont il souligne à quel point il surpasse l'analyse ordinaire. Sur ce point, le préfacier reprend Leibniz. En revanche, Leibniz focalise sur la particularité de son « algorithme nouveau » : les cinq opérations habituelles de l'algèbre sont nouvelles car elles s'appliquent à des « quantités incomparables ». Le préfacier ne désigne pas les différences par des « incomparables », en revanche il insiste sur le rôle d'auxiliaire des infiniment petits pour la connaissance des grandeurs finies. Ainsi la manière de présenter du préfacier et celle de Leibniz diffèrent : alors que l'inventeur du calcul prône le caractère inédit du nouvel algorithme en tant que calcul, le préfacier omet de le signaler, il se dirige vers une présentation de la nouvelle analyse comme une géométrie qui prolonge « l'ordinaire ».

Une analyse dédiée aux courbes

Le préfacier a expliqué en quoi cette nouvelle analyse est la plus propre à l'étude des courbes. Le titre « Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes » désigne bien le dessein de l'ouvrage : expliquer ce qu'est l'analyse des infinis et en quoi elle est propice à l'« intelligence » des courbes. Le préfacier met en avant la cohérence des neuf premières sections de l'ouvrage. Si la première explique les principes du calcul, chacune des neuf suivantes correspond à l'application du calcul pour trouver une propriété d'une courbe (tangentes, *maximis et minimis*, flexion et rebroussement, développées et caustiques) ou pour déterminer l'enveloppe d'une famille de courbes. Il ne souligne pas l'ordre de complexité croissante des problèmes.

Cette analyse suppose l'ordinaire mais elle traite avec l'infini. Cependant d'autres méthodes permettaient de trouver également des tangentes, les normales, les points d'inflexion et le cercle osculateur. La dernière section est destinée à montrer comment les méthodes de Descartes et Hudde peuvent être retrouvées par le calcul différentiel. La généralité de la nouvelle analyse est donc illustrée ici par cette section, mais le préfacier insiste que c'est une caractéristique de la nouvelle analyse de générer des énoncés généraux : « il est à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que tres-peu de Propositions ; mais elles sont toutes générales (...) ». Nous commenterons plus loin cette affirmation.

2) Les définitions et les suppositions de l'Analyse des infiniment petits

2.1) Des définitions

Leibniz n'utilise pas du terme « infiniment petit » comme une notion fondamentale dans son article « *Nova Methodus* », même s'il y fait appel pour sa conception de la courbe et celle de la tangente. Cependant, dans d'autres articles il introduit les quantités différentielles explicitement comme des infiniment petits, par exemple en 1686 en nommant son calcul : « calcul des infiniment petits »¹. Dans *Lectiones de calculo differentialium*, Jean Bernoulli utilise d'emblée le terme « différentielle » [*differentialis*] mais ne le définit pas. Nous avons vu en outre qu'il maintient une ambiguïté d'écriture voire de sens sur la notion de différentielle en la notant à la fois par « e » et par « dx » même s'il le fait pour des raisons probablement pédagogiques. L'Hospital destine la première section de l'*AI*, intitulée « où l'on donne les règles de ce calcul », à préciser les définitions des notions auxquelles la nouvelle analyse se réfère, puis à formuler les demandes sur lesquelles elle s'appuie et enfin à formuler les règles de calcul en les accompagnant de justifications.

¹ Il explique : « jusqu'au jour où je découvris enfin ce véritable complément de l'Algèbre pour les transcendentes qu'est mon calcul des infiniment petits, que je nomme également différentiel, calcul des sommations, quadratique et assez judicieusement me semble-t-il, *Analyse des indivisibles et des infinis*. », Leibniz, G.W., « De Geometria recondata », *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 141. Paolo Mancosu affirme également dans *Philosophy of Mathematics & Practice in the Seventeenth century* que Leibniz introduit les différentielles comme infiniment petits mais il ne fournit pas de références, *op. cit.*, p. 156.

La notion de quantité variable, sa définition

Dans ses leçons, Jean Bernoulli traite de quantités « qui augmentent et diminuent » mais il ne précise pas de quelle manière ces incréments se produisent, en particulier s'ils sont produits continument.

Dans la première section de l'*AI*, l'Hospital commence la section par deux définitions cruciales pour son développement. La première définition concerne les « quantités variables » qui sont :

celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées et les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramètre est une quantité constante¹.

Nous avons constaté que, dans la Préface, le terme « grandeur » (finie) apparaissait à plusieurs reprises alors que dans le reste de l'ouvrage, ce terme n'est utilisé qu'à de rares occasions. C'est l'inverse qui se produit pour le terme de « quantité », absent de la Préface, et présent dans plus d'une quarantaine d'occurrences dans le corps du texte.

Nous nous interrogeons donc sur cet usage en regard des écrits français. Dans les *Nouveaux Elémens de Géométrie* (1683), Arnauld inverse la proportion entre les deux termes. Il utilise le terme « quantité » pour désigner :

une grandeur en général, en tant que ce mot comprend l'étendue, le nombre, le temps, les degrés de vitesse, et généralement tout ce qui tout ce qui se peut augmenter en ajoutant ou multipliant, et diminuer en soustrayant ou divisant, etc².

Dans son *Dictionnaire mathématique ou idée générale des Mathématiques*³, Jacques Ozanam restreint la définition de grandeur à une « quantité continue », c'est-à-dire ayant une étendue et dont les parties sont jointes ensemble. Elle est du ressort de la

¹ *AI*, op. cit., p. 1.

² Arnauld, Antoine, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Desprez, Paris, 1683, livre premier, p. 2.

³ Ozanam, Jacques, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des Mathématiques : dans lequel on trouve les termes de cette science plusieurs termes des Arts et des autres sciences avec des raisonnemens qui conduisent peu à peu l'esprit à une connaissance universelle des mathématiques*, chez Estienne Michallet, Paris, 1691.

géométrie d'Euclide¹. Dans *Éléments de Mathématiques ou Traité de la grandeur en général* (1689), Bernard Lamy utilise très peu le terme « quantité » mais s'en sert pour définir ce qu'est une grandeur. Il explique que le terme « grandeur » s'applique à toutes sortes de choses puisque qu'il renvoie à « tout ce qui peut être augmenté ou diminué »². Pour spécifier les types de grandeurs (continues, discrètes) il utilise le terme « quantité » qu'il rend dans ce contexte synonyme de « grandeur ». Dans *Éléments de géométrie*, Lamy se sert du terme « quantité » pour définir le « rapport ou la raison de deux grandeurs » qui est ainsi leur comparaison selon « la quantité »³. Ainsi, le terme « quantité » est indispensable pour définir la grandeur au point presque que quelquefois l'un peut être pris pour l'autre. Bien entendu, lorsqu'il s'agit de géométrie, c'est le terme de « grandeur » dans le sens de quantité continue qui est retenu dans ces traités. La géométrie euclidienne traite spécifiquement de quantités continues qu'elle nomme « grandeurs » et qu'elle sait traiter. De la sorte le terme « quantité » peut avoir un sens plus général et s'appliquer à ce qui ne relève tout simplement pas de la qualité. Ainsi, pour définir la notion de variabilité, l'Hospital choisit de l'associer au terme « quantité », proche de celui de « grandeur » mais bien moins connoté. Les « quantités variables » sont donc un nouveau type de quantités, dont la définition n'est pas à rattacher nécessairement à la notion euclidienne de grandeur.

L'introduction de l'adverbe « continuellement » apparaît comme un élément clef dans l'élaboration de cette définition. Nous avons vu que Leibniz présentait le repos comme un cas particulier du mouvement : celui de vitesse infiniment petite. Ici rien de tel, la quantité constante est posée comme le contraire de la quantité variable. Par ailleurs, elle est définie en se servant du terme « continuellement » sans que celui-ci soit en revanche défini ; Dans ce sens, il apparaît comme n'ayant pas à être défini. C'est donc un terme « indéfinissable » et il a ainsi le statut de « terme primitif » dans

¹ *Ibid*, p. 93

² Bernard Lamy, *Éléments de Mathématiques ou Traité de la grandeur en général*, Pralard, Paris, 1689, p. 3.

³ Bernard Lamy, *Éléments de géométrie*, Paris, Pralard, 1685, Livre III, section III, p. 337.

Pour l'arithmétisation de la géométrie chez Arnauld et Lamy, Barbin, Évelyne, « Evolving Geometric Proofs in the 17th Century: From Icons to Symbols », in Hanna Gila, Jahnke Niels, Pulte Helmut (éd.), *Explanation and Proof in Mathematics : Philosophical and Educational Perspectives*, Springer-Verlag, 2010, p. 237-252.

l'acception de la logique de Port-Royal¹. Nous examinons *infra* dans quelles situations le terme « continuellement » apparaît dans le texte de l'Hospital pour préciser le sens de « quantité variable ».

L'accent mis sur le caractère continu de la variation lui sert immédiatement après à définir le terme « différence ».

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*².

Étant donné que l'*AI* est écrite en français, une remarque s'impose : l'Hospital utilise le terme « portion » pour caractériser la notion de différence. Ce terme renvoie à la partie d'un tout homogène³. Même s'il utilise ce mot peu par la suite, ce choix n'a rien de cryptique, il souhaite expliquer le terme « différence » dans le cadre des quantités géométriques sur lesquelles porte son propos⁴. Ce terme est d'ailleurs celui qui est le plus souvent utilisé par Pascal. Le terme « portion » convient aux courbes dont l'intelligence est justement clarifiée grâce à l'Analyse des infinis. Preuve en est qu'il fait immédiatement suivre cette définition, sans même changer de paragraphe, par des exemples de différences qui peuvent apparaître dans l'étude d'une courbe.

Pour cela, il considère une courbe quelconque AMB de diamètre la ligne AC , le point M puis le point m qui lui est infiniment proche. L'Hospital représente les différences sur la figure au moyen de constructions géométriques élémentaires. Par exemple, il trace une perpendiculaire à PM passant par M qui coupe pm en R : Rm figure la différence des ordonnées alors que Pp figure la différence de AP . De même, en traçant un « petit » arc de cercle de centre A (et de rayon AM) qui coupe Am en S , il figure la différence⁵ Sm de AM . La représentation des différences résultent des gestes (infiniment petits) du géomètre maniant la règle et le compas. Bien que

¹ Blaise Pascal, *De l'Esprit géométrique*, *op. cit.*, p. 71 ou Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La logique ou l'art de penser*, chapitre XIII, première partie, « Observations importantes touchant la définition des noms », *op. cit.*, p. 83.

² *Ibid*, p. 2.

³ *Dictionnaire historique de la langue française*, *op. cit.*, p. 2717.

⁴ Schubring indique que la désignation de « portion » pour une différence contient des « connotations évidentes au contexte statique des indivisibles. », *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, *op. cit.*, p. 192. Nous n'adhérons pas à cette interprétation.

⁵ D'autres lectures sont possibles : le « triangle » MAm de base l'arc Mm est la différence de l'espace curviligne AM et $MPpm$ est la différence de l'espace mixtiligne compris entre les droites AP , PM , et l'arc AM .

figurées et ainsi prenant une connotation statique, elles proviennent de la variation de position entre le point M et le point m , dont découlent les variations infiniment petites de d'ordonnée, ou d'abscisse, ou d'arc, ou encore d'aires. La figuration est donc essentielle à l'Hospital autant que le caractère continuellement variable de la quantité dont elle provient.

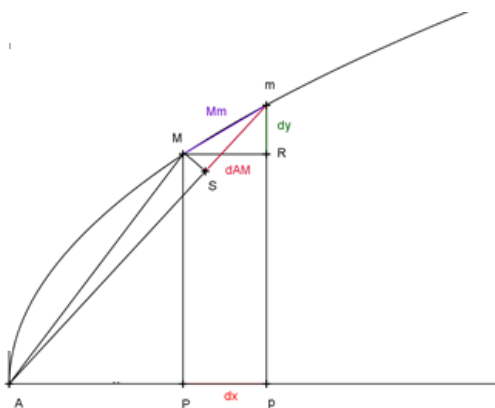


fig. 81

Dans la section IV intitulée « Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement », l'Hospital définit les différences secondes en calquant la définition de différence :

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appelée la *différence de la différence*, ou bien sa *différence seconde*¹.

Il s'agit bien de traiter dans ce calcul x et dx « sur le même pied », comme le soulignait Leibniz dans la « *Nova Methodus* »². L'Hospital confirme cette intention dans la proposition I de cette section³ qui traite de la manière de « prendre la différence d'une quantité composée de différences quelconques ». Il affirme qu'il faut supposer une des différences constante puis traiter « les autres comme des variables » en se servant des règles prescrites dans la section I (que nous allons commenter plus bas).

¹ *Ibid*, p. 55.

² *Op. cit.*, p. 106.

³ Proposition I, section IV, *ibid*, p. 58.

Pour introduire la nouvelle notation leibnizienne « d », l'Hospital choisit une formulation sous forme d'« avertissement »¹ :

on se servira par la suite de la lettre d pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ; & pour éviter la confusion, cette note d n'aura point d'autre usage dans la suite du calcul².

Ici, il n'insiste pas sur l'avantage que procure l'usage de cette notation par rapport à d'autres même s'il indique qu'une seule lettre va permettre de marquer toute sorte de différences, y compris les différences d'ordre supérieur : il suffit d'écrire le nombre de d correspondant à l'ordre³. L'Hospital ne promeut pas directement la supériorité de la notation leibnizienne mais la suggère. En ce sens, ce passage est à rapprocher de celui de Leibniz dans son article de 1686 : « Je préfère employer des signes semblables à dx plutôt que de les remplacer par des lettres, parce que ce dx est une certaine modification de x , et grâce à lui on parvient si nécessaire, à ne laisser dans le calcul que la seule lettre x (...)»⁴

L'introduction du vocable « variable » : une origine leibnizienne et son interprétation par l'Hospital

Leibniz publie dans les *Acta Eruditorum*, deux articles, l'un en avril 1692 et l'autre en juillet 1694 qui s'intitulent « Construction à partir d'une infinité de courbes ordonnées et concourantes, de la courbe tangente à chacune d'elles ; nouvelle application pour ce faire de l'analyse des infinis » et l'autre « Nouvel emploi du calcul différentiel appliqué à différentes constructions possibles d'une courbe à partir d'une propriété de ses tangentes »⁵. Le premier article ne contient aucun calcul, Leibniz présente des nouvelles notions qui vont lui permettre de résoudre le problème

¹ *Ibid*, p. 2.

² *Ibid*, p. 2.

³ *Ibid*, p. 55 : « Par exemple on marquera par dd la différence seconde ou de second genre, par ddd , la différence troisième ou du troisième genre ; par $dddd$, la différence quatrième ou du quatrième genre ; & de même des autres ».

⁴ Leibniz, G. W., « De Geometria recondita », *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 138.

⁵ « De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente. Ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu », *AE*, avril 1692. « Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione », *AE*, juillet 1694.

général de « la courbe tangente à une infinité d'ordonnées », c'est-à-dire celle qui en langage moderne se nomme « enveloppe de courbes »¹. Dans le deuxième article il reprend la terminologie introduite dans celui du premier mais il s'applique essentiellement à présenter la méthode algorithmique de résolution. Dans son premier article, il explique qu'il lui arrive comme ici « d'user de termes [vocalibus] nouveaux ». Pour lui, c'est pouvoir en quelque sorte « faire signe à l'esprit, l'aiguillonner et concevoir des notions universelles »². En raison de la terminologie nouvelle – « variable », « constante », « paramètre » – dont Leibniz affirme la nécessaire introduction, nous examinons particulièrement le premier article³.

Dans un premier temps, afin de généraliser le problème de recherche d'enveloppe de droites qu'il a rencontré chez Tschirnhaus (caustiques) et chez Huygens (développées), le savant allemand étend la notion d'ordonnées à toutes sortes de lignes, qu'elles soient droites ou courbes. Seront nommées lignes ordonnées celles dont sont « données, en ordre, les positions »⁴. À cette définition, il ajoute une « seule condition » :

qu'on connaisse la loi permettant, pour tout point donné d'une courbe déterminée (prise comme ordinatrice), de tracer la courbe correspondante, cette dernière sera l'une des courbes qu'on doit tracer par ordre, courbes dont sont données en ordre les positions⁵.

¹ Pour une étude détaillée de ces deux articles, on pourra consulter l'ouvrage de Stevan, B, Engelsman, intitulé *Families of Curves and the origins of Partial differentiation*, Amsterdam, North Holland, 1984. Pour une étude sur la correspondance entre Leibniz et l'Hospital au sujet de la résolution de ce problème : « La correspondencia entre Leibniz y el Marqués de l'Hospital : sobre la envolvente de una familia de curvas », *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, volum XVI, Barcelona, 2018, p. 143-165.

² *Ibid*, p. 221.

³ Evelyne Barbin souligne que le problème de la recherche d'enveloppes de courbes – qui généralise celui de la recherche des développées – conduit Leibniz à construire une « théorie des courbes ». L'introduction en particulier de la notion de paramètre lui permet de « relier les courbes entre elles. Les courbes géométriques ne sont plus considérées comme des « individus » mais comme les espèces d'un même « genre », *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, *op. cit.*, p. 264.

⁴ « ideo nos tales lineas generalites vocabimus ordinatim ductas, vel ordonatim (positiones) datas. », *ibid*, p. 168.

⁵ « modo lex habeatur, secundum quam dato linea cujusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis, seu ordinatim positione datis », *ibid*, p. 168.

Dans la suite, il illustre ce type de construction par plusieurs exemples comme celui du développement d'une courbe, la développée est « l'ordinatrice » des droites perpendiculaires engendrée par le développement, c'est-à-dire la développante¹.

Pour trouver « l'ordinatrice », Leibniz explique que deux lignes (ordonnées) doivent être considérées comme concourantes lorsque qu'elles sont « très voisines (c'est-à-dire infiniment peu différentes, situées à une distance infiniment petite) »². Grâce à cette remarque, il est facile d'obtenir l'ordinatrice en prenant « dans l'ordre » ces points d'intersection. Il ajoute que l'ordinatrice a la caractéristique d'être tangente à toutes les courbes ordonnées, mais il ne démontre pas ce résultat estimant que cette propriété apparaît dès qu'on y réfléchit un peu³. Pour se faire comprendre, il compare le problème coutumier de la recherche de tangente à une courbe avec celui de la recherche de la courbe tangente à une famille « ordonnée » de courbes. Dans le premier cas : l'équation particulière de la courbe correspondrait à la « loi des ordonnées ». La tangente est unique, comme le sont les segments constants qui ont permis la construction de la courbe – qu'il appelle aussi « paramètres » –, ou toute « autre fonction ». Ils sont qualifiés d'« indifférentiables ». La tangente s'obtient en considérant deux ordonnées (infiniment proches l'une de l'autre), les coordonnées du point de tangence sont différentiables. Il suffit donc de différentier l'équation de la courbe. En revanche, dans la recherche d'une enveloppe de courbes, il y a à une infinité de « courbes ordonnées » par une loi exprimée à l'aide de paramètres : on cherche l'« unique » courbe qui leur est tangente. Ici, les coordonnées [d'un point de l'enveloppe de la courbe] sont « indifférentiables » et au moins un des paramètres est « variable » ou « différentiable » de sorte qu'en variant, ce dernier détermine le procédé de génération (toujours ordonné, des lignes).

Il précise en outre qu'il peut y voir des constantes communes à toutes les lignes et il les nomme de ce fait « constantes absolues [*constantissima*] ».

Il est manifeste que Leibniz introduit la notion de variation en insistant sur son caractère ordonné. Toute variation se produit en suivant l'ordre déterminé par la loi

¹ « (...) la courbe de développement qui, comme l'a découvert Huygens, est en effet tangente à toutes les droites perpendiculaires à la courbe engendrée par le développement », *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 217.

² « tales lineae *proxima*, tamen regulariter duae quaevis tales lineae *proxima*, (id est *infinitesima* differentes, seu infinite parvam habentes distantiam) concurrunt inter se », *ibid*, p. 168.

³ « quam proprietatem, cum meditantibus satis appareat, demonstrare hic non est opus ».

de progression des lignes ordonnées¹. Dans le deuxième article, il énonce le problème de recherche ainsi :

Les positions ordonnées [*positione ordinatim datis*] des tangentes (qu'il s'agisse ou non de droites) étant données, trouver la courbe ou, ce qui revient au même : trouver la courbe tangente à une infinité de lignes, dont on connaît les positions ordonnées [*ordinatim positione*]².

En reprenant la terminologie de l'article de 1692, il souligne encore :

Mais lorsqu'on compare les courbes de la série entre elles, c'est-à-dire lorsqu'on considère le passage [*transitum*] d'une courbe à l'autre, certains coefficients sont absolument constants, autrement dit permanents (ceux qui demeurent constants non seulement pour une, mais pour toutes les courbes de la série), les autres sont variables. Bien entendu pour que soit donnée la loi de la série des courbes, encore faut-il que ne subsiste parmi les coefficients qu'une seule variabilité (...) ³.

Leibniz ne précise pas ici le caractère continu de la variation, même si dans certains de ces exemples il est patent, comme celui généré par le mouvement de traction, la tractrice apparaissant comme l'enveloppe des tangentes⁴.

La terminologie étant introduite, il souligne que dans la résolution de ce type de problème :

tout repose entièrement sur mon Analyse des indivisibles et le calcul auquel cette Méthode fait appel n'est autre que mon calcul différentiel⁵.

¹ Henk Bos précise : « In the practice of the leibnizian calculus, the variable is conceived as taking only the values of the terms of the sequence. Thus the conception of a variable and the conception of a sequence of infinitely close values of that variable, come to coincide. », « Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus », *op. cit.*, p. 16. Ici, la série (ordonnée) des lignes ordonnées « très voisines » les unes des autres, constituent une variable.

² « Lineis (rectis vel curvis) propositam tangentibus, positione ordinatim datis, invenire propositam, vel quod eodem redit : invenire lineam, quae infinitas lineas ordinatim positione datas tangit », *AE*, juillet 1694, p. 311.

³ *Op. cit.*, p. 311, traduction de Marc Parmentier, *op. cit.*, p. 272.

⁴ Henk Bos remarque également utilise l'adjectif « continuus » pour la variable qui recouvre sur une suite de valeurs infinie, *op. cit.*, p. 16.

⁵ « Res autem pendet a nostra *Analysi indivisibilium*, et calculi hujus Methodi tantum applicatio est nostri calculi differentialis », *op. cit.*, p. 169.

Dans le cadre de la nouvelle analyse, le géomètre choisit selon « le but poursuivi » quelles sont les quantités qui doivent être supposées variables¹.

Dans le premier article, Leibniz n'illustre pas sa nouvelle méthode par des exemples traités à l'aide de son calcul, mais il soumet des problèmes comme celui de la recherche de l'enveloppe d'ellipses ou d'hyperboles. Il est convaincu que ceux qui entendent la nouvelle analyse « n'auront pas de mal à obtenir à leur tour ces résultats »². Et, en effet, dans sa première lettre adressée à Leibniz le 14 décembre 1692³, l'Hospital lui fait part de sa lecture de cet article des *Acta*. Il explique que pour saisir mieux son contenu il a imaginé un exemple : trouver la ligne qui touche une infinité de paraboles passant toutes par un point fixe D et dont chacun des sommets passe par une demi-ellipse donnée AEB . Il demande à Leibniz des indications pour le résoudre à l'aide du calcul différentiel. Dans la lettre du 8 décembre 1692⁴, il formule la même demande à Jean Bernoulli en faisant référence à l'article de Leibniz : « je voudrais bien que vous m'enuoyassiez une methode generale pour résoudre des problemes tels que celui-ci ». Ce dernier lui transmet des indications très fournies qui lui permettent de résoudre entièrement le problème : « La manière dont vous trouvez l'intersection de deux paraboles infiniment proches me paroît fort ingenieuse »⁵. Dans la lettre du 24 février 1693, l'Hospital affirme à Leibniz « avoir découvert la manière d'appliquer le calcul différentiel à l'invention de la ligne qui touche en rang une infinité d'autres lignes données »⁶ et lui décrit sa méthode. Au lieu de passer par une ellipse donnée les sommets des paraboles sont supposées passer par une ligne ABC quelconque, la résolution de l'Hospital est donc plus générale.

¹ « Au demeurant lorsque nous disposons de plusieurs équations déterminantes, rien ne nous empêche de considérer plusieurs paramètres comme différentiables, dans la mesure où nous pouvons également obtenir plusieurs équations différentielles permettant de les déterminer (...) Ceci nous montre bien qu'une même équation peut comporter plusieurs équations différentielles différentes, c'est-à-dire différentiable de plusieurs manières, selon le but poursuivi », *Naissance du calcul différentiel*, op. cit., p. 220

² *Ibid*, p. 220.

³ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 14 décembre 1692, AIII 5B, p. 448.

⁴ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 8 décembre 1692, AIII 5B, p. 160.

⁵ La lettre de Bernoulli est perdue. Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 2 janvier 1693, *ibid*, p. 161.

⁶ Lettre de de l'Hospital à Leibniz du 24 février 1693, AIII 5B, p. 496.

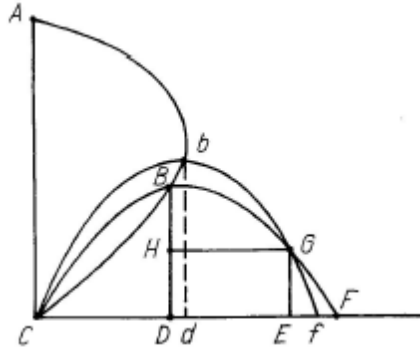


fig. 82

Les paraboles infiniment proches CBF, Cbf passent toutes par le point commun G , le point de leur intersection est ce qui est cherché. Les « connues » sont $CD = x$ et $DB = y$ et les « inconnues » sont $CE = u, EG = z$. Par la caractérisation d'une quelconque de ces paraboles, il peut écrire :

$$\frac{DF^2}{HG^2} = \frac{DB}{HB}$$

ou

$$2uxy - uuy = xxz \quad (1)$$

qui est « l'équation commune de toutes les paraboles ». Comme « les inconnues u et z demeurent les mesmes pendant que les connues x et y changent », il peut différentier l'équation (1) et obtient :

$$2uxdy + 2uydx - uudy = 2zxdx$$

puis en remplaçant z :

$$u = \frac{2yxdx - 2xxdy}{2ydx - xdy}$$

Puisque l'équation de la courbe ABC est connue, on peut déterminer une relation entre dx et dy , ainsi le problème est résolu. Sa résolution montre que l'Hospital a saisi que la notion de « quantité variable » est relative : selon le type de problème certaines quantités « changent » alors que d'autres « demeurent les mêmes », ce qui conduit à une équation différentielle dans laquelle seules les différentielles des quantités changeantes apparaissent.

Cependant, il est intéressant de remarquer que, ni dans cette lettre ni dans celle envoyée à Bernoulli, le 2 janvier, l'Hospital utilise le terme « constant » ou le terme « variable ». L'idée de variation est donc présente mais non nommée. Cet exemple sera repris à l'identique dans la section VIII de l'AI intitulée « Usage du calcul des

différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes »¹. Il introduit ce type de problème par l'exemple de la courbe tangente à une infinité de paraboles passant par un point donné et une courbe donnée. La résolution est décrite à l'identique à celle de la lettre adressée à Leibniz. L'équation différentielle est obtenue en supposant « constant » ce qui dans d'autres circonstances était variable. Leibniz répond à cette lettre vers la mi-mars 1693². Cette réponse est intéressante. Leibniz félicite l'Hospital de sa résolution, puis reprend le vocabulaire de « rang de lignes » en précisant encore par un exemple la différence entre le terme « constant » et celui de « constante absolue [*constantissima*] ».

Le problème de « trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes » est le plus général. C'est à l'occasion de sa recherche qu'il a été nécessaire à Leibniz d'introduire des vocables pour désigner des nouvelles notions³, notamment celui de « variable ». Il insiste sur le fait que l'analyse des infinis est la plus propre à traiter ces problèmes car elle dispose de l'outil calculatoire qui permet de discriminer ce qui est variable de ce qu'il ne l'est pas, idée sur laquelle repose la résolution du problème fondamental de la recherche d'enveloppe des courbes. La notion de « quantité variable » apparaît donc comme une « notion fondamentale » de l'Analyse des infinis. Nous y voyons la raison pour laquelle l'Hospital décide de placer sa définition au commencement de son ouvrage dans la section consacrée aux « éléments » du calcul différentiel. Même si les expressions « quantité variable » ou « variable » ne sont pas excessivement utilisées dans l'ouvrage⁴, l'Hospital a repéré que cette notion nouvelle est indispensable pour la

¹ *Ibid*, p. 131.

² Lettre de Leibniz à l'Hospital, mi-mars 1693, AIII 5B, p. 509.

³ Deleuze affirme que « La philosophie est l'art de former, d'inventer, de fabriquer des concepts », il place Leibniz justement dans la lignée de création exubérante : Et puis il y a les philosophes exaspérés. Pour eux chaque concept couvre un ensemble de singularités, et puis il leur en faut toujours d'autres, toujours d'autres concepts. On assiste à une folle création de concepts. L'exemple typique c'est Leibniz, il n'en a jamais fini de créer à nouveau quelque chose, *Cours sur Leibniz du 15 avril 1980*, <https://fr.scribd.com/document/16190915/Deleuze-Leibniz> (consulté le 15 août).

⁴ Le couple variable-constante est présent dans l'ensemble de l'*AI*. Par exemple, dans la section V : « Usage du calcul des différences pour trouver les développées » (*Ibid*, p. 55), il est indispensable de supposer une des trois différentielles dx , dy , du , respectivement de l'abscisse, de l'ordonnée ou l'arc, constante par rapport aux deux autres afin d'obtenir une formule de rayon de courbure. Nous reviendrons plus précisément sur cet exemple, *infra*.

résolution de nouveaux problèmes, lesquels sont traitables particulièrement ou exclusivement par l'analyse des infinis. Il fallait donc consacrer la notion de « quantité variable », c'est ce que l'Hospital repère et effectue pour la première fois.

La prégnance géométrique

La définition de la différence a un pendant géométrique notoire, la figuration de la différence est manifeste dès le début du traité. Nous avons vu dans le précédent chapitre combien dans ses recherches il avait été important pour l'Hospital d'interpréter les différentielles en termes géométriques. Cette exigence est présente dans l'AI, notamment dans la section IV destinée à la recherche des points d'inflexion et de rebroussement¹. Ici, il destine trois pages à décrire le « marquage » des différences secondes selon le type de coordonnées et selon la différence qui est supposée constante : « On peut marquer en cette sorte les différences secondes dans toutes les suppositions possibles ». Nous décrivons l'exemple dans lequel les appliquées sont parallèles :

L'Hospital considère trois points infiniment proches M, m et n . H est l'intersection de la droite nS , parallèle à Mm , k est l'intersection de Mm et de l'arc de centre n et de rayon mn . Les droites nl, li et kcg sont parallèles à mS et Sn . La section I a montré comment lire sur la figure, entre autres, les différences de l'abscisse : $dx = MR$ ou mS , de l'ordonnée : $dy = mR$ ou nS et de l'arc : $du = Mm$ ou mn .

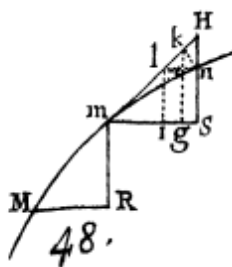
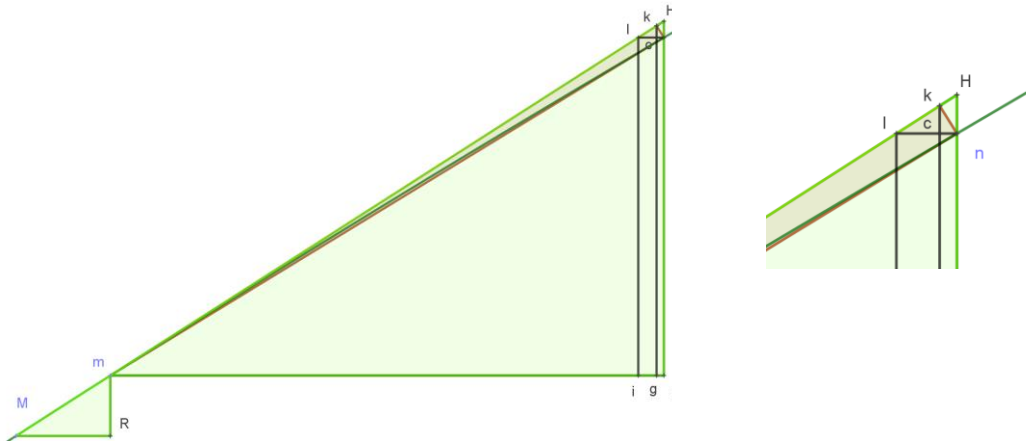
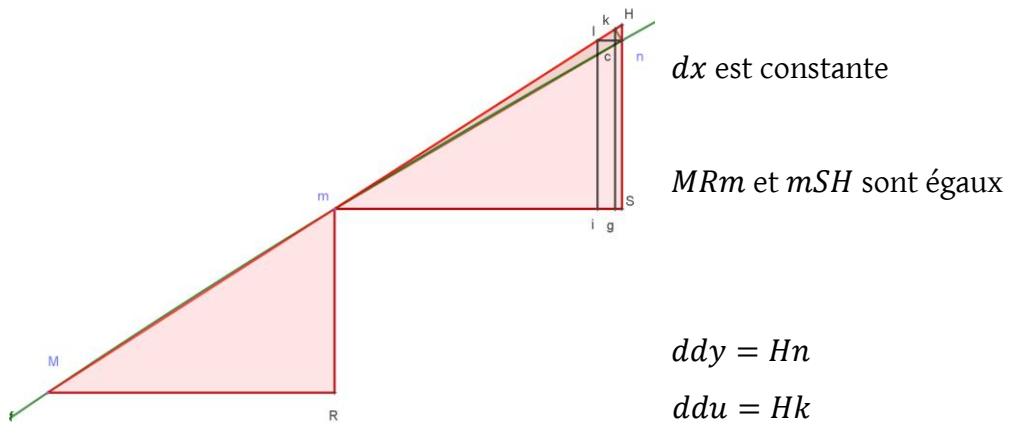


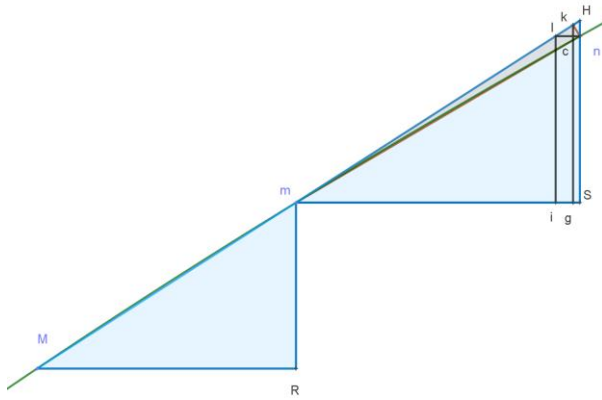
fig. 83

¹ « Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion et de rebroussement », AI, p. 55.



Pour pouvoir lire les différences secondes, l'Hospital explique qu'il faut supposer qu'une des trois différences est constante (par rapport aux deux autres). Il traite chacun des trois cas. Lorsque la variable dx est constante, c'est-à-dire lorsque MR et mS sont égales, les triangles MRm et mSH sont « égaux », ainsi la différence seconde des ordonnées est figurée par $Rm - Sn = Hn$ et celle de l'arc ddu par Hk . Lorsque dy est constante, c'est-à-dire lorsque Rm et Sn sont égales, les triangles mil et Mrm sont « égaux », $ddx = iS$ et $ddu = lk$. Enfin, lorsque du est constante, c'est-à-dire lorsque Mm et mn sont « égaux », les triangles MRm et mgk , ainsi ddy est figurée par kc et ddx par cn .



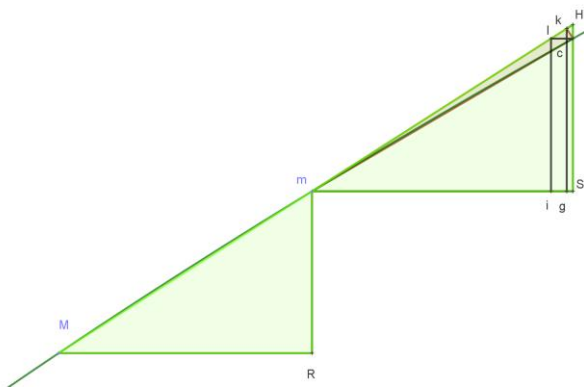


dy est constante

MRm et mil sont égaux

$$ddy = nl$$

$$ddu = lk$$



du est constante

MRm et mgk sont égaux

$$ddy = kc$$

$$ddx = cn$$

fig. 84

Nous avons vu plus haut que l'Hospital affirmait que pour « prendre la différence d'une quantité composée de différences quelconques », il fallait supposer que l'une des différences soit constante. Or, les règles de calcul ne l'exigent pas *a priori* même si cela simplifie l'expression des résultats finaux. En revanche, la figuration des différences secondes n'est possible que dans cette supposition.

2.2) Les demandes ou suppositions

Les « demandes ou suppositions » sont énoncées l'une à la suite de l'autre dans la première section de l'*AI* :

I. Demande ou supposition

On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose)

qu'une autre quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même.

(...)

II. Demande ou supposition

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés ; chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne¹.

À la fin de la Préface de l'*AI*, il était précisé que ces deux demandes allaient être formulées au commencement du traité « sur lesquelles seules il est appuyé » mais qu'elles ne seraient pas démontrées car :

(...) paraissent si évidentes, que je ne croy pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurais pû démontrer facilement à la manière des Anciens, si je ne me fusse proposé d'estre court sur les choses qui sont déjà connuës, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.

Cet avertissement est très intéressant à plusieurs titres. Nous pouvons remarquer tout d'abord que ces deux demandes (ou suppositions) sont mentionnées en vertu de leur caractère « évident » mais qu'elles ne sont pas ici énoncées. Non énoncées, elles sont nonobstant largement présentes dans la Préface, par exemple, celle de la nouvelle égalité est évoquée indirectement lorsqu'il est question de rapport ou de comparaison entre infiniment petits de différents ordres. Une démonstration « à l'ancienne » serait facile mais superflue dès que le lecteur y prête un peu d'attention.

Quel rôle joue cet avertissement situé juste avant l'exposé de la nouvelle analyse ? Comment l'interpréter dans la lignée des discours des géomètres dont hérite le Marquis ?

Nous avons souligné que la première section de l'*AI* suit, selon l'appellation arnauldienne, la « méthode de doctrine » dont usent les géomètres pour « faire entendre la vérité trouvée »². Dans les *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Arnauld juge opportun de placer entre la Préface et le premier livre des « définitions de quelques

¹ Articles 2 et 3, *ibid*, p. 2-3.

² Voir Chapitre 2, §3), « Le langage des indivisibles : évident ?, le témoignage d'Arnauld ».

mots dont on s'est servi dans ces *Elemens* sans les définir, parce qu'ils sont plutôt de Logique que de Geometrie »¹. Il distingue les différents types d'énoncés rencontrés dans le genre que constitue des éléments de géométrie, comme peuvent l'être un « axiome », une « demande » ou un « théorème ». L'« axiome » est une proposition qui est « si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve ». Proche du sens de celui-ci, la « demande » est le mot dont on se sert quand :

on a quelque chose à faire, qui est si facile qu'on a pas besoin de preuve pour démontrer qu'on a fait ce qu'on vouloit faire : comme ; *Décrire un Cercle d'un intervalle donné.*

La demande et l'axiome sont donc liés par la clarté et l'évidence de leurs énoncés. Il arrive qu'Arnauld ne les distingue pas².

Comme Arnauld, Lamy dans ses *Éléments de géométrie* (1685) destine quelques pages à une « définitions de quelques termes dont on se sert en mathématiques » qu'il place également entre la Préface et le corps du texte. « L'axiome » est une « proposition si claire qui n'a pas besoin de preuve. La « supposition ou demande » n'est pas si « évidente que l'axiome » mais elle est autant incontestable. On demande de l'accorder pour ne pas être obligé de la démontrer³. Dans l'édition de 1695, Lamy modifie la définition d'axiome. Il maintient l'idée qu'un axiome est un énoncé clair mais il souligne que son évidence est partagée : « on appelle axiome une vérité claire & constante qu'on connoît sans étude et dont tout le monde convient »⁴. Par ailleurs, il préfère au terme « demande » le terme « proposition évidente » qu'il définit comme étant une proposition qui « n'est pas connue avant qu'on l'étudie, mais qui le devient aussitôt qu'on y fait attention »⁵. Nous avons remarqué⁶ également que dans l'édition de 1695, l'énoncé caractérisant le cercle comme polygone d'une infinité de côtés changeait de statut puisque de proposition il devenait une demande. Par ce changement son caractère évident était affirmé fermement.

¹ *Nouveaux éléments de géométrie*, *op. cit.*, non paginé, entre la Préface et le Livre I.

² Livre V, second et troisième « axiome ou demande » qui correspondent à la possibilité de mener une unique droite passant par deux points et à celle de prolonger une droite donnée.

³ Lamy, Bernard, *Éléments de Géométrie*, *op. cit.*, édition de 1685, non paginé.

⁴ Lamy, Bernard, *Éléments de Géométrie*, *op. cit.*, édition de 1695, p. 2

⁵ *Ibid.*

⁶ Chapitre 3, 2.1) « Le cercle comme polygone à une infinité de côtés : évident ou à expliquer ?, Lamy (les éditions de 1685 et 1695) ».

Il est important de souligner qu'en écrivant chacun de leurs éléments de géométrie et s'adressant à leurs lecteurs contemporains, Arnauld et Lamy souhaitent expliciter quels sont les types d'énoncés dont on se sert pour exposer la géométrie. On peut se demander quel rôle joue l'insertion de ce paragraphe, commune aux deux auteurs. Dans *La logique ou l'art de penser*, Arnauld et Nicole pointent les cinq principaux défauts qui peuvent se rencontrer dans la « méthode de doctrine », ces cinq défauts apparaissent exemplairement dans l'exposition dans les *éléments* d'Euclide¹. Le premier défaut qui est « la source de presque tous les autres [quatre autres] » est :

d'avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plutôt que de l'éclairer².

Pour avoir une « parfaite science de quelque vérité », il ne suffit pas d'être convaincu que cela est vrai, mais il est en revanche essentiel de savoir « par des raisons prises de la nature de la chose même, pourquoi cela est vrai »³. Les autres défauts découlent de ce premier : « prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuve », « démontrer par l'impossible », « démontrer par des voies très éloignées » et « n'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature »⁴. Or, pour ne pas tomber dans l'un de ces cinq défauts, la connaissance précise d'une typologie des énoncés propres à l'exposition de la géométrie peut être utile, d'où à notre sens l'insertion du paragraphe destiné aux « définitions de quelques termes dont on se sert en mathématiques ». Les réflexions port-royalistes portées sur la « méthode de doctrine », en particulier sur ce que signifie pour un énoncé d'avoir le statut de demande, éclairent sur les modalités qui amènent un écrit à être considéré comme des éléments de géométrie. En précisant le sens d'axiome ou de celui de demande, Arnauld et Lamy avertissent qu'il est possible que des éléments de géométrie puissent s'appuyer sur d'autres demandes que celles des éléments euclidiens, c'est en ce sens qu'ils sont regardés comme « nouveaux ». Cependant, il est indispensable que le caractère évident de tels énoncés soit reconnu « par tout le monde ». Certes, un

¹ Voir Chapitre 2, §3), « Le langage des indivisibles : évident ?, le témoignage d'Arnauld ».

² Arnauld, Antoine, Nicole, Pierre, *La logique ou l'art de penser*, *op. cit.*, p. 307.

³ *Ibid*, p. 307.

⁴ Arnauld, Antoine, Nicole, Pierre, *La logique ou l'art de penser*, *op. cit.*, p. 306-313.

énoncé mathématique ne peut être évident indépendamment de celui qui l'affirme comme tel¹ mais sans que « tout le monde s'accorde » à reconnaître l'évidence d'un énoncé, la demande reste lettre morte. Le lecteur à qui l'auteur adresse cet énoncé est donc particulièrement visé puisque dépend aussi de lui l'acceptation de son caractère évident.

Nous avons souligné plus haut que la première section est à mettre à part à cause de sa présentation. Le caractère évident de considérer un cercle comme un « polygone d'une infinité de côtés » est évidente dans les écrits des deux auteurs de Port-Royal. Cet énoncé est généralisé dans l'*AI* et son caractère évident affirmé en prenant le statut de demande ainsi que l'explique la Préface de l'ouvrage. Le lecteur est averti de ce qui désormais n'a plus besoin ni d'être démontré à la manière des Anciens, ni d'être justifié : la courbe comme polygone d'une infinité de côtés est une évidence, comme l'est la nouvelle égalité. Ainsi, pour présenter sa nouvelle analyse, l'Hospital adhère à la « méthode de doctrine » telle que la considèrent Arnauld et Nicole, il se place ainsi dans la lignée de Port-Royal.

Une comparaison avec les *Lectiones de calculo differentialium* est également utile. Comme nous l'avons vu, ces deux demandes y sont présentes.

Tout d'abord, nous avons remarqué dans le chapitre 4 que Jean Bernoulli les énonçait à l'indicatif, ce qui conduisait à l'impression d'une « réalité » des objets auxquels le calcul se réfère. Ici, l'Hospital, s'adressant au lecteur, l'informe des suppositions nécessaires qui vont régler la pratique du calcul différentiel et que le lecteur, en ouvrant ce traité, doit accepter. De plus, en énonçant chacune de deux manières différentes et en les séparant par « ou ce qui est la même chose » l'Hospital précise que cette nouvelle égalité est fondée sur la notion de variation puisque deux quantités sont considérées comme égales ou une quantité est considérée comme « demeurant » la même lorsque la variation est infiniment petite par rapport aux quantités variables.

Ces deux demandes sont invoquées dans l'ensemble de l'ouvrage, notamment dans la section suivante en abordant la recherche des tangentes, l'Hospital définit la tangente comme « le prolongement » d'un des petits côtés du polygone qui compose

¹ Barbin, Evelyne, « Historicité de la notion d'évidence en géométrie, entre évidence visuelle et évidence manipulatoire », in *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996, p.124.

une ligne courbe »¹. L'indication en marge par « art 2 » ou « art 3 » rend commode de repérer quand l'Hospital fait appel explicitement à ces deux demandes. Nous avons répertorié qu'il recourt expressément huit fois à l'article 2 : mise à part la justification de la règle de différenciation du produit, les autres appels servent à légitimer de prendre une figure rectiligne à la place d'une figure curviligne qui diffère de la première d'un infiniment petit d'ordre deux².

Nous pouvons remarquer ensuite que dans la première demande l'Hospital introduit l'expression « quantité infiniment moindre » mais n'explique pas ici ce qui par ce terme peut être désigné. Nous verrons comment il s'en sert lorsqu'il démontre la règle de la différence d'un produit. Cependant, il nous semble que cette demande découle du principe de continuité³. Leibniz et l'Hospital échangent sur ce principe, le marquis estime que celui-ci est « d'une utilité merveilleuse ». Par ce principe universel une égalité peut être considérée comme « une inégalité infiniment petite » à condition que les termes de cette égalité varient continument. Selon Leibniz, le principe de continuité est « absolument nécessaire en Géométrie », il s'applique donc en particulier au cas de deux quantités géométriques variables qui pourront être prises l'une pour l'autre lorsque leur différence pourra « estre diminuée au-dessous de toute grandeur donnée *in datis* ou dans ce qui est posé » et « *in quaesitis* ou dans ce qui en résulte ». Leibniz ajoute que ce principe dépend d'un principe plus général : « *Datis ordinatis etiam quasita sunt ordinatis* ». Il s'agit d'un principe d'ordre que le principe de continuité induit. L'Hospital omet de situer la notion de continuité en relation avec l'idée d'ordre. En revanche, nous avons remarqué combien il est important pour lui de spécifier dans ses définitions le caractère continu de la variation. Ainsi « deux quantités qui ne diffèrent continument que d'une quantité infiniment moindre », signifie qu'elles peuvent être prises pour égales en vertu du principe de continuité.

Les règles

Chez Bernoulli, le fait que la différence de la constante soit nulle apparaissait sans explication au cours de la justification de la règle pour la somme. Il est

¹ *AI*, p. 11.

² *Ibid*, p. 20, p. 93, p. 138, p. 145, p. 156, p. 159.

³ Voir notre chapitre 4, 2.3), « La réception du « principe de continuité » chez l'Hospital ». On pourra consulter à ce sujet l'article de Breger, Herbert, « Le continu chez Leibniz » dans Salanskis/Sinaceur (dir.), *Le labyrinthe du continu*, Paris 1992, p. 77.

intéressant de remarquer que pour l'Hospital, il apparaît sous forme d'un corollaire qui suit la définition de « différence ». Comme une quantité constante est celle qui « demeure la même pendant que les autres changent », il est « évident que la différence d'une constante est nulle ou zéro ».

Les règles de différenciation arrivent après l'énoncé des deux demandes. Ceci est cohérent car l'Hospital y fait appel pour justifier les énoncés des règles. Il est intéressant d'observer comment il utilise la première demande pour montrer la règle de la différence du produit de deux quantités variables x et y : « la différence de xy est $ydx + xdy$ »¹. Comme la quantité variable x devient $x + dx$ et la quantité variable y devient $y + dy$, le produit xy devient $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Il s'agit d'expliquer pourquoi $dxdy$ est « quantité infiniment petite par rapport aux autres ». Bernoulli avait renvoyé à la première demande mais il n'avait pas expliqué pourquoi il se trouvait bien dans la situation pour pouvoir y faire appel. L'Hospital va comparer $dxdy$ à ydx en comparant chacune de ces quantités à la différence dx : « si l'on divise ydx & $dxdy$ par dx , on trouve d'une part y , & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle ». La comparaison des deux quantités au tiers dx montre que l'une est analogue à la différence de l'autre donc par définition de la différence « infiniment moindre qu'elle ». Comme la Préface l'annonçait, l'Hospital s'autorise à établir des relations entre les différences en particulier en prolongeant la pratique usuelle avec les grandeurs.

2.3) Enquête sur l'origine de quelques « fondements » de l'analyse des infinis de l'Hospital

Nous avons vu que dans la Préface est soulignée le caractère « évident » des deux demandes. Dans ce paragraphe nous apportons des précisions supplémentaires portant sur l'origine du caractère évident de la deuxième demande chez l'Hospital. Par ailleurs, dans la première section l'Hospital s'exempte de définir le terme « continuellement » qui apparaît dans les deux définitions principales ainsi que dans l'ensemble du livre. Ainsi, afin de préciser l'acceptation qu'il retient de ce terme, il est utile de suivre dans quelles situations l'Hospital en use. Pour cela nous enquêtons non seulement parmi les pages de l'AI mais aussi dans celles d'un autre traité,

¹ *Ibid*, p. 4.

probablement écrit à la même époque et intitulé *Traité analytique des sections coniques et de leurs usages pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez*¹. Les raisons de ce choix apparaissent dans ce qui suit.

La demande de considérer la courbe comme polygone d'une infinité de côtés est capitale tout au long du développement de la Préface. Or, nous avons vu qu'elle n'est pas inédite et qu'elle est extrêmement présente dans la littérature mathématique du XVII^e siècle, en particulier chez les géomètres dont l'Hospital est héritier : Antoine Arnauld et Bernard Lamy². Leurs preuves reposant sur la considération de polygones réguliers, ils parvenaient donc à justifier l'appellation du cercle comme polygone régulier d'une infinité de côtés. Ainsi, chez l'Hospital, contrairement à Arnauld et Lamy, aucune spécification des angles du polygone n'est fournie. Cette indétermination a la vertu de permettre d'introduire la notion de « courbure de la ligne » puisque les angles des côtés du polygone la déterminent³. Or, Arnauld et Lamy ne s'intéressent à la notion de « polygone d'une infinité de côtés » que dans le seul but de l'appliquer à des démonstrations concernant le cercle dont l'une des propriétés est justement d'avoir une courbure constante. Il leur est donc suffisant de considérer un polygone comme un polygone régulier. Il est important de rappeler que ces deux auteurs précisaient également qu'une démonstration à la manière des Anciens était possible mais non nécessaire, Arnauld en fournissait une ébauche.

Bernard Lamy est très proche de Malebranche⁴ et du groupe malebranchiste, d'esprit extrêmement curieux, il se tient au courant des nouveautés scientifiques et de leurs publications. Dans son ouvrage *Entretiens sur les sciences*⁵, il consacre une section dans laquelle il conseille les « bons livres⁶ » qui sont indispensables pour la formation

¹ *Traité analytique des sections coniques et de leurs usages pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez*. Ouvrage posthume de mr le Marquis de l'Hospital, honoraire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, chez Montalant, 1707 (1^{er} édition).

² Chapitre 2, §3), « Le langage des indivisibles : évident ?, le témoignage d'Arnauld » et chapitre 3, §2.1 « Le cercle comme polygone d'une infinité de côtés : évident ou à expliquer ?, Lamy (les éditions de 1685 et 1695) »

³ AI, section I, II demande ou supposition, *op. cit.*, p. 3.

⁴ Lettre de Malebranche à Lelong « Avec Bernard [Lamy], on s'aime de tout cœur c'est un ami » cité dans Girbal, François, *Bernard Lamy*, PUF, Paris, 1964, p. 112.

⁵ Lamy, Bernard, *Entretiens sur les sciences*, édition critique présentée par François Girbal et Pierre Clair, PUF, Paris, 1966.

⁶ « Entretien VI », *ibid*, p. 197

d'un jeune apprenti. Dans l'édition de 1694, Lamy donne des références bibliographiques pour l'étude des courbes¹. Il est informé de la publication prochaine d'« un Traité des Sections coniques et un Traité sur l'Analyse » rédigés par l'Hospital et qui d'après lui sont « une suite » de ses deux traités, *Elémens de Mathématiques* et *Elémens de Géométrie*. Si Lamy ne fait pas partie de ceux qui s'initient au calcul leibnizien, il est au courant de l'intérêt que le calcul suscite auprès de ses amis du groupe malebranchiste : « J'entends parler avec beaucoup d'éloges des Nouvelles Découvertes de Mr de Leibnitz sur l'Analyse »². Lorsque le préfacier de l'AI affirme l'évidence de la deuxième demande, il se place donc dans une lignée de mathématiciens pour laquelle considérer une courbe comme « polygone d'une infinité de côtés » est une évidence partagée et reconnue. Cependant, l'Hospital va au-delà puisque la forme de ce polygone est la plus générale possible. Dans ce sens, il adhère à la conception leibnizienne de la courbe comme « polygone infinitangulaire » que nous avons analysée³.

L'objet de l'Analyse des infinis est de traiter les infiniment petits qui apparaissent dans la supposition de la courbe comme polygone d'une infinité de côtés. Ce message ne cesse d'être répété dans la Préface. C'est en raison de la considération de la courbe comme polygone d'une infinité de côtés que l'étude et le traitement des infiniment petits prennent sens. Le lecteur accepte le caractère évident de cette demande et ainsi peut débiter son initiation à la nouvelle analyse.

Nous rappelons que vers 1694 un traité des sections coniques devait être publié conjointement à un traité de calcul différentiel. Ce souhait est abandonné. Cependant, l'Hospital entreprend indépendamment de Malebranche une nouvelle rédaction de ce traité des coniques, probablement entre 1698 et 1700⁴, peu après la publication de *l'Analyse des infiniment petits*. Il meurt en 1704 laissant les manuscrits (non trouvés). Malebranche et Varignon sont chargés de publier ces écrits : un traité de sections coniques est finalement publié à titre posthume en 1707, il s'agit du *Traité analytique des sections coniques* qui se présente sous forme de définitions, propositions et théorèmes, certains d'entre eux étant des problèmes de construction. Chacun des

¹ *Ibid*, p. 221-223.

² *Ibid*, p. 222.

³ Voir chapitre 3, 3.2) Leibniz : au-delà de Wallis ?, les opuscules des *Acta Eruditorum*.

⁴ Malebranche, Nicolas, *Mathematica* p. 313.

trois premiers livres du traité sont destinés à une présentation d'une des trois coniques¹. Ils ont une structure très similaire : définitions, nombre d'intersections d'une droite donnée avec la conique, recherche de la tangente en un point. Chacun de ces trois livres commence par décrire la construction de la conique correspondante à l'aide d'ustensiles variés, certains pouvant glisser : règles, fils tendus à l'aide d'un style, équerres. Un mouvement réglé de ces instruments conduit au tracé de la conique². Le livre IV présente et démontre des propriétés communes aux trois coniques. Pour ce faire, il peut arriver à l'Hospital de considérer que l'ellipse ou l'hyperbole sont des cas particuliers de la parabole ou l'inverse³. Le livre Cinquième intitulé « De la comparaison des Sections coniques entre elles, & de leurs Segmens », nous intéresse particulièrement puisque, dans le but de comparer les aires de coniques, le Marquis présente de façon ordonnée une série de lemmes, théorèmes et corollaires de teneur infinitésimale mais dans lesquels le calcul leibnizien est complètement absent. Nous rappelons que dans son manuscrit de 1692, l'Hospital justifiait la deuxième demande⁴ de l'AI géométriquement. Nous allons voir ci-dessous que dans le *Traité analytique des Sections coniques*, l'autre justification qui y est proposée.

Les deux premiers lemmes sont d'une grande importance car il s'en sert ensuite pour démontrer une grande partie des autres :

Lemme I :

¹ L'Hospital traite de leurs propriétés, entre autres : foyers, diamètres, tangentes Il recherche les tangentes par des arguments géométriques. Aucune utilisation de méthode de tangente n'est utilisée contrairement à son obtention dans le manuscrit FR 25306 ou FR 25308 qui est effectuée en utilisant la méthode de Barrow. Mais celle-ci est présentée de cette manière dans le Cinquième livre qui nous intéresse particulièrement.

² *Ibid*, p. 1-2 (parabole), p. 19 (ellipse), p. 47 (hyperbole).

³ « Et par conséquent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole, dont l'axe est infini : sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse », *ibid*, p. 101. Leibniz utilise la même image dans son article sur le principe de continuité, « Lettre de M. L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature pour la considération de la sagesse divine, pour servir de réplique à la réponse du R.P.D. Malebranche », *Nouvelles de la République des lettres*, juillet 1687, art. VIII, p. 744-753 (voir notre commentaire au chapitre 4, « La réception du principe de continuité chez l'Hospital », 2.3) « Il y a longtemps que je sçais que vous êtes universel » : la relation l'Hospital-Leibniz.

⁴ Chapitre 3, §2.2) La méthode des tangentes de l'Hospital (1692) : l'articulation entre le polygone à une infinité de côtés et le calcul.

Si la différence de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales¹.

Ce lemme est une reformulation de la première demande de l'*AI*. En effet, des quantités dont la différence « diminuë continuellement » sont celles qu'il a définies comme « quantités variables ». De même, la différence qui « diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée » est ce qui est appelé « quantité infiniment moindre » par rapport à celles dont elle est la différence.

Pour démontrer ce lemme, l'Hospital raisonne, par l'absurde : si ces deux quantités n'étaient pas égales, il y aurait entre elles une différence assignable, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il énonce ensuite le deuxième lemme :

Lemme II

Si la raison de deux quantités est telle que l'antécédent demeurant toujours le même, sa différence avec son conséquent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales².

Nous interrogeons la ressemblance entre l'énoncé de ces deux lemmes avec celui du lemme I du livre I dans les *Principia Mathematica* de Newton³ :

Les quantités, et les raisons des quantités, qui en un quelconque temps tendent continuellement [*constanter*] à l'égalité, et qui avant la fin de ce temps peuvent s'approcher de plus près l'une de l'autre que de toute différence donnée, sont à la fin égales⁴.

Le traité newtonien a été lu par l'Hospital⁵ et les membres du groupe oratorien⁶ mais « le style mathématique¹ » newtonien est complètement absent de l'*AI*. Certes,

¹ *Ibid*, p. 122.

² *ibid*, p. 123.

³ Newton, Isaac, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Strater, London, 1687, p. 26.

⁴ « Quantitates, ut & quantitatum rationes, quae as aequalitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia ; siunt ultimo aequales », *Principia*, *op. cit.*, p. 26.

⁵ Dans la correspondance avec Jean Bernoulli, l'Hospital fait référence aux *Principia*, en particulier au lemme XXV dans les lettres du 2 janvier 1693 et 20 février 1693 (*op. cit.*, p. 163 et 165).

⁶ Nicolas Malebranche, *Mathematica* p. 62. Costabel signale deux lettres de Jacquemet à Reyneau de l'année 1692, il ne précise pas comment il a établi que l'Hospital a lu l'ouvrage. On pourra consulter :

Newton est cité dans la Préface dans le but d'expliquer que le savant anglais a trouvé quelque chose de « semblable » au calcul de Leibniz « comme il paroît par l'excellent Livre intitulé *Philosophia naturalis principia Mathematica* » mais qu'il y manque « la caractéristique de M. Leibniz » qui « rend le sien [calcul] beaucoup plus expéditif »². Cette remarque fait référence à l'article de Leibniz du 30 août 1694³, comme l'indique le préfacier en marge. Le document que nous analysons est le premier à notre connaissance dans lequel l'Hospital adopte un type de présentation proche de celle qui apparaît dans le livre I des *Principia*.

Le lemme III énonce :

Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque ABG un arc MN infiniment petit, c'est-à-dire, moindre qu'aucune grandeur donnée ; & qu'on imagine par les extrémités de cet arc les ordonnées MP, NQ , à l'axe ou diamètre AC , avec les parallèles MR, NS , à ce diamètre : je dis que les parallélogrammes $PQRM, PQNS$, peuvent être pris chacun pour l'espace $PQNM$ renfermé entre les ordonnées PM, QN , la petite droite PQ , & le petit arc de la courbe MN ⁴.

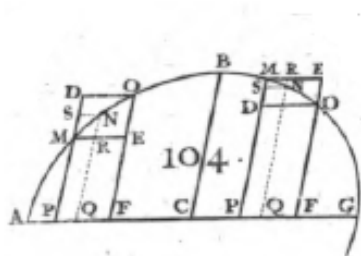


fig. 85

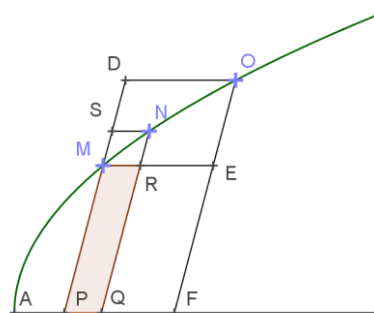


fig. 86

Ce lemme⁵ est fondamental pour la suite de son développement. Par-là, il déduit plusieurs propositions liées entre elles et dont l'ensemble constitue une sorte

Mónica Blanco Abellán, « Could l'Hospital have read Newton's *Methodus Fluxionum* ? », 3rd International Conference of the European Society for the History of Science. "3rd International Conference of the European Society for the History of Science", Viena, 2008, p. 61-68.

¹ François de Gandt, « Le style mathématique des *Principia* de Newton », *Revue d'histoire des Sciences*, 1986, tome 39, n°3, p. 195-222.

² Préface de l'*AI*.

³ « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes par M. Leibniz », *JS*, 1694, p. 405.

⁴ *Op. cit.*, p. 123.

⁵ Correspond aux lemmes II, III et IV du livre I des *Principia*.

de compilation de résultats infinitistes¹. Par la suite, l'Hospital énonce plusieurs propositions qui justifient des relations de comparaison entre éléments géométriques, au voisinage d'un point de la courbe. Le lemme IV énonce :

Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit MN ; & qu'on imagine les tangentes MT, NT , qui se rencontrent au point T , la sous-tangente MN , & la droite NS perpendiculaire sur MT prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc MN la sous-tangente MN , ou la somme des deux tangentes MT, NT , ou enfin la droite MS ².

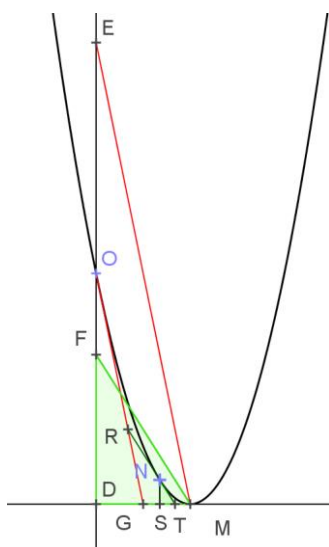


fig. 87

La similitude de cet énoncé avec celui du lemme VII des *Principia*³ est à nouveau patente. La seule différence est que Newton n'écrit pas que ces quantités peuvent être prises l'une pour l'autre mais que leur « dernière raison » est celle de l'égalité⁴.

Comme le lemme III¹, la démonstration de ce lemme procède en trois étapes². Dans la première étape, l'Hospital fait des considérations sur une figure finie. Pour

¹ Concernant les quadratures, Hospital établit que toute portion de courbe est la somme de parallélogrammes inscrits ou circonscrits générées par une quelconque division infinie de la courbe (Corollaire I, article 184). Deux figures $CMDOC, EGFHE$ placées entre deux parallèles et telles que quel que soit la parallèle MH coupant les figures, les lignes interceptées MO et GH aient un même rapport alors les figures ont le même rapport (Corollaire III, art. 186) Il ne fait aucune référence à Cavalieri.

² *Ibid*, p. 127.

³ « Jisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chordae & tangentis ad invicem est ratio aequalitatis. », *op. cit.*, p. 30.

⁴ « quod ultima ratio arcus, chordae & tangentis ad invicem est ratio aequalitatis », *op. cit.*, p. 30.

ceci, il considère du côté de N , l'arc fini MO . OG est la tangente en O et OD est parallèle à NS . Dans cette situation il affirme qu'en raison du triangle rectangle MDO , il est « clair » que :

$$\text{Tangente } MD < \text{corde } MO < \text{arc } MNO < MG + GO (*)$$

Il considère ensuite la tangente TR au point N qui coupe les tangentes MO et OG respectivement aux points M et G . En raison de la concavité de l'arc MNO , les points T et R sont respectivement situés entre M et G et entre O et G de sorte que qu'il peut affirmer que :

$$\text{angle } OGD > \text{angle } RTG (= \text{angle } NTS)$$

Il considère ensuite les droites ME et MF parallèles respectivement aux tangentes OG et NT et rencontrant la droite DO respectivement aux points E et F .

Dans la deuxième étape, l'Hospital imagine que le point O se « meut continuellement » vers N . Dans ce cas il est « visible » que l'angle OGD (ou l'angle EMD) « diminue continuellement » jusqu'à ce qu'il s' « évanouit » dans l' « instant » où le point O parvient en M puisque la tangente OG se confond avec la tangente MD .

Dans la troisième étape l'Hospital interprète en termes d'infiniment petits le passage délicat entre le fini (MO fini) et l'évanouissement complet décrit dans deuxième étape ($M = O$). Ce passage est celui dans lequel O « passe » par N , c'est-à-dire lorsque M est « infiniment proche de N ». Dans ce cas, la tangente ME est en MF et ne diffère de la tangente MD que « d'une grandeur moindre qu'aucune donnée ». Or d'après le lemme II, dans ce cas, le rapport $\frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MD} = \frac{TN}{TS}$ est égal à un. La somme des deux tangentes $MT + TN$ est égal à MS donc l'inégalité (*) devient une « égalité » et MS peut être pris pour l'arc MN ou la corde MN .

Pour démontrer cette dernière étape, Newton procédait par une « méthode des témoins finis »³ qui consiste à « déformer une figure géométrique jusqu'à un état

¹ Nous n'avons pas décrit la démonstration de ce lemme mais nous soulignons qu'elle a la même structure en trois temps que celle que nous allons exposer.

² Il se place d'abord dans le cas concave (puis traite ensuite de la même manière le cas convexe et le cas concave-convexe).

³ François de Gandt, « Le style mathématique des *Principia* de Newton », *op. cit.*, p. 198.

limite ». Mais, contrairement à l'Hospital, il conserve « dans le fini une configuration toujours semblable »¹.

De ce lemme, l'Hospital déduit que l'on peut considérer une tangente comme une droite passant par deux points infiniment proches² et une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés :

d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puisqu'elle n'en différera en aucune manière. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, seront les tangentes de cette courbe ; puisqu'ils passent chacun par deux de ses points infiniment proches l'un de l'autre³.

À la suite de ce corollaire il indique par une « Remarque » que :

On doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui sont toujours concaves dans toute leur étendue vers le même côté, comme sont les sections coniques, au lieu que cette dernière notion est générale pour toutes sortes de lignes courbes. Aussi est-ce elle qui sert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des Infiniment petits, & que j'ose assurer être là plus simple & la plus générale qu'on puisse souhaiter⁴.

Ce passage est très intéressant. L'Hospital a en effet fourni une définition restrictive de lignes « tangentes » mais qui suffisait pour obtenir celles des coniques. Dans le cas de la parabole – mais les autres définitions sont analogues – elle était définie comme :

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, et qui étant continuée de part et d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors⁵.

L'Hospital affirme que ce qu'il vient de démontrer – et qui lui sert par la suite à démontrer d'autres propositions concernant les coniques – est plus général. Ainsi, si

¹ Pour la description et l'analyse du lemme VII, *ibid*, p. 205-206.

² Corollaire 1.

³ *Ibid*, p. 128.

⁴ Ces résultats étaient indispensables à l'Hospital pour établir des résultats sur les coniques. Ces derniers sont divers et concernent dans un premier temps la similitude de coniques, l'égalité de secteurs elliptiques et hyperboliques. La dernière partie est destinée à la quadrature des paraboles et hyperboles généralisées (c'est-à-dire si m et n sont des entiers, ce sont les courbes d'équation $y^n = x^m a^{n-m}$ ou $x^m y^n = a^{m+n}$) à l'aide d'une quadratrice (Proposition XIII et XIV). Pour construire cette quadratrice, il a auparavant trouvé la valeur des sous-tendantes en utilisant la méthode de Barrow.

⁵ *Ibid*, p. 2.

la notion de tangence qu'il a introduite au début de son traité suffit pour le traitement des coniques, il souligne que le véritable « fondement » de la notion de « tangente » provient de l'analyse des infinis. L'idée selon laquelle le « polygone à une infinité de côtés » de l'analyse des infinis est l'outil essentiel à la lecture de la courbe est donc ici à nouveau affirmée fermement.

Dans cette démonstration, comme dans nombreux passages du traité, l'idée de mouvement est essentielle. L'Hospital s'en sert pour décrire l'engendrement de toutes les lignes géométriques qui apparaissent dans le traité. Dans la plupart des occurrences, il précise que ce mouvement procède « continuellement ». Ce terme apparaît dans une dizaine d'autres passages, la plupart se trouvent justement dans le livre V. L'Hospital en use pour qualifier la manière dont certaines quantités géométriques « diminuent », « se meuvent » ou « changent ». Ces dernières sont donc des quantités variables, telles qu'elles sont définies dans l'*AI*, même si ce terme, comme également celui de « constante », est complètement absent du traité. Dans l'*AI*, le terme « continuellement » apparaît une vingtaine de fois. La plupart des cas, il spécifie la modalité de changement des quantités géométriques (abscisses, ordonnées, courbure, etc). C'est tout à fait cohérent car ces quantités sont considérées comme des quantités variables avec lesquelles l'analyse des infinis sait calculer. Le terme « continuellement » qualifie aussi le mouvement, par exemple, celui des points qui « s'approchent continuellement » ou celui qui est à l'origine de l'engendrement d'une courbe. Par ailleurs, l'Hospital utilise le terme « continuellement » dans un sens plus restrictif, pour exprimer un état permanent¹, par exemple², une ligne *BH* qui joint deux cercles passe « continuellement » par un point *G*. On peut noter qu'il n'apparaît jamais dans ce sens dans le traité des sections coniques.

Nous avons examiné l'usage du terme « continuellement », en particulier dans sa relation avec le terme « mouvement ». Ayant enquêté sur deux traités différents quant à leurs sujets, nous permet de conclure à un usage relativement uniforme de ce terme. En effet, le terme « continuellement » apparaît lié à un état qui se répète sans cesse ou à une succession sans interruption. De plus, il est possible de considérer que le mouvement engendre des courbes parce qu'il s'effectue « continument ». Ce terme

¹ *AI*, *op. cit.*, p. 37, 104, 116, 120, 143 et 146.

² *Ibid*, p. 116.

est donc à relier intimement à une dimension temporelle. Sans que le temps soit explicitement choisi comme variable privilégiée à partir de laquelle les autres quantités peuvent varier, il est tacitement considéré comme une notion originaire ou primitive. Ceci n'est pas nouveau. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent¹, Barrow, dont l'Hospital est un lecteur fidèle, affirme explicitement le caractère originel du temps et du mouvement. Newton suit cette conception. Selon Barrow, le temps permet de mesurer la continuation [*perseverans*] des choses dans leur être² et de ce fait la continuité de l'existence des choses est impliquée par le temps³. La notion de continuité s'exprime donc avant tout comme une notion temporelle. Cette conception permet à Barrow dans sa deuxième leçon de définir toute courbe par le mouvement :

Ayant tenté de considérer les différentes voies par lesquelles les grandeurs sont conçues être produites ; nous avons commencé en abordant la première et principale voie, qui est réalisée par le mouvement local⁴.

Dans les deux traités de l'Hospital, la présence persistante du terme « continuellement » renvoie à une notion de « continuité » primitive et liée au temps. L'Hospital s'appuie sur cette conception de la continuité pour appliquer son analyse aux courbes mais il omet d'explicitement sa relation avec le temps. Serait-elle encore plus « évidente » que ce qu'il a volontairement nommé comme tel ? Des auteurs, comme Barrow, explicitent cette relation avant d'entamer l'étude des lignes courbes⁵. Le « flux continu » qui apparaît dans les textes de Barrow ou Newton est conçu toujours par rapport à un principe temporel absolu.

Pourtant, la notion de continuité se présente dans le texte de l'Hospital autrement que comme celle qu'il hérite de l'école anglaise. L'Hospital définit la

¹ Chapitre 4, §4, « La première interprétation varignonienne du calcul leibnizien ».

² « tempus est perseverantia rei cujusque in suo esse », Isaac Barrow, *Lectiones geometricae*, p. 2.

³ « Tempus igitur non actualem existentiam, at capacitatem tantum seu possibilitatem denotat permanentis existentiae ; », *ibid*, p. 3.

⁴ « Varios, quibus productae concipiuntur magnitudines aggressi modos considerare, primum & praecipuum attingere caepimus illum, qui motu peragitur locali. », *ibid*, p. 13

⁵ Les cinq premières leçons des *Lectiones geometricae* sont destinées à des néophytes et ne devaient pas faire partie au début du reste de l'ouvrage. Ainsi, Barrow n'insistait pas nécessairement à de telles clarifications avant d'aborder la lecture des leçons concernant l'étude géométrique des courbes, Mickael, S., Mahoney dans Feingold, Mordechai (ed), *Before Newton, the life and times of Isaac Barrow*, op. cit., p. 202.

continuité des quantités variables de manière plus abstraite. Pour faciliter la signification de la « variation », il est certes possible de comprendre le « continuellement » de manière « pragmatique », voire « métaphorique », en se référant à un mouvement (temporel) mais l'Hospital ne choisit pas de procéder ainsi pour l'écriture des définitions. Nous pensons que cette omission n'est pas accidentelle. L'Hospital insiste sur le fait que l'Analyse des infinis permet de connaître des grandeurs finies par la comparaison de leurs différences. Sa mise en pratique nécessite la formulation de deux demandes, dont la première est le principe même du déploiement de l'algorithme. Or, comme nous l'avons vu, ces demandes découlent du principe général de continuité. De la sorte l'Hospital laisse la possibilité de penser la notion de continuité autrement que comme celle liée à un temps absolu.

Une rhétorique assumée de l'évidence

L'Hospital accompagne chaque problème d'une figure qui est indispensable pour amorcer la lecture. Pour une longueur de 181 pages, le traité compte 156 figures. Une majorité des démonstrations commence par des propositions comme « on imaginera », « si l'on imagine », « il faut imaginer ». Le lecteur est donc invité à imaginer ce qui ne peut pas être perçu mais qui néanmoins est représenté sur chacune des figures. L'infiniment petit est donc d'emblée considéré comme une fiction. Pendant la lecture, l'image s'atténue et laisse place au déploiement des calculs que l'application de l'algorithme engendre. La figure s'estompe mais reste comme toile de fonds. Le texte y renvoie fréquemment lorsque le calcul ne permet pas de conclure¹. À partir de cet imaginé soutenu par la figure, le texte est rythmé par des propositions comme « il est évident », « il est clair », « il est visible » ou « il est manifeste ». Certaines fois elles n'ont de rôle que celui de lier logiquement deux énoncés sans qu'aucune sollicitation soit adressée au lecteur², mais la plupart s'inscrivent dans le langage des infiniment petits auquel ce dernier en entamant la lecture du traité a souscrit.

¹ Par exemple pour la recherche de la sous-tangente qui coupe l'axe au point T, si ce dernier « tombe du côté opposé » au sommet sur l'axe, il faut changer les signes de tous les termes avec dy . Nous avons listé ce type de sollicitations : elles apparaissent en moyenne quatre à cinq fois par section.

² Par exemple lorsqu'il s'agit d'interpréter une égalité en termes de troisième proportionnelle, *ibid*, p. 27, problème de mécanique, *ibid*, p. 38.

Parmi le nombre important d'exemples¹, nous en proposons un qui figure dans le contexte des points singuliers. Dans l'article 66, l'Hospital a obtenu la condition nécessaire $ddy = 0$ aux points d'inflexion et de rebroussement. L'article 67 s'occupe d'établir des éventuels résultats réciproques. L'Hospital considère sur une courbe AM un point F avec $AE = x$ et $EF = y$. FL est la tangente en F , F et f sont des points infiniment proches. En ce point F , $ddy = 0$. Un calcul précédent a fourni la formule² : $AL = \frac{ydx}{dy} - x$ donc $d(AL) = \frac{dx(dy)^2 - ydxddy}{dy^2} - dx$. Sans recourir explicitement à cette expression, il affirme qu'il est « clair » que l'égalité $ddy = 0$ traduit la nullité de la différence de AL par rapport à celle de AE . Par conséquent, les deux tangentes infiniment proches FL et fl se confondent – « doivent tomber l'une sur l'autre » – en une seule ligne FfL . L'inverse arrive lorsque $ddy = \infty$, il est « clair » aussi pour l'Hospital que la différence de AE doit être nulle par rapport à celle de AL et que deux tangentes FL et Ff peuvent être menées à partir du point F qui font un angle³ infiniment petit LFl .

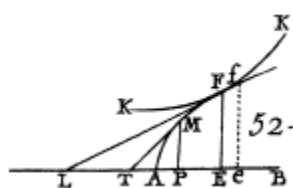
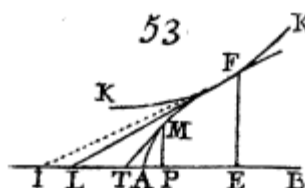


fig. 88



Les expressions « il est clair », « il est évident », « il est visible » accompagnent désormais naturellement l'exposé de l'Hospital lorsqu'il se réfère à des objets de l'analyse des infinis. Elles sont donc devenues propres au langage de la nouvelle analyse telle qu'elle est présentée par l'Hospital⁴. Ce trait d'exposition n'est pas uniquement rhétorique. Sans aucun doute héritière du style de Port-Royal, il apparaît comme intrinsèquement liée à l'analyse des infinis. Pour pratiquer l'analyse des

¹ Avec « il est évident que » ou « il est visible que » : *ibid*, p. 2, 28, 37, 71, 97, 107, 110, 111, 145, 167. Avec « il est clair que », *ibid*, p. 63, 88, 103, 106, 107, 110, 138, 145, 174. Notre liste n'est pas exhaustive.

² *Ibid*, p. 60.

³ Dans *Eclaircissements sur l'Analyse des Infiniment petits*, Varignon fournit un exemple de courbe pour laquelle dans un de ses points $ddy = \infty$ mais qui n'est pas un point de rebroussement, *op. cit.*, p. 43.

⁴ Sur ce sujet, Evelyne Barbin, *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, *op. cit.*, p. 314-316.

infinis, il est absolument nécessaire d'abandonner des procédés à l'ancienne pour pratiquer directement et librement les infiniment petits.

3) L'Analyse des infiniment petits : la conquête de la généralité

3.1) Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes : le devenir des *Nouveaux Éléments*

Nous avons analysé¹ le deuxième livre du manuscrit des *Nouveaux Éléments* qui traite entre autres d'une méthode des tangentes, fortement inspirée des *Lectiones Geometricae* de Barrow. À la fin de 1692, l'Hospital abandonne la poursuite de l'écriture de ce manuscrit. Même s'il reconnaît que sa méthode possède la qualité de traiter des courbes mécaniques, il ne parvient pas à énoncer des propositions suffisamment générales, comme Barrow l'effectue sans algorithme. En effet, la partie des *Lectiones geometricae* destinées à la recherche des tangentes est construite selon une classification des types de courbes. Le classement tire son origine de la relation établie entre la courbe (dont on cherche la tangente) et d'autres (dont on sait tirer la tangente)². Barrow parvient ainsi à traiter des courbes particulières en les intégrant comme un cas relevant d'une des propositions générales³. De cette classification on a vu que l'Hospital avait retenu la relation entre l'ordonnée d'une première courbe et l'arc de la deuxième. Dans l'*AI*, nous allons voir que la structure de toute la section II est conduite par l'idée de présenter des problèmes sous forme de propositions les plus générales possibles, dont relèvent des courbes particulières. Si le manuscrit *Nouveaux Éléments* ne traitait pas toutes les courbes traitées par Barrow, l'*AI* intègre la totalité et en ajoute d'autres. L'Hospital a aussi à sa disposition un manuscrit des *Lectiones de Calculo differentialium* de Jean Bernoulli dans lesquelles des recherches de tangentes

¹ Chapitre 3.

² La première classe est celle de paires (ou triplets) de courbes définies par une relation donnée entre les ordonnées. Le but est de construire la tangente de l'une des deux (ou trois) en connaissant celle(s) de l'autre (des autres). Elle fait l'objet de la leçon VIII. La suivante traite des courbes reliées l'une à l'autre en termes de séries de moyennes arithmétiques et géométriques. La leçon X traite de courbes reliées par une relation avec l'arc d'une deuxième courbe dont on sait tracer la tangente.

³ Parmi les courbes célèbres qui sont traitées sans calcul : La cissoïde (Lect. VIII, 17), la conchoïde de Nicomède (Lect. VII, prop. 12), la cycloïde (lect. X, prop. 1), la spirale (Lect. X, prop. 9), la quadratrice de Dinostrate (Lect. X, prop. 10).

sont traitées mais sans qu'il y ait aucune classification¹. La fécondité du calcul différentiel lui permet de considérer non seulement une étendue plus importante de courbes mais de les classer systématiquement. Par exemple, il traite la quadratrice de Dinostrate comme cas particulier de la proposition IX² et la conchoïde de Nicomède comme cas particuliers de la proposition VI mais aussi de la proposition VII, plus générale encore que la précédente³. Il est intéressant de comparer les différentes approches que ce soit celle de Barrow, celle de Jean Bernoulli⁴ et celle de l'Hospital.

À titre d'exemple, nous développons le cas de la conchoïde de Nicomède. La proposition 12 de la leçon VIII de *Lectiones geometricae* permet à Barrow de traiter cette courbe dans le cadre de la proposition suivante :

Soit XEM une courbe de tangente ER en E ; soit également YFN une autre courbe reliée à la première de sorte que si une ligne droite DEF est tracée par un point D l'interceptée EF est toujours égale à une droite donnée Z ; alors la tangente à la courbe se trace ainsi : Prendre $DH = Z$ (le long de DEF), et par le point H tracer AH perpendiculaire à DH , croisant ER en B ; Tracer par F , FG parallèle à AB ; prendre $GL = GB$ alors LFS étant tracée est la touchante à la courbe YFN ⁵.

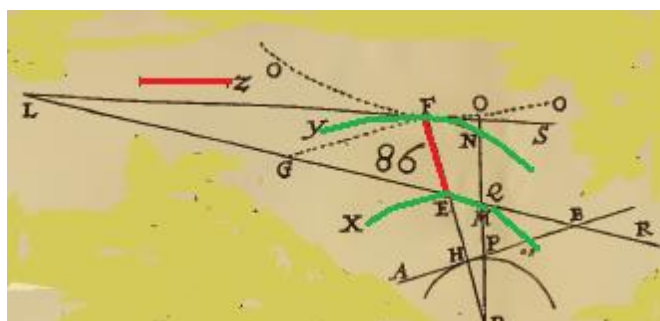


fig. 89

¹ Jean Bernoulli traite la parabole simple et les paraboloides, l'ellipse, l'hyperbole, la logarithmique, la cycloïde, la conchoïde, la cissoïde, la quadratrice de Dinostrate et la spirale d'Archimède.

² Proposition IX, section II, *ibid*, p. 25.

³ Propositions VI et VII, section II, *ibid*, p. 21-22.

⁴ Une étude comparative entre les différentes résolutions des problèmes communs à l'AI et aux LCD a été effectuée par Mónica Blanco Abellan, *Hermenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII : de l'Analyse des infiniment petits de l'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)*, memoria presentada per aspirar al grau de Doctor de Matemàtiques, director : Dr Josep Pla i Carrera, UAB, departament de Matemàtiques, juliol 2004, p. 41-72.

⁵ Barrow, *Lectiones geometricae*, *op. cit.*, p. 66.

Barrow démontre la construction géométrique de la tangente en F . Il indique que dans le cas où la courbe XEM est une droite, la courbe DEF est la conchoïde de Nicomède.

L'Hospital fournit deux propositions par lesquelles il est possible d'obtenir la tangente à la conchoïde. La première est la proposition VI qui énonce :

Soit une ligne courbe APB dont l'on sçache mener les tangentes PH , & un point fixe F hors de cette ligne ; soit une autre courbe CMD telle que menant comme on voudra, la droite FPM , la relation de FP à FM soit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point M mener la tangente MT ¹.

Même si la conchoïde de Nicomède est le seul exemple qui suit l'énoncé de cette proposition, nous pouvons remarquer qu'elle est plus générale que celle de Barrow puisque pour ce dernier, la relation est que la différence $FM - FP$ est égale à une droite donnée alors que pour l'Hospital la relation entre FP à FM est une « équation quelconque ».

Jean Bernoulli considère, sans le dire, la perpendiculaire GK à GA . Sans indiquer que l'angle DGF est infiniment moindre par rapport à LGF , il estime l'angle LGF égal à l'angle DFE , ainsi les triangles DEF et DLG sont de ce fait semblables, comme le sont deux autres paires de triangles qu'il considère pour obtenir la tangente AK ².

¹ Proposition VI, section II, *ibid*, p. 21.

² Problème VII, *LCD*, p. 12-13.

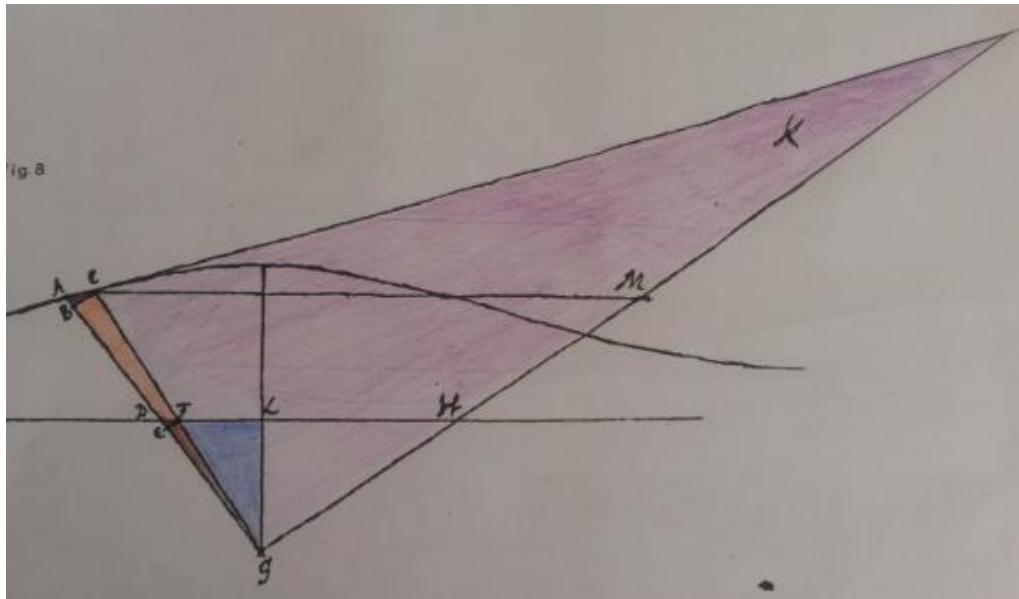


fig. 90

Il pose $a = GL$, $b = CF = AD$, $x = GD$, $dx = DE = AB$.

En vertu de la similitude de DEF et DLG : $\frac{DL}{LG} = \frac{DE}{EF}$ soit $EF = \frac{adx}{\sqrt{x^2-aa}}$, par la similitude

des triangles BGC et EGF , il a $\frac{GF}{GC} = \frac{EF}{BC}$ soit $BC = \frac{axdx+abdx}{x\sqrt{xx-aa}}$, puis, par la similitude

des triangles ABC et AGK , il a $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GK}$, soit $GK = \frac{ax^2+2abx+abb}{x\sqrt{xx-aa}}$.

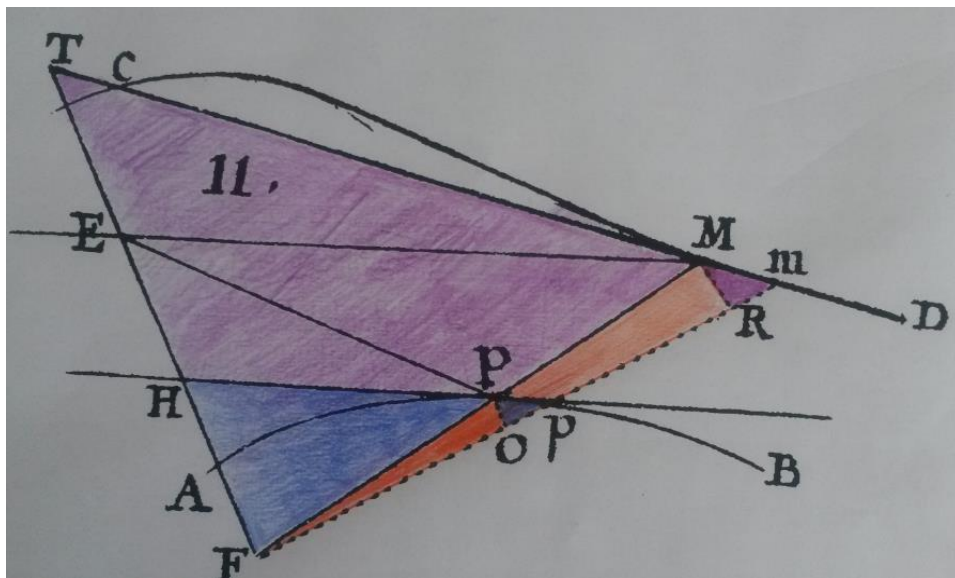


fig. 91

Pour démontrer cette proposition, l'Hospital considère, comme Bernoulli, un triplet de triangles semblables¹ qui apparaît naturellement dans la configuration. En effet, le premier couple de triangles semblables, FHP, Pop ont un de leurs côtés qui appartient à la tangente de la première courbe, pour la conchoïde de Nicomède, cette tangente est toujours la droite polaire. Ainsi, dans la démonstration de l'Hospital, le fait que la courbe ne soit pas nécessairement une droite n'intervenait pas dans la démonstration, seul compte la connaissance des tangentes, ce qui est donné par hypothèse. Il considère la perpendiculaire FT à FM et pose $PF = x, FH = s$ (qui est connue), $po = dx$. De la similitude des triangles POp et HFP , il tire : $\frac{PF}{FH} = \frac{pO}{OP}$ soit $OP = \frac{sdx}{x}$, puis de la similitude des triangles POF et MRF , il obtient $\frac{FP}{FM} = \frac{OP}{RM}$ soit $RM = \frac{sydx}{xx}$ et enfin de la similitude des triangles FTM et MRm , il a $\frac{mR}{RM} = \frac{FM}{FT}$ soit $FT = \frac{sydx}{xxdy}$.

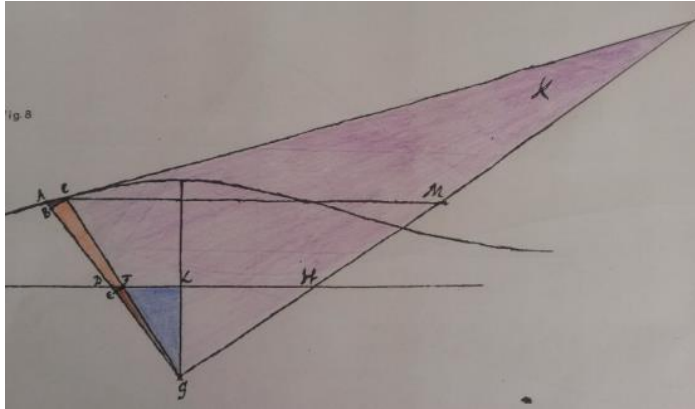
Nous avons représenté dans la page suivante, un tableau comparatif des deux démonstrations en indiquant dans la première colonne les couples de triangles semblables intervenant dans la démonstration de Jean Bernoulli et les égalités qui en découlent pour chacun des couples, au regard de ceux et celles de la démonstration de l'Hospital. La dernière égalité de Bernoulli s'obtiendrait facilement à partir de la dernière de l'Hospital : $FT = \frac{sydx}{xxdy}$ puisque $s = FH$ correspond chez Bernoulli² à GH et que la relation de FP à FM est $FM = x + b$.

Ainsi, en s'inspirant de la démonstration de Bernoulli et par le moyen du calcul différentiel, l'Hospital perçoit et réalise la possibilité de traiter le cas de la conchoïde comme un cas plus général d'un type de courbes, celles dont « la relation de FP à FM soit exprimée par une équation quelconque ». Cette généralisation surpasse celle de la proposition barrowienne. Par ailleurs, comme nous l'avons annoncé, la recherche de

¹ Chez Bernoulli, les triplets de triangles sont DEF, DLG ; GEF, GBC et GAK, ABC qui correspondent chez l'Hospital à FHP, Pop ; FPO, FMR et TFM, MRm .

² Chez Bernoulli, $= \frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $y = x + b$ donc $\frac{dx}{dy} = 1$, d'où : $GK = \frac{\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}} \times (x+b)^2}{xx} = \frac{a(x+b)^2}{x\sqrt{xx-aa}}$ qui est bien la l'expression obtenue par Bernoulli.

Démonstration de Jean Bernoulli



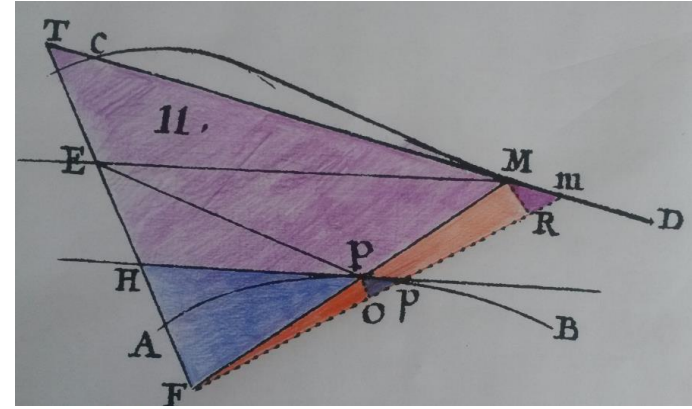
DEF, DLG ;
 GEF, GBC
 GAK, ABC

$$\frac{DL}{LG} = \frac{DE}{EF} \text{ soit } EF = \frac{adx}{\sqrt{x^2-aa}}$$

$$\frac{GF}{GC} = \frac{EF}{BC} \text{ soit } BC = \frac{axdx+abdx}{x\sqrt{xx-aa}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GK} \text{ soit } GK = \frac{ax^2+2abx+abb}{x\sqrt{xx-aa}}$$

Démonstration de l'Hospital



FHP, Pop ;
 FPO, FMR
 TFM, MRm.

$$\frac{PF}{FH} = \frac{pO}{OP} \text{ soit } OP = \frac{sdx}{x}$$

$$\frac{FP}{FM} = \frac{OP}{RM} \text{ soit } RM = \frac{sydx}{xx}$$

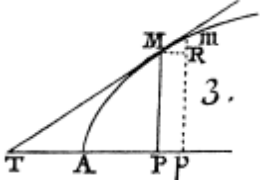
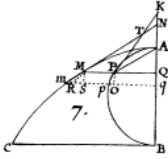
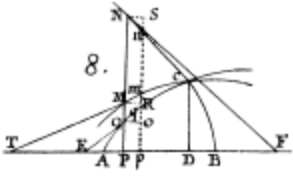
$$\frac{mR}{RM} = \frac{FM}{FT} \text{ soit } FT = \frac{sydx}{xxdy}$$

fig. 93

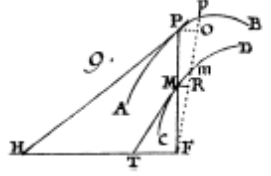
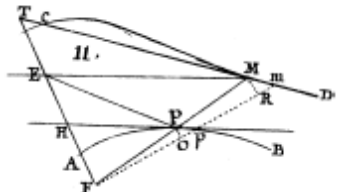
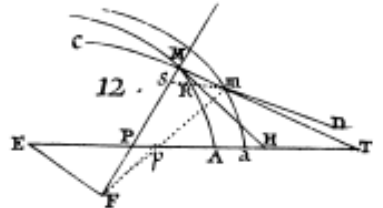
L'Hospital apprécie la généralité des propositions des *Lectiones Geometricae* de Barrow, par l'algorithme différentiel il constitue des énoncés de propositions plus généraux étendant ainsi le champ des courbes pouvant être traitées. Dans les *LCD*, Bernoulli lui montre comment l'application du calcul permet l'obtention facile de la tangente à la conchoïde¹. Par cet exemple, comme dans d'autres cas particuliers présents dans *LCD*, l'Hospital éprouve la fécondité du nouveau calcul. Mais surtout et au-delà de cette fécondité perçue dans l'application du cas particulier, l'Hospital perçoit que le nouveau calcul permet de traiter des expressions traduisant des relations très générales entre des courbes. La section II, destinée à la recherche de tangentes est ainsi composée de problèmes-propositions très généraux, les courbes célèbres de l'Antiquité relèvent de cas particuliers de ces propositions. Chaque proposition considère un couple (ou un triplet) de courbes, dont on connaît le tracé de la tangente pour l'une d'elles ainsi que la relation qui les lie. Nous résumons cette section sous forme de tableau en faisant apparaître la relation entre les deux courbes².

¹ Rappelons que Descartes dans *La Géométrie* ne traite pas le cas de la conchoïde en indiquant que ceci le mènerait à des calculs longs.

² Nous avons surligné en rouge la relation qui apparaît exprimée dans l'énoncé. Nous ne traitons pas la totalité des propositions.

Enoncé de la <i>Proposition-Problème</i>	Courbes particulières qui relèvent de cette proposition	Figure dans <i>Analyse des infiniment petits</i>
I. Soit une ligne courbe AM telle que la relation de la coupée AP à l'appliquée PM , soit exprimée par une équation quelconque et qu'il faille du point M mener la tangente MT .	Parabole Paraboles généralisées $y^3 - x^3 = axy$	
II-III Soit une ligne courbe AM telle que les coupées AP soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sçache mener les tangentes PT ; et qu'il faille du point donnée M sur la courbe AM mener la tangente ¹ MT .	Cycloïde (APB cercle)	
IV. Soient deux lignes AQC , BCN qui ayent pour diamètre la droite $TEABF$, et dont l'on sçache mener les tangentes QE , NF ; soit de plus une autre ligne courbe MC telle que la relation des appliquées MQ , QP , NP , soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné M sur cette dernière courbe lui mener une tangente MT .	Sections coniques (AQC et BCN droites)	

¹ Ou l'appliquée MQ qui coupe la première courbe au point P , la relation de l'arc AP à l'appliquée MQ soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné M mener la tangente MN .

<p>V.</p> <p>Soit une ligne courbe APB qui ait un commencement fixe et invariable au point A, et dont on sçache mener les tangentes PH ; soit hors de cette ligne un autre point fixe F, et une autre ligne courbe CMD telle qu'ayant mené la droite quelconque FMP, la relation de sa partie FM à la portion de la courbe AP soit exprimée par une telle équation qu'on voudra. On se propose de mener du point donné M la tangente MT.</p>	<p>Spirale d'Archimède Spirales généralisées d'équation $\frac{b}{x} = \frac{a^m}{y^m}$ (APB cercle de centre F)</p>	
<p>VI.</p> <p>Soit une ligne APB dont l'on sçache mener les tangentes PH ; et un point fixe F hors de cette ligne ; soit une autre courbe CMD telle que menant comme on voudra, la droite FPM, la relation de FP à FM soit exprimée par une équation quelconque.</p>	<p>Conchoïde de Nicomède (APB est une droite)</p>	
<p>VII.</p> <p>Soit une ligne courbe ARM dont l'on sçache mener les tangentes MH, et qui ait pour diamètre la droite $EPAHT$; soit hors de ce diamètre un point fixe F, d'où parte une ligne droite indéfinie $FPSM$ qui coupe le diamètre en P et la courbe en M. Si l'on conçoit maintenant que la droite FPM en tournant autour du point F, fasse mouvoir le plan PAM toujours parallèlement à soi-même le long de la ligne ET immobile et indéfinie, en sorte que la distance PA demeure par tout la même ; il est clair que l'intersection continuelle M des lignes FM, AM décrira une courbe CMD. On se propose de mener d'un point donné M sur cette courbe la tangente MT.</p>	<p>Hyperbole (ARM est une ligne droite) Conchoïde de Nicomède (ARM est un cercle de centre P) Compagne de la parabole (ARM est une parabole)</p>	

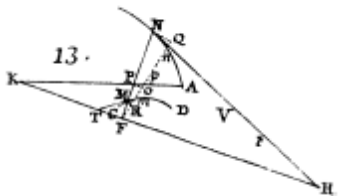
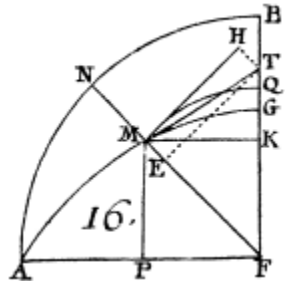
<p>VIII.</p> <p>Soit une ligne courbe AN qui ait pour diamètre la ligne droite AP, avec un point fixe F hors de ces lignes ; soit une autre ligne courbe CMD telle que menant comme l'on voudra, la droite $FPMN$, la relation de ses parties FN, FP, FM soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné M la tangente MT.</p>	<p>Cissoïde de Dioclès (AN est un cercle qui passe par le point F)</p>	
<p>IX.</p> <p>Soient deux lignes ANB, CPD, et une ligne droite FKT, sur lesquelles soient marqués des points fixes A, C, F ; soit de plus une autre ligne courbe EMG telle qu'ayant mené de l'un de ses points quelconques M la droite FMN, et MP parallèle à FK ; la relation de l'arc AN à l'arc CP soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point M sur la courbe EG mener la tangente MT.</p>	<p>Quadratrice de Dinostrate (ANB est un quart de cercle)</p>	

fig. 94

Ce type de présentation n'est pas le privilège de la deuxième section, tout au contraire il est le modèle de la manière de structurer l'ensemble de l'ouvrage. La Préface annonce que les sections allant de 2 à 8 contiennent peu de propositions mais plutôt qu'un défaut cela constitue une qualité car :

elles sont toutes générales, et comme autant de Méthodes dont il est aisé de faire l'application à tant de propositions particulières qu'on voudra: je la fais sur quelques exemples choisis, persuadé qu'en fait en Mathématique il n'y a profiter que dans les méthodes, et que les livres qui ne consistent qu'en détail ou en propositions particulières, ne sont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font, et à ceux qui les lisent¹.

Par l'énoncé de propositions générales, chaque courbe particulière peut être traitée facilement. En particulier, les courbes qui chez les Anciens faisaient l'objet d'une étude spécifique, même si elles conservent leur caractère historiquement célèbre, relèvent désormais d'un cas particulier. L'Analyse des infinis permet donc la généralité des énoncés, ce à quoi d'autres méthodes ne pouvaient pas prétendre. Comme nous allons le voir ci-dessous, l'organisation de son ouvrage concorde avec cette ambition.

3.2) Une structure au service de la généralité

Le préfacier explique que de « l'étendue de ce calcul » naissent « une infinité de découvertes surprenantes » par rapport aux tangentes, extremum, points d'inflexion, développées, caustiques par réflexion ou réfraction, etc. Il annonce ensuite chaque section avec un bref descriptif du sujet traité². L'ouvrage contient en tout dix sections. La première contient les principes du calcul. Chacune des sections de II à VIII ont un intitulé qui commence par : « usage du calcul des différences » : il s'agit d'étudier des problèmes sur les courbes. Les deux dernières sections ne se libellent pas de la même manière mais elles ne sont pas pour autant à mettre complètement à part. La section IX contient cinq propositions. La première permet de déduire la valeur d'une ordonnée d'une courbe exprimée par un quotient « dont le

¹ *Ibid.*

² Pour un commentaire de ces sections, on peut consulter « Translator's Preface », Bradley, Robert E., Petrelli, Salvatore J., Sandifer, C. Edward, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits, an annotated translation with material by Johann Bernoulli*, Science Networks Historical Studies vol. 50, Birkhäuser, 2015.

numérateur et le dénominateur deviennent chacun zéro lorsque $x = a$ »¹. Les autres propositions concernent la recherche de tangentes de courbes définies au moyen de développées. La dernière section déduit du calcul des différences des règles de Descartes et Hudde pour les tangentes, points d'inflexion et rayon de courbure. Elle fait l'objet de notre prochain paragraphe. Nous présentons la liste des sections de II à X ci-dessous :

- Section II : Usage du calcul des différences pour trouver les tangentes de toutes sortes de courbes
- Section III : Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes et les moindres appliquées, où se réduisent les questions de *maximis et minimis*
- Section IV : Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion et de rebroussement
- Section V : Usage du calcul des différences pour trouver les Développées
- Section VI : Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réflexion
- Section VII : Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction
- Section VIII : Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, de droites ou courbes
- Section IX : Solution de quelques problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes
- Section X : Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la méthode de M^{rs} Descartes & Hudde

Au vue de l'agencement des sections il est manifeste que l'Hospital choisit de traiter des problèmes des plus simples aux plus complexes même s'il ne le signale pas. Pour les problèmes des premières sections : recherche de tangentes, de *maximis et minimis* et de points d'inflexion, d'autres méthodes existaient pour traiter ces problèmes mais le calcul des différences permet des propositions très générales et ainsi peut traiter toutes sortes de courbes. De plus, la fécondité du calcul permet de ne

¹ Section IX, proposition I, art. 163, *AI*, p. 145.

plus se soucier de l'embarras du calcul dont se plaignaient des géomètres tels que Descartes et Fermat.

Le préfacier avait rappelé que certains problèmes sont à l'origine de géomètres : Huygens pour la recherche de développées ou Tschirnhaus pour les caustiques. Le premier présente ses résultats sur les développées par des démonstrations à l'ancienne. Le deuxième découvre les caustiques en 1682, sa méthode ne s'applique qu'aux courbes géométriques. Trois sections leur sont destinées. Ces problèmes ne concernent plus la recherche d'un attribut d'une courbe prise individuellement (tangente, point d'inflexion ou de rebroussement). L'inconnue n'est plus une grandeur ou un point mais une courbe et en cela ils sont véritablement d'un autre type que les premiers comme Leibniz l'avait souligné dans ses deux articles de 1692 et 1694¹. Le calcul des différences permet également de fournir des énoncés généraux sans besoin de s'appuyer sur les travaux des deux célèbres inventeurs.

La section VIII est destinée à user du calcul des différences pour « trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, de droites ou courbes »². Comme nous l'avons vu plus haut, les articles leibniziens de 1692 et 1694 sont à l'origine de cette section. Le mathématicien allemand prend le soin de généraliser la notion d'ordonnée dans le but de résoudre la recherche d'enveloppes de toutes sortes de lignes qu'elles soient droites ou courbes. Ainsi la recherche des développées et de caustiques est un cas particulier de ce cas. Dans *AI*, la proposition IV concerne la recherche d'une courbe tangente à toutes les perpendiculaires d'une courbe donnée³. L'Hospital signale qu'il est « évident » que ce problème est identique à celui de la recherche des développées et que par conséquent « il seroit inutile d'en donner des exemples nouveaux »⁴.

Nous pouvons remarquer que l'Hospital a changé le nom donné par Leibniz à ce type de problèmes. Pour ce dernier il s'agissait de trouver une courbe tangente à partir d'une infinité de courbes « ordonnées et concourantes ». L'explication de l'article de 1692 insistait sur le caractère ordonné des lignes. Chez l'Hospital, cet aspect est omis.

¹ Voir dans ce chapitre § 2.1) Des définitions

² *Ibid*, p. 131-144.

³ *Ibid*, p. 138.

⁴ *Ibid*, p. 139.

L'objet de la dernière section du traité a pour dessein de montrer comment déduire par le calcul leibnizien « la Méthode de M^{rs} Descartes & Hudde »¹.

3.3) Descartes subsumé : la section X

L'Hospital est un lecteur de *La Géométrie* de Descartes qu'il a étudié comme tous les membres du groupe malebranchiste, il connaît également les écrits des héritiers de Descartes dont certains ont été analysés dans le premier chapitre. Nous avons vu que la méthode des cercles tangents présentée dans *La Géométrie* est améliorée en considérant une droite tangente plutôt qu'un cercle tangent. Des améliorations calculatoires sont élaborées également par le mathématicien hollandais Hudde² pour trouver algébriquement les racines simples, doubles ou triples d'une équation.

Dans la section X, intitulée « Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M^{rs} Descartes & Hudde », l'Hospital a pour dessein de montrer qu'en utilisant les différences, il est aisé de retrouver les méthodes de Descartes et de Hudde traitant des courbes géométriques pour des recherches de *maximis* et *minimis*, de tangente, de point d'inflexion, ou d'autres caractéristiques. La Préface indiquait qu'en cette section :

l'on verra qu'il [le calcul des différences] tire tout ce qu'on peut tirer de celle de M^{rs} Descartes & Hudde, & que la preuve universelle qu'il donne de l'usage qu'on y fait des progressions arithmétiques [de Hudde], ne laisse plus rien à souhaiter pour l'infailibilité de cette dernière Méthode³.

Au début de la section, le Marquis s'intéresse à une courbe *ADB* qui a la particularité que toute parallèle au diamètre l'intercepte en deux points *M* et *N*. Il précise qu'il est en outre supposé que la partie interceptée *MN* peut devenir infiniment petite et que dans ce cas elle est nommée « différence ». Cette définition n'est pas la même que dans la section I du traité. Le corollaire I et II concluent que lorsque la partie *MN* devient infiniment petite, l'appliquée *ED* est un maximum ou un

¹ Section X, *ibid*, p. 164.

² Outre que dans l'édition de *La Géométrie* de Van Schooten, la méthode de Hudde est présentée dans le deuxième tome des *Nouveaux Elémens de mathématiques* de Prestet, *op. cit.*, p. 488.

³ Préface.

minimum et que c'est uniquement dans ce cas que l'on peut considérer que AE a une différence. Par le corollaire III, l'Hospital explique qu'il est « évident » qu'à chaque valeur $AK = y$ de l'ordonnée, correspondent deux valeurs de x : AP et AQ . Ainsi, y « demeurant la même », l'ordonnée maximale ED correspond à une racine double.

Pour la trouver, il faut que la courbe « soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines puisse avoir différentes valeurs »¹. Cette affirmation l'amène à énoncer la Proposition I² : pour trouver le maximum ou le minimum des appliquées ED , il faut différentier l'équation en supposant y constant. Il fait suivre cet énoncé par une application au folium de Descartes d'équation :

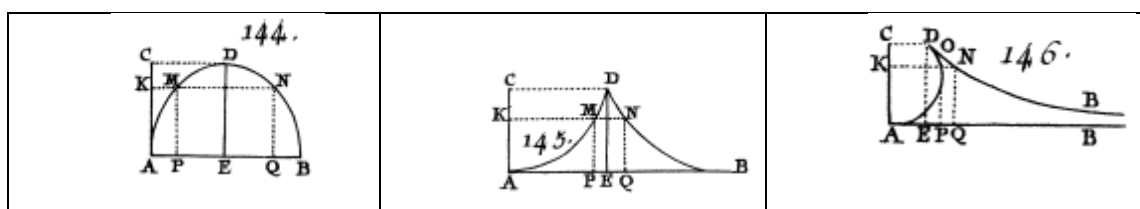


fig. 95

$$x^3 + y^3 = axy$$

En supposant y constant, la différence est :

$$3xxdx = aydx$$

donc :

$$y = \frac{3xx}{a}$$

Puis en remplaçant y par $\frac{3xx}{a}$ dans l'équation du folium, il obtient :

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Il indique d'abord qu'il est « évident » que cette méthode permet aussi de trouver les points de rebroussement. Par ailleurs, il remarque que cette « nouvelle manière de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple et moins embarrassante en quelques rencontres, que la première »³ : il note en marge

¹ *Ibid*, p. 164.

² Proposition I, Problème, *ibid*, p. 165.

³ *Ibid*, p. 165.

« Sect. 5 », c'est-à-dire à la section où il a traité la recherche de points de rebroussement¹.

Le corollaire qui suit est décisif, l'Hospital y montre l'« évidence » de l'équivalence entre la procédure de différenciation en supposant x variable et y constant, et l'application de la méthode de Hudde, consistant à multiplier l'équation par une progression arithmétique. Il illustre ce propos en considérant à nouveau le folium de Descartes : en multipliant chaque terme par la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, il obtient :

$$3x^3 - axy = 0$$

D'où il déduit :

$$y = \frac{3xx}{a}$$

Par la suite, il explique pourquoi la recherche de la tangence correspond à une équation algébrique admettant une racine double², puis il interprète de façon analogue la méthode de recherche d'un point d'inflexion, celui-ci correspondant à une racine triple. En effet, pour une sécante donnée à la courbe, la tangente en un point correspond à la rencontre de deux points (donc algébriquement « deux racines égales ») ; comme la tangente laisse localement de part et d'autre la courbe, ce point est aussi celui de la rencontre avec l'autre intersection de la tangente. Il traite pareillement jusqu'à la fin de la section les recherches de cercle baisant (« réunion de deux points touchants »), ou de normale (« deux racines égales »), ou de caustique et enfin d'enveloppe de paraboles³. Tous ces problèmes avaient été traités dans les sections précédentes sans que les courbes soient nécessairement géométriques,

¹ En effet, il explique que le cas des rebroussements n'est qu'un cas qui dérive du précédent car à chaque x donné, il y a aussi deux valeurs de y . Il conclut qu'il suffit de différencier l'équation (avec x et y comme variables) et d'annuler tous les termes multiples de dx et tous ceux qui sont multiples de dy . Il met en garde le lecteur de la nouvelle façon de considérer ici ce qu'est une différence : « Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3) la différence de deux appliquées infiniment proches. ». Sur la figure 146 : $dx = MN$ et $dy = MO$.

² Proposition II et Corollaire, *ibid*, p. 168-169.

³ Proposition de III à Proposition V, *ibid*, p. 170.

l'Hospital y fait souvent appel pour traduire la résolution du problème en langage algébrique¹.

Ainsi, l'Hospital réussit dans cette dernière section à montrer que la méthode de Descartes et celle de Hudde se déduisent du calcul des différences. L'Analyse des infinis les englobe : « si elles sont limitées, on voit par toutes les précédentes que ce n'est pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode cartésienne à laquelle on l'assujettit »².

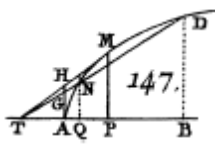
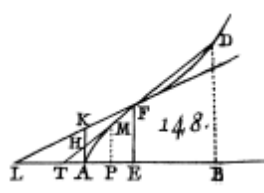
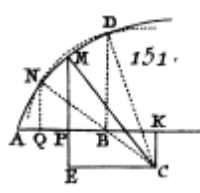
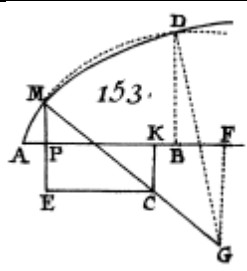
Tangente	Point d'inflexion	Normale	Cercle baisant
			
$AP = AB$	$AP = AB$ et $AE = AP$	$AQ = AB$	$AP = AB$ et $AK = AF$

fig. 96

Il est donc indéniable que l'insertion de cette section a pour dessein de montrer à nouveau la généralité du calcul leibnizien. Cependant, se faisant elle montre également que les méthodes algébriques peuvent être pertinentes lorsqu'il s'agit de traiter des courbes géométriques. Nous verrons que cet argument apparaîtra plus tard lors du débat à l'Académie des Sciences contre l'utilisation du calcul leibnizien.

En juin 1696, le *Journal des Sçavants* publie un compte-rendu de l'*AI*³. D'après le rédacteur, le calcul des différences – qui avait été trop succinctement présenté par Leibniz – y est exposé amplement et « démontré fort netement ». Le compte-rendu souligne plusieurs fois⁴ l'intention de proposer des « voyes generales » pour l'étude de

¹ Les articles nommés sont : art 67 (*ibid*, p. 170) ; art 76 (*ibid*, p. 174 et p. 179).

² Préface.

³ *JS*, septembre 1696, p. 414-418.

⁴ Le mot « général » est répété huit fois dans ce texte.

la nature de toute sorte de courbes : « Les méthodes générales, que l'auteur donne pour cela, sont simples et suivent naturellement de ce calcul »¹. Le rédacteur loue la « sublimité » des nombreuses découvertes que l'ouvrage contient mais, en raison de la supériorité des thèmes traités, il avoue se trouver réduit « à ne donner que le catalogue ou la liste des matières qu'il traite » : au moins les « connoisseurs » en entreveront « quelques beautez.» Reconnaisant et louant le caractère novateur de l'AI, le rédacteur juge donc l'ouvrage difficile et réservé aux « connoisseurs ».

Pierre Varignon se confronte à l'AI et compose des premiers éclaircissements.

4) Varignon, lecteur de l'Analyse des infiniment petits

4.1) Des méthodes des tangentes

Le manuscrit intitulé « Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes² » est attribué à Varignon³. Il s'agit d'un écrit de 23 feuilles contenant 76 paragraphes numérotés. Par cet écrit, Varignon répond à la sollicitude d'un élève pour l'élaboration d'un cours traitant des principales méthodes de recherche de tangentes et des éléments de calcul différentiel. Il avait déjà écrit un premier cours, mais il explique qu'à cette période il ne connaissait le calcul différentiel que par l'article de 1684 et par quelques mémoires académiques dans lesquels il était cité⁴. Au moment où il écrit le manuscrit que nous examinons, l'AI a été publiée depuis peu. Il précise qu'il préfère développer une explication de ce dernier car :

J'aurois pû me dispenser de vous expliquer les Elémens de ce calcul puisqu'ils sont très parfaitement dans le traité de l'analyse des Infiniment petits qui a esté publié depuis peu. Mais comme les règles qu'y donne l'authheur sont très succinctes ou (?) Et qu'il ne s'arrête pas aux minuties afin de passer plutôt aux choses plus difficiles ; Je joindrais aux règles

¹ *Ibid*, p. 414.

² FR. 12262. Nous abrégons par « *Instruction* ».

³ C'est ainsi que la BNF le classe. Nous confirmons cette hypothèse par la comparaison de l'écriture de plusieurs passages de ce texte avec d'autres qui sont de façon certaine de Varignon.

⁴ Il ne peut s'agir que des premiers mémoires de l'Hospital en 1693 dans lesquels effectivement il est cité en marge, par exemple « Solution d'un problème de géométrie que l'on a proposé depuis peu dans le Journal de Leipsic », 30 juin 1693, *op. cit.*, p. 140. On peut donc conclure que ce premier cours (non retrouvé) a été écrit entre 1693 et 1696.

qu'il donne ce que j'avais mis dans mon premier écrit, j'en tirerai aussi quelques exemples qui me paraissent plus instructibles dont je vois que l'auteur a fait un choix judicieux¹.

Ces intentions pédagogiques sont formulées dès le début de son écrit, c'est donc en tant qu'enseignant que Varignon élabore cet écrit jugeant que l'ouvrage de l'Hospital est passé trop rapidement sur les possibles difficultés que pourraient rencontrer son élève, et pour d'autres raisons qui apparaîtront plus en avant.

Pour notre analyse, nous divisons ce manuscrit en quatre parties, délimitées chacune d'elles par le titre d'un paragraphe, écrit en marge par Varignon. La première partie² fournit une sélection de ce qu'il juge être les principales méthodes des tangentes : Descartes, Fermat, Barrow. La deuxième partie est destinée à une explication du calcul leibnizien (définitions, règles, différentielles secondes) et à une présentation de la méthode des tangentes par ce calcul, la troisième partie plus courte aborde quelques réflexions sur les méthodes de Fermat, Barrow et Leibniz, enfin la dernière partie revient sur l'explication donnée par Descartes du « fondement de la règle qui sert à M. de Fermat ». Dans ce texte, nous nous intéressons d'une part à la manière dont Varignon expose ces méthodes – que nous avons abordées au premier chapitre – et à la façon dont il insère des commentaires les concernant. D'autre part, nous prêtons attention à la manière dont il rend compte du calcul leibnizien, et aux réflexions à son sujet. Pour ce dernier aspect, nous accompagnons notre analyse de la lecture de certains extraits des *Éclaircissements sur l'Analyse des infiniment petits*.

Des méthodes des tangentes : Descartes, Fermat, Barrow, l'héritage de Varignon

Pour motiver son exposé, Varignon explique que « la géométrie des lignes courbes » est « sans doute une des plus belles et des plus difficiles de la géométrie » mais qu'« on ne peut connaître que peu de chose de la nature et des propriétés des lignes » si on ne sait pas tracer une tangente en un point. Il justifie cette affirmation en déclarant que tous les géomètres qui, pour peu se soient intéressés aux lignes courbes ont pris le soin de fournir une manière de mener les tangentes. Il attribue à Descartes d'avoir en premier élaboré une méthode « générale ». Il présente la méthode des cercles tangents et l'applique à la parabole. À la suite de cette

¹ FR 12262, fol. 1R.

² La première partie s'étend des folios 1 à 6, la deuxième va jusqu'au folio 20V, la troisième jusqu'au 22.

présentation il fournit quelques commentaires, notamment il précise que la méthode de Descartes ne s'applique qu'aux courbes qui « tombent sous le calcul géométrique » et qu'elle « n'apporte rien, de la façon qu'elle est proposée, aux lignes qu'il [Descartes] appelait Mécaniques »¹.

La « Manière de Mr Fermat » est exposée immédiatement après². Varignon considère une courbe AC de diamètre CM dont il faut tirer la tangente CT en C , où T est le point d'intersection avec le diamètre.

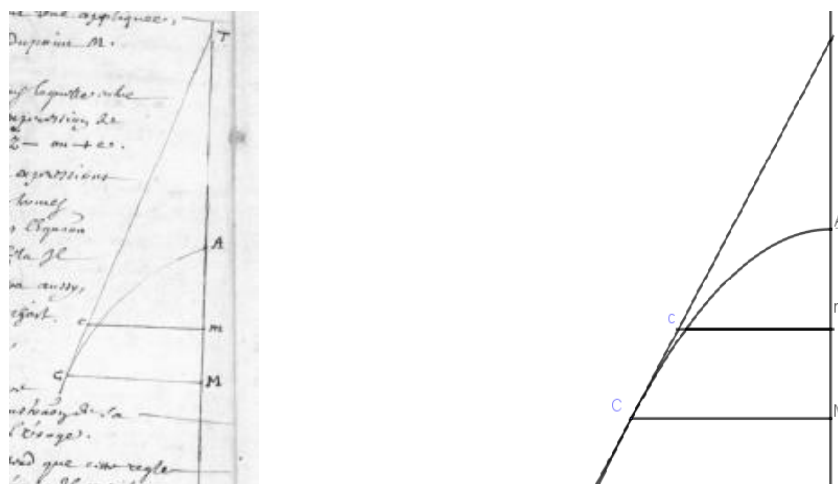


fig. 97

Il appelle l'inconnue MT par z et Mm par e . Varignon indique sur la figure l'existence d'un point c placé sur la tangente CT . Pour trouver MT , il faut suivre la « règle » qui consiste à exprimer de deux façons différentes TC , l'une en utilisant z , et l'autre avec $z + e$ ou $z - e$. Il faut ensuite « faire une équation » de ces deux expressions, effacer tous les termes non multiples de e , diviser ensuite l'équation par e puis s'il existe encore des termes affectés par e , les effacer. On trouve ainsi la valeur de z . Après cet exposé algorithmique, Varignon commente :

Il est assez difficile de comprendre quelle a été la pensée de Mr. De Fermat. Il a cité le principe dont il s'était servi, il n'a point donné de démonstration de sa méthode, et il n'y a pas distinctement exposé l'usage.

¹ *Ibid*, fol. 2V. Il commente ensuite l'aspect calculatoire de cette méthode jugé défectueux à cause de la considération du cercle, inconvénient remédié par Mr de Beaune en substituant un cercle par une droite.

² *Ibid*, fol. 4V.

L'Autheur de l'Analyse des infiniment petits prétend que cette règle est la mesme que celle de Barrow a expliquée (...) celle de Barrow et celle de Mr. Leibnitz qui je crois estre la mesme dans le fond¹.

À cet exposé et à ce commentaire, quelques remarques s'imposent.

Tout d'abord, il est probable que Varignon tire cette méthode d'une lecture des VO de Fermat publiés en 1679 ou de la correspondance de Descartes². On a vu que lorsque Fermat décrit cette méthode, il explique que son principe consiste à supposer qu'un point de la tangente puisse être considéré comme étant sur la courbe, ce qui génère une « adégalité ». Varignon ne rappelle pas cette origine alors que sa connaissance serait probablement utile pour faire comprendre cette méthode à son lecteur. En outre, il n'informe nullement sur le statut de ϵ . Par rapport au traitement de la méthode de Descartes, long de presque trois pages, Varignon malmène quelque peu la présentation de Fermat³. Elle est certes plus difficile à comprendre alors que celle de Descartes repose entièrement sur une traduction algébrique de la situation de tangence⁴. Par ailleurs, Varignon surinterprète la préface de l'AI puisque celle-ci n'affirme pas que la méthode de Barrow et celle de Fermat sont les mêmes mais

¹ *Ibid*, fol. 4V.

² La méthode est exposée plus amplement dans « Ad eandem methodum » publié dans VO, p. 69. Le tome 3 de la correspondance de Descartes qui correspond à l'affaire de la méthode des *maximis et minimis* est publiée dans *Renati Descartes epistolae, partim ab auctore latino sermone conscriptae, partim ex gallico translatae. In quibus omnis generis quaestiones philosophicae tractantur, & explicantur plurimae difficultates quae in reliquis ejus operibus occurrunt. Pars.*, Amstelodami: ex typographia Blaviana: sumptibus societatis, 1683. Varignon a lu cette correspondance comme la suite du manuscrit nous l'apprend. Il s'agit de la méthode que nous traitons au chapitre 1 dans le paragraphe intitulé « Deuxième méthode: la propriété spécifique de la courbe (environ 1638) ou la sécante adéguisée à la tangente ».

³ Le paragraphe qui suit est consacré à la dispute entre Fermat et Descartes. Varignon juge « qu'il n'est pas hors de mon propos » d'en parler. Pour conclure ce récit il explique que « M. Huyghens ne paraît pas plus persuadé que l'a été Mr Descartes, que M. de Fermat comprit le fondement de la règle et toute son étendue, et il juge que ce dont le soupçonnait M. Descartes pouvait bien estre véritable, et il advoüe que ce fondement est expliqué dans cette lettre à Mr de Mydorge ». Varignon semble prendre parti pour Descartes contre Fermat.

⁴ Costabel assure que Varignon ne peut pas être considéré « comme tenant à part entière du cartésianisme » mais il indique, en citant J.O. Fleckenstein, que le personnage et l'œuvre de Varignon se situe « dans le courant du cartésianisme qui marque indiscutablement, jusque dans les transformations qui s'y opèrent, le milieu français de la fin du XVII^e siècle. », *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, Introduction, p. 12.

simplement que Barrow a amélioré la méthode de Fermat¹. Il annonce aussi sans encore le justifier que la méthode de Barrow et celle de Leibniz sont les mêmes. Nous y reviendrons plus loin.

L'exposé de la « Manière de Barrow » suit. Varignon indique en premier qu'elle est « fondée sur les infiniment petits » et sur la considération de la courbe comme un « polygone rectiligne d'une infinité de costez. » Après avoir fourni l'algorithme, il l'applique sur l'équation d'une courbe géométrique en indiquant immédiatement que cette méthode peut servir également aux courbes mécaniques. Il remarque également que les calculs peuvent être écourtés – en se dispensant d'écrire les termes « qui doivent rester » – mais il ne s'attarde pas davantage sur cette méthode car :

la méthode de M. Leibnitz dont je vays parler me semble la mesme que celle cy, j'aurays
(?) à faire sur cette der^{ère} les réflexions que mérite celle cy².

Ce commentaire, placé juste avant d'entamer la présentation du calcul leibnizien, mérite notre intérêt. Certes, Varignon destine dans les pages suivantes un exposé étendu du calcul leibnizien mais il déclare par anticipation que ce dernier n'est pas plus utile pour la recherche des tangentes que ce que procure la méthode de Barrow.

Les définitions dans le calcul de Mr Leibnitz

Varignon rappelle que Leibniz publia sa « manière de trouver des tangentes et autres propriétés des lignes courbes » dans les *Acta* en 1684. Il juge l'exposé non suffisamment clair pour que ce nouveau calcul soit compris de tous, mais il met en avant la manipulation aisée des expressions qu'elles soient sourdes ou fractionnaires que permet ce calcul. En revanche il insiste à nouveau sur l'identité de la méthode de Barrow et celle qui découle du calcul leibnizien.

Un paragraphe dont il détient le contenu « du sentiment des auteurs qui en ont parlé » est destiné aux « différences, définitions des différentielles »³. Son exposé

¹ Préface de l'*AI* : « Il est pourtant vray qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. Barrow l'a renduë depuis en considérant de plus près la nature des polygones », *AI*, Préface.

² *Ibid*, 6V.

³ *Ibid*, fol. 8R.

début en regard d'une figure particulièrement soignée à laquelle il renvoie le lecteur : « Voyez la figure ».

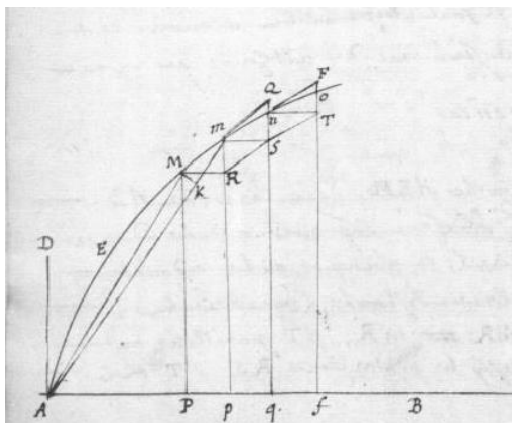


fig. 98

Les ordonnées PM ; pm sont supposées « infiniment proches » l'une de l'autre¹. Varignon insiste sur le fait que l'abscisse $AP(x)$, l'ordonnée $PM = y$, l'arc $AEM = u$ sont « toutes quantités variables » et que si

l'une d'entr'elles est changée, toutes les autres changent aussi, car AP devient Ap ; PM devient pm ; AM devient Am . L'arc AEM devient l'arc AEm , etc. Cependant la ligne connue AD demeure toujours la même pendant ces changements (?). C'est pourquoi les Quantités connues s'appellent constantes, et les autres s'appellent variables ; Mais souvent dans le calcul, on supposera pour constantes des quantitez qui pourroient être variables comme on l'expliquera dans la suite.

Or la différente situation de ces quantitez variables, est ce qui produit les différences, mais il faut supposer qu'elles ne diffèrent d'entre elles que d'une quantité infiniment petite².

Les « différences » sont produites par la variabilité de ces quantités géométriques en supposant qu'« elles ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite ». Comme dans l'*AI*, Varignon montre soigneusement comment représenter sur la figure les éléments qui correspondent aux différences des quantités géométriques

¹ Varignon précise que les ordonnées qn et fo sont semblables aux dernières et également espacées. Mais cette égalité de l'espacement n'est pas nécessaire sauf pour la figuration des différentielles secondes.

² *Ibid*, fol. 8V.

Dans *Instructions*, Varignon présente la notion de quantités variables directement sur un exemple. Il tait en particulier le caractère continu de cette variation. Cependant, dans *Éclaircissemens* il reprend la terminologie de l'AI pour définir « variable » comme une « quantité qui gardant la même expression, augmente ou diminue continuellement (*non per saltum*) » puis celle de la quantité « constante ou fixe » comme celle « qui sous la même expression, garde la même valeur »¹. Remarquons que l'idée de continuité est expliquée à l'aide de l'expression « *non per saltum* » qui est la terminologie propre à Leibniz. La différence d'une quantité variable est alors définie comme l'accroissement ou diminution « instantanée de sa valeur » ou encore « une portion indéfiniment petite, dont la valeur augmente ou diminue continuellement ». Si la dernière citation est mot par mot celle énoncée par l'Hospital, l'introduction de l'adjectif « instantanée » pourrait s'inspirer de l'adjectif « *momentaneis* » qui apparaît dans la « *Nova Methodus* » et que Leibniz attribue aux quantités différentielles². Il est encore plus probable qu'elle s'inspire de la cinématique, domaine dans lequel Varignon travaille. En particulier il construit la notion de « vitesse de chaque instant » ou « vitesse instantanée » qu'il rend publique par la lecture de mémoires académiques en 1698³. Dans les *Éclaircissemens*, pour distinguer les constantes des variables à l'aide d'un symbolisme, Varignon explique qu'il réserve les premières lettres de l'alphabet pour les constantes et les dernières lettres pour les variables. Cette convention n'est pas nouvelle puisque Descartes la met en place pour distinguer les choses connues des inconnues. Ceci lui permet d'introduire la caractéristique *d*, qui s'applique exclusivement aux lettres destinées aux variables. Dans *Instructions*, cet aspect est repris : Varignon souligne que :

la caractéristique *d* n'est là que comme un signe qui modifie d'une certaine façon la quantité variable qui la suit, tellement qu'il ne faut considérer *dx* ou *dy* &c que comme un seul caractère (...) ⁴.

¹ *Éclaircissemens*, *op. cit.*, p. 1.

² « Hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas *dx, dy, dv, dw, dz* ut ipsarum *x, y, v, z* (eujusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionalis haberi posse », *AE*, octobre 1684, p. 469.

³ Voir le chapitre suivant.

⁴ *Instructions*, fol. 9R. Varignon continue sur quelques lignes pour avertir de comment user de cette nouvelle notation dans un souci pédagogique.

Tout en restant dans un cadre géométrique des courbes, il est aussi intéressant de remarquer que Varignon introduit le terme « expression » pour définir la variable. Ceci est intéressant car en considérant une entité géométrique uniquement par son pendant d'« expression » il se place immédiatement dans le processus calculatoire¹.

*Demandes ou suppositions et axiomes*²

La nouvelle égalité

Dans *Instructions*, Varignon énonce les deux suppositions correspondant à celle de l'AI mais en ordre inverse.

La deuxième demande (donc la première dans l'AI) est formulée en s'appuyant directement sur les éléments géométriques de la figure : « que l'on puisse prendre Ap pour AP , pm pour PM , ... » car ces « quantités ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite ». Varignon commente que cette demande pourrait valoir pour « axiome » car il considère que cela fait partie « de la notion que nous avons de l'infiny »³. Cette remarque est très intéressante car un axiome est, selon Arnauld et Lamy, « une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve »⁴. Il considère donc que certaines propositions même si l'infini intervient peuvent être claires. Pour clarifier cette affirmation, il destine trois paragraphes à expliquer la signification pour une quantité d'être « infiniment grande » ou « infiniment petite » :

Par une raison contraire [à celle d'une quantité infiniment grande], lorsque l'on conçoit une quantité diminuée à l'Infiny, ou qu'elle est infiniment petite, elle est nulle à l'esgard d'une autre quantité finie, ainsy $dx dy$ qui est icy produit de deux quantitez infiniment petites, est nul, à l'esgard de $y dx$. Et de mesme $x dy$ est nulle à l'esgard de xy . Cela semble évident lorsque l'on fait quelque attention à la notion de l'infiny⁵.

¹ Jeanne Peiffer observe que dans les *Éclaircissemens* une « tendance très présente (...) celle de substituer des formules et des expressions analytiques aux objets géométriques. Il est moins question de variables définies sur des courbes (comme chez l'Hôpital) que des variables abstraites dont la valeur croît ou diminue ». Nous ne partageons pas entièrement ce sentiment, Varignon éclaire une géométrie à l'aide de calcul différentiel.

² Écrit en marge dans *Instructions*, *op. cit.*, fol. 9V.

³ *Ibid*, fol. 9R.

⁴ *Nouveaux Eléments de géométrie*, *op. cit.* (entre la Préface et le corps du texte). Lamy reprend cette définition dans toutes les éditions de ses *Elémens de géométrie*

⁵ *Ibid*, fol. 11.

Il est important de remarquer que Varignon estime qu'il ne fait qu'« expliciter » des idées qui sont « évidentes » dès que le lecteur est un peu « attentif » à ce qu'il estime être la « notion de l'infini ». Par analogie, il considère dans l'infiniment grand qu'« une quantité s'évanouit et devient nulle à l'égard de cette autre infinie » et que « dans les différences, les différentielles sont infiniment petites à l'égard des autres différentielles qui les précèdent, ainsy $ddd x^2$ est infiniment petite ou nulle, a l'égard de $ddy dx$ ». Le verbe « évanouir » signifie ici devenir « égal à zéro ». Pour chacune des trois situations, il insiste sur le vocable « zéro » pour désigner ces quantités. Cependant, ce terme n'est pas à entendre de manière absolue. En effet, le choix de ce vocable est d'ordre pratique car dans la suite de son écrit ces quantités apparaissent lors de calculs et il est alors commode de les considérer comme « nulles » (en sachant que cette opération est licite puisqu'elles sont « nulles » par rapport aux autres).

Dans *Éclaircissemens*, la première supposition correspond à celle de l'AI, elle est ainsi formulée :

Toute quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une partie infiniment petite par rapport à son tout, peut être prise pour la même qu'elle étoit avant ce changement :
*Mutatio indefinitè parva, mutatio nulla*¹.

Pour éclairer la lecture de l'AI, Varignon souligne aussi que c'est dans le sens d'incomparable par rapport au tout qu'il faut entendre « infiniment petit ». Mais, pour clarifier la première supposition de l'AI, il lui semble utile d'ajouter une supposition supplémentaire notée par (II) dans laquelle il énonce que « tout produit qui résulte d'une quantité infiniment petite par une autre quantité infiniment petite, est nul »². Nous rappelons que lorsque l'Hospital justifie la règle de la différence d'un produit, il fournit l'origine de la « nullité » d'un produit par des arguments faisant intervenir des rapports de différentielles. Il est intéressant ici de remarquer que Varignon souhaite qu'elle ait un statut général de demande. Pour comprendre l'introduction de cette

¹ *Éclaircissemens*, op. cit., p. 2

² *Éclaircissemens*, op. cit., p. 2. Schubring considère que l'ajout de cette supposition provient du débat avec Michel Rolle que nous analyserons dans le prochain chapitre. Il est clair que Varignon se soucie bien avant ce débat de préciser l'incomparabilité dans le cadre du calcul, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, op. cit., Springer, 2015, p. 194.

deuxième supposition, alors qu'elle n'apparaît pas indispensable, il est utile de rappeler que l'écriture d'*Éclaircissemens* est postérieure au débat de Leibniz avec Nieuwentijt (1695) dans lequel il est question entre autres de l'existence de différentielles d'ordre supérieur, en particulier de ce qui résulte du produit de deux ou plusieurs différentielles. Sans en être nécessairement l'origine, les difficultés qui ressortent de cette dispute ont pu inspirer Varignon la formulation explicite en terme de demande. Dans son infatigable souci d'expliquer la notion d'incomparabilité, il juge aussi utile de faire appel aux notions de relatif et absolu. Par exemple, dans un autre passage des *Éclaircissemens*, il précise la différence entre un infini relatif et un infini absolu :

Remarquez que la différence qu'il y a entre un infini absolu & un infini relatif : l'infini absolu, c'est le quotient d'une grandeur quelconque, divisée par un véritable zéro, comme $\frac{a}{0}$, $\frac{a\bar{a}y^2}{0}$, &c. Et l'infini relatif, c'est le quotient d'une grandeur divisée par une autre également réelle, mais infiniment petite par rapport à elle, comme $\frac{a}{dx}$. (...) Pour bien sentir la différence qu'il y a entre l'infini absolu $\frac{a}{0}$, & l'infini relatif $\frac{a}{dx}$, il faut considérer quelque grandeur m qui divise $\frac{a}{0}$, infini absolu, elle donnera toujours $\frac{a}{m0} = \frac{a}{0}$ infini absolu ; au lieu que divisant $\frac{a}{dx}$, infini relatif, elle le changera en $\frac{a}{mdx}$ fini si m est aussi un fini relatif¹.

Il est intéressant de remarquer que pour clarifier les notions de relatif et d'absolu, il utilise des expressions analytiques et non des exemples tirées d'un cadre non nécessairement mathématique, comme Leibniz avait pu l'effectuer.

Le polygone d'une infinité de côtés

Dans *Instructions*, la supposition de considérer une ligne courbe comme un polygone d'une infinité de côtés est énoncée en premier. Varignon explique qu'elle implique que deux points M et m puissent être considérés « comme un même point » et que l'arc Mm prolongé puisse être considéré comme une tangente. Que veut-il dire « par un même point » ? Le passage consacré à la recherche des tangentes peut nous éclairer :

¹ *Éclaircissemens*, op. cit., p. 41.

La façon générale de prendre une différentielle est de substituer dans une équation $x + dx$ au lieu de x . Et $y + dy$ au lieu de y . Et ainsi des autres variables. (...) car puisque tous les termes rangés d'une part sont égaux à zéro [ceux qui correspondent à l'équation première], il ne faut mettre zéro en leur place dans l'équation transformée, c'est-à-dire il n'y a qu'à les effacer. Puis s'il y a des termes qui soient nuls à l'égard des autres, il ne faut que les effacer »¹.

Le fait de considérer que les points M et m sont égaux prend sens dans ce que cela implique au niveau calculatoire : dans les calculs certaines différentielles peuvent ainsi être regardées comme « nulles » – car elles le sont à l'égard des autres – et donc peuvent être « effacées ». Varignon explique qu'une fois cette étape achevée, il faut substituer dx par $t = PT$ et dy par y , car en raison des triangles semblables MRm et TPM , il en résulta la valeur de la sous-tangente t . Il affirme, à nouveau qu'il n'y a « aucune diversité de la méthode de Barrow que dans le changement de caractère² ». Cette affirmation est précisée, comme nous le verrons ci-dessous.

La présentation de la méthode des tangentes est suivie de plusieurs exemples d'application³, puis est abordée la méthode des « plus grands et moindres », la notion de différentielles de différentielles et ses applications à la recherche de points d'inflexion et de rebroussement⁴. Le contenu de ces paragraphes montre que Varignon a sans aucun doute acquis une maîtrise de la plupart des notions abordées dans les quatre premières sections de l'*AI*. Nous pouvons également remarquer que son exposé est accompagné d'un soin particulier apporté à la finesse du tracé des figures.

¹ *ibid*, fol. 10R.

² *Ibid*.

³ La courbe d'équation $yy - ay + xy + x - ab, byy - bqx + qxx = 0$, la parabole, la conchoïde parabolique de Descartes, la quadratrice de Dinostrate.

⁴ *Ibid*, folios de 15V à 20V.

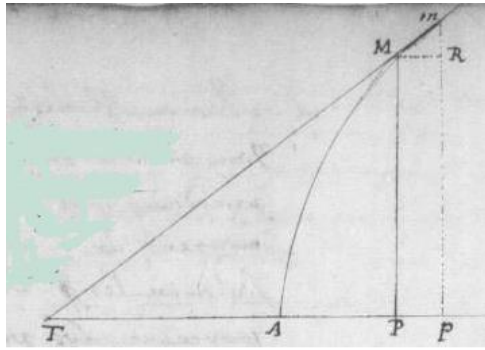


fig. 99

4.2) Réflexions sur les méthodes précédentes de M^r de Fermat, Barrow et Leibnitz¹ : les aveux de Varignon

Varignon consacre trois folios à des commentaires critiques sur ce qu'il vient d'exposer. Jusqu'ici, c'était en tant qu'enseignant désireux de rendre compte des méthodes de tangentes et du nouveau calcul différentiel qu'il se plaçait. Nous avons souligné que son écriture révèle un souci pédagogique indéniable. Dans le passage que nous allons analyser, Varignon adopte un point de vue plus personnel par rapport au savoir qu'il vient exposer. Dans ces lignes, il exprime sa pensée sur les différentes méthodes des tangentes et aussi sur les « fondements » du calcul leibnizien. Dans ce sens, ce passage est extrêmement précieux car il nous indique des aspects de la réception varignonienne du calcul leibnizien, dont le décèlement par d'autres écrits aurait été probablement impossible.

Ce passage est constitué de 21 paragraphes : les dix premiers concernent des réflexions sur l'utilisation des infiniment petits, dans les autres Varignon s'applique à traduire la règle de Fermat revue par Descartes en termes différentiels.

De l'usage des infiniment petits

Deux fois de suite Varignon a affirmé la forte similitude de la méthode des tangentes de Barrow avec celle de Leibniz. Les derniers paragraphes précisent sur quoi il s'appuie pour cela. Avant d'aborder toute critique, il rappelle que l'un des avantages de la méthode de Leibniz est que son application est indemne de tout souci à propos des quantités sourdes ou fractionnaires². Cependant, il ajoute :

¹ En marge pour intituler le paragraphe.

² *Ibid*, fol. 20V.

dans l'hypothèse des infiniment petits, on résout par ses moyens avec grande facilité des problèmes dont on aurait peine à résoudre par des autres voyes. Ainsi l'on peut dire que la Géométrie a reçu un nouvel ornement que l'invention d'un tel calcul. (...) On ne peut pas disconvenir qu'on porte loin les découvertes par cette hypothèse, mais il faut avouer qu'elle a son embarras, et que l'esprit n'est pas entièrement satisfait, parce qu'il ne comprend pas parfaitement son principe. Il est en effet de l'essence de la nature de l'esprit humain qui est fini de ne pouvoir comprendre une chose infinie en quelque genre que ce soit¹.

Ce commentaire est très intéressant. Lorsque Varignon a décrit le calcul des différences, il a très clairement expliqué comment ce calcul permettait de traiter des quantités considérées infiniment petites à l'égard d'autres. Il rappelle que cette pratique – c'est-à-dire la considération d'infiniment petits – n'a rien d'inédit : « il ne serait pas difficile d'en faire beaucoup d'exemples dans les anciens ». Mais ces derniers ont manqué de « moyens ». C'est justement ce qu'apporte le calcul leibnizien : la possibilité de contrôler le rapport entre ces quantités. Varignon n'a nullement statué sur ces quantités. Ici, il se place en surplomb par rapport à cette pratique : en expliquant qu'elle est fondée sur une hypothèse qui certes conduit à obtenir des résultats, mais qui a « son embarras » car elle amène à devoir émettre des considérations sur l'infini alors que nous le connaissons de façon très tenue. Certes, lorsqu'il justifiait de prendre des quantités pour des zéros, il invitait le lecteur à prêter quelque peu d'attention à « la notion que nous avons de l'infini » : cette connaissance suffisait pour justifier une pratique. Il n'y a pas de revirement : Varignon estime tout à fait acceptable de traiter des infiniment petits juste avec la « notion que nous avons de l'infini » car cette pratique est féconde, mais il juge que leur hypothèse a les mêmes inconvénients que « celle des indivisibles, que quelques-uns n'ont point estimé être purement géométrique ». Cependant il affirme qu'il est possible, comme certains auteurs, de préférer les infiniment petits aux indivisibles. Pour soutenir cette affirmation, Varignon s'appuie sur une citation extraite du *Scholium* qui achève le premier livre des *Principia*² :

¹ *Ibid*, fol. 20V.

² *Principia*, *op. cit.*, p. 35.

C'est le sentiment d'un grand géomètre [Newton, écrit en marge] qui est partisan des infiniment petits, Durior est, indivisibilium hypothesis, et propterea a methodus illa minus geometrica censetur ... his Infinite parvis (?) Idem praestatur quod per methodum indivisibilium ... proinde si quando quantitates tanquam se particulis constantis consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia semper intelligi¹.

Varignon ne la cite pas en entier et deux passages sont omis comme l'indiquent des pointillés. Nous présentons, dans la page suivante, un tableau contenant la version originale de Newton au regard de celle de Varignon, accompagnées de leur traduction. L'observation du tableau montre que Varignon omet volontairement les passages concernant la méthode des premières et dernières raisons. En échangeant cette dernière par « *his infinite parvis* » la citation amputée de Newton exprime que la méthode des infiniment petits – et non plus celle des premières et dernières raisons – peut également démontrer ce qui est obtenu par la méthode des indivisibles. De plus, elle a pour garant son principe « démontré ». Varignon assimile donc les infiniment petits – qu'il a considéré dans son explication du calcul leibnizien – avec les quantités évanescentes décrites par Newton. Cependant, bien que Newton soit reconnu comme un grand géomètre, Varignon ne se range pas à son avis, il ne prône pas l'utilisation des « infiniment petits » au détriment de celle des indivisibles. En effet, il remarque :

En quoy vous pouvez remarquer que ce n'est icy qu'un jeu de mots, et qu'au fonds les Indivisibles et les Infiniment petits doivent estre pour la mesme chose dans l'usage & les applications que l'on en fait².

La position de Varignon est claire : les infiniment petits considérés comme « évanescents » et qu'il a assimilé à ceux du calcul leibnizien, ou les indivisibles, sont la « même chose », c'est-à-dire que seule compte la fécondité qui découle de leur usage.

Pour développer cette affirmation, il revient sur un exemple traité au paragraphe 37 dans lequel il a fourni la tangente à la conchoïde parabolique de

¹ *Ibid.*

² *Ibid.*

Descartes. Dans sa recherche, il a été amené à prendre une ordonnée pour une autre, ce qui conduit à affirmer comme exacte une similitude de triangles. Or, il lui paraissait que cela « n'est point naturellement selon l'analogie des triangles »¹, et il avait ajouté à la suite une autre résolution dans laquelle il calculait en considérant la différence réelle entre ces deux ordonnées. Effaçant les termes « qui sont infiniment petits » ou « nuls à l'égard des autres », il obtenait le même résultat que dans la première résolution. En commentant cet épisode, Varignon explique que le principe de considérer une ordonnée pour une autre est « peu clair » mais qu'il permet des calculs plus expéditifs. Ainsi, il exprime que la rapidité de l'obtention du résultat n'est pas toujours accompagnée de clarté. Il critique aussi le fait de considérer la similitude entre le triangle caractéristique et celui constitué de la tangente, la sous-tangente et l'ordonnée car il trouve peu « certain » que :

les attributs ou les propriétés des quantitez finies conviennent de mesme façon aux quantitez concües comme infinies (...) sy le triangle *MRm* est concüe infiniment petit, il n'est pas certain que l'on puisse faire comparaison avec le triangle fini *TPM*, ny former une analogie des costez de l'un, avec celle des costez de l'autre².

Par conséquent, la supposition qui consiste à prendre une ligne courbe pour un polygone infini, même si par elle on peut conclure de « belles choses » n'est pas non plus un principe « clair », toujours en raison du difficile passage entre le fini et l'infini : « comme il s'agit de l'infiny, on ne cessera jamais d'objecter ny de répondre sans que l'on puisse venir à beaucoup d'éclaircir parfaitement la chose »³.

Varignon juge donc que les hypothèses du calcul sont dures à admettre pour l'esprit fini humain. Certes, de grands avantages sont retirés pour les découvertes mais il lui paraît, qu'au moins en ce qui concerne la méthode des tangentes, « on aurait éviter l'embarras de ce langage »⁴.

¹ *Ibid.*, fol. 15V.

² *Ibid.*, fol. 17V

³ *Ibid.*

⁴ *Ibid.*

Varignon cite Newton	Newton	Traduction ¹
Durior est, indivisibilium hypothesis, et propterea a methodus illa minus geometrica censetur ...	Durior est indivisibilium Hypothesis ; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur	Les démonstrations auraient été plus courtes par la méthode des indivisibles, mais comme l’hypothèse des indivisibles est dure à admettre, et par conséquent cette méthode est considérée peu géométrique.
	Malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasq ; nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate praemittere	Pour les démonstrations, j’ai mieux aimé employer celles des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s’évanouissent, et j’ai commencé par faire voir, le plus brièvement que j’ai pu, ce que deviennent ces quantités lorsqu’elles atteignent leurs limites.
his Infinite parvis (?)	His enim	
Idem praestatur quod per methodum indivisibilium ...	idem praestatur quod per methodum indivisibilium	Je garantirai par cette méthode tout ce qu’on démontre par les indivisibles

¹ Traduction de la Marquise de Châtelet légèrement modifiée, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, (1726). Traduction de feu Madame la Marquise Du Chastellet. 2 tomes, Chez Desaint & Saillant, et chez Lambert, Paris, 1756, p. 47.

	& principiis demonstratis jam tutius utemur.	Mais en ayant prouvé les principes, je m'en servirai avec plus de sûreté.
proinde si quando quantitates tanquam se particulis constantis consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia	Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia,	Ainsi, lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme composées de particules déterminées, et que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes ; (je ne désignerai) point par là des quantités indivisibles, mais des quantités évanouissantes
	non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites,	de même, ce que je dirai des sommes et des raisons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites de sommes et de raisons des particules évanouissantes
semper intelligi.	semper intelligi	

Le principe qui sert de fondement à Fermat

Le manuscrit s'achève par l'«explication du principe qui sert de fondement à la règle de M. de Fermat » grâce à laquelle Varignon veut assurer que les méthodes des tangentes de Barrow et Leibniz sont les « mesme ». Pour ce faire, il s'aide de l'explication de la règle de Fermat fournie par Descartes.

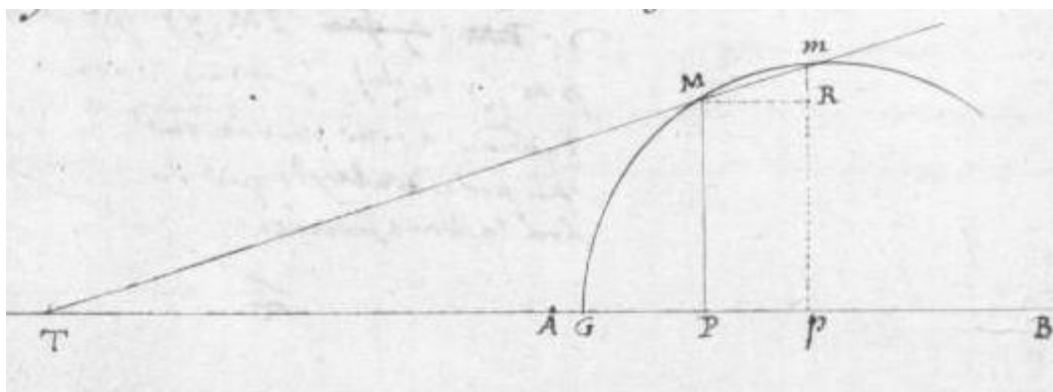


fig. 100

Il considère une courbe Gmm de diamètre AB , il cherche le point T sur le diamètre tel que la sécante Mm vérifie $\frac{MP}{mp} = \frac{m}{n}$. Il nomme $AP = x, PM = y, Pp = dx, RM = dy, TP = t$. Remarquons qu'ici les notations dx ou dy ne renvoient pas a priori à une différence infiniment petite¹.

Il suppose que la courbe (qui est un cercle) a pour équation :

$$xx - 2bx + bb + yy - aa = 0 \quad (1)$$

L'appartenance de m à Gmm se traduit par l'égalité appelée « transformée » :

$$xx + 2xdx + dx^2 - 2bx - 2bdx + bb + yy + 2ydy + dy^2 - aa = 0 \quad (2)$$

Soit, en tenant compte de (1) et (2) :

$$2xdx + dx^2 - 2bdx + 2ydy + dy^2 = 0 \quad (3)$$

Varignon utilise la similitude des triangles TPM et RMm pour écrire :

$$dy = \frac{ydx}{t} \quad (4)$$

¹ Varignon utilise les lettres m et n pour décrire le rapport des ordonnées alors qu'elles sont déjà utilisées pour nommer les points.

Notons qu'ici Varignon traduit par cette écriture la similitude entre des triangles finis, il n'est donc pas dans la situation de devoir consentir à admettre un attribut du fini à l'infiniment petit.

En substituant cette expression dans (3), il obtient :

$$2xdx + dx^2 - 2bdx + \frac{2yydx}{t} + \frac{y^2dx^2}{t^2} = 0 \quad (5)$$

Puis en divisant par dx :

$$2x + dx - 2b + \frac{2yy}{t} + \frac{y^2dx}{t^2} = 0 \quad (6)$$

En utilisant l'égalité $\frac{MP}{mp} = \frac{m}{n} = \frac{y}{y+dy}$, il trouve :

$$ny = my + \frac{mydx}{t} \quad (7)$$

Il est facile d'obtenir la valeur de dx et de la substituer dans (6) afin d'obtenir la valeur de $TP = t$ cherchée. Le problème de la recherche du point de rencontre de la sécante est ainsi résolu en termes analytiques. Nous pouvons remarquer que c'est ainsi que concluait Descartes dans la lettre à Hardy¹. C'est, aussi à la manière de Descartes, que Varignon considère le cas de la tangente comme un cas particulier du problème général qu'il vient de résoudre. Il correspond à celui pour lequel le rapport $\frac{m}{n}$ est celui d'égalité². Dans ce cas, Varignon affirme que les différences sont nulles :

$$dx = 0 \text{ puis } dy = 0,$$

et ainsi, $m = n$. Dans (6), il substitue alors dx par 0 :

$$2x - 2b + \frac{2yy}{t} = 0 \quad (8)$$

et il trouve $t = \frac{yy}{b-x}$.

Pour finir, Varignon remarque qu'il est possible de « faciliter les calculs ». Il suffit de voir que les termes de cette dernière équation « proviennent » de l'équation (5) :

¹ Analysée dans le chapitre 1 « Et c'est ici le chemin ordinaire de l'analyse pour trouver le point E, ou bien la ligne CE, lorsque la raison qui est entre les lignes BC et DF est donnée ». BC correspond à MP et DF à mp .

² Descartes écrit : « l'invention de la tangente (...) doit être cherchée par le même calcul que je viens de mettre, en supposant seulement la proportion d'égalité au lieu de celle que j'ai nommée de g à h » (avec les notations de Varignon : « de m à n »).

$$2x dx + dx^2 - 2b dx + \frac{2y y dx}{t} + \frac{y^2 dx^2}{t^2} = 0 \quad (5)^1$$

Cette affirmation n'est pas tout à fait juste puisqu'il omet de dire qu'il faudrait, pour être exact, multiplier les termes de l'équation (8) par la différence dx alors que celle-ci est précisément considérée comme nulle dans le cas de la tangente :

$$2x dx - 2b dx + \frac{2y y dx}{t} = 0 \quad (9)$$

En substituant $\frac{y dx}{t}$ par dy , celle-ci s'écrit :

$$2x dx - 2b dx + 2y dy = 0 \quad (10)$$

dont les termes se retrouvaient dans la « transformée » :

$$2x dx + dx^2 - 2b dx + 2y dy + dy^2 = 0 \quad (3)$$

Ce travail de remontée des équations lui permet d'énoncer que pour trouver t plus rapidement, il suffit, en partant de la « transformée », d'omettre les termes où il n'y a que des quantités connues puis qu'au lieu de x ou y , il faut écrire le second terme des puissances identiques de $(x + dx)$, ou $(y + dy)$. Il indique que cette dernière opération correspond aux règles de différenciation qu'il a énoncées dans l'art 18². On obtient ainsi directement une transformée « simplifiée » qui correspond à l'équation (10). Pour finir, il explique qu'il suffit de se servir de l'analogie $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{y}$. Ici, il ne s'agit plus, comme dans le cas général de recherche de sécantes, d'une analogie exacte. Varignon ne fait aucun commentaire alors qu'il a critiqué plus haut la considération d'analogies entre un triangle fini et un triangle infiniment petit.

L'équation (10) est celle obtenue également en appliquant la règle de Fermat telle qu'elle est décrite dans l'*Instruction*.

Varignon peut ainsi conclure :

Telle est à peu près l'explication du principe que donne M. Descartes, sur lequel il prétend que Mr. De Fermat doit avoir composé sa règle. Et l'on peut dire que c'est aussi le principe sur lequel est établie la règle de M^{rs} Barrow & Leibnitz. Il semble qu'un tel principe se

¹ Soulignée par nous dans l'équation (5) et l'équation (3) *infra*.

² « Règle générale pour prendre les différentielles » qui énonce la formule $dx^n = nx^{n-1}dx$, *ibid*, fol. 10V.

comprend mieux que celui des infinis, Quoiqu'il en soit néanmoins les pratiques soient les mêmes dans ces deux hypothèses¹.

Ainsi, pour Varignon, le principe des méthodes des tangentes n'a nul besoin de s'embarrasser de considération d'infiniment petits pour être expliqué. Nos deux premiers chapitres ont montré le devenir du statut du « e », en particulier ils ont établi qu'en ce qui concerne les méthodes des tangentes, il n'y a aucune nécessité à l'interpréter comme infiniment petit. Il nous semble que c'est dans tous les cas la conviction dont témoigne ici Varignon. En indiquant qu'il n'y a aucune différence au niveau des « pratiques », il s'agit pour lui de souligner la simplicité de l'explication en termes analytiques qu'avait fournie Descartes. Nul besoin de considérer une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés qui diffère de celle-ci d'infiniment petits pour la recherche d'une tangente. Celle-ci correspond à un cas particulier de sécante et cette situation a un pendant analytique qui « se comprend mieux ». Cette manière de concevoir la tangente perdure chez Varignon. Dans une remarque des *Éclaircissemens*, il fournit une façon de trouver les touchantes d'une courbe « sans la considérer comme un polygone »² Pour ce faire, il faut supposer les touchantes « comme des sécantes qui à la fin deviennent touchantes » :

On regarde dx et dy comme des grandeurs indéterminées de quelque valeur, qu'on concevra toujours diminuer à mesure que les ordonnées communes à la Courbe, & à la sécante, s'approchent jusqu'à ce qu'enfin elles se confondent en une.

Varignon maintient dans ce passage le même point de vue que celui des *Instructions*. Dans la suite il fournit des précisions sur le statut de dx mais comme il s'agit probablement d'une réponse qu'il adresse aux attaquants du calcul différentiel lors du débat académique en 1701, nous y reviendrons dans un prochain chapitre³.

¹ *Ibid*, fol. 23R.

² *Éclaircissemens*, *op. cit.*, p. 12-13.

³ Chapitre 7.

Conclusion

Ce chapitre avait pour dessein de montrer pourquoi et comment le traité *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* constitue un témoignage essentiel de la première réception française du calcul leibnizien. Certes, cet ouvrage est principalement l'aboutissement d'une lecture hospitalienne de l'analyse de Leibniz dont l'horizon d'attente est partagé par les mathématiciens autour de Malebranche.

Plusieurs aspects ont été examinés pour apprécier la valeur de cette affirmation.

Nous avons accordé une place importante à l'analyse de la Préface car elle développe un récit dans lequel l'Analyse des infinis apparaît comme l'aboutissement nécessaire de la géométrie des courbes. Le préfacier insiste sur la nécessité de considérer l'infini pour traiter le plus intimement de la ligne courbe. Il prend soin d'expliquer qu'elle est proche de la géométrie des grandeurs en raison de sa capacité à manier les rapports d'infiniment petits de tout ordre. Certes, cela ne peut s'effectuer sans l'algorithme mais cet aspect, sans être ignoré, n'est pas particulièrement mis en avant dans la Préface. L'important est d'affirmer que non seulement l'Analyse des infinis prolonge celle qui est connue de tous – « l'ordinaire » – mais qu'elle est devenue incontournable pour quiconque veut être conduit « jusqu'aux véritables principes des lignes courbes ». Persuader le lecteur de ce message est sans aucun doute un des buts recherchés.

Le titre « Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes » annonce une présentation d'une nouvelle analyse – celle des infiniment petits – qui rend intelligible les courbes. Dans la première section, qui a pour fonction de présenter les principes du calcul, nous avons vu que, pour expliquer la règle du produit, l'Hospital compare des infiniment petits de manière similaire à celle de la comparaison de rapports de grandeurs euclidiennes. En fait, cet exemple est quasiment isolé. Dans le reste de l'ouvrage, le terme « grandeur » n'est utilisé que dans des rares occasions, sans aucun intérêt pour notre propos, et les infiniment

petits ne sont pas traités comme des grandeurs. En revanche, le terme « quantité » est omniprésent. L'Analyse des infiniment petits de l'Hospital ne traite donc pas des grandeurs mais d'une nouvelle sorte de quantités, qu'il désigne par « quantités variables » et qu'il définit de manière originale. Nous rappelons que la première section est la seule pour laquelle l'Hospital choisit une présentation *more geometrico* afin d'explicitier clairement les définitions et demandes sur lesquelles s'appuie la nouvelle analyse des différences. Dans ce but, il lui est nécessaire de définir en premier la nouvelle notion de « quantité continuellement variable » dont le terme « différence » est intrinsèquement lié. L'analyse des infinis est la plus propre pour traiter la courbe car elle suppose la courbe comme étant engendrée par la variation continue d'une quantité. Cet aspect est crucial et extrêmement nouveau par rapport aux géométries « ordinaires ». Interpréter une situation géométrique comme résultant d'une variation infinitésimale n'est pas, quant à la résolution d'un problème, la même approche que celle d'une interprétation en termes algébriques. Le cas de la tangente illustre bien ce changement de perspective : dans un cas, une tangente en un point M est une sécante dont un des points, distinct de M , s'en approche continûment et infiniment, dans l'autre cas, une tangente correspond à l'étude des conditions pour qu'une équation algébrique ait une racine double. Si une traduction est possible entre ces deux points de vue, il n'en demeure pas vrai que ce sont effectivement deux points de vue complètement distincts. Il sera question dans le dernier chapitre d'examiner s'il était possible d'explicitier clairement cette distinction de la part des introducteurs du calcul leibnizien et de leurs opposants.

Cela étant établi, l'Hospital énonce les demandes puis les règles calculatoires pour traiter ces quantités. Ces règles permettent d'obtenir des égalités dont il est possible de tirer des connaissances sur les grandeurs finies. En définitive, comparer « des différences infiniment petites des grandeurs finies » ou découvrir « les rapports de ces différences » revient tout simplement à appliquer l'algorithme calculatoire. Nous insistons : l'ouvrage traite des courbes, non pas à l'aide de grandeurs, mais avec des nouvelles quantités, définies à partir de la notion de variabilité, et avec lesquelles il est possible de calculer pour « l'intelligence des lignes courbes ».

Comment s'articulent les notions de quantités variables et leurs différences avec celles des grandeurs de la géométrie euclidienne ?

Le préfacier magnifiait l'utilisation des différences de l'Analyse des infinis. Cependant, bien que dignes de louanges, les différences ne sont pas des grandeurs mais des adjuvants pour la connaissance de celles-ci. L'Hospital introduit la notion de « quantité continuellement variable » mais laisse en suspens une explicitation du terme « continuellement ». Le fait-il parce que ce terme est « évident » ?

Pour mieux faire comprendre cette nouvelle notion, l'Hospital insiste à octroyer aux différences une représentation figurée comme celles des grandeurs usuelles de la géométrie. La volonté de représenter sur la même figure les différentielles ou les différentielles secondes et d'autres grandeurs géométriques nous semble un point très significatif. Il est remarquable que mot « calcul » n'est presque pas prononcé dans le traité. Certes, l'étape calculatoire est indispensable pour obtenir les résultats mais, placés avant ou après, les avertissements, commentaires ou interprétations, sont le plus essentiel de l'argumentation. L'Analyse de l'infini n'apparaît pas seulement comme une invention – l'invention – pour la géométrie des lignes courbes, elle est présentée comme une « géométrie », celle de l'infini et des infiniment petits. Celle-ci englobe « l'ordinaire » car par elle, les méthodes d'invention peuvent être retrouvées et des propositions plus générales être énoncées.

La première section est essentielle aussi pour comprendre la cohérence de la structure de l'ouvrage. Elle a pour rôle de fonder toutes les méthodes de résolution des sections suivantes. A la manière des auteurs de Port-Royal, elle présente les éléments sur lesquels repose l'Analyse des infinis invitant ainsi le lecteur à la connaissance d'une nouvelle géométrie, en inaugurant comme « évidents » les réquisits indispensables que sont les demandes. Il est intéressant et important de rappeler que si s'autoriser à les qualifier d'évidentes est selon l'Hospital nécessaire à la pratique de la nouvelle analyse, ceci n'a rien de révolutionnaire. Exprimer leur caractère évident est coutumier des mathématiques dont le groupe malebranchiste, et particulièrement le Marquis de l'Hospital, sont héritiers.

Les autres sections sont de teneur complètement différente à la première. Il s'agit désormais d'expliquer comment user du calcul des différences pour résoudre toutes sortes de problèmes géométriques liés aux courbes. Le calcul différentiel permet de généraliser des énoncés : l'architecture de l'ouvrage l'illustre.

Nous avons consacré une partie de notre étude au témoignage de Varignon. Notre intérêt pour celui-ci réside en la manière dont il expose et commente le calcul leibnizien au regard des méthodes d'invention. Varignon reconnaît aux hypothèses du calcul de Leibniz une certaine « évidence » découlant de la « notion de l'infini » que nous possédons et à laquelle nous devons prêter attention. Il comprend également en quoi réside leur intérêt pour la résolution de problèmes géométriques. N'affichant pas de préférence pour les indivisibles ou les infiniment petits, il considère qu'ils sont « la même chose dans l'usage » et qu'il ne s'agit lorsque l'un ou l'autre est choisi, que d'affaire de « jeu de mots »¹. Cependant, sans être aucunement sceptique quant à leur utilisation, il se montre critique à propos de la « dureté » de leurs hypothèses. En rendant manifeste la similitude entre la méthode des tangentes leibnizienne et la méthode de Fermat (ou celle de Barrow), il suggère un manque de *finesse* de la part de ceux qui ne se satisfont pas d'une méthode qui, ne faisant pas intervenir des infiniment petits, apparaît bien plus simple à l'esprit. Ce témoignage est extrêmement riche car il fait apparaître que celui qui « vient en dernier lieu, comme militant de la diffusion [du calcul différentiel], dans le sillage de l'Hospital »² n'a pas une position aussi tranchée que celle qu'il devra exhiber pour défendre les infiniment petits lors de la querelle à l'Académie des Sciences.

Les samedis 23 et 30 juin 1696, Joseph Sauveur lit deux mémoires à l'Académie Royale des Sciences intitulés « Demonstration par lignes des Regles du Calcul des Differentielles pour la multiplication et la division »³ et « Règles pour les puissances »⁴. Par ces mémoires, il souhaite montrer géométriquement les règles du calcul devant ses pairs. Pour les suppositions, il ne se réfère qu'à l'ouvrage du marquis et aucunement à Leibniz. L'Hospital avait lu quelques mémoires à l'Académie dans lesquels il utilisait le calcul différentiel mais ce langage était quasiment ignoré de tous les savants. La lecture de Sauveur au sein de l'Académie marque un jalon supplémentaire pour l'introduction du calcul car celui-ci apparaît comme objet principal du discours et non uniquement comme adjuvant de résolution de problèmes. Il est important de souligner que la principale référence pour le calcul leibnizien au

¹ FR 12262, fol. 20V.

² Costabel, Pierre, « Pierre Varignon et la diffusion du calcul différentiel et intégral », *op. cit.*, p. 15.

³ PVARs, tome XV, fol 103R-105R.

⁴ *Ibid*, fol. 111V-114V.

sein de l'Académie est l'exposé du Marquis de l'Hospital. Il convient maintenant d'analyser de quelle manière il a été reçu et accepté au sein de l'institution savante, principalement académique.

Troisième partie :
Le calcul leibnizien à l'Académie (1696-1706)

CHAPITRE 6

La gestation d'une crise à l'Académie (1693-1699)

Introduction

Avant la publication de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, le calcul leibnizien a déjà fait son apparition dans l'Académie royale des sciences par quelques lectures de mémoires de l'Hospital, puis de Varignon. Cependant, si le contenu de ces mémoires atteste de la fécondité du nouveau calcul, peu – mis à part les auteurs desdits mémoires – sont ceux qui peuvent prétendre à la compréhension de ce calcul. Notre précédent chapitre examinait l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* et une de ses premières lectures. Sa publication témoigne de l'aboutissement du travail de réception du calcul leibnizien. Elle représente ainsi à la fois la fin d'une étape cruciale pour la réception du calcul leibnizien mais elle marque aussi le début d'une autre étape de la réception. Publiée sous le sceau de l'Imprimerie royale, l'analyse des infinis est désormais une science devenue entièrement du domaine public, en particulier celui que constitue l'Académie Royale des Sciences.

Pendant les quatre années qui suivent la publication de l'*AI*, quelques critiques émergent à propos de la « méthode des infinis » mais elles sont relativement ténues. Cependant, en juillet 1700, Michel Rolle lance une attaque acérée contre « les suppositions fondamentales de la Géométrie des infiniment petits »¹. Elle conduit, les années suivantes, à un débat houleux à propos de l'utilisation du calcul leibnizien.

¹ PVARs, 17 juillet 1700, folio 281V.

Dans ce chapitre, nous enquêtons sur ce qui a pu conduire à l'émergence brutale d'une crise à propos de l'utilisation du calcul leibnizien.

Dans un premier temps, nous dressons un tableau des recherches et pratiques mathématiques des académiciens lorsque la « nouvelle géométrie de l'infini »¹ fait irruption. Il nous semble nécessaire de comprendre dans quelle mesure le cadre académique est propice à la réception du nouveau calcul ou ne l'est pas. En particulier, nous nous intéressons à la pratique des méthodes infinitistes dans les mémoires académiques. Cet usage apparaît coutumier et partagé par tous les géomètres, y compris ceux qui seront qualifiés de « vieux style ». S'il est vrai que l'utilisation d'« infiniment petits » – notion sur laquelle le calcul leibnizien s'appuie – n'apparaît pas nécessairement illicite, nous devons écarter cette critique comme étant spécifiquement adressée au calcul leibnizien pour préciser davantage celles qui le sont. Qu'est-ce qui alors, aux yeux des attaquants du nouveau calcul, rend inacceptable son utilisation ?

Pour répondre, nous nous appuyons sur les témoignages des académiciens, en commençant par ceux de la première génération : Christiaan Huygens, Jean Gallois, Philippe de la Hire. Contemporains dans leur jeunesse de géomètres comme Roberval, Pascal et Fermat dont ils ont été témoins de l'émergence de leurs méthodes d'invention mais aussi des discours et des débats à leur propos. Quel rapport critique entretiennent-ils avec le calcul leibnizien ? Nous nous penchons ensuite sur le personnage de Michel Rolle. Fervent amoureux de l'algèbre, il plaide pour son application à la géométrie. En raison de cette spécificité, nous pensons que ses critiques envers le calcul sont à distinguer de celles des autres académiciens.

Par ailleurs, nous examinons également les arguments qu'apportent les utilisateurs du nouveau calcul, c'est-à-dire essentiellement l'Hospital et Varignon. La nouvelle analyse est un moyen incomparable pour résoudre de nombreux problèmes, en particulier ceux à caractère physico-mathématique, pour lesquels la géométrie « ordinaire » peine à rivaliser avec la nouvelle analyse, étant parfois incapable de fournir une quelconque résolution. Ainsi, en juin 1696, Jean Bernoulli lance le défi aux « mathématiciens les plus perspicaces de l'univers » de trouver la courbe de descente la plus rapide entre deux points placés sur un plan vertical. D'après le mathématicien suisse, pour trouver la solution de ce problème de *brachystochrone*, « la Géométrie

¹ Terme emprunté à Michel Rolle, *PVARS*, 15 mai 1700.

ordinaire ne peut aller »¹. Ainsi, la résolution de problèmes, le plus souvent proposés publiquement, conduirait à une reconnaissance institutionnelle de la nouvelle analyse. Nous destinons également une analyse aux travaux de Varignon dans lesquels il applique le calcul à la mécanique. Il s'agit, pour le jésuite, d'une des premières tentatives d'utilisation du calcul leibnizien. Nous souhaitons dégager l'originalité à laquelle il parvient grâce à l'algorithme leibnizien, ce qui nous semble être en soi un argument pour le nouveau calcul.

L'année 1699 marque dans l'histoire de l'Académie des Sciences une étape essentielle. Un nouveau règlement est mis en place, codifiant certaines des procédures et des conduites déjà présentes dès 1690². Le renouveau de 1699 produit une augmentation des effectifs. Certains membres du groupe malebranchiste étaient déjà académiciens et se voient octroyés de nouveaux titres : l'Hospital (1693) devient membre honoraire, Varignon (1688) et Fontenelle (1697) entrent dans la classe des pensionnaires, Carré (1697) dans celle d'élève (de Varignon). Les nouvellement élus sont Malebranche comme membre honoraire, De Billettes, comme pensionnaire et Parent, comme élève (de Billettes)³. Les frères Bernoulli, Leibniz et Newton sont nommés associés étrangers. Ces nominations donnent au groupe malebranchiste une représentation remarquable à l'intérieur de l'Académie⁴, principalement parmi les deux classes prestigieuses. Par ailleurs, le règlement exige des académiciens, sauf pour les membres honoraires, de déclarer au début de chaque année l'objet de leur

¹ Séance du 16 mars 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 56 R.

² Hahn, Roger., *L'Anatomie d'une institution scientifique, L'Académie des sciences de Paris, 1666-1803*, éditions des archives contemporaines, p. 40.

³ Nous avons indiqué pour ceux qui sont académiciens avant 1699 l'année de leur nomination et pour chacun des élèves leur pensionnaire associé.

⁴ Pour la réception du calcul des différences, nous avons choisi de ne pas tenir compte des académies de Province. On pourra consulter : McClellan, James E., *Science reorganized, Scientific societies in the eighteenth century*, Columbia University Press, New York, 1985, p. 89-99. Entre 1700 et 1750, quinze académies de Sciences et Belles lettres apparaissent en France. En effet, leur développement suit un mouvement institutionnel qui s'inspire de l'institution parisienne. Pour passer du statut de société privée au statut officiel, l'octroi d'une lettre patente de Versailles doit être demandé. Cependant même en ayant un statut officiel, leur activité reste la plupart du temps restreinte à la Province à cause en particulier du manque de support financier : « provincial academies could not offer financial incentives to lure people and talent into event a part-time carrer as an academician, as was the case in Paris ans elsewhere abroad ». Les académies restent largement composées d'amateurs tout au long du XVIII^e (*Science reorganized, op. cit.* p.92). N'étant pas financées par le pouvoir parisien, elles ne pouvaient pas prétendre à bien plus qu'à une classe d'amateurs et elles s'alignaient avec les pouvoirs locaux.

recherche¹. Par cet engagement déclaré devant ses pairs, l'académicien affermit et précise sa position. Nous terminons ce chapitre en analysant comment ce nouveau règlement modifie les places des académiciens au sein de cette *compagnie* savante et comment ce remaniement intervient pour asseoir l'autorité des arguments d'attaque ou de défense de l'utilisation du calcul leibnizien.

¹ Article 21 : « Chaque académicien pensionnaire sera obligé de déclarer par écrit à la Compagnie le principal ouvrage auquel il se proposera de travailler : et les autres académiciens seront invités à donner une semblable déclaration de leurs desseins », janvier 1699, *PVARS*, tome 18, fol. 109V

1) Huygens, Leibniz et l'Hospital : discussion sur le statut du calcul

1.1) Huygens académicien

« Mon Archimède » : c'est ainsi que son père Constantin désigne son fils en vertu de ses talents mathématiques et de son ingéniosité pour ses constructions pratiques¹. Sa découverte, d'une part, de l'anneau de Saturne en 1655 et d'autre part, l'invention de l'horloge à pendule en 1656 permettent à Christiaan Huygens de gagner une grande notoriété au sein de la République des lettres comme en témoigne son élection rapide à la *Royal Society* en 1664 pendant son séjour à Londres. Sa réputation se répand dans les milieux parisiens et parmi les proches du ministre Colbert². Il apparaît comme celui qui est le plus qualifié pour assurer la succession scientifique française, que des personnalités comme Pascal, Descartes, Mersenne ou Fermat ont su incarner. Huygens devient membre de l'Académie royale des sciences à sa création en 1666 et participe amplement à l'élaboration de projets la concernant, ce qui fait de lui un personnage de haute importance au sein de cette institution³. Son séjour à Paris dure de mai 1666 à août 1681, interrompu par deux séjours en Hollande. Pendant toute sa période académique, Huygens s'intéresse à des sujets de divers domaines, et ses recherches apportent du prestige à l'Académie⁴. Des articles et mémoires liés à son travail académique sont publiés, en grande partie dans le *Journal des Sçavants*⁵, puisque l'Académie n'a pas encore mis en place un système de publication réservé aux travaux de ses membres.

En 1673, Huygens publie un de ses plus célèbres ouvrages *Horologium Oscillatorium*⁶ qu'il dédie au Roi Soleil. Après son départ il reste en contact avec l'Académie, particulièrement par l'intermédiaire de Jean Galloys et Philippe de La Hire. Dans notre premier chapitre, nous avons vu que ce dernier est chargé en 1686 de publier divers ouvrages d'académiciens de prestige, certains décédés comme

¹ Bos, Henk, J.M., « Œuvre et personnalité de Huygens », dans *Huygens et la France*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1982, p. 3.

² Ce dernier joue un rôle important dans sa nomination à l'Académie.

³ On pourra lire avec intérêt l'article fourni de Taton, René « Huygens et l'Académie royale des sciences », *Huygens et la France*, *op. cit.*, p. 57-68.

⁴ Un récapitulatif est décrit dans *OH*, t. XXII, *op. cit.*, p. 383-771, en particulier dans la partie « Huygens académicien 1666-1681 » (p. 623-718).

⁵ Huygens, Christiaan, *OH*, t. XXII, p. 375-379 (n° de 14 à 36).

⁶ Huygens, Christiaan, *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologio aptato, demonstrationes geometricae*, Paris, 1673 ou version bilingue, *OH*, t. XVII.

Frénicle et Roberval. À cette occasion il sollicite Huygens pour qu'il choisisse parmi ses mémoires académiques, certains qui pourraient être publiés. Huit mémoires sont insérés dans ce recueil publié en 1693 et intitulé *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'académie Royale des sciences*¹, dont deux concernent la règle de *maximis* et *minimis* et celle des tangentes précédemment étudiés². Huygens préfère rédiger ses démonstrations dans le style *more geometrico*. Son ouvrage le plus célèbre, *l'Horologium Oscillatorium* en témoigne³. Cependant, il ne renie pas pour autant des méthodes d'invention utilisant des infiniment petits dont il effectue des sommes infinies⁴. Pour lui ces méthodes jouent la plupart du temps un rôle heuristique et nécessitent ensuite une démonstration « à l'ancienne ».

Pendant son séjour parisien (1672-1676), Leibniz rencontre Huygens⁵ qui l'initie aux mathématiques. Une amitié se noue entre les deux savants qui conduit à un échange épistolaire de plus de soixante-quatre lettres s'étalant de 1674 à 1695, année de la mort de Huygens. À partir de 1690, Huygens s'intéresse particulièrement à la résolution de problèmes physico-mathématiques qui sont l'apanage du nouveau calcul leibnizien. Nombre de leurs échanges portent sur ces problèmes qu'Huygens parvient à surmonter sans l'utilisation du nouveau calcul, mais par le biais de méthodes infinitésimales⁶, par exemple ceux de la caténaire (1691), de la courbe isochrone⁷ et de la tractrice⁸.

Tout au long de sa vie, Leibniz reconnaît en Huygens un des plus sublimes savants de l'Europe et il essaie de le convaincre de la nécessité d'introduire une

¹ *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique. Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, Paris, Imprimerie royale, 1693.*

² Chapitre 1.

³ On pourra consulter par exemple : Barbin Evelyne, *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, op. cit., p. 248-258, Blay, Michel, *Les raisons de l'infini*, Paris, NRF essais, 1993, p. 43-56.

⁴ Bos, Henk, J., « L'élaboration du calcul infinitésimal, Huygens entre Pascal et Leibniz », *Huygens et la France*, op. cit., p. 116-121.

⁵ Sur la relation Huygens/Leibniz, Bos, H.J.M., « The influence of Huygens on the formation of Leibniz ideas », *Studia Leibnitiana suppl.*, 17, 1978, p. 59-68, Heinekamp, A., « Huygens vu par Leibniz », *Huygens et la France*, op. cit., p. 99-114, Joseph, E., Hofmann, *Leibniz in Paris*, op. cit..

⁶ Bos, Henk, J., « L'élaboration du calcul infinitésimal, Huygens entre Pascal et Leibniz », op. cit., p. 115-119.

⁷ Publié dans la revue *Nouvelles de la République des lettres* le 8 octobre 1687 et réédité dans Huygens, Christiaan, *OH*, tome IX, p. 224-226. Voir Bella, Sandra, *Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696)*, op. cit., , juin 2010, p. 64-66.

⁸ À ce propos on pourra consulter Blåsjö, Viktor, « Transcendental curves by curve tracing », *Transcendental curves in the Leibnizian Calculus*, Series editor Umberto Botazzini, Academic Press, Elsevier, 2017, p. 101-126.

nouvelle symbolique mais Huygens ne partage pas son avis. Dans la lettre du 22 novembre 1679, il explique au savant allemand les raisons de ses réticences à propos des atouts de la *Caractéristique* :

Je ne conçois pas, par ce que vous m'en étalez que vous y puissiez fonder de si grandes espérances (...) Enfin je ne vois point par quel biais vous pourriez appliquer votre caractéristique à toutes ces choses différentes qu'il semble que vous y vouliez réduire, comme les quadratures, l'invention des courbes par la propriété des tangentes, les racines irrationnelles des Equations, les plus courtes et plus belles constructions des problèmes géométriques¹.

Huygens ne saisit pas comment l'application de la « *caractéristique* » pourrait améliorer la résolution de problèmes mathématiques, dans tous les cas, il ne comprend pas en quoi il est nécessaire de l'introduire.

Dans une lettre du 15 juillet 1690², Leibniz demande à Huygens s'il connaît son article « *Nova methodus* » dans lequel il propose un nouveau calcul « pour assujétir à l'analyse ce que M. Descartes luy même en avoit excepté ». Ce calcul permettrait de considérer toutes les « affections des grandeurs » – non seulement les puissances et les racines – mais aussi les « différences et incréments de grandeur ou elements de la grandeur y , ou bien les différences des différences ou les différences des différences, ou les différences des différences des différences &c ». Il prône les avantages de son calcul, en particulier pour traiter les transcendentes. Dans une lettre du 24 août 1690, Huygens lui répond qu'il a vu « quelque chose de Vostre nouveau calcul Algebrique » mais y trouvant de « l'obscurité » et ayant une « méthode équivalente » pour trouver les tangentes ou pour d'autres recherches, il ne s'y était pas attardé davantage. Dans la lettre du 9 octobre 1690, cette même idée est reprise :

J'ay taschè depuis ma dite lettre d'entendre votre *calculus differentialis*, et j'ay tant fait que j'entends maintenant, mais seulement depuis 2 jours les exemples que vous en avez donnez, l'un dans la Cycloide, qui est dans votre lettre, l'autre dans la recherche du Theoreme de Mr. Fermat [loi des sinus], qui est dans le Journal de Leipsich de 1684. Et j'ay mesme reconnu les fondements de ce calcul et de vostre methode que j'estime estre très bonne et tres utile. Cependant je crois encore d'avoir quelque chose d'équivalent, comme je vous ay escrit dernièrement, et la raison qui me persuade, c'est non seulement la

¹ Huygens, Christiaan, *OH*, t. VIII, p. 243

² Huygens, Christiaan, *OH*, t. IX, p. 450.

solution que je trouvoy de vostre Problème de la Ligne courbe de descente egale [courbe isochrone], mais aussi l'examen, que j'ay fait de la Tangente d'une autre Courbe fort composée, dont vous m'envioasses la construction il y a desja plusieurs années. Car par ma methode je trouve cette mesme construction et toutes les autres sans que les quantités irrationnelles m'embarrassent, et à tout cela je ne me sers d'aucun calcul extraordinaire ni de nouveaux signes¹.

Dans ce passage, Huygens rappelle l'embarras occasionné parfois par des quantités irrationnelles, embarras dont Leibniz promet la disparition grâce à son calcul. Il affirme que s'il peut estimer cette nouvelle invention, il possède une méthode qui lui est équivalente, et qui, en revanche, ne nécessite pas l'introduction de « nouveaux signes ». Ainsi, Huygens nuance le caractère novateur de l'invention leibnizienne pour certains problèmes, comme ici celui de la recherche de tangentes de certaines courbes. Néanmoins, il est impatient de connaître quelles sont les autres possibilités qu'offre le nouveau calcul, notamment pour la résolution de problèmes physico-mathématiques pour lesquels il éprouve un grand intérêt. Il demande fréquemment à Leibniz de lui fournir des exemples. Dans la suite du passage précédemment cité, il le sollicite ainsi :

Mais pour juger mieux de l'excellence de vostre Algorithmme, j'attends avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaine pendante, que Mr Bernouilly vous a proposée a trouver, dont je luy sçay bon gré, parce que cette ligne renferme des proprietes singulieres et remarquables².

Outre le problème de la courbe isochrone qu'il a rapidement résolu en 1687 sans utiliser le calcul différentiel, Huygens s'est intéressé immédiatement au problème de la chaînette posé dans les *Acta* par Jacques Bernoulli en mai 1690. Trois mois plus tard, en septembre 1690³ il trouve non seulement la solution mais également des « proprietes singulieres », toujours sans utiliser le calcul différentiel. Ainsi, Huygens, afin de mieux comprendre la portée du nouveau calcul, est curieux de savoir quelle est la voie qu'adopterait l'algorithmme pour trouver la courbe solution et les propriétés qu'il a lui-même trouvées par d'autres moyens. Sa solution de la

¹ Lettre de Huygens à Leibniz du 9 octobre 1690, *OH*, tome IX, p. 497.

² *Ibid.*

³ Voir l'appendice II de la lettre précédemment citée. Il s'agit du manuscrit de la solution de la caténaire avec en sus des propriétés supplémentaires de la courbe.

caténaire est publiée¹ dans les *Acta* du mois de juin 1691 conjointement avec celles de Leibniz et les frères Bernoulli. Dans son article, Leibniz fournit une construction de la caténaire ainsi que d'autres propriétés comme celles de la construction de la tangente ou celle de la rectification mais ne les accompagne pas de la description de la manière qui l'a conduit à de tels résultats.

Dans le cas de la caténaire, comme fréquemment dans d'autres cas, Huygens ne comprend pas comment Leibniz ait abouti à ses résultats et suppose qu'ils proviennent de cet algorithme si mystérieux. Le 1^{er} septembre 1691, en se référant à la solution leibnizienne du problème de la caténaire (publiés au mois de juin), il explique au savant allemand :

Je consideray en suite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient échappées, et je jugeay que ce devoit estre un effet de vostre nouvelle façon de calculer ; qui vous offre, à ce qu'il me semble, des veritez que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes vous m'aviez dit en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant la Catenaria, que le calcul vous offroit cela de soy mesme, ce qui certainement est fort beau².

Ce passage est très intéressant car Huygens livre quelques considérations sur la différence entre ce qu'il estime être un calcul et le calcul de Leibniz. Le savant hollandais considère que Leibniz a une tout autre « façon de calculer ». Celle-ci le surprend car elle fournit des « veritez que vous n'avez pas mesme cherchées ». Pour Huygens, si des choses lui ont « échappées » c'est parce que sa propre manière à lui de calculer ne saurait produire un supplément de résultats, alors qu'il suppose que le nouveau calcul est davantage capable d'en offrir de « soy mesme ». Jean Bernoulli et Leibniz ont ramené la construction de la caténaire à la quadrature de l'hyperbole, réduction que Huygens trouve « fort belle » car elle « donne avec facilité la manière de trouver les points de la courbe »³. Cependant, il ne parvient pas à comprendre comment ils y sont parvenus même si cette solution s'accorde avec la sienne⁴. Il les sollicite pour qu'ils soient plus prolixes sur le détail de leur solution :

¹ « Christiani Hugenii, Dynastae in Zülechem solutio ejusdem Problematis », *AE*, juin 1691, p. 281-282.

² Lettre de Huygens à Leibniz le 1^{er} septembre 1691, *OH*, t. X, *op. cit.*, p. 129.

³ *Ibid.*, p. 131.

⁴ Huygens a ramené la construction de la caténaire à la quadrature de la courbe d'équation $xy = -a^2 + a^4$.

(...) il se peut que voutre Reduction est fondée sur autre chose, ce que je feray bien aise d'apprendre. Si Mr Bernouilly en examinant le rapport entre nos inventions (ainsi que vous le souhaitez) vouloit en mesme temps expliquer les fondemens de ses decouvertes, il ne feroit pas besoin que vous prissiez la peine de m'instruire, et il m'aideroit par là à entendre votre *calculus differentialis*, dont je commence à avoir grande envie ; mais peut-estre il nous fera attendre encore longtemps¹.

De la connaissance du calcul leibnizien, Huygens attend enrichir la manière d'aborder la résolution de problèmes. Il en est de même en ce qui concerne la capacité du nouveau calcul à traiter les transcendantes et les problèmes inverses des tangentes que Leibniz loue si souvent. Dans la lettre du 5 mai 1691², il exprime son « envie de l'étudier à fond » mais se plaint encore à son ami de ne pas développer suffisamment ses explications lorsqu'il fournit des solutions à l'aide de son calcul différentiel. Ainsi, lorsqu'il lui demande de lui exposer ce qu'il sait sur le problème inverse des tangentes, il lui prie « d'estre clair en ce que vous donnerez, et de ne pas supposer que nous entendions vostre *calculus differentialis* »³. Le reproche est adressé à Leibniz presque un an plus tard, le 4 février 1692⁴ à propos de ses recherches sur la cycloïde : « Vous apportez une nouvelle facilité au calcul, mais ne donnez pas l'invention qu'il faut pour la solution des problèmes extraordinaires, non plus que Viete pour l'Algèbre ». Alors que Leibniz ne cesse tout au long de sa vie de faire l'éloge de l'*Ars inveniendi* et de répéter que sa nouvelle analyse satisfait à ce réquisit, Huygens reproche ici au calcul leibnizien de ne pas montrer la voie de l'invention⁵.

À la fin de sa solution de la caténaire, Jean Bernoulli fait mention de chaînettes « à densité inégale » qu'il affirme pouvoir traiter par le calcul différentiel. À ce propos, Huygens explique:

Je ne voudrois jamais m'amuser à ces differentes natures de chaines, que Mr Jo. Bernouilly propose comme devant achever ou pousser plus avant cette spéculation. Il y a certaines courbes que la nature présente souvent à notre vue, et qu'elle decrit pour ainsi dire elle

¹ *Ibid*, p. 132.

² Lettre de Huygens à Leibniz du 5 mai 1692, *OH*, t. 10, p. 112.

³ *Ibid*, p. 93

⁴ Lettre de Huygens à Leibniz du 4 février 1692, *OH*, t. X, p. 253.

⁵ Dans une lettre datée approximativement à novembre 1691, il déclare à son interlocuteur (inconnu) en se référant aux solutions proposées de la caténaire : « mais nous ferons encore plus pour l'utilité des géomètres si nous découvrons les voies qui nous ont conduit a ces decouvertes. », Huygens Christiaan, *OH*, t. X, p. 216.

mesme, lesquelles j'estime dignes de consideration, et qui d'ordinaire renferment plusieurs proprietes remarquables¹.

Il cite des courbes telles que le cercle, les sections coniques, la cycloïde et la caténaire. Cependant, il juge sévèrement le fait :

d'en forger de nouvelles, seulement pour y exercer sa géométrie, sans y prévoir d'autre utilité, il me semble que c'est *difficiles agitare nugae*, et j'ay la mesme opinion de tous les problemes touchant les nombres, *Calculis ludimus, in supervacuis subtilitas teritur*, dit quelque part Seneque en parlant de certaines disputes frivoles des philosophes Grecs².

Construire de nouvelles courbes uniquement pour tester le pouvoir du nouveau calcul est un usage qu'il juge extravagant. Il s'agit pour Huygens d'une inversion des rôles : le calcul aide la géométrie à résoudre des problèmes mais il ne faut pas forcer la géométrie à fournir des problèmes difficiles pour lesquels le calcul pourra montrer sa virtuosité, cela est artificiel et complètement vain : « *Calculis ludimus, in supervacuis subtilitas teritur* »³. Dans ce passage, Huygens livre donc à son ami ce qu'il considère être une « éthique » du géomètre en précisant un des traits de sa relation à l'acte de calculer. Sur ce point, Leibniz partage presque entièrement l'avis de son ami à une limitation près : « si ce c'est que cela puisse servir à perfectionner l'art d'inventer »⁴.

Face aux reproches de Huygens concernant l'obscurité de son calcul, Leibniz est déconcerté, dans une lettre du 8 janvier 1692, il lui écrit :

Je m'estonne que mes caracteres vous pouvoient encor paroistre difficiles puisque Vous aviez compris les elemens de calcul que j'avois donné dans les Actes de Leipzig (...) ⁵.

Puis il lui explique en quoi son propre calcul lui est si estimable :

Je me souviens qu'autres fois lors que je consideray la cycloïde, mon calcul me presenta presque sans meditation la pluspart des decouvertes qu'on a faites la dessus. Car ce que j'aime le plus dans ce calcul, c'est qu'il nous donne la même avantage sur les anciens dans

¹ Lettre de Huygens à Leibniz du 1^{er} septembre 1691, *OH*, t. X, p. 133.

² *Ibid.*

³ Notre traduction : « agiter des choses à la fois difficiles et vaines ».

⁴ Lettre de Leibniz à Huygens du 21 septembre 1691, *op. cit.*, p. 161.

⁵ Lettre de Leibniz à Huygens du 8 janvier 1692, *OH*, t. X, p. 226.

la Geometrie d'Archimède, que Viete et des Cartes nous ont donné dans la Geometrie d'Euclide ou d'Apollonius ; en nous dispensant de travailler avec l'imagination¹.

Nous avons vu que *La Géométrie*, pensée comme une arithmétisation de la géométrie conduit à résoudre des problèmes de la géométrie euclidienne par le calcul algébrique sans la sujétion de la figure. De plus, ainsi obtenus les résultats sont considérés démontrés autant que s'ils avaient été démontrés à l'ancienne². Grâce à l'algèbre Descartes élargit le champ des courbes traitées : des coniques aux courbes de degré supérieur. Dans ce passage, Leibniz explique que, de manière analogue à Descartes mais en matière de quadratures, son calcul permet de produire des résultats concernant les courbes transcendentes comme pouvait en fournir la géométrie archimédienne pour d'autres courbes. Il souligne que son calcul a l'avantage de dispenser de « travailler avec l'imagination », c'est-à-dire de ne pas se soucier de la figure.

Les échanges à propos du statut du calcul continuent et s'enrichissent par la participation de l'Hospital dont Huygens a repéré les aptitudes pour le calcul leibnizien.

L'Hospital a rencontré Huygens dans les milieux parisiens français que tous les deux fréquentaient lorsque ce dernier séjournait dans la capitale. Un épisode épistolaire avait occupé les deux savants du début de 1690 jusqu'en juillet 1690³, à propos de l'attaque de l'Abbé Catelan contre la conception du centre d'oscillation hugonienne⁴. Leur correspondance reprend par une lettre datée du 26 juillet 1692 dans laquelle l'Hospital prie Huygens de lui faire parvenir des questions mathématiques pour tester le calcul leibnizien et lui prouver combien celui-ci est fécond⁵. En septembre 1692, l'Hospital publie un mémoire au *Journal des Sçavants* intitulé « Solution d'un problème que M. de Beaune proposa autrefois à M. Descartes et que l'on trouve dans la 79. De ses lettres, tome 3. Par Mr G^{***} ». Dans ce mémoire, il affirme qu'il est « évident » que cette courbe dépend de la quadrature de l'hyperbole et qu'elle est mécanique au sens de Descartes. Il indique son asymptote et la position

¹ *Ibid*, p. 227.

² Voir notre chapitre 1 : 1.1) *La Géométrie* : « essai de cette méthode ».

³ *OH*, t. IX, p. 457.

⁴ Voir plus haut.

⁵ Lettre de l'Hospital à Huygens du 26 juillet 1692, *OH*, t. X, p. 305.

du centre de gravité d'une portion de courbe. Cependant, volontairement il ne fournit pas de démonstration :

Je ne mets point ici de démonstration, parce que ceux qui entendent de ces matieres, la trouveront aisément, & qu'il faudrait trop de discours pour le faire comprendre aux autres¹.

L'occultation de cette résolution est à situer probablement dans le contexte de la polémique avec Catelan. Ce mémoire est la suite d'une liste conséquente d'articles écrits par l'Hospital et destinés à critiquer les erreurs de l'ouvrage de Catelan : dans l'un d'eux il défie ce dernier de résoudre le problème de De Beaune en utilisant uniquement les mathématiques cartésiennes. Cependant Huygens fait partie aussi des « autres » qui « n'entendent pas ces matières » et le 22 octobre 1692, il lui avoue :

Je n'eus point de peine en faisant un peu de calcul de m'assurer de la vérité de vostre demonstration, mais de sçavoir par quelle voie vous êtes parvenu à cette solution, c'est ce que je n'ay pas encore tout à fait penetré².

Il félicite l'Hospital de ses résultats concernant la logarithmique et suppose que la connaissance du calcul différentiel en est l'origine :

(...) mais tout cela³ est aisé et nullement comparable à ce que vous avez fait. Vous sçavez fort bien l'usage à ce que je vois, des dx et des dy de Mr. Leibnitz, qui assurément a quelque chose de fort bon, en ce qu'il nous fait apercevoir souvent des veritez et des consequences, qui ne se presenteroient pas sans cela⁴.

Huygens admire la capacité de l'Hospital à assimiler si bien le nouveau calcul pour être à même de résoudre des problèmes épineux comme les problèmes des propriétés de la logarithmique et sa rectification, lui-même y ayant été confronté⁵. Il insiste aussi ici, comme déjà auprès de Leibniz, sur le fait que le nouveau calcul mène

¹ JS, septembre 1692, p. 402.

² Lettre de Huygens à l'Hospital du 22 octobre 1692, OH, t. X, p. 325.

³ En examinant la solution de l'Hospital, Huygens s'aperçoit qu'il peut trouver la surface du solide (même infinie) que fait une portion de logarithmique en tournant sur la sous-tangente et le cercle qui mesure la plus grande courbure.

⁴ *Ibid*, p. 327-328.

⁵ On pourra lire le chapitre « La courbe logarithme pour elle-même » de Bénard, Dominique, IREM, *Histoires de Logarithmes*, Paris, Ellipses, p. 191-215.

à des « veritez et des consequences, qui ne presenteroient pas sans cela », c'est-à-dire qu'il pointe à nouveau sur l'excès auquel conduit l'application de l'algorithme. Huygens a l'impression que ce nouveau calcul fournit des résultats supplémentaires sans qu'ils soient *a priori* recherchés lorsqu'il est appliqué. Il nourrit probablement l'espoir d'obtenir davantage de précisions sur ce calcul à travers leurs échanges. Cependant, s'il reconnaît la fécondité du nouveau calcul, il préfère aussi ici utiliser ses propres méthodes dépourvues du symbolisme « obscur » leibnizien. Dans cette lettre, il écrit à l'Hospital qu'il ne peut plus ignorer :

une méthode peu connue, que j'ay debrouillée il n'y a pas longtemps ; qui sert grandement dans ces recherches de quadratures, des centres de gravité et du problème renverse des Tangentes. (...) C'est par elle aussi que je suis venu à bout de la quadrature assez remarquable de la courbe dont l'équation est $x^3 + y^3 = xyn$, que Mr. Des Cartes, dans sa lettre 65^e du 3^e volume (...)¹.

Nous avons déjà rencontrée cette méthode « peu connue » exposée dans les *Varia Opera* de Fermat². Elle repose sur le théorème qui en notations modernes s'écrit :

$$\int_{x_1}^{x_2} y^m dx = x_2 y^m - x_1 y^m - m \int_{y_1}^{y_2} xy^{m-1} dy.$$

Grâce à cette méthode, Huygens fournit le résultat de la quadrature du folium entier et s'émerveille du résultat : « on ne s'imaginerait pas que cette courbe dût avoir une quadrature si régulière et si simple. Celle-ci est générale pour les segments, l'étant de même qui s'exprime par un seul terme »³. Sans détailler la démonstration de cette quadrature, nous donnons les idées principales de sa résolution⁴.

¹ *Ibid*, p. 351.

² Nous avons déjà mentionné ce traité intitulé « De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrantibus infinitis parabolis et hyperbolis usus », *Varia Opera*, p. 44-57, *OF*, I, p. 255-288, *OF* III, p. 216-240. On rappelle l'étude très complète à ce propos : Paradís, Jaume, Pla Josep, Vialer, Pelegrí « Fermat's method of quadrature », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14 (2008), p. 10-11.

³ *Ibid*, p. 352.

⁴ Voir Bella, Sandra, *Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696)*, *op. cit.*, p. 75- 79.

1.2) 21 Nov. 1692, comment cette quadrature fut libérée des ténèbres¹

Pour quarrer le folium d'équation $e^3 + u^3 = beu$, où b est une constante. Huygens pose $b^2u = ae^2$ et se ramène, par une transformation d'équation, à quarrer la courbe d'équation $e^3 = \frac{b^5a-b^6}{a^3}$. Il pose

$$e^3 = b^2v \text{ ou } b^2v = b^2i - b^2y \text{ avec } b^2i = \frac{b^5a}{a^3} \text{ ou } a^2i = b^3$$

ce qui l'amène à interpréter la somme des e^3 comme la différence entre deux aires d'hyperboles, dont il connaît parfaitement les résultats généraux pour leurs quadratures². D'autres courbes interviennent³ illustrant certaines transformations opérées sur les équations. De la sorte, il peut suivre visuellement, directement sur la figure, la correspondance entre la quadrature du folium et celui de la transformée. Nous pouvons souligner combien Huygens a le souci de présenter chaque étape calculatoire par son pendant géométrique. Par exemple, le changement de variable « $b^2u = ae^2$ » a une interprétation géométrique qu'il explicite : « $b^2u = ae^2$ d'où $a = \frac{b^2}{e^2}u$ » si bien « qu'une autre courbe peut-être construite KI dont l'équation est $e^3 = \frac{b^5a-b^6}{a^3}$ ». Il montre alors que quarrer le folium revient à quarrer l'espace compris entre les deux hyperboles⁴. Dans la lettre du 12 février 1693, le Marquis confirme les résultats de Huygens concernant la quadrature du segment⁵ AB (égal à $\frac{bee}{6u}$) et celle du segment AA (égal à $\frac{bee}{6e}$). Il souligne qu'elles s'expriment bien toutes deux par un seul terme. Il se flatte d'avoir trouvé le résultat de trois manières différentes mais ne les développe pas. Alors que le Marquis ne demande aucune précision sur la résolution de Huygens, ce dernier n'est en revanche jamais totalement satisfait de l'exposé de son correspondant : les calculs certes mènent au résultat mais il voudrait des éclaircissements sur la voie dont il s'est servi et qui lui semble encore obscure. De

¹ Il s'agit de l'exergue de la quadrature : « 21 Nov. 1692. *hanc e tenebris erui quadraturam* »

² Pour la quadrature de ces hyperboles par Huygens, voir : *OH*, tome 10, *op.cit.*, p. 364-367. Le lecteur pourra vérifier le résultat aisément en utilisant les notations modernes.

³ Sur la figure $\zeta\pi\xi$.

⁴ Pour une étude du rapport de Huygens avec le calcul infinitésimal, on peut consulter Bos, Henk, J.M., « Elaboration du calcul infinitésimal » dans *Huygens et la France*, *op. cit.*, p. 115-121. Une étude du traitement de la courbe isochrone y est présentée. Pour une comparaison des traitements de la courbe isochrone par Jean Bernoulli, Huygens et Leibniz, on pourra consulter, Bella, Sandra, *Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696)*, *op. cit.*, p. 63-74.

⁵ Nous gardons les notations de la figure de Huygens et non celles utilisées par De l'Hospital dans ces lettres.

puis en multipliant les deux membres par y et en substituant y^3 , il obtient

$$\frac{ay^2dx - 2axydy}{6x^2} + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{2}ydx = ydx.$$

Or, la somme des ydx est ABC^1 qui est donc égale à $\frac{1}{2}xy - \frac{ayy_2}{6x}$.

Dans la deuxième manière, il pose $y = \frac{zxx}{aa}$ d'où il déduit $x^3 = \frac{a^5z - a^6}{z^3}$ puis en prenant les différences il obtient : $ydx = \frac{-2a^3dz}{3z^2} + \frac{a^4dz}{z^3}$. Enfin, en sommant de part et d'autre, il obtient que l'espace ABC est égal à $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$.

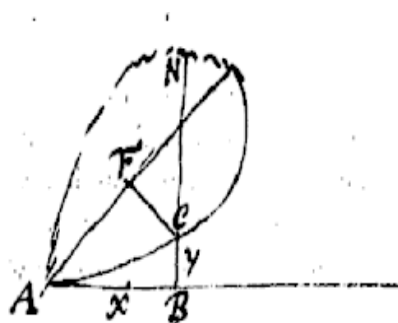


fig. 102

Pour la troisième manière, l'Hospital affirme qu'il part de la relation entre AF et FC . Il ne développe pas davantage mais il indique qu'il peut fournir la solution à la demande.

L'Hospital expose donc des calculs en signalant uniquement que les trois manières :

dependent d'une mesme methode qui consiste à donner à l'equation une forme telle qu'il y ait d'une par ydx ou xdy et de l'autre des quantités dont on puisse prendre les sommes³.

Mais cette indication ne satisfait pas Huygens. Décelant une erreur dans le résultat obtenu par la deuxième manière, il est incapable d'en trouver l'origine. Dans la lettre du 23 juillet 1693⁴, il s'en plaint explicitement : « J'avais donné 2 ou 3 matinées à examiner cette lettre, quand je reçus l'autre du 2^{ème} de ce mois, qui m'a

¹ Résultat élémentaire de *Calculo integralium*.

² Résultat qui est correct.

³ *Ibid*, p. 453.

⁴ *Ibid*, p. 457.

encore de nouveau taillé de la besogne ». Ses questions ne concernent pas uniquement la quadrature du folium, dans un autre problème par exemple il ne perçoit pas comment s'effectue un calcul de différentielles¹. Pour le folium, son jugement est sévère : « Vous dites que vous m'envoyez les trois différentes voies pour la quadrature de la Feuille, et il semble cependant que vous ne m'en envoyez pas une ».

En effet, trois critiques sont formulées chacune portant sur une des manières. La première critique porte sur l'obtention de la somme de $\frac{ayydx-2axydy}{6xx}$ lors de l'exposé de la première manière. Comment est-il parvenu au terme $-\frac{ayy}{6x}$? Huygens parvient tout seul à réduire cette difficulté sans attendre la réponse du Marquis². La deuxième critique porte sur la deuxième manière. Il affirme avoir refait le calcul et obtenu, comme lui, la valeur $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$. Cependant celle-ci est fautive puisque quand il l'égalise à la valeur $\frac{1}{2}xy - \frac{ayy}{6x}$ - qu'il sait être exacte - il arrive à une absurdité³ : $-ay^3 = ax^3$. Il lui manque pour être exacte d'y ajouter $\frac{a^2}{6}$, c'est-à-dire la quadrature du folium entier. Dans la lettre du 5 août 1693, il indique à l'Hospital que sa méthode est en fait appliquée pour $y = BN$ et non pour $y = BC$ et que le résultat obtenu est, non celui de ABC , mais celui de ANB . Bien qu'ayant réussi à rectifier l'erreur, Huygens reste insatisfait car il voudrait comprendre pourquoi la méthode de l'Hospital aboutit à quarrer l'espace ANB et non pas l'espace ACB : « il resterait à rendre raison pourquoi ce n'est pas celle de l'espace ACB ». Certes, il a repéré l'erreur mais il ne comprend pas sa véritable origine.

Dans la lettre du 3 septembre 1693⁴, il affirme avoir résolu la difficulté :

les sommes de $\frac{-2a^3dz}{3z^2}$ et $+\frac{a^4dz}{z^3}$ dans vos positions, ne font pas $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$, mais $\frac{2axx}{3y} - \frac{2}{3}aa$
 et $-\frac{1}{2}\frac{x^4}{yy} + \frac{1}{2}aa$, qui font $\frac{2axx}{3y} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{yy} - \frac{1}{6}aa$, de sorte que ces sommes ne se prennent pas

¹ Par exemple, Huygens demande comment est-ce qu'on peut calculer dm lorsqu'on a posé $x = my^2$. Il a fini par comprendre pourquoi on obtient $yydm + 2mydy$ mais sa façon de le démontrer passe par un détour sur la figure. Voir la note 3, *op. cit.*, p. 458.

² Dans la lettre suivante du 5 août 1693, il explique qu'en posant, à la manière du Marquis, $x = my^2$, il obtient le résultat de la somme, *ibid.*, p. 474.

³ Voir la note 15, *ibid.*, p.461. En continuant ses calculs afin de réduire l'erreur, il obtient $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy} = \frac{1}{2}xy - \frac{ayy}{6x} + \frac{a^2}{6}$. Or, le dernier terme correspond exactement au folium entier.

⁴ *Ibid.*, p. 490.

comme à l'ordinaire, mais demandent qu'on y emploie d'autres moyens et d'autres considérations.

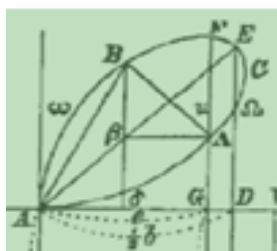


fig. 103

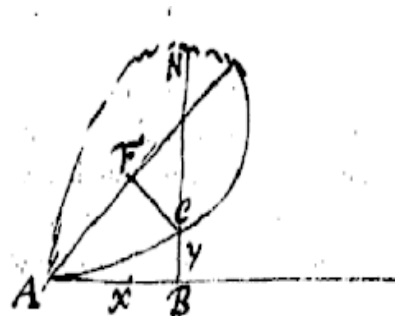
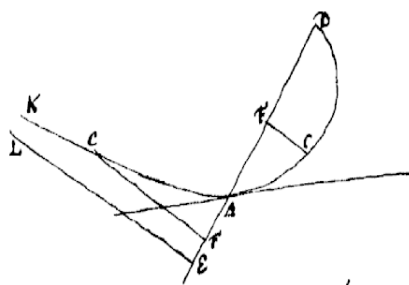


fig. 104

Il ne développe pas ces considérations dans la lettre mais celles-ci se trouvent ailleurs¹. Huygens a compris que le changement de variable opéré par le Marquis est le même que le sien (le rôle de z, x, y et a sont joués par a, e, u et b), ainsi, la branche $A\Lambda\Omega$ de la figure de Huygens correspond à la branche AC . La sommation devait donc s'exécuter depuis la valeur $z = a$ à la valeur $z = \frac{a^2 y}{x^2}$. Huygens obtient ensuite le résultat par la quadrature de deux hyperboloïdes.



L'Hospital n'a pas explicité encore la résolution de la « troisième manière » mais dans la lettre du 25 novembre 1693, à la demande de Huygens², il fournit des éléments de sa résolution et ajoute la quadrature de la branche infinie³. Pour ce faire, il pose :

$$AF = u, FC = z, AD = b, BC = y \text{ et } AB = x.$$

L'équation se réduit à $z^2 = \frac{bu^2 - u^3}{b + 3u}$ pour les u positifs et $z^2 = \frac{bu^2 + u^3}{b - 3u}$ pour les u négatifs. En intégrant $-z du$, il obtient l'espace DCF qui est égal à la somme de

¹ Livre J, *ibid*, p. 491, note 2.

² Huygens demande des précisions supplémentaires car le Marquis ne détaille nullement sa solution. Il affirme l'avoir résolu de façon géométrique en montrant qu'elle dépend de la quadrature de l'hyperbole : voir note 17, *ibid*, p. 462

³ Nous reproduisons la démonstration et la figure, *op. cit.*, p. 563.

$-udu \sqrt{\frac{b-u}{b+3u}} = \frac{1}{6}(b-u)\sqrt{bb+2bu-3uu}$. De même, il obtient que l'espace *KCFEL* est égal à $\frac{1}{6}(b+u)\sqrt{bb-2bu-3uu}$. Enfin, en faisant $u = 0$, il trouve que l'espace *DCAD* = *KCAFEL* = $\frac{1}{6}bb$.

L'Hospital n'a pas détaillé tous les calculs. Huygens le lui reproche dans la lettre suivante datée du 24 décembre 1693¹ : il déclare qu'il a suivi les premiers calculs mais ignore comment il a obtenu de telles sommes :

Mais de trouver la somme des $udu \sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$, je vois que c'est précisément la même chose pour moi que de trouver la quadrature de la courbe $z^2 = \frac{bu^2-u^3}{b+3u}$ que l'on cherche. De sorte Monsieur que je demeure aussi peu instruit de cette 3^e manière de quadrature que je l'étais auparavant. Permettez-moi donc de vous demander quelque peu plus d'éclaircissement.

Dans la lettre du 18 janvier 1694², le Marquis se contente de signaler qu'il suffit de différencier la somme pour se convaincre du résultat. Mais il prévoit que cette explication ne satisfera pas Huygens :

Je vois bien que pour vous contenter il faudrait que je vous fisse voir le chemin que j'ai tenu pour parvenir à trouver cette somme, c'est ce que je ne puis faire dans une lettre parce que cela dépend de plusieurs règles particulieres qui sont une suite les unes des autres et qui demanderoient un petit traité à part, mon dessein est de le faire quand j'auray le loisir, et je vous le communiquerai alors avec plaisir me trouvant heureux d'avoir quelque chose qui soit de vôtre goust, et à vous dire le vrai c'est ce qui m'a empesché jusqu'à présent de vous envoyer cette 3^e maniere me doutant bien de ce qui est arrivé³.

La résolution de cette énigme peut se trouver dans la leçon 2 de *Calculo integralium* de Jean Bernoulli, intitulée *De quadratura spatiorum*⁴ - que nous avons

¹ *Ibid*, p. 578.

² *Op. cit.*, p. 585.

³ Lettre de l'Hospital à Huygens du 18 janvier 1694, *ibid*, p. 580.

⁴ Bernoulli, Jean, *Opera omnia tam autea sparsim edita quam hactenus inedita*, tome 3, *op. cit.*, p. 394.

analysée – et dans laquelle sont présentées des règles générales pour intégrer des quantités rationnelles¹.

Suivons donc les préceptes contenues dans leçon bernoullienne pour intégrer

$\sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$. La première étape consiste à mettre le radical au dénominateur :

$$A = udu \sqrt{\frac{b-u}{b+3u}} = \frac{(b-u)u}{\sqrt{(b+3u)(b-u)}} du = \frac{bu-u^2}{\sqrt{b^2+2ub-3u^2}} du$$

La deuxième étape consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par u afin que le degré sous le radical soit égal à celui du numérateur ajouté de 1 :

$$A = \frac{1}{12} \frac{12bu^2-12u^3}{\sqrt{-3u^4+b^2u^2+2u^3b}} du = \frac{-12u^3+6u^2b+2b^2u}{12\sqrt{-3u^4+b^2u^2+2u^3b}} du - \frac{b(-6u+2b)}{12\sqrt{-3u^4+b^2u^2+2u^3b}} du = C + D$$

Par construction les sommes de C et de D sont respectivement :

$$\frac{1}{6}\sqrt{-3u^4+b^2u^2+2u^3b} \text{ et } -\frac{b}{6}\sqrt{-3u^2+b^2+2bu}.$$

Enfin, de leur somme il vient :

$$\frac{1}{6}(u-b)\sqrt{-3u^2+b^2+2bu}$$

1.4) Conclusion : calculer vs calculer

L'Hospital calcule. L'espace à quarrer est interprété immédiatement comme un espace différentiel assimilé à sa formule. Comment procède-t-il ? Il affirme qu'il suffit d'obtenir un membre égal à « ydx » ou « xdy » puis d'intégrer. Il s'agit donc de calculer sans se soucier présentement de l'interprétation géométrique. Ceci lui donne la quadrature souhaitée. Aucune explication n'est donnée sur les conditions de validité de cette manipulation. Le calcul vaut-il pour démonstration ? Dans la deuxième solution, il procède de façon analogue via un « changement de variable » qu'il n'interprète pas géométriquement, contrairement à Huygens. Pour ce dernier l'oubli ici de la constante d'intégration est significatif. Il l'interprète comme la possibilité d'une perte du lien entre le symbole et le sens du symbolisé. Dans une

¹ *Op. cit.*, p. 397: « omnia signum radicale transferatur in denominatorem ut numerator omnino rationalis evadat; dein membrum numeratoris, ubi littera indeterminata plurimas habet dimensiones, ad plures adhuc dimensiones elevator, sicut et radix surda, quae quotiescunque membrum superius multiplicatum per dimensionem quandam indeterminatae, ista per duplam dimensionem multiplicatur; sic enim fractio semper aequalis manebit; multiplicatio itaque eousque continuari debet donec litterae indeterminatae plurimae dimensio in radice unitate excedat membrum ejusdem litterae plurimae dimensionis in numeratore (...) »

lettre du 17 septembre 1693¹, Huygens commente auprès de Leibniz plusieurs aspects de son expérience avec le calcul différentiel. D'abord, il explique que l'Hospital lui « a donné tant d'exercice en matière de Géométrie » qu'il a « cru devoir éviter celui qui me pouvoit venir d'un autre costé (...) ». En se référant à l'erreur produite dans la « deuxième manière », il estime qu'il n'est pas « bon que le calcul différentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande ». Cette remarque est très intéressante car elle rend compte de l'état d'esprit que conserve encore Huygens vis-à-vis du calcul symbolique leibnizien : s'il peut admettre qu'il s'agit d'un autre type de calcul dont il ne maîtrise l'usage, il exige de lui qu'il soit parfaitement au service du calculateur sans qu'il n'y ait aucune aspérité. Il est manifeste que, pour Huygens, sa réticence ne provient pas de l'usage de quantités infiniment petites dont il est finalement très familier, mais de son expérience avec l'écriture symbolique leibnizienne. Certes, cette étude sur l'échange entre le Marquis et Huygens montre que l'Hospital voudrait que le calcul différentiel devienne le seul langage mathématique pour résoudre des problèmes. Il ne semble plus se demander s'il est souhaitable de procurer une traduction ou des explications à son correspondant.

Cependant, Huygens témoigne particulièrement dans cette lettre de son émerveillement pour le nouveau calcul. Dans un article du mois de mai 1693, après avoir fourni la solution du problème de la courbe de Beaune, Jean Bernoulli pose le problème de trouver la courbe ayant la propriété que chacune de ses touchantes BD soit à sa sous-tangente AD de raison donnée de M à N^2 . Ce problème suscite l'intérêt de l'Hospital, Leibniz et de Huygens qui trouvent tous les trois une solution. À ce propos, Huygens écrit une remarque qu'il transmet à Leibniz dans la lettre du 17 septembre 1693 pour qu'elle soit publiée dans les *Acta*. Il lui annonce que par elle « vous connoîtrez Monsieur, que j'ay fait quelque progres dans les subtilitez geometriques et dans vostre excellent calcul differentiel, dont je goute de plus en plus l'utilité »³. Cette publication⁴ est importante parce qu'en effet Huygens exprime à la

¹ Lettre de Huygens à Leibniz du 17 septembre 1693, *OH*, t. X, p. 509.

² Bernoulli, Jean, « Solutio problematis cartesio propositi Dn de Beaune, exhibita a Joh. Bernoulli », *AE*, mai 1693, p. 235.

³ Lettre de Huygens à Leibniz du 17 septembre 1693, *OH*, t. X, p. 511.

⁴ Huygens, Christiaan, « C.H.Z. de Problemate Bernouliano in actis Lipsientibus hujus anni pag. 235 proposito », *AE*, octobre 1693, p. 475-476.

République des Lettres sa reconnaissance du calcul différentiel¹. Plus loin dans la lettre, en observant les différentes contributions apportées au problème de la courbe de Beaune – la sienne, celles de l'Hospital², de Leibniz et de Jean Bernoulli – il exprime son enthousiasme pour « la beauté de la géométrie dans ces nouveaux progrès qu'on y fait tous les jours » et félicite Leibniz d'y avoir « si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par votre merveilleux calcul »³.

Sa curiosité pour le calcul leibnizien ne fait que s'accroître. Il ne se lasse pas de solliciter Leibniz pour approfondir ses connaissances, en particulier il souhaiterait comprendre les différentielles d'ordre deux :

M'y voilà maintenant médiocrement versé [au calcul leibnizien], si non que je n'entens encore rien aux *ddx*, et je voudrois scavoir si vous avez rencontré des problèmes importants ou il faille les employer, afin que cela me donne envie de les étudier⁴.

Ainsi, la lettre du 17 septembre 1693 témoigne d'une modification de la position hugonienne par rapport au calcul leibnizien : bien qu'il ne soit pas convaincu de le préférer en toute circonstance à ses propres méthodes, il reconnaît que ce calcul est calcul, et bien qu'il soit encore dépassé par son utilisation, il souhaiterait en savoir plus non pas nécessairement car il le juge « obscur » comme à ses débuts mais parce que désormais il conçoit des espoirs fondés sur sa fécondité. Dans son esprit, l'important est de résoudre les problèmes et sa manière géométrique de les aborder lui convient⁵.

Malgré son départ en 1682, l'Académie reconnaît à Huygens le prestige que ses travaux lui ont apporté. Il reste une figure emblématique des sciences françaises. Leibniz et l'Hospital ne l'ignorent pas et c'est probablement une des raisons qui les amènent à vouloir le convaincre d'utiliser le nouveau calcul. Dans l'article du *Journal des Sçavants* de 1694, en se référant à l'intégration de son « nouveau calcul des

¹ « (...) ut egregie jam animadvertit Vir celeberrimus calculi differentialis inventor, sine quo vix effet, ut ad hasce geometricae subtilitates admitteremur », *ibid*, p. 476.

² Publiée au *JS* le 1^{er} septembre 1692, p. 401-403 : « Solution du problème de M. de Beaune proposée autrefois à M. Descartes et que l'on trouve dans la 79. De ses lettres, tome 3, par Mr. G*** ». (voir plus haut).

³ Lettre de Huygens à Leibniz du 17 septembre 1693, *op. cit.*, p. 511. Selon l'édition de *OH*, ce passage est souligné dans la lettre qui se trouve à Hanovre, probablement par Leibniz (note 20 de cette lettre).

⁴ *Ibid*, p. 511.

⁵ Bos, H. J. M., « Élaboration du calcul infinitésimal », *op. cit.*, p. 119 : « Voilà une chose caractéristique de l'esprit de Huygens. Pour lui, c'est la construction, c'est-à-dire la résolution de problèmes qui est le but final ».

différences » au sein de la République des lettres, Leibniz déclare « & enfin M. Hugen
lui mesme en a reconnu & approuvé la consequence »¹. Ce qu'il dit n'est pas faux :
Huygens n'est pas contre l'utilisation du calcul et en estime sa fécondité mais le
savant allemand omet de préciser pas que son l'éminent Huygens reste à jamais fidèle
à sa manière géométrique. Il meurt le 8 juillet 1695.

Les géomètres de l'Académie sont pour la plupart de la génération de
Christiaan Huygens. Ils connaissent et pratiquent des méthodes infinitésimales. Il
convient d'examiner comment leur pratique géométrique au sein de l'Académie crée
un climat propice à intégrer l'Analyse des infinis, particulièrement telle qu'elle est
présentée dans l'ouvrage du Marquis.

2) Sur le statut des infiniment petits, éclaircissements de Leibniz auprès de Wallis et Jean Bernoulli (1698-1699)

2.1) L'échange Wallis-Leibniz : *nihil* VS infiniment petit

En 1695, Nieuwentijt lance un débat à propos du statut des infiniment petits du
calcul leibnizien ; Leibniz avait été contraint de répondre par des éclaircissements afin
de dissiper les critiques. La question du rôle de l'infiniment petit dans le processus
calculatoire est présent dans la correspondance entre Wallis et Leibniz qui débute au
moment des disputes avec Nieuwentijt.

Wallis a une méthode des tangentes, très proche de celle de Fermat, dans
laquelle une lettre a intervient. Nombre des échanges sont destinés à éclaircir le
statut de ce qui est représenté par cette lettre.

Dans la lettre du 22 juillet 1698², Wallis présente sa méthode des tangentes :

$A\alpha$ est une courbe³, $AV = v$; $V\alpha = b$; αF est la tangente au point α et la
sous-tangente cherchée est $VF = f$. O est un point de la courbe. Il pose $VD = a$,
d'où $DA = v \pm a$ et $DF = f \pm a$.

¹ « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des
transcendentes par M. Leibnits », JS, 1694, p. 404.

² Lettre de Wallis à Leibniz du 22 juillet 1698, AIII 7B, p. 838.

³ Wallis précise qu'elle peut-être concave, convexe ou de courbure quelconque. On la supposera
convexe pour l'exposé.

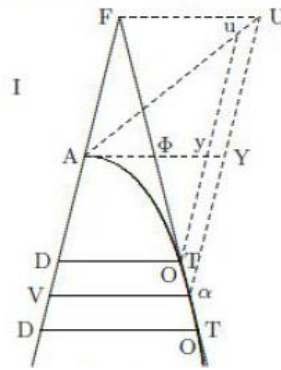


fig. 105

Les triangles $VF\alpha$ et DFT sont semblables donc $\frac{VF}{DF} = \frac{V\alpha}{DT}$ soit $\frac{f}{f \pm a} = \frac{b}{DT}$ donc :
 $DT = \frac{f \pm a}{f} b$.

Or

$$DT \geq DO, \text{ avec égalité si } D \text{ est en } V.$$

Cette inégalité est « universelle » [universaliter] et vaut quel que soit le triline $AV\alpha$;
 DO est à comparer avec DT , il est donc requis d'introduire la propriété caractéristique
de la courbe¹. Par exemple, si la courbe est une parabole,

$$DO = b \sqrt{\frac{v \pm a}{v}} \text{ et } DT = \frac{f \pm a}{f} b,$$

donc

$$DT = \frac{f \pm a}{f} b \geq b \sqrt{\frac{v \pm a}{v}}.$$

En élevant au carré et en simplifiant :

$$\pm 2fva + va^2 \geq \pm f^2 a$$

puis en divisant par a , il vient : $\pm 2fv + va \geq \pm f^2$ avec égalité lorsque D est en V .

L'étape suivante est cruciale : « qui methodi nucleus est ». Il pose D en V , c'est-à-dire $a = 0$ de sorte que tous les multiples disparaissent ou s'évanouissent [evanescent]. Donc² :

$$\pm 2fv = \pm f^2$$

¹ « Pro quaque curva suus cujusque debitus character, seu aequatio propria ».

² Généralisation aux paraboles cubiques, biquadratiques, supersolides, ... $f = 3v, f = 4v, f = 5v, \dots$ ou n'importe quel exposant fractionnaire. Wallis explique que des calculs peuvent être abrégés depuis le début puisque beaucoup de termes vont être effacés ou rejetés [delendi aut rejiciendi].

La lettre a joue le même rôle que celui du e chez Fermat. Les deux algorithmes sont extrêmement similaires, voire identiques. Par ailleurs, dans la configuration envisagée par Wallis, deux triangles sont semblables mais tous les deux sont finis et l'anéantissement de a rend l'un égal à l'autre ; ainsi il n'y a pas la possibilité de considérer le triangle caractéristique, comme le font Barrow ou Leibniz.

À la suite de l'exposé de sa méthode, Wallis compare le rôle joué par son a avec celui du dx de Leibniz au cours de la recherche de tangentes :

Après les simplifications de calcul que j'enseigne, ce qui subsiste est en réalité ton calcul différentiel (que cette chose n'est pas si nouvelle mais nouvelle la forme d'en parler, comme tu n'as peut-être pas remarqué). Dans tous les cas, il y a mon a , tout autant que ton x (ou y) segment de l'abscisse, avec cette seule différence que ton x est un infiniment petit [*infinite-parvum*], mon a tout à fait rien [*plane nihil*]. Et lorsque tous les termes ont été effacés [*delete*] ou omis (par abréviation de calcul) ; ce qui reste est ton petit triangle caractéristique (lui-même placé entre deux ordonnées très proches) semblable à tout à FVa ; certes pour toi infiniment petit [*infinite-exiguum*], pour moi tout à fait rien [*plane nihil*]. Bien sûr, par-là l'apparence du triangle sera retenue, mais abstraite de la grandeur : ce qui est cette forme du triangle, mais de grandeur nulle [*nullius*].

Pour Wallis, la méthode du calcul différentiel et la sienne reviennent au même, seul change la « façon d'en parler ». La différentielle dx n'est absolument pas une notion plus riche qui apporterait une quelconque amélioration. Au contraire, il considère que sa méthode est bien plus simple :

Par ailleurs, parce que ma voie me paraît plus simple en posant $a = 0$ alors que tu supposes x infiniment petit, et de là assurément qu'il ne m'est pas nécessaire de quelques-uns de tes postulats, au sujet de l'infiniment petit, de l'infiniment petit multiplié par lui-même, dégénérant en rien (ce qui doit être toujours employé avec quelque précaution) puisqu'il est par soi-même évident [*perspicuum*] (ce qui me suffit) que rien multiplié par quelque chose est encore rien¹.

Wallis considère que ce qui est nommé par la lettre a est uniquement un simple élément de calcul dont le destin est de disparaître une fois que le résultat est obtenu. En revanche, Leibniz ne peut pas accepter l'identification des significations de

¹ *Ibid*, p. 840-841.

dx et de a . Dans sa lettre de réponse du 29 décembre 1698¹, il soutient qu'il vaut mieux que les « éléments ou différentielles momentanées » [*elementa vel differentia momentanea*] soient considérés comme des quantités comme il a l'habitude de les entendre :

en effet, ils ont eux-mêmes des différentielles et peuvent être représentés par des lignes assignables qui leur sont proportionnelles.

Si, comme chez Wallis, dx est supposé être un rien, la division d'une quantité par une différentielle ou la comparaison de rapport de différentielles reviendrait respectivement à diviser une quantité par zéro et comparer des rapports de riens². Il n'est pas possible de considérer une différentielle comme l'intégrale d'une différentielle d'ordre supérieur si elle est un rien. Sa conception des différentielles permet en revanche d'effectuer ce type de comparaison et de pouvoir traiter avec des différentielles d'ordre supérieur³. Il insiste sur le fait que l'intérêt du calcul différentiel est de pouvoir considérer des différentielles de tout ordre – par exemple l'élément de courbe $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ – et de les traiter à l'aide de rapports.

Dans le même ordre d'idée, il n'accepte pas la considération du triangle caractéristique comme étant sans grandeur : ses côtés infiniment petits sont proportionnels à un triangle assignable. L'expression « abstrait de toute grandeur » apporte selon lui de l'obscurité superflue. Ce triangle peut être considéré comme plus petit qu'un autre triangle semblable, puisque les lignes qui le constituent sont proportionnelles à des lignes assignables :

(...) je ne sais si cela pourrait être compris, cela paraît à coup sûr introduire une obscurité inutile. Qui pourrait percevoir une figure sans grandeur ? Je ne vois pas comment, à partir de là, on pourrait ôter la grandeur à tel triangle donné (...)⁴.

Dans sa réponse du 16 janvier 1699⁵, Wallis explique que par l'expression « la forme du triangle abstraite de sa Grandeur », il voulait exprimer que la grandeur du

¹ Lettre de Leibniz à Wallis le 29 décembre 1698, *op. cit.*, AIII 8, p. 10.

² Jesseph, Douglas, M., « Leibniz on the foundations of the calculus : The question of the reality of infinitesimal magnitudes », *Perspectives on Science*, vol. 6, nos. 1 & 2, p. 27.

³ *Ibid*, p. 22.

⁴ Lettre de Leibniz à Wallis le 29 décembre 1698, AIII 8 p. 11.

⁵ Lettre de Wallis à Leibniz le 16 janvier 1699, AIII 8, p. 42

triangle n'avait pas à être prise en compte. Il indique qu'il est possible, plutôt que d'utiliser l'expression « forme de triangle », d'user d'expressions comme celles de « degré d'inclinaison » ou de « déclivité de la courbe au point de contact » ; ou bien de « l'angle que fait la tangente avec l'ordonnée » parce que ces expressions correspondent exactement à ce qui est cherché dans le problème des tangentes. Pour Wallis, l'angle de contact n'a pas de grandeur bien qu'il a une « tendance » à être une distance : au point de tangence, il marque la « tendance » de la direction. Il fait partie de ce qu'il appelle les « inceptives » ou « inchoatives » de grandeurs¹. Par « la forme du triangle sans grandeur », il exprime le caractère inchoatif de la direction de la tangente.

Les questions à propos de rapports d'inassignables et de différences entre incomparables reviennent dans les lettres, mais la tendance de l'échange est de réconcilier les points de vue des deux savants². Dans sa lettre du 30 mars 1699³, Leibniz consent à ce que « la forme du triangle » corresponde au « degré de déclinaison ». Cependant, il défend l'idée selon laquelle, pour le calcul, il est utile de « feindre » des quantités infiniment petites. Ayant un rapport assignable entre elles, elles ne doivent pas être prises pour rien. En revanche, elles peuvent être rejetées dans le cas où elles sont ajoutées à des quantités incomparablement plus grandes. Il rappelle que cette idée est celle de son lemme des incomparables, publié dans les *Acta*, et que cette manière de procéder est celle du Marquis de l'Hospital.

2.2) L'échange avec Jean Bernoulli : « réalités » vs fictions

La pratique du calcul différentiel conduit également Jean Bernoulli à questionner le statut des différentielles, ce qui donne lieu aussi à un échange avec Leibniz à la même époque que celui avec Wallis⁴.

En juin 1698, Leibniz écrit à Jean Bernoulli. Il reconnaît que ce dernier a écrit des choses profondes sur l'infinité des corps [*corporibus varie infinitis*], il lui avoue avoir

¹ Wallis considère des « Inceptives of magnitude » ou « inchoatives » qui ne sont pas des grandeurs mais qui sont dans la possibilité prochaine d'être des grandeurs [*yet are in the next possibility of being somewhat*], *Defense of treatise of the Angle of contact*, Playford for Richard Davis, London, 1684

² Beeley, Philip, « Infinity, infinitesimals, and the Reform of Cavalieri : John Wallis and his critics », Goldenbaum, Ursula and Jesseph Douglas, *Infinitesimal differences*, W de G, Berlin, p. 48.

³ Lettre de Leibniz à Wallis le 30 mars 1699, AIII 8, p. 93.

⁴ Nous nous référons pour la plus grande partie de ce paragraphe à Jesseph, Douglas, M., « Leibniz on the foundations of the calculus : The question of the reality of infinitesimal magnitudes », *op. cit.*, p. 28-29.

déjà réfléchi sur ce sujet sans avoir jamais osé se prononcer. Ici, il explicite ce qu'il croit être en mesure d'énoncer sur les infiniment petits :

(...) Car peut-être l'infini, tel que nous le concevons, et l'infiniment petit, sont imaginaires, et encore aptes pour déterminer les choses réelles déterminées [*determinanda realia*], de la même manière que l'effectuent les racines imaginaires. Ces choses-là sont parmi les notions idéales [*rationibus idealibus*], par les lois desquelles les choses sont régies, sans pour autant qu'elles soient des parties de la matière. Admettre des lignes réelles infiniment petites conduit à admettre aussi que ces lignes soit terminées des deux côtés, et néanmoins elles sont à nos lignes ordinaires, comme l'infini est au fini. (...)¹

Dans ce passage, Leibniz pointe la difficulté à laquelle conduit la conception d'une quantité infiniment petite comme étant réelle, c'est-à-dire déterminée et bornée, avec la propriété d'être « plus petite qu'aucune quantité donnée ». Pour rendre compte de la légitimité à utiliser des infiniment petits, ce paradoxe le conduit à introduire l'idée selon laquelle les infiniment petits doivent être considérés en mathématiques comme des « fictions ». L'explicitation de cette idée débute par l'échange avec Jean Bernoulli, l'été 1698². Dans la lettre du 17 juillet 1698³, Leibniz distingue entre la modalité d'existence de l'infiniment petit lorsqu'il apparaît dans la nature de celle liée au calcul :

Il s'ensuit de la division actuelle (à l'infini) dans quelque partie aussi petite que l'on veut de la matière que tout se passe comme si le monde était composé de créatures innombrables. Mais ce qu'il faut rechercher, c'est s'il n'y a aucune partie de la matière qui ait jamais une raison assignable à quelque autre partie, c'est-à-dire s'il y a une ligne droite terminée des deux côtés, mais qui cependant conserve une raison infinie ou infiniment petite à une autre droite.

En mathématiques, Leibniz répond affirmativement que « nous assumons utilement ces questions dans le calcul », cependant il explique que le sujet est beaucoup plus épineux dans la nature : « il ne suit pas de là qu'elles puissent exister dans la nature. La question relève d'une enquête d'un genre plus profond ». Dans la

¹ Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 7 juin 1698, *op. cit.*, AIII, 7B, p. 796.

² Robinet, Alain, *Architectonique disjonctive automates systémiques et idéalité transcendantale dans l'œuvre de G.W. Leibniz*, Vrin, Paris, 1986, p. 292.

³ Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 17 juillet 1698, AIII, 7B, p. 827-828.

lettre suivante, datée du 29 juillet 1698¹, il émet des doutes sur l'existence d'une ligne droite infinie et cependant terminée mais il répète que pour le calcul, il suffit de feindre [*fingantur*] leur existence comme pour les racines imaginaires de l'algèbre. Il assure que ce qui est conclu par les infiniment petits peut toujours être démontré par des démonstrations *ad absurdum*, par le moyen de son lemme des incomparables.

Jean Bernoulli affirme que la donnée d'une série en acte prouve l'existence d'infinitésimaux [*infinitesimus*] puisque qu'ils la constituent², il le répète dans les lettres suivantes³. Dans la lettre du 7 janvier 1699⁴, il légitime l'affirmation précédente en expliquant que puisque la donnée d'une série de dix nombres prouve que le dixième existe et que, de même, la donnée d'une série de cent nombres prouve l'existence du centième, alors la donnée d'une série infinie (en acte) prouve l'existence d'infinitésimaux.

Dans la lettre à Varignon du 20 mai 1698⁵, Jean Bernoulli fait part de sa conviction de la réalité des quantités infiniment petites de tout ordre dans le monde mais aussi en géométrie : il suffit de considérer l'ordonnée d'un demi-cercle qui est toujours la moyenne proportionnelle entre les deux segments correspondant du diamètre, si l'un de ces segments est infiniment petit, il suit que l'ordonnée sera infiniment plus grande que le petit segment et infiniment plus petite que l'autre segment. Dans sa réponse, Varignon approuve les propos de Jean Bernoulli : « Tout cela me paroist une suite nécessaire de la doctrine des infinis de differens genres, dont je suis parfaitement convaincu »⁶.

À notre connaissance il s'agit de la première fois que Varignon se positionne sur l'existence et la réalité des infiniment petits.

3) Une officialisation de l'Analyse des infiniment petits : la lecture de Joseph Sauveur

Nous avons vu que le Marquis de l'Hospital est à l'origine de l'introduction du calcul des différences à l'Académie des sciences puisque dès sa nomination en juin

¹ Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 29 juillet 1698, AIII 7B, p. 853.

² Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 6 septembre 1698, AIII, 7B, p. 899.

³ « concludo hanc necessario debere esse infinities minorem termino finito, id est debere esse infinite parvum », 6 décembre 1698, p. 956.

⁴ Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 7 janvier 1699, AIII, 8, p. 32.

⁵ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 20 mai 1698, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 171.

⁶ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 27 mai 1698, *ibid*, p. 173.

1693¹, il lit des mémoires utilisant le calcul des différences pour résoudre des problèmes de recherche de caustiques en utilisant les développées². Deux ans plus tard, Varignon utilise à son tour le calcul pour résoudre des problèmes mathématiques ou physico-mathématiques. La présence de la nouvelle analyse n'est donc l'affaire essentiellement que de Guillaume de l'Hospital et de Pierre Varignon. L'Académie des sciences n'est pas le seul lieu où le calcul est diffusé, des articles de ces deux savants sont publiés dans des journaux savants français ou étrangers.

Nous avons vu que l'apprentissage du calcul différentiel conduit à un questionnement sur le symbolisme et sur l'objet auquel celui-ci renvoie. Que ce soit pour l'Hospital, pour Varignon ou pour d'autres membres du groupe malebranchiste, l'appropriation du calcul de Leibniz n'est pas immédiate, elle passe par des questions propres à chacun et exige donc une phase d'apprentissage plus ou moins longue. Ainsi, il est légitime de se demander de quelle manière pouvait être reçue la lecture de mémoires utilisant le calcul différentiel par des académiciens n'ayant pas entrepris encore le chemin de sa connaissance. Dans l'Éloge du Marquis de l'Hospital, Fontenelle affirme qu'avant la publication de l'*AI*, la nouvelle analyse s'apparentait à une :

science cabalistique renfermée entre cinq ou six personnes. Souvent on donnait dans les journaux les solutions, sans laisser paraître la méthode qui les avait produites ; et lors même qu'on les découvrait, ce n'étaient que quelques rayons de cette science qui s'échappaient, et les nuages se renfermaient aussitôt. Le public, ou, pour mieux dire, le petit nombre de ceux qui aspiraient à la haute géométrie, étaient frappés d'une admiration inutile qui ne les éclairait point, et l'on trouvait moyen de s'attirer leurs applaudissements, en retenant l'instruction dont on aurait dû les payer³.

Les années qui précèdent la publication de *AI*, les procès-verbaux des séances académiques ne rendent compte d'aucun commentaire par rapport à l'introduction et l'utilisation de la nouvelle analyse. Il semble qu'elle provoque plutôt l'indifférence.

Démonstration par lignes des règles du calcul différentiel : la lecture de Sauveur

¹ « Mr l'Abbé Bignon a présenté de la part de Monseigneur de Pontchartrain monsieur le marquis de l'Hospital pour être du corps de la compagnie », 17 juin 1693, *PVARS*, fol. 135V.

² « Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction avec une manière nouvelle de trouver les développées », 31 août 1693, *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, p. 380-384, « Nouvelles remarques sur les développées, sur les points d'inflexion et sur les plus grandes et les plus petites quantitez », 30 novembre 1693, *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, p. 397-400.

³ *HARS*, 1704, p. 125.

Quelques jours après la publication de l'*AI*, Joseph Sauveur est nommé membre de l'Académie et se charge, lors des séances du 23 et 30 juin 1696, de présenter une démonstration des règles du calcul différentiel : celles de la multiplication et de la division puis de celle des puissances. Il a obtenu la chaire de professeur de mathématiques au Collège Royal depuis 1686 et il y enseigne la géométrie et l'arithmétique. Pendant des dizaines d'années, son cours de géométrie est largement diffusé au moyen de copies auprès de maîtres de mathématiques puis finalement publié à titre posthume en 1764¹. Comme l'« Avertissement » de cette publication l'indique, Sauveur est, quant à la manière de présenter la géométrie, dans la lignée directe de Port-Royal : « L'ordre que M. Sauveur a suivi dans ses *Elémens de Géométrie* est à peu près celui de la *Géométrie de Port Royal* ou de M Arnaud². C'est en tant que géomètre que Sauveur s'adresse à l'Académie pour présenter une « démonstration par lignes des règles du calcul des différentielles » : il propose une preuve des règles qui s'appuie uniquement sur des résultats de géométrie euclidienne. Autrement dit, s'adressant aux membres de l'Académie, il choisit pour présenter une partie de l'analyse des infinis, un langage et des connaissances partagées de tous. Ces deux mémoires sont reproduits entièrement par Hamel chargé du poste de secrétaire. Ce dernier commet plusieurs erreurs de retranscription, ce qui probablement témoigne d'une compréhension partielle du contenu.

Sauveur annonce que sa démonstration s'appuie sur certains passages de l'*AI*. Ainsi, deux suppositions précèdent son développement. La première indique qu'il applique sur les lignes, les surfaces et les corps « ce qui a été dit des quantitez variables et permanentes, dans la première section de l'Analyse des infiniment petits »³. Il illustre cette proposition par deux exemples : si le segment AB représente « une quantité variable qui croist, sa différentielle BC s'appellera $+dx$, et si elle décroist, sa différentielle sera $-dx$ ». De même, il affirme que si un parallélogramme AF augmente, sa différentielle sera le gnomon extérieur EfB et lorsqu'il diminue sa différentielle sera le gnomon EfB .

¹ Sauveur, Joseph, *Géométrie élémentaire et pratique de seu M. Sauveur, de l'Académie Royale des Sciences, revue, corrigée et augmentée* par M. LeBlond, Maître de Mathématiques des enfans de France, des pages de la grande Ecurie du Roi, &c, Paris, Jombert, 1764.

² « Avertissement », *ibid*, vij.

³ « Démonstration par lignes des Règles du Cacul des Differentielles pour la multiplication et la division », *PV ARS*, t. 15, fol. 103R-105R, « Regle pour les puissances », *PVARS*, t. 15, fol. 103R-105R, fol. 111V-114V.

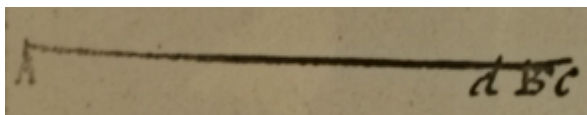


fig. 106

La deuxième supposition correspond à la première demande de l'AI : « l'on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre une quantité seule et une quantité + ou - sa différentielle ».

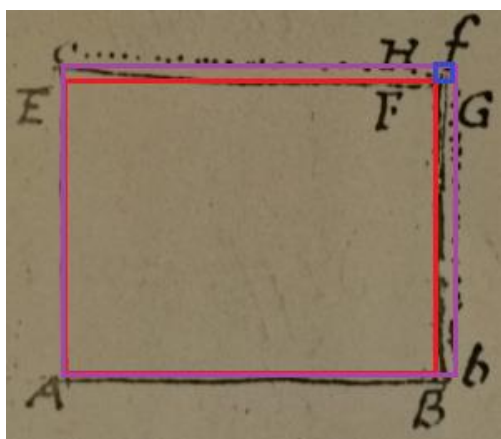


fig. 107

Sauveur s'appuie par la suite sur ces deux suppositions pour démontrer de deux manières l'énoncé de la règle pour le produit : « le produit xy de deux quantitez variables je dis que sa différentielle est $ydx + xdy$ ».

La première manière repose sur la considération d'un parallélogramme. Sauveur identifie le parallélogramme AF construit sur les côtés $AB(x)$ et $AC(y)$ avec le produit xy . Le gnomon BFe est la différentielle du parallélogramme et il est égal à la somme des trois parallélogrammes BG (ydx), EH (xdy) et GH ($dx dy$).

Or

$$xdy + dx dy = (x + dx)dy$$

Mais, par la deuxième supposition, $x + dx$ peut être pris par x , donc xdy peut être pris pour $(x + dx)dy$.

Sauveur propose une deuxième façon de démontrer la règle. Il considère un triangle ACB . À la manière de Descartes, il suppose $AC = 1$ ce qui lui permet par la suite de construire certaines lignes de longueur donnée.

Il pose $CB = x, Bb = dx, CD = y, et Dd = dy. DE$ est parallèle à AB et DG à Ab .

À cause « des parallèles », il écrit :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG} \text{ ou } \frac{1}{x} = \frac{y}{CG},$$

et obtient :

$$CG = xy.$$

À cause des triangles semblables, il écrit :

$$\frac{CA}{Bb} = \frac{CD}{EG} \text{ ou } \frac{1}{dx} = \frac{CD}{EG},$$

et obtient :

$$EG = ydx.$$

Puis, en utilisant la deuxième supposition (mais sans l'indiquer), il prend CB pour Cb et écrit :

$$\frac{CA}{CB \text{ ou } Cb} = \frac{Dd}{Ge} \text{ ou } \frac{1}{x} = \frac{dy}{Ge},$$

ce qui donne :

$$Ge = xdy.$$

La différentielle de CE est $Ee = EG + Ge = xdy + ydx$.

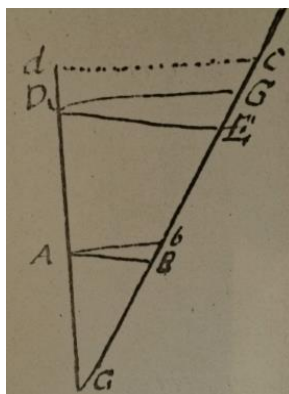


fig. 108

La preuve de Sauveur repose essentiellement sur la considération de la figure dans laquelle il représente des différentielles. Il est intéressant de la comparer avec celle de l'*AI* publiée le même mois. Chez l'Hospital, aucune figure n'est considérée, sa preuve repose uniquement sur la manipulation d'expressions et la comparaison de rapports. Comment comprendre le choix d'une telle présentation de la part de Sauveur ?

Nous avons vu plus haut que les mémoires utilisant le calcul différentiel peinent à être compris par les académiciens. Sauveur s'adressant aux académiciens souhaite montrer qu'il y a une interprétation des règles du calcul dans le cadre de la

géométrie euclidienne ou cartésienne, probablement telle qu'il l'enseigne. Les années suivantes, il utilise quelquefois le calcul différentiel. Fontenelle explique que si Sauveur n'était pas réticent à la nouvelle géométrie de l'infini, il faisait partie de ceux « qui ne veulent pas trop l'exalter »¹.

Nous ne reproduisons pas ici la preuve de la règle de division et celle des puissances car elles reposent également sur la considération d'une figure sur laquelle Sauveur représente les différentielles de quantités géométriques : un parallélogramme dans le cas du quotient, et une ligne brisée dans le cas des puissances.

La lecture de ces deux mémoires ne produit pas à notre connaissance de remarques de la part ni de Varignon, ni de l'Hospital.

4) Indéfiniment et infiniment petits : une pratique partagée à l'Académie

Dans sa présentation du calcul leibnizien, l'Hospital considère des quantités infiniment petites : les différences des quantités variables. Ces quantités apparaissent dans son ouvrage mais aussi dans ses mémoires. Or, des infiniment petits ou indéfiniment petites sont présents dans la pratique des géomètres français qui héritent notamment de Pascal et de Roberval. Les méthodes des indivisibles leur sont coutumières. Dans quelle mesure cette pratique est-elle propice à admettre les quantités infiniment petites du calcul leibnizien ?

3.1) Philippe de la Hire : un mathématicien du *vieux style*

Une critique des infiniment petits

Le 23 février 1697, Philippe de la Hire lit un mémoire à l'Académie intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits »² dans lequel il attire l'attention sur des risques d'erreurs encourus à utiliser certaines suppositions « nouvelles » :

Cependant, dans ces derniers temps, on a commencé à considérer des courbes comme des Polygones dont les côtes estoient si petits qu'il ne pouvoit y avoir aucune difference sensible entre l'Arc et la courbe et sa corde ou côté du Polygone ; et c'est par ce moyen

¹ Fontenelle, « Eloge de Joseph Sauveur », *HARS*, 1716.

² La Hire (de), Philippe, « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits », 23 février 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 23R-28R.

qu'on a fait une infinité de decouvertes tres curieuses dans ce genre de Geometrie. Mais comme il peut se trouver des cas ou il est difficile de ne pas tomber dans l'erreur, j'ay cru que l'exemple que je raporte icy, feroit connoître avec quelle précaution on doit s'en servir¹.

Si la Hire convient donc que ces suppositions sont souvent fécondes, il indique qu'elles peuvent toutefois conduire à l'erreur : c'est le cas de deux situations qu'il présente par la suite et pour lesquelles un manque de « précaution » a mené à des paradoxes. Il soupèse les suppositions « qu'on fait ordinairement », c'est-à-dire :

Comme lors qu'on considere deux lignes comme paralleles entr'elles, Quoy qu'effectivement elles tendent en un point si elles sont tres proches l'une de l'autre, que d'un Triangle isocelle dont la base est tres petite par raport a ses côtez les Angles sur la base sont supposez droits, ce qui est absolument faux, que les Tangentes des courbes sont aussi bien réputées égales à l'arc de la courbe que la corde cet arc, dans quelques retranchements des Tangentes, comme lors qu'ils sont faits par des perpendiculaires aux Arcs sur l'extrémité des Arcs, ce qui n'est pas vray universellement et plusieurs autres suppositions qu'on fait ordinairement et qui laissent toujours quelque doute dans l'esprit de ceux qui ne veulent rien accorder que ce qui est démontré dans la rigueur Geometrique ; car il faut toujours connoitre ou avoir démontré que ces fausses suppositions étant prises autant de fois qu'on le suppose ne peuvent pas faire une somme qui soit considerable².

En effet, ces suppositions sont coutumières de la pratique mathématique de ses contemporains. Pour expliquer les incomparables Leibniz utilisait d'ailleurs certains de ces exemples³. Ainsi, comme la plupart de ses pairs géomètres, la Hire reconnaît que ces « suppositions » sont fécondes pour les découvertes. Cependant, il souligne qu'elles « laissent toujours quelque doute dans l'esprit » parce qu'elles sont « fausses » ou qu'elles ne sont pas « universellement vraies ». De sorte que la Hire conseille d'être attentif⁴ pour garantir la vérité tout en les utilisant : quelques précautions sont

¹ *Ibid*, 23V.

² *Ibid*, fol. 24V.

³ « Tentamen de motuum coelestium causis », *AE*, février 1689 et notre commentaire au chapitre 4, 2.3), « Le statut des infiniment petits : les déclarations de Leibniz ».

⁴ L'esprit de son discours rappelle celui de *La logique ou l'Art de penser*, où nous lisons : « Ainsi, comme ces dérèglements d'esprit, qui paraissent opposés, l'un portant à croire légèrement ce qui est obscur et incertain, et l'autre à douter de ce qui est clair et certain, ont néanmoins le même principe, qui est la négligence à se rendre attentif autant qu'il faut pour discerner la vérité, il est visible qu'il faut y remédier de la même sorte, et que l'unique moyen de s'en garantir est d'apporter une attention exacte

requis afin de rester dans la « rigueur Geometrique ». Ces précautions consistent à s'assurer qu'un raisonnement partant de ces suppositions – autant de fois qu'elles aient été admises – peut être rendu équivalent à un raisonnement rigoureux. Archimède est évoqué quelques lignes auparavant, ainsi, par « raisonnement rigoureux », la Hire entend probablement qu'il faut pouvoir exposer la démonstration du résultat à la manière d'Archimède, lequel est évoqué explicitement au début du mémoire.

Pour convaincre de l'importance d'être prudent lorsque ces suppositions sont admises il décrit deux situations paradoxales qui partent de :

Celle [supposition] que ie prens icy est accordée par tous ceux qui se servent de ces metodes et il ne me semble pas qu'on la doive nier ; c'est que la corde d'un arc de cercle, indéfiniment petit ou aussi petit que l'on puisse imaginer est égale à ce même arc, et par consequent **ce qu'on dit de la corde doit se dire aussi de l'arc**¹.

Nous n'analysons pas ici la première situation car son paradoxe provient plus de considérations mécaniques que mathématiques². Dans la deuxième situation, la Hire considère un arc de cercle BE de centre C , BO « l'horizon » est tangent à l'arc en B . La corde EB est partagée en parties indéfiniment petites FG qui représentent les temps de parcours du corps en des temps « égaux ou inégaux ». Aux points de division F, G, \dots sont menés des parallèles à l'horizon FH, GI, \dots qui rencontrent l'arc aux points H, I, \dots

à nous jugements et à nos pensées », Arnauld, Antoine, Nicole, Pierre, *La Logique ou l'art de penser, op. cit.*, p. 13, (souligné par nous).

¹ *Ibid.*, fol. 24. Souligné par nous.

² Cet exemple a été étudié par Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris, 1992, p. 39-40.

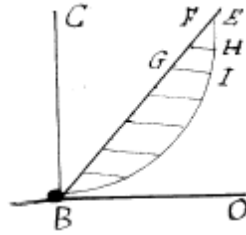


fig. 109

Il considère alors les cordes EH, HI, \dots dont il indique « qu'on prendra pour les arcs mêmes »¹. En vertu « de la chute des corps par des lignes indifféremment inclinées »², le corps qui parcourt la corde ou l'arc acquiert des vitesses égales lorsqu'il arrive aux lignes horizontales FH, GI, \dots et comme « les vitesses égales sont entr'eux comme les temps », la Hire en déduit que le temps par la corde EH – que nous notons t_{EH} est au temps par la ligne EF – que nous notons t_{EF} – comme EH (arc ou corde) à EF et de même t_{HI} est à t_{FG} comme la corde ou l'arc HI est à FG , et « ainsy des autres ». La Hire s'autorise alors à sommer toutes les cordes EH, HI, \dots qui représente « le temps que le corps employera a descendre par l'arc EB »³ et la somme de toutes les lignes EF, FG, \dots qui représente le temps « qu'il employe a parcourir EB ». Il en déduit ainsi que le temps pour parcourir « l'arc de cercle EB est supérieur à celui par la corde EB , ce qui est « un faux raisonnement »⁴.

Dans cet exemple, la Hire veut mettre en avant les difficultés rencontrées certaines fois lorsqu'une sommation indéfinie d'infiniment petits est effectuée, et que trop peu d'attention est portée aux suppositions. La Hire explique que cet exemple est un parmi d'autres mais que celui-ci :

lui a semblé si sensible que ie ne fais de doute que ceux qui y feront quelque attention ne cherchent à s'asseurer par la Géométrie ordinaire de ce qu'ils auront trouvez par la methode des infinis⁵.

Ainsi, l'« attention » garantissant la vérité passe en dernière instance par une démonstration à l'ancienne.

¹ *Ibid*, 26V.

² Galilée, *Discours, op. cit.*, théorème VI, proposition VII.

³ *Ibid*, 26V.

⁴ Comme il l'a montré plus haut, *ibid*, 24V.

⁵ *Ibid*, 27V.

Au début du mémoire, la Hire qualifie de « nouvelles » ces suppositions. Cependant, ce qualificatif est à nuancer. En effet, ces suppositions font partie sans aucun doute de la plupart des méthodes « infinitistes » et sont donc « nouvelles » uniquement par rapport à la manière des Anciens¹. La « méthode des infinis » ne désignerait donc pas alors nécessairement le seul calcul leibnizien mais l'ensemble des méthodes « infinitistes ». Cependant, il est possible que la lecture de ce mémoire résulte d'un climat prudent envers l'introduction du nouveau calcul. Ainsi, lorsqu'il écrit « les Géomètres de ce temps » il désignerait ici exclusivement ceux qui usent du calcul leibnizien, il ferait ainsi de ces suppositions leur apanage pour mieux témoigner sa méfiance.

À propos de La Hire : l'avis de Leibniz et l'Hospital

Dans une lettre adressée à Leibniz le 2 mars 1695², l'Hospital indique la parution d'un ouvrage de la Hire qui contient plusieurs traités dont l'un s'intéresse aux « épicycloïdes et de leurs usages dans les mécaniques³ ». Il précise que :

l'on y trouve la dimension de l'espace et de la ligne courbe de l'épicycloïde à la manière des anciens. Il y a aussi *l'Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans le cercle*, où il maltraite fort M^r Tschirnhauss, mais il semble que cela vient trop tard, tout cela se trouvant dans les Actes de Leipsic desquels cependant M^r de la Hire ne fait aucune mention.

Outre le traité sur les épicycloïdes, le livre contient en effet un mémoire intitulé « Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans le cercle »⁴, dans

¹ Nous ne partageons pas l'analyse de Michel Blay qui interprète cette critique comme allant à l'encontre des partisans du calcul leibnizien. La « méthode des infinis » ne désigne pas nécessairement le seul calcul leibnizien mais l'ensemble des méthodes « infinitistes ».

² Lettre de l'Hospital à Leibniz, *op. cit.*, A III 6A, p. 298.

³ La Hire, Philippe, *Traité des épicycloïdes et de leur usage dans les mécaniques*, « Œuvres diverses de M. de la Hire de l'Académie royale des sciences », *Mémoires de l'académie royale des sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699*, Paris, La compagnie des libraires, 1730, tome IX, p. 341-447. Ce traité démontre à la manière des Anciens la dimension de l'espace de l'épicycloïde, la dimension des lignes épicycloïdes, de l'évolution des épicycloïdes et de la cycloïde, puis de leur usage dans la mécanique.

⁴ La Hire (de), Philippe, « Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans le cercle » dans « Œuvres diverses de M. de la Hire de l'Académie royale des sciences », *Mémoires de l'académie royale des sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699*, chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Hippolyte-Louis Guerin, Paris, p. 448-474.

lequel quelques critiques sont adressées à Tschirnhaus. Ce dernier aurait le défaut de ne pas justifier suffisamment ses résultats sur les caustiques¹. Ainsi, selon la Hire :

Monsieur de Tschirnhaus nous auroit obligé de nous donner la démonstration de ce qu'il avance ; car la génération de cette ligne [caustique du cercle] est très-simple, elle mérite bien d'être autorisée d'une démonstration. Mais il témoigne pas le loisir de s'appliquer à ces sortes d'ouvrages, j'ai crû que je lui ferois plaisir d'en donner une au public telle que je la pourrois trouver à la manière des anciens ;²

Comme nous le montre l'examen du traité sur les épicycloïdes ou de ce mémoire, la Hire a une préférence pour écrire ses démonstrations à la manière des Anciens. Leibniz répond à l'Hospital le 18 mars 1695 sur un ton ironique³ :

Je ne suis pas fâché que M. de la Hire veuille bien se donner la peine que je ne voudrois point prendre de réduire en démonstrations à la façon des anciens, ce que nous découvrons aisément par nos méthodes. Ce seroit encore mieux, s'il se servoit de nouveaux moyens capables d'avancer l'art d'inventer, mais c'est de quoy je doute. En tout cas il me semble que bien loin de maltraiter M. Tschirnhaus, on devroit luy témoigner de l'obligation. Je souhaiterois d'obtenir un extrait des paroles de M. de la Hire⁴.

Dans ce passage Leibniz indique qu'il accorde moins d'importance aux démonstrations à l'ancienne qu'à l'art d'inventer, c'est ce qui est à ses yeux plus admirable et fécond. Dans la lettre suivante, datée du 25 avril 1695⁵, l'Hospital insiste sur le fait que la Hire ne donne rien « de nouveau » dans son traité sinon « les démonstrations qui sont à la manière des anciens et par conséquent fort ennuyeuses et longues ». En lui répondant, Leibniz reprend l'idée qu'en démontrant « les

¹ La Hire a rencontré Tschirnhaus à l'Observatoire, celui-ci lui aurait montré une méthode pour trouver la caustique du cercle. Cependant la Hire n'est pas convaincu : « mais comme la méthode dont il se servoit pour sa démonstration étoit une espèce d'évolution fort différente de celle de Monsieur Hugen s'est servi dans son Traité des Pendules ; & qui ne nous sembloit point Géométrique, n'ayant pas démontré quelques Lemmes qui devoient précéder cette évolution (...) ». L'article publié à ce sujet par le savant allemand ne le satisfait pas davantage, « *Inventa nova, exhibita Parisiis Regiae Scientiarum à D.T.* », novembre 1682, *AE*, p. 364-365.

² « Œuvres diverses de M. de la Hire de l'Académie royale des sciences », *op. cit.*, p. 450.

³ Lettre de Leibniz à l'Hospital le 18 mars 1695, A III 6A, p.317-318.

⁴ *Ibid.*

⁵ Lettre de l'Hospital à Leibniz le 25 avril 1695, A III 6A, p.341.

nouvelles découvertes à la façon des anciens » la Hire a le mérite de rendre « ainsi témoignage à la vérité. Mais il aura souvent besoin de beaucoup de parole »¹.

3.2) Galloys, hommage à Roberval

Ses riches et diverses études² et ses protections ministérielles amènent Jean Galloys (1632-1707) à être élu membre de l'Académie des Sciences en 1667³. Peu après, il obtient le poste de secrétaire de l'Académie entre 1668 et 1670 ce qui le conduit à renforcer des liens étroits avec des savants, en particulier il échange avec Oldenburg. Les années suivantes, il fréquente Huygens et Leibniz pendant leurs séjours parisiens puis quelques lettres sont échangées avec chacun d'eux après leurs départs.

En plus de ses fonctions académiques Galloys est enseignant. En mai 1686, il obtient la chaire prestigieuse de mathématiques au Collège Royal qu'il échange en juin de la même année par celle de langue grecque.

Très lié à Denis de Sallo⁴, créateur du *Journal des Sçavants*, Galloys contribue à sa publication et en devient rédacteur en 1666. À la mort de Sallo, en 1669, il obtient le privilège du Journal pendant douze ans. Dans les premières années, le *Journal des Sçavants* destine une partie conséquente aux sciences, dans laquelle on rend compte essentiellement de l'activité de l'Académie des sciences. Cependant, ses responsabilités académiques empêchent Galloys de maintenir le rythme de parution de la première année. Après des années peu fournies en numéros ou même des interruptions, il confie le Journal à l'Abbé de la Roque en 1672.

En 1692 et 1693, il s'occupe d'une nouvelle revue intitulée *Mémoires de mathématiques et de physique tirez des Registres de l'Académie royale des sciences*⁵. La première publication est précédée d'un avertissement qui explique l'origine de sa création :

Il arrive souvent à ceux qui composent l'Académie Royale des Sciences, de faire de ces petites Pieces pour profiter des occasions qui se présentent tous les jours. (...) Jusqu'ici l'on s'étoit contenté de mettre dans les Registres de l'Académie des Pieces détachées &

¹ Lettre de Leibniz à l'Hospital du 13 mai 1695, A III, 6A, p. 365.

² Selon l'éloge écrit par Fontenelle, Galloys a étudié la théologie, l'histoire sainte, les langues anciennes et modernes, les mathématiques, la philosophie et la médecine.

³ Nous nous appuyons sur la biographie dressée par Jean-Pierre Vittu, « Jean Gallois », *Dossier Jean Galloys*, Archives de l'Académie des sciences.

⁴ Il a été précepteur de son fils.

⁵ *Mémoires de mathématiques et de physique tirez des Registres de l'Académie royale des sciences*, Paris, Imprimerie royale, 1692 et 1693.

hors d'œuvre : mais comme plusieurs personnes ont souhaité que l'on en fit part au Public, on a résolu d'en faire dorénavant imprimer des Recueils, tout au moins à la fin de chaque mois (...)¹.

Cette publication, très soignée, rend compte des principaux travaux scientifiques de l'Académie : astronomie, mathématiques, géographie, entre autres. Deux comptes rendus d'ouvrages sont écrits par l'Abbé Galloys dont l'un est examiné dans le paragraphe suivant. Douze numéros en 1692 et douze en 1693 sont publiés par l'imprimeur Anisson avant son interruption définitive. Elle représente la première tentative pour établir une publication régulière des travaux de l'Académie².

Ces quelques éléments biographiques indiquent que Galloys est un personnage complètement inséré dans le réseau savant français et que ses responsabilités institutionnelles lui octroient un pouvoir certain au sein de la communauté savante française.

En 1677, un recueil d'ouvrages est publié contenant certains travaux de Blondel, Picard, Frénicle et Mariotte³. Mais d'autres travaux importants sont restés sans publication. Comme on l'a indiqué plus haut, Philippe de la Hire en est chargé. En 1693, *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'académie Royale des sciences* est publié. En avril 1693, Galloys écrit un compte-rendu de cet ouvrage qui est inséré dans *Mémoires de mathématiques et de physique tirez des Registres de l'Académie royale des sciences*⁴.

Roberval n'a pas été beaucoup publié de son vivant, ce recueil répare ce manque puisqu'il contient trois de ses ouvrages dont le *Traité des indivisibles*. Le commentaire composé par Galloys constitue un hommage à son prédécesseur :

C'est une méthode [celle des indivisibles de Roberval] presque semblable à celle de Cavalieri, mais Mr de Roberval avoit inventée en lisant Archimède, cinq ans avant que l'Ouvrage de Cavalieri eût paru. Quoiqu'il y ait beaucoup de rapport entre ces deux

¹ Cité dans « Avertissement », *Mémoires de l'académie royale des Sciences depuis 1666 à 1699*, tome X, par la Compagnie des Libraires, Paris, 1730, xvij.

² Éric Brian, Christiane Demeulenaere-Douyère (sous la direction de), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences. Guide de recherche*, Londres-Paris-New-York, Tec et Doc Lavoisier, 1996, p. 111.

³ *Recueil de plusieurs traités de mathématiques de l'Académie royale des sciences*, Paris, Imprimerie royale, 1676-1677.

⁴ Jean Galloys, « Extrait du livre intitulé Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences dans Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 à 1699 », Paris, Imprimerie Royale, 1730, p. 290.

méthodes, néanmoins il y a cette différence, que Cavallieri considere des surfaces comme si elles étoient composées d'une infinité de lignes ; (...) mais Mr de Roberval regarde la surface comme composée d'autres petites surfaces, ou en égale différence, ou en quelqu'autre proportion (...) : Ainsi il garde toujours la loi des Homogènes, & il évite ce qu'il y a de choquant dans la méthode de Cavallieri; dans laquelle il semble que l'on compare ensemble des choses d'une nature entierement différente, comme des lignes avec des surfaces, et des surfaces avec des solides. Par le moyen de cette méthode ce Traité enseigne à quarrer diverses figures comprises par des lignes courbes (...). Ce Traité est l'un des plus beaux Ouvrages de Géométrie : aussi M. de Roberval dit dans une de ses Lettres à Torricelli, qu'il est redevable à cette méthode des Indivisibles, de ce qu'il a trouvé de plus beau »¹.

Dans le but de quarrer une figure, la méthode de Roberval consiste à la « transformer » en une autre par le moyen de lignes que Torricelli appelle les « lignes robervaliennes ». Elle est très similaire à celles décrites dans les ouvrages de Jacques Grégory et Barrow et que nous avons examinées sous le nom de « méthodes de transmutations »². Galloys mentionne cette similitude :

elle est au fond celle-là même qui a depuis été débitée par Grégory dans sa Géométrie universelle, et après lui par Barrow dans son livre intitulé *Lectiones Geometricae*³.

Ce témoignage indique que Galloys n'est pas du tout réticent à l'utilisation de méthodes infinitésimales à condition qu'elles respectent la « loi des Homogènes ». Son appréciation est éloquente : l'ouvrage de Roberval n'est pas seulement utile, il est l'un des « plus beaux ouvrages de Géométrie ».

Plus loin dans son texte, il explique qu'il soupçonne Jacques Grégory d'avoir « déguisé » la méthode de Roberval après en avoir pris connaissance grâce à Torricelli pendant son voyage en Italie⁴. Jacques Gregory est mort en 1675. David Grégory, le neveu de Jacques, écrit une réponse en novembre 1694 pour défendre son oncle de ces accusations. Cette lettre est publiée aux *Philosophical Transactions*, mais Galloys n'en

¹*Ibid*, p. 296.

² Chapitre 2.

³ *Ibid*, p. 300.

⁴*Ibid.*, p. 301 : « Grégory au voyage qu'il fit depuis en Italie en eut connoissance ; & que l'ayant un peu déguisée, il la fit aussi tôt imprimer dans sa Géométrie universelle, sur les lieux mêmes : car ce fut à Padouë que son livre fut imprimé. Il semble aussi témoigner dans la Préface de ce Livre que la conscience lui faisait appréhender sur cela quelques reproches ».

prend connaissance qu'en 1703¹. Dans cette réponse, David Grégory affirme que la démonstration de Roberval est « mauvaise »².

3.3) Le retour de la « belle Hélène », nouvelles démonstrations de l'isochronisme de la cycloïde : La Hire-Varignon

Nous avons vu qu'en juillet 1695, Varignon applique pour la première fois le calcul leibnizien pour résoudre un problème physico-mathématique, celui de la courbe isochrone. Nous rappelons que c'est en 1687 que Leibniz énonce ce problème défiant « les cartésiens » et leur analyse. Des résolutions avaient déjà été immédiatement fournies entre autres par Huygens – sans calcul différentiel mais en utilisant une méthode infinitiste –, les frères Bernoulli et Leibniz, mais en présentant la sienne Varignon souhaite présenter à l'Académie « une autre manière très simple » qu'il déduit de ce qu'il « a donné sur la chute des corps dans les mémoires de l'Académie au mois de janvier 1693 ». Ce mémoire apparaît ainsi comme le concours de deux avancées : celles de ses recherches pour l'obtention de lois générales de la mécanique – obtenues en 1693 – et celle du calcul leibnizien qui permet de traduire ces dernières. Ce mémoire est isolé dans le temps, et ce n'est qu'à partir de janvier 1698 que ses recherches en mécanique s'appuient systématiquement sur le calcul leibnizien. Pendant la période de 1697 à 1700, il se focalise sur la question de l'isochronisme sur deux problèmes principalement : celui de l'isochronisme de la cycloïde renversée et celui de la recherche des courbes isochrones dans diverses situations de contraintes.

Pendant la séance académique du samedi 1^{er} juin 1697, Varignon lit un mémoire dans lequel il démontre l'isochronisme de la cycloïde renversée. Varignon rappelle que cette propriété a été découverte et publiée en 1673³ par Christiaan Huygens mais il prétend que sa démonstration est nouvelle car elle est « une des plus courtes et des plus simples qui ayent paru Jusqu'icy »⁴. Il lira deux autres démonstrations⁵ une semaine plus tard, mais bien qu'il considère qu'elles sont « plus

¹« Réponse à l'écrit de M. David Gregorie, touchant les lignes appellées Robervalliennes, qui servent à transformer les figures », 3 mars 1703, MARS, p. 70-77.

² *Ibid*, p. 74.

³ *Horologium oscillatorium*, OH, t. XVIII.

⁴ PVARs, tome 16, fol. 151R.

⁵ Varignon, Pierre, « Seconde et Troisième démonstration des mouvemens isochrones dans la cycloïde renversée », 8 juin 1697, PVARs, t. 16, fol. 162R-165V.

simples que celles de Mr Huygens » il affirme qu'elles le sont moins que la première. À la même séance, Philippe de la Hire lit un mémoire concernant le même sujet et intitulé « Démonstration du temps qu'un corps employe a tomber dans une cycloïde et dans ses portions, avec quelques propriétés particulieres de Cycloïdes »¹. La propriété d'isochronisme de la cycloïde est donc un sujet d'intérêt à l'Académie puisqu'elle y destine toute la journée du 8 juin, comme l'est celui de la mesure du temps de parcours le long d'une courbe².

La démonstration du 1^{er} juin s'appuie sur la notion d'« arcs semblables » à laquelle Varignon a destiné un mémoire lu le 23 février de la même année³. Varignon considère sur une cycloïde de cercle générateur CE , deux portions Aa , Bb d'arcs semblables à deux arcs AC , BC , c'est-à-dire tels que : $\frac{Aa}{Bb} = \frac{AC}{BC}$, puis les droites aM et bN parallèles au diamètre CE .

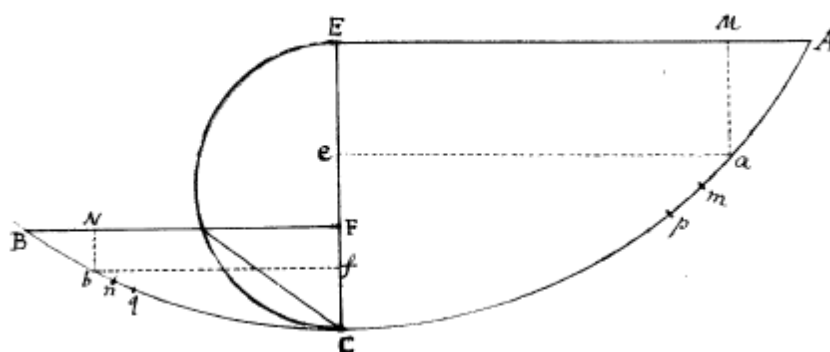


fig. 110

Il annonce puis démontre que ces conditions conduisent à l'égalité⁴ :

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{\sqrt{aM}}{\sqrt{bN}}$$

Cela étant obtenu, Varignon divise les arcs AC et BC en un nombre égal de parties égales et il définit comme « parties correspondantes » celles « qui y gardent le même ordre » : par exemple si am est la millième des parties égales de AC , et bn la millième de celles de BC , « ces millièmes en rang am et bn » sont appelées parties

¹ *Ibid*, fol. 157R-161V.

² Varignon, Pierre, « Nouvelle remarque sur les mouvements isochrones dans la cycloïde renversée. », *PVARS*, t. 16, fol. 171R-173R ; 14 juin 1697, La Hire, « Propriétés de toutes les roulettes », 7 juin au 28 juin 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 254R-289R et « Règle générale pour déterminer le temps que employe un corps pesant a descendre par quelque ligne courbe que ce soi », 9 et 30 août 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 368R-379V.

³ Bien qu'il n'utilise ici aucun des résultats obtenus dans ce mémoire, il est intéressant de remarquer que cette notion lui est familière.

⁴ *Ibid*, fol. 151R-152V.

correspondantes. Cette définition lui est primordiale par la suite pour démontrer : « de quelque hauteur A , ou B , qu'un corps commence à tomber le long de AC , ou de BC , il arrivera toujours en C , en temps égaux »¹.

Varignon « imagine » l'arc AC divisé en une « indéfinité de parties égales $am, mp \& c$ » induisant ainsi une partition de BC en bn, nq , etc parties correspondantes sur BC . Dans ce cas, $\frac{am}{bn} = \frac{AC}{BC}$ (division en parties égales) puis comme $\frac{am}{bn} = \frac{Aa}{Bb}$ (parties correspondantes), il obtient : $\frac{am}{bn} = \frac{\sqrt{aM}}{\sqrt{bN}}$ (premier résultat).

Il suppose ensuite que les parties am et bn obtenues par l'indéfinie division sont parcourues avec des vitesses uniformes acquises après les chutes de A en a , et de B en b . Celles-ci sont, d'après l'« l'hypothèse de Galilée », dans le même rapport que $\frac{\sqrt{aM}}{\sqrt{bN}}$ qui est donc égal à $\frac{am}{bn}$. Par conséquent, les parties am et bn sont parcourues en temps égaux. Ce raisonnement peut être reproduit pour chaque couple de parties correspondantes mp et nq , ... et « ainsi à l'infini ». Varignon entreprend une somme indéfinie des temps pour conclure que les arcs AC et BC sont donc parcourus en temps égaux.

Il est à remarquer que dans sa démonstration Varignon suppose que la vitesse acquise reste uniforme pendant le parcours d'une division d'arc. L'arc étant divisé en un nombre indéfini de parties, la partie résultante est implicitement indéfiniment petite – Varignon ne l'écrit pas – et il semble que cette petitesse rend légitime la supposition de l'uniforme célérité. D'autre part, il suppose que la somme indéfinie de deux séries de temps égaux deux à deux produit des sommes égales.

Le 8 juin, Varignon propose deux autres démonstrations. Nous restituons la première².

¹ *Ibid*, fol. 153R.

² La troisième démonstration utilise le même type d'outil que les deux précédentes : somme infinie de temps de parcours de portions infiniment petites. Au goût de Varignon, c'est celle qu'il aime le moins car « je substitue pour quelque temps le mouvement uniforme au lieu de l'accélééré, comme a fait Mr Huygens », *ibid*, fol. 164R.

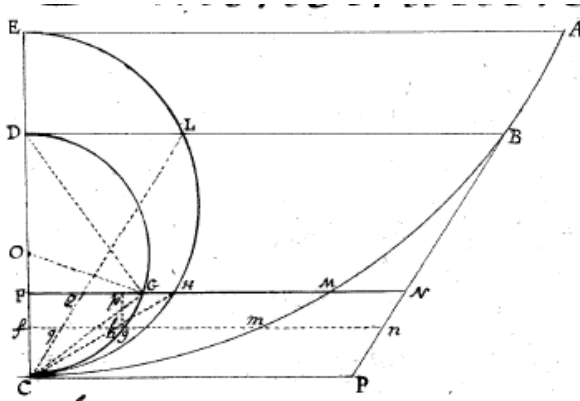


fig. 111

Dans celle-ci, il considère une demi-cycloïde ABC de cercle générateur $ELHC$ puis les horizontales AE, BD, CP et la corde LC parallèle à la tangente en B ¹. FG et fg sont des ordonnées « infiniment proches ». FG coupe ELC en H puis FG et fg coupent la cycloïde respectivement en M, m , la corde LC respectivement en Q, q et la tangente BP en N et n .

Or, d'après la loi de la chute des corps, le temps de parcours pour parcourir Mm (t_{Mm}) est au temps de parcours pour parcourir Nn (t_{Nn}) comme Mm est à Nn . On a donc :

$$\frac{t_{Mm}}{t_{Nn}} = \frac{Mm}{Nn} = \frac{Hh}{Qq} = \frac{HC}{QC} = \frac{LC}{HC}$$

Les deux dernières égalités se déduisent d'arguments géométriques simples que Varignon n'explique pas².

$$\text{Par ailleurs}^3 : \frac{LC}{HC} = \frac{\sqrt{EC \times CD}}{\sqrt{EC \times CF}} = \frac{\sqrt{CD}}{\sqrt{CF}} = \frac{CD}{CG}.$$

Ainsi, $\frac{t_{Mm}}{t_{Nn}} = \frac{CD}{CG}$. Comme CD est une « grandeur constante et toujours la même », en prenant des temps égaux t_{Mm} , c'est-à-dire « des parties infiniment petites Mm , pour celles qui tombent de B en C , parcourt en temps égaux », il affirme que :

$$\frac{t_{BMC}}{t_{BNP}} = \frac{\text{somme des } t_{Mm}}{\text{somme des } t_{Nn}}$$

C'est-à-dire que ces rapports sont comme :

¹ C'est une propriété de la cycloïde.

² En vertu de la similitude des triangles CHQ et Chq d'une part et des triangles QHC et LHC d'autre part.

³ Varignon ne justifie aucune de ces égalités. Or, en vertu de la similitude des triangles rectangles LEC et DLC , on a $\frac{LC}{EC} = \frac{CD}{LC}$ ou $LC^2 = EC \times ED$. Idem pour $HC^2 = EC \times CF$. Pour la dernière, en vertu des triangles rectangles semblables CGD et CFG , on a $\frac{CG}{CD} = \frac{CF}{CG}$ donc $CG = \sqrt{CD \times CF}$.

le diamètre DC , pris autant de fois qu'il y a de cordes dans le demi-cercle DGC , est à la somme de ces cordes, ou des sinus de tout ce demi-cercle, qu'on sçait estre égale au quarré de son diamètre.

Ici Varignon prolonge la propriété qui s'écrit en écriture moderne :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ alors } \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}$$

à un nombre infini de termes puis, en interprétant « autant de fois qu'il y a des cordes » par la longueur du demi-cercle CDG , il obtient : $\frac{t_{BMC}}{t_{BNP}} = \frac{CD \times CDG}{CD^2} = \frac{CDG}{CD}$.

Or, comme $t_{BNP} = t_{\text{corde } LC} = t_{\text{diamètre } EC}$, il déduit que le temps de chute le long de la cycloïde, quelle que soit la hauteur de chute (A ou B , ...) a un rapport au temps de chute le long du diamètre EC qui est constant.

Varignon n'utilise donc pas du tout le calcul leibnizien.

La Hire lit son mémoire le 8 juin 1697¹. Sa démonstration n'est pas à la manière des Anciens comme celles qu'il avait menées dans son traité sur les épicycloïdes précédemment cité. Nous ne la restituons pas mais nous indiquons sur quelles suppositions elle s'appuie. Pour montrer l'égalité des temps de chute le long d'une demi-cycloïde et de l'une de ses portions, la Hire considère le demi-cercle générateur et sa portion correspondant à la portion de la cycloïde. Pour parvenir au résultat, il s'appuie sur la considération de division en parties indéfiniment petites et il effectue des sommes infinies. Ainsi, la Hire, bien que très attaché à la présentation à la manière des anciens, ne voit aucun inconvénient à utiliser des méthodes infinitistes pour conduire sa démonstration et la présenter ainsi devant ses pairs.

5) Les problèmes physico-mathématiques : épreuve déterminante pour le calcul leibnizien

Leibniz est l'un des premiers, en 1687, à défier « Messieurs les cartésiens » à « trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément et approche également de l'horizon en temps égaux »². Un mois plus tard, Huygens

¹ Varignon, Pierre, « Démonstration du temps qu'un corps employe a tomber dans une Cycloïde et dans ses portions, avec quelques proprietz particulieres des Cycloïdes », 8 juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 157V-162R.

² *Nouvelles de la République des Lettres*, septembre 1687, *op. cit.*, p. 952-956.

résout le problème sans utiliser le calcul différentiel¹. Sa solution vient trop rapidement aux yeux de Leibniz qui aurait voulu « tailler un peu de besogne à ces bons Cartésiens qui pour avoir leu les *Elemens* de Bartholin², ou de P. Malebranche croient de pouvoir tout faire en analyse »³.

Des propositions de recherche de problèmes physico-mathématiques se multiplient après l'invention du calcul leibnizien. Parce qu'il est particulièrement adapté à les résoudre – alors que les autres méthodes y parviennent difficilement ou pas du tout – Leibniz et les frères Bernoulli ne cessent de proposer à la République des lettres de nouveaux problèmes de ce type en sachant combien l'analyse des infinis pourra montrer sa fécondité. Les discussions à propos de ces problèmes conduisent les géomètres à affiner leur compréhension de l'analyse des infinis. Un exemple notoire est l'analyse de l'heuristique des problèmes des courbes élastique ou de la voilière⁴. La démarche habituelle pour traiter des problèmes physico-mathématiques s'effectue en deux étapes, la première consiste à ramener chacun de ces problèmes relevant de la physique à un énoncé purement géométrique. La deuxième présente la résolution du problème géométrique à l'aide du nouveau calcul. Leur présentation est d'ailleurs ponctuée fréquemment par « *ad puram Geometricam reductum* » pour la fin de la première étape et par « Analysis » pour le début de l'étape calculatoire⁵. Dans une lettre à Jean Bernoulli du 16 mai 1695 dans laquelle il est question de la résolution de la recherche de la chaînette, Leibniz souligne qu'il n'est pas toujours :

facile de ramener les problèmes de l'inversion de tangentes, c'est-à-dire à des différentielles. Par exemple, dans la recherche de la Chaînette, si nous ne connaissons

¹ Huygens publie pas sa solution dans une lettre datée du 8 octobre 1687 mais ne fournit que la courbe recherchée. Le détail de la démonstration est développé en septembre 1690 (non publiée), Christiaan Huygens, *OH*, t. IX, p. 226-228.

² Bartholin, Erasmus, *Principia matheseos universalis, seu introductio ad Geometricae methodum Renati des Cartes*, Amsterdam, Elzevirios, 1651. Réimprimé en 1659 dans le tome second de l'édition latine de *La Géométrie* de Descartes.

³ Lettre de Leibniz à Huygens, janvier 1688, *OH*, t. IX, p. 258.

⁴ Michel Blay consacre une étude à plusieurs de ces problèmes physico-mathématiques en analysant les solutions de différents géomètres (Jean et Jacob Bernoulli principalement), « Les prétextes cinématiques », *La naissance de la mécanique analytique*, *op. cit.*, p. 62-108. Viktor Blåsjö destine plusieurs chapitres de son ouvrage *Transcendental curves in the Leibnizian Calculus* à la comparaison des résolutions de ces problèmes, notamment son chapitre 8, « Transcendental curves in physics », *op. cit.*, p. 177-189.

⁵ C'est la conclusion à laquelle parvient Michel Blay concernant la résolution de problèmes physico-mathématiques. Il indique que les différents auteurs (les frères Bernoulli, l'Hospital et Leibniz) ont une démarche identique en deux étapes : ramener les questions de la science du mouvement à des questions de pure géométrie puis les résoudre si nécessaire à l'aide du calcul leibnizien, *op. cit.*, p. 109.

pas par ailleurs grâce à des théorèmes de mécanique, une propriété de ses tangentes quant au centre de gravité, il nous aurait été difficile d'en obtenir la construction¹.

En 1692, Jean Bernoulli destine douze leçons à des problèmes physico-mathématiques². Les leçons 33 à 35 traitent de la courbe isochrone (*curvae descensus aequalibilis*) et de la courbe isochrone paracentrique (*isochronae paracentricae*). Le reste des leçons (de 36 à 46) ne sont pas retranscrites dans la copie parisienne du groupe malebranchiste³. Elles traitent entre autres de la résolution de la voilière, de la caténaire mais pas de la courbe élastique. Bien qu'absentes du manuscrit parisien, l'Hospital a bénéficié de ces leçons pendant le séjour de Jean Bernoulli à Oucques⁴. Il est donc dès le début très au courant de l'application de l'analyse des infinis aux problèmes physico-mathématiques. En 1695, il publie dans les *Acta* sa résolution du « problème du Pont-levis » ou « *problema aequilibrii* »⁵. Cependant l'intérêt qu'il porte aux problèmes physico-mathématiques est relatif. Il s'y intéresse à condition, comme il le répète fréquemment, d'y « avoir « ôter la physique de la question afin de la rapporter à la géométrie »⁶ et il promet alors de pouvoir les résoudre. Pour lui, comme pour nombre de ses contemporains, les problèmes physico-mathématiques se résolvent à l'aide de l'analyse des infinis à condition qu'ils aient été rapportés à la « pure géométrie ». Comme nous le verrons *infra*, Varignon adoptera une attitude différente et originale. Dans la Préface à l'*AI*, l'Hospital reconnaît l'application possible et utile du calcul différentiel à la Physique, il avait d'ailleurs prévu une section pour montrer :

le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique, jusqu'à quel point de précision il peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer l'utilité⁷.

mais sa maladie l'en a empêché.

¹ Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 16 mai 1695, *op. cit.*, AIII 6A, p. 354.

² Johann, Bernoulli, "Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate", *Opera omnia*, tome 3, Lausanne, 1742, leçons 33 à 46, p. 482-518.

³ FL 17860.

⁴ *Mathematica* p. 164-165.

⁵ L'Hospital(de), Guillaume, « Illustris Marchionis Hospitalii solutio problematis physico-mathematici ab erudito quodam geometra propositi », *AE*, février 1695, p. 56-59.

⁶ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 19 février 1695, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, band 1, *op. cit.*, p. 263.

⁷ Préface, *AI*, *op. cit.*

4.1) Le problème de la brachystochrone : un enjeu pour le calcul leibnizien

La brachystochrone : un enjeu pour la République des lettres

Dans les *Acta* du mois juin 1696, Jean Bernoulli propose aux mathématiciens de la République des lettres un nouveau problème¹ [*problema novum Mathematicis propositum*] : deux points *A* et *B* étant situés sur un plan vertical, il s'agit de trouver la courbe *AMB* qu'un point *M*, soumis à la gravité, doit parcourir pour aller de *A* à *B* dans le temps le plus bref. Il indique aux « amateurs » [*amatores*] de ce genre de problèmes qu'il ne s'agit pas de pure spéculation et que la courbe recherchée est une courbe célèbre [*notissima*] et connue de tous les géomètres. Il dévoilera la solution si d'ici la fin de l'année personne ne l'a obtenue.

Trouver la brachystochrone est donc un problème de *minima* mais d'un type inédit à l'époque, puisqu'il ne s'agit pas comme à l'ordinaire de trouver la valeur d'une des coordonnées pour laquelle l'autre coordonnée est maximale mais de trouver une courbe minimale parmi une famille d'une infinité de courbes ayant toutes les mêmes extrémités *A* et *B*².

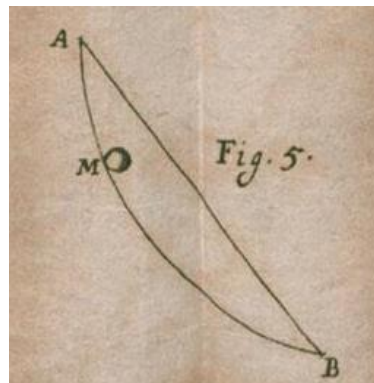


fig. 112

Leibniz prend connaissance de la question de la brachystochrone directement par une lettre de Jean Bernoulli datée du 9 juin 1696³. Il lui répond très rapidement, le

¹ Jean Bernoulli, «Supplementum defectus geometricae cartesianae inventionem locurum (...) Problema novum mathematicis propositum », *AE*, juin 1696, p. 269.

² On pourra lire le commentaire de Jeanne Peiffer : « Le problème de la brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hôpital et Varignon », *Studia leibnitiana*, Sonderheft 17, Stuttgart, 1989, p. 59-98.

³ Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 9 juin 1696, A III 6B, p. 783.

16 juin 1696¹, en lui envoyant une solution correcte. Un délai supplémentaire est accordé à la suite de deux publications² et la date buttoir est repoussée à Pâques 1697.

Des solutions sont proposées par Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli, Tschirnhaus, le Marquis de l'Hospital et un auteur anonyme qui s'avère être Newton. Elles sont publiées dans les *Acta* du mois de mai 1697. La courbe solution est une cycloïde³.

Varignon est l'un des premiers à être mis au courant du problème de la brachystochrone par une lettre de Jean Bernoulli datée du 15 mai 1696⁴, avant même que celui-ci l'annonce dans les *Acta*. Malgré quelques indications de Jean Bernoulli⁵, il ne parvient pas à résoudre le problème, même au bout d'un an. C'est par son intermédiaire que l'Hospital prend connaissance du problème en mai 1696⁶. Se mettre à sa recherche le rend enthousiaste, cependant, dans la lettre du 15 juin, il demande à Jean Bernoulli de reformuler son énoncé et de le réduire « à la mathématique pure, car la physique m'embarasse »⁷. Dans sa réponse du 30 juin⁸ celui-ci lui assure qu'il est très aisé de réduire ce problème « à la mathématique pure » puisque seul « le principe ordinaire de Galilée y est supposé ». En désignant par x, AC, y, CM , la vitesse du point mobile M est \sqrt{y} . m étant un point infiniment proche de M , l'espace parcouru Mm est $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$ exprime le temps pour parcourir Mm .

¹ Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 16 juin 1696, A III 6B, p. 795.

² Blay, Michel, *La Naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 78.

³ Pour une comparaison des différentes solutions, on pourra consulter : Michel Blay, *ibid.*, p. 77-98 et Jeanne Peiffer, op. cit., p. 65-81

⁴ Lettre de Jean Bernoulli à Pierre Varignon du 15 mai 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, op. cit., p. 92. Cette lettre est perdue mais nous en connaissons l'existence par la réponse

⁵ Lettres de Varignon à Jean Bernoulli du 18 juin 1696, *ibid.*, p. 103 puis celle du 15 mai 1697, *ibid.*, p. 110.

⁶ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 24 mai 1696, *ibid.*, p. 92

⁷ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 15 juin 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, op. cit., p. 319.

⁸ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 30 juin 1696, *ibid.*, p. 321.

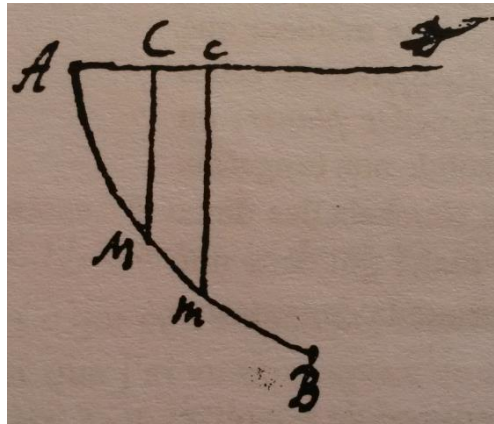


fig. 113

Dans ces conditions, le problème de la brachystochrone est ramené à la « pure mathématique », et peut s'énoncer ainsi : « D'entre toutes les lignes AMB qui joignent deux points données A et B on cherche la nature de celle dont $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$ soit la plus petite ». Il ajoute :

Je voudrais que quelques uns de vos Geometres qui se vantent de posseder de si excellentes methodes de *maximis et minimis*, s'y attachassent, car voylà un exemple, qui leur donnera de la besoigne et peutetre plus que leur methode ne pourra faire¹.

Sans aucun doute, en reformulant le problème en termes de calcul leibnizien, Jean Bernoulli veut montrer qu'il n'y a probablement pas d'autres méthodes possibles que celle de la nouvelle analyse pour le résoudre. C'est ce message qu'il souhaite adresser aux savants français, en particulier aux membres de l'Académie royale des sciences par l'intermédiaire de l'Hospital qui en est membre honoraire.

L'avis de recherche de « la courbe de plus vite descente » n'est pas immédiatement connu dès sa publication dans les *Acta* en mai 1696 puisqu'il n'est pas toujours aisé de se procurer cette revue. Dans le *Journal des Sçavants* du 19 novembre 1696, Leibniz énonce à nouveau le problème de la brachystochrone² en convoquant, comme Jean Bernoulli, les « méthodes diferentes » à surmonter le défi :

¹ Lettre du 21 décembre 1696, *ibid*, p. 327-328.

² « Extrait d'une lettre de M. de Leibniz sur son Hypothèse de Philosophe, & sur le problème curieux qu'un de ses amis propose aux Matematiciens ; avec une remarque sur quelques points contestez dans les Journaux precedens, entre l'auteur des principes de Physique, & celui des objections contre ces principes », *JS*, 19 novembre 1696, p. 451-455.

(...) un excellent Matematicien de mes amis, qui employe notre nouveau calcul des différences a résolu le problème suivant [celui de la brachystochrone] (...)

L'auteur du Probleme (qui est M. Jean Bernoulli Professeur à Groningue) a trouvé bon de le proposer aux Mathematiciens, sur tout à ceux qui se servent des metodes diferentes de la nôtre ; & il atendra leurs solutions jusqu'après Pâques de l'année suivante. Si quelqu'un en trouve la solution, il est prié de ne la point publier avant ce terme, pour donner encore aux autres le temps de s'y exercer¹

À son tour, l'Hospital encourage son entourage à s'exercer à la recherche de la brachystochrone : « Comme vous me marquez souhaiter que nos geometres s'appliquassent à trouver la courbe de plus vite descente, je les ai excitez à la chercher »². Il ne précise pas l'identité de tous ses interlocuteurs géomètres mais Joseph Sauveur en fait partie. En effet, ce dernier « qui a fort bien compris l'analyse des infiniment petits » propose une équation différentielle de la courbe mais n'étant pas « habile dans l'art de trouver les intégrales », il ne déduit pas quelle courbe « célèbre » résulterait de son intégration. En fait, Sauveur commet des erreurs dans son écrit lesquelles sont relevées par Jean Bernoulli et l'Hospital³. La démarche de Sauveur consiste à minimiser le temps de parcours sur un polygone en augmentant le nombre de ses côtés pour approcher la courbe de plus vite descente. La considération d'un polygone est aussi la première idée qui inspire l'Hospital et dont il fait part immédiatement à Jean Bernoulli le 30 novembre 1696. Celle-ci consiste, en considérant le point D milieu de la hauteur CB , à trouver le point E sur la parallèle DE à AC qui minimise le temps de parcours $AEEB$, il mène ensuite deux autres parallèles FG, HK respectivement par le milieu de CD et celui de DB puis il cherche les points G et K tels que le mobile parcourant le polygone $AGEKB$ arrive en B en le moins de temps que par tout autre polygone (passant par E).

¹ *Ibid*, p. 454-455.

² Lettre de L'Hospital à Jean Bernoulli du 31 décembre 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 333.

³ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 15 janvier 1697, *ibid*, p. 337 et lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 28 janvier 1697, *ibid*, p. 338.

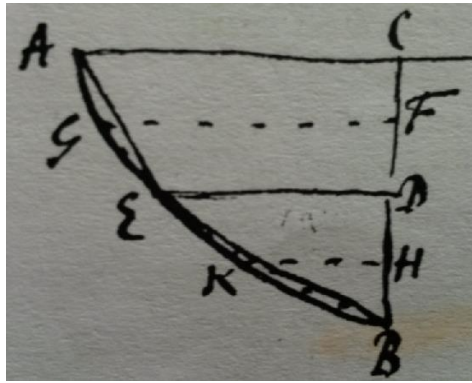


fig. 114

Cependant, il s'avoue vaincu lorsque le nombre de côtés augmente :

Je songeois ensuite qu'en supposant un nombre infini de divisions on pourroit parvenir à déterminer les points de la courbe, mais comme cette voye qui est d'abord aisée lorsqu'il s'agit que de déterminer le point *E* devient difficile et embarassée lorsque le nombre de divisions augmente je l'ai abandonnée¹.

Dans sa réponse datée du 21 décembre 1696, Jean Bernoulli lui avoue aussi qu'il a rencontré la même difficulté mais qu'il l'a surmontée. Il a enfin trouvé deux méthodes pour résoudre le problème, dont une est une manière « indirecte » dont il ne fournit aucun détail dans cette lettre. Il lui fait remarquer aussi que le problème de la brachystochrone sous « l'hypothèse de Galilée » est un cas particulier d'un problème plus général :

Si je puis résoudre ces sortes de problèmes par lesquels on demande de toutes les courbes qui joignent deux points donnés celle qui, contemplée en certaine façon, fasse *un plus grand* ou *plus petit*, je dis que je le puis en plusieurs cas, par exemple non seulement celui que vous me proposés lorsque la somme des $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$ doit être la plus petite, car c'est la courbe de plus vite descente, mais aussi si on veut que $\frac{(dx^2+dy^2)^n}{y}$ fasse un plus petit ; j'entends par *n* une puissance quelconque et par *Y* une quantité composée de quelque manière que ce soit de *y* ou de ses puissances et des connues.

Il propose à l'Hospital de lui envoyer ces deux méthodes, l'Hospital accepte dans un premier temps mais change d'avis car cela lui « osteroit le plaisir de pouvoir

¹ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 30 novembre 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 325.

penser à votre problème que je trouve de plus en plus curieux¹. Jean Bernoulli est d'accord de lui envoyer « jusqu'à nouvel ordre » et insiste auprès de l'Hospital pour qu'il suive ses indications :

Si vous réfléchissez un peu sur ce que je vous écris dans ma lettre précédente, il ne vous sera plus si difficile de pénétrer dans le secret, car j'y alléguais plusieurs choses qui vous donneront quelques lumières².

En suivant ces conseils, l'Hospital parvient à trouver une solution, il la décrit à Jean Bernoulli dans sa lettre du 25 février 1697³. Elle s'inspire d'une analogie avec le problème de la courbe caténaire⁴ que l'Hospital connaît depuis 1691⁵. Jean Bernoulli se montre critique quant à la méthode de son élève mais n'insiste pas car celui-ci parvient néanmoins à une solution qui correspond à la sienne. Le jour de Pâques arrivant, ce dernier décide d'envoyer cette solution à Leibniz⁶ pour qu'elle soit publiée dans les *Acta*.

Son mémoire est très concis⁷. Il y affirme que la solution est une cycloïde lorsque la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$. Il ajoute que dans l'hypothèse générale d'une vitesse proportionnelle à y^m alors l'abscisse x vérifiera l'équation différentielle $dx = \frac{my^n dy}{\sqrt{1-m^2 y^{2m}}}$. L'hypothèse de Galilée relève donc d'un cas particulier, celui pour lequel $m = \frac{1}{2}$.

¹ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 28 janvier 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 339.

² Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital, mi-février 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 339.

³ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 25 février 1697, *ibid.*, p. 342-343.

⁴ « Pour résoudre ce problème je considère la courbe AM placée en sorte que la ligne AP soit horizontale et que dans chacun de ses points M il y ait un poids exprimé par $y^{n-1} ds$; cela étant il est visible que cette courbe ainsi chargée doit prendre une situation telle que son centre de gravité approche le plus près qu'il est possible de l'horizontale AP , c'est-à-dire que la somme $y^n ds$ doit être la plus petite ». Il trouve que l'abscisse doit vérifier l'équation différentielle : $dx = \pm \frac{andy}{\sqrt{y^{2n}-aann}}$ puis si $n = -\frac{1}{2}$ (hypothèse de Galilée), $dx = \frac{ydy}{\sqrt{4ay-y^2}}$ qui correspond à la cycloïde, lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 25 février 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 342-343.

⁵ Bernoulli, Jean, *Opera omnia*, t. III, *op. cit.*, leçons 39 et 40, p. 500-505.

⁶ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 17 mars 1697, AIII 7A, p. 331.

⁷ L'Hospital (de), Guillaume, « Domini Marchionis Hospitalii solutio Problematis de linea cellerimi descensus », *AE*, mai 1697, p. 217-218.

Souhaitant continuer à effectuer ses recherches de manière indépendante, l'Hospital avait décliné la proposition de recevoir les trois solutions de Jean Bernoulli mais un jour après avoir envoyé sa solution à Leibniz, il souhaite à présent connaître les trois solutions de Jean Bernoulli, « surtout celle qui va directement au but »¹. Il reçoit ces solutions le 30 mars 1697. Elles font, par la suite, l'objet d'échanges épistolaires que nous ne développons pas ici. Une seule des trois est publiée dans les *Acta* du mois de mai².

La brachystochrone à l'Académie des sciences

Certes, pour résoudre le problème de la brachystochrone, l'Hospital se nourrit principalement de son échange avec Jean Bernoulli. Il en est de même pour Varignon même s'il ne parvient pas à obtenir la solution. Cependant, il est très vraisemblable que ces deux académiciens se soient entretenus à ce sujet au sein de l'institution, en témoigne l'intérêt que Sauveur porte immédiatement à la recherche de ce problème en décembre 1696. Si ce problème fait l'objet de discussions entre académiciens, aucune séance ne lui a été encore accordée dans laquelle par exemple un mémoire serait lu à son sujet. Enfin, pendant la séance académique du 13 avril 1697, l'Hospital annonce solennellement le problème de la brachystochrone : « M^r Bernoulli Professeur de Mathematiques a Groningue a proposé a tous les Geometres le premier jour de cette année un Probleme de Linea cellerrimi descensus »³. Il indique que ce problème doit se résoudre sous « l'hypothèse de Galilée » et avant le jour de Pâques. Le défi de la brachystochrone est public depuis mai 1696 par la publication de son énoncé dans les *Acta*. Ainsi, par cette lecture, l'Hospital officialise la recherche de la brachystochrone comme possible préoccupation scientifique de l'Académie. L'Hospital s'autorise cette annonce lors d'une séance car il estime être du devoir de l'Académie de s'intéresser à la recherche de ce problème. Tout d'abord, puisque son auteur est un membre notable et reconnu de la République des lettres, l'Académie est concernée. De sorte qu'en précisant que Jean Bernoulli adresse son problème à « tous

¹ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 18 mars 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 346.

² Bernoulli, Jean, « John. B. Curvatura raddi in diaphanis non uniformibus, solutioque problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda linea brachystochrona, id est, in seu radorum unda construenda », *AE*, mai 1697, p. 206.

Pour une description de la solution, on pourra consulter Jeanne Peiffer, « le problème de la brachystochrone », *op. cit.*, p. 67-79 ou Michel Blay, « La naissance de la mécanique analytique », *op. cit.*, p. 87-89.

³ *PVARS*, t. 16, fol. 52V.

les géomètres », nombre des membres de l'Académie sont interpellés. En outre, l'Hospital tient à préciser que le professeur Jean Bernoulli a averti que « la Geometrie ordinaire ne peut aller » pour trouver la solution, l'analyse des infinis est la seule qui peut réussir. Cette remarque, dûment placée à la fin de son annonce, est cruciale. Jean Bernoulli est persuadé que seul le calcul leibnizien est capable de surmonter ce défi. Ainsi, si seule l'analyse des infinis réussit à relever le défi, elle montrerait sa supériorité par rapport à d'autres méthodes et obtiendrait ainsi une reconnaissance auprès de la République des Lettres, et plus particulièrement des institutions scientifiques européennes¹. Ainsi, en énonçant cette remarque, l'Hospital signale à ses pairs l'enjeu principal de ce défi. Formulé de la sorte, le défi devient localement un enjeu entre les partisans du calcul leibnizien (Varignon, l'Hospital, Sauveur, Carré) et ceux qui sont plus réticents, les géomètres du « vieux style », ainsi que les désigne Varignon.

Lors de cette même séance, l'Hospital fait savoir qu'il possède une solution, il la fait cacheter auprès du secrétaire Hamel. Le 13 avril 1697, après Pâques, il lit son écrit latin contenant la solution : il s'agit à peu de choses près du même contenu que le mémoire publié dans les *Acta* du mois de mai. Il ne développe pas plus ici que dans les *Acta* une démonstration du résultat mais il en promet une². Lors de la séance suivante, le 20 avril 1697³, l'Hospital lit la « démonstration de sa solution ». Il choisit une preuve tout autre que celle critiquée par Jean Bernoulli. Il en estime sûrement plus sa qualité démonstrative et ainsi il juge probablement que sa lecture aura plus d'autorité devant ses pairs⁴. Deux lemmes et un corollaire structurent celle-ci et conduisent à déduire que la cycloïde est la solution du problème de la brachystochrone.

Dans le premier lemme, l'Hospital cherche la ligne *AEEB* (polygone à deux côtés) pour laquelle le temps de parcours est minimal, sachant que les segments *AE* et *EB* sont parcourus respectivement avec une vitesse *a* et une vitesse *b* : il s'agit donc de savoir pour quel point *E* le temps de parcours exprimé par $t = \frac{AE}{a} + \frac{EB}{b}$ est un « plus petit ». Ce lemme reprend l'idée initiale de la lettre du 30 novembre 1696 sauf qu'ici le point *E* n'est pas forcément sur une ligne médiane comme il l'était dans sa première tentative de résolution.

¹ Peiffer, Jeanne, *ibid*, p. 59.

² *PVARS*, t. 16, fol. 85V-86R.

³ *PVARS*, t. 16, fol. 93R-96R.

⁴ Peiffer, Jeanne, « Le problème de la brachystochrone », *op. cit.*, p. 76.

L'Hospital souligne que l'analyse des infiniment petits sait bien traiter ce problème :

il est clair que par les principes établis dans la 3^e section du livre des infiniment petits, que si l'on prend le point e , infiniment près du point E , le temps par AE, EB , doit être égal au temps par Ae, eB . On aura donc $\frac{AE}{a} + \frac{EB}{b} = \frac{Ae}{a} + \frac{eB}{b}$ et partant $\frac{AE-Ae}{a} + \frac{EB-eB}{b} = 0$.

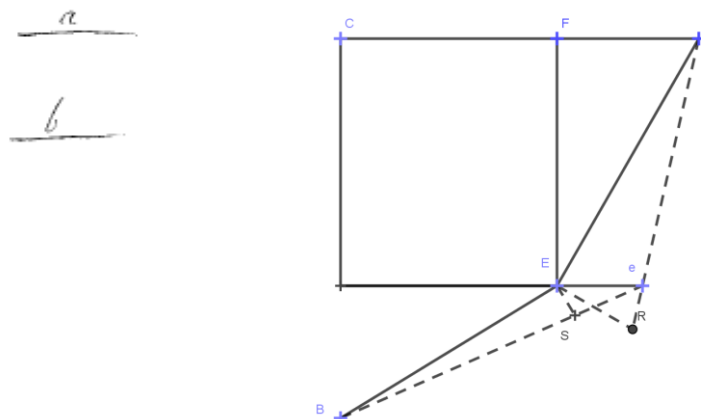


fig. 115

Il trace la perpendiculaire ER à AE qui coupe Ae en R et la perpendiculaire ES à BE qui coupe Be en S . Il ne l'écrit pas mais il considère que :

$$AE - Ae = AR - Ae = eR \text{ et que } EB - eB = SB - eB = -Se,$$

Ainsi :

$$\frac{eR}{a} = \sin R E e = \frac{Se}{b} = \sin S E e.$$

Il considère aussi que les angles $R E e$ et $F E A$, respectivement les angles $S E e$ et $C B E$ peuvent être pris l'un pour l'autre en raison du fait qu'ils ne diffèrent que d'un infiniment petit¹. Ces considérations le conduisent à affirmer que la position de E pour que le trajet soit minimal est tel que $\frac{\sin F E A}{\sin C B E} = \frac{a}{b}$. Autrement dit, E est situé de telle sorte que les sinus des angles que forme AE et BE avec la verticale sont comme les vitesses.

¹ Les angles $R E e$ et $F E A$ diffèrent de l'angle $E A R$ qui est infiniment moindre qu'eux, de même les angles $S E e$ et $C B E$ diffèrent de l'angle $E B S$ infiniment moindre qu'eux.

L'Hospital est coutumier de ce problème puisqu'il relève d'un problème plus général énoncé dans l'article 56, section III de l'*AI*¹ dont la résolution conduit à une égalité faisant intervenir les sinus. Dans ce problème, une courbe *AEB* et deux points fixes *C* et *F* sont donnés de position. On note respectivement par *u* et *z* les longueurs *CP* et *PF* où *P* est point quelconque de la courbe *AEM*. On considère une « quantité composée de ces deux indéterminées et d'autres droites *a* et *b* » et pour laquelle on cherche le point *E* sur la courbe *APB* qui la minimise ou la maximise.

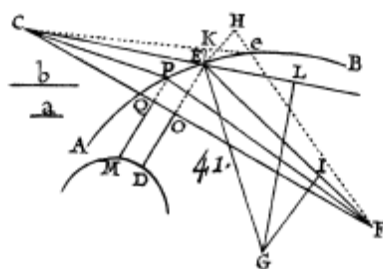


fig. 116

Pour résoudre ce dernier problème, l'Hospital construit une courbe *DM* pour laquelle le point *M* est sur la perpendiculaire *PQM* à *CF* et telle que la longueur *QM* soit égale à la quantité considérée. Il trace *EG* perpendiculaire à *AEB* et depuis l'un de ses points quelconque *G*, il trace les droites *GL* et *GI* respectivement perpendiculaires à *CE* et *EF*. Par *e*, point infiniment proche de *E*, il trace les droites *Ce* et *Fe*. *K*, respectivement *H*, est l'intersection du cercle de centre *C* et de rayon *CF*, respectivement de centre *F* et de rayon *FE*. Ainsi *Ke*, respectivement *He*, est la différence de *CP* et *PZ* (au signe près). En utilisant qu'au point *E* la différence de la quantité doit être nulle ou égale à l'infini, il déduit que *dz* doit être de signe opposé à *du*. Les triangles *ELG* et *EKe* et les triangles *EIG* et *EHe* sont semblables entre eux² donc :

$$\frac{GL}{GI} = \frac{Ke}{He} = \frac{du}{-dz}$$

Le lemme 2^e est l'équivalent du lemme 1^{er} pour un polygone à trois côtés : il s'agit de minimiser le temps de parcours du polygone *AEEHBB* sachant

¹ *AI*, art. 56, section III, *op. cit.*, p. 47. Le problème du voyageur présenté à la suite est un cas particulier de ce cas, *AI*, section III, exemple XI, p. 49-51.

² L'Hospital considère que les angles *GEE* et *LEK* sont droits : en leur ôtant l'angle *LEe*, les restes *LEG* et *KEe* seront égaux

que a , respectivement b et c est la vitesse le long de AE , respectivement EH et HB . Il démontre, en utilisant deux fois le premier lemme que :

$$\frac{\sin(FEA)}{a} = \frac{\sin(DHE)}{b} = \frac{\sin(CBH)}{c}$$

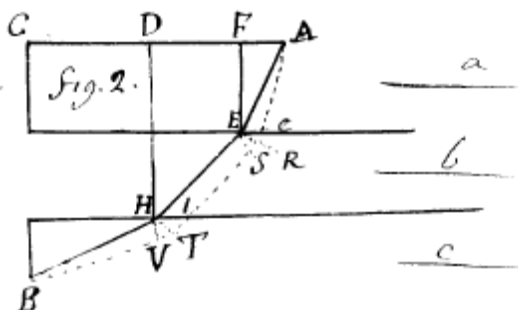


fig. 117

Ayant démontré la relation précédente pour trois côtés, l'Hospital affirme qu'elle peut être établie pour un polygone à quatre côtés mais « qu'il est visible que cela sera toujours vrai tel que puisse être le nombre de côtés du polygone qui joint A , et B , de telle grandeur qu'ils puissent être »¹. Ainsi, le problème de la brachystochrone consiste à trouver une courbe dont les sinus des angles des tangentes (côtés du polygone) sont comme les vitesses acquises aux points de tangence. Le reste de la lecture donnée à l'Académie consiste à démontrer qu'une cycloïde vérifie cette propriété mais il n'y est pas prouvé que celle-ci est la seule courbe solution. La cycloïde considérée est celle de base AC , d'origine A , et telle que le diamètre AM du cercle générateur ATM passe par le point B . Pour vérifier qu'elle est bien une solution, l'Hospital la considère comme un polygone d'une infinité de côtés. Il rappelle le résultat qu'il juge connu de la cycloïde, à savoir que la corde MQ est parallèle à la tangente AE en E . Il peut donc appliquer cette propriété à chacun des petits côtés HE, LH, BL, \dots Il en déduit que les angles $FEA, DHE, GLH, CBL, \dots$ sont respectivement égaux à $AMQ, AMR, AMS, AMT, \dots$ Comme :

$$\sin(AMQ) = \frac{AQ}{AM} \text{ et que } AQ = \sqrt{AM \cdot AP}$$

En prenant AM pour sinus total, il en déduit que les sinus de ces angles sont comme $\sqrt{AP}, \sqrt{AO}, \sqrt{AK}, \dots$

¹ *Ibid*, fol. 94V.

Par ailleurs, selon Galilée, les vitesses acquises aux points E, H, L, B, \dots sont en même raison que $\sqrt{AP}, \sqrt{AO}, \sqrt{AK}, \dots$ Or, comme les côtés sont infiniment petits, il s'autorise à considérer que chacun d'eux est parcouru par un mouvement uniforme. Cette cycloïde vérifie donc bien les conditions du corollaire précédent.

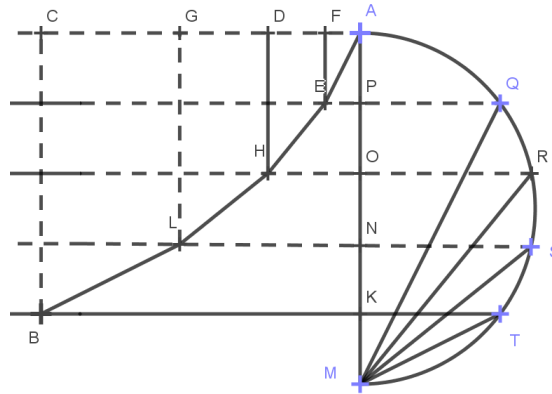


fig. 118

La figure telle qu'elle apparaît dans les registres des procès-verbaux est erronée¹ : les points A, E, H, L et B sont alignés, ce qui contredit la caractéristique tangentielle de la cycloïde. Du Hamel, secrétaire, témoignerait encore de certaines incompréhensions mathématiques.

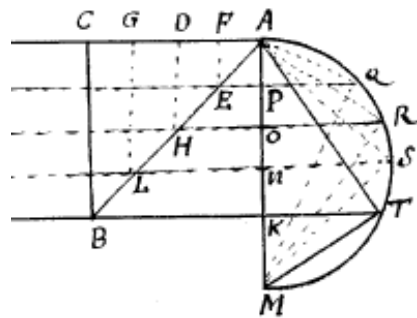


fig. 119

Nous pouvons remarquer que dans cette démonstration, bien qu'il se réfère à son traité *AI*, l'Hospital n'utilise pas le calcul leibnizien dans aucune des étapes. Certes, les suppositions de l'analyse des infinis sont présentes, sans forcément d'ailleurs être toujours clairement explicitées. Or, nous savons que l'Hospital possédait une autre démonstration, celle qui avait été critiquée par Jean Bernoulli. Celle-ci s'appuie sur

¹ *Ibid*, fol. 95R.

des développements calculatoires et use fortement de la symbolique leibnizienne. Sans une validation ferme de cette démonstration par Jean Bernoulli, il est donc possible que l'Hospital n'ait pas voulu la présenter à ses pairs. Cependant, il est en tout à fait significatif qu'il choisit de présenter une démonstration pour laquelle le calcul leibnizien est complètement absent mais dans laquelle il utilise des suppositions communes à l'AI et aux méthodes infinitésimales.

Une victoire pour l'Analyse des infiniment petits

Dans une lettre du 15 mai 1697, Varignon explique à Jean Bernoulli les difficultés qu'il a rencontrées dans ses recherches pour la brachystochrone. Il a d'abord cherché à minimiser l'intégrale $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ mais il s'avoue vaincu : « je bronchay, & je laissay tout là ». Il explique que longtemps après il a appris par le Marquis de l'Hospital que :

Le géométrique de ce problème consistoit à trouver une courbe dont le sinus des angles des tangentes avec les verticales fussent entre eux comme les vitesses acquises aux points d'attouchement¹.

Nous ne savons pas si l'Hospital fournit cette information à Varignon avant ou après avoir reçu les solutions de Jean Bernoulli, dont l'une s'appuie sur ce résultat. Jean Bernoulli est persuadé que l'Hospital la tient de lui et le signale à Varignon dans sa lettre de réponse du 27 juillet 1697 :

Je ne m'étonne pas que vous l'ayez appris de luy longtemps aprez, car il ne sçavoit pas plutôt luy meme, mais je m'étonne qu'il ne vous ait pas dit que c'est moy qui le lui ay communiqué².

La règle des sinus apparaît aussi dans la 46^e leçon de calcul intégral de Jean Bernoulli appliquée à l'étude de la courbure d'un rayon lumineux³. Cependant, si la démonstration du mathématicien bâlois s'appuie bien sur ce résultat, elle est fondamentalement réglée sur une analogie avec la dioptrique. Pour l'Hospital, la règle

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 110.

² Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 27 juillet 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 116.

³ Bernoulli, Jean, *Opera*, t. III, *op. cit.*, leçon 46, « De curvitate radii solaris vel visivi, per medium inequaliter densum transeuntis », « Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate », *op. cit.*, p. 516-518.

est « dégagée de toute analogie avec la dioptrique et mis en œuvre comme une condition géométrique abstraite »¹. De plus, nous avons vu *supra* que dans l'article 52 de l'AI, l'Hospital généralisait ce problème de *minima* et obtenait une relation entre des sinus également générale. Ceci témoigne de sa part d'une appropriation autonome de la portée de cette règle prolongeant certes l'enseignement et l'échange avec Jean Bernoulli.

Ainsi bien que le Marquis se soit inspiré de son professeur, son mémoire académique témoigne d'une élaboration originale. Par son défi, Jean Bernoulli a pour dessein de mettre à l'épreuve les géomètres européens. Il est convaincu de la supériorité de l'analyse des infinis et de son exclusivité pour traiter le problème de la brachystochrone. La démarche de l'Hospital consiste tout d'abord à actualiser ce défi au sein de l'Académie : il informe ses pairs que ce problème doit être parmi les préoccupations scientifiques des académiciens, tout en étant persuadé que seul le calcul leibnizien pourra le résoudre. Ainsi, sa tactique consiste à réduire les membres de la Compagnie à leur incapacité à résoudre le problème de la brachystochrone, ce qui a pour effet la reconnaissance de l'analyse des infinis. L'épisode de ce défi ajoute un argument supplémentaire pour l'utilisation du calcul leibnizien. Seul académicien en 1697 à maîtriser le calcul différentiel, il est aussi le seul à surmonter le défi. Varignon et Sauveur ont échoué, mais pas seulement : la Hire a aussi tenté de trouver une solution mais il s'est trompé en proposant une parabole cubique pour la brachystochrone². Malheureusement, il n'existe aucune trace écrite d'une lecture par la Hire concernant cette proposition dans les registres des procès-verbaux de l'Académie. Nous ne pouvons donc pas savoir s'il use ou pas de méthodes infinitistes. Dans une lettre adressée à Varignon, Jean Bernoulli explique qu'une de ses trois démonstrations qu'il a envoyée à l'Hospital est à « à la manière des anciens » puis commente que celle-ci « pourra servir à convaincre Mr. de la Hire qui ne prenant point de goût à notre nouvelle analyse et la decriant comme fautive pretend avoir trouvé par 3 voyes differentes que la courbe cherchée étoit une parabole cubicale »³.

¹ Voir le paragraphe : « La question de l'indépendance de la démarche de l'Hospital », Jeanne Peiffer, « Le problème de la brachystochrone », *op. cit.*, p. 80. Nous partageons totalement cet avis.

² Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 3 juin 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 349.

³ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 27 juillet 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 118.

Dans une lettre adressée à Jean Bernoulli le 6 août 1697¹, Varignon rend compte de son désarroi à l'Académie :

M. le Marquis de l'hospital est encore à la campagne, de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay des-ja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les Jeunes gens les attrapent & même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour le décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre.

Varignon n'indique pas les noms de ceux qu'il nomme « mathématiciens du vieux stile » mais il s'agit probablement des académiciens la Hire, Galloys et de Michel Rolle, algébriste que nous considérerons plus loin. Il souligne que ces derniers ne veulent apparemment pas laisser de trace écrite de leurs critiques contre le calcul des infiniment petits. Ne sont-ils pas sûrs des arguments à son encontre ? Quoiqu'il en soit la résolution hospitalienne du problème de la brachystochrone marque sans aucun doute une victoire pour le calcul au sein de l'Académie, ce que confirme Varignon dans la suite de la précédente citation :

Il est pourtant vray que depuis la solution que M. le Marquis de l'hospital a donnée de votre problème de *linea celerrimi descensus*, ils ne parlent plus tant ny si haut qu'auparavant.

4.2) Varignon : généraliser des problèmes mécaniques à l'aide du calcul leibnizien

La recherche de la « formule générale » de l'isochrone

Varignon a peu appliqué le calcul leibnizien pour résoudre des problèmes de physique. Certes, le 30 juillet 1695² il a lu une résolution originale du problème de l'isochrone tel qu'il est posé par Leibniz, mais cet exemple reste isolé. Entre 1696 et 1698, nous avons vu qu'il rivalise avec la Hire dans le traitement de l'isochronisme de la cycloïde par des méthodes infinitistes.

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 6 août 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 124.

² Voir chapitre 4, §4.2) « La première confrontation au calcul de Leibniz et les premiers mémoires ».

Varignon reconnaît volontiers que ses connaissances et son aisance en calcul leibnizien sont limitées. Par exemple, lorsqu'il ne parvient pas à résoudre le problème de la brachystochrone tel qu'il avait été reformulé par Jean Bernoulli, il ne cache pas à ce dernier ses difficultés liées au calcul intégral.

Ainsi, il n'a pas encore tiré profit des atouts du calcul leibnizien à la hauteur de son ambition, c'est-à-dire pour l'appliquer à la mécanique alors que celle-ci est sans aucun doute l'un de ses intérêts scientifiques principaux.

Le 15 mai 1697 il fait part à Jean Bernoulli d'une de ses dernières recherches, il voudrait généraliser le résultat hugonien de l'isochronisme de la cycloïde :

Je m'avisay, il a quelques jours, de chercher en général ce que M. Huguens a trouvé des tems égaux dans la Cycloïde, c'est-à-dire une courbe AMB telle que de quelque hauteur A ou M qu'un corps tombe le long de AMB ou de MB , il arrive toujours en B en tems égaux, suivant quelque puissance m des hauteurs que l'accélération des chutes se fasse¹.

Il affirme qu'en appelant $BO = x$ les abscisses verticales et $OM = y$ les ordonnées horizontales, la courbe cherchée vérifie l'équation différentielle $dy = \frac{dx\sqrt{x^{2m-2}-a^{2m-2}}}{a^{m-1}}$ sans donner plus d'explications². En prenant $m = \frac{1}{2}$, il retrouve la cycloïde puis il considère aussi les cas $m = \frac{3}{2}$ et $m = 2$ pour lesquels il trouve comme solution respectivement une seconde parabole cubique et une courbe mécanique dont la construction dépend de la quadrature de l'hyperbole. Cependant, ces résultats lui paraissent paradoxaux : la courbe AMB est la réunion d'une courbe AMD et d'une droite DB . Selon son analyse, le corps tombant de A , ou de M , ou de D , doit arriver en B en temps égaux. Or cela lui semble impossible car le temps mis par le corps pour tomber de M en B par MDB est supérieur à celui mis par la droite MG , qui est lui-même supérieur à celui mis par la droite DB , ce qui est absurde.

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 15 mai 1697, *op. cit.*

² Nous ne savons pas comment il obtient cette équation. Cependant, comme Pierre Costabel le remarque, Varignon ne pose pas correctement le problème, note 1, lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 26 août 1697, *op. cit.*, p. 125.

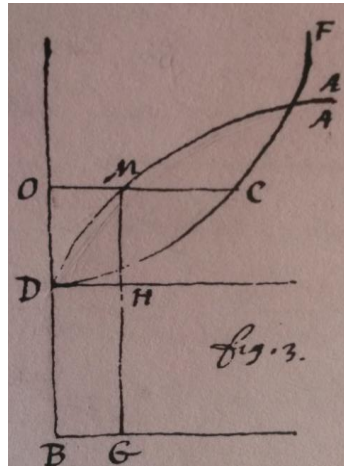


fig. 120

Il sollicite Jean Bernoulli pour l'aider à lever ce paradoxe. Cette discussion fait l'objet de plusieurs lettres échangées entre les deux savants sur une période allant du 15 mai 1697 au 18 février 1698. Remarquons que Jean Bernoulli appelle « tautochrones » ce que Varignon continue à appeler « isochrones ». Le savant suisse ne remet pas en question la validité de l'équation différentielle proposée par Varignon, mais pour lever le paradoxe il explique que le mouvement est impossible lorsque $m \geq 1$, car les temps de chute sont « actuellement infinis »¹.

Ces échanges conduisent Varignon à l'écriture d'un mémoire intitulé « Manière générale de trouver les courbes isochrones pour toutes les hypothèses imaginables d'accélération dans les corps qui tombent »² qu'il lit le 4 janvier 1698 à l'Académie. Dans ce mémoire, il affirme à nouveau que l'équation différentielle de l'isochrone est $dy = \frac{dx\sqrt{x^{2m-2}-a^{2m-2}}}{a^{m-1}}$. Il traite le cas où $m = \frac{1}{2}$ (cycloïde) et aussi celui où $m = \frac{3}{2}$, mais il affirme que lorsque $m \geq 1$ le mouvement est impossible³.

¹ Nous ne rentrons pas dans le détail de cette discussion même si elle rend compte entre autres de difficultés rencontrées lorsque le signe moins apparaît dans les intégrales.

Jean Bernoulli explique que le temps de parcours le long d'une portion OM de courbe est supérieur à celui d'un segment de droite OD vertical correspondant. Or pour ce dernier la différentielle du temps est $\frac{dx}{x^m}$ si x^m est la vitesse acquise et dans le cas où $m \geq 1$, l'intégrale est infinie.

² « Manière générale de trouver les courbes isochrones pour toutes les hypothèses imaginables d'accélération dans les corps qui tombent », *PVARIS*, t. 17, fol. 64V-68R.

³ *Ibid*, 67R. Il reprend les arguments de Jean Bernoulli : « il est aisé de s'en convaincre par le seul examen de leurs chutes en ligne droite ».

Il explique que ses recherches l'ont conduit à considérer un cas plus général que celui des accélérations proportionnelles aux puissances des hauteurs puisque celui-ci :

n'estoit que les règles que sur des ordonnées de paraboles dont ces hauteurs seroient des abscisses ; ce qui tout infini qu'il est, n'est pourtant qu'un cas des ordonnées réglées sur les ordonnées de toutes sortes de courbes.

Il envisage donc de considérer de façon générale une courbe dont les abscisses exprimeraient les hauteurs de chutes et les ordonnées les vitesses acquises à la fin de ces hauteurs. Il considère que a et b sont des grandeurs constantes et note par z l'ordonnée de la courbe des vitesses. Dans ces conditions, il affirme que la « formule infiniment générale des courbes Isochrones » est :

$$\frac{b}{a} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Il promet de fournir à une autre occasion une preuve de cette formule accompagnée d'exemples autres que ceux pour lesquels la vitesse z s'exprime par une puissance de la hauteur x .

Les « fonctions » du calcul leibnizien

En mai 1693¹, Jean Bernoulli pose le problème de trouver une ligne courbe CMM dont la propriété est que chacune de ses tangentes MT est toujours à la partie CT de l'axe prise entre son origine C et la rencontre T de la touchante en raison donnée de p à q . Il demande la nature de cette courbe, ou la manière de la décrire. Autrement dit, il s'agit de trouver une courbe sachant que le rapport de la tangente et la sous-tangente est constant.

Grâce au calcul différentiel l'Hospital résout ce problème en mars 1694 et publie sa solution au *Journal des Sçavants*². Dans un article paru au même journal le 30 août 1694 et intitulé « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, & le

¹ Bernoulli, Jean, « Solutio problematis cartesio propositi Dn. De Beaune exhibita a John. Bernoulli Basilensi », *AE*, mai 1693, p. 235. Ce problème est un cas plus général que le célèbre problème de De Beaune.

² L'Hospital fournit une solution partielle qui est publiée au *Journal des savants* le 19 mars 1694 puis dans les *Acta* en mai 1694, *JS*, 19 mars 1694, p. 145-150 et aux *AE*, mai 1694, p. 193-194. Ce problème a été l'objet d'un échange épistolaire entre les deux savants, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, band 1, op. cit.*, p. 516, sous l'appellation P_{37} .

nouveau calcul des transcendentes par M. Leibnits »¹, Leibniz s'appuie sur la réussite de l'Hospital pour revendiquer encore une fois que le propre du calcul différentiel est de traiter ce genre de problème et il remarque qu'il relève d'un type de problème encore plus général. Pour justifier cette assertion il introduit le terme « fonction » :

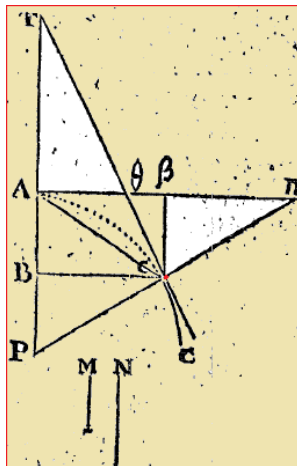


fig. 121

Pour ce qui est de ceux qui ne servent que de l'analyse ordinaire ; & pensent peut-être qu'elle leur suffit, il sera bon de proposer des problèmes semblables au dernier de M. Bernoulli.

En voici un plus général, qui le comprend avec une infinité d'autres. Soit donnée la raison de M à N , entre deux fonctions quelconques de la ligne ACC : Trouver la ligne. J'appelle *fonctions* toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe ; & aux points de la courbe ; comme sont AB ou $A\beta$ abscisse, BC ou βC ordonnée, AC corde, CT ou $C\theta$ tangente, CP ou $C\pi$ perpendiculaire, BT ou $\beta\theta$ sous-tangente, BP ou $\beta\pi$ sous-perpendiculaire, AT ou $A\theta$ *resecta*, ou retranchée par la tangente, AP ou $A\pi$ retranchée par la perpendiculaire ; $T\theta$ & $P\pi$ sous retranchées, sub-resectae à tangente vel perpendiculi ; TP ou $\theta\pi$ corresecta. Et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on se peut figurer².

Leibniz a introduit le mot « fonction » dans le vocabulaire mathématique à d'autres occasions³, les « fonctions » leibniziennes sont définies géométriquement. Ici

¹ *Journal des Sçavants*, 30 août 1694, p. 404-406.

² *Ibid*, p. 405.

³ Marc Parmentier remarque que ce terme apparaît pour la première fois dans un manuscrit d'août 1673, *Naissance du calcul différentiel*, *op. cit.*, p. 219, il désigne les différents segments engendrés par les tangentes et les normales à une courbe. En commentant le problème de Jean Bernoulli, Leibniz utilise identiquement le terme « fonction » dans la lettre adressée Huygens le 9 juillet 1694, *OH*, *op. cit.*, t. X, p. 650. Il l'utilise publiquement pour la première fois dans son article « Construction à partir d'une infinité

la relation envisagée entre les « fonctions » est celle d'un rapport constant entre des « portions de lignes droites », en langage moderne il s'agit d'une équation différentielle de premier degré. Dans ce dernier cas, Leibniz assure que le *calculus differentialis* peut « toujours résoudre » ce type de problème, c'est-à-dire qu'il permet de construire la ligne cherchée au moyen, dans le plus compliqué des cas, de quadratures ou de rectifications.

Varignon a montré un intérêt particulier pour cet article d'août 1694 puisqu'il le recopie intégralement pour l'envoyer à Jean Bernoulli quelques jours après sa parution : « je vas vous régaler d'un problème que pose Mr. Leibnitz dans le Journal des Sçavants du Lundy 30 Aoust 1694, & qui vous regarde »¹.

De quelle manière Varignon s'approprie-t-il des idées contenues dans ce mémoire ?

Six mois environ après sa tentative de généralisation de l'isochrone le 4 janvier 1698, il présente le 5 juillet et le 6 septembre 1698 deux mémoires décisifs pour la suite de ses recherches. Ils témoignent d'une avancée notable dans son travail d'assimilation du calcul leibnizien.

Lors de la séance académique du 5 juillet 1698, Varignon lit un mémoire intitulé « Règle générales des vitesses variées, comme on voudra, aux mouvemens de vitesses quelconques variées à discrétion »². Ce mémoire a pour objet de donner une expression générale de la vitesse afin de permettre le traitement de tous les mouvements, dans le cas de trajectoires rectilignes, le mémoire du 6 septembre³ se focalise sur le cas plus général des mouvements curvilignes. Dans le mémoire du 5 juillet, il annonce que son dessein est de fournir une règle permettant de fournir la vitesse, le temps ou la distance parcourue connaissant une relation entre deux des trois. Pour ce faire il considère trois courbes qu'il décrit ainsi : $AB = x$ sont les espaces parcourus, $BE = z$ les temps employés pour les parcourir et $BC = y = DF$

de courbes ordonnées et concourantes, de la courbe tangente à chacune d'elles ; nouvelle application pour ce faire de l'analyse des infinis, *AE*, avril 1692, *op. cit.*

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli, le 4 septembre 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 71-72.

² Varignon, Pierre, « Règle générale pour toutes sortes de mouvement de vitesses quelconques variées à discrétion », 5 juillet 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 297V-302R.

³ Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des vitesses variées, comme on voudra aux mouvements par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où « on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée », 6 septembre 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 387R-391V.

les vitesses à chaque point B de ces espaces. La courbe EE exprime les espaces par ses abscisses AB , et les temps BE employés à les parcourir, par ses ordonnées, la courbe CC exprime les espaces parcourus AB et les vitesses AC à chaque point B de ces espaces, enfin la courbe FF exprime les par ses ordonnées FD les vitesses « comparées » au temps BE ou AD . Comme pour son mémoire du mois de janvier, Varignon considère la courbe des espaces parcourus et celle des vitesses mais ajoute celle du temps. Chacune de ces trois variables peuvent s'exprimer l'une par rapport à l'autre grâce à la donnée de l'une des courbes.

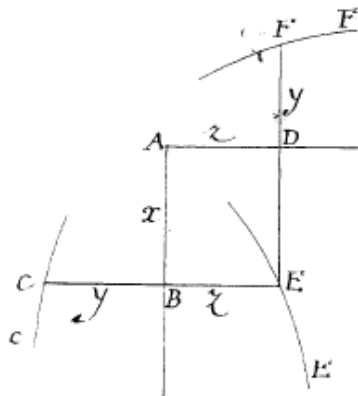
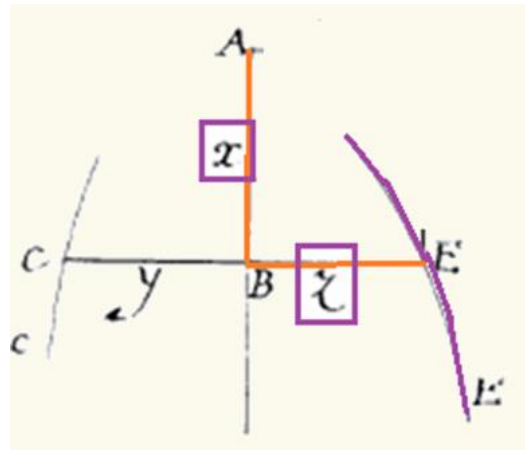


fig. 122



Les segments AB, BE, DF et BC ne sont pas ici des « fonctions » au sens employé par Leibniz dans l'article *supra* puisque pour celui-ci les « fonctions » sont déterminées pour une seule courbe. Cependant, Varignon généralise la situation dans laquelle le terme « fonction » apparaissait mais sans utiliser ce terme. En établissant une « règle générale » entre ces segments, il parvient à mettre en relation les « fonctions » de chacune des courbes entre elles.

Pour énoncer la « règle générale », il introduit les notations différentielles et définit :

Les instants seront dz , l'espace parcouru à chaque instant, sera dx , et la vitesse avec laquelle dx aura été parcouru sera y .

De sorte que cette vitesse y , dans chaque instant, pouvant être regardée comme uniforme, à cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$.

Dans ces conditions, Varignon énonce sa :

« Règle générale des vitesses, Des temps, Des Espaces ... $y = \frac{dx}{dz}$, ou $dz = \frac{dx}{y}$, ou $dx = ydz$.

Quelles que soient presentement la vitesse d'un corps (accélérée, retardée, ou un mouvement variée comme on voudra), L'espace parcouru, et le temps employé à le parcourir ; deux de ses trois choses étant données a discretion, il sera toujours facile de trouver le troisième par le moyen de cette règle, même dans les variations de vitesse les plus bizarres qui se puissent imaginer¹.

Remarquons que Varignon rend possible la formulation de sa règle en supposant que la vitesse puisse être considérée comme uniforme pendant l'instant dz . Il l'illustre immédiatement de plusieurs exemples. Les trois premiers considèrent tous le cas d'une relation parabolique entre deux des trois expressions x , y ou z .

Dans le premier exemple, il est supposé que les espaces parcourus suivent les puissances m des temps z , de sorte que la courbe EE est une parabole d'équation $x = z^m$. Il trouve ainsi la courbe CC qui exprime la vitesse y correspondante $y = mz^{m-1}$ ou $y = mx^{\frac{m-1}{m}}$. Ici, il distingue parmi les différentes valeurs de m celle pour laquelle $m = 2$, c'est-à-dire celle qui correspond à l'hypothèse de Galilée selon laquelle la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps de parcours. Dans ce cas il trouve que $y = 2z$ et $x = \frac{y^2}{4}$, c'est-à-dire « les vitesses comme les temps », et « les espaces comme les quarrés des vitesses ».

Le deuxième exemple examine le cas de l'équation $x = y^m$ puis le troisième de $y = z^m$. Dans chacun des cas, Varignon retrouve les résultats qu'il avait établis dans un mémoire de 1693 et interprète « l'hypothèse de Galilée » comme un cas particulier². Cependant, bien qu'il ait supposé une relation parabolique entre deux des expressions, il avertit qu'il est possible de supposer « tout autre égalité »³, « géométrique ou mécanique », comme en témoignent les deux derniers exemples⁴.

Si dans ce mémoire Varignon ne rend pas hommage explicitement au calcul leibnizien alors qu'il est l'ingrédient incontournable pour la formulation de sa règle

¹ *Ibid*, 299V.

² «Avertissement. Dans les trois exemples précédents qui répondent aux trois expressions de la règle cy-dessus (...) je n'y ay employé que deux suppositions de paraboles, à cause qu'elles sont les plus simples, qu'elles donnent encore toust ce que j'ay dit de ces sortes dans les mémoires de l'Académie de 1693. Et que l'hypothèse de Galilée (que j'ay principalement en vue) en fait un cas. », *Ibid*, p. 303V.

³ *Ibid*.

⁴Exemple quatre : « $y = \sqrt{2ax - xx}$ » et exemple 5 : « $dz = \frac{dx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ».

générale, il est indéniable que sa présentation rend compte des possibilités de généralité auxquelles conduit le processus calculatoire. Soulignons enfin que la figure initiale est oubliée au profit du développement calculatoire¹.

Sa volonté généralisatrice ne s'arrête pas là : pendant la séance académique du 6 septembre 1698, il lit un mémoire dans lequel les résultats obtenus dans le mémoire du 5 juillet sont prolongés au cas des trajectoires curvilignes.

Si l'on au lieu de AB le corps se meut de même vitesse correspondante de AK (parallèle aux ordonnées) en G le long d'une courbe quelconque GG , dont les ordonnées sont $BG = v$, pendant des temps exprimés par les ordonnées $BH = s$ d'une autre courbe quelconque encore HH ; il suit de même que l'on aura toujours $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dv^2}}{y}$, (...), dz se changeant icy en ds , et dx en $\sqrt{dx^2 + dv^2}$.

Dans ce cas, Varignon suppose non pas que la vitesse est uniforme dans l'instant dz pendant le parcours rectiligne dx mais qu'elle l'est pendant le parcours d'un arc infiniment petit, qu'il assimile à un segment.

Dans ce mémoire, l'isochronisme de la cycloïde renversée fait l'objet d'un des exemples d'application. Il considère que la courbe CC des vitesses y acquises à la fin de la chute de A en B , est une parabole d'équation $ax = yy$ « à la manière de Galilée » et que la trajectoire est une cycloïde renversée de sommet N , d'axe vertical MN , de cercle générateur MON . Pour trouver le temps employé à tomber le long de KG , il pose $AN = b$, $MN = 2c$, $AB = x$, $BN = b - x = t$.

De plus,

$$NO = \sqrt{t^2 + t(2c - t)} = \sqrt{2ct}.$$

Puis, comme les triangles NOB et NOs sont semblables, on a : $\frac{Oo}{d(NO)} = \frac{NO}{OB}$.

Comme :

¹ Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique, op. cit.*, p. 161 : (...) la figure, essentielle pour le développement et l'organisation de la pensée géométrico-infinitésimale, devient progressivement avec Varignon simple diagramme. » Si nous pensons que cette affirmation est trop radicale, il nous semble que la figure chez Varignon n'a pas le même rôle que chez l'Hospital.

² Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des vitesses variées, comme on voudra aux mouvemens partoutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où l'on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée », 6 septembre 1698, PVARs, t. 17, fol. 387R.

$$d(NO) = \frac{cdt}{\sqrt{2ct-tt}}$$

on a $Oo = \frac{\frac{cdt}{\sqrt{2ct}} \times \sqrt{2ct}}{\sqrt{2ct-tt}} = \frac{cdt}{\sqrt{2ct-tt}}$

puis

$$NO = \int \frac{cdt}{\sqrt{2ct-tt}}$$

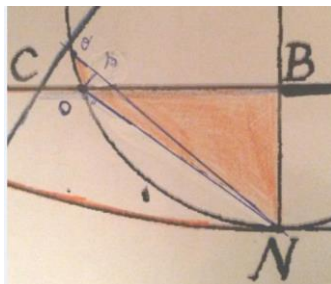


fig. 123

Par ailleurs,

$$OB = \sqrt{2ct - tt} \text{ et } NO = \int \frac{cdt}{\sqrt{2ct-tt}}, BG = v = \sqrt{2ct - tt} + \int \frac{cdt}{\sqrt{2ct-tt}}$$

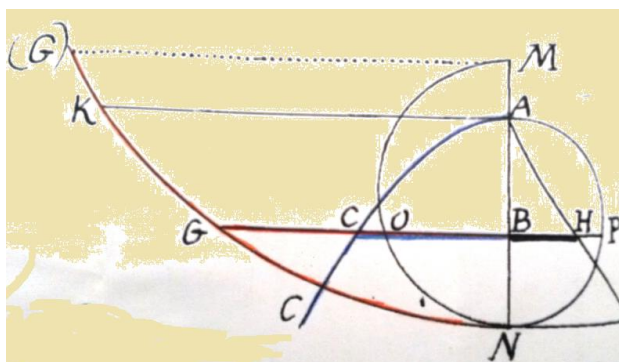


fig. 124

d'où :

$$dv = \frac{2cdt - tdt}{\sqrt{2ct-tt}} \text{ soit } dv^2 = \frac{2c-t}{t} dt^2 = \frac{2c-b+x}{b-x} dx^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} ds &= \frac{a}{y} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a}{y} \sqrt{dx^2 + \frac{ac-b+x}{b-x} dx^2} = \frac{adx}{y} \sqrt{\frac{2c}{b-x}} = \frac{adx}{\sqrt{ax}} \sqrt{\frac{2c}{b-x}} \\ &= dx \sqrt{\frac{2aac}{abx - axx}} \end{aligned}$$

ou encore :

$$ds = \sqrt{2ac} \frac{dx}{\sqrt{bx - xx}}$$

soit :

$$ds = \frac{2\sqrt{2ac}}{b} \frac{bdx}{2\sqrt{bx - xx}}$$

d'où :

$$s = BH = \frac{2\sqrt{2ac}}{b} \int \frac{bdx}{2\sqrt{bx - xx}} = \sqrt{8ac} \frac{\text{arc}AP}{AN}$$

Ce qui fournit la courbe *AHH* dont les ordonnées *BH* expriment les temps pour parcourir *KG*. Il s'ensuit que le temps de la chute entière le long de *KN* est donc égal à $\sqrt{8ac} \frac{APN}{AN}$ ce qui est « constant et toujours le même, quelque soit ce point *K* de la cycloïde *GKN* »¹.

Démontrer l'isochronisme de la cycloïde renversée suscitait, comme on l'a vu, l'intérêt à l'Académie depuis au moins un an. En se référant au traité *Horologium oscillatorium* de Christiaan Huygens², Varignon indiquait en juin 1698 que ses démonstrations étaient « plus courtes et des plus simples qui ayent paru Jusqu'icy »³. Dans ces mémoires, pour démontrer le résultat d'isochronisme de la cycloïde, Varignon s'appuyait sur la figure pour considérer des partitions indéfinies de courbe sur lesquelles il raisonnait. Certes, l'absence de calcul différentiel ne les rend pas plus longues. En revanche, le rôle accordé à la figure est plus important que dans cette dernière démonstration du 6 septembre 1698. Dans celle-ci, le calcul du temps de chute le long de la cycloïde se traite comme un cas particulier, par une méthode générale. Celle-ci ne s'appuie plus sur la considération de la figure géométrique mais quasiment sur l'expression analytique de la cycloïde. Le 4 janvier 1698, Varignon finissait son mémoire en promettant de démontrer sa formule « $\frac{b}{a} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ». Cette promesse ne sera pas honorée dans ce mémoire, ni dans aucun autre à notre connaissance. Cependant, presque un an plus tard, lors de la séance académique du 24 janvier 1699⁴, Varignon rappelle qu'il avait fourni la formule générale pour toutes les courbes isochrones quelle que soit l'hypothèse de variation de vitesse. Ce mémoire lui

¹ *Ibid*, fol. 389R.

² Lettre de Pierre Varignon à Jean Bernoulli du 19 juillet 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band, 2, *op. cit.*, p. 40-41.

³ *PVAR*S, tome 16, fol. 151R.

⁴ Varignon, Pierre, « Méthode pour trouver des courbes lelong des quelles un corps tombant, les temps de chute soient en telle raison qu'on voudra à ce qu'on voudra à ce qu'un corps mettrait à tomber de pareille hauteur », 24 janvier 1699, *PVAR*S, t. 18, fol. 105V-106R.

inspire un autre problème : « Cette comparaison des temps des chutes le long d'une même courbe m'a fait penser à les comparer aussi le long de courbes différentes ». Il voudrait résoudre le problème général suivant :

Une courbe quelconque ABC étant donnée, en trouver une autre AEF le long de laquelle un corps tombant de quelque hauteur Q que ce soit, et selon l'hypothèse d'accélération ou de variation de vitesses qu'on voudra, le temps qu'il mettra à arriver en A , soit en raison donnée quelconque à ce qu'il mettrait à y arriver en tombant de pareille hauteur P le long de CBA selon telle autre hypothèse d'accélération ou de variation de vitesse qu'on voudra encore, par exemple de m à n .

Il n'est pas nécessaire de développer cet exemple, la seule lecture de l'énoncé du problème qu'envisage Varignon indique qu'il a expérimenté suffisamment les atouts du calcul leibnizien pour reconnaître ses possibilités de généralisation, en particulier pour des questions personnelles en mécanique.

Au cours des années suivantes, Varignon lit de nombreux mémoires utilisant le calcul leibnizien, la proportion de ceux qui portent sur la mécanique par rapport à ceux de géométrie est de plus de trois sur quatre.

6) Les méthodes algébriques et les courbes : le dessein de Rolle

Michel Rolle, académicien

Michel Rolle est né le 21 avril 1652 à Ambert. Issu de milieu modeste, il reçoit dans sa jeunesse un enseignement élémentaire qu'il complète abondamment tout au long de sa vie de manière autodidacte. À partir de 1675, il s'installe à Paris et travaille comme clerc chez un notaire mais consacre également du temps pour apprendre l'arithmétique de Diophante et l'Algèbre. En 1682, il résout et publie¹ au *Journal des Sçavants* la solution d'un problème d'arithmétique posé par Ozanam. En remportant ce succès il est repéré par Colbert qui obtient pour lui une pension lui assurant une certaine sécurité financière. Le Marquis de Louvois le choisit comme tuteur de ses enfants. Remarquant ses qualités, il joue de ses influences pour lui obtenir en 1685 un poste d'élève astronome à l'Académie royale des sciences trois ans avant Varignon. Alors que ses origines ne le destinaient pas à devenir membre du milieu savant, Rolle parvient à se frayer ainsi une des places les plus reconnues de l'institution. Ces

¹ JS, 31 août 1682, p.

conditions favorables lui permettent de se destiner exclusivement à ses recherches en Algèbre. Une de ses principales contributions est son *Traité d'Algèbre* qu'il publie en 1690¹. Dans le second livre de ce traité il expose une méthode originale pour trouver les racines exactes ou approchées d'une équation polynomiale qu'il dénomme « méthode des cascades »². Leibniz est toujours curieux des travaux académiques et il prie ses interlocuteurs français de lui transmettre tout ce qui serait nouveau et digne d'intérêt. En 1695, il ignore les travaux de Rolle et l'Hospital lui apprend l'existence de cette méthode³ : « Il y a longtemps que la méthode des cascades ou chûtes de M^r Rolle est imprimée dans un *Traité d'algèbre* qu'il a composé, je l'ai prié de faire un extrait de cette méthode ». Rolle répond immédiatement à cette demande en écrivant à l'attention de Leibniz l'explication de sa « méthode des cascades algébriques ». Il y affirme également que « l'infaillibilité de cette méthode » a été démontrée dans un petit volume à part⁴, dans lequel il a ajouté deux autres méthodes, dont l'une permet de résoudre les égalités par la géométrie »⁵. Cependant, dans cet écrit sa méthode n'est illustrée d'aucun exemple contrairement à son traité. Leibniz écrit son insatisfaction à l'Hospital : cette « instruction » ne « l'instruit pas assez, estant sans exemples », il croit « qu'il y a quelque chose de bon là dedans, quoique nous ne manquions pas d'autres Méthodes peutestre plus aisées »⁶. Dans sa réponse l'Hospital est tranchant :

A l'égard de M. Rolle il est vrai qu'il falloit quelques exemples pour eclaircir sa methode. Je pourrai vous en envoyer si vous jugez que la chose en valle la peine, pour ce qui est d'autres methodes qu'il dit qui ont paru en France, il veut parler apparemment de

¹ *Traité d'algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions des Mathématiques*, chez E. Michallet, Paris, 1690.

² Après une transformation du polynôme en un autre ayant des coefficients de signes alternés, Rolle effectue un algorithme (l'équivalent d'une dérivation) pour obtenir des polynômes de degré inférieur dont les racines donneront des encadrements des racines du polynôme original. Pour une description plus détaillée, on pourra consulter Washington, Christopher, « Michel Rolle and his method of cascades », https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf (consulté le 17 août 2018) ou Julius Shain, « The method of cascades », *The American Mathematical monthly*, 44(1) : 24-29, 1937.

³ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 2 mars 1695, 6A, p. 297.

⁴ Il s'agit de *Démonstration d'une méthode, pour résoudre les égalitez de tous les degrez ; suivie de deux autres méthodes dont La première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, Et la seconde, pour résoudre par plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas encore esté résolues*, Paris, Cusson, 1691.

⁵ Rolle répond très rapidement de sorte que l'Hospital peut joindre à cette lettre l'écrit de Rolle, *op. cit.*, p. 299-300.

⁶ Lettre de Leibniz à l'Hospital du 18 mars 1695, *ibid.*, p. 317.

quelque chose qu'il a fait mettre dans les Journaux des sçavants sous le nom de Remi Lochel qui est son nom retourné, je n'ai pas vû ce que c'est, mais je m'informerai de lui, comme il sçait fort peu de geometrie ne s'étant appliqué qu'à l'algèbre et qu'il ignore vos methodes je suis persuadé qu'il n'y a rien là de nouveau qui merite de vous être envoyé¹.

Comme l'Hospital estime que Rolle est peu enclin à la géométrie et qu'il est ignorant du nouveau calcul, il juge que ses travaux présentent peu d'intérêt pour Leibniz. En fait, Leibniz avait déjà lu Rolle mais sous son pseudonyme « Rémi Lochell »², il le juge « un peu énigmatique »³ et il estime que ses travaux sont difficilement applicables. Il est vrai que les principales recherches de Rolle concernent l'algèbre sans qu'il y ait au début une volonté de les appliquer à la géométrie. Sans pour autant le discréditer, l'Hospital n'engage pas à la lecture des écrits de Rolle.

Le passif entre Rolle et l'Hospital-Varignon

En fait, un climat tendu existe entre les deux hommes provenant probablement d'un épisode plus ancien datant de l'année 1693. En effet, le 20 juillet 1693 un « Avis aux géomètres » est publié au *Journal des Sçavants*⁴. Un prix de soixante pistoles est déposé chez un notaire pour le premier qui trouvera la résolution du problème suivant :

Ayant une partie si petite qu'on voudra d'une courbe géométrique, on demande une metode pour résoudre une égalité donnée par le moyen de cette partie, & d'une autre ligne dont le lieu soit le plus simple qu'il sera possible. L'on demande aussi que cette metode paroisse publiquement avant le premier Janvier prochain, & qu'elle ne suppose aucune des regles qui sont de l'invention particuliere de M. Rolle.

Mr. Descartes⁵ a proposé ce problème pour une des trois sections coniques seulement, & on n'en avoit jamais proposé un plus beau pour la resolution des égalitez⁶.

L'auteur de cet avis est soit un élève de Rolle, soit Rolle lui-même. Le 26 juillet 1693, Jean Bernoulli en est informé par une lettre de Varignon, ce dernier juge l'énoncé « pas assez déterminé » car « comment trouver la plus simple courbe qui

¹ Lettre de l'Hospital à Leibniz du 25 avril 1695, *op. cit.*, 6A, p. 343.

² Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de Rémi Lochell, où il donne plusieurs observations pour résoudre les égalitez par nombres, par géométrie, et en termes generaux », *JS*, 16 août 1694.

³ Lettre de Leibniz à l'Hospital du 13 mai 1695, AIII 6A, p. 366.

⁴ *JS*, 20 juillet 1693, p. 336.

⁵ Descartes, René, *La Géométrie*, *op. cit.*, livres III et IV.

⁶ Il s'agit de la méthode des cascades.

combinée avec une portion d'une autre soit capable de résoudre quelque égalité ? »¹ Ce problème fait partie à l'époque des sujets de recherche en algèbre et géométrie. Il s'agit de « construire une égalité », c'est-à-dire de construire la solution d'une équation algébrique en se servant de courbes algébriques « les plus simples possibles »². Descartes est à l'initiative de ce projet et fournit des constructions pour les équations de degré 3 et 4 par intersection d'une parabole et d'un cercle³.

Jean Bernoulli s'intéresse immédiatement à ce problème de construction et à peine un mois après en avoir pris connaissance propose une solution qui est publiée au *Journal des Sçavants* le 31 août 1693⁴ par l'intermédiaire de Varignon et l'Hospital. Cependant, Rolle juge cette solution défailante et il publie ses critiques dans un article dans le même journal⁵. Un mois plus tard, l'Hospital conseille à Jean Bernoulli d'écrire une réponse, dans laquelle il proposerait de soumettre sa résolution au jugement de l'Académie royale « sans nommer personne » : lui et Varignon le serviraient « de la bonne manière »⁶. Jean Bernoulli écrit donc cette réponse, publiée le 18 janvier 1694, en y demandant le jugement des « Messieurs de l'Académie des sciences »⁷. Rolle à son tour répond le 15 février 1694⁸. Il consent à ce que l'on choisisse certains membres de l'Académie pour juger de ce différent mais il souligne, sans nommer personne, qu'il a « des fortes raisons pour en recuser quelques-uns »⁹.

Il n'est pas à propos de juger ici si les critiques de Rolle sont bien fondées ou si Bernoulli a fourni une réponse satisfaisante au problème. Nonobstant soulignons que cette querelle dure presque un an et qu'elle est rendue publique par la publication des

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 26 juillet 1693, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, p. 45.

² Le critère de simplicité n'est pas univoque et est débattu. On pourra lire l'article de Bos, Henk, J.M., « Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: The 'Constructions of Equations', 1637-ca 1750 », *Archive for History of exact Sciences*, 30, 1984, p.331-380

³ Descartes, René, *La Géométrie*, *op. cit.*, p. 389-395.

⁴ Bernoulli, Jean, « Solution d'un problème proposé dans le 28. Journal de cette année, page 336, par M. Bernoulli le Médecin », *JS*, 31 août 1693, p. 405-408.

⁵ Rolle, Michel, « Réponse à M. Bernoulli le Médecin, au sujet d'une méthode, qui a paru sous son nom dans le Journal du 31 août dernier », *JS*, 14 septembre 1693, p. 425-427.

⁶ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 octobre 1693, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, p. 191.

⁷ « mais je déclare que c'est une fois pour toutes, laissant le décision de cette affaire aux personnes intelligentes & désintéressées, & sur tout m'en rapportant au jugement de Messieurs de l'Academie des Sciences », « Réponse de Mr. Bernoulli le Médecin », Jean Bernoulli, *JS*, 18 janvier 1694, p. 32-34.

⁸ Rolle, Michel, « Remarques sur la réponse qui a este insérée sous le nom de M. Bernoulli dans le 3^e journal de cette année, au sujet d'un problème de Geometrie », *JS*, 15 février 1694, p. 77-80.

⁹ *Ibid*, p. 79.

réponses successives des deux mathématiciens. Varignon craint le climat belliqueux que provoque cette polémique et dès la première réponse de Rolle, il assure à Jean Bernoulli de son dévouement : « Voyez ce que vous souhaitez que je fasse : j'attends vos ordres »¹. Après la publication de la réponse de Jean Bernoulli, il le met fermement en garde sur les intentions de Rolle :

C'est peut-être encore pour avoir le tems d'en forger des nouvelles [conditions au problème] que votre adversaire dit qu'il ne donne pas icy toutes les observations qu'il a faites sur votre réponse. Ce qui va sans doute accumuler difficulté sur difficulté, en sorte que quelque réponse que vous fassiez, il luy restera toujours quelque chose à vous demander. (...) Mr. Rolle, qui a sçu (je ne sçais par où) que c'est moy qui ay fait imprimer votre réponse, paroist m'en sçavoir gré, surtout m'ayant questionné plusieurs fois touchant cela, sans en avoir pu rien apprendre².

Bien qu'absent de Paris, l'Hospital suit les événements et partage l'avis de Varignon :

Ainsy cette affaire n'aura jamais de fin ; c'est pourquoy M. le Marquis croit que le plus court seroit de la négliger & de n'en plus parler ; pour moy je vous conseilerois aussy : je feray pourtant tout ce qu'il vous plaira, ordonnez³.

À cette époque, bien que l'Hospital se méfie encore de Varignon, entre autres en raison de ses relations que celui-ci entretient avec l'Abbé de Catelan⁴, il n'hésite pas à s'allier avec Varignon pour défendre Jean Bernoulli contre Rolle. Rolle n'anime donc pas chez ces deux savants un sentiment de sympathie collégiale. Est-ce sa condition roturière qui inspire le dédain de la part du noble et du jésuite ? Les propos de Varignon indiquent surtout qu'il est craint en raison de son caractère querelleur, ce qui est contraire à l'esprit de la République des lettres. Il convient d'examiner comment son comportement induit cette appréciation de la part de ses pairs

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 20 septembre 1693, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 49.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 17 février 1694, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 57.

³ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 15 mars 1694, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 61.

⁴ Le 28 juillet 1694 Varignon indique à Jean Bernoulli qu'il a prêté l'écrit *de motu musculorum* à l'Abbé de Catelan, *ibid.*, p. 68.

académiciens, en particulier de quelle manière il défend les mathématiques sur lesquelles il s'exerce.

Michel Rolle : la certitude de l'algèbre

Comme nous l'avons vu, les travaux de Rolle concernent l'algèbre, en particulier la résolution d'équations qui s'obtiennent soit par des méthodes purement algébriques – sa célèbre méthode des cascades –, soit par des méthodes dans le sillage de *La Géométrie* cartésienne, c'est-à-dire en faisant appel à des courbes et en interprétant une solution comme une intersection entre elles¹. Le 28 mai 1696, Rolle publie sous le pseudonyme RL [Rémi Lochell] une lettre « au sujet de l'algèbre »² :

Si vous examinez le calcul sans faire attention aux différents sujets où il peut servir, vous en pouvez tirer des conséquences, et souvent des règles pour l'abréger. Mais il arrive aussi qu'en examinant le sujet où l'on veut l'appliquer, l'on y trouve des propriétés qui donnent occasion de former des abrégements ; il est avantageux de faire concourir l'une et l'autre examens pour découvrir les voyes les plus courtes & les plus aplanies.

L'algèbre permet « d'opérer sur des règles plus courtes que les méthodes générales ». Il affirme, par exemple, que cette démarche a permis d'améliorer les « questions de *Maximis & Minimis*, & pour la détermination des tangentes »³ :

Ils [plusieurs géomètres] ont observé que pour transformer ces questions en questions d'Algèbre, il s'agissoit de faire évanouir les inconnues qui sont communes à certaines égalitez : Ce qui se peut toujours faire par l'Algèbre ordinaire, à cause que toutes ces égalitez, hormis une seule, ont leurs inconnues au premier degré, & qu'elles ont d'autres dispositions commodes.

Ici, même s'il ne la nomme pas, Rolle fait allusion sans aucun doute à la méthode de Fermat ou à des versions de celles-ci plus tardives⁴. Cependant, selon lui, Leibniz est celui qui a poussé ces abrégements « au plus loin ». Pour des explications de ce « calcul différentiel », il renvoie aux articles des *Acta* ou à un « excellent livre » sur « la Géométrie transcendante », qui ne peut être que celui du Marquis dont il a

¹ Rolle, Michel, « Méthode pour résoudre les égalitez par la géométrie », *Démonstration d'une méthode, pour résoudre les égalitez de tous les degrez ; suivie de deux autres méthodes*, Paris, Cusson, 1691, p. 51-99.

² Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de R.L. au sujet de l'Algèbre », *JS*, 28 mai 1696, p. 244-249.

³ *Ibid*, p. 245.

⁴ Voir chapitre 1, « Interprétations et améliorations des méthodes des tangentes ».

probablement lu quelques extraits avant sa publication. Mais pour le destinataire de la lettre, habitué à la géométrie ordinaire, il affirme qu'il n'est pas nécessaire d'user de « nouveaux mots » – ceux du calcul différentiel – mais que l'explication de sa méthode devrait largement suffire. Cet article n'aura aucune réponse.

Entre 1699 et 1700, Rolle s'intéresse à la présence des signes radicaux dans la pratique de l'algèbre. Lors de la séance académique du mercredi 9 décembre 1699, il lit un mémoire intitulé « Remarques pour expliquer les différentes valeurs des signes radicaux »¹ dans lequel il souligne l'avantage venant de l'abréviation à laquelle conduisent les signes radicaux², tout en pointant la difficulté à les manier. Les égalités comportant des signes radicaux peuvent se réduire à l'algèbre ordinaire mais des difficultés peuvent apparaître lorsqu'ils sont ôtés, notamment avec l'apparition ou la disparition de racines. Il illustre cette difficulté par plusieurs exemples qui constituent la matière du mémoire. Il rappelle que « Des Géomètres fort célèbres »³ préconisent d'enlever les signes radicaux des égalités pour obtenir les différentes racines d'une équation. Il souligne que pour servir la géométrie l'algèbre ne peut pas se contenter de fournir « des égalités géométriques pour la détermination des lignes courbes, et qu'il faudrait encore des règles pour savoir si ces égalités répondent véritablement à ces lignes »⁴. Rolle ne cache pas l'insuffisance de l'algèbre, néanmoins il explique que le calcul différentiel qui prétend ne pas avoir à se soucier des signes radicaux ne « regarde qu'une partie de la Géométrie et qu'il ne dispense pas d'une méthode pour faire évanouir leur signes radicaux »⁵. Il réitère qu'il est absolument nécessaire d'ôter les radicaux dans certains problèmes, notamment ceux de *Maximis* et *Minimis*. Pour illustrer son propos, il énonce mais il ne traite pas l'exemple de recherche du maximum et du minimum de l'inconnue x dans l'égalité :

$$\frac{cxx}{a} - d = \sqrt{y^4 - ny^3 + bxyy + ddy + p^4}$$

en indiquant qu'il est possible d'appliquer le calcul différentiel sans faire évanouir les signes radicaux mais que pour « le résoudre tout de bon », il faut faire évanouir les signes radicaux et se servir de « méthodes générales » qui conviennent aux lignes

¹ Rolle, Michel, « Remarques pour expliquer les différentes valeurs des signes radicaux », 9 décembre 1699, *PVARS*, t. 18, p. 556R-561V.

² *Ibid*, fol. 556V.

³ *Ibid*, fol. 559R.

⁴ *Ibid*, fol. 559V.

⁵ *Ibid*, 560V.

géométriques et qui reposent sur des principes « certains », contrairement au calcul différentiel qui ne donne aucune règle contre « la pluralité des racines ». Par-là, il affirme que la méthode différentielle ne donne pas le moyen de savoir si les racines obtenues sont des solutions véritables ou si elles ne le sont pas. Cette hésitation liée à la pratique du calcul différentiel ne saurait garantir la certitude de ce calcul. Pendant les séances académiques suivantes : celles du 23 février, du 3 mars et du 15 mai 1700¹, Rolle lit des mémoires qui restent sur la même problématique : alors que les problèmes géométriques se traduisent à l'aide d'égalités comportant des radicaux, comment l'algèbre peut transformer puis résoudre ces égalités en ne conservant que les racines correspondant à des solutions du problème. Rolle reconnaît encore une fois l'imperfection des méthodes existantes : « Rien n'est plus nécessaire dans toute la Géométrie que la résolution des égalitez, mais toutes les mathématiques qu'on a données pour cela sont sujettes à des grands inconvénients ». Il n'épargne pas « celles qui ont été reçues avec les plus grands Eloges, la nouvelle géométrie de l'infini n'en est pas plus exempte »².

Les recherches de Rolle ont pour dessein d'améliorer suffisamment l'algèbre pour élaborer des méthodes calculatoires qui amènent avec certitude la résolution de problèmes, comme ceux de *Maximis* et *Minimis*, qu'il aime citer. Sa conviction est qu'en perfectionnant l'algèbre, il sera possible de résoudre la totalité des problèmes géométriques. Cette idée, qu'il veut incarner par sa démarche, est absolument dans la lignée de *La Géométrie* de Descartes.

Notons que sa problématique est isolée, elle ne fait pas l'objet de recherches chez d'autres académiciens. En revanche, deux autres démarches sont présentes : dans la première, les problèmes géométriques sont résolus à l'aide de méthodes infinitistes, c'est le cas de la Hire et de Varignon, dans le second cas les mathématiciens usent du nouveau calcul différentiel.

Les travaux de Rolle s'inscrivent dans une problématique beaucoup plus large : celle de savoir comment un calcul symbolique peut et doit interpréter et rendre compte de la résolution d'un problème géométrique. Ainsi, pour résoudre des problèmes, comme ceux de *Maximis* et *Minimis*, le principal rival des méthodes algébriques de Rolle est le calcul différentiel en tant que calcul.

¹ Rolle, Michel, « Remarques sur les signes radicaux », 23 février et 3 mars 1700, *PVARS*, t. 19, fol. 84R et fol. 85R-89R et « Des égalités et du moyen de les résoudre », 15 mai 1700, *PVARS*, t. 19, fol. 191-199.

² « Des égalités et du moyen de les résoudre », 15 mai 1700, *op. cit.*, fol. 191RV.

7) Le règlement académique de janvier 1699 et ses conséquences

L'année 1699 marque dans l'histoire de l'Académie des Sciences une étape essentielle. Un nouveau règlement est mis en place, codifiant certaines des procédures et des conduites déjà présentes dès 1690¹. Toutefois ce règlement amène un renouveau de la structure de l'Académie et un accroissement de son pouvoir.

Les statuts de 1699 doivent leur composition essentiellement à l'Abbé Bignon. Pour ses intentions de réforme, il a consulté Pontchartrain, mais sûrement aussi Fontenelle, en tant que secrétaire, ainsi que d'autres académiciens avertis. Le début du règlement est précédé par ce commentaire :

Cette Académie avait été formée, à la vérité, par les ordres du Roy, mais sans aucun acte émané de l'autorité Royale. L'amour des Sciences en faisait presque seul toutes les loix : mais quoique le succès eût été heureux, il est certain que pour rendre cette Compagnie durable, et aussi utile qu'elle le pouvait être, il fallait des règles plus précises et plus sévères².

Ainsi, il était nécessaire de clarifier par écrit le fonctionnement de l'Académie.

Le nouveau règlement de 1699

Composé de cinquante articles, le règlement de 1699 se structure selon quatre sujets : la composition de l'Académie et le fonctionnement pérenne de ses membres ; les relations avec l'extérieur (articles 27 à 29); les conditions d'impression d'ouvrages et de validation de nouvelles machines (articles 30 et 31) ; le lien de l'Académie avec le pouvoir royal (articles 46 à 49).

La composition de l'Académie fait l'objet de la majorité des articles. Il s'agit d'un point important car l'établissement de ce règlement introduit des mœurs consolidant une hiérarchie bien organisée au sein de la vie intérieure de l'Académie³.

¹ L'élaboration de ce règlement entérine tout en officialisant des conduites et pratiques de la communauté académique. On pourra consulter : Hahn, R., *L'Anatomie d'une institution scientifique, L'Académie des sciences de Paris, 1666-1803*, Editions des archives contemporaines, p. 40 : "Une fois de plus, les règlements de 1699 marquèrent la fin d'une période d'essai qui s'acheva plutôt par la codification d'une ensemble de traditions académiques que par l'établissement de pratiques nouvelles."

² *Histoire de l'Académie Royale des Sciences depuis le règlement fait en M.DC.XCIX., année 1699*, p. 1.

³ Selon Hahn, Roger, *L'anatomie d'une institution scientifique, op. cit.*, p. 106 : « Ces caractéristiques [d'ordre et de hiérarchie] provenaient du désir d'imposer à l'intérieur de l'Académie des notions d'étiquette, de statut, de rang et de propriété qui étaient si répandues dans la société de l'Ancien Régime ». Le même type de propos est souligné par James E. Mc. Clellan dans *Science reorganized, op. cit.*, p. 20 : "like the rest of French society in the ancient régime, the Paris Academy was based on privilege centralised power,

Pour cela, le règlement décrit minutieusement les droits et devoirs de chacune des classes d'académiciens (articles 2 à 25) et précise pour chacune sa fonction administrative (articles 32 à 38). Le règlement consacre également sept articles aux rôles particuliers de Président (article 39), de Secrétaire (articles 40 à 42) et de trésorier (articles 43 à 45).

À partir de 1699, l'Académie est composée de quatre types d'académiciens : les honoraires, les pensionnaires, les adjoints et les élèves. Chaque classe est constituée de douze membres. Pour les pensionnaires : trois géomètres, trois astronomes, trois mécaniciens, trois botanistes, le secrétaire et le trésorier ; pour les adjoints : deux géomètres, deux astronomes, deux mécaniciens, deux anatomistes, deux chimistes, deux botanistes, les huit autres peuvent être étrangers et leur domaine de recherche est de leur choix. Les pensionnaires et les adjoints doivent habiter dans le royaume, les élèves doivent être établis à Paris. Le système d'élection des membres est interne : les honoraires sont proposés au Roi par l'assemblée académique. Ils peuvent éventuellement être issus du clergé contrairement aux autres classes. Deux sur trois des pensionnaires doivent être choisis parmi les adjoints ou les élèves, un sur deux des adjoints est choisi parmi les élèves, les élèves sont choisis par chacun des pensionnaires.

Les membres honoraires ne sont pas contraints à l'assiduité. Leur élection, comme leur nom l'indique, a pour visée d'honorer la réputation de l'Académie¹. Il n'est pas exigé d'eux quelque compte-rendu de travaux que ce soit. À l'inverse, au début de chaque année, les autres académiciens doivent déclarer le dessein de leur recherche :

Chaque académicien pensionnaire sera obligé de déclarer par écrit à la Compagnie le principal ouvrage auquel il se proposera de travailler : et les autres académiciens seront invités à donner une semblable déclaration de leurs desseins².

and hierarchical stratification.". Clellan ajoute que La Royal Society est un modèle de société qui est à l'opposé du modèle hiérarchique de l'Académie des Sciences (voit p. 20 et sq).

¹ Sauf exception comme c'est le cas pour l'Abbé Bignon, les membres honoraires assistaient peu fréquemment aux séances hebdomadaires mais en revanche ils étaient présents pendant les séances publiques, la visite d'un personnage important ou lors de l'élection d'un académicien. Comme le souligne Sturdy, *Science and social status.*, p. 296 : « By their membership, the honoraires conferred prestige on the Académie as a whole ».

² Article 21.

Ce point, comme nous le verrons, est extrêmement important quant aux relations entre les membres de l'Académie. En effet, chacun d'eux en déclarant quels sont ses axes de recherche, se positionne quant à ce que sa contribution représente dans l'édifice des connaissances scientifiques de l'Académie, ceci pouvant conduire à devoir défendre plus fermement son point de vue devant la Compagnie.

Pendant chaque séance, alors que la prise de parole est optionnelle pour les associés et interdite aux élèves, à moins d'y être invités, deux pensionnaires ont l'obligation, à tour de rôle, de faire un compte-rendu de leurs travaux. Les mémoires lus et les observations apportées par des membres au cours d'une séance sont laissés par écrit le jour même au Secrétaire qui peut y avoir recours et en disposer librement¹.

En affaires administratives, seuls les honoraires et les pensionnaires ont une voix délibérative pour les élections concernant l'Académie².

Les articles 47 à 49 décrivent les modalités de rémunération des académiciens. Le Roi assure une pension aux académiciens pensionnaires à laquelle « quelques jetons » peuvent être ajoutés en guise de récompense pour leur assiduité. Il cède aux académiciens un ample espace au palais du Louvre³ qui devient le lieu officiel des réunions bihebdomadaires (mercredi et samedi).

Une règle de bonne conduite souhaitée entre les académiciens existe également :

L'Académie veillera exactement à ce que dans les occasions où quelques académiciens seront d'opinions différentes, ils n'emploient aucuns termes de mépris ou d'aigreur l'un contre l'autre, soit dans leur discours, soit dans leurs écrits ; et lors même qu'ils combatteront les sentiments de quelques sçavants que ce puisse être, l'Académie les exhortera à n'en parler qu'avec ménagement⁴.

¹ Article 24.

² Article 33.

³ Au cours de l'année 1699, l'Académie déménage de la Bibliothèque du Roi située rue Vivienne au Louvre, dans laquelle trois salles lui sont réservées. Ce déménagement est rendu nécessaire à cause de l'augmentation des effectifs. Le cadre plus agréable permet aussi d'accueillir plus confortablement les séances publiques biannuelles.

⁴ Article 26.

Publicité de l'Académie

Dans le but de montrer la grandeur et l'utilité de son travail pour le royaume, l'Académie devra rendre compte publiquement de ses découvertes.

Les séances hebdomadaires sont normalement strictement réservées aux académiciens mais l'Académie décide de mettre en place des séances biennuelles lors desquelles n'importe quelle personne extérieure peut assister. Cependant, cela ne saurait avoir un impact suffisant auprès du public. Pour y remédier, l'Académie va publier annuellement une histoire de l'Académie avec des mémoires, choisis parmi ceux qui sont lus au cours des séances hebdomadaires et qui sont jugés comme les plus marquants. Cette publication peut également contenir un éloge en l'honneur de chaque académicien décédé au cours de l'année. Chaque volume porte le titre : *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématiques et de physique pour la même année tirés des Registres de l'Académie (HARS)* suivi de l'année concernée. La partie « Histoire » est une sorte de descriptif commenté des mémoires de la deuxième partie du volume.

L'article 40 prévoit que le Secrétaire perpétuel de l'Académie soit chargé de l'écriture de *HARS*. La tâche est ardue puisque le Secrétaire doit lui-même comprendre tous les travaux de l'Académie Royale des Sciences, sur des sujets allant de la botanique à la physique, pour en donner une version simplifiée, compréhensible pour le plus grand nombre. Il doit également s'enquérir parfaitement de la vie des académiciens décédés dans le but de leur rendre un hommage à travers le meilleur éloge. De plus, les éloges étant lus publiquement lors des séances biennuelles, un soin supplémentaire doit être spécialement apporté à leur rédaction. À travers les qualités multiples du membre qui la quitte, l'image de l'Académie est magnifiée. En 1697, Fontenelle (1657-1757) a été choisi comme secrétaire et le restera jusqu'en 1737¹. Si la tâche est ardue, Fontenelle possède les qualités requises pour s'en acquitter. Homme de lettres, Fontenelle s'intéresse aussi largement à toutes les sciences et tout particulièrement aux mathématiques. Partisan convaincu de l'analyse des infiniment petits, Fontenelle doit cependant respecter les règles de neutralité dans son rôle de Secrétaire perpétuel.

¹ Il rédigea chaque année de son mandat la partie "Histoire" qui compte à chaque fois entre 100 et 150 pages environ. De ce fait l'œuvre fontenellienne, écrite durant son mandat de secrétaire perpétuel, représente un volume de près de 5000 pages. À cela, il faut ajouter une histoire de l'Académie entre 1666 et 1699 qui se fait à partir de 1733.

Le pouvoir censeur de l'Académie

Par ailleurs, les nouvelles dispositions permettent à l'Académie d'accroître son pouvoir judiciaire sur les sciences. Tout d'abord, l'article 27 prévoit un examen des travaux scientifiques extérieurs à l'Académie et stipule explicitement que l'élection d'un nouvel académicien tiendra compte des « sçavans qui auront été les plus exacts à cette espèce de commerce ». Il s'agit donc, pour tout savant, d'obtenir l'approbation scientifique de sa découverte afin d'espérer une appartenance à la communauté académique¹ :

Être élu à l'Académie devint rapidement la chose la plus convoitée par le savant ambitieux qui, lorsqu'il avait acquis le titre de "membre de l'Académie", le chérissait autant que s'il s'était agi d'un titre de noblesse. Être académicien ou voir ses propres idées examinées par un œil favorable par l'Académie revenait en fait à recevoir l'accolade suprême de ce réseau de scientifiques connu sous le nom de « république des sciences ».

Par l'article 30, est accordé à l'académicien l'usage de son titre lorsqu'il publie l'un de ses ouvrages à condition que celui-ci ait été approuvé par l'Académie². Les nouvelles machines doivent être également validées de leur utilité par les académiciens³.

L'Académie royale des sciences joue indubitablement un rôle d'arbitre des connaissances scientifiques. L'exactitude d'un savoir passe en large partie par une reconnaissance officielle de l'institution académique.

Le renouveau de 1699 a permis l'augmentation des effectifs. Certains membres du groupe malebranchiste étaient déjà académiciens et se voient octroyés un titre : l'Hospital (1693) devient membre honoraire, Varignon (1688) et Fontenelle (1697) entrent dans la classe des pensionnaires, Carré (1697) dans celle d'élève (Varignon). Malebranche est élu également comme membre honoraire, De Billettes est élu pensionnaire, Parent devient élève (De Billettes)⁴. Les frères Bernoulli, Leibniz et Newton sont nommés associés étrangers. Ces nominations permettent au groupe autour de Malebranche d'être bien représenté à l'Académie notamment parmi les

¹ Hahn, Roger, *L'anatomie d'une institution scientifique*, *op. cit.*, p. 49.

² Cette règle était déjà d'usage à partir de 1685 voir McClellan, *op. cit.*, p. 62.

³ Article 31.

⁴ Nous avons indiqué pour ceux qui sont académiciens avant 1699 l'année de leur nomination et pour chacun des élèves leur pensionnaire associé.

deux classes prestigieuses. Les adeptes du calcul différentiel sont donc très représentés au sein de l'institution.

Le 28 février 1699, Gallois, Rolle et Varignon – tous les trois pensionnaires – annoncent, chacun d'eux, leur projet d'ouvrage. Varignon annonce qu'il travaillera sur « une nouvelle théorie du mouvement » et qu'il « poussera sa théorie jusqu'à l'infini »¹. Gallois affirme sa volonté de remettre au goût du jour la géométrie des Anciens :

Comme presque tous les géomètres ne s'appliquent maintenant qu'aux nouvelles méthodes de géométrie ce que Mr l'Abbé Galois juge qu'il est important de ne pas abandonner entièrement la manière des Anciens, il prend pour son partage d'illustrer les ouvrages des Anciens géomètres².

Rolle, pour sa part, projette d'utiliser et de développer les connaissances sur l'algèbre pour fournir une « théorie réglée des méthodes que l'algèbre ait fournies » afin de les appliquer à la géométrie. Il poursuit ainsi son projet initié que nous avons examiné.

¹ PVARs, tome 23, 1698-1699, p. 134.

² *Ibid*, p. 133.

Conclusion

Les années qui précèdent la crise de 1700, l'activité mathématique – qu'elle soit en géométrie, en algèbre ou en mécanique – est aux yeux de la plupart des académiciens, suffisamment riche et diversifiée pour s'intensifier sans qu'il leur semble imminent d'introduire une nouvelle manière de s'exercer aux mathématiques via le calcul leibnizien. Galloys et la Hire, académiciens du « vieux style », ne sont pas contre l'utilisation de méthodes d'invention dans lesquelles interviennent des infiniment petits. Mais, la Hire rappelle que la pratique à l'aide d'infiniment petits doit être régulée, c'est-à-dire que tout raisonnement à partir de suppositions infinitistes – prendre la corde pour l'arc ou une figure pour la somme de ces rectangles indéfiniment petits – doit pouvoir être reconductible à une démonstration à l'ancienne. Dans « l'hypothèse des infiniment petits », Galloys défend l'exactitude de la démonstration de Roberval contre les critiques de David Grégory. Nous avons vu dans notre première partie, que dès leur naissance, les méthodes d'invention s'accompagnent de discours portant sur leur valeur démonstrative. Ces deux académiciens héritent et reprennent ces discours et restent ainsi dans le prolongement de cette pratique réglée. Utiliser des méthodes infinitistes est donc une pratique coutumière et reconnue à l'Académie. Il est tout à fait coutumier de continuer à juger que la manière des anciens garantit la vérité d'un résultat tout en utilisant des méthodes d'invention. La Hire n'hésite donc pas à utiliser des mémoires employant des méthodes infinitistes et à les présenter devant la Compagnie. Aussi, il est tout à fait possible d'être absolument séduit par la fécondité du calcul leibnizien et de continuer à user d'autres méthodes : les tentatives de démonstration de l'isochronisme de la cycloïde par Varignon et la Hire montrent qu'il n'y a pas de clivage fortement marqué entre ces différentes pratiques mathématiques.

Nous avons destiné un développement à Christiaan Huygens même s'il ne fait déjà plus partie de l'Académie. Parce qu'il apparaît comme un des principaux acteurs de la genèse de cette institution et que par son travail, il acquiert une notoriété scientifique reconnue dans toute l'Europe, il devient un des emblèmes de cette institution. À ce titre, l'avis du savant hollandais est précieux, Leibniz et l'Hospital le

recherche en partie lorsqu'ils échangent avec leur aîné. Huygens, comme tous ses contemporains, considère que les démonstrations à l'ancienne garantissent l'exactitude en géométrie, mais il ne considère pas que les méthodes d'invention soient à proscrire pour autant, au contraire. Qu'en est-il pour la méthode calculatoire de Leibniz ? Pour de nombreuses résolutions de problèmes, Huygens ne voit pas la nécessité de l'introduire puisqu'il considère que d'autres méthodes plus claires existent. S'il reconnaît immédiatement après sa naissance la fécondité du calcul leibnizien il s'en méfie car il n'est pas « bon que le calcul différentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande ». Cette dernière remarque est très importante car elle interroge la validité d'une méthode calculatoire. Un calcul peut-il avoir une valeur démonstrative ? Et si oui, quels critères permettent de décider qu'il la possède ou pas ? Nous avons vu que cette question n'est pas sans intérêt pour Huygens. En effet, en 1667, devant l'assemblée académique, il lit deux mémoires « Démonstration de la règle de maxima et des minima » et « Une règle pour trouver des tangentes aux lignes courbes »¹. Par cette lecture, Huygens veut justifier sans aucun doute que ses deux méthodes calculatoires conduisent à un résultat qui peut être tenu pour démontré.

En géométrie, la question de la valeur démonstrative d'un calcul n'est bien entendu pas nouvelle. *La Géométrie* est sans aucun doute celle qui apporte une première réponse : le calcul algébrique est démonstratif pour Descartes à condition de ne considérer que ses applications sur les courbes géométriques, c'est-à-dire celles pour lesquelles on peut associer une équation algébrique. En géométrie, notamment dans des problèmes de recherches de *maximis* et *minimis*, l'expression de certaines quantités nécessite l'introduction de « signes radicaux » (les « assymétries » de Fermat). Or ces signes « embarrassent » car ils gênent la reconduction d'une égalité à une équation polynomiale traitable par la théorie des équations. Michel Rolle hérite de cette problématique et en fait un de ses sujets principaux de recherche. Il répète que « L'Algèbre est encore bien defectueuse »² et qu'elle est susceptible d'amélioration, en particulier dans le domaine du traitement des signes radicaux. Il s'agit de trouver une méthode qui permette d'ôter les radicaux tout en conservant le nombre de racines correspondant aux solutions d'un problème géométrique. Le

¹ PVARs, année 1667, f. 113. Voir chapitre 1.

² Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de R. L. au sujet de l'Algebre », JS, mai 1696, p. 244.

dessein de Rolle est de rendre la correspondance entre le problème géométrique et sa traduction en équations algébriques la plus parfaite possible. Selon lui, le calcul leibnizien n'apporte pas une vraie solution au problème des signes radicaux car il ne tient pas compte de cette exigence. En prime, Rolle lui reprochera bientôt de manquer d'exactitude car il introduit de manière complètement superflue des quantités différentielles dont le maniement manque de rigueur.

En 1699, les nouvelles dispositions et exigences de l'Académie – augmentation des effectifs, hiérarchisation, demande faite aux académiciens d'une plus grande implication – conduisent à une affirmation plus marquée des positions vis-à-vis de sa propre pratique. Dans ce contexte, la position épistémologique de Rolle se heurte à celle du calcul leibnizien. Peu importe que ce dernier remporte des victoires dans le domaine physico-mathématique, la virtuosité du calcul leibnizien ne saurait séduire Rolle, il ne peut que défendre sa position, celle de souhaiter le perfectionnement de l'algèbre puisqu'il la juge universelle et être la seule discipline pouvant servir la géométrie de manière exacte.

Nous proposons un tableau dans la page suivante pour avoir une idée générale de l'ensemble des académiciens qui sont à l'Académie en 1699 et qui seront impliqués lors du débat.

	(Naissance-Mort)	Âge en 1699	Catégorie
Nicolas Malebranche	(1638-1715)	61	Honoraire
Guillaume de l'Hospital	(1661-1704)	33	Honoraire (1693)
Thomas Gouye	(1650-1725)	49	Honoraire
Jean-Paul Bignon	(1662-1743)	37	Honoraire (1691)
Gilles Filleau Des Billettes	(1634-1720)	65	Pensionnaire mécanicien
Pierre Varignon	(1654-1722)	45	Pensionnaire géomètre (1688)
Jean Galloys	(1648-1690)	67	Pensionnaire géomètre (1667)
Bernard le Bovier de Fontenelle	(1657-1757)	42	Pensionnaire géomètre (1697)
Philippe de la Hire	(1640-1718)	59	Pensionnaire astronome (1678)
Michel Rolle	(1652-1719)	47	Pensionnaire astronome (1685)
Louis Carré	(1663-1711)	36	Elève (Varignon) (1697)
Antoine Parent	(1666-1716)	33	Elève (Des Billettes)
Jacques Bernoulli	(1654-1705)	45	Associé étranger (Bâle)
Jean Bernoulli	(1667-1748)	32	Associé étranger (Bâle)
G.W. Leibniz	(1646-1716)	53	Associé étranger (Leipzig)
Joseph Sauveur	(1653-1716)	46	Vétéran mécanicien

fig. 125

CHAPITRE 7

Une Crise et ses dénouements à l'Académie des sciences (1700-1706)

Introduction

Argument est un mot ancien qui veut dire la blancheur de l'aube. C'est tout ce qui s'éclaircit et se discerne dans cette pâleur qui survient en quelques instants. Péremptoire est l'argument : il n'est jamais possible de détourner le fleuve juste à l'instant de sa crue.

Pascal Quignard, *Vie secrète*¹

Le précédent chapitre a montré qu'à l'Académie les mathématiciens, qu'ils soient du « vieux stile » – comme Philippe de la Hire ou même Galloys, ou qu'ils soient des fervents du « charmant & merveilleux calcul différentiel »² – Varignon et l'Hospital – utilisent des infiniment petits pour résoudre des problèmes géométriques. Les infiniment petits des méthodes infinitistes sont une pratique partagée.

L'algébriste Rolle semble indifférent à ce genre de pratique, ses intérêts sont ailleurs. Suite aux nouveaux règlements, il se positionne : le calcul algébrique peut

¹ Quignard, Pascal, *Vie secrète*, Dernier royaume VIII, Gallimard, Paris, p. 10.

² C'est ainsi que Varignon, épris du calcul leibnizien, nomme ce dernier dans une lettre à Jean Bernoulli 29 décembre 1694, *op. cit.*, p. 76.

parvenir de manière exclusive à l'étude des courbes. À cette fin il ambitionne une « théorie réglée des méthodes que l'algèbre ait fournies ». Une conviction le guide : en géométrie, le calcul algébrique en tant que calcul est complet :

La disposition que les Algebristes ont donnée à ces Caractères, forme une espece de langue tres simple & tres facile, par laquelle on exprime une longue suite de raisonnemens d'une manière fort abregeante, & qui réunit l'action de l'esprit pour mieux resoudre les difficultez que l'on se propose¹.

Cette « langue » permet de résoudre un problème géométrique par sa traduction en équations. Cette idée n'est pas nouvelle, elle est complètement dans la lignée cartésienne : « Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire »². Rolle reconnaît que bien que l'algèbre ait besoin d'être améliorée, le principe qui fonde son application à la géométrie est solide. Les travaux de Rolle s'inscrivent dans notre problématique : celle de préciser les critères qui permettent de savoir comment un calcul prouve la résolution d'un problème géométrique.

Rolle préconise les méthodes algébriques pour étudier les courbes : elles sont suffisantes et même conseillées. Néanmoins, à l'Académie, il se heurte au calcul différentiel comme le principal rival de ses méthodes, en particulier lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes des *Maximis* et *Minimis*.

En juillet 1700, il lance une première attaque contre « les suppositions fondamentales de la Géométrie des infiniment petits »³. Il remet en question le statut des infiniment petits impliqués dans le calcul différentiel, c'est-à-dire les différentielles. Dans les mémoires suivants, ses critiques sont d'un autre type, elles se focalisent sur l'exactitude du calcul différentiel. Un calcul qui manipule des entités au statut aussi labile conduit à l'erreur. Rolle propose des exemples dans lesquels il prétend illustrer les difficultés du calcul leibnizien en tant que calcul. Varignon est chargé des réponses. Il s'agit d'abord de défendre le statut des infiniment petits du calcul différentiel. Face aux attaques de Rolle, les différentielles nécessitent désormais

¹ Rolle, Michel, *Méthodes pour résoudre les questions indéterminées de l'Algèbre*, Chez Jean Cusson, 1699, Avertissement

² Descartes, *La Géométrie*, op. cit., p. 1.

³ PVARIS, tome 19, fol. 281R.

d'être davantage circonscrites dans une définition. La tâche est ardue. Varignon choisit de les définir à partir de ce qu'il connaît déjà, c'est-à-dire à partir des notions ou objets impliqués dans des méthodes d'invention reconnues de tous. Par ailleurs, il surmonte les difficultés proposées par Rolle mais il ne réussit pas à le convaincre.

D'autres académiciens, Galloys, Gouye, Carré, Fontenelle interviennent. De sorte que le débat n'est plus dual mais l'affaire de toute la Compagnie. Il dégénère très vite en un *dialogue de sourds* : aucune des parties adverses ne reconnaît la pertinence des arguments de l'autre. Ainsi, la reconnaissance de la pratique légitime du calcul différentiel est mise en suspens. En cela, cet épisode académique est une *crise*.

Ces disputes sont à l'encontre des règles de conduite entre académiciens et l'Institution demande le silence. Le lieu véritable du débat est déplacé. Le *Journal des Sçavants* publie désormais des articles de Rolle et de Saurin. C'est ce dernier qui relaie publiquement Varignon comme héraut de la défense du calcul différentiel.

Étant en étroite correspondance avec la plupart des acteurs de la défense, Leibniz et Jean Bernoulli ne sauraient être à l'écart de cette polémique. Le débat ne reste pas donc longtemps une affaire exclusive de l'Académie. En particulier, le philosophe allemand prend position pour expliciter ce que la pratique du calcul différentiel implique quant au statut des infiniment petits. Ses interventions sont d'une extrême importance en raison du fait qu'il apparaît aux yeux des savants français comme un des inventeurs du nouveau calcul ou même le seul.

Dans ce chapitre, nous examinons les types de critiques adressées au calcul différentiel et leurs réponses au sein de l'institution académique, en prenant soin de distinguer celles qui relèvent de questions de fondement, de celles qui sont propres au procédé calculatoire. Nous sommes attentifs aussi à démêler parmi ces critiques celles qui sont plus généralement applicables à d'autres méthodes.

Pour ce faire, nous observons de quelles manières les opposants ou les défenseurs de la nouvelle analyse argumentent au sein de l'institution académique. Plus précisément nous analysons comment, quel que soit leur camp, ils revendiquent leur méthode comme étant la seule fidèle à l'héritage commun mathématique français (Descartes, Fermat et Pascal) ou étranger (Barrow). Cette analyse permet de comprendre premièrement comment chacun interprète sa propre méthode à partir de celles du passé et deuxièmement comment chacun tente des traductions entre sa méthode et la rivale. Elle conduit à préciser leurs conceptions des notions qui entrent

en jeu dans les différents types de calcul comme sont les différentielles ou une courbe. Puis, elle permet de saisir quelle valeur cognitive chacun octroie au résultat d'un calcul et de quelle manière est-il possible de reconnaître si un calcul vaut pour preuve.

Nous finissons cette analyse par le témoignage de Fontenelle, Secrétaire perpétuel de l'Académie et chargé de la rédaction de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. Il réalise un récit de la réception du calcul leibnizien en France.

1) Définir la « différentielle » : débat autour du statut des infiniment petits du calcul leibnizien

1.1) Sur les fondements : l'attaque frontale de Michel Rolle

Le 17 juillet 1700¹, Michel Rolle commence la lecture d'un écrit contre les « suppositions fondamentales de la Géométrie des infiniment petits » qu'il achève lors de la séance du 21 juillet². Si la plupart des académiciens sont présents à cette lecture – en particulier Gouye, la Hire, Varignon, Fontenelle, Gallois, Billettes et Carré –, Malebranche est absent à la première séance tandis que l'Hospital l'est aux deux. La réaction de Varignon vis-à-vis des déclarations de Rolle est immédiate et ferme : « M^r Varignon s'est fait fort de répondre à ce discours au dessous des principaux auteurs du calcul différentiel qui n'en sont pas informés »³. L'adhésion au calcul différentiel est complète pour Varignon, la plupart de ses mémoires l'utilisent. Ainsi, devant cette attaque et en l'absence de l'Hospital, il considère qu'il est le plus à même de prendre la défense du calcul leibnizien. L'écrit de Rolle n'est pas retranscrit, le secrétaire explique que par la réponse de Varignon « on verra quelles étaient les objections de M^r Rolle ».

Le samedi 7 août 1700⁴, Varignon commence la lecture d'un écrit pour « la deffense de la Geometrie des Infiniment petits contre M^r Rolle » qu'il achève le mercredi 11 août⁵. Ses réponses à Rolle sont retranscrites partiellement par le secrétaire. Mais, comme par ailleurs, Reyneau a obtenu l'écrit de Varignon, dont il a effectué une copie⁶, nous pouvons le reconstituer avantageusement.

Les réponses de Varignon sont structurées selon les trois difficultés soulevées par Rolle lors des séances de juillet. La première difficulté est de savoir si en géométrie « il y a des infiniment grands infinis les uns des autres, et des infiniment petits infinitésimes les uns des autres », c'est-à-dire s'il existe différents ordres d'infiniment petits. La deuxième difficulté relève de la deuxième supposition de *l'Analyse des*

¹ PVARs, tome 19, fol. 281V.

² *Ibid*, fol. 287.

³ *Ibid*, fol. 287V.

⁴ *Ibid*, fol. 308R.

⁵ *Ibid*, fol. 311R-317V.

⁶ Cette copie se trouve à la BNF, FR 25302, fol. 144 à 155. Elle a été retranscrite intégralement et annoté par Jeanne Peiffer, « Annexe IV, Controverse Varignon-Rolle (1700-1701) », *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 351-360. Nous nous référons à la pagination de cette retranscription que nous nommerons « Annexe ». Il est très probable que Reyneau se soit procuré l'écrit de ces réponses directement par Varignon. Les registres et le manuscrit de Reyneau ne sont pas identiques et se complètent, c'est pour cela que nous nous permettons de nous référer soit à l'un soit à l'autre

infiniment petits, à savoir « si une grandeur plus ou moins sa différentielle peut être prise pour égale à cette grandeur ». La troisième difficulté, très liée à la première, concerne la proximité du statut des différentielles avec celui des zéros absolus.

Définir la « différentielle », la réponse de Varignon

Le terme « différentielle » ou sa notation sont présents dans les discours des séances académiques : en septembre 1696, Sauveur a présenté une démonstration « par lignes » de leurs règles et bien entendu les différentielles sont manifestes dans nombre de mémoires. Cependant, aucune explicitation de ce terme n'a jamais été effectuée à l'Académie depuis la publication du traité *AI*, dans lequel il est possible de trouver la définition d'une différence (ou différentielle). Les objections de Rolle conduisent Varignon à juger nécessaire, avant d'entamer une par une les réponses aux trois difficultés, de les faire précéder en préambule de quelques « définitions » : celle d'« *infini* ou indéfini », celle de « fini » et celle d'« infiniment petit, différentielles, ou élément d'une grandeur quelconque »¹. Soulignons qu'il s'agit donc de la première fois qu'en s'adressant à l'Académie, un de ses membres tente d'explicitier ce qu'est une différentielle. Cet acte de définition n'est absolument pas concentré dans ce préambule, au contraire, il nourrit la presque totalité de ses réponses. Pour ce faire, la tactique adoptée par Varignon est de faire référence à des géomètres autant anciens que modernes, et autant à leurs démonstrations *more geometrico*, qu'à leurs usages de méthodes d'invention. Il révèle dans toutes celles-ci la présence de différentielles ou plutôt de ce qu'il considère être des équivalents. C'est ce que nous allons examiner.

Ce que tous les géomètres entendent, la République des lettres convoquée

Par la formulation « Ce que tous les géomètres entendent » sciemment répétée tout au long de ses réponses, Varignon affirme que sa position n'est autre que celle qui est partagée par une communauté quasi-universelle de géomètres.

Sa première définition concerne « l'infini ou indéfini (qui est la même chose) ». Il rappelle le lien avec l'infinie division d'une ligne ou le caractère inépuisable des nombres : « C'est ce qu'entendaient les anciens par *major* ou *minor quâvis quantitate datâ* [plus grand ou plus petit que n'importe quelle quantité donnée] », Puis, est « finie » « une grandeur dont l'imagination voit les bornes ». Ainsi, les parties infiniment petites d'une partie finie, ou encore *minor quâvis quantitate datâ* sont

¹ Ces définitions ne sont pas intégralement retranscrites dans les Registres mais sont recopiées par Reyneau, *PVARS*, fol. 311,

l'« infiniment petit », « différentielles » ou « element de grandeur quelconque ». Ces trois termes renvoient incontestablement ici au même sens.

À cette conception, outre les anciens, adhèrent d'autres géomètres : Cavalieri, Viviani, Barrow, Fermat, Roberval, Pascal, Huygens sont cités à plusieurs reprises. Avec cette liste, où apparaissent nombre de géomètres emblématiques du XVII^e siècle, Varignon se place devant ses pairs volontairement dans la lignée des géomètres dont la reconnaissance est indiscutable.

Il en est de même pour argumenter en faveur de l'existence « d'infiniment grands infinis les uns des autres, et des infiniment petits infinitésimes les uns des autres ». Ici, Varignon choisit des exemples éclectiques, qu'il puise dans la géométrie ou la mécanique. À la géométrie, il emprunte plusieurs exemples : outre la construction de termes en progression continue à partir de l'espace de l'hyperbole ordinaire – dont le caractère infini est une « chose démontrée et reçue de tous les Geometres » –, il cherche à dévoiler dans des configurations euclidiennes l'existence non explicitée à l'époque grecque des infiniment petits et d'infiniment petits d'ordre supérieur.

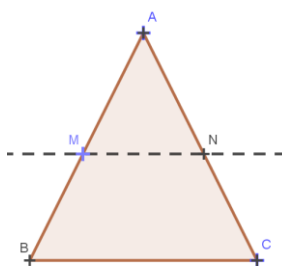


fig. 126

Par exemple, lorsque dans un triangle ABC la base BC monte toujours parallèlement à elle-même jusqu'en A , le triangle « décroissant » AMN est toujours semblable à ABC et les côtés « variables » AM et AN sont en raison « constante » de AB à AC . Certes, au moment où BC parvient en A , AM et AN « s'anéantissent » mais Varignon affirme « qu'il y a eu là des infiniment petits dans le rapport de AB à AC »¹. Ainsi il s'adresse à M^r Rolle pour l'avertir qu'il n'a plus à douter de l'existence des « infiniment petits figurés » puisque le triangle MAN existe toujours tant qu'il n'est pas anéanti et qu'avant de l'être il est passé nécessairement par le statut d'infiniment petit. Il en est de même dans d'autres « figures d'Euclide ou de la geometrie simple »,

¹ Annexe, op. cit., p. 354

comme celle de la moyenne proportionnelle entre deux segments AC et CB . La perpendiculaire CD se mouvant de A vers B , s'anéantit en B mais elle :

passera immédiatement auparavant par être infiniment petite par rapport à AC . Cependant l'on aura toujours $AC \cdot CD :: CD \cdot CB$ ¹. Donc alors CB sera aussi infiniment petite par rapport à CD , c'est-à-dire du 2nd genre².

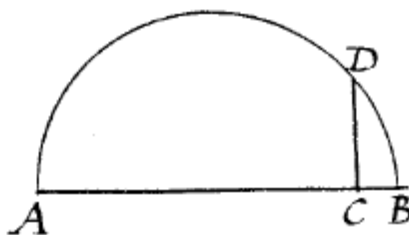


fig. 127

Pour illustrer ses arguments, Varignon choisit des configurations euclidiennes connues de ses pairs qui, comme lui, reconnaissent l'exactitude de la géométrie des Anciens. Il ne propose pas de montrer quelque chose de nouveau : tous les membres de l'Académie, à qui il s'adresse, connaissent Euclide et les Anciens, en revanche il invite à apprécier une lecture plus poussée, peut-être forcée, de ce qui est en jeu dans ces configurations en faisant apparaître des infiniment petits. Varignon ne feint pas, il est persuadé que les textes euclidiens, héritage qu'il partage avec ses contemporains, peuvent et même doivent être lus désormais à l'aide du langage des infiniment petits car leur présence était voilée mais certaine dès l'origine de la géométrie, dans les *Éléments* euclidiens. Nous soulignons qu'il ne s'agit pas à ses yeux d'une contre-sens puisque dans la lettre du 4 septembre 1700 adressée à Jean Bernoulli³, il explique qu'il prévoit de mettre en ordre et « par propositions suivies, les principes du calcul différentiel », il affirme qu'« Euclide seul me donne les différentielles de tous les genres à l'infini ; & ainsi de reste ». Varignon illustre ici sa conviction selon laquelle la géométrie d'Euclide permettrait de fonder le calcul différentiel.

Pour renforcer son propos, Varignon souligne, à nouveau, que la pratique des infiniment petits est partagée par tous les géomètres reconnus par la République des Lettres. Il cite Huygens qui les utilise dans *Horologium oscillatorium*, puis fait référence à

¹ Ce qui signifie : $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CB}$.

² *Ibid*, p. 355.

³ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 4 septembre 1700, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, Band 2*, *op. cit.*, p. 255.

l'avertissement pascalien concernant la légitimité d'user du langage des indivisibles dans les Lettres à A. Dettonville¹.

Ainsi, une grande partie de son argumentation se résume à expliquer que les infiniment petits sont légitimes, d'une part parce qu'ils ont toujours été présents d'une manière ou d'une autre dans l'exercice mathématique, sans nécessairement être nommés ou désignés comme tels, et d'autre part, parce que les principaux géomètres qui, aux yeux des contemporains de Varignon, ont marqué le XVII^e siècle, les utilisent dans leurs œuvres les plus sublimes.

Expliquer le passage : l'appel à l'autorité de Newton

Nous avons vu par l'examen du manuscrit « Instructions du calcul différentiel et des méthodes générales pour trouver les tangentes aux lignes courbes » que Varignon a lu attentivement une grande partie sinon la totalité des *Principia*, en particulier le scholie qui achève le Livre I. Dans le manuscrit, Varignon identifiait les infiniment petits – qu'il avait considéré dans son explication du calcul leibnizien – avec les quantités évanescents décrites par Newton.

Nous avons repéré dans les précédents exemples que Varignon insiste à montrer l'infiniment petit par des images de passage du fini à son anéantissement. Il s'appuie par la suite sur le scholie de la fin du livre I des *Principia* qu'il cite intégralement en latin², pour rendre compte de l'infiniment petit en tant que moment notable de la variation de la quantité variable.

Le recours au texte de Newton est celui qui prévaut par rapport aux autres nombreuses références citées par Varignon. Ce choix délibéré, de la part de Varignon, peut s'expliquer par plusieurs raisons. Newton est connu et reconnu au sein de la République des Lettres. Après le nouveau règlement, il fait partie comme Leibniz, les Bernoulli et Tschirnhaus, des nouveaux membres étrangers. Il a donc autorité au sein de l'Académie. Par ailleurs, les *Principia* sont indubitablement pour lui une source d'inspiration pour ses centres d'intérêt qui sont l'étude du mouvement et celui des forces. Il est important de souligner que dans les *Principia*, Newton suppose que la

¹ Blaise Pascal, *Lettres de A. Dettonville*, op. cit., p. 10. Voir dans notre chapitre 2 : « le langage des indivisibles ».

² PVAR, t. 19, fol 313R-314V. Reyneau ne le recopie pas.

genèse des grandeurs est cinématique ainsi qu'en témoignent les définitions de quantité de mouvement et de force qui apparaissent au début de l'ouvrage¹.

Cet aspect apparaît particulièrement dans les réponses aux deuxième et troisième difficultés. Il est question de montrer que Rolle se méprend absolument en considérant les différentielles pour « des grandeurs fixes et déterminées, et de plus comme des zéros absolus »². S'il se méprend, c'est parce qu'il se place dans l'ancien cadre des quantités, c'est-à-dire dans celui dans lequel elles sont ou bien fixes, ou bien nulles, et qu'il n'accepte pas qu'il puisse exister un autre type de quantités dont

la nature consiste à être variables et à décroître incessamment jusqu'à zéro, *in fluxu continuo*, ne les considérant même qu'au point de leur évanouissement. *Evanescentia divisibilia*³.

Il attire l'attention sur le fait que le mot « variable » qui apparaît dans les deux définitions de l'*Analyse des infiniment petits* a exactement ce sens-là. Il souligne également que la caractéristique des différentielles de « décroître incessamment jusqu'à zéro » a conduit Newton à les appeler « *fluxiones, incrementa vel decrementa momentanea* »⁴. Varignon insiste sur la « réalité » des différentielles : elles décroissent continuellement par division infinie jusqu'à ce qu'elles deviennent absolument rien. C'est ce comportement lié à la continuité qui permet de réfuter Rolle lorsqu'il affirme qu'elles peuvent être « à la fois quelque chose et véritablement rien »⁵. Cet argument, qu'il emprunte au discours newtonien, est crucial et il s'en sert à nouveau dans le paragraphe qu'il n'hésite pas à nommer « Démonstration des infiniment petits à la manière des anciens »⁶. Ici, il explique que la nature de la différentielle d'être *evanescentia divisibilia* conduit à être « plus petite que quelque grandeur que ce soit ». C'est sur cela que s'appuient les démonstrations à la manière des Anciens pour prouver que « non obstant leur différentielle ces deux grandeurs peuvent être

¹ Les définitions de II à IV : quantité de mouvement, force qui réside dans la matière et force imprimée, *Principia*, *op. cit.*, p. 1-2.

² Annexe, *op. cit.*, p. 356.

³ *Ibid*, p. 356.

⁴ *Ibid*.

⁵ *Ibid*, p. 356.

⁶ *Ibid*, p. 357.

prises pour égales entr'elles »¹. Mais cela n'est pas l'apanage des démonstrations à l'ancienne mais de toute démarche de géomètre :

la même chose se pratique encore par tous les Geometres non seulement dans la doctrine des indivisibles, mais aussi dans celle des inscriptions et circoncriptions, la figure circonscrite passant pour l'inscrite, lorsqu'elles different de moins de quelque grandeur donnée que ce soit, negligant ainsy leur difference infiniment petite. C'est ainsi qu'en ont usé M^{rs} Pascal dans toutes les lettres de A. Dettonville, M^r de Roberval dans son traité des indivisibles, dans celui de la Trochoïde (de la Roulette) et dans la lettre de Torricelli, M^r de la Hire dans ses Epicycloïdes ; et dans son traité des Méchaniques; M^r Huguens dans son traité *Horologio Oscillatorio* ; et ainsy une infinité d'autres geometres que je pourrois encore rapporter, entre lesquels se trouve M^r de Fermat luy même dans tout ce qu'il a fait de *Linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* ; et même dans sa méthode des tangentes approuvée par M^r Rolle, ainsy que je le prouveray s'il persiste a en douter².

Dans certains des ouvrages cités, les auteurs utilisent effectivement des indivisibles ou des infiniment petits (Pascal, Roberval, certains passages de Huygens), mais d'autres présentent leurs résultats avec des démonstrations à l'ancienne (La Hire, Fermat). Varignon passe outre ces nuances, il veut convaincre que la conception de la différentielle comme une quantité « évanescente et divisible », permet de concilier les pratiques quelles qu'elles soient : la manière des Anciens, les indivisibles de Roberval ou de Pascal, les infiniment petits de Huygens, les quantités « plus petites que quelle grandeur que ce soit ». La notion d'évanescence, empruntée à Newton, permet à Varignon d'unifier toutes les notions présentes dans les pratiques qui le précèdent ou qui lui sont contemporaines. Il légitime ainsi la pratique de ces quantités en la plaçant dans la lignée des géomètres dont il hérite.

Or Rolle accuse les différentielles de ne pas être réelles, il critique une pratique qui conduit à les considérer comme tantôt existantes et tantôt inexistantes au bon gré de leur utilisateur. Pour Varignon, ces critiques découlent d'une mécompréhension de la caractérisation de la différentielle comme évanescente : « ce calcul ne les considère que comme s'aneantissant mais non pas comme aneanties, c'est-à-dire comme à la veille d'être tout à fait aneanties, *non antequam evanescunt, non postea, sed cum evanescunt (...)* ».

¹ *Ibid*, p. 357.

² PVARIS, t. 19, fol 316.

Suite à l'intervention de Varignon, Rolle fournit des réponses et continue à lire des mémoires contre le calcul leibnizien. Comme nous allons le voir plus avant, dans ses lectures, il ne reprend pas les critiques adressées aux fondements du calcul mais s'attache plutôt à montrer par des exemples que son usage conduit à l'erreur. La virulence du débat s'accroît au fur à mesure des semaines à l'Académie. Il n'est plus uniquement l'affaire de Rolle et Varignon. Bien qu'ils en soient les principaux acteurs, d'autres académiciens s'en mêlent. L'Abbé Galloys lit le 19 février 1701 un écrit « contre la géométrie des infiniment petits »¹, lecture suivie, lors de la séance suivante, par celle de Fontenelle à propos des « principes métaphysiques de la géométrie des infiniment petits »². Pendant la séance du 9 juillet 1701, le Père Gouye lit « un nouvel écrit sur l'infiniment petit, où il prétendait concilier les deux parties »³.

Au sein de l'Académie, cette joute dure plus d'un an. Le climat de dispute va à l'encontre des règles de conduite entre académiciens, il fatigue la compagnie, de sorte que le 3 septembre 1701, une décision est prise :

comme la dispute des infiniment petits traînait trop en longueur Mr l'Abbé Bignon a nommé pour commissaires devant qui tout se passera, le P. Gouye, MMrs Cassini et de la Hire⁴.

À la séance suivante, le 7 septembre, Parent lit un écrit « où il soutient les Principes généraux de la Geometrie des Infiniment petits »⁵. Cet écrit n'est pas retranscrit.

1.1) La position de Leibniz : l'épisode au *Journal de Trévoux*

En novembre 1700, Jacques Bernoulli publie un article dans les *Acta*⁶ dans lequel il décrit une méthode pour obtenir les rayons de courbure des courbes algébriques. Il cache volontairement la voie qui l'a conduit à l'obtention de sa règle et il propose de la regarder comme une « énigme » que les curieux peuvent chercher à

¹ Séance du 19 février 1701 (non retranscrite).

² Séance du 23 février 1701 (non retranscrite).

³ Séance du 9 juillet 1701, *PVARS*, tome 20, fol. 235R.

⁴ Séance du 3 septembre 1701, *PVARS*, tome 20, fol. 335R.

⁵ Séance du 7 septembre, *PVARS*, tome 21, 336R.

⁶ Bernoulli, Jacques, « Nova methodus expedite determinandi radios osculi seu curvatura in curvis quibusvis algebraicis », *AE*, novembre 1700, p. 508-511.

résoudre en attendant qu'il en fournisse l'origine¹. Un article du *Journal de Trévoux* des mois de mai-juin 1701 est consacré à cette nouvelle règle². Elle y est décrite intégralement. Avant d'entamer cette explication, le recenseur, qui s'avère être le jésuite académicien Thomas Gouye, rappelle les avancées en matière de géométrie depuis le début du XVII^e, il cite Cavalieri, Wallis, Fermat. Cependant, il attaque la nouvelle analyse, « connue en France sous le nom d'Analyse des infiniment petits ». Elle prétend avoir « porté les choses plus loin » en « pénétrant jusques dans l'infini, & n'embrassant pas seulement l'infini, mais l'infini de l'infini ou une infinité d'infinis [il s'agit d'un passage de la Préface de l'AI] »³, cependant, malgré « sa fécondité admirable », elle manque « dans ses démonstrations cette évidence que l'on attend »⁴. Selon lui, la démarche consistant à chercher à obtenir de plus en plus de résultats sans que la voie pour y parvenir soit sûre, c'est-à-dire évidente et indemne d'inexactitude, n'est que de la surenchère. Dans ce climat de querelle à l'Académie des sciences, l'« énigme » posée par Jacques Bernoulli est interprétée immédiatement comme une provocation à l'encontre de ceux qui continuent à préférer d'autres méthodes, celles que les promoteurs du nouveau calcul jugent dépassées. Gouye suppose que la voie qui a conduit Jacques Bernoulli à l'obtention de sa règle a un lien avec la nouvelle analyse, à laquelle il n'adhère pas :

Il y a bien l'apparence que l'énigme de M.B. n'est qu'un déguisement du calcul différentiel : ceux qui sont accoutumés aux anciennes manières de raisonner en Géométrie ont de la peine à les quitter pour suivre des méthodes si abstraites, ils aiment mieux n'aller pas si loin que de s'engager dans les nouvelles routes de l'infini de l'infini, de l'infini, où l'on ne voit pas toujours assez clair autour de soy, & où l'on peut aisément s'égarer, sans qu'on s'en aperçoive. Il ne suffit pas en Géométrie de conclure, il faut évidemment qu'on conclut bien⁵.

¹ « quod vero in artificium inventionis ipsum curiosus inquisit, hoc sibi ad solvendum velut aenigma proponat, donec solututum dederit ipse », *ibid*, p. 511.

² « Nouvelle méthode pour déterminer aisément les rayons des développées dans toute sorte de courbe algébrique. Par Monsieur Jacques B. Acta Eruditorum, Mensis Novembris anni 1700. Lipsiae », *Mémoires pour l'histoire des sciences et des Beaux arts, recueillis par l'ordre de SA.S. Mr. Le Duc de Maine, mois de mai et de juin, seconde édition augmentée de diverses remarques et de plusieurs articles nouveaux*, Amsterdam, chez Jean-Louis Delorme, 1701, p. 422-430.

³ *Ibid*, p. 423.

⁴ *Ibid*.

⁵ *Ibid*, p. 430.

Leibniz se sent immédiatement concerné par le contenu de cet article et il rédige une lettre de réponse pour nuancer les propos qui y sont avancés. Celle-ci est publiée dans le même journal aux mois de novembre-décembre 1701¹. Il souligne que non seulement la nouvelle analyse conduit à des découvertes considérables mais qu'elle « en relève la beauté ». Quant à sa « sûreté », il conseille la lecture de l'ouvrage du Marquis de l'Hospital qui « pourra donner satisfaction ». Aux explications exposées dans l'AI, il souhaite ajouter un commentaire liée à la pratique de l'analyse des infinis :

On n'a pas besoin de prendre l'infini icy à la rigueur, mais seulement comme lors qu'on dit dans l'Optique que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment éloigné, & ainsi sont estimez paralleles. Et quand il y a plusieurs degrez d'infini ou infiniment petit, c'est comme le Globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, & une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiametre du Globe de la terre. De sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamètre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantitez aussi grandes & aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée : de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions qui sont plus directes dans notre methode & plus conformes à l'art d'inventer².

Dans ce passage, Leibniz explique que pour pratiquer le calcul, il n'est pas nécessaire de prendre les infiniment petits de manière « rigoureuse ». Nous avons examiné le lemme des incomparables formulé par Leibniz en 1689³. Il reprend le même type de comparaisons. En ce qui concerne le calcul et la légitimité de négliger des quantités par rapport à d'autres, il explique qu'on aboutit aux mêmes effets calculatoires lorsqu'on considère que le rapport entre une boule et le diamètre de la terre ou celui de la terre et la distance des fixes est un infiniment petit ou lorsqu'on considère que le rapport entre la boule et la distance des fixes est un infiniment infiniment petit. Il affirme qu'en procédant ainsi, l'erreur pourra être rendue aussi petite qu'il est souhaité puisqu'il est possible de prendre des quantités aussi petites que l'on veut. De sorte que cette manière de procéder ne diffère de la manière des Anciens que dans « les expressions ». Les infiniment petits permettent d'abrèger le

¹ Leibniz, G.W., « Mémoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul différentiel », *Journal de Trévoux*, tome 1, 1968, p. 404.

² *Ibid.*

³ Voir le chapitre 4.

discours et il faut les considérer comme des paraphrases¹. C'est aux yeux de Leibniz ce qui légitime pleinement son analogie.

Cette réponse surprend les membres de l'Académie alors que la crise bat son plein et que le silence vient d'être promulgué. Rappelons que la position du père Gouye était celle d'un apaisement au sein de l'institution le 9 juillet 1701 lors de la lecture « d'un nouvel écrit sur les infiniment petits où il prétendait concilier les deux parties »². Mais lui, comme les autres membres concernés par la dispute, partisans ou opposants du calcul, se focalisent sur la première partie de la citation de Leibniz : ils ne comprennent pas qu'il prétende qu'une différentielle soit une quantité fixe et déterminée de la même manière que la Terre ou une boule, ce qui ne permet surtout pas de conclure à l'existence de quantités réellement infinies. Dans le même article, à la suite de la réponse de Leibniz, un commentaire suit, écrit en italique, dans lequel Gouye exprime son incompréhension ainsi que celle de ses pairs :

Quelques géomètres, qui ont examiné avec beaucoup de soin l'analyse des infiniment petits de Mr. Le Marquis de l'Hôpital, & qui font même profession de suivre sa méthode, disent qu'il y faut prendre l'infini à la rigueur, & non pas comme Mr. Leibnitz l'explique icy³.

En raison des difficultés que soulève le propos leibnizien, Varignon adresse une première lettre à Leibniz le 28 novembre 1701, dans laquelle il prie le savant allemand d'éclaircir les propos de son écrit paru dans le *Journal de Trévoux* :

M. l'Abbé de Galloys, qui est celui qui le [Rolle] fait agir, repand ici que vous avez déclaré n'entendre par différentielle ou Infiniment petit, qu'une grandeur à la vérité tres petite, mais toujours fixe et déterminée, telle que la Terre par rapport au firmament, ou un grain de sable par rapport à la Terre (...)

Varignon ne comprend pas pourquoi Leibniz fournit une explication des différents genres d'infinis en faisant une analogie avec des exemples tous d'ordre fini.

¹ On pourra consulter à ce sujet : Jesseph, Douglas, M., « Leibniz on the foundations of the calculus : the question of the reality of infinitesimal magnitudes », *Perspectives of Science*, 1998, vol. 6, n° 1-2, p. 30, « Truth in Fiction : Origins and Consequences of Leibniz's Doctrine of Infinitesimal Magnitudes » dans Goldenbaum, Ursula, Jesseph Douglas (edit), *Infinitesimal Differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, W de G, Berlin, 2008, p. 215-234.

Rabouin, David, « Leibniz's rigorous foundations of the method of indivisibles », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, op. cit., p. 361

² 9 juillet 1701, PVARs, tome 20, fol. 285R.

³ « Mémoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul différentiel », op. cit., p. 404.

Il est embarrassé car cette déclaration conforte les ennemis du calcul différentiel sur le manque de son bien-fondé. Lui-même avait présenté les différentielles tout autrement pendant la séance académique du 7 août :

au lieu que j'ay appelé Infiniment petit ou différentielle d'une grandeur, ce en quoy cette grandeur est Inépuisable. J'ay, dis-je, appelé Infini ou Indéfini, tout Inépuisable ; et Infiniment ou Indéfiniment petit par rapport à une grandeur, ce en quoy elle est inépuisable. D'où j'ay conclu que dans le calcul différentiel, Infini, Indéfini, Inépuisable en grandeur, plus grand que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement grand ne signifient que la même chose, non plus qu'Infiniment ou Indéfiniment petit, plus petit que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement petit.

En attendant la réponse de Leibniz¹, Varignon écrit à Jean Bernoulli le 20 janvier 1702². Il lui demande d'insister auprès de Leibniz pour obtenir une réponse à des questions précises :

Obligez, je vous prie, M. Leibnitz à s'expliquer incessamment sur cela, & de nous dire 1°Ce qu'il entend par son Infini à la rigueur ; le mot d'infini a deux sens bien differens. Le premier est celuy des mathematiciens & des autres philosophes, qui appellent Infini tout ce qui est inépuisable dans le sens qu'ils le disent infini.

Puis, il cite des passages d'Aristote dans lesquels le philosophe définit l'infini potentiel et il indique que c'est à cette définition qu'il s'est référé dans sa réponse à Rolle du 7 août. L'autre sens est celui d'un infini « qui comprend tout » et il souligne qu'à partir de ce sens il n'est pas possible de concevoir des infinis de différents ordres. Il espère que « l'infini à la rigueur » corresponde au deuxième sens car ainsi « nos ennemis seront battus »³. En attendant la réponse de Leibniz, Varignon explique aux objecteurs que le savant allemand « ne fait là qu'une comparaison grossière pour se faire entendre aux moins intelligens » puisqu'il ne s'agit ici que de grandeurs finies et comparables entre elles contrairement aux différentielles qui sont incomparables par rapport à leurs intégrales.

¹ Leibniz reçoit le 2 février 1702 la lettre du 28 novembre 1701 et il y répond immédiatement.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 20 janvier 1702, *op. cit.*, p. 310.

³ *Ibid*, p. 310.

Leibniz répond dès réception de la lettre, le 2 février 1702¹. Il adresse cette lettre non seulement à Varignon mais aussi aux membres de l'Académie, concernés par le débat, et dont il sait qu'ils attendent des éclaircissements sur le statut des infiniment petits du calcul différentiel :

Je vous suis bien obligé, Monsieur, & à vos sçavans, qui me font l'honneur de faire quelque reflexion sur ce que j'avois écrit à un de mes amis².

Cette lettre est quasiment publiée en entier dans le *Journal des Sçavans* du mois de mars³.

Tout d'abord il défend l'autonomie de son calcul : « on n'a pas besoin de faire dépendre l'Analyse Mathématique des controverses mathématiques », c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de « s'asseurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, en comparaison des nôtres ». C'est le même type de propos qu'il avait avancé à Jean Bernoulli vers 1698. Par-là, il veut faire comprendre que dans la pratique calculatoire il est possible de mettre entre parenthèses la nature des différentielles ; la fécondité du procédé n'en sera pas affectée. C'est pourquoi il s'est autorisé, dans l'article du *Journal de Trévoux*, « d'expliquer l'infini par l'incomparable » et qu'on peut « entendre comme on veut, soit comme des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres »⁴. Il souligne que cela ne conduit nullement à considérer les différentielles comme des quantités « déterminées ou fixes ». Cet argument est renforcé plus avant dans la réponse, par une comparaison avec l'usage des racines imaginaires :

D'où il s'ensuit que si quelqu'un n'admet point les lignes infinies & infiniment petites à la rigueur métaphysique & comme des choses réelles, il peut s'en servir seurement comme de notions ideales qui abregent le raisonnement [c'est-à-dire à sa manière] ; semblables à ce qu'on appelle Racines imaginaires.

Les différentielles, tout comme les imaginaires, ne sont pas des choses réelles mais des notions idéales. Dans la lettre suivante, il explique qu'il avait déjà il y a

¹ Lettre de Leibniz à Varignon du 2 février 1702, *op. cit.*, p. 10.

² *Ibid.*

³ « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de luy dans les Memoires des mois de Novembre et Decembre derniers », *JS*, 20 mars 1702, p. 183-186.

⁴ *Ibid.*, p. 283.

quelques années déclaré à Jean Bernoulli son point de vue sur le statut des infiniment petits¹, et qu'il croyait déjà que les infinis ou les infiniment petits pouvaient être pris « pour des fictions estant utiles et fondées en réalités »². Dans la lettre du mois de juin suivant, il affirme à Varignon qu'il n'est pas persuadé qu'il faille considérer les infiniment petits autrement que « comme des choses idéales ou des fictions bien fondées³ ». Dans la lettre du 2 février 1702, il insiste sur la nécessité de les considérer comme telles. En effet, c'est ainsi que les imaginaires servent à « exprimer analytiquement des grandeurs réelles » – il cite la solution analytique de la trisection de l'angle –, et que les différentielles établissent « le calcul des transcendentes ». Les Anciens « faute d'un calcul » ne parvenaient qu'à des « vérités débarassées », c'est-à-dire qu'elles ne montraient pas la voie de l'invention contrairement à ce que conduit l'analyse de l'infini grâce à l'intervention des « différences qui sont sur le point de s'évanouir ». Cette analyse rend possible le calcul sur les transcendentes et de manière générale parvient à une connaissance du continu.

Leibniz insiste bien sur le fait que comprendre les différentielles comme des notions idéales ne conduit pas à une « dégradation » de la science de l'infini qui serait « réduite à des fictions ». Pour appuyer son affirmation, il ajoute un argument essentiel :

On peut dire de même que les infinis & infiniment petits sont tellement fondez que tout se fait dans la Géométrie, & même dans la nature, comme si c'étoient des parfaites realitez : Témoins non seulement notre Analyse Geometrique des Transcendantes, mais encore ma loy de continuité, en vertu de laquelle il est permis de considerer le repos, comme un mouvement infiniment petit (...). Cependant on peut dire en general que toute la continuité est une chose ideale, & qu'il n'y a jamais rien dans la nature qui ait des parties parfaitement uniformes : Mais en récompense le réel ne se laisse pas se gouverner parfaitement par l'ideal & l'abstrait ; & il se trouve que les Regles du fini réussissent dans l'infini, (...)⁴

Ainsi, pour concilier le continu et le discontinu, le fini et l'infini, l'usage du « comme si » est requis. La continuité est bien une chose idéale mais qui donne accès à la connaissance du réel : « ne se laisse gouverner parfaitement par l'idéal et

¹ Voir chapitre précédent, le § « L'échange avec Jean Bernoulli : « réalités » vs fictions ».

² Lettre de Leibniz à Varignon du 14 avril 1702, *op. cit.*, p. 51.

³ Lettre de Leibniz à Varignon du 20 juin 1702, *op. cit.*, p. 103.

⁴ Lettre de Pierre Varignon à Leibniz du 2 février 1702, *op. cit.*, p. 13.

l'abstrait ». Les différentielles ne sont pas des quantités déterminées : en les considérant comme des notions idéales, elles traduisent « les affections des grandeurs » et permettent la saisie adéquate de la géométrie des transcendentes.

Dans la lettre à Jean Bernoulli du 22 mars 1702, Varignon explique que Gouye et la Hire semblent satisfaits de la réponse de Leibniz. Gouye ne comprend pas pourquoi Leibniz s'est si mal expliqué dans sa réponse au *Journal de Trévoux* concernant le statut de l'infini rigoureux :

Le P. Gouye a été fort surpris d'y voir que l'infini rigoureux que M. Leibnitz dit inutile pour son calcul, n'est qu'un infini réel et existant, & non pas l'infini idéal ou l'inépuisable per mentem (...)¹.

1.2) Le « Système de l'infini » sans fondements

Les critiques adressées par Rolle aux fondements n'ont pas été retranscrites mais elles font l'objet de deux écrits publiés en 1703. L'un est un mémoire académique intitulé *Du nouveau système de l'infini*² (*SI*). Il est constitué de 25 pages dont seize développent et précisent les critiques des fondements du « système de l'infini ». L'autre écrit, intitulé *Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences touchant le problème général des tangentes*³ (*Remarques*). L'approbation, daté de mai 1702, est signée par Thomas Gouye qui ni a « rien trouvé qui empêche qu'elles soient imprimées, l'Auteur pourra néanmoins retrancher »⁴. Il est long de 47 pages et divisé en 14 articles : les quatre premiers concernent les présupposés du calcul leibnizien et « l'origine de la méthode ordinaire des tangentes » que le calcul leibnizien ne fait que « déguiser ».

Les réponses de Varignon certes permettent de connaître l'énoncé des difficultés soulevées par Rolle, mais l'analyse de ces deux écrits est fondamentale pour préciser davantage les points d'appui de Rolle dans la formulation de ses critiques. Au début de *SI*, Rolle explique ce qui l'a conduit à écrire ce mémoire :

¹ Lettre de Pierre Varignon à Jean Bernoulli du 22 mars 1702, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 312.

² Rolle, Michel, « Du nouveau système de l'infini », *MARS*, 1703, p.312.

³ Rolle, Michel, *Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences touchant le problème général des tangentes*, Chez Jean Boudot, Paris, 1703. Dorénavant « *Remarques* »

⁴ *Remarques*, première page, non numérotée.

On avoit toujours regardé la Géométrie comme une Science exacte, & même comme la source de l'exactitude qui est répandue dans toutes les autres parties des Mathématiques. On ne voyoit parmi ses principes que les véritables axiomes : tous les théorèmes & tous les problèmes qu'on y proposoit étoient ou solidement démontrés, ou capables d'une solide démonstration ; & s'il s'y glissoit quelques propositions ou fausses ou peu certaines, aussi-tôt on les bannissoit de cette Science¹.

Cependant

Il semble que ce caractère d'exactitude ne regne plus dans la Géométrie depuis que l'on y a mêlé le nouveau Système de Infiniment petits².

Rolle accuse l'analyse de l'infini de polluer par de l'inexactitude la véritable Géométrie. Ce propos est repris dans *Remarques* :

C'est ce prétendu Algorithme qui a été comme le berceau de la Géométrie transcendante, & l'on voudroit aujourd'hui qu'il fut aussi le tombeau de la véritable Géométrie.

Pourtant, il reconnaît que « d'habiles géomètres » non seulement s'en servent depuis son apparition mais prétendent qu'il est « absolument nécessaire » pour résoudre certains problèmes. Rolle affirme que c'est cette situation contradictoire qui l'a conduit à examiner le système puis à proposer des difficultés. Puisque ces dernières sont liées aux suppositions de l'AI, il explique qu'en premier lieu il exposera ces suppositions.

Les suppositions du « système » et les difficultés qui en découlent

Les suppositions du « système de l'infini » sont décrites sur cinq pages. Rolle annonce qu'il va décrire le système comme il a été proposé dans l'AI mais qu'il ne suivra pas le même ordre parce que celui « que l'on y a gardé, empêche d'en appercevoir les plus grandes difficultés »³. De plus, aux deux suppositions de l'AI il en ajoute quatre qui d'après lui n'y ont pas été explicitées alors que cela lui semble nécessaire.

¹ *SI, op. cit.*, p. 312.

² *Ibid.*

³ *SI, op. cit.*, p. 313

Les trois premières suppositions concernent l'existence des différences de tout ordre et de leur figuration. Il renvoie au texte ou aux figures¹ de l'*AI* sur lesquelles sont représentées ces différences de tout ordre. Il explique que ces suppositions correspondent à un passage de la Préface de l'*AI* dans lequel y est explicitement affirmé l'existence d'infiniment petits de tout ordre.

La quatrième supposition correspond à la première de l'*AI*, Rolle pointe immédiatement le paradoxe auquel elle conduit : « le tout seroit égal à la partie »². La cinquième supposition correspond à la deuxième de l'*AI* et elle est énoncée à l'identique. Pour ces deux dernières, Rolle explique que ce sont des « hypothèses mathématiques » et qu'elles ne sont pas particulières au « système ». Cependant, il lui semble que dans l'*AI*, elles ne sont pas considérées comme de « pures suppositions » ou « hypothèses mathématiques » puisqu'il est dit dans la Préface qu'elles peuvent être démontrées à la manière des Anciens. Nous avons examiné le sens du terme « supposition » en nous référant à l'esprit de Port-Royal³. Il s'agit d'un énoncé qui est suffisamment clair pour qu'il ne soit pas nécessaire de le démontrer et sur lequel s'appuie le reste d'un traité pour énoncer et démontrer des propositions plus composées. Il semble ici que Rolle n'ait pas la même conception de ce que signifie le mot « hypothèse » ou celui de « supposition ». Ainsi, Rolle ne partage pas non plus les conceptions de Port-Royal concernant la manière de présenter la géométrie, contrairement à l'auteur de l'*AI*. Par-là, il discrédite l'analyse des infinis en tant que système mathématique. Il reprend ainsi l'idée, initiée plus haut, selon laquelle la géométrie des infinis n'est qu'un faux-semblant de géométrie car elle ne respecte pas les modalités de cette discipline. Il est possible que pour cette raison, il préfère nommer l'analyse des infinis non pas par le terme « géométrie » – utilisée au sein de l'Académie – mais par celui de « système » qui, à l'époque, sert davantage à désigner des constructions dans le domaine de l'astronomie⁴. Il convient de remarquer qu'il s'attache particulièrement à critiquer l'analyse des infinis telle qu'elle est présentée chez l'Hospital. Il attaque l'ouvrage en ce qui concerne la forme puisqu'il considère que des suppositions sont omises et que l'ordre n'est pas satisfaisant.

¹ Correspondent aux figures 3, 4, 46 et 46 de *AI*.

² *Ibid*, p. 315.

³ Voir chapitre 5.

⁴ « Supposition d'un ou de plusieurs principes, d'où l'on tire des conséquences, & sur lesquels on établit une opinion, une doctrine, un dogme, &c. *Le système de Ptolomé, le système de Copernic. il a trouvé un nouveau système* », *Dictionnaire de l'Académie française*, 1^{ère} édition, 1694.

La sixième et dernière supposition s'énonce ainsi : « On suppose que les Infiniment petits sont réels, divisibles à l'infini & infiniment variables »¹. Bien qu'elle n'apparaisse pas explicitement dans l'AI, Rolle précise qu'elle suit des suppositions précédentes. Il souligne que Varignon a affirmé cette supposition lors de la séance académique d'août 1700.

Ayant rappelé les suppositions sur lesquelles s'appuie l'analyse des infinis, particulièrement celle diffusée dans l'ouvrage de l'Hospital, il peut désormais s'attaquer aux difficultés auxquelles il considère qu'elles conduisent.

L'infiniment petit VS zéro absolu dans la méthode des tangentes

Les deux premières difficultés sont liées au statut de l'infiniment petit qui entre en jeu dans la pratique du calcul leibnizien. La première difficulté découle de l'affirmation de « réalité » et de divisibilité qu'on attribue aux infiniment petits. Rolle explique :

Que l'on tombe en contradiction, lorsqu'on suppose que ces Infiniment petits sont réels et divisibles. (...) chaque Infini est un zéro absolu, comme la différence de 4 à 4, ou de 5 à 5, &c Et par conséquent ils n'ont aucune étendue et ne sont plus divisibles².

Il illustre cette affirmation à l'aide de deux « preuves » que nous développons.

Dans la première preuve, il s'intéresse à une parabole ordinaire d'équation :

$$ax = yy \quad (1)$$

selon les « règles de l'analyse des infiniment petits », il obtient « l'égalité différentielle »

$$adx = 2ydy \quad (2)$$

Les dx et dy représentent des infiniment petits mais ils expriment aussi la différence entre deux abscisses et deux ordonnées qui seraient distinctes : ainsi, ils sont donc bien des « quantités réelles »³. L'égalité de la parabole s'applique donc aussi au point de coordonnées $x + dx$ et $y + dy$, ce qui conduit à :

$$ax + adx = yy + 2ydy + dy^2 \quad (3)$$

En appliquant la règle propre à l'algèbre « choses égales à choses égales », il ôte les deux premières égalités de la troisième puis trouve $dy^2 = 0$ donc $dy = 0$, par

¹ *SI, op. cit.*, p. 316.

² *Ibid*, p. 317.

³ *Ibid*, p. 318.

conséquent, d'après (2), $dx = 0$: « Mais ici 0 est ici l'expression du zéro absolu, ou d'un rien tel que la différence de 4 à 4 » et donc les « infiniment petits sont des riens absolus »¹.

Les remarques de Rolle ne sont pas nouvelles. Nous avons examiné² de quelles manières est interprété le « e » de la méthode de Fermat par certains de ses premiers lecteurs –Beaugrand, Hérigone, Van Schooten – : ils sont d'accord pour considérer « e » comme zéro.

Par ailleurs, dans le contexte de critiques du calcul différentiel, ce type d'exemples n'est pas sans rappeler ceux de Nieuwentijt lorsqu'il attaque le calcul leibnizien en 1695³. Les écrits du Néerlandais sont connus de Rolle puisqu'il cite sa référence en *marginalia* lorsque, dans *Remarques*, il commente la méthode de Barrow⁴. Comme Nieuwentijt, Rolle applique les règles de l'algèbre au calcul leibnizien sans se demander de quelle manière celles-ci peuvent ou non se prolonger⁵. Rolle ne conçoit pas que la manipulation des infiniment petits ne suit pas à la lettre les règles de l'algèbre et donc il remet en question la première supposition de l'AI

(...) on peut toujours se servir des règles générales de l'algèbre pour résoudre le problème qu'expriment les égalités, et il se trouve qu'on ne saurait éviter la contradiction, quand on attribue de l'étendue aux infiniment petits⁶.

Il fait suivre cet exemple d'un autre du même type⁷ pour conclure à nouveau :

Non seulement on s'assure par cette règle que les Infiniment petits sont toujours des riens absolus dans l'égalité différentielle ; mais on peut encore s'assurer que ce sont des riens absolus par leur institution, & pour cela il faut voir la véritable origine de cette égalité. Ce qui se peut faire par le moyen de ce Problème⁸.

¹ *Ibid*, p. 318.

² Voir dans notre chapitre 1, le §3.2) « La nullité de e : évidente ? ».

³ Chapitre 4, 2.3), *Le statut des infiniment petits, les déclarations de Leibniz*. Nieuwentijt considère entre autres l'égalité de l'hyperbole $2rx + xx = yy$.

⁴ En marge : « Voir sur cela M. Neuwentiit dans son Analyse des infinis Chap. I art. 5.6.7.8 », *Remarques*, p. 4.

⁵ Mancosu, Paolo, *Philosophy of mathematics & mathematical practice in the seventeenth century*, *op. cit.*, p. 163 et 173.

⁶ *SI*, p. 318. Berkeley, dans l'*Analyste*, donne des exemples similaires et attribue le résultat correct final à une compensation d'erreurs, Blay, Michel, *op. cit.*, p. 248-251.

⁷ Il considère l'égalité $yy = ax - xx$ qui conduit à $dy^2 = -dx^2$.

⁸ *Ibid*, p. 320.

Rolle affirme que l'obtention de l'égalité différentielle a une « véritable origine ». Il annonce que l'examen du problème des tangentes permettra de conclure, encore plus sûrement, que les différentielles ne sont rien d'autre que des zéros absolus.

Dans les *Remarques*, il destine plusieurs pages à émettre des considérations sur certaines méthodes de tangentes de géomètres reconnus : Descartes, Fermat et Barrow :

Messieurs Descartes et de Fermat, sont les premiers qui ont entrepris de trouver des Regles generales pour ces deux Methodes [de tangentes et de *Max. & Min.*]. Ils ont d'abord réduit ce Problème des lignes courbes, à un Problème de lignes droites, & celui-cy en Problème d'Algèbre. Pour cela ils ont supposé deux abscisses avec leurs appliquées, & que la *difference* de ces abscisses est indéterminée : le premier fournit une Regle pour trouver le cas où les deux abscisses sont *entierement égales*. Le second en fournit une autre pour faire que la *difference* de ces deux abscisses soit *entierement détruite*. Ainsi les premiers principes en sont les mêmes ; & de-là il résulte une Egalité dans chacune de ces deux Methodes, qui fournit toutes les tangentes ordinaires des lignes geometriques de tous les genres, lorsque le point proposé est donné sur la courbe. Delà aussi s'ouvre un moyen pour trouver les Tangentes extraordinaires de ces lignes, & que les Tangentes des autres lignes qu'on appelle Méchaniques ou *transcendantes*¹.

Ce passage est très intéressant pour saisir de quelle manière Rolle hérite des méthodes de Descartes et de Fermat. L'algébriste explique que les deux géomètres ont réduit un problème de lignes courbes à l'algèbre en suivant la méthode de *La Géométrie*. Le problème de recherche de tangentes s'est réduit ainsi dans les deux méthodes à poser comme indéterminée la différence de deux abscisses. Dans les deux méthodes, le cas de la tangente correspond à un absolu : soit à une coïncidence « entière », soit à une « entière destruction ». Cette étape correspond d'ailleurs exactement, dans les opuscules de Fermat, à celle dans laquelle apparaît le terme latin « *evanesco* » qui traduit la disparition des termes homogènes, c'est-à-dire celle nommée par « élision des homogènes ». Rolle indique que ces deux méthodes sont différentes « dans la figure ». En effet, Descartes recherche le rayon d'un cercle baisant alors que Fermat recherche une sous-tangente. Cependant, il rappelle que

¹ *Remarques*, p. 2.

dans la lettre à Hardy¹, Descartes a « expliqué » la méthode de Fermat en désignant la différence des abscisses par un « segment de la ligne de la figure » et par la lettre e . Le problème général de sécante – « une droite qui rencontre une courbe en deux points² – se réduit algébriquement au cas de la tangente lorsque « la *différence* indéterminée des abscisses est prise pour un *zero absolu* »³. Ainsi, Rolle rend proches ces deux méthodes car son interprétation les classe toutes les deux dans les méthodes algébriques. Les deux géomètres réduisent le problème géométrique de sécante au cas particulier de la tangente en rendant une indéterminée « entièrement détruite » ou égale à un « zéro absolu ». De plus, il affirme que ces méthodes, non seulement traitent les « tangentes ordinaires », mais qu'elles permettront de trouver, si ce n'est pas déjà le cas, les tangentes « extraordinaires »⁴ et celles des courbes transcendentes, qui sont justement celles que le calcul leibnizien prétend traiter.

Dans *SI*⁵, Rolle présente sa méthode de tangente. Il veut démarquer sa méthode de celle des infiniment petits et assurer que la sienne ne provient pas du nouveau calcul.

Suivons Rolle dans sa démarche. Il considère une courbe algébrique EFO , une sécante FE qui rencontre l'axe OB en un point A , il nomme :

$AB = s, OB = x, BC = FD = z, FB = DC = y, ED = v, FE = h$ et $AF = n$, ainsi, $EC = v + y$.

En vertu de la similitude des triangles ABF et FDE , il obtient les deux égalités :

$$z = \frac{vs}{y} \text{ et } h = \frac{nv}{y}$$

Ces égalités correspondent au cas de la sécante au point E déterminé par la donnée de v .

À titre d'exemple, il considère que la courbe EFO est une parabole simple de paramètre p . En considérant les points F et E de cette parabole, il peut écrire :

$$px = yy$$

¹ En marge : « Lettres de M. Descartes, tome 3 lettre 61 ».

² *Ibid.*

³ *Ibid.*

⁴ Il s'agit probablement ici de recherche de tangente en un point double puisque, comme on le verra plus loin, Rolle va remettre en question la capacité du calcul différentiel de l'AI à trouver les deux tangentes en un point d'une courbe, alors que sa méthode algébrique le permet.

⁵ *SI, op. cit.*, p. 320.

et

$$px + pz = vv + 2vy + yy$$

Il soustrait ces deux égalités et il obtient : $pz = vv + 2vy$

En substituant z , il obtient :

$$s = \frac{2yy+vy}{p}$$

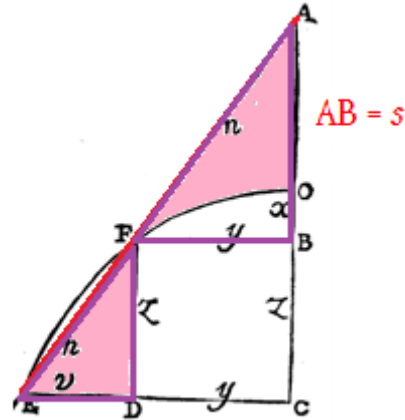


fig. 128

Ainsi, comme y est connu, il énonce l'alternative suivante :

- soit v est une quantité positive ou négative et dans ce cas cette formule « fournit les sécantes requises »¹.
- soit v prend la valeur égale au « zéro absolu », dans ce cas le monôme vy « se détruit » et $s = \frac{2yy}{p}$

Il propose ensuite une interprétation géométrique. Comme $v = 0$, alors $z = 0$ et $h = 0$, de sorte que pour avoir cette égalité, il faut « détruire » entièrement les trois côtés du triangle FDE . L'égalité $s = \frac{2yy}{p}$ implique que $EF = h$ soit anéanti de sorte que la droite AF cesse d'être sécante et que son prolongement ne coupe pas la parabole :

D'où il suit que la sécante devient tangente lorsque tout le triangle FDE se trouve entièrement détruit ; & que cette tangente, pour être déterminée par le moyen de l'égalité [$s = \frac{2yy}{p}$], suppose nécessairement que ce triangle soit anéanti².

Dans cette description, le passage de la position sécante à la position tangente n'est pas présenté comme un passage continu, mais plutôt comme un basculement.

¹ *Ibid*, p. 321.

² *Ibid*, p. 322.

« Le chemin ordinaire de l'algèbre », préconisé dans *La Géométrie* aboutit à une disjonction de cas : le cas de la tangente correspond à un zéro absolu. Rolle en décrivant une méthode des tangentes, semblable en forme à l'explication cartésienne de la règle de Fermat, s'affilie à Descartes et à Fermat, pour lesquels la considération d'infiniment petits est inexistante. Dans *SI*, il insiste sur l'inutilité d'introduire des infiniment petits puisque cela ne change rien au résultat :

Delà il paroît que le succès n'est point un effet de l'infinie petitesse qu'on attribue aux dx et dy , puisque la règle donne la même chose lorsqu'on prend des quantités finies à volonté au lieu de ces Infiniment petits¹.

En outre, il indique que des auteurs ont amélioré la méthode de Fermat parce qu'ils l'ont abrégée et appliquée aux transcendantes². Comme l'a reconnu la Préface de l'*AI*, Barrow s'est servi de Fermat pour rendre publique sa méthode des tangentes en 1674³. Il explique que pour obtenir l'égalité différentielle, il suffit d'appliquer un simple algorithme qui est le même que celui de la formule de Barrow et qu'en définitive :

Les lettres a & e ne sont dans cette formule que des Expressions qui peuvent servir à comparer des rapports ; & si l'on veut attribuer de l'étenduë de la divisibilité & des Configurations, il faut regarder & conduire ces suppositions comme de fausses hypotheses⁴.

Dans son article de 1684, Leibniz n'a pas entrepris de fournir « l'origine de ces formules », les différences ne sont pas des « quantités réelles » mais uniquement des « expressions » : dx et dy se sont substitués aux lettres e et a mais elles jouent le même rôle qui est celui de comparer des rapports. Rolle connaît d'autres mémoires de Leibniz dans lesquels ce dernier « soutient son projet » en introduisant des « quantitez incomparables ». *L'Analyse des infiniment petits* reprend cette nouvelle analyse mais en y introduisant des « infiniment petits » qui ont « des conditions différentes de celle des Incomparables ». Il n'explique pas quelle est cette différence. Il souligne à nouveau que l'égalité différentielle obtenue n'est qu'un changement d'expressions,

¹ *SI*, *op. cit.*, p. 326.

² *Remarques*, p. 3.

³ *Ibid*, p. 5.

⁴ *Remarques*, p. 5

puis que toutes les règles que l'on y trouve ne sont qu'un « déguisement » des règles déjà parues auparavant, en particulier dans des mémoires qu'il a lui-même écrits.

À la fin du mémoire *SI*, après avoir proposé et analysé toutes les difficultés que pose le nouveau système de l'infini, celles liées aux suppositions et les autres dues à son inexactitude – que nous examinons plus avant – Rolle revient sur le statut de « réalité » octroyé aux infiniment petits par les partisans de l'*Analyse des infiniment petits*.

Varignon, dans sa réponse du mois d'août et Leibniz lors de ses déclarations publiques – *Journal de Trévoux* en novembre 1701, puis au *Journal des Sçavans* en mars 1702 – ont affirmé que par « infiniment petits », il est possible d'entendre des « quantités moindres qu'aucune donnée ». Pour Rolle, « ce n'est encore rien faire pour expliquer les principales suppositions du Système, que de dire que les différences infiniment petites telles que dx et dy , sont moindres qu'aucune quantité donnée »¹. Il rappelle que dans la Géométrie des Anciens, pour démontrer que deux choses sont égales, on suppose qu'il y a une différence et on montre qu'elle est plus petite qu'aucune quantité donnée. Mais, cela signifie justement « faire voir que cette différence n'est pas une quantité »²; leur attribuer une « étendue réelle » conduit à une contradiction. Une « quantité moindre qu'aucune donnée » est donc un « véritable rien »³. Or les différences infiniment petites du nouveau système sont considérées comme ayant une étendue réelle, elles ne peuvent être donc traitées comme des « quantités moindres qu'aucune donnée » :

Dans le nouveau Système l'on attribue à ces Infiniment petits une étendue réelle, & que l'on y fait quantité d'autres suppositions qui ne conviennent point au zero absolu. Mais si l'on rejettoit toutes ces suppositions, il seroit vrai de dire que les quantités plus petites qu'aucune donnée répondent au dx et dy de l'égalité différentielle, qui en ce sens ne seroient que des riens absolus, & ne designeroient que le point Mathématique⁴.

Varignon fait maintes fois référence aux Anciens pour légitimer les différentielles comme des quantités réelles : « Euclide seul me donne les différentielles de tous les genres à l'infini » expliquait-il à Jean Bernoulli. Elles

¹ *SI*, p. 336.

² *Ibid.*

³ *Ibid.*

⁴ *Ibid.*

sont des quantités « moindres qu'aucune quantité donnée ». Cette manière de se ramener aux Anciens gêne profondément Rolle et il la récuse.

Rolle, à son tour, effectue sa lecture des Anciens. Il veut préciser la signification de l'expression de « quantité moindre qu'aucune grandeur donnée » afin de corriger l'identification, effectuée par Varignon, à la « différentielle ». Pour ce faire, il analyse le déroulement d'une démonstration par l'absurde chez les Anciens :

Si l'on veut s'assurer, par exemple, que la superficie d'un cercle est égale au rectangle du rayon & de la demi-circonférence ; on peut supposer qu'il y ait de la différence entre ces deux superficies, & démontrer dans le goût des anciens Géomètres que cette différence est plus petite qu'aucune grandeur donnée¹.

Cependant

ce n'est point attribuer de l'étendue à cette différence : c'est tout au contraire faire voir que cette différence n'est pas une quantité. Car aussitôt qu'on lui attribue une étendue réelle, la démonstration s'y oppose ; & si l'on veut en prendre une plus petite, la démonstration s'y oppose encore : de manière que cette étendue & cette démonstration ne peuvent jamais s'accorder ensemble dans l'esprit².

La « quantité moindre qu'aucune quantité donnée » apparaît dans le raisonnement du géomètre. Cependant, elle n'a aucun cas attribut de l'étendue. Rolle est catégorique : dans ce cas elle s'opposerait au principe de la démonstration dont elle est l'ingrédient essentiel. Dans ce sens, même si Rolle ne l'écrit pas, l'intervention d'une « quantité moindre qu'aucune quantité donnée » a une valeur fictionnelle. En effet, tant que la démonstration est en cours, la supposition de leur existence permet que le raisonnement se déploie, leur impossibilité permet à la démonstration de trouver son dénouement. Ainsi, « les différences plus petites qu'aucune quantité donnée, sont des véritables riens dans le sens des Anciens Géomètres » et elles ne relèvent pas du cas des différentielles : puisque dans le nouveau Système l'on attribue à ces infiniment petits une étendue réelle, et l'on y fait d'autres suppositions qui ne conviennent pas au zéro absolu »³. Pour Varignon, les quantités sont réelles et

¹ *Ibid.*

² *Ibid.*

³ *Ibid.* Reviel Nietz explique que dans les démonstrations par l'absurde, Euclide s'appuie sur des figures qui sont en fait impossibles. Ces figures sont des « make-believe », elles permettent le développement

existantes pendant la démonstration même si elles disparaissent à la fin, elles ne deviennent pas pour autant « impossibles ». La dernière instance fait partie du processus d'évanescence qui les définit.

2) Les critiques du calcul en tant que calcul

À partir du 1^{er} décembre 1700, par la lecture de mémoires, Rolle attaque l'exactitude des résultats obtenus par le calcul leibnizien dans l'étude des courbes. Pour ce faire, il produit des exemples pour lesquels le traitement par le calcul leibnizien conduit à l'erreur parce qu'il fournit des solutions fausses ou qu'il omet celles qui sont requises. Il veut montrer que le calcul leibnizien n'apporte rien de nouveau par rapport à la méthode de Fermat et de Hudde qu'il ne fait que déguiser. Pour lui, l'analyse des infinis aurait besoin de supplément, elle ne se vaut pas pour elle-même, elle est insuffisante.

Comme on l'a précisé plus haut, les interventions de Rolle amènent des réponses de la part de Varignon mais conduisent également à des interventions d'autres membres de l'Académie pendant les séances. Varignon sollicite également Jean Bernoulli et Leibniz pour qu'ils amendent des écrits en réponse aux attaques de Rolle. De cette sorte, le débat, qui était d'abord dual et localisé au sein de l'Académie, devient rapidement une affaire de la République des Lettres.

2.1) L'offensive à l'Académie : La méthode de Hudde vs calcul leibnizien

Autour de la section X de l'Analyse des infiniment petits, le premier exemple

Le 1^{er} décembre 1700¹, parmi d'autres critiques, Rolle remet en question les conclusions de la section X de l'*AI*. Nous avons vu² que dans celle-ci, l'Hospital déduisait du calcul des différences la Méthode de Descartes et de Hudde. Nous rappelons que le corollaire III de l'*AI*³ concerne des courbes *ADB* telles que les parallèles au diamètre *AB* rencontrent la courbe en deux points. L'Hospital nomme

du raisonnement pour être rejetée à la fin de la démonstration : « the illusion is dropped already at the end of the reductio move. Elsewhere, the illusion is maintained for the duration of proof », *The Shaping of deduction in greek mathematics : A study in Cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, p. 55.

¹ Rolle, Michel, « Extrait de l'écrit de M^r Rolle contre la Géométrie des infiniment petits », 1^{er} décembre 1700, *PVARS*, tome 19, fol. 394R-396V.

² 3.3) Descartes subsumé : la section X

³ *AI*, *op. cit.*, section X, corollaire III, p. 165.

AP ou KM par x , et PM ou AK par y . Pour chaque y , il y a deux valeurs distinctes de x sauf pour un extremum. Pour trouver ce dernier, le corollaire préconise de délivrer l'équation de la courbe d'incommensurables, afin que lorsque y est regardée comme connue (donc $dy = 0$), l'inconnue x « qui marque les racines » de l'équation puisse avoir deux racines distinctes.

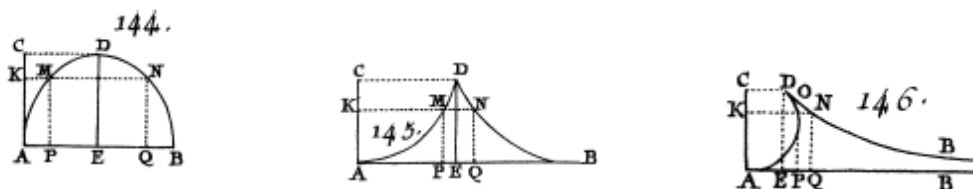


fig. 129

Ce corollaire est suivi de la proposition I où est expliqué comment trouver « plus grand ou un moindre » en usant des différences. Il faut considérer que pour un extremum, la différence devient infiniment petite (ou nulle)¹. La proposition est illustrée d'une application sur le folium de Descartes. Remarquons que cette courbe a une équation algébrique et ne nécessite donc pas d'être délivrée au préalable d'incommensurables. Or les critiques de Rolle portent sur la nécessité et la légitimité de la transformation d'une équation donnée en une autre délivrée d'incommensurables. Il affirme qu'admettre ce corollaire conduit à affirmer que si les incommensurables ne sont pas ôtés de la première égalité, la première équation ne possèdera pas deux racines distinctes pour x et donc que « l'opération qui se fait pour ôter les incommensurables » introduit des racines différentes². Il indique que cela s'avère faux pour nombre d'égalités, en particulier pour toutes les égalités de degré pair. Il défie la géométrie des infiniment petits à trouver les *extrema* de la courbe d'équation :

$$axx + byy = c\sqrt{4xxyy - 2ayy - xxyd + nnyy - rrxx + py^3 - qx^3 + d^4}.$$

Cet exemple de problème est le premier d'une longue liste que Rolle soumet aux défenseurs de l'analyse des infinis, persuadé qu'ils échoueront à le résoudre³.

¹ Corollaire II, *ibid*, p. 164.

² Rolle, Michel, « Extrait de l'écrit de M^r Rolle contre la Géométrie des infiniment petits », 1^{er} décembre 1700, *ibid*, fol. 395R.

³ Dans une lettre à Jean Bernoulli du 30 décembre 1700, Varignon se moque de la tactique de Rolle. Ce dernier est convaincu de la supériorité de la méthode de Hudde, cependant : « nous verrons laquelle des deux méthodes va le plus loin : les seules courbes mécaniques, la nécessité de faire évanouir les signes radicaux dans la méthode de Mr. Hudde ; &c. devroient bien luy imposer silence », *op. cit.*, p. 266.

Pendant les séances du 16 mars¹ et du 2 juillet 1701, Rolle fournit nombre d'exemples de courbes dont le traitement par le calcul différentiel pour la recherche d'extrema conduit à des résultats insuffisants et qui remettent en question l'exactitude de la « Géométrie transcendante ». Varignon élabore des réponses, même si la plupart sont lues pendant les séances du 9 juillet et le 6 août 1701, et certaines sont restées inédites².

Nous examinons certains exemples en les accompagnant des réponses de Varignon.

Dans le premier exemple, décrit lors de la séance du 16 mars, Rolle considère la courbe géométrique DD d'axe AP dont l'équation, notée B, est :

$$y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

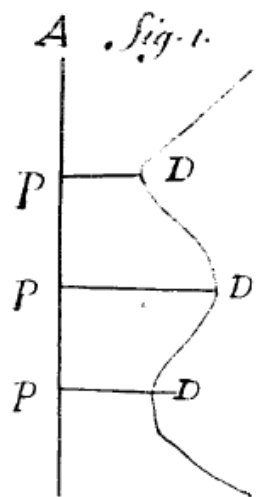


fig. 130

Il est requis de trouver « les plus grandes et les plus petites appliquées ». Il accompagne cette équation de la figure représentant la courbe qu'il a tracée en supposant premièrement que la courbe possède deux *minima* et un *maximum* en trois points distincts et deuxièmement qu'en chacun de ces points, la tangente est parallèle à l'axe AP .

Le but de Rolle en lisant ce mémoire est de résoudre ce problème au moyen du calcul leibnizien puis de comparer cette résolution avec celle obtenue par la méthode

¹ « Mr Rolle a fini son troisième écrit contre la Geometrie des Inf petits. Troisièmes Remarques sur les principes de la Geometrie des Inf. Petits », 16 mars 1701, *PVARS*, t. 20, 95R.

² Elles ont été conservées par Reyneau dans le manuscrit précédemment cité, lequel a été retranscrit par Jeanne Peiffer (voir plus haut).

de Hudde. Pour ce faire, comme il a affirmé que les trois *extrema* sont atteints en des points où la tangente est parallèle à l'axe AP , il cherche les valeurs pour lesquelles $dy = 0$. D'après la section X de l'AI, le traitement de ce cas permet de « déduire la méthode de Hudde ».

Il souligne qu'il propose l'égalité B :

$$y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}},$$

« sous la forme que l'on affecte le plus dans la Geometrie, Lors que l'on veut marquer l'excellence des Methodes qui luy sont particulieres »¹ car le propre du calcul différentiel est de posséder des règles qui permettent d'opérer directement sur des expressions avec des incommensurables. Il différentie donc B pour obtenir l'égalité C :

$$dy = \frac{4xdx - 4adx}{3\sqrt[3]{axx - 2aax + a^3 - abb}}$$

Puis il explique que :

La méthode veut que la valeur de dy soit égale à zéro, et l'on suppose dans cette Méthode que cela arriveroit toujours si l'on détruisoit le Numérateur².

En annulant le numérateur, il obtient :

$$4xdx - 4adx, \text{ c'est-à-dire } x = a.$$

« Selon la méthode des Infinis », il n'y aurait donc qu'une seule solution. Or, il explique qu'en appliquant la méthode de Hudde, on trouve trois solutions :

$$x = a, x = a + b \text{ et } x = a - b$$

qui d'ailleurs « se reconnoissent fort bien dans la figure »³. Il faut donc qu'une au moins des deux méthodes soit défectueuse. Or, il n'y a que celle de Hudde qui s'accorde avec « ce qui est »⁴, puisque la figure de Rolle présente une courbe qui possède trois *extrema* à tangente parallèle à l'axe. Rolle rappelle ensuite que la méthode de Hudde a été déduite dans l'AI (section X) en résolvant $dy = 0$: « et la seconde doit passer pour certaine dans la Geometrie transcendante puisque l'on

¹ *Ibid*, 95V.

² *Ibid*.

³ *Ibid*, 96R.

⁴ *Ibid*.

pretend d'en avoir démontré l'infaillibilité dans l'analyse des Infiniment petits, section 10 »¹. Il conclut donc que « la géométrie des infinis est défectueuse ».

Le cas dy infiniment grand n'a pas été oublié par Rolle² et aurait donné les autres solutions obtenues par Hudde. Rolle explique qu'il est aussi possible de faire évanouir les signes radicaux de l'égalité pour retrouver avec le calcul différentiel les trois solutions obtenues par la méthode de Hudde, il suffit de résoudre $dy = 0$ ³. Cependant, cette résolution ne serait alors différente de celle de Fermat « que par des caractères ou par des mots ». Ainsi, il juge qu'il n'y a aucun « avantage » à tirer de l'infini. De plus, la méthode des infinis ne s'accorde pas avec soi-même car selon que les radicaux soient ôtées ou pas, les solutions ne sont pas les mêmes⁴.

La réponse de Varignon

Varignon élabore une réponse qu'il envoie à Jean Bernoulli le 24 mars 1701⁵ en le priant de lui « dire au plus tost ce que vous en pensez »⁶. Cette réponse est également envoyée à Leibniz qui répond à Jean Bernoulli le 19 avril 1701⁷. Lors de la séance académique du 9 juillet 1701, Varignon reprend, concernant cet exemple, presque intégralement l'envoi à Jean Bernoulli du 24 mars.

Au début de sa lecture du 9 juillet, il rappelle les objections de Rolle qu'il résume en trois points :

Ce sont les propres termes de M^R Rolle dans lesquels on voit :

1° Qu'il prend la courbe DD de la figure première par celle qui se forme par le moyen de l'égalité B .

2° Il prétend que l'égalité C ne donne pas tous les maxima ou minima de la question.

¹ *ibid*, fol. 96V.

² Selon la section de l'*AI*, pour le cas de tangentes parallèles à l'axe, il suffit de chercher $dy = 0$ pour trouver les mêmes résultats que la méthode de Hudde.

³ En élevant au cube $y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$, on obtient : $a(y - b)^3 = (xx - 2ax + a^2 - b^2)^2$ puis en différentiant : $3a(y - b)^2 dy = 2(xx - 2ax + a^2 - b^2)^2 (2x - 2a) dx$, soit $dy = \frac{2(xx - 2ax + a^2 - b^2)^2 (2x - 2a)}{3a(y - b)^2} dx$, d'où en faisant $dy = 0$, on trouve les trois solutions obtenues par Hudde.

⁴ Des critiques du même type sont répétées dans *SI*, p. 331.

⁵ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 24 mars 1701, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 271.

⁶ *Ibid*, p. 281.

⁷ Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 11 avril 1701, Leibniz, *AIII8*, p. 631.

3° Il prétend enfin que le Calcul différentiel donne des choses différentes, selon qu'on conserve, ou qu'on en fait évanouir les signes radicaux ; et qu'ainsy le calcul ne s'accorde pas avec soy même¹.

En réponse aux deux premiers reproches, Varignon affirme que la figure tracée par Rolle est erronée. Il explique que le contour de la figure dépend de la « nature des Maxima ou Minima », c'est-à-dire « des différentes positions des Tangentes auxquels ils répondent »². Trouver « au juste » ce contour nécessite une méthode qui puisse discerner ces positions entre elles. Or, le propre du calcul différentiel « par le moyen des dy et dx alternativement égales à zéro »³ est de déterminer les tangentes à l'axe ou aux appliquées. En appliquant cette méthode, il obtient, comme Rolle, $x = a$ pour $dy = 0$, puis $x = a - b$ et $x = a + b$ pour dy « infini par rapport à dx », c'est-à-dire $dx = 0$. Ainsi, la courbe a une tangente parallèle à l'axe pour $x = a$ et deux tangentes perpendiculaires pour $x = a - b$ et $x = a + b$. La figure correcte n'est donc pas celle fournie par Rolle, mais celle que livre Varignon :

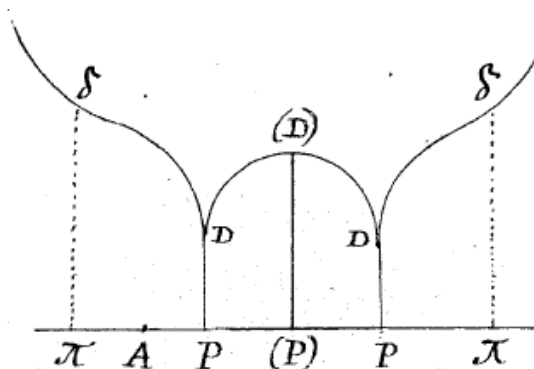


fig. 131

Varignon a donc montré que l'égalité C : $dy = \frac{4xdx - 4adx}{3\sqrt[3]{axx - 2aax + a^3 - abb}}$, résultant de l'application du calcul différentiel permet de trouver tous les *extrema* et d'ainsi parfaire le contour de la courbe, alors que Rolle a fourni une allure qui est insatisfaisante. Le calcul différentiel, en précisant « les positions des tangentes », est donc plus propre à l'intelligence des lignes courbes.

¹ Varignon, Pierre, « Réponse au second reproches d'erreur, que M^r Rolle fait au calcul différentiel », 9 juillet 1701, *PVARS*, tome 20, fol. 236R.

² *Ibid*, fol. 237R.

³ *Ibid*.

Dans la suite de son exposé, Varignon s'attache à montrer les insuffisances de la méthode de Hudde pour l'analyse des courbes. En ôtant les signes radicaux de l'égalité B : $y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$, et en appliquant la méthode de Hudde¹, Varignon trouve l'égalité : $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + ab^2 = 0$ qui conduit à $x = a, x = a - b$ et $x = a + b$. Cependant, ces valeurs de x ne sont pas nécessairement des valeurs pour lesquelles les tangentes sont parallèles à l'axe de la courbe. Comme le signale Varignon, Rolle était convaincu du contraire et c'est pour cela qu'il a proposé une forme de courbe erronée et c'est aussi pour cela qu'il n'a pas cherché à trouver les valeurs pour lesquelles² $dy = \infty$. Pourtant la Hire avait bien averti Rolle de « prendre garde à son calcul »³.

Pour le dernier reproche : « que le Calcul différentiel donne des choses différentes, selon qu'on conserve, ou qu'on en fait évanouir les signes radicaux », Varignon montre que Rolle s'est trompé. En ôtant les signes radicaux à l'égalité B, il obtient :

$$a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2$$

en développant :

$$ay^3 - 3aby^2 + 3ab^2y - ab^3 = x^4 - 4ax^3 + ba^2x^2 - 2b^2x^2 - 4a^3x + 4ab^2x - 2a^2b^2 + b^4$$

puis en différenciant et en isolant dy :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{4x^3 - 12axx + 12aax - 4bbx - 4a^3 + 4abb}{3ayy - 6aby + 3abb} dx \\ &= \frac{(4x - 4a)(xx - 2ax + aa - bb)}{3a(y - b)^2} dx \end{aligned}$$

Cette égalité ne permet pas de trouver les *extrema* requis puisqu'en faisant $dy = 0$, Rolle avait obtenu $x = a, x = a - b$ et $x = a + b$. Ce résultat l'a conduit à affirmer

¹ En effet, B devient $a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2$. Pour trouver les extrema de y , il suffit de trouver les extrema de $a(y - b)^3$. En appliquant la méthode de Hudde à $(xx - 2ax + aa - bb)^2 = x^4 - 4ax^3 + (6a^2 - 2b^2)x^2 - (4a^3 - 4ab^2)x + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$, c'est-à-dire en multipliant par la suite d'entiers 4, 3, 2, 1 et 0 chacun des monômes, on obtient l'égalité : $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + ab^2 = 0$.

² « Et cette représentation, qu'on supposoit vraie sur la planche à l'académie, fissa qu'en differentiant l'égalité B proposée, la valeur de dy égalée à zero, ne donoit qu'un de ces points », *ibid*, fol. 238R. Contrairement à ce qu'affirme Paolo Mancosu, *Philosophy of mathematics & mathematical practice in the seventeenth century, op. cit.*, p. 169.

³ *Ibid*, fol. 238V. Varignon ajoute un argument : si la courbe avait la forme de celle proposée par Rolle, elle aurait nécessairement deux points d'inflexion entre les trois points D, D, D . Il défie Rolle de prouver leur existence.

que « le calcul ne s'accorde pas avec soy même ». Or, cette égalité peut être simplifiée en utilisant l'égalité B, Varignon l'effectue et obtient :

$$dy = \frac{4xdx - 4adx}{3\sqrt[3]{axx - 2ax + aa - bb}}$$

Cette égalité est la même que celle trouvée par Rolle sans faire évanouir les signes radicaux de l'égalité B.

En éclaircissant, devant la Compagnie, les difficultés soulevées par Rolle au moyen de cet exemple, Varignon illustre les avantages du calcul différentiel : il donne « exactement » tous les *maxima & minima* de la question » et « toutes les situations des tangentes auxquelles ils se rapportent ». Par rapport à celles-ci, « elle en fait un discernement absolument nécessaire pour déterminer au juste le contour de la figure cherchée », contrairement à la méthode algébrique de Hudde « ne la donant qu'en gros, et sans aucun discernement par rapport aux différentes positions »¹.

Dans la même lettre à Jean Bernoulli du 24 mars 1701², Varignon explique qu'en appliquant la méthode de Hudde à l'égalité B sans incommensurables, il obtient bien l'égalité :

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + ab^2 = 0,$$

qui fournit :

$$x = a, x = a - b \text{ et } x = a + b.$$

Certes, parmi ces racines, certaines correspondent à des tangentes parallèles à l'axe mais toutes ne correspondent pas nécessairement à ce cas. Il affirme que pour « s'en convaincre », il suffit d'appliquer la méthode de Hudde non pas aux x mais aux y , c'est-à-dire à l'égalité $y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3$, ce qui conduit, en multipliant par la suite 3, 2, 1, 0 chacun des monômes, à l'égalité $y^2 - 2by + bb = 0$, dont la seule racine est $y = b$ qui correspond à $x = a - b$ et $x = a + b$. Ce sont donc, d'après lui, les racines correspondant à des tangentes perpendiculaires à l'axe³. Il déduit des deux applications de Hudde que la méthode algébrique s'accorde bien avec le calcul différentiel, contrairement à ce qu'avancait Rolle.

¹ *Ibid*, fol. 239R.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 24 mars 1701, *op. cit.*, p. 273.

³ Varignon ne se rend pas compte qu'il ne peut pas plus ici conclure à des tangentes perpendiculaires à l'axe qu'il ne peut le faire pour des tangentes parallèles à l'axe.

Discussions autour de cet exemple

Des extraits de cette lettre sont envoyés par Jean Bernoulli à Leibniz le 11 avril 1701¹. Ce dernier élabore une réponse qu'il envoie à Jean Bernoulli le 19 avril 1701². Même s'il juge que les objections de Rolle ont été résolues de manière satisfaisante par Varignon, il souhaite « ajouter quelques petites remarques ».

Une des remarques concerne l'application de la méthode de Hudde pour la recherche d'*extrema*. La recherche des valeurs pour lesquelles $dx = 0$ (correspondant aux cas de la tangente perpendiculaire à l'axe) conduit à $y - b = 0$. Leibniz traduit cette égalité par l'égalité $xx - 2ax + aa - bb = 0$. Or, cette égalité est la même que celle obtenue par la méthode de Hudde appliquée aux y . Les racines de cette équation fournissent donc bien les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe. Or, comme l'application de Hudde sur l'égalité en x conduisait à $(x^2 - 2ax + aa - bb)(x - a)$, et comme seule la racine a est retenue, il affirme que l'égalité $(x^2 - 2ax + aa - bb) = 0$ n'est là que « par accident » puisqu'elle ne correspond à aucun point où la tangente est parallèle à l'axe. Il revient ensuite à l'égalité :

$$a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2.$$

En posant $z = x - a$ et $v = y - b$, cela donne :

$$av^3 = (zz - bb)^2 \text{ ou } v\sqrt[3]{a} = (zz - bb)^{\frac{2}{3}}.$$

En différenciant :

$$dv = \frac{4zdz}{3\sqrt[3]{azz - abb}}$$

En vue de trouver les extrema et la position de leur tangente, il raisonne ensuite à partir de cette dernière égalité.

Pour que dv (ou dy) = 0, deux possibilités sont envisageables : $z = 0$ (soit $x = a$) – qui correspond au maximum – ou $dz = 0$. Leibniz affirme que ce dernier cas correspond aux *minima* de la courbe. Or, dans le cas des *minima*, alors que la tangente est perpendiculaire à l'axe, il y a simultanément $dv = 0$ et $dz = 0$. Il explique que cela est dû au fait que la « la sinuosité de la recourbure » est réduite au cas où elle « s'évanouit ». Il illustre cette explication par deux schémas. Le premier, à droite, montre une courbe pour laquelle au point D , la tangente est parallèle à l'axe ($dv =$

¹ Citée plus haut.

² Ce supplément à la lettre de Leibniz à Jean Bernoulli et à Varignon du 19 avril 1701 n'a pas été retrouvé mais il en existe un brouillon manuscrit, note 2 de cette lettre, *op. cit.*, p. 618.

0). L'autre représente une courbe pour laquelle au point D , la « recourbure » a dégénéré, ce qui se traduit par les égalités $dv = 0$ et $dz = 0$. Cette explication est intéressante car elle montre que par le passage continu¹ du « lacet » (à droite) jusqu'au point de rebroussement, l'égalité $dv = 0$ est conservée.

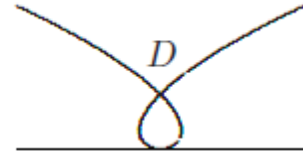
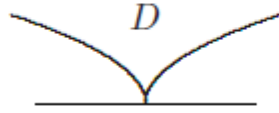


fig. 132

La lettre de réponse de Jean Bernoulli, datée du 7 mai 1701², montre que le savant bâlois juge insuffisantes les explications de Leibniz. Il est vrai que l'application de la méthode de Hudde à l'égalité en x conduit à trois égalités $x = a$, $x = a - b$ et $x = a + b$, dont seule une est à retenir pour la détermination du maximum pour lequel la tangente est parallèle à l'axe. Néanmoins, il n'est pas exact de dire que l'égalité $x^2 - 2ax + aa - bb = 0$ n'est là que « par accident » [*ex accidenti*]. Les deux racines de cette équation servent à déterminer les points de rebroussement, que l'on obtient aussi en déterminant les valeurs pour lesquelles $dx = 0$. Cette équation n'apparaît donc pas ici « par accident », mais « par nécessité »³. Il ajoute que l'essence de la méthode de Hudde est de conduire à des équations qui correspondent à des maxima ou minima, à des points de rebroussement ou encore à des points de « decussation [*decussationis*] ». Par ce terme il désigne des points multiples d'une courbe, il illustre ce cas avec le point multiple de la lemniscate, et cite aussi le point multiple d'une autre courbe proposée par Rolle lors de la séance du 16 mars 1701, dont l'équation est $y = 2 + \sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x}$ et que nous examinons plus avant.

¹ Leibniz ne l'écrit pas.

² Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 7 mai 1701, *op. cit.*, p. 632.

³ « dico id non fieri ex accidenti, sed necessarium esse », *ibid*, p. 633.

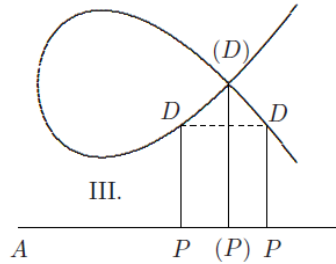


fig. 133

En revanche, si la méthode de Hudde conduit à des équations toutes « nécessaires », son défaut est de ne pas distinguer laquelle des trois situations envisagées – extrema, rebroussement ou point multiple – convient¹. Pour illustrer ce propos, il modifie légèrement les coefficients de l'équation

$$a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2$$

pour considérer la courbe d'équation :

$$a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2 - b^4$$

La méthode de Hudde appliquée aux x conduit au même résultat qu'en l'appliquant à $(xx - 2ax + aa - bb)^2$, c'est-à-dire aux trois égalités $x = a$, $x = a - b$ et $x = a + b$. Cependant, les égalités $x = a - b$ et $x = a + b$ correspondent ici à des *minima* pour lesquels les tangentes sont parallèles à l'axe. La courbe possède deux points de recourbement où la tangente est perpendiculaire à l'axe ; ils s'obtiendraient en résolvant $dx = 0$, mais aussi en appliquant la méthode de Hudde aux y . Celle-ci conduit – comme dans l'équation non modifiée – à l'égalité $y - b = 0$ dont les solutions sont les trois valeurs a et $a \pm b\sqrt{2}$.

Étant donné son désaccord avec le savant allemand, Jean Bernoulli ne transmet pas les remarques de Leibniz à Varignon. En revanche, comme on le verra plus avant, il donne d'autres précisions concernant la courbe d'équation $y = 2 + \sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x}$.

La méthode de Hudde est une méthode algébrique qui permet de trouver les racines multiples d'une équation. Or la présence d'un extremum avec une tangente parallèle à l'axe ou celle d'un point de rebroussement, peuvent s'interpréter algébriquement comme l'existence d'une racine multiple d'une équation, donc en cela la méthode de Hudde peut être utile pour leur recherche. Cependant, elle ne permet pas de distinguer qualitativement les différents types de points entre eux. Ce constat est un argument de taille que les défenseurs du calcul différentiel ne cessent de

¹ *Ibid*, p. 633

mettre en avant pour contrecarrer les offensives de Rolle et en faisant valoir la supériorité du calcul différentiel capable d’embrasser plus intimement les singularités d’une courbe.

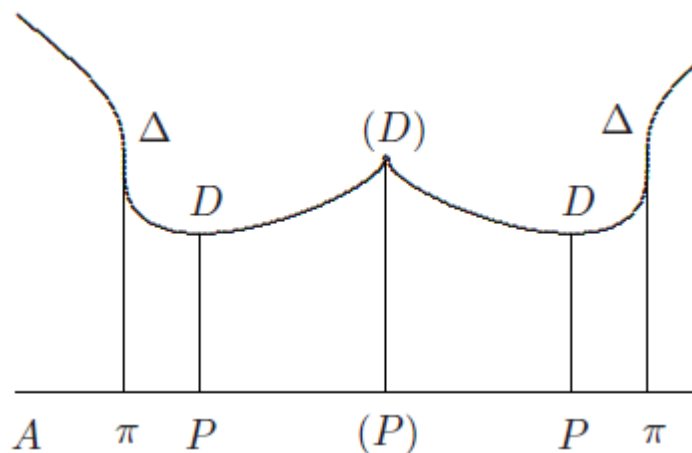


fig. 134

Ce récit est intéressant car il montre que les objections de Rolle ont conduit les principaux acteurs du débat à préciser de quelle manière le résultat d’un calcul (obtenu par la méthode de Hudde ou par le calcul différentiel) doit être interprété en vue de distinguer certains points singuliers comme ceux où la position de la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l’axe de la courbe. Elles conduisent aussi à une réflexion sur la possibilité d’une articulation entre ces deux méthodes calculatoires.

Le point de « decussation » interprété par le calcul

Dans la séance du 16 mars 1701, Rolle affirme qu’il existe nombre d’exemples de courbes pour lesquels la difficulté de traitement par le calcul différentiel est différente de celle rencontrée dans l’exemple que nous avons examiné¹. Lorsqu’il cherche les extrema d’une telle courbe, il trouve des valeurs réelles qui correspondent cependant à des valeurs imaginaires² de manière :

¹ Rolle, Michel, « Troisièmes remarques sur les principes de la Géométrie des inf. petits », mercredi 16 mars 1701, *op. cit.*, fol. 98V.

² « Car il y aurait une infinité d'exemples sur la méthode générale des maximis et minimis qu'on propose dans la géométrie transcendante, où le zéro et l'infini donneraient des valeurs réelles qui ne fourniraient rien de réel pour le problème proposé, et néanmoins cette méthode ferait regarder ces valeurs comme si elles pouvaient servir à le résoudre », *ibid*, fol. 98V.

qu'il faudroit une méthode superieure pour reconnoitre que ces valeurs réelles ne donneroient que des resolutions imaginaires, et pour reconnoitre aussy que le Problème n'est pas impossible (...)¹.

Pour illustrer son propos, il propose de traiter la courbe d'équation :

$$y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$$

En différenciant, il trouve :

$$dy = \frac{dx\sqrt{4x} + 2dx\sqrt{4 + 2x}}{\sqrt{16x + 8x^2}}$$

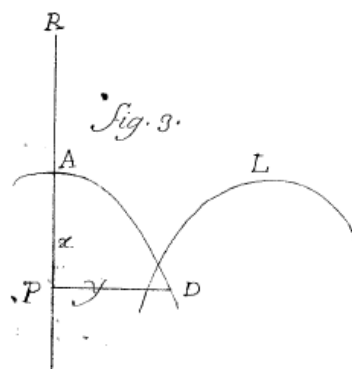


fig. 135

puis en résolvant $dy = 0$, il trouve $x = -4$.

Or, dans ce cas :

il faudroit prendre 4 positif pour AR dans l'axe négatif, et l'on auroit une appliquée en R qui résoudroit le Problème si cette méthode étoit toujours veritable. Mais il est facile de s'assurer que cette valeur réelle de x ne fournit aucune résolution du Problème car si on veut la substituer dans l'égalité proposée, on verra qu'elle ne fournit que des valeurs imaginaires pour l'appliquée y^2 .

Apparemment, Rolle ne se rend pas compte que -4 n'est pas solution de $dy = 0$.

En revanche, il explique qu'en faisant évanouir les signes radicaux, l'application de la méthode de Fermat ou de Hudde conduisent aux égalités $x = 2$ et $y = 2$ qui correspondent à un point D où concourent plusieurs « rameaux »³.

¹ *Ibid*, fol. 99R.

² *Ibid*, 99V.

³ *Ibid*, fol. 100V.

La réponse de Varignon n'est pas retranscrite dans les procès-verbaux de l'Académie mais nous la reconstituons à partir de des deux lettres envoyées à Jean Bernoulli et aussi grâce au manuscrit sur lequel le Père Reyneau a transcrit les réponses de Varignon¹, notamment les folios 154R-155V qui concernent la « 6^e Réponse de Mr V. au 5^e écrit de M. R lequel écrit est du 2^d juil. 1701, et au 3^e du même qui est du 12 mars 1701 sur la fin de l'écrit ». En revanche, nous ne pouvons pas assurer qu'il l'ait effectivement lue devant l'assemblée.

Dans la lettre du 24 mars 1701 adressée à Jean Bernoulli, Varignon explique que l'équation $y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$ n'est qu'une des branches de la quartique d'équation :

$$y^4 - 8y^3 + 16y^2 + 48xy + 4xx - 12xyy - 64x = 0$$

sur laquelle est appliquée la règle de Hudde. Cette quartique fournit quatre valeurs de y - correspondant chacune à quatre branches d'équation :

$$(EL) : y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x},$$

$$(LF) : y = 2 + \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x},$$

$$(AD) : y = 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x},$$

$$(AG) : y = 2 - \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x}$$

Deux seulement de celles-ci se coupent au point D (les branches (LF) et (AD)), toutes les quatres touchent la droite AL.

¹ Reyneau, Charles-René, « Extraits des Réponses faites par Mr Varignon en 1700 et 1701 aux objections que M^r Rolle avoit faites contre le calcul differentiel », FR 25302, fol. 144 à 155. Ce manuscrit a été retranscrit et annoté par Jeanne Peiffer, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, 352-376. (déjà cité).



fig. 136

Ainsi, il n'est pas possible qu'en appliquant le calcul différentiel à l'équation $y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4+2x}$, on trouve autre chose qu'un minimum. Or, « en faisant $dx = 0$ ou dy infini » dans l'équation $dy = \frac{dx\sqrt{4x} + 2dx\sqrt{4+2x}}{\sqrt{16+8x^2}}$, il trouve un maximum égal à 4 « confondu avec une touchante à l'origine des x »¹ qui correspond au point L dans la figure ci-dessus.

Par ailleurs, en appliquant la méthode de Hudde aux x de l'égalité²

$$y^4 - 8y^3 + 16y^2 + 48xy + 4xx = 0$$

$$-12xyy - 64x$$

soit

$$4xx - 64x + y^4$$

$$+48yx - 8y^3 = 0$$

$$-12yyx + 16y^2$$

$$2 \quad 1 \quad 0$$

conduit à $8xx - 64x + 48yx - 12yyx = 0$ et divisant par x et en simplifiant, il obtient:

$$8x - 64 + 48y - 12yy = 0.$$

Or, au point A , $x = 0$, donc il trouve Comme $y (AL) = 2 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}}$ qui est imaginaire « quoyque la construction et le calcul différentiel s'accordent à donner

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 24 mars 1701, *op. cit.*, p. 277. Ce raisonnement est repris dans le manuscrit.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 26 mai 1701, *op. cit.*, p. 284.

$y(AL) = 4$ et qu'il s'agisse là de deux racines égales »¹. Ce résultat surprend Varignon :

C'est précisément ce qui fait la nouvelle difficulté qui se vient encore tout presentement de se presenter à my contre la méthode de Hudde².

En effet, AL correspond à un minimum réel, donc l'application de la méthode de Hudde devrait le déceler. Il sait que la méthode de Hudde ne fait pas connaître si les valeurs correspondent à des *maxima* ou *minima* et que si elle les fait connaître, elle ne discerne pas les positions des tangentes mais dans ce dernier cas la difficulté est « qu'elle ne donne pas même tousjours tous les points de racines égales »³.

Dans la lettre du 5 juillet 1701⁴, Jean Bernoulli récuse cette dernière difficulté :

Que la methode de Mr. Hudde ne donne pas meme toujours les points de racines égales, me paroît sans fondement ; car comme c'est l'essence de cette methode de donner les poins de racines egales, elle ne sçauroit manquer de les donner toutes les fois qu'une courbe en a (...) ⁵

Il éclaircit sa difficulté⁶. En cherchant le point L où les « deux points D, D concourent », c'est-à-dire pour lequel « PD et PD deviennent égales », Varignon a confondu les x avec les y . Il fallait donc « multiplier les puissances de y ». Bernoulli effectue cette opération et trouve :

$$4y^3 - 24yy + 32y + 48x - 24xy = 0$$

¹ *Ibid*, p. 284.

² *Ibid*. Dans le manuscrit il applique la règle de Hudde aux x sans faire $x = 0$. En utilisant, $y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$, il trouve : $64 + 128x + 64xx = 144x + 72xx$, soit $x = -4$ ou $x = +2$: « Fonc la meth de M. Hud. s'accorde à donner ici $x = -4$ pour le terme d'un *max* ou *min* imaginaire », *op. cit.*, fol. 155R. La méthode de Hudde aurait donc le même inconvénient que le calcul différentiel en fournissant une abscisse réelle (-4) qui correspond à une appliquée imaginaire.

³ *Ibid*, p. 283.

⁴ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 5 juillet 1701, *op. cit.*, p. 299.

⁵ *Ibid*, p. 300.

⁶ Ces recommandations ne seront pas reprises dans le manuscrit.



fig. 137

En faisant $x = 0$, correspondant au point A , il obtient :

$$yy - 6y + 8 = 0 \text{ soit } y = AL = 4.$$

ce qui est « conforme à ce que le calcul différentiel donne ». De plus, Bernoulli indique que l'équation $4y^3 - 24yy + 32y + 48x - 24xy = 0$ contient le point de « decussation ». En faisant $x = 2$ (puisque'il sait que $AP = 2$), il peut diviser l'équation par $y - 2$, et il obtient $y = PD = 2$.

Bernoulli explique que ce type de point, comme ceux de rebroussement, sont :

indifferens à tout axe ; c'est-à-dire que quelque ligne droite que vous preniez pour l'axe, ce sont toujours les memes points ; c'est pour cela que vôtre equation $8x - 64 + 48y - 12yy = 0$ [obtenue par la règle Hudde appliquée aux x] détermine aussy le point de decussation, car en faisant $x = 2$, vous aurez $y^2 - 4y + 4 = 0$, ce qui donne $y = 2$ comme tantot¹.

Dans l'*AI*, cette propriété avait fait l'objet d'une remarque pour les courbes rebroussantes², il semblerait que ce soit la première fois qu'elle soit remarquée pour les points de « decussation »³.

Comme nous l'examinons plus avant, le cas de cette quartique inspire Rolle pour formuler d'autres difficultés.

Pendant la séance du 18 février 1702, Rolle lit un mémoire intitulé « Règles pour les tangentes »¹ dans lequel il donne une méthode algébrique pour trouver les deux tangentes au point D de la quartique que nous venons d'examiner.

¹ *Ibid*, p. 301.

² *AI*, section 10, *op. cit.*, p. 166.

³ Note 5 de la lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 5 juillet 1701.

Il avertit que les règles qu'il propose sont :

formées sur les idées de M^r de Fermat, et il me paroît qu'il seroit necessaire de les ajouter à sa Méthode des Tangentes pour la perfectionner².

Dans ce mémoire, il n'émet aucune critique contre le calcul différentiel. Il semble que la nomination de commissaires « devant qui tout se passera » le 3 septembre, ait conduit à une sorte d'accalmie au sein de l'Académie.

L'Académie ne publie pas ce mémoire, cependant le *Journal des Sçavans* s'en charge et publie la totalité de son contenu dans un article intitulé « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes »³, qui paraît le 13 avril 1702. Comme nous allons le voir, cette publication conduit à une réponse de la part de la partie adverse qui à son tour conduit à une réponse de Rolle, et ainsi de suite. De sorte que le débat au sein de l'Académie est déplacé dans un autre lieu, celui d'un journal savant. Nous avons relevé que Galloys avait été un des membres de la direction, il reste influent sur les décisions de publication. En fait, ce changement de lieu n'élargit pas pour autant la sphère d'échanges. Certes, les lecteurs du journal constituent un public plus large que celui des membres de l'Académie, présents dans les séances, mais ici, l'ouverture du journal à des écrits de membres de l'Académie, ne concerne en fait que les acteurs du débat, interdits de dispute au sein de l'Académie.

Le prolongement du débat semble donc nécessaire à la communauté académique, le *Journal des Sçavans* le rend possible, tout en préservant l'intégrité de l'Académie.

2.2) L'interdiction de dispute transgressée : le débat déplacé au *Journal des Sçavans*

Tentatives pour améliorer le problème général des tangentes

Rolle signe cet article en spécifiant son titre d'académicien. Dans cet article, outre la reprise de la règle des tangentes fournie à l'Académie, il ajoute de nombreux exemples. Aucune attaque explicite n'est formulée à l'encontre du calcul leibnizien.

¹ Rolle, Michel, « Règles pour les tangentes », samedi 18 février 1702, *PVARS*, t. 21, fol. 75R-78V.

² *Ibid*, fol. 75R.

³ Rolle, Michel, « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes », *JS*, avril 1702, p. 239-253.

Comme il l'annonce au début de son article, son dessein est d'améliorer le « problème général des tangentes » par le seul moyen de l'algèbre :

On a fait un progrès considérable dans la Théorie des lignes courbes, depuis que l'on s'est avisé d'y appliquer l'Algèbre, & de là se forme une Géométrie nouvelle d'une très grande étendue.

Le problème des tangentes n'est pas le plus difficile de ceux qui peuvent servir à cette géométrie. Mais la résolution de ce Problème est un moyen des plus féconds pour découvrir les propriétés les plus cachées de toutes les lignes courbes ; & c'est aussi de tous les Problèmes généraux celui que où l'on a le mieux réussi. Cependant les méthodes qu'on a données pour le résoudre, ne suffisent pas pour découvrir toutes les tangentes des lignes géométriques.¹

Rolle pointe l'insuffisance des méthodes qui « ont été données » jusqu'à maintenant mais ne mentionne pas les méthodes auxquelles il fait référence. À la suite de ce constat, il fournit des règles qui permettent, selon lui, de remédier aux insuffisances des autres méthodes :

Ces règles consistent principalement dans une suite d'égalités qui se tirent de la courbe proposée, & qui se produisent les unes par les autres d'une manière fort praticable (...) il faudra encore faire connaître ici qu'elles tirent leur origine de l'Analyse ordinaire².

Sa méthode est décrite « en termes analytiques » directement sur un exemple qui est celui de la quartique, déjà étudiée dans les discussions académiques, et dont l'équation est :

$$A : y^4 - 8y^3 - 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$$

Il pose : $OH = y$; $HF = x$, $FE = nz$; $EG = nv$, puis il explique qu'il faut substituer dans l'égalité : y par $y + nz$ et x par $x + nv$. Il obtient alors l'égalité B :

$$\begin{aligned}
 & y^4 n^4 + 4yz^3 n^3 + 6yyz^2 n^2 + 4y^3 z n + y^4 \infty \theta \\
 & - 8z^3 n^3 - 24yz^2 n^2 - 24yyz n - 8y^3 \\
 & - 12vz^2 n^3 - 24yvz^2 n^2 - 12yyv n - 12xyy \\
 & - 12xz^2 n^2 - 24yxz n + 16yy \\
 & + 16z^2 n^2 + 32yz n + 48xy \\
 & + 48vz^2 n + 48yv n + 4x^2 \\
 & + 4vv n^2 + 48xz n - 64x \\
 & + 8xv n \\
 & - 64vn
 \end{aligned}$$

¹ Ibid, p. 239.

² Ibid, p. 239.

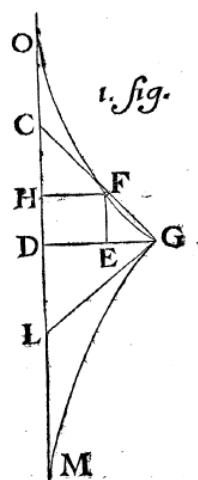


fig. 138

Il présente l'égalité obtenue en ordonnant les termes selon des parties disposées suivant les degrés de n . Il décrit ensuite l'algorithme permettant de calculer une partie à partir de la précédente par ordre rétrograde¹ : la dernière partie de l'égalité B provient toujours de l'égalité A. La pénultième se forme sur le dernier en multipliant tous les y par leur exposant puis en substituant z dans le produit à un seul des y , par exemple y^4 est transformé par $4y^3z$. Le même type de procédé est appliqué aux termes en x mais en substituant par v . Puis on multiplie par n tous ces produits. On procède de la même façon de la pénultième à l'antépénultième sauf que cette fois-ci, on multiplie par n^2 .

Ce développement sert à trouver la tangente à un point correspondant à $x = a$ et $y = b$ de la manière suivante : x et y sont substitués par a et b dans la partie de premier degré, et si cette partie s'annule, on continue jusqu'à atteindre une partie ne s'annulant pas².

Il applique sa technique pour $y = 2$ et $x = 2$. Cette substitution conduit à l'expression :

$$32zn - 96zn - 48vn - 96zn + 64zn + 96vn + 96zn + 16vn - 64vn$$

qui est nulle. Il passe donc au rang suivant et trouve :

$$-32z^2n^2 + 4v^2n^2$$

Il substitue alors v par 2, et suppose le résultat égal à 0 et obtient :

¹ *Ibid*, p. 241.

² Il est facile de vérifier que si la première partie ne s'annule pas, les calculs aboutissent à une formule équivalente à celle de la sous-tangente $s = \frac{xdy}{dx}$.

$$2z^2 - 1 = 0 \text{ soit } z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il affirme que cet algorithme, conduit jusqu'au deuxième rang, donne la valeur des deux sous-tangentes au point $y = 2$ et $x = 2$. Il ne démontre pas la validité de ce résultat¹.

The image shows handwritten algebraic work. On the left, there are several lines of terms: $z^4 n^4 + 4yz^3 n^3$, $-8z^3 n^3$, $-12vz^2 n^2$, $+4y^3 z n$, $-24yyz n$, $-12yyv n$, $-24yxz n$, $+6yyz n n$, $-24yz n n$, $-12xz n n$, $+16xz n n$, $+4\delta v z n n$, $+4v v n n$. To the right, there are more terms: $+y^4 z n^3$, δy^3 , $-12xyy$, $+16yy$, $+4\delta xy$, $+4x\delta$, $\delta 4x$, $+4\delta y v n$, $+4\delta x z n$, $+8x v n$, $-64v n$. A red box highlights the top part of the work, and a blue box highlights the bottom part. To the right of the work, there are two text boxes: a red one and a blue one.

Il applique sa technique pour $y = 2$ et $x = 2$ ce qui donne:
 $32zn - 96zn - 48vn - 96zn + 64zn + 96vn + 96zn + 16vn - 64vn$,
 qui est égal à zéro.

Il passe donc au rang suivant n^2 et trouve: $-32z^2 n^2 + 4v^2 n^2$
 Il substitue alors v par 2 , et suppose le résultat égal à 0
 ce qui donne $2z^2 - 1 = 0$ soit $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

fig. 139

Il donne ensuite des conseils pour appliquer cette règle dans d'autres situations particulières². La totalité de l'article est exempte d'allusion à la méthode différentielle. En outre, il propose deux autres courbes dont les équations sont respectivement $y^3 - 3pxy + x^3 = 0$ et $z^3 - 6pz^2 + y^2z + 9p^2z - 4p^3 = 0$, dont il détermine pour chacune d'elles les tangentes au point double. Il finit son article en rappelant que les règles qu'il a fournies se « forment sur les principes de l'Analyse ordinaire, & sur les idées de M. de Fermat »³ et que l'idée de tangente comme sécante qui devient « razante » lorsque $n = 0$ est la « tangente selon l'idée de Fermat »⁴.

« Exposons les choses aux lecteurs » : Rolle accusé d'imposteur

Le 23 mai 1702⁵, Varignon écrit à Leibniz. Il lui fait part de la publication de l'article de Rolle dans lequel celui-ci

tâche de décrier votre calcul en se servant de ce calcul lui-même qu'il déguise d'une manière si grossière qu'il n'y a pourtant que les ignorans qui y puissent être trompés¹.

¹ Mathématiquement, ce résultat est équivalent à celui obtenu par le calcul différentiel.

² Pour trouver les points où il y a plusieurs tangentes, pour trouver les asymptotes de façon "générale", etc

³ *Ibid*, p. 253.

⁴ *Ibid*, p. 254.

⁵ Lettre de Varignon à Leibniz du 23 mai 1702, *op. cit.*, AIII9, p. 63.

Rolle a prétendu que les méthodes qu'il connaît ne suffisent pas au problème général des tangentes, et Varignon interprète cette affirmation comme s'appliquant en particulier au calcul différentiel. Comme il n'est pas cité dans l'article de Rolle, il ne lui est pas possible d'écrire une lettre directe, en citant Rolle, sans que cela ne contrevienne au silence imposé par l'Académie. Pourtant, Varignon a élaboré une réponse au sujet de laquelle il demande l'avis de Leibniz. Il lui signale aussi que cette réponse a été transmise au Marquis de l'Hospital « pour aider quelqu'un, lequel n'étant point de l'Académie aura plus de Liberté que moy de Repondre à M. Rolle »². Cette personne s'avère être Joseph Saurin. Outre cela, il prie Leibniz d'y répondre aussi dans les *Acta* afin de « faire voir à ceux que M. Rolle pouroit surprendre, que M. le Marquis de L'Hospital, celui qui répondra ici, et moy, nous ne sommes pas les seuls qui condamnions M. Rolle »³. Il lui indique qu'il entreprendra la même démarche auprès de Jean Bernoulli, ce qu'il réalise effectivement avec deux lettres, datées du 24 mai 1702 et du 30 juin 1702⁴ :

Outre la réponse que vous pourrez y faire ici, je vous l'envoie principalement pour que foüetiez comme il faut M. Rolle dans les Actes, de le faire cesser s'il est possible, de chercher davantage à imposer le public⁵.

Comme il l'avait effectué auprès de Leibniz, il le prie, qu'en répondant, il ne fasse aucune mention ni de lui, ni de ce qui s'est passé entre lui et Rolle à l'Académie. Varignon veut ainsi préserver l'image de l'Académie au sein de la République des lettres.

L'article a tardé à être publié. En effet, Varignon explique à Jean Bernoulli que le journal se vendant très peu, l'Hospital a eu de la peine à obtenir de publier l'article de réponse à Rolle⁶. Enfin, le 3 août 1702, l'article est publié. Il est signé par Joseph Saurin et s'intitule « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de *Règles et Remarques pour le*

¹ *Ibid*, p. 64

² *Ibid*.

³ *Ibid*, p. 66.

⁴ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 24 mai 1702, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 314-321.

⁵ *Ibid*, p. 314.

⁶ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 15 août 1702, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 324

*problème général des tangentes*¹. Le contenu de l'article est quasiment identique à l'envoi effectué à Leibniz, de sorte que nous désignerons l'auteur par « Varignon/Saurin ». Nous reprenons donc brièvement certains points importants en nous attachant surtout à examiner le développement argumentatif de Varignon/Saurin.

Varignon/Saurin est donc indigné de ce que Rolle ait fait allusion à la fin de son article à l'insuffisance des « méthodes ordinaires » à trouver les valeurs des tangentes en un point double. Il interprète cette allusion comme une attaque contre la méthode différentielle. Bien que Rolle n'ait rien écrit de tel, Varignon/Saurin souhaite relever ce qu'il pense être un défi, et illustrer la fécondité de l'algorithme en l'appliquant à plusieurs exemples, en particulier à la quartique. Il promet également de montrer que la méthode différentielle est « la même » que celle que Rolle énonce par ses règles. Rolle n'aurait effectué que des « changements de nom »².

Suivons Varignon/Saurin dans son traitement de la quartique. Il calcule :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x}$$

Mais la substitution de x par 2 et y par 2 annule simultanément le numérateur et le dénominateur. Il ne peut donc pas appliquer la formule ordinaire³ de la section 2 de l'AI.

Varignon/Saurin résout cette difficulté à l'aide de l'article 163 de la section 9 de l'AI. Ce dernier énonce que la valeur d'un quotient dont le numérateur et le dénominateur s'annulent en même temps perd son indétermination parce qu'elle est la même que le quotient de la différence du numérateur et de la différence du dénominateur⁴. L'Hospital n'avait pas fait allusion au cas où le quotient des différences est lui-même indéterminé. Varignon/Saurin a l'idée d'appliquer ce résultat au quotient $\frac{dy}{dx}$ précédent et obtient l'égalité :

$$\left(\frac{ddy}{ddx}\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{6ydy - 12dy - 2dx}{3yydy - 12ydy + 8dy - 6xdy - 6ydx + 12dx}$$

Il substitue x et y chacun d'eux par 2 et il obtient:

$$\frac{dx}{8dy} = \frac{dy}{dx} \text{ soit } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

¹ Saurin, Joseph, « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de Règles et Remarques pour le problème général des tangentes », JS, 3 août 1702, p. 519-534.

² *Ibid*, p. 520.

³ AI., p. 11, Section II : « Usage du calcul des différences pour trouver toutes les tangentes de toutes sortes de lignes courbes », art.9.

⁴ AI, section IX, art. 163, p. 145.

Comme $x = 2$, $(\frac{xdy}{dx})^2 = \frac{4}{8}$ ou encore $\frac{xdy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi Varignon/Saurin, à l'aide du calcul différentiel, obtient les valeurs souhaitées, comme aussi Rolle avec sa méthode algébrique. Varignon/Saurin traite ensuite les deux autres courbes proposés par Rolle¹ et trouve les valeurs des sous-tangentes. Il conclut :

Voilà donc M. Rolle satisfait sur ses trois exemples, & obligé de reconnoître que lors que *plusieurs tangentes conviennent à un même point d'une Courbe*, les méthodes du Calcul différentiel *suffisent pour les découvrir toutes*².

À la suite de ses démonstrations, Varignon/Saurin montre que les règles de Rolle sont les « mêmes » que celles du calcul différentiel :

Mais il faudra bien encore que cette suffisance des nouvelles méthodes, soit reconnuë par M. Rolle, quand on aura fait voir que les regles qu'elles prescrivent, sont précisément les mêmes règles qu'il nous propose pour remédier à leur insuffisance prétenduë³.

D'après Varignon/Saurin, chaque partie de l'égalité de Rolle obtenue par « calcul rétrograde » n'est qu'une suite d'égalités différentielles où zn et vn ont respectivement été substitué dy et dx . Il applique la méthode différentielle sur l'égalité

$$(A) : y^4 - 8y^3 - 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0.$$

Il prend la différence de (A), selon les règles prescrites dans l'ouvrage *AI*⁴, puis la différence de l'égalité résultante et ainsi de suite jusqu'à évanouissement de x et de y . Il divise ensuite chaque partie, correspondant au rang n de différentiation, par le produit des entiers naturels de 1 à n . Il obtient alors la même formule (B) que Rolle avait obtenue et s'exclame: « Faut-il maintenant autre chose que des yeux pour voir la regle de M. Rolle est celle de l'Anal. des Inf. Pet. (...) »⁵.

¹ Celles dont les équations sont respectivement $y^3 - 3pxy + x^3 = 0$ et $z^3 - 6pz^2 + y^2z + 9p^2z - 4p^3 = 0$.

² *Ibid*, p. 525.

³ *Ibid*, p. 525.

⁴ La première section de l'*AI* où sont données les règles de différentiation apprend qu'il faut multiplier toutes les parties où se trouve la variable x par le produit de l'exposant de sa puissance et de dx , en diminuant d'une unité la puissance de la quantité x .

⁵ *Ibid*, p. 529.

Figure 140 consists of three mathematical diagrams. Diagram C (left) shows a polynomial expansion with terms grouped by powers of y. Diagram B (middle) shows a similar expansion with terms grouped by powers of x. Diagram B (right) shows a similar expansion with terms grouped by powers of y. The diagrams are annotated with numbers 1, 2, 3 and various mathematical symbols.

fig. 140

Varignon/Saurin n'a pas le moindre doute que Rolle a « déguisé » la méthode différentielle, que ce soit dans le cas de la formule simple de la sous-tangente ou dans celui de la formule obtenue pour découvrir les valeurs des deux sous-tangentes. Il condamne Rolle de revendiquer une filiation avec les idées de Fermat pour l'obtention de ses règles et formules :

Ce ne sont point là les idées de M. De Fermat ; et c'est en vain qu'on veut l'insinuer dans l'article cité. En lisant cet article, on sent un Auteur, qui chagrin de ne pouvoir se passer du calcul différentiel qu'il n'aime pas, tâche de profiter de ce qu'il peut y avoir de commun entre ce calcul et la méthode de M. de Fermat pour le confondre entièrement avec cette méthode¹.

Il critique également le manque de généralité de la méthode de Rolle incapable de s'étendre aux courbes mécaniques². Deux autres articles non signés sont publiés en janvier 1703³, dans lesquels sont décrites avec précision et « exactitude » les constructions de courbes proposées par Rolle. Le premier article concerne la quartique d'équation $y^4 - 8y^3 - 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$. Le dernier passage décrit le comportement de l'application de la règle de Hudde aux points doubles. Il s'agit de la même explication que celle que Jean Bernoulli avait formulée à Varignon, en appelant ces points « de decussation ». L'auteur est très probablement Saurin mais il a dû bénéficier d'écrits conservés par Varignon et de sa

¹ *Ibid*, p. 531.

² « La méthode de Rolle, suppose qu'il en ait de nouvelles, si elles ne s'étendent pas aux courbes mécaniques, elles seront toujours infiniment au-dessous de celles du calcul différentiel », *ibid*, p. 532.

³ Saurin, Joseph, « Remarques sur les courbes des deux premiers exemples proposés par M. Rolle dans le Journal du jeudi 13 avril 1792 », *JS*, 15 janvier, 1703, p. 41-45 et « Suite des remarques sur les courbes des deux premiers Exemples proposez par M. Rolle, dans le Journal du Jeudi 13 avril 1702 », *JS*, 22 janvier 1703, p. 49-52.

collaboration¹. Cette hypothèse sans être assurée, peut être soutenue par la lecture de certains passages du deuxième article, concernant la courbe d'équation

$$z^3 - 6pz^2 + y^2z + 9p^2z - 4p^3 = 0.$$

Ils correspondent à ce que décrit Varignon dans la lettre à Jean Bernoulli du 24 mai 1702 et dans la lettre à Leibniz du 23 mai 1702.

La parade Saurin/Rolle

Face à la fermeté des affirmations varignonniennes, Rolle décide d'écrire un récapitulatif dans lequel il reprend et développe ses principaux arguments contre l'analyse des infinis, sur les « fondements » ou sur les erreurs auxquelles elle conduit. Il ajoute également d'autres exemples. Cette brochure, que nous avons rencontrée précédemment, s'intitule « Remarques de M. Rolle de l'Académie royale des sciences touchant le problème général des Tangentes. Pour servir de réplique à la Réponse qu'on a inséré, sous le nom de M. Saurin, dans le Journal des Sçavans »². Nous rappelons que cette même année, son mémoire « Du nouveau système de l'infini » est publié dans la partie « mémoires » de l'HARS. Fontenelle ne daigne pas écrire un commentaire accompagnant ce mémoire dans la partie « Histoire ». Cependant, il insère, entre la table des mémoires et la partie « Histoire » un « avertissement ». Dans celui-ci, il commente les circonstances de la publication de *SI* l'année précédente, en ces termes :

Les Réflexions que diverses personnes ont faites sur cet Ecrit, sur les principes qui y sont avancés, & sur les conséquences qu'on en pourroit tirer, obligent à déclarer que quoiqu'il se trouve parmi les autres Ouvrages destinés à l'impression par l'Académie, son intention n'a jamais été d'adopter rien de ce qui s'y peut trouver³.

Rolle est certes publié mais désavoué par un des représentants les plus significatifs de l'Académie, son secrétaire. L'absence de commentaire dans la partie « Histoire » est relativement fréquente mais dans le cas de *SI*, cette absence est remplacée par un « avertissement » qui a pour fonction de renvoyer ce mémoire en

¹ Lettre de Joseph Saurin à Varignon du 10 juin 1705, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, Band 3, op. cit.*, p. 166.

² Rolle, Michel, *Remarques, op. cit.*

³ « Avertissement », HARS, 1704.

un autre lieu que celui des travaux académiques reconnus comme tels¹. En règle générale, depuis le début de ses responsabilités de secrétaire, Fontenelle n'accompagne très rarement les mémoires de Rolle d'un commentaire dans la partie « Histoire ».

Tout d'abord, Rolle justifie l'indépendance de sa méthode : « On pourra voir icy par des effets, que les règles dont je me suis servi pour des nouvelles tangentes dans le journal du 13 avril sont fort différentes de toutes les règles de l'analyse des inf. petits². Sa méthode, dit-il, ne tire pas son origine du même principe d'invention que l'AI et les opérations et les formules sont fort dissemblables. En outre, faire un rapprochement entre sa méthode et la méthode différentielle est impropre. Il appuie son affirmation sur plusieurs arguments. Par exemple, il affirme que les expressions nz et nv marquent toujours des différences « finies et réelles » et le produit de deux quantités alors que dx et dy ne désignent aucune quantité réelle dans l'égalité différentielle³. Il conclut : « Ainsi, l'on peut voir que la signification de nz et nv est infiniment différente de celle de dx et dy . On peut encore voir delà qu'elles sont différentes dans l'usage »⁴. Il rejette tout emprunt au calcul différentiel et se défend de tout plagiat :

(..) Et rien ne se trouve dans cette analyse qui marque la substitution qui fournit l'égalité B [celle obtenue en appliquant son algorithme à l'équation de la quartique], il ne s'y trouve aucune règle qui donne à la fois toutes les formules que fournit cette égalité, ni par des substitutions, ni autrement, et si l'y avait mise, alors il faudrait reconnaître que cela vient des auteurs qui avaient précédé le calcul différentiel [il se réfère à Fermat et à Descartes]

(...) M. de Fermat dans sa méthode, M. Descartes dans la lettre à M. Hardy, et d'autres auteurs encore, avaient fait de semblables substitutions et trouvé des égalités équivalentes, avant qu'on eût parlé de calcul différentiel. Mais les principales voyes qu'ils ont tenues, sont celles que l'on a voulu éviter dans ce calcul ; et néanmoins on veut faire croire dans le Journal du 3 août que la manière de faire ces substitutions, d'en tirer à la fois toutes les formules des tangentes, et d'en régler l'usage, ne peut se trouver que dans les principes de l'analyse des infiniment petits⁵.

¹ Seguin, Maria Susana, « Fontenelle et l'Histoire de l'Académie royale des sciences », *Dix-huitième siècle*, 2012/1 (n°44), note 26, p. 345.

² *Ibid.*, p. 8.

³ « La lettre n désigne un commun diviseur à nz et nv de ces deux différences et ne se trouve jamais ni dans l'égalité des triangles semblables, ni dans la formule des tangentes ».

⁴ *Ibid.*, p. 10.

⁵ *Ibid.*, p. 11.

Ainsi, Rolle ne cesse de s'affilier à l'héritage de Fermat et Descartes et de nier tout emprunt au calcul de Leibniz.

Par ailleurs, alors que Varignon/Saurin l'a accusé de tirer ses règles de l'AI, il considère que c'est l'inverse qui s'est produit. Il explique qu'« on a fait concourir deux Methodes de cette Analyse, l'une de l'art. 9. l'autre de l'art. 163 »¹. Or, il indique que dans ces deux articles il n'est nullement question de recherche de tangentes doubles, ni d'ailleurs à aucun endroit de l'AI, de sorte que des changements ont été nécessaires à l'AI pour « y faire un supplément particulier des tangentes »². Ces ajouts ont été effectués dans le but de déguiser la méthode algébrique décrite dans le journal du 13 avril 1702³ :

jamais on n'avoit différencié une égalité différentielle, comme on l'a fait dans cette occasion, & en cela on combat les règles fondamentales de l'Analyse des Inf. petits Sect. 4 article 65 [« Prendre la différence d'une quantité composée de différences quelconques »] (...) Pour l'art. 163 de l'Analyse des Inf. petits que l'on appelle au même endroit de ce Journal, il a quelque rapport aux opérations, mais les conditions sont infiniment différentes ; on l'a déjà marqué. Aucune des hypothèses de cet article, ni aucun des raisonnements ne conviennent à l'égalité dont il s'agit dans ce déguisement (...) ⁴

Rolle prétend donc que Varignon/Saurin a délibérément forcé le contenu de l'AI. Il ne conçoit pas qu'il soit légitime d'agencer les résultats dans l'AI en vue de déduire de nouveaux énoncés : c'est là sa principale accusation.

Deux ans s'écoulaient avant qu'une réponse aux accusations énoncées dans *Remarques* ne soit rendue publique⁵. L'Hospital, qui était de moins en moins présent

¹ *Ibid*, p. 31.

² *Ibid*, p. 31.

³ *Ibid*, p. 33

⁴ *Ibid*.

⁵ Entre temps, Rolle lit en 1704 trois mémoires à l'Académie concernant « la méthode inverse des tangentes » (le 1^{er} mars, le 5 mars et le 23 juillet). Deux mémoires académiques sont publiés à ce sujet dans la partie « mémoires » de l'HARS, intitulés « De l'inverse des tangentes » et « De l'inverse des tangentes et de son usage », p. 25-32 et p. 171-175. En outre, deux articles sont publiés dans JS, un le 8 décembre 1704: « Extrait d'une lettre de M. Rolle, de l'Académie Royale des sciences, au sujet de l'inverse des tangentes », p. 634-639, et l'autre le 16 mars 1705, sous le même titre, p. 170-174. On peut consulter Mancosu, Paolo, *Philosophy of mathematics & mathematical practice in the seventeenth century*, op. cit., p. 174-175 et Sergescu, Petre, « Un épisode de la « bataille » pour le triomphe du calcul différentiel : la polémique Rolle-Saurin 1702-1705, *L'Ouvert* 78, 1995, p. 7-8. Rolle commet des erreurs que Saurin ne relève dans aucun article. Nous ne développons pas cet épisode qui n'apporte rien de véritablement nouveau au débat.

aux séances académiques, meurt le 2 février 1704 : le camp des défenseurs du calcul perd un membre honoraire. Un article est enfin publié le 23 avril 1705 au *JS* intitulé « Défense de la réponse à M. Rolle de l'Académie royale des sciences contenue dans le Journal des Sçavans du 3 août 1702 CONTRE La réplique de cet auteur publiée en 1703 sous le titre de Remarques touchant le Problème général des Tangentes »¹. Cet article, long de seize pages, est de la plume de Saurin. Il n'apporte pas vraiment de nouveaux arguments pour la défense du calcul leibnizien et le ton est délibérément sarcastique vis-à-vis de Rolle tout au long de l'écrit. Cela conduit l'impression d'impossibilité d'atteindre une quelconque entente ou un quelconque accord entre les deux adversaires, d'une véritable impasse. Cette dissonance entre les deux parties se confirme puisque d'autres articles sont publiés², à tour de rôle, par chacun des deux adversaires, sans qu'aucune des deux positions soit modifiée, chacun reprenant exactement les mêmes critiques, chacun étant hermétique aux arguments de l'autre, les expressions dégradantes et insultantes suppléent aux raisonnements. Cette atmosphère témoigne de l'acmé de la crise entre les deux parties. Cette surdité dont fait preuve Rolle agace Saurin. Dans l'article du 23 avril 1705, à deux reprises, il prie l'Académie pour qu'un jugement soit établi sur leurs différens :

Quoi que je n'aye aucun nom parmi les Geometres, ils ne trouveront pas mauvais que je les prie de jeter les yeux sur cette dispute, & d'en porter un jugement public. J'ose icy m'adresser en particulier à l'Academie Royale des Sciences ; c'est avec un profond respect, mais autant plus de confiance, que M. Rolle a l'honneur d'estre de cet illustre corps³(...)

et

je ne l'ay rapporté [le discours contenu dans l'article] que pour prier très humblement l'Académie des Sciences d'y faire quelque attention, & pour exposer à ses yeux M. Rolle tel qu'il se montre. Elle doit estre offensée qu'un de ses géomètres ait osé jeter au hazard

¹ *JS*, jeudi 13 avril 1705, p. 241-256.

² Saurin, Joseph, « Réfutation de la réponse de M. Rolle insérée dans le Journal des Sçavans du 18 mai 1705 par M. Saurin », 11 juin 1705. Rolle: « Réponse de M. Rolle de l'académie royale des sciences, à l'écrit publié par M. Saurin dans le journal du 23 avril 1705 », *JS*, 18 mai 1705, « Extrait d'une lettre de M. Rolle de l'Académie royale des Sciences à M.B. touchant l'analyse des infiniment petits, où il répond à un écrit de M. Saurin publié dans le Journal des Sçavans du 11 juin dernier », *JS*, 30 juillet 1705.

³ Saurin, Joseph, « Défense de la réponse à M. Rolle de l'Académie royale des sciences contenue dans le Journal des Sçavans du 3 août 1702 CONTRE La réplique de cet auteur publiée en 1703 sous le titre de Remarques touchant le Problème général des Tangentes », *JS*, 23 avril 1705, p. 243.

sur le papier de telles choses avec de tels airs, dans un Ouvrage [*Remarques*] où paroist l'approbation d'un sçavant Académicien [le Père Gouye] qu'on a sans doute surpris, & le privilège accordé à cette célèbre Compagnie¹.

L'intervention de Leibniz

Aucune position vis-à-vis de la dispute n'a été explicitée par les instances de l'Académie depuis le début du conflit. Dans une lettre du 10 mai 1705², Varignon rappelle à Leibniz que malgré « tout ce que je luy demontrois [à Rolle] de paralogismes commis par sa seule ignorance de votre calcul », il n'a pas pu obtenir de justice de la part des Commissaires nommés le 3 septembre 1701. Il incrimine Rolle de tromper le public par sa « hardiesse » et Galloys par le « bruit qu'il fait en sa faveur », de sorte que les juges – Bignon, Cassini, la Hire et Gouye – n'osent se prononcer. Il avertit que sans des recommandations de savants reconnus comme l'est Leibniz, il ne sera pas possible de contrecarrer Rolle. C'est pourquoi lui et Saurin le prient de leur envoyer non seulement ses recommandations, mais aussi « celles de tout ce que vous connoissez de gens qui entendent votre calcul »³. Il précise :

Il ne faut toucher, s'il vous plaist, qu'au point traité dans le *Journal* du 23 avril dernier, sans parler d'infinis, de peur de fournir occasion à M. Rolle de s'accrocher ailleurs. Les points sur lesquels vous et ces M^{rs} êtes priés de prononcer, se trouvent de suite à la fin de ce *Journal*, et dans le Mémoire que voici : ce secours nous est absolument nécessaire pour le triomphe de la vérité et de votre calcul en ce pays-ci⁴.

Varignon ne souhaite surtout pas que Leibniz ravive les discussions sur le statut des différentielles lors des publications au *Journal de Trévoux*.

Le mémoire⁵, qu'il joint à sa lettre détaille les seuls points sur lesquels Leibniz ou ses connaissances compétentes dans l'analyse des infinis peuvent se prononcer. Dans ce mémoire, Varignon explicite en cinq points pourquoi Rolle a tort de reprocher à Saurin la manière dont il s'est servi de l'article 163 de la section 9 pour la recherche de tangentes au point double, en particulier s'il en a fait, comme l'affirme Rolle, des « retranchements inouïs ».

¹ *Ibid*, p. 255.

² Lettre de Varignon à Leibniz du 10 mai 1705, Leibniz, AIII 9, p. 419.

³ *Ibid*

⁴ *Ibid*.

⁵ *Ibid*, p. 422-423.

Varignon ajoute qu'il serait aussi de bon aloi d'annoncer « quelque chose dans les actes de Leipsik »¹.

Leibniz se sent vivement concerné par l'affaire et réagit prestement à cette demande, dès qu'il reçoit l'article de Saurin du 23 avril 1705. Quoiqu'il n'aime pas « les contestations », il écrit une lettre adressée à Varignon le 27 juillet 1705² et destinée en particulier à Bignon, en espérant qu'elle soit « conforme à l'intention » de son correspondant. Il déclare qu'il souhaite que, sans que cette lettre soit publiée, elle soit transmise à Bignon :

Peut estre qu'elle le portera à terminer selon la justice une dispute scandaleuse du costé de celuy qui fait des objections les plus frivoles qui se puissent voir, en l'obligeant de reconnoistre qu'on a satisfait sur cet article³.

Il tâchera également d'avertir l'Abbé Gallois. À la suite de l'intervention de Leibniz, Bignon ordonne à chacun des membres de la Commission – La Hire, Gallois, Cassini, Fontenelle et Bignon – de juger de la dispute entre Saurin et Rolle⁴. Le verdict n'arrive pas tout de suite mais Leibniz n'est pas inquiet car il ne s'agit pas de juger de la « bonté de nostre calcul » mais d'un usage particulier, et il ne craint ni la posture de Gallois, ni celle de la Hire « qui ne voit que trop de bonté dans notre calcul »⁵.

Enfin, le 9 janvier 1706, Fontenelle lit le jugement de la commission⁶. Il se compose de quinze articles.

Tout d'abord, lorsque Rolle affirmait que les « méthodes ordinaires » ne permettent pas de résoudre le problème général des tangentes, il n'inclut pas le calcul différentiel. De plus en résolvant les trois problèmes proposés (dont la quartique) avec ses propres règles, il n'a jamais affirmé que l'Analyse des infiniment petits ne saurait pas y parvenir⁷. La commission propose à Saurin, pour bien faire⁸, de montrer la généralité de sa méthode et la fausseté de la règle que Rolle a donnée comme

¹ *Ibid.*

² Lettre de Leibniz à Varignon le 27 juillet 1705, *op. cit.*, p. 447.

³ *Ibid.*

⁴ Lettre de Varignon à Leibniz du 9 octobre 1705, *op. cit.*, p. 473.

⁵ Lettre de Leibniz à Varignon du 6 novembre 1705, *op. cit.*, p. 502.

⁶ *PVARS*, t. 25, 9 janvier 1706, fol. 1R-4R.

⁷ Articles 1 à 6.

⁸ Articles 11 et 13.

générale¹. Si la commission admet que Saurin a utilisé ingénieusement l'article 163, elle reconnaît que Rolle a eu raison de dire que l'AI, prise en l'état, est insuffisante pour la résolution générale du problème des tangentes². Elle estime d'ailleurs que Saurin a finalement reconnu la « bonté et la généralité de la règle de M. Rolle » par « son silence » et d'autre part parce qu'il a justement affirmé que c'était la même que la sienne qu'il « prétend être bône et générale »³. En revanche, il est peu probable que Rolle se soit inspiré de l'analyse des infiniment petits pour obtenir sa règle⁴.

Dans le dernier article, la commission prie les deux adversaires d'adopter un comportement digne de savants et d'honnêtes hommes.

L'Analyse des infiniment petits ne sort donc pas spécialement victorieuse de cet épisode. La commission ne fait qu'entériner les arguments de chacun des adversaires en évitant tout ce qu'il pourrait y avoir de belliqueux. Il est certes peu probable que Rolle se soit inspiré de la méthode différentielle. Entendant et interprétant la géométrie par l'algèbre, il est plus vraisemblable qu'il ait tiré sa règle de son héritage et de son habilité algébrique. Par ailleurs, il est clair que l'AI ne fournit aucun énoncé concernant le calcul des tangentes aux points doubles, de sorte qu'il est indéniable que Saurin (Varignon/Saurin) ait usé de ses talents pour résoudre ce problème. En formulant son jugement, l'institution académique est en revanche victorieuse car elle parvient à garantir un apaisement en rendant le climat moins tendu. Leibniz considère à juste titre que le jugement est « *magis morale quam mathematicum* »⁵.

Michel Rolle perfectionne sa méthode des tangentes à l'aide de l'outil algébrique, Varignon/Saurin pousse plus loin le contenu de l'AI afin de résoudre un problème de tangentes plus général. Il est indiscutable que Rolle, Varignon ou Saurin sont tous les trois soucieux d'améliorer leurs méthodes et de les rendre les plus générales possibles.

Néanmoins, Rolle accuse ses rivaux de « déguiser » des méthodes d'inventions connus de tous : Fermat et Barrow. Ainsi, en ce qui concerne les méthodes des tangentes, il affirme l'équivalence du calcul différentiel avec la méthode de Fermat

¹ Art. 7.

² Article 8.

³ Article 11.

⁴ Article 12.

⁵ « Plus moral que mathématique », cité dans Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the seventeenth century*, op. cit., p. 176.

mais il souligne que le calcul différentiel n'apporte rien de plus, alors que son symbolisme est obscur et peu commode. Symétriquement, Varignon et Saurin estiment que la méthode de Rolle est un « déguisement » du calcul différentiel mais qu'il est en revanche moins fécond. Alors que les deux méthodes peuvent parvenir à des résultats similaires, ces mathématiciens ne parviennent pas à reconnaître sainement leur équivalence : il n'y a pas d'entente. Aucune des parties ne manque d'arguments mais ces arguments restent lettre morte pour la partie adverse. Aucune entente sur le statut de différentielle ne saurait être établie car celle-ci est au fondement du calcul différentiel que Rolle décrit. Ainsi, toute tentative pour parvenir à asseoir l'équivalence des deux méthodes échoue et deux voix discordantes résonnent dans l'Académie sans parvenir à établir un discours commun d'entente. La communauté savante dysfonctionne si certaines méthodes n'ont pas été, d'un commun accord, suffisamment légitimées. Cela suppose que les fondements deviennent explicites de sorte qu'une traduction entre les méthodes puisse être rendue possible, condition nécessaire à l'apaisement. Ainsi, le débat académique illustre une crise. Tous les acteurs sont d'accord sur la recherche de l'exactitude dans le domaine mathématique. Mais cette communauté savante est *en crise*, l'apparition du calcul différentiel au sein de leur pratique révèle d'une *crise* de l'implicite.

Bernoulli se détache-t-il de la « cause commune » ?

Lorsque Rolle avait publié son article au *Journal des Sçavans* le 13 avril 1702, Varignon avait envoyé une ébauche de réponse à Leibniz et à Jean Bernoulli pour avoir leurs conseils, et aussi pour qu'éventuellement ils se prononcent en publiant leur avis dans les *Acta*¹. Contrairement à la réponse envoyée à Leibniz, nous ne possédons pas celle envoyée à Jean Bernoulli qui à notre connaissance n'a pas été conservée. Il est très probable que ces deux réponses soient très similaires, voire identiques. Par la suite, nous utilisons donc uniquement la réponse envoyée à Leibniz pour la comparer à la réponse, publique, parue dans le *Journal des Sçavans* du 3 août 1702². Nous rappelons que cet article est signé par Saurin mais qu'il est notoire que Varignon y a plus que largement contribué.

¹ Sauf erreur de notre part, il n'y a pas de publication dans les *Acta* concernant cette affaire entre 1702 et 1704.

² Saurin, Joseph, « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de « Règles et Remarques pour le problème général des tangentes », *JS*, 3 août 1702.

Dans la réponse envoyée à Leibniz, Varignon cite deux fois l'article 163 de la section 9¹ pour déterminer les valeurs des deux sous-tangentes au point double de la quartique d'équation $y^4 - 8y^3 - 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ et à celui du folium de Descartes. Dans l'article du *JS*, l'article 163 est cité cinq fois². Sa référence vient tout simplement justifier les calculs exposés, sauf pour la quatrième citation (p. 525) qui apparaît dans un paragraphe dans lequel elle est éclaircie :

Avant que d'entrer dans cet examen, il ne sera pas inutile de dire un mot sur l'article 163 de l'Anal. Des Infin. Pet.& de montrer comment on y trouve la règle qu'on a mis en usage dans les exemples de M. Rolle³.

Varignon/Saurin insiste sur le fait que cet article est une proposition générale qui peut s'appliquer « à une infinité de cas ». Il explique qu'il traite d'une courbe dont les appliquées sont exprimées par un quotient dont le numérateur et le dénominateur deviennent nuls lorsque l'abscisse est égale à une quantité donnée. Il rend hommage à « L'illustre Auteur », il pense à l'Hospital – d'avoir résolu ce problème « avec cette adresse, & cette facilité qui luy est particulière ». Il n'y a rien d'anormal que ce type de commentaire soit absent dans la réponse de Varignon. Cet écrit, adressé à Leibniz (et Jean Bernoulli), est essentiellement une demande de confirmation ou d'infirmité de son contenu mathématique. En revanche, adressé aux lecteurs du *Journal des Sçavans*, il n'est pas anodin que ce commentaire ait été introduit au moment de la crise académique pour promouvoir le camp des défenseurs du calcul différentiel. Il existe cependant une inconnue, celle de savoir qui est à l'origine de l'introduction de ce commentaire. La réponse a été transmise au Marquis pour aider Saurin à rédiger la réponse : il est donc probable que Varignon n'y soit pas pour grand-chose.

Il est difficile également de savoir à quelle date Jean Bernoulli a reçu l'article du *JS*. Par la lettre de Varignon du 20 août 1703⁴, nous savons que Jean Bernoulli est au courant de la dite publication de Saurin mais n'en connaît pas le contenu. Cependant,

¹ p. 76 et p. 78. Normalement il aurait dû s'y référer trois fois car pour la deuxième courbe une erreur typographique des coefficients conduit à qu'elle soit traitée sans qu'il soit nécessaire de faire appel à cet article.

² p. 521, 522 et 523 pour le traitement des trois courbes puis p. 525 et p. 531.

³ *Ibid*, p. 525.

⁴ *Op. cit.*, p. 107.

il publie un article dans les *Acta* en août 1704¹ concernant l'article 163. Il y affirme qu'il est possible de « perfectionner » la règle en expliquant qu'elle peut être itérée si le quotient résultant est encore indéterminé. Or, dans *Remarques*, Rolle affirmait justement que la méthode pour les tangentes publiée dans l'article du 3 août nécessite des « réformes & des suppléments ». Par conséquent la lecture de cet article est houleuse parmi les membres des défenseurs du calcul. En effet, dans la lettre du 23 juin 1705², Varignon demande des explications à Jean Bernoulli à propos d'une lettre que vient de lui envoyer Joseph Saurin. Dans celle-ci, ce dernier se plaint de Bernoulli en raison de l'article des *Acta*, dans lequel il prétend « perfectionner » la règle de l'article 163 de l'*AI* et en profite pour se l'attribuer. Varignon est exaspéré car cette publication ne peut arriver plus mal :

Si vous l'eussiez traité, non de perfection, mais d'éclaircissement pour faire voir à M. Rolle que cette règle s'étend beaucoup plus loin qu'il ne pense, vous auriez dit la même chose sans nous faire tort, je veux dire au calcul différentiel, dont on jugera ici par le succès (vray ou apparent) de la dispute qui est sur cela entre M. Saurin & M. Rolle³.

Varignon craint que le terme « perfectionnement » si mal choisi soit mis à profit par Rolle pour appuyer ses propres arguments. De plus, dans l'article de Saurin publié le 15 janvier 1703⁴, Varignon/Saurin faisait déjà mention de cette possibilité mais Jean Bernoulli n'a pas eu en main cet exemplaire. Varignon lui déclare que tout le monde, c'est-à-dire Malebranche, l'Hospital, Reyneau et lui-même – a toujours été convaincu que ce que Bernoulli appelle le « perfectionnement de la règle » est la règle elle-même. Il le supplie de voir comment « vous réparerez le tort que vous venez de faire à la Cause commune »⁵.

¹ Bernoulli, Jean, « Perfectio regulae suae editae in Libro Gall. Analyse des infiniment petits art. 163, pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certo caso evanescent », *AE*, août 1704, p. 375-380.

² Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 23 juin 1705, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op cit.*, p. 160

³ *Ibid*, p. 160.

⁴ Saurin, Joseph, « Remarques sur les courbes des deux premiers exemples proposés par M. Rolle dans le Journal du jeudi 13 avril 1702 », *JS*, 15 janvier, 1703, p. 43. VS invente des exemples dans lesquels il est nécessaire d'itérer la règle. Il indique : « Au reste on pourroit prendre tant de courbes qu'on voudroit, dont les rameaux se couperoient à un même point ; & l'on trouveroit la valeur des sôutangentés par rapport à ce point, en repétant les différenciations », *ibid*, p. 44.

⁵ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 23 juin 1705, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op cit.*, p. 161.

Dans sa réponse du 18 juillet 1705¹, Jean Bernoulli est étonné de la lettre de Saurin. Il explique que s'il s'est « empressé » d'écrire l'article des *Acta*, c'est que Saurin s'est lui-même « empressé » d'attribuer la règle à l'Hospital. Il comprend maintenant pourquoi dans la lettre du 15 août 1702, Varignon lui indiquait que l'Hospital était l'auteur de l'article. Les souvenirs de Jean Bernoulli sont confus : Varignon a affirmé que l'Hospital se chargeait de la publication de l'article mais nullement que ce dernier en est l'auteur, tout au contraire, puisque c'est principalement de son fait.

Jean Bernoulli fournit à Varignon des preuves de paternité de la règle, en recopiant des lettres de l'Hospital dans lesquelles celui-ci lui soumettait des indéterminations, pour lesquelles ce qui sera désigné par « article 163 » aurait été précieux². À ce moment, Bernoulli avait tardé à lui fournir une réponse précise. Après plus d'un an d'attente, dans la lettre du 16 juillet 1694, il explicite à l'Hospital un énoncé général, correspondant à l'article 163, et permettant de lever les indéterminations des exemples que lui avait proposés l'Hospital. Il est possible que Bernoulli n'ait pas cherché spécialement à se presser pour lui expliciter la règle et que ce n'est qu'après avoir établi leur contrat – c'est-à-dire après le 17 mars 1694³ –, qu'il ait décidé de lui fournir l'énoncé complet. Sur le sujet des indéterminations de quotients, Varignon avait également sollicité Jean Bernoulli en juin 1693⁴, Bernoulli le lui rappelle également. Cependant, dans la lettre du 18 juillet 1705, ce dernier omet de rappeler que, même après la publication de *l'Analyse des infiniment petits*, il hésitait encore à communiquer à Varignon la règle générale qui aurait permis de résoudre le problème d'indétermination que celui-ci lui posait⁵.

Pour ce qui est du choix du terme « perfectionnement », au lieu de celui d'« éclaircissement », il explique à Varignon qu'il ne voit pas en quoi cela puisse faire

¹ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 18 juillet 1705, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 167.

² Les lettres à l'Hospital se trouvent dans *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, *op. cit.* : 20 juin 1693 (p. 173), 2 septembre 1693 (p. 187), 7 octobre 1693 (p. 194), 2 décembre 1693 (p. 199), 7 juin 1694 (p. 226), 16 juillet 1694 (p. 231), 8 août 1694 (p. 171).

³ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli le 17 mars 1694, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p. 201.

⁴ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli en juin 1693, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, 29 juin 1693, p. 37.

⁵ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 15 mai 1697, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 108.

tort à « la cause commune » et que « si la règle est défectueuse ce n'est pas à cause du calcul différentiel » : « une règle peut être bonne et vraie sans être parfaite »¹.

Ainsi, à cause de ce malencontreux épisode de paternité et contrairement à Leibniz, Bernoulli ne cherchera pas particulièrement à favoriser un apaisement au sein de l'Académie².

3) Vers les dénouements

3.1) Le calcul leibnizien pratiqué

Le débat au sujet de l'Analyse des infinis accapare nombre de séances académiques entre juillet 1700 et septembre 1701. La sentence académique imposant le silence aux disputes laisse place à la lecture de mémoires faisant intervenir le calcul leibnizien mais dépourvus de propos houleux comme ceux présents dans les échanges entre Varignon et Rolle.

Le groupe autour de Malebranche publié

En février 1699, quelques jours après que le nouveau règlement académique soit prononcé, Varignon annonce officiellement à la Compagnie qu'il travaillera sur « une nouvelle théorie du mouvement » ; la géométrie n'est donc pas particulièrement son sujet de recherche. En revanche, Louis Carré, son élève³, propose de travailler à l'élaboration d'un ouvrage portant sur le calcul intégral « en l'appliquant aux surfaces, à la dimension des solides, à leurs centres de pesanteur, de percussion, et de vibration »⁴. Il précise son intention en expliquant que le calcul différentiel ne pouvant s'occuper que des « propriétés des lignes », il faut, pour « avoir les surfaces et les solides qu'elles peuvent former », un traité de calcul intégral. Cette annonce est honorée puisque Carré fournit son manuscrit lors de la séance du 3 juin 1699. Varignon et Malebranche sont chargés de l'examiner et ils donnent immédiatement un avis favorable. L'ouvrage, long de 114 pages, est publié en 1700 sous le titre *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion*

¹ Lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 18 juillet 1705, *op. cit.*, p. 172.

² On pourra consulter « Introduction », *op. cit.*, p. 7-11.

³ Carré est nommé officiellement élève géomètre en 1699 mais Varignon l'a déjà pris en 1697.

⁴ Séance du 28 février 1699, *PVARs*, tome 18, fol. 134R.

et d'oscillation par l'application du Calcul intégral¹. Il se divise en quatre sections comme son titre l'indique.

La rapidité de son exécution a été rendue possible en grande partie par la connaissance d'un petit traité manuscrit intitulé *De la dimension des solides et de leur surfaces convexes*, faisant partie des manuscrits du groupe malebranchiste de l'année 1692². Carré le connaissait parfaitement puisqu'il en avait fait deux copies³.

La Préface indique qu'il est conseillé d'avoir lu la première section de l'*AI*, et en effet, dès la première page, la symbolique leibnizienne apparaît. Même si la Préface avertit que les transcendentes ne sont pas traitées, quelques-unes des plus célèbres, telles que la cycloïde et la spirale apparaissent parmi les exemples⁴. Cependant, l'ouvrage, trop hâtivement achevé, ne fournit que des résultats peu éloquents, en grande partie connus par la géométrie des Anciens, et ne rend pas compte des avancées que le calcul leibnizien a pu fournir pendant la dernière décennie. L'*AI* annonçait qu'elle ne traiterait que du calcul différentiel, réservant la partie intégrale au traité *Scientiâ infiniti* que Leibniz projetait d'écrire. L'ouvrage de Carré n'a pas vocation à se substituer à ce projet. Sa publication reste néanmoins symboliquement importante au sein de l'Académie récemment renouvelée, car elle témoigne d'une mise au net de connaissances sur le nouveau calcul intégral, même si elles sont relativement élémentaires.

Dans le manuscrit dont s'est servi Carré, Malebranche avait annoté en marge : « Vous ne dites rien de la cycloïde, ni de la rectification des courbes »⁵. Ce défaut n'est pas corrigé dans l'ouvrage de Carré.

Cependant, le 13 août 1701, Carré lit deux mémoires, « Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangentes »⁶, suivi de « Sur la rectification de la cycloïde », lu en deux séances, le 27 août et le 3 septembre⁷. Ces mémoires sont publiés

¹Carré, Louis, *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du Calcul intégral*, Chez Boudot, Paris, 1700.

² Pour des précisions sur son élaboration et sa publication, on pourra lire les commentaires de Pierre Costabel dans *Mathematica* p. 304-307.

³ « De la dimension des solides et de leurs surfaces convexes », FDS FR. 25345, fol. 6-85 et FDS FR 25306 (dernier livre).

⁴ Carré, Louis, *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du Calcul intégral*, op. cit., p. 25-34.

⁵ Cité dans *Mathematica* p. 304.

⁶ Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangentes », 13 août 1701, PVARs, tome 20, fol. 310R-313V.

⁷ Carré, Louis, « Sur la rectification de la cycloïde », 13 août 1701, *ibid*, fol. 330R-333R.

dans la partie « mémoires » de *HARS*¹. Carré présente la rectification à la manière de l'Hospital dans l'*AI*, c'est-à-dire sous forme d'un « Problème » qui se résout par la donnée d'une formule générale. Ici, « l'expression générale » de la « portion infiniment petite et indéterminée » est $Mm = \frac{tdy}{y}x$, dans laquelle M et m sont deux points infiniment proches et t est la sous-tangente au point M .

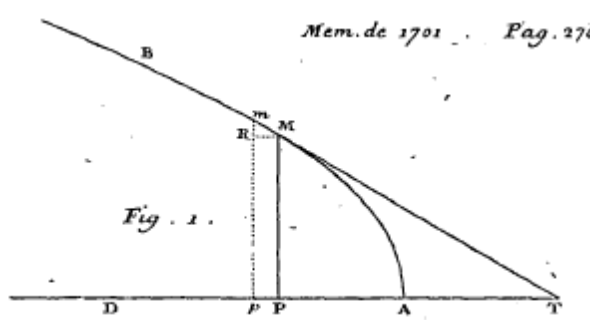


fig. 141

Pour rectifier la courbe, il est requis de trouver l'intégrale de cette expression une fois que les indéterminées auront été substituées selon la « nature de la courbe ». Cinq exemples illustrent ce problème : certains d'entre eux se retrouvent dans les manuscrits malebranchistes, par exemple, la rectification de la parabole et celle de la logarithmique². Le mémoire destiné exclusivement à la rectification de la cycloïde suit, où sont proposées cinq manières de procéder. Carré a expliqué qu'il y a plusieurs manières de rectifier les courbes³ dont l'une est d'utiliser la « Méthode des développées ». Pour illustrer son propos, il choisit d'appliquer ces différentes manières à la cycloïde car elle est aussi « ancienne que le mouvement dans la nature » même si ce n'est que depuis le XVII^e siècle que les géomètres l'ont considérée. Il souligne que cette courbe mérite tout l'intérêt des géomètres même si elle ne rentre pas dans la catégorie cartésienne des courbes. Le mathématicien anglais Wren a rectifié pour la première fois la cycloïde en 1658 par une démonstration à la manière des Anciens. Carré montre par cet exemple que le calcul leibnizien non seulement rectifie en peu de lignes, mais fournit cinq manières de procéder. Les trois dernières manières se servent de « la méthode des développées » ; il est patent que la première reprend les leçons XIX et XX de calcul intégral de Bernoulli que Carré avait

¹ Sous les mêmes titres, *MARS*, 1701, p. 159-169.

² FR 24237 : pour la parabole : fol. 95R et 92R respectivement. Les autres exemples traités sont la spirale ordinaire, la logarithmique, la spirale logarithmique et la cycloïde.

³ 1) en considérant un élément de la courbe comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle, 2) en employant la méthode des tangentes, 3) en se servant de la « méthode des développées »

recopiées¹ ; la dernière utilise la formule du rayon de la développée en se référant à l'ouvrage de l'Hospital².

L'ouvrage *Mesure des surfaces* et ces deux mémoires témoignent du travail collaboratif au sein du groupe autour de Malebranche. Leurs publications, approuvées officiellement par l'Académie, sont dans la lignée du projet malebranchiste de rendre publique la nouvelle mathématique, projet dont l'AI a représenté la première et une importante étape.

Deux autres mémoires concernent les rectifications. Le premier s'intéresse à la rectification des caustiques et est publié en 1703³. Les références directes à des passages de l'AI sont nombreuses⁴. Enfin, en 1704, un mémoire portant sur la rectification générale des courbes est publié sous le titre « Methode pour la rectification des courbes »⁵. Dans celui-ci, Carré rappelle que la manière de rectifier les courbes de Van Heuraet a été publiée sous forme d'appendice dans la version latine de *La Géométrie*⁶. Cependant, il juge que la méthode du géomètre hollandais est « un peu embarrassée » car elle suppose une des règles de Hudde. Il se propose de fournir une solution par la méthode « des *Infiniment petits*, qui est beaucoup plus simple & plus facile, & qui ne suppose rien »⁷. Pour rectifier une courbe, Van Heuraet décrit une transformation générale d'une courbe en une autre dans le but de ramener la rectification de la première à la quadrature de la seconde⁸. Celle-ci est définie à partir des sous-tangentes de la première, de sorte qu'il est nécessaire d'utiliser la méthode de Hudde pour obtenir leurs valeurs. Ce sont ces calculs que Carré juge « embarrassants ». Sa démarche n'est pas spécialement originale car elle se résume en une simple traduction en notation différentielle de la démonstration de Van Heuraet, de sorte que les figures sur lesquelles s'appuie chacune des preuves sont presque identiques.

¹ Bernoulli, Jean, *Lectiones de calculo integralium*, *op. cit.*, p. 445-448 et FL 17860, fol. 150V-158.

² « 4^{ème} section du Livre de l'Analyse des infiniment petits », MARS, 1701, p. 169.

³ « Rectifications des Caustiques par Réflexion formées par le Cercle, la Cycloïde ordinaire, & la Parabole, & de leurs Développées, avec la Mesure des Espaces qu'elles renferment », MARS, 1703, p. 183-199.

⁴ *Ibid*, pages : 184, 187, 188, 189 et p. 192.

⁵ Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des courbes », MARS, 1704, p. 66-68.

⁶ Van Heuraet, Hendrik, « Henrici van Heuraet epistola de Transmutatione curvarum linearum in rectas », dans *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita*, *op. cit.*, p. 517-520.

⁷ Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des courbes », *op. cit.*, p. 66.

⁸ Voir « Techniques de "transmutations" et infiniment petits » dans notre chapitre 2.

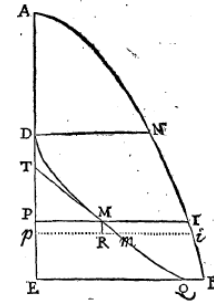
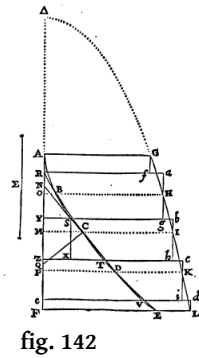


fig. 142

Le travail académique de Carré se résume donc principalement à fournir une des principales applications du calcul intégral qui est la méthode de rectification.

Le silence de l'Hospital

Depuis le début de la crise, l'Hospital n'intervient pas au sein de l'Académie pour défendre le calcul. Dans l'*HARS* de l'année 1701, Fontenelle souligne l'absence de l'Hospital dans les débats : « M. le Marquis de l'Hôpital demeura dans un parfait silence »¹. Les raisons de ce manque d'intervention pour la défense du calcul sont peu connues et en tout cas inattendues de la part de celui qui a joué un rôle crucial dans la réception de l'analyse des infinis. Le secrétaire de l'Académie intègre dans son récit ce « silence » et fournit trois probables raisons :

Soit parce qu'il se reposa sur les témoignages que lui avoient rendus les plus grands Géomètres de l'Europe, soit parce qu'il crut que les vérités géométriques, si elles l'étoient une fois, n'avoient besoin d'aucun secours humain, soit parce qu'il attendit toujours qu'après avoir laissé à part les Principes qui produisoient des questions Métaphysiques & difficiles à éclaircir, on prît le parti plus facile de démontrer les Paralogismes géométriques, où les Principes faux n'avoient pas dû manquer de le conduire².

Le Marquis se rend d'ailleurs très peu à l'Académie³. Certes, sa qualité d'honoraire ne le contraint pas à assister aux séances, contrairement aux pensionnaires, mais Malebranche, lui aussi honoraire, est incomparablement plus

¹ *HARS*, 1701, p. 88.

² *Ibid.*

³ Aucune séance de juillet 1700 à la fin de l'année, six séances en 1701, deux en 1702, aucune en 1703 et 1704.

présent¹. Des affaires domestiques ne lui permettent pas non plus de soutenir le rythme épistolaire établi avec Leibniz et Bernoulli depuis 1692. Des raisons de santé peuvent expliquer cet abandon, ainsi que des maladies répétées qui causeront sa mort précoce le 6 février 1704.

Sa production scientifique est aussi ténue : trois mémoires sont publiés, deux de géométrie² et un autre sur la résolution d'un problème physico-mathématique posé par Jean Bernoulli dans les *Acta* en avril 1695³. Il s'agit de trouver dans le plan vertical une courbe par laquelle un corps descendant librement sous l'action de sa propre pesanteur, la presse dans toutes ses parties avec une force égale à son poids. L'Hospital est immédiatement curieux de ce problème mais, comme à l'habitude, il demande à Jean Bernoulli de quelle manière « on peut ôter la physique de la question afin de la rapporter à la géométrie »⁴, il n'a en effet pas « une idée fort nette de ce que l'on entend par force centrifuge et par la fermeté du fil qui doit être égal par tout ». Les réponses nourries de Jean Bernoulli, étalées sur un an⁵, permettent à l'Hospital d'élaborer une solution sous forme d'un mémoire lu en deux séances en janvier 1700⁶. Dans la lettre du 5 mars 1695⁷, Jean Bernoulli fournit à l'Hospital une formulation géométrique du problème que le Marquis reprend dans son mémoire : en se donnant la développée de la courbe requise, il faut qu'en chaque position du corps pesant qui décrit la courbe, la tension du fil développé ait la même force que si ce point pesant était suspendu à ce fil⁸.

¹ Du 18 janvier 1699 au 5 juin 1715, il assiste à 440 séances académiques, Robinet, André, « La vocation académicienne de Malebranche », *Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications*, 1959, tome 12, n°1, p. 3.

² « Méthode facile pour trouver un solide rond, qui étant mû dans un fluide en repos parallèlement à son axe, rencontre moins de résistance que tout autre solide, qui ayant même longueur et largeur, se meuve avec la même vitesse suivant la même direction », *MARS*, 1699, p. 107-112. Une version latine est publiée aux *AE* du mois d'août 1699, p. 354-359 et « La quadrature absolue d'une infinité de portions moyennes tant de la Lunule d'Hypocrate de Chio, que d'une autre d'une nouvelle espèce », *MARS*, 1701, p. 17-20.

³ *AE*, supplément, sect. VI, 1695, p. 291.

⁴ Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 19 février 1695, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, *op. cit.*, p. 263.

⁵ Pour la liste des lettres échangées à ce sujet du 5 février 1695 au 2 avril 1696, *ibid*, p. 517.

⁶ Séances du 20 et 23 janvier 1700, *PVARS*, t. 19, fol. 15R et 17R-27R. Le mémoire est publié sous le titre « Solution d'un problème physico-mathématique », *MARS*, 1700, p. 9-21.

⁷ Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital le 5 mars 1695, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *op. cit.*, p.271.

⁸ L'Hospital (de), Guillaume, « Solution d'un problème physico-mathématique », *MARS*, 1700, p. 9-10.

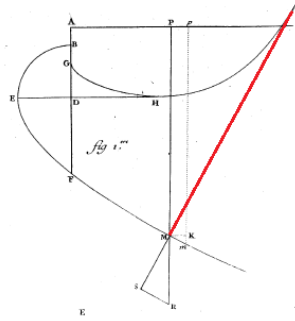


fig. 143

Sans décrire la résolution de ce problème¹, nous pointons que sa difficulté réside à fournir une expression de la force centrifuge². Celle-ci est donnée d'abord dans le cas d'un mouvement circulaire et s'exprime en fonction du rayon du cercle. Pour généraliser le résultat, l'Hospital considère que la courbe est composée d'arcs de cercles infiniment petits, pendant un instant infiniment petit la force centrifuge agit comme s'il s'agissait d'un mouvement circulaire. Il peut alors la calculer à l'aide de la formule du rayon de la développée qu'il a compilé dans la section V de l'*AI*³. L'intervention de la développée de la courbe cherchée conduit naturellement à la considérer comme un « assemblage d'une infinité de petits arcs de cercle » générés par le développement de la développée. Ce résultat a été souligné par l'Hospital au début de la section V de l'*AI*⁴.

En dehors de ces trois mémoires, l'activité académique de l'Hospital est quasi inexistante. En revanche, Varignon reste un membre actif et il prend non seulement le rôle de porte-parole de la défense du calcul leibnizien mais il continue à en tirer profit pour ses recherches.

Le calcul leibnizien pour la théorie du mouvement : les formules de Varignon

Pour l'essentiel, les travaux académiques de Varignon se concentrent, comme il l'avait annoncé, sur la « théorie du mouvement ». S'il écrit un mémoire dans lequel il généralise les formules des rayons des développées, c'est parce que son intérêt pour ce sujet apparaît fortement lié au contexte de résolutions de problèmes sur les forces centrales. Nous n'examinerons pas de quelle manière Varignon retrouve à l'aide du calcul leibnizien des résultats des *Principia* de Newton, mais nous nous attacherons à

¹ Pour une description complète, Blay, Michel, *La Naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 98-109.

² L'Hospital (de), Guillaume, « Solution d'un problème physico-mathématique », op. cit., p. 10.

³ *AI*, section V, p. 76.

⁴ Article 76, Corollaire II, section V, *AI*, p. 71.

examiner comment les notions de l'analyse des infinis lui servent à représenter des notions de la théorie du mouvement¹.

Au cours du premier trimestre 1700, Varignon s'occupe de rendre compte de son travail concernant la détermination de l'intensité de la force centrale associée à la variation des mouvements, dans un premier temps il s'occupe de ceux qui sont rectilignes², puis ensuite de ceux qui sont curvilignes³. Ses deux mémoires prolongent les résultats obtenus en 1698⁴ sur la détermination de la vitesse en toutes sortes de mouvements. Varignon le rappelle lors de la lecture du premier mémoire et il explique que dans les mémoires de 1698, il ne s'était pas encore intéressé à la force qu'a un corps « indépendamment de sa vitesse » c'est-à-dire ce qu'il désigne par « force centrale » :

je l'appellerai dorénavant Force centrale à cause de sa tendance au point C comme centre⁵.

De la même manière qu'en 1698, Varignon considère des courbes, ici au nombre de six : VB, VK, TD, FM, FN, FO . Elles sont définies à partir de plusieurs variables : outre la distance parcourue (x), le temps (t) et la vitesse (v), il ajoute l'intensité de la force (y). Les trois premières courbes sont les mêmes que celles considérées en 1698 – par exemple VB exprime par ses ordonnées le rapport des

¹ Ses travaux ont fait l'objet d'études sur lesquels nous nous appuyons et auxquels nous renvoyons pour des développements concernant la théorie du mouvement : Aiton, Eric, John, « Polygons and parabolas : some problems concerning the Dynamics of planetary orbits », *Centaurus*, 1989, vol. 31, p. 207-221 et « The celestial mechanics of Leibniz : a new interpretation », *Annals of science*, 2002, p. 111-123, Blay, Michel, « L'algorithmisation varignonienne », *La naissance de la mécanique analytique, op. cit.*, p. 153-221, Costabel, Pierre, « Courbure et dynamique, Johann I Bernoulli correcteur de Huygens et de Newton », *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 17, Stuttgart, 1989, p. 12-24, Fleckenstein, Joachim Otto, « Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus », *Archives internationales d'histoire des sciences*, n°5, octobre 1941, Peiffer, Jeanne, « La définition de la tangente et l'évaluation de la tangente », *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, op. cit.*, p. 133-138, Schmit, Christophe, « Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17^e et 18^e siècles », *Early Science and medicine*, Brill, Leiden, 2014, p. 505-548.

² Varignon, Pierre, « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvement rectilignes variés à discrétion », *MARS*, 1700, p. 22-27.

³ Varignon, Pierre, « Du mouvement général de toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent », *MARS*, 1700, p. 83-101.

⁴ Voir chapitre 6, § 4.2 : « Varignon : généraliser des problèmes mécaniques à l'aide du calcul leibnizien ».

⁵ *MARS*, 1700, p. 22.

vitesse avec l'espace parcouru – mais les trois dernières sont nouvelles et correspondent aux rapports entre la force centrale et les trois autres variables¹.

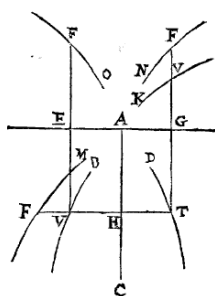


fig. 144

Le calcul leibnizien lui permet d'interpréter dx comme étant l'espace parcouru par une vitesse v uniforme, à chaque instant dt , dv comme étant l'accroissement de cette vitesse « qui s'y fait », enfin ddx comme étant l'espace parcouru en vertu de l'accroissement de vitesse dv . En 1698, il a déjà établi que la « vitesse à chaque instant » $v = \frac{dx}{dt}$ et en supposant dt constant, il en déduit² que l'accroissement de cette vitesse pendant ce même instant dt est :

$$dv = \frac{ddx}{dt^2} \quad (1)$$

Il peut continuer à supposer que pendant l'instant dt , le mouvement est uniforme de vitesse v car dv est infiniment petit par rapport à v . Cependant, pour déterminer le rapport de la force y avec les autres variables, l'accroissement ddx engendré par dv doit être pris en considération. En effet, il affirme que :

les espaces parcourus par un Corps mû d'une force constante & continuellement. appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force & des quarrés des temps employés à les parcourir³.

Cet énoncé reprend le lemme X de la section I des *Principia* de l'édition de 1687 (la seule édition qui existe au moment où écrit Varignon) :

Les espaces que décrit un corps soumis à une force quelconque qui le presse régulièrement¹ [*vi regulari*], sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps².

¹ *Ibid*, p. 22.

² $d(dv) = \frac{ddx \times dt - ddt \times dx}{dt^2} = \frac{ddx}{dt^2}$, car $ddt = 0$.

³ *Ibid*, p. 23.

Ainsi, comme pendant l'instant dt , la force conduit à l'accroissement de distance³ ddx ,

$$ddx = ydt^2 \text{ ou } y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Varignon explique que, si l'une des six courbes est « donnée à discrétion », alors à l'aide des formules (1) et (2), il peut déduire les cinq autres courbes. Il applique ensuite ces formules à deux exemples que nous ne développons pas ici⁴. Très élémentaires, ils permettent d'illustrer le fonctionnement de l'algorithme et le fait que désormais la recherche se réduit strictement à un calcul. Varignon souligne cet avancement :

Les mêmes choses se trouveront de la même manière dans toute autre hypothèse ; il n'y aura de différence que la difficulté du calcul, laquelle n'auroit fait qu'embarrasser ici. Ainsi ce deux Exemples suffisent⁵.

Son mémoire s'achève par une « Remarque » qui est d'importance puisqu'il y explique que les règles qu'il a établies lui permettent de déduire la proposition 39 du livre I des *Principia*. Celle-ci a pour objet de déterminer, dans le cas de mouvements rectilignes à force centrale, la vitesse d'un corps et son temps de parcours⁶.

¹ Varignon interprète le « *vi regulari* » par « force constante et continuellement appliquée ». Reste à interpréter ici le mot « continuellement ». Varignon a une représentation de la force à un instant est « un cumul d'impulsions, elle peut s'obtenir par un seul choc dont l'intensité égale à ce cumul », Schmit, Christophe, « Rapports entre équilibre et dynamique au tournant du 17^e et 18^e siècles », *op. cit.*, p. 546.

² « Spatia, quae corpus urgente quacunq, vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum », Newton, *Principia, op. cit.*, p. 32. Ce lemme sera modifié dans l'édition de 1713 en « Spatia quae corpus urgente quacunq, Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum », p. 29, « Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps », traduction par Châtelet, p. 80-82.

³ Michel Blay fait remarquer que les calculs précédents supposent donc que cette force agit instantanément au début de l'instant dt . On peut regretter qu'il s'appuie sur le lemme X tel qu'il est énoncé dans l'édition de 1714 pour commenter les calculs de Varignon, *La naissance de la mécanique analytique*, p. 186.

⁴ Dans le premier exemple il se place dans l'hypothèse de Galilée $x = v^2$ et obtient que la force $y = \frac{1}{2}$. Dans le deuxième exemple, la force y est constante et égale à a , il obtient que la vitesse vérifie $v^2 = 2ax$, *ibid*, p. 25-26.

⁵ MARS, 1700, p. 26.

⁶ *Principia, op. cit.*, Livre I, Proposition XXIX, problème XXVII, p. 122.

Dans son deuxième mémoire¹, en s'aidant des résultats établis dans son mémoire de 1698 dans le cas de mouvements curvilignes, il généralise ces dernières formules obtenues dans le cas rectiligne². Comme dans le mémoire précédent, il applique ses règles à plusieurs exemples, notamment celui du calcul de la force centrale d'un corps décrivant une ellipse dont le centre est confondu avec le centre de la force³ ou celle d'un corps décrivant un demi-cercle⁴. La plupart des exemples fournis correspondent à des résultats énoncés dans les *Principia*⁵. Le mémoire suivant⁶ s'intéresse au cas où le centre de la force est confondu avec l'un des foyers de l'ellipse. Varignon signale qu'il retrouve aussi ici des résultats des *Principia* et de Leibniz⁷.

Certes, les mémoires de 1698 et ceux de 1700 ne fournissent pas de nouveaux résultats, nombre d'entre eux sont parus dans les *Principia*, Varignon ne le cache pas, tout au contraire, il rend systématiquement hommage aux auteurs concernés. Ainsi, l'intérêt de ses travaux réside fondamentalement dans la manière nouvelle et originale de parvenir aux résultats. Varignon puise dans les notions du calcul leibnizien, les interprète sciemment, afin de représenter de la manière la plus adéquate les notions propres à la théorie du mouvement. Avec les algorithmes varignonniens, nul besoin de passer par une étape de traduction géométrique, par laquelle passent ses contemporains. Nous avons rappelé ci-dessus combien l'Hospital nécessite cette étape de traduction pour aborder les problèmes physico-mathématiques que son professeur lui propose. Varignon affronte la question cruciale de comment des nouvelles notions mathématiques, que sont par exemple les

¹ « Du mouvement général de toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent. », *MARS*, 1700, p. 83-101.

² Nous renvoyons à l'étude de Michel Blay, *op. cit.*, p. 193-214.

³ « Du mouvement général de toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent. », *MARS*, 1700, p. 88-89.

⁴ *Ibid*, p. 89-90.

⁵ *Principia*, *op. cit.*, Livre I : Proposition X, problème V : « Gyretur corpus in Ellipsi :requiritur lex vis centripetae tendentis ad centrum Ellipseos » (p. 48); corollaire 1, proposition VII, problème II : « gyretur corpus in circumferencia circuli, requiritur lex vis centripetae tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum » (p. 45); Proposition IX, problème IV : « Gyretur corpus in spirale *PQS* secante radios omnes *SP, SQ*, &c. in angulo dato : Requiritur lex vis centripetae tendentis ad centrum spiralis » (p. 47).

⁶ « Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour faire décrire les orbes qu'on leur a supposées jusqu'ici. », *MARS*, vol.2, 1700, p. 224-237.

⁷ Varignon destine un scholie pour souligner que « Tout ceci est conforme à ce que M. Newton & M. Leibnitz en ont démontré à leurs manières : le premier dans les Prop. 11.12&13 du Liv.I de son excellent Traité, *De Phil. Nat. Princ. Math.* Et le second dans le mois de Février des Actes de Leipsik de 1689 », *ibid*, p. 230.

différentielles ou les intégrales, peuvent représenter adéquatement des notions de la science du mouvement. Les problèmes de la science du mouvement deviennent ainsi des « simples recherches analytiques »¹.

Bien évidemment ce passage n'est pas immédiat et nécessite réflexion. Au cours de ses recherches, des difficultés se sont posées à lui, notamment dans la manière la plus adéquate de considérer la courbe représentant la trajectoire d'un corps soumis à une force centrale.

Les conceptions de la courbe pour la théorie du mouvement, une lecture varignonienne du calcul leibnizien

Le problème de la conception de la courbe pour modéliser une trajectoire d'un corps soumis à une force centrale est un sujet de réflexion des contemporains de Varignon, notamment de Leibniz et de Newton². La deuxième loi³ des *Principia* exprime qu'une force produira sur un corps le même mouvement, qu'elle agisse soit « en un seul coup » [*sive simul & semel*], soit « peu à peu et successivement » [*sive gradatim & successive*]. Ainsi, il y a deux manières de considérer l'action de la force : soit elle agit sous forme d'impulsions discrètes infinitésimales, soit elle agit continuellement. Ces deux manières ne conduisent pas à la même conception de la courbe : dans le premier cas la trajectoire est considérée comme un polygone rectiligne d'une infinité de côtés, alors que dans le deuxième cas, elle est considérée comme un polygone constitué d'arcs infiniment petits. Une des difficultés était de comprendre, selon le choix de la représentation de la courbe, quel genre de mouvement induisait l'action de la force sur chaque type d'éléments infinitésimaux⁴.

À partir de 1704, Varignon cherche à évaluer la force centrale f qu'il est nécessaire d'exercer sur un corps pesant en la comparant à la pesanteur p de celui-ci.

¹ C'est la conclusion que tire Auguste Comte, cité par Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, *op. cit.*, p. 221.

² Nous reprenons ici l'étude Aiton, Eric, « Polygons and parabolas : some problems concerning the Dynamics of planetary orbits », *op. cit.*

³ Newton, *Principia*, *op. cit.*, p. 12.

⁴ Eric Aiton explique dans le premier cas, la force agit sur chacun des sommets du polygone en déviant par un mouvement uniforme. Dans un instant dt , la déviation est donc de $f \times dt^2$. Dans le cas du polygone composé d'arcs infinitésimaux, la force agit continuellement causant une déviation de $\frac{1}{2}f \times dt^2$, *ibid*, p. 209-210.

Il énonce ce problème à Jean Bernoulli dans une lettre du 28 octobre 1704 et à Leibniz dans une lettre du 6 décembre de la même année¹ :

Trouver le rapport des Forces centrales (tant centrifuges que centripètes) aux Pesanteurs absolues des corps mus de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra².

Dès sa première lettre, il fournit une solution à ses deux correspondants. Nous décrivons le cas où la courbe est un demi-cercle, qui est un cas particulier auquel il s'intéresse³.

MLR est un demi-cercle de centre R . $HL = h$ désigne la hauteur par laquelle le corps tombant a acquis la vitesse qu'il a au point L .

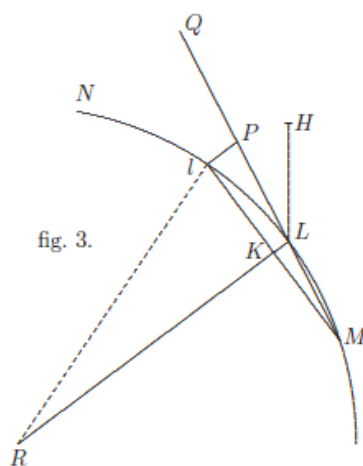


fig. 145

l est un point infiniment proche de L . Il pose : $LR = r, Ll = dx$.

Le mouvement le long de Ll est décomposé selon un mouvement inertiel LP uniforme, le long de la tangente au cercle en L et d'un mouvement accéléré Pl . Son raisonnement le conduit au résultat juste : $\frac{f}{p} = \frac{4hPl}{Ll^2}$. Mais il se trompe dans le calcul de Pl et trouve que $f = \frac{4ph}{r}$.

Cette dernière formule le conduit à contredire des résultats énoncés par Huygens. En effet, ce dernier a établi que dans un cercle la force centrifuge est égale à la pesanteur lorsque $r = 2h$ et Varignon a trouvé que ceci a lieu lorsque $r = 4h$. Or, le résultat de Huygens est attesté par l'expérience et d'ailleurs Varignon l'emploie

¹ Lettre de Varignon à Leibniz du 6 décembre 1704, AIII 9, p. 378.

² Lettre de Pierre Varignon à Jean Bernoulli du 28 octobre 1704, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 120.

³ Lettre de Pierre Varignon à Leibniz du 6 décembre 1704, AIII 9., p. 379-384

souvent dans des applications pratiques¹. Convaincu cependant que Huygens se trompe, Varignon établit à nouveau le rapport $\frac{f}{p}$ en supposant que le cercle est un polygone rectiligne² de côtés ML et Ll , et ainsi LP , le prolongement du côté du polygone rectiligne est la tangente en L . En supposant que la force agit par impulsion aux sommets du polygone, il décompose le mouvement le long de la corde Ll par deux mouvements : l'un inertiel le long de LP est uniforme et l'autre, le long de Pl est uniformément accéléré car la force agit en produisant une accélération. De cette manière il retrouve que $f = \frac{4ph}{r}$, c'est-à-dire le résultat erroné précédent.

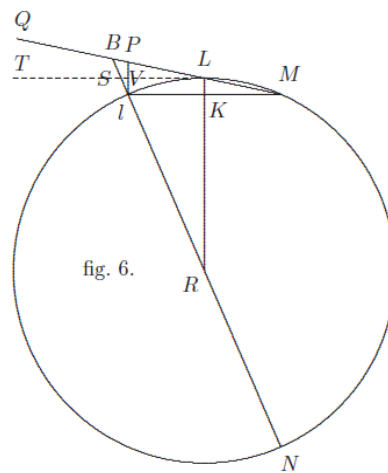


fig. 146

Dans la lettre du 27 juillet 1705, Leibniz³ lui explique que dans le dernier cas, sa décomposition est exacte à condition de supposer que le mouvement le long de Pl est uniforme⁴. Leibniz avait décomposé le mouvement en deux mouvements : l'un inertiel selon la tangente au cercle LS est uniforme, l'autre selon Sl est uniformément accéléré. Dans sa réponse du 26 novembre 1705⁵, Varignon lui explique qu'il s'est rendu compte que lorsque le mouvement est décomposé par la perpendiculaire au

¹Fleckenstein, Joachim, Otto, « Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus », *op. cit.*, p. 103-105, Peiffer, Jeanne, « La définition de la tangente et l'évaluation de la tangente », p. 135-137.

² Lettre de Pierre Varignon à Leibniz du 6 décembre 1704, AIII 9, p. 386. Voir note 24 de la lettre précédente, p. 126.

³ Lettre de Leibniz à Varignon du 27 juillet 1705, AIII 9, p. 452-453.

⁴ *Ibid*, p. 423 : « Mais en considérant PL comme la mesure de la force il faut concevoir, que le mobile le parcourt uniformément(...) ». Cette remarque permet à Leibniz de corriger une erreur dans son mémoire « Tentamen de motuum coelestium causis » publié dans les *Acta* en février 1689 (*op. cit.*), voir Aiton, Eric, John, « Polygons and parabolas : some problems concerning the Dynamics of planetary orbits », *op. cit.*, p. 217.

⁵ Lettre de Varignon à Leibniz du 26 novembre 1705, AIII9, p. 529.

rayon de courbure LP , comme l'avait effectué Leibniz pour le cercle¹, il faut considérer que l'élément Ll est courbe :

comme un véritable arc le long duquel la courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit ; par conséquent comme un véritable arc de cercle, et non comme un côté droit².

Il précise son propos dans la lettre suivante, datée du 29 avril 1706. Il explique que, certes, les deux conceptions de la courbe, c'est-à-dire les deux suppositions concernant le type de polygone – rectiligne ou curviligne –, permettent de résoudre le problème de l'évaluation du rapport $\frac{f}{p}$; néanmoins il avoue sa préférence :

Celles qui sont fondées sur ce que la force centrifuge meut le corps d'un mouvement accéléré dans ce qu'elle lui fait parcourir d'espace à chaque instant, ne le sont pas moins [que celles où la courbe est considérée comme un polygone rectiligne] ; et bien loin qu'il y ait là aucune erreur qui en corrige une autre, ce chemin me paroist plus véritable, et celui des mouvemens uniformes, que vous avez suivi, ne me paroist qu'un équivalent supposé, puisque la force centrifuge ou l'opposée qui lui égale, est réellement constante pendant chaque instant, et continuellement appliquée au corps sur lequel elle agit, de même que la pesanteur sur les graves pendant quelque tems que ce soit. Ainsy le mouvement de la tangente vers la courbe, résultant de la force centrifuge ou centripète, doit être arithmétiquement accéléré pendant chaque instant, de sorte que cette hypothèse me paroist la véritable, et celle des mouvemens uniformes seulement équivalente en ce qu'elle donne le même rapport de forces dont il est ici question. Aussi les courbes sont elles courbes en tout dans la première de ces hypothèses, au lieu qu'elles ne sont que des Polygones équivalents dans la seconde³.

Cette réponse est très intéressante. En effet, Varignon explique que les deux représentations de la courbe sont certes « équivalentes » pour aboutir au résultat. Cependant, il juge que la conception de la courbe par un polygone formé d'arcs infiniment petits est plus « véritable » car plus proche de ce qui a lieu « réellement ».

Ces recherches aboutissent à une version corrigée et définitive de la solution du problème. Elle fait l'objet d'une lecture à l'Académie : le mémoire est publié en

¹ Pour Leibniz, la notation est LS .

² *Ibid.*

³ Souligné par nous. Lettre de Varignon à Leibniz du 29 avril 1706, *Mathematische Schriften*, herausgegeben par C.I. Gerhardt, 1875-1889, réédition Hildesheim, New York, Olms, Band 4, p. 149.

1706 sous le titre « Sur les rapports des forces centrales à la pesanteur »¹. Pour évaluer le rapport $\frac{f}{p}$, Varignon décompose, comme précédemment, le mouvement du corps L en un mouvement uniforme LP et un mouvement uniformément accéléré Pl , et obtient que

$$f = \frac{4ph \times Pl}{Ll^2}$$

Il s'agit ensuite d'évaluer Pl . Ce calcul fait l'objet d'un paragraphe intitulé « Introduction du rayon osculateur dans la précédente Règle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, en considérant les éléments des courbes que ces corps décrivent, comme courbes eux-mêmes »². Avant de commencer les calculs, Varignon souligne que l'élément Ll doit être regardé comme « courbe, & comme un véritable arc dans lequel la courbe MLN est baisée par son cercle osculateur », c'est-à-dire « comme un véritable arc de ce cercle et non comme un côté droit de Polygone ». Le calcul de Pl est effectué suivant cet avertissement puisque Varignon se réfère à la proposition 36 du livre III d'Euclide³. En tenant compte des différents ordres d'infiniment petits⁴, il obtient une valeur correcte de Pl puis, en posant $LR = r$, $Ll = ds$ et $LD = x$, il obtient la valeur de $f = \frac{2phds}{rdx}$. Dans le cas du demi-cercle traité plus haut, $ds = dx$, donc $f = \frac{2ph}{r}$, ce qui s'accorde avec le résultat de Huygens.

¹ « Comparaison des forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées, à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra », *MARS*, 1706, p. 185.

² *Ibid*, p. 184.

³ Euclide, *Les Éléments*, *op. cit.*, volume 1, p. 460-461. Dans l'AI, l'Hospital remarque qu'une courbe peut être considérée comme un assemblage d'arcs de cercle mais il trouve le rayon de la développée en supposant que la courbe est un polygone rectiligne.

⁴ Par exemple Ll est pris pour LE .

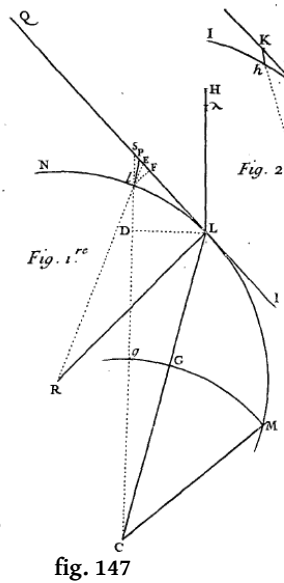


fig. 147

Varignon signale, plus en avant dans son mémoire, qu'il est possible de retrouver ce résultat en considérant que la courbe est un « polygoneinfiniti-lateres rectilignes »¹, c'est-à-dire, en supposant que les éléments ML , Ll sont droits. La tangente n'est plus la perpendiculaire au rayon de courbure mais « le petit côté ML prolongé vers T » (en rouge sur la figure). Il retrouve le résultat précédent.

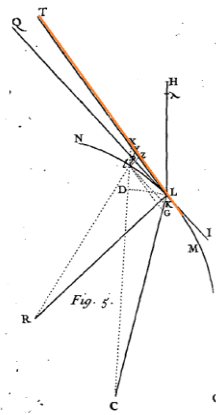


fig. 148

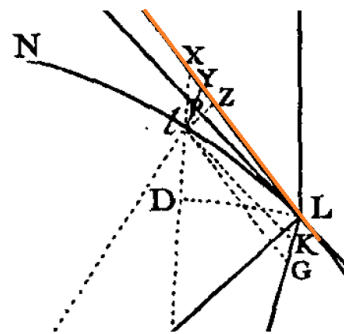


fig. 149

Le fait que dans la résolution de ce problème, même si les deux conceptions de la courbe parviennent à un résultat correct, Varignon préfère considérer la courbe comme un polygone composé de « véritables » arcs de cercle montre qu'il a une « bonne compréhension de la nature du lien entre courbure et force »².

¹ « Demonstration de la même Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée présentement de la considération des Courbes sous la forme de polygones infinti-lateres rectilignes », *Ibid*, p. 191.

² Peiffer, Jeanne, « La définition de la tangente et l'évaluation des forces centrales », *op. cit.*, p. 137.

À la fin de l'année 1706, le 18 décembre, il lit un mémoire intitulé « Différentes manières infiniment générales de trouver les rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes, soit qu'on regarde ces Courbes sous la forme de Polygones, ou non »¹. Il explique que sa recherche du rapport de la force centrale à la pesanteur l'a mené à considérer des courbes, non pas comme habituellement, c'est-à-dire des polygones « infini-lateres rectilignes » mais comme faits « d'éléments véritablement courbes eux-mêmes ». Comme on l'a vu, ceci l'avait conduit à calculer le rayon osculateur en considérant la courbe de cette dernière manière. Dans ce mémoire, il démontre les formules de rayons de courbure en supposant dans un premier temps que la tangente en un point est la perpendiculaire au rayon osculateur (Problème I²). De plus, il ne suppose aucune des variables constante, ce qui lui permet d'obtenir une formule très générale. Puis, retrouve le même résultat en considérant cette fois-ci que le polygone est rectiligne (Problème II³).

3.2) Quelques éclaircissements des méthodes rivales

« *magis morale quam mathematicum* »⁴ : ainsi commente Leibniz le verdict académique de la querelle entre Saurin et Rolle. L'autorité de la commission conduit à une trêve, mais n'aboutit pas un accord scientifique entre les deux parties. Un dialogue de sourds, installé entre les deux opposants, conduisait à des comportements injurieux et à une impasse de plus en plus irréversible. Or, pour apaiser le conflit, il s'agissait et il était nécessaire d'identifier un lieu dans lequel les différentes méthodes trouvent chacune leur place. Nos acteurs n'en ont pas été capables.

Le 10 février 1706, Guisnée, l'élève de Varignon, lit un mémoire intitulé « Observations sur les Methodes des Maximis & Minimis, où l'on fait voir l'identité & la différence de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de M^{rs} Fermat et Hude »⁵. Le titre laisse présumer une possible conciliation entre « les méthodes ordinaires » et l'analyse des infinis. Guisnée destine cet écrit à l'un de ses amis « habile homme dans l'ancienne Geometrie & dans l'Algebre ordinaire » pour lui éclaircir « quelques difficultés » qu'il a rencontrées lors de sa lecture de la troisième section de

¹ MARS, 1706, p. 490.

² *Ibid*, p. 491-497. Il fournit trois solutions.

³ *Ibid*, p. 497-503.

⁴ Cité dans Mancosu, Paolo, *Philosophy of mathematics ...*, *op. cit.*, p. 176.

⁵ Guisnée, Nicolas, « Observations sur les Methodes des Maximis & Minimis, où l'on fait voir l'identité & la différence de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de M^{rs} Fermat et Hude », 10 février 1706, PVARs, 1706, tome 25. Ce mémoire est publié dans HARS, 1706, p. 24-48.

l'*AI*, celle consacrée à la détermination des *maximis* et *minimis*. La lecture de ce mémoire poursuit ce dessein. S'il lit ce mémoire à l'Académie, c'est probablement aussi pour l'adresser à certains de ses membres qui seraient versés dans la géométrie des Anciens, ou experts en algèbre : Galloys et Rolle sont donc convoqués. En soulignant que les géomètres non versés dans l'analyse des infinis peuvent être parfaitement des amis « habiles » et en annonçant qu'il y a des « différences » mais aussi de « l'identité » entre les méthodes ordinaires et le nouveau calcul, Guisnée entretient une attitude de conciliation. Le mémoire est long de 28 pages. Il commence par énoncer cinq « difficultés » rencontrées lors de l'utilisation de la méthode des *Maximis* et *Minimis* de l'*AI* puis il émet quatre observations nourries d'exemples afin de régler ces difficultés.

Les cinq difficultés sont liées à l'interprétation d'égalités du type :

$$dy = 0, dy = \infty, dx = 0 \text{ ou } dx = \infty :$$

doit-on conserver les valeurs de la première équation et non pas celles de la deuxième ?, comment s'assurer que la résolution de $dy = 0$ ou $dy = \infty$ fournit des valeurs qui sont réellement un maximum ou un minimum lorsque la courbe n'est pas décrite ?, comment connaître si en ces valeurs la tangente est parallèle à l'un des axes ?, que dire si l'appliquée qui répond à la solution de $dy = 0$ et $dy = \infty$ conduit à un point où la tangente n'est parallèle à aucun des axes¹ ?

Nous rappelons que l'énoncé de l'Hospital dans la section III de l'*AI*², indique simplement que, pour trouver les *maximis* et *minimis*, il faut résoudre $dy = 0$ puis $dy = \infty$. Il fait suivre sa proposition d'une remarque concernant la position des tangentes dans les deux cas³. Ainsi, l'*AI* ne répond pas directement à toutes ces difficultés, et c'est pour cela en particulier que dans l'article du *Journal des Sçavans* en août 1702, Varignon/Saurin avait suppléé en apportant une solution dans le cas où $dy = 0$ et $dx = 0$ (ou $dy = \infty$). Guisnée avoue que ces difficultés ont dû paraître « légères à M le Marquis de l'Hospital » mais il estime que cela vaut la peine qu'elles soient levées ou éclaircies pour ceux qui n'en seraient pas capables.

¹ *Ibid*, p. 25-26.

² « Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis », *AI*, p. 41.

³ Article 47, *ibid*, p. 42.

Dans l'« observation II », Guisnée affirme qu'il existe trois genres différents de rapports de $\frac{dx}{dy}$: fini, infini, et indéterminé¹. Il juge que le cas « indéterminé », c'est-à-dire celui où m et n sont tous les deux nuls, est le moins connu de tous, et c'est pour cette raison qu'il juge nécessaire de démontrer le théorème (faux)² énonçant qu'aux points d'intersection de deux rameaux d'une courbe – il baptise ces points de « nœuds » – où la tangente n'est pas parallèle à l'un des axes, le rapport $\frac{dx}{dy}$ est nécessairement indéterminé. Puis il explique que pour connaître les points où se trouvent les nœuds d'une courbe il faut chercher quels sont les points pour lesquels ce rapport est indéterminé, il les désigne aussi par « faux Maxima » ou « faux Minima ». Le théorème a donc une réciproque qu'il ne justifie pas³. En énonçant ce théorème, Guisnée veut éclaircir en particulier les difficultés rencontrées lors de certains exemples dans le débat entre Rolle et Varignon/Saurin. En faisant correspondre à chacun des cas possibles du rapport $\frac{dx}{dy}$ avec son interprétation géométrique, il veut améliorer la méthode des *minimis* et *maximis* de l'analyse des infinis et la faire apparaître comme exacte. Ainsi, dans ce cas, elle permettrait d'interpréter un calcul distinctement et de manière univoque.

Il fait observer également que les questions des *Maximis* & *Minimis* sont des « problèmes déterminés, comme ceux de la Geometrie ordinaire, que l'on résout avec deux inconnuës »⁴ car il s'agit de trouver, soit des points où la tangente est parallèle à l'un des axes, soit des points d'intersection de deux courbes. Ces deux situations se ramènent à la résolution d'équations comme pour la Géométrie ordinaire. De même aussi que dans la Géométrie ordinaire, « les imaginaires, ou les contradictions font connoître l'impossibilité, ou absoluë, ou en partie, des uns & des autres »⁵.

La seule différence est que la géométrie ordinaire n'admet que des valeurs finies et réelles comme solutions, contrairement à l'analyse des infinis qui interprète le cas où les solutions sont infinies, par exemple lors de phénomènes asymptotiques⁶.

¹ Il pose $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{n}$, puis il examine les cas m et n finis, $m = 0$ et n non nul, m non nul et $n = 0$, et enfin m et n tous les deux nuls.

² Théorème qui est faux comme Jean Bernoulli le montre par des contre-exemples dans une lettre à Jean-Pierre Crousaz du 8 mai 1717.

³ *Ibid*, p. 34.

⁴ *Ibid*, p. 35.

⁵ *Ibid*, p. 36.

⁶ « Observation I », *Ibid*, p. 27.

Guisnée illustre tous ses propos par des exemples. Parmi ceux-là, certains ont fait l'objet de discussions entre Rolle, Varignon et Saurin.

Dans l'article XXIV, il s'occupe de la courbe d'équation :

$$A : y - a = a^{\frac{1}{3}}(a - x)^{\frac{2}{3}}$$

En différenciant, il obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{a-x}}$$

En résolvant $dy = \infty$, il obtient $x = a$, et en déduit que la courbe possède un minimum avec une tangente parallèle à l'axe des y . À cette résolution, identique à celle de l'Hospital dans l'Al¹, il ajoute la résolution $dy = 0$ pour laquelle le Marquis ne tirait aucune conclusion. Or $dy = 0$ implique $a = 0$, d'où, A devient² $axx = y^3$ ou $x = \pm \frac{\sqrt{y^3}}{a}$ ou $x = \pm \frac{\sqrt{y^3}}{0}$. Guisnée conclut à l'existence de ce qu'il a nommé une « tangente infinie » parallèle à l'axe des abscisses, ou « *maxima infinis* ».

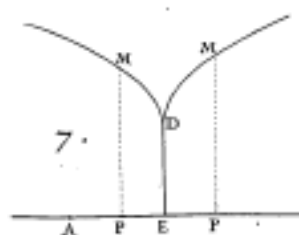


fig. 150

Cet exemple est repris à l'identique par Varignon dans *Éclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits*³.

Guisnée traite aussi l'exemple de la courbe d'équation⁴ :

$$A : x^4 - 4ax^3 + 4aaxx - 6ayxx + 12aayx - 8a^3y + aayy = 0$$

qui est la même équation que la quartique examinée plus haut en échangeant x et y .

¹ Al., p. 43.

² Guisnée garde les termes où x et y ont le plus de dimensions car les autres « sont nuls par rapport à eux, à cause de la multiplication par a ». En effet, $\sqrt[3]{(a-x)^2} = \sqrt[3]{a^2 - 2ax + x^2} \sim \sqrt[3]{x^2}$

³ *Éclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits*, op. cit., p. 30. Cet exemple fait partie de ceux dont se sert Rolle pour expliquer que selon que les radicaux soient ôtés ou pas, l'analyse des infinis ne fournit pas les mêmes résultats, sauf qu'il se trompe. Cet exemple relève du même cas que celui de la courbe que

nous avons examinée plus haut dont l'équation est : $y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$,

⁴ *Ibid*, p. 40-42.

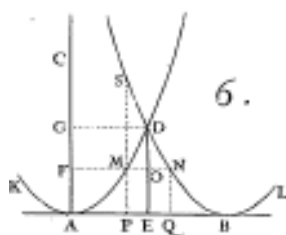


fig. 151

Il trouve quatre *minima* en K, A, B et L – correspondant aux solutions de $dy = 0$ mais qui ne sont pas solutions de $dy = \infty$ et un « nœud », correspondant à $dy = 0$ et $dy = \infty$ pour lequel il calcule les sous-tangentes, en utilisant, comme Varignon/Saurin, l'article 163 de l'*AI*.

Nous n'avons pas examiné en détail tous les exemples que Guisnée propose à foison. Il considère que ces exemples ont permis d'éclaircir les difficultés qu'il avait énoncées au début du mémoire sur les questions des *maximis* et *minimis*, que les équations soient délivrées ou pas de radicaux. Ainsi, il estime qu'il ne lui reste plus qu'à « démontrer l'identité de la méthode de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de *Messieurs Fermat et Hude* »¹.

Guisnée analyse l'obtention, par le calcul, du rapport $\frac{dy}{dx}$. Il explique que les étapes algorithmiques qui permettent de calculer le numérateur sont les mêmes que celles de l'application de la méthode de Hudde « à une équation regardée par rapport à l'inconnue x »², et qu'il en est de même pour le dénominateur dy . Il illustre « l'identité » de ces deux méthodes en les appliquant, l'une après l'autre, sur une quartique : il calcule $\frac{dy}{dx}$ puis il montre qu'en appliquant la méthode de Hudde aux puissances de x , respectivement aux puissances de y , il obtient le numérateur dx , respectivement le dénominateur dy .

En ce qui concerne l'identité entre la méthode de l'analyse des infiniment petits et la méthode de Fermat, il affirme qu'elle est « même assez manifeste pour qu'il ne soit point besoin de s'arrêter à la démontrer »³.

Il y a donc « identité » entre la méthode de l'Analyse des infiniment petits et celles de Hudde et de Fermat. Cependant, cette affirmation est à nuancer :

¹ *Ibid*, p. 49.

² « il n'y a nulle différence entre le numérateur de la fraction $= \frac{dy}{dx}$ trouvée en prenant les différences de l'équation proposée, & l'équation $= 0$ tirée par la methode de M. Hude de la même équation proposée, regardée par raport à l'inconnue x , & particulièrement après qu'on a supposé $dy = 0$ », *ibid*, p. 49-50.

³ *Ibid*, p. 51.

Mais il faut demeurer d'accord que la méthode de l'Analyse des infiniment petits a bien des avantages par-dessus les autres. Elle n'est point arrêtée par les signes radicaux, où les autres n'ont point de prise : elle s'étend aux lignes Mécaniques avec la même facilité qu'aux Géométriques, & fournit des solutions générales où les autres méthodes n'en donnent que de particulières, &c¹.

L'application de l'Analyse des infinis pour la recherche d'*extrema* produit les mêmes résultats que les autres méthodes, les processus algorithmiques conduisent aux mêmes expressions, et en cela elles peuvent être « identifiées ». Néanmoins, Guisnée souligne que l'Analyse des infinis est supérieure. Il reprend les arguments récurrents en faveur de l'analyse des infinis exprimés dès 1684 par la *Nova Methodus* : son application n'est pas entravée par les signes radicaux, comme les autres peuvent l'être, et elle est plus générale car elle s'applique en particulier aux mécaniques.

Le propos de ce mémoire est donc de reconnaître que la méthode des *maximis* et *minimis*, telle qu'elle était énoncée dans l'*AI*, méritait sûrement des éclaircissements mais que cela étant fait, il est encore plus clair désormais qu'elle est bien plus avantageuse que les autres. Il est à remarquer que dans ses propos aucune accusation n'est émise concernant un déguisement du calcul différentiel par d'autres méthodes, en revanche, il y est souligné que l'Analyse des infinis les prolonge et les subsume.

Un mois plus tard, le 6 mars 1706, Galloys lit un mémoire² attaquant l'exactitude de l'algorithme différentiel pour chercher les *extrema* de la courbe d'équation :

$$x^2 + 2n^2 = n\sqrt{ny - n^2} + n\sqrt{ny - 2n^2}.$$

Il affirme que la méthode de Hudde fournit un minimum égal à $\frac{41n}{16}$ (ce qui est correct) alors que, par la méthode des infiniment petits, aucun *extrema* n'est retenu. Guisnée répond à cette attaque le 10 mars 1706, mais ses arguments sont insatisfaisants. Deux autres répliques suivront : une de Galloys le 28 juillet³, à laquelle répond Guisnée le 23 août⁴. Cette joute de réponses au sein de l'Académie ne prend certes pas la forme houleuse des précédentes, mais elle prouve que le jugement de la

¹ *Ibid*, p. 51.

² Galloys, Jean, « Difficulté proposée sur la manière de trouver le Maximum ou Minimum par la Méthode des Infiniment petits », 6 mars 1706, *PVARS*, tome 22, 1706, 83V-86R

³ *PVARS*, tome 26, fol. 306R. Galloys accuse l'Analyse des infinis de prétendre de ne pas être embarrassée par les radicaux, affirmation qu'il refuse.

⁴ *Ibid*, fol. 330R

commission n'a pas du tout clos le débat même si, néanmoins, il a apaisé son caractère passionnel.

Le 10 février 1706, Guisnée avait prétendu que l'Analyse des infinis a des avantages supérieurs aux autres méthodes. À cette affirmation, Rolle répond pendant la séance du 8 mai 1706 par un mémoire intitulé : « Sur la méthode de M^{rs} de Fermat et Hudde »¹. Il lit ce mémoire dans le but de montrer tout d'abord que les méthodes de Hudde et de Fermat s'accordent. Ce qui est nouveau dans le contenu de cette lecture est que Rolle avoue « qu'il y a quelque chose à désirer dans cette Méthode », parce que « elle donne indistinctement et très souvent diverses valeurs des inconües sans faire conoître si ces valeurs sont des *Max.* ou des *Min.* »². Il explique aussi qu'elle ne précise pas si les *extrema* trouvés sont relatifs ou absolus. L'inconvénient « le plus considérable » est qu'elle peut fournir des valeurs réelles qui ne correspondent à aucun *extremum*. Rolle affirme que ces « valeurs de surcroît » désignent des « points d'inflexion ou d'autres points notables ». Il promet un mémoire à ce sujet. Le défaut supposé de la méthode fait en définitive « conoître sa fécondité »³. Il fournit aussi d'autres précisions, notamment sur les asymptotes considérées comme des *extrema*. Dans cette réponse à Guisnée, il est à souligner que Rolle n'attaque absolument plus le calcul différentiel mais il apporte des précisions sur sa méthode algébrique.

Dans *HARS* de 1706, Fontenelle commente le mémoire de Guisnée⁴. Il déclare que les réponses aux différentes objections contre les méthodes exposées dans l'*AI* « n'ont jamais été que des éclaircissemens, qui en confirmé les Principes » car de cet ouvrage sublime on ne peut désirer que des éclaircissemens et rien d'autre. Le travail réalisé par Guisnée pour préciser la signification des différentes valeurs possibles du rapport $\frac{dy}{dx}$, a non seulement conservé « l'universalité » de la méthode de l'Hospital pour les *maxima* et *minima*, mais « la met au plus grand jour & la rend plus incontestable »⁵. Il ajoute que désormais, après ces éclaircissemens, toute autre difficulté ne sera pas du fait de la Géométrie de l'infini mais « des embarras de calcul qui naîtroient de l'Algèbre ordinaire, qu'il y faut nécessairement appliquer »⁶. Le parti pris de

¹ Rolle, Michel, « « Sur la méthode de M^{rs} de Fermat et Hudde », 8 mai 1706, *PVARS*, tome 26, fol. 172R-179R.

² *Ibid.*, fol. 177R.

³ *Ibid.*

⁴ « Sur la méthode des infiniment petits pour les *Maxima* & *Minima* », *HARS*, 1706, p. 51.

⁵ *Ibid.*, p. 53.

⁶ *Ibid.*, p. 55.

Fontenelle est incontestable : l'Analyse des infinis peut nécessiter des éclaircissements mais son fondement est sûr. En pratiquer le calcul conduit certaines fois à des « embarras » mais ces derniers sont partagés avec l'analyse ordinaire.

Les attaques contre l'exactitude du calcul différentiel ont débuté en décembre 1700. En dépit des maladresses de Rolle ou de Galloys, elles ont permis aux deux camps adverses d'approfondir leurs propres méthodes. Malgré des différences de positions, une question réunit les adversaires de ce débat : comment interpréter le résultat d'un calcul ?

Rolle n'avait pas cessé de souligner, en dehors de tout conflit avec le calcul différentiel, que l'algèbre devait être améliorée pour l'étude des courbes. Ce dernier mémoire montre qu'il souhaite interpréter distinctement des résultats obtenus par la méthode de Hudde. Le mémoire de Guisnée poursuit ce même espoir en tentant de faire correspondance des situations géométriques et les valeurs possibles des rapports $\frac{dy}{dx}$. Ces deux mémoires sont les premiers pour lesquels cette volonté d'explicitation s'exprime plus fortement.

Dans une lettre à Jean Bernoulli datée du 10 novembre 1706, Varignon annonce que « M. Rolle est enfin converti »¹, ce dernier l'a déclaré à Varignon et à Fontenelle mais aussi à Malebranche en indiquant à ce dernier « qu'on l'avoit poussé à faire ce qu'il a fait contre les infiniment petits, & qu'il en étoit fâché »². Galloys, le plus grand appui de Rolle, meurt le 9 avril 1707. Sans son collaborateur si fermement opposé à l'Analyse des infinis, Rolle se retrouve isolé :

La mort de M. l'Abbé Galloys a enfin réduit M. Rolle à se taire : non seulement il ne pense plus à rien dire contre les infiniment petits, mais comme il m'a marqué être très fâché d'y avoir jamais pensé, sentant bien le tort qu'il a fait en cela à sa réputation. Il se plaint d'y avoir été engagé par cet Abbé qui a toujours été assez habile pour n'exposer que celui-ci sans rien engager du sien³.

¹ Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 10 novembre 1706, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *op. cit.*, p. 200. Varignon indique qu'il a fourni les détails de cette « conversion » à Herman et que ce dernier pourra donner plus d'explications à Jean Bernoulli.

² Montucla explique que mis à part Galloys l'autre instigateur était probablement le Père Gouye « qui avait fortement appuyé les objections de Rolle dans un des journaux de Trévoux », Montucla, Etienne, *op. cit.*, p. 116. Nous avons retrouvé dans le *Journal de Trévoux* de juin 1702 un article non signé qui probablement correspondrait à celui-ci : « Parallèle du Calcul différentiel, avec celui de la Méthode, de Maximis & Minimis, de Mr de Fermat », *Journal de Trévoux*, juin 1702, p. 464-468.

³ Lettre de Varignon à Leibniz, sans date, p. 158.

Sa conversion semble donc être plus dictée par un choix politique que par conviction scientifique. Dans une lettre adressée à Leibniz le 28 août 1708¹, Varignon indique que « M. Rolle ne laisse pas de decrier encore sourdement ce calcul par le monde ».

3.3) Fontenelle, un récit de la réception du calcul leibnizien à l'Académie

Fontenelle, Secrétaire perpétuel

Fontenelle est devenu l'ami intime de Varignon par l'intermédiaire de l'Abbé Saint-Pierre qu'il a connu à Rouen en 1683. En 1686, Castel de Saint-Pierre et Varignon s'installent à Paris, rue Saint-Jacques, aux frais de l'Abbé. Fontenelle passe souvent les voir dans cette maison et reste parfois deux ou trois jours². Malebranche venait quelquefois dans la maison du faubourg Saint-Jacques et se lie d'amitié avec Fontenelle³. À son tour, ce dernier se rend ensuite souvent à l'Oratoire pour échanger avec le philosophe⁴. La fréquentation par Fontenelle du cercle autour de Malebranche est donc manifeste à partir de 1690.

Le parcours intellectuel de Fontenelle indique l'éclectisme de ses intérêts : poésie, théâtre, journalisme, sciences, histoire, et même littérature espagnole. Son tempérament, aussi laborieux que curieux, et son existence centenaire, lui ont permis d'aborder les domaines intellectuels les plus divers⁵. Homme de lettres, il s'intéresse aussi largement à toutes les sciences et tout particulièrement aux mathématiques. Il marque immédiatement un intérêt particulier pour l'Analyse des infinis qu'il découvre par la fréquentation du cercle autour de Malebranche.

Bignon⁶ est président de l'Académie des Sciences depuis 1691. Il cumule ensuite plusieurs titres de pouvoir, entre autres, Président de l'Académie des inscriptions et des Belles-lettres en 1693 et directeur du *Journal des Sçavans* à partir de

¹ Lettre de Varignon à Leibniz du 28 avril 1708, p. 167.

² Castel de Saint-Pierre, *Mémoires de Rouen*, I, p. 12.

³ Niderst, Alain, *Fontenelle, à la recherche de lui-même*, Paris, Nizet, 1972, p. 359.

⁴ Trublet, Joseph, *Mémoires pour servir à l'histoire de la vie des ouvrages de M. de Fontenelle*, Paris, Chez Dessaint et Saillant, 1756, p. 112.

⁵ À juste titre, Alexis Philonenko remarque que l'on a plus vite fait de chercher à savoir ce qu'il n'a pas fait plutôt que ce qu'il a fait, « Qui était Fontenelle ? » in *Corpus, Revue de philosophie*, n°44, Université de Paris X Nanterre, 2003, p. 131.

⁶ Pour la relation entre Fontenelle et Bignon, Bléchet, Françoise, « Fontenelle et l'abbé Bignon. Du Président de l'Académie Royale des Sciences au Secrétaire Perpétuel : quelques lettres de l'Abbé Bignon à Fontenelle », *Corpus, Revue de Philosophie*, n°13, Paris, 1990, p. 63-74

1701. Son souci particulier pour la rénovation de l'Académie des Sciences aboutit à la rédaction des règlements de 1699. Le comte Jérôme Phélypeaux de Ponchartrain, fils de l'oncle de Bignon, est un ami intime de Fontenelle. Ce lien rapproche Fontenelle de Bignon. Ce dernier ne tarde pas à voir, dans les atouts du lettré, un appui pour contribuer à mener sa politique culturelle, à bien des égards fort dirigiste. Reconnaisant les qualités de Fontenelle, Bignon n'hésite pas à lui confier le rôle de secrétaire de l'Académie¹ en 1697. À partir de 1699, il devient l'historien de cette institution et le reste jusqu'en 1737. En effet, l'article 40 du nouveau règlement de l'Académie prévoit que, le secrétaire commente chaque mémoire publié par ses pairs. Il peut également rédiger un éloge en hommage à tout académicien mort au cours de l'année. Fontenelle s'acquitte de sa tâche si fidèlement et si scrupuleusement, qu'il délaisse souvent d'autres plaisirs intellectuels qui lui sont chers. « Écrivain de première classe »², il fait en sorte que ce qui ne devait être qu'un compte rendu amélioré des séances académiques devienne une histoire sous forme d'une véritable œuvre littéraire³. Ce rôle d'historien de l'Académie n'est pas le seul dont s'acquitte Fontenelle. Parmi d'autres activités, il participe à la préparation des assemblées publiques, résume par écrit les productions des académiciens ou encore signe les certifications d'approbation⁴. En outre, il correspond avec de nombreux savants dans l'Europe entière, notamment avec Leibniz à partir de 1700⁵. Par ses échanges épistolaires, il consolide l'image de la grandeur académique à l'extérieur du territoire français.

Historien de l'Académie, son témoignage doit être examiné pour l'analyse et l'étude de la réception du calcul leibnizien. Il nous semble important d'examiner la

¹ Nommé à l'Académie française en 1691, à celle des sciences en 1697, puis à celle des inscriptions et des belles-lettres en 1701, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences entre 1699 et 1740, Fontenelle apparaît au cœur de « l'Etat culturel » de Louis XIV.

² Philonenko, Alexis, « Qui était Fontenelle ? », *op. cit.*, p. 133.

³ Son œuvre académique suscite aujourd'hui l'intérêt de nombreux chercheurs. Sans vouloir atteindre l'exhaustivité, nous pouvons citer parmi ces chercheurs: Sophie Audidière, François Bessire, Simone Mazauric, François Pépin, Claudine Pouloin, Maria-Susana Seguin.

⁴ Entre autres fonctions, Fontenelle assume celle de censeur royal à partir de 1699. Il est, parmi les censeurs royaux, l'un des plus sollicités. On pourra consulter : Mellot, Jean-Dominique, « Fontenelle censeur royal ou approbateur éclairé ? », *Revue Fontenelle*, n° 6-7, Publications des universités de Rouen et du Havre, Mont-Saint-Aignan, 2010, p. 50-72.

⁵ Une grande partie de la correspondance de Fontenelle a été publiée par le biais de la thèse de Mickael Freyne, *La correspondance de Fontenelle jusqu'en 1740*, thèse d'Etat soutenue sous la direction de Frédéric Deloffre, Université Paris IV, 2 volumes, 1972. Concernant la correspondance de Fontenelle, on pourra également lire l'article de François Bessire : « La correspondance de Fontenelle : de la lettre au réseau » dans *Revue Fontenelle*, n°5-6, PURH, Rouen, 2010.

forme prise par cette œuvre littéraire pour légitimer la présence du calcul leibnizien au sein de l'Académie des Sciences. Avant de nous consacrer à l'étude de l'histoire fontenellienne du calcul leibnizien à l'Académie, nous allons souligner quelques aspects de *l'Histoire de l'Académie des Sciences (HARS)*, et de la partie *Éloges*.

L'Histoire de l'Académie royale des Sciences

Plusieurs nominations institutionnelles ont honoré Fontenelle mais c'est sans aucun doute à son rôle de secrétaire de l'Académie des Sciences qu'il s'est dévoué avec le plus de fidélité, presque la moitié de sa vie. Si en tant que secrétaire perpétuel, plusieurs tâches lui sont assignées, celle d'écrivain de l'*HARS* est pour lui la plus centrale et il lui consacre des journées de travail sans compter. Il rédige chaque année de son mandat la partie « Histoire » qui compte à chaque fois entre 100 et 150 pages environ. De ce sacerdoce institutionnel résulte une édition de 41 volumes, édités à partir de 1702¹, soit environ 5000 pages écrites entre 1699 et 1740, date à laquelle Fontenelle se retire de l'Académie².

L'article 40 du règlement contraint le secrétaire à écrire une « histoire raisonnée » de l'Académie, mais ne précise absolument pas la forme que doit prendre cette histoire. En fait, Fontenelle est libre de ses choix de composition, il lui suffit uniquement d'assurer les exigences prônées par l'article : diffuser publiquement³ les travaux et activités des savants tout en rendant hommage à la politique royale de la culture. N'étant pas destinée uniquement à un public savant, la revue peut être lue également par un public curieux ou amateur. Des extraits de l'*HARS* sont périodiquement publiés dans d'autres journaux comme le *Journal des Sçavans*, le *Journal de Trévoux* ou le *Mercurie Galant*. En Europe, l'obtention d'exemplaires de l'*HARS* est précieuse. Fontenelle se charge d'en envoyer aux principales académies européennes. D'autres savants étrangers l'obtiennent par l'intermédiaire de savants français, souvent des académiciens. La logistique mise en œuvre pour faire circuler l'*HARS* est

¹ Les premiers volumes prennent un peu de retard, l'édition de 1702 correspond à l'année 1699. Les éditions suivantes deviennent plus régulières.

² À cela, il faut ajouter une histoire de l'Académie entre 1666 et 1699 reproduite à partir de 1733.

³ Selon le *Dictionnaire universel* d'Antoine Furetière, « public » désigne ce qui est collectif en opposition au particulier, au « général des citoyens, ou des hommes » mais peut aussi désigner simplement une « assemblée ouverte à tout le monde, ou à quelques personnes choisies ». La labilité de cette définition montre que la notion de « public de l'Académie » revêt un caractère implicite : elle peut désigner un public d'amateurs qui ne sont pas forcément des savants mais qui sont assez curieux et alertes pour comprendre le contenu de l'*HARS*.

souvent un sujet d'échanges épistolaires. L'impact de cette publication est donc loin d'être négligeable et mérite notre attention.

Fontenelle fait précéder la première édition, concernant l'année 1699, d'une préface. Il y explique la structure de l'*HARS* et certains de ses choix d'écriture. Nous savons que l'*HARS* est divisée en deux parties. La deuxième est destinée à certains mémoires (*MARS*) qui correspondent à « toutes les pièces lûes dans l'Académie, qui ont été jugées les plus importantes, et les plus dignes d'être données au public dans toute leur étendue »¹. Tout mémoire lu n'est donc pas forcément publié : cela dépend d'une décision hiérarchique².

La première partie, dont Fontenelle est le véritable artisan est destinée principalement à commenter des mémoires de la deuxième partie. En fait, tous les mémoires ne sont pas nécessairement commentés et Fontenelle aborde aussi d'autres sujets d'intérêt pour l'Académie, comme peuvent l'être les comptes rendus d'un ouvrage, et, bien entendu, les hommages des académiciens décédés avec leur éloge. Il insiste bien sur le fait que l'écriture de l'*HARS* est conçue pour qu'un public plus large que celui des seuls savants puisse comprendre la science académique :

On a voulu qu'outre les matières dont ils [les mémoires] traitent, elle [la partie "Histoire"] receüillit ce qu'on ne croyait pas à propos de donner tout au long, et qu'on ne voulait pas perdre entièrement, et en même temps on a eu dessein que sur tous les sujets, soit qu'ils fussent communs avec les mémoires, soit qu'ils lui fussent particuliers, elle fut plus proportionnée à ceux qui n'ont qu'une médiocre teinture de Mathématique et de Physique, car pour ceux qui absolument n'en ont aucune, ils feraient mieux de prendre les choses d'un peu plus haut, et il aurait fallu de trop grands discours pour remonter en leur considération jusqu'aux premiers élémens des sciences.(...) En général, on a crû que par rapport aux savans profonds, et ceux qui ne le sont pas, il était bon de présenter sous deux formes différentes les matières qui composent ce recueil, que les travaux de l'Académie en seraient plus connus, et que le goût des Sciences s'en répandrait davantage³.

Souvent, la partie « histoire » d'un mémoire fait référence à d'autres mémoires publiés antérieurement ainsi qu'à leur histoire. Cette structure de renvois permet au lecteur de suivre la tournure d'une discussion ou l'avancement d'une problématique

¹ *HARS*, 1699-1702, Préface, ii.

² Mellot, Jean-Dominique, « Fontenelle censeur royal ou approbateur éclairé ? », *op. cit.*, p. 61.

³ *Ibid*, Préface, ii.

et donne une réelle impression de science « en train de se faire ». De cette manière, le compte-rendu n'apparaît pas comme un fait isolé mais comme un discours toujours en résonance avec d'autres discours, dans but de fournir une intelligibilité à l'ensemble, Fontenelle a l'espoir que

Le temps viendra peut-être que l'on joindra en un corps régulier ces membres épars ; et s'ils sont tels qu'on le souhaite, ils s'assemblent en quelque sorte d'eux-mêmes. Plusieurs vérités séparées, dès qu'elles sont en assez grand nombre, offrent si vivement à l'esprit leurs rapports et leur mutuelle dépendance, qu'il semble qu'après avoir été détachées par une espèce de violence les unes avec les autres, elles cherchent naturellement à se réunir¹.

Le récit fontenellien s'efforce de mettre à jour des liens qui donnent à lire une histoire polyphonique de l'Académie. En cela, il constitue un témoignage à considérer pour notre étude.

Les éloges académiques représentent un exercice depuis le début de la présidence de Bignon. À partir de 1700, ils sont lus pendant les séances publiques bisannuelles. Annoncés dans le célèbre journal *Mercurie Galant*, ces événements sont particulièrement suivis. Ils sont ensuite retranscrits dans la partie « Histoire ».

Les *Éloges* s'adressent de toute évidence à un public bien plus large que celui des savants ou des simples amateurs. Fontenelle utilise le genre des éloges pour rehausser l'image des savants et légitimer leur statut d'élite², timidement reconnu sous l'Ancien régime³. Dans les *Éloges*, il présente les savants de l'Académie comme des hommes dévoués à la science et au service du royaume par leurs travaux. De cette manière, il cherche à donner une notoriété à l'Académie. Plus tard, D'Alembert louera la forme prise par les éloges fontenelliens :

L'Académie des sciences doit certainement à M. de Fontenelle une partie de la réputation dont elle jouit : sans l'art avec lequel ce célèbre écrivain a fait valoir la plupart des ouvrages de ses confrères, ces ouvrages, quoiqu'excellents, ne seraient connus que des

¹ *Ibid*, Préface, xix.

² Kapp, Volter, « Les qualités du scientifique et le prestige social des sciences dans les éloges académiques de Fontenelle », *Fontenelle, Actes du colloque tenu à Rouen du 6 mars au 10 octobre 1987*, publiés par Alain Niderst, PUF, Paris, 1989.

³ Alexis Philonenko affirme que le modèle politique fontenellien est basé sur la méritocratie, « Qui était Fontenelle ? », *op. cit.*, p. 134.

savants seuls, ils resteraient ignorés de ce que l'on appelle le public et la considération dont jouit l'Académie des sciences serait moins générale¹.

Fontenelle souhaite toucher le public pour qu'il apprécie le rôle important du savant et reconnaisse son utilité collective. Ainsi, le travail des savants prend une valeur morale. Cependant, ce qui importe est avant tout de souligner la relation qu'entretiennent les hommes de science, avec l'élaboration d'un savoir général et universel. Alors que cette relation se montre trop souvent insatisfaisante, paradoxalement, il tient à justifier qu'il ne saurait en être autrement. Il est en effet persuadé que la science est toujours en devenir, et parce que la vérité est toujours le but ultime de la recherche, il importe surtout de considérer et connaître comment cette quête de vérité procède².

Fontenelle, un engagement immédiat pour la Géométrie des infiniment petits

Par l'intermédiaire surtout de son ami Varignon, dont il suit les travaux, Fontenelle prend connaissance de l'Analyse des infinis. Il est d'emblée séduit et la désigne immédiatement et le plus fréquemment par « Géométrie des infiniment petits » ou par « Géométrie de l'infini ». Dans la lettre du 23 mai 1702, Varignon informe Leibniz que Fontenelle a l'intention d'écrire « des élémens Metaphysiques de votre Calcul, dont il a (dit-il) le système tout entier dans la Teste. Ce qu'il y a de vray c'est qu'il l'entend fort bien »³. Le 18 novembre 1702, Fontenelle confirme à Leibniz cette intention « j'ai commencé la téméraire entreprise des infiniment petits »⁴. Leibniz encourage Fontenelle dans cette tâche : « votre beau dessein qui va à répandre les lumières de vostre esprit jusque dans les enfoncemens des infiniment petits »⁵. L'élaboration de cet ouvrage coûte 25 ans de travail à Fontenelle qui le publie enfin en 1727 sous le titre *Éléments de Géométrie de l'infini*.

¹ D'Alembert, *Réflexions sur les Éloges académiques* dans *Oeuvres complètes de d'Alembert*, t. II, 1ère partie, Genève, Slatkine, 1967, p. 150-153, cité dans Mazauric, Simone, *Fontenelle et l'invention de l'histoire des sciences à l'aube des Lumières*, Fayrad, Paris, 2007, p. 95.

² Ce point de vue a été développé dans un article d'une grande précision : Seguin, Maria-Susana, « La figure du savant dans les *Éloges* des Académiciens de Fontenelle, *Les écrivains face au savoir*, Veronique Dufief-Sanchez, directrice, Éditions universitaires de Dijon, 2002, p. 29-39.

³ Lettre de Varignon à Leibniz du 23 mai 1702, *op. cit.*, p. 92.

⁴ Lettre de Fontenelle à Leibniz du 18 novembre 1702, Freyne, Mickael, *op. cit.*, lettre 16, 2.

⁵ Lettre de Leibniz à Fontenelle le 12 juillet 1702, Freyne, Mickael, *La correspondance de Fontenelle jusqu'en 1740*, *op. cit.*, t. 2, lettre 15, 1.

Ainsi, malgré les règles de neutralité qu'il doit respecter dans son rôle de secrétaire, il écrit, dès que ses fonctions d'historien débutent, des louanges de la nouvelle analyse.

Dans *HARS* de l'année 1700, il destine un article dans la partie « Histoire » pour commenter les quatre mémoires concernant les forces centrifuges, dont l'un est de L'Hospital et les deux autres de Varignon¹. Les difficultés auxquelles les deux savants se sont confrontés n'auraient pas pu être résolues sans le secours de l'analyse des infinis :

M. le Marquis de l'Hôpital entreprit de vaincre toutes ces difficultés avec le secours de sa Méthode des Infiniment petits, & il semble avoir défié toute autre Méthode d'en pouvoir venir à bout².

et :

Ce fut par la Géométrie des infiniment petits, que M. Varignon réduisit les mouvements variés à la même règle que les uniformes, & il ne paroît pas que par toute autre Méthode on eût pû y parvenir³.

L'année suivante, il continue à souligner le caractère singulier de la « Géométrie des Infiniment petits », capable de résoudre des problèmes pour lesquels d'autres méthodes sont défailantes : au sujet des forces centrales, elle permet de proposer « plusieurs chemins » pour parvenir à un résultat⁴, et elle permet de rectifier « par la voye la plus facile et en même tems la plus naturelle qu'il soit possible »⁵ les courbes qui peuvent être rectifiées.

En revanche, alors que le 10 décembre 1701, Rolle a lu un mémoire intitulé « Premières remarques sur les lignes géométriques », Fontenelle destine à peine quelques lignes à le commenter : « Mr Rolle donna quelques Régles, mais sans démonstration »⁶. De fait, les années suivantes, il ne consacre aucun article dans la

¹ « Sur les forces centrifuges », *HARS*, 1700, p. 78-101.

² *Ibid*, p. 81.

³ *Ibid*, p. 89.

⁴ « Sur les forces centrales », *HARS*, 1701, p. 81.

⁵ « Sur la rectification des courbes », *HARS*, 1701, p. 83.

⁶ *Ibid*, p. 89.

partie « histoire » à un mémoire de Rolle. Il place ainsi l'algébriste en marge de l'histoire de l'Académie.

La même année, le débat entre Rolle et Varignon fait l'objet d'un article dans la partie « Histoire ». L'Académie a imposé le silence et, dans ces conditions, Fontenelle, en tant que secrétaire, devrait particulièrement faire preuve de neutralité. Ce n'est pas le cas.

Il explique que la « Géométrie des infiniment petits » est une méthode « fondée sur un Principe connu, & employé par les anciens Géomètres »¹ : celui de considérer la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés. Les Anciens n'ont « pas pénétré l'étendue immense » de ce principe ; en revanche, des géomètres « du premier ordre » – il cite Barrow, Newton, les Bernoulli et Leibniz – ont su pousser suffisamment cette idée ; il revient à l'Hospital d'avoir rassemblé tous leurs points de vue afin d'élaborer l'AI. Fontenelle considère la Géométrie des infinis comme une avancée historique par rapport aux Anciens car elle « donnoit sans peine plusieurs [solutions] que l'Ancienne Géométrie n'eût osé tenter » et avec « une facilité incomparablement plus grande ». Son discours s'appuie sur l'opposition, qui lui est contemporaine, entre les Anciens et les modernes². Il affirme ensuite que c'est en raison de sa nouveauté et parce qu'elle suppose « perpétuellement l'Infini », que l'Analyse des infinis a été attaquée par Galloys et Rolle.

De plus, Fontenelle se montre très adroit pour présenter la position de Bignon. La conduite du président est dans l'esprit de la *République des Lettres* puisqu'il consent aux nouveautés : « M. L'Abbé Bignon laissa un cours libre à la dispute, persuadé que c'est la destinée des nouveautés, quelles qu'elles soient, d'essuyer des contradictions »³, mais, en raison des règles de conduite de l'Académie et parce que la dispute durait trop, il a été contraint de nommer une commission afin que « les passions » n'entrent plus dans la Géométrie. En rendant compte de l'attitude du président Bignon vis-à-vis de la Géométrie des infiniment petits, Fontenelle montre

¹ HARS, 1701, p. 87.

² Pour la relation de Fontenelle à la querelle des Anciens et modernes, on pourra consulter : « La science dans la querelle des Anciens et des modernes », Mazauric Simone, *Fontenelle, op. cit.*, p. 177-224 et Seguin, Maria Susana, « La référence aux Anciens dans Les *Eloges des académiciens* de Fontenelle : un contre-exemple pour les modernes », dans Poétique de la pensée. Mélanges en honneur de Jean Dagen, textes réunis par B. Guion, S. Menant, M.S. Seguin et P. Sellier, Honoré Champion, Paris, 2006, p. 851-861.

³ *Ibid*, p. 88.

que celle-ci est reconnue, grâce à l'autorité institutionnelle, comme un sujet légitime dont peut et on doit traiter à l'Académie.

En 1704, en pleine crise, l'Hospital décède. Fontenelle lit son éloge dans lequel la Géométrie des infiniment petits est célébrée pleinement à travers le personnage. Il rappelle avec quel talent l'Hospital résout le problème de la brachystochrone¹, parmi tant d'autres problèmes difficiles. Il admire la facilité avec laquelle la Géométrie des infiniment petits jointe au « génie » du mathématicien permettent d'aller « pas seulement à la vérité, quelque cachée qu'elle fût mais « par le chemin le plus court »². Enfin, le plus grand mérite du Marquis est d'avoir rendue publique cette « science cabalistique » en publiant l'Al³. La même année, le *Journal des Sçavans* publie aussi un éloge⁴ de l'Hospital. Y sont loués les talents du mathématicien sans qu'il ne semble nécessaire à l'auteur de l'éloge d'évoquer l'analyse des infinis.

En 1707, Saurin est élu à l'Académie. Fontenelle interprète cette élection comme une étape symbolique dans l'acceptation de la Géométrie des infiniment petits au sein de l'Institution :

L'Académie ne jugea qu'entre eux [Saurin et Rolle] qu'en adoptant Saurin en 1707, et avec des distinctions flatteuses (...) La géométrie des infiniment petits n'avait pas besoin d'une décision plus formelle.⁵

De la fécondité de la Géométrie des infiniment petits

Les sujets de recherche mathématique et physico-mathématique utilisant l'analyse des infiniment petits sont nombreux. Un exemple incontournable est celui des problèmes de quadrature et de rectification puisque le calcul leibnizien propose des résolutions souvent incomparablement plus fécondes ou faciles que celles obtenues à la manière des Anciens ou par n'importe quelle méthode, infinitiste ou algébrique, toutes coutumières dans la pratique des académiciens.

Dans l'article « Sur la rectification des courbes »⁶ de l'HARS de 1701, destiné à commenter le mémoire de Carré, Fontenelle rappelle que rectifier une courbe consiste

¹ Éloge de l'Hospital, *HARS*, 1704, p. 79.

² *Ibid*, p. 81.

³ *Ibid*, p. 85

⁴ *JS*, 17 mars 1704, p. 195.

⁵ Éloge de Saurin, *HARS*, 1737, p. 110.

⁶ « Sur la rectification des courbes », *HARS*, 1701, p. 83-85.

à trouver un « rapport de grandeur entre une courbe et une droite »¹, ce qui fournit la longueur de la courbe. Il remarque que les courbes rectifiables connues sont peu nombreuses, le cercle, par exemple, ne l'est pas puisqu'il n'est pas possible de trouver un rapport entre son diamètre et sa circonférence. Cependant, certaines courbes non rectifiables peuvent avoir la même longueur que d'autres courbes, tel est le cas de la spirale dont la rectification se ramène à celle d'un arc de parabole. Ce résultat est connu², Fontenelle ne le rappelle pas, mais il signale en revanche la facilité avec laquelle la Géométrie des infiniment petits le trouve. En fait, pour les problèmes de rectification, il explique que la Géométrie des infiniment petits est non seulement la plus propre à les traiter mais peut-être la seule à y parvenir : « il semble que ce soient seulement quelques foibles rayons d'une plus sublime Géométrie, qui s'échappent avec peine au travers d'un nuage, & qui viennent jusqu'à nous »³. Nous rappelons qu'en 1657, Neil (1637-1670) a rectifié la parabole semi-cubique et qu'en 1658, Wren (1632-1723) a rectifié la cycloïde en démontrant ce résultat à la manière des anciens. Fontenelle ne l'ignore sûrement pas, mais de toute évidence il préfère omettre que certaines rectifications ont été effectuées avant l'apparition de la Géométrie des infiniment petits, pour mieux souligner la nouveauté de celle-ci et son caractère incontournable. Dans le commentaire du mémoire de Varignon au sujet des spirales⁴, il adopte la même tactique.

En décrivant les parcours des savants dans leurs éloges, Fontenelle consolide ses arguments en faveur de la fécondité de la Géométrie des infiniment petits.

Dans l'éloge du mathématicien Viviani⁵ (1622-1703), Fontenelle rappelle que le géomètre italien avait proposé dans les *Acta* en 1692 le problème consistant à « Trouver l'art de percer une voûte hémisphérique de quatre fenêtres, telle que le reste de la voûte fût absolument carrable ». Leibniz, Jacques Bernoulli puis le Marquis de l'Hospital y parviennent rapidement et de plusieurs manières en usant du calcul différentiel. Bien que « fort versé dans la géométrie des anciens »⁶, Viviani loue dans

¹ *Ibid*, p. 83.

² *Ibid*, p. 84. Nous rappelons que Roberval et Pascal ramènent la rectification de la spirale à celle d'un arc de parabole.

³ *Ibid*, p. 83.

⁴ « Spirales à l'infini », *HARS*, 1704, p.49.

⁵ Éloge de Viviani, *HARS*, 1703, p. 137.

⁶ *Ibid*, p. 140.

la préface de son ouvrage sur les quadratures¹, « les découvertes divines » de Leibniz qu'il nomme « le phœnix des esprits ». Fontenelle estime qu'avec de pareilles dispositions pour la géométrie, Viviani, s'il avait vécu assez longtemps, aurait nécessairement entrepris l'apprentissage du calcul différentiel qui commençait tout juste à être diffusé. En revanche, étant d'une génération plus jeune, le Marquis bénéficie immédiatement de l'invention de l'analyse des infinis. En se référant à son ouvrage, Fontenelle explique :

Les anciennes vérités s'y trouvaient comme perdues dans la foule des nouvelles, et la facilité avec laquelle on les voyait naître, faisait regretter les efforts qu'elles avaient autrefois coûtés à leurs inventeurs. Des démonstrations qui par d'autres méthodes auraient demandé un circuit immense, en cas qu'elles eussent été possibles, ou qui même entre les mains d'un autre géomètre instruit de la même méthode, auraient encore été longues et embarrassées, étaient d'une simplicité et d'une brièveté qui les rendaient presque suspectes².

Dans ce passage, Fontenelle souligne l'un des avantages majeurs de la Géométrie des infiniement petits : elle permet de traiter plus rapidement et plus simplement, ce qui se faisait auparavant péniblement lorsque c'était possible de l'effectuer.

Dans l'éloge de Tschirnhaus (1651-1708), Fontenelle, alors qu'il vient de commenter la manière dont celui-ci propose une recherche de rayons de développées sans utiliser les infiniement petits, ose même écrire, sous le couvert d'une malicieuse provocation, que, réussir à se passer de l'utilisation de la géométrie des infinis prouve d'autant mieux l'utilité de celle-ci : « Rien ne prouve mieux la grande utilité des infiniement petits, que l'honneur qu'on s'en fait de n'en avoir pas besoin en certaines occasions »³.

La géométrie des Anciens et la Géométrie des infiniement petits

Pour Fontenelle, l'enjeu n'est pas uniquement de faire reconnaître la fécondité du nouveau calcul : personne n'en doute. Il s'agit plutôt de légitimer l'exactitude de la Géométrie des infiniement petits.

¹ Viviani, Vincenzo, *Formazione, e misura di tutti i cieli : con la struttura, e quadratura esatta dell'intero, e delle parti di un nuovo cielo ammirabile, e di uno degli antichi delle volte regolari degli architetti*, In Firenze, nella Stamperia di Pietro Matini, 1692.

² Éloge de Guillaume de l'Hospital, *HARS*, 1704, p. 125.

³ Éloge de Tschirnhaus, *HARS*, 1709, p. 114.

L'idée que la Géométrie des infiniment petits est « fondée sur un Principe connu, & employé par les anciens Géomètres » est une idée récurrente dans l'*HARS*.

Cette idée d'anticipation est reprise dans l'éloge de Galloys¹. Lors des nouveaux règlements de 1699, ce dernier avait annoncé son projet de travailler sur la Géométrie des Anciens. En raison de l'« amour pour l'Antiquité » et des « talents mathématiques » de Galloys, Fontenelle le juge plus que convenable pour accomplir cette tâche. Néanmoins, « ce goût pour l'Antiquité » le rendit « peu favorable à la Géométrie de l'Infini, embrassée par tous les modernes »². Pourtant, elle n'est pas « tout à fait si nouvelle », il conseille aux amoureux de l'Antiquité, comme l'était Galloys, de reconnaître que les Anciens l'ont connue et qu'ils l'ont « mise en œuvre les premiers fondemens »³.

La géométrie des Anciens fonde la Géométrie des infiniment petits : pour cette raison il rend aussi hommage à la première. Fontenelle décrit Philippe de la Hire comme ^{un} mathématicien qui ne s'était servi « que de la synthèse ou la manière de démontrer des anciens ». Il omet de signaler que la Hire a souvent utilisé des méthodes infinitistes dans les mémoires académiques. Cependant, l'écriture de cet éloge lui permet de rendre hommage à Philippe de la Hire et à la géométrie des Anciens dont celui-ci est l'emblème :

les vérités géométriques découvertes par les Anciens sont incontestables, on peut croire aussi que la mathématique qui les y a conduits ne peut être abandonnée sans quelque péril⁴.

Ainsi, même s'il estime que la Géométrie des infiniment petits est une avancée notable, il ne dédaigne absolument pas la géométrie des Anciens, il reconnaît qu'elle est nécessaire et indispensable pour le fondement de la Géométrie des infiniment petits. Cette dernière a l'avantage de permettre d'unifier et de généraliser des résultats qui pouvaient être épars et dépourvus de principe unificateur. Le principe unificateur ne saurait être autre chose que l'infini.

Fontenelle s'appuie sur la figure de Varignon pour asseoir cette affirmation. Dans son éloge¹, il retrace le parcours de Varignon : il a d'abord étudié Euclide, puis se

¹ Éloge de l'Abbé Gallois, *HARS*, 1707, p. 148.

² *Ibid*, p. 148.

³ *Ibid*, p. 149.

⁴ Éloge de Philippe de la Hire, *HARS*, 1718, p. 74.

passionne pour Descartes. Dans ses recherches mathématiques, il est porté à les « rendre les plus générales possibles »². Or Fontenelle rappelle sa conviction : en Géométrie, il peut y avoir des vérités « dispersées », « sans ordre entr'elles, sans liaison » mais pour les voir « toutes ensemble », il faut de « l'effort & de l'adresse ». Les formules générales le permettent. Varignon a saisi leur importance et c'est pour cette raison que la géométrie des infiniment petits lui est apparue comme incontournable dans la suite de son parcours :

Il ne pouvait donc manquer de saisir avidement la Géométrie des infiniment petits dès qu'elle parut ; elle s'élève sans cesse au plus haut point de vue, à l'infini, et de là elle embrasse une étendue infinie (...) [ses travaux] ne sont presque jamais des morceaux détachés les uns des autres (...) par ce moyen rien ne lui échappe de ce qui est dans l'enceinte de la matière qu'il traite. (...) Toutes [les vérités nouvelles] ensemble font corps, et les vides qu'elles laissent auparavant entre elles se trouvent remplis³.

Grâce à l'analyse de l'infini, ce dernier parvient à généraliser et unifier des énoncés mathématiques. En effet, nous avons vu que Varignon se distingue par une « manie de la généralisation »⁴, en témoigne son mémoire de 1706 dans lequel il obtenait des formules de rayon de courbure sans qu'aucune des variables ne soit considérée comme constante⁵.

Qu'est-ce qu'une courbe ? La réalité des infiniment petits

La conception de la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés est considérée comme un principe dans l'*HARS*. Précisons.

Dans le commentaire du mémoire sur la rectification des courbes, Fontenelle explique :

L'Esprit humain est si limité, que l'Etendue qui est l'objet de ses connoissances les plus certaines, lui échappe, & est au-dessus de sa portée dès qu'elle n'est point en ligne

¹ Éloge de Varignon, *HARS*, 1722, p. 136.

² *Ibid*, p. 141.

³ Éloge de Varignon, *op. cit.*, p. 141.

⁴ Montucla, Jean-Etienne, *Histoire des Mathématiques*, *op. cit.*, cité par Costabel, Pierre, « Pierre Varignon et la diffusion du calcul différentiel et intégral », *op. cit.*, p. 11.

⁵ *HARS*, 1707, p. 490. Selon que l'on considère que l'abscisse ou l'ordonnée ou l'abscisse curviligne ait une différence constante, on obtient une expression de la formule du rayon de courbure différente (puisque $dx = 0$ ou $dy = 0$ ou $ds = 0$, etc)

droite. Nulle Géométrie ne peut mesurer la longueur d'une ligne courbe considérée en elle-même¹.

Ainsi, alors que l'objet de la géométrie est l'étendue, celle-ci ne peut être connue, c'est-à-dire mesurée, que si elle est rectiligne. Euclide prouve de manière exacte la quadrature de toutes les figures rectilignes. Aucun résultat général chez les Anciens n'est fourni pour mesurer ce qui est courbe, et nous avons examiné de quelles manières le XVII^e siècle est jalonné d'épisodes qui permettent de répondre à ce manque². Fontenelle n'évoque que le cas des lignes courbes puisqu'il s'agit ici du problème de leur rectification. Considérée « en elle-même », c'est-à-dire dans son caractère courbe, la géométrie ordinaire n'est pas capable de la rectifier. La Géométrie des infiniment petits surmonte cette difficulté puisqu'elle « resout les Courbes en des parties infiniment petites ». Ces parties infiniment petites peuvent être prises « à la rigueur pour des lignes droites », c'est-à-dire pour le plus simple des éléments géométriques. C'est donc bien par la voie « la plus naturelle possible » que la Géométrie des infiniment petits réussit.

Dans certaines circonstances, il convient de considérer la courbe autrement. Dans l'*HARS* de l'année 1700, pour célébrer les mémoires de l'Hospital et de Varignon concernant les forces centrales, Fontenelle rappelle qu'il est connu que la force centrifuge d'un corps est d'autant plus grande que « le corps décrit un plus petit cercle, qu'il est plus pesant, qu'il tourne avec plus de vitesse », cependant « on ne connoissoit point la mesure ni la regle de ces rapports »³. Résoudre le problème de la courbe d'égalité de pression dépendait d'une « Théorie exacte des Forces centrifuges » dont le secret était de considérer la courbe comme « composée d'Arcs de Cercles infiniment petits »⁴, chacun de ces arcs ayant un rayon d'autant plus petit que la force est plus grande. Des commentaires⁵ du même type sont énoncés, sur la manière de résoudre le problème de trouver le rapport de la force centrale à la pesanteur⁶. Fontenelle explique que la force centrale agit de telle sorte que chaque petit arc de la courbe décrit dans un temps infiniment petit est composé de deux mouvements, l'un

¹ « Sur la rectification des courbes », *HARS*, 1701, p. 83

² Voir notre chapitre 2.

³ « Sur les forces centrifuges », *HARS*, 1700, p. 80.

⁴ *Ibid*, p. 79.

⁵ « Sur les rapports de forces centrales à la pesanteur des corps », *HARS*, 1706, p. 56.

⁶ Varignon, Pierre, « Sur les rapports des forces centrales à la pesanteur », *MARS*, 1706, p. 185.

uniforme qui produit une ligne droite et l'autre accéléré qui produit un « espace infiniment petit du second genre »¹. Ces remarques motivent la considération de la courbe comme « formées d'éléments courbes »², c'est justement ce que permet la Géométrie des infiniment petits.

Ainsi, puisque la courbe considérée comme courbe, est intraitable par la géométrie, il est absolument nécessaire de supposer qu'elle est l'assemblage d'une infinité de petits *éléments*, qui selon le problème envisagé, peuvent être des lignes droites ou des arcs. Fontenelle ne cesse de souligner que l'intelligence d'une courbe passe nécessairement par la supposition de la courbe considérée comme « polygone ». Le passage suivant est intéressant à ce titre. Il s'agit de la description du passage d'un cercle osculateur à un autre cercle osculateur infiniment proche du premier et de sa position par rapport à la courbe :

Et parce que deux cercles décrits de deux centres infiniment proches, et sur deux rayons infiniment peu différents, ne sont que le même cercle fini ; le même cercle décrit sur un rayon quelconque de la développée, aura deux de ses arcs infiniment petits communs avec la courbe, ou, ce qui revient au même, exactement appliqué sur deux arcs de la courbe ; et si l'on veut encore pousser cette idée plus loin, les deux arcs circulaires à cause de la différence infiniment petite de leurs rayons, seront appliqués sur ceux de la courbe, l'un en dedans, l'autre en dehors, de sorte que le même cercle ayant été intérieur à l'égard de la courbe, et l'ayant touchée en un point, lui reviendra extérieur dans le point immédiatement suivant, et par conséquent la coupera en la touchant encore. Avoir un arc infiniment petit, ou un seul point commun avec une courbe, c'est la *toucher*, mais avoir deux arcs ou deux points l'un auprès de l'autre, c'est la *baiser*, selon le langage des nouveaux géomètres, qui par la précision que donnent les infiniment petits ont distingué le *baisement* du simple attouchement. Delà vient qu'un cercle décrit sur un rayon quelconque de la développée d'une courbe est appelé cercle *baisant* ou *osculateur*, et le rayon de la développée rayon *osculateur*.³

Dans cet extrait, Fontenelle montre que l'usage des infiniment petits permet de décrire de manière juste les phénomènes de contact. Il use des juxtapositions – « avoir un arc infiniment petit, ou un seul point commun » ou « avoir deux arcs ou deux points l'un auprès de l'autre » – pour montrer que la géométrie des infiniment

¹ « Sur les rapports de forces centrales à la pesanteur des corps », *HARS*, 1705, p. 65.

² *Ibid*, p. 66.

³ *HARS*, 1706, p. 91-92.

petits considère un point « rigoureux » comme un arc infiniment petit, et qu'ainsi elle parvient à traiter la courbe. Ici, comme dans d'autres nombreux commentaires, Fontenelle souligne combien l'usage des infiniment petits améliore la précision du « langage des nouveaux géomètres » pour décrire plus finement la manière d'être courbe. Il nous semble clair que ceux qu'il désigne par « nouveaux géomètres » sont Leibniz et ceux qui usent du calcul différentiel. Nous rappelons que dans son article de juin 1686¹, Leibniz est le premier à avoir utilisé le terme « osculation » et à avoir décrit cette notion en termes d'infiniment petits.

Cependant, cet article de Fontenelle ne permet pas de comprendre quel statut ont les infiniment petits pour lui : sont-ils des adjuvants de discours ? des fictions utiles ?

Varignon a défendu l'idée que les différentielles sont des « réalités » alors que Rolle considérait que ce sont des entités utiles au calcul mais qui n'ont aucune réalité mise à part celle d'être des zéros absolus. Leibniz a formulé publiquement sa position. Il affirme que l'on peut utiliser les infiniment petits comme des « fictions utiles » et qu'il n'est pas nécessaire d'entrer dans des considérations supplémentaires, au risque de pénétrer dans un champ métaphysique, impropre à la pratique mathématique. À propos du projet d'écriture des *Éléments de Géométrie de l'infini*, il confie à Varignon :

Entre nous je crois que M. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il voulait faire des éléments métaphysiques de notre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits, autrement que comme des choses idéales ou comme des fictions bien fondées².

La conception de Fontenelle est formulée dès les premières publications de l'*HARS*. Dans l'article « Sur les forces centrifuges »³, il rappelle que lorsque le mouvement est uniforme, la vitesse est le rapport entre l'espace et le temps, mais que lorsque le mouvement est accéléré, une parabole tient lieu pour représenter le rapport entre l'espace et le temps : « Cela supposé, ce fut par la Géométrie des infiniment petits, que M. Varignon réduisit les mouvemens variés à la même règle que

¹ Leibniz, G.W., « Mediatatio nove de natura anguli contactus e osculi, horumque usu in practica Mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas », *AE*, juin 1686, p. 289-292.

² Lettre de Leibniz à Varignon du 20 Juin 1702, AIII 9, p. 103.

³ « Sur les forces centrifuges », *HARS*, 1700, p. 89

les uniformes ». Cette réduction exige de surmonter un « paradoxe » : dans un mouvement accéléré, la vitesse reste accélérée quelle que soit la petitesse de l'espace ou du temps, à condition qu'ils soient déterminés et finis, alors que s'ils sont « regardés comme infiniment petits », la vitesse devient uniforme. Fontenelle explique que ce paradoxe se résout en considérant que les infiniment petits ont « entre eux les mêmes rapports que les grandeurs finies », ces rapports sont des grandeurs finies de sorte que la vitesse par laquelle un corps parcourt un espace infiniment petit dans un temps infiniment petit est une grandeur finie : « une vitesse dans chaque instant » susceptible d'augmentation¹. Pendant cet instant, la « vitesse de cet instant » certes augmente, mais d'un infiniment petit de vitesse : pour cette raison elle peut être considérée comme uniforme. De même, l'espace parcouru à cause de l'infiniment petite augmentation de vitesse est infiniment petit par rapport à l'espace parcouru dans le même instant. Fontenelle traite donc les infiniment petits de la même manière que les grandeurs car il affirme que leurs rapports le sont.

Ce raisonnement permet à Fontenelle d'affirmer « qu'il y a une infinité d'ordres d'infiniment petits, dont les supérieurs sont infiniment grands à l'égard des inférieurs »². Or, la géométrie n'est rien d'autre que « l'Art de découvrir les rapports des Grandeurs »³. L'exemple qu'il vient de décrire témoigne de l'existence de rapports « que l'on ne peut attraper » par la géométrie commune à moins de considérer

les Grandeurs jusques dans leurs parties infiniment petites, & dans leurs premiers Elémens, et même quelquefois jusqu'aux Elémens infiniment petits de ces premiers Elémens, & encore au-delà, s'il le faut⁴.

Fontenelle affirme donc que les « Elémens » des grandeurs sont susceptibles du même traitement que les grandeurs finies dont ils sont issus. Seule la Géométrie des infiniment petits permet leur considération géométrique parce qu'elle distingue les différents ordres :

¹ Michel Blay commente l'insuffisance de « vitesse à chaque instant » par rapport à la notion de « vitesse instantanée » qui apparaît avec la théorie des limites, *La naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 157.

² *Ibid*, p. 93.

³ *Ibid*, p. 94.

⁴ *Ibid*, p. 94.

Il a fallu, pour en conclure la Vitesse, aller chercher dans les Elémens infiniment petits de ces deux Grandeurs, ce rapport qui n'étoit point entre ces Grandeurs même considérées dans leur étendue finie et naturelle. Pour la Force centrale, il a fallu percer jusqu'à l'infiniment petit, & le rapport que l'on cherchoit, n'étoit point dans les seuls infiniment petits du premier genre. En un mot, des memes Grandeurs données la Géométrie des infiniment petits en tire plus qu'une autre, parce qu'elle multiplie les rapports, & en fait naître de nouveaux¹.

Bien qu'ici Fontenelle n'écrive pas explicitement que les infiniment petits sont des grandeurs, il les décrit comme des « parties » des grandeurs et les traite géométriquement, c'est-à-dire en établissant des rapports entre elles. Ces infiniment petits sont susceptibles à leur tour « d'être percés » en infiniment petits du second genre, et ainsi de suite, à l'infini. Ainsi, il octroie aux infiniment petits une indiscutable réalité géométrique très proche de celle des grandeurs². Leur traitement relève des procédés de la géométrie : il est donc légitime de désigner la nouvelle analyse par « Géométrie des infiniment petits ». D'ailleurs, Fontenelle a indéniablement une préférence, lorsqu'il parle de l'usage du calcul différentiel, en le nommant « Géométrie des infiniment petits » plutôt que « calcul de l'infini ». En fait, le mot « calcul » est finalement très peu prononcé dans l'*HARS*.

Nous avons analysé plus haut la position de Leibniz vis-à-vis du statut des différentielles. Elle ne satisfaisait pas l'attente de soutien dont avaient besoin les défenseurs du calcul au moment de la crise académique.

¹ *Ibid*, p. 94.

² D'autres articles de l'*HARS* témoignent de la récurrence de ce type de discours géométrisant les infiniment petits. Par exemple dans les articles : « Sur les forces centrales », *HARS*, 1701, p. 82, « Sur les tangentes d'un genre de courbes » : « M. Tschirnhaus confond ici un arc infiniment petit avec sa corde, & ne laisse pas de traiter ces deux grandeurs ainsi confondues comme des véritables grandeurs, ce qui est entièrement dans l'esprit de la Géométrie des Infiniment petits. », *HARS*, 1702, p. 53, », « Eloge de M. le Marquis de l'Hôpital », *HARS*, 1704, p. 125 : « Comme il y a des rapports entre les grandeurs finies, qui sont l'unique objet de recherches mathématiques, & les grandeurs de ces differens ordres d'Infinis, on parvient par la voie de l'Infini à des connoissances sur le Fini », *HARS*, 1704, p. 85-86, « Sur les grandeurs qu'on nomme plus qu'infinies » : « les grandeurs infinies peuvent être plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l'ordre de l'infini, de même que les grandeurs finies ne sortent pas de l'ordre du fini pour varier entr'elles selon tous ces rapports », *HARS*, 1706, p. 48.

Dans l'Éloge de Leibniz¹, nous allons voir combien il importe à Fontenelle, bien qu'il rende compte de la grandeur du savant, de faire le récit de la réserve dont fait preuve Leibniz, aux yeux de ses disciples français, au cours du débat académique.

La Géométrie des infiniment petits vs le calcul de Leibniz selon Fontenelle

Fontenelle décrit assidûment le caractère universel du personnage de Leibniz. S'il connaît une myriade de savoirs, ce n'est pas pour les thésauriser. Il en connaît la valeur et la justesse, et sait les placer bien à propos. Il a cette capacité de voir de façon globale et générale² qui fait de lui l'incarnation de l'esprit géométrique³.

Même s'il cite Newton, Fontenelle fait de Leibniz le principal inventeur du calcul⁴. Il le présente comme celui qui fait autorité pour les savants continentaux, quelquefois comme « seul ou principal inventeur »⁵.

Leibniz a marqué de l'intérêt pour le point de vue de Fontenelle sur les infiniment petits de l'analyse des infinis. Dans la lettre du 9 septembre 1704, évoquant le projet d'ouvrage auquel Fontenelle travaille, il écrit :

J'attends vos belles méditations sur l'infini et l'infiniment petit. Il est vrai que chez moi les infinis ne sont pas des tous et les infiniment petits ne sont pas des grandeurs. Ma métaphysique les bannit de ses terres, et je ne leur donne retrait que dans les espaces imaginaires du calcul géométrique, ou ces notions ne sont de mise que comme les racines qu'on appelle imaginaires. La part que j'ai eue à faire valoir ce calcul des infinitésimales ne me rend pas assez amoureux pour les pousser au-delà du bon sens⁶.

Leibniz insiste ici sur l'utilité des infiniment petits pour calculer. Il répète qu'il n'a absolument pas besoin de rentrer dans des considérations métaphysiques sur les infiniment petits, dont l'utilisation est à nouveau comparée à celle des racines

¹ Éloge de Leibniz, *HARS*, 1716, p. 94. Pour un commentaire de cet éloge, on pourra consulter les deux articles de Sophie Audidière : « Une philosophie 'conciliante, paisible et secrète' ? L'article LEIBNITZIANISME de Diderot et l'Éloge de M. Leibniz de Fontenelle », *Colloque, Les Éloges, ENS de Lyon*, octobre 2014, dans Leduc Christian, Pépin François, Rey, Anne-Lise, Rioux-Beaulne Mittia (dir), *Leibniz et Diderot, rencontres et transformations*, Presses université de Montréal, Montréal, 2015, p. 173-190 et « La lettre galante et l'esprit géométrique. Expression métaphysique et métaphysique des langues, ou la philosophie du discours de Fontenelle », *Archives de Philosophie*, n° 78, 2015, p. 399-416.

² « Il saisissait dans tout les principes les plus élevés et les plus généraux ; ce qui est le caractère de la métaphysique », *ibid*, p. 116.

³ Éloge de Leibniz, *op. cit.*, p. 97.

⁴ *Ibid*, p. 457.

⁵ *Ibid*, p. 450.

⁶ Lettre de Leibniz à Fontenelle du 9 septembre 1704, Freyne, Mickael, *La correspondance de Fontenelle jusqu'en 1740, op. cit.*, t. 2, lettre 28, 2.

imaginaires. Fontenelle ne partage pas ce point de vue : il ne veut pas réduire la Géométrie des infiniment petits à un seul calcul. Dans l'éloge, il désapprouve les affirmations de Leibniz publiées au Journal de Trévoux en 1702 en pleine crise académique. Aurait-il eu une attitude trop « condescendante »¹ pour épargner « ceux dont l'imagination se seroit révoltée » ?

Il semble cependant qu'il en ait été ensuite effrayé lui-même, et qu'il ait cru que ces différents ordres d'infiniment petits n'étaient que des grandeurs *incomparables*, à cause de leur extrême inégalité, comme le serait un grain de sable et le globe de la terre, la terre et la sphère qui comprend les planètes, etc. Or, ce ne serait là qu'une grande inégalité mais non pas infinie, telle que l'on établit dans ce système. Aussi ceux mêmes qui l'ont pris de lui, n'ont-ils pas pris cet adoucissement qui gênerait tout. Un architecte qui a fait un bâtiment si hardi, qu'il n'ose lui-même y loger².

À la fin de l'éloge, Fontenelle rappelle que Leibniz a laissé des ouvrages inachevés et affirme que « C'est prolonger la vie des grands hommes, que de poursuivre dignement leurs entreprises »³. Ainsi, Fontenelle en faisant du portrait de Leibniz un « autoportrait »⁴, se pose comme continuateur du travail sur l'infini, travail que Fontenelle juge, de toute évidence, non seulement inachevé mais malmené.

Tout ce nous venons de voir montre la description de l'Analyse des infinis comme géométrie est un sujet de grande importance pour Fontenelle. Il a pour dessein de rendre hommage à cette nouvelle géométrie et ne souhaite pas la voir restreinte à un simple calcul. Certes, le témoignage des mémoires où toutes sortes de problèmes mathématiques ou physico-mathématiques sont résolus rendent indubitable la fécondité du nouveau calcul. Fontenelle, Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences est certainement l'un des plus assidus des académiciens et celui qui connaît le mieux tout le savoir qui émerge de l'Académie. Il voit en particulier les mathématiciens dans leurs pratiques et l'implicite de celles-ci e. Il nous paraît indubitable que l'un des desseins de Fontenelle a été de fixer par écrit une histoire de la pratique des infiniment petits au sein de l'Académie. Ses commentaires

¹ *Ibid*, p. 458 .

² Éloge de Leibnitz, *op.cit.*, p. 457.

³ *Ibid*, p. 128.

⁴ Dans son article très convaincant, Sophie Audidière montre que l'Éloge de Leibnitz est en fait un autoportrait : « Fontenelle dresse de Leibniz un portrait en historien, philosophe, infiniste et discrètement radical, qui est incontestablement un autoportrait » dans « Une philosophie 'conciliante, paisible et secrète' ? L'article LEIBNITZIANISME de Diderot et l'Éloge de M. Leibnitz de Fontenelle ».

sur la Géométrie des infiniment petits dans l'*HARS* montrent qu'il veut promouvoir l'idée selon laquelle non seulement il y a nécessité d'introduire la Géométrie des infiniment petits mais aussi que ce point de vue est partagé par la communauté académique. Dans ce sens, Fontenelle écrit le récit d'un consensus académique. S'il y eut quelques opposants à la Géométrie des infiniment petits, ce récit affirme que la communauté parvient à une pratique notablement paisible et de plein droit. Quant au statut des infiniment petits, le point de vue académique s'écarterait de celui de Leibniz, si grande que fût l'admiration de la plupart des académiciens, et bien sûr de Fontenelle à son égard : les infiniment petits sont propres à être considérés comme des grandeurs.

Conclusion

L'introduction du calcul différentiel dans les pratiques provoque un débat à l'Académie des sciences. Dans ce chapitre, nous voulions comprendre pourquoi celui-ci dégénère dès le début en un *dialogue de sourds* et il s'agit ici d'une véritable *crise*.

Rolle a deux types de critiques.

Le premier type concerne le statut des différentielles impliquées dans le calcul. Il n'accepte pas un procédé calculatoire s'autorisant à considérer une différentielle tantôt pour quelque chose, tantôt pour un rien. Il récuse ainsi la première supposition de l'AI qui permet de prendre l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite. Selon lui, les différentielles ne sauraient avoir d'autre statut que celui de zéro absolu. Par conséquent, il n'est pas possible non plus de supposer différents ordres d'infini. Le deuxième type de critiques concerne l'exactitude du calcul différentiel. Parmi les difficultés qui découlent de ces exemples qu'il a posés, il pointe l'incapacité du calcul à discerner les *maxima* ou les *minima* : le calcul différentiel fournit des valeurs réelles conduisant à des valeurs imaginaires, il oublie des solutions ou encore il en exhibe trop. Bref, Rolle accuse le calcul différentiel de *déborder*.

Varignon prend le rôle du défenseur. En premier lieu, il définit « les différentielles ». Pour ce faire, il fait référence aux Anciens et aux géomètres que ses pairs reconnaissent comme faisant partie de leur héritage : entre autres, Fermat, Barrow et Pascal. Néanmoins son principal argument est de décrire les différentielles comme des quantités évanouissantes, notion qu'il emprunte aux *Principia* de Newton. En outre, il affirme que les différentielles sont des quantités « réelles ». Par ailleurs, Rolle commet des erreurs ou des maladresses en choisissant et en traitant ses exemples avec le calcul différentiel, de sorte que, pour Varignon, il est assez aisé de répondre au deuxième type de critiques. Néanmoins, nous l'avons vu cela ne convainc pas Rolle, qui reste attaché à la méthode algébrique de Hudde et qui continue à décrier le mal-fondé du calcul différentiel et les erreurs auxquelles il conduit.

L'interdiction de dispute promulguée par l'Académie conduit le débat à se déplacer mais le contenu et le ton des arguments ne changent pas.

En analysant les détails de ce débat, nous avons cherché à comprendre ces discordances irrémédiables. Pour trouver un accord, les deux parties adverses en appellent à un tiers, mais cette tentative échoue. Interprétant différemment un héritage commun, ils aboutissent à une dissension. L'autorité institutionnelle reste indécise. Rolle ne se convertit pas, il se rend compte, après la mort de Galloys, qui fut son principal soutien, qu'il est plus habile de se taire.

Néanmoins, de ce dialogue de sourds, que pouvons-nous entendre ?

Chacune des parties accuse l'autre de déguiser, soit la méthode de l'adversaire, soit celle de Fermat ou celle de Barrow. Que sont les différentielles ? Des zéros dissimulés ? Sont-elles réelles ? Existent-elles ? Leurs discours tournent autour de ces questions car la valeur démonstrative du calcul différentiel en dépend. Après l'interdiction de l'Académie, Varignon, ne pouvant plus intervenir publiquement, se déguise en Saurin pour continuer à avancer des arguments, Saurin lui-même prend position. Leibniz se montre à découvert. L'Hospital reste silencieux.

De sorte que le débat apparaît comme une véritable tragi-comédie dans laquelle les personnages avancent masqués et dont les propos sont suspendus à la formule « être est ne pas être »¹. Mais, « il arrive que le déguisement livre son secret à sa manière, c'est-à-dire par le déguisement »². Nous avons vu que d'une certaine manière cette crise se dénoue, car chacune des parties est contrainte de montrer la légitimité de sa méthode et éventuellement l'équivalence avec celle de la rivale : ce que Guisnée a appelé « l'identité ». Pour ce faire, chacun revient sur les fondements de sa méthode mais aussi sur celle de la partie adverse. Rolle explique qu'un zéro absolu correspond géométriquement à la position de la tangente, tandis que Guisnée interprète de manière calculatoire le quotient $\frac{dy}{dx}$, ou encore Jean Bernoulli et Leibniz reviennent sur l'interprétation d'un résultat obtenu par la méthode de Hudde.

Dans la lettre à Varignon du 2 février 1702, Leibniz expliquait que l'opposition à son calcul menée au sein de l'Académie pouvait aussi conduire : « à éclaircir des difficultés que les commençans peuvent trouver dans notre Analyse ». Il ajoutait :

Qu'il importe beaucoup pour bien établir les fondemens des sciences qu'il y ait de tels contredisans ; c'est ainsi que les Sceptiques combattoient les principes de la Geometrie,

¹ Dubois, Claude-Gilbert, *Le Baroque, profondeurs de l'apparence*, Larousse Université, collection « thèmes et textes », Larousse, Paris, 1973, p. 129-140.

² Rousset, Jean, *La littérature et l'âge baroque en France, Circé et le Paon*, Librairie José Corti, 1954, p. 54.

avec tout autant de raison ; que le P. Gottignies Jesuite savant, voulut jeter des meilleurs fondemens de l'Algèbre, et que Messieurs Cluver et Nieuventiit ont combattu depuis peu quoyque differemment, nostre Analyse infinitesimale. La Geometrie et l'Algèbre ont subsisté, et j'espère que nostre Science des infinis ne laissera pas de subsister aussi ; mais elle vous aura une grande obligation à jamais, pour les lumières que vous y répandés¹.

Nous avons vu que le récit de Fontenelle fait partie aussi du dénouement. Nous allons y revenir dans la conclusion générale.

¹ Lettre de Leibniz à Varignon du 2 février 1702, A III 9, p. 15.

Conclusion générale

Notre recherche consistait à analyser des textes mathématiques de la période allant de 1690 à 1706 afin de comprendre les modalités de réception du calcul leibnizien. Pour ce faire, deux fils conducteurs nous ont guidés.

Tout d'abord, nous avons suivi historiquement, auprès des mathématiciens du cercle de Malebranche, les modifications épistémologiques des notions impliquées dans les méthodes d'invention, essentiellement celles de tangentes et de quadratures. Nous avons montré que des lectures successives et en *écho* de ces notions rendent possible une pratique partagée sans laquelle une réception du calcul leibnizien ne saurait s'effectuer.

De plus, en suivant ces notions, nous avons simultanément cherché à questionner ce qui permet ou ne permet pas, à un moment de l'histoire, la reconnaissance de la valeur démonstrative d'un calcul. Seules des esquisses de réponses peuvent être avancées : les choses se jouent dans un subtil enchevêtrement d'horizons d'attente et de consensus de la communauté.

Le même et ses étoffes (1690-1706)

L'étude de la réception autour de Malebranche a montré que bien que chacun des acteurs ait son expérience propre de l'appropriation du calcul, l'existence d'un horizon d'attente commun conduit à une réception approbative. Nous cherchions à savoir comment le contact avec le calcul leibnizien modifiait, individuellement et entre elles, les notions telles que « e », « les indivisibles » ou « le polygone à une infinité de côtés ». Récapitulons pour chacune d'elles.

Nos mathématiciens rencontrent la notion « d'espace différentiel [*differentiale spatii*] » lorsqu'ils lisent les leçons de calcul intégral de Jean Bernoulli. Il était requis de comprendre comment ils entendent « l'espace différentiel » à partir de l'héritage des indivisibles de Torricelli, de Pascal ou de Roberval.

L'étude de manuscrits¹ a montré qu'une pratique avec des indivisibles est habituelle. Il est admis et acquis qu'une figure puisse être considérée comme une somme « d'éléments » ou d'« indivisibles ». De plus, l'attribution de notations aux dimensions de ces éléments – les barrowniennes « e » et « a » – permet aussi de les sommer de manière calculatoire via une transmutation. Nos mathématiciens ont nommé cette méthode « L'arithmétique des indivisibles » ou « des infinis », ils l'appliquent à la détermination de quadratures de paraboles et de certaines hyperboles. Qu'est-ce qui, à leurs yeux, dans la notion « d'espace différentiel » rénove leur pratique ?

Dans ses cahiers manuscrits de calcul intégral, Malebranche s'applique à expliciter analytiquement tous les cas possibles de la différentielle du cercle et à leur faire correspondre une formule. L'espace différentiel possède une formule et mêmes plusieurs. Certes, il continue à se comprendre au pluriel, puisqu'il s'agit en définitive d'effectuer une sommation, néanmoins l'attribution d'une expression différentielle permet de considérer un élément de manière générique. C'est un représentant qui vaut pour tous et qui est susceptible de faire l'objet d'un procédé calculatoire. Le calcul d'une quadrature dépend désormais de l'intégration de l'expression de l'espace différentiel, c'est-à-dire d'un calcul qui n'est plus assujéti à une figure. Malebranche réalise ainsi que le calcul leibnizien, en dotant l'indivisible d'une expression différentielle, enrichit la notion d'indivisible qu'il connaît, en permettant un calcul exact : c'est un argument suffisant pour son adhésion. Dans les écrits suivants, la terminologie utilisée corrobore cette conception, par exemple, dans son mémoire sur la méthode de Rectifications, Carré écrit « expression générale d'une portion infiniment petite »².

Dans les méthodes calculatoires des tangentes nous avons suivi le devenir du statut de « e ». Pour calculer, nous avons vu qu'il est évident pour Catelan ou pour l'Hospital que « e » ou ses puissances sont des « riens » ou des « infiniment petits », de sorte que leur élimination est légitime. Ici, la distinction entre ces deux vocables ne modifie pas le résultat du calcul. Dans ce contexte de réception, il n'est pas faux d'écrire que « $e = dx$ », comme Jean Bernoulli l'explique dans les *Lectiones de calculo differentialum*. Cette traduction de dx en e , que nos mathématiciens pérennisent dans

¹ En particulier celui de L'Hospital : « L'Arithmétique des infinis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », *op. cit.* et dans FR 24238, fols. 251-252.

² Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangentes », MARS, 1701, p. 160.

leurs manuscrits, montre que, dans un premier temps, il leur est nécessaire de ramener le nouveau à ce qui est connu. En 1696, Varignon commente ainsi l'introduction de différentielles : « on auroit pû éviter l'embarras de ce langage en ce qui concerne l'invention des tangentes »¹. Accepter d'enrichir une notion passe souvent par la confrontation de problèmes. Celui de la courbure et surtout celui de recherche d'enveloppes de courbes conduisent l'Hospital à réaliser que la considération de la variabilité est nécessaire à la résolution de ces problèmes. De sorte que, de simple « indéterminée », la différentielle s'enrichit en devenant l'infiniment petite variation d'une « quantité continument variable ». C'est ainsi que l'Hospital décide de pérenniser cet aspect dans son traité.

La notion de « polygone à une infinité de côtés » a été au centre de notre sujet. Pour légitimer l'Analyse des infinis, ses défenseurs répètent souvent que cette notion se trouvait déjà chez les Anciens dans leurs démonstrations par inscription/circonscription du cercle. Cette affirmation a un caractère indéniablement rhétorique : en s'affiliant à la géométrie des Anciens, le bien-fondé de cette notion s'impose aux yeux de leurs pairs. Mais est-ce le même objet ? Il convient de revenir sur les manières d'investir l'idée qu'une courbe puisse être considérée comme un « assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petites »² et de quelle manière cette idée s'articule à la géométrie des Anciens.

En 1670, dans les *Lectiones Geometricae*, Barrow affirme que pour les recherches de quadratures, il est possible de considérer une surface curviligne comme un assemblage de rectangles indéfiniment petits, de sorte que la courbe apparaît comme un polygone gradiforme. Il prouve qu'un tel procédé a une valeur démonstrative comparable à la manière des Anciens. Néanmoins, à ses yeux, la démonstration directe est une vérité qui est non seulement « suffisamment confirmée », mais par laquelle « les origines apparaissent limpides »³. Pour cette raison, nous pensons que Barrow accorde à la courbe considérée comme polygone *gradiforme* un statut de réalité.

D'autres motivations que celles de Barrow ont conduit Arnauld puis Lamy à faire de la considération du cercle comme polygone (régulier) d'une infinité de côtés une demande, ou une proposition évidente. Dans leurs traités, elle leur permet

¹ Varignon, Pierre, « Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les lignes courbes », FR 12262, fol. 22R.

² *AI*, art. 3, p. 3.

³ Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae*, « Appendicula 2 », *op. cit.*, p. 115.

d'éviter une démonstration *ad absurdum*. L'introduction de l'expression « polygone d'une infinité de côtés » est donc ici un raccourci de langage puisqu'il est toujours possible d'exhiber une démonstration à l'ancienne. La manière des Anciens n'est donc pas récusée, tout au contraire, puisque c'est par elle qu'est garantie la certitude des énoncés, mais la méthode de doctrine est embellie puisque l'introduction de cette demande permet de suivre une voie plus naturelle pour exposer les propositions. Nos mathématiciens héritent de ces différentes approches et construisent la leur.

Avant même sa rencontre avec le calcul leibnizien, dans le contexte de sa méthode des tangentes, l'Hospital cherche à expliciter le lien entre la légitimité de l'élimination des termes et la considération de la courbe comme polygone d'une infinité de côtés¹. Il témoigne du fait que la notion de « polygone d'une infinité de côtés » est ici investie en vue d'un calcul, celui de la détermination de tangentes. Leibniz, dès ses premiers articles² dans les *Acta*, souligne l'équivalence [*aequivalet*] entre une courbe et un polygone d'une infinité de côtés. Son propos ne signifie pas qu'il s'agit ici d'approcher la courbe par un polygone, mais que l'analyse la plus propre aux courbes conduit à estimer le polygone d'une infinité de côtés comme la forme la plus adéquate pour penser la courbe et la calculer.

Cette notion et son lien avec le calcul sont essentielles à nos mathématiciens. L'Hospital en fait l'une des deux suppositions de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* : la considération du polygone permet le calcul des tangentes et celui de la courbure en vertu des angles que les côtés font entre eux³. Le polygone d'une infinité de côtés est la notion la plus générale, pour « toutes sortes de lignes courbes » et celle qui sert de « fondement à la méthode des tangentes [*celle de l'AI*] »⁴.

Cette idée est reprise et précisée par Varignon et Fontenelle.

Les échanges avec Leibniz et Jean Bernoulli, amènent Varignon à spécifier cette notion. Pour résoudre le problème de la détermination du rapport entre la force centrale et la pesanteur, le polygone change de forme, le côté se courbe en arc de

¹ « Méthode très facile et très générale de trouver les tangentes à toutes sorte de courbes », FR 25306, fol. 1-100.

² Leibniz, G.W, Leibniz, G.W, « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irracionales quabtitates moratur et singulare pro illis calculis genus », *AE*, octobre 1684 et « De Geometria recondita et analysi indivisilium atque infinitorum », *AE*, juin 1686.

³ *AI*, section 1, art. 3, p. 3.

⁴ L'Hospital (de), Guillaume, *Traité analytique des sections coniques et de leur usages pour la résolution des équations tant déterminées qu'indéterminées*, Montalant, Paris, 1720, p. 128.

cercle. Cette modification entraîne un changement dans la manière d'envisager le calcul, sans pour autant le faciliter. Varignon signale qu'il est possible de considérer une forme rectiligne mais que la forme curviligne est plus « véritable » car « les courbes sont elles courbes en tout »¹.

En 1701, dans *HARS*, Fontenelle loue, à plusieurs reprises, la considération de la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés puisqu'elle permet de traiter la courbe « considérée en elle-même »², « intraitable » auparavant par la géométrie ordinaire. La nouvelle géométrie, parce qu'elle considère différents ordres d'infini et qu'elle établit des rapports des quantités de même ordre, représente la seule géométrie possible pour l'étude des courbes.

Pour nos mathématiciens il y a une continuité de la présence du polygone d'une infinité de côtés depuis les démonstrations à l'ancienne jusqu'à la leur : cependant avec les Anciens « on en étoit demeuré là »³. Reyneau, dans son ouvrage *Analyse démontrée*, rédigé pendant notre période, insiste sur l'authenticité de cette filiation. Le mérite de l'Analyse des infinis est d'avoir fourni des « expressions propres aux différences infiniment petites »⁴ qu'il y a entre la courbe et le polygone.

Cet aperçu récapitulatif nous incite à la prudence. L'expression « polygone d'une infinité de côtés » n'a pas le même sens lorsqu'il s'agit des démonstrations euclidiennes ou dans le contexte de Port-Royal ou encore dans l'Analyse des infiniment petits, tout simplement car cette notion n'est pas investie de la même manière. Néanmoins, comme on l'a vu, ces différents sens sont en étroite relation et se nourrissent mutuellement, de sorte que cette polysémie est en fait et nécessairement polyphonique.

La complexification des problèmes conduit à l'avancement des méthodes. L'étude locale de la réception du calcul leibnizien, au sein du cercle autour de Malebranche, a montré que pour améliorer les méthodes, les notions déjà là sont réinvesties et de ce fait enrichies. Pour comprendre la réception du calcul leibnizien, il ne suffit pas pour l'historien de pressentir ou de constater que « la différentielle » est

¹ Lettre de Varignon à Leibniz du 29 avril 1706, *Mathematische Schriften*, herausgegeben par C.I. Gerhardt, 1875-1889, réédition Hildesheim, New York, Olms, Band 4, p. 149.

² « Sur la rectification des courbes », *HARS*, 1701, p. 84.

³ *AI*, Préface.

⁴ Reyneau, Charles-René, *Analyse démontrée ou la méthode pour résoudre les problèmes mathématiques*, Quillau Imprimeur, Paris, 1708, p. 631.

quelque chose de nouveau, mais de questionner ce que signifie d'être nouveau dans le contexte de cette réception, c'est-à-dire d'observer comment nos mathématiciens décident de comprendre la différentielle comme une nouveauté, et comment ensuite ils intègrent cette nouveauté à leur pratique. Nous avons montré de quelles manières *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* apparaît comme une synthèse de leurs lectures et aussi comme un compte-rendu de leur appropriation originale.

Expliquer les dissonances de l'Académie : reconnaître ce qu'un est calcul

La première partie de notre travail a esquissé une reconstitution de l'horizon d'attente autour de Malebranche, horizon qui rassemble ces mathématiciens dans leurs pratiques mathématiques. Le calcul leibnizien partage avec toute autre méthode calculatoire une même problématique : considérer qu'un résultat obtenu par son moyen a un statut démonstratif. Cette problématique est présente dans les manuscrits que nous avons étudiés. Nous l'avons remarquée au cours de l'épisode de l'articulation entre le calcul et le polygone à une infinité de côtés. Elle était présente également chez les mathématiciens dont ils sont héritiers.

Fermat, le premier, avait adressé des critiques sévères au type de raisonnement utilisé par Wallis lors de ses calculs dans *l'Arithmetica infinitorum*¹. L'induction, prônée par le savant anglais, et qui est à l'origine des résultats de son calcul, ne peut valoir pour preuve. Pourtant, Wallis a la certitude que son raisonnement n'a pas à être remis en question car il est selon lui « évident [obvious] ». Probablement, en raison de l'héritage² des querelles françaises avec Wallis, nos mathématiciens ne sauraient partager cette évidence. Ce point épineux inspire même l'Hospital pour écrire « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur »³. Les critiques envers Wallis ne vont pas plus loin, car ce dernier ne fait pas particulièrement partie de leur sphère d'échanges et qu'ils ont trouvé chez des auteurs comme Barrow une réponse plus conforme à leurs attentes.

¹ Wallis, John, *Arithmetica infinitorum*, *op. cit.*

² Stedall, Jacqueline, « John Wallis and the French : his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes », *op. cit.*

³ L'Hospital (de), Guillaume, « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », FR 24236, fol. 1-58.

Nous avons montré que le calcul leibnizien a été la réponse que ces mathématiciens autour de Malebranche espéraient, bien que des difficultés liées à son introduction dans leur pratique fussent patentées, en particulier celle liée à la symbolique. L'articulation entre leur héritage et le nouveau calcul fut un passage bien plus lisse que ceux que certains historiens laissent croire.

La seule publication d'articles dans les *Acta* consacrés au calcul leibnizien n'aurait pas suffi à diffuser le calcul. Les échanges épistolaires entre nos acteurs ont rendu en grande partie possible un terrain d'entente pour une pratique partagée du calcul¹. Nombre d'exemples illustrent ce propos dans la correspondance de l'Hospital avec Leibniz et avec Jean Bernoulli. Chacun peut avoir sa lecture propre du calcul, mais le dialogue permet communautairement de fournir un statut stable à la notion de différentielle et de reconnaître la valeur démonstrative du calcul qui l'accompagne. Les critiques de Huygens ne s'opposent pas à cette stabilité. Tout au contraire, notre étude à propos de la quadrature du folium montre qu'elles ont permis d'entamer une discussion sur l'essence du calcul. Huygens reconnaît les vertus du nouveau calcul quoiqu'il estime qu'il n'est pas « bon que le calcul différentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande ».

Ainsi, la reconnaissance de l'autonomie du calcul leibnizien pour nos mathématiciens s'est instaurée par l'articulation de deux aspects : celui d'un horizon d'attente qui lui était propice et celui d'un dialogue en vue d'un consensus.

Nous comprenons de la même manière les dissonances qui ont lieu cette fois à l'Académie. Malgré le même héritage partagé, les différences entre les générations mais surtout la diversité des horizons d'attente ont empêché la constitution d'un discours consensuel.

D'une part, Rolle estime que le calcul algébrique ne peut conduire qu'à des résultats parfaitement exacts lorsqu'il est appliqué à la géométrie. Son calcul a probablement besoin d'améliorations mais il est fondé. Le calcul différentiel, qui prend de plus en plus de place dans l'institution, rivalise avec ses méthodes. Selon lui, il conduit à des résultats qui sont inexacts ou qui ont besoin d'un supplément pour être interprétés comme des énoncés vrais. Ce n'est pas ce qu'attend Rolle d'un calcul.

¹ Comme le souligne Jeanne Peiffer, dans une étude des correspondances, il ne s'agit pas de considérer les lettres comme rendant uniquement compte de la genèse et de la réception de l'œuvre d'un savant. Ce serait une « approche téléologique » insuffisante (« Faire des mathématiques par lettres », *op. cit.*, p. 145).

D'autre part, Galloys et la Hire, étant essentiellement versés dans la géométrie des Anciens, n'ont pas particulièrement d'intérêt pour le rôle que peut jouer le calcul en géométrie et ils n'estiment pas le nouveau calcul. Cependant, ils ne peuvent plus ignorer ses vertus lorsqu'il parvient à résoudre des problèmes difficiles comme celui de la brachystochrone¹.

Cette composition bariolée forme une étrange Compagnie et n'instaure pas un climat propice au dialogue avant les règlements de 1699. Ces derniers contraignent chacun des académiciens à se prononcer sur leurs contributions à venir. Cette exigence fait que l'Académie passe d'un état d'impossibilité de dialogue à un dialogue de sourds. En janvier 1706, la sentence de la commission à propos de la dispute entre Rolle et Saurin ne modifie pas sensiblement les comportements des académiciens : chacun précise ses méthodes mais ne cherche pas particulièrement à montrer, lorsque cela serait possible, leur équivalence, ou si c'est le cas ce sera toujours pour montrer que la sienne est plus féconde et plus élégante.

Dénouements et perspectives

La mort de Galloys conduit à une accalmie au sein de l'Académie. Le calcul leibnizien prospère.

À la demande de Malebranche et en s'appuyant sur les travaux du groupe autour du philosophe², Reyneau publie en 1708 l'*Analyse démontrée*. Ce traité prolonge celui de l'Hospital puisqu'il y intègre des problèmes liés au calcul intégral. Les suppositions du calcul différentiel sont modifiées. La première demande que les courbes, les surfaces et les solides puissent être « regardées comme formées ou décrites par le mouvement »³. Cette supposition permet la définition de « quantité variable ou changeante » comme étant celle qui augmente ou diminue « insensiblement dans la formation des lignes et des figures [au cours du mouvement] »⁴. La deuxième énonce que chaque partie de temps fini est divisible à l'infini et que ces parties de temps infiniment petites s'appellent instants⁵. À son tour, cette supposition permet de définir la « différence » comme « augmentation ou

¹ Dans la lettre à Jean Bernoulli du 6 août 1697, Varignon souligne qu'après la résolution du problème de la brachystochrone, les mathématiciens du « vieux stile » décrivent moins le calcul.

² *Mathematica*, p. 298-304.

³ Reynaud, Charles-René, *Analyse démontrée*, op. cit., p. 637.

⁴ *Ibid*, p. 638.

⁵ *Ibid*, p. 638.

diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque instant par une vitesse »¹. Nous pouvons remarquer à quel point déjà ces énoncés sont d'inspiration newtonienne et varignonienne.

Ce bref aperçu fait pressentir l'ampleur des modifications de présentation effectuées par rapport à l'*AI*. Une étude comparative entre les deux textes reste à mener. Elle fournirait probablement des informations sur la manière dont Reyneau s'est approprié le calcul, à partir du traité de l'Hospital et des discours à l'Académie. Elle permettrait de poursuivre notre enquête auprès des notions impliquées dans le calcul leibnizien.

Dès sa nomination au poste de Secrétaire perpétuel, Fontenelle a entamé un récit de la réception du calcul à l'Académie. Sa position vis-à-vis des infiniment petits diffère de celle de Leibniz. Les différentielles sont « vraies » et « réelles » et ne sont pas des simples fictions, elles permettent d'étudier la courbe de la manière la plus naturelle. Fontenelle a la conviction que la géométrie des infiniment petits permet de définir rigoureusement une courbe. Nous en avons vu quelques échantillons. En 1722, son propos n'a pas changé mais s'est étoffé. En menant une réflexion sur ce qu'est une courbe rigoureuse – celle « intraitable » par aucune géométrie – et la courbe traitée par le calcul différentiel, il explique :

C'est ainsi que l'hypothèse des Courbes Polygones qui semblait n'être qu'une fiction commode substituée à un vrai intraitable, devient elle-même ce vrai, quand on la considère de plus près. On croyait qu'elle approchait infiniment du vrai, et il se trouve que le vrai ne doit pas aller plus loin. Cependant nous appellerons toujours courbes rigoureuses, celles dont on concevait que les *elements* ne seraient que des points absolus².

Ces considérations sont propres à Fontenelle et n'engagent pas nécessairement l'avis de toute la Compagnie. L'un des desseins de Fontenelle a été de fixer par écrit une histoire de la pratique du calcul différentiel au sein de l'Académie. Ses commentaires dans l'*HARS* montrent que Fontenelle veut promouvoir l'idée selon laquelle non seulement il y a nécessité de l'introduction de la Géométrie des infiniment petits, mais aussi que ce point de vue est partagé par la communauté

¹ *Ibid.* « vitesse infiniment petite » est un *errata* qui est changé en « vitesse quelconque ».

² *Ibid.*, p. 77.

académique. Dans ce sens, Fontenelle écrit le récit d'un consensus académique, il s'agira d'évaluer dans quelle mesure ce récit n'est pas romancé.

De façon générale, pour continuer l'étude de la réception, il convient de continuer à enquêter sur le devenir des conceptions des notions liées au calcul, en particulier d'interroger la dialectique courbe/polygone au regard du calcul.

La période étudiée dans notre thèse ne nécessitait pas d'examiner la question de l'enseignement du calcul différentiel. Elle se pose pour la première fois dans le livre de Reyneau, élaboré à partir de l'ouvrage de l'*AI* mais aussi d'autres écrits comme ceux de l'*HARS*. Cette question est incontournable pour l'étude de la suite de la réception du calcul leibnizien. Nous avons, conjointement avec Mónica Blanco Abellán, entamé une recherche dans cette direction¹.

Nous voudrions souligner un dernier point. L'étude de la réception et l'appropriation du calcul leibnizien, comme toute nouveauté scientifique, nécessite d'observer et d'analyser comment elle se produit dans des différents lieux. En raison de notre sujet, notre étude était circonscrite à deux lieux : celui du groupe autour de Malebranche et l'Académie. Ce sont donc deux études locales de la réception du calcul leibnizien que nous avons menées et qui nous ont permis de confirmer l'ensemble de la problématique de notre thèse. Néanmoins, il nous semble possible de tirer une autre conclusion d'ordre méthodologique. L'attention portée et centrée fortement sur les détails nous a permis de comprendre des aspects épistémologiques du calcul leibnizien, mais aussi de saisir certaines postures et attitudes qui font qu'une science peut être instituée au sein d'une communauté. L'examen de ces réceptions locales a donc mené à des conclusions plus globales, à la manière d'une variation d'échelle². Cette approche heuristique est à retenir pour des travaux à venir. Il conviendra d'ajouter une étude plus systématique et technique des réseaux et des circulations.

¹ Bella, Sandra, Blanco Abellán, Mónica, « Comentarís sobre l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital (1696-1768) : interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals de càlcul diferencial », Actes de la XV Jornada sobre la Història de la ciència i l'ensenyament « Antoni Quintana Marí », Dissabte 18 de novembre del 2017, Barcelona (à paraître).

² Borzeix, Anni, « Jeux d'échelles », *AEGIS Le Libello d'*, 2007, 3, (2), p. 25-28.

Bibliographie

Les abréviations utilisées sont indiquées entre crochets à la suite des références

Sources primaires

Manuscrits

Bernoulli, Jean, « De methodo integralium », FL 17860, fol. 91-240 et 251-252. (copie de Louis Carré).

Bernoulli, Jean, « De methodo integralium », FR 24235, fol. 14-27 (copie de Louis Carré, Louis Byzance et un dessinateur anonyme).

Byzance, Louis, « Pour les tangentes », « Pour les plus grandes et les plus petites », « Pour le point d'inflexion », FR. 24236, fol. 9.

Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangentes », 13 août 1701, *PVARS*, tome 20, fol. 310R-313V.

Carré, Louis, « Sur la rectification de la cycloïde », 13 août 1701, *PVARS*, fol. 330R-333R.

Galloys, Jean, « Difficulté proposée sur la manière de trouver le Maximum ou Minimum par la Methode des Infiniment petits », 6 mars 1706, *PVARS*, tome 22, 1706, 83V-86R.

Guisnée, Nicolas, « Observations sur les Methodes de Maximis & Minimis , où l'on fait voir l'identité & la différence de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de M^{rs} Fermat et Hude », 10 février 1706, *PVARS*, 1706, tome 25.

La Hire (de), Philippe « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits », 23 février 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 23R-28R.

La Hire (de), Philippe, « Propriétés de toutes les roulettes », 7 juin au 28 juin 1698, *PVARS*, t.17, fol. 254R-289R.

La Hire (de), Philippe, « Règle générale pour déterminer le temps que employe un corps pesant a descendre par quelque ligne courbe que ce soi », 9 et 30 août 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 368R-379V.

L'Hospital (de), Guillaume, « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », FR 25306 (sans f.).

L'Hospital (de), Guillaume, « Définition ... Méthode très facile et très générale pour trouver les tangentes de toutes sortes de courbes », FR 25306 (sans f.)

L'Hospital (de), Guillaume, « Manière de trouver les tangentes des lignes courbes », FR 24236, fol. 1-8.

L'Hospital (de), Guillaume, « De la dimension des solides et de leurs surfaces convexes ... », FR 25305, sans fol.

L'Hospital (de), Guillaume, « M^r le Marquis de l'Hôpital a donné la démonstration de la solution qu'il a trouvée du problème de M^r Bernoulli, de linea celerrimi descensus », séance académique du 20 avril 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 93R-96R.

Malebranche, Nicolas, « Du calcul integral », FR 24237, fol. 60-95.

Malebranche Nicolas, « Pour le point de contour », fol. 96.

Reyneau, Charles-René, « Proposition déduite de la méthode des tangents par laquelle on démontre l'arithmétique des infinis ou des indivisibles, on peut aussi s'en servir pour quarrer les figures courbes. Elle est de Mr le Marquis de l'Hospital et le R.P. Malebranche me l'a envoyée le 26^e févr. 1692. Elle est aussi dans Barrow, lect. 11, page 88, article 10 », FR 25302, fol. 125-127.

Reyneau, Charles-René, « Seconde partie de Géométrie, les superficies », FR 24238, fol. 250-265. (nous attribuons ce manuscrit à Reyneau).

Reyneau, Charles-René, « Extraits des Réponses faites par Mr Varignon en 1700 et 1701 aux objections que M^r Rolle avoit faites contre le calcul différentiel », FR 25302, fol. 144 à 155.

Reyneau, Charles-René, « Mémoire de ce que j'ai appris de diverses personnes à Paris en août 1692 », FR. 5060, fol. 323-324.

Rolle, Michel, « Remarques pour expliquer les différentes valeurs des signes radicaux », 9 décembre 1699, *PVARS*, t. 18, p. 556R-561V.

Rolle, Michel, « Remarques sur les signes radicaux », 23 février et 3 mars 1700, *PVARS*, t. 19, fol. 84R et fol. 85R-89R

Rolle, Michel, « Des égalités et du moyen de les résoudre », 15 mai 1700, *PVARS*, t. 19, fol. 191-199.

Rolle, Michel, « Extrait de M^r Rolle contre la Géométrie des infiniment petits », 1^{er} décembre 1700, *PVARS*, t. 20, fol. 394R-396R.

Rolle, Michel, « Troisièmes remarques sur les Principes des infiniment petits »; 16 mars, 1701, *PVARS*, t. 20, fol. 95R-101R.

Rolle, Michel, « Règles pour les tangentes », samedi 18 février 1702, *PVARS*, t. 21, fol. 75R-78V.

Rolle, Michel, « « Sur la méthode de M^{rs} de Fermat et Hudde », 8 mai 1706, *PVARS*, tome 26, fol. 172R-179R.

Sauveur, Joseph, « Démonstration par lignes des Règles du Calcul des Différentielles pour la multiplication et la division », septembre 1696, *PVARS*, t. 15, fol. 103R-105R.

Sauveur, Joseph, « Règle pour les puissances », septembre 1696, *PVARS*, t. 15, fol. 103R-105R, fol. 111V-114V.

Varignon, Pierre, « Démonstration de l'opinion de Galilée touchant les espaces que parcourent les corps qui tombent », samedi 19 janvier 1692, *PVARS*, t. 13, fol. 76V-77R.

Varignon, Pierre, « Quadrature universelle des paraboles de tous les genres imaginables appliquant la logistique infiniment générale qui vient de paraître sur la méthode de Jacobus Gregorius », samedi 29 mars 1692, *PVARS*, t. 13, fol. 86V-88R.

Varignon, Pierre, « De la quadrature universelle de tous les genres et de toutes les espèces de Paraboles imaginables », mercredi 9 avril 1692, *PVARS*, t. 13, 89R-91R.

Varignon, Pierre, « Démonstration générale de l'arithmétique des infinis ou de la géométrie des indivisibles », Pochette de séance du 2 janvier 1694, 2 folios numérotés de 1 à 4.

Varignon, Pierre, « Démonstration de six manières différentes de trouver les rayons des développées, lors même que les ordonnées des courbes qu'elles engendrent, concourent en quelque point que ce soit ; & par conséquent aussi pour les cas où elles sont parallèles entr'elles », Pochette de séance du 27 novembre 1694.

Varignon, Pierre, « Manière générale de trouver les tangentes des spirales de tous les genres, et de tant de révolutions qu'on voudra, avec leurs quadratures indéfinies », Pochette de séance du 11 décembre 1694.

Varignon, Pierre, « Courbe isochrone lelong de laquelle les corps descendent d'une vitesse uniforme par rapport à l'horizon, en sorte qu'ils s'en approchent également en temps égaux », 30 juillet 1695, *PVARS*, t. 14, fol. 135V-136R.

Varignon, Pierre, « Du déroulement des spirales de tous les genres, ou l'on fait voir qu'elles se déroulent toutes en paraboles de degré seulement plus haut que le leur, avec une méthode générale pour tous les déroulements », *PVARS*, 12 novembre 1695, t. 14, fol. 192R-193R.

Varignon, Pierre, « Nouvelle méthode pour les quadratures et rectifications indéfinies des épicycloïdes », 13 août 1695, *PVARS*, t. 14, fol. 166R-168R.

Varignon, Pierre, « Rectification et quadrature indéfinies des cycloïdes à bases circulaires, quelque distance qu'on suppose entre leur point décrivant et le centre du cercle mobile », 3 sept 1695, *PVARS*, t. 14, fol. 181R-184R.

Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes », FR 12262.

Varignon, Pierre, « Nouvelle démonstration des mouvemens isochrones dans la cycloïde renversée », 1^{er} juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 151V-153V.

Varignon, Pierre, « Seconde et Troisième démonstration des mouvemens isochrones dans la cycloïde renversée », 8 juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 162R-165V.

Varignon, Pierre, « Démonstration du temps qu'un corps employe a tomber dans une Cycloïde et dans ses portions, avec quelques proprietes particulieres des Cycloïdes », 8 juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 157V-162R.

Varignon, Pierre, « Nouvelle remarque sur les mouvements isochrones dans la cycloïde renversée. », 14 juin 1697, *PVARS*, t.16, fol. 171R-173R.

Varignon, Pierre, « Manière générale de trouver les courbes isochrones pour toutes les hypothèses imaginables d'accélération dans les corps qui tombent », 4 janvier 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 64V-68R.

Varignon, Pierre, « Règle générale pour toutes sortes de mouvement de vitesses quelconques variées à discrétion », 5 juillet 1698, *PVARS*, fol. 297V-302R.

Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des vitesses variées, comme on voudra aux mouvements par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où 'on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée », 6 septembre 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 387R-391V.

Varignon Pierre, « Mr Varignon a fini sa réponse aux difficultés de Mr Rolle contre le calcul différentiel », 11 août 1700, *PVARS*, fol. 311R-317V.

Varignon, Pierre, « Méthode pour trouver des courbes lelong des quelles un corps tombant, les temps de chute soient en telle raison qu'on voudra à ce qu'on voudra à ce qu'un corps mettrait à tomber de pareille hauteur », 24 janvier 1699, *PVARS*, t. 18, fol. 105V-106R.

Varignon, Pierre, « Réponse au second des reproches d'erreur que Mr Rolle fait au Calcul différentiel », 9 juillet 1701, *PVARS*, fol. 235R-240V.

Imprimés

Dictionnaires

Dictionnaire de l'Académie française, Chez la veuve de Jean-Baptiste Coignard, Imprimeur ordinaire du Roy, Paris, 1ere édition, 1694.

Bayle, Pierre, *Dictionnaire historique et critique*, première édition, chez Reinier Leers, 1697.

Furetière, Antoine, *Dictionnaire universel contenant généralement tous les mots françois, tant vieux que modernes, et les termes de toutes les sciences et des arts*, chez Arnout et Reinier Leers, La Haye et Rotterdam, 1690.

Ouvrages ou articles

Apollonius de Perge, *Les coniques*, œuvres traduites par Paul Ver Eecke, Bruges, Desclée de Brouwer, 1923.

Archimède, *Des spirales*, Paris, Belles Lettres, 1971.

Archimède, *Les Œuvres complètes*, traduction de Van Eecke, tII, Vaillant-Carmame, Liège, 1960

Aristote, *Physique*, trad. Servens, Vrin, Paris, 1999.

Arnauld, Antoine, Nicole, Pierre, *La logique ou l'art de penser*, 5^{ème} édition, 1683, Flammarion, 1970.

Arnauld, Antoine, *Nouveaux élémens de géométrie ; contenant Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonstrations des propositions les plus communes, De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, De nouvelles mesures de l'angle, dont on ne s'estoit point encore avisé, Et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des Lignes*, chez Charles Savreux, Librairie Juré, Paris, 1667.

Arnauld, Antoine, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Desprez, Paris, 1683.

Arnauld, Arnaud, *Nouveaux éléments de géométrie dans Géométries de Port-Royal*, édition critique par Dominique Descotes, Paris, Honoré Champion Editions, 2009.

Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae, in quibus (praesertim) Generalia Curvarum linearum symptomata declarantur*, Johannen Dunmore, Londini, 1670.

Barrow, Isaac *Lectiones Mathematicae XXIII. In Quibus Principia matheseos generalia, exponentur*, Typis J. Playford, Londres, 1683.

Barrow, Isaac, *The usefulness of Mathematical Learning Explained and Demonstrated*, translated by John Kirkby, London, 1734.

Barrow, Isaac, *Geometrical lectures: explaining the generation, nature and properties of curve lines*, read in the University of Cambridge by Isaac Barrow, translated by Edmund Stone, Stephen Austen, London, 1735.

Bartholin, Erasmus, *Principia matheseos universalis, seu introductio ad Geometricae methodum Renati des Cartes*, Amsterdam, Elzevirios, 1651. Réimprimé en 1659 dans le tome second de l'édition latine de La Géométrie de Descartes.

Bernoulli, Jacques,

Correspondance

Bernoulli, Jacques, *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, bearbeitet und kommentiert von André Weil, mit Beiträgen von Clifford Truesdell und Fritz Nagel, Basel : Birkhäuser Verlag, 1993.

Articles ou mémoires

Bernoulli, Jacques, « J.B. Aanalysis problematis antehac propositi, de Inventione Linea descensus a corpore gravi percurrenda uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur : et alterius cujusdam Problematis Propositio », *AE*, mai 1690, p. 217-219.

Bernoulli, Jacques, « Analysis problematis ... de inventione lineae... et alterius cujusdam problematis propositio », *AE*, mai 1690, p. 217-219.

Bernoulli, Jacques, « Specimen alterum calculi differentialis .. una cum Addimento ... ad problema Funicularium, aliisque », *AE*, juin 1691, p. 282-290.

Bernoulli, Jacques, « Additamentum ad solutionem curvae causticae fratris John Bernoulli, una cum meditatione de natura evolutarum, etc », *AE*, mars 1692, p. 110-116.

Bernoulli, Jacques, « Curvatura veli in litteris ejus d.g. Martii hujus anni Lipsiam perscriptis communicata », *AE*, mai 1692, p. 201-207.

Bernoulli, Jacques, « Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expnsi. Radii circulorum osculantim in terminis simplicissimis exhibitis, una cum novis quibusdam theorematis huc ertinentibus, &c. », *AE*, juin 1694, p. 262-270.

Bernoulli, Jacques, « Nova methodus expedite determinandi radios osculi seu curvatura in curvis quibusvis algebraicas », *AE*, novembre 1700, p. 508-511.

Bernoulli, Jean

Correspondance

Bernoulli, Jean, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 1. Bâle, Birkhäuser Verlag, 1955, hrsg. Von O. Spiess, Birkhäuser, Basel, 1955.

Bernoulli, Jean, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 2, *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon erster teil: 1692-1702*, Beartbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, unter Benutzung von Vorarbeiten von Joachim Otto Fleckenstein Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

Bernoulli, Jean, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 3, *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon zweiter teil: 1702-1714*, Beartbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

Bernoulli, Jean, *Lectiones de calculo differentialium*, Paul Schafheitlin ; Naturforschende Gesellschaft, Basel, 1922. [LCD, suivi de la page]

Ouvrages

Bernoulli, Jean, *Opera omnia tam autem sparsim edita quam hactenus inedita*, tomus tertius, accedunt *Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate*, Lausanne, 1742.

Articles ou mémoires

Bernoulli, Jean, « Solutio problematis funiculari », *AE*, juin 1691, p. 274-276.

Bernoulli, Jean, « Solutio problematis cartesio propositi Dn. De Beaune exhibita a John. Bernoulli Basileensi », *AE*, mai 1693, p. 234-235.

Bernoulli, Jean, « Solution d'un problème proposé dans le 28. Journal de cette année, page 336, par M. Bernoulli le Médecin », *JS*, 31 août 1693, p. 405-408.

Bernoulli, Jean, « Modus generalis construendi omnes aequationes differentialis primi gradus », *AE*, novembre 1694, p. 435-437.

Bernoulli, Jean, « Supplementum defectus geometricae cartesianae inventionem locorum (...) Problema novum mathematicis propositum », *AE*, juin 1696, p. 264-269.

Bernoulli, Jean, « John. B. Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, Solutioque problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda linea brachystochrona, id est, in seu radorum unda construenda », *AE*, mai 1697, p. 206-211.

Bernoulli, Jean, « Perfectio regulae suae editae in Libro Gall. Analyse des infiniment petits art. 163, pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certo caso evanescent », *AE*, août 1704, p. 375-380.

Berkeley, George, *The Analyst: Or, a discourse addressed to an infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysts are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith, by the autor of the minute philosopher*, Tonson, Londres, 1734.

Carré, Louis

Ouvrages

Carré, Louis, *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du Calcul intégral*, Chez Boudot, Paris, 1700.

Articles ou mémoires

Carré, Louis, « Méthode pour la rectification de lignes courbes par les tangentes », *MARS*, 1701, p. 159-163.

Carré, Louis, « Rectification de la cycloïde », *MARS*, vol.3, 1701, p. 163-169.

Carré, Louis, « Rectification des caustiques par réflexion formées par le cercle, la cycloïde ordinaire, et la parabole, et de leurs développées avec la mesure des espaces qu'elles renferment », *MARS*, 1703, p. 183-199.

Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des courbes », *MARS*, 1704, p.66-68.

Catelan (de), François

Ouvrages

Catelan (de), François, *Principe de la science générale des lignes courbes ou un des principaux Éléments de la Géométrie universelle*, Lambert Roulland, Paris, 1691.

Catelan (de), François, *Logistique pour la science générale des lignes courbes ou manière universelle et infinie d'exprimer et de comparer les puissances des grandeurs*, Lambert Roulland, Paris, 1691.

Articles ou mémoires

Catelan (de), François, « Courte remarque de M. l'Abbé D.C. où l'on montre à M. G. Leibniz le paralogisme contenu dans l'objection précédente. », *Nouvelles de la République des Lettres*, sart. II, septembre 1686, p. 1004.

Cavalieri, Bonaventura, *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam ratione promota*, Authore P. Bonaventura Cavalerio Mediolan, Ordinis Iesuatorum S. Hieronymi. D.M. Mascaralleae Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore. Ad Illustriss. Et Reverendiss. D. D. Ioannem Ciampolum, Bononiae, Typis Clementis Ferronij. Illustriss, M. DC. XXXV. Superiorum permissu, Bologne, Gio. Battista Ferroni, 1635.

Cavalieri, Bonaventura, *Exercitationes Geometricae sex, Bononiane, (...) Typis Iacobi Montji, MDCXLVII. Superiorum permissu, Jacobi Monti, Bologne, 1647.*

Craig, John, *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi*, Londini, 1685.

Descartes, René, *Œuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery, 11 vol., nouvelle présentation en coédition avec le CNRS, Paris, Vrin, 1964-1974.

Descartes, René, *Discours de la méthode pour bien conduire la raison, et chercher la vérité des sciences plus la Dioptrique, les météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*, Leyde, 1637 [La Géométrie]

Descartes, René, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune, ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*, Paris, chez Jean Maire, 1649 (troisième édition, Amsterdam, 1683).

Descartes, René, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune, ... gallice conscriptis, in latinam linguam versa et commentariis illustrata operet studio Francisci a Schooten, ... Editio secunda. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus (...)* (deux volumes), 1659-1661.

Descartes, René, *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes par Jacques Brunschwig, Le livre de Poche, Classiques Garnier Multimédia, collection « Classiques Garnier », Paris, 1997.

Euclide, *Les Éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, établis à partir de l'édition de J. L. Heiberg, PUF, Paris, 4 vols., 1990-2001.

Fermat, Pierre, *Varia opera mathematica* D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani, Accesserunt selectae quaedam ejusdem Epistolae, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas aut Physicam pertinentibus scriptae., Toulouse : Joannis Pech, 1679 [VO, suivi de la page].

Fermat, Pierre, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publiques, Paris, Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, (1891-1912).[OF, suivi du tome et la page].

Fontenelle, Bernard, *Histoire de l'Académie des Sciences, avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, tirez des registres de l'Académie*. [HARS, suivi de l'année et de la page ; pour les mémoires MARS, suivi de l'année et de la page].

Fontenelle, Bernard, *Eléments de la géométrie de l'infini*, Imprimerie royale, Paris, 1727.

Galilée, Galileo, *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione nazionale, Firenze, éd. Aantonio Favaro, 20 vols., 1880-1909.

Grégoire, James, *Geometria pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi & mensurae*, Patavii, 1668.

Guisnée, Nicolas, « Observations sur les méthodes des Maximis et Minimis, où l'on fait voir l'identité et la différence de celle de l'Analyse des infiniment petits avec celles de Messieurs Fermat et Hudde », *MARS*, 1706, p.24-48.

Galloys, Jean, (dir), *Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 à 1699*, Imprimerie royane, Paris, 1692-1693.

Galloys, Jean, « Extrait du livre intitulé *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences* dans *Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 à 1699*, Imprimerie Royale, Paris, 1730, p. 290.

Galloys, Jean, (dir), *Divers ouvrages de mathématique et de physique. Par Messieurs de l'Académie royale des sciences*, Imprimerie royale, Paris, 1693.

Galloys, Jean, « Réponse à l'écrit de M. David Gregorie, touchant les lignes appellées Robervalliennes, qui servent à transformer les figures », *MARS*, 1703, p.70.

Grégory, James, *Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi & mensurae*, Patavii, 1668. Hérigone, Pierre, *Cursus Mathematici*, tome second, chez Henry le Gras, Paris, 1634.

Gouye, Thomas, « Nouvelle méthode pour déterminer aisément les rayons des développées dans toute sorte de courbe algébrique. Par Monsieur Jacques B. Acta Eruditorum, Mensis Novembris anni 1700. Lipsiae », *Mémoires pour l'histoire des sciences et des Beaux arts, recueillis par l'ordre de SA.S. Mr. Le Duc de Maine, mois de mai et de juin, seconde édition augmentée de diverses remarques et de plusieurs articles nouveaux*, Amsterdam, chez Jean-Louis Delorme, 1701, p. 422-430.

Hérigone, Pierre, *Supplementum cursus mathematici continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affecturum Effectiones*, Chez Henry le Gras, Paris, 1642

Huygens, Christiaan

Ouvrages

Huygens, Christiaan, *Œuvres complètes*, publiée par la Société hollandaise des Sciences, Martinus Nijhoff, La Haye, 1888-1950 [OH, suivi du tome et de la page].

Articles ou mémoires

Huygens, Christiaan, « Christiani Huguenii, dynastae in Zülechem, solution ejusdem Problematis », *AE*, juin 1691, p. 281-282.

Huygens, Christiaan, « C.H.Z. de Problemate Bernouliano in actis Lipsientibus hujus anni pag. 235 proposito », *AE*, octobre 1693, p. 475-476.

La Hire (de), Philippe, *Nouveaux Elémens des sections coniques*, Pralard, Paris, 1679

La Hire (de), Philippe, « Œuvres diverses de M. de la Hire de l'Académie royale des sciences » dans *Mémoires de l'académie royale des sciences*, depuis 1666 jusqu'à 1699, chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Hippolyte-Louis Guerin, Paris, tome IX.

La Hire (de), Philippe, « Traité des roulettes, où l'on démontre la manière universelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, et de reflexion ou de rebroussement, leurs superficies et leurs longueurs, par la géométrie ordinaire. Avec une méthode générale de réduire toutes les lignes courbes aux roulettes, en déterminant leur génératrice ou leur base, l'une des deux étant donnée à la volonté. », *MARS*, 1706, p. 340.

Lalouvière (de), Antoine, *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris*, Arnaud Colomiez, Toulouse, 1660.

Lamy, Bernard, *Les Éléments de géométrie ou de la mesure des corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné : les plus belles propositions d'Archimède et l'Analyse par le RP Lamy*, Grenoble, à Paris, chez André Pralard, 1685.

Lamy, Bernard, *Les Éléments de géométrie ou de la mesure des corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné : les plus belles propositions d'Archimède et l'Analyse par le RP Lamy*, Grenoble, à Paris, chez André Pralard, 1695 (2^{ème} édition).

Lamy, Bernard, *Entretiens sur les sciences, dans lesquels on apprend comment l'on doit étudier les Sciences, et s'en servir pour se faire l'esprit juste, et le cœur droit*, édition critique par François Girbal et Pierre Clair, PUF, Paris, 1966.

Leibniz, G.W.

Correspondance

Leibniz, G.W., *Die Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, éd. C. Gerhardt, Berlin, Mayer, 1899, rééd. Hildesheim, New-York, Olms, 1987.

Leibniz, G.W., *Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* [A, suivi du numéro de la série en chiffres romains, du numéro du tome, de la page].

Ouvrages

Leibniz, G.W., *Historia et Origo Calculi differentialis a G.G. Leibnitio concripta zur zweiten säcularfeier du Leibnizischer Geburtstapes aus den Handschriften der königlichen bibliothek zu Hannover heurasgegeben von Gerhardt, Hannover, 1846, p. 40.*

Leibniz, G.W., *Opuscules et fragments inédits, extraits des manuscrits de la bibliothèque de Hanovre*, édités par Louis Couturat, Paris, Alcan, 1903.

Leibniz, G.W., *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Garnier-Flamarion, Paris, 1966.

Leibniz, G.W., *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des *Acta Eruditorum*, trad. Marc Parmentier, Librairie philosophique J. Vrin, 1989.

Leibniz, G.W., *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse, de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométriques qui en est le corollaire*, introduction, traduction et notes de M. Parmentier, Librairie philosophique de J. Vrin, 2004.

Articles ou mémoires

Leibniz, G.W., *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des *Acta Eruditorum*, trad. Marc Parmentier, Librairie philosophique J.Vrin, 1989.

Leibniz, G.W., « De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa », *AE*, février 1682, p. 41-46.

Leibniz, G.W., « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irracionales quabtitates moratur et singulare pro illis calculis genus », *AE*, octobre 1684, p. 467-473.

Leibniz, G.W., « Additio ad schedam de dimensionibus figurarum inveniendis », *AE*, décembre 1684, p. 585-587.

Leibniz, G.W., « Mediatatio nove de natura anguli contactus e osculi, horumque usu in practica Mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas », *AE*, juin 1686, p. 289-292.

Leibniz, G.W., « De Geometria recondita et analysi indivisilium atque infinitorum », *AE*, juin 1686, p. 292-299.

Leibniz, G.W., « Démonstration courte d'une erreur considérable de M^r Descartes et de quelques autres touchant une loi de la nature selon laquelle ils soutiennent que Dieu conserve dans la matière la même quantité de mouvement, de quoi ils abusent même dans la mécanique », *Nouvelles de la République des Lettres*, septembre 1686, 166, art. II, p. 996-1003.

Leibniz, G.W., « Lettre de M. L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature pour la considération de la sagesse divine, pour servir de réplique à la réponse du R.P.D. Malebranche », *Nouvelles de la République des lettres*, juillet 1687, art. VIII, p. 744-753.

Leibniz, G.W.; « Tentamen de motuum coelestium causis », , février 1689, p. 82-96.

Leibniz, G.W., « De solutionibus problematis catenarii vel funicularis in actis junii an. 1691, aliisque, a DN. JAC. Bernoullio propositis », *AE*, juin 1691, p. 435-439.

Leibniz, G.W., « De linea in quam flexile se pondere proprio curvat », *AE*, juin 1691, p. 277-281.

Leibniz, G.W., « De la chaînette, ou solution d'un problème fameux proposé par Galilei, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, avec son usage des logarithmes, & une application à l'avancement de la navigation », *JS*, 31 mars 1692, p. 147-153.

Leibniz, G.W., « Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis, *AE*, septembre 1692, p. 440.

Leibniz, G.W., « De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente. Ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu », *AE*, avril 1692. « Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione », *AE*, juillet 1694, p. 168-171.

Leibniz, G.W., « Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica ... », *AE*, août 1694, p. 364-375.

Leibniz, G.W., « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendentes », *Journal des Sçavants*, 30 août 1694.

Leibniz, G.W., « Systeme nouveau de la nature et de la communication des substances, aussi bien de l'union entre l'âme & le corps. Par M.D.L. », publié en deux fois au JS, 27 juin et 4 juillet 1695, p. 294 et 301.

Leibniz, G.W., « Additio ad hoc schediasma », AE, août 1696,

Leibniz, G.W., « Extrait d'une lettre de M. de Leibniz sur son Hypothèse de Philosophe, & sur le problème curieux qu'un de ses amis propose aux Matematiciens ; avec une remarque sur quelques points contestez dans les Journaux precedens, entre l'auteur des principes de Physique, & celui des objections contre ces principes », JS, 19 novembre 1696, p. 451-455.

Leibniz, G.W., « Mémoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul différentiel », *Journal de Trévoux*, novembre-décembre 1701.

Leibniz, G.W., « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de luy dans les Memoires des mois de Novembre et Decembre derniers », JS, 20 mars 1702, p. 183-186.

L'Hospital (de), Guillaume ,

Ouvrages

L'Hospital (de), Guillaume , *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, De l'Imprimerie Royale, Paris, 1696. [AI suivi de la page]

L'Hospital (de), Guillaume, *Traité analytique des sections coniques et de leur usages pour la résolution des équations tant déterminées qu'indéterminées*, Montalant, Paris, 1720.

Articles ou mémoires

L'Hospital (de), Guillaume, « Solution du problème de M. de Beaune propos autrefois à M. Descartes et que l'on trouve dans la 79. De ses lettres, tome 3. Par Mr. G^{***} », JS, septembre 1692.

L'Hospital (de), Guillaume, « Solution d'un problème de géométrie que l'on a proposé depuis peu dans le Journal de Leipsic », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, 30 juin 1693, t. X, p. 343-348.

L'Hospital (de), Guillaume, « Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction avec une manière nouvelle de trouver les développées », 31 août 1693, *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, p. 380-384.

L'Hospital (de), Guillaume, « Nouvelles remarques sur les développées, sur les points d'inflexion et sur les plus grandes et les plus petites quantitez », 30 novembre 1693, *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, t. X, p. 397-400.

L'Hospital(de), Guillaume, « Illustris Marchionis Hospitalii solutio problematis physico-mathematici ab erudito quodam geometra propositi », *AE*, février 1695, p. 56-59.

L'Hospital (de), Guillaume, « Domini Marchionis Hospitalii solutio Problematis de linea cellerimi descensus », *AE*, mai 1697, p. 217-218.

L'Hospital (de), Guillaume, « Solution d'un problème physico-mathématique », *MARS*, 1700, p. 21.

L'Hospital (de), Guillaume, « La quadrature absolue d'une infinité de portions moyennes, tant de la lunule d'Hippocrate de Chio, que d'une autre de nouvelle espèce », *MARS*, 1701, p. 17-19.

Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes*, éd. André Robinet, Paris, Vrin, 20 tomes et un index, 1958-1970.

Parmi ces tomes,

Malebranche, Nicolas , *Œuvres complètes, Mathematica*, tome XVII-2, édité par Pierre Costabel, Librairie philosophique J. Vrin, 1968. [**Mathematica**]

Montucla, Jean-Etienne, *Histoire des Mathématiques*, 2 volumes, Jombert, Paris, 1754

Newton, Isaac, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Strater, London, 1687.

Newton, Isaac, *Opticks: Or, A Treatrise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of light, Also two treatrises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, S Smith and B.Walford, London, 1704.

Newton, Isaac, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, edited by R. Cotes, Cornelius Crownfield, 1713.

Newton, Isaac, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, edited by H. Pemberton, Innys, London, 1726.

Newton, Isaac, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, by Sir Isaac Newton, traduit en anglais par Andrew Motte, Londres, 1729.

Newton, Isaac, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, (1726). Traduction de feu Madame la Marquise Du Chastellet. 2 tomes, Chez Desaint & Saillant, et chez Lambert, Paris, 1756.

Nieuwentijt, Bernard, *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amsterdam, 1694.

Nieuwentijt, Bernard, *Analysis infinitorum seu curvilinearum proprietates ex polygonorum natura deductae*, Amsterdam, 1695.

Nieuwentijt, Bernard, *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et responsio ad nobilissimum G.G. Leibnitzium*, Johannem Wolters, Amsterdam, 1696.

Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des Mathématiques : dans lequel on trouve les termes de cette science plusieurs termes des Arts et des autres sciences avec des raisonnemens qui conduisent peu à peu l'esprit à une connaissance universelle des mathématiques*, chez Estienne Michallet, Paris, 1691.

Pascal, Blaise, *De l'esprit géométrique, Ecrits sur la grâce et autres textes*, introduction, notes, bibliographie et chronologie par André Clair, GF Flammarion, Paris, 1985.

Pascal, Blaise, *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy, en luy envoyant Une méthode générale pour trouver les centres de gravité de toutes sortes de grandeurs, un Traité des trilignes et de leurs onglets. Un Traité des Sinus d'un quart de Cercle. Un Traité des Arcs de Cercle. Un traité des Solides circulaires. Et enfin un Traité général de la Roulette, contenant la solution de tous les Problèmes touchant LA ROULETTE qu'il avait proposez publiquement au mois de juin 1658*, Paris, 1658.

Pascal, Blaise, *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière*, Paris, Chez Guillaume Desprez, 1665.

Pascal, Blaise, *Œuvres de Blaise Pascal*, de l'imprimerie Crapelet, nouvelle édition, tome cinquième, Chez Lefevre, Paris, 1819.

Pardiès, Ignace Gaston, *Éléments de géométrie ou par une méthode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimède, d'Appolonius, & les plus belles*

inventions des anciens & des nouveaux Géomètres, Chez Sébastien Marbre-Cramoisy, Paris, 1671.

Prestet Jean, *Elémens de Mathématiques*, Editions Pralard, Paris, 1675.

Prestet Jean, *Nouveaux Elémens de mathématiques*, Editions Pralard, Paris, 1689.

Roberval (de), Gilles, *Traité des indivisibles* dans *Divers ouvrages de Mathématique et de physique, par messieurs de l'Académie royale des sciences*, Imprimerie royale, Paris, 1693, p. 190-245.

Roberval (de), Gilles, *Epistolae ad Torricellum* dans *Divers ouvrages de Mathématique et de physique, par messieurs de l'Académie royale des sciences*, Imprimerie royale, Paris, 1693, p. 283-302.

Roberval (de), Gilles, *Elémens de géométrie de G. P. Roberval*, textes présentés par Vincent Jullien, Vrin, Paris, 1996.

Reyneau, Charles-René, *Analyse démontrée ou la méthode pour résoudre les problèmes mathématiques*, Quillau Imprimeur, Paris, 1708.

Rolle, Michel

Ouvrages

Rolle, Michel, *Traité d'algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions des Mathématiques*, chez E. Michallet, Paris, 1690.

Rolle, Michel, *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés, suivie de deux autres méthodes, dont La première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, Et la seconde, pour résoudre par plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas encore esté résolus*, Chez Jean Cusson, 1691.

Rolle, Michel, *Méthodes pour résoudre les questions indéterminées de l'Algèbre*, Chez Jean Cusson, 1699.

Rolle, Michel, *Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences touchant le problème général des tangentes*, Chez Jean Boudot, Paris, 1703.

Articles ou mémoires

Rolle, Michel, « Avis aux géomètres », *JS*, 20 juillet 1693, p. 336.

Rolle, Michel, « Réponse à M. Bernoulli le Médecin, au sujet d'une méthode, qui a paru sous son nom dans le Journal du 31 août dernier, *JS*, 14 septembre 1693, p. 425-427.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de Rémi Lochell, où il donne plusieurs observations pour résoudre les égalitez par nombres, par géométrie, et en termes généraux », *JS*, 16 août 1694.

Rolle, Michel, « Remarques sur la réponse qui a esté insérée sous le nom de M. Bernoulli dans le 3^e journal de cette année, au sujet d'un problème de Geometrie », *JS*, 15 février 1694, p. 77-80.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de R.L. au sujet de l'Algèbre », *JS*, 28 mai 1696, p. 244-249.

Rolle, Michel, « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes », *JS*, avril 1702, p. 239-253.

Rolle, Michel, « Secondes remarques sur les lignes géométriques », *MARS*, 1702, p.174.

Rolle, Michel, « Parallèle du Calcul différentiel, avec celui de la Methode, de Maximis & Minimis, de Mr de Fermat », *Journal de Trévoux*, juin 1702, p. 464-468.

Rolle, Michel, « Remarques sur les lignes géométriques », *MARS*, 1703, p.132.

Rolle, Michel, « Du nouveau système de l'infini », *MARS*, 1703, p.312.

Rolle, Michel, « De l'inverse des tangentes », *MARS*, 1705, p.25.

Rolle, Michel, « De l'inverse des tangentes et de son usage », *MARS*, 1705, p.171.

Rolle, Michel, « Observations sur les tangentes », *MARS*, 1705, p.219.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de M. Rolle, de l'Académie Royale des sciences, au sujet de l'inverse des tangentes », *JS*, décembre 1704, p. 634-639.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de M. Rolle, de l'Académie Royale des sciences, au sujet de l'inverse des tangentes », *JS*, 8 décembre 1704, p. 634-639.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de M. Rolle, de l'Académie Royale des sciences, au sujet de l'inverse des tangentes », *JS*, 16 mars 1705, p. 170-174.

Rolle, Michel, « Réponse de M. Rolle de l'académie royale des sciences, à l'écrit publié par M. Saurin dans le journal du 23 avril 1705 », *JS*, 18 mai 1705.

Rolle, Michel, « Extrait d'une lettre de M. Rolle de l'Académie royale des Sciences à M.B. touchant l'analyse des infiniment petits, où il répond à un écrit de M. Saurin publié dans le Journal des Sçavans du 11 juin dernier », *JS*, 30 juillet 1705.

Saurin, Joseph, « Remarques sur les courbes des deux premiers exemples proposés par M. Rolle dans le Journal du jeudi 13 avril 1702 », *JS*, 15 janvier, 1703, p. 41-45.

Saurin, Joseph, « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de Règles et Remarques pour le problème général des tangentes », *JS*, 3 août 1702, p. 519-534.

Saurin, Joseph, « Remarques sur les courbes des deux premiers exemples proposés par M. Rolle dans le Journal du jeudi 13 avril 1702 », *JS*, 15 janvier, 1703, p. 43.

Saurin, Joseph, « Suite des remarques sur les courbes des deux premiers Exemples proposez par M. Rolle, dans le Journal du Jeudi 13 avril 1702 », *JS*, 22 janvier 1702, p. 49-52.

Saurin, Joseph, « Défense de la réponse à M. Rolle de l'Académie royale des sciences contenue dans le Journal des Sçavans du 3 août 1702 CONTRE La réplique de cet auteur publiée en 1703 sous le titre de Remarques touchant le Problème général des Tangentes, *JS*, jeudi 23 avril 1705, p. 241-256.

Saurin, Joseph, « Réfutation de la réponse de M. Rolle insérée dans le Journal des Sçavans du 18 mai 1705 par M. Saurin », 11 juin 1705, p. 367-382.

Sauveur, Joseph, *Géométrie élémentaire et pratique de seu M. Sauveur, de l'Académie Royale des Sciences*, revue, corrigée et augmentée par M. LeBlond, Maître de Mathématiques des enfans de France, des pages de la grande Ecurie du Roi, &c, Paris, Jombert, 1764.

Torricelli, Evangelista, *Opera Geometrica*, Florentiae, typis Amardis Masse et Laurentii de Landis, 1644.

Trublet, Joseph, *Mémoires pour servir à l'histoire de la vie des ouvrages de M. de Fontenelle*, Paris, Chez Dessaint et Saillant, 1756.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, « Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi »; *AE*, décembre 1682, p. 391- 393.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, « Inventa nova, exhibita Parisiis Regiae Scientarum à D.T. », *AE*, novembre 1682, p. 364-365.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, « Nova methodus determinandi maxima et minima », *AE*, 1683, p. 122-124.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, « Essai d'une méthode pour trouver les rayons des développées, les tangentes, les quadratures, et les rectifications de plusieurs courbes, sans y supposer aucune grandeur infiniment petite », *MARS*, 1701, p. 291-293.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, « Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques sans supposer aucune grandeur infiniment petite », *MARS*, 1702.

Van Heuraet, Hendrik, « Henrici van Heuraet epistola de Transmutatione curvarum linearum in rectas », dans *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, op. cit.*, p. 517-520.

Varignon, Pierre

Ouvrages

Varignon, Pierre, *Projet d'une nouvelle mécanique*, Chez Boudot, Paris, 1687.

Varignon, Pierre, *Éclaircissemens sur l'Analyse des Infiniment petits*, , Chez Rollin, Paris, 1725.

Articles

Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des mouvemens accélerez à toutes les hypotheses possibles d'accélération ordonnées dans la chute des corps, *Mémoires de Mathématiques et de physique*, 1693, p. 107-115.

Varignon, Pierre « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion. », *MARS*, 1700, p. 22-27.

Varignon, Pierre « Du mouvement général de toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent. », *MARS*, 1700, p. 83-101.

Varignon, Pierre « Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour faire décrire les orbes qu'on leur a supposées jusqu'ici. », *MARS*, 1700, p. 224-237.

Varignon, Pierre « Autre règle générale des forces centrales, avec une manière d'en déduire et d'en trouver une infinité d'autres à la fois, dépendemment et indépendemment des rayons osculateurs, qu'on va trouver aussi d'une manière infiniment générale », *MARS*, 1701, p. 20-38.

Varignon, Pierre « Des courbes décrites par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, placées à discrétion entr'elles, et par rapport aux plans de ces mêmes courbes », *MARS*, 1703, p. 212-228.

Varignon, Pierre « Nouvelle formation de spirales beaucoup plus différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer d'autres courbes à l'infini ; avec les touchantes, les quadratures, les déroulements, et les longueurs de quelques-unes de ces spirales qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale. », *MARS*, 1704, p. 69- 131.

Varignon, Pierre « Réflexions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis », *MARS*, 1706, p.13.

Varignon, Pierre « Comparaison des forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra », *MARS*, 1706, p. 178-234.

Varignon, Pierre « Différentes manières infiniment générales de trouver les rayons osculateurs de toutes sortes de courbes, soit qu'on regarde ces courbes sous la forme de polygones ou non », *MARS*, 1706, p. 490-506.

Viviani, Vincenzo, *Formazione, e misura di tutti i cieli : con la struttura, e quadratura esatta dell'intero, e delle parti di un nuovo cielo ammirabile, e di uno degli antichi delle volte regolari degli architetti*, nella Stamperia di Pietro Matini, Firenze, 1692.

Wallis, John, *De Sectionibus Conicis, nova methodo Expositis, tractatus*, oxonii, Typis Leon, Lichfield, Academiae Typographi, Impensis Tho. Robinson, anno 1655.

Wallis, John, *Arithmetica infinitorum sive nov methodus inquirendi in curvilinearum Quadraturam, aliaq diffiliora Mathesos Problemata*, Oxonii, Typis Leon ; Lichfield, Academiae Typographi, Impensis Tho. Robinson, Anno 1655.

Wallis, John, *Defense of treatrise of the Angle of contact*, Playford for Richard Davis, London, 1684.

Wallis, John, *A Treatrise of algebra, both historical and practical*, printed by John Caswell, London, 1685.

Van Schooten, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune, ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*, Paris, chez Jean Maire, 1649 (troisième édition, Amsterdam, 1683).

Van Schooten, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune, ... gallice conscriptis, in latinam linguam versa et commentariis illustrata operet studio Francisci a Schooten, ... Editio secunda. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus (...)* (deux volumes), 1659-1661.

Viète, François, *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo, quibus nihil in hoc genere simili aut secundum, huic auctori hactenus visum*, Parisiis, 1615.

Sources secondaires

Aiton, Eric John, « The celestial mechanics of Leibniz : a new interpretation », *Annals of science*, 20 :2, 1964, p. 111-123.

Aiton, Eric John « Polygons and parabolas : some problems concerning the Dynamics of planetary orbits », *Centaurus*, 1989, vol. 31, p. 207-221.

Alfonsi, Liliane « La diffusion des mathématiques au XVIII^e siècle dans les manuels d'enseignement : du "Pourquoi ?" au "Comment ?" » dans Actes du XIV^e Colloque national de la recherche en IUT 2008, p. 1-8.

Andersen, Kirst, « Cavalieri's Method of Indivisibles », *Archive for History of exact Sciences*, 31 1985, p. 291-367.

Asselah, Kenza-Katia, *Arithmétique et algèbre dans la seconde moitié du XVII^{ème} siècle français : les « Eléments et nouveaux éléments de mathématiques. » de Jean Prestet*, thèse soutenue sous la direction de Roshdi Rashed, Paris 6, 2005.

Audidière, Sophie, « La lettre galante et l'esprit géométrique. Expression métaphysique et métaphysique des langues, ou la philosophie du discours de Fontenelle », *Archives de Philosophie*, n° 78, 2015, p. 399-416.

Audidière, Sophie, « Une philosophie 'conciliante, paisible et secrète' ? L'article LEIBNITZIANISME de Diderot et l'Éloge de M. Leibnitz de Fontenelle » dans Leduc Christian, Pépin François, Rey, Anne-Lise, Rioux-Beaulne Mittia (dir), *Leibniz et Diderot, rencontres et transformations*, Presses université de Montréal, Montréal, 2015, p. 173-190.

Bakhtine, Mickhaïl, *Esthétique de la création verbale*, traduction Aucouturier, Gallimard, Paris, 1979.

Barbin, Evelyne, « Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^e siècle », *Fragments d'histoire des mathématiques II*, Paris, APMEP, 1987, p. 125-159.

Barbin, Evelyne, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVIII^e siècle, in Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 40, 1992, p. 29-49.

Barbin, Evelyne, « Descartes et les mathématiques » dans *Les philosophes et mathématiques*, IREM, Ellipses, Paris, 1996

Barbin, Evelyne, « Historicité de la notion d'évidence en géométrie, entre évidence visuelle et évidence manipulatoire », in *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996, p.124-135.

Barbin, Evelyne, « La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité », in *Analyse et démarche analytique*, Université de Reims, IREM, 1998, p. 79-101.

Barbin, Evelyne, « The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry », *Mathematical Association of America Notes*, 51, 2000, p. 89-98.

Barbin, Evelyne, « Logarithmes et problèmes inverses des tangentes : de Descartes à Leibniz », IREM, *Histoires de logarithmes*, Paris, Ellipses, 2006, p. 169-190.

Barbin, Evelyne, « L'arithmétisation des grandeurs », *Repères IREM*, 68, 2007, p. 5-20.

Barbin, Evelyne, « Les discours de l'évidence mathématique », in Barbin, Evelyne, Bénard, Dominique (éds.), *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, Lyon, INRP, 2007, p. 13-28.

Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique au XVII^e siècle*, Ellipses, Paris, 2006.

Barbin, Evelyne, Evolving Geometric Proofs in the 17th Century: From Icons to Symbols, in Hanna Gila, Jahnke Niels, Pulte Helmut (éd.), *Explanation and Proof in Mathematics : Philosophical and Educational Perspectives*, Springer-Verlag, 2010, p. 237-252.

Barbin, Evelyne, Dialogism in Mathematical writing: historical, philosophical and pedagogical issues, in Katz, Victor, Tzanakis, Costas, (éds.), *Recent developments on introducing*

a historical dimension in Mathematics Education, Mathematical Association of America, 78, 2011, p. 9-16.

Barbin, Evelyne, « Une approche bakhtinienne des textes d'histoire des sciences », in Rey, Anne-Lise (éd.), *Méthode et histoire*, Garnier, Paris, 2013, p. 217-232.

Barbin, Evelyne, « Universality vs generality : an interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat », in Chemla, Karine, Chorlay, Renaud, Rabouin, David, (ed.), *Perspectives on generality*, Oxford University Press, 2016, p. 413-432.

Barbin (Le Rest), Évelyne, Cléro Jean-Pierre, *La naissance du calcul infinitésimal au XVII^e siècle*, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n°16, 1980.

Bascelli, Tiziana, « Torricelli's Indivisibles » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century Indivisibles Revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 105-136.

Beeley, Philippe, « Infinity, infinitesimals, and the Reform of Cavalieri : John Wallis and his critics », Goldenbaum, Ursula and Jesseph Douglas (ed), *Infinitesimals differences*, p. 31-52.

Belaval, Yvon, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960.

Bella, Sandra, *Une histoire de la réception du calcul des différences dans les milieux savants français (1686-1696)*, Mémoire pour l'obtention du Master 2 Histoire des Sciences et des Techniques, sous la direction de Dominique Bénard, juin 2010.

Bella, Sandra, « L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes : ouvrage de recherche ou d'enseignement ? dans Barbin, Evelyne, Moyon Marc, (dir) *Les ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, coordonné par E. Barbin et M. Moyon, PULIM, 2013, p. 73-85.

Bella, Sandra, « Les Infiniment petits à l'Académie Royale des Sciences, le rôle de Fontenelle (1698-1727), *Revue Fontenelle*, Presses universitaires de Rouen, Rouen, 2015, p. 237-263.

Bella, Sandra, Blanco Abellán, Mónica, « Comentarís sobre l'Analyse des infiniment petits de L'Hospital (1696-1768) : interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals de càlcul diferencial », Actes de la XV Jornada sobre la Història de la ciència i l'ensenyament « Antoni Quintana Marí », Dissabte 18 de novembre del 2017, Barcelona (à paraître).

Bénard, Dominique, « La courbe logarithme pour elle-même » dans IREM, *Histoires de Logarithmes*, Paris, Ellipses, p. 191-215.

Berlan, F., « Fontenelle et la langue des sciences ou les relais de la fonction symbolique » Thomasset, Claude, *L'écriture du texte scientifique au Moyen Age, des origines de la langue française au XVIII^{ème} siècle*, PUPS, Paris, 2006, p. 297-313.

Bessire, François, « La correspondance de Fontenelle : de la lettre au réseau » dans *Revue Fontenelle*, n°5-6, PURH, Rouen, 2010.

Blanco Abellán, Mónica, *Hermenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII: de l'Analyse des infiniment petits de l'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)*, memoria presentada per aspirar al grau de Doctor de Matemàtiques, director : Dr Josep Pla i Carrera, UAB, departament de Matemàtiques, juliol 2004.

Blanco Abellán, Mónica, « Could l'Hospital have read Newton's *Methodus Fluxionum* ? », 3rd International Conference of the European Society for the History of Science. "3rd International Conference of the European Society for the History of Science", Viena: 2008, p. 61-68.

Blanco Abellán, Mónica, « El Marqués de L'Hospital y la rectificación de la curva logarítmica », *Suma*⁸², julio 2016, p. 43-50.

Blanco Abellán, Mónica, « La correspondencia entre Leibniz y el Marqués de l'Hospital : sobre la envolvente de una familia de curvas », *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, volum XVI, Barcelona, enero 2018, p. 143-165.

Blanco Abellán, Mónica, Bella, Sandra, « Comentarís sobre *l'Analyse des infiniment petits* de L'Hospital (1696-1768) : interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals de càlcul diferencial », Actes de la XV Jornada sobre la Història de la ciència i l'ensenyament « Antoni Quintana Marí », Dissabte 18 de novembre del 2017, Barcelona (à paraître).

Blåsjö, Viktor, *Transcendental curves in the Leibnizian Calculus*, Series editor Umberto Botazzini, Academic Press, Elsevier, 2017.

Blay, Michel, Halleux, Robert,(dir), *La science classique, XVI^e-XVIII^e siècle, dictionnaire critique*, Flammarion, Paris, 1998.

Blay, Michel, « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley », *Revue d'histoire des sciences*, vol.39, N°3, Paris, 1986.

Blay, Michel, *La naissance de la mécanique analytique*, Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris, 1992.

- Borzeix, Annie, « Jeux d'échelles », *AEGIS Le Libello d'*, 2007, 3, (2), p. 25-28.
- Bos, Henk, J.M., « Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus », *Archive for History of exact Sciences*, 14, 1973, p. 2-90.
- Bos, Henk, J.M., « The influence of Huygens on the formation of Leibniz ideas », *Studia Leibnitiana suppl.*, 17, 1978, p. 59-68
- Bos, Henk, J.M., « Elaboration du calcul infinitésimal » dans *Huygens et la France*, *op. cit.*, p. 115-121
- Bos, Henk, J.M., « On the representation of Curves in Descartes's Géométrie », *Archive for History of exact Sciences*, 24, 1981, p.295-338.
- Bos, Henk, J.M., « Œuvre et personnalité de Huygens », dans *Huygens et la France*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1982, p. 1-15.
- Bos, Henk, J.M., *Lectures in the History of mathematics*, vol. 7, American Mathematical Society, London Mathematical Society, USA, 1991.
- Bos, Henk, J.M., « La structure de la Géométrie de Descartes » dans *Revue d'Histoire des Sciences*, tome 51, n°2-3, 1998, « Pour Descartes », p. 291-318.
- Bos, Henk, J.M., *Redefining Geometrical Exactness: Descartes'transformation of the early modern Concept of Construction*, Springer, New York, 2001.
- Boyer, C., B., *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, INC, New York, 1939.
- Bradley, Robert E, Petrilli, Salvatore J, Sandifer, C. Edward, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits*, an annotated translation with source material by Johann Bernoulli, *Science Networks Historical studies*, 50, Springer, 2015.
- Breger, Herbert, « Le continu chez Leibniz » dans Salanskis/Sinaceur (dir.), *Le labyrinthe du continu*, Paris, 1992, p. 77.
- Breger, Herbert,« The mysteries of adaequare : a vindication of Fermat », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 46, No. 3 (1994), p. 193-219, published by: Springer , p. 193-219.
- Breger, Herbert, « Fermat's analysis of extreme values and tangents“, *Studia Leibnitiana*, band 45, Heft I, 2013, p. 19-41.

Breger, Herbert, « On the grain of sand and heaven's infinity », in « Für unser Glück oder das Glück anderer: Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover, 18.-23. Juli 2016 », vol. 6, édité par Li, Wenchao, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 2017, p. 63-79.

Brian, Eric et Demeulenaere-Douyere, Christiane (dir), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : guide de recherches*, Paris : TEC & DOC-Lavoisier, 1996.

Burbage Frank, Chouchan Nathalie, *Leibniz et l'infini*, Presses universitaires de France, 1993.

Celeyrette, Jean, « From Aristotle to the Classical Age, the Debates Around Indivisibilism » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 19-30.

Chouchan Nathalie, Burbage Frank, *Leibniz et l'infini*, Presses universitaires de France, 1993

Clero, Jean-Pierre., Le Rest, Evelyne, *La naissance du calcul infinitésimal au XVII^{ème} siècle* dans Centre national de la recherche scientifique, Centre de documentation Sciences humaines, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* n°16, Paris, 1981.

Clero, Jean-Pierre, « Réflexions sur la Préface des *Elémens de la géométrie de l'infini*, contributions à un savoir des fictions », *Corpus, Revue de philosophie*, n°44, Paris, 2003

Clero, Jean-Pierre, *Les raisons de la fiction, les philosophes et les mathématiques*, Armand Colin, Paris, 2004.

Cortese, João, *L'infini en poids, nombre et mesure : La comparaison des incomparables dans l'œuvre de Blaise Pascal*, thèse de Doctorat en épistémologie et histoire des sciences, dirigée par David Rabouin et Luis César Guimarães Oliva, présentée et soutenue publiquement à l'Universidade de São Paulo le 30 octobre 2017.

Cortese, João et Rabouin, David, « Sur les indivisibles chez Pascal » dans Agnès Cousson (dir), *Passions géométriques. Mélanges en l'honneur de Dominique Descotes*, Honoré Champion, à paraître.

Costabel, Pierre, « L'oratoire de France et ses collèges » dans *Enseignement et diffusion des sciences en France*, ouvrage collectif dirigé par René Taton, Hermann, Paris, 1964.

Costabel, Pierre, « Pierre Varignon et la diffusion du calcul différentiel et intégral », *Les conférences du Palais de la découverte*, série D, Editions du Palais de la découverte, Paris, 1966.

Costabel, Pierre « De Scientia infiniti », in *Aspects de l'homme et de l'œuvre, 1646-1716*, ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique Aubier-Montaigne, Paris, 1968, p. 105-117.

Costabel, Pierre, *Démarches originales de Descartes savant*, Vrin, Paris, 1982.

Costabel, Pierre « Courbure et dynamique, Jean I Bernoulli correcteur de Huygens et de Newton dans *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 17, Stuttgart, 1989, p. 12-24.

Deleuze, Gilles, *Cours sur Leibniz du 15 avril 1980*, <https://fr.scribd.com/document/16190915/Deleuze-Leibniz> (consulté le 15 août).

De Gandt, François, « Le style mathématique des *Principia* de Newton » dans *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, Paris, 1986, p.195-222.

De Gandt, François, « Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli) in *Fragments d'histoire des mathématiques*, tome II, APMEP, 1987, p. 86-124.

De Gandt, François, « Les indivisibles de Torricelli » dans *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et nouvelle géométrie*, édité par François de Gandt, Nice, Les Belles Lettres, Publication de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines de Nice, I, 32 (1987), p. 147-206.

Demeulenaere-Douyere, Christiane et Brian, Eric, (dir), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : guide de recherches*, Paris : TEC & DOC-Lavoisier, 1996.

Descotes, Dominique, « Aspects littéraires de *La Géométrie* de Descartes », *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 55, n°154, Brepols, juin 2005, p. 163-191.

Descotes, Dominique , « An unknown mathematicam manuscript by Blaise Pascal », *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 503-534.

Descotes, Dominique *Blaise Pascal, Littérature et Géométrie*, Presses Universitaires Blaise Pascal, Maison de la Recherche, Clermont-Ferrand, 2001.

Descotes, Dominique, « Port-Royal et les indivisibles » dans *Le rayonnement de Port-Royal, mélanges en l'honneur de Philippe Sellier, textes réunis par Dominique Descotes, Antony McKenna et Laurent Thorouin*, Honoré Champion, Paris, 2001, p. 186-199.

Descotes, Dominique, « Two jesuits against the indivisibles » dans Jullien, Vincent (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015. p. 249-274.

Dubois, Claude-Gilbert, *Le Baroque, profondeurs de l'apparence*, Larousse Université, collection « thèmes et textes », Larousse, Paris, 1973.

Eneström, Gustaf, « Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de *l'Analyse des infiniment petits* », *Bibliotheca Mathematica*, N°3, Stockholm, 1894, p. 65-79.

Engelsman, Stevan B, *Families of Curves and the origins of Partial differentiation*, Amsterdam, North Holland, 1984.

Feingold, Mordechai (ed), *Before Newton, The life of Isaac Newton*, Cambridge University Presse, Cambridge, 1990.

Fleckenstein, Joachim Otto, « Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus », *Archives internationales d'histoire des sciences*, n°5, octobre 1941.

Fraser, Craig, « Non standard Analysis, infinitesimals, and the History of calculus » dans *A delicate Baance : global perspectives on innovation and Tradition in the History of Mathematics*, editors David Bove and Wann-Shang Horng, Springer, 2015, p. 25-49.

Freyne, Mickael, *La correspondance de Fontenelle jusqu'en 1740*, thèse d'état soutenue sous la direction de Frédéric Deloffre, Université Paris IV, 2 volumes, 1972.

Giorello, Giulio, « Galilée, Cavalieri et les indivisibles » dans « Journées Galilée-Galilée et la théorie du mouvement » tenues à Nice en mai 1979, cahier 9.

Giorello, Giulio, *Lo Spettro e il libertino, teología, matemática, libero pensiero*, Arnoldo Montadori Editore, Mailano 1985.

Girbal, François, *Bernard Lamy, étude biographique et bibliographique, textes inédits*, PUF, Paris, 1964.

Giusti, Enrico, *Bonaventura and the Theory of Indivisibles*, Edizioni Cremonese, 1980.

Giusti, Enrico, «Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz », *Studia Leibnitiana*, 14 (1), 1986.

Giusti, Enrico, « Les méthodes des *maxima* et *minima* de Fermat » dans *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, tome XVIII, n° S2 (2009), p. 59-85.

Giusti, Enrico, *La naissance des objets mathématiques*, traduction de Barthelemy Georges, Ellipses, Paris, 2000.

Goldenbaum, Ursula, Jesseph, D.,(ed), *Infinitesimal Differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, W de G, Berlin, 2008.

Goldstein, Catherine, « Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite », 2012.

Grattan-Guinness, Ian, « The mathematics of the past : distinguishing its history from our heritage » in *Historia Mathematica*, 31, 2004, pp. 163-185.

Hahn, Roger, *L'Anatomie d'une institution scientifique*, Editions des Archives contemporaines, Paris, 1993.

Halleux, Robert, Blay, Michel, (dir), *La science classique, XVI^e-XVIII^e siècle, dictionnaire critique*, Flammarion, Paris, 1998.

Halleux, Robert, Mc Clellan, James, Bebariu, Xhayet,(dir), *Les publications de l'Académie royale des sciences de Paris (1666-1793)*, t. I, Description bibliographique, t. II, Etude statistique, index généraux, Turnhout : Brepols, 2001, 2 vol.

Heinekamp, A., « Huygens vu par Leibniz », *Huygens et la France*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1982, p. 99-114.

Heinz-Jürgen, Hess, « Zur Vorgeschichte der « Nova Methodus » (1676-1684)“ dans « 300 Jahre Nova Methodus », *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, 14, 1984, p. 64-101.

Hill, Katherine, « Neither Ancient nor Modern: Wallis and Barrow on the composition of the continua: Mathematical Styles and the composition of continua » dans *Notes and Records of the Royal Society of London*, 50, 1996, p.165-178.

Katz, Michail G., Schaps, David, M., Shnider, Steven, « Almost equal : the method of adequality from Diophantus to Femand and beyond » in *Perspectives on Science*, 21 (3), published by The MITT Press, Fall 2013, p. 283-324.

Kline, Morris, *Mathematical thought from Ancient to modern times*, New York, Oxford University Press, 1972

Knobloch, Eberhard, « Galileo and Leibniz : Different approaches to Infinity », *Archives History of Science*, 54, 1999, p. 87-99.

Knobloch, Eberhard, « Leibniz and the infinite », *Quaderns d'Historia de l'Enginyeria*, volum XVI, 2018, p. 11-31.

Hofmann, Joseph E, *Leibniz in Paris 1672-1676*, traduction de l'allemand de *Die entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)*,

Oldenburg Verlag, Munich, 1949, traduction publiée en 1974, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

Itard, Jean, « Fermat, précurseur du calcul différentiel », *Archives internationales Histoire des Sciences*, 27, 1948, p. 598-610.

Jauss, Hans Robert, « L'histoire de la littérature : un défi à la théorie littéraire », *Pour une esthétique de la réception*, Paris, Gallimard, 1978.

Jesseph, Douglas, « Truth in Fiction : Origins and Consequences of Leibniz's Doctrine of Infinitesimal Magnitudes » dans Goldenbaum, Ursula, Jesseph Douglas (ed), *Infinitesimal Differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, W de G, Berlin, 2008, p. 215-234.

Jesseph, Douglas, « Leibniz on the Elimination of Infinitesimals » dans Goethe, N.B., Beeley, Philip, Rabouin David (ed), *G. W Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy*, Fordrecht-Heidelberg, Springer, p. 189-205.

Jesseph, Douglas « Leibniz on the foundations of the calculus : The question of the reality of Infinitesimal magnitudes », *Perspectives on Science*, vol. 6, nos. 1 & 2, p. 11-18.

Jullien, Vincent, *Descartes, la Géométrie de 1637*, PUF, Paris, 1996.

Jullien, Vincent *Philosophie naturelle et géométrie au XVII^{ème} siècle*, Collection Sciences, techniques et civilisations de Moyen Âge à l'aube des lumières, Honoré Champion, Paris, 2006.

Jullien, Vincent (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015.

Jullien Vincent, « Explaining the Sudden Rise of Methods of indivisibles » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, p. 1-18.

Jullien, Vincent, « Descartes and the use of Indivisibles » dans Jullien, Vincent (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 165-176.

Jullien, Vincent, « Roberval's Indivisibles » dans Jullien, Vincent (ed), *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 177-210.

Kapp, Volter, « Les qualités du scientifique et le prestige social des sciences dans les éloges académiques de Fontenelle », *Fontenelle, Actes du colloque tenu à Rouen du 6 mars au 10 octobre 1987*, publiés par Alain Niderst, PUF, Paris, 1989.

Koyré, Alexandre, « La pensée scientifique de Bonaventura Cavalieri », *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, ouvrage publié avec le CNRS, PUF, Paris, 1966.

Koyré, Alexandre, « Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continus » dans *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, PUF, Paris 1966.

Le Dividich, Aude, « L'enseignement des mathématiques en France au XVII^e siècle (1600-1670) », *La science à l'époque moderne*, Presses de l'Université Paris-Sorbonne, bulletin 21, Paris, 1996.

Lemercier, Claire, Picard, Emmanuelle, « Quelle approche prosopographique ? » dans Laurent Rollet, Philippe Nabonnand, (dir), *Les uns et les autres. Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Presses Universitaires de Nancy ; Éditions Universitaires de Lorraine, p. 605-630.

Le Paige, C., « Correspondance de R.F. Sluse », *Bulletino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e Fisiche*, pubblicato per Da B. Boncompagni, tome XVII, Roma, 1884.

Mahoney, M., « Barrow's Mathematics: between ancient and modern » dans Feingold, Mordechai (ed), *Before Newton, the life of time of Isaac Newton*, Cambridge university Press, 1990.

Mahoney, M, *The mathematical career of Pierre de Fermat: 1601-1665*, second edition, UP, cop. 1994.

Malet, Antoni, *Studies on James Gregory (1638-1675)*, A dissertation presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy, Princeton, octobre 1989.

Malet, Antoni, *From indivisibles to infinitesimals, Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of the Infinitely Small quantities*, Universitat autonoma de Barcelona, Serveil de publicacions, Bellaterra, 1996.

Malet, Antoni et Panza, Marco, « Wallis on indivisibles » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century Indivisibles Revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 307-346.

Mancosu, Paolo, « The metaphysics of the calculus: A Foundational debate in the Academy of Sciences, 1700-1706 », *Historia Mathematica*, 16, 1989, p. 224-248.

Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, New York, 1996.

- Maronne, Sébastien, *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637-1661*, thèse de doctorat dirigé par M. Panza, Paris Diderot, 2007.
- Martin, Jean-Louis, « Retouches au portrait de Fontenelle. Pièces inédites », *Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications*, 1957, tome 10, n°4, p. 310-333.
- Maurel-Indart, Hélène, *Du plagiat*, édition revue et augmentée, Gallimard, Paris, 2011.
- Mazauric, Simone, *Fontenelle et l'invention de l'histoire des sciences à l'aube des Lumières*, Fayard, Paris, 2007.
- McClellan, James E., *Science Reorganized, scientific societies in the eighteenth century*, Columbia University Press, New York, 1985.
- Mellot, Jean-Dominique, « Fontenelle censeur royal ou approbateur éclairé ? », *Revue Fontenelle*, n° 6-7, Publications des universités de Rouen et du Havre, Mont-Saint-Aignan, 2010, p. 50-72.
- Merker, Claude, *Le chant du cygne des indivisibles*, PUFC, 2001.
- Mesnard, Jean, *Pascal et les Roannez*, Desclée de Brouwer, 1965, tome II.
- Nagel, Fritz, « Nieuwentijt, Leibniz, and Jacob Hermann on infinitesimals » dans Goldenbaum Ursula and Douglas Jesseph Douglas (ed), *Infinitisemals differences, Controversies between Leibniz and his contemporaries*, edited by, (ed), Walter de Gruyter, Berlin, 2008, p. 199-214.
- Niderst, Alain, *Fontenelle. A la recherche de lui-même (1657-1702)*, Editions A.-G. Nizet, Paris, 1972. Dans *Fontenelle, Acte du colloque tenu à Rouen du 6 au 10 Octobre 1987*, PUF, Paris, 1989.
- Nietz, Reviel, *The Shaping of deduction in greek mathematics : A study in Cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- Panza, Marco, Malet, Antoni, « Wallis on indivisibles » dans Jullien, Vincent, (ed), *Seventeenth-century Indivisibles Revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 307-346.
- Paradís, Jaume, Pla Josep, Vialer, Pelegrí, « Fermat's method of quadrature », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14(2008), p. 5-51.
- Park, Katherine (ed), *Early modern science*, Lorraine Daston, Cambridge Press, 2006
- Parmentier, Marc, Leibniz, G-W, *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des *Acta Eruditorum*, introduction, traduction et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris.

Peiffer, Jeanne, « Leibniz, Newton et leurs disciplines », *Revue d'histoire des sciences*, 1989, tome 42, n°3, p. 303-312.

Peiffer, Jeanne, « Le problème de la brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec l'Hôpital et Varignon » in *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 17, Stuttgart, 1989, p. 59-98.

Peiffer, Jeanne, « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Leibniz'auseinandersetzung mit vorgängern und zeitgenossen*, *Studia Leibnitiana*, supplementa XXVIII, 1990, p. 244-266.

Peiffer, Jeanne, « Faire des mathématiques par les lettres », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(1998), p. 143-157.

Peiffer, Jeanne, « Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann », *Journal électronique d'Histoire des probabilités et de la statistique*, vol.2, n°1, juin 2006.

Peiffer, Jeanne, Vittu, Jean-Pierre, « Les Journaux savants, formes de communication et agents de la construction des savoirs (17^e-18^e siècles), *Dix-Huitième siècle*, 2008/1, n°40, p. 281-300.

Petrilli, Salvatore, Bradley, Robert E, Sandifer, C. Edward, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits*, an annotated translation with source material by Johann Bernoulli, *Science Networks Historical studies*, 50, Springer, 2015.

Philonenko, Alexandre, « Qui était Fontenelle ? », *Corpus, Revue de philosophie*, n°44, Université de Paris X Nanterre, 2003, p. 131-139.

Picard, Emmanuelle, Lemercier, Claire, Picard, « Quelle approche prosopographique ? » dans Laurent Rollet, Philippe Nabonnand, (dir), *Les uns et les autres. Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Presses Universitaires de Nancy ; Éditions Universitaires de Lorraine, p. 605-630.

Prost, Alain, *Douze leçons sur l'histoire*, Paris, Seuil, 1996.

Pycior, Helena Mary, « Mathematics and Philosophy: Wallis, Hobbes, Barrow and Berkeley », *Journal of the History of Ideas* 48, 1987, p. 265-286.

Pycior, Helena Mary *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra Through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Quignard, Pascal, *Sur le jadis*, Dernier Royaume II, Gallimard, Paris, 2002.

Quignard, Pascal, *Vie secrète*, dernier royaume, VIII, Gallimard, Paris, 1998.

Rabouin, David, « Infini mathématique et infini métaphysique : d'un bon usage de Leibniz pour lire Cues (... et d'autres) », *Revue Métaphysique et de morale*, N°2, 2011, p. 203-220.

Rabouin, David, « Leibniz's rigorous foundations of the Method of indivisibles or how to reason with impossible notions », *Seventeenth-century indivisibles revisited*, *op. cit.*, p. 347-364.

Rabouin, David, Cortese, João, « Sur les indivisibles chez Pascal » dans Agnès Cousson (dir), *Passions géométriques. Mélanges en l'honneur de Dominique Descotes*, Honoré Champion, à paraître.

Radelet-de-Grave, Patricia, « La mesure de la courbure et la pratique du calcul différentiel du second ordre » dans *Sciences et techniques en perspectives*, deuxième série, vol. 8, N°1, 2004, p. 159-177.

Robinet, Alain, *Malebranche et Leibniz, Relations personnelles*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1955.

Robinet, Alain, « L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 11, N°4, Paris, 1958, p. 289-301.

Robinet, André, « La vocation académicienne de Malebranche », *Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications*, 1959, tome 12, n°1, p. 1-18.

Robinet, Alain, « L'Abbé de Catelan, documentation et informations », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, tome 13, n°2, 1960, p. 135-137.

Robinet, Alain, « Jean Prestet ou la bonne foi cartésienne (1648-1691) », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°2, Paris, 1960, p. 95-104.

Robinet, Alain, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°4, Paris, 1960, p. 287-308.

Robinet, Alain, « La philosophie malebranchiste des mathématiques », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 14, n°3, Paris, 1961, p. 205-254.

Robinet, Alain, *Architectonique disjonctive automates systémiques et idéalité transcendantale dans l'œuvre de G.W. Leibniz*, Vrin, Paris, 1986.

Rosenfeld, L., « René-François de Sluse et le problème des Tangentes », *Isis*, vol. 10, n°2, juin 1928, p. 416-434.

Rousset, Jean, *La littérature et l'âge baroque en France, Circé et le Paon*, Librairie José Corti, 1954.

Sandifer, C. Edward, Bradley, Robert E, Petrilli, Salvatore J, *L'Hôpital's Analyse des infiniment petits*, an annotated translation with source material by Johann Bernoulli, *Science Networks Historical studies*, 50, Springer, 2015.

Schmit, Christophe, « Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17^e et 18^e siècles », *Early Science and medicine*, Brill, Leiden, 2014, p. 505-548.

Schubring, Gert, *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer, 2015.

Schwartz, Claire, *Malebranche et les mathématiques*, thèse de doctorat en Philosophie, sous la direction de Denis Kambouchner et de Richard Glauser, soutenue à Paris, Université Paris I, en co-tutelle avec Neuchâtel, 2007.

Schwartz, Claire, « Leibniz et le "groupe malebranchiste" : La réception du calcul infinitésimal », *Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses*, Hildesheim/Zurich/New York, Olms, Tome I, p. 223-236.

Schwartz, Claire, *Malebranche, Mathématiques et Philosophie*, Presses universitaires Paris-Sorbonne, à paraître en septembre 2018.

Scriba, Cristoph, J., « The inverse Method of Tangents : A dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677) », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 2, No. 2 (13.1.1964), p. 113-137.

Seguin, Maria-Susana, « L'image du savant dans les *Éloges* des Académiciens de Fontenelle, *Les écrivains face au savoir*, Veronique Dufief-Sanchez, directrice, Éditions universitaires de Dijon, 2002, p. 29-39.

Seguin, Maria Susana, « La référence aux Anciens dans les *Eloges des Académiciens* de Fontenelle : un contre-exemple pour les modernes » dans *Poétique de la pensée. Mélanges en honneur de Jean Dagen*, textes réunis par B. Guion, S. Menant, M.S. Seguin et P. Sellier, Honoré Champion, Paris, 2006, p. 851-861.

Seguin, Maria Susana, « Fontenelle et l'Histoire de l'Académie royale des sciences », *Dix-huitième siècle*, 2012/1 (n°44), p. 365-379.

Sergescu, Petre, « Un épisode de la « bataille » pour le triomphe du calcul différentiel : la polémique Rolle-Sarin 1702-1705 », *L'Ouvert* 78, 1995.

Shank, J-B, *The Newton Wars and the beginning of the French Enlightenment*, University Chicago Press, Chicago and London, 2008.

Shank, J. B., *Before Voltaire, The origin of "Newtonian" Mechanics, 1680-1715*, The University of Chicago Press, Chiacago & London, juin 2018.

Sherry, D. and Katz, M., « Leibniz's infinitesimals: their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond », *Erkenntnis* 78, 2013, n°3, p. 571-625.

Spieß, Otto, « Une édition de l'œuvre des mathématiciens Bernoulli », *Archives internationales d'histoire des sciences*, HS, Paris, 1947, p. 356-362.

Stedall, Jacqueline, « John Wallis and the French: his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes », *Historia Mathematica*, 3, 2012, p. 265-279.

Stromholm, P., « Fermat's method of maxima and minima and tangents », *Archives of History of exact sciences*, 5 (1968), p. 47-69.

Sturdy, David J., *Science and social status, the members of the Académie des Sciences, 1666-1750*, The Boydell Press, 1995.

Taton, René « Huygens et l'Académie royale des sciences », *Huygens et la France*, : table ronde du centre national de la recherche scientifique : Paris, 27-29 mars 1979, Vrin, Paris, 1982, p. 57-68.

Todorov, Tzvetan, *Mikhaïl Bakhtine Le principe dialogique*, suivi de Écrits du cercle de Bakhtine, Seuil, Paris, 1981.

Veyne, Paul, *Comment on écrit l'histoire*, suivi de *Foucault révolutionne l'histoire*, Seuil, Paris, 1978.

Vittu, Jean-Pierre, « Jean Gallois », *Dossier Jean Gallois*, Archives de l'Académie des sciences.

Vittu, Jean-Pierre, « Périodiques » dans Blay, Michel, Halleux, Robert,(dir) *La science classique, XVI^e-XVIII^e siècle, dictionnaire critique*, Flammarion, Paris, 1998, p. 140-147.

Vittu, Jean-Pierre, « Les Journaux savants, formes de communication et agents de la construction des savoirs (17^e-18ⁱ siècles), *La Découverte, Dix-Huitième siècle*, 2008/1, n°40, p. 281-300.

Vuillemin, J., *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, PUF, 2^{ème} édition, 1987.

Washington, Christopher, « Michel Rolle and his method of cascades », https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf (consulté le 17 août 2018).

Whiteside, Derek Thomas, « Patterns of Mathematical thought in the later Seventeenth Century », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 1, No. 3 (27.7.1961), p. 179-388

Liste des illustrations

Les références entières peuvent être retrouvées dans la Bibliographie.

Chapitre 1

fig 1 : Descartes, *La Géométrie*, 1637, p. 342.

fig 2 : Fermat, Pierre, *VO*, 1679, p. 68.

fig 3 : Fermat, Pierre, « Méthode des *maximis* et *minimis* expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes, *OF*, t. III, p. 155.

fig 4 : Fermat, Pierre, « Méthode des *maximis* et *minimis* expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes, *OF*, t. III, p. 155.

fig. 5 : Fermat, Pierre, « Méthode des *maximis* et *minimis* expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes, *OF*, t. III, p. 156.

fig. 6 : Fermat, Pierre, « Méthode des *maximis* et *minimis* expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes, *OF*, t. III, p. 158.

fig. 7 : Fermat, Pierre, « Ad eandem methodus », *VO*, p. 71.

fig. 8 : Fermat, Pierre, « De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrico », *OF*, t. I, p. 228.

fig. 9 : Lettre de Pierre Fermat à Mersenne du 22 octobre 1638, *OF*, t. II, p. 172.

fig. 10 : Lettre de Pierre Fermat à Mersenne du 22 octobre 1638, *OF*, t. II, p. 173.

fig. 11 : d'après la lettre de Descartes à Hardy, Descartes, René, *Œuvres*, t. II, p. 169-173.

fig. 12 : De Beaune, Florimond, *Notae breves*, dans *Geometria*, 1659, p. 131.

fig. 13 : Beaugrand, Jean, *OF*, t. V, p. 111.

fig. 14 : Hérigone, Pierre, Hérigone, Pierre, *Supplementum cursus mathematici*, 1642, p. 60.

fig. 15 : Van Schooten, Frans, « Commentarii in Librum II » dans Descartes, René, *Geometria*, 1659, p. 252.

fig. 16 : Huygens, Christiaan, « Démonstration de la règle de Maxima et Minima », *OH*, t. XX, p. 229.

fig. 17 : Huygens, Christiaan, *OH*, t. XX, p. 244.

fig. 18 : Huygens, Christiaan, *OH*, t. XX, p. 246.

fig. 19 : Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae*, 1670, figure 121.

fig. 20 : Leibniz, G. W., « Nova methodus ... », *AE*, octobre 1684, table XII, p. 467.

Chapitre 2

fig. 21 : D'après la proposition 2 du livre XII de Euclide, *Les Elements*, vol. 4, p. 265.

fig. 22 : Cavalieri, Bonaventura, *Geometria Indivisibilibus Continuatorum Nova quadam ratione promota*, 1635, p. 8.

fig. 23 : Cavalieri, Bonaventura, *Exercitationes Geometricae sex*, 1647, p. 15.

fig. 24 : Cavalieri, Bonaventura, *Geometria Indivisibilibus Continuatorum Nova quadam ratione promota*, p. 115.

fig. 25 : Cavalieri, Bonaventura, *Exercitationes Geometricae sex*, p. 4.

fig. 26 : Torricelli, Evangelista, *De dimensione Parabolae* dans *Opera Geometrica*, 1644, p. 45.

fig. 27 : Torricelli, Evangelista, *Quadratura Parabolae per novam indivisibilium Geometriam pluribus modis absoluta* dans *Opera Geometrica*, 1644, p. 57.

fig. 28 : *Exemplum I* dans *De indivisibilium doctrina perperam*, Torricelli, Evangelista, *Opera*, 1919-1944, part. 2, p. 417.

fig. 29 : Cavalieri, Bonaventura, *Geometria Indivisibilibus Continuatorum Nova quadam ratione promota*, 1635, p. 146.

fig. 30 : Lettre de Cavalieri à Torricelli du 5 avril 1644 cité dans De Gandt, François, « Les indivisibles de Torricelli » dans *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et nouvelle géométrie*.

fig. 31 : Roberval (de), Gilles, *Traité des indivisibles*, 1693, p. (première figure à gauche).

fig. 32 : Roberval (de), Gilles, *Traité des indivisibles*, 1693, p. 195.

fig. 33 : Roberval (de), Gilles, *Traité des indivisibles*, 1693, p. 199.

fig. 34 : Pascal, Blaise, *Traité des Sinus d'un quart de Cercle* dans *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, 1658, planche I, figure 2.

fig. 35 : Pascal, Blaise, *Traité des Sinus d'un quart de Cercle* dans *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, 1658, planche I, figure 10.

fig. 36 : Pascal, Blaise, *Traité des Sinus d'un quart de Cercle* dans *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, 1658, planche I, figure 26.

fig. 37 : Pascal, Blaise, *Traité des Sinus d'un quart de Cercle* dans *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, 1658, planche I, figure 32.

fig. 38 : Arnauld, Antoine, *Nouveaux élémens de géométrie*, 1667, p. 307.

fig. 39 : Wallis, John, *Arithmetica infinitorum*, 1655, p. 2.

fig. 40 : Wallis, John, *Arithmetica infinitorum*, 1655, p. 48.

fig. 41 : Barrow Isaac, *Lectiones geometricae*, 1670, fig. 127.

fig. 42 : Barrow Isaac, *Lectiones geometricae*, 1670, fig. 176.

Chapitre 3

fig. 43 : Tableau du groupe autour de Malebranche (1691-1692)

fig. 44 : FR 24236, fol. 1.

fig. 45 : Catelan (de), François, *Principe de la science générale des lignes courbes ou un des principaux Éléments de la Géométrie universelle*, 1691, fig. 1.

fig. 46 : Catelan (de), François, *Principe de la science générale des lignes courbes ou un des principaux Éléments de la Géométrie universelle*, 1691, fig. 1.

fig. 47 : L'Hospital (de), Guillaume, reconstitution à partir du texte « Méthode très facile et très générale pour tracer des tangentes de toutes sortes de lignes courbes », manuscrit FR 25306, fol. 5-6.

fig. 48 : L'Hospital (de), Guillaume, reconstitution à partir du texte « Méthode très facile et très générale pour tracer des tangentes de toutes sortes de lignes courbes », manuscrit FR 25306, fol. 5-6.

fig. 49 : Barrow Isaac, *Lectiones geometricae*, 1670, fig. 104.

fig. 50 : L'Hospital (de), Guillaume, reconstitution à partir du texte « Méthode très facile et très générale pour tracer des tangentes de toutes sortes de lignes courbes », exemple 11^{ème}, manuscrit FR 25306, fol. 32-36.

fig. 51 : « Seconde table pour la composition des puissances » dans Prestet, Jean, *Nouveaux Elémens de mathématiques*, premier volume, 1689.

fig. 52 : Lettre de de Leibniz à Galloys, fin 1675, AIII 1, p. 360.

fig. 53 : Lettre de de Leibniz à Galloys, fin 1675, AIII 1, p. 361.

fig. 54 : De l'Hospital, Guillaume, reconstitution à partir du texte « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », FR 25306, fol. 4-6.

fig. 55 : De l'Hospital, Guillaume, reconstitution à partir du texte « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », FR 25306, fol. 15.

fig. 56 : Wallis, John, *Arithmetica infinitorum*, 1655.

fig. 57 : De l'Hospital, Guillaume, reconstitution à partir du texte « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur », FR 25306, fol. 11.

fig. 58 : Reyneau, Charles-René, « Proposition déduite de la méthode des tangents par laquelle on démontre l'arithmétique des infinis ou des indivisibles ... », FR 25302, fol. 25R.

Chapitre 4

fig. 59 : Malebranche, Nicolas, « Du calcul integral », FR 24237, fol. 68V (à gauche) et 69R (à droite).

fig. 60 : Tableau comparatif des tracés dans « Spatiorum quadratorum ».

fig. 61 : Bernoulli, Jean, *Opera omnia tam autem sparsim edita quam hactenus inedita*, tomus tertius, accedunt *Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate*, 1742, table LII, fig. 10, p. 390.

fig. 62 : Malebranche, Nicolas, FR 24237, fol. 70R, reproduit dans *Mathematica*, p. 207.

fig. 63 : Malebranche, Nicolas, FR 24237, fol. 96R, reproduit dans *Mathematica*, p. 75.

fig. 65 : Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 204.

fig. 66 : Huygens, Christiaan, *OH*, t. X, p. 625.

fig. 67 : À partir de la lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 22 avril 1694, *Der Briefwechsel von Johan Bernoulli*, Band 1, p. 222.

fig. 68 : Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 21 mai 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 215.

fig. 69 : Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 21 mai 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 218.

fig. 70 : Lettre de l'Hospital à Jean Bernoulli du 7 juin 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 223.

fig. 71 : Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 31 décembre 1694, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 252.

fig. 72 : Bernoulli, Jacques, « Curvatura laminae elasticae ... », *AE*, juin 1694, fig. I, tab. VI, p. 264.

fig. 73 : Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 12 janvier 1695, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 256.

fig. 74 : Varignon, Pierre, « Quadrature universelle des paraboles de tous les genres imaginables appliquant la logistique infiniment générale qui vient de paraître sur la méthode de Jacobus Gregorius », samedi 29 mars 1692, *PVARS*, t. 13, fol. 87R.

fig. 75 : Barrow, Isaac, *Lectiones Geometricae*, fig. 125.

fig. 76 : Varignon, Pierre, « Démonstration de l'opinion de Galilée touchant les espaces que parcourent les corps qui tombent », samedi 19 janvier 1692, *PVARS*, t. 13, fol. 76V.

fig. 77 : Barrow, Isaac, *Lectiones Geometricae*, fig. 1.

fig. 78 : Varignon, Pierre, « Démonstration générale de l'arithmétique des infinis ou de la géométrie des indivisibles », Pochette de séance du 2 janvier 1694, fol. 4.

fig. 79 : Varignon, Pierre, « Démonstration générale de l'arithmétique des infinis ou de la géométrie des indivisibles », Pochette de séance du 2 janvier 1694, fol. 2.

fig. 80 : Varignon, Pierre, « Du déroulement des spirales de tous les genres, ou l'on fait voir qu'elles se déroulent toutes en paraboles de degré seulement plus haut que le leur, avec une méthode générale pour tous les déroulements », *PVARS*, 12 novembre 1695, t. 14, fol. 193R.

Chapitre 5

fig. 81 : D'après la figure I de *AI*.

fig. 82 : Lettre de l'Hospital à Leibniz le 24 février 1693, AIII 5B, p. 496.

fig. 83 : *AI*, figure 48.

fig. 84 : Différences secondes figurées selon que chacune des variables est constante

fig. 85 : L'Hospital (de), Guillaume, *Traité analytique des sections coniques ...*, 1720, fig. 104.

fig. 86 : Agrandissement d'un détail de la figure 85.

fig. 87 : Illustration du lemme IV de la section IV de L'Hospital (de), Guillaume, *Traité analytique des sections coniques ...*, 1720.

fig. 88 : *AI*, figs. 52 et 53.

fig. 89 : Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae*, fig. 86.

fig. 90 : Bernoulli Jean, *LCD*, fig. 8.

fig. 91 : *AI*, fig. 11.

fig. 92 : *AI*, fig. 12.

fig. 93 : Comparaison du traitement de la recherche de la tangente à la conchoïde entre dans *LCD* et *AI*.

fig. 94 : Tableau des énoncés des problèmes de recherche des tangentes dans la section II de l'*AI*.

fig. 95 : *AI*, figs 144, 145 et 146.

fig. 96 : *AI*, figs 147, 148, 151 et 153.

fig. 97 : Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes », FR 12262, fol. 4V.

fig. 98 : Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel ... », FR 12262, fol. 8V.

fig. 99 : Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel ... », FR 12262, fol. 16R.

fig. 100 : Varignon, Pierre, « Instructions du calcul différentiel ... », FR 12262, fol. 22R.

Chapitre 6

fig. 101 : Huygens, Christiaan, *OH*, t. X, p. 374.

fig. 102 : Lettre de l'Hospital à Huygens du 2 juillet 1693, *OH*, t. X, p. 453 (à droite).

fig. 103 : Lettre de l'Hospital à Huygens du 2 juillet 1693, *OH*, t. X, p. 453 (à gauche).

fig. 104 : Lettre de l'Hospital à Huygens du 25 novembre 1693, *OH*, t. X, p. 566.

fig. 105 : Lettre de Wallis à Leibniz du 22 juillet 1698, AIII 7B, p. 838.

fig. 106 : « Démonstration par lignes des Règles du Calcul des Differentielles pour la multiplication et la division », septembre 1696, *PVARS*, t. 15, fol. 103V.

fig. 107 : « Démonstration par lignes des Règles du Calcul des Differentielles pour la multiplication et la division », septembre 1696, *PVARS*, t. 15, fol. 103V.

fig. 108 : « Démonstration par lignes des Règles du Calcul des Differentielles pour la multiplication et la division », septembre 1696, *PVARS*, t. 15, fol. 104R.

- fig. 109 :** La Hire (de), Philippe « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits », 23 février 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 26R.
- fig. 110 :** Varignon, Pierre, « Nouvelle démonstration des mouvemens isochrones dans la cycloïde renversée », 1^{er} juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 152R.
- fig. 111 :** Varignon, Pierre, « Seconde et Troisième démonstration des mouvemens isochrones dans la cycloïde renversée », 8 juin 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 162R.
- fig. 112 :** Bernoulli, Jean, « Supplementum defectus geometricae cartesianae inventionem locurum (...) Problema novum mathematicis propositum », *AE*, juin 1696, tab. V, fig. 5.
- fig. 113 :** Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 30 juin 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 321.
- fig. 114 :** Lettre de Jean Bernoulli à l'Hospital du 30 novembre 1696, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, p. 325.
- fig. 115 :** Séance académique du 20 avril 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 96R.
- fig. 116 :** AI, fig. 41.
- fig. 117 :** « M^r le Marquis de l'Hôpital a donné la démonstration de la solution qu'il a trouvée du problème de M^r Bernoulli, de linea celerrimi descensus », 20 avril 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 96R.
- fig. 118 :** Reconstitution à partir du texte de s: « M^r le Marquis de l'Hôpital a donné la démonstration de la solution qu'il a trouvée du problème de M^r Bernoulli, de linea celerrimi descensus », 20 avril 1697, *PVARS*, t. 16, fol.
- fig. 119 :** « M^r le Marquis de l'Hôpital a donné la démonstration de la solution qu'il a trouvée du problème de M^r Bernoulli, de linea celerrimi descensus », 20 avril 1697, *PVARS*, t. 16, fol. 96R.
- fig. 120 :** Lettre de Varignon à Jean Bernoulli du 15 mai 1697, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 2, p. 112.
- fig. 121 :** Leibniz, G.W., « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendentes », *Journal des Sçavants*, 30 août 1694, p. 405.
- fig. 122 :** Varignon, Pierre, « Règle générale pour toutes sortes de mouvement de vitesses quelconques variées à discrétion », 5 juillet 1698, *PVARS*, fol. 298.
- fig. 123 :** Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des vitesses variées, comme on voudra ... la cycloïde renversée », 6 septembre 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 388R.

fig. 124 : Varignon, Pierre, « Application de la règle générale des vitesses variées, comme on voudra ... la cycloïde renversée », 6 septembre 1698, *PVARS*, t. 17, fol. 388R.

fig. 125 : Tableau des académiciens en 1699, acteurs du Débat académique.

Chapitre 7

fig. 126 : Varignon, Pierre, « Mr Varignon a fini sa réponse aux difficultés de Mr Rolle contre le calcul différentiel », 11 août 1700, *PVARS*, fig. 1.

fig. 127 : Varignon, Pierre, « Mr Varignon a fini sa réponse aux difficultés de Mr Rolle contre le calcul différentiel », 11 août 1700, *PVARS*, fol. 313V.

fig. 128 : Rolle, Michel, « Du nouveau système de l'infini », *MARS*, 1703, p. 321.

fig. 129 : *AI*, figs. 144, 145 et 146.

fig. 130 : Rolle, Michel, « Troisièmes remarques sur les Principes des infiniment petits »; 16 mars, 1701, *PVARS*, t. 20, fol. 95R.

fig. 131 : Varignon, Pierre, « Réponse au second des reproches d'erreur que Mr Rolle fait au Calcul différentiel », 9 juillet 1701, *PVARS*, fol. 237R.

fig. 132 : Lettre de Leibniz pour Jean Bernoulli et Varignon, *AIII* 8, p. 621.

fig. 133 : Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 7 mai 1701, *AIII* 8, p. 634.

fig. 134 : Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz du 7 mai 1701, *AIII* 8, p. 635.

fig. 135 : Rolle, Michel, « Troisièmes remarques sur les Principes des infiniment petits »; 16 mars, 1701, *PVARS*, t. 20, fol. 99R.

figs. 136 et 137 :

figure de la quartique d'équation $y^4 - 8y^3 + 16y^2 + 48xy + 4xx - 12xyy - 64x = 0$.

fig. 138 : Rolle, Michel, « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes », *JS*, avril 1702, p. 240.

fig. 139 : Rolle, Michel, « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes », *JS*, avril 1702, p. 240.

fig. 140 : Saurin, Joseph, « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de Règles et Remarques pour le problème général des tangentes », *JS*, 3 août 1702, p. 527.

fig. 141 : Carré, Louis, « Méthode pour la rectification de lignes courbes par les tangentes », *MARS*, 1701, fig. 1, p. 270.

fig. 142 : Van Heuraet, Hendrik, « Henrici van Heuraet epistola de Transmutatione curvarum linearum in rectas », dans Descartes, René, *Geometria*, 1659, p. 517 (à gauche) et Carré, Louis, « Méthode pour la rectification des courbes », *MARS*, 1704, p. 67 (à droite).

fig. 143 : L'Hospital (de), Guillaume, « Solution d'un problème physico-mathématique », *MARS*, 1700, fig. 1, p. 21.

fig. 144 : Varignon, Pierre « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discrétion. », *MARS*, 1700, p. 22.

fig. 145 : Lettre de Varignon à Leibniz du 6 décembre 1704, AIII 9, p. 385.

fig. 146 : Lettre de Varignon à Leibniz du 6 décembre 1704, AIII 9, p. 390.

fig. 147 : Varignon, Pierre « Comparaison des forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra », *MARS*, 1706, fig. 1, p. 234.

fig. 148 : Varignon, Pierre « Comparaison des forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra », *MARS*, 1706, fig. 5, p. 234.

fig. 149 : Agrandissement d'un détail de la fig. 148.

fig. 150 : Guisnée, Nicolas, « Observations sur les méthodes des Maximis et Minimis, où l'on fait voir l'identité et la différence de celle de l'Analyse des infiniment petits avec celles de Messieurs Fermat et Hudde », *MARS*, 1706, fig. 7, p. 48.

fig. 151 : Guisnée, Nicolas, « Observations sur les méthodes des Maximis et Minimis, où l'on fait voir l'identité et la différence de celle de l'Analyse des infiniment petits avec celles de Messieurs Fermat et Hudde », *MARS*, 1706, fig. 6, p. 48.

Titre : ...De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)

Mots clés :

Histoire des Mathématiques - Infiniment petit - Calcul différentiel - Académie des sciences - Guillaume de l'Hospital - Pierre Varignon - Jean Bernoulli - Gottfried Wilhelm Leibniz

Résumé :

Cette thèse essaie de reconstituer l'histoire de la réception du calcul leibnizien dans les milieux savants français (1690-1706). Nous repérons deux lieux : d'abord au sein d'un groupe autour de Malebranche, initié au calcul par Jean Bernoulli, puis à l'Académie des sciences. Dans les deux cas nous mettons en avant les horizons d'attente des acteurs. Alors que cet épisode a été beaucoup étudié en termes de rupture, nous insistons, par une analyse des sources primaires – dont plusieurs inédites – sur le fait que l'appropriation du calcul s'effectue aussi grandement sur le fond de pratiques en usage. Dans la première partie, nous examinons l'héritage mathématique à partir duquel est reçu le calcul de Leibniz par le groupe autour de Malebranche. Cette analyse nous permet de montrer que leur appropriation s'appuie sur des pratiques partagées et non sur un terrain vierge comme on l'a trop souvent supposé. Nos mathématiciens réalisent que l'algorithme différentiel permet de donner une étoffe nouvelle à des notions déjà impliquées dans les méthodes d'invention précédentes. Dans la seconde partie, nous étudions la genèse et la structuration du premier ouvrage de calcul différentiel écrit par l'Hospital et publié en 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes*. Après cette publication, le calcul devient très présent à l'Académie. Une crise y éclate entre partisans et adversaires du calcul. L'examen de leurs discours, objet de notre troisième partie, permet de préciser les notions telles que celle de différentielle ou de courbe, ainsi que la manière dont il est possible d'interpréter géométriquement les résultats issus des calculs.

Title : Of the geometry and calculus of the infinitely small : the receptions of the Leibnizian algorithm in France (1690-1706)

Keywords : History of Mathematics - Infinitely small - Differential calculus - Académie des sciences - Guillaume de l'Hospital - Pierre Varignon - Jean Bernoulli - Gottfried Wilhelm Leibniz

Abstract :

This thesis is an attempt to reconstruct the reception history of Leibnizian calculus in French learned milieu (1690-1706). Two areas have been located: first among members of Malebranche's circle, introduced to calculus by Jean Bernoulli, then the Académie des Sciences. In either case, the purpose is to highlight the horizon of expectation of the participants. Whereas this episode has been widely studied in terms of disruption, it is argued, through an analysis of primary sources – some of which un-edited – that calculus was greatly appropriated against a background of practices in use. The first chapter examines the mathematical heritage from which calculus was received by Malebranche's circle. This analysis enables me to show that their appropriation rested on shared practices, and was not a virgin land, as has often been supposed. Our mathematicians realized that the differential algorithm fleshed out notions already involved in previous invention methods. The second chapter studies the genesis and construction of the first book of differential calculus written by L'Hospital and published in 1696, entitled *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes* [Analysis of the infinitely small for the intelligence of curbs]. After this publication, calculus became very present at the Académie. A crisis arose between supporters and detractors of calculus. A close examination of their discourses – the object of my third chapter – helps clarify such notions as those of differential and curb, as well as the way it is possible to geometrically interpret the results from calculus.