



**HAL**  
open science

# Élasticité et tremblements du tricot

Samuel Poincloux

► **To cite this version:**

Samuel Poincloux. Élasticité et tremblements du tricot. Physique [physics]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS319 . tel-01939566v2

**HAL Id: tel-01939566**

**<https://hal.science/tel-01939566v2>**

Submitted on 12 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

**Spécialité : Physique**

**École doctorale n°564: Physique en Île-de-France**

réalisée

au **Laboratoire de Physique Statistique**

sous la direction de **Frédéric LECHENAULT & Mokhtar ADDA-BEDIA**

présentée par

**Samuel POINCLOUX**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Élasticité et tremblements du tricot**

soutenue le **15 octobre 2018**

devant le jury composé de :

M <sup>me</sup> Axelle AMON	Rapporteur
M <sup>me</sup> Florence BERTAILS-DESCOUBES	Rapporteur
M. Jean-Louis BARRAT	Examinateur
M <sup>me</sup> Marie-Ange BUENO	Examinatrice
M. Sébastien NEUKIRCH	Examinateur
M. Frédéric LECHENAULT	Directeur de thèse
M. Mokhtar ADDA-BEDIA	Co-directeur de thèse





# Résumé

Les propriétés mécaniques d'un tricot diffèrent drastiquement de celles du fil dont il est constitué. Par exemple, une étoffe tricotée d'un fil inextensible présente une étonnante propension à la déformabilité. À l'instar des systèmes mécaniques où la géométrie joue un rôle prépondérant, tels les origamis, la réponse mécanique d'un tricot va être déterminée par le chemin imposé au fil. Lors du tricotage, le fil est contraint de se courber et de former des points de croisement suivant un motif répétitif, figeant de cette manière sa topologie. Les trois ingrédients sur lesquels repose la réponse mécanique d'un tricot sont l'élasticité du fil, sa topologie et le frottement aux contacts. Une sélection des nombreux phénomènes qui émergent du couplage entre ces ingrédients fait l'objet de cette thèse. Premièrement, l'intérêt a été porté sur l'élasticité du tricot. En se basant sur une expérience de traction d'un tricot-modèle, une théorie, qui vise à décrire cette réponse mécanique, a été construite en tenant compte de la conservation de la topologie, l'énergie de flexion et l'inextensibilité du fil. Dans un second temps, l'accent est mis sur les fluctuations de la réponse mécanique. Ces fluctuations ont pour origine la friction du fil qui empêche sa répartition dans la maille jusqu'à ce qu'un contact glisse brusquement, déclenchant alors une succession de glissements. La mesure de la réponse en force et du champ de déformations montrent que ces événements suivent une dynamique d'avalanches. Enfin, l'action de la topologie et de la métrique du tricot sur sa forme tridimensionnelle, ainsi que la transition de configuration spontanée de la structure d'un tricot, ont été examinés.

**Mots-clés : tricot, élasticité, avalanche, forme, topologie, physique statistique**



# Abstract

Knits mechanical properties are fundamentally different from those of its constitutive yarn. For instance, a fabric knitted with an inextensible yarn demonstrates a surprising inclination for deformability. Like mechanical systems where geometry plays a preponderant role, such as origami, the mechanical response of knitted fabrics is governed by the pattern imposed on the yarn. In the process of knitting, the yarn is constrained to bend and to cross itself following a periodic pattern, anchoring its topology. The three factors which determine the mechanical response of a knit are the elasticity of the yarn, its topology, and friction between crossing strands. This thesis explores several phenomena that arise from the interplay of these factors. First, we focused on the elasticity of a knit. Working from experimental data, we developed a theory to decipher the mechanical response of model knits under traction, taking into account the unaltered topology, bending energy, and inextensibility of the yarn. Next, we explored fluctuations in the mechanical response of a knit. Those fluctuations originate from yarn-yarn friction, preventing free yarn redistribution in the stitch until a contact slides and triggers propagative slips. Measures of the force response and deformation fields reveal that those events follow an avalanching dynamic, including a power law distribution of their size. Finally, the impact of topology and metric on knit three-dimensional shapes, along with spontaneous configuration transitions in a knit structure, are studied.

**Keywords :** Knit, elasticity, avalanche, shape, topology, statistical physics



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit n'aurait jamais été possible sans les nombreux conseils, enseignements et soutiens que j'ai reçus tout au long de cette thèse. Je profite donc de cette section pour remercier toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes premiers et plus profonds remerciements reviennent à mes directeurs de thèse Frédéric Lechenault et Mokhtar Adda-Bedia. Pendant ces trois ans et demi, vous avez su trouver le parfait équilibre entre, d'une part, me laisser le champ libre pour m'approprier le sujet et développer mes idées et, d'autre part, me conseiller et me guider activement lorsque c'était nécessaire. Pour m'avoir apporté un encadrement idéal pour mener à bien cette thèse, je vous remercie chaleureusement. Je vous remercie aussi pour tous les moments, à La Montagne notamment, où les discussions professionnelles se transforment en discussions plus profondes sur les sciences et le monde de la recherche en général, mais aussi, plus tard dans la soirée, sur les différents processus de fabrication de bières ou les plantes médicinales. Votre duo avait aussi l'immense avantage d'être parfaitement complémentaire. Mokhtar, merci pour ta rigueur et pour m'avoir appris à persévérer pour construire une théorie, d'abord mathématiquement correcte, puis où plus aucun détail n'est laissé au hasard. Même si ce souci du détail peut paraître frustrant aux premier abord, en retardant de deux ans la soumission d'un article par exemple, le résultat final vaut largement le coup et je pense en avoir tiré un enseignement inestimable. Fred, merci pour avoir été là au jour le jour, m'aidant tant sur les détails des expériences ou des codes, que sur les conseils et idées résultant de nos discussions quasi quotidiennes. Merci aussi d'avoir partagé ton enthousiasme et ton inventivité foisonnante, ainsi que pour la confiance et les encouragements à mon égard.

Mes remerciements vont ensuite à mon jury de thèse, Jean-Louis Barrat, Eran Bouchbinder, Marie-Ange Bueno, Sébastien Neukirch qui ont accepté d'évaluer mon travail, et en particulier à Axelle Amon et Florence Bertail-Descoubes pour avoir accepté le rôle de rapporteur. Je remercie aussi mes parrains de thèse Alessandro Siria et Benoît Roman pour leur soutien tout au long de la thèse.

Cette thèse s'étant effectuée dans son immense majorité dans la salle L273, tous ses occupants au fil des ans y ont donc aussi participé d'une manière ou d'une autre. Commençons d'abord par remercier mes co-bureaux thésards avec qui j'ai eu la chance de partager de formidables moments et qui m'ont soutenu tout au long de ma thèse. Merci Romain Lhermerout pour ton calme et ta pugnacité malgré des mesures nanométriques et de multiples déménagements, merci Nariaki Sakai pour ta bonne-humeur, tes chips et notre voyage à New-York, merci Austin Reid pour avoir amené une partie d'Amérique (la bonne) au labo, m'avoir aidée à "perfectionner" mon anglais et tes précieux conseils en

LateX, merci Hugo Perrin pour nos discussions politiques et scientifiques et tes conseils musicaux, et enfin merci Théo Jules pour me tenir au courant de l'actualité, m'avoir fait découvrir la VR et pour tes connaissances vidéoludiques. Je tiens aussi à remercier les membres de l'équipe, Kristina Daviit, Étienne Rolley et Bruno Andreotti pour vos conseils et suggestions toujours pertinentes et notamment Sébastien Moulinet pour l'immense aide qu'il m'a apportée au laboratoire, notamment avec Labview mais aussi pour l'enseignement en licence. Mes remerciements vont aussi aux stagiaires qui sont passés par le labo, Gaspard Junot, Aurel Gbedahi et surtout Robin Quessard et Léo Régnier qui ont directement contribué à mes travaux de thèse.

Notre équipe faisant partie du Laboratoire de Physique Statistique, j'ai pu profiter de toute la structure que m'offrait cet environnement. J'en remercie donc les directeurs successifs, Jorge Kurchan et Jean-François Allemand pour m'avoir permis d'effectuer ma thèse dans ce laboratoire. Je remercie ensuite très chaleureusement Nora Sadaoui, Annie Ribaudeau, Fabienne Redia et Benoît Paulet pour m'avoir gentiment guidé à travers les méandres de l'administration et pour les bons moments conviviaux passés dans vos bureaux. Je remercie aussi Zaire Dissi pour la résolution de mes déconvenues informatiques et Nabil Garroum pour son fablab et nos nombreuses discussions. Mes remerciements vont aussi aux chercheurs du laboratoire qui m'ont aidé de différentes manières tout au long de ma thèse, Martine Ben-Amar, François Petrelis, Abdou Rachid Thiam, Eric Perez, Vincent Croquette et Nicolas Desprat. Cette thèse n'aurait pas été la même sans les doctorants et postdoctorants du LPS et plus généralement du département de physique, qui m'ont soutenu et énormément apporté au cours de ces trois ans. Je tiens tout d'abord à remercier l'équipe avec qui j'ai eu la chance d'organiser les séminaires PhD & PostDocs, Manon Michel pour ses récits épiques à cheval, Quentin Feltgen pour nos discussions sur les mondes imaginaires et littéraires, et Louis Brezin pour ses conseils cyclistes et son dynamisme. Je remercie aussi chaudement la relève, Marco Molari pour avoir toujours été là pour aider et rendre service et Kévin Berlemont pour sa motivation et son engagement. Je remercie bien sûr aussi tous les autres qui m'ont accompagné et soutenus pendant ma thèse, Juliane Klemser, Marylou Gabrié, Lorenzo Posani, Sophie Marbac, Jean Comtet, Lauriane Contamin, Fabio Manca, Ohad Shpielberg, Aymeric Chorlay, Jean-Baptiste Blochet, Laeticia Jubin, Michaël Pereira, Antoine Nigues et Audrey Bonnelye.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans l'aide de l'ENSAD et en particulier de Clément Assoun, qui a pris le temps de m'enseigner l'art du tricotage à la machine mais qui a aussi montré un grand intérêt pour nos travaux et prodigué de nombreux et excellents conseils.

Tout au long de ma thèse j'ai eu la chance de pouvoir participer à de nombreuses conférences et école d'été au cours desquels j'ai eu l'opportunité de rencontrer des chercheurs et chercheuses qui ont pris le temps de m'écouter et dont les commentaires et suggestions ont été cruciaux pour faire avancer cette thèse. Je veux donc grandement remercier José Bico, Matteo Ciccotti, Stéphane Roux, Marie Tani, Pedro Reis, Elisabeth Agoritsas, Jean-Louis Barrat, Alberto Rosso, Takeuchi Kazumasa, Ko Okumura, Karin Dahmen, François Hild et Harsha Bhat. Ces voyages ont aussi été l'occasion de rencontrer de nombreux thésards et postdocs du monde entier avec qui j'ai passé d'extraordinaires moments, scientifiques et autres. Il serait un peu long de lister toutes les personnes rencontrées, mais sachez que vous êtes toutes et tous chaleureusement remerciés.

Cette thèse est aussi l'aboutissement de mon parcours scolaire, j'aimerais donc aussi

en profiter pour remercier mes différents professeurs de physique que j'ai eu au cours de ma scolarité, Mme. Materkov, Mme. Steckart, M. See et Mme. Sanz pour m'avoir donné le goût de la physique et m'avoir soutenu dans mes études. Je remercie aussi mes professeurs que j'ai eus à l'ESPCI, José Bico et Matteo Ciccotti, qui ont largement influencé mon choix de travailler dans cette branche de la physique et que j'ai désormais la chance de côtoyer en tant que collègues.

Je me dois aussi de remercier les volleyeurs, qui m'ont accompagné tous les vendredis midi (quand ma cheville le permettait...) pour se défouler en tapant dans la balle, merci Jeff, Navy, Armelle, Flo, Ali, Antoine et les autres.

J'ai aussi eu l'immense chance de pouvoir compter tout au long de ma thèse sur le soutien, et surtout la jovialité d'amis que j'ai la chance de connaître depuis un certain temps maintenant. Mon bibi Clément pour avoir toujours été là, Gui et ses "formations" de sables, Jojo et ses déboires de lasers, Alice pour nos discussions endiablées, Anthony pour son déhanché au sax et les chaussettes de rando, Vincent pour son rhum piment, Mathieu pour ses barbeuc au clair de lune, Léo et Lucille pour notre séjour au soleil, Thibault pour ses nouveaux ans à la montagne, Flo pour ses conseils tactiques, Alice et les doctorants du LCMCP pour les soirées au St Hil, Leandro pour les restos et la physique théorique et Guillaume pour les discussions sur la médiation scientifique et Star Wars. J'ai aussi pu compter sur des amis de très longues dates avec qui j'ai eu le bonheur de maintenir le contact, un grand merci à Kévin pour nos soirées la balle au pneu et ton humour sans pareils, Vincent pour ton cidre et nos randos à pied et à vélo, Alexis, Cécile et Olivier pour votre hospitalité et m'avoir laissé squatter un si grand nombre de fois, Thibault pour les bonnes rigolades et le Hellfest et Coralie pour m'avoir fait découvrir d'autres genres de concert.

Pour finir, je voudrais remercier du fond du cœur ma famille pour le soutien constant que j'ai reçu. Mon père pour m'avoir très tôt fait aimer les sciences et pour l'intérêt porté à mon travail, ma mère pour son réconfort et son affection, mes grands-parents pour leurs encouragements et m'avoir appris le tricot aux aiguilles, ma sœur, puis mon frère pour m'avoir successivement supporté en tant que coloc et pour la vie de tous les jours, ainsi que Jacky et Béatrice pour leur soutien. Enfin, j'aimerais remercier Meng pour avoir été à mes côtés tout au long de la thèse, m'encourageant et me soutenant, merci d'avoir parcouru ce chemin avec moi.





# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Préambule</b>	<b>xiii</b>
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
I.1 Pourquoi le tricot ?	1
I.1.1 Un métamatériau tricoté	1
I.1.2 Tricoter n'est pas tisser	2
I.2 Le tricot au fil de l'Histoire	5
I.2.1 Des débuts tardifs	5
I.2.2 Démocratisation et essors industriel	6
I.2.3 Le renouveau	6
I.3 Une description formelle	8
I.3.1 Structure : de la fibre à l'étoffe	8
a) Tout commence par un fil...	8
b) ... contraint à former des mailles...	10
c) ... qui vont s'organiser en motifs...	11
d) ... pour finir par engendrer un tricot.	12
I.3.2 Élasticité et friction	12
a) Mécanique et tricot	13
b) Frottements aux points de contact	17
I.4 État de l'art de la mécanique du tricot	18
I.4.1 Description géométrique	20
I.4.2 Élasticité sous contrainte	21
I.4.3 Tricot et réseaux	24
I.5 Notre approche	26
<b>II Géométrie et élasticité d'un tricot</b>	<b>27</b>
II.1 Le choix du système expérimental	28
II.1.1 Le fil de pêche, un fil idéal	28
II.1.2 La maille et le point	29
a) Fabriquer un beau tricot	29

b)	Jersey et taille du tricot . . . . .	32
II.1.3	Les conditions aux bords . . . . .	32
II.2	Mesurer la réponse mécanique . . . . .	34
II.2.1	La réponse en force . . . . .	34
II.2.2	Mesurer des déformations . . . . .	36
a)	Déformer par rapport à quoi ? . . . . .	36
b)	Détecter les mailles . . . . .	37
c)	Reconstruire le réseau de mailles . . . . .	38
d)	La trajectoire du réseau de mailles . . . . .	42
II.3	Cinématique et approche théorique . . . . .	45
II.3.1	Définition d'une cinématique : $\vec{c}$ et $\vec{w}$ . . . . .	45
II.3.2	Relation avec les notations standards de la mécanique . . . . .	48
II.3.3	Une approche Lagrangienne . . . . .	48
II.4	Énergie et contraintes . . . . .	49
II.4.1	Énergie du tricot . . . . .	49
a)	Quels modes de déformation du fil ? . . . . .	49
b)	Courbures d'une maille . . . . .	50
II.4.2	Conserver la longueur de fil . . . . .	53
a)	Exprimer la contrainte . . . . .	53
b)	Déduction de la taille du tricot de référence . . . . .	55
II.4.3	Conserver la topologie . . . . .	56
a)	Topologie et tricot . . . . .	56
b)	La topologie du réseau . . . . .	58
II.5	Un cas particulier : la déformation uniforme . . . . .	60
II.6	Le cas général : le Lagrangien du tricot . . . . .	63
II.7	Cas de notre expérience modèle . . . . .	64
II.7.1	Équations sur les champs de déplacement . . . . .	64
a)	Déplacement initial . . . . .	65
b)	Déformation de la forme initiale . . . . .	66
c)	Comparaison avec les équations de l'élasticité linéaire . . . . .	67
II.7.2	Satisfaire les contraintes . . . . .	69
a)	Le multiplicateur de Lagrange $\alpha$ . . . . .	69
b)	Le multiplicateur de Lagrange $\vec{T}$ . . . . .	71
II.7.3	Comparaison avec les expériences . . . . .	72
a)	La forme . . . . .	73
b)	La force . . . . .	74
II.7.4	Variations autour du cas modèle . . . . .	77
II.8	Conclusion . . . . .	78
<b>III</b>	<b>Les tremblements de tricot</b> . . . . .	<b>81</b>
III.1	Des tremblements de tricot ? Approche phénoménologique . . . . .	82
III.1.1	Évidences expérimentales des fluctuations . . . . .	82
III.1.2	Interprétation qualitative . . . . .	83
III.1.3	Quelles conditions pour les voir ? . . . . .	85
a)	Contraintes internes du tricot . . . . .	85
b)	Vitesse de chargement . . . . .	86

c)	Coefficient de friction . . . . .	86
d)	Expérience de référence pour l'étude des fluctuations . . . . .	87
III.2	Description quantitative des tremblements . . . . .	89
III.2.1	Une mesure externe, la réponse en force . . . . .	89
a)	Fluctuations de force . . . . .	90
b)	Détection d'évènements . . . . .	91
c)	Dynamique des évènements . . . . .	93
III.2.2	Une mesure interne, le champ de déplacement . . . . .	94
a)	Fluctuations de positions . . . . .	95
b)	Détection et amplitude d'un évènement . . . . .	97
c)	Morphologie d'un évènement . . . . .	102
d)	Dynamique d'un évènement . . . . .	106
III.2.3	Confronter mesure interne et externe . . . . .	109
III.3	Comparaison avec d'autres tremblements . . . . .	110
III.3.1	Avalanches et crépitements . . . . .	110
III.3.2	Solides amorphes mous et modèles élasto-plastiques . . . . .	111
a)	Une phénoménologie proche . . . . .	111
b)	Propagation des évènements . . . . .	112
c)	Comparaison avec les prédictions d'un modèle champ moyen	116
III.3.3	Faillles et tremblements de terre . . . . .	122
a)	Lignes de glissements et failles sismiques . . . . .	122
b)	Réseaux de failles et défauts topologiques . . . . .	126
III.4	Conclusion . . . . .	128
<b>IV</b>	<b>Au-delà du plan</b>	<b>131</b>
IV.1	Programmer la forme d'un tricot . . . . .	132
IV.1.1	Topologie et courbure naturelle . . . . .	132
IV.1.2	Changer la métrique du tricot . . . . .	135
IV.1.3	Vers une approche formelle . . . . .	139
IV.2	La métamorphose du Jersey . . . . .	140
IV.2.1	Deux configurations : le point Jersey et le point "clos" . . . . .	141
IV.2.2	Mécanismes et quantification . . . . .	142
IV.3	Conclusion . . . . .	144
<b>V</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>145</b>
<b>A</b>	<b>Solution analytique de <math>a_0</math> par décomposition en série de Fourier</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Solution analytique de <math>a_0</math> par transformée de Schwartz-Christofel</b>	<b>151</b>
<b>C</b>	<b>Résolution numérique des équations de <math>a_1</math> et <math>b_1</math></b>	<b>155</b>
<b>D</b>	<b>Champ de déplacement autour d'un centre de nucléation d'avalanche</b>	<b>159</b>
<b>E</b>	<b>Articles publiés</b>	<b>161</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>



# Préambule

À l'époque où j'étais confronté à la question délicate de choisir le laboratoire et le domaine d'étude de ma future thèse, le sujet que proposait Frédéric s'est sensiblement démarqué des autres. En à peine un quart d'heure, il a réussi à me convaincre que le tricot est bien plus passionnant que ce que j'aurais alors pu imaginer et que l'étude de sa mécanique constituait un des sujets les plus captivants qu'il m'ait été proposé. Même si son argumentaire reposait plus sur une intuition qu'une série de questions bien formulées et précises, le défi et la liberté intellectuelle que cela sous-entendait ont fini par me convaincre. Avec à la base une formation orientée vers la physique expérimentale et fondamentale, j'ai donc commencé ma thèse sur le tricot sans avoir la moindre connaissance pratique ni théorique dans ce domaine.

Je me suis rapidement rendu compte que ma situation était assez épineuse, car si l'étude du tricot, ou même des tissus en général, constitue un terrain quasiment vierge pour la physique fondamentale, c'est surtout un sujet déjà intensivement étudié par d'autres communautés. D'une part, le tricot est un art quasiment millénaire qui a eu le temps de se raffiner et se diversifier en accumulant une quantité prodigieuse de savoirs empiriques basés sur la pratique et l'expérimentation. D'autre part, son utilisation industrielle, allant du simple T-shirt au renfort de turbine d'avion, a motivé de nombreuses et diverses recherches en mécanique et ingénierie. Récemment, le développement de l'animation 3D a aussi suscité d'important travaux sur la modélisation fine de tricots. Réussir à soulever des questions originales était donc loin d'être évident. Dans un premier temps on s'est donc plus focalisé sur l'originalité de la méthodologie que des questions posées.

Partant de zéro, j'ai simplement commencé par apprendre à tricoter. D'abord aux aiguilles grâce à des tutoriels sur internet et ma grand-mère, puis rapidement sur les machines manuelles avec Clément Assoun à l'atelier de l'ENSAD. La démarche classique en physique fondamentale consiste à simplifier le système pour diminuer les ingrédients à prendre en compte, mais pas de manière excessive pour que le problème garde de l'intérêt. Dans la veine des études sur les métamatériaux mécaniques, on a donc tricoté jusqu'à trouver le système qui permettait de réduire le problème aux paramètres qui nous intéressaient : élasticité du fil, géométrie de la maille et topologie du point. Fort heureusement je n'ai pas réussi à me débarrasser du frottement comme j'en avais l'intention au début, car sinon je serais passé à côté des tremblements de tricot, qui constituent au final une des parties les plus importantes de ma thèse. Une fois le bon système entre les mains et les premières mesures mécaniques effectuées, les premières questions, avec leurs premiers éléments de réponse, ont rapidement été identifiés : pourquoi est-ce si facile de déformer un tricot constitué d'un fil inextensible ? Quels sont les mécanismes qui conduisent

à cette déformation caractéristique? Les éléments de réponse sont contenus dans trois arguments : le fil se déforme principalement par flexion, il est inextensible et la topologie des mailles est conservée. Ainsi, moins de 6 mois après le début de ma thèse, les ingrédients principaux ont été identifiés et la méthode mathématique pour résoudre le problème implémentée. Il m'a fallu ensuite près de 2 ans de travail laborieux pour arriver à la version publiée. Passer d'un modèle qui capture grossièrement les effets recherchés à une théorie qui ne présente plus de coin d'ombres majeurs a été beaucoup plus fastidieux que je ne m'y attendais. La théorie, en constant dialogue avec les expériences, est passée par une myriade de versions avant d'aboutir sur celle qui soit mathématiquement rigoureuse, qui introduise un nombre minimal de paramètres dont on comprend la signification et surtout, qui fonctionne bien. J'ai heureusement pu compter sur le soutien sans faille de mes directeurs de thèse dans cette démarche.

En parallèle, un peu par hasard, j'ai remarqué que le frottement du fil provoquait un bruit ayant une forme assez particulière dans la réponse mécanique du tricot. J'ai aussi eu la chance de travailler entouré de chercheurs en physique statistique, tout en ayant l'occasion d'assister à des conférences et cours sur ce domaine. En me montrant l'intérêt d'étudier le bruit pour poser de nouvelles questions, j'ai découvert une physique passionnante et encore en construction. Rentrer dans ce sujet en évitant les écueils est une tâche délicate, mais j'ai aussi eu la chance de recevoir soutiens et conseils précieux lors de discussions avec des chercheurs de ce domaine. L'étude de ces tremblements de tricot s'est, en définitive, révélée très fructueuse et ouvre de nombreuses perspectives.

Enfin, j'ai eu l'occasion de travailler sur des projets annexes avec l'aide de stagiaires, ayant comme thème commun la forme tridimensionnelle des tricots. Les stages étant courts et n'ayant pas eu le temps de m'y pencher davantage, les résultats restent assez qualitatifs. L'interaction entre topologie, géométrie et forme du tricot, avec en plus la volonté de se rapprocher d'applications potentielles en ajoutant une élasticité activable, m'a finalement beaucoup servi de support pédagogique pour des présentations expérimentales. Concernant le changement de configuration du Jersey, comme pour le frottement, j'ai d'abord essayé de m'en débarrasser avant de me rendre compte de la richesse des questions que ce phénomène apportait. Cette fois-ci, je n'ai malheureusement pas eu le temps de m'y pencher plus en détail.

Le chemin a été long entre mon premier échantillon, désastreux, tricoté à la main et l'écriture de cette thèse, mais il s'est révélé incroyablement enrichissant. J'espère que cette thèse va vous convaincre que le tricot recèle une physique fascinante et que j'y ai au moins apporté un regard original.

# Chapitre I

## Introduction

### I.1 Pourquoi le tricot ?

Cette première partie de l'introduction vise à retracer le cheminement qui fait du tricot un objet passionnant à étudier du point de vue de la physique fondamentale et à le replacer dans le cadre d'étude qui a été choisi pour réaliser cette thèse.

#### I.1.1 Un métamatériau tricoté

Métamatériau, du grec *μετα* signifiant "au-delà de", est un terme générique utilisé pour décrire un matériau qui possède des propriétés qui sortent de l'ordinaire ou qui ne se retrouvent pas à l'état naturel. Ces matériaux tirent leurs spécificités, non pas d'une chimie élaborée, mais plutôt d'une structuration de leurs constituants. Cette structuration permet de donner des propriétés inhabituelles ou une fonctionnalité bien spécifique en partant d'un matériau tout à fait ordinaire. Les métamatériaux sont de ce fait un domaine de recherche très actif car ils présentent des intérêts autant pour des applications que pour des questions plus fondamentales. D'un point de vue industriel, pour obtenir les propriétés requises, il est souvent plus économique de structurer un matériau abondant et bon marché que de faire appel à une chimie complexe et à des éléments rares et précieux. Cette démarche possède aussi un avantage environnemental en limitant éventuellement l'usage de composés et procédés polluants. D'un point de vue plus fondamental, l'étude des métamatériaux permet de questionner la relation entre les propriétés intrinsèques d'un matériau et sa structure. Un important champ d'investigation des métamatériaux est la manipulation d'ondes, qu'elles soient électromagnétiques, sonores, hydrodynamiques ou même sismiques [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Toutefois, depuis peu, un nouveau domaine d'application des métamatériaux connaît un essor important : la mécanique. La structuration de matériaux est utilisée pour leur donner des propriétés mécaniques qui vont à l'encontre de notre intuition. L'exemple historique est la fabrication de matériaux dits auxétiques possédant un coefficient de Poisson négatif, c'est-à-dire qui va s'élargir dans une direction perpendiculaire à laquelle on vient tirer dessus ou inversement, s'affiner lorsqu'on le comprime [7, 8] (fig. I.1.a). Grâce à la répétition de motifs plus ou moins complexes, les métamatériaux mécaniques parviennent aujourd'hui à obtenir des propriétés de plus en plus étonnantes, telle qu'une compressibilité négative [9, 10] ou encore la capacité de transformer un mouvement de compression en rotation [11] (fig. I.1.b). Ces nouveaux ob-



jets se trouvent à la frontière entre la science des matériaux et la fabrication de machines qui permettent de réaliser des fonctions précises [12, 13]. Une autre branche d'étude des métamatériaux mécaniques vise à comprendre comment un changement de structure seul peut profondément modifier les propriétés d'un matériau, sans pour autant que ses propriétés soient hors du commun. Un exemple, utilisé depuis longtemps en architecture entre autres, consiste à fournir une courbure à une surface pour augmenter drastiquement sa résistance à la déformation. Cette branche a connu un véritable élan avec l'introduction de concepts venant notamment des origamis, l'art japonais de pliage du papier. En parlant d'objets essentiellement bidimensionnels tels qu'une feuille de papier ou de plastique, l'ajout de singularités tel que les plis permet de modifier considérablement leurs propriétés mécaniques [14, 15] (fig. I.1.c), mais aussi de confinement, inspirant l'industrie aérospatiale pour le design de panneaux ou voiles solaires [16, 17]. Cette idée s'est rapidement étendue à d'autres manières de structurer une surface par des singularités, telles que par les coupures [18, 19], inspiré de l'art du kirigami japonais, ou de "trous" pour tirer parti de l'instabilité de flambement par exemple [20, 21] (fig. I.1.d).

C'est à partir de cet état des lieux qu'a germé l'idée sur laquelle s'appuiera ma thèse : fabriquer un métamatériau à partir d'un objet unidimensionnel. Toutefois le choix de structuration à apporter à l'objet unidimensionnel, que l'on appellera dorénavant fil, est plus restreint que pour des objets de dimension supérieure. En effet pour une feuille, on peut apporter des modifications 2D (trous) ou 1D (plis, coupures) sans porter atteinte à l'intégrité de l'objet. Avec un fil, la moindre coupure ou trou détruit l'objet. Il faut donc apporter un élément structurant ponctuel. Le pli restant une solution envisageable, on s'est plutôt focalisé sur une structuration qui ne vient pas altérer les propriétés du fil : l'entrelacs. Faire croiser un fil avec un autre ou lui-même introduit un élément ponctuel et purement structurel. Cette démarche particulière a encore été peu exploitée par la communauté des métamatériaux, mais la technique en elle-même est connue et exploitée depuis très longtemps et entre en jeu pour fabriquer des textiles, ou même le nid de certains oiseaux. Ce travail de thèse consiste donc à apporter une approche originale à un matériau connu de tous, le tricot.

### I.1.2 Tricoter n'est pas tisser

Tricoter est loin d'être la seule manière de structurer un fil par des entrelacs, cette section a pour but de justifier pourquoi on a focalisé nos efforts sur le tricot et à fournir un inventaire non exhaustif des possibilités offertes par cette structuration.

On peut commencer par une technique utilisée par certaines espèces du règne animal pour fabriquer des structures à partir du croisement de fils. Cette technique repose sur l'entassement d'un nombre important de fils (ou brindilles) dans un désordre local apparent. On retrouve ce genre de structure notamment dans les nids d'oiseaux (fig. I.2.a), les fourmilières, ou encore dans des matériaux artificiels sous l'appellation non-tissés ou feutres. Ils peuvent même être le fruit de processus entièrement passifs comme on peut le voir sur certaines plages avec les *aegagropilae* [24]. Ces matériaux sont activement étudiés aujourd'hui car ils présentent des propriétés remarquables [25], mais le désordre inhérent et le très grand nombre de constituants rendent très difficile la compréhension fine des mécanismes régissant leur mécanique. L'utilisation la plus courante de cette technique est sa variante où la structure finale est aussi un fil. En effet, une grande majorité des

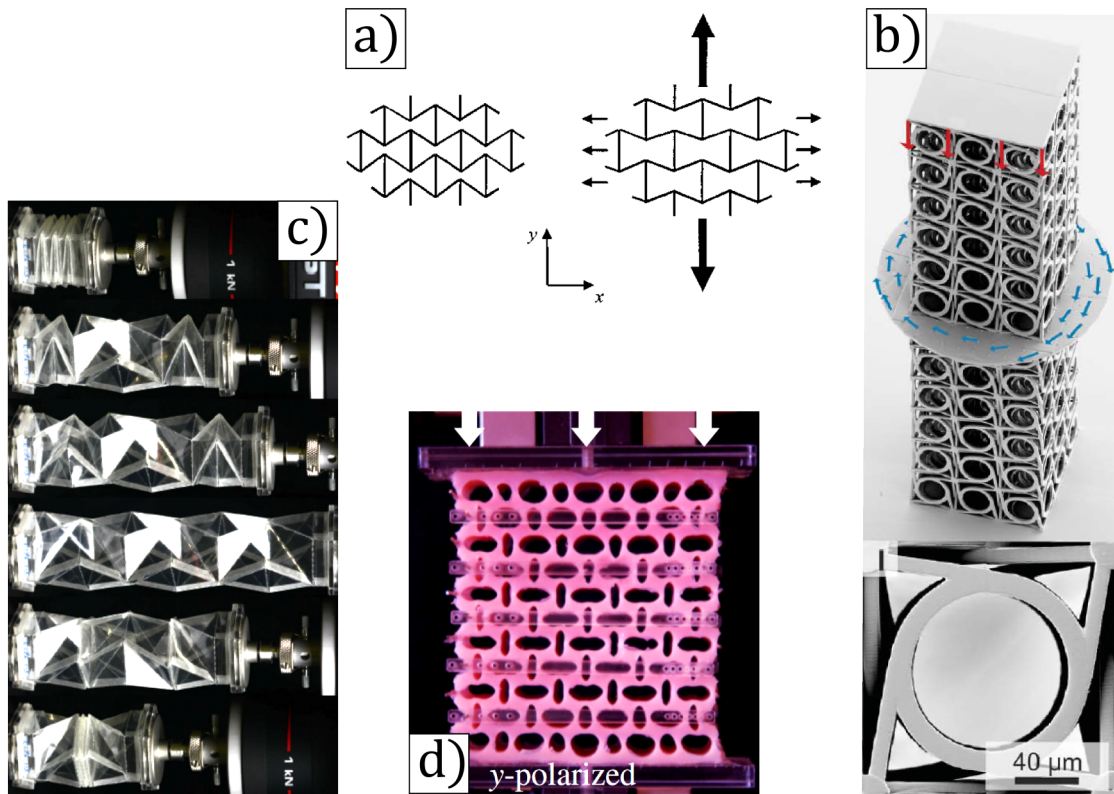


FIGURE I.1 – Exemples de métamatériaux mécaniques. a) Représentation schématique d'une structure auxétique, image extraite de [22]. b) Métamatériau ayant une structure qui transforme un mouvement de compression en rotation [11]. c) Utilisation de motifs d'origami pour fabriquer des "soufflets" qui peuvent fortement se déformer tout en restant étanche et permettant le passage d'un liquide à l'intérieur. Ces objets possèdent aussi des propriétés étonnantes de multi-stabilité [23]. d) Programmation d'une réponse mécanique en jouant sur une structure trouée et l'instabilité de flambement [20].

fil ou cordes que l'on utilise sont constitués de nombreux fils, ou fibres, bien plus petits (poils d'animaux, fibres végétales, fibres synthétiques...) qui sont structurés pour garder une tenue mécanique globale.

Une étape de simplification est de rajouter une structure bien ordonnée dans l'arrangement des entrelacs. Certains nids d'oiseau présentent cette caractéristique (fig. I.2.b) et sont très similaires à la vannerie, technique de mise en forme d'objets bi ou tridimensionnels simplement à partir de tiges, c'est-à-dire des fils plutôt gros et rigides (fig. I.2.c). On appelle cette technique tissage lorsqu'on utilise un fil, c'est dire plus mou et fin (fig. I.2.d). Ces techniques ont été les premières à être mises au point par nos ancêtres il y a environ 40000 ans, mais à cause de la nature périssable de leurs constituants, les plus vieilles pièces de textiles ou vanneries retrouvées sont datées à environ 10000 ans avant notre ère. La variante la plus basique de tissage est composée de fils parallèles le long d'une direction appelée trame et d'une deuxième série de fils parallèles le long d'une direction distincte, la chaîne. Les tissus présentent une grande résistance mécanique et sont très

peu déformables dans les directions de la trame et de la chaîne. En faisant varier l'ordre d'enchevêtrement entre la chaîne et la trame on obtient différents motifs ou "armures" (la toile, le satin ou la serge) qui ont des propriétés mécaniques, une apparence visuelle et des sensations au toucher différentes. On peut encore augmenter la complexité en ajoutant des fils dans des directions supplémentaires ou en empilant puis reliant différentes couches de tissu.

Dans les exemples donnés jusqu'à maintenant, les fils restaient essentiellement droits. Une autre technique d'enchevêtrement consiste à faire des nœuds, c'est-à-dire de profiter de la faible résistance à la flexion des fils pour combiner boucles et croisements d'un ou plusieurs fils. Les nœuds empêchent en général le glissement du fil, maintenant ainsi la longueur de fil entre deux croisements (fig. I.2.e). L'utilisation de nœuds pour lier un fil à quelque chose d'autre a connu un énorme essor grâce à la marine, produisant un catalogue de plusieurs milliers de nœuds possédant tous leurs caractéristiques et usages propres. Toutefois, une approche physique de la mécanique de ces nœuds n'est que toute récente [26, 27, 28, 29]. Pour revenir au textile, l'utilisation de nœuds n'a fait qu'une apparition relativement tardive (environ 1200 après Jésus-Christ) avec le développement du macramé qui consiste à créer des motifs en nouant une série de fils parallèles. La variante avec un seul fil structuré en une surface ou une forme par des nœuds interconnectés est encore plus tardive (apparition au XIX<sup>ème</sup> siècle) en sa version textile, le crochet, mais est bien plus ancienne en sa version filet de pêche qui suit le même principe (utilisé depuis plus de 9000 ans). De par la rigidité des nœuds, ces textiles sont très peu déformables et ont plus vocation à la création de motifs. De plus, dans ces systèmes, les fils sont constamment en contact les uns avec les autres et forment des structures tridimensionnelles complexes, rendant la définition d'un croisement ponctuel ambiguë.

La dernière catégorie que l'on va évoquer, dont fait partie le tricot, est aussi constituée de boucles et de croisements comme les nœuds, mais ceux-ci ne sont pas serrés, de sorte que le fil n'est pas bloqué et les croisements sont clairement définis. Cette spécificité apporte une plus grande capacité de déformation et par conséquent de plus riches interactions entre la structure et les propriétés mécaniques [30]. Le tricot dit en trame est constitué d'un seul fil (fig. I.2.f) alors que le tricot en chaîne est constitué d'autant de fils que de colonnes. Une variante plus ancienne appelée nalebinding ou "maille Viking" suit aussi les mêmes principes que le tricot. Toutefois le motif est légèrement différent et la manière de fabriquer le textile met en œuvre une technique radicalement différente avec un outil similaire à une aiguille à coudre.

Pour notre approche d'un point de vue de la physique des métamatériaux, on cherche donc un système qui allie une structure facilement identifiable à une déformabilité importante. Pour simplifier davantage le système et mettre d'autant plus en avant le rôle de la structure il est préférable de n'avoir qu'un seul constituant (un fil). Enfin, pour la mise en place d'expériences et la fabrication d'échantillons, il faut que les techniques de fabrication soient accessibles et la structure aisément modifiable. Toutes ces conditions sont vérifiées par le tricot en trame, ce qui en fait donc notre objet d'étude pour cette thèse.

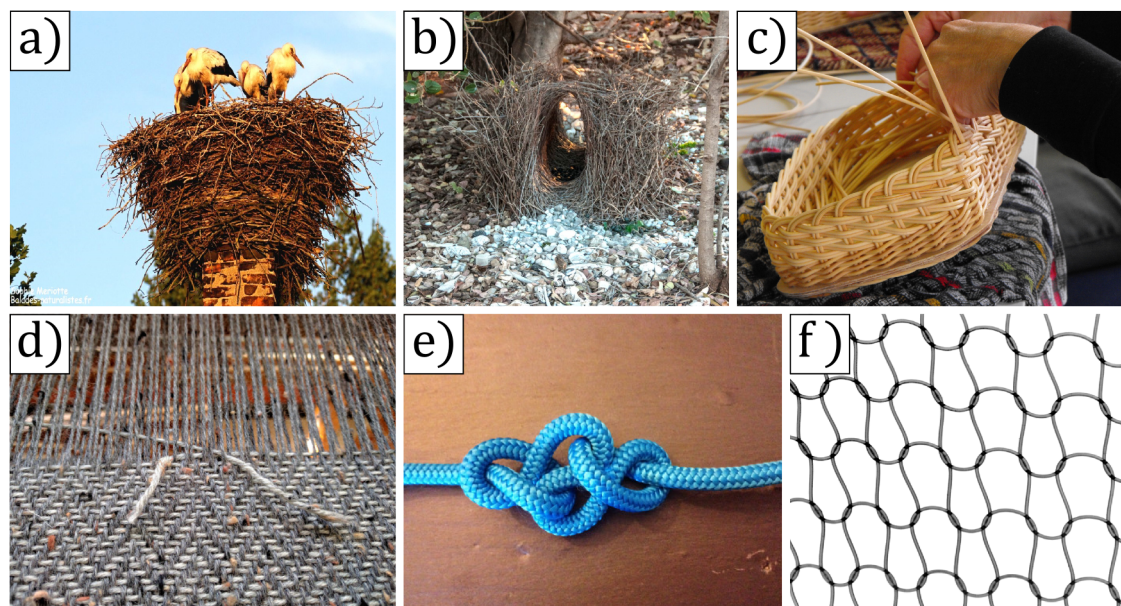


FIGURE I.2 – Fabriquer un objet à partir d'un ou plusieurs "fils". Les nids d'oiseaux sont une structure 3D construite à partir d'éléments quasi 1D que sont les brindilles/branches. Ils peuvent être assemblés de façon désordonnée comme chez les cigognes a) (photo par [Sophie Meriotte](#)), ou élaborés suivant un schéma complexe chez l'oiseau jardinier b) (photo par [Graeme Churchard](#)). En fonction de la rigidité et de la structure donnée à un ensemble de fils, on peut par exemple fabriquer des formes 3D complexes comme en vannerie d) (image extraite d'une [annonce](#) d'initiation à la vannerie) ou une surface comme le tissu c) (Photo et fabrication par [Amy Gunderson](#)). Imposer un enchaînement de croisements complexes à un fil revient à fabriquer un nœud. e) (Photo et nœud par Nico sur son [blog](#)). Le tricot est un exemple de nœud lâche possédant un motif qui vient se répéter f).

## I.2 Le tricot au fil de l'Histoire

Cette section présente une courte histoire du tricot, l'évolution de ses usages et en quoi il est pertinent aujourd'hui de s'y intéresser.

### I.2.1 Des débuts tardifs

La spécificité du tricot venant de son motif et non du fil utilisé, son invention ne peut être prouvée qu'au moyen de la découverte d'une étoffe suffisamment grande et bien préservée pour reconnaître le motif. De plus, les fils étant fait de matériaux facilement périssables tels que la laine ou le coton, les vestiges archéologiques de tricots restent rares. Ainsi, le tricot le plus ancien daté à ce jour est une chaussette égyptienne du XI<sup>ème</sup> siècle qui présente toutefois des motifs complexes avec des fils de différentes couleurs (fig. I.3.b). Cette complexité suggère que le tricot ait été inventé encore plus tôt et que les techniques aient eu le temps de se perfectionner. Le tricot est donc apparu au Moyen-Orient aux alentours du X<sup>ème</sup> siècle et vraisemblablement inspiré par le nalebinding, apparu aussi au Moyen-Orient mais le précédent de plus d'un millénaire (fig. I.3.a). Nalebinding et



tricot partagent une apparence et des propriétés mécaniques très similaires, mais diffèrent largement dans leur processus de fabrication et donc dans leur structure de base. Le tricot étant beaucoup plus commode à confectionner, il s'imposera d'abord en Europe puis dans le reste du monde, alors que le nalebinding ne restera populaire que dans les pays scandinaves, d'où son appellation actuelle de "maille Viking".

Le tricot fait son apparition en Europe notamment par l'Espagne où des rois Chrétiens embauchent des maîtres tricoteurs arabes dès le XIII<sup>ème</sup> siècle. Le tricot va alors se développer dans toute l'Europe mais restera dans un premier temps un produit de luxe réservé aux membres de familles royales et au Haut Clergé, avec un usage tirant parti de sa drapabilité et principalement dédié aux chaussettes et aux gants. L'apparition de Guildes d'artisans tricoteurs au XV<sup>ème</sup> siècle (fig. I.3.c) contribue à propager les techniques de tricotage et à diversifier son usage, mais aussi à le populariser au moins parmi la noblesse et la bourgeoisie.

## I.2.2 Démocratisation et essors industriel

La première machine à tricoter a été inventée dès 1589 en Angleterre par William Lee, mais ne supplantera pas le travail aux aiguilles des Guildes pendant plus de deux siècles. Avec la révolution industrielle et l'apparition de machines à vapeur au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle, les usines de machines à tricoter finissent par avoir raison des Guildes. Le tricotage manuel ne disparaît pas pour autant et opère sa mutation d'un artisanat de luxe exclusivement masculin, à un loisir qui s'invite dans le foyer et devient essentiellement féminin. Le matériel nécessaire pour tricoter étant réduit à deux simples aiguilles, il se démocratise rapidement parmi les classes populaires car permettant la fabrication de vêtements à moindres coûts. Tricoter a aussi joué le rôle d'acte patriotique lors des deux guerres mondiales où il a été demandé aux foyers de participer à l'effort de guerre en tricotant chaussettes, gants ou bonnets pour les soldats au front (fig. I.3.d). Ainsi, au début des années 1950, tricoter est très populaire dans une grande partie des foyers d'Europe et est même enseigné à l'école (aux jeunes filles). Cette période voit apparaître une abondance de magazines spécialisés (fig. I.3.e), posséder une machine à tricoter chez soi devient chose courante et le tricot s'invite même sur les podiums de hautes coutures. C'est aussi à ce moment-là qu'apparaissent les premières études scientifiques sur le sujet et un certain engouement pour la mécanique des tricots. Toutefois, cet âge d'or du tricot prend progressivement fin vers les années 1980 quand les progrès de l'industrie et le passage à une société de consommation font qu'acheter un vêtement revient bien moins cher que de le fabriquer.

## I.2.3 Le renouveau

À partir des années 1980, même si une grande partie de notre garde-robe reste tricotée, le tricot n'est plus qu'un loisir presque anecdotique. Pendant ce temps, l'industrie du tricot se développe et trouve de nouvelles applications notamment en tant que renforts dans des matériaux composites. En effet, une résine coulée dans un textile permet d'obtenir, une fois séchée, un matériau à la fois solide mécaniquement et résistant à la casse. Ce genre de composites vise à remplacer les structures en acier des voitures, trains ou avions car elles apportent un énorme avantage en termes de coût de production et de poids sans



FIGURE I.3 – Le tricot au fil de l'Histoire. a) Chaussettes en nalebinding, retrouvées en Égypte et datées de 300-500 avant J-C. Leur forme particulière vient du fait qu'elles étaient faites pour être portées avec des sandales (conservées au Victoria & Albert Museum, Londres, photo par [David Jackson](#)). b) Plus anciennes pièces de tricot découvertes à ce jour. Trouvées aussi en Egypte et datée de 1000-1200 après J-C. La complexité des motifs et la finesse du tricotage suggèrent que l'invention du tricot est plus ancienne que cette datation (conservées au Victoria & Albert Museum, Londres, [blog Roving Crafters](#)). c) Pièce tricotée faisant partie d'un "Chef-d'œuvre" que les apprentis tricoteurs devaient produire à la fin de leurs études pour mériter leur place dans une guilde de tricoteur (réservée aux hommes). Décoration murale fabriquée en 1781 dans la Guilde de Strasbourg, représentant notamment Adam et Ève (conservé au Victoria & Albert Museum, Londres, [site du museum](#)). d) Affiches incitant les femmes américaines à participer à l'effort de guerre en tricotant des chaussettes, écharpes ou autres pour les soldats au front lors des deux guerres mondiales. Gauche, "Nos gars ont besoin de chaussettes, tricotez votre part", affiche de la Croix-Rouge américaine de la Première Guerre mondiale (1914-1918, [Wikipedia](#)). Droite, "Souvenez vous de Pearl Harbor, tricotez plus fort", affiche de la seconde guerre mondiale (1942) jouant sur l'homophonie entre "pearl" et "purl" signifiant tricoter à l'envers ([Fiber Wild](#)). e) Couverture d'un livret de patrons pour machine à tricoter ("Toyota knitting machine pattern book 1") datant des années 1970, au sommet de la popularité de la mode du tricot. f) Matériau composite de forme complexe composé d'un renfort tricoté imprégné de résine durcissante (produit par l'entreprise [STOLL](#))

avoir à sacrifier les propriétés mécaniques. Ce nouveau débouché a alors provoqué un regain d'intérêt de la communauté scientifique pour l'étude de la mécanique des textiles et en particulier du tricot. La déformabilité du tricot permet en effet de couvrir des surfaces aux formes complexes et ainsi de produire des pièces en une seule étape de presse thermique [31, 32] (fig. I.3.f). En parallèle, émerge aussi une nouvelle classe de textiles

dit "intelligent", porté aussi bien par le milieu scientifique [33, 34, 35, 36] que le milieu artistique (Susan Clowes , Jenny Sabin), qui ne considère plus le textile comme inerte mais comme un objet qui va se transformer et s'adapter au gré de stimuli extérieurs. L'immense nombre de motifs possibles et ses propriétés mécaniques remarquables font du tricot un textile de choix pour ces avancées technologiques et un terrain propice pour les artistes (Sarah-Marie Belcastro, Orly Genger, Pat Ashforth & Steve Plummer, Madame Tricot, Ernesto Neto et beaucoup d'autres).

Néanmoins, le tricot domestique n'a pas dit son dernier mot, depuis le début des années 2000, il redevient fortement à la mode. Ce phénomène est largement aidé par l'apparition d'internet qui voit la création de nombreux sites spécialisés, tenus par des passionnés et qui intéressent une frange plus jeune de la population. Ce mouvement s'inscrit aussi dans une tendance plus générale d'alternatives à la surconsommation par la fabrication de produit "faits main". C'est donc dans ce contexte de renouveau d'intérêts pour le tricot, aussi bien du côté industriel, technologique et même domestique que vient s'inscrire ce travail.

### I.3 Une description formelle

Dans cette partie on va s'attacher à donner une description détaillée de ce qu'est un tricot, d'abord en décrivant sa structure à toutes ses échelles, puis en introduisant les notions de mécanique et physique qui entrent en jeu.

#### I.3.1 Structure : de la fibre à l'étoffe

La structure d'un tricot est hiérarchisée en 4 étapes, sur des échelles de longueur s'étalant du micromètre à plus du mètre, chaque étape apportant son lot de diversification.

##### a) Tout commence par un fil...

Le choix du fil est la première étape de la confection d'un tricot. Dans l'habillement, le fil est traditionnellement issu de fibres végétales (coton, lin, chanvre ...) ou animales (poils de mouton, chèvre, chameaux...). Ces fibres, d'environ quelques micromètre de diamètre, vont subir un processus appelé filature qui va transformer cet amas de fibres désordonné en un fil possédant une bonne tenue mécanique (fig. I.4.a). Ce processus agit principalement en parallélisant les fibres puis en les entortillant les unes aux autres par torsion, produisant un fil ayant déjà une structure très complexe et des propriétés mécaniques étonnantes, il est très résistant à l'élongation mais reste très flexible.

Les matières plastiques tel que le nylon permettent une plus grande variabilité de catégories de fils. En fonction du processus de fabrication, les matériaux plastiques peuvent être mis en forme de fibres de diamètres et longueurs contrôlables mais aussi directement sous la forme d'un fil, dit monofilament, qui présente des propriétés homogènes sur toute sa longueur et sa section (fig. I.4.b). Ils permettent donc d'obtenir toute une variété de fils avec différentes structures et propriétés mécaniques. Pour les applications industrielles telles que le renfort de composites, il est nécessaire d'avoir des fils avec une très bonne tenue à haute température. Des matériaux tels que la fibre de verre ou des filaments de

basalte sont alors utilisés (fig. I.4.c), les filaments étant généralement suffisamment longs, le filage n'est pas nécessaire et les paquets de filaments sont directement tricotés.

Des fils de métal sont aussi utilisés pour des applications assez spécifiques comme les protections anti-éboulement (fig. I.4.d), l'intégration d'électronique dans le tricot ou la joaillerie. Dans ces cas, les fils métalliques sont déformés au-delà de leur seuil de plasticité et donc ne présentent quasiment plus d'élasticité, seule la structure du tricot va être exploitée. Une exception reste les alliages métalliques à mémoire de forme, qui vont retrouver leur élasticité au-delà d'une certaine température, et qui sont exploités pour fabriquer des tricots qui vont changer de forme avec la température [37, 38, 35].

En plus de toutes ces variétés de fils, il est possible de tricoter plusieurs fils en même temps ou encore d'alterner le tricotage entre différents fils. Les différentes possibilités de fabrication qu'offre le tricot sont déjà nombreuses dès cette première étape.

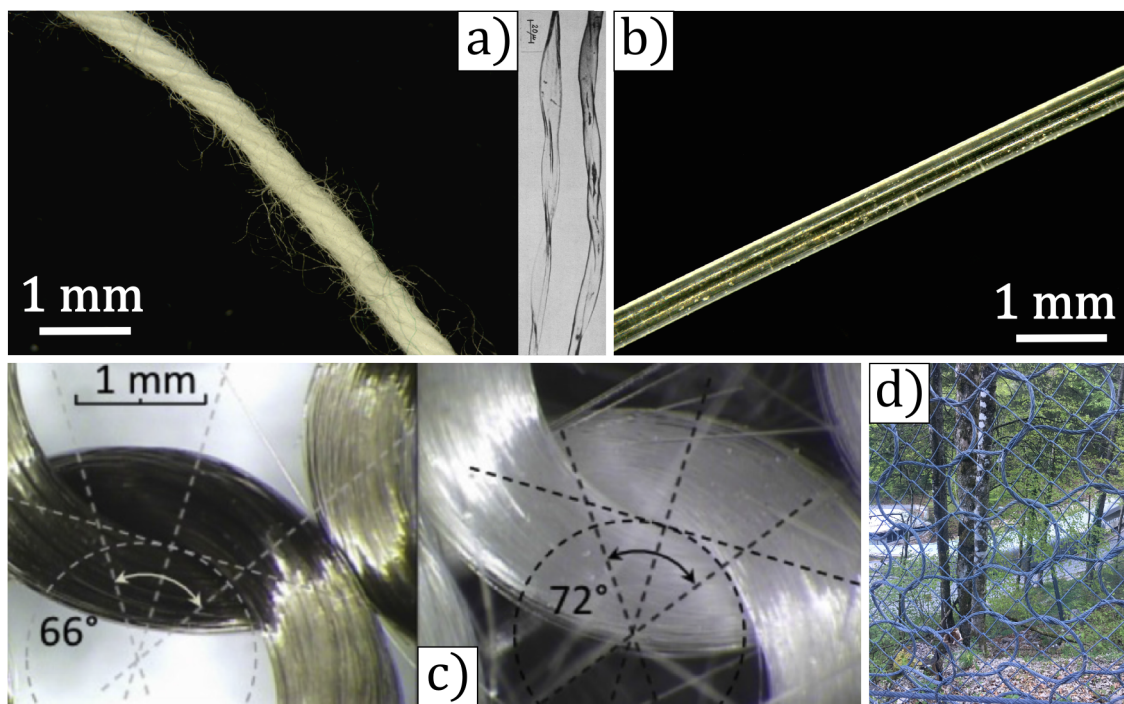


FIGURE I.4 – La première étape, le fil. a) Fil de coton composé de nombreuses fibres torsadées. Inset à droite : image au microscope de fibres cotons, photo extraite de [39]. b) Monofilament de nylon. c) Fil composé de nombreuses fibres non torsadées pour les renforts tricotés. Filaments de basalte (gauche) et de verre (droite), photo extraite de [40]. d) Tricot fabriqué en fil d'acier torsadé constituant un filet pour retenir les chutes de pierres. Photo prise par Meng Zhou dans les Alpes Bavaroises.



## b) ... contraint à former des mailles...

Une fois que le fil est choisi, la deuxième étape consiste à le structurer en lui imposant des entrelacs de manière ordonnée. Ces croisements peuvent être vus comme une propriété topologique du fil, c'est-à-dire une propriété qui n'est pas attachée au fil lui-même mais à son agencement seul. Un croisement peut être défini par un signe,  $+$  ou  $-$ , selon que le fil passe respectivement au-dessus ou en-dessous du fil qu'il croise. Dans le tricot dit en trame, sujet de cette étude, un seul fil va parcourir rang par rang le tricot et va venir croiser alternativement les rangs précédents et suivants. Dans le motif de base, le fil va croiser quatre fois le rang supérieur ( $+ - - +$ ) et quatre fois celui inférieur en suivant le même schéma (fig. I.5.a). Cette structure, qui va pouvoir être répétée ou variée, est ce que l'on appelle une maille et prend généralement la forme de boucles qui sont retenues par les boucles du rang supérieur, qui elles mêmes soutiennent celles du rang inférieur et ainsi de suite. Avec cette étape, on passe d'un élément essentiellement à une dimension à un objet avec une certaine épaisseur et qui va s'étendre dans deux dimensions, les rangs et les colonnes. Ce schéma de croisement peut être modifié mais pas de n'importe quelle façon, pour que le tricot garde son intégrité et ne se détricote pas, certaines combinaisons de croisements sont interdites. La variation la plus simple consiste à inverser le signe de tous les croisements, on passe ainsi d'une maille dites *endroit* à une maille dites *envers* (fig. I.5.b). On peut aussi ajouter des croisements au sein d'un même rang en torsadant la boucle, cela donne une maille appelée *torse* (fig. I.5.c). D'autres alternatives résident sur le fait de croiser les fils non pas sur les rangs directement voisins mais sur ceux plus éloignés. Le fil du rang sauté peut alors être tout de même tricoté et donc suivre le même chemin qu'un autre rang, soit laissé non tricoté. On parle alors respectivement de mailles *glissées* (fig. I.5.d) ou *jetées* (fig. I.5.e). Ces variations peuvent se faire le long d'une même colonne mais aussi avec des colonnes plus ou moins adjacentes.

On peut encore diversifier les variétés de mailles en les combinant (maille torse jetée...), ou encore en les répétant (maille double torse...). Avec cette deuxième étape, on ouvre encore un vaste de champs de degrés de liberté dans la fabrication d'un tricot.

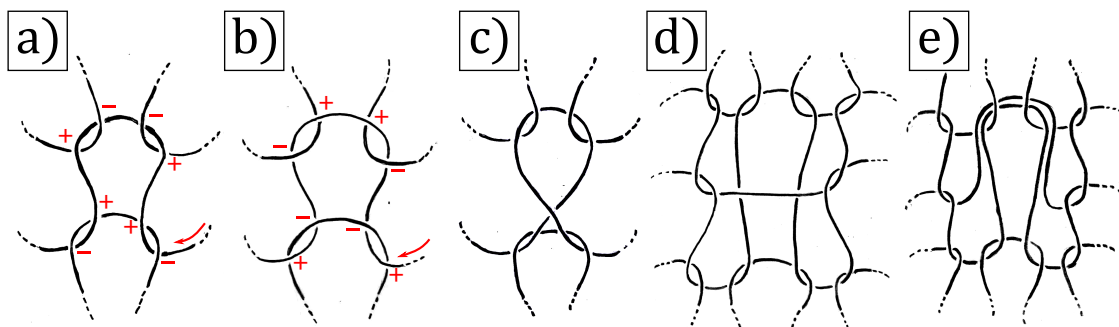


FIGURE I.5 – La seconde étape, la maille. Schémas de la topologie du fil pour différentes mailles sans tenir compte de l'élasticité du fil. a) Maille endroit. Le signe des croisements, pour le fil indiqué par une flèche, est indiqué en rouge. b) Maille envers. Les signes des croisements sont inversés par rapport à la maille endroit. c) Maille simple torse endroit. d) Maille glissée. e) Maille jetée.

## c) ... qui vont s'organiser en motifs...

La troisième étape consiste en l'agencement de ces mailles selon les rangs et colonnes du tricot pour former un motif que l'on appelle communément un *point*. Habituellement, les tricots sont faits de zones comportant un motif qui se répète de manière périodique dans une ou deux directions. Le point constitue alors le plus petit motif qui peut être répété. Avec seulement les mailles endroit et envers, on peut déjà créer une infinité de points. Par exemple, un motif composé seulement de maille endroit (ou envers) est appelé un point Jersey (fig. I.6.a), alterner suivant les rangs envers et endroit donne un point mousse (fig. I.6.b), les alterner suivant les colonnes forme un point côte (fig. I.6.c) et alterner en damier crée un point de riz (fig. I.6.d). En alternant non plus tous les rangs mais tous les deux rangs, on forme un nouveau point, les côtes  $2 \times 2$  et ainsi de suite. Ces points ne font intervenir que les mailles endroit et envers, mais il existe une multitude de points classiques faisant intervenir d'autres types de mailles (fig. I.6.e). Il n'existe pas un nombre fini de points puisque tout ensemble de mailles qui n'est pas constitué d'un sous-ensemble périodisé peut être défini comme un point. La taille d'un point varie donc d'une simple maille à un nombre arbitraire de mailles.

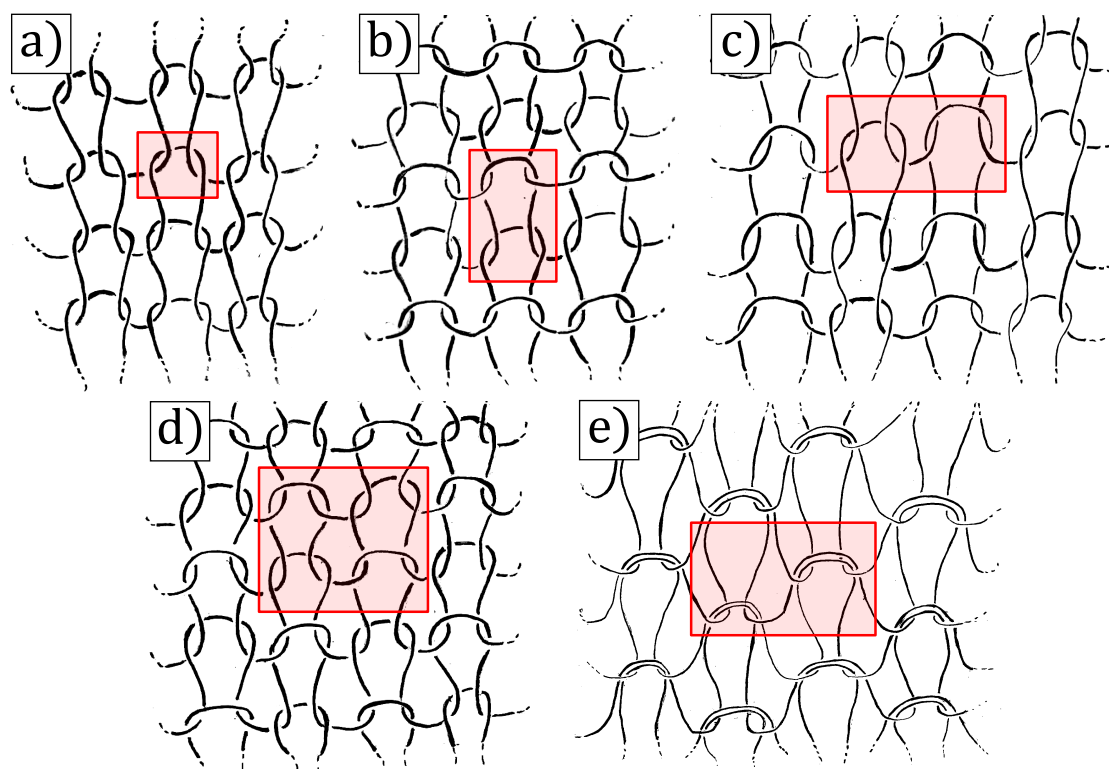


FIGURE I.6 – La troisième étape, le point. Schémas de différents points répétés. Le point à proprement parler est encadré en rouge. a) Le point Jersey, constitué d'une maille endroit. b) Le point mousse, qui alterne les rangs droits et envers. c) Le point côte  $1 \times 1$  qui alterne endroit et envers à chaque colonne. d) Le point de riz, droits et envers forment un damier. e) Le point dit *Lacoste*, constitué seulement de mailles jetées.

#### d) ... pour finir par engendrer un tricot.

La quatrième et dernière étape réside dans la fabrication du tricot en lui-même à partir d'un ou plusieurs points. En effet, un tricot peut être constitué d'un seul point répété sur tout son ensemble (fig. I.7.a), mais la variété de point peut aussi évoluer au gré de sa position. On peut ainsi localement modifier les propriétés du tricot, qu'elles soient mécaniques ou esthétiques (fig. I.7.b), en adaptant le type de points, ou le fil, à ce qui est souhaité. C'est par exemple en passant d'un motif Jersey à côtes que l'extrémité des manches est rendu plus déformable (fig. I.7.c). Les chaussettes de randonnées sont aussi un bon exemple de variations de motif pour s'adapter spatialement à la morphologie et aux contraintes (fig. I.7.d). Pour fabriquer un tricot de taille finie, il existe donc un nombre faramineux de degrés de libertés structurels, qui engendreront une diversité extraordinaire de réponses mécaniques ou de formes.

### I.3.2 Élasticité et friction

Après avoir vu en détail comment se structure un tricot, cette section a pour but d'introduire les principes physiques qui entrent en jeu dans sa description. On s'intéresse ici au tricot comme métamatériau mécanique, cela va donc faire intervenir les notions d'élasticité et de déformation des matériaux. De plus, la structuration se faisant via des croisements de fils, cela rend nécessaire la prise en compte des frottements solides.

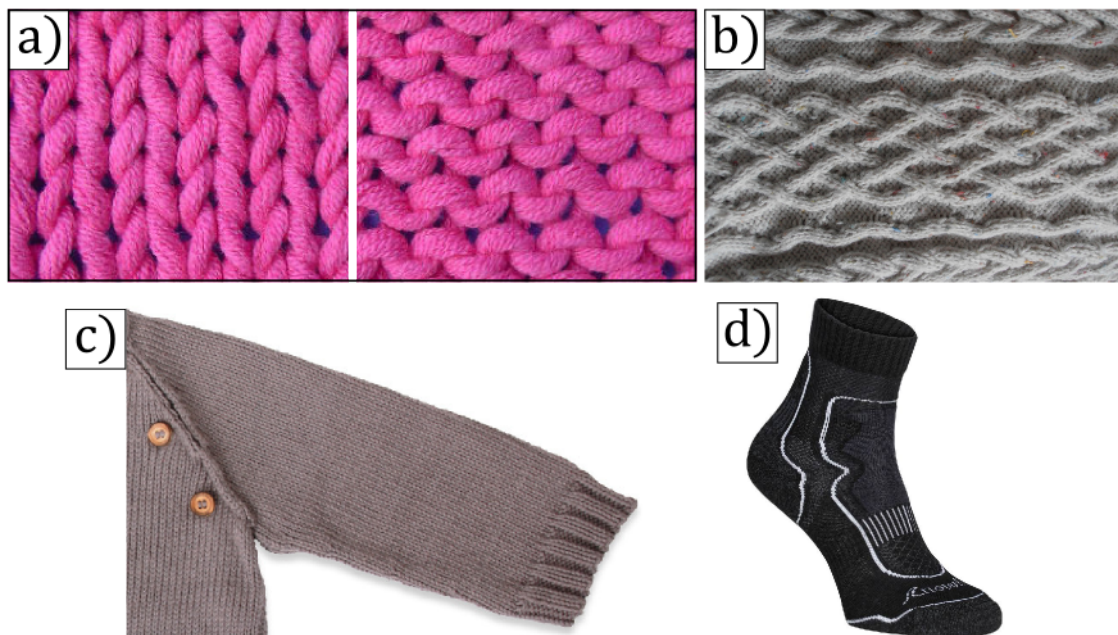


FIGURE I.7 – La dernière étape, le tricot. a) Tricot uniquement Jersey, face endroit à gauche et envers à droite (**Tricotin**). b) Écharpe présentant différents motifs de torsades (**blog de Celeena**). c) Manche de pull en Jersey dont l'extrémité est en côte 2 × 2 (**Mamy Factory**). d) Chaussette pour marche nordique présentant une variété de points et de fils utilisés pour s'adapter aux différentes parties du pied (**Decathlon**).

### a) Mécanique et tricot

En fonction de l'échelle à laquelle on observe un tricot, on peut être tenté de décrire sa mécanique de différentes manières. En le regardant de près, on va s'intéresser à la mécanique de son fil constitutif, c'est-à-dire à la mécanique d'un objet essentiellement unidimensionnel (que l'on appellera une tige pour emprunter un vocabulaire plus proche de celui de la mécanique). Par contre, si on prend du recul et regarde le tricot dans son ensemble, il apparaît comme un objet bidimensionnel (une plaque) qui peut se déformer dans son plan mais aussi prendre une forme tridimensionnelle. L'objectif ici n'est pas de passer en revue et redémontrer les équations de la mécanique des tiges et des plaques, il existe déjà de très bons livres pour cela [41, 42], mais de présenter les concepts qui seront utiles par la suite.

**Élasticité d'une tige.** Quand on parle de mécanique d'une tige, on se place dans la situation où l'état de la tige est entièrement déterminé par une description externe sans avoir à s'occuper de sa structure interne. Sa forme est alors décrite par la trajectoire du centre de masse de chaque section, appelé ligne neutre, et donc réductible à un objet strictement 1D. Trois vecteurs formant un repère orthonormé et suivant le repère de la tige,  $(\vec{d}_1(s), \vec{d}_2(s), \vec{d}_3(s))$ , permettent la description de cette trajectoire, avec ici  $s$  désignant l'abscisse curviligne de la ligne neutre. L'évolution de ces vecteurs lorsqu'ils parcourent la tige va être directement reliée à la déformation de cette dernière et peut être décrite de la façon suivante :

$$\frac{d}{ds} [\vec{d}_1(s)] = \vec{\Omega}(s) \wedge \vec{d}_1(s) \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{d}{ds} [\vec{d}_2(s)] = \vec{\Omega}(s) \wedge \vec{d}_2(s) \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{d}{ds} [\vec{d}_3(s)] = \vec{\Omega}(s) \wedge \vec{d}_3(s) \quad (\text{I.3})$$

$$\text{avec } \vec{\Omega}(s) = \kappa_1(s)\vec{d}_1(s) + \kappa_2(s)\vec{d}_2(s) + \tau(s)\vec{d}_3(s) \quad (\text{I.4})$$

Le vecteur  $\vec{\Omega}(s)$  est appelé vecteur de Darboux et fait intervenir les fonctions scalaires  $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$  et  $\tau(s)$  qui quantifient la rotation du repère attaché à la ligne neutre de la tige dans les trois directions. La rotation autour du vecteur tangent à la ligne neutre  $\vec{d}_3$  est donnée par  $\tau(s)$  et représente la torsion de la tige. Alors que les rotations autour des deux vecteurs orthogonaux à cette ligne  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  décrivent la façon dont elle se courbe et sont quantifiés par  $\kappa_1(s)$  et  $\kappa_2(s)$  appelés courbures (fig. I.8). On définit alors les rayons de courbure locale du fil par  $R_1 = \frac{1}{\kappa_1}$  et  $R_2 = \frac{1}{\kappa_2}$ . Cette description reste purement cinématique et ne fait pas intervenir l'élasticité du fil, elle peut donc servir à décrire la forme de n'importe quel genre de fil.

Ces courbures et torsion sont directement liées à l'énergie élastique du fil. Il faut donc introduire un modèle élastique du fil en lui-même qui va permettre de faire le lien entre sa déformation et les forces auquel il est soumis. On se place dans le cadre où le fil est un milieu élastique homogène isotrope et qui suit la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.5})$$

Les indices  $i, j, k$  qui peuvent prendre les valeurs de  $[1, 2, 3]$  indiquent les directions  $x_1, x_2, x_3$  d'un repère orthonormé attaché aux points matériels à l'intérieur du fil.  $\sigma_{ij}$

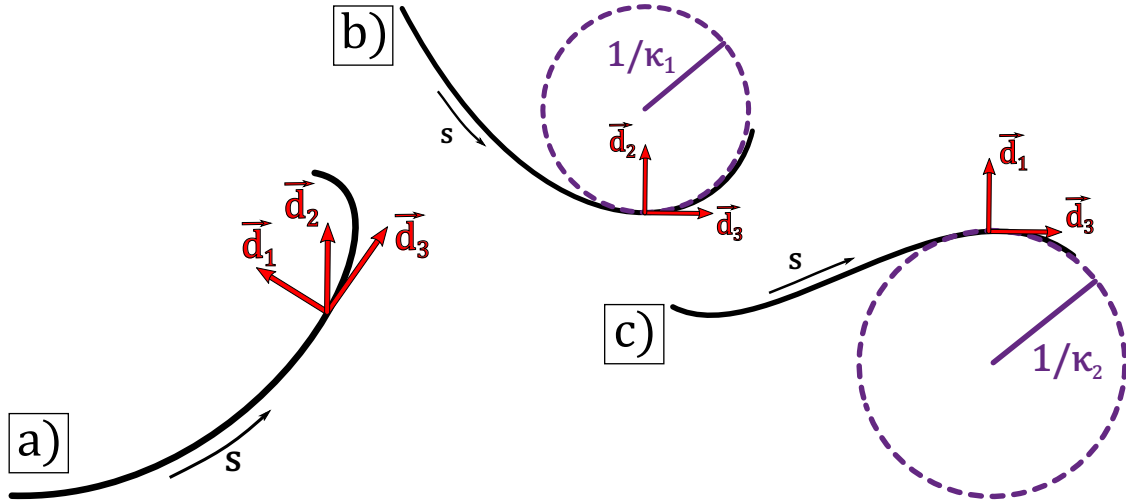


FIGURE I.8 – Cinématique d'une tige. a) Schéma représentant  $(\vec{d}_1(s), \vec{d}_2(s), \vec{d}_3(s))$ . b) Représentation des courbures  $\kappa_1(s)$  et  $\kappa_2(s)$

est la contrainte portée par la surface dont la normale est dirigée selon  $x_i$  et orienté dans la direction  $x_j$ .  $\varepsilon_{ij}$  est la déformation définie par  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  avec  $\vec{u}$  le champ de déplacement des points matériels du fil. La notation  $\varepsilon_{kk}$  sous-entend la somme  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ . L'élasticité de Hooke est caractérisée par deux modules élastiques : le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Ces formules sont valables seulement dans le cas de faibles déformations, c'est-à-dire  $\varepsilon_{ij} \ll 1$ , la réponse restant alors linéaire.

Avec ce modèle élastique et cette description cinématique du fil, on peut alors montrer que l'énergie élastique d'une tige peut s'écrire sous la forme suivante dans le cadre de petites déformations (voir par exemple [41], chapitre 3) :

$$\mathcal{E}_{tige} = \int_{\Lambda} ds \left( B_1(\kappa_1(s))^2 + B_2(\kappa_2(s))^2 + T_\tau(\tau(s))^2 \right) \quad (\text{I.6})$$

Avec  $\Lambda$  la longueur totale de la ligne neutre du fil, les coefficients  $B_1$  et  $B_2$  sont appelés modules de flexion du fil et le coefficient  $T_\tau$  module de torsion. Les deux premiers termes correspondent à l'énergie de flexion du fil et le dernier à l'énergie de torsion. Les modules de flexion sont définis par  $B_1 = \frac{EI_1}{2}$  et  $B_2 = \frac{EI_2}{2}$  avec  $I_1, I_2$  les moments d'inertie du fil qui dépendent de sa géométrie :  $I_1 = \iint_{\mathcal{D}(s)} dx_1 dx_2 (x_1)^2$  et  $I_2 = \iint_{\mathcal{D}(s)} dx_1 dx_2 (x_2)^2$ . Les

moments d'inertie dépendent de la géométrie locale de la section  $\mathcal{D}(s)$  suivant les deux directions données par  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , la position  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  étant donnée par la position de la ligne neutre du fil. Par exemple, pour un fil cylindrique de diamètre constant  $d$ , on a  $I_1 = I_2 = \frac{\pi d^4}{64}$  et  $B = \frac{E\pi d^4}{128}$ . Au final avec ce formalisme, l'énergie de flexion du fil peut s'exprimer simplement en fonction des courbures locales du fil  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  et de coefficients faisant intervenir sa géométrie et de son élasticité, sans avoir à faire intervenir les variables et la déformation interne du fil. Il en est de même pour la torsion,  $T_\tau = \frac{EJ}{4(1+\nu)}$  avec  $J$  la rigidité de torsion qui ne dépend aussi que de la géométrie de la section et égale à  $\frac{\pi d^4}{32}$  pour un fil cylindrique de diamètre  $d$ . Malgré les déformations du fil par courbure et torsion,

sa ligne neutre, définie par le centre de masse de chaque section  $\mathcal{D}(s)$ , n'a pas à subir d'extension. L'extension du fil est une déformation indépendante de la flexion ou torsion. Elle est caractérisée la variation de la longueur de la ligne neutre  $\Lambda$ , et une variation de  $\delta\Lambda$  porte une énergie donnée par  $\mathcal{E}_{ext} = \frac{\pi d^2}{8} \Lambda E \left( \frac{\delta\Lambda}{\Lambda} \right)^2$ .

Pour résumer, ce formalisme dit de tige "mince" permet de s'affranchir d'une description interne de la déformation du fil pour réduire le problème mécanique à la trajectoire du fil décrit par ses courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et sa torsion  $\tau$  et donc à un objet uni-dimensionnel. Combiné avec l'élasticité du fil et des paramètres géométriques, l'énergie du fil s'écrit simplement en fonction de cette trajectoire et de l'allongement. Les formes d'équilibre de ce fil sont données par les équations de Kirchhoff qui ne seront pas détaillées dans ce manuscrit [43, 44, 45]. Cette approche reste valable pour de faibles déformations et tant que la taille transverse caractéristique du fil (son diamètre) reste petit devant les courbures de la trajectoire ( $R_1$  et  $R_2$ ). Dans le cas d'un fil qui ne suit pas l'élasticité de Hooke, comme les fils de laine par exemple, la formule donnant l'énergie du fil reste valable mais les modules de flexion et de torsion ne peuvent plus être simplement calculés à partir du module élastique et de la géométrie du fil.

**Élasticité d'une plaque.** Lorsque l'on pense à un tricot, l'image qui vient naturellement à l'esprit est celle d'une surface, d'un objet de faible épaisseur qui s'étend dans deux dimensions. Il est donc intéressant d'emprunter des outils de la mécanique des plaques pour décrire un tricot dans son ensemble et pour comparer leur élasticité. La théorie de l'élasticité des plaques dites "mince" repose, de la même manière que celle des tiges, sur la réduction d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Ainsi il n'est plus nécessaire de décrire les déformations internes de la plaque, la forme de sa surface neutre suffit. Cette approche n'est valable que pour de faibles déformations et lorsque la dimension transverse de la plaque, son épaisseur  $h$ , est très petite devant ses dimensions longitudinales. Dans ces conditions, la plaque va alors suivre la théorie de Kirchhoff-Love [42].

En partant d'une plaque non déformée à l'équilibre, on définit un repère orthonormé  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tel que  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  appartiennent au plan à mi-hauteur de la plaque, c'est-à-dire à sa surface neutre, et  $\vec{e}_3$  en est perpendiculaire. Le déplacement de cette surface  $\vec{u}(\vec{x})$  est décomposé en deux parties, une qui reste dans le plan de la plaque  $\vec{u}^0(x_1, x_2) = u_1^0(x_1, x_2)\vec{e}_1 + u_2^0(x_1, x_2)\vec{e}_2$  et une autre qui sort du plan  $w(x_1, x_2)\vec{e}_3$ . Les variations spatiales de  $\vec{u}^0$  traduisent des déformations dans le plan de la surface, que l'on appelle des changements de métriques, alors que les variations de  $w$  traduisent une courbure de la plaque. Les déformations liées à la métrique de la plaque sont définies par :

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \quad (\text{I.7})$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \quad (\text{I.8})$$

$$\varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{21} \quad (\text{I.9})$$



Les courbures de cette surface sont alors définies par :

$$\kappa_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (\text{I.10})$$

$$\kappa_{22}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (\text{I.11})$$

$$\kappa_{12}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \kappa_{21} \quad (\text{I.12})$$

Dans le cadre de la théorie de Kirchhoff-Love et pour un matériau vérifiant la loi de Hooke, on obtient l'expression suivante de l'énergie d'une plaque [41, 46] :

$$\mathcal{E}_{\text{plaque}} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_b \quad (\text{I.13})$$

$$\mathcal{E}_s = \frac{D_s}{2} \iint dx_1 dx_2 \left[ (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1 - \nu) (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) \right] \quad (\text{I.14})$$

$$\mathcal{E}_b = \frac{D_b}{2} \iint dx_1 dx_2 \left[ (\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1 - \nu) (\kappa_{11}\kappa_{22} - (\kappa_{12})^2) \right] \quad (\text{I.15})$$

Avec les modules d'extension  $D_s = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  et de flexion  $D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  et  $\nu$  respectivement le module d'Young et de Poisson du matériau de la plaque et  $h$  son épaisseur. Comme dans le cas de l'énergie d'une tige, l'énergie d'une plaque mince peut s'exprimer uniquement par la déformation de sa surface neutre, sans avoir à considérer les déformations à l'intérieur de la plaque. Dans le cas particulier où les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  correspondent aux vecteurs propres de la matrice de courbure  $C_{ij}^\kappa = \kappa_{ij}$ , l'énergie de flexion de la plaque peut alors s'écrire :

$$\mathcal{E}_b = D_b \iint dx_1 dx_2 \left[ 2 \left( \frac{\kappa_I + \kappa_{II}}{2} \right)^2 - (1 - \nu) \kappa_I \kappa_{II} \right] \quad (\text{I.16})$$

Avec  $\kappa_I$  et  $\kappa_{II}$  les courbures principales définies comme les valeurs propres de  $C^\kappa$ . Cela permet de mettre en évidence la relation entre l'énergie de flexion et la courbure moyenne  $H = \frac{\kappa_I + \kappa_{II}}{2}$  et la courbure de Gauss  $Ke = \kappa_I \kappa_{II}$  de la plaque. La courbure de Gauss est fortement liée à la métrique de la plaque, en effet, une variation de cette courbure entraîne forcément une variation de métrique (théorème *Egregium* de Gauss). Ainsi, une plaque bien plus résistante aux changements de métrique qu'à la flexion, gardera une métrique constante (isométrie) et donc une courbure de Gauss constante. On appelle ce genre de surface des surfaces développables.

On peut par ailleurs déterminer les conditions d'équilibre d'une plaque en termes d'équations différentielles sur les contraintes ou les déformations. Par un équilibre des forces et moments sur un morceau de plaque de taille infinitésimale, on obtient les équations suivantes pour de faibles déformations et sans force selon  $\vec{e}_3$ , :

$$0 = \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} \quad (\text{I.17})$$

$$0 = \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} \quad (\text{I.18})$$

$$0 = \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \quad (\text{I.19})$$

Avec  $N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dx_3$  les forces linéiques s'appliquant sur les parois du morceau de plaque et  $M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{ij} dx_3$  les moments linéiques correspondants. Si on considère que la plaque a une élasticité linéaire, cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Ces relations permettent donc d'écrire les équations d'équilibres précédentes en terme de déformations et de courbures.

### b) Frottements aux points de contact

Dans un tricot, la trajectoire du fil n'est pas libre mais fortement contrainte par la topologie du point tricoté. Les phénomènes de friction solide vont alors entrer en jeu aux points de croisement du fil. La friction va introduire deux effets majeurs : l'ajout de nouvelles forces aux contacts et l'ajout d'une non-linéarité.

Le frottement sec entre deux solides est un problème délicat car il fait intervenir de nombreux phénomènes physiques sur une grande gamme d'échelles de longueurs. Un solide posé sur un autre peut être regardé à différentes échelles, au niveau des interactions électrostatiques ou au niveau des atomes en contacts [47, 48], mais aussi à travers la statistique de la rugosité à l'échelle micrométrique [49, 50, 51], ou enfin par des observations macroscopiques de l'objet dans son ensemble [52, 53, 54, 55]. Dans le cas un peu particulier qui nous concerne, à savoir le contact entre deux fils, les études se focalisent en majorité sur les comportements macroscopiques [56, 57] pour décrire des situations où le fil a une topologie non triviale [26, 27, 58, 28] ou encore lorsque de nombreux fils interagissent dans les textiles ou les cheveux par exemple [59, 60, 61, 62, 63].

Dans cette étude, on va se restreindre à une vision macroscopique de la friction solide, qui suit l'approche historique [52, 53]. Le premier effet d'un contact est d'introduire une force normale, perpendiculaire à la surface de contact entre les objets en contact, en accord avec la troisième loi de Newton. Si le frottement entre les deux fils n'est pas nul, une force perpendiculaire à la première vient s'ajouter et s'opposer au mouvement. La norme de cette dernière force possède un maximum proportionnel à la force normale. Le coefficient de proportionnalité  $\mu_s$  est appelé coefficient de frottement statique. La force de frottement maximale est proportionnelle à la surface réelle de contact entre les deux solides, qui, de part la rugosité des surfaces, est bien plus faible que la surface de contact apparente et varie en première approximation linéairement avec la force normale [64]. La force de frottement apparaît donc insensible à un changement de surface apparent. Pour deux surfaces solides sèches en contact, si l'on vient tirer sur l'une avec une force  $\vec{T}$  parallèle à la surface de contact, apparaît alors la force de frottement  $\vec{f}$  qui vérifie les



relations suivantes :

$$\vec{f} = -\vec{T} \quad \text{tant que} \quad \|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{P}\| = f_s \quad (\text{I.21})$$

$$\vec{f} = -\mu_d \|\vec{P}\| \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|} \quad \text{si} \quad \|\vec{T}\| \geq f_s \quad (\text{I.22})$$

Avec  $\vec{P}$  la force normale aux surfaces en contacts,  $\mu_s$  et  $\mu_d$  les coefficients de frottement statique et dynamique respectivement (fig. I.9.a). Tant que  $T$  reste inférieur à la valeur critique  $f_s$  le frottement compense exactement la force de traction et les surfaces restent alors immobiles. Si  $T$  est supérieur à  $f_s$  la force de frottement prend alors la valeur  $\mu_d P \leq f_s$ , la surface n'étant plus à l'équilibre, elle va donc commencer à bouger dans la direction de  $\vec{T}$ . Le coefficient de friction  $\mu$  prend alors une valeur différente que les surfaces soient immobiles ou en mouvement. La variation de  $\mu$  avec la vitesse de glissement  $V$  est complexe [55] mais peut en première approche être décrite par  $\mu = \mu_s$  quand  $V = 0$  et  $\mu = \mu_d$  sinon, avec  $\mu_s$  et  $\mu_d$  deux constantes telles que  $\mu_s < \mu_d$ .

Par conséquent, la friction vient ajouter une composante non linéaire à la mécanique des fils en introduisant une indétermination dans l'estimation des forces dans une structure à l'équilibre. En effet, toute la gamme de force où  $T < f_s$  possède la même position d'équilibre, on perd donc l'unicité de la combinaison de forces qui permet d'atteindre l'équilibre. De plus, le fait que  $\mu_s < \mu_d$  entraîne l'apparition d'un phénomène dynamique appelé "stick-slip" ou "collé-glissé". Dans le cas où une des surfaces est tirée à vitesse constante  $V$  par un objet de type ressort, la surface reste immobile et la traction  $T$  va augmenter progressivement jusqu'à atteindre  $f_c$ . La force  $f$  qui résiste au mouvement va alors chuter brusquement à la valeur  $\frac{\mu_d}{\mu_s} f_s < f_s$  et la surface va se déplacer dans la direction de  $\vec{T}$  ("slip"), avec pour conséquence de diminuer  $T$ . Lorsque  $T$  redescend à la valeur  $\frac{\mu_d}{\mu_s} f_s$ , la surface est de nouveau à l'équilibre et s'immobilise ("stick").  $T$  va donc recommencer à augmenter jusqu'à atteindre  $f_s$  et le cycle va recommencer, induisant une réponse périodique dans le temps. Si le temps caractéristique du chargement ( $f = T$ ) est bien plus long que le temps de glissement ( $f = \frac{\mu_d}{\mu_s} f_s$ ), la réponse périodique de  $T$  est asymétrique et adopte une forme caractéristique d'ascension lente suivie d'une brusque chute.

Ce signal intermittent en dent de scie est caractéristique du phénomène appelé "stick-slip". Pour que ce signal soit bien visible, il faut que les paramètres du système soient correctement choisis. Augmenter la norme de la force normale  $P$ , permet de bien mettre en évidence les phases "stick" et "slip" (fig. I.9.b) car le saut de force lors du glissement étant de  $(\mu_s - \mu_d)P$ , plus  $P$  est grand, plus ce saut sera visible. En diminuant la raideur du ressort (à vitesse constante), ou de manière équivalente, en diminuant la vitesse de chargement, la durée des phases de "stick" sera plus longue. Cet effet contribue à mieux séparer l'échelle de durée entre les deux phases et donc permet de mieux les distinguer.

## I.4 État de l'art de la mécanique du tricot

Cette section a pour but de passer en revue les principaux travaux académiques portant sur le tricot, avec leurs différentes approches et résultats obtenus.

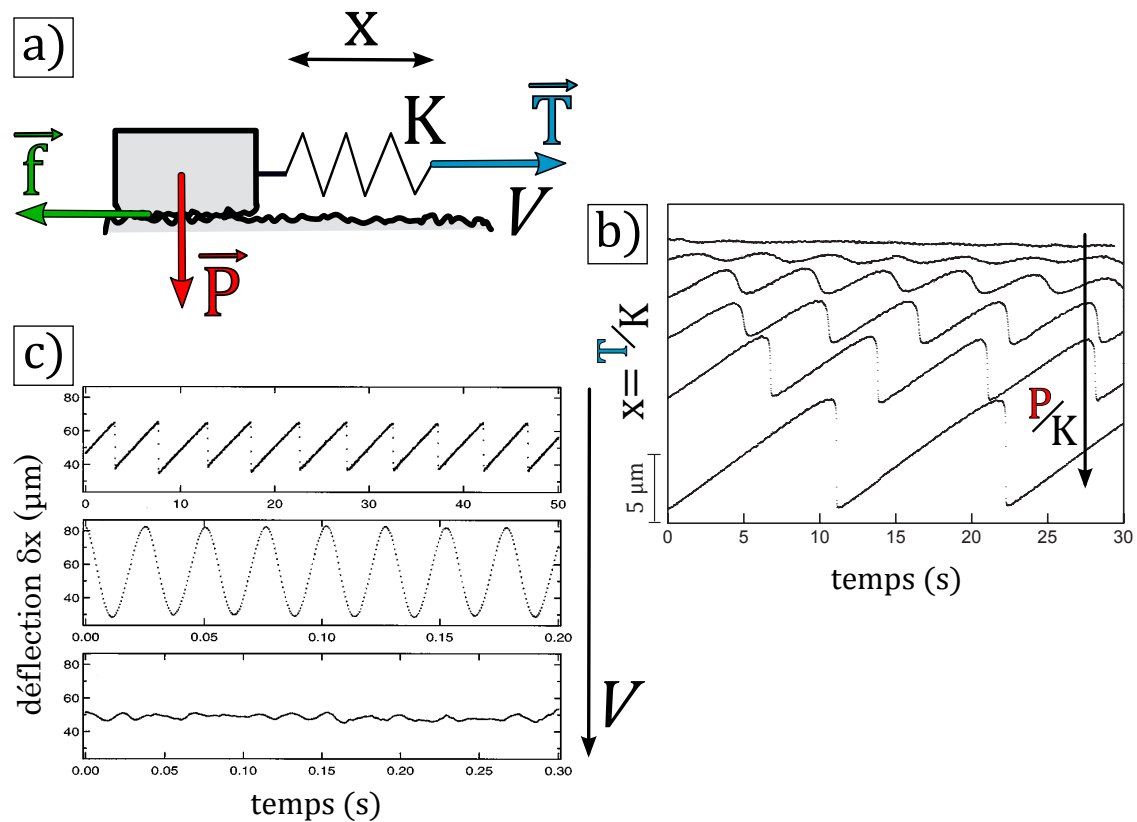


FIGURE I.9 – a) Représentation schématique d'un contact entre deux solides tiré de [55] puis adapté à nos notations. La force normale  $\vec{P}$ , la force de frottement  $\vec{f}$  et la force de traction  $\vec{T}$  sont représentées. Le solide est tiré à une vitesse  $V$  par un ressort de raideur  $K$ ,  $T$  est ainsi linéaire avec l'allongement  $x$  du ressort :  $T = Kx$ .  $T$  et  $x$  augmentent donc linéairement avec le temps dans une situation "stick". b) Mesure expérimentale de  $x$  en fonction du temps lorsqu'une surface de papier est tirée sur une autre par un ressort à vitesse constante  $V = 1 \mu\text{m/s}$ , graphique tiré de [55]. La flèche indique une augmentation du rapport force normale sur raideur du ressort  $\frac{P}{K}$  entre les différentes courbes. Au fur et à mesure que ce rapport augmente, le système évolue d'un mouvement continu à un mouvement saccadé typique du "stick-slip" et qui augmente en amplitude. Les phases de "stick" se caractérisent par l'évolution linéaire de l'élongation, alors que les chutes brusques témoignent du "slip". c) Expérience similaire avec un radeau poussé par une lame fléchie élastique sur un lit granulaire à vitesse constante, graphique tiré de [65]. La flèche indique une augmentation de la vitesse de poussée de la lame entre les différents graphiques. Avec cette expérience aussi un phénomène de stick-slip est observé aux faibles vitesses. Lorsque la vitesse augmente, si la durée entre deux événements est du même ordre que celle de la chute de force, le système entre dans un régime inertiel et un signal quasi-harmonique est observé. À encore plus forte vitesse, le "stick-slip" disparaît quasiment et le signal devient beaucoup plus lisse.

### I.4.1 Description géométrique

Les travaux précurseurs se basaient principalement sur une description de la géométrie et de la topologie des mailles sans faire intervenir l'élasticité du fil. L'objectif, directement lié aux problématiques de l'industrie du tricot, est de pouvoir prédire la taille définitive d'un tricot en fonction des paramètres de la machine et du fil. La première contribution vient de F.T. Peirce en 1947 [66], qui décrit la trajectoire tridimensionnelle d'un fil du tricot comme une succession d'arcs de cercle et de lignes droites (fig. I.10.a). Le tricot étant entièrement compact, l'espacement des mailles dans les directions des lignes ("courses" en anglais) ou colonnes ("wale" en anglais) étant entièrement déterminé par le diamètre du fil. Cette description permet d'exprimer la densité de mailles dans la direction des colonnes ou des lignes, l'épaisseur et la masse surfacique du tricot en fonction notamment du diamètre du fil. L'effet de ces paramètres géométriques sur la réponse mécanique de tricots a aussi été étudié expérimentalement [67]. Toutefois, cette description induit des discontinuités dans la torsion du fil lorsqu'il parcourt une maille, comme pointé par G.A.V. Leaf et A. Glaskin en 1955 [68], ce qui signifie que le fil ne peut être à l'équilibre mécanique sans y introduire de précontraintes. Ces auteurs proposent alors une correction qui n'induit plus de discontinuité et qu'ils généralisent à des tricots moins compacts. D.L. Munden [69] développe alors cette idée d'équilibre mécanique en affirmant que si équilibre il y a, la forme d'une maille ne doit pas varier avec les propriétés ou la longueur du fil la composant, tant que le fil présente un comportement élastique. Il ajoute alors une correction aux descriptions précédentes pour prendre en compte cet équilibre. Il entreprend aussi de mesurer expérimentalement les coefficients qui relient les dimensions d'un tricot et la longueur de fil dans une maille, et qui sont définis par les équations suivantes :

$$d_N = \frac{K_1}{\ell^2} \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{1}{W} = \frac{K_2}{\ell} \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{1}{C} = \frac{K_3}{\ell} \quad (\text{I.25})$$

Avec  $\ell$  la longueur de fil dans une maille,  $d_N$  la densité surfacique de mailles du tricot,  $W$  et  $C$  la distance entre, respectivement, deux colonnes ("wale") et deux lignes ("course") successives. Les coefficients  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  sont mesurés à partir de tricots plus ou moins fins et constitués de fils de différentes natures. L'auteur souligne cependant que les grandeurs  $C$  et  $W$  sont difficiles à mesurer car lors de sa fabrication, le tricot est soumis à de fortes contraintes et sa relaxation dans un état d'équilibre n'est pas bien maîtrisé [70, 71, 72]. Les deux techniques utilisées pour relaxer un tricot sont, une agitation mécanique "à sec", ou bien laisser reposer le tricot dans un liquide mouillant (en général de l'eau pour le coton, la laine...) pendant plusieurs heures puis de le sécher sans appliquer de contraintes mécaniques supplémentaires. Les deux procédés donnent des coefficients  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  proches mais tout de même différents.

La géométrie d'un tricot a aussi été étudié par P. Popper [73] dans un autre cas-limite où la courbure se concentre aux points de croisement des fils (fig. I.10.b). Ce cas correspond à un tricot soumis à des contraintes bi-axiales fortes. Le fil étant considéré comme inextensible et inélastique, il reste droit entre les croisements, ce qui permet d'avoir simplement un lien géométrique entre les contraintes s'appliquant à la maille et la tension

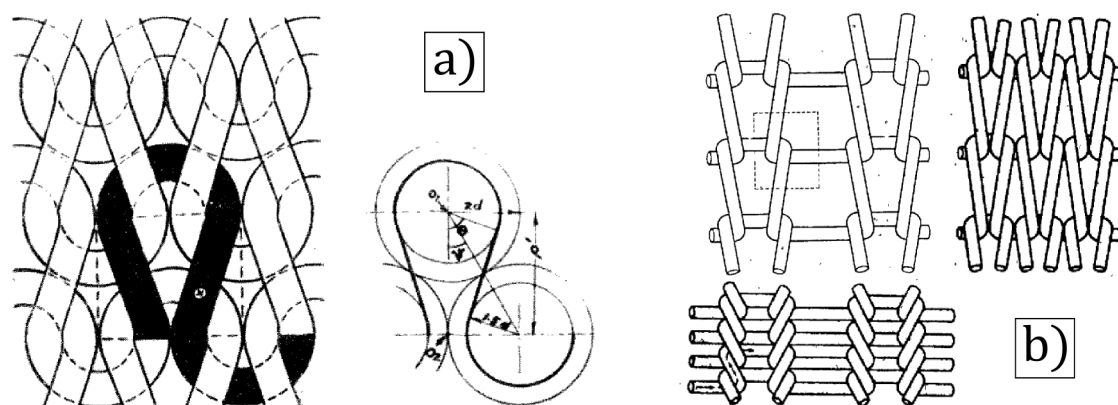


FIGURE I.10 – Description géométrique d'un tricot. a) Modèle de F.T. Peirce, le tricot suit une succession d'arc de cercles et de lignes droites. Les mailles étant à leur densité maximale, c'est le diamètre du fil qui va déterminer leur dimension (images extraites de [66]). b) Modèle de P. Popper du tricot sous fortes contraintes biaxiales. En bas, cas-limites d'extension dans la direction "course", à droite, cas-limite dans la direction "wale" (images extraites de [73]).

dans le fil. Ainsi l'auteur a pu exprimer le rapport entre les contraintes dans les directions course et wale en fonction des dimensions de la maille. Dans cet article, il discute aussi de l'effet du frottement entre fils et de son rôle dans l'hystérésis qui est observée entre l'aller et le retour dans les expériences de tractions du tricot. La force de frottement étant toujours opposée au mouvement, lorsqu'un objet frottant est tiré puis compressé par une force  $\vec{T}$ , le frottement va venir s'opposer à  $\vec{T}$  lors de la traction, mais changera de signe lors de la compression. Ainsi il en déduit qu'avec de la friction la réponse mécanique d'un tricot est sur-estimée lors de la traction et sous-estimée lors de la compression, la réponse idéale sans frottement si situant entre les deux. Cette approche du tricot sous fortes contraintes a été reprises par la suite en y ajoutant une structure tri-dimensionnelle [74] ou plus récemment l'élasticité du fil [75]. Cette approche géométrique a depuis aussi été utilisée pour décrire des mailles plus compliquées que la simple maille endroit [76, 77, 78, 79, 80].

Une approche complètement différente a été proposée dans le tout récent travail de C. Knittel et al [81] où la trajectoire du fil est élégamment décrite par des surface bi-continues.

## I.4.2 Élasticité sous contrainte

Dans l'optique de trouver quelle est la forme réelle à l'équilibre mécanique d'une maille, la géométrie ne suffit pas, il faut faire intervenir l'élasticité du fil. Le problème est loin d'être simple car l'élasticité du fil est contrainte par les contacts avec le fil des rangs adjacents. La difficulté revient alors à trouver la, ou plutôt les, descriptions appropriées de ces contacts en termes mécaniques.

Une grande partie des travaux réalisés décrivent la forme au repos de la maille par l'équilibre des forces et couples qui s'appliquent au fil. En première approximation, le fil est considéré purement unidimensionnel et inextensible. La forme projetée dans un

plan de ce type de fil soumis à un ensemble de forces et couples est décrit par la théorie dites d'Euler-Bernouilli ou *Elastica*. Cette approche a commencé avec G.A.V. Leaf en 1960 [82] avec les contacts induisant des forces et couples ponctuels, mais avec encore une partie de la trajectoire décrite par une géométrie arbitraire. Ces travaux précurseurs ont engendré une pléthore de modèles pour décrire cette forme à partir de l'équilibre des forces. Une première série d'études [83, 84, 85] visait à étendre l'analyse à trois dimensions et à ne plus avoir à reposer sur une description géométrique préalable. Une fois l'état d'équilibre de la maille obtenu, il est assez aisé de calculer sa réponse mécanique à des forces modérées en utilisant le même modèle [86, 87, 88]. S'ensuit alors de vifs échanges entre une équipe australienne [85] et une équipe anglaise [89, 90] portant principalement sur la modélisation des contacts par une force ponctuelle ou non et les conséquences que cela a sur la forme finale. Cette question devenant critique lorsque la déformation est suffisamment importante pour venir mettre en contacts les boucles de mailles voisines, phénomène appelé "jamming" ou saturation des mailles. Le débat est en partie clos par l'équipe australienne en présentant une approche non pas basée sur un équilibre des forces mais sur une minimisation de l'énergie élastique et mécanique du fil [91, 92]. Les contacts sont alors modélisés par un potentiel d'énergie variable tout le long du fil.

Au final, ces études sur la forme d'une maille à l'équilibre montrent notamment que l'équilibre des forces, ou de manière équivalente le minimum d'énergie, n'est pas fortement contraint. Ce qui se traduit par des pentes très faibles autour du minimum d'énergie. Donc même si cet état existe théoriquement, il est quasiment impossible à atteindre expérimentalement car les forces qui le pousseraient vers l'équilibre seraient trop faibles pour vaincre notamment le frottement et assurer cet état d'équilibre pour toutes les mailles d'un tricot. Il a donc été entrepris ultérieurement de construire une base de donnée expérimentale sur les dimensions de tricots à l'équilibre [93, 94], nommé "Starfish project".

L'étude théorique de la mécanique du tricot a connu un regain d'intérêt dans les années 1990-2000 avec l'apparition de nouvelles applications dans les renforts de composites. Les travaux précédents ont alors été revisités de manière plus intelligible. Pour le point de vue équilibre des forces et moments, des travaux plus récents [95] modélisent le croisement par une force et un moment ponctuel qui peut se déplacer (fig. I.11.a). Le résultat de la forme et de la réponse mécanique du système est alors donné analytiquement (sous forme d'intégrales elliptiques) avec comme entrées du modèle  $C$ , l'espacement entre lignes,  $W$  l'espacement entre colonnes,  $\ell$  la longueur de fil par maille,  $d$  le diamètre du fil et  $B$  son module de flexion. L'approche énergétique a aussi été reconsidéré [96, 97] en y incluant tous les modes de déformation (extension, flexion et torsion) ainsi que le travail des tensions extérieures. La forme est paramétrée par des fonctions arbitraires qui donne au fil l'aspect d'une maille mais avec tout de même des degrés de liberté pour permettre une relaxation vers un minimum énergétique. Une alternative à cette méthode modélise le fil par la méthode des éléments finis [98]. En revanche, toutes ces études se limitent à la description d'une maille unique et non d'un tricot dans son ensemble. Les comparaisons avec les expériences supposent toujours une déformation identique de toutes les mailles du tricot.

Finalement, le développement des capacités de calcul des ordinateurs et l'intérêt croissant pour l'animation numérique ont permis de modéliser des tricots entiers en partant de l'élasticité d'un fil [100, 101, 102, 99] (fig. I.11.b). Le fil, considéré inextensible, est découpé en segments dont la trajectoire tridimensionnelle est décrite par des polynômes

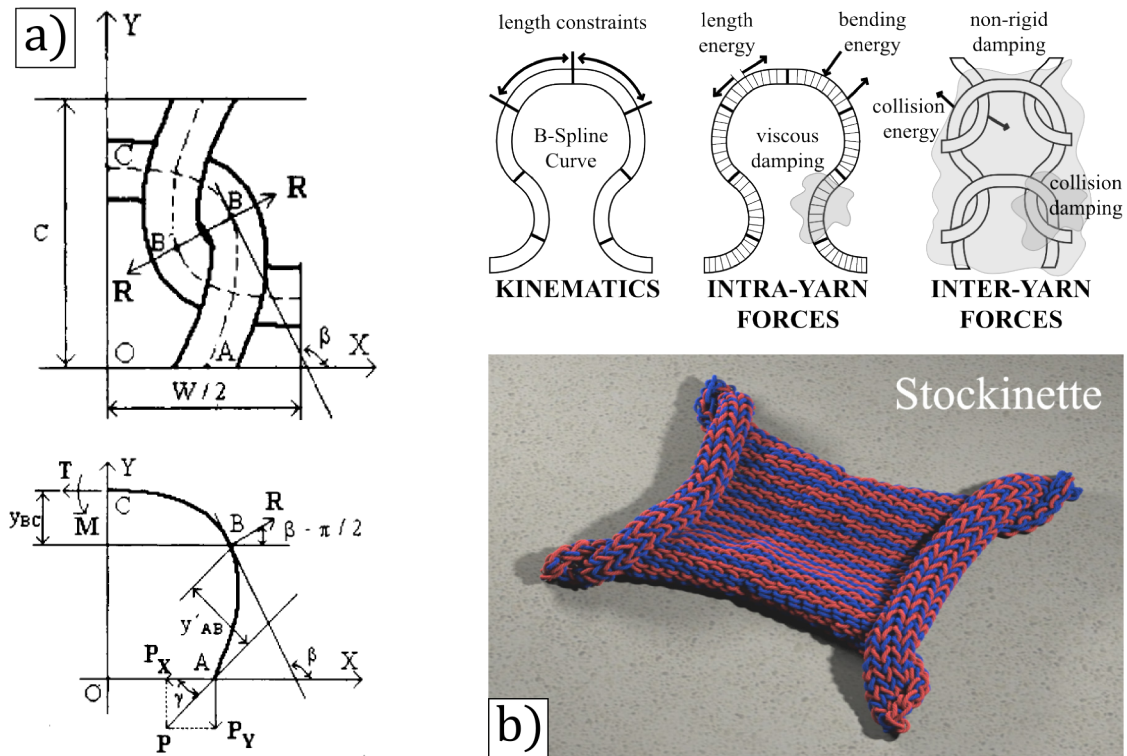


FIGURE I.11 – Exemples de modèles élastiques du tricot a) Modèle de H. Hong et al, la trajectoire du fil dans une maille est décrite par l'équilibre d'un fil élastique inextensible soumis à un ensemble de forces et moments. Haut, définition de l'unité élémentaire de la maille qui va se répéter et des paramètres géométriques. Bas, définition des forces et moments qui s'appliquent sur le fil (images extraites de [95]). b) Modèle numérique de tricot de J.M. Kaldor et al basé sur la mécanique du fil sans passer par une étape de périodisation. Haut, représentation de la cinétique et des contributions énergétiques dans une maille. Bas, résultat pour un tricot en point Jersey (*Stockinette* en anglais) au repos (images extraites de [99]).

(ou "splines") avec suffisamment de degrés de liberté. Ce fil possède une énergie élastique de flexion quadratique avec sa courbure, d'une force de répulsion avec lui-même pour empêcher l'interpénétration, d'une force de dissipation pour assurer la convergence de la solution et du travail de forces extérieures. La trajectoire initiale du fil possède la topologie du point modélisé, puis une approche Lagrangienne est utilisée pour minimiser son énergie jusqu'à atteindre son état d'équilibre. L'équilibre fournit la trajectoire de la ligne neutre du fil qui est alors habillée de l'aspect réaliste d'un fil de coton ou de laine par exemple. Le résultat donne des tricots avec une apparence très convaincante mais aussi une mécanique et une dynamique très similaire aux tricots réels, même s'il n'y a pas de comparaisons quantitatives. Cependant, la qualité de ces résultats repose sur un certain nombre de paramètres ajustables arbitraires qui n'ont pas d'origine physique claire, l'objectif des travaux étant d'abord de produire des visuels convaincants. Quelques années auparavant, Chen et al [103] ont aussi considéré cette approche de fil unique pour décrire



le tricot en entier. Toutefois le fil n'est pas décrit de façon continue mais plutôt comme une succession de masses correspondant à l'emplacement des croisements et reliés par une tige élastique, tandis que la non-interpénétration du fil est modélisée par une force répulsive entre les masses. Ces travaux font le lien entre une description qui part du fil pour décrire une maille ou le tricot et d'autres descriptions qui s'appuient plus sur des éléments structurels.

### 1.4.3 Tricot et réseaux

Les démarches précédentes s'appuyaient sur la mécanique du fil en lui-même, limitant de ce fait la description à une maille, ou au tricot en entier mais au prix d'un important effort numérique. Pour modéliser un tricot dans son ensemble, une approche différente a alors été proposée par W.L. Wu, H. Hamada et Z. Maekawa en 1994 [104]. Cette approche prend du recul par rapport au fil (modèle "coarse-grained") et s'appuie plutôt sur la topologie du tricot en le décrivant par un réseau de "particules" reliées par des tiges, chaque particule correspondant à un croisement du fil. La connectivité des particules correspond au parcours du fil dans le tricot, créant ainsi un réseau avec un motif périodique. Chaque tige peut seulement s'allonger ou se compresser suivant une loi élastique ajustable  $F = E\varepsilon^u$  avec  $F$  la force,  $\varepsilon$  l'allongement de la tige et  $E$ ,  $u$  des coefficients qui seront ajustés à partir d'expériences. Le tricot peut alors être soumis à des contraintes extérieures et la position finale de toutes les particules est atteinte lorsque la somme des forces s'appliquant sur chaque particule s'équilibre. Les auteurs ajoutent aussi un paramètre qui autorise le glissement du fil au point de contact, cela se traduit par un transfert de longueur entre les différentes tiges attachées à chaque particule. Le fil étant inextensible, la longueur de fil transféré à chaque particule doit se conserver. Pour diminuer le temps de calcul, les auteurs poussent l'aspect "coarse-grained" du modèle plus loin en considérant un nombre de motifs non pas égaux au nombre de mailles mais simplement proportionnels dans les directions course et wale. Leur modèle, notamment en autorisant le glissement du fil, parvient à bien reproduire la réponse mécanique dans la direction course et wale, ainsi que qualitativement la forme d'un tricot soumis à une élongation. Une description similaire a récemment été développée permettant davantage de topologies, tout en ajoutant d'autres modes de déformations [105].

Partant du constat que les modèles basés sur le fil sont trop limitatifs et ne permettent pas de rendre compte de tous les phénomènes qui entrent en jeu dans la mécanique des tricots, A.U. Loginov, S.A. Grishanov et R.J. Hardwood ont entrepris de construire un modèle s'inspirant de la méthode des éléments finis pour le tricot [106, 107, 108] (fig. I.12.a). Une maille est considérée comme la cellule élémentaire d'un réseau, chaque segment et croisement ayant son propre comportement élastique et même plastique (friction et relaxation aux temps longs). La cellule prend aussi en compte la compression du fil ainsi que sa redistribution entre cellules. Là aussi, pour diminuer le temps de calcul et aider la convergence du modèle, une cellule représente une zone du tricot plutôt qu'une maille. Finalement, même si ce modèle parvient à bien reproduire la forme et la réponse mécanique du jersey, sa complexité rend son utilisation extrêmement laborieuse et ne semble pas avoir eu un succès retentissant dans la communauté.

La dernière approche que je voudrais présenter est hybride entre un modèle sur réseau et un modèle mécanique du fil. C. Yuksel et al [109] ont construit une méthode pour

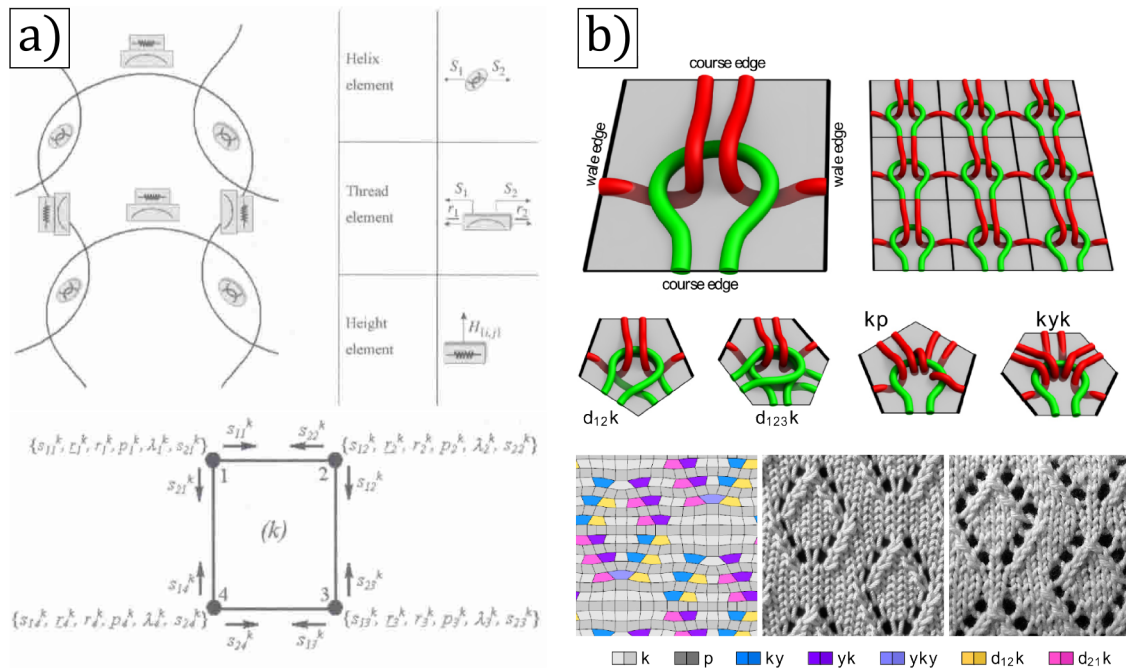


FIGURE I.12 – Approches structurales de la mécanique du tricot. a) Modèle de cellule élémentaire du tricot de A.U. Loginov et al. Haut, chaque partie de la maille est modélisée par un composant mécanique. Bas, résumé des paramètres de chaque nœud de la cellule (images extraites de [107]). b) Réseau introduit par Yuksel et al pour intégrer différentes mailles à des représentations réalistes de tricots. Haut, topologie de la cellule élémentaire représentant une maille endroit, avec un exemple de point Jersey en accolant plusieurs de ces cellules. Milieu, exemple d'autres cellules pour la fabrication de différents types de mailles. Bas, résultat de leur modèle avec de gauche à droite : le réseau après relaxation, le code couleur correspondant aux différentes cellules ; le tricot numérique après l'étape de relaxation du fil ; une photo d'un tricot réel avec le même motif (images extraites de [109]).

modéliser la forme et la réponse mécanique d'un tricot de forme et de topologie arbitraire (fig. I.12.b). Cette méthode se décompose en deux étapes principales. Dans la première, les auteurs identifient chaque type de maille à un type de cellule élémentaire, ce qui permet alors de tapisser la surface correspondant à notre tricot d'un réseau de cellules qui contient toute l'information topologique. Ils définissent ensuite un coût de déformation (élongation, cisaillement...) à ces cellules, et une première phase de relaxation de l'énergie du réseau va venir minimiser son énergie. La deuxième étape consiste à remplacer les cellules par les mailles correspondantes avec le fil ayant la bonne topologie dans tout le tricot. Une deuxième phase de relaxation va alors venir minimiser l'énergie du fil avec la méthode présentée auparavant [99]. Une fois la trajectoire du fil obtenue, le fil est habillé d'une texture lui donnant un aspect réaliste. Les exemples fournis dans cet article concernent surtout la modélisation de vêtements aux motifs complexes soumis à des sollicitations diverses, cette étude s'adressant principalement à la communauté d'informatique graphique.



## I.5 Notre approche

Le tricot est donc un objet reposant sur une somme colossale de savoirs empiriques accumulés par les tricoteuses/tricoteurs au fil des siècles, mais aussi un système mécanique qui fait l'objet de nombreuses études, notamment liées à son utilisation industrielle. Notre approche est intermédiaire entre la mécanique standard qui cherche à prédire analytiquement la trajectoire du fil, et une approche entièrement numérique qui prend en compte le système dans toute sa complexité. Dans le même esprit que les travaux récents sur les métamatériaux mécaniques, on cherche à comprendre les relations entre structure et élasticité au sein d'un tricot. La démarche se base d'abord sur un travail expérimental, avec des tricots suffisamment simplifiés pour ne garder que l'essence du problème : élasticité, géométrie, topologie et contacts frictionnels. On va ensuite chercher à extraire les arguments minimaux pour construire une théorie permettant de décrire la réponse mécanique mesurée. Cette théorie, bien qu'ayant une portée plus limitée que les modèles numériques et ne décrivant pas directement les déformations précises du fil, permet d'identifier des paramètres généraux facilement interprétables et mêlant élasticité et géométrie. Épurer le système expérimental permet aussi de mettre en évidence des phénomènes statistiques insoupçonnés et de faire des parallèles avec d'autres systèmes physiques inattendus. Le chapitre suivant, ainsi que le dernier chapitre sont consacrés à ces relations entre élasticité et structure, alors que le chapitre intermédiaire se focalise sur les aspects statistiques de la réponse mécanique.

## Chapitre II

# Géométrie et élasticité d'un tricot

Ce chapitre présente notre approche expérimentale et théorique pour étudier la réponse élastique bidimensionnelle d'un tricot soumis à des forces extérieures. Après avoir défini un tricot-modèle, celui-ci est caractérisé mécaniquement par sa réponse à une élongation en mesurant la force et la déformation associées. En s'appuyant sur ces mesures, le tricot est simplement représenté par un réseau avec chaque maille uniquement décrite par les vecteurs la reliant à ses voisins. Ensuite, trois ingrédients cruciaux ont été identifiés : la flexion du fil, son inextensibilité et la conservation de la topologie. Ces ingrédients, qui s'interprètent comme une énergie et des contraintes, sont implémentés dans une approche Lagrangienne en les exprimant en fonction des paramètres du réseau. Résoudre ce Lagrangien permet de retrouver de manière assez fidèle la forme et la force mesurée expérimentalement. Cette approche autorise aussi la caractérisation d'un tricot et de sa mécanique par un nombre réduit de paramètres qui s'interprètent aisément.

## II.1 Le choix du système expérimental

Ces travaux s'appuient avant tout sur une étude expérimentale pour déterminer les ingrédients cruciaux qui entrent en jeu dans la mécanique d'un tricot. De plus, le but étant une compréhension fondamentale du système, ces travaux ne visent pas une application particulière du tricot. Le système expérimental a donc été choisi de telle sorte à faciliter les mesures et leurs interprétations. Cela passe notamment par une séparation des échelles de longueur entre les différentes structures du tricot : le fil, la maille, le point et le tricot.

### II.1.1 Le fil de pêche, un fil idéal

La première étape de simplification est de tricoter un fil dont les propriétés mécaniques sont clairement connues et aisément décrites. Cela va donc exclure tous les fils habituellement utilisés dans l'habillement ou les renforts textiles pour composites. La mécanique des matériaux pouvant être décrite par une élasticité de Hooke présente l'avantage d'une relation directe entre la géométrie du fil et son énergie. Il faut pour cela un fil monofilament présentant une plage élastique assez importante. Les métaux atteignant trop rapidement leur seuil de déformation plastique, on a finalement choisi d'utiliser des fils polymère monofilament. Pour pouvoir fabriquer un tricot de façon bien contrôlée, il faut que ces fils gardent le même diamètre et état de surface sur plusieurs dizaines de mètres. Au gré de recherches du fournisseur idéal de ce type de fil, il a été trouvé que toutes nos exigences sont satisfaites par les fabricants de fils de pêche. En effet, les pêcheurs à la ligne ont des exigences tout à fait similaires aux nôtres : le fil doit au moins faire plusieurs dizaines de mètres avec un rayon strictement constant pour éviter sa casse et sa surface doit être bien contrôlée pour éviter tout blocage dans les anneaux ou le moulinet. De plus, la diversité des techniques et d'environnement de pêches, ainsi que la variété de taille de poissons font qu'un large choix de fils a été développé.

La plupart des fils utilisés ici viennent de la marque **STROFT<sup>®</sup>** car ils proposent une large gamme de fils monofilament et donnent quelques précisions sur la manière dont sont fabriqués ses fils. Les fils monofilament sont à base de polyamides (nylon) auquel des additifs sont ajoutés. Après une première phase d'extrusion, le fil est considérablement étiré pour aligner les polymères dans la direction longitudinale du fil. Après une étape de recuit pour diminuer les contraintes internes, le fil subit un traitement surfacique qui le rend plus hydrophobe. Le détail des additifs et traitements de surface n'est évidemment pas divulgué par l'entreprise. Toutefois, le faible coût de ces fils les rend très attractifs, comparés par exemple à des commandes sur-mesure à des entreprises spécialisées. La gamme de fils nylon monofilament **STROFT<sup>®</sup> GTM** qui sera utilisé dans la suite de ce chapitre présente l'avantage d'être disponible pour des diamètres allant de  $30\ \mu\text{m}$  à  $600\ \mu\text{m}$  avec un pas de  $10\ \mu\text{m}$ .

Le choix du diamètre du fil est contraint par plusieurs paramètres. Avec l'objectif de séparer les échelles de longueur, on peut être tenté de prendre le fil le plus fin possible. Toutefois, un fil de diamètre trop petit va être difficile à tricoter (casse plus facile) et à visualiser. De plus, sa résistance à la déformation et son poids sont si faibles que de simples courant d'air peuvent venir le déformer. Ces conditions imposent un diamètre supérieur à environ  $60\ \mu\text{m}$ . À l'opposé, un fil trop gros a de fortes chances d'invalider l'hypothèse de séparation d'échelles mais aussi de sortir le fil de sa région de faible déformation avec pour

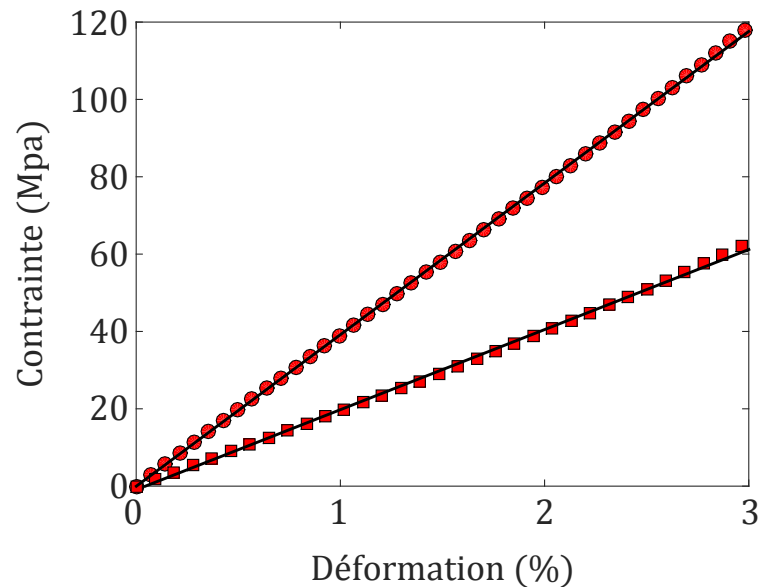


FIGURE II.1 – Traction d’un fil unique, la pente de la réponse linéaire permet de mesurer son module d’Young  $E$ . Cercles rouge, fil STROFT® GTM de  $80\ \mu\text{m}$  de diamètre, on mesure un module d’Young de  $3.9\ \text{GPa}$ . Carrés rouge, fil STROFT® GTM *Schwarz* de  $150\ \mu\text{m}$  de diamètre, on mesure un module d’Young de  $2.1\ \text{GPa}$ . Ce fil sera notamment utilisé dans le second chapitre.

conséquences de possibles déformations plastiques irréversibles. Ainsi, dans nos conditions de tricotage qui seront explicitées plus loin, le diamètre du fil doit préférentiellement rester en dessous de  $200\ \mu\text{m}$ .

Dans ce chapitre, notre attention va notamment se porter sur une expérience pour laquelle le fil choisi est un STROFT® GTM de  $80\ \mu\text{m}$  de diamètre. Le fil est caractérisé par son module d’Young mesuré expérimentalement,  $E = 3.9\ \text{GPa}$  (fig. II.1). Son module de flexion est alors simplement déduit de la formule  $B = \frac{E\pi d^4}{128} = 0.8 \times 10^{-8}\ \text{J.m}$ .

### II.1.2 La maille et le point

Une fois le fil choisi, il faut ensuite choisir quel type de mailles puis quels points utiliser. Mais avant cela il faut se poser la question de la technique à utiliser pour tricoter ce fil. L’échelle de longueur du fil fixée, les dimensions minimales du tricot que l’on doit obtenir si les échelles sont bien séparées peuvent alors être estimées. En considérant au minimum un facteur 10 entre les différentes échelles, on obtient une maille d’environ  $1\ \text{mm}$  et un tricot d’au moins  $10 \times 10$  mailles.

#### a) Fabriquer un beau tricot

Tricoter est un savoir-faire qui demande une certaine pratique et habileté avant d’être maîtrisée. Dans notre cas, il faut pouvoir tricoter plus de 100 mailles de manière très contrôlée avec un fil qui n’a pas initialement été prévu pour. Ayant appris à tricoter seulement au début de ma thèse, on est vite arrivé à la conclusion que le tricoter à la

main avec des aiguilles n'était pas la bonne solution. Il a fallu donc apprendre à utiliser une machine à tricoter qui permet d'obtenir une très bonne répétabilité et homogénéité des mailles sans avoir des années d'expérience de tricot. Par chance, il se trouve que le département de Physique de l'ENS est voisin de l'École Nationale Supérieure des Arts Décoratifs (ENSAD), une école qui propose entre autres les formations "Design textile et matière" et "Design Vêtement" et qui accueille aussi un groupe de recherche "Soft Matter" qui travaille étroitement avec le textile. Une collaboration a alors été mise en place entre notre équipe et l'atelier textile de l'ENSAD géré par Clément Assoun (fig. II.2.a). J'ai ainsi pu venir dans cet atelier une dizaine d'après-midi pour me familiariser avec le fonctionnement des machines à tricoter sous les conseils de Clément Assoun pour, par la suite, devenir autonome dans la confection de tricots.

Il n'y a aucune différence structurelle entre un tricot fait à la main et un tricot fait à la machine, mais le processus de fabrication est tout à fait différent. Le détail du tricot à main ne sera pas abordé dans cette thèse, il existe une myriade de livres qui traitent du sujet (par exemple [110]). Il existe aussi de nombreux ouvrages traitant des machines à tricoter [111] mais ses principes de base seront rappelés ici pour pouvoir décrire quelles sont les mailles accessibles et quels paramètres peuvent être ajustés. Une machine à tricoter est essentiellement composée d'une ou deux rangées de crochets et d'un chariot qui vient imposer un mouvement de va-et-vient aux crochets. Pour tricoter, chaque crochet vient tenir une maille et le passage du chariot va former une nouvelle boucle dans la précédente grâce à un système de clapet (fig. II.2.b), produisant ainsi une nouvelle rangée de mailles. Le tricot est donc fabriqué rang par rang dans la direction des colonnes ("wale"), un rang correspondant à un passage du chariot. Ainsi, avec une seule rangée de crochets (machine à tricoter simple fonture), le fil va être tricoté toujours du même côté et de la même manière. Une machine à tricoter produit donc un point Jersey si aucune modification n'est apportée. Le rang peut être refermé sur lui-même pour fabriquer des tricots de forme tubulaire. Ajouter une deuxième rangée de crochets en vis-à-vis de la première permet d'alterner mailles envers et endroit et offre donc un plus grand choix de motifs (fig. I.6).

La taille et le prix de ces machines varient énormément, allant de la machine industrielle à la machine mécanique adapté à un usage domestique, populaire dans les années 1960-1980. Nous nous sommes procuré une machine simple fonture d'occasion *KS858* de la marque Toyota pour pouvoir fabriquer nos échantillons directement au laboratoire (fig. II.2.c). Cette machine produit des mailles endroites, mais aussi torsées, glissées ou jetées sans trop de difficultés mais avec une intervention manuelle. Le fil peut être facilement changer à chaque nouveau rang. Par contre, à cause de la simple fonture, alterner les mailles endroit et envers est très difficile. La fonture de ce modèle possède 200 crochets séparés d'une distance de 4.5 mm. La longueur de fil par maille est le seul paramètre réglable directement sur cette machine. Entre l'étape 4 et 5 de la fabrication d'une maille (fig. II.2.b), tourner la molette rose du chariot (fig. II.2.c) permet d'ajuster la distance sur laquelle la nouvelle maille est tirée dans la précédente, permettant ainsi de contrôler la longueur de fil injectée et par conséquent la taille du nouveau rang de mailles. Par ailleurs, le premier et dernier rang d'un tricot doivent être différents des autres car le motif ne peut plus être périodisé. Avec du nylon et une machine à tricoter, ces rangs sont difficiles à faire, mes tricots commencent et finissent donc par une partie en coton (fil bleu dans fig. II.2.c) plus adaptées à ces rangs.

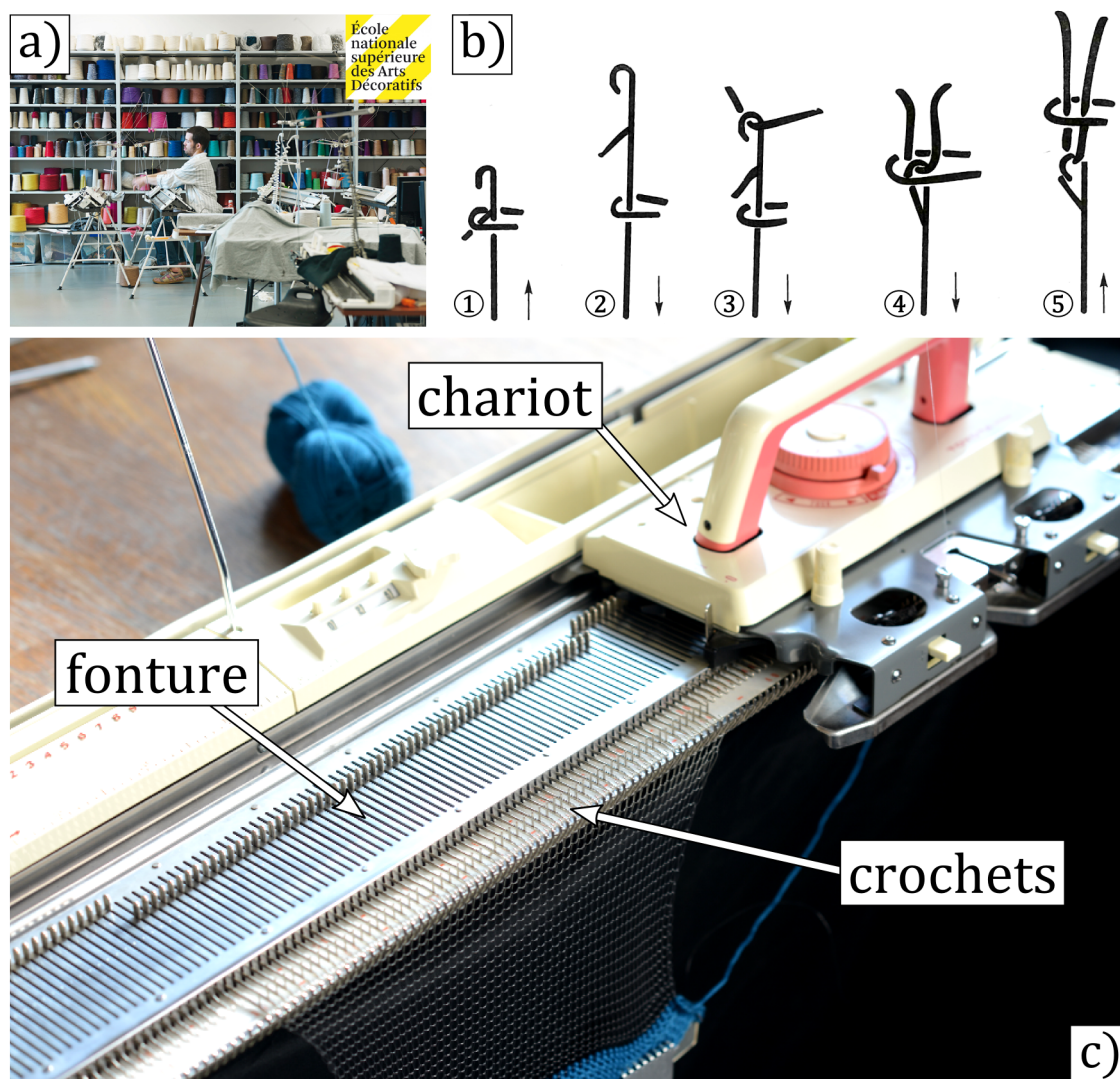


FIGURE II.2 – a) Photos de l’atelier maille de l’ENSAD avec Clément Assoun tricotant sur une machine double fonture ([site de l’ENSAD](#)). b) Schéma de fonctionnement du tricotage d’une maille dans une machine à tricoter. Les étapes 1 à 5 correspondent au passage du chariot sur les crochets de la fonture. Grâce au système de clapet, un simple mouvement de va-et-vient du crochet permet de construire un nouveau rang de mailles. Schéma tiré de [111]. c) Photo de notre machine à tricoter Toyota KS858 pendant une séance tricot. On peut voir une rangée de crochets tenant un rang du tricot, le chariot étant positionné à droite.

### b) Jersey et taille du tricot

Grâce à la maîtrise du tricotage à la machine, je peux confectionner des tricots de nylon de grande taille avec une très bonne régularité des mailles. Dans l'optique de simplification du problème, il semble naturel de commencer par la maille et le point le plus simple, le Jersey. Le point Jersey n'est constitué que d'une seule maille endroit qui sera répétée dans tout le tricot, toutes les mailles ont donc la même topologie. Toutefois, et on le verra plus en détail par la suite, un tricot Jersey au repos prend une forme 3D complexe (fig. I.11.b) qui émerge car le point n'est pas symétrique entre son endroit et son envers (fig. I.5.a-b). Cette asymétrie se manifeste notamment par ce que l'on appelle le *roulottement* des bords, phénomène bien connu chez les tricoteurs. En effet les bords d'un Jersey viennent spontanément s'enrouler sur eux même, et, que le bord soit suivant un rang ou une colonne, l'enroulement se fait d'un côté ou de l'autre du tricot. Ce problème pourra être en partie résolu par les conditions aux bords et la description théorique du problème. De plus, le point Jersey étant de loin le plus aisé à faire avec notre machine à tricoter, il a été choisi pour cette étude.

Il reste maintenant à décider de la taille de la maille et du tricot. Pour séparer au mieux les échelles de longueurs, il est tentant de choisir la taille maximum de maille permise par la machine. Toutefois, on s'est aperçu que lorsque la maille devient trop grande, elle change de configuration au repos pour adopter une forme 3D locale qui n'a plus l'aspect habituel d'une maille. Ce changement de configuration, qui sera décrit un peu plus tard dans cette thèse, impose une borne supérieure à la taille d'une maille pour un fil donné. Pour le cas d'un fil STROFT<sup>®</sup> GTM de  $80\ \mu\text{m}$  de diamètre, la longueur maximale de fil par maille est d'environ 10 mm (réglage 3 sur 10 sur la molette de la machine) soit une taille caractéristique de maille d'environ 4 mm, ce qui reste grand devant  $80\ \mu\text{m}$ . Le nombre de mailles dans les rangs et colonnes du tricot doivent être grand devant 1, la limite supérieure étant fixée par les dimensions de l'espace de travail. Dans la suite de ce chapitre, les expériences présentées ont été effectuées, sauf mention contraire, sur un tricot en STROFT<sup>®</sup> GTM de  $80\ \mu\text{m}$  de diamètre de 51 colonnes et 51 rangs, avec 10 mm (réglage 3) de fil par maille. Un nombre impair de colonnes et rangs permet de définir une maille centrale.

### II.1.3 Les conditions aux bords

Une fois notre tricot en main, il reste à décider comment l'attacher pour pouvoir tester sa réponse mécanique. Suivant la manière dont le tricot est attaché, ou autrement dit quelles conditions sont imposées à ses bords, les déformations et donc la réponse mécanique associée varient grandement. Dans ce travail, deux variantes ont été considérées. Dans les deux cas, les colonnes extérieures ont été laissées libres c'est-à-dire qu'aucunes conditions particulières n'y est imposée. Les tests mécaniques sont alors appelés uniaxiaux car une direction est laissée sans contrainte. Les conditions vont alors s'appliquer sur les rangs inférieur et supérieur du tricot.

Dans un cas, la distance latérale entre les mailles de ces rangs sera imposée, en pratique, par un mors composé de vis espacées régulièrement (fig. II.3.a). Chaque maille du premier et dernier rang est tenue individuellement par une vis, par conséquent l'espacement latéral entre les mailles de ces rangs sera bloqué et régulier. Ces rangs sont alors déplacés dans leur ensemble pour déformer le tricot. Les mailles prises par les vis n'ayant



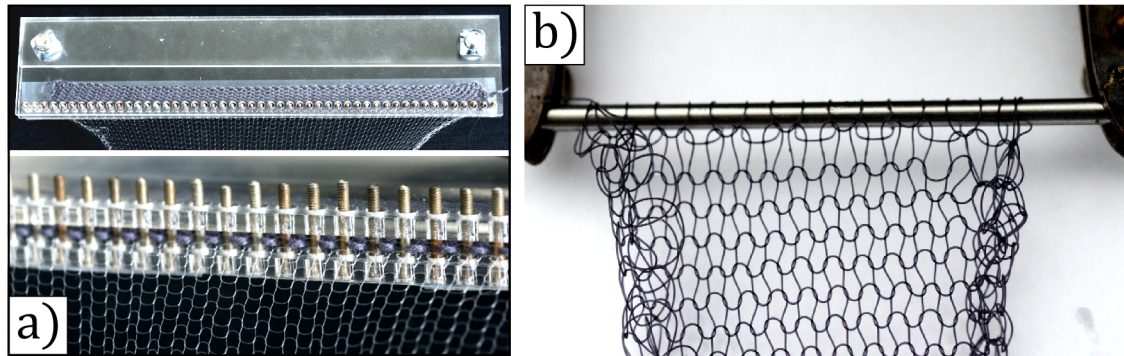


FIGURE II.3 – a) Mors qui permet de fixer la distance latérale entre chaque maille sur les rangs inférieur ou supérieur. Ces mors sont en plaques de plexiglas de 2 mm d'épaisseur, découpée à la découpeuse laser. L'espacement entre deux vis est de 5 mm et la largeur totale des mors de 25 cm. Haut : vue de dessus d'un mors avec un tricot attaché. Bas : vue de côté du mors, mettant en évidence les mailles bloquées par les vis. b) Mors simplement constitué d'une barre d'acier qui laisse les mailles du premier ou dernier rang libres de se déplacer parallèlement à la barre. La barre fait 3 mm de diamètre et est lubrifiée par de l'huile de silicone (Rhodorsil 47V1000).

plus aucune liberté de mouvement, le reste du tricot à l'extérieur de ces conditions (notamment les début et fin en coton) n'a plus aucune influence sur la mécanique du tricot entre les rangs attachés. De plus, les mors de cette configuration décrivent un plan dans lequel le tricot va être forcé de se conformer et va donc permettre d'étudier la réponse mécanique 2D. Pour un tricot Jersey, les bords libres vont tout de même roulotter mais sur une distance qui reste petite par rapport à la taille totale du tricot.

Dans le second cas, les mailles du premier et dernier rang sont tenues par une barre métallique (fig. II.3.b). De cette manière, le déplacement des mailles est laissé libre le long de la barre mais contraint perpendiculairement à celle-ci. Pour que ces mailles puissent vraiment être libres de leur mouvement latéral, il faut d'une part minimiser au mieux le frottement fil/barre en lubrifiant la barre avec de l'huile de silicone, et d'autre part détricoter les entames en coton qui imposeraient une contrainte supplémentaire.



## II.2 Mesurer la réponse mécanique

Maintenant que l'on a bien défini le système expérimental, on va se pencher sur sa caractérisation mécanique. Mesurer la réponse mécanique d'un matériau revient, en général, à mesurer des déformations conjointement avec les forces qui les engendrent. Ces mesures peuvent soit être locales permettant ainsi de connaître la répartition spatiale des déformations ou contraintes par exemple, soit globale, c'est-à-dire rendre compte de la réponse du système dans son ensemble. Ce chapitre va se focaliser sur la mécanique du tricot dans son plan.

### II.2.1 La réponse en force

L'appareil de mesure de force disponible au laboratoire est une machine de traction linéaire de la marque Instron<sup>®</sup> modèle 5965. Cet appareil consiste essentiellement en un moteur qui permet un déplacement bien contrôlé le long d'un axe et d'une cellule piézo-électrique qui permet de mesurer une force, en traction et compression, le long de ce même axe. La mesure de force est donc globale et unidirectionnelle.

Pour illustrer la réponse mécanique d'un tricot je vais me focaliser sur une expérience en particulier. D'autres configurations seront aussi évoquées au fil de ce chapitre. Le tricot étudié est composé d'un fil STROFT<sup>®</sup> GTM de  $80\ \mu\text{m}$  de diamètre avec 51 colonnes et 51 rangs de mailles Jersey, et 10 mm (réglage 3) de fil par maille, avec comme conditions aux bords un espacement latéral fixé (fig. II.3.a). Ce tricot est ensuite placé dans l'Instron avec ses colonnes dirigées dans l'axe de déplacement  $y$  de la machine. Les mors inférieurs et supérieurs sont alignés de sorte que l'axe passant par la colonne centrale soit un axe de symétrie du système. De concert avec la mesure de force, un appareil photo (Nikon<sup>®</sup> D800 muni d'un objectif 60 mm 1 : 2 : 8 : G AFS MicroNikkor) placé face au tricot vient prendre des photos pour visualiser sa déformation. La section suivante viendra détailler les mesures de déformations locales. La déformation globale du tricot est caractérisée par ses dimensions  $L_w$  et  $L_c$ , qui sont respectivement la distance entre le premier et dernier rang du tricot et la largeur de ces rangs (fig. II.4.a). Les indices  $w$  et  $c$  font référence au terme anglais pour colonne ("wale") et rang ("course"),  $L_w$  mesurant une distance le long des colonnes et  $L_c$  le long des rangs. L'Instron permet donc de faire varier  $L_w$  tout en mesurant la force nécessaire à cette variation, alors que les conditions aux bords s'assurent que  $L_c$  reste constante. Le contrôle de l'Instron est assuré par un logiciel dédié BlueHill<sup>®</sup> qui permet, entre autres, de programmer le déplacement imposé et les fréquences d'acquisition des données. Via une carte d'acquisition, l'Instron peut aussi communiquer avec d'autres instruments, comme l'appareil photo, grâce à une interface Labview<sup>®</sup>. Les vitesses de chargement peuvent être variées entre  $1\ \mu\text{m/s}$  et  $10\ \text{mm/s}$  environ, la précision sur le déplacement étant de  $0.3\ \mu\text{m}$ . La précision sur la force dépend de la cellule utilisée, avec typiquement une précision de 1/10000 de sa valeur maximale supportée. Les mesures présentées ont été faites avec une cellule 50 N, ce qui correspond à une incertitude d'environ 5 mN.

Le test mécanique effectué consiste à varier cycliquement  $L_w$  entre deux valeurs à vitesse constante. Les valeurs minimales et maximales de  $L_w$  sont limitées par différents effets. Aux grandes valeurs de  $L_w$ , le tricot prend une forme similaire à (fig. I.10.b) où l'élasticité en traction du fil est directement sollicitée. Aux fortes déformations le fil de

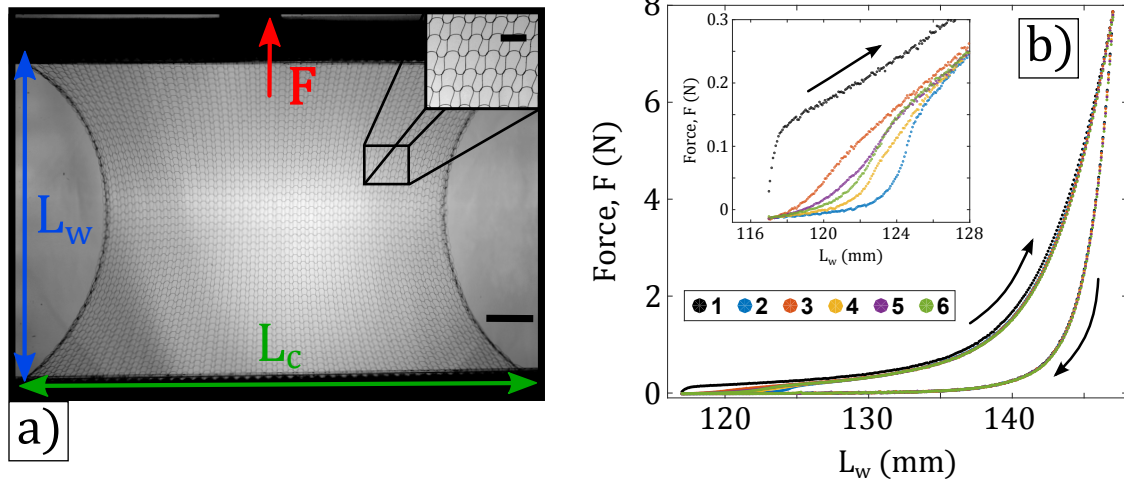


FIGURE II.4 – a) Photo du tricot-modèle, les dimensions globales  $L_c$  et  $L_w$  sont indiquées, ainsi que la direction de la force  $F$  mesurée. La barre d'échelle fait 2 cm de long. Zoom sur une partie du tricot montrant le motif des mailles, ici la barre d'échelle fait 5 mm. b) Réponse force/élongation du tricot-modèle pour 6 cycles de traction/compression à la vitesse constante de 0.1 mm/s. Chaque cycle a une couleur différente, le premier étant coloré en noir (légende : numéro du cycle). La valeur absolue de  $F$  est définie arbitrairement à 0 au début de l'expérience. Encart : zoom sur la partie initiale de la réponse en traction.

nylon commence donc à se déformer plastiquement jusqu'à la rupture. On s'intéresse ici à la réponse élastique du tricot, c'est-à-dire à une déformation réversible, on va donc rester en deçà de cette zone de déformation irréversible du fil. Aux trop faibles valeurs de  $L_w$ , le tricot commence à flamber, c'est-à-dire que le tricot en tant que surface va adopter une courbure non nulle et sortir du plan imposé par les mors, et ce jusqu'à ce que les mors se touchent. Comme on s'intéresse à la réponse mécanique 2D du tricot, on va considérer des valeurs de  $L_w$  suffisamment élevées pour éviter cette déformation hors du plan. Avec notre tricot-modèle,  $L_w$  est varié entre 117 mm et 147 mm dans une série de 6 cycles avec une vitesse de 0.1 mm/s (fig. II.4.b). Le premier cycle n'est pas considéré car il est sensible à la configuration que j'impose manuellement lors de la préparation de l'expérience, il sert donc à obtenir un état reproductible par la suite.

La réponse force/élongation du tricot présente d'abord une forte hystéresis, la courbe de traction et celle de compression ne sont pas identiques. Par contre, il n'y a pas de déformation irréversible car après un cycle complet, la force revient à son point de départ et la réponse est reproductible sur tous les cycles. La courbe de traction peut être décrite en trois portions, si on ne prend pas en compte le premier cycle. Dans la première portion, pour  $L_w$  entre 117 et 125 mm, le tricot commence par ne quasiment pas résister à la déformation car  $F$  reste proche de 0. Puis, la force croît rapidement pour une élongation qui dépend du cycle et finit par adopter une pente commune à tous les cycles. Cette première portion est la seule qui n'est pas reproductible en fonction des cycles. Dans la seconde portion, entre 125 et 135 mm environ, les cinq cycles sont confondus et croissent linéairement avec l'élongation. Dans la troisième et dernière portion, la force ne dépend

toujours pas du cycle mais croît très rapidement. Pour la courbe de compression, on a aussi une phase de décroissance rapide puis linéaire, mais on ne mesure pas de portion similaire à la première, les courbes restent confondues tout du long. La force que mesure l'Instron est définie à une constante près, dans cette expérience la force est fixée à 0 au début du premier cycle.

## II.2.2 Mesurer des déformations

### a) Déformer par rapport à quoi ?

Pour pouvoir proprement définir une déformation il faut pouvoir définir une référence par rapport à laquelle le tricot est déformé. Habituellement, cet état de référence est l'état au repos du système défini de manière univoque, c'est-à-dire au minimum d'énergie mécanique du système ou à l'équilibre de l'ensemble des forces intérieures et extérieures. Toutefois, comme évoqué dans l'introduction, dans un tricot ou même seulement une maille, sa configuration d'équilibre est difficilement atteignable expérimentalement. En effet, les frottements aux points de croisement viennent ajouter des forces, avec pour conséquence que, pour une configuration donnée, le système n'a pas une unique énergie mécanique ou ensemble de forces possibles. Ainsi, à moins de supprimer totalement la friction ou de permettre au système d'explorer toutes les configurations possibles, l'état de référence n'est pas accessible expérimentalement.

Pour contourner ce problème, nous supposons qu'il existe bien un état de référence univoque, mais que celui-ci ne peut être mesuré expérimentalement et constitue donc une inconnue du problème. Notre paramètre de déformation globale  $\varepsilon$  va donc être défini par rapport à un état qui n'est pas celui de référence mais intermédiaire. Il faut par conséquent déterminer à partir de quelle déformation  $L_w$  l'indétermination due aux frottements devient secondaire devant la réponse élastique du fil. La mécanique du fil ne contient aucune indétermination et ne doit donc pas varier entre deux cycles de déformation. Au contraire, si la mécanique est gouvernée par les frottements, elle va dépendre de l'histoire de la déformation et donc varier suivant les cycles. Cette transition est observée entre la première et deuxième portion de la réponse en force décrite précédemment, où l'on passe d'une réponse qui varie en fonction du cycle à une réponse cohérente entre les différents cycles. On peut donc définir l'élongation  $L_w^0 = 125$  mm qui marque le début de la réponse à dominante élastique du tricot. Le paramètre de déformation  $\varepsilon$  est dès lors défini par  $\varepsilon = \frac{L_w - L_w^0}{L_w^0}$ . Pour vérifier la robustesse de cette définition, l'expérience de traction précédente a été répétée sur un plus grand nombre de cycles (fig. II.5.a). On retrouve alors la même transition entre frottement et élasticité dominante toujours vers  $L_w^0 = 125$  mm. On remarque toutefois au fur et mesure que le nombre de cycles augmente, toute la courbe de traction s'abaisse lentement mais progressivement. Même dans les portions où l'élasticité est dominante la friction semble donc toujours jouer un rôle. La friction va aussi jouer un rôle dans l'hystérésis de la réponse et les fluctuations autour de la réponse élastique, auquel le chapitre III sera consacré. On peut, par ailleurs, répéter l'expérience en faisant varier le  $L_w$  minimum ( $L_w^{min}$ ) entre les cycles (fig. II.5.b). La première portion où la friction domine la réponse n'est pas attachée à une valeur de  $L_w$  particulière car on la retrouve pour tous les  $L_w^{min}$  considérés. La présence de cette portion semble être provoquée par le changement de sens de déformation, la friction dépendant fortement de l'histoire

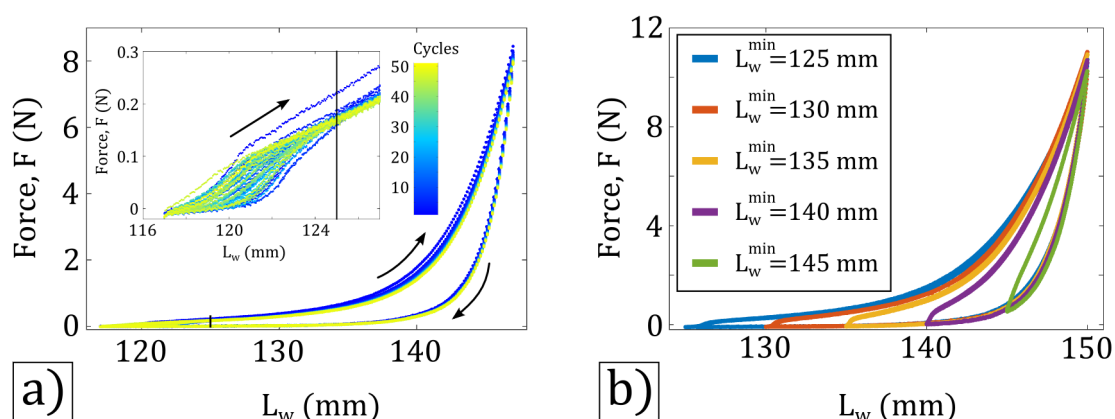


FIGURE II.5 – a) Expérience identique à FigII.4.b mais avec une vitesse de 5 mm/s. La barre verticale marque la transition friction/élasticité à  $L_w^0 = 125$  mm. Le code couleur indique le numéro du cycle. b) Toujours avec le même tricot,  $L_w$  est varié entre  $L_w^{\min}$  qui augmente de 5 mm tous les deux cycles et  $L_w^{\max} = 150$  mm. Ici la vitesse est de 0.002 mm/s. On peut remarquer qu'entre les deux expériences de cette figure, la forme globale de la réponse ne change pas malgré un facteur 2500 dans la vitesse de chargement.

de la déformation. La largeur de cette portion diminue toutefois quand  $L_w^{\min}$  augmente. La valeur de  $L_w^0$  dépend donc de la plage de déformation considérée, cependant, pour des  $L_w^{\min}$  trop bas (ici  $< 117$  mm), le tricot commence à sortir significativement du plan par flambement. Cela permet, de fait, de définir un  $L_w^0$  minimum, qui vaut 125 mm pour notre tricot-modèle.

## b) Détecter les mailles

Les déformations du tricot vont être mesurées localement grâce aux photos prises pendant l'expérience (fig. II.6.a). La mesure va donc être 2D et se limiter aux zones du tricot qui restent dans le plan. Grâce à l'interface Labview entre l'Instron et l'appareil photo, la déformation pour laquelle une photo est prise est connue. Il reste maintenant à définir quelle méthode utiliser pour extraire les déformations du tricot à partir d'images. Notre description du tricot se base au niveau de la maille, l'analyse de l'image se fera par conséquent aussi à partir des mailles et non du fil. Les objets que l'on va détecter sont déterminés par la structure du fil, c'est-à-dire son réseau de croisements, la position d'une portion de fil n'a alors plus d'importance. La description du système est alors uniquement basée sur le motif élémentaire qui va venir se répéter, la maille, et qui constitue donc un élément plus "topologique" que matériel.

Pour notre tricot-modèle, une maille observée de face et en deux dimensions est repérée par les espaces "vides" que délimite le fil en la parcourant. Le motif d'une maille est défini par les entrelacs de la trajectoire du fil, en se basant sur une description via les espaces entre le fil, son motif est alors caractérisé par deux espaces côte à côte (fig. II.6.b). Ces deux espaces sont détectés de manière distincte, le réseau de mailles se présente alors comme un double réseau imbriqué de ces espaces. Ainsi, au lieu d'avoir un seul réseau de mailles, notre analyse d'image nous en produit 2 mais qui portent une information

redondante. Les mailles de ces 2 réseaux ont des formes très similaires à une rotation de  $180^\circ$  près. Du fait du processus de fabrication du tricot, ces deux réseaux présentent généralement une légère asymétrie de taille. Ces deux réseaux sont imbriqués de telle sorte que lorsque l'on parcourt une colonne, toutes les mailles appartiennent au même réseau, alors qu'en parcourant un rang, on alterne à chaque maille entre les 2 réseaux. Pour les distinguer, on peut notamment s'appuyer sur la différence de position verticale qui apparaît entre les deux réseaux le long d'un rang. Le réseau affichant une position verticale plus haute dans le rang sera qualifié de "haut", l'autre de "bas".

Pour détecter une maille, il suffit donc d'obtenir un bon contraste entre le fil et le fond de l'image. Un simple éclairage uniforme et blanc d'un côté du tricot et l'appareil photo de l'autre côté permettent d'obtenir ce contraste, même avec des fils de nylon transparents car leur courbure dévie suffisamment la lumière. L'analyse des images, ainsi que toutes les analyses ultérieures, se font avec le logiciel Matlab<sup>®</sup>. La photo est binarisée par un seuillage de la luminosité, les zones sombres étant les fils délimitant les mailles et les zones claires ce que l'on considère comme étant les mailles. Le seuillage est local, sur une aire de la taille de quelques mailles, pour pallier les inhomogénéités de l'éclairage. De cette manière, le tricot apparaît comme un ensemble de tâches blanches séparées par de fines courbes noires. La position d'une maille va alors être définie comme le centre géométrique de la tâche la représentant. La précision sur cette position est supérieure à la résolution en pixel de la photo car une maille contient en général un grand nombre de pixels.

Au fur et à mesure de l'élongation du tricot, sa déformation va dès lors se répercuter sur la position de ses mailles. Il faut donc réussir à suivre le déplacement des mailles du tricot au gré de son élongation. Les mailles vont donc être réduites à un ensemble de "particules" repérées par la position de leur centre géométrique qui vont se mouvoir et dont on va suivre les trajectoires. On utilise pour cela les mêmes outils que les chercheurs qui étudient les suspensions ou émulsions par exemple, avec des fonctions telles que celle de [D. Blair et E. Dufresne](#) inspirées d'un logiciel mis au point par J.C. Crocker, D.G. Grier and E. Weeks [112]. Toutefois, suivre une trajectoire bien définie pour chaque particule est possible seulement si la distance qu'elle parcourt entre deux images consécutives reste inférieure à la distance interparticules. Dans un tricot, les mailles sont très proches les unes des autres, ce qui correspondrait par exemple à une émulsion avec une densité proche de 1, cette distance critique est donc rapidement atteinte. En revanche, les mailles du tricot sont organisées sous la forme d'un réseau, ce qui va permettre de tracer leurs trajectoires individuelles même si leurs déplacements entre images consécutives est bien supérieure à la distance intermailles.

### c) Reconstruire le réseau de mailles

Notre tricot-modèle est construit par répétition de mailles le long des rangs et des colonnes, une maille appartient donc à un réseau régulier. De plus, ce réseau est bloqué, c'est-à-dire qu'une maille gardera toujours les mêmes voisines quelle que soit la déformation imposée au tricot. Ce point sera détaillé un petit peu plus loin dans ce chapitre. Si on arrive à reconstruire ce réseau, c'est-à-dire que pour chaque maille, la position de ses 4 voisines des rangs et colonnes adjacentes sont identifiées, la reconstruction des trajectoires en est grandement facilité. Pour chaque image, on passe d'un nuage de position sans structure à l'ensemble des positions d'un réseau bien structuré. Il suffit alors de trouver

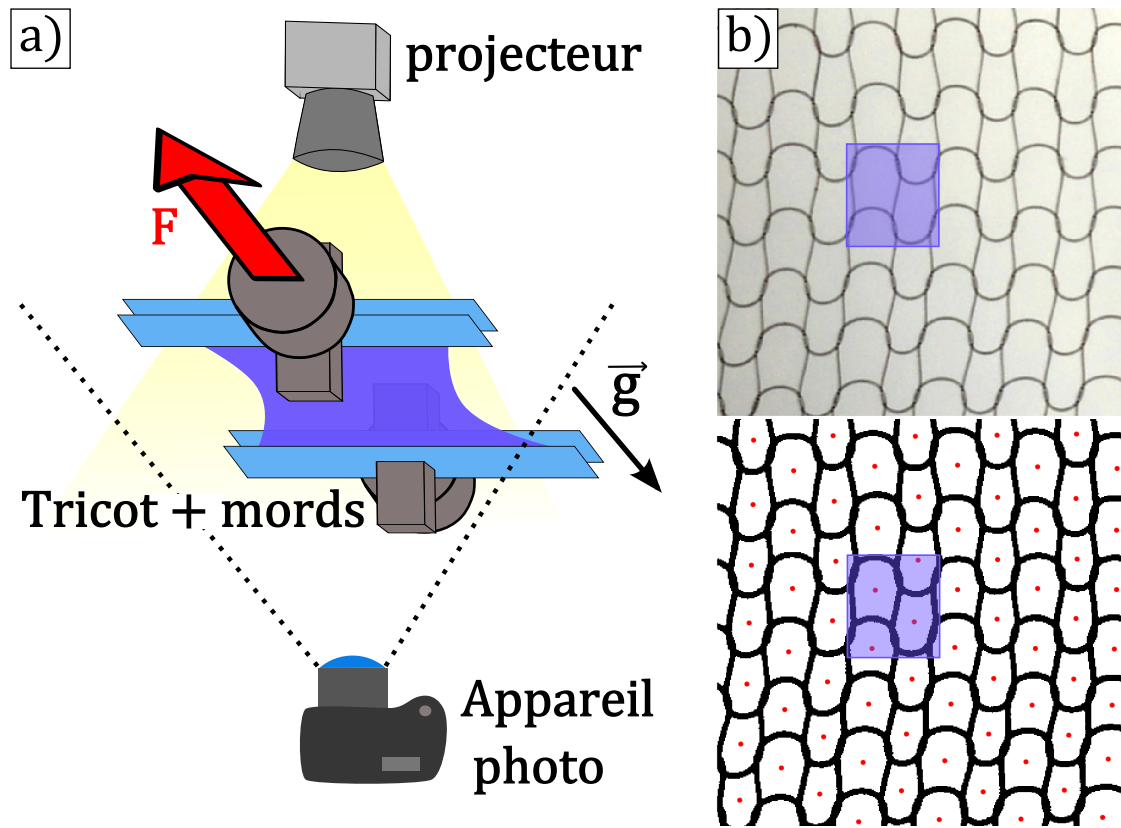


FIGURE II.6 – a) Schéma du dispositif expérimental de prise d'images, le vecteur  $\vec{g}$  indique la direction du champ de gravité. b) Illustration du processus de binarisation d'une image de tricot, le motif périodique défini par les interstices entre les fils est surligné. Dans le motif surligné, l'espace à gauche est orienté vers le "haut", celui à droite vers le "bas". Haut, image brute d'une portion de tricot. Bas, même portion après le processus de binarisation, la position du centre géométrique de chaque maille est indiqué par un point rouge.

une maille en particulier, dont la trajectoire est facilement identifiable par les moyens standards, pour reconstruire l'ensemble des trajectoires du réseau. En effet, pour chaque image la place de cette maille dans le réseau et sa position sont connues, on peut donc aussi connaître la position de ses voisins de réseau, ainsi, de proche en proche, on est capable de retrouver toutes les trajectoires de chacune des mailles du réseau.

En pratique, chaque "particule" de l'image binarisée et sa position correspondante sont d'abord identifiées par un numéro arbitraire. Ce numéro est associé à une maille pour une photographie donnée, mais il va changer d'une image à l'autre. Connaître la trajectoire d'une maille revient donc à identifier son numéro qui lui est associé sur toutes les photographies. Pour ce faire, il faut tout d'abord pouvoir repérer chaque maille au sein du réseau pour une image donnée. On construit pour cela une matrice de la taille du réseau de mailles, avec chaque élément de la matrice correspondant au numéro d'une maille, et chaque colonne ou rang de la matrice correspondant à une colonne ou rang du réseau de mailles. Pour chaque maille il faut dès lors déterminer quel est le numéro de



ses voisines du même rang et de la même colonne. Cependant, à cause de notre approche d'analyse d'image, notre image contient deux réseaux "haut" et "bas" imbriqués. Cela confère une configuration assez particulière au voisinage des mailles, elles possèdent 6 et non 4 proches voisines (fig. II.7.a). Parmi ces 6 voisines, 2 appartiennent à la même colonne et donc au même réseau, et 4 appartiennent à l'autre réseau, 2 sur le même rang et les 2 autres sur le rang supérieur ou inférieur. Si la maille appartient au réseau "haut", les 2 mailles supplémentaires de son voisinage font partie du rang supérieur, si elle appartient au réseau "bas", ces 2 mailles supplémentaires font partie du rang inférieur (fig. II.7.a). L'arrangement des voisins autour d'une maille étant figé, connaissant au préalable si une maille appartient au réseau "haut" ou "bas", on peut réussir à déterminer qui de ses plus proches voisines appartiennent au même rang ou à la même colonne.

Dans ce réseau, les plus proches voisines d'une maille sont celles qui ne sont séparés que par le fil, ça ne correspond pas forcément aux mailles possédant les plus petites distances entre centres géométriques. Par exemple, dans des configurations de tricots très allongés, les mailles ont leurs voisins latéraux proches et longitudinaux éloignés en terme de distance entre centres géométriques (fig. II.7.b). Le programme pour trouver les bons voisins d'une maille procède par une première étape où la maille considérée va être artificiellement élargie de manière isotrope d'environ 2 fois la largeur en pixel du fil. Cette maille élargie va alors chevaucher des mailles voisines qui ne sont séparées d'elle que d'une distance de l'ordre du diamètre du fil (fig. II.7.a). On considère alors que les mailles chevauchées sont ses plus proches voisines, idéalement au nombre de 6. Ensuite, pour déterminer qui sont ses voisines appartenant au même rang et à la même colonne, on s'appuie sur la position relative de leurs centres géométriques par rapport à la maille considérée. Les mailles de la même colonne sont celles qui ont un centre géométrique le plus éloignés verticalement de la maille centrale. Pour une maille appartenant au réseau "haut", ses voisines de la même rangée sont, parmi les 4 mailles latérales, celle ayant une position verticale inférieure à la maille centrale. Pour le réseau bas, ce sont les mailles avec une position supérieure. Cette méthode simple fonctionne pour les situations où le tricot n'est pas trop déformé. En cas de forte déformation, l'ordre des positions relatives peut être chamboulé et rendre caduque la méthode précédente. Ces agencements différents restent toutefois redondants, ce qui permet de les détecter et d'adapter le programme en conséquence (fig. II.7.b).

Le principe du programme de reconstruction du réseau fonctionne par propagation de proche en proche le long des rangs et des colonnes. Il faut tout d'abord fournir manuellement une maille "source" pour initier la propagation, son appartenance au réseau "haut" ou "bas" étant connu. Cette maille est choisie de sorte à ce que sa trajectoire soit facilement mesurable en toutes circonstances et par une méthode classique. Pour cela, on choisit une maille appartenant par exemple à la colonne centrale puisque, par symétrie, le mouvement des mailles de cette colonne est uniquement vertical et va largement suivre le mouvement des mors. Grâce à la méthode de détection des voisins, on peut se déplacer, de proche en proche, le long d'une rangée ou d'une colonne sans connaître a priori le réseau. La propagation à partir de la maille "source" va suivre un schéma en deux étapes qui vont se répéter. La première étape consiste à propager la détection le long de la colonne où se situe la maille "source" jusqu'aux mors supérieur et inférieur (fig. II.8.a). La deuxième étape consiste à propager le long du rang de la maille "source" mais seulement d'une seule maille (fig. II.8.b). La première étape de propagation le long de toute la colonne est ensuite répétée, à partir de la maille latérale nouvellement identifiée (fig. II.8.c). C'est

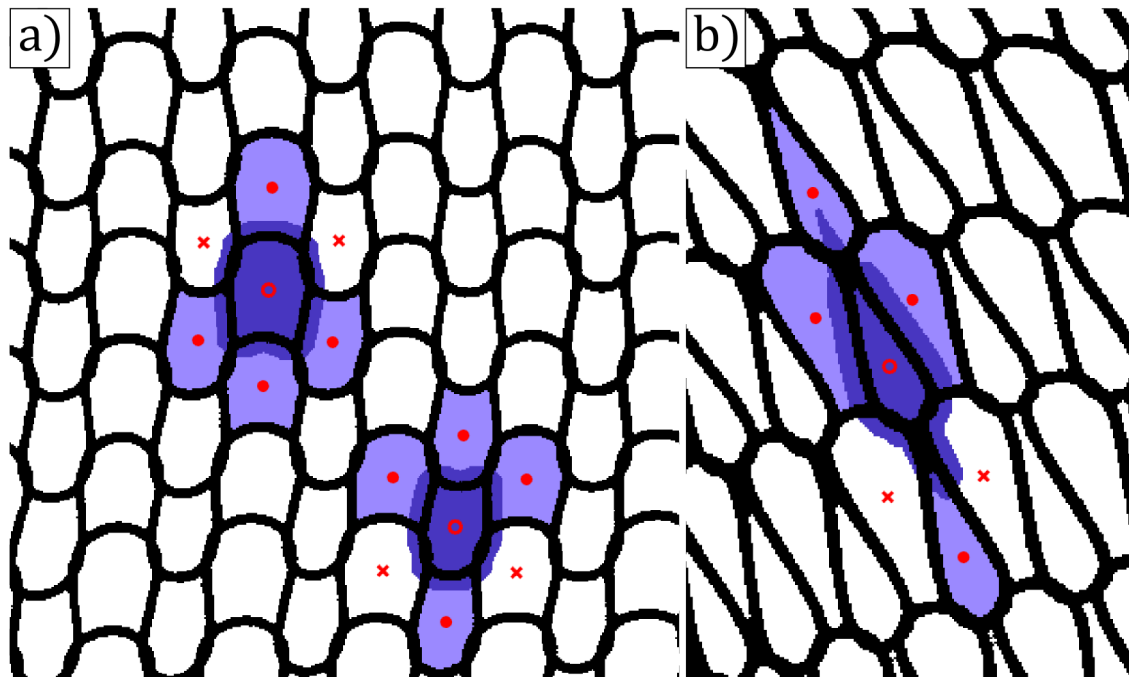


FIGURE II.7 – a) Illustration de la méthode permettant de trouver les voisins d'une maille sur la même rangée et colonne. Les mailles considérées sont marquées par un cercle, une appartenant au réseau "haut" (gauche) et une au réseau "bas" (droite). La coloration violet foncé marque la taille de la maille élargie, on peut voir qu'elle recoupe les mailles voisines. Les voisins appartenant à la même colonne ou rangée sont colorés en violet clair et la position de leur centre géométrique indiqué par un rond. Les plus proches voisins appartenant à la rangée inférieure ou supérieure sont marquées par une croix. b) Méthode modifiée pour traiter le cas d'un tricot fortement allongé où les mailles de la même colonne se retrouve loin de la maille considérée. Un élargissement isotrope ne suffisant pas à se superposer aux mailles sur la même colonne, l'élargissement est rendu anisotrope et plus important dans la direction de cette colonne.

ensuite au tour de la seconde étape le long du rang d'être répété en propageant d'une maille latéralement. Pour résumé, la propagation se fait d'une maille par une maille le long du rang de la maille source mais directement sur toute la colonne à chaque nouvelle maille du rang (fig. II.8.d). Une alternative consiste à propager maille par maille le long de la colonne de la source et le long du rang entier à chaque étape. Le résultat final est donc une matrice dont les lignes et colonnes correspondent aux numéros des mailles dans le réseau. Une colonne sur deux appartient au réseau "haut", le reste au réseau "bas".

Si la détection d'un voisin échoue pour une certaine raison au milieu d'un rang ou d'une colonne, la propagation s'arrête et le reste du rang ou de la colonne reste inconnu. Heureusement, pour chaque maille ses voisins sont identifiés dans les 4 directions, pas seulement dans la direction de propagation. Cela produit beaucoup d'informations redondantes mais permet aussi d'identifier a posteriori une colonne ou rang ayant subi une fin de propagation précoce. Dans certaines configurations, il est très difficile de retrouver tous



les bons voisins car le tricot est fortement déformé. Cela va alors stopper la propagation sur de nombreuses lignes ou colonnes. Toutefois, la plupart du temps, la détection des voisins uniquement du même rang ou de la même colonne reste faisable. On peut alors combiner deux méthodes de propagation. Une méthode où la propagation selon le rang se fait seulement sur le rang de la maille source, que l'on peut choisir sur un rang facile à identifier, le reste de l'identification se faisant par propagation suivant les colonnes. Cette méthode fonctionne bien si les voisins au sein d'une même colonne sont facilement identifiables (fig. II.8.e). Dans l'autre méthode la propagation sur colonnes se fait seulement sur celle de la source et selon les rangs pour toutes les autres mailles. Cette version là est donc favorisée si les voisins latéraux sont facilement identifiables (fig. II.8.f). En recoupant les informations de ces deux méthodes, on peut alors reconstruire une bonne partie du réseau même si tous les voisins ne sont pas forcément facilement identifiables.

Finalement, certaines colonnes ou mailles ont pu se propager plus loin que d'autres, notamment à cause du roulottement des bords. Le réseau considéré par la suite est alors le plus grand possible en nombre de mailles, sans trous (mailles non identifiées) et ayant des colonnes toutes de la même taille, idem pour les rangs. Le réseau forme alors une matrice rectangulaire sans "trous". Ce réseau est déterminé pour toutes les photographies prises pendant l'expérience. Ces réseaux présentent une information redondante car ils regroupent les réseaux "hauts" et "bas". Dans la suite, pour simplifier la description et éviter la redondance, seul le réseau "haut" sera considéré.

#### d) La trajectoire du réseau de mailles

Pour chaque photographie on peut reconstruire la matrice du réseau pour laquelle chaque numéro correspond à une maille et donc à une position dans l'image. La trajectoire de la maille source est connue, c'est-à-dire que pour chaque photographie, on connaît quel est son numéro correspondant et donc sa position. Grâce à ce fil conducteur on peut maintenant associer toutes les mailles à sa série de numéros au fil des photographies du tricot et donc à une trajectoire.

On définit  $\vec{u}(j, i, \varepsilon)$  le vecteur position du réseau pour chaque déformation  $\varepsilon$  (déformation relative longitudinale), chaque couple  $(j, i)$  correspondant à une maille avec  $j$  notifiant de sa position le long des rangs et  $i$  le long des colonnes. La description de la trajectoire est uniquement 2D,  $\vec{u}$  est décomposée sur la base orthonormée  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  définie simplement par l'horizontale et la verticale de l'image (fig. II.9.a).

La trajectoire d'une maille lors de la traction peut être séparée en deux phases. Au cours de la première phase, la maille a une trajectoire assez erratique qui n'est pas reproductible entre les différents cycles (fig. II.9.b-c). Pendant la deuxième phase, la maille présente une trajectoire proche d'une droite qui est reproductible entre les cycles. Le passage d'une phase à l'autre est simultané pour toutes les mailles du tricot et correspond aussi à la déformation  $\varepsilon = 0$  mesurée avec le signal de force. La première phase marque donc une déformation dominée par la friction entre les fils, alors que la seconde marque la prédominance de déformations élastiques. Cette transition entre friction et élasticité dominante mesurée globalement par la réponse en force se retrouve aussi au même moment dans les trajectoires des mailles.

Pour la compression, la trajectoire des mailles exhibe deux phases similaires à celles observées lors de la traction, avec en plus une troisième phase à l'amorce de la compression.

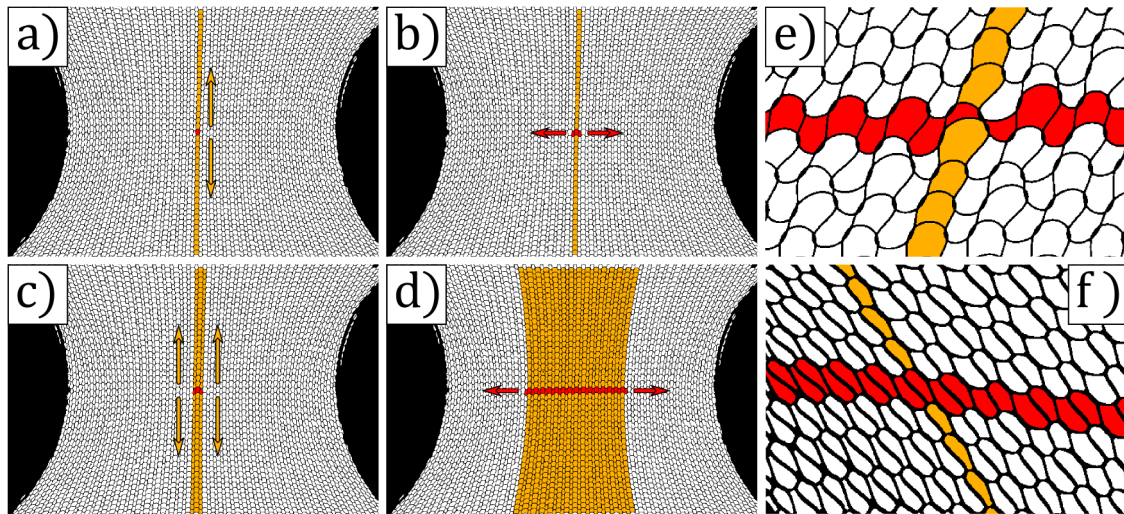


FIGURE II.8 – a-d) Méthode de propagation qui utilise la reconnaissance de voisins du même rang seulement sur le rang de la maille source et celles de voisins le long des colonnes pour le reste. a) La maille source est en rouge, sa colonne correspondante a été détectée et peinte en orange. b) Étape de propagation latérale, de seulement une maille à gauche et à droite. c) Propagation suivant les colonnes des deux nouvelles mailles. d) La même étape que b) à un stade plus avancé. e) Détail d'une maille pour qui les voisins latéraux sont difficilement identifiables, son rang est coloré en rouge, sa colonne en orange. La propagation par colonne est donc à favoriser. f) Détail d'une maille pour qui les voisins longitudinaux sont difficilement identifiables (mailles très penchées), son rang est coloré en rouge, sa colonne en orange. La propagation par rang est donc à favoriser.

On retrouve donc les phases à friction dominante pour  $\varepsilon < 0$  et à élasticité dominante pour  $\varepsilon > 0$  comme pour la traction. La trajectoire linéaire de la phase élastique est parallèle à celle de la traction mais pas confondue à cause de l'apparition de la troisième phase. Juste après le passage entre traction et compression, la force chute drastiquement, et les trajectoires des mailles sortent de la droite qu'elles étaient alors en train de suivre. La chute de force peut être imputée à l'action de la friction. En effet, lors de la traction, le frottement vient s'opposer au mouvement imposé par les mors, ce qui ajoute une composante positive supplémentaire à la force nécessaire à la déformation élastique, la résultante totale étant la force mesurée  $F$ . Au moment du passage traction-compression, le mouvement du mors change de signe, il en va ainsi de même de la force de frottement. Sa contribution passe alors soudainement de positive à négative et provoque la chute rapide de  $F$ . Pendant cette transition, la réponse mécanique devient dominée par le frottement, ce qui se traduit par cette troisième phase dans la trajectoire des mailles lors de la compression où les mailles sortent de leurs trajectoires linéaires.

Notre description dans ce chapitre va se limiter à la réponse élastique du tricot, on va donc se concentrer sur la partie  $\varepsilon > 0$  de la traction où les trajectoires des mailles restent rectilignes. Dans cette partie, la trajectoire des mailles est donc une fonction linéaire de la déformation  $\varepsilon$ , le vecteur position du réseau peut s'écrire sous la forme suivante pour

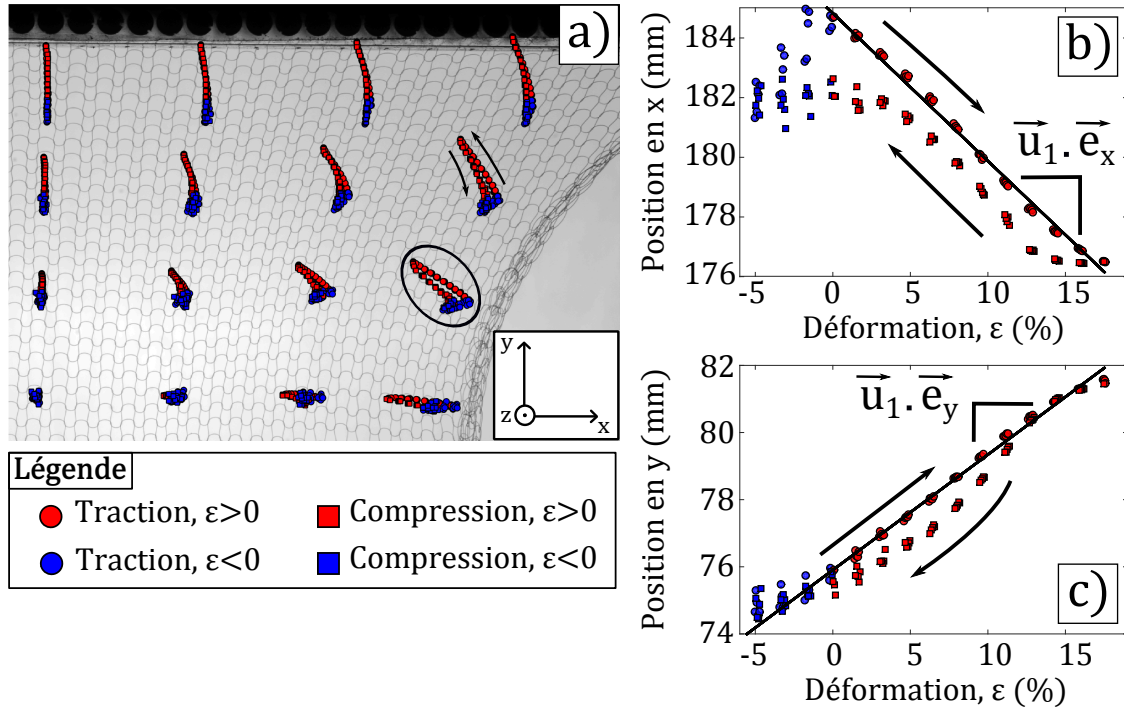


FIGURE II.9 – Trajectoires des mailles pendant 5 cycles de traction/compression du tricot-modèle. Pour tous les panneaux, la position des mailles pendant la traction est représentée par des ronds et par des carrés pendant la compression. La couleur des points correspond aux phases où la friction est dominante (bleu,  $\varepsilon < 0$ ) ou l'élasticité est dominante (rouge,  $\varepsilon > 0$ ). a) Trajectoires de 16 mailles de la partie supérieure droite du tricot pendant les 5 cycles de traction/compression. La trajectoire entourée correspond à celle détaillée dans les deux graphes à droite. b-c) Changement de position en  $x$  b) et en  $y$  c) de la maille entourée pendant les 5 cycles de traction/compression. Les droites correspondent à la régression linéaire des trajectoires de traction pour  $\varepsilon = 0$ . Les pentes de ces droites permettent de mesurer  $\vec{u}_1$  et leurs ordonnées à l'origine  $\vec{u}_0$ .

explicitier cette relation :

$$\vec{u}(j, i, \varepsilon) = \vec{u}_0(j, i) + \varepsilon \vec{u}_1(j, i) \quad (\text{II.1})$$

La position d'une maille peut donc être décomposée en une position initiale  $\vec{u}_0$  et une composante linéaire avec la déformation  $\vec{u}_1$ . Ainsi, les trajectoires des mailles pour toute la plage de déformation étudiée peuvent être décrites expérimentalement par seulement deux champs de vecteurs.

## II.3 Cinématique et approche théorique

Maintenant que l'on a caractérisé expérimentalement la réponse mécanique de notre tricot-modèle, on peut introduire les outils qui vont permettre d'aborder ce système théoriquement et de construire notre modèle.

### II.3.1 Définition d'une cinématique : $\vec{c}$ et $\vec{w}$

Fournir une cinématique revient à définir un ensemble de variables qui permettent de décrire le tricot. Notre description se base sur la maille comme cellule élémentaire, nos variables doivent donc s'appuyer sur les propriétés des mailles. Avec notre approche expérimentale, une maille est notamment caractérisée par sa position, mais aussi par les positions relatives de ses voisins au sein du même rang et de la même colonne. Pour rappel, le réseau considéré ici est le réseau "haut", toutes les mailles appartiennent à ce même réseau. Il en découle une description naturelle d'une maille par les 4 vecteurs partant de sa position et rejoignant ses plus proches voisins. Cette description est toutefois redondante car 2 voisins partagent le même vecteur. Pour palier cette redondance on ne considère simplement que le vecteur dans une seule direction selon le rang ou la colonne, la direction étant choisie de manière arbitraire mais identique pour chaque maille. De cette façon, on définit les vecteurs  $\vec{c}(j, i, \varepsilon)$  et  $\vec{w}(j, i, \varepsilon)$  pour caractériser une maille.  $\vec{c}(j, i, \varepsilon)$  est le vecteur reliant la maille  $(j, i)$  à sa voisine sur le même rang, à droite  $(j + 1, i)$ . La direction de  $\vec{c}$  donne donc localement la direction du rang ("course" en anglais, d'où le  $c$ ). Quant à  $\vec{w}(j, i, \varepsilon)$  c'est le vecteur reliant la maille  $(j, i)$  à sa voisine sur la même colonne, au-dessus  $(j, i + 1)$ . La direction de  $\vec{w}$  donne donc localement la direction de la colonne ("wale" en anglais, d'où le  $w$ ). On a donc l'expression suivante pour  $\vec{c}(j, i, \varepsilon)$  et  $\vec{w}(j, i, \varepsilon)$  en fonction du champ de déplacement :

$$\begin{aligned}\vec{c}(j, i, \varepsilon) &= \vec{u}(j + 1, i, \varepsilon) - \vec{u}(j, i, \varepsilon) \\ &= \vec{u}_0(j + 1, i) - \vec{u}_0(j, i) + \varepsilon (\vec{u}_1(j + 1, i) - \vec{u}_1(j, i))\end{aligned}\quad (\text{II.2})$$

$$\begin{aligned}\vec{w}(j, i, \varepsilon) &= \vec{u}(j, i + 1, \varepsilon) - \vec{u}(j, i, \varepsilon) \\ &= \vec{u}_0(j, i + 1) - \vec{u}_0(j, i) + \varepsilon (\vec{u}_1(j, i + 1) - \vec{u}_1(j, i))\end{aligned}\quad (\text{II.3})$$

Ces vecteurs sont des variables suffisantes pour reconstruire la forme des rangs et colonnes et donc la déformation locale du tricot. L'état du tricot à  $\varepsilon = 0$  correspond à un état initial déjà déformé par rapport à un état de référence qui n'est pas atteint expérimentalement. Nous supposons que cet état de référence est uniforme, c'est-à-dire que toutes les mailles sont décrites par des vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  identiques. De plus, on suppose que dans cet état de référence les rangs sont parallèles à l'horizontale, à savoir suivant  $\vec{e}_x$ , et que les colonnes sont perpendiculaires aux rangs, donc suivant  $\vec{e}_y$ . Les vecteurs à l'état de référence, notés  $\vec{c}^*$  et  $\vec{w}^*$  peuvent alors être écrits sous la forme :

$$\vec{c}^* = c^* \vec{e}_x \quad \forall (j, i) \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{w}^* = w^* \vec{e}_y \quad \forall (j, i) \quad (\text{II.5})$$

Les dimensions globales du tricot de référence sont alors  $L_c^* = N_c c^*$  et  $L_w^* = N_w w^*$  dans respectivement la direction des rangs et des colonnes.  $N_c$  indique le nombre de mailles dans

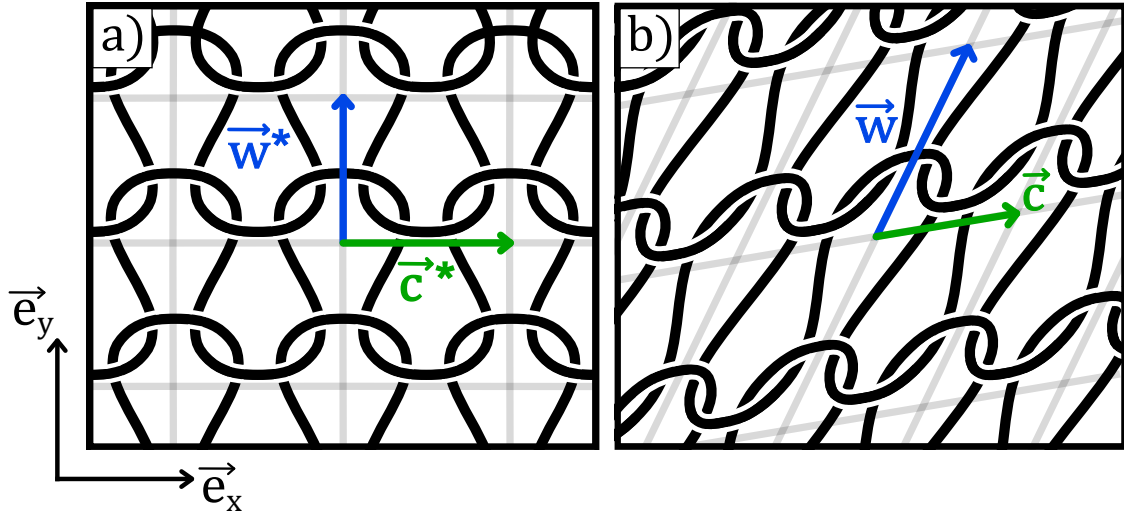


FIGURE II.10 – Représentation schématique des variables  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . a) Tricot à l'état de référence. Toutes les mailles sont identiques et séparées par les mêmes vecteurs  $\vec{c}^* = c^* \vec{e}_x$  et  $\vec{w}^* = w^* \vec{e}_y$ . b) Tricot dans un état déformé, les normes et directions de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  varient en fonction de la maille dans le tricot.

un rang,  $N_w$  dans une colonne. Les dimensions de l'état de référence  $L_c^*$  et  $L_w^*$  sont donc a priori différentes des dimensions de l'état initial expérimental  $L_c^0$  et  $L_w^0$  et constituent des inconnues du problème. De la même manière on définit les dimensions moyennes des mailles à l'état initial  $c^0 = \frac{L_c^0}{N_c}$  et  $w^0 = \frac{L_w^0}{N_w}$ .

Il est à noter que ces notations peuvent sembler contradictoires avec les notations usuelles dans la bibliographie. En effet, habituellement, la grandeur  $C$  désigne la distance entre deux "courses" mais correspond à  $\|\vec{w}\|$  avec notre notation. De même,  $W$  désigne habituellement la distance entre deux "wales" mais correspond à  $\|\vec{c}\|$  ici. Malgré la confusion que peuvent apporter nos notations, nous préférons les garder car nos grandeurs sont des vecteurs et il est plus naturel de les nommer en accord avec leur direction plutôt que la valeur de leur norme.

Par ailleurs, un des objectifs de ces travaux est de modéliser le tricot comme un objet continu sans avoir à prendre en compte la discrétisation des lignes et colonnes. Il faut par conséquent opérer un passage à la limite continue sur nos variables discrètes  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . On passe donc d'un système de variables sur réseau  $(j, i)$  à un système de variables continues du plan  $(x, y)$ . Les notions de colonne et de rang du tricot sont alors remplacées par un système de coordonnées de référence. Le tricot de référence est décrit comme une portion du plan défini par la base orthonormée  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , pour  $|x| \leq \frac{L_c^*}{2}$  et  $|y| \leq \frac{L_w^*}{2}$ . Se déplacer sur un rang revient donc à se déplacer à  $y$  constant, et sur une colonne à  $x$  constant. Les variables  $\vec{c}(x, y)$  et  $\vec{w}(x, y)$  ont donc maintenant une signification un peu plus abstraite puisqu'elles ne peuvent plus être vues comme les vecteurs reliant une maille à ses voisines, la notion de maille étant réservée au point de vue discret. Ce changement de variable permet d'obtenir des résultats qui seront propres au système tricot, sans dépendre du nombre de mailles ou de la notion de rangs ou colonnes.

Le champ de position  $\vec{u}$  peut lui aussi être exprimé en termes de variable continue. En

conséquence,  $\vec{u}(x, y, \varepsilon)$  ne désigne plus la position d'une maille, mais celle de la portion de l'équivalent continu du tricot en  $\varepsilon$ , qui est à la position  $(x, y)$  dans le tricot de référence. Il devient donc intéressant d'exprimer la position en terme de déplacement par rapport à cette position de référence. On définit de ce fait les fonctions  $a(x, y, \varepsilon)$  et  $b(x, y, \varepsilon)$  comme les déplacements respectivement latéraux et verticaux, qui se décomposent aussi en une composante initiale  $a_0(x, y)$ ,  $b_0(x, y)$  et une composante linéaire en  $\varepsilon$ ,  $a_1(x, y)$  et  $b_1(x, y)$  :

$$\vec{u}(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} x + a(x, y, \varepsilon) \\ y + b(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

$$= \begin{cases} x + a_0(x, y) + \varepsilon a_1(x, y) \\ y + b_0(x, y) + \varepsilon b_1(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Il reste alors à établir la relation entre le champ de déplacement continue  $\vec{u}(x, y, \varepsilon)$  et les variables de notre problème  $\vec{c}(x, y, \varepsilon)$  et  $\vec{w}(x, y, \varepsilon)$ . La notion de différence de position entre deux mailles n'étant plus adaptée à la description continue, c'est la notion de dérivée spatiale qui vient se substituer. La différence discrète  $\vec{c}(j, i, \varepsilon) = \vec{u}(j + 1, i, \varepsilon) - \vec{u}(j, i, \varepsilon)$ , correspond à une dérivée spatiale dans la direction  $x$ , mais à condition d'introduire une grandeur  $dx$  telle que  $\vec{u}(x + dx, y) - \vec{u}(x, y) = dx \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ . De même pour  $\vec{w}$  et la direction  $y$  :  $\vec{u}(x, y + dy) - \vec{u}(x, y) = dy \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}$ . On obtient donc les expressions suivantes :  $\vec{c}(x, y, \varepsilon) = dx \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$  et  $\vec{w}(x, y, \varepsilon) = dy \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}$ . Il faut toutefois que ces expressions soient compatibles avec les dimensions du tricot de référence, c'est à dire quand les champs de déplacement  $a$  et  $b$  sont nuls. Cette condition donne les relations suivantes :  $dx = c^*$  et  $dy = w^*$ . Finalement la relation entre le champ de position et nos variables cinématiques est la suivante :

$$\vec{c}(x, y, \varepsilon) = c^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (\text{II.8})$$

$$= c^* \begin{cases} 1 + \frac{\partial a_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ \frac{\partial b_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial b_1}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{w}(x, y, \varepsilon) = w^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \quad (\text{II.10})$$

$$= w^* \begin{cases} \frac{\partial a_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial y} \\ 1 + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial b_1}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Comparer les valeurs expérimentales, forcément discrètes par construction, aux variables continues à l'échelle du tricot n'a de sens que si on a suffisamment séparé les échelles de longueur entre la taille d'une maille et la taille du tricot. On peut notamment s'appuyer sur le fait que la notion de dérivées spatiales est cohérente seulement si les

incréments  $dx$  et  $dy$  sont petits devant la taille du tricot de référence. Comme  $dx = c^*$  et  $dy = w^*$ , la condition devient  $L_c^* \gg c^*$  et  $L_w^* \gg w^*$ , ou encore  $N_c \gg 1$  et  $N_w \gg 1$ , c'est-à-dire que le nombre de mailles par colonne et rang doit être grand devant 1. Dans notre tricot-modèle,  $N_c = N_w = 51$ , on peut donc considérer que cette condition est vérifiée.

### II.3.2 Relation avec les notations standards de la mécanique

Les variables que l'on vient d'introduire sont basées sur la structure particulière du tricot. Toutefois, l'approche continue permet de faire le rapprochement entre ces variables et celles standards de la mécanique  $2D$ , présentées notamment dans l'introduction. Les directions  $x_1$  et  $x_2$  correspondent aux directions  $x$  et  $y$ , et la déformation locale dans le plan de la surface possède trois composantes  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_{xy}$  qui s'expriment de la façon suivante en fonction de notre vecteur position  $\vec{u}$  :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial (\vec{u} - \vec{u}^*)}{\partial x} \cdot \vec{e}_x \quad (\text{II.12})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial (\vec{u} - \vec{u}^*)}{\partial y} \cdot \vec{e}_y \quad (\text{II.13})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\vec{u} - \vec{u}^*)}{\partial y} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial (\vec{u} - \vec{u}^*)}{\partial x} \cdot \vec{e}_y \right) \quad (\text{II.14})$$

Avec  $\vec{u}^* = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$  le vecteur position du tricot de référence. Ces relations s'écrivent plus simplement en fonction des champs de déplacements  $a$  et  $b$  :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (\text{II.15})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial b}{\partial y} \quad (\text{II.16})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) \quad (\text{II.17})$$

On peut aussi remarquer que ces déformations locales sont reliées linéairement à nos variables du tricot  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  :

$$\varepsilon_x = \frac{\vec{c}}{c^*} \cdot \vec{e}_x - 1 \quad (\text{II.18})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\vec{w}}{w^*} \cdot \vec{e}_y - 1 \quad (\text{II.19})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{c}}{c^*} \cdot \vec{e}_y + \frac{\vec{w}}{w^*} \cdot \vec{e}_x \right) \quad (\text{II.20})$$

Nous verrons dans la suite du chapitre que ce sont bien les vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  qui permettent de décrire naturellement les propriétés spécifiques au tricot. C'est pour cette raison que nous resterons avec ces variables non-standards dans la suite de l'étude.

### II.3.3 Une approche Lagrangienne

Maintenant que l'on a défini une cinématique, à savoir l'ensemble des variables qui permettent de décrire notre tricot à l'échelle voulue, il faut déterminer quelles équations lient ces variables dont les solutions sont censées décrire ce qui est mesuré expérimentalement.



Nous avons choisi d'utiliser une approche dite Lagrangienne du problème. Cela passe par la construction d'une grandeur associée à notre système par ses variables, ici  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , appelé Lagrangien et noté  $\mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}]$ . De manière symbolique, ce Lagrangien peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}] = \text{Énergie}[\vec{c}, \vec{w}] + \sum_i \lambda_i \text{Contraintes}[\vec{c}, \vec{w}] \quad (\text{II.21})$$

Le Lagrangien est donc composé de deux parties, la première étant l'énergie du système, l'autre les contraintes qui s'y appliquent. L'objectif étant de trouver les champs de vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  qui minimisent l'énergie du système tout en satisfaisant les contraintes imposées. Pour trouver ces variables, le Lagrangien est différencié par rapport à toutes ses variables, fournissant ainsi les équations différentielles sur les variables dont les solutions minimisent l'énergie. Pour permettre au système de satisfaire ses contraintes, on introduit les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  qui jouent le rôle de degrés de liberté supplémentaires. Ces multiplicateurs apparaissent dans la solution des équations différentielles, on peut alors les ajuster jusqu'à ce que les contraintes soient vérifiées.

L'objectif maintenant est d'exprimer l'énergie et les contraintes du tricot en fonction des variables  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ .

## II.4 Énergie et contraintes

### II.4.1 Énergie du tricot

L'énergie du tricot est portée par l'énergie élastique du fil. On suppose que la déformation du fil est purement élastique et que le fil est considéré comme mince, c'est-à-dire que sa mécanique peut être représentée par sa ligne neutre. Pour intégrer cette énergie dans notre approche Lagrangienne, il faut pouvoir l'exprimer en fonction de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  seulement.

#### a) Quels modes de déformation du fil ?

Lorsqu'un fil mince élastique est soumis à des contraintes extérieures il peut se déformer de trois manières différentes, l'extension, la flexion et la torsion. Le fil étant considéré comme mince, on peut ne prendre en compte que la déformation de sa ligne neutre (la ligne suivie par le centre de masse des sections du fil). Le fil peut augmenter (ou diminuer) de manière homogène la longueur de sa ligne neutre, on parle alors d'extension. Lorsque le fil peut adopter une certaine courbure dans l'espace, il s'agit de flexion. La torsion du fil apparaît quant à elle lorsque la ligne neutre subit une rotation le long de son axe. Toutefois, dans le cas particulier d'un fil parcourant un tricot, ces trois modes de déformation ne contribuent pas de manière équivalente.

Premièrement, notre fil de pêche ne contient pas de torsion interne comme c'est le cas des fils composés de nombreuses fibres tel le coton ou la laine. Ensuite, le processus de tricotage du jersey par machine n'introduit pas explicitement de torsion au fil, entre l'entrée et la sortie d'une maille, l'orientation de la ligne neutre du fil doit revenir à sa configuration initiale pour que le motif puisse se répéter. En revanche, au sein d'une maille, le fil peut se torsader légèrement du fait des contraintes qu'il subit. Il doit donc être nécessaire de prendre en compte la torsion pour obtenir la forme exacte d'une maille. Cependant, dans le régime étudié ici où le tricot est contraint de rester dans un plan et où

la déformation est imposée dans ce même plan, la torsion du fil est très peu sollicitée ni variée. On va donc supposer par la suite que la torsion du fil ne contribue pas à l'énergie du fil qui va pouvoir varier pendant l'élongation.

Deuxièmement, il est évident en regardant la forme d'une maille que le fil est fléchi lorsqu'il parcourt une maille. Par contre, il est très difficile d'évaluer si le fil est étiré ou compressé. L'énergie du tricot contient donc a priori une contribution de la flexion et une contribution de l'extension. On peut alors chercher à déterminer si un des deux modes de déformation va être favorisé par le système. Pour cela on peut par exemple comparer en ordre de grandeur l'énergie de flexion et d'extension du fil parcourant une maille. En première approximation, on peut considérer qu'une maille, composée d'une longueur  $\ell$  de fil, est purement 2D et que le fil adopte un rayon de courbure constant  $R$ . L'énergie de flexion d'une maille est donc donnée par  $\mathcal{E}_b = \frac{1}{2}\ell B \frac{1}{R^2}$  avec  $B = \frac{E\pi r^4}{8}$  le module de flexion du fil,  $E$  son module d'Young et  $r$  son rayon. Pour un allongement  $\delta\ell$  du fil, son énergie d'extension s'écrit  $\mathcal{E}_{ext} = \frac{1}{2}\pi r^2 \ell E \left(\frac{\delta\ell}{\ell}\right)^2$ . Dans notre expérience, on déforme le tricot, et donc les mailles de grossièrement  $\varepsilon \sim 10\%$ . Pour la flexion, cette déformation induit un changement de rayon de courbure de  $R$  à  $R(1+\varepsilon)$ , donc le changement d'énergie de flexion d'une maille pour encaisser cette déformation vaut  $\Delta\mathcal{E}_b = |\mathcal{E}_b(R(1+\varepsilon)) - \mathcal{E}_b(R)| \approx \frac{\ell B \varepsilon}{R^2}$ . Pour l'extension, cette déformation modifie directement la longueur de fil, d'où  $\frac{\delta\ell}{\ell} \approx \varepsilon$ , et  $\Delta\mathcal{E}_{ext} = \frac{1}{2}\pi r^2 \ell E \varepsilon^2$ . On peut alors comparer ces deux variations d'énergie :

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_b}{\Delta\mathcal{E}_{ext}} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{r}{2R}\right)^2 \sim 2.10^{-4} \quad (\text{II.22})$$

Avec la grossière approximation que  $R$  est de l'ordre de la distance entre mailles, soit environ 4 mm et avec notre fil,  $r = 40 \mu\text{m}$ . L'énergie nécessaire pour varier le rayon de courbure de la maille est alors plusieurs ordres de grandeur plus petite que l'énergie nécessaire à varier la longueur de fil. Le système va donc largement plus favoriser la flexion que l'extension. On peut par conséquent considérer le fil comme étant inextensible. Calculer ces ordres de grandeur permet aussi d'apprécier la simplification qu'apporte la séparation d'échelle entre la taille du fil ( $r$ ) et la taille d'une maille ( $R$ ). La seule énergie que l'on va considérer est donc l'énergie de flexion du fil. Évaluer l'énergie du tricot revient donc à mesurer des courbures.

### b) Courbures d'une maille

Mesurer des courbures revient à évaluer le taux de variations des vecteurs attachés à la trajectoire de la ligne neutre du fil ( $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ ) comme introduit précédemment (fig. I.8). Comme on a supposé l'absence de torsion du fil, on peut choisir que  $\vec{d}_1$  reste coplanaire au plan du tricot défini par  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . L'épaisseur du tricot est de l'ordre du diamètre du fil, on a donc aussi une séparation d'échelle entre la taille de la maille et son épaisseur. De cette manière, on peut supposer que le vecteur  $\vec{d}_3$ , colinéaire au fil, reste lui aussi principalement coplanaire au tricot. De ce fait, le dernier vecteur  $\vec{d}_2$  se retrouve donc perpendiculaire au plan du tricot et donc colinéaire à  $\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y$ . Cette approche nous permet de considérer indépendamment la courbure du fil dans le plan du tricot  $\kappa$  et celle hors du plan  $\kappa'$ . Il faut maintenant relier ces courbures aux vecteurs caractérisant la maille,  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Pour cela, une possibilité serait de s'inspirer des travaux effectués sur la forme à l'équilibre du fil dans une maille, notamment ceux de H. Hong et al [95] qui permettent de relier

les dimensions d'une maille à la trajectoire du fil qui la parcourt, et donc son énergie. Cependant, ces relations sont complexes et non explicites ce qui rendra très difficile la dérivation ultérieure du Lagrangien dans lequel cette énergie sera implémentée. On va donc plutôt essayer d'extraire des relations approchées mais simples en s'appuyant sur la géométrie particulière de la maille.

Pour commencer, on peut tout d'abord différencier la partie du fil qui parcourt principalement le rang de celle qui parcourt la colonne. On suppose ensuite que ces deux parties possèdent une courbure propre et constante nommée  $\kappa_c$  et  $\kappa'_c$  le long du rang et  $\kappa_w$  et  $\kappa'_w$  le long des colonnes, pour respectivement la courbure dans le plan et hors du plan du tricot. On définit les rayons de courbures associés :  $\frac{1}{R_c} = \kappa_c$ ,  $\frac{1}{R'_c} = \kappa'_c$ ,  $\frac{1}{R_w} = \kappa_w$  et  $\frac{1}{R'_w} = \kappa'_w$ . L'énergie de la maille s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{E}_{maille} = B \left( \ell_c \left( (\kappa_c)^2 + (\kappa'_c)^2 \right) + \ell_w \left( (\kappa_w)^2 + (\kappa'_w)^2 \right) \right) \quad (\text{II.23})$$

Avec  $\ell_c$  et  $\ell_w$  la longueur de fil le long de, respectivement, le rang et la colonne. En notant l'énergie comme cela, il en ressort qu'un critère exact pour définir où commencent et où s'arrêtent les parties du fil associées aux rangs ou colonnes n'est pas nécessaire. Par contre cela reportera la difficulté sur l'évaluation de  $\ell_c$  et  $\ell_w$ .

Figure II.11.d et fig. II.11.e mettent en évidence schématiquement comment  $R_c$  et  $R_w$  sont contraints géométriquement par la taille de la maille exprimée par  $c = \|\vec{c}\|$  et  $w = \|\vec{w}\|$ . En effet, si par exemple, la taille latérale de la maille  $c$  diminue, le rayon de courbure  $R_c$  est aussi contraint à diminuer. On peut donc faire l'hypothèse, qu'en première approximation, une relation de proportionnalité lie les rayons de courbures dans le plan du tricot aux dimensions de la maille, de sorte que  $R_c \propto c$  et  $R_w \propto w$ . De la même manière, on a une relation géométrique entre l'extension de la maille et les rayons de courbure transverse du fil, sauf que cette fois-ci, comme l'épaisseur du tricot reste constante et de l'ordre de  $d$ , on peut en déduire les relations suivantes :  $R'_c \propto \frac{c^2}{d}$  et  $R'_w \propto \frac{w^2}{d}$ . Reste maintenant à évaluer  $\ell_c$  et  $\ell_w$ , aussi en fonction de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Augmenter de manière isotrope une maille s'accompagne nécessairement d'une augmentation de la longueur de fil dans cette maille. Donc varier  $c$  ou  $w$  va aussi faire varier  $\ell_c$  et  $\ell_w$ . Au gré des déformations de la maille, les parties du fil associées à  $\ell_c$  ou  $\ell_w$  vont évoluer. Une diminution de  $c$  par exemple va s'accompagner d'une réduction de  $\ell_c$  aussi. On va donc aussi faire l'hypothèse que ces grandeurs sont liées par proportionnalité,  $\ell_c \propto c$  et  $\ell_w \propto w$ . La relation entre la longueur de fil par maille et nos variables est approfondie dans la section suivante. L'énergie d'une maille peut en conséquent s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_{maille} = B \left( \frac{\beta_c}{c} + \frac{\beta_w}{w} + d^2 \left( \frac{\beta'_c}{c^3} + \frac{\beta'_w}{w^3} \right) \right) \quad (\text{II.24})$$

Avec  $\beta_c$ ,  $\beta_w$ ,  $\beta'_c$  et  $\beta'_w$  des coefficients de proportionnalité qui ne sont pas connus. On peut remarquer qu'un facteur  $\left(\frac{d}{c}\right)^2$  ou  $\left(\frac{d}{w}\right)^2$  séparent les contributions dans et hors plan. Or comme dans notre cas la taille d'une maille est grande devant le diamètre du fil, on a  $\left(\frac{d}{c}\right)^2 \sim \left(\frac{d}{w}\right)^2 \ll 1$ . De plus, si on suppose que tous les coefficients de proportionnalité sont du même ordre de grandeur, les contributions venant des courbures hors plan sont négligeables comparées à celles dans le plan. Par conséquent, les termes hors plan ont une répercussion négligeable dans la mécanique 2D du tricot. Toutefois, étant les seuls termes

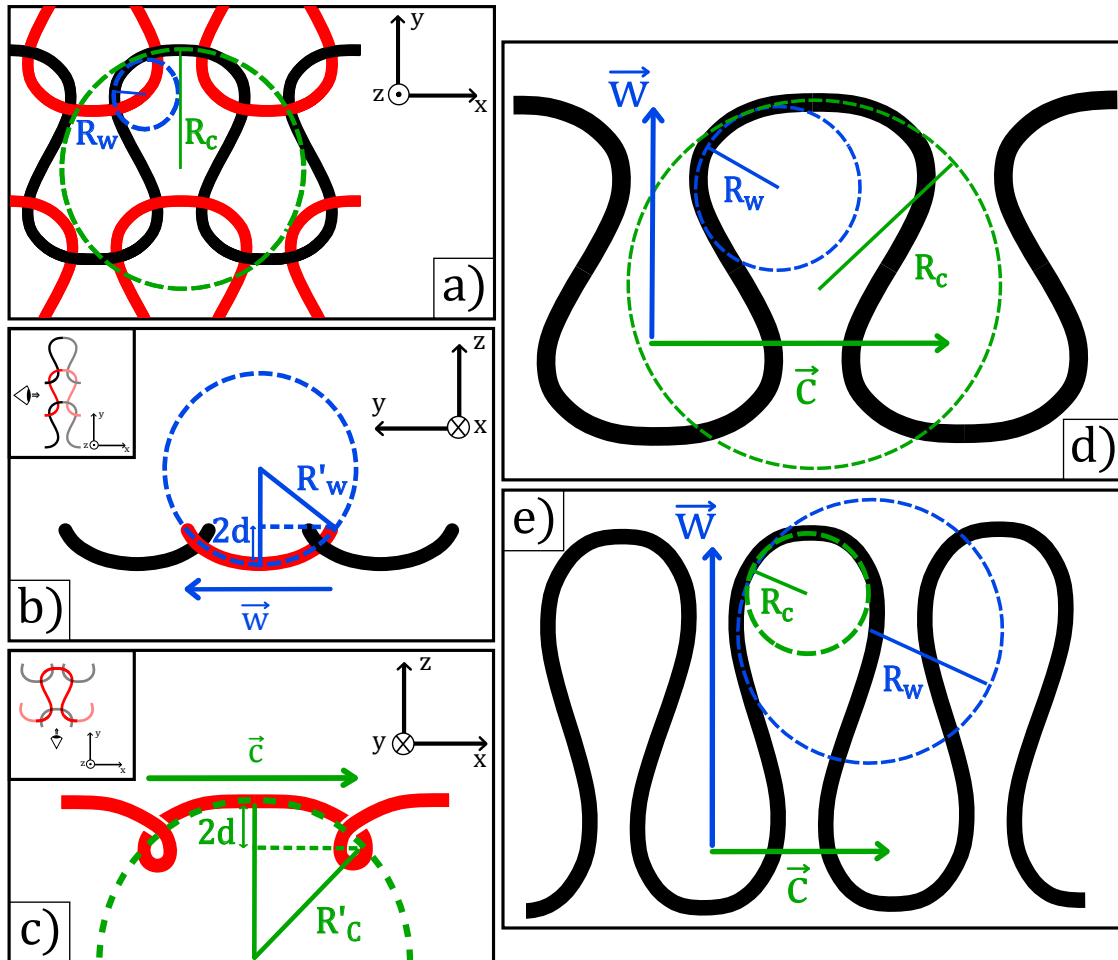


FIGURE II.11 – a-c) Coupe suivant trois plans mettant en évidence les rayons de courbures dans le plan et hors plan associés à chaque partie du tricot. a) Projection dans le plan du tricot ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ ) mettant en évidence les rayons de courbure  $R_c$  et  $R_w$ . b) Projection dans le plan orthogonal au tricot et colinéaire aux colonnes ( $\vec{e}_y, \vec{e}_z$ ), mettant en évidence  $R'_w$  et l'épaisseur du tricot estimée à deux fois le diamètre du fil  $d$ . c) Projection dans le plan orthogonal au tricot et colinéaire aux rangs ( $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ ), mettant en évidence  $R'_c$ . d-e) Schémas mettant en évidence la relation géométrique entre les dimensions d'une maille et la courbure de son fil. d) Cas d'une maille plus large que longue. e) Cas d'une maille allongée.

qui interviennent perpendiculairement au plan du tricot, ce sont eux qui vont prévaloir si on s'intéresse non plus aux déformations dans le plan du tricot mais hors du plan. Ce sont notamment ces termes qui sont en grande partie responsable de la forme 3D d'un tricot au repos et du roulottement des bords, effets qui seront étudiés un peu plus en détail dans le chapitre IV. Au final, on obtient une expression très simple pour l'énergie d'une maille en fonction des variables de notre problème.

$$\mathcal{E}_{maille} = \tilde{B} \left( \frac{1}{c} + \frac{\beta}{w} \right) \quad (\text{II.25})$$

On réorganise aussi les coefficients de proportionnalité pour faire apparaître  $\tilde{B}$ , un module de flexion effectif et  $\beta$  un coefficient exprimant l'asymétrie entre la contribution énergétique de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Maintenant que l'on a l'énergie d'une maille, on peut en déduire celui du tricot en entier en sommant sur toutes les mailles. Avec le modèle discret, il suffit de sommer sur toutes les mailles et donc les indices  $(j, i)$ . Avec le modèle continu, il faut intégrer sur  $x \in \left[-\frac{L_c^*}{2}, \frac{L_c^*}{2}\right]$  et  $y \in \left[-\frac{L_w^*}{2}, \frac{L_w^*}{2}\right]$ . Normaliser par  $c^*w^*$  est nécessaire pour obtenir l'équivalent de la somme discrète, l'intégrale s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_w} \Rightarrow \int_{-\frac{L_c^*}{2}}^{\frac{L_c^*}{2}} \frac{dx}{c^*} \int_{-\frac{L_w^*}{2}}^{\frac{L_w^*}{2}} \frac{dy}{w^*} \quad (\text{II.26})$$

#### II.4.2 Conserver la longueur de fil

Maintenant que l'énergie du système est estimée, on se tourne vers les contraintes qui s'appliquent sur les variables  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . La première résulte directement de l'estimation de l'énergie. Puisque nous supposons que le fil ne se déforme pas par extension, sa longueur totale  $\Lambda$  dans le tricot doit rester constante, peu importe la déformation imposée au tricot dans son ensemble. Or on a vu que la longueur de fil était fortement liée à  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , cette contrainte aura donc une répercussion directe sur nos variables.

##### a) Exprimer la contrainte

Avec  $\ell$  la longueur de fil dans une maille, la somme de  $\ell$  sur tout le tricot doit être une constante du problème qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Localement,  $\ell$  peut varier d'une maille à une autre ou avec la déformation, c'est donc une fonction de  $(x, y, \varepsilon)$ , par contre sa somme sur toutes les mailles est une constante du problème et ne dépend donc plus de la déformation  $\varepsilon$ . C'est par conséquent une contrainte globale. L'enjeu est par conséquent d'exprimer  $\ell$  en fonction de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Ici aussi on va privilégier des relations géométriques approchées et non une approche analytique [95]. Comme pour l'évaluation de l'énergie de flexion, on peut distinguer les parties du fil le long de la colonne  $\ell_w$  et du rang  $\ell_c$ , de sorte que  $\ell = \ell_c + \ell_w$ . La même hypothèse de proportionnalité est faite entre la dimension de la maille et la longueur de fil dans la direction correspondante,  $\ell_c \propto c$  et  $\ell_w \propto w$ . On obtient donc l'expression suivante  $\tilde{\ell} = c + \delta w$ , avec  $\tilde{\ell}$  une grandeur proportionnelle à  $\ell$  et  $\delta$  traduisant le rapport des coefficients de proportionnalité. La contrainte revient donc à s'assurer que la somme de  $\tilde{\ell} = c + \delta w$  sur toutes les mailles, ou de manière équivalente sa valeur moyenne  $\langle \tilde{\ell} \rangle$  ( $\langle \rangle$  indiquant la moyenne sur toutes les mailles du tricot) soit invariant

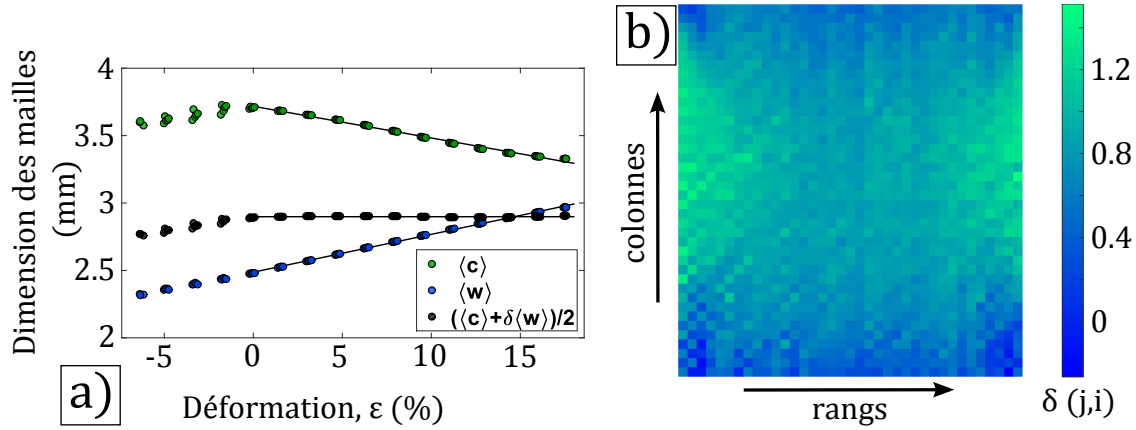


FIGURE II.12 – a) Taille moyenne des mailles mesurées expérimentalement pour les 5 cycles de traction. Pour  $\varepsilon > 0$ , c'est à dire la gamme de déformation où l'élasticité est prépondérante,  $\langle c \rangle$  et  $\langle w \rangle$  varient tous les deux linéairement, le premier étant décroissant, le second croissant. Cela permet de définir un coefficient  $\delta = 0.86$  tel que  $\langle c \rangle + \delta \langle w \rangle$  soit constant pour  $\varepsilon > 0$ . b) Ce même procédé est effectué localement sur chaque maille pour mesurer localement  $\delta(j, i)$ . Chaque pixel de l'image correspond à une maille et sa couleur à sa valeur de  $\delta$ . Une grande majorité de mailles garde une valeur de  $\delta$  proche de la valeur moyenne, mais il y a toutefois des différences significatives près des mors et des bords.

lors de la déformation du tricot. Dans un premier temps, comme  $c$  et  $w$  sont accessibles expérimentalement, on s'aperçoit qu'il existe un  $\delta$  moyen (fig. II.12.a) qui permet de conserver  $\langle \ell \rangle$  tout au long de l'élongation. On mesure en effet que pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\langle c \rangle$  décroît linéairement et  $\langle w \rangle$  croît linéairement. Il existe donc un coefficient  $\delta$  tel que  $\langle c \rangle + \delta \langle w \rangle$  soit effectivement constant, on mesure ici  $\delta = 0.86$ . La contrainte globale va alors s'écrire (en notation variables continues) :

$$\ell^* = \iint_{x,y} \frac{dx dy}{L_c^* L_w^*} (c + \delta w) \quad (\text{II.27})$$

Avec  $\ell^* = \langle c \rangle + \delta \langle w \rangle$  mesuré expérimentalement,  $\ell^* = 5.86$  mm. Il est toutefois possible de mesurer expérimentalement un  $\delta$  pour chaque maille en comparant localement le taux de variations de ses dimensions, qui croissent aussi linéairement (fig. II.12.b). On remarque alors que  $\delta$  n'est pas uniforme et varie d'une valeur proche de 0 près des mors (où  $c$  est maintenu constant) à environ 1.5 dans les zones les plus déformées. Toutefois, la plus grande partie du tricot garde une valeur proche de la valeur moyenne 0.86. La conservation du fil étant globale, notre approche de considérer un  $\delta$  moyen est justifiée et vérifiée expérimentalement. Il serait en revanche faux d'imposer le  $\delta$  moyen localement à chaque maille car redistribue son fil différemment (fig. II.12.b).

Par ailleurs, on peut faire le lien entre ce coefficient de répartition du fil  $\delta$  et les travaux précédents portant sur les dimensions des mailles à l'équilibre [69]. En effet, ces travaux aussi visaient à relier les dimensions d'une maille à la longueur de fil dans celle-ci. Ils étaient arrivés à cette formule (réécrite avec mes notations) :  $\ell = \frac{1}{2} (cK_3 + wK_2)$ , qui permet d'identifier mon paramètre  $\delta$  en fonction des constantes  $K_2$  et  $K_3$ . On trouve

finalement  $\delta = \frac{K_2}{K_3} \approx 1.3$  avec leurs valeurs numériques, ce qui est significativement différent de notre valeur. Cependant les procédures de mesure sont aussi très différentes, notre évaluation de  $\delta$  si fait dans le régime où l'élasticité du fil est dominante alors que les valeurs de  $K_2$  et  $K_3$  reportées proviennent de tricots aussi proches que possible de leur état de minimum d'énergie, loin du régime étudié dans cette thèse.

### b) Dédution de la taille du tricot de référence

Cette contrainte permet aussi de donner une estimation expérimentale de la taille du tricot de référence,  $c^*$  et  $w^*$ , et de vérifier l'approximation de la description continue. En effet, la contrainte doit être valable pour n'importe quelle déformation, notamment entre le tricot de référence et notre expérience, ce qui se traduit par la relation suivante :  $\ell^* = c^* + \delta w^*$ . On a vu précédemment lors de la définition de la cinématique que  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  peuvent être évalués de deux façons différentes. Soit à partir directement des champs de positions, comme fait précédemment pour déterminer  $\delta$ , soit à partir des dérivées spatiales des champs de déplacements  $a$  et  $b$ , mais cela nécessite de connaître  $c^*$  et  $w^*$ . La première façon a permis de mesurer  $\ell^* = 5.86$  mm, la deuxième va permettre de mesurer  $c^*$  et  $w^*$  et donc  $c^* + \delta w^*$ . Pour cela on exprime la contrainte en fonction des champs de déplacements dans leurs versions linéarisées avec  $\varepsilon$ ,  $a = a_0 + \varepsilon a_1$  et  $b = b_0 + \varepsilon b_1$ . Pour rappel, on a  $\vec{c} = c^*((1+a_{,x})\vec{e}_x + b_{,x}\vec{e}_y)$  et  $\vec{w} = w^*(a_{,y}\vec{e}_x + (1+b_{,y})\vec{e}_y)$ , les notations  $,x$  et  $,y$  expriment les dérivées spatiales suivant la direction correspondante. On va faire en outre l'hypothèse que ces champs varient lentement dans l'espace :  $a_{,x}, a_{,y} \ll 1$  et  $b_{,x}, b_{,y} \ll 1$ . Cette hypothèse est équivalente à rester dans un régime de faibles déformations et se traduit par  $(a_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,x}, b_{0,y}) \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ . L'expression de la contrainte est donc développée au premier ordre en ces termes.

$$c^* + \delta w^* = \langle c \rangle + \delta \langle w \rangle \quad (\text{II.28})$$

$$= \iint_{x,y} \frac{dx dy}{L_c^* L_w^*} ( c^*(1 + a_{0,x}) + \delta w^*(1 + b_{0,y}) + \varepsilon (c^* a_{1,x} + \delta w^* b_{1,y} + c^* b_{1,x} b_{0,x} + \delta w^* a_{1,y} a_{0,y}) ) \quad (\text{II.29})$$

$$= \ell_0 + \varepsilon \ell_1 \quad (\text{II.30})$$

La contrainte peut alors se résumer aux deux équations suivantes :  $\ell_0 = c^* + \delta w^*$  et  $\ell_1 = 0$ . Les deux inconnues de ces deux équations sont  $c^*$  et  $w^*$ , le reste des termes pouvant être mesurés expérimentalement. Une expression approchée est utilisée pour calculer les dérivées spatiales à partir du champs de position, par exemple  $a_{0,x} = \frac{u_0^x(j+1,i) - u_0^x(j,i)}{c^*} - 1$ ,



avec  $\vec{u}_0 = u_0^x \vec{e}_x + u_0^y \vec{e}_y$  et  $\vec{u}_1 = u_1^x \vec{e}_x + u_1^y \vec{e}_y$ . Les équations deviennent donc :

$$\begin{aligned} \ell_0 = c^* + \delta w^* &\iff \frac{1}{N_c N_w} \sum_{i,j} [u_0^x(j+1, i) - u_0^x(j, i) + \delta(u_0^y(j, i+1) - u_0^y(j, i))] \\ &= c^* + \delta w^* \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned} \ell_1 = 0 &\iff \sum_{i,j} [u_1^x(j+1, i) - u_1^x(j, i) + \delta(u_1^y(j, i+1) - u_1^y(j, i))] \\ &= - \sum_{i,j} \left[ (u_1^y(j+1, i) - u_1^y(j, i)) \frac{u_0^y(j+1, i) - u_0^y(j, i)}{c^*} \right. \\ &\quad \left. + \delta(u_1^x(j, i+1) - u_1^x(j, i)) \frac{u_0^x(j, i+1) - u_0^x(j, i)}{w^*} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

La solution à ce système de deux équations à deux inconnues est  $c^* = 3.93$  mm et  $w^* = 2.08$  mm. Ainsi, la contrainte de conservation de la longueur de fil permet de connaître la taille de notre tricot de référence, soit  $L_c^* = 200.4$  mm et  $L_w^* = 106.1$  mm. On peut comparer cette taille à la taille initiale du tricot,  $L_c^0 = 227$  mm imposé par les mors et  $L_w^0 = 125$  mm qui marque le passage à l'élasticité dominante. La déformation effective qui permet de passer au tricot de référence à l'état initial est donc une extension de 27 mm des rangs et de 19 mm des colonnes. En comparant  $\ell^* = 5.86$  mm et  $c^* + \delta w^* = 5.70$  mm, on remarque que la différence entre les deux estimations est inférieure à 3%. Les hypothèses de milieu continu et de petites déformations sont donc a posteriori justifiées. La mesure expérimentale (donc discrète) de  $a$  et  $b$  nécessite la connaissance du réseau de référence. Maintenant que ce dernier est connu, on peut produire une mesure expérimentale de  $a_0$ ,  $b_0$  (fig. II.13.a),  $a_1$  et  $b_1$  (fig. II.13.b).

### II.4.3 Conserver la topologie

La seconde contrainte concerne la topologie imposée au fil, c'est-à-dire son motif d'enchevêtrement. En effet, le fil ne pouvant passer à travers lui-même, les croisements du fil ne peuvent pas s'inverser ou disparaître, la topologie du fil est donc conservée pendant la déformation.

#### a) Topologie et tricot

La topologie d'un tricot, ou même d'un textile en règle générale, est à approcher de la théorie des nœuds en mathématiques [114]. Cette branche des mathématiques s'intéresse aux propriétés d'un objet uni-dimensionnel fermé qui ne dépendent pas de sa métrique. Cela revient à étudier un fil dont les extrémités sont jointes, qui n'a aucune résistance à la déformation mais qui ne peut pas passer à travers lui-même. Ainsi, ce fil va être entièrement caractérisé par les entrelacs qu'il présente avec lui-même ou d'autres fils, d'où la dénomination de nœuds. Une des questions fondamentales est de déterminer si deux nœuds présentant un ensemble de croisements différents sont au final équivalents ou non (fig. II.14.a). En effet, des croisements peuvent être supprimés sans avoir à passer le fil à travers lui-même et donc sans modifier la nature du nœud. Deux nœuds équivalents sont appelés isotopies (fig. II.14.b), conserver la topologie d'un nœud revient donc à rester dans la même classe d'isotopie. Déterminer si deux nœuds sont équivalents peut se révéler

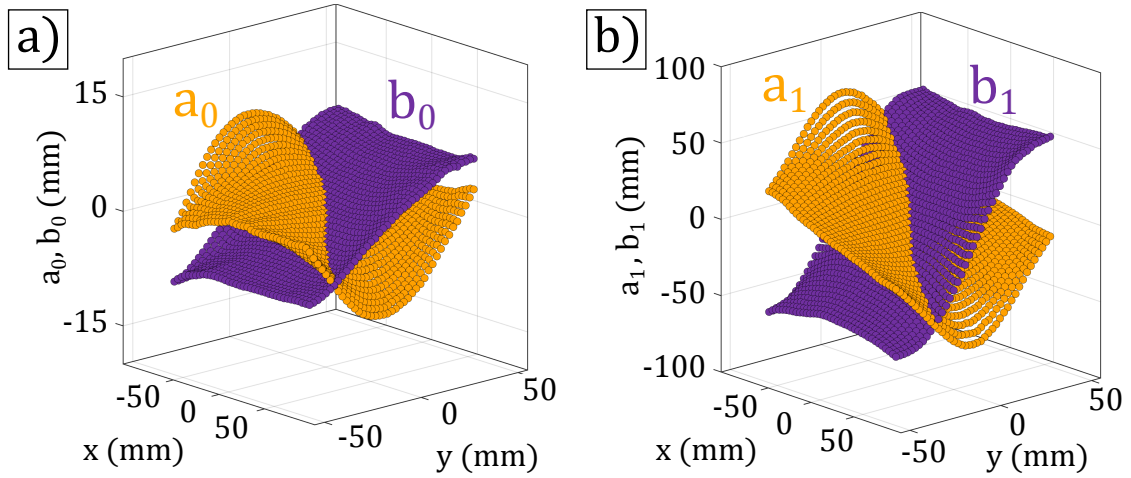


FIGURE II.13 – a) Mesure expérimentale de  $a_0(x, y)$  et  $b_0(x, y)$ , chaque maille est représentée par un point et sa position en  $(x, y)$  est celle dans le tricot de référence. b) Mesure expérimentale de  $a_1(x, y)$  et  $b_1(x, y)$ , chaque maille est représentée par un point et sa position en  $(x, y)$  est celle dans le tricot de référence. L'unité de  $a_1$  et  $b_1$  est exprimée en  $\text{mm}/\varepsilon$  car ils correspondent aux coefficients de la droite  $a(\varepsilon)$  et  $b(\varepsilon)$  avec  $\varepsilon$  en unité standard (pas %).

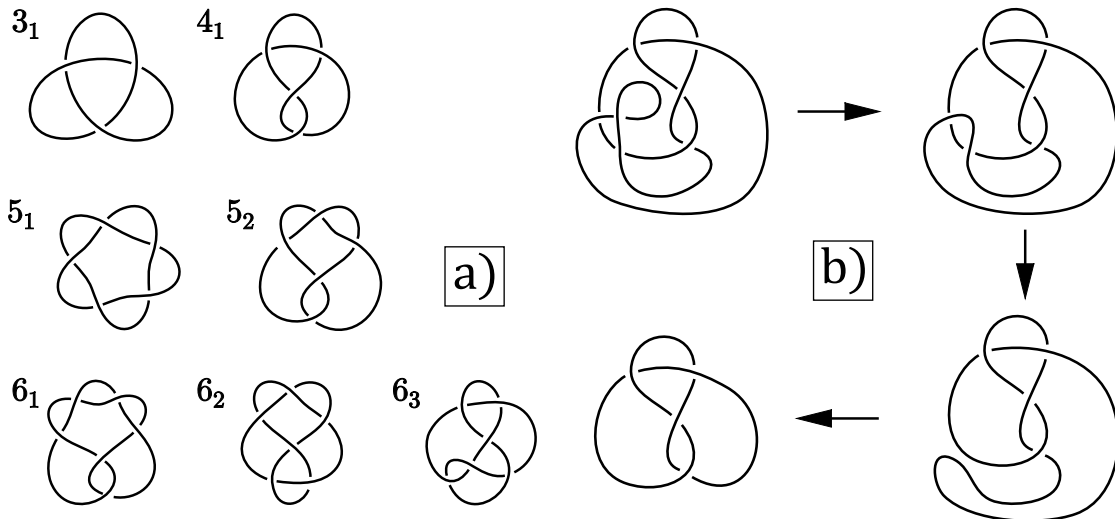


FIGURE II.14 – a) Classification des nœuds à 3, 4, 5 et 6 croisements. Chacun des exemples appartient à une classe d'isotopie propre, on ne peut passer d'un nœud à l'autre sans couper le fil. b) Illustration de mouvements du fil qui permettent de diminuer le nombre de croisements sans le couper, ainsi chaque nœud à chaque étape appartient à la même classe d'isotopie  $4_1$ . Schémas extraits de [113].

être très ardu, pour faciliter et automatiser cette tâche, une famille de fonctions, dites invariants topologiques, a été développée. Ces fonctions associent à un nœud un certain polynôme par exemple, de telle sorte que deux nœuds appartenant à la même classe d'isotopie engendrent le même polynôme. Toutefois, même si ces méthodes fonctionnent dans une majorité des cas, aucune des fonctions introduites pour l'instant n'est sans failles, elles échouent toujours au moins sur quelques cas particuliers.

Avec l'objet qui nous intéresse, le tricot, la structure du nœud que l'on obtient en joignant les deux extrémités du fil est très complexe. Par exemple, pour le tricot de notre expérience, on peut compter plus de 5000 croisements, rendant l'utilisation d'invariants topologiques très délicats. Néanmoins, le motif de croisements du tricot possède une périodicité suivant les rangs et les colonnes. Ce cas particulier de nœuds qui se répète dans deux directions, décrivant une grande partie des textiles, a été étudié par Sergei Grishanov et ses collègues dans une série d'articles [115, 116]. Une autre série d'articles à destination de la communauté de recherche en textile constitue une excellente introduction à la théorie des nœuds et son application aux motifs textiles [113, 117]. Cependant, traduire les invariants topologiques potentiels pour imposer une conservation de la topologie avec nos variables  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  s'est avéré difficile, notamment parce que nos variables représentent essentiellement la métrique du fil.

### b) La topologie du réseau

Pour prendre en compte cette contrainte, la topologie du fil ne va pas être considérée directement. Ce sont plutôt les conséquences de sa conservation qui vont être mises à profit. Le fait que le motif de croisements soit préservé tout au long de la déformation entraîne qu'une maille garde en toutes circonstances les mêmes voisines, ni ne pourra disparaître ou apparaître. La conservation de la topologie du fil se transfère alors à la conservation de la topologie du réseau, c'est-à-dire à l'agencement des voisinages des nœuds du réseau. Or,  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  étant des variables directement liées au réseau, exprimer la conservation de la topologie devient beaucoup plus commode. Une manière d'écrire cette contrainte est de remarquer que, si une maille garde toujours les mêmes voisines, il existe plusieurs chemins équivalents pour en atteindre une en particulier. Par exemple, pour une maille en position  $(j, i)$ , atteindre sa voisine  $(j + 1, i + 1)$  par ses plus proches voisines peut se faire via deux chemins, un passant par  $(j, i + 1)$ , l'autre par  $(i, j + 1)$  (fig. II.15). On obtient ainsi l'égalité suivante pour les vecteurs reliant ces mailles :

$$\vec{c}(j, i) + \vec{w}(j + 1, i) = \vec{w}(j, i) + \vec{c}(j, i + 1) \quad (\text{II.33})$$

Si cette contrainte reste vraie pour toutes les mailles ( $\forall(j, i)$ ), alors la topologie du réseau de mailles est conservée. Il s'agit donc d'une contrainte qui doit s'appliquer localement sur toutes les mailles.

En notation continue, cette équation peut être réécrite avec les dérivées spatiales de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ .

$$\frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} - \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} = 0 \quad \forall(x, y) \quad (\text{II.34})$$

La forme de cette équation suggère que l'on peut introduire une nouvelle variable,  $\vec{X}$ , de telle sorte que  $\vec{c} = c^* \frac{\partial \vec{X}}{\partial x}$  et  $\vec{w} = w^* \frac{\partial \vec{X}}{\partial y}$ . En utilisant cette variable au lieu de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ ,

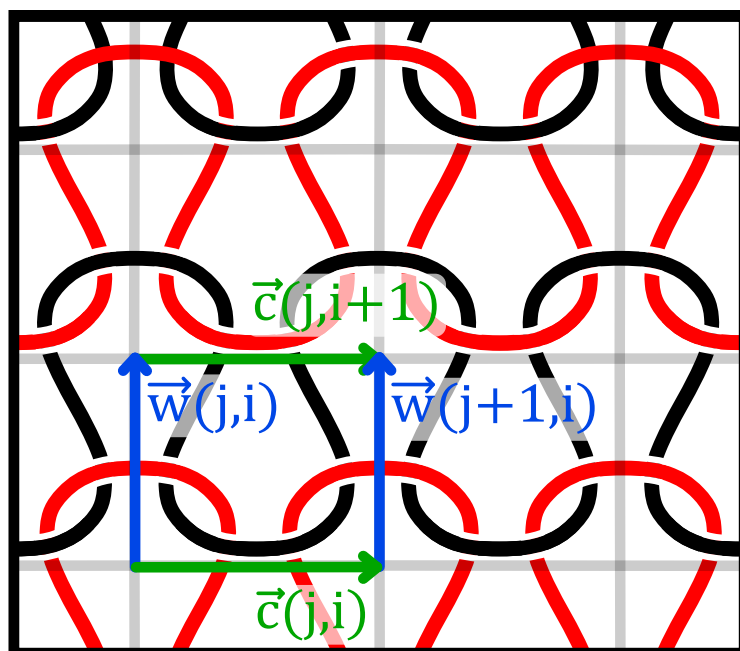


FIGURE II.15 – Schéma du réseau de mailles avec les deux trajectoires permettant à la maille  $(j, i)$  d'atteindre sa voisine  $(j + 1, i + 1)$  uniquement en passant par ses plus proches voisines.

l'équation est automatiquement vérifiée. Par intégration, on trouve l'expression suivante pour  $\vec{X}$  avec  $\vec{X}(0, 0) = \vec{0}$ .

$$\vec{X}(x, y) = \int_0^x \frac{\vec{c}(x', 0)}{c^*} dx' + \int_0^y \frac{\vec{w}(x, y')}{w^*} dy' \quad (\text{II.35})$$

$$= \int_0^y \frac{\vec{w}(0, y')}{w^*} dy' + \int_0^x \frac{\vec{c}(x', y)}{c^*} dx' \quad (\text{II.36})$$

On s'aperçoit alors que cette variable  $\vec{X}$  est exactement identique au champ de position  $\vec{u}$ . En effet, les formules précédentes montrent que le vecteur  $\vec{X}(x, y)$  correspond à la somme des  $\vec{c}$  suivant le rang central jusqu'à ce que la bonne colonne soit atteinte, puis à la somme des  $\vec{w}$  de cette colonne pour atteindre le bon rang. La deuxième formule est équivalente, en sommant d'abord selon la colonne centrale puis sur le bon rang. Ce vecteur correspond donc simplement à la position de la maille  $(x, y)$ . Cela signifie que la contrainte topologique est automatiquement vérifiée en utilisant comme variable le champ de position  $\vec{u}$ , ou de manière équivalente les champs de déplacements  $a$  et  $b$ , et non les dimensions des mailles  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Cependant, on gardera toutefois l'expression du Lagrangien avec  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  car le multiplicateur de Lagrange qui sera associé à cette contrainte permettra d'apporter plus d'informations sur le système et les équations sont plus commodes à dériver.

Maintenant que l'on a réussi à exprimer l'énergie et les contraintes du système en fonction de nos variables cinématiques  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , on peut s'atteler à la résolution du Lagrangien et de la mécanique.

## II.5 Un cas particulier : la déformation uniforme

Avant de nous intéresser à un cas général de déformation arbitraire, il est intéressant de se pencher sur un cas plus simple, celui d'une déformation uniforme d'un tricot. Dans ce cas, toutes les mailles se déforment de la même manière,  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  ne sont plus des champs de vecteurs qui dépendent de l'emplacement de la maille  $(x, y)$  mais simplement des vecteurs qui ne dépendent plus que de la déformation. La contrainte sur la conservation de la longueur de fil devient simplement une relation entre les normes de ces vecteurs,  $c + \delta w = c^* + \delta w^*$  qui doit être vérifiée par chaque maille. La contrainte topologique ne faisant intervenir que les dérivées spatiales de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , elle n'a plus lieu d'être puisque systématiquement vérifiée. Une approche Lagrangienne n'est alors plus nécessaire pour résoudre le problème.

Pour illustrer ce cas particulier, on considère une déformation par cycle de traction-compression selon l'axe  $y$ , en imposant la hauteur de premier et dernier rang, en laissant sa largeur varier librement. Expérimentalement, on peut tendre vers cette déformation en faisant passer les mailles des rangs extrémaux autour d'un axe rigide sur lequel elles vont pouvoir glisser aussi librement que possible. Cette condition aux bords a été expliquée plus en détail au début de ce chapitre (fig. II.3.b). Dans l'expérience présentée ici, le tricot est composé de  $N_c \times N_w = 20 \times 30$  mailles en fil de nylon STROFT® GTM "Schwarz" de diamètre  $200\mu\text{m}$ , leur taille étant réglée à 5 sur la machine à tricoter, à l'exception des 2 premiers et dernier rangs qui ont une taille réglée à 8 pour faciliter leur glissement sur l'axe rigide. On impose alors un déplacement dans la direction  $y$  à l'axe rigide supérieur, entre  $L_w = 53\text{ mm}$  et  $L_w = 143\text{ mm}$  à une vitesse constante de  $1\text{ mm/s}$ . On mesure la force nécessaire à cette déformation, ainsi que la forme du tricot en prenant des photos tous les  $10\text{ mm}$  de déformation (fig. II.16.a)). Malheureusement, avec cette configuration, le roulottement des bords latéraux libres est suffisamment important pour empêcher la mesure du champ de déplacement d'un grand nombre de mailles, la mesure des déformations est alors faite manuellement avec le logiciel *ImajeJ*, sur un nombre restreint de mailles sur le rang central du tricot. Même si le roulottement et donc les déformations 3D sont importantes, cela n'aura qu'une incidence mineure sur la réponse mécanique que l'on mesure, car on a vu lors de l'évaluation de l'énergie du tricot que les courbures hors plan n'apportaient qu'une contribution négligeable au coût de la déformation 2D.

Le problème mathématique à résoudre pour décrire la mécanique de cette expérience est aisé, la norme de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  suffit car leur direction reste constante  $\vec{c} = c\vec{e}_x$  et  $\vec{w} = w\vec{e}_y$ . La déformation que l'on impose  $\varepsilon_h = \frac{L_w - L_w^*}{L_w^*}$  va se répercuter sur chaque maille de la même manière, l'expression de la taille longitudinale des mailles est alors simplement :  $\vec{w} = w^*(1 + \varepsilon_h)\vec{e}_y$ . La contrainte de conservation du fil permet d'obtenir directement l'expression de  $\vec{c} = c^* \left(1 - \delta \frac{w^*}{c^*} \varepsilon_h\right) \vec{e}_x$ . L'état de référence du tricot est donc atteint simultanément pour  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  lorsque  $\varepsilon_h = 0$ . Ces expressions, qui relient la déformation longitudinale et latérale permet aussi de définir un module de Poisson pour notre tricot :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} = -\frac{c - c^*}{c^*} \frac{w^*}{w - w^*} = \delta \frac{w^*}{c^*} \quad (\text{II.37})$$

Ce module dépend donc directement du coefficient de répartition du fil dans une maille  $\delta$  et du rapport d'aspect de la maille à l'état de référence. La quantité  $\delta \frac{w^*}{c^*}$  sera désormais

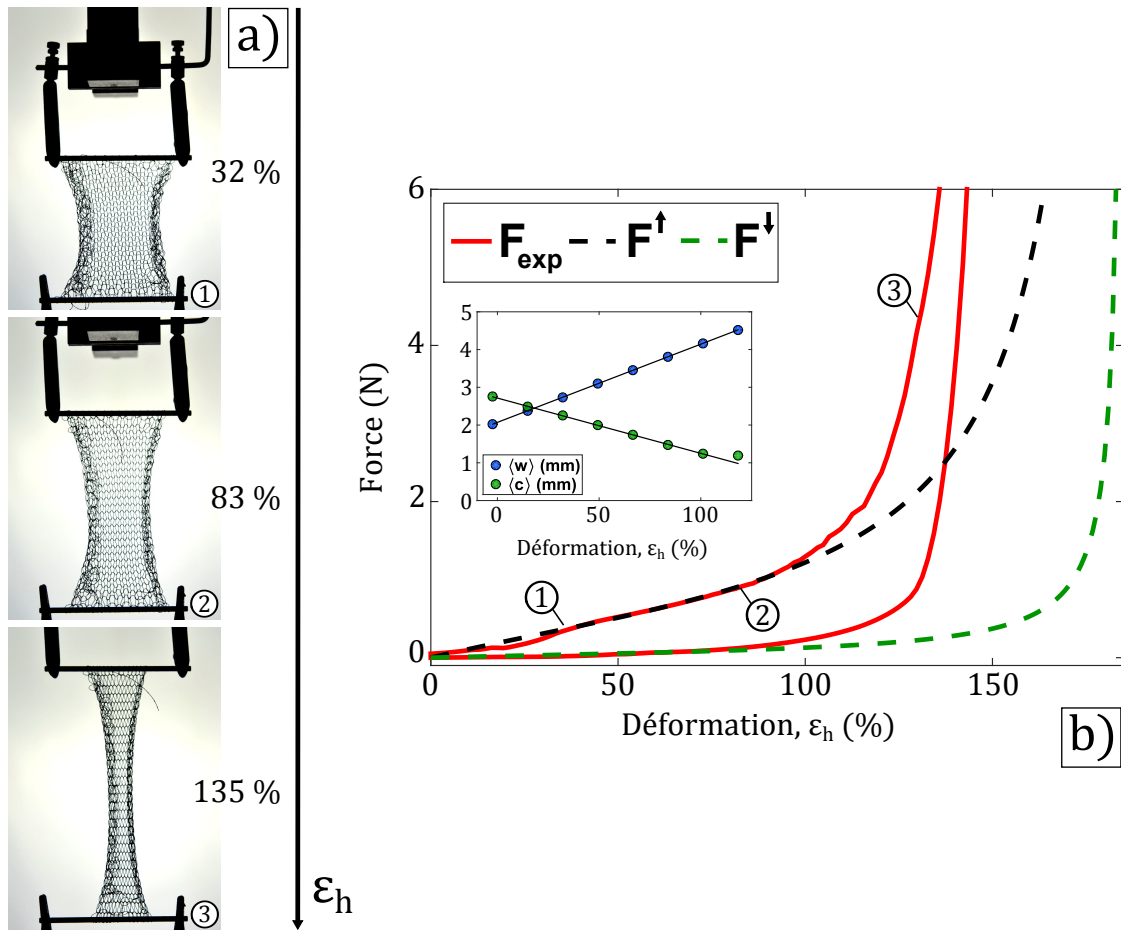


FIGURE II.16 – a) Série de trois photographies présent pendant la traction du tricot avec des conditions aux bords "glissantes" qui permettent de tendre vers une déformation uniforme dans le plan. b) Réponse en force du tricot, moyennée sur 5 cycles. Les forces  $F^\uparrow$  et  $F^\downarrow$  sont calculées à partir du modèle avec  $\tilde{Y}^\uparrow$  et  $\tilde{Y}^\downarrow$  comme seuls paramètres ajustables.

notée simplement  $\nu$ . Avec les expressions de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  l'énergie totale du tricot est alors facilement calculable :

$$\mathcal{E}_h = \tilde{B}N_cN_w \left( \frac{1}{c^*(1 - \nu\varepsilon_h)} + \frac{\beta}{w^*(1 + \varepsilon_h)} \right) \quad (\text{II.38})$$

L'énergie n'est pas une fonction monotone de  $\varepsilon_h$ , elle va notamment diverger lorsque  $\varepsilon_h \rightarrow 1/\nu$ . De plus, l'état de référence est défini comme l'état d'équilibre du tricot en l'absence de contraintes extérieures, il doit donc correspondre à un minimum d'énergie. Imposer cette condition supplémentaire à notre expression de l'énergie permet de donner la relation entre le coefficient d'asymétrie de contribution énergétique du tricot  $\beta$ , avec les autres paramètres du tricot :  $\beta = \delta \left( \frac{w^*}{c^*} \right)^2$ . On peut ensuite déterminer l'expression de

la force qu'exerce le tricot sur le mors lorsque celui-ci se déplace le long de l'axe  $y$  :

$$F(\varepsilon_h) = -\frac{\partial \mathcal{E}_h}{\partial L_w} = \tilde{Y} N_c \nu \left[ \frac{1}{(1 + \varepsilon_h)^2} - \frac{1}{(1 - \nu \varepsilon_h)^2} \right] \quad (\text{II.39})$$

On définit  $\tilde{Y} = \frac{\tilde{B}}{c^* w^*}$  le module de traction effectif du tricot, il dépend à la fois de l'élasticité du fil, mais aussi de propriétés géométriques comme la taille du tricot de référence.  $\tilde{Y}$  a la dimension d'une tension de fil ( $\text{J.m}^{-1}$  ou Newton) ce qui souligne que la réponse mécanique du tricot vient directement des contraintes imposées au fil le constituant. La réponse expérimentale de ce tricot présente aussi une hystérésis, causé comme discuté auparavant par la contribution globale positive ou négative des forces de friction. On définit alors deux modules de traction effectifs, un pour la traction  $\tilde{Y}^\uparrow$  et un pour la compression  $\tilde{Y}^\downarrow$ . Ces deux modules étant simplement proportionnels à la force, lorsque le tricot est à l'état de référence, la force de traction et la force de compression doivent se croiser,  $F^\uparrow(\varepsilon_h = 0) = F^\downarrow(\varepsilon_h = 0) = 0$ .

Pour comparer cette formule avec notre expérience, il faut maintenant déterminer les inconnues du problème,  $\nu$  (et donc  $\delta$ ,  $c^*$ ,  $w^*$ ) et  $\tilde{Y}$ . Pour  $\delta$ , il suffit de faire comme présenté précédemment, c'est-à-dire mesurer les variations linéaires de  $w(\varepsilon_h)$  et  $c(\varepsilon_h)$ ,  $\delta$  est alors le rapport entre ces deux pentes. On trouve ici  $\delta = 0.71$  (fig. II.16.b, insert). Pour  $c^*$  et  $w^*$  on ne peut pas procéder comme dans le cas d'une déformation uniforme puisque la méthode s'appuie sur les variations spatiales des champs de déplacement. On va plutôt utiliser ici la propriété  $F^\uparrow(\varepsilon_h = 0) = F^\downarrow(\varepsilon_h = 0) = 0$ . Dans la courbe de réponse expérimentale, il faut trouver l'élongation  $L_w$  pour laquelle les forces de traction et compression se croisent. Cependant, à faible élongation on sort du régime d'élasticité dominante, la mesure sort, de fait, du cadre de notre analyse. Pour contourner ce problème, on suppose que l'évolution des forces de traction et compression restent linéaires entre l'état de référence et le passage à l'élasticité dominante. Pour trouver l'état de référence il suffit alors de prolonger linéairement les réponses en force lorsque le régime élastique est établi. Ces prolongements se croisent en  $L_w = 58$  mm, donnant  $w^* = 2.1$  mm, ensuite le taux de variations de  $c$  étant connu, on peut en déduire  $c^* = 2.7$  mm. Le coefficient de Poisson du système est alors de  $\nu = 0.55$ . Finalement, les valeurs de  $\tilde{Y}^\uparrow$  et  $\tilde{Y}^\downarrow$  sont ajustées pour que les courbes théoriques correspondent aux portions linéaires de la réponse expérimentale. On trouve  $\tilde{Y}^\uparrow = 3.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$  et  $\tilde{Y}^\downarrow = 0.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$ .

Au final, notre modèle arrive à très bien capturer la réponse en force en traction et compression du tricot jusqu'à environ  $\varepsilon_h = 100\%$ , ce qui correspond principalement à sa réponse linéaire avant que la force ne commence à diverger. Le modèle prédit lui aussi une divergence mais qui arrive pour des  $\varepsilon_h$  plus élevés que mesurés expérimentalement. En effet, notre modèle repose sur l'hypothèse que la taille des mailles reste grande devant le diamètre du fil, ce qui équivaut à dire que le diamètre du fil tend vers 0. Ainsi la divergence que l'on prédit arrive lorsque la courbure  $\kappa_c \rightarrow 0$ , or expérimentalement, cette courbure est limitée par le diamètre du fil. La divergence de la force arrive donc pour de plus faible déformation que ce qui est prédit. Cela justifie a priori une approche linéaire du problème, puisque aller plus loin entre en contradiction avec nos hypothèses initiales.



## II.6 Le cas général : le Lagrangien du tricot

Intéressons-nous maintenant au cas général où  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  varient en fonction de leur position dans le tricot. Le Lagrangien du tricot s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}] = & \tilde{Y} \iint_{x,y} dx dy \left( \frac{1}{c} + \frac{\beta}{w} \right) \\
& + \alpha \iint_{x,y} dx dy (c + \delta w) \\
& - \iint_{x,y} dx dy \vec{T}(x, y) \cdot \left( \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right) \\
& - \iint_{x,y} dx dy \mathcal{T}(x) \vec{e}_y \cdot \vec{w}
\end{aligned} \tag{II.40}$$

Le premier terme correspond à l'énergie élastique du tricot, avec son module de traction effectif  $\tilde{Y}$  et le coefficient d'asymétrie en contribution à l'énergie,  $\beta$ . Le second terme se rapporte à la contrainte de conservation du fil, avec  $\delta$  le coefficient d'asymétrie en contribution à la longueur de fil par maille et  $\alpha$  le multiplicateur de Lagrange associé. La contrainte étant globale, ce multiplicateur est simplement une constante que l'on peut sortir de l'intégrale. Le troisième terme traduit la contrainte topologique qui s'applique sur chaque maille. Cette contrainte étant locale, le multiplicateur de Lagrange associé,  $\vec{T}(x, y)$  est local, c'est donc un champ de vecteurs. Pour rappel,  $c^*$  et  $w^*$  correspondent aux dimensions d'une maille dans l'état de référence. Le quatrième terme correspond au travail des forces extérieures imposées au tricot. L'expression présentée ici est le cas particulier d'une force  $\mathcal{T}$  imposée sur les rangs initiaux et finaux.

Une fois le Lagrangien défini, on le dérive suivant nos deux variables pour obtenir les équations qu'elles doivent vérifier pour minimiser l'énergie du système. Par rapport à la variable  $\vec{c}$ , on obtient par dérivation puis intégration par parties :

$$\mathcal{L}[\vec{c} + \delta \vec{c}, \vec{w}] - \mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}] = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\tilde{Y} \frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha \frac{\vec{c}}{c} + \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} = \vec{0} \\ [\vec{T} \cdot \delta \vec{c}]_{y=\pm \frac{L_w^*}{2}} = 0 \end{cases} \tag{II.41}$$

Et par rapport à la variable  $\vec{w}$  :

$$\mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w} + \delta \vec{w}] - \mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}] = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\tilde{Y} \beta \frac{\vec{w}}{w^3} + \delta \alpha \frac{\vec{w}}{w} - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} = \mathcal{T}(x) \vec{e}_y \\ [\vec{T} \cdot \delta \vec{w}]_{x=\pm \frac{L_c^*}{2}} = 0 \end{cases} \tag{II.42}$$

Chaque dérivation apporte une équation différentielle et une condition aux bords, sur les rangs et les colonnes extérieures. On a donc une équation différentielle pour  $\vec{c}$  et une autre pour  $\vec{w}$ , les deux équations ne sont pas indépendantes car le multiplicateur de Lagrange  $\vec{T}$  vient coupler les deux équations. On peut recombinaison les deux équations différentielles en éliminant  $\vec{T}$  :

$$c^* \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\tilde{Y} \frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha \frac{\vec{c}}{c} \right] + w^* \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\tilde{Y} \beta \frac{\vec{w}}{w^3} + \delta \alpha \frac{\vec{w}}{w} \right] = 0 \tag{II.43}$$

Maintenant que l'on a écrit le système d'équations général, on peut l'appliquer au cas particulier que l'on a étudié expérimentalement.

## II.7 Cas de notre expérience modèle

Appliquons maintenant ces équations au cas de notre tricot-modèle subissant une traction uniaxiale suivant  $\vec{e}_y$  tout en maintenant l'espacement entre les mailles de ses rangs inférieurs et supérieurs constants. Avec cette expérience, on a déjà mesuré un certain nombre de paramètres. La vérification expérimentale de la contrainte de conservation de la longueur de fil nous a donné  $\delta = 0.86$ ,  $c^* = 3.93$  mm et  $w^* = 2.08$  mm, d'où un coefficient de Poisson  $\nu = \delta \frac{w^*}{c^*} = 0.46$ . On va ensuite faire l'hypothèse que le paramètre  $\beta$  est un paramètre intrinsèque du tricot et ne va donc pas dépendre de la position de la maille ni du mode de sollicitation du tricot. On peut donc ré-exploiter le résultat obtenu pour la déformation uniforme qui impose que  $\beta = \delta \left(\frac{w^*}{c^*}\right)^2$  pour que l'état de référence soit le minimum d'énergie.  $\beta$  n'est donc plus un paramètre inconnu et vaut  $\beta = 0.24$ . Le seul paramètre inconnu qui reste, mis à part les multiplicateurs de Lagrange qui seront déterminés a posteriori, est donc  $\tilde{Y}$  qui donne une échelle d'énergie globale au système.

Les conditions aux bords imposées expérimentalement par les mors se traduisent facilement par  $\vec{c}(x, y = \pm \frac{L_w^*}{2}) = \frac{L_c^0}{N_c} \vec{e}_x$  pour la distance constante entre les mailles des premiers et derniers rangs, et  $\int \frac{dy}{w^*} \vec{w} = L_w \vec{e}_y$  pour la distance imposée entre ces deux rangs qui correspond à la déformation globale. La condition  $[\vec{T} \cdot \delta \vec{c}]_{y=\pm \frac{L_w^*}{2}} = 0$  n'impose donc pas de conditions supplémentaires car l'espacement constant donne directement  $\delta \vec{c} = \vec{0}$  pour ces rangs. Comme les bords latéraux peuvent se déformer librement, la condition  $[\vec{T} \cdot \delta \vec{w}]_{x=\pm \frac{L_c^*}{2}} = 0$  devient donc  $\vec{T}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y) = 0$ . On peut réécrire cette condition grâce à l'équation différentielle sur  $\vec{c}$  :  $-\tilde{Y} \frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha \frac{\vec{c}}{c} \Big|_{x=\pm \frac{L_c^*}{2}} = 0$ .

### II.7.1 Équations sur les champs de déplacement

Pour satisfaire automatiquement la contrainte topologique, les équations dérivées précédemment sont désormais écrites en fonction des champs de déplacements  $a$  et  $b$  des mailles. On se place dans le cadre d'une approche linéaire de la déformation, les équations sont linéarisées au premier ordre en  $\varepsilon$ . Les champs de déplacement sont exprimés en terme de déplacement initiaux et linéaires en la déformation :  $a = a_0 + \varepsilon a_1$  et  $b = b_0 + \varepsilon b_1$ . Cela implique aussi d'écrire les multiplicateurs de Lagrange de cette façon, notamment  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1$ . De plus, on suppose que l'état initial en  $\varepsilon = 0$  est peu déformé par rapport à l'état de référence, cela implique que les dérivées spatiales de  $a_0$  et  $b_0$  restent petites devant 1 :  $(a_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,x}, b_{0,y}) \ll 1$ . Par contre, on remarque qu'expérimentalement,  $a_0, b_0$  et  $a_1, b_1$  se différencient sensiblement, il faut donc que la déformation initiale intervienne dans les équations pour  $a_1, b_1$ . Dans le développement on garde donc les termes en  $\varepsilon \times (a_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,x}, b_{0,y})$ .

Pour alléger les équations, on définit le multiplicateur de Lagrange adimensionné  $\tilde{\alpha} = \frac{c^{*2} \alpha}{Y}$ , ainsi que les coefficients suivants, le coefficient de Poisson  $\nu = \delta \frac{w^*}{c^*}$  et  $\chi = \frac{\tilde{\alpha}_0 - 1}{2}$ . Les

termes intervenant dans l'équation globale sur  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  ont alors pour expression :

$$-\tilde{Y}\frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha\frac{\vec{c}}{c} = \frac{\tilde{Y}}{c^{*2}} \left( -\frac{\vec{c}c^{*2}}{c^3} + \tilde{\alpha}\frac{\vec{c}}{c} \right) \quad (\text{II.44})$$

$$= \frac{\tilde{Y}}{c^{*2}} \begin{cases} \tilde{\alpha}_0 - 1 + 2a_{0,x} + \varepsilon [2a_{1,x} + \tilde{\alpha}_1 + -6a_{1,x}a_{0,x} + (3 - \tilde{\alpha}_0)b_{0,x}b_{1,x}] \\ b_{0,x}(\tilde{\alpha}_0 - 1) + \varepsilon [(\tilde{\alpha}_0 - 1)b_{1,x} + (3 - \tilde{\alpha}_0)b_{1,x}a_{0,x} + (3 - \tilde{\alpha}_0)a_{1,x}b_{0,x} + \tilde{\alpha}_1b_{0,x}] \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

$$-\tilde{Y}\beta\frac{\vec{w}}{w^3} + \delta\alpha\frac{\vec{w}}{w} = \frac{\delta\tilde{Y}}{c^{*2}} \left( -\frac{\vec{w}w^{*2}}{w^3} + \tilde{\alpha}\frac{\vec{w}}{w} \right) \quad (\text{II.46})$$

$$= \frac{\delta\tilde{Y}}{c^{*2}} \begin{cases} (\tilde{\alpha}_0 - 1)a_{0,y} + \varepsilon [(\tilde{\alpha}_0 - 1)a_{1,y} + (3 - \tilde{\alpha}_0)b_{1,y}a_{0,y} + (3 - \tilde{\alpha}_0)a_{1,y}b_{0,y} + \tilde{\alpha}_1a_{0,y}] \\ \tilde{\alpha}_0 - 1 + 2b_{0,y} + \varepsilon [2b_{1,y} + \tilde{\alpha}_1 + -6b_{1,y}b_{0,y} + (3 - \tilde{\alpha}_0)a_{1,y}a_{0,y}] \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

L'équation globale s'écrit donc comme une constante plus un terme proportionnel à  $\varepsilon$ . Les deux doivent s'annuler pour que l'équation soit vérifiée. Annuler le terme constant revient donc à trouver les solutions pour le déplacement initial, et annuler celui proportionnel à  $\varepsilon$  revient à trouver les solutions pour la déformation  $a_1$  et  $b_1$ .

### a) Déplacement initial

On dérive maintenant les équations que doivent vérifier  $a_0$  et  $b_0$  pour annuler la partie constante de l'équation globale (eq. (II.43)). Elles s'écrivent simplement :

$$a_{0,xx} + \nu\chi a_{0,yy} = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$b_{0,xx} + \frac{\nu}{\chi}b_{0,yy} = 0 \quad (\text{II.49})$$

Avec  $\nu = \delta\frac{w^*}{c^*}$  et  $\chi = \frac{\tilde{\alpha}_0 - 1}{2}$ . Ces équations sont complétées par les conditions aux bords aussi exprimées en fonction des champs de déplacements :

$$\forall x \quad \begin{cases} a_0 = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \\ b_0 = \pm \frac{L_w^0 - L_w^*}{2} \end{cases} \quad \forall y \quad \begin{cases} a_{0,x} = -\chi \\ b_{0,x} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

On remarque que les équations pour  $a_0$  et  $b_0$  sont complètement décorréées, et vérifient toutes deux des équations différentielles elliptiques avec des conditions aux bords mixtes, de type Dirichlet sur les rangs extérieurs et Neumann sur les colonnes extérieures.

La solution pour  $b_0$  est immédiate puisque la seule solution possible est :

$$b_0(x, y) = \frac{L_w^0 - L_w^*}{L_w^*} y \quad (\text{II.51})$$

Le déplacement initial longitudinal est donc indépendant de  $x$  et évolue linéairement avec  $y$ . Cela signifie que les rangs restent parallèles entre eux et aux mors qui tiennent les

premiers et derniers rangs. Toutes les mailles s'allongent de la même quantité  $b_{0,y} = \frac{L_w^0 - L_w^*}{L_w^*}$ .

La solution pour  $a_0$  est plus difficile à obtenir. On peut toutefois en trouver une solution analytique de deux manières différentes. La première repose sur une décomposition en base de Fourier et est explicitée dans l'annexe A, la seconde repose sur une transformée de Schwartz-Christofel, détaillée dans l'annexe B. Toutefois les deux solutions sont forcément approchées numériquement car la première approche fait intervenir une série infinie et la deuxième offre une solution implicite. Aux erreurs numériques près, ces deux solutions apparaissent identiques. Le seul paramètre inconnu dans ces solutions est le multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\alpha}_0$  qui se cache dans le paramètre  $\chi = \frac{\tilde{\alpha}_0 - 1}{2}$  (fig. II.17). Ce paramètre  $\chi$  est directement relié à la déformation des bords libres puisque  $\vec{c}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y, \varepsilon = 0) = c^*(1 - \chi)\vec{e}_x$ , ce qui donne une interprétation naturelle au paramètre  $\tilde{\alpha}_0$  qui donne l'ordre de grandeur de la déformation latérale.

### b) Déformation de la forme initiale

En annulant la partie de l'équation globale proportionnelle à  $\varepsilon$ , on obtient les équations différentielles pour  $a_1$  et  $b_1$  :

$$a_{1,xx} + \nu\chi a_{1,yy} + P_a = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$b_{1,xx} + \frac{\nu}{\chi} b_{1,yy} + P_b = 0 \quad (\text{II.53})$$

Les termes  $P_a$  et  $P_b$  ayant les expressions suivantes :

$$P_a(x, y) = -3 \frac{\partial}{\partial x} [a_{1,x} a_{0,x}] + \nu \left( (1 - \chi) \frac{\partial}{\partial y} [b_{1,y} a_{0,y} + a_{1,y} b_{0,y}] + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} a_{0,yy} \right) \quad (\text{II.54})$$

$$P_b(x, y) = \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} [b_{1,x} a_{0,x}] + \nu \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) a_{1,y} a_{0,y} - \frac{3}{\chi} b_{1,y} b_{0,y} \right] \right) \quad (\text{II.55})$$

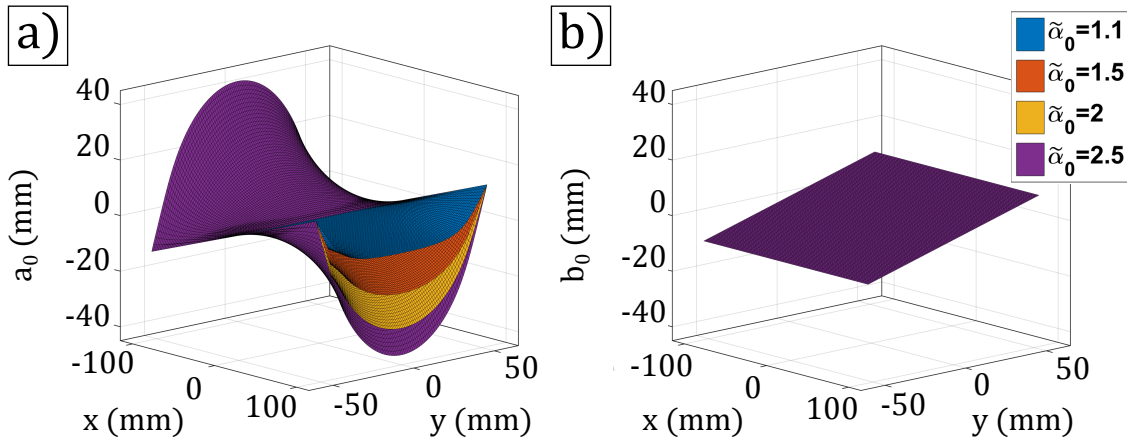


FIGURE II.17 – a) Illustration de la solution  $a_0$  pour quatre valeurs de  $\tilde{\alpha}_0$ , les autres paramètres prenant les valeurs mesurées :  $c^* = 3.93$  mm,  $w^* = 2.08$  mm et  $\delta = 0.86$ , ainsi que la taille de l'état initial  $c_0 = 4.45$  mm et  $w_0 = 2.45$  mm. b) Idem pour  $b_0$ , mais les quatre solutions se superposent car  $b_0$  est indépendant de  $\tilde{\alpha}_0$ .

Ces équations sont agrémentées des conditions aux bords ci dessous :

$$\forall x \quad y = \pm \frac{L_w^*}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = \pm \frac{L_0}{2} \end{array} \right. \quad \forall y \quad x = \pm \frac{L_c^*}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{2(3\chi+1)} \\ b_{1,x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.56})$$

Les équations pour  $a_1$  et  $b_1$  sont donc des équations aux dérivées partielles linéaires mais cette fois-ci, elles sont couplées et les coefficients ne sont pas constants. En effet, la forme initiale donnée par  $a_0, b_0$  vient ajouter des termes couplant le déplacement latéral au déplacement longitudinal, compliquant significativement la résolution des équations. La connaissance des fonctions  $a_0$  et  $b_0$  est donc nécessaire pour calculer  $a_1$  et  $b_1$ . On peut tout de même remarquer que sans forme initiale complexe, c'est à dire  $a_0 = b_0 = 0$  (ou une constante), ces équations se réduisent à celles vérifiées par  $a_0$  et  $b_0$ .

Les tentatives infructueuses de résolution de ces équations par développement en séries de Fourier nous ont amené à résoudre ces équations numériquement. Le schéma numérique utilisée repose sur la méthode de Gauss-Seidel [118] qui fonctionne par propagation des conditions aux bords en partant d'une condition initiale puis en réitérant la résolution. L'annexe C présente plus en détail cette méthode appliquée à notre problème. Cette fois-ci, les deux paramètres dont dépendent  $a_1$  et  $b_1$  sont  $\tilde{\alpha}_0$  et  $\tilde{\alpha}_1$  (fig. II.18).

### c) Comparaison avec les équations de l'élasticité linéaire

On a maintenant accès aux équations de la mécanique du mouvement de notre tricot, que l'on compare avec celles de la mécanique standard d'un objet 2D. On limite la comparaison aux réponses linéaires, ce qui correspond aux équations pour  $a_0$  et  $b_0$  dans notre cas. Dans l'introduction, les notations de la mécanique standard de l'équilibre d'une plaque ont été introduites et peuvent se résumer à ces deux équations, si on ne s'intéresse qu'à l'équilibre dans le plan de la plaque (ici  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ) et que les contraintes dans la plaque sont supposées homogènes selon  $\vec{e}_z$  :

$$0 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \quad (\text{II.57})$$

$$0 = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \quad (\text{II.58})$$

Avec  $\sigma_{ij}$  la contrainte orientée vers  $\vec{e}_j$  et appliquée sur une surface dont la normale est portée par  $\vec{e}_i$ . Dans le cadre de l'élasticité linéaire, une relation linéaire relie les trois composantes de la contrainte aux déformations associées,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  et  $\varepsilon_{xy}$ . Avec les notations utilisées pour notre tricot, c'est-à-dire les champs de déplacement  $a_0$  et  $b_0$ , ces déformations ont pour expression :  $\varepsilon_x = \frac{\partial a_0}{\partial x} = a_{0,x}$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\partial b_0}{\partial y} = b_{0,y}$  et  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_0}{\partial y} + \frac{\partial b_0}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (a_{0,y} + b_{0,x})$ . La relation contrainte-déformation, caractérisée par la matrice symétrique  $\underline{C}$ , prend donc la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \tilde{C} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0,x} \\ b_{0,y} \\ \frac{1}{2} (a_{0,y} + b_{0,x}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

Avec  $\tilde{C}$  un coefficient constant positif de la même dimension que  $\underline{C}$ . On peut donc écrire les équations d'équilibre en fonction de  $a$  et  $b$  et vérifier si il existe une matrice  $\underline{C}$  qui

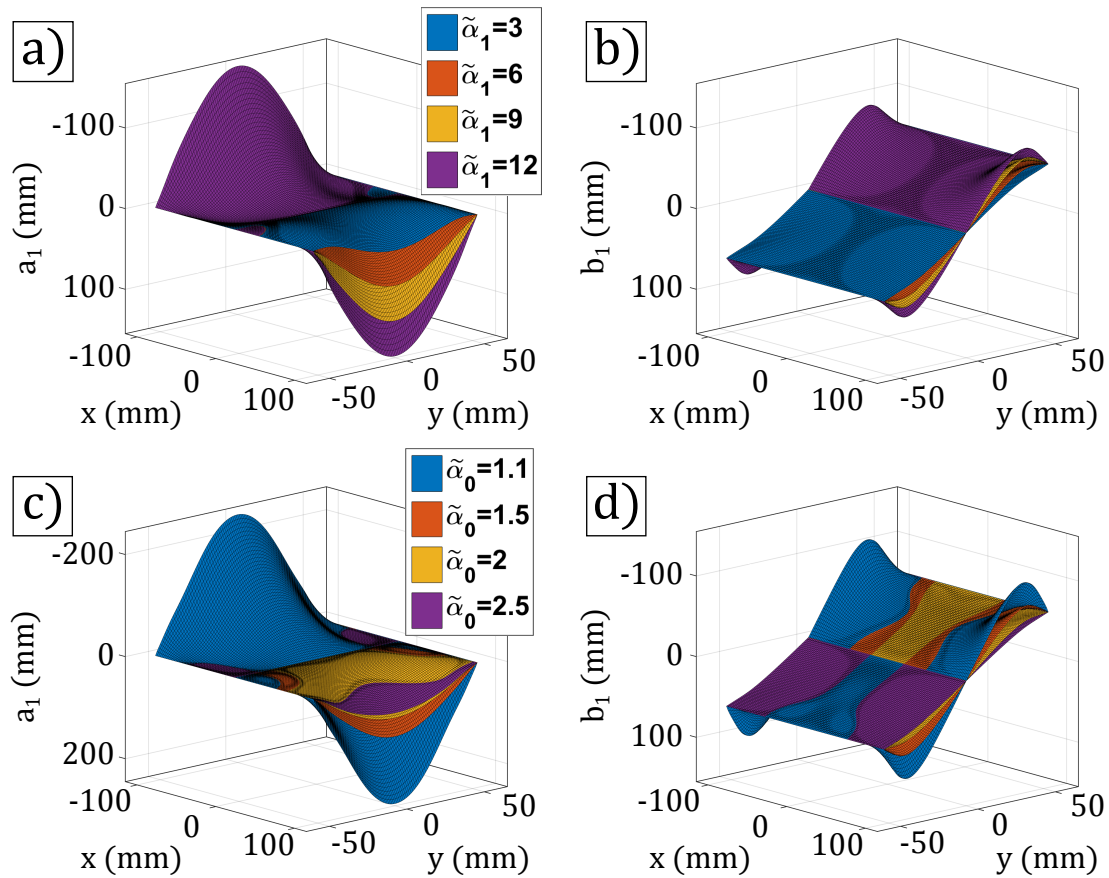


FIGURE II.18 – a) Illustration de la solution  $a_1$  pour quatre valeurs de  $\tilde{\alpha}_1$  avec  $\tilde{\alpha}_0$  gardée à 1.5, les autres paramètres prenant les valeurs mesurées :  $c^* = 3.93$  mm,  $w^* = 2.08$  mm et  $\delta = 0.86$ , ainsi que la taille de l'état initial  $c_0 = 4.45$  mm et  $w_0 = 2.45$  mm. b) Idem pour  $b_1$ . c) Illustration de la solution  $a_1$  pour quatre valeurs de  $\tilde{\alpha}_0$  avec  $\tilde{\alpha}_1$  gardée à 9, les autres paramètres prenant les valeurs mesurées :  $c^* = 3.93$  mm,  $w^* = 2.08$  mm et  $\delta = 0.86$ , ainsi que la taille de l'état initial  $c_0 = 4.45$  mm et  $w_0 = 2.45$  mm. Notez le changement d'échelle pour l'axe de  $a_1$ . d) Idem pour  $b_1$ .

permet de décrire nos équations trouvées précédemment pour  $a_0$  et  $b_0$  :

$$0 = C_{11}a_{0,xx} + \frac{C_{33}}{2}a_{0,yy} + \frac{3C_{13}}{2}a_{0,xy} + \frac{C_{13}}{2}b_{0,xx} + C_{23}b_{0,yy} + \left(C_{12} + \frac{C_{33}}{2}\right)b_{0,xy} \quad (\text{II.60})$$

$$0 = C_{13}a_{0,xx} + \frac{C_{23}}{2}a_{0,yy} + \left(C_{12} + \frac{C_{33}}{2}\right)a_{0,xy} + \frac{C_{33}}{2}b_{0,xx} + C_{22}b_{0,yy} + C_{23}b_{0,xy} \quad (\text{II.61})$$

En comparant ces équations à celles de  $a_0$  et  $b_0$  :  $\frac{1}{\nu}a_{0,xx} + \chi a_{0,yy} = 0$  et  $\chi b_{0,xx} + \nu b_{0,yy} = 0$ , on peut en déduire les relations suivantes :  $C_{13} = C_{23} = 0$ ,  $C_{11} = \frac{1}{\nu}$ ,  $C_{22} = \nu$ ,  $C_{33} = 2\chi$  et  $C_{12} = -\chi$ . On peut donc en déduire la matrice élasticité du tricot correspondante, à une constante multiplicative près :

$$\underline{\underline{C}}_{tricot} = \tilde{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} & -\chi & 0 \\ -\chi & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2\chi \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Les paramètres  $\chi$  et  $\nu$  sont forcément positifs. Si on calcule la réponse du tricot à une contrainte dans la direction  $y$  comme imposé dans l'expérience, c'est-à-dire avec  $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma$  et  $\sigma_{xy} = 0$ , et des déformations globales, on obtient les équations suivantes :

$$a_{0,x} = \nu\chi b_{0,y} \quad (\text{II.63})$$

$$\sigma = (\nu b_{0,y} - \chi a_{0,x}) \quad (\text{II.64})$$

$$4\chi = a_{0,y} + b_{0,x} \quad (\text{II.65})$$

On peut notamment remarquer que si  $b_{0,y} > 0$ , ce qui correspond à un allongement dans la direction  $y$ , alors on a aussi  $a_{0,x} > 0$ , ce qui correspond à un allongement aussi positif mais dans la direction  $x$  (coefficient de Poisson négatif). Or dans notre expérience on a clairement  $b_{0,y} > 0$  et  $a_{0,x} < 0$  (coefficient de Poisson positif). De par cette incohérence, on peut donc en conclure que la mécanique standard d'élasticité des plaques et ses équations d'équilibre ne permettent pas de retrouver les équations de déformation du tricot prédites par notre modèle.

## II.7.2 Satisfaire les contraintes

On peut désormais calculer la solution de nos équations avec deux paramètres ajustables  $\tilde{\alpha}_0$  et  $\tilde{\alpha}_1$ . On va maintenant utiliser ces paramètres pour faire en sorte que les solutions satisfassent les contraintes du système.

### a) Le multiplicateur de Lagrange $\alpha$

La contrainte d'inextensibilité du fil est directement associée aux paramètres restants, puisqu'ils en constituent ses multiplicateurs de Lagrange. Cette contrainte est globale, c'est-à-dire qu'elle s'applique sur le tricot dans son ensemble et non localement au niveau de la maille. Il faut que les solutions de  $a$  et  $b$  que l'on sait calculer satisfassent la contrainte qui s'exprime sous la forme suivante :

$$c^* + \delta w^* = \iint_{x,y} \frac{dx dy}{L_c^* L_w^*} (c + \delta w) \quad (\text{II.66})$$

$$= \ell_0 + \varepsilon \ell_1 \quad (\text{II.67})$$



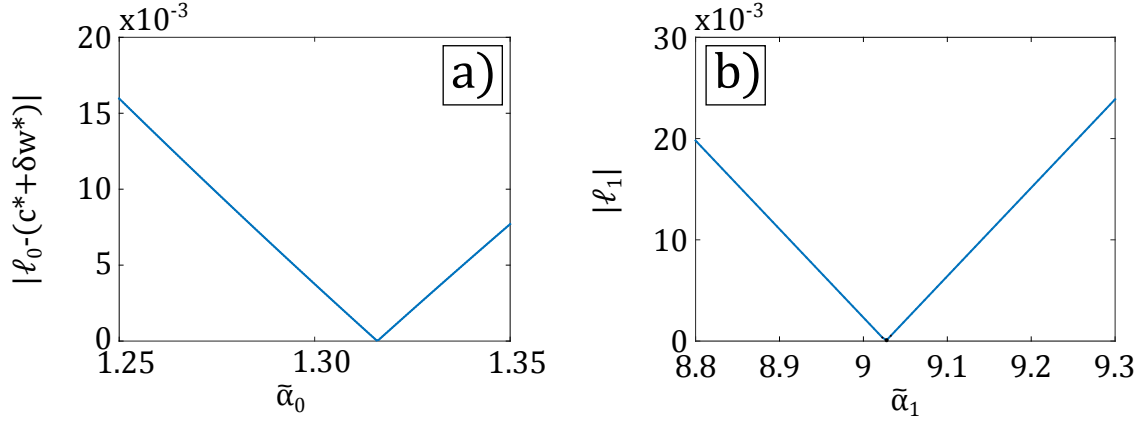


FIGURE II.19 – a) Pour assurer l’inextensibilité du fil entre l’état de référence et l’état initial, l’équation  $\ell_0 = c^* + \delta w^*$  doit être vérifiée, ce qui impose la valeur du multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\alpha}_0 = 1.32$ . b) De la même manière, pour que la longueur de fil reste constante avec  $\varepsilon$ , l’équation  $\ell_1 = 0$  doit être vérifiée, ce qui impose la valeur de  $\tilde{\alpha}_1 = 9.04$ .

On peut la réécrire en fonction des champs de déplacement initiaux  $a_0$  et  $b_0$  et durant l’élongation,  $a_1$  et  $b_1$ , tout en développant au premier ordre en  $\varepsilon$  et en les dérivées spatiales de  $a_0$ ,  $b_0$  pour rester cohérent avec le développement des équations du mouvement. La contrainte se traduit alors sous la forme suivante :

$$\ell_0 = c^* + \delta w^* \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \iint_{x,y} dx dy (a_{0,x} + \nu b_{0,y}) \quad (\text{II.68})$$

$$\ell_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \iint_{x,y} dx dy (a_{1,x} + \nu b_{1,y} + b_{1,x} b_{0,x} + \nu a_{1,y} a_{0,y}) \quad (\text{II.69})$$

La première équation ne fait intervenir que  $a_0$  et  $b_0$ , et en conséquence seulement le paramètre  $\tilde{\alpha}_0$ . Il suffit alors de résoudre cette équation en  $\tilde{\alpha}_0$  pour que la contrainte soit satisfaite. En revanche, l’expression de  $a_0$  en fonction de  $\tilde{\alpha}_0$  est trop complexe pour permettre une résolution analytique de l’équation, on se tourne donc vers une solution numérique. La valeur de  $\iint_{x,y} dx dy (a_{0,x} + \nu b_{0,y})$  est évalué en fonction de  $\alpha_0$  et on trouve que cette valeur s’annule pour  $\tilde{\alpha}_0 \approx 1.32$  (fig. II.19.a). Dès lors, la seconde équation ne contient plus que  $\tilde{\alpha}_1$  comme inconnue. En procédant de la même manière, et en résolvant l’équation numériquement, on obtient  $\tilde{\alpha}_1 \approx 9.04$  (fig. II.19.b).

Les valeurs numériques de ce multiplicateur de Lagrange nous informent sur l’état de tension global dans le tricot. En effet, on avait vu que les conditions sur les bords libres en  $x = \pm \frac{L_c^*}{2}$ , qui imposent la déformation latérale ( $a_{,x}$ ) des mailles correspondantes, sont directement liées à  $\alpha$  avec  $a_{0,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_0 - 1}{2}$  et  $a_{1,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{3\tilde{\alpha}_0 - 1}$ . On peut aussi remarquer dans les équations générales, avant tout développement, qu’en re-normalisant nos variables  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  par  $\sqrt{\alpha}$ , ainsi que  $\vec{T}$  et  $\mathcal{T}$  par  $\alpha$ , on arrive à sortir la dépendance en  $\alpha$  des équations. Ce re-dimensionnement montre que  $\alpha$  peut bien être interprété comme une tension globale. Choisir la longueur de fil pour un nombre de mailles donné revient par conséquent à prescrire un état de tension dans le tricot et une énergie élastique stockée.

L'unique paramètre restant est  $\tilde{Y}$ , le module de traction effectif du tricot, mais celui-ci n'intervient pas dans les équations décrivant la forme du tricot. Maintenant que  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont connus, on peut prédire la forme théorique de notre tricot sans aucun paramètre ajustable.

### b) Le multiplicateur de Lagrange $\vec{T}$

La seconde contrainte est automatiquement satisfaite si le problème est exprimé en fonction de  $a$  et  $b$  au lieu de  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . On peut tout de même calculer le multiplicateur de Lagrange associé  $\vec{T}$  pour nous permettre de récupérer, par exemple, la force nécessaire à l'allongement du tricot.

Pour éclaircir un peu la signification de ce multiplicateur de Lagrange, on peut s'inspirer de la mécanique standard en cherchant les relations entre  $\vec{T}$  et les déformations du système que l'on note  $\varepsilon_x = a_{,x}$ ,  $\varepsilon_y = b_{,y}$  et  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(a_{,y} + b_{,x})$ . En développant les équations générales (de eq. (II.45) à eq. (II.47)) au premier ordre en ces déformations et avec  $\vec{T} = T^x \vec{e}_x + T^y \vec{e}_y$ , on trouve les relations suivantes :

$$T^x_{,y} = -\frac{2\tilde{Y}}{c^*}(\chi + \varepsilon_x) = \sigma_{xx} \quad (\text{II.70})$$

$$T^y_{,x} + w^* \mathcal{T} = \frac{2\nu\tilde{Y}}{c^*}(\chi + \varepsilon_y) = \sigma_{yy} \quad (\text{II.71})$$

$$\frac{1}{2} (T^x_{,x} - \nu T^y_{,y}) = \frac{2\nu\tilde{Y}\chi}{c^*} \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy} \quad (\text{II.72})$$

On arrive donc à relier les dérivées premières de  $\vec{T}$  aux déformations du système par une simple relation linéaire qui fait intervenir le module effectif  $\tilde{Y}$ . Trois tensions effectives, qui s'expriment directement en fonction de  $\vec{T}$  peuvent alors être définies,  $\sigma_{xx} = T^x_{,y}$ ,  $\sigma_{yy} = T^y_{,x}$  et  $\sigma_{xy} = \frac{1}{2} (T^x_{,x} - \nu T^y_{,y})$ , leur dimension de force linéique  $N.m^{-1}$  est bien celle d'une tension. On peut aussi remarquer que la relation entre  $\sigma_{xx}$  et  $\varepsilon_{xx}$ , ainsi que  $\sigma_{yy}$  et  $\varepsilon_{yy}$  n'est pas une relation de proportionnalité, même sans déformation le système est sous contrainte, et cette contrainte est fixée par  $\alpha$

Calculer  $\vec{T}$  permet donc d'avoir une idée des tensions qui s'appliquent dans le système. Si la forme du tricot, donnée par  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , est connue alors  $\vec{T}$  peut être calculé. Les équations qui relient la forme aux contraintes et donc à  $\vec{T}$  sont :

$$\frac{\tilde{Y}}{c^{*2}} \left( -\frac{\vec{c}c^{*2}}{c^3} + \tilde{\alpha} \frac{\vec{c}}{c} \right) + \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} = \vec{0} \quad (\text{II.73})$$

$$\frac{\tilde{Y}\delta}{c^{*2}} \left( -\frac{\vec{w}w^{*2}}{w^3} + \tilde{\alpha} \frac{\vec{w}}{w} \right) - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} = \mathcal{T} \vec{e}_y \quad (\text{II.74})$$

Avec les conditions aux bords  $\vec{T}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y) = \vec{0}$ . La variable inconnue  $\mathcal{T}(x)$  est définie de telle sorte que la force totale qui s'applique sur le tricot s'écrit :  $F_T = w^* \int_x \mathcal{T}(x) dx$ , défini à une référence près. Ce système d'équations ne permet pas de résoudre séparément  $\vec{T}$  et  $\mathcal{T}$ , on introduit donc une quantité qui combine les deux inconnues :  $\vec{T}_{tot} = T^x_{tot} \vec{e}_x + T^y_{tot} \vec{e}_y = \vec{T} + w^* \int_0^x \mathcal{T}(x) dx \vec{e}_y$ , les conditions aux bords deviennent par conséquent  $\vec{T}_{tot}(x =$

$\pm \frac{L_c^*}{2}, y) = \pm \frac{F_T}{2} \vec{e}_y$ . Les équations s'écrivent donc :

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} T_{tot}^x(x, y) \\ T_{tot}^y(x, y) \end{vmatrix} = -\frac{\tilde{Y}}{c^*} \left( -\frac{\tilde{c}c^{*2}}{c^3} + \tilde{\alpha} \frac{\tilde{c}}{c} \right) = \frac{\tilde{Y}}{c^*} \begin{vmatrix} f_c^x(x, y) \\ f_c^y(x, y) \end{vmatrix} = \frac{\tilde{Y}}{c^*} \vec{f}_c \quad (\text{II.75})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} T_{tot}^x(x, y) \\ T_{tot}^y(x, y) \end{vmatrix} = \frac{\tilde{Y}\nu}{c^*} \left( -\frac{\tilde{w}w^{*2}}{w^3} + \tilde{\alpha} \frac{\tilde{w}}{w} \right) = \frac{\tilde{Y}\nu}{c^*} \begin{vmatrix} f_w^x(x, y) \\ f_w^y(x, y) \end{vmatrix} = \frac{\tilde{Y}\nu}{c^*} \vec{f}_w \quad (\text{II.76})$$

Le calcul de  $\vec{T}_{tot}$  va se faire au même ordre que les calculs précédents, les fonctions  $f_c^x, f_c^y, f_w^x, f_w^y$  sont donc développées au premier ordre en  $\varepsilon$  et en les dérivées spatiales de  $a_0$  et  $b_0$ . On intègre tout d'abord suivant  $x$ , ce qui implique l'introduction des fonctions d'intégration  $g^x(y)$  et  $g^y(y)$ . Les bornes d'intégration sont choisies de telle sorte à respecter la parité des fonctions.

$$T_{tot}^x(x, y) = \tilde{Y} \left( g^x(y) + \nu \int_x f_w^x(X, y) \frac{dX}{c^*} \right) \quad (\text{II.77})$$

$$T_{tot}^y(x, y) = \tilde{Y} \left( g^y(y) + \nu \int_x f_w^y(X, y) \frac{dX}{c^*} \right) \quad (\text{II.78})$$

En injectant ces intégrations dans la première équation on obtient finalement l'expression des fonctions d'intégration :

$$g^x(y) = \int_y dY \left( \frac{f_c^x(x, Y)}{c^*} - \nu \int_x \frac{\partial f_w^x}{\partial y}(X, Y) \frac{dX}{c^*} \right) \quad (\text{II.79})$$

$$g^y(y) = \int_y dY \left( \frac{f_c^y(x, Y)}{c^*} - \nu \int_x \frac{\partial f_w^y}{\partial y}(X, Y) \frac{dX}{c^*} \right) \quad (\text{II.80})$$

Le champ de vecteurs  $\vec{T}_{tot}$  peut donc être évalué sur toute l'intégralité du tricot. Il ne peut pas être calculé pour l'instant car le paramètre  $\tilde{Y}$  est encore inconnu. En revanche,  $\vec{T}_{tot}$  étant simplement proportionnel à  $\tilde{Y}$ , on peut calculer sa version normalisée  $\vec{T}_{tot}^{\tilde{Y}} = \vec{T}_{tot}/\tilde{Y}$  et donc les composantes normalisées des tensions :  $\tilde{\sigma}_{xx}, \tilde{\sigma}_{yy}$  et  $\tilde{\sigma}_{xy}$  (fig. II.20). Ces tensions correspondent bien à ce à quoi on pourrait s'attendre pour ce genre de déformation.  $\tilde{\sigma}_{xx}$ , la tension latérale est négative, s'annule sur les bords libres et s'accumulent tout particulièrement sur les mailles prises dans les mors.  $\tilde{\sigma}_{yy}$  la tension longitudinale est à peu près homogène, avec un maximum concentré sur les mailles des bords libres. Enfin,  $\tilde{\sigma}_{xy}$ , la tension de cisaillement est particulièrement élevée autour des coins avec un signe qui alterne en fonction de l'orientation des mailles.

### II.7.3 Comparaison avec les expériences

Dorénavant, on est capable de calculer toutes les quantités prédites par notre modèle, il faut à présent comparer les résultats aux mesures expérimentales.

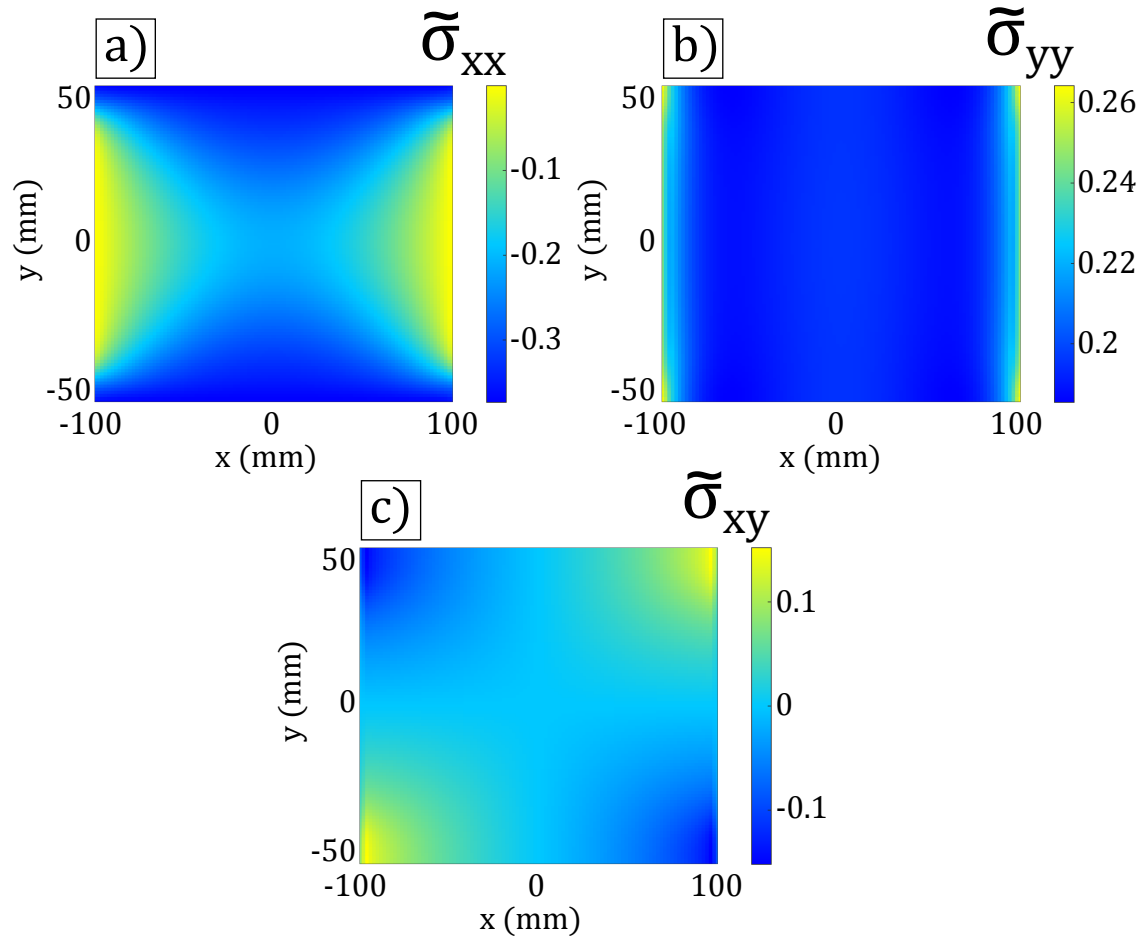


FIGURE II.20 – a) Tension latérale normalisée  $\tilde{\sigma}_{xx}$ . b) Tension longitudinale normalisée  $\tilde{\sigma}_{yy}$ . c) Tension de cisaillement normalisée  $\tilde{\sigma}_{xy}$ . Toutes ces tensions ont été évaluées pour  $\varepsilon = 10\%$ , varier  $\varepsilon$  change seulement leurs valeurs numérique et non leur répartition spatiale.

### a) La forme

La prédiction de la forme du tricot est donnée par  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ , qui sont prédits sans paramètres ajustables car ils ont tous été mesurés. Le tableau suivant récapitule les différents paramètres, leur valeur pour notre tricot modèle, et leurs relations entre eux.

Figure II.21 montre la comparaison entre les champs de déplacement mesurés expérimentalement et ceux prédits par la théorie, représentés comme des surfaces paramétrées par  $(x, y)$ . Les déplacements mesurés ne couvrent pas entièrement le tricot car un certain nombre de mailles restent cachées par le roulotement sur les bords latéraux et par les mors sur les bords longitudinaux. La correspondance entre les champs mesurés et prédits est très satisfaisante, les surfaces prédites épousent en grande partie les points expérimentaux. Le modèle rend très bien compte des courbures des surfaces représentant le déplacement, même si l'amplitude prédite a tendance à être sous-estimée.

On peut représenter ce résultat de différentes façon, notamment en superposant à

Paramètre	Signification	Expression	Valeur
$c^*$	taille latérale des mailles dans la configuration de référence	/	3.93 mm
$w^*$	taille longitudinale des mailles dans la configuration de référence	/	2.08 mm
$c_0$	distance latérale imposée entre chaque mailles par les mors aux rangs supérieurs et inférieurs	/	4.45 mm
$w_0$	taille longitudinale moyenne des mailles dans l'état initial $\varepsilon = 0$	/	2.45 mm
$\delta$	coefficient d'asymétrie de la répartition du fil entre rangs et colonnes	/	0.86
$\beta$	coefficient d'asymétrie de l'énergie de flexion du fil entre rangs et colonnes	$\delta \left(\frac{w^*}{c^*}\right)^2$	0.24
$\tilde{\alpha}_0$	multiplicateur de Lagrange associé à la conservation de la longueur de fil entre l'état de référence et l'état initial	/	1.32
$\tilde{\alpha}_1$	multiplicateur de Lagrange associé à la conservation de la longueur de fil pendant la déformation du tricot	/	9.04
$\nu$	coefficient de Poisson apparent de l'ensemble du tricot	$\delta \frac{w^*}{c^*}$	0.46
$\chi$	déformation latérale à l'état initial des mailles des colonnes extérieures	$\frac{\tilde{\alpha}_0 - 1}{2}$	0.16

TABLE II.1 – Récapitulation des différents paramètres intervenant dans notre modèle mécanique du tricot, avec leur signification, éventuelles expression en fonction des autres paramètres et valeur numérique.

l'image du tricot la forme prédite reconstruite à partir de  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  pour une élongation donnée (fig. II.22.a). On peut aussi comparer ligne par ligne ou colonne par colonne la prédiction et les mesures à élongation donnée (fig. II.22.b-f).

Au final, notre modèle, malgré toutes les hypothèses et approximations effectuées, parvient à donner une prédiction convaincante du champ de déformation/déplacement à l'échelle locale d'un tricot.

## b) La force

Après la forme, on compare la réponse mécanique prédite et celle mesurée. Avec le modèle, la réponse mécanique peut être retrouvée par deux méthodes différentes.

La première méthode repose sur l'évaluation de l'énergie du tricot à partir de sa

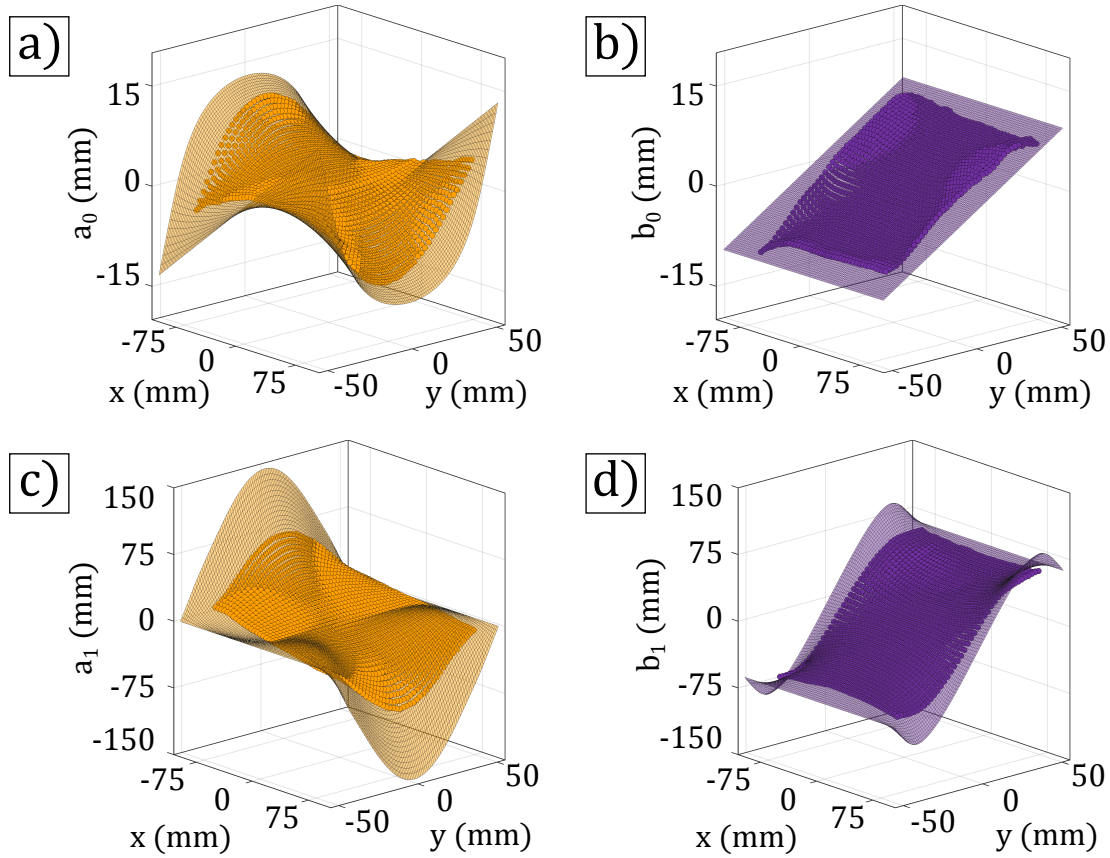


FIGURE II.21 – Comparaison entre les champs de déplacement mesurés et prédits. Un point représente la valeur du champ mesuré pour une maille, les prédictions sont représentées par des surfaces continues. a) Déplacement latéral initial  $a_0$ . b) Déplacement longitudinal initial  $b_0$ . c) Déplacement latéral pendant la déformation  $a_1$ . d) Déplacement longitudinal pendant la déformation  $b_1$ .

forme. En calculant les variations de cette énergie avec  $\varepsilon$  on peut alors remonter à la force nécessaire pour effectuer cette déformation, que l'on va noter  $F_E$ . Cette méthode permet de donner une estimation absolue de la force puisque le minimum d'énergie est connu et atteint lorsque le tricot est dans son état de référence. Cette force peut présenter des non linéarités car l'expression de l'énergie n'est pas linéaire avec  $\varepsilon$ .

La deuxième méthode revient à calculer directement  $\mathcal{T}$ , ou au moins son intégrale  $F_T = w^* \int_x \mathcal{T}(x) dx$ . Cette méthode permet d'obtenir directement la force recherchée  $F_T$ , mais celle-ci est définie à une constante près. Les calculs qui permettent de retrouver  $F_T$  sont linéarisés, donc cette force est linéaire avec  $\varepsilon$ . Pour calculer  $F_T$ , on s'appuie sur le calcul de  $\vec{T}_{tot}$  présenté précédemment car on a  $\vec{T}_{tot}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y) = \pm \frac{F_T}{2} \vec{e}_y$ .

Dans les deux cas il reste un paramètre inconnu,  $\tilde{Y}$ , qui vient fixer une échelle d'énergie au système. Les deux méthodes doivent produire le même résultat, au moins proche de  $\varepsilon = 0$ .

La force mesurée, que l'on note  $F_{exp}$ , est aussi mesurée à une référence près car elle est

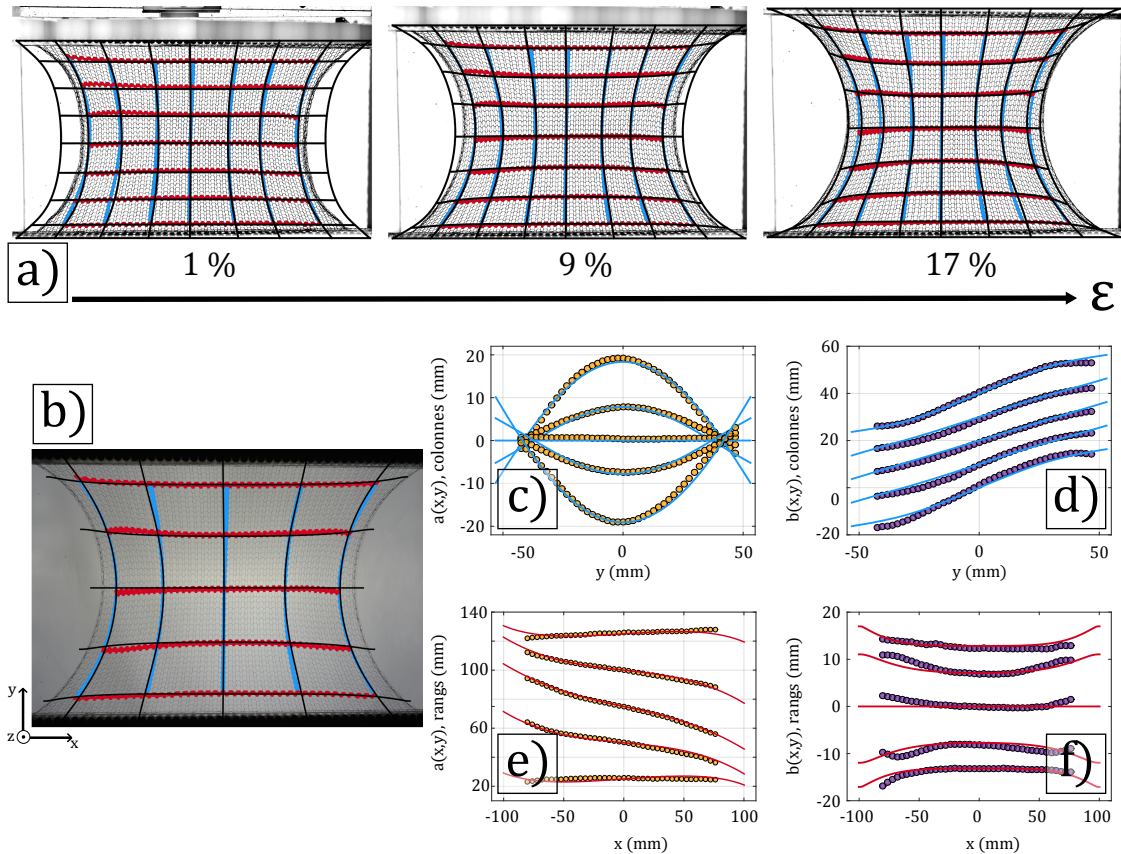


FIGURE II.22 – a) Série de photographies du tricot pour trois élongations différentes. Une sélection de rangs (rouge) et de colonnes (bleu) sont colorés et la prédiction de leur forme est indiquée par une ligne noire. La prédiction pour les rangs et colonnes extrémaux, non mesurables, est aussi indiquée. b) Image d'un tricot à  $\varepsilon = 11\%$ . Les lignes et colonnes indiquées sont celles dont la projection est explicitée à droite. c-f) Projection suivant les lignes et colonnes des champs de déplacement expérimentaux  $a(x, y)$  (●) et  $b(x, y)$  (●) et de leurs prédictions (lignes), chaque point représentant une maille. c) et d) : variations de  $a$  et  $b$  selon  $y$  pour  $x$  fixé à différentes valeurs. e) et f) : variations de  $a$  et  $b$  selon  $x$  pour  $y$  fixé à différentes valeurs. Dans un souci de visibilité, les courbes sont artificiellement décalées de 10 mm pour d) et de 25 mm pour e).



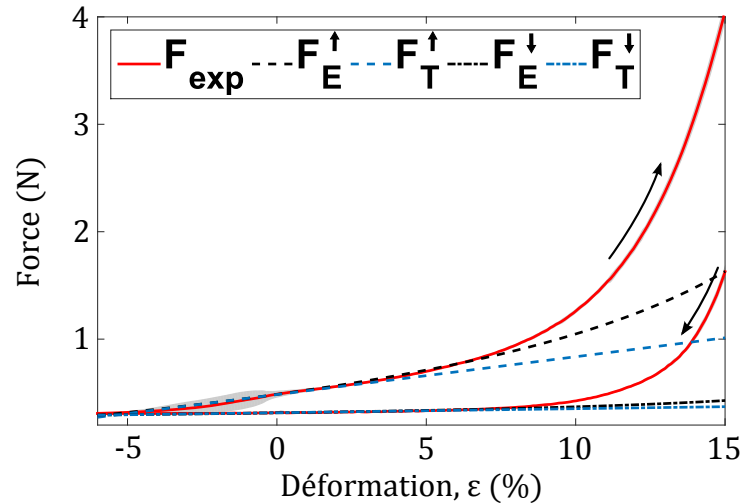


FIGURE II.23 – Comparaison entre la réponse force-déformation mesurée (rouge) et prédite. La réponse mesurée est moyennée sur les 5 cycles et la zone grisée autour représente 2 fois l'écart type des valeurs moyennées. La prédiction est représentée pour la traction  $\uparrow$  et la compression  $\downarrow$ , et pour les deux méthodes, à partir de l'énergie (--- et ·-) et à partir du multiplicateur de Lagrange associé au travail de la force ((- - et (- -)).

arbitrairement définie égale à 0 en début d'expérience. Pour effectuer la comparaison entre  $F_{exp}$ ,  $F_T$  et  $F_E$ , il faut donc déterminer une force de référence pour  $F_{exp}$  et  $F_T$ , ainsi que le paramètre  $\tilde{Y}$  pour  $F_T$  et  $F_E$ . On procède alors dans l'ordre suivant : on commence par ajuster la référence associée à  $F_{exp}$  de telle sorte qu'elle coïncide avec  $F_E$  en  $\varepsilon = 0$ . Ensuite,  $\tilde{Y}$  est ajusté pour faire coïncider les pentes de  $F_{exp}$  et  $F_E$  autour de  $\varepsilon = 0$ . Finalement, la référence de  $F_T$  est modifiée pour que  $F_T$  coïncide avec  $F_E$  (et  $F_{exp}$ ) en  $\varepsilon = 0$  (fig. II.23). Cette procédure est effectuée pour la courbe de traction et de compression, ce qui nous permet de mesurer  $\tilde{Y}^\uparrow \approx 1.5 \times 10^{-2} \text{J.m}^{-1}$  et  $\tilde{Y}^\downarrow \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{J.m}^{-1}$  respectivement.

Notre prédiction arrive à bien rendre compte de la mesure expérimentale de force jusqu'à un peu plus de 5% de déformation. Au-delà, la force devient fortement non-linéaire et croît rapidement. La prédiction linéaire de  $F_T$  ne parvient évidemment pas à capturer cette non linéarité, alors que celle de  $F_E$  parvient à suivre un peu plus l'expérience mais sa croissance est bien en deçà et finit par s'écarter fortement vers  $\varepsilon = 8\%$ .

#### II.7.4 Variations autour du cas modèle

Une fois que le tricot a été caractérisé et que tous les paramètres ont été mesurés, ces résultats sont utilisés pour prédire la déformation du tricot dans d'autres configurations. On présente ici deux autres configurations qui sont des variantes du cas modèle de traction uni-axiale selon  $y$ .

La première configuration consiste à non plus tirer dans la direction  $y$  uniquement, mais selon un vecteur ayant une composante selon  $x$  et  $y$ . Expérimentalement, cette configuration peut être mise en place simplement en imposant une rotation d'un certain angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. La direction de chargement du tricot se fait alors dans la direction donnée par  $\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$ . Dans le modèle, l'état initial reste inchangé,

le seul changement intervient dans les conditions aux limites de  $a_1$  et  $b_1$ , qui maintenant s'écrivent :

$$\forall x \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \pm \frac{L_w^0}{2} \sin(\theta) \\ b_1 = \pm \frac{L_w^0}{2} \cos(\theta) \end{array} \right. \quad \forall y \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{2(3\chi+1)} \\ b_{1,x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.81})$$

La détection expérimentale du champ de déformation, qui repose notamment sur la position relative des mailles par rapport à ses voisines, peut être simplement corrigé en tenant compte de l'angle de rotation. On peut alors déterminer le champ prédit par la théorie en adaptant simplement les conditions aux bords dans la résolution numérique des équations et en utilisant les mêmes valeurs de paramètres que précédemment (fig. II.24.a).

La seconde configuration consiste à modifier l'état initial en ajoutant une composante de cisaillement initial. Expérimentalement, les mors sont décalés latéralement d'une certaine distance de sorte qu'un angle  $\gamma$  par rapport à la verticale se forme entre les extrémités des mors inférieur et supérieur. Dans le modèle, cela ne modifie que les conditions aux bords du déplacement initial qui s'écrivent alors :

$$\forall x \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \pm \tan(\gamma) \frac{L_w^0}{2} \\ b_0 = \pm \frac{L_w^0 - L_w^*}{2} \end{array} \right. \quad \forall y \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{0,x} = -\chi \\ b_{0,x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.82})$$

Là aussi, l'analyse expérimentale peut être en grande partie copiée sur celle de la traction uni-axiale et les mêmes paramètres sont utilisés pour prédire la forme du tricot en s'adaptant simplement aux nouvelles conditions aux bords (fig. II.24.b). Dans ces deux nouvelles configurations, le modèle parvient encore à capturer l'essentiel de la forme observée, même si les différences sont un peu plus marquées que dans le cas de la traction uni-axiale.

Une partie de ces travaux ont fait l'objet d'une publication [119] (annexe E). Cet article a reçu une certaine attention médiatique, sûrement parce qu'il est rare de voir des articles sur le tricot dans une revue de physique fondamentale ([APS Physics](#), [Le Monde](#), [Pour la Science](#), [Nature](#), [Nature Physics](#), [New Scientist](#), [Cosmos](#), [CNRS](#), [HandCraft News](#), [SINC](#), [Physics World](#)...).

## II.8 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, on va se pencher sur les limites de la théorie introduite, ainsi que sur les conditions dans lesquelles elle peut être généralisée.

La première limitation vient du caractère purement 2D de la théorie qui ne permet pas de rendre compte de la richesse de formes atteignables en variant la topologie des mailles. Ainsi le modèle ne pourra pas rendre compte des déformations de tricots constitués de côtes  $1 \times 1$  par exemple car l'essentiel de la déformation apparente est dû au déploiement d'une structure 3D. Toutefois, si on reste dans une situation où les déformations hors plan et dans le plan du tricot sont décorréées, notre modèle pourra toujours décrire les phénomènes dans le plan du tricot, même si ce plan a une forme 3D complexe. Dans le dernier chapitre, des travaux préliminaires tâchent d'étendre cette théorie à la forme hors plan du tricot.

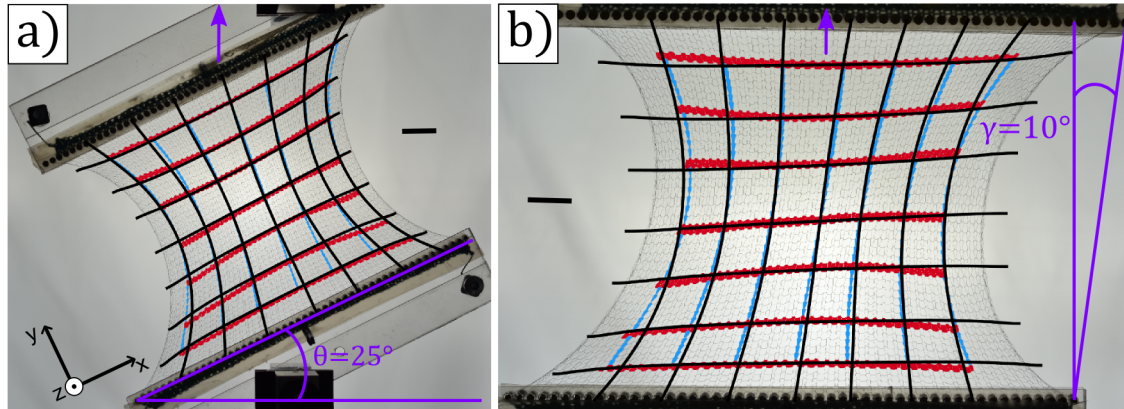


FIGURE II.24 – a) Traction du tricot-modèle dans une direction mixte  $\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$  avec  $\theta = 25^\circ$ . b) Traction du tricot-modèle avec un cisaillement initial de  $\gamma = 10^\circ$ . Dans les deux cas, une sélection de rangs (rouge) et colonnes (bleu) ont été mises en valeur avec leurs prédictions (lignes continues noires) correspondantes. La prédiction est faite en utilisant les mêmes paramètres que pour la traction uni-axiale suivant  $y$ . Le tricot est déformé de  $\varepsilon = 11\%$  dans les deux cas. Les barres d'échelles font 2 cm chacune.

La deuxième limitation principale vient de l'hypothèse de séparation d'échelles. La séparation d'échelle entre le diamètre du fil et le rayon de courbure de la maille devient de plus en plus difficile à tenir au fur et à mesure de la déformation. En particulier dans le cas d'une déformation inhomogène, car même si cette séparation d'échelle reste vérifiée pour une grande majorité de mailles, les conséquences induites par quelques mailles qui ne la vérifient plus peuvent être importantes. Lorsque cette séparation d'échelle n'est plus vérifiée, le fil va être compressé et allongé, ce qui n'a que peu de répercussion sur la forme générale du tricot, mais qui devient dramatique pour la réponse en force. En effet, les échelles d'énergie nécessaires à l'élongation ou la compression du fil sont largement supérieures à celles de la flexion. Donc la moindre compression/élongation rendra la prédiction de la force du modèle caduque, mais pas la prédiction de la forme. Dans le cas de la traction uniaxiale inhomogène, ce sont les coins qui sont rapidement soumis à une déformation importante comparée aux autres mailles, d'où une prédiction de la force valable jusqu'à seulement 5% environ alors que la forme est correctement prédite jusqu'à plus de 15%. Même dans le cas de déformation uniforme, au-delà d'une certaine élongation, les mailles ne peuvent plus se déformer latéralement sans compresser le fil, ce phénomène d'encombrement appelé "jamming" fait diverger la force avant la limite prédite par notre théorie.

On peut alors se poser la question de la validité du modèle avec des fils plus couramment utilisés comme le coton ou la laine. Dans le cas de tricots constitués de fils épais, facilement compressibles et avec des mailles pas trop serrées, comme c'est le cas des pulls ou des écharpes, le modèle devrait continuer de pouvoir décrire leur déformation. Par contre, avec les tricots très serrés et des fils fins, comme les T-shirts, le modèle ne sera d'aucune utilité car la limite d'encombrement sera très rapidement atteinte.

Pour finir, l'effet du frottement solide aux contacts n'est pas pris en compte dans le modèle qui est purement élastique. Il ne permet donc pas de prédire la présence de

l'hystérésis de la réponse en force, qui est un effet global du frottement en tant que force suiveuse. Le signe de la force de frottement s'inversant avec la vitesse de chargement, cet effet peut être vu dans notre modèle comme une différence de rigidité effective,  $\tilde{Y}^\uparrow$  et  $\tilde{Y}^\downarrow$ , entre le chargement et la compression. Pour examiner plus en profondeur le frottement, on s'est alors intéressé à un effet plus local qui s'exprime par des fluctuations autour de la réponse moyenne de la réponse mécanique. Ces fluctuations cachent une très riche phénoménologie et font l'objet du second chapitre.

# Chapitre III

## Les tremblements de tricot

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fluctuations de la réponse mécanique du tricot. Lorsque les bonnes conditions sont réunies, avec des contacts frottant ponctuels, un fil suffisamment rigide et une vitesse de chargement modérée, les fluctuations de la réponse acquièrent des propriétés très particulières. Frottement et élasticité se combinent pour que les contacts glissent de manière intermittente et collective. Autour de la réponse mécanique moyenne, le signal de force voit apparaître des chutes brusques de tailles diverses et le champ de déplacement des mailles se bariole de variations brusques prenant la forme de lignes de glissements. Ces évènements, qui échappent à l'élasticité du tricot, suivent une dynamique d'avalanches, avec une invariance d'échelle dans leurs tailles et un glissement associé qui se propage de proche en proche dans les directions dictées par la répartition des déformations. Un parallèle, dressant différences et similitudes, est alors opéré entre ces tremblements de tricot et la mécanique des milieux amorphes ou même les failles sismiques.

### III.1 Des tremblements de tricot ? Approche phénoménologique

Dans cette section, on va mettre en évidence ce que l'on entend par "tremblements de tricot", donner une interprétation qualitative de ce phénomène, et préciser quelles sont les conditions nécessaires pour les observer.

#### III.1.1 Évidences expérimentales des fluctuations

En prenant un de nos tricots dans la main, on se rend très vite compte que, même en se plaçant dans une situation où l'élasticité est dominante, la friction du fil sur lui-même se voit, se ressent et même s'entend quand on le déforme. En effet, en tirant doucement sur un tricot-modèle à la main, les mailles ne se déplacent pas toutes simultanément mais plutôt par à-coups. De plus, on ressent que le tricot semble trembler, avec une force nécessaire pour le déformer qui varie très vite sur de petites amplitudes. Enfin, en approchant l'oreille du fil pendant la déformation, on entend des "grincements" brefs. Ces tremblements dans des tricots de nylon ont déjà été évoqués il y a presque 50 ans [87] mais n'ont apparemment pas été étudiés plus en détails.

Cette phénoménologie suggère qu'autour de la réponse élastique moyenne d'un tricot-modèle, étudiée dans le chapitre précédent, la friction ajoute une riche phénoménologie à la réponse mécanique. Pour aller un petit peu plus loin que les observations "à la main" et mettre en évidence cet effet du frottement, on peut simplement reprendre l'expérience précédente et se focaliser sur les variations autour de la moyenne de la réponse en force ou en déplacement.

En observant de près la réponse force-élongation du tricot-modèle entre  $\varepsilon = 1.3\%$  et  $3\%$  (fig. III.1.a, insert à gauche), on aperçoit un bruit autour de la réponse moyenne. L'amplitude de ce bruit, de l'ordre de  $0.01\text{ N}$  est cependant environ 10 fois supérieure au bruit du détecteur. À plus forte élongation, entre  $\varepsilon = 12.5\%$  et  $14.2\%$  (fig. III.1.a, insert à droite), le nombre de fluctuations est bien moindre, mais leurs amplitudes ont l'air plus élevées.

Force et déformation étant généralement liées, ces fluctuations de force peuvent aussi avoir leur pendant dans la déformation. Regarder plus en détail le déplacement des mailles peut donc permettre de mieux comprendre l'origine de ce bruit. On a vu dans le chapitre précédent que les mailles se déplacent en moyenne selon une trajectoire rectiligne, un bruit dans la trajectoire se manifestera donc par un écart à cette droite. Dans cette optique, la première étape consiste à examiner le déplacement des mailles entre deux images consécutives, c'est-à-dire la quantité  $\Delta\vec{u}(\varepsilon) = \vec{u}(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \vec{u}(\varepsilon)$ . Si l'on reprend les mêmes intervalles que pour le signal de force, on constate que  $\|\Delta\vec{u}(1.3\%)\|$  ne présente pas une structure symétrique et affiche des variations spatiales abruptes, qui semblent s'agencer sous forme de lignes (fig. III.1.b, gauche). En revanche, à plus forte élongation  $\|\Delta\vec{u}(12.5\%)\|$ , ces lignes ne sont plus visibles et le déplacement est symétrique (fig. III.1.b, droite).

Ces résultats préliminaires suggèrent que le bruit observé dans la force aurait comme origine des déplacements brusques de certains groupes de mailles. Sachant que le frottement du fil est l'ingrédient qui vient perturber le comportement purement élastique, ces observations rappellent beaucoup le phénomène de collé-glissé ou "stick-slip".

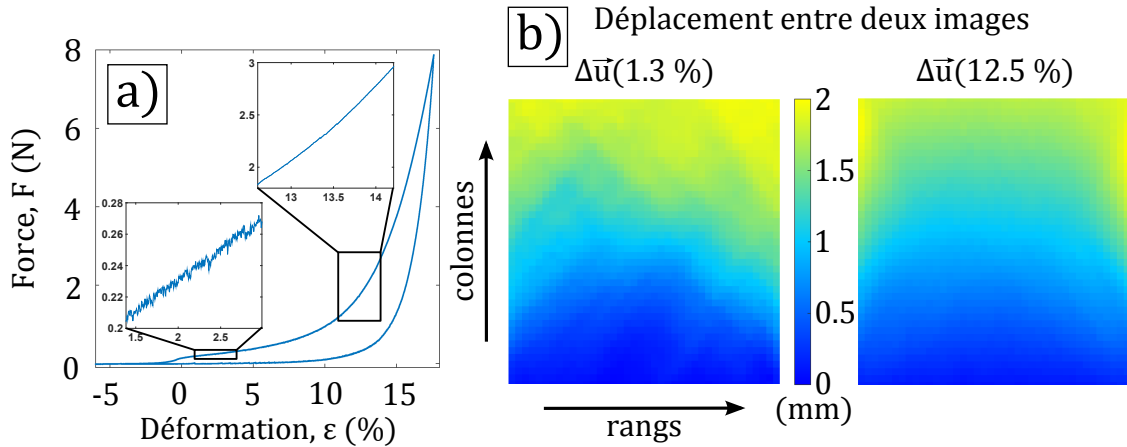


FIGURE III.1 – a). Réponse force/élongation du tricot-modèle lors d'un cycle de traction-compression. Insert, gauche : agrandissement entre  $\varepsilon = 1.3\%$  et  $3\%$ , montrant les fluctuations autour de la réponse moyenne. Insert, droit : agrandissement entre  $\varepsilon = 12.5\%$  et  $14.2\%$ , les fluctuations se font beaucoup plus rares. b) Amplitude du déplacement entre deux images  $\|\Delta\vec{u}\|$ , chaque pixel représentant une maille. Le bord supérieur est tiré vers le haut, alors que celui inférieur est resté fixe. Gauche,  $\|\Delta\vec{u}\|$  pour l'intervalle  $1.3\% - 3\%$ , affichant une asymétrie et de brusques variations spatiales le long de lignes. Droite,  $\|\Delta\vec{u}\|$  pour l'intervalle  $12.5\% - 14.2\%$ , affichant pour sa part une structure symétrique et des variations spatiales lisses.

### III.1.2 Interprétation qualitative

Le phénomène de "stick-slip", présenté en introduction, apparaît lors du couplage entre élasticité et frottement. Avec le système le plus élémentaire, à savoir un objet tiré par un ressort le long d'une surface frottante, la friction vient opposer une force s'opposant au mouvement. Cette force de friction possède un maximum proportionnel à la force normale entre l'objet et la surface. Ainsi, quand la force tirant l'objet est en deçà de ce maximum, l'objet reste bloqué et ne bouge pas. Quand elle est au-delà, l'objet glisse. Les équations et le schéma du système correspondant sont rappelés ci-dessous :

$$\vec{f} = -\vec{T} \quad \text{tant que} \quad \|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{P}\| = f_s \quad (\text{III.1})$$

$$\vec{f} = -\mu_d \|\vec{P}\| \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|} \quad \text{si} \quad \|\vec{T}\| \geq f_s \quad (\text{III.2})$$

Avec  $\vec{f}$  la force de friction parallèle à la surface,  $\vec{P}$  la force normale entre la surface et l'objet, et  $\vec{T}$  la force avec laquelle est tiré l'objet. En général, l'objet est attaché à un ressort de raideur  $K$  qui est lui-même tiré avec une vitesse  $V$  (fig. III.2.a, gauche). Les coefficients  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont les coefficients de friction statique et dynamique, tel que  $\mu_s > \mu_d$ . La force de frottement maximal a pour expression  $f_s = \mu_s P$ . En fonction de la valeur de ces paramètres, l'objet peut se déplacer quasiment au même rythme que la vitesse imposée ( $K$  ou  $V$  très élevé,  $P$  proche de zéro), ou alors se déplacer de façon intermittente, alternant entre phases immobiles ("stick") et phases de déplacements rapides ("slip").



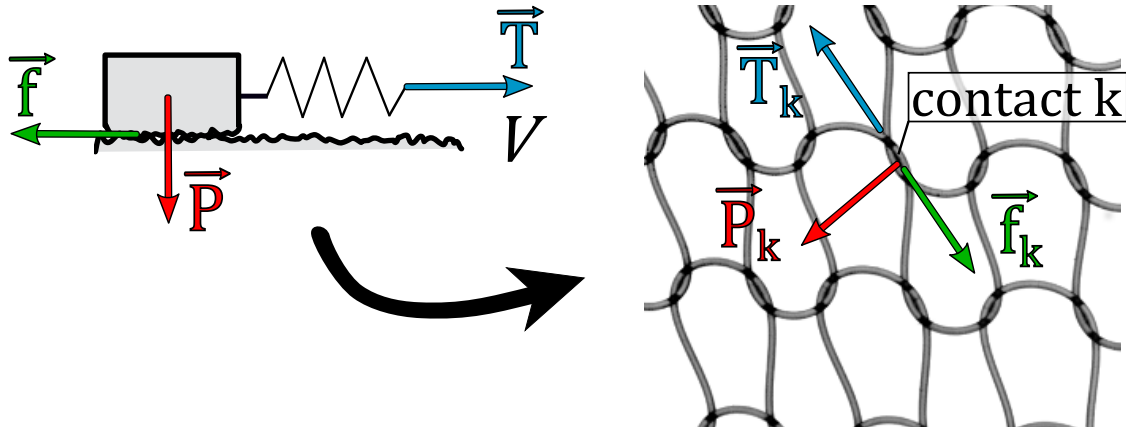


FIGURE III.2 – Schéma montrant l'analogie possible entre une expérience de "stick-slip" classique et une expérience de traction d'un tricot. Gauche, schéma d'un objet tiré sur une surface rugueuse par un ressort, tiré de [55] et adapté. Droite, photographie en gros plan d'un tricot, montrant un contact, indicé par  $k$  et les forces qui lui sont associés. Ce système de forces peut être défini pour tous les contacts du tricot.

Cette description est valable pour un contact, or dans un tricot, chaque croisement du fil constitue un contact où ce phénomène de "stick-slip" peut éventuellement avoir lieu. En effet, tous les ingrédients nécessaires à ce genre d'évènements sont réunis (fig. III.2.a, droite) :

- le comportement mécanique observé (hystérésis, phases de déformations non reproductibles) montre que le fil sur lui-même a un coefficient de frottement non nul, une force de frottement  $\vec{f}$  peut donc exister à chaque contact.
- le fil étant contraint à sortir de sa forme de minimum d'énergie par la topologie, une force normale  $\vec{P}$  apparaît aux croisements.
- chaque contact est lié à des portions de fils courbés, jouant un rôle équivalent au ressort et imposant une force élastique  $\vec{T}$ .
- le mors supérieur se déplace à vitesse constante  $V$ , ce qui impose aussi un forçage régulier sur les contacts.

Cependant, un contact dans un tricot a aussi un certain nombre de spécificités qui le différencient d'un contact dans une expérience de "stick-slip" classique :

- chaque contact n'est pas isolé, il est corrélé avec quatre autres contacts par des portions de fils courbés.
- ici,  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$  sont aussi fortement corrélés car ils résultent tous les deux des contraintes élastiques du fil sur le contact. Dans une expérience de stick-slip les deux forces sont en général décorréélées, par exemple avec  $\vec{P}$  le poids de l'objet et  $\vec{T}$  la force exercée par le ressort.
- tous les contacts ne sont pas soumis aux mêmes contraintes car le champ de déformation est inhomogène et le déplacement imposé n'est pas identique pour tous car seul le mors supérieur se déplace, le mors inférieur restant immobile.

Cette interprétation permet d'expliquer qualitativement les "tremblements" observés expérimentalement. Le bruit dans la réponse en force serait causé par une multitude d'évè-

nements stick-slip avec des phases de croissance linéaires interrompues par de brusques chutes. Les fluctuations n'apparaissent pas périodiques et de même amplitude car d'une part, le système n'est pas homogène et donc les paramètres  $V$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$  ne sont pas les mêmes pour tous les contacts, et d'autre part, les contacts étant corrélés, les glissements peuvent en faire intervenir plusieurs simultanément. Quant aux brusques inhomogénéités du champ de déplacement, elles peuvent être interprétées comme les frontières entre une partie du tricot qui "glisse" et une autre qui reste "collé". Ces frontières s'étendant sur de grandes parties du tricot, ces observations corroborent l'hypothèse que les glissements de contacts peuvent être fortement corrélés, induisant une grande diversité dans l'amplitude des fluctuations de force associées.

Maintenant que l'on a identifié l'origine des tremblements observés, on va se pencher sur les paramètres pertinents de l'expérience qui permettront de les mettre en exergue pour les étudier plus en détails.

### III.1.3 Quelles conditions pour les voir ?

Grâce à l'analogie avec le "stick-slip", on a identifié les différents paramètres à prendre en compte et dans quelle direction les varier pour augmenter ces effets. Les paramètres en question ici sont les forces extérieures appliquées aux contacts  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$ , qui sont ici corrélés, la vitesse de chargement  $V$  du système et les coefficients de frottement entre les deux surfaces  $\mu_s$  et  $\mu_d$ .

#### a) Contraintes internes du tricot

Dans le chapitre précédent, on a déterminé que l'échelle d'énergie stockée dans le tricot était donnée par le coefficient de traction effectif  $\tilde{Y} = \frac{\tilde{B}}{c^*w^*}$  qui est proportionnel au module de flexion du fil et inversement proportionnel aux dimensions des mailles. Plus l'énergie élastique du tricot est importante, plus le système est sous contraintes, avec pour conséquence l'amplification de la valeur des forces entre fils aux points de contact,  $\vec{P}$ . De plus, augmenter la rigidité en flexion du fil ou diminuer les courbures moyennes du fil dans une maille fera accroître la raideur  $K$  du ressort effectif associé à la force  $\vec{T}$ . Or il a été vu dans l'introduction que le phénomène de "stick-slip" est exacerbé lorsque la force normale  $\vec{P}$  est élevée et que la raideur  $K$  est faible. De ce fait, accroître l'énergie stockée dans le tricot produit deux effets antagonistes pour l'observation du "stick-slip". Toutefois, une valeur de  $K$  élevée peut être en partie compensée par une vitesse de chargement plus lente, alors qu'augmenter  $P$  et donc l'amplitude des chutes de force, est primordial pour pouvoir les observer correctement expérimentalement. Il est donc préférable d'amplifier les contraintes internes dans nos expériences.

Les paramètres sur lesquels on peut jouer expérimentalement sont, notamment, le module de flexion du fil en changeant son diamètre par exemple, et la taille moyenne des mailles, à travers la longueur de fil par maille prescrite pendant le tricotage. Il faut donc choisir un fil épais tricoté dans les mailles les plus petites possible, tout en s'assurant néanmoins de rester dans la limite où le diamètre est petit devant le rayon de courbure moyen et en évitant une déformation trop forte du fil qui pourrait le déformer plastiquement.

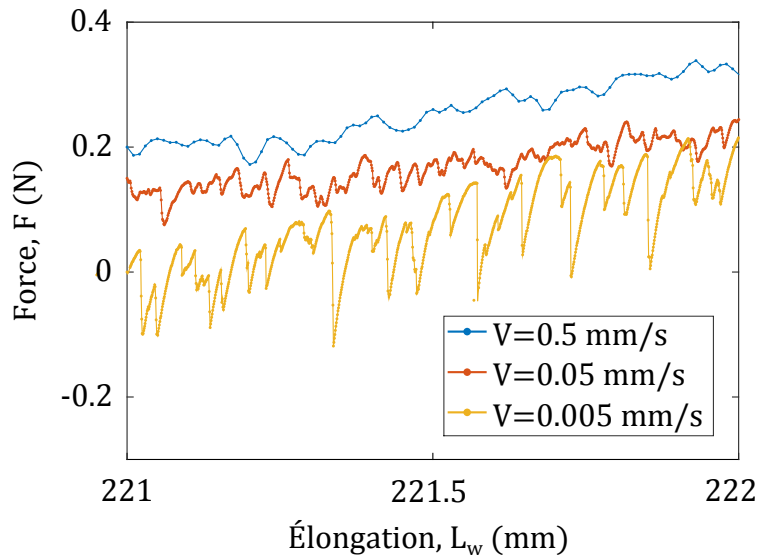


FIGURE III.3 – Expérience de traction d'un tricot de  $81 \times 81$  mailles fabriqué avec le fil STROFT<sup>®</sup> GTM "Schwarz" de diamètre  $d = 150 \mu\text{m}$ . Agrandissement de la réponse force/élongation en traction pour  $L_w \in [221 - 222]$  mm et pour trois vitesses différentes,  $V = 0.5 \text{ mm/s}$ ,  $V = 0.05 \text{ mm/s}$  et  $V = 0.005 \text{ mm/s}$ . La valeur initiale de chaque courbe est artificiellement décalée pour mieux les distinguer. Au fur et à mesure que la vitesse diminue, les fluctuations de force se rapprochent de la forme caractéristique du stick-slip.

#### b) Vitesse de chargement

La vitesse de déplacement du mors supérieur constitue un deuxième point sur lequel on peut jouer. En diminuant cette vitesse de chargement on sépare d'autant mieux les échelles de durées entre les phases collées et les phases de glissement, ce qui permet de les discerner d'autant mieux. On retrouve dans la réponse mécanique du tricot les trois régimes observés dans les expériences de "stick-slip" (fig. III.3). À forte vitesse, le régime se rapproche d'un glissement continu avec de faibles fluctuations de force. À vitesse moyenne, on observe un régime inertiel où les durées de chutes et de chargement sont comparables, les fluctuations sont de plus fortes amplitudes mais ont un profil plutôt symétrique. À vitesse faible, la force augmente progressivement puis chute brusquement, donnant des fluctuations très asymétriques, c'est le régime de "stick-slip". On cherche à observer ce dernier régime, on va donc se placer dans des conditions de faibles vitesses, typiquement en dessous de  $10 \mu\text{m/s}$ .

#### c) Coefficient de friction

Le dernier paramètre que l'on peut modifier est le coefficient de friction du fil sur lui-même. Augmenter le coefficient de frottement permet d'obtenir des événements de "stick-slip" de plus grandes amplitudes. Pour modifier ce paramètre expérimentalement, le tricot a été enduit de divers liquides aux propriétés mouillantes, ou non, avec le fil (fig. III.4). On s'est aperçu que de l'huile minérale, telle que le lubrifiant pour métaux

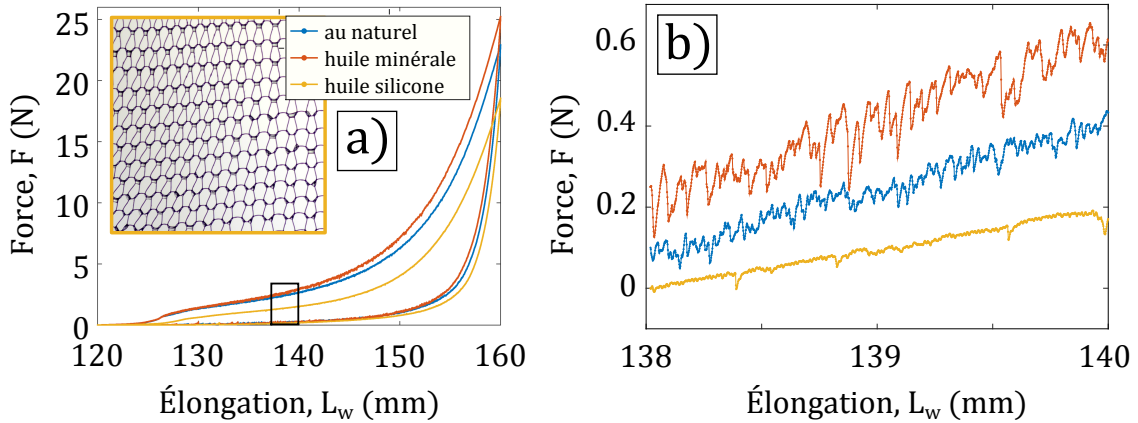


FIGURE III.4 – a) Réponses force/élongation d'un tricot composé de  $51 \times 51$  mailles fait en STROFT<sup>®</sup> GTM "Schwarz" de diamètre  $d = 150 \mu\text{m}$  qui a été badigeonné de différents liquides pour modifier le coefficient de friction fil-fil. Le tricot "au naturel" est celui sans aucun traitement, celui "huile minérale" a été enduit de WD40<sup>®</sup>, et celui "huile silicone" a été enduit de d'huile silicone 47 V1000 de la marque Rhodosil<sup>®</sup>. Insert, photographie d'une fraction du tricot enduit d'huile de silicone. L'huile de silicone est visible et se place préférentiellement aux intersections du fil. b) Agrandissement sur la zone  $L_w \in [138 - 140]$  mm pour mieux observer les fluctuations. La référence en force entre les trois courbes a été ajustée manuellement pour permettre une meilleure comparaison.

WD40<sup>®</sup>, accroît drastiquement le frottement entre fil-fil avec des monofilaments de nylon du type STROFT<sup>®</sup> GTM et mouille très peu le fil. Au contraire, une huile de silicone a tendance à bien mouiller ce fil. L'huile va alors préférentiellement se placer aux intersections (fig. III.4.a, insert) et donc lubrifier les contacts, diminuant de ce fait le frottement.

Sur une réponse force-élongation, une augmentation de coefficient de frottement se traduit par une plus forte hystérésis ainsi qu'une force nécessaire à la traction plus élevée (fig. III.4.a). Une amplification de la friction se manifeste aussi sur les fluctuations en augmentant leurs amplitudes et leur nombre (fig. III.4.b).

Pour notre étude approfondie de ces fluctuations, le tricot enduit de WD40<sup>®</sup> semble la meilleure option. Toutefois, l'ajout d'un liquide apporte une complexité supplémentaire au système en introduisant des effets visqueux et capillaires au problème élastique. Le phénomène désiré restant correctement visible sans ajout de liquide, on a décidé de se passer d'huile minérale pour notre étude et de garder le tricot tel quel.

#### d) Expérience de référence pour l'étude des fluctuations

Une expérience de référence permettant une observation commode de ces fluctuations a donc été conçue aux vu des résultats obtenus en faisant varier les différents paramètres pertinents. L'idée générale pour une observation optimale étant de garder chaque contact dans un état stable la majorité du temps mais toujours proche de l'instabilité (le glissement dans notre cas). Les résultats présentés tout au long de ce chapitre seront, sauf mention contraire, issus de cette expérience.

Le tricot utilisé est composé de  $83 \times 83$  mailles tricotées avec le fil STROFT<sup>®</sup> GTM

"Schwarz" de diamètre  $d = 150 \mu\text{m}$  et la jauge 4 de la machine à tricoter. La cellule de force utilisée est celle de 50 N, ce qui correspond à un bruit d'environ 5 mN, l'échantillonnage de la mesure de force étant effectué toutes les 40 ms.

L'objectif étant d'accumuler des statistiques sur les tremblements, un grand nombre de cycles de chargement doit être effectué. De plus, pour que les ensembles statistiques aient un sens, il faut que le système soit dans un régime quasi-stationnaire et chaque cycle indépendant du précédent. Les mesures doivent donc se faire sur une portion réduite d'élongation et dans une phase où la pente de la réponse moyenne en force reste modérée. Pour éviter un effet de mémoire du frottement trop marqué et pour être sûr d'être dans le régime à élasticité dominante, l'élongation doit être variée sur une grande amplitude. Ces contraintes combinées avec les faibles vitesses nécessaires font qu'une expérience durerait au moins plusieurs jours. Or, si l'expérience dure trop longtemps, les variations de température, de luminosité ou d'humidité ambiante viennent progressivement modifier certaines caractéristiques des tremblements. On suppose notamment que l'humidité ambiante vient se condenser aux interstices des contacts quand une expérience dépasse environ 12h, car au fil des cycles, les événements se font de plus en plus rares même si leurs propriétés semblent inchangées. Pour pallier ce problème, on ne garde une vitesse lente que dans la fenêtre d'élongation d'intérêt, le reste de la déformation se faisant à une vitesse plus élevée, permettant ainsi de diminuer grandement la durée de l'expérience. En pratique, l'élongation  $L_w$  est variée entre  $L_{w_i} = 215 \text{ mm}$  et  $L_{w_f} = 234 \text{ mm}$  en traction et compression sur 52 cycles. Les deux premiers cycles sont intégralement faits à une vitesse  $V = 0.5 \text{ mm/s}$  pour que l'état initial ne dépende pas de l'état imposé lors de la mise du tricot sur la machine de traction. Ensuite, sur 50 cycles, le tricot est d'abord tiré de  $L_{w_i} = 215 \text{ mm}$  à  $L_{w_m} = 230 \text{ mm}$  à la vitesse  $V = 0.5 \text{ mm/s}$ , puis à  $5 \mu\text{m/s}$  entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$ . Pour finir, la compression de  $L_{w_f}$  à  $L_{w_i}$  est effectuée rapidement à  $V = 0.5 \text{ mm/s}$  (fig. III.5.a). Les photographies du tricot ne sont effectuées qu'entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$  pendant la phase de traction à faible vitesse. Cette procédure permet de diminuer drastiquement la durée de l'expérience, mais un changement soudain de vitesse avec l'instron s'accompagne systématiquement d'une légère compression, ce qui a comme conséquence un abrupt chute de force (fig. III.5.b). En effet, en changeant, même sur un court instant et une courte distance, le signe du chargement, de nombreux contacts sont réinitialisés et leur force de frottement associée devient proche de 0. Ce petit rebroussement joue donc le rôle de réinitialisation des contacts avant l'analyse, les tremblements reprennent après environ 1 mm d'élongation une fois que les contacts sont de nouveaux chargés.

Un autre critère important pour l'analyse d'image cette fois, est la distance parcourue par le mors entre deux photographies. En effet, il faut que le nombre d'évènements de "stick-slip" soit suffisamment modeste pour pouvoir les identifier individuellement, mais pas trop peu non plus pour éviter d'avoir à traiter un nombre conséquent d'images sans informations. De plus, les expériences étant longues et le nombre de photos de très haute résolution conséquent, les images ne peuvent être stockées sur l'appareil photo et sont directement transférées sur un disque dur. Cette contrainte prend un certain temps et impose typiquement un délai de 20 s entre chaque photo, ce qui limite fortement la fréquence de prise de vue. Au final, il est ressorti que prendre une photo après un déplacement de l'ordre de grandeur du diamètre du fil est un bon compromis. Dans cette expérience de référence, le délai entre chaque photographie est de 40 s, ce qui correspond à un déplacement de  $200 \mu\text{m}$ . Les photographies sont effectuées avec un Nikon<sup>®</sup> D800 avec un objectif 60 mm

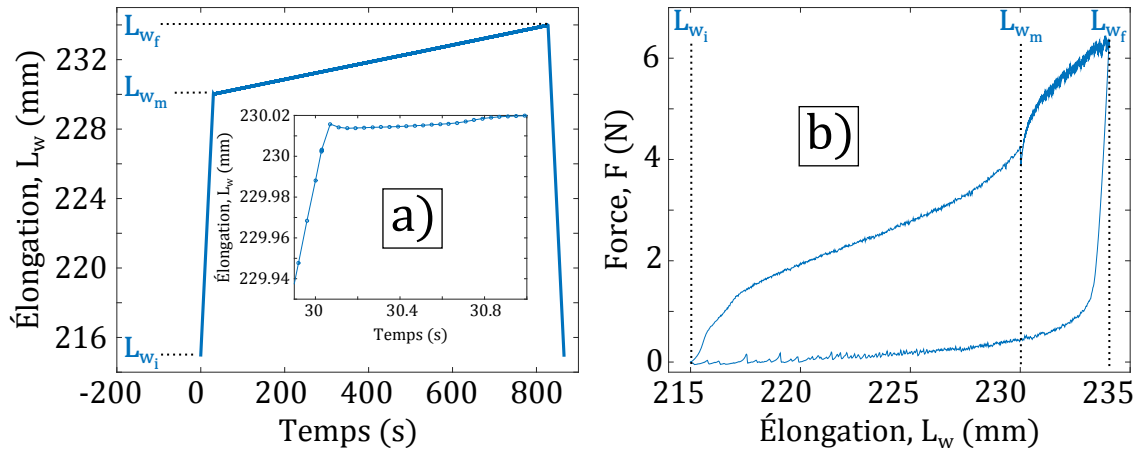


FIGURE III.5 – a) Élongation  $L_w$  du tricot en fonction du temps pour un cycle. La vitesse de chargement en traction est de  $V = 0.5$  mm/s entre  $L_{w_i}$  et  $L_{w_m}$  puis de  $5 \mu\text{m/s}$  entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$ , en compression elle est de  $V = 0.5$  mm/s entre  $L_{w_f}$  jusque  $L_{w_i}$ . Insert, agrandissement autour du changement de vitesse, mettant en évidence la légère compression due à l'inertie du moteur. b) Réponse force-élongation du tricot lors d'un cycle complet. À  $L_w = L_{w_m}$  la force chute brusquement à cause de la légère compression du moteur combiné avec un certain fluage du tricot. Toutefois, cette chute ne va pas avoir d'influence sur la statistique globale des tremblements que l'on mesurera par la suite.

1 : 2 : 8 :  $G$  AFS MicroNikkor, la résolution des photos est de  $7360 \times 4912$  pixels. Cette résolution permet d'avoir en moyenne  $50 \times 50 = 2500$  pixels par maille, le déplacement de leur centre de masse est donc mesuré avec une précision d'environ  $\sqrt{50} \approx 0.15$  pixels. Avec  $20 \text{ pixel/mm}$ , on obtient une position mesurée avec une précision de  $10 \mu\text{m}$ .

## III.2 Description quantitative des tremblements

Cette section a pour but de caractériser précisément ces tremblements pour mieux comprendre les mécanismes à leur origine. Une meilleure caractérisation et compréhension vont permettre de comparer ce système à d'autres phénomènes physiques similaires. Notre système expérimental nous donne accès à deux types de mesure différentes. Le signal de force constitue une mesure externe, ou globale, du tricot et intégrée sur tout le système. La détermination du champ de déplacement des mailles constitue quant à elle une mesure interne, ou locale, du tricot. Les deux aspects, la force totale externes et les déformations internes, sont essentiels pour vérifier qu'il s'agit bien du même phénomène qui est observé et pour les caractériser sous deux aspects bien distincts.

### III.2.1 Une mesure externe, la réponse en force

On s'intéresse dans un premier temps à la mesure externe que procure la réponse force/élongation du tricot.

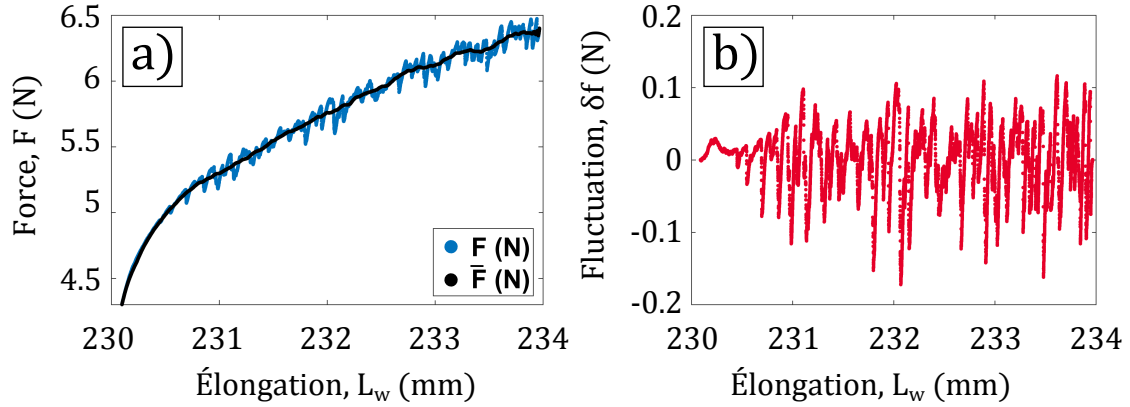


FIGURE III.6 – a) Réponse typique de la force entre  $L_{w_m} = 230$  mm et  $L_{w_f} = 234$  mm pour l'expérience de référence. La ligne continue noire indique la force moyennée  $\bar{F}$  avec une moyenne glissante effectuée sur 1500 points. b) Fluctuations en force  $\delta f$  correspondant à la réponse en a).

#### a) Fluctuations de force

La caractérisation phénoménologique précédente nous a permis d'identifier les tremblements comme les fluctuations de la force autour de la réponse élastique moyenne. Une méthode pour les caractériser consiste à considérer ces fluctuations comme un "bruit" autour d'une moyenne. On décompose alors la réponse en force de la manière suivante :

$$F(L_w) = \bar{F}(L_w) + \delta f(L_w) \quad (\text{III.3})$$

$\bar{F}$  constitue donc la réponse moyenne élastique et  $\delta f$  les fluctuations. Expérimentalement,  $\bar{F}$  est évalué en procédant à une moyenne glissante sur le signal de force brut, le nombre de points sur lesquels la moyenne est effectuée dépend de la fréquence d'acquisition mais doit inclure au moins plusieurs dizaines d'évènements (fig. III.6.a).  $\delta f$  est alors simplement pris comme la différence  $F - \bar{F}$  (fig. III.6.b).

Une première manière de caractériser un bruit est de mesurer son spectre en fréquence.  $\delta f$  étant une fonction de l'élongation  $L_w$ , le paramètre pertinent n'est pas une fréquence temporelle, mais plutôt une fréquence spatiale. On considère donc le spectre comme une fonction d'une longueur d'onde  $\lambda$ . La densité de puissance du spectre est évaluée par la norme au carré de la transformée de Fourier de  $\delta f$ . Cette fonction est calculée pour l'expérience de référence, ainsi que pour des variantes de celle-ci où le seul paramètre varié est la vitesse de chargement entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$ . L'amplitude de variation de la vitesse reste limitée entre  $1 \mu\text{m/s}$  et  $10 \mu\text{m/s}$  de sorte à ce que le système reste dans un régime où la durée du glissement est bien plus courte que celle des phases collées. On remarque alors que pour toutes les vitesses, le spectre suit une loi de puissance pour  $\lambda$  entre environ  $1 \mu\text{m}$  et  $100 \mu\text{m}$  (fig. III.7.a). Le coefficient de cette loi de puissance, mesuré sur la courbe de  $V = 5 \mu\text{m/s}$  est de  $-2.727 \pm 0.006$ , l'erreur sur le coefficient est mesuré par l'erreur standard sur un intervalle de confiance de 95%. Ce résultat montre que les fluctuations n'ont pas de longueurs d'ondes privilégiées et ne sont, par conséquent, pas issues d'un phénomène périodique. De plus, la pente étant la même pour toutes les



vitesse considérées, ce résultat est robuste et constitue une propriété intrinsèque au tricot considéré.

Une deuxième manière de caractériser ces fluctuations est de mesurer la distribution de probabilité de  $\delta f$ . La distribution est calculée pour tous les cycles entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$  (fig. III.7.b) et reste globalement similaire pour toutes les vitesses considérées. Une première observation est que la distribution est fortement asymétrique entre les fluctuations positives et négatives. Les fluctuations négatives sont plus nombreuses et leurs amplitudes maximales plus élevées que les positives. Cette asymétrie vient probablement de la manière dont les fluctuations sont définies car, la force étant globalement une fonction croissante, sur l'intervalle de la moyenne glissante la valeur moyenne de la force augmente significativement. Cet effet a pour conséquence de surestimer la moyenne, induisant une sous-estimation des fluctuations positives. La deuxième observation porte sur la forme de la décroissance de la distribution. En traçant la densité de probabilité en fonction de  $\delta f^2$  (fig. III.7.b, insert) on remarque que les branches décroissent de manière plutôt linéaires. Les distributions semblent donc se rapprocher d'une gaussienne centrée en 0 mais dont la variance est différente suivant que  $\delta f$  soit positif ou négatif. La valeur de cette variance semble dépendre de façon non monotone de la vitesse.

### b) Détection d'évènements

Considérer ces tremblements seulement comme un bruit est néanmoins très réducteur car on ne prend pas en compte leur forme caractéristique et la différence entre les phases

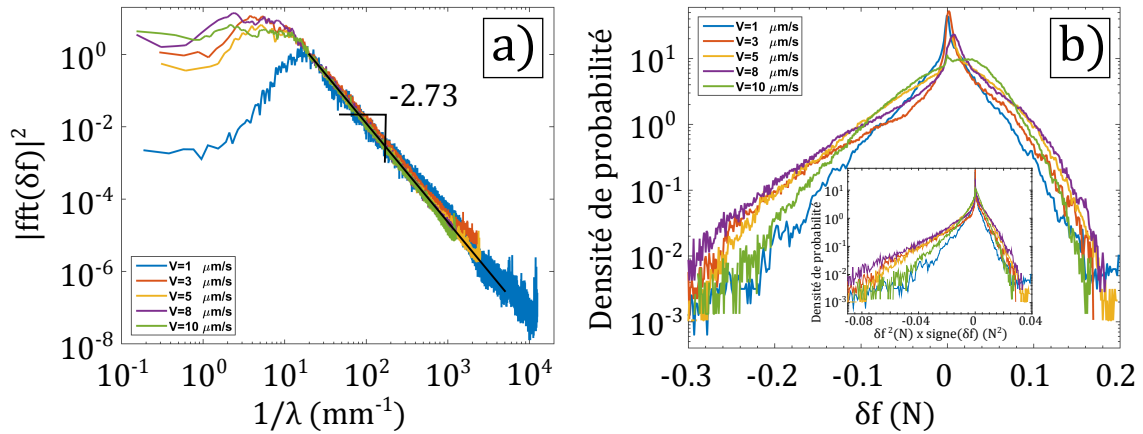


FIGURE III.7 – a) Densité de puissance du spectre de  $\delta f$  évaluée comme la norme au carré de sa transformée de Fourier. Le résultat est montré pour l'expérience de référence avec 5 vitesses de chargements différentes. Dans tous les cas, le spectre montre une loi de puissance pour  $\lambda$  entre environ  $1 \mu\text{m}$  et  $100 \mu\text{m}$ , avec un exposant égal à  $-2.727 \pm 0.006$  (mesuré sur la courbe de  $V = 5 \mu\text{m/s}$ ). b) Distribution de probabilité de  $\delta f$  pour les mêmes expériences. La distribution est similaire pour les 5 vitesses et est notamment asymétrique, avec une prépondérance des  $\delta f$  négatifs. Insert, distribution de probabilité en fonction de  $\delta f^2$ , ce qui permet de mettre en évidence que les distributions se rapprochent d'une gaussienne.

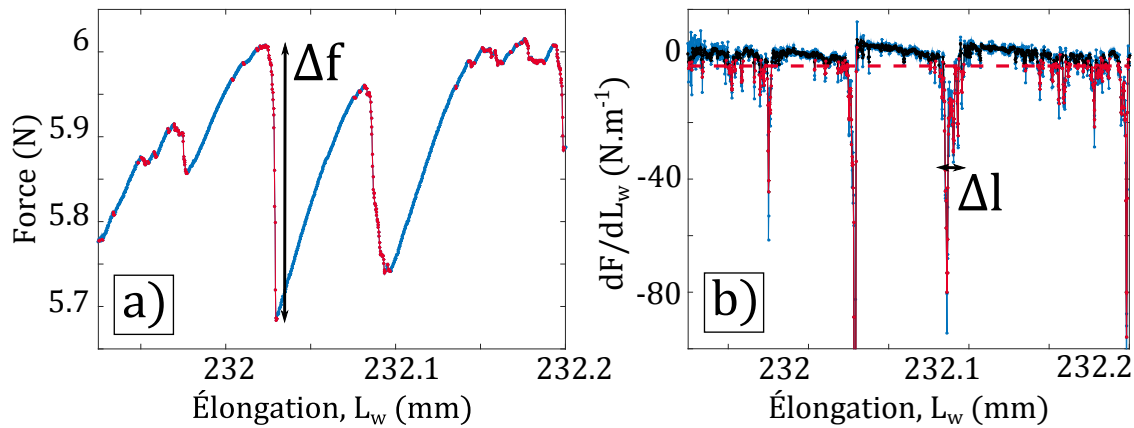


FIGURE III.8 – a) Portion de la réponse force/élongation de l'expérience de référence. Les points détectés comme appartenant à un évènement sont surlignés en rouge. Chaque groupe de points rouges continu forme un évènement. b) Dérivée première de  $F(L_w)$  pour la détection des évènements, le signal brut est représenté par les points bleus. Les points noirs sont obtenus en moyennant le signal brut à l'aide d'une convolution avec une gaussienne d'écart type égale à la distance entre deux points. Tous les points pour lesquels ce signal moyenné est négatif sont supposés appartenir à la réponse plastique. Un évènement est défini par tous les points entre un passage positif/négatif jusqu'à ce que le signal redevienne positif. Deux propriétés du signal peuvent alors être mesurées, l'amplitude de la chute de force  $\Delta f$  et la durée de l'évènement, qui est mesuré de manière équivalente en temps  $\Delta T$  ou en distance  $\Delta l$ .

de "stick" et celles de "slip". Les phases de "stick" se caractérisent par une augmentation linéaire et très lente de la force alors que les "slip" font chuter brusquement la force. Chaque glissement peut alors être regardé comme un évènement plastique, dans le sens où la réponse sort d'une réponse l'élasticité classique. On se focalisera donc dorénavant sur les propriétés de ces évènements, mais pour cela il faut dans un premier temps réussir à les détecter.

L'apparition d'un évènement se caractérise par un changement soudain de pente dans la réponse force/élongation, passant de faiblement positif à fortement négatif (fig. III.8.a). Une manière simple de les détecter passe donc par le signe de la dérivée première du signal. Après une première étape de moyennage de la dérivée pour éliminer les fluctuations dues au bruit de mesure du détecteur, on considère que tout point qui présente une pente négative doit appartenir à un évènement (fig. III.8.b). Le début et la fin d'un évènement sont définis par l'ensemble des points consécutifs situés entre le passage à une dérivée négative, et ce, jusqu'à ce qu'elle redevienne positive.

Les propriétés que l'on peut immédiatement extraire de cette détection sont : l'amplitude de la chute de force  $\Delta f$ , définie comme la différence entre la valeur de  $F$  pour le premier et le dernier point de l'évènement, et la durée de l'évènement mesurée de manière équivalente en temps  $\Delta T$  ou en distance  $\Delta l$  puisque la vitesse de chargement est constante.

Les densités de probabilités de ces deux propriétés,  $\Delta f$  et  $\Delta T$ , sont calculées à partir

de tous les évènements détectés d'une expérience. En ce qui concerne  $\Delta f$ , cette probabilité prend la forme d'une loi de puissance sur environ deux décades d'amplitude, entre  $10^{-3}$  (N) et  $10^{-1}$  (N), pour les 5 vitesses considérées. La pente de cette loi de puissance est de  $-1.50 \pm 0.02$ , obtenu par régression linéaire sur la courbe de l'expérience  $V = 5 \mu\text{m/s}$  (fig. III.9.a). Ce résultat montre que nos tremblements de tricot possèdent une propriété d'invariance d'échelle dans leur amplitude. L'amplitude minimale mesurée est limitée par la précision de notre appareil de force pour les faibles amplitudes, puis par la taille finie du tricot et la valeur maximale des contraintes aux contacts pour les fortes amplitudes. Pour ce qui est de  $\Delta T$ , le résultat est plus difficile à interpréter car la résolution temporelle de nos expériences ne permet pas d'obtenir beaucoup de points par évènements, limitant de fait la plage de durées mesurées, et de surcroît, les résultats sont assez variables en fonction des vitesses (fig. III.9.b). On ne peut donc pas justifier l'existence d'une loi de puissance pour la durée des évènements. On peut tout de même remarquer que pour toutes les vitesses, densité de probabilité et durée d'évènements en échelles logarithmiques semblent suivre un régime linéaire, sur un peu moins d'une décade, mais avec une pente similaire. Mesurée sur la courbe pour  $V = 5 \mu\text{m/s}$ , la pente est de  $-1.77 \pm 0.20$ .

### c) Dynamique des évènements

La résolution temporelle est tout de même suffisante pour extraire des informations sur la dynamique des tremblements, à savoir l'évolution de  $F$  ou de sa dérivée première en fonction du temps (ou de l'élongation) au sein d'un évènement. Le profil de  $-\frac{dF}{dL_w}$  est souvent caractérisé par la présence de plusieurs maxima (fig. III.10.a). Si on fait le parallèle avec le "stick-slip", ces maxima correspondraient aux chutes brutales dues aux glissements

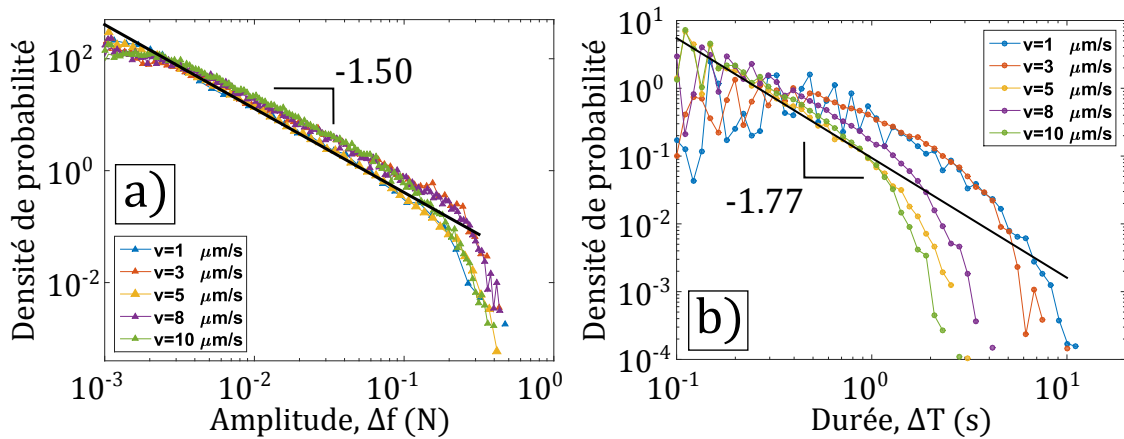


FIGURE III.9 – a) Densité de probabilité de l'amplitude des évènements  $\Delta f$  pour l'expérience de référence et pour 5 vitesses de chargements différentes entre  $1 \mu\text{m/s}$  et  $10 \mu\text{m/s}$ . Ces amplitudes suivent une loi de puissance sur deux décades avec une pente de  $-1.50 \pm 0.02$  (mesuré pour la vitesse  $V = 5 \mu\text{m/s}$ ). b) Densité de probabilité de la durée des évènements  $\Delta T$  pour les mêmes expériences. La zone de décroissance linéaire est trop restreinte pour en conclure à une loi de puissance, mais on peut tout de même en mesurer la pente qui vaut  $-1.77 \pm 0.20$  (mesuré pour la vitesse  $V = 5 \mu\text{m/s}$ ).

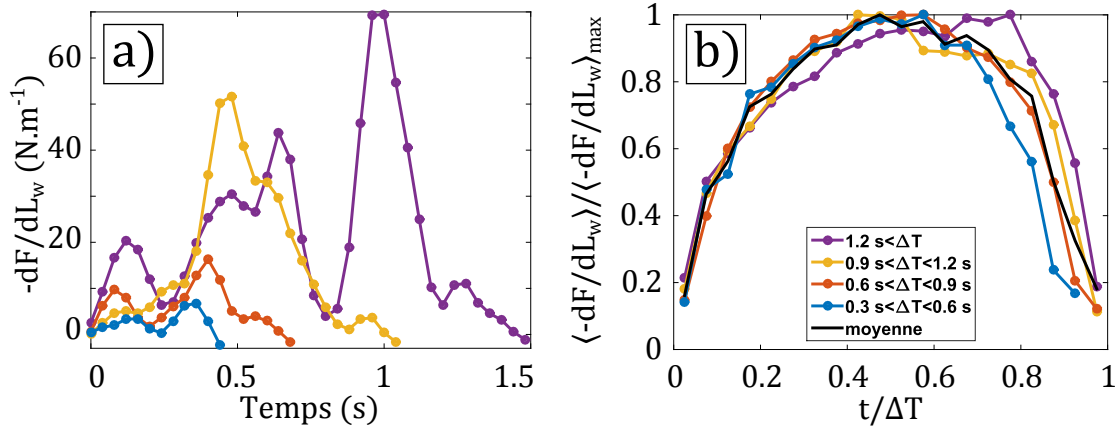


FIGURE III.10 – a) Exemples de dynamique pour quatre évènements de durées différentes. L'opposée de la dérivée première de la force en fonction de l'élongation  $-\frac{dF}{dL_w}$  est représentée en fonction du temps à partir du début de l'évènement jusqu'à sa fin. Les pics correspondent à des chutes brutales de la force, et donc aux glissements des contacts. b) Forme moyenne d'un évènement. Pour différents intervalles de durée d'évènement  $\Delta T$ , la moyenne de  $-\frac{dF}{dL_w}$  sur tous les évènements de chaque intervalle est calculée en fonction du temps normalisé par  $\Delta T$ .  $\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle$  est normalisé par son maximum. La courbe en noire correspond à la moyenne sur tous les évènements, quelle que soit leur durée. Les évènements plus court que 0.3s ne se prêtent pas bien à cette analyse car ils ne contiennent pas assez de points de données (moins de 7, avec un point toutes les 40 ms).

des contacts, un évènement peut donc être composé d'une succession de plusieurs épisodes de glissement. Si on regarde maintenant la moyenne de ces profils, on s'aperçoit qu'après normalisation par la durée de l'évènement et la valeur maximale de  $-\frac{dF}{dL_w}$ , qu'importe la durée de l'évènement le profil reste très similaire. Le profil moyen de  $\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle$  adopte une forme presque symétrique par rapport à son maximum atteint en  $\frac{t}{\Delta T} = 0.5$ , avec une rapide croissance initiale et une décroissance finale tout aussi rapide. On retrouve la propriété d'invariance d'échelle des évènements dans la similitude des profils malgré leurs durées différentes. On observe toutefois que le profil a l'air de s'écarter d'une forme symétrique lorsque la durée des évènements augmente. Le maximum de glissement semble se décaler de plus en plus vers la fin de l'évènement (fig. III.10.a, courbe violette). Une interprétation possible de ce décalage est que les glissements importants ont tendance à être précédés, ou même déclenchés, par des glissements de plus faibles amplitudes, le maximum d'intensité étant par conséquent situé vers la fin de l'évènement.

### III.2.2 Une mesure interne, le champ de déplacement

On va maintenant s'attaquer aux signes laissés par les tremblements dans la position des mailles. Une maille est détectée par l'espace délimité par le fil, dont la forme est imposée par ses croisements avec le fil des rangs supérieur et inférieur, le glissement d'un contact va donc venir déformer cet espace et modifier la position de la maille.

### a) Fluctuations de positions

Dans le même état d'esprit que pour le signal de force, on peut commencer par étudier les fluctuations de positions des mailles autour d'une trajectoire moyenne. En effet, on a vu dans le second chapitre que, dans le régime à élasticité dominante, les mailles suivent une trajectoire rectiligne reproductible entre les cycles. Cette trajectoire rectiligne constitue donc la trajectoire moyenne autour de laquelle la position fluctue, on note alors la position d'une maille sous la forme :  $\vec{u}(j, i) = \vec{u}_{lin}(j, i) + \delta\vec{u}(j, i)$ . Avec  $\vec{u}_{lin}$  la trajectoire moyenne et  $\delta\vec{u}$  la fluctuation autour de cette moyenne, les indices  $(j, i)$  correspondant à la position de la maille dans le réseau (fig. III.11.a). En observant la répartition spatiale de  $\delta\vec{u}$  dans le tricot, on se rend compte immédiatement que le bruit de position n'est pas simplement un variables purement aléatoire (fig. III.11.b). En effet, les fluctuations présentent de fortes corrélations spatiales, ce qui suggère que les mailles glissent avec des voisins bien déterminées lors d'un évènement.

Quantifier ces corrélations spatiales peut donc beaucoup nous apprendre sur ces évènements. Pour cela on introduit la fonction suivante :

$$C_u(\delta j, \delta i) = \frac{\langle \delta\vec{u}(j + \delta j, i + \delta i) \cdot \delta\vec{u}(j, i) \rangle}{\langle \delta\vec{u}^2 \rangle} \quad (\text{III.4})$$

Cette fonction permet de quantifier si la fluctuation d'une maille est similaire en termes de norme et direction à la fluctuation d'une de ses voisines à une distance  $\delta j$  et  $\delta i$ , compté en nombre de mailles selon respectivement les rangs et colonnes. Pour cela, on calcule le produit scalaire entre ces deux fluctuations  $\delta\vec{u}(j + \delta j, i + \delta i) \cdot \delta\vec{u}(j, i)$  normalisé par  $\delta\vec{u}(j, i)^2$  pour que  $C_u(\delta j = 0, \delta i = 0) = 1$ . La moyenne  $\langle \rangle$  est faite sur toutes les mailles dans toutes les images. La mesure expérimentale de  $C_u$  donne bien un maximum de 1 en  $\delta j = \delta i = 0$  et va décroître dans toutes les directions, le déplacement des mailles est donc de moins en moins corrélé au fur et à mesure qu'elles sont éloignées dans le réseau (fig. III.12.a). Cependant, cette décroissance est loin d'être isotrope, la corrélation est bien plus forte

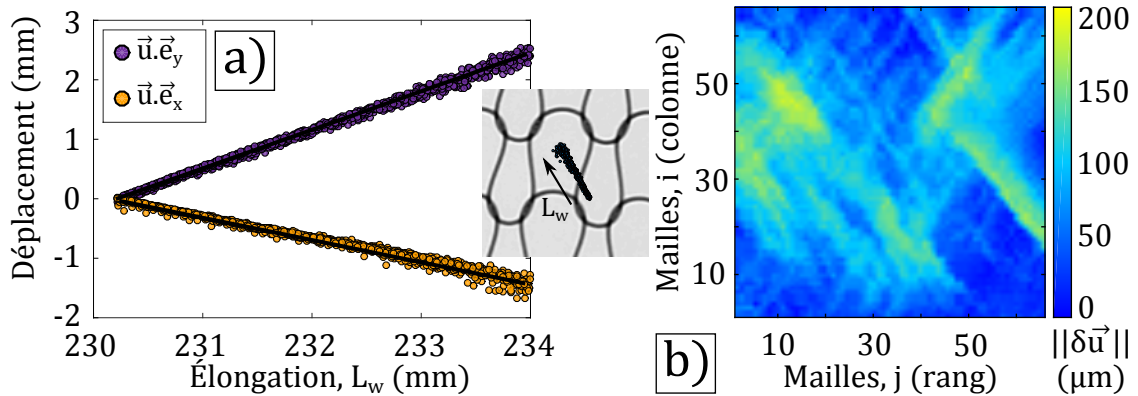


FIGURE III.11 – a) Déplacement d'une maille de l'expérience de référence entre  $L_{w_m}$  et  $L_{w_f}$ . Chaque point correspond à sa position dans une des images parmi les 50 cycles. Les droites noires sont les régressions linéaires de ces trajectoires,  $\vec{u}_{lin}$ . b) Exemple de la norme des fluctuations  $\delta\vec{u}$  sur tout le tricot pour une image donnée. De fortes corrélations spatiales sont bien visibles.

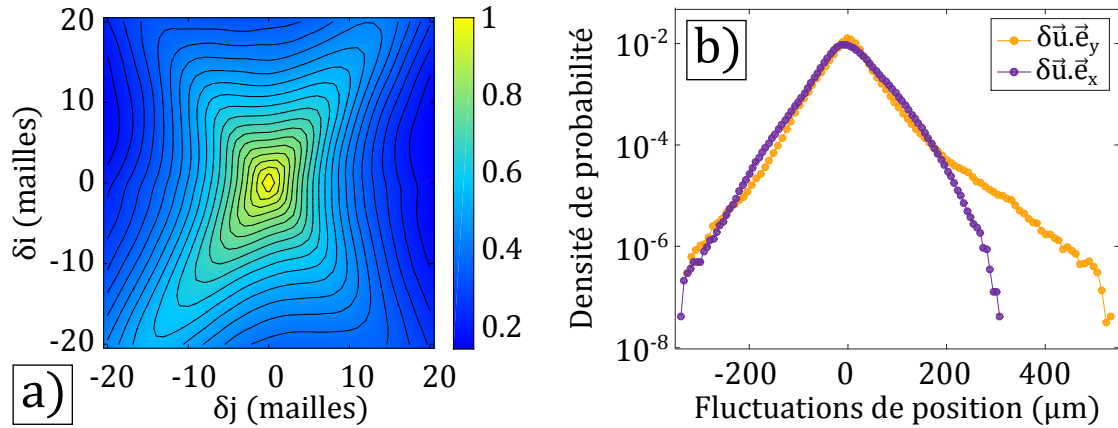


FIGURE III.12 – a) Amplitude de la fonction de corrélation  $C_u$ . La corrélation des fluctuations de position est particulièrement forte dans quatre directions données par  $57^\circ[180]$  et  $-57^\circ[180]$ . La corrélation reste élevée dans le réseau sur des distances de plusieurs dizaines de mailles. b) Distribution des composantes des fluctuations de position  $\delta\vec{u} = \delta u^x \vec{e}_x + \delta u^y \vec{e}_y$ . Ces résultats sont obtenus pour toutes les mailles de toutes les images de l'expérience de référence.

dans quatre directions privilégiées, marquée par les angles  $57^\circ[180]$  et  $-57^\circ[180]$ . Cette mesure confirme bien que les fluctuations de positions présentent de fortes corrélations dans le réseau de mailles. Les mailles s'éloignent donc de la réponse élastique par groupes qui peuvent s'étendre sur plusieurs dizaines de rangs et colonnes et surtout suivant des directions bien précises. On peut aussi noter que ces directions ne correspondent pas à la direction moyenne suivie par le fil dans le tricot, c'est-à-dire celle des rangées.

Les fluctuations de positions sont aussi caractérisées au moyen de la distribution de probabilité des deux composantes de  $\delta\vec{u} = \delta u^x \vec{e}_x + \delta u^y \vec{e}_y$  (fig. III.12.b). La projection selon  $x$ ,  $\delta u^x$  montre une distribution symétrique avec une décroissance exponentielle vers les valeurs positives et négatives avec un taux d'environ  $25 \text{ mm}^{-1}$ . Pour la projection  $\delta u^y$ , la distribution est quasiment identique à  $\delta u^x$  pour les valeurs négatives et pour les valeurs positives jusqu'à seulement  $200 \mu\text{m}$  environ. En effet, la distribution de  $\delta u^y$  n'est pas symétrique, il y a un large excès de valeurs positives entre  $200$  et presque  $600 \mu\text{m}$  par rapport aux valeurs négatives. La distribution décroît exponentiellement avec un taux de  $25 \text{ mm}^{-1}$  jusqu'à  $200 \mu\text{m}$  mais ce taux de décroissance chute brusquement à  $15 \text{ mm}^{-1}$  pour de plus fortes fluctuations. En premier lieu, on peut remarquer que l'amplitude des fluctuations est plus de 10 fois plus importantes que ce à quoi on s'attendrait avec seulement un bruit de mesure. En second lieu, le fait de tirer le tricot vers le "haut" ( $y$  positif) entraîne des fluctuations de fortes amplitudes dans cette même direction. Cette observation rejoint l'idée de mailles bloquées par le frottement à une position plus basse que la moyenne, et qui glissent brusquement sur une grande distance dans la direction du chargement pour ensuite lentement relaxer vers la position moyenne.



**b) Détection et amplitude d'un évènement**

Les mesures de fluctuations ont, comme pour la force, le défaut de ne pas pouvoir détecter d'événements à proprement parler, mais seulement de quantifier à quel point les mailles sont loin de leurs positions moyennes. On procède alors de manière similaire qu'avec la mesure externe de force, les événements sont détectés en identifiant les variations abruptes de la position avec l'élongation. Pour la mesure interne du champ de déformation, cela correspond à quantifier le déplacement des mailles entre deux images successives. On définit  $\vec{v}_{tot}$  ce déplacement que l'on peut aussi décomposer en deux com-

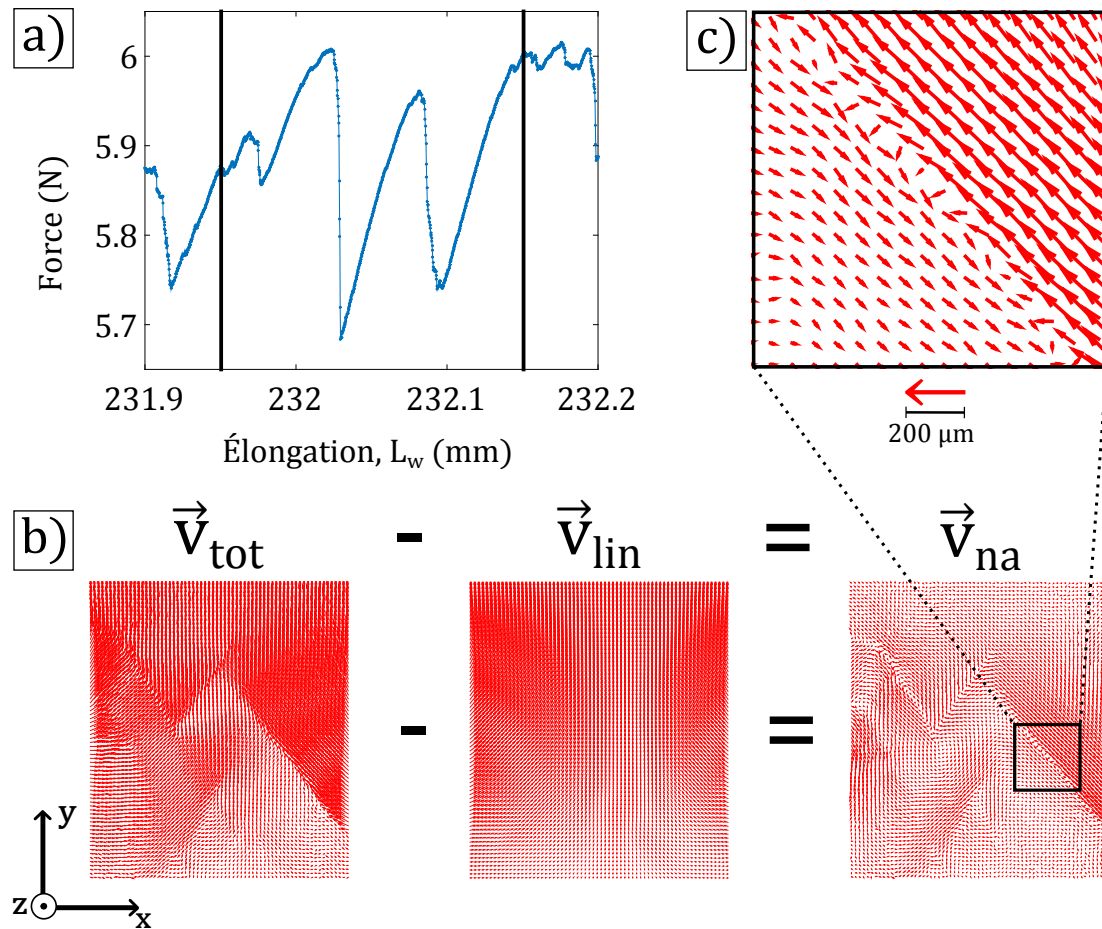


FIGURE III.13 – a) Réponse force/élongation du tricot avec les deux traits verticaux qui indiquent les élongations où ont été prises deux photographies successives. b) Champ de déplacement  $\vec{v}_{tot}$  entre les deux instants mis en évidence en a). L'opération pour retrouver le champ de déplacement non-affine  $\vec{v}_{na}$  est explicité avec les champs correspondants. Chaque flèche des champs correspond au déplacement d'une maille, chacune placée à la position de la maille dans le réseau. c) Agrandissement sur une zone où  $\vec{v}_{na}$  présente de fortes variations spatiales, trahissant la présence d'un déplacement qui sort du régime élastique. La taille des flèches est arbitraire et ne correspond pas au déplacement réel des mailles, celui-ci étant beaucoup plus petit que la taille d'une maille.



posantes, une élastique et une plastique.

$$\vec{v}_{tot}(j, i, L_w) = \vec{u}(j, i, L_w) - \vec{u}(j, i, L_w - \delta L_w) = \vec{v}_{lin}(j, i) + \vec{v}_{na}(j, i, L_w) \quad (\text{III.5})$$

$\delta L_w = 200 \mu\text{m}$  est l'élongation entre deux photos successives. Les trajectoires moyennes des mailles correspondant à la réponse élastique étant des droites, la composante élastique du déplacement,  $\vec{v}_{lin}$  ne dépend pas de l'élongation  $L_w$ . On a simplement  $\vec{v}_{lin} = \delta L_w(a_1 \vec{e}_x + b_1 \vec{e}_y)$  avec  $a_1$  et  $b_1$  les champs de déplacement définis dans le chapitre précédent et correspondant à la pente des droites illustrées fig. III.11.a. La différence entre le champ de déplacement total et le champs linéaire donne  $\vec{v}_{na}$  le champs de déplacement non-affine qui porte l'information sur les tremblements du tricot (fig. III.13). Dans la suite  $\vec{v}_{na}$  sera noté simplement  $\vec{v}$  de sorte à simplifier les notations.

Le champ  $\vec{v}_{na} = \vec{v}$  présente de très fortes inhomogénéités d'amplitude et de direction qui marquent la présence de déplacements qui sortent fortement du déplacement moyen et sont donc la signature de l'effet de la friction. Ce champ contient notamment des zones qui s'étendent le long de lignes où, de part et d'autre, la direction du déplacement varie brusquement, allant jusqu'à s'inverser. Ce genre de singularités pointe vers le fait que ces lignes constituent la frontière entre deux zones du tricot qui glissent l'une sur l'autre, ce qui corrobore bien avec l'idée que les tremblements ont pour origine un phénomène de "collé-glissé" ou "stick-slip".

Pour quantifier les inhomogénéités spatiales du champ  $\vec{v}$ , on calcule ses dérivées spatiales [120]. Le déplacement étant limité au plan  $\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y$ , les dérivées donnent quatre quantités que l'on peut recombinaison pour définir différents modes de déformation, permettant ainsi une meilleure interprétation :

- la vorticité  $\omega = \frac{\partial v^y}{\partial x} - \frac{\partial v^x}{\partial y}$  qui exprime une rotation pure,
- le taux de cisaillement  $\tau = \frac{\partial v^y}{\partial x} + \frac{\partial v^x}{\partial y}$  qui traduit le cisaillement du milieu,
- la divergence  $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y}$  qui rend compte d'une variation d'aire de la surface,
- et le déviateur  $\varepsilon_d = \sqrt{\left(\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}\right)^2 + \tau^2}$  qui témoigne par exemple d'un allongement selon  $y$  combiné avec un rétrécissement selon  $x$  (cas  $\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$  négatif et  $\tau = 0$ ).

Pour calculer ces dérivées spatiales à partir des mesures expérimentales de positions, on utilise les formules suivantes :

$$\frac{\partial \vec{v}(j, i, L_w)}{\partial x} = \frac{\vec{v}(j+1, i, L_w) - \vec{v}(j, i, L_w)}{\|(\vec{u}(j+1, i, L_w) - \vec{u}(j, i, L_w)) \cdot \vec{e}_x\|} \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial \vec{v}(j, i, L_w)}{\partial y} = \frac{\vec{v}(j, i+1, L_w) - \vec{v}(j, i, L_w)}{\|(\vec{u}(j, i+1, L_w) - \vec{u}(j, i, L_w)) \cdot \vec{e}_y\|} \quad (\text{III.7})$$

Lorsque l'on représente ces quantités pour le champ  $\vec{v}$  donné en exemple précédemment, on s'aperçoit que la vorticité et le déviateur sont les deux seules à adopter des valeurs significativement différentes de zéro et localisés spécifiquement sur les lignes de glissement identifiées (fig. III.14). Cela signifie que les lignes de glissement imposent une rotation aux mailles correspondantes conjuguée à une élongation suivant  $y$  et rétrécissement selon  $x$  (la quantité  $\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$  reste négative). La rotation des mailles se fait selon deux sens, le sens trigonométrique  $\omega > 0$  ou horaire  $\omega < 0$ . On peut alors définir deux

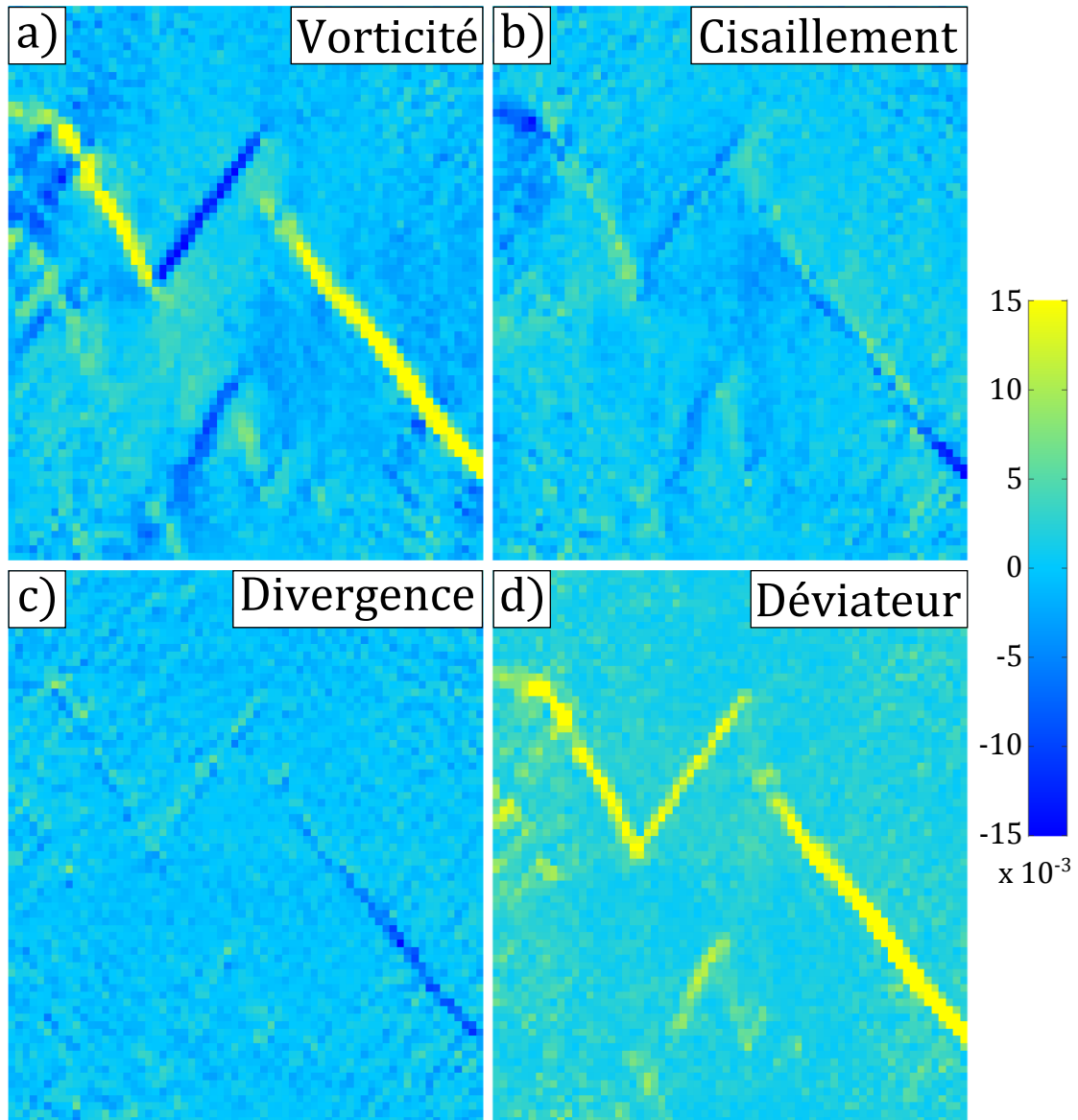


FIGURE III.14 – Amplitudes des déformations de  $\vec{v}_{na}$  illustré à la figure précédente. Chaque pixel représente une maille  $(j, i)$  du réseau et sa couleur rend compte de l'intensité de sa déformation associée. La vorticité a), le cisaillement b), la divergence c), et le déviateur d) ont été calculés pour chaque maille. L'échelle est identique pour les quatre modes de déformation.

types d'évènements, ceux positifs qui se caractérisent par  $\omega > 0$  et ceux négatifs avec  $\omega < 0$ . Avec cette définition standard, le déviateur est défini positif mais sa composante majoritaire, à savoir  $\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$  puisque  $\tau$  reste proche de 0, est une quantité négative que l'évènement soit positif ou négatif.

La réponse moyenne élastique du tricot se caractérise aussi par un allongement des mailles selon  $y$  associé à un rétrécissement selon  $x$  (coefficient de Poisson positif), avec en

plus une rotation des mailles pour celles éloignées des axes de symétrie. Les évènements plastiques se caractérisent donc par les mêmes modes de déformation que la déformation moyenne élastique, ce qui conforte l'idée que ces évènements sont produits au moyen d'un blocage de la déformation par le frottement suivi d'une libération brusque qui rattrape le retard en provoquant ces tremblements. Toutefois, on remarque aussi que certaines zones du tricot se déforment à l'inverse de leur tendance moyenne. Par exemple, les lignes de glissement traversent les axes de symétrie, entraînant une rotation des mailles appartenant à ces axes, alors qu'en moyenne ces axes ne subissent aucune rotation. Plus surprenants encore, des évènements négatifs peuvent apparaître dans des zones où  $\omega$  est en moyenne positive, imposant donc une rotation aux mailles associées à cet évènement dans le sens opposé à sa moyenne. Ces constatations suggèrent que les évènements ne font pas seulement que rattraper un certain retard dans la déformation, mais possèdent une dynamique complexe pouvant mettre en jeu des effets de propagation ou d'interaction entre évènements.

Afin de donner une délimitation spatiale de ces évènements et en mesurer certaines propriétés, il faut pouvoir les identifier proprement en les délimitant spatialement. Pour cela il faut se donner un critère pour déterminer si une maille appartient à un évènement ou pas. Pour nous aider on peut regarder la distribution des différents modes de déformation de  $\vec{v}$  (fig. III.15.a). On retrouve bien que la vorticité et le déviateur puissent prendre des valeurs bien plus élevées que la divergence et le cisaillement, confirmant ainsi la prépondérance de ces deux modes de déformation. On remarque aussi que les distributions pour la vorticité et le déviateur possèdent deux régimes. Un premier de décroissance rapide entre environ  $-0.005$  et  $0.005$  et commun aux quatre modes, puis une décroissance plus lente, proche d'une exponentielle, avec la même pente pour les deux modes. On peut donc supposer que le premier régime aux faibles valeurs rend compte du bruit de mesure, alors que le second correspond aux tremblements du tricot. Le fait que la divergence et le cisaillement ne montrent qu'un seul régime est un indice supplémentaire pour dire que ces modes ne participent pas aux  v nements. On déduit de la présence de ces deux régimes un critère d'appartenance à un  v nement : toutes mailles dont la vorticité ou le déviateur est supérieur à  $0.005$  (fig. III.15.b). Un  v nement est alors défini par le groupement connexe de mailles de vorticité ou de déviateur d'amplitudes supérieures au seuil. Les  v nements négatifs ou positifs sont identifiés séparément, même s'ils sont connexes. Une fois l'identification effectuée, on peut mesurer certaines propriétés de ces  v nements. En particulier, l'amplitude d'un  v nement est une caractéristique cruciale à estimer. On présume que plus un  v nement est intense, plus il s'étendra sur un grand nombre de mailles et plus la déformation des mailles impliquées sera élevée. Une simple mesure consiste alors à sommer  $\omega$  ou  $\varepsilon_d$  sur toutes les mailles de l' v nement, pour fournir un nombre, respectivement  $S_\omega = \sum_{(j,i) \in \text{ v nement}} |\omega|$  et  $S_d = \sum_{(j,i) \in \text{ v nement}} |\varepsilon_d|$ , qui sera représentatif de l'amplitude de cet  v nement (fig. III.15.c). La détection des mailles participant aux  v nements et l'amplitude qui correspond est faite indépendamment avec la vorticité et le déviateur, ce qui donne deux estimations distinctes  $S_\omega$  et  $S_d$  de l'amplitude de chaque  v nement. D'autre part, on s'est aussi aperçu que même si ces deux estimations sont distinctes, elles semblent donner des valeurs tout à fait similaires. Le nombre d' v nements détecté n'est pas exactement le même avec la vorticité ou le déviateur car les petits  v nements se rapprochent de la limite du bruit. On peut par contre comparer

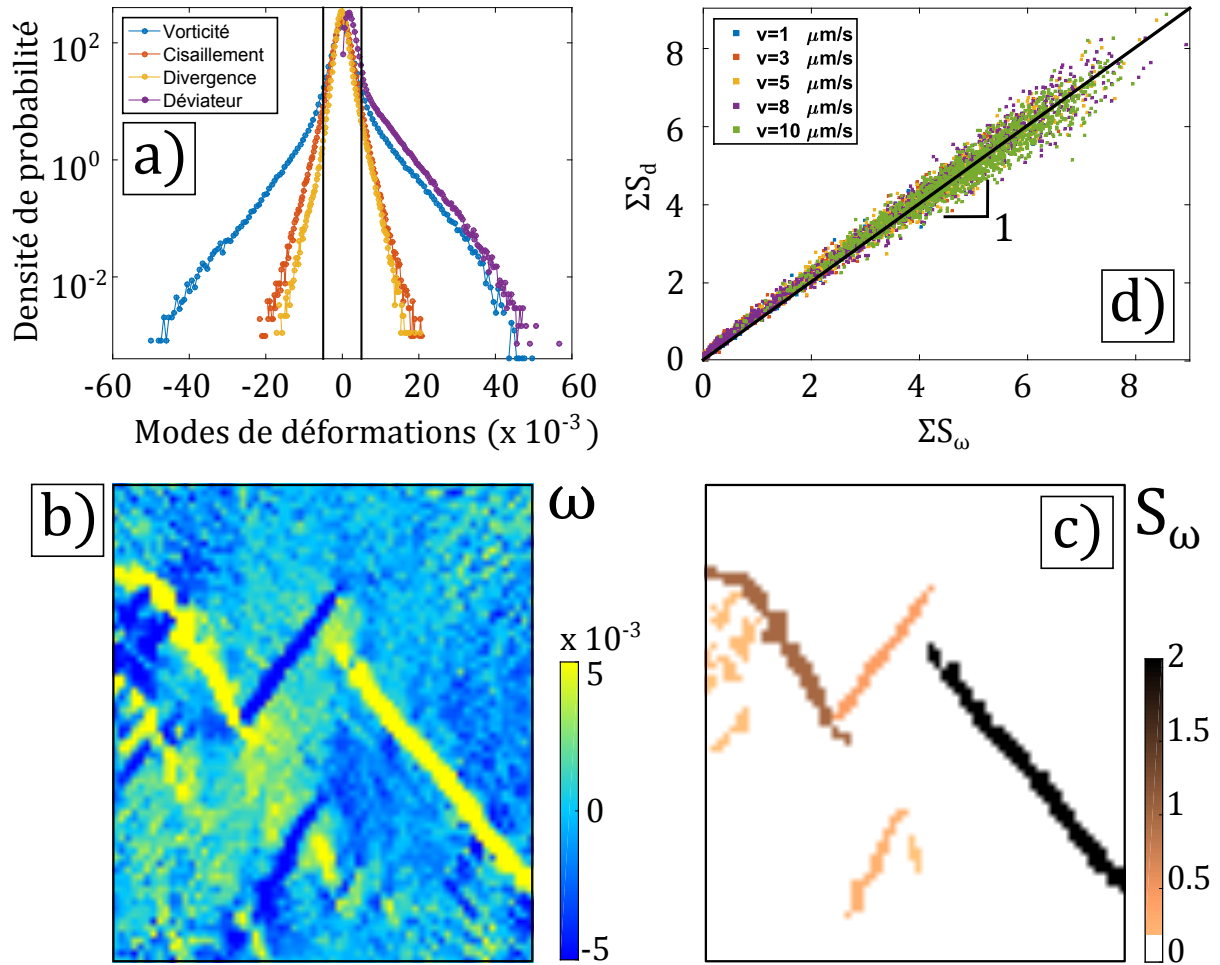


FIGURE III.15 – a) Distribution des quatre modes de déformation de  $\vec{v}$  pour l'expérience de référence à  $V = 5 \mu\text{m/s}$ . Les deux lignes verticales noires à  $-0.005$  et  $0.005$  marquent le passage entre le régime de bruit et le régime des événements pour les deux modes dominants. b) Vorticité du même champ de déplacement que pour la figure précédente, mais avec une l'échelle de couleur ayant pour maximum et minimum le seuil d'appartenance à un événement. Toutes les mailles en dessous de ce seuil sont considérées comme ne participant à aucun événement. c) Évènements détectés pour le même champ de déplacement, chacun est coloré par son amplitude  $S_\omega$ . d) Corrélation entre les sommes des amplitudes des événements d'une image estimée avec la vorticité  $\Sigma S_\omega$  et le déviateur  $\Sigma S_d$ .

la somme de  $S_\omega$  et  $S_d$  pour chaque image, que l'on note respectivement  $\Sigma S_\omega$  et  $\Sigma S_d$ . En comparant image par image ces valeurs, on découvre que les points s'alignent sur une droite de pente égale à 1 quelle que soit la vitesse de chargement dans l'expérience de référence (fig. III.15.d). Ce résultat montre que vorticité et déviateur sont quasiment égaux au sein d'un événement.

Puisque l'on a désormais un moyen de mesurer la taille des événements, on va s'intéresser à la distribution de ces tailles. Autant  $S_\omega$  que  $S_d$  montrent une distribution en loi

de puissance sur plus de deux décades d'amplitudes avec les mêmes pentes pour toutes les vitesses testées (fig. III.16.a-b). La pente, mesurée pour  $V = 5 \mu\text{m/s}$ , vaut  $-1.51 \pm 0.04$  pour  $S_\omega$  et  $-1.61 \pm 0.02$  pour  $S_d$ . Cette différence significative entre les deux façons de mesurer l'amplitude provient plus de la méthode de détection que d'une différence ayant une vraie signification physique. En effet, si l'amplitude d'un évènement est mesuré avec le déviateur mais sur les évènements détectés par la vorticité, on obtient une pente de  $-1.53 \pm 0.03$ , et la différence ne devient plus significative. La mesure d'amplitude des évènements est limitée aux grandes valeurs par notamment la taille finie du tricot, puisque l'on remarque que l'extension d'un évènement va forcément être limitée par les bords du tricot, ceux de très fortes amplitudes le traversant de part en part. Aux faibles amplitudes, la limitation vient du seuil de détection, qui est lui-même imposé par le bruit de mesure sur la position. Les pics de probabilité observés aux faibles amplitudes correspondent aux premiers multiples du seuil de détection. En outre, on teste la robustesse de cette loi de puissance avec le seuil de détection des évènements (fig. III.16.c-d). Pour un seuil supérieur à 0.005 utilisé jusqu'à maintenant, la distribution est inchangée, sauf aux faibles amplitudes puisque les plus petits évènements ne sont pas détectés et les pics correspondant aux premiers multiples du seuil sont de plus fortes amplitudes. Pour des seuils plus bas, la loi de puissance commence à se dégrader, avec un excès d'évènements aux faibles et fortes amplitudes. Aux faibles amplitudes, l'excès résulte du bruit de mesure qui commence à se faire passer pour des évènements, alors qu'aux fortes amplitudes, l'abaissement du seuil vient connecter des évènements qui étaient auparavant disjoints.

### c) Morphologie d'un évènement

Une mesure interne offre l'avantage, par rapport à une mesure globale externe, d'offrir des informations spatiales et pas seulement temporelles. On va donc s'intéresser à la morphologie de ces évènements au-delà de leur amplitude globale.

Pour extraire des propriétés moyennes sur cette morphologie, on calcule les corrélations spatiales des marqueurs d'évènements que sont la vorticité et le déviateur du champ de déplacement non-affine entre deux images. On se concentre sur la vorticité car elle permet de distinguer deux types d'évènements, les "positifs" avec  $\omega > 0$  et les "négatifs" avec  $\omega < 0$ . Les évènements se caractérisant par des valeurs de vorticité et déviateur quasi identiques, le résultat serait identique avec le déviateur. On définit la fonction de corrélation suivante :

$$C_\omega^\pm(\delta j, \delta i) = 1 + \frac{\langle \omega(j + \delta j, i + \delta i) - \omega(j, i) \rangle_\pm}{\langle \omega(j, i) \rangle_\pm} \quad (\text{III.8})$$

Avec  $\delta j$  et  $\delta i$  le nombre de mailles selon respectivement les rangs et colonnes, et la moyenne  $\langle \rangle_\pm$  se faisant sur toutes les mailles détectées comme appartenant à un évènement positif (+) ou négatif (-). La corrélation est hautement anisotrope et se concentre dans une direction particulière autour de  $-51^\circ$  pour les évènements positifs et  $+51^\circ$  pour les négatifs (fig. III.17.a-b). Ces directions sont calculées dans le réseau de mailles et ne correspondent pas aux directions dans l'espace réel car l'espacement moyen entre deux rangs et deux colonnes n'est pas identiques. La distance moyenne entre deux mailles d'un même rang est de  $c_m = 3.8 \text{ mm}$  alors qu'entre deux mailles d'une même colonne elle vaut  $w_m = 2.9 \text{ mm}$ . On en déduit alors que la direction moyenne des évènements est de  $\pm 43^\circ$  dans l'espace réel.

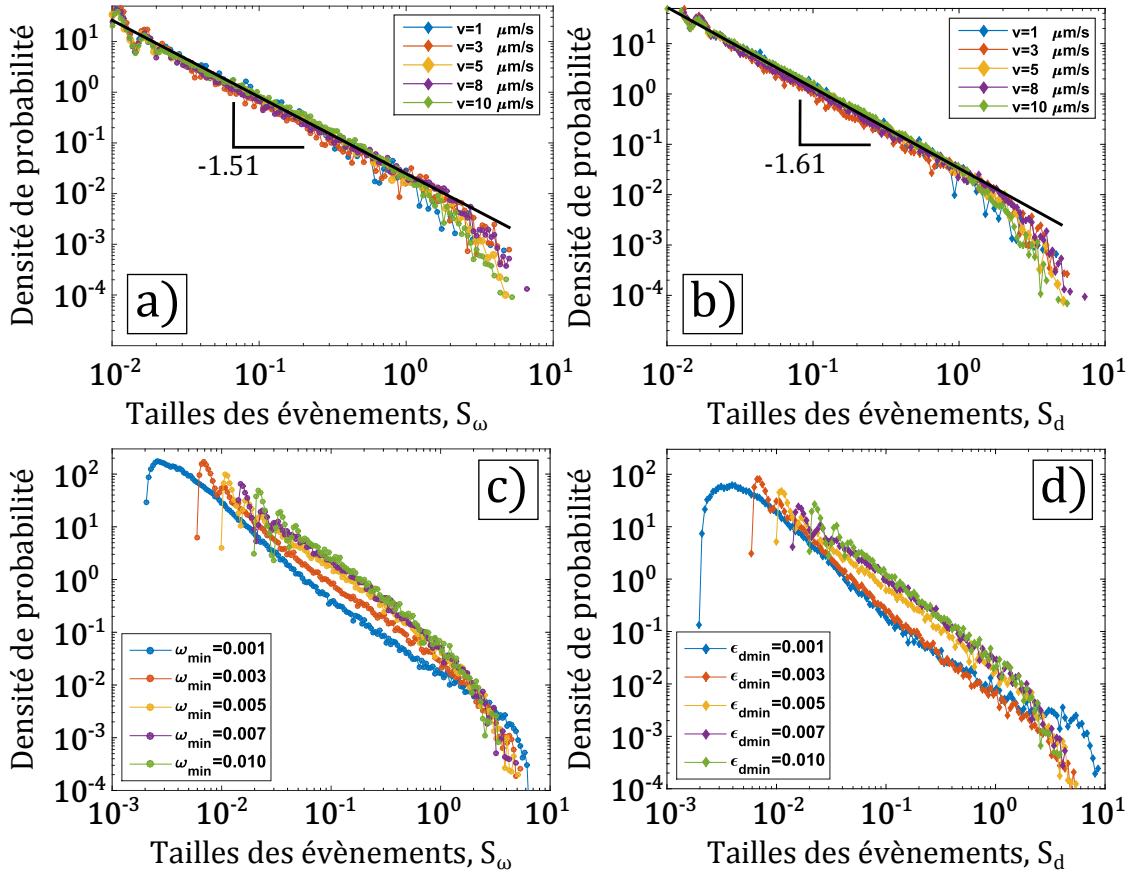


FIGURE III.16 – Densité de probabilité de l’amplitude des évènements mesurés avec la vorticité  $S_\omega$  a) et le déviateur  $S_d$  b) pour 5 vitesses de chargements différentes de l’expérience de référence. La distribution suit une loi de puissance sur environ 2 décades d’amplitude avec une pente de  $-1.51 \pm 0.04$  pour  $S_\omega$  et  $-1.61 \pm 0.02$  pour  $S_d$ . Évolution de ces distributions en fonction du seuil de détection qui définit l’appartenance ou non d’une maille à un évènement, pour la vorticité c) et le déviateur d).

Cette mesure permet de mettre en évidence que les évènements forment bien des lignes qui s’étendent en moyenne dans la même direction. De plus, l’absence de corrélations observables entre les évènements positifs et négatifs indique que les croisements entre deux lignes de glissements sont des circonstances rares.

La morphologie moyenne d’un évènement est aussi sondée par son champ de déplacement moyen. On définit le champ de déplacement moyen d’un évènement, positif ou négatif, par :

$$\vec{v}_\pm(\delta j, \delta i) = \langle \vec{v}(j + \delta j, i + \delta i) - \vec{v}(j, i) \rangle_\pm \quad (\text{III.9})$$

Ces champs de déplacements moyens ont l’aspect d’une interface entre deux zones qui glissent l’une sur l’autre le long d’une ligne (fig. III.17). Pour les évènements positifs par exemple, le quadrant inférieur droit montre un déplacement quasi homogène dans la direction  $-51^\circ$  alors que le quadrant supérieur droit se déplace aussi de façon quasi



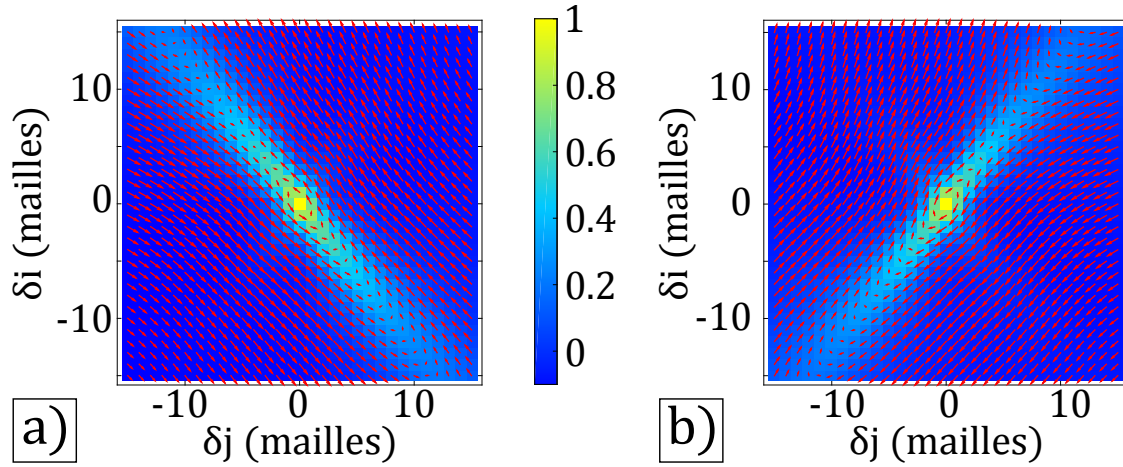


FIGURE III.17 – Corrélation de la vorticité des mailles appartenant à un évènement, superposé avec le déplacement moyen autour de ces mailles. a) Fonctions  $C_{\omega}^+$  et  $\vec{v}_+$  correspondant aux évènements positifs. b) Fonctions  $C_{\omega}^-$  et  $\vec{v}_-$  correspondant aux évènements négatifs.

homogène mais dans la direction opposée. L'interface entre ces deux déplacements opposés forme une ligne de glissement qui s'aligne parfaitement avec la direction de corrélation maximale de la vorticité.

À parti de ces résultats, on peut proposer une expression simplifiée du champ de déplacement caractérisant un évènement. On commence par opérer un changement de variables par rotation du repère pour que les axes du nouveau repère coïncident avec la direction des lignes de glissements. On définit  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$  le repère obtenu par rotation d'un angle  $\theta$  de  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Les relations entre les anciennes variables  $(x, y)$  et les nouvelles  $(X, Y)$  sont donc :

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \quad (\text{III.10})$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (\text{III.11})$$

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (\text{III.12})$$

$$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\text{III.13})$$

Les dérivées spatiales s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \cos \theta \frac{\partial}{\partial X} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial Y} \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \sin \theta \frac{\partial}{\partial X} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial Y} \quad (\text{III.15})$$

Le champ de déplacement est décomposé dans ce nouveau repère,  $\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y = v^X \vec{e}_X + v^Y \vec{e}_Y$ . On réécrit ensuite les différents modes de déformation en fonction des nouvelles variables. Pour simplifier l'interprétation des résultats, à la place de la définition standard du déviateur, on se limite à sa composante sans le taux de cisaillement,  $\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$  qui peut donc prendre des valeurs positives ou négatives.



$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\partial v^y}{\partial x} - \frac{\partial v^x}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v^Y}{\partial X} - \frac{\partial v^X}{\partial Y}\end{aligned}\quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_d &= \frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y} \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left( \frac{\partial v^X}{\partial X} - \frac{\partial v^Y}{\partial Y} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial v^X}{\partial Y} + \frac{\partial v^Y}{\partial X} \right)\end{aligned}\quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\partial v^y}{\partial x} + \frac{\partial v^x}{\partial y} \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left( \frac{\partial v^Y}{\partial X} - \frac{\partial v^X}{\partial Y} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial v^X}{\partial X} - \frac{\partial v^Y}{\partial Y} \right)\end{aligned}\quad (\text{III.18})$$

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{v}) &= \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v^X}{\partial X} + \frac{\partial v^Y}{\partial Y}\end{aligned}\quad (\text{III.19})$$

L'orientation des lignes de glissement est, dans l'espace réel, de  $-43^\circ$  pour les évènements positifs et  $43^\circ$  pour les négatifs. L'angle entre les deux évènements n'étant pas exactement de  $90^\circ$  exactement, une simple rotation ne permet pas d'aligner  $\vec{e}_X$  avec une orientation et  $\vec{e}_Y$  l'autre. Toutefois, ces deux angles sont très proches de  $\pm 45^\circ$  et prendre  $\theta = 45^\circ$  simplifie grandement l'expression des déformations. En première approximation, on va donc choisir  $\theta = 45^\circ$  et supposer que  $\vec{e}_X$  s'alignent donc le long des lignes de glissement négatives et  $\vec{e}_Y$  les positives. Les expressions des déformations en sont considérablement simplifiées :

$$\omega = \frac{\partial v^Y}{\partial X} - \frac{\partial v^X}{\partial Y}\quad (\text{III.20})$$

$$\varepsilon_d = -\frac{\partial v^Y}{\partial X} - \frac{\partial v^X}{\partial Y}\quad (\text{III.21})$$

$$\tau = \frac{\partial v^X}{\partial X} - \frac{\partial v^Y}{\partial Y}\quad (\text{III.22})$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v^X}{\partial X} + \frac{\partial v^Y}{\partial Y}\quad (\text{III.23})$$

En outre, le champ de déplacement moyen autour des évènements a une structure très caractéristique qui peut être résumée par :

$$\vec{v}_+ = v^Y(X) \vec{e}_Y\quad (\text{III.24})$$

$$\vec{v}_- = v^X(Y) \vec{e}_X\quad (\text{III.25})$$

En effet, autour d'un évènement positif, le déplacement est essentiellement dirigé le long de la ligne de glissement  $\vec{e}_Y$  et varie tout particulièrement orthogonalement à cette

ligne et donc avec  $X$ . Pour un négatif, le champ est suivant  $\vec{e}_X$  et varie avec  $Y$ . Cette description simplifiée de la morphologie d'un évènement, permet de retrouver les caractéristiques mesurées expérimentalement. Par exemple, pour un évènement positif, on retrouve bien que  $\tau = \text{div}(\vec{v}) = 0$  et  $\omega = -\varepsilon_d$ , avec  $\varepsilon_d < 0$  on a bien  $\omega > 0$ . Idem pour un évènement négatif,  $\tau = \text{div}(\vec{v}) = 0$  et  $\omega = \varepsilon_d$ , avec  $\varepsilon_d < 0$  on retrouve  $\omega < 0$ .

Après avoir considéré la morphologie moyenne des évènements, on approfondit la caractérisation en regardant les profils individuels. Pour cela, on mesure comment la déformation se répartit le long d'un évènement, c'est-à-dire selon les axes  $X$  et  $Y$ . On constate alors que  $\omega$  par exemple est loin d'être uniforme le long d'un évènement, mais présente un ou plusieurs maxima à partir desquels la déformation décroît de manière monotone (fig. III.18), et ce pour les évènements de toutes tailles. Cette observation suggère qu'une ligne de glissement suit un mécanisme de propagation à partir d'un centre de "nucléation" [121]. La position du maximum correspondrait à celle de la maille où le premier glissement a lieu, ce qui libérera alors les contraintes accumulées. Cette perturbation va alors à son tour modifier l'environnement des autres contacts de son entourage, provoquant de nouveaux glissements. Ce processus continue et cette "avalanche" se propage jusqu'à ce que les contraintes ne soient plus assez élevées pour provoquer un nouveau glissement ou qu'un bord soit atteint. On observe aussi très souvent des évènements avec de multiples maxima (fig. III.18.c-d). Cela peut s'interpréter par le cas où la propagation croise le chemin d'un contact qui avait aussi beaucoup de contraintes à libérer. Cette image de lignes avec plusieurs points de libération de contraintes rejoint les observations faites sur la dynamique de la force lors d'un évènement qui pouvait aussi présenter plusieurs maxima.

Pour donner plus de force à cette hypothèse de propagation, on va s'intéresser à la dynamique spatiale des évènements.

#### d) Dynamique d'un évènement

Observer la dynamique d'un évènement requiert une fréquence d'acquisition d'image bien plus élevée que celle de l'expérience de référence, qui avait plutôt été conçue dans l'idée d'accumuler des statistiques. L'expérience est alors répétée mais avec cette fois-ci une caméra rapide (Photron APX RS 3000) qui a pour résolution maximale  $1000 \times 1000$  pixels. Pour garder une précision suffisante pour repérer correctement les évènements, on ne peut donc plus filmer l'intégralité du tricot mais seulement une zone plus réduite (environ 1/4 de la surface). Ensuite, on ne peut enregistrer en continu les images pendant la dizaine d'heures que dure l'expérience de référence, la durée maximale n'est que d'une dizaine de secondes pour les fréquences qui nous intéressent. Les conditions nécessaires pour repérer un évènement qui permette une observation claire de sa dynamique, c'est-à-dire qui émerge au centre de la prise de vue, qui ne vienne pas être coupé par une autre ligne de glissement et qui soit d'amplitude suffisamment élevée, sont difficiles à réunir toutes en même temps. Il est donc très fastidieux de compter sur la chance pour que cet évènement surgisse pendant que la caméra est en train de filmer. C'est pourquoi, pour des expériences préliminaires, on a décidé d'augmenter drastiquement la vitesse de traction de façon à ce qu'un chargement puisse être capturé par la caméra dans son intégralité. La vitesse est donc montée à 0.75 mm/s pour un chargement entre  $L_w = 220$  mm et 235 mm avec une fréquence d'acquisition de 500 Hz. En pouvant observer tout un cycle

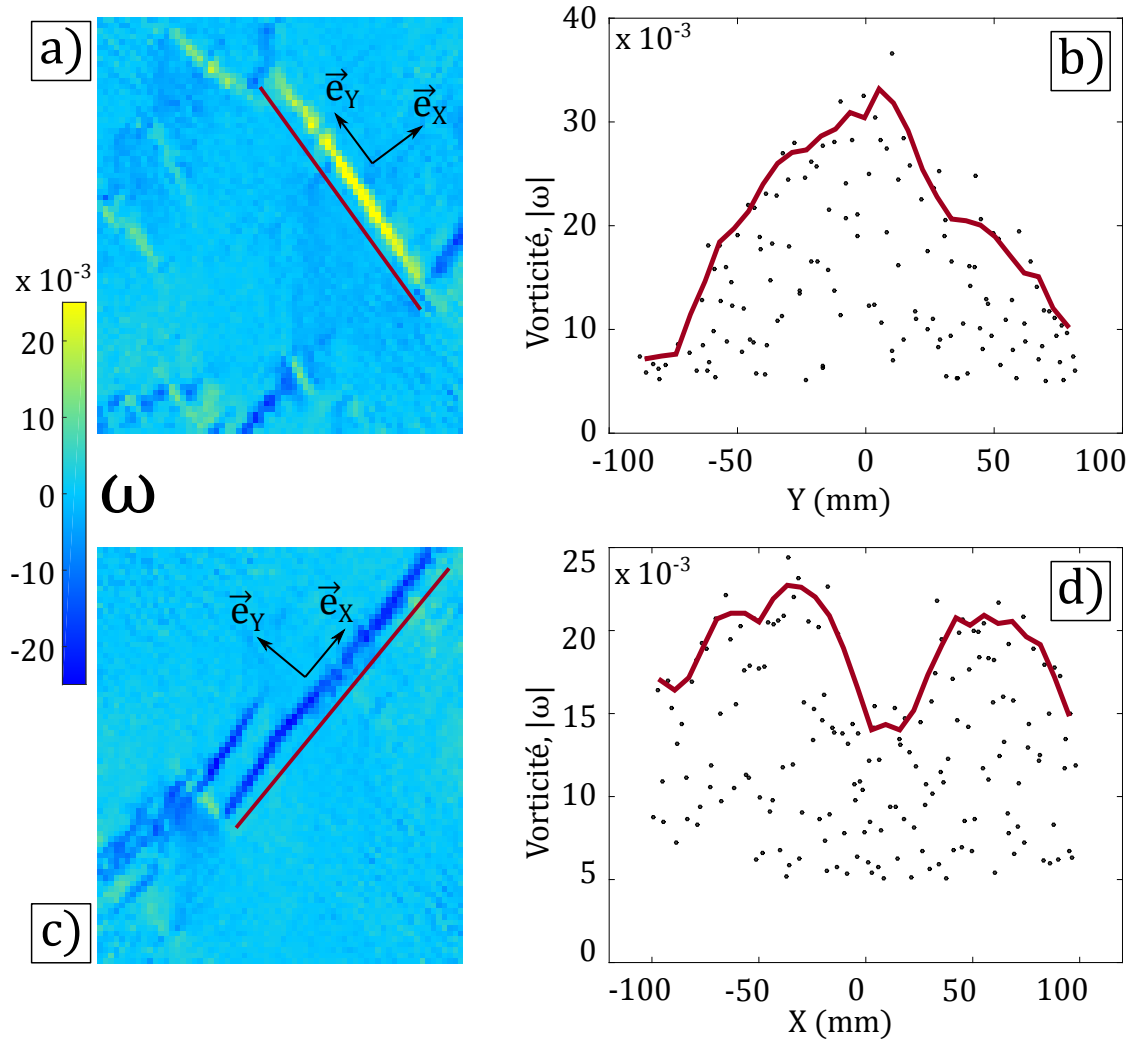


FIGURE III.18 – Profils de deux lignes de glissements de l'expérience de référence correspondant à des événements de fortes intensités. a) Champ de vorticité représenté dans le réseau de mailles (un pixel correspond à une maille) contenant un événement positif de large amplitude ( $S_\omega = 2.0$ ). b) Profil  $|\omega(Y)|$  de l'évènement positif indiqué par la droite et le repère  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$ . Chaque point noir correspond à la valeur de  $|\omega|$  d'une maille détectée comme appartenant à cet évènement, puis projetée sur l'axe  $\vec{e}_Y$ . La ligne pourpre est une moyenne glissante des maxima locaux et permet de faire ressortir la morphologie de l'évènement avec son maximum global et la décroissance monotone de la déformation. c) Champ de vorticité présentant cette fois-ci un événement négatif de large amplitude ( $S_\omega = -2.2$ ). d) Profil  $|\omega(X)|$  de cet évènement, montrant au moins 2 maxima. La décroissance d' $\omega$  se fait brusquement car pour les  $X > 0$  la propagation est arrêté par le bord supérieur et pour les  $X < 0$ , la ligne est coupée par un événement positif.

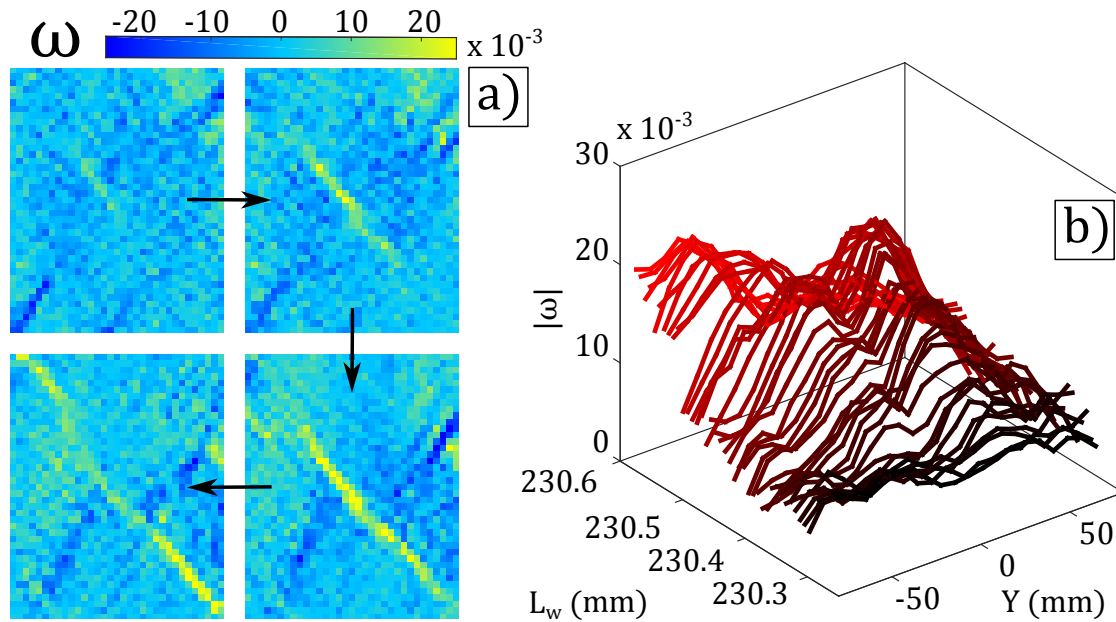


FIGURE III.19 – a) Champ de vorticité sur une portion de tricot mesuré à partir d’images prises à la caméra rapide. La vorticité est, comme dans l’expérience de référence, mesurée à partir du champ de déplacement non-affine entre deux photos séparées par une élongation de 0.2 mm. La caméra rapide permet toutefois d’avoir une résolution en élongation bien supérieure à 0.2 mm. Les quatre images correspondent respectivement à  $L_w = [230.32, 230.38, 230.50, 230.59]$  mm. b)  volution du profil en intensité de la vorticité, calculé de la même manière que pour (fig. III.18) en fonction de l’élongation. Chaque profil est séparé de  $7.5 \mu\text{m}$  ou de manière équivalente,  $10 \mu\text{s}$

de chargement, la probabilité qu’un  v nement combine toutes les conditions requises est bien plus fortes.

L’analyse de cette expérience a en effet permis de détecter l’apparition d’une ligne de glissement qui semble confirmer l’hypothèse d’un centre de nucléation. Dans la série d’images que nous fournissons, on observe un glissement, repéré par la vorticité du champ de déplacement, qui s’initie sur quelques mailles puis qui augmente en intensité et en taille avec l’élongation globale (fig. III.19.a). Lors de sa propagation, l’ v nement semble déclencher d’autres points de nucléation, produisant un profil avec plusieurs maxima qui apparaissent puis disparaissent au fur et à mesure de l’élongation. Ces expériences préliminaires montrent que la dynamique des  v nements est très riche et constitue une intéressante direction de développement de ce travail de thèse.

### III.2.3 Confronter mesure interne et externe

Les tremblements de tricots ont été caractérisés par deux mesures, externe avec la force et interne avec les champs de déplacement, qui sont indépendantes l'une de l'autre. Sauf preuves du contraire les chutes de forces et les lignes de glissements sont donc aussi a priori indépendantes les unes des autres. Dans les événements de "stick-slip", glissement et chute de force sont directement corrélés, il est donc raisonnable de supposer qu'il en est de même dans le tricot. Toutefois, les mesures de l'expérience de référence ne permettent pas de comparer directement une ligne de glissement à une chute car la résolution temporelle de la mesure interne est bien moindre que celle de la mesure externe. Avec la caméra rapide, la vitesse de chargement est trop élevée pour que chaque événement puisse être isolé, le signal de force présente de fortes fluctuations mais sans chutes brusques et sur l'image, plusieurs lignes de glissement semblent se propager simultanément. Avec notre expérience de référence, la corrélation entre mesure externe et interne ne peut se faire que de manière statistique et non individuellement. Si la taille des événements a été mesurée correctement et que la relation force/déformation reste linéaire au sein d'un événement, la distribution de probabilité de leurs amplitudes ne devrait pas dépendre de la mesure. C'est en effet ce qui est mesuré, les distributions de  $\Delta f$ ,  $S_\omega$  et  $S_d$  suivent toutes les trois des lois de puissance avec un exposant très proches (fig. III.20.a). On peut aller un petit plus loin dans la corrélation entre les événements en se plaçant à l'échelle de l'intervalle entre chaque photographie.

Les champs de déplacement non-affine sont mesurés entre chaque intervalle de  $\Delta L_w =$

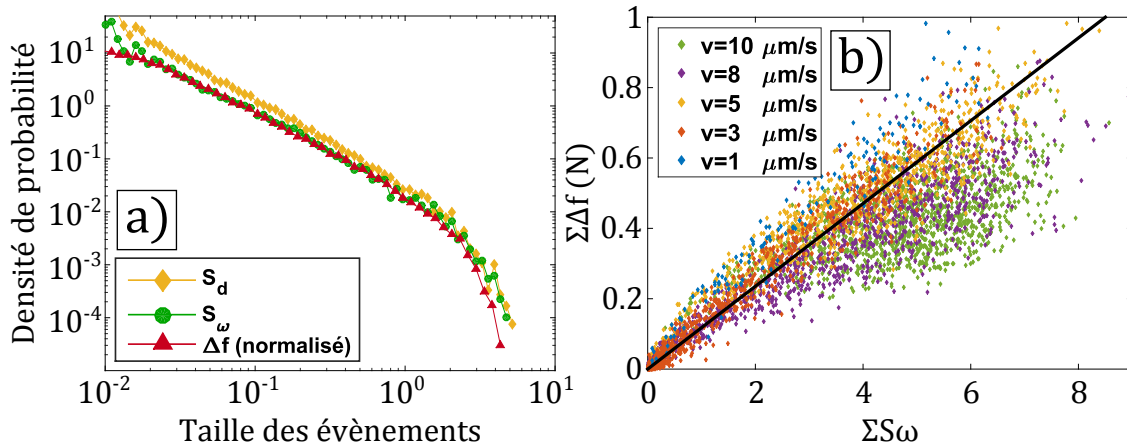


FIGURE III.20 – a) Distributions de la taille des événements, estimées avec une mesure interne ( $S_d$  et  $S_\omega$ ) et externe ( $\Delta f$ ) dans l'expérience de référence.  $\Delta f$  et  $S_\omega, S_d$  n'ont pas les mêmes unités,  $\Delta f$  est donc normalisé par un coefficient constant tel que  $P(\Delta f = 0.1) = 1$  pour mieux se comparer aux deux autres distributions. Cette renormalisation ne modifie pas les propriétés de la loi de puissance. b) Comparaison entre la somme des chutes de forces ( $\Sigma \Delta f$ ) et de l'intensité des lignes de glissement ( $\Sigma S_\omega$ ) pour chaque intervalle  $\Delta L_w$  de l'expérience de référence et plusieurs vitesses de chargement. Chaque point se rapporte à un intervalle. La droite noire correspond à la régression linéaire passant par l'origine de la fonction  $\Sigma \Delta f(\Sigma S_\omega)$  pour  $V = 5 \mu\text{m/s}$ , la pente est de  $E_p = 0.12 \text{ N}$ .

0.2 mm, l'intensité totale des évènements sur cet intervalle peut être évaluée à partir du signal de force et du champ de déplacement. Pour cela il suffit de sommer tous les évènements mesurés sur cet intervalle, que l'on note  $\Sigma\Delta f$  pour le signal de force, et  $\Sigma S_\omega$  et  $\Sigma S_d$  pour respectivement la vorticité et le déviateur des  v nements. On a donc une valeur de  $\Sigma\Delta f$ ,  $\Sigma S_\omega$  et  $\Sigma S_d$  pour chaque intervalle, que l'on peut comparer une à une. Les valeurs de  $\Sigma S_\omega$  et  $\Sigma S_d$  étant quasiment identiques (fig. III.15.d), il est suffisant de ne représenter que  $\Sigma\Delta f$  en fonction de  $\Sigma S_\omega$  par exemple (fig. III.20.b). Pour  $V$  entre 1 et  $10 \mu\text{m/s}$ ,  $\Sigma\Delta f$  est bien une fonction croissante de  $\Sigma S_\omega$ , ce qui signifie qu'en plus d'avoir une distribution très similaire, les deux différentes estimations d'amplitudes des  v nements sont fortement corrélés. Les fortes chutes de force correspondent en moyenne aussi à des lignes de glissement très étendues et intenses. La vitesse de chargement semble ici avoir une certaine influence car la corrélation passe de quasiment linéaire aux plus faibles vitesses ( $V \leq 5 \mu\text{m/s}$ )   une forme plus infléchie pour les vitesses plus élevées. La pente de la corrélation  $E_p$  permet de relier déformation et contrainte au sein d'un des  v nements. Ce paramètre ne semble pas être un paramètre intrinsèque au matériau car sa valeur décroît avec la vitesse de chargement. Cette tendance peut illustrer soit que l'intensité des chutes de force est sous-estimée quand la vitesse de chargement augmente, ou encore que la relation contrainte/déformation des  v nements sort d'un régime quasi linéaire.

### III.3 Comparaison avec d'autres tremblements

Après avoir extrait un certain nombre de propriétés de nos tremblements de tricot, on peut commencer à dresser certains parallèles avec d'autres systèmes bien plus étudiés qui présentent aussi cette dynamique intermittente caractéristique.

#### III.3.1 Avalanches et crépitements

Lorsqu'un système, soumis à un changement progressif de ses conditions extérieures, répond par des  v nements brusques sans tailles caractéristique, on dit que ce système présente un "crépitement" (*crakling noise*) [122] qui suit une dynamique d'avalanche. Un très grand nombre de systèmes peuvent, dans certaines conditions, montrer ce type de réponse caractéristique. Les différents changements de conditions extérieures et la réponse associée possibles sont formidablement variés autant dans les propriétés physiques impliquées que dans la taille des systèmes. Parmi les exemples particulièrement étudiés on peut citer la magnétisation de matériaux ferro-magnétiques (bruit de Barkhausen) [123, 124, 125], la fracture sèche [126, 127, 128] ou hydraulique [129] de milieux inhomogènes, la dynamique de vortex magnétiques dans les supraconducteurs [130, 131], les défauts de transmission de puissance [132] ou encore la propagation d'un front dans un milieu poreux [133, 134]. Le but ici n'est pas de faire une revue complète des systèmes exhibant ce genre de réponse ni de rentrer dans le débat de savoir si notre système appartient à une classe d'universalité. On va se limiter à s'inspirer des modèles et mesures faites dans d'autres systèmes pour mieux caractériser et interpréter le nôtre. Les résultats présentés par la suite constituent plus des directions possibles d'approfondissement du sujet que des analyses achevées.

### III.3.2 Solides amorphes mous et modèles élasto-plastiques

La réponse mécanique de matériaux amorphes "mous" à une sollicitation mécanique peut prendre la forme d'une déformation élastique interrompue par des évènements dit plastiques, ou irréversibles. C'est l'analogie avec ces systèmes qui a été la plus poussée car c'est en assistant à des cours et présentations sur ce sujet que j'ai commencé à fortement me pencher sur les tremblements du tricot.

#### a) Une phénoménologie proche

On peut mettre dans la catégorie des solides amorphes les systèmes constitués de sous-ensembles discrets agencés de manière aléatoire sans périodicité (ou amorphe). Les exemples physiques classiques sont les empilements granulaires [135, 136, 137, 138], les verres [139, 140, 141] ou encore les émulsions [142]. Dans les bonnes conditions de densité et de taux de déformation, ces matériaux montrent des phénomènes d'avalanches dans leurs réponses mécaniques. La réponse globale du matériau possède en générale une composante élastique qui va être perturbée par des réarrangements structuraux. Dans le cas des matériaux granulaires par exemple, ces réarrangements se traduisent par un changement local dans le réseau de connectivité des grains. Ces réarrangements locaux sont irréversibles et constituent donc une déformation plastique du matériau [143, 144, 145, 146, 147, 148]. De plus, ces évènements prenant place dans un milieu élastique, l'excès de déformation accumulé est alors redistribué dans le milieu, ce qui peut à son tour déclencher d'autres réarrangements. En conséquence, la composante plastique de la déformation prend la forme d'évènements qui vont suivre une statistique d'avalanches sans tailles caractéristiques [149, 150, 151, 152, 153]. Pour décrire la mécanique de ces matériaux, des modèles appelés élasto-plastique ont été développés. Les ingrédients de base de ces modèles sont :

- Une réponse mécanique élastique globale du système
- L'existence d'une déformation/contrainte critique locale au-delà de laquelle un réarrangement va être déclenché.
- Un critère de répartition des contraintes/déformations après un réarrangement
- Une composante aléatoire qui rend compte de la structure amorphe du milieu. Cela peut être traduit par un seuil critique ou un taux de redistribution local attribué aléatoirement selon une distribution donnée.

Ces ingrédients peuvent être implémentés numériquement sur un réseau dont chaque cellule élémentaire va représenter une portion du matériau [154]. La taille caractéristique de ces cellules est choisie plus grande que celle des éléments discrets pour permettre une homogénéisation des propriétés locales. Il existe aussi des modèles analytiques continus qui décrivent la dynamique de réponse par une équation du type [155] :

$$\frac{\partial \varepsilon(\vec{r}, t)}{\partial t} = \dot{\varepsilon}_{ext} - |G(\vec{0})| n(\vec{r}, t) \frac{\varepsilon(\vec{r}, t)}{\tau} + \int_{\vec{r}' \neq \vec{r}} d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') n(\vec{r}', t) \frac{\varepsilon(\vec{r}', t)}{\tau} \quad (\text{III.26})$$

Cette équation décrit la dynamique d'un mode de déformation  $\varepsilon$  du matériau, qui est une fonction de la position  $\vec{r}$  dans le solide et du temps  $t$ .  $\dot{\varepsilon}_{ext}$  est le taux de déformation imposé par l'extérieur et est en général constant et homogène dans tout le solide. Les termes restants décrivent la redistribution de la déformation par les évènements plastiques. Le premier terme, toujours négatif, traduit la relaxation de la déformation à l'endroit



considéré s'il subit un évènement plastique, le terme  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation [156]. Le second retranscrit la répercussion des évènements plastique ayant lieu autre part dans le matériau. La fonction  $n(\vec{r}, t)$  décrit l'activité plastique du matériau, avec  $n(\vec{r}, t) = 1$  si la portion de matériau en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  est en train de subir un évènement plastique, lorsque  $\varepsilon$  dépasse une certaine valeur critique  $\varepsilon_c$ , et  $n = 0$  sinon. La fonction  $G$  est la fonction de redistribution de la déformation d'un évènement plastique, en  $\vec{r} = \vec{0}$  elle quantifie de combien la déformation diminue à chaque évènement. C'est généralement une fonction qui décroît avec la distance (plus un évènement est loin moins il a d'impact), qui peut être isotrope ou anisotrope. En cas d'anisotropie, les avalanches vont se propager préférentiellement le long des maxima de cette fonction. Si le taux d'évènements plastique est suffisamment élevé, le terme intégrant les répercussions d'évènements autre part dans le matériau peut être approché par une variable aléatoire, l'équation prend alors la forme d'une équation de Langevin [157].

Le parallèle entre notre tricot et ce genre de matériaux et modèles peut être fait car on y retrouve la même phénoménologie :

- Le tricot possède une réponse moyenne élastique, étudiée dans le chapitre précédent.
- La friction et le phénomène de "stick-slip" associé apporte une contrainte ou déformation critique au-delà de laquelle le système répond de manière fortement non-linéaire.
- Les avalanches semblent s'initier à partir d'un centre de nucléation puis se propager dans des directions bien déterminées. Cela peut être le signe d'une répartition anisotrope des contraintes après un évènement.
- Les mailles du tricot sont périodiquement agencées et ne peuvent pas subir de réarrangements topologiques, on ne peut donc pas parler d'un matériau amorphe. Toutefois, le frottement apporte une indétermination dans la relation force/déformation qui dépend fortement de l'historique de la déformation. Cette indétermination peut alors être vue comme ajoutant une composante aléatoire dans le système, car à chaque cycle, tous les contacts acquièrent un état initial différent.

On peut par conséquent chercher à calculer l'équivalent de la fonction  $G$  pour notre système et comparer la statistique de nos avalanches avec les prédictions de certains modèles.

## b) Propagation des évènements

La fonction  $G$  de redistribution des contraintes/déformation après un évènement détermine leur morphologie. La redistribution se faisant par l'intermédiaire de l'élasticité du milieu, on peut mettre à profit les équations d'élasticité introduites dans le second chapitre pour calculer cette fonction et comparer le résultat à la morphologie des évènements mesurée expérimentalement.

Les évènements plastiques dans le tricot se traduisent par des lignes de glissements qui introduisent sur tout leur long une déformation caractéristique du réseau de mailles. Pour calculer la fonction de redistribution  $G$ , il faut modéliser un centre de nucléation, c'est à dire une zone qui se déforme soudainement de manière irréversible, et calculer de quelle manière son entourage se déforme en réponse. Les équations différentielles du champ de déplacement étudiées au chapitre précédent et qui résultent d'une minimisation de l'énergie sous contraintes, sont valables pour notre étude tant que l'on reste à faibles

déformations comme c'est le cas pour les évènements plastiques ( $\omega, \varepsilon_d \ll 1$ ). Le déplacement induit autour du centre de nucléation  $\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y$  doit alors être solution des équations suivantes :

$$0 = \frac{\partial^2 v^x}{\partial x^2} + \nu \chi \frac{\partial^2 v^x}{\partial y^2} \quad (\text{III.27})$$

$$0 = \frac{\partial^2 v^y}{\partial y^2} + \frac{\nu}{\chi} \frac{\partial^2 v^y}{\partial x^2} \quad (\text{III.28})$$

Avec, pour rappel,  $\nu = \delta \frac{c^*}{w^*}$  le coefficient de poisson effectif du tricot faisant intervenir la taille latérale  $c^*$  et longitudinal  $w^*$  des mailles lorsque le tricot est dans son état de minimum d'énergie et le coefficient  $\delta$  de répartition du fil dans une maille. Le coefficient  $\chi = \frac{\tilde{\alpha}-1}{2}$  avec  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha c^{*2}}{Y}$  est directement lié à l'état de contrainte initial du tricot qui est imposé par  $\tilde{Y}$ , le module de traction effectif, et  $\alpha$ , le multiplicateur de Lagrange associé à l'inextensibilité du fil.

Pour modéliser la déformation induite par le glissement d'un contact, on considère une zone de taille  $r_n$  du tricot, de la taille typique d'un centre de nucléation (environ les dimensions d'une maille), et on impose dans cette zone la déformation caractéristique d'un évènement plastique. Cela revient à imposer une vorticité et un déviateur de  $\vec{v}$  non nul dans cette zone, tout en s'assurant que le cisaillement et la divergence restent nuls. De plus, sans terme de cisaillement, le déviateur prend l'expression suivante  $\varepsilon_d = |\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}|$ , or le signe de cette quantité, négative sur nos lignes de glissement, est importante pour décrire nos évènements. Dans la suite, le terme déviateur va faire référence à la quantité  $\frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$  qui peut donc être positive ou négative. La zone de nucléation va alors être sujette à une vorticité  $\omega_0$  qui peut être négative ou positive, et à un déviateur  $\varepsilon_{d0}$  négatif. La déformation du centre de nucléation va se traduire par des conditions aux bords sur  $\vec{v}$  de long de la bordure de cette zone et qui prennent la forme suivante :

$$v^x(x = \pm r_n, y = 0) = \pm \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{III.29})$$

$$v^x(x = 0, y = \pm r_n) = \mp \omega_0 r_n \quad (\text{III.30})$$

$$v^y(x = \pm r_n, y = 0) = \pm \omega_0 r_n \quad (\text{III.31})$$

$$v^y(x = 0, y = \pm r_n) = \mp \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{III.32})$$

Le reste du tricot est supposé initialement homogène et dans son état de référence,  $\vec{c} = c^* \vec{e}_x$  et  $\vec{w} = w^* \vec{e}_y$ . De plus, l'évènement doit rester local, il faut donc que l'amplitude du déplacement tende vers 0 quand on s'éloigne de la zone de nucléation. Les équations sont donc maintenant complètes, et on donne une solution analytique :

$$v^x(x, y) = r_n^2 \frac{x \varepsilon_{d0} \nu \chi - y \omega_0}{x^2 \nu \chi + y^2} \quad (\text{III.33})$$

$$v^y(x, y) = r_n^2 \frac{x \omega_0 \frac{\nu}{\chi} - y \varepsilon_{d0}}{x^2 \frac{\nu}{\chi} + y^2} \quad (\text{III.34})$$

Le détail du calcul pour obtenir ces solutions est donné dans l'annexe D. Avec cette solution, il faut maintenant déterminer le multiplicateur de Lagrange  $\alpha$  qui permet de

vérifier la condition d'inextensibilité du fil et qui s'exprime sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III.35})$$

Toutefois, cette condition est vérifiée quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Par essence, une ligne de glissement ne modifie donc pas la longueur de fil et aura la même forme, peu importe l'état de contrainte du tricot fixé par  $\alpha$ .

La fonction  $G$  est alors définie par le champ de déformations ou contraintes engendré par ce champ de déplacement  $\vec{v}$ . En particulier, nos évènements étant caractérisés par la vorticité et le déviateur du champ de déplacement, on définit la fonction de répartition en vorticité  $G_\omega = \frac{\partial v^y}{\partial x} - \frac{\partial v^x}{\partial y}$  et en déviateur  $G_d = \frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y}$ . Dans le cas général, ces fonctions ont des expressions analytiques compliquées mais qui se simplifient considérablement pour certaines valeurs de nos paramètres. Les deux paramètres qui complexifient les expressions sont  $\chi$  et  $\nu$  en venant ajouter une asymétrie entre les directions  $x$  et  $y$ . Si on les prend égaux à 1 tous les deux, cette asymétrie disparaît.  $\chi = 1$  (ou  $\tilde{\alpha} = 2$ ) revient à se placer dans un état de contrainte particulier, alors que  $\nu = 1$  correspond à une géométrie particulière pour laquelle le coefficient de répartition du fil est égal au rapport d'aspect de la maille. Dans ce cas-là, les expressions de  $G_\omega$  et  $G_d$  deviennent simplement :

$$G_\omega(x, y) = r_n^2 \varepsilon_{d0} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{III.36})$$

$$G_d(x, y) = r_n^2 \omega_0 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{III.37})$$

En coordonnées cylindrique  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , l'expression devient encore plus aisé à interpréter :

$$G_\omega(r, \theta) = \varepsilon_{d0} \frac{r_n^2}{2r^2} \sin(2\theta) \quad (\text{III.38})$$

$$G_d(r, \theta) = \omega_0 \frac{r_n^2}{2r^2} \sin(2\theta) \quad (\text{III.39})$$

Ces solutions sont valables hors du centre de nucléation, c'est à dire pour  $r \geq r_n$ . La première propriété que l'on peut remarquer est l'anisotropie de la réponse, avec la dépendance en  $\sin(2\theta)$  des deux fonctions.  $G_\omega$  et  $G_d$  possèdent donc deux directions, dirigée selon  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ , pour lesquels la valeur absolue de la redistribution est maximale (fig. III.21). Ces directions sont très proches de la direction de propagation des lignes de glissements mesurées expérimentalement à  $\pm 43^\circ$ . De plus, on remarque que  $G_\omega$  est proportionnel au déviateur du centre de nucléation, alors que  $G_d$  est proportionnel à sa vorticité. Ce résultat montre que vorticité et déviateur sont intimement liés lors de la propagation d'un évènement, comme mesurés expérimentalement. Enfin, la décroissance en  $\frac{1}{r^2}$  montre que la redistribution est d'assez courte portée, suggérant une propagation du glissement de proche en proche.

$G_\omega$  garde toujours la même forme pour un évènement positif ( $\omega_0 > 0$  et  $\varepsilon_{d0} < 0$ ) ou négatif ( $\omega_0 < 0$  et  $\varepsilon_{d0} < 0$ ) avec son maximum positif selon  $-45^\circ$  et négatif selon  $+45^\circ$ . Cela suggère que quel que soit le signe de l'évènement la redistribution de vorticité  $G_\omega$

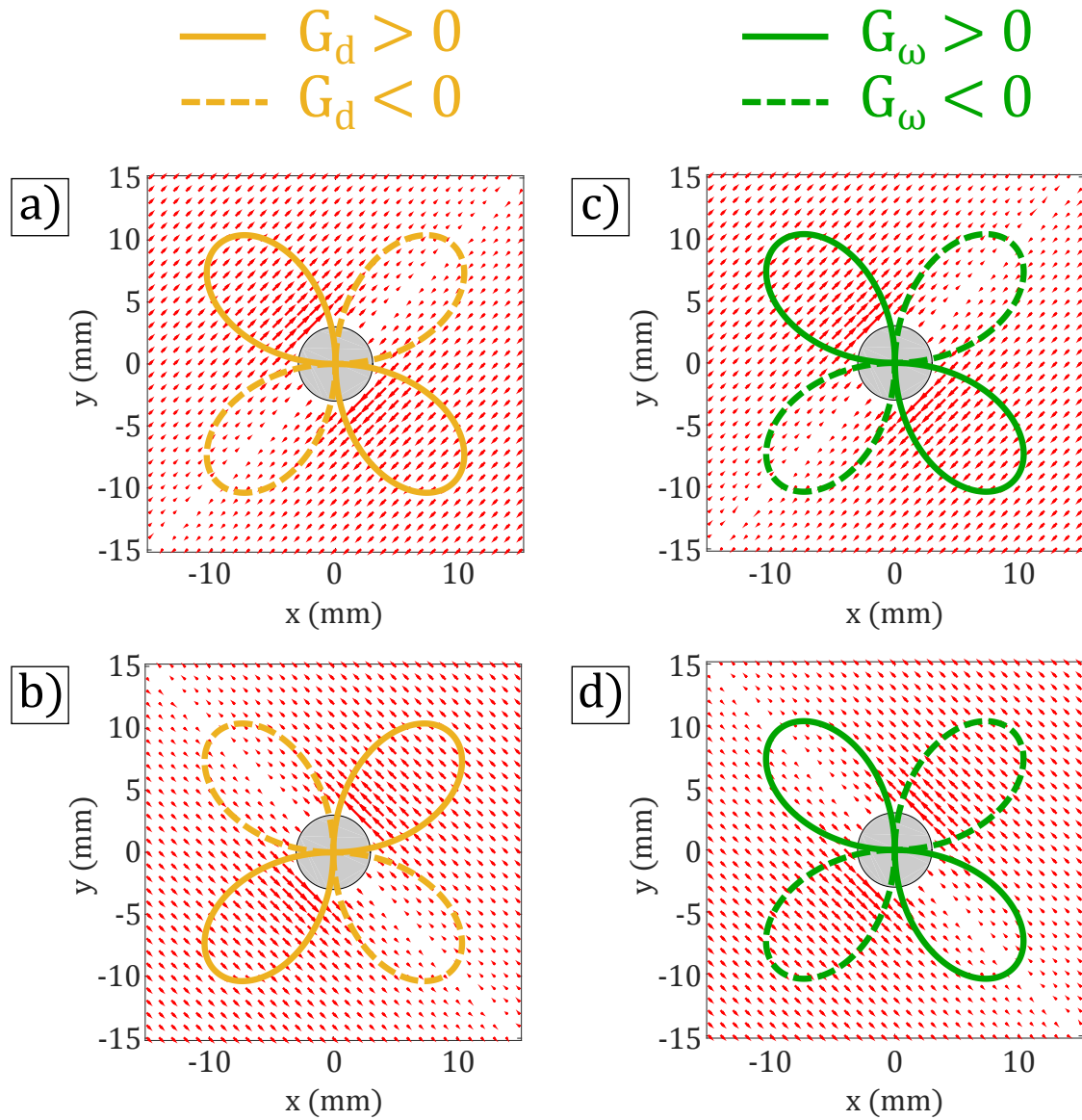


FIGURE III.21 – Réponse élastique du tricot à un centre de nucléation subissant un évènement plastique. Le centre de nucléation est représenté par la zone grisée de rayon  $r_n = 3$  mm (taille typique de la largeur d'une ligne de glissement) et les flèches rouges indiquent le champ de déplacement induit dans le tricot. Les courbes tracées par-dessus correspondent à l'amplitude angulaire de  $G_d$  ( a) et b)) et  $G_\omega$  ( c) et d)) à  $r$  fixé. Les figures a) et c) représentent un évènement négatif ( $\varepsilon_{d0} = -0.01$  et  $\omega_0 = -0.01$ ), et les figures b) et d) un évènement positif ( $\varepsilon_{d0} = -0.01$  et  $\omega_0 = +0.01$ ). Il s'agit ici des résultats pour le cas symétrique où  $\nu = \chi = 1$ . Le modèle élastique donnant une représentation continue du tricot, une flèche ici ne représente pas le déplacement d'une maille, mais celui d'une portion homogénéisée du tricot.

va favoriser la propagation dans les deux directions. Quant à  $G_d$ , son maximum négatif est dans la direction  $+45^\circ$  pour les événements négatifs et  $-45^\circ$  pour les positifs. Or la redistribution du déviateur  $G_d$  ne favorise la propagation que par son maximum négatif et la défavorise dans la direction de son maximum positif car un événement est toujours caractérisé par  $\varepsilon_d < 0$ .  $G_d$  va donc promouvoir la propagation des événements négatifs seulement dans leur direction et idem pour les positifs, ce qui réduit fortement la probabilité qu'un événement positif donne naissance à un événement négatif ou inversement. C'est bien ce qui est observé expérimentalement où les lignes de glissement sont très allongées et les points possibles de bifurcation plus rares, mais pas inexistantes. Dans les matériaux amorphes plus classiques, cette fonction de redistribution prend le plus souvent la forme d'une fonction de type Eshelby [158, 159], qui initialement traduit la déformation d'un milieu dans le lequel une inclusion solide circulaire change soudainement de forme pour devenir elliptique. Cette fonction est quadripolaire, elle possède quatre maxima suivant des directions autour de  $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$  et quatre minima selon les directions  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Cette fonction a été mesurée numériquement avec des dynamiques moléculaire mais aussi expérimentalement dans les mousses [160] ou les granulaires [161, 162].

En considérant maintenant la solution complète, on peut regarder comment les solutions dévient du cas symétrique. Si on prend l'expérience du chapitre précédent, le paramètre  $\nu$  est d'environ 0.5 alors que  $\chi$  varie entre 0.2 et 0.8. Faire varier ces paramètres autour de ces valeurs a un effet très similaire sur  $G_d$  que sur  $G_\omega$  (fig. III.22). En faisant varier  $\chi$  en fixant  $\nu = 1$ , les maxima positifs ( $\chi < 1$ ) ou négatifs ( $\chi > 1$ ) s'élargissent et vont même jusqu'à produire des sous pics distincts. Cela induit donc une asymétrie entre la propagation des événements négatifs et positifs et peut même créer des sous-directions autour de la direction moyenne. Diminuer  $\nu$  en gardant  $\chi = 1$  décale les maxima vers des angles plus petits et crée aussi une asymétrie positifs/négatifs en redistribuant d'avantage vers les maxima négatifs. Toutefois, expérimentalement, on n'observe pas cette asymétrie ou ce dédoublement de branches. Si ces effets existent, ils restent cachés dans le bruit de mesure ou sont trop peu probables pour que cela s'observe dans les moyennes. La version simplifiée symétrique suffit donc à ce niveau pour rendre compte de la plupart des observations et vient corroborer l'hypothèse que les lignes de glissements émergent d'un centre de nucléation et va se propager dans les directions de redistribution maximales de déformations.

### c) Comparaison avec les prédictions d'un modèle champ moyen

Une des approches courantes de la physique consiste à déterminer quel ensemble minimal de lois permet de rendre compte des propriétés d'un maximum de systèmes. Cette approche a notamment été formalisée mathématiquement par la théorie des groupes de renormalisation qui permet de scruter quelles propriétés physiques restent invariantes par changement d'échelles. Ces propriétés forment alors ce que l'on appelle une "classe d'universalité". En adoptant cette démarche, les détails microscopiques du système sont perdus, mais ses propriétés qui sont conservées par le modèle réduit deviennent plus facilement interprétables car reposant sur des ingrédients plus simples. Les phénomènes d'avalanches ont en particulier attiré l'attention des théoriciens car les propriétés statistiques de ces systèmes peuvent être capturées simplement par les exposants de ces lois de puissance. De nombreux modèles numériques ou analytiques avec des ingrédients minimaux ont alors

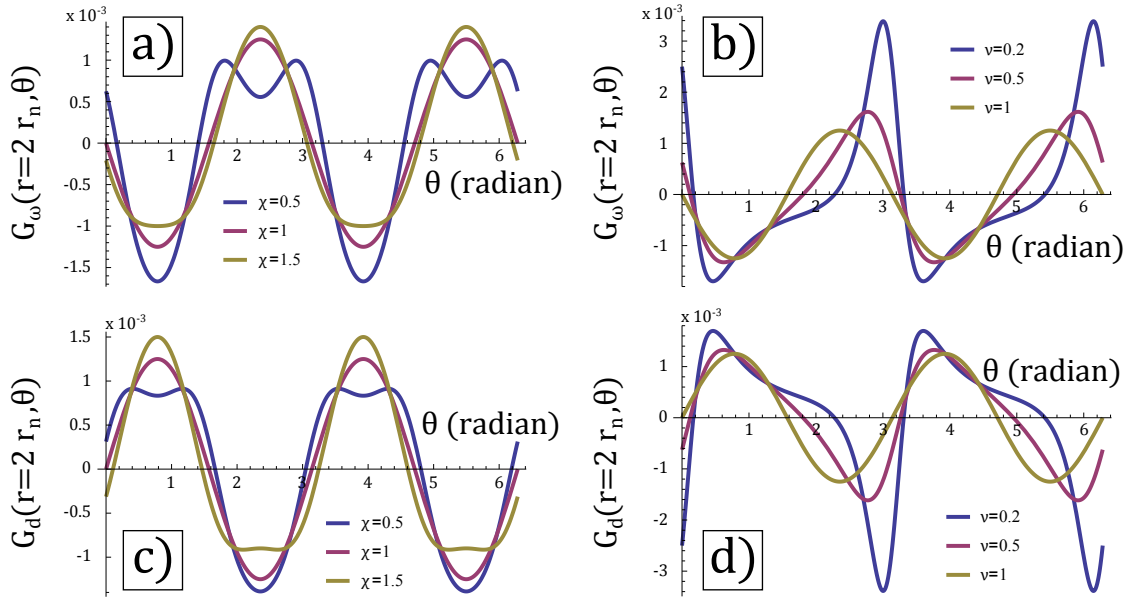


FIGURE III.22 – Amplitude de  $G_d$  ( c) et d)) et  $G_\omega$  ( a) et b)) en fonction de  $\theta$  pour  $r = 2r_n$  pour différentes valeurs de  $\chi$  et  $\nu$  et pour un événement positif. Pour les graphes a) et c),  $\nu$  est maintenu constant à 1 et  $\chi$  est varié, alors que pour b) et d), c'est  $\chi$  qui est fixé à 1 et  $\nu$  qui est modifié. Pour tous les graphes, les valeurs des autres paramètres ont été fixées à :  $r_n = 3$  mm,  $r = 6$  mm,  $\varepsilon_{d0} = -0.01$  et  $\omega_0 = +0.01$ .

été proposés pour prédire la valeur de ces coefficients [163, 164, 165, 166, 122, 167, 168]. Toutefois, le caractère trop général de ces approches ne parvient pas toujours à décrire le système, notamment proche d'un point critique tel le seuil plasticité [169, 170]. Toutefois, notre but dans cette section n'est pas de prouver l'appartenance des tremblements de tricots à une certaine classe d'universalité plutôt qu'à une autre, mais plutôt d'utiliser les prédictions comme base de comparaison pour examiner les propriétés spécifiques de notre système. Les prédictions sur lesquels va se baser notre analyse sont obtenues par un modèle champ moyen [171, 172], c'est à dire que la phénoménologie est réduite aux fluctuations temporelles, en moyennant sur toute l'étendue spatiale du système. Ce modèle a été développé dans un premier temps pour décrire les statistiques d'avalanches dans les matériaux granulaires mais a été comparé à de nombreux autres systèmes montrant des avalanches [141, 173, 137]. Il repose sur un réseau 2D ou 3D de densité inférieure ou égale à la compacité maximale, et qui se déforme élastiquement par cisaillement jusqu'à une valeur critique locale définie initialement aléatoirement. Dès qu'un nœud du réseau atteint sa valeur critique, son cisaillement chute d'une quantité choisie aléatoirement et il va redistribuer cette contrainte à ses voisins de manière isotrope, poussant ainsi potentiellement d'autres sites au-delà de leur valeur critique. Une nouvelle valeur critique, inférieure à la précédente, va alors être donnée aux sites ayant "glissé". Un paramètre dit d'endommagement quantifie à quel point les nouveaux seuils sont inférieurs aux précédents. Les prédictions sur les exposants des lois de puissances des statistiques d'avalanches sont obtenues en moyennant sur le système entier (champ moyen) et lorsque le système a atteint un état stationnaire indépendant des conditions initiales. Ce modèle contient



donc en essence la même phénoménologie que notre système expérimental et les systèmes auxquels il a été appliqué possèdent des réponses mécaniques très similaires.

Pour commencer, on se penche sur un des exposants le plus caractéristique des avalanches, celui contrôlant la densité de probabilité de leur l'amplitude que l'on notera  $\kappa$ . Le modèle prédit un coefficient  $\kappa = \frac{3}{2}$  qui est en très bon accord avec ce qui a été mesuré expérimentalement dans notre tricot avec des exposants de  $1.50 \pm 0.02$  pour  $\Delta f$ ,  $1.51 \pm 0.04$  pour  $S_\omega$ , mais un peu moins pour  $1.61 \pm 0.02$  pour  $S_d$ . On avait toutefois remarqué que la procédure de détection des évènements pouvait significativement modifier cet exposant, car si  $S_d$  est mesuré sur les évènements détectés grâce à la vorticité du champs de déplacement, on retrouve un exposant plus proche des autres  $1.53 \pm 0.03$ . Pour aller un petit peu plus loin, on s'intéresse aussi à la limite haute de la taille des avalanches. Il a en effet été remarqué que lorsque le système s'approche d'un point critique, la taille maximale des avalanches diverge, même si en pratique elle reste toujours limitée par la taille finie du système. Ce point critique peut consister en la compaction critique pour les granulaire [172], la force seuil avant plasticité [137] ou encore une vitesse de traction seuil pour le dépiégeage d'une ligne élastique [168, 174]. Cette divergence à l'approche du point critique est capturée par la relation  $S_{max} \propto (F_c - F)^{-\frac{1}{\sigma}}$  avec  $S_{max}$  la taille maximale d'avalanche,  $F$  la force ou tout autre variable amenant au point critique et  $F_c$  la valeur critique correspondante. La théorie champ moyen prédit  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

Toutefois, notre tricot ne présente a priori pas de tel point critique dans sa déformation, ce qui constitue sa principale différence avec les solides amorphes. Aux fortes élongations, la taille latérale des mailles devient trop confinée et les forces aux contacts trop élevées pour permettre le glissement, et comme la topologie est fixée, le système ne peut se réarranger comme pour les granulaires par exemple. Aux faibles élongations, la friction devient dominante et le tricot perd son élasticité, ce qui ne permet plus la propagation des avalanches. Néanmoins, lorsque l'expérience de référence est répétée mais en effectuant cette fois l'analyse tout le long du chargement, entre  $L_{w_i} = 215$  mm et  $L_{w_m} = 234$  mm, on mesure que la taille maximale des avalanches augmente avec l'élongation (fig. III.23.a-c). En effet, avec l'élongation du tricot, les mailles sont de plus en plus contraintes, augmentant ainsi les forces aux contacts entre fils et donc l'amplitude des  v nements de "stick-slip". On peut interpréter cette augmentation par l'existence d'une élongation critique effective de laquelle on se rapproche, sans toutefois pouvoir l'atteindre de par la topologie fixée et qui n'a donc pas de signification physique évidente. En revanche, cela permet d'utiliser la même mise à échelle que pour les solides amorphes et de tester l'exposant  $\sigma$  avec nos mesures. L'expérience est divisée en cinq intervalle d'élongation de 3 ou 4 mm sur lesquelles les densité de probabilité de  $\Delta f$ ,  $S_\omega$  et  $S_d$ , respectivement notées  $P_f(s)$ ,  $P_\omega(s)$  et  $P_d(s)$ , sont mesurés ( $s$  la notation générique de la taille d'une avalanche). Pour tester la pertinence des exposants champ moyen  $\kappa = \frac{3}{2}$  et  $\sigma = \frac{1}{2}$ , les densités de probabilité sont normalisées par  $s^{-\kappa}$  et la taille des avalanches par  $(1 - \frac{\langle L_w \rangle}{L_{w_c}})^{-\frac{1}{\sigma}}$ , avec  $\langle L_w \rangle$  la valeur moyenne de  $L_w$  dans chaque intervalle et  $L_{w_c}$  la valeur d'élongation "critique". Pour déterminer  $L_{w_c}$ , sa valeur est ajustée jusqu'à obtenir un regroupement satisfaisant des courbes de probabilité de  $P_f$ . On obtient  $L_{w_c} \approx 259$  mm, et cette valeur est réutilisée pour les distributions  $P_\omega$  et  $P_d$ . Le regroupement n'est toutefois pas très sensible à la valeur de  $L_{w_c}$  qui peut varier de plusieurs millimètres sans effets notables sur les distributions.

Le plateau observé pour une grande plage d'amplitude indique que l'exposant  $\kappa = \frac{3}{2}$



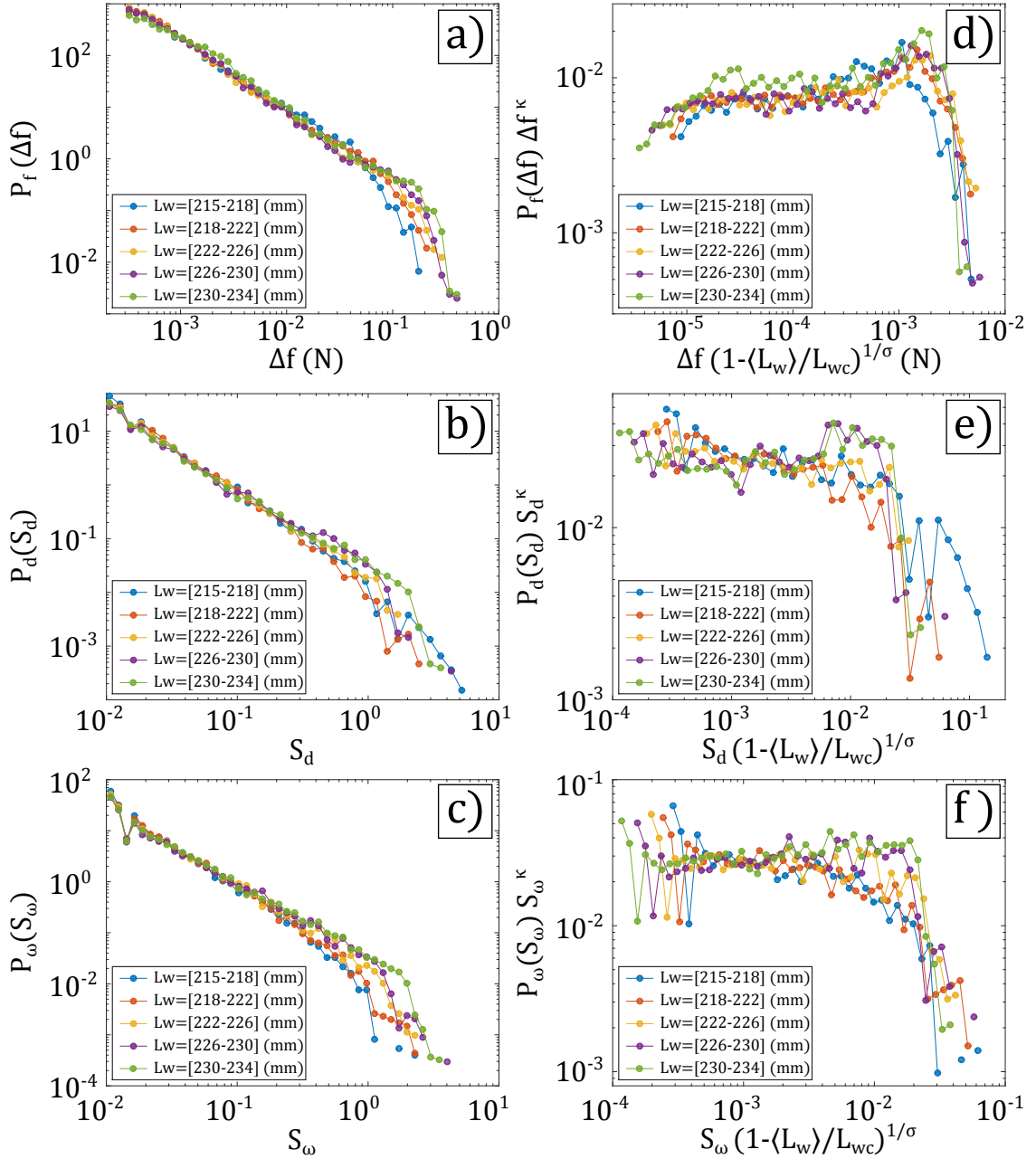


FIGURE III.23 – Comparaison entre les mesures de densité de probabilité de taille d'avalanches mesurées et celle prédite par la théorie champ moyen. Gauche (a-c), distributions  $P_f(\Delta f)$ ,  $P_d(S_d)$  et  $P_\omega(S_\omega)$  pour 5 intervalles d'élongations. On remarque la tendance générale que les élongations élevées favorisent l'apparition d'avalanches de plus fortes amplitudes. Droite (d-f), distributions normalisées par les prédictions de champ moyen avec les exposant  $\kappa = \frac{3}{2}$  et  $\sigma = \frac{1}{2}$  et l'élongation "critique"  $L_{wc} = 259$  mm.

de la loi de puissance est en accord avec les mesures (fig. III.23.d-f). De plus, le regroupement entre les distributions à différentes élongations pour les 3 mesures différentes et avec l'exposant  $\sigma = \frac{1}{2}$  est assez satisfaisant. Notre système expérimental se présente donc comme un bon système modèle pour une étude fondamentale des propriétés des avalanches dans un milieu bidimensionnel, d'autant plus que les mesures externes et internes sont cohérentes entre elles. Dans la distribution de  $P_f$  notamment, on observe un excès d'avalanches de fortes amplitudes, par rapport au plateau et juste avant la coupure nette. Il a été montré qu'une surabondance d'avalanches aux fortes amplitudes pouvait être liée à des effets inertiels dans les avalanches [175], qui tendent à propager un plus grand nombre d'avalanches jusqu'à la limite imposée par la taille finie du système.

Un autre exposant prédit par la théorie champ moyen est celui contrôlant la décroissance de la puissance du spectre du signal de force,  $P_\lambda(\frac{1}{\lambda}) = (\frac{1}{\lambda})^{-\phi}$  avec  $\phi = 2$ . Cependant, la mesure de ce spectre, présenté précédemment fig. III.7.a, montre bien une loi de puissance mais avec un exposant mesuré de  $2.727 \pm 0.006$  significativement différent de la prédiction. Cet écart n'a pas trouvé d'interprétation flagrante. La théorie prédit aussi l'exposant de la loi de puissance de la distribution de durée d'avalanches  $P_T(\Delta T) = \Delta T^{-\alpha}$ , avec  $\alpha = 2$ . En revanche, la plage de durée accessible expérimentalement est un peu trop courte pour mesurer correctement une loi de puissance, même si la valeur  $1.77 \pm 0.20$  quand même estimée n'est pas complètement incompatible avec la prédiction.

Une prédiction supplémentaire que l'on peut vérifier porte sur la dynamique et la morphologie temporelle des avalanches. Là encore une nouvelle loi de puissance est prédite entre l'amplitude et la durée des avalanches avec  $\Delta f \propto \Delta T^\gamma$  et  $\gamma = 2$ . Ici, les comparaisons ne peuvent se faire que sur le signal de force car c'est le seul qui contient la dynamique. Pour chaque avalanche détectée, sa durée  $\Delta T$  est tracée en fonction de son amplitude  $\Delta f$  et le nuage de points qui en ressort semble bien suivre une loi de puissance cohérente avec la valeur  $\gamma = 2$  (fig. III.24.a). Ce résultat est toutefois discutable car la fourchette de  $\Delta T$  mesurée s'étend sur à peine plus d'une décade. Les variations de la dynamique d'une avalanche avec son amplitude est aussi une manière de tester la validité de cet exposant et de la théorie champ moyen [141, 176]. En effet, plus l'amplitude de l'évènement est élevée, plus le taux de variations de la force durant cette avalanche,  $-\frac{dF}{dL_w}$ , prend une valeur maximale élevée en plus d'avoir une durée plus longue. Le modèle prédit qu'en renormalisant ce taux par  $\Delta f^{1-\frac{1}{\gamma}}$  et le temps  $t$  par  $\Delta f^{\frac{1}{\gamma}}$ , les profils d'avalanches  $-\frac{dF}{dL_w}(t)$  doivent converger vers une courbe maîtresse donnée par l'équation  $f(x) = Ax e^{-Bx^2}$ , avec  $A$  et  $B$  deux constantes propres au système. Pour vérifier cela avec nos mesure, on a choisi quatre valeurs représentatives de  $\Delta f$ , puis calculé les profils moyens  $\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle(t)$  des avalanches ayant une amplitude proche de celles sélectionnées (fig. III.24.c, insert). Ensuite, ces profils moyens sont renormalisés et comparés avec la forme prédite. La renormalisation fonctionne raisonnablement bien, les quatre profils se superposent en grande parties, mais la forme prédite ajustée avec  $A = 0.028$  et  $B = 0.45$ , n'arrive pas à capturer la décroissance après le maximum, qui est beaucoup plus lente expérimentalement (fig. III.24.c). Finalement, le modèle champ moyen prédit aussi la forme moyenne des profils quand le temps est renormalisé par sa durée  $\Delta T$  et le taux de la force par son maximum  $\frac{\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle}{\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle_{max}}$  qui est sensée prendre une forme parabolique  $f(x) = 4x(1-x)$ . Les profils moyens mesurés pour différentes durées, déjà présentés fig. III.10.b, se comparent assez bien à la

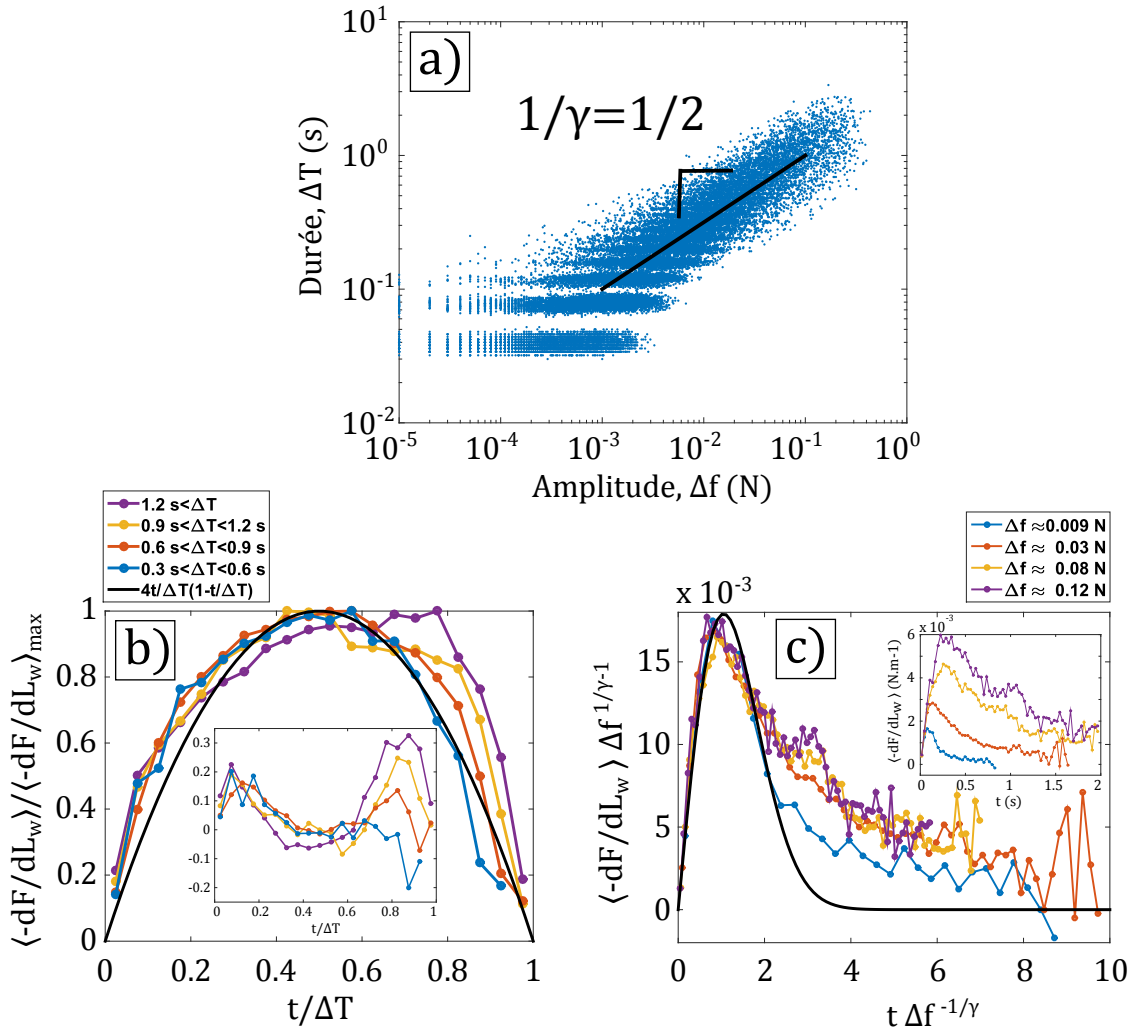


FIGURE III.24 – a) Durée d’une avalanche en fonction de son amplitude, chaque point correspond à une avalanche détectée dans l’expérience de référence et l’ensemble semble suivre une loi de puissance. La ligne noire correspond à la loi de puissance prédite par le modèle champ moyen  $\gamma = 2$ . b) Profil moyen d’une avalanche représenté par le taux de variations de la force, normalisée par son maximum, en fonction du temps, normalisé par sa durée. Les profils moyens pour quatre plages de durées sont représentés et avec en trait continu noir la prédiction du modèle  $f(x) = 4x(1-x)$ . Insert, différence entre les profils mesurés et la prédiction, mettant en évidence l’asymétrie des profils expérimentaux lorsque la durée moyenne des avalanches augmente. c) Insert, profils moyens  $\langle -\frac{dF}{dL_w} \rangle(t)$  calculés pour les événements ayant une amplitude proche des quatre valeurs de  $\Delta f$  sélectionnées. Normalisation de ces profils par leur taille selon la prédiction champ moyen, avec en ligne continue noire la forme théorique  $f(x) = Ax e^{-Bx^2}$  dont les deux coefficients ont été ajustés  $A = 0.028$  et  $B = 0.45$  à l’expérience.

prédiction (fig. III.24.b). Toutefois, plus la durée des avalanches est élevée, plus le profil devient asymétrique, ce qui est particulièrement visible en soustrayant la forme prédite à celle mesurée (fig. III.24.b, insert). Cette asymétrie peut avoir la même origine que la lente décroissance des profils observée lors de la normalisation par l'amplitude des événements.

La manière dont ces profils d'avalanches s'éloignent du profil parabolique prédit a suscité beaucoup d'intérêt car cela permet d'en apprendre plus sur les phénomènes physiques sous-jacent de ces avalanches [177, 178, 179, 170]. En particulier, l'asymétrie du profil a été associée à des effets inertiels dans la propagation des avalanches avec la présence de masse qui peuvent être effectives ou même négatives [180, 141]. Ce résultat peut être mis en parallèle avec l'excès d'avalanches de fortes amplitude mesuré précédemment (fig. III.23.d) qui peut aussi être interprété comme un effet inertiel. Ces effets semblent suggérer que la dynamique des tremblements de tricot possède une composante inertielle provenant soit de la masse du fil, soit de la masse effective de l'élément topologique qu'est la maille.

Pour finir, la déformation d'un tricot évoque aussi les phénomènes de dépiégeages élastiques [181, 182, 183, 184], que l'on retrouve dans de nombreux systèmes où un objet possédant une certaine élasticité est tiré dans un milieu hétérogène qui vient localement "piéger" l'objet. Quelques exemples représentatifs de ce genre de phénomènes sont la ligne de contact d'un fluide qui se déplace sur un substrat désordonné [185, 186], la propagation d'un front de fracture dans un milieu désordonné [187, 188, 189, 190] ou encore le mouvement des lignes de flux traversant un supraconducteur de type II [191, 192]. Un tricot est bien un objet élastique 2D et les points de contacts qui ne glissent pas, en empêchant le libre déplacement du fil, jouent le rôle de "pièges". Ces phénomènes possèdent de fortes similarités avec la mécanique des milieux amorphes et l'équivalence des deux points de vue est un sujet débattu [168, 193, 194]. Dans cette section on a montré que la mécanique du tricot partagent certaines similarités avec celle des milieux amorphes, étudier les tremblements de tricot du point de vue dépiégeage constituerait donc une intéressante continuation de ce travail.

### III.3.3 Failles et tremblements de terre

Les tremblements de terre entrent aussi dans la catégorie des systèmes manifestant une dynamique d'avalanches. C'est même très probablement le système le plus étudié parmi ces phénomènes car les séismes ont un impact humain et économique considérable. Par exemple, la loi d'échelle qui donne la probabilité de la taille porte un nom connu, la loi de Gutenberg-Richter [195]. De manière assez surprenante, en plus d'avoir en commun la phénoménologie générale des avalanches, les lignes de glissements qui apparaissent dans le tricot présentent de fortes similitudes avec les failles pilotant l'irruption des tremblements de terre.

#### a) Lignes de glissements et failles sismiques

Les tremblements de terre sont causés, pour une majorité, par la dynamique de la tectonique des plaques. Les mouvements de convection au sein du manteau terrestre imposent un déplacement aux couches supérieures de la croûte terrestre qui est fragmentée en plusieurs plaques. Ces plaques ont des mouvements relatifs différents ce qui occasionne éloignements, collisions ou glissement les unes sur les autres. C'est principalement aux

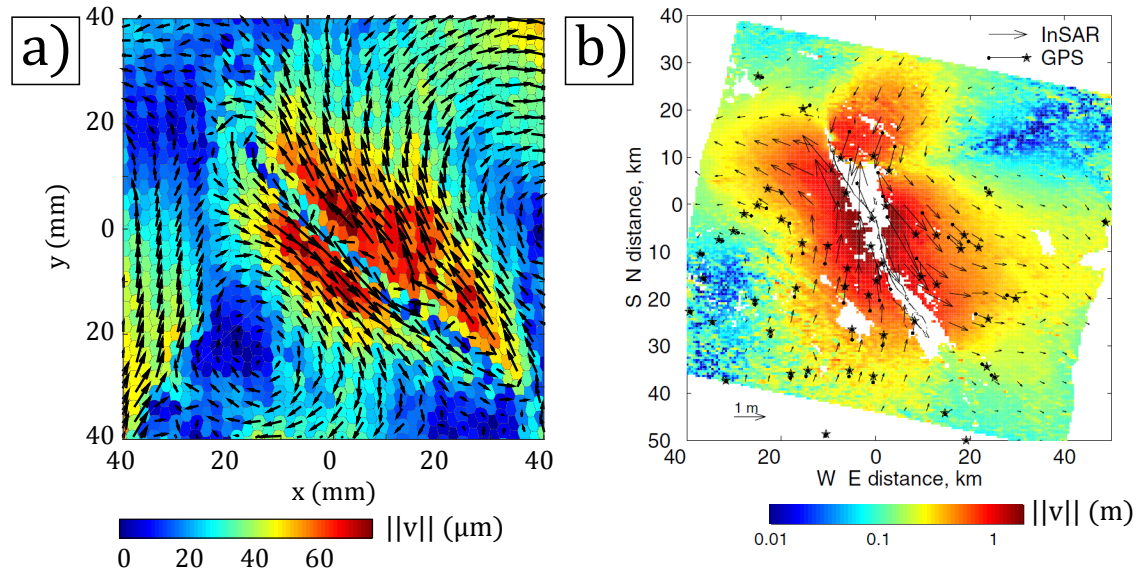


FIGURE III.25 – a) Champ de déplacement relatif autour d’une ligne de glissement isolée, mesurée dans notre expérience de référence dans le tricot. Chaque maille porte son vecteur déplacement associé et est coloriée par l’amplitude de ce vecteur. b) Champ de déplacement horizontal du sol autour d’une faille de décrochement en Californie, consécutif à un séisme. Figure tirée de l’article [196]. Les mesures de déplacement du sol combinent mesures GPS et satellites et permettent d’en reconstruire la structure tridimensionnelle.

frontières de ces plaques, le long de failles, qu’ont lieu les séismes [197]. Un séisme est le résultat d’une fracture et glissement de roches le long d’une faille [198], ce qui induit un brusque déplacement de la croûte de part et d’autre de la faille et libère de grandes quantités d’énergie. Cette énergie est notamment dissipée sous forme d’ondes sismiques. Ce sont ces ondes qui ont concentré une large partie des travaux sur les tremblements de terre car elles sont plus aisées à mesurer mais aussi car elles sont à l’origine de la majorité des dégâts. Cependant, l’aspect qui va nous intéresser ici concerne la morphologie de ces failles d’où émergent les séismes. La caractérisation des failles se fait notamment par la mesure du champ de déplacement relatif des plaques de part et d’autre, et du profil de l’amplitude du glissement qui en résulte. Ces mesures peuvent être faites sur des roches portant les marques de séismes ayant eu lieu lors d’autres temps géologiques [199, 200], mais aussi par des mesures satellites et GPS après un séisme récent [196, 201]. En mesurant le champ de déplacement autour de nos lignes de glissements dans le tricot, on observe une morphologie très similaire (fig. III.25) en dépit du facteur 1000 dans l’échelle de taille. On peut donc s’inspirer des travaux effectués sur les failles sismiques pour appliquer des analyses similaires sur nos lignes de glissement. Une différence majeure réside toutefois dans la structure tridimensionnelle des failles sismiques, alors que nos glissements restent uniquement dans un plan. La comparaison doit donc se faire dans un plan orthogonal au plan de faille. Pour les failles dites de décrochement, le plan de faille est perpendiculaire au sol, le déplacement observé au sol se compare donc bien aux lignes de glissements (fig. III.25.b).

Le profil de la longueur de glissement le long de la faille est une mesure cruciale pour mieux comprendre sa dynamique de fracture [202]. On peut nous aussi mesurer ce profil le long des lignes de glissements en se plaçant dans le repère  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$  et en quantifiant le glissement de part et d'autre. Pour cela on introduit les fonctions de glissement  $\Delta v^X$  et  $\Delta v^Y$  définies par :

$$\Delta v^X(j, i) = v^X(j - 1, i + 1) - v^X(j + 1, i - 1) \quad (\text{III.40})$$

$$\Delta v^Y(j, i) = v^Y(j + 1, i + 1) - v^Y(j - 1, i - 1) \quad (\text{III.41})$$

Ces fonctions quantifient la différence de déplacement entre voisins diagonaux, dans la direction orthogonale à ce déplacement. Ainsi,  $\Delta v^X$  constitue un marqueur des lignes de glissements négatives et  $\Delta v^Y$  des positives (fig. III.26.a). Elles sont spécifiées de telle sorte à prendre des valeurs positives compte tenu de la direction de chargement. Ces fonctions de glissement sont directement liées aux dérivées spatiales de  $v$  dans le repère  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$ ,  $\Delta v^X \propto \frac{\partial v^X}{\partial Y}$  et  $\Delta v^Y \propto \frac{\partial v^Y}{\partial X}$  et donc à la vorticité et déviateur du champ de déplacement. De la même manière que pour nos analyses précédentes,  $\Delta v^X$  et  $\Delta v^Y$  permettent de détecter les mailles appartenant aux  v nements. Pour une ligne de glissement donnée, son profil est défini par les maxima successifs de  $\Delta v^X$  ( $\Delta v^Y$ ) le long de l'axe  $X$  ( $Y$ ) pour un  v nement respectivement négatif (positif) (fig. III.26.b). On retrouve alors des profils similaires à ce que l'on avait mesuré auparavant avec la vorticité (fig. III.18) mais surtout avec ceux mesurés le long de failles sismiques (fig. III.26.c). En effet, les profils de failles sismiques présentent aussi un ou plusieurs maxima à partir desquels le glissement décroît de manière monotone.

  partir de ces profils, les failles sont habituellement caractérisées par leurs glissements maximum et leurs extensions. La loi d'échelle entre ces deux grandeurs, qui est un témoin du mécanisme de formation de ces failles, suscite un débat de longue date dans la communauté [203, 204]. Cette question est d'autant plus difficile que la définition de ce maximum et de la longueur d'une faille n'est pas évidente. En présence de plusieurs maxima locaux, il faut pouvoir séparer les différentes failles pour mesurer correctement ses propriétés. De plus, déterminer exactement les bords d'une faille est souvent illusoire de par la précision des instruments de mesure et la présence de zones d'endommagements. Observer la dynamique de formation de ces failles permettrait de mieux comprendre leurs mécanismes, malheureusement, elle reste inaccessible expérimentalement aux sismologues. Dans nos tricots par contre, les observations à la caméra rapide permettent de mesurer cette dynamique, que l'on peut par exemple représenter par l'évolution du profil du glissement cumulé avec le temps (fig. III.26.d). Cette mesure semble indiquer que la ligne de glissement émerge avec une longueur déjà définie et que le glissement s'accumule progressivement par la suite en conservant une largeur presque constante. L'augmentation de longueur paraît croître par à-coups dès qu'un nouveau centre de nucléation (et donc un nouveau maximum local de glissement) est déclenché (comme à gauche sur fig. III.26.d).

La mesure d'un profil de glissement permet aussi de calculer ce qui est appelé le moment  $M_0$  d'un séisme [206] et qui est défini par l'intégrale sur toute la surface de la faille du produit entre le déplacement et le module de cisaillement  $\mu$  :

$$\int_{faille} \mu \Delta \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (\text{III.42})$$



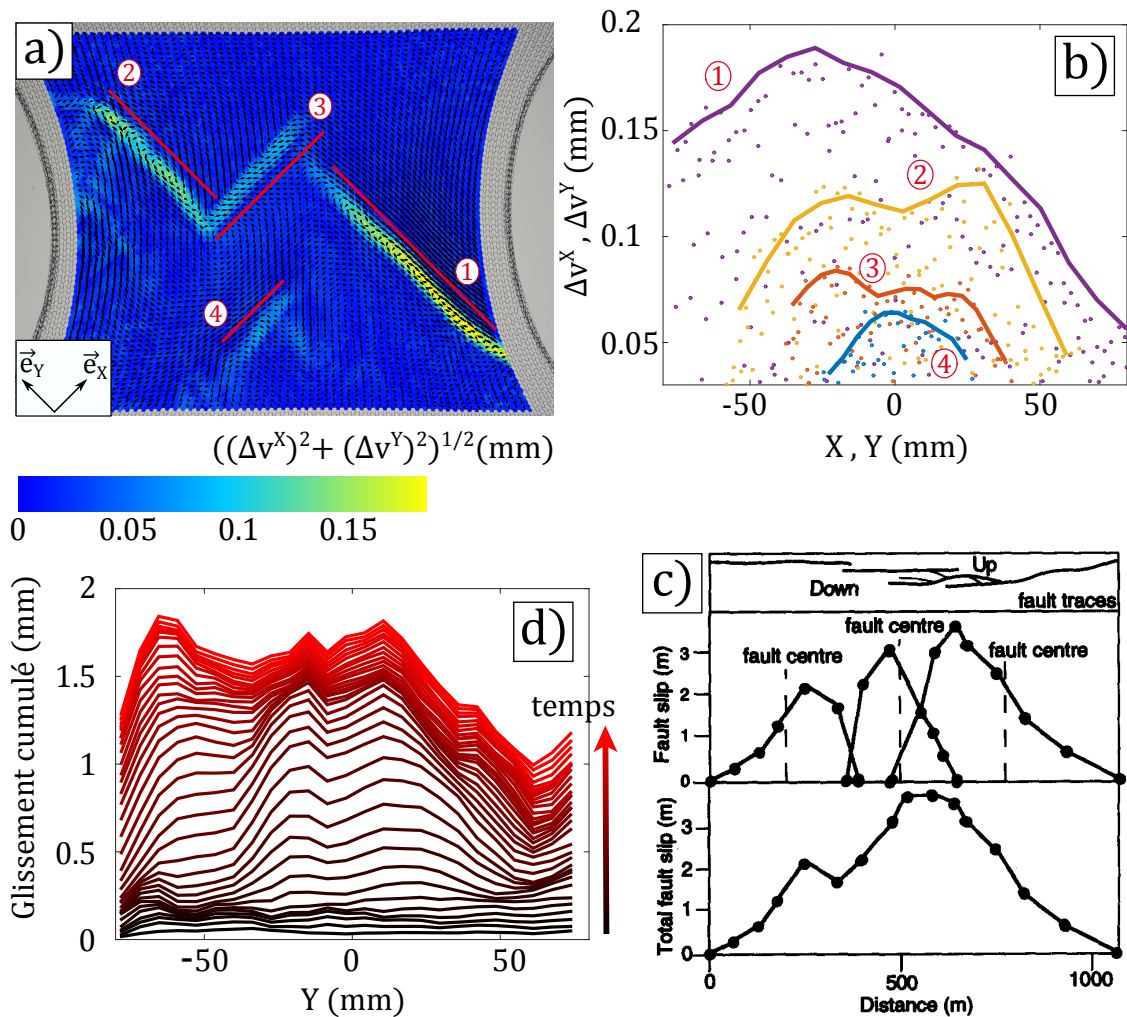


FIGURE III.26 – a) Photographie du tricot de référence avec chacune des mailles portant son déplacement  $\vec{v}$ , leurs couleurs sont données par la norme du glissement total local  $\sqrt{(\Delta v^X)^2 + (\Delta v^Y)^2}$ . Ce champ de déplacement est le même que présenté précédemment (fig. III.14). Les 4 lignes de glissements de plus grandes amplitudes sont numérotées de ① à ④ (① et ② sont des évènements positifs, ③ et ④ négatifs). b) Profils de glissement de ces quatre lignes,  $\Delta v^Y(Y)$  (pour ① et ②),  $\Delta v^X(X)$  (pour ③ et ④). Chaque point représente la valeur de  $\Delta v^X(X)$  ou  $\Delta v^Y(Y)$  pour une maille détectée comme appartenant à l'évènement, la ligne continue marque le profil de l'évènement défini comme le maximum de glissement local. c) Profils d'un groupement de failles sismiques, montrant le glissement faille par faille et le glissement total. Figure tirée de [205]. d) Profils du glissement cumulé lors de l'émergence d'une ligne de glissement observé à la caméra rapide (fig. III.19). L'intervalle de temps entre chaque profil est de  $30 \mu\text{m}$ , pour un temps total d'une seconde.



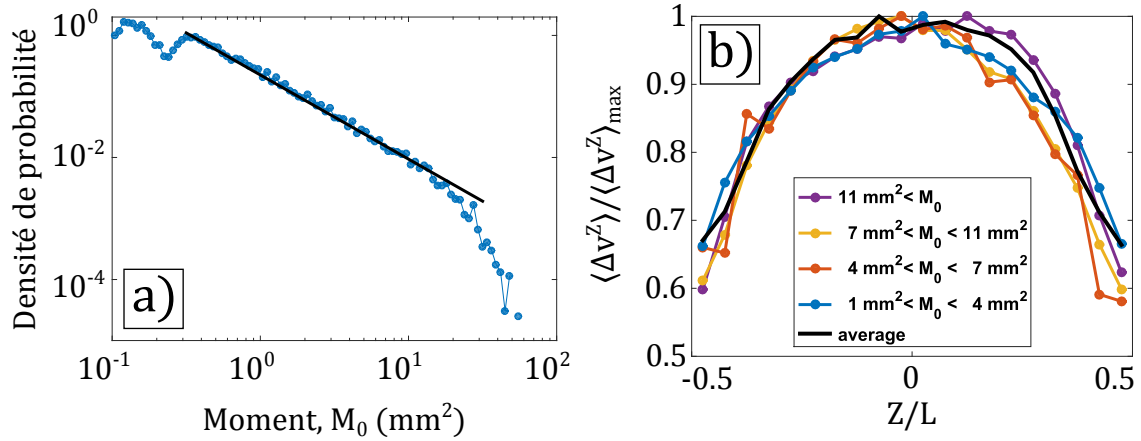


FIGURE III.27 – a) Densité de probabilité du moment des lignes de glissement du tricot, défini par  $M_0 = \int_{\text{ligne}} \Delta v^Z(Z) dZ$ , avec  $Z = X$  pour un évènement négatif et  $Z = Y$  pour un positif. La distribution suit une loi de puissance, la régression linéaire donne un exposant de  $-1.44 \pm 0.03$ , représentée en ligne continue noire. b) Profil de glissement moyen. Pour 4 quatre plages de moments, le profil moyen  $\Delta v^Z(Z)$  est évalué. Ils sont ensuite renormalisés par leurs maximums et tracés en fonction de l’abscisse renormalisée par la longueur  $L$  de la ligne de glissement. Les quatre profils prennent alors tous la même forme.

Ce moment est directement lié à l’amplitude du séisme  $M_w$  par la relation empirique  $M_w = \frac{2}{3} \log_{10}(M_0) - 6.07$  [207]. Ce moment est donc une mesure de la taille de l’évènement. On adapte cette définition à nos lignes de tricot en prenant simplement l’intégrale du profil  $\Delta v^X(X)$  ou  $\Delta v^Y(Y)$  tout le long de la ligne de glissement. En regardant la densité de probabilité de ce moment  $M_0$ , on retrouve bien une loi de puissance dont l’exposant,  $-1.44 \pm 0.03$ , est raisonnablement proche de celui mesuré avec d’autres estimations de la taille de ces avalanches (fig. III.27.a). Cette mesure de  $M_0$  se rapproche de l’estimation  $S_w$  et  $S_d$ , mais suit un schéma très différent. De manière similaire aux profils temporels des avalanches, on peut regarder ici comment l’amplitude du moment de l’évènement va modifier la forme moyenne du profil spatial. Pour cela, le profil moyen est calculé sur 4 plages de moments puis normalisé par le maximum de  $\langle \Delta v^Z(Z) \rangle$  ( $Z = X$  pour un évènement négatif et  $Z = Y$  pour un positif) et la coordonnée le long de la ligne est normalisée par sa longueur  $L$  (fig. III.27.b). Le centre de la ligne étant pris comme son centre géométrique, de sorte que  $Z/L \in [-0.5, 0.5]$ . On remarque alors que quelque soit le moment de l’avalanche, le profil reste très similaire, ce qui témoigne encore de l’invariance par changement d’échelle.

## b) Réseaux de failles et défauts topologiques

Jusqu’à maintenant on s’est intéressé aux propriétés d’une ligne de glissement indépendamment de ses alentours. Cependant, le cas d’une ligne isolée est plus l’exception que la norme, les lignes forment généralement une sorte de réseau inter-connecté (fig. III.28.a). Cet aspect suggère que la dynamique des lignes de glissement doit aussi être regardée du

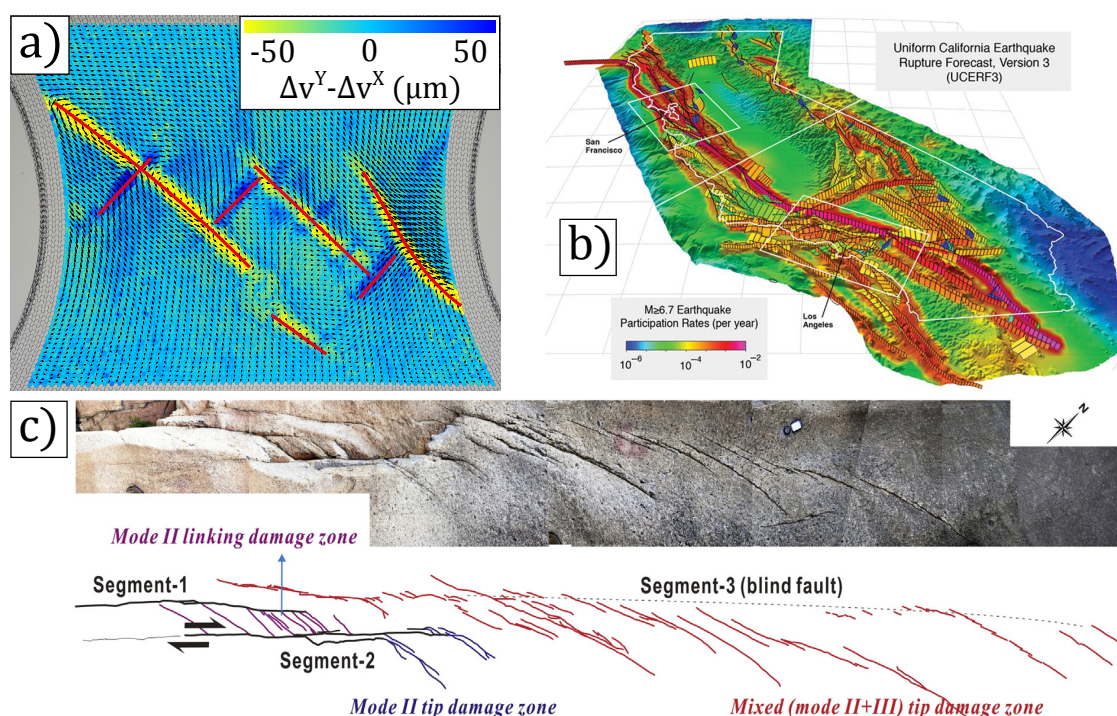


FIGURE III.28 – a) Exemple de réseau de lignes de glissement, mis en évidence en coloriant chaque maille par sa valeur de  $\Delta v^Y - \Delta v^X$  (grandeur positive pour les évènements positifs et négative pour les négatifs). Les traits continus pourpres surlignent la position des lignes de glissement. b) Carte de la Californie avec son réseau de failles sismiques. Le code couleur des failles indique son activité en terme de fréquence de tremblements de terre de fortes amplitudes. Figure extraite de [218]. c) Réseau de failles dans la fracture d'une roche mettant en évidence des zones d'endommagement entre les failles principales. Figure tirée de [219].

point de vue de leurs interactions mutuelles. Les déformations du milieu induites par des glissements peuvent faciliter ou au contraire inhiber l'apparition d'autres lignes dans certaines régions du tricot. Les failles sismiques aussi sont rarement isolées et forment généralement des réseaux aux structures complexes, aussi bien à l'échelle des plaques tectoniques (fig. III.28.b, [208, 209, 210, 211]) qu'à l'échelle des roches (fig. III.28.c, [212, 213, 214]). Une caractéristique assez générique des réseaux de failles obtenues se retrouve aussi dans notre tricot. Lorsque plusieurs lignes parallèles de fortes intensités mais légèrement décalées se forment, un réseau secondaire de lignes plus petites vient les connecter entre elles [215, 216, 217], comme on peut le voir sur l'exemple présenté (fig. III.28.a, réseau principal composé de lignes de glissement positives, réseau secondaire de négatives).

Ces observations préliminaires montrent l'importance des interactions entre évènements pour expliquer leurs dynamiques. Pour entrer un petit peu plus dans les détails, on peut envisager de s'appuyer sur les défauts de structure du champ de déplacement induit par les glissements. De part et d'autre d'une ligne de glissement, la direction principale du champ de déplacement subit un brusque changement qui doit être régularisé au voisi-

nage de ses extrémités (fig. III.29). Cette régularisation de la direction se fait au moyen de ce que l'on appelle des défauts topologiques du directeur du champ de vecteur [220]. Ces défauts se retrouvent notamment dans les milieux fortement anisotropes tels les cristaux liquides nématiques [221, 222, 223] ou encore dans des milieux biologiques actifs montrant aussi une anisotropie [224, 225, 226, 227]. Ces défauts marquent les incompatibilités des lignes directrices qui suivent l'orientation des molécules ou autres cellules anisotropes et sont caractérisées par leurs charges, qui correspondent à l'indice (c'est-à-dire le "nombre de tours") de l'orientation du champ le long d'un contour entourant le défaut (fig. III.29.c). Dans notre tricot, l'anisotropie vient du caractère unidimensionnel des lignes de glissement qui imposent des discontinuités dans le champ de déplacement, on remarque notamment qu'une ligne possède en général un défaut  $+\frac{1}{2}$  à une extrémité et  $-\frac{1}{2}$  à l'autre (fig. III.29.b).

L'analyse de ces défauts est particulièrement intéressante lorsque le système est dynamique et qu'il en génère régulièrement de nouveaux [225, 228, 226]. En effet, ces défauts vont alors s'attirer ou se repousser selon leurs charges et conduire à des défauts de charges supérieures ou au contraire à leurs annihilations. Le système est donc maintenu dans un état dynamique donc les propriétés découlent directement de l'interaction de ces défauts. Suivant le système, ces défauts peuvent être le signe d'accumulation de contraintes [229] ou de sources/puits à cellules [230, 231]. En déformant continument le tricot, le champ de déplacement est constamment nourri de défauts topologiques par la formation de nouvelles lignes de glissement. On se trouve alors dans un contexte similaire avec un état gardé hors équilibre et des défauts qui marqueraient des accumulations de déformations (positives ou négatives). La formation de nouvelles lignes résulterait alors de l'interaction entre les défauts topologiques du champ de déplacement. Ce point de vue semble par conséquent assez prometteur pour mieux comprendre la morphologie des réseaux de lignes de glissement et donc la dynamique d'avalanche globale des tremblements de tricot.

### III.4 Conclusion

L'approche statistique du frottement développée dans cette partie diffère significativement des manières dont il a déjà été considéré dans les tricots [232, 233, 234, 235, 236, 40], toutefois, l'utilisation de cette approche pour des applications industrielles semble très limitée.

En revanche, le tricot se distingue en tant que nouvelle catégorie parmi les systèmes présentant une dynamique d'avalanches. Si le signal de force, avec ses brusques chutes, est semblable aux réponses d'autres systèmes, la morphologie spatiale de la déformation plastique est tout à fait singulière. À l'instar des dislocations dans les cristaux [237] ou des failles sismiques, les lignes de glissement sont très localisées, par contre, elles conservent la topologie du réseau et n'induisent aucune rupture. De plus, tout en présentant une structure parfaitement ordonnée, la propagation de ces lignes suit les maxima de redistribution de la déformation à l'image des milieux amorphes. La mise à jour d'un tel objet, en quelque sorte hybride entre certains systèmes déjà bien documentés, a le potentiel d'éclaircir des problématiques fondamentales liées aux phénomènes d'avalanches. La mise en évidence de ces tremblements dans le tricot a fait l'objet d'une publication [238] (annexe E).

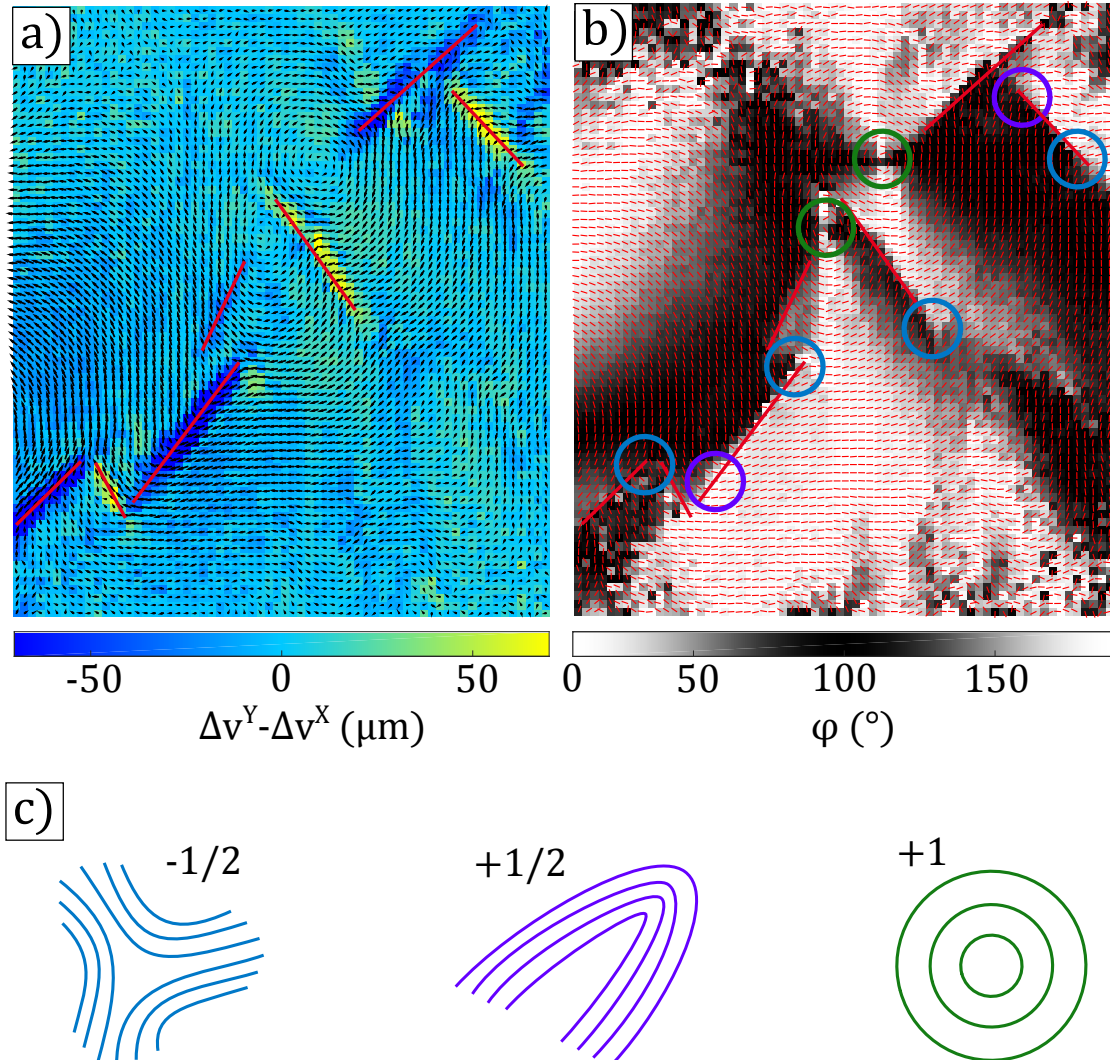


FIGURE III.29 – a) Autre exemple de champs de déplacement du tricot, un pixel et une flèche représentent une maille et sa couleur rend compte du glissement local  $\Delta v^Y - \Delta v^X$ . Les traits continus pourpres indiquent l'emplacement des lignes de glissement. b) Même champs de déplacement, mais chaque vecteur est normalisé par sa propre norme permettant de mettre en évidence leurs variations d'orientation. La couleur des mailles quantifie  $\varphi$ , la valeur absolue de l'angle que chaque vecteur fait avec l'horizontale. Les lignes de glissement sont indiquées par les mêmes lignes pourpres et les défauts topologiques observés, de charge  $+\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$  et  $+1$ , sont encadrés avec un code couleur donné par c). c) Schématisation des trois défauts observés dans le champ de déplacement, les lignes continues représentent les "lignes de courant" données par l'orientation du champ autour d'un défaut.



# Chapitre IV

## Au-delà du plan

Ce dernier chapitre est consacré à différentes façons par lesquelles le tricot s'extrait de l'aspect bidimensionnel des deux chapitres précédents. Un tricot, perçu comme une surface, a la possibilité d'adopter spontanément une forme tridimensionnelle en épousant des courbures dans différentes directions. Alors que la topologie des mailles prescrit une courbure naturelle au tricot, varier la longueur de fil par maille engendre des instabilités qui le forcent à sortir du plan, le tout étant piloté par l'élasticité du fil. La forme d'un tricot trouve donc son origine dans l'effet combiné de l'élasticité avec la géométrie et la topologie à l'échelle du fil. D'autre part, la sortie du plan s'opère aussi au niveau de la maille lorsque le fil s'extirpe de sa géométrie conventionnelle. La représentation habituelle d'une maille n'est pas la seule configuration possible, quand le fil est suffisamment rigide et sa redistribution aisée, il va préférer chambouler sa trajectoire en désorganisant le réseau et dessinant de larges boucles qui se déploient au-delà du plan initial.



## IV.1 Programmer la forme d'un tricot

Les chapitres précédents ont mis en évidence la richesse de la réponse mécanique 2D d'un tricot, seulement, le principal intérêt des matériaux tricotés pour l'industrie composite ou la conception de vêtements réside plutôt dans sa forme 3D [239, 240, 241, 242]. On va donc tenter de mettre en évidence comment topologie et élasticité se couplent pour faire émerger une courbure naturelle (et donc une forme 3D), à l'objet essentiellement 2D que constitue un tricot. Ces travaux ont notamment été initiés par Robin Quessard à l'occasion de son stage d'été dans notre laboratoire.

### IV.1.1 Topologie et courbure naturelle

Lors de l'évaluation de l'énergie de courbure d'une maille (fig. II.11), il a été mis en évidence que le fil était aussi courbé dans la direction perpendiculaire au plan du tricot. Les rayons de courbure associés étant beaucoup plus grand que ceux dans le plan, leurs contributions énergétiques sont bien moindres et ils jouent donc un rôle négligeable dans la mécanique 2D du tricot. En revanche, lorsque l'on s'intéresse à la forme 3D d'un tricot étant en première approximation à l'équilibre dans son plan, les courbures hors plan jouent par conséquent le rôle principal.

Comme pour la mécanique 2D, on projette la forme du tricot dans la direction des rangs ( $x$ ) et des colonnes ( $y$ ), mais cette fois on regarde la courbure hors plan du fil (fig. IV.1). Quand une maille est forcée à rester dans le plan du tricot, les croisements imposés au fil le contraignent à se courber. Pour diminuer ces courbures et donc minimiser l'énergie de flexion de la maille, le tricot doit sortir du plan et adopter une forme 3D. Pour cela, la surface définie par le plan du tricot va adopter une courbure  $\gamma_c$  dans la direction des rangs et  $\gamma_w$  dans la direction des colonnes. Il est important de souligner que ces courbures  $\gamma_c$  et  $\gamma_w$  ne sont pas celles du fil mais bien celles de la surface représentant le tricot. On va limiter notre analyse à deux topologies, le point endroit et le point envers, indicés respectivement par  $+$  et  $-$ . Ces deux points se différencient seulement par le signe des croisements du fil, donc un point endroit apparaît comme un point envers lorsqu'on le regarde de l'autre côté du tricot, et inversement pour un point envers. Pour diminuer l'énergie de courbure d'une maille endroit, il faut que le tricot adopte une courbure positive (convexe par rapport à  $\vec{e}_z$ ) le long des colonnes,  $\gamma_w^+ > 0$  et négative (concave par rapport à  $\vec{e}_z$ ) le long des rangs,  $\gamma_c^+ < 0$  (fig. IV.1.a,c). Une maille envers a une topologie opposée à l'endroit, les courbures du tricot envers minimisant son énergie sont donc aussi l'opposé de l'endroit,  $\gamma_w^- = -\gamma_w^+ < 0$  et  $\gamma_c^- = -\gamma_c^+ > 0$  (fig. IV.1.b,d).

Ces observations qualitatives permettent par exemple d'expliquer pourquoi notre Jersey, tricoté uniquement avec des mailles endroit (ou envers selon le côté duquel on le regarde), roule sur ses bords libres. En effet, le tricot gagnera toujours à se courber perpendiculairement à ces bords (c'est-à-dire adopter ici un  $\gamma_c^+ < 0$ ) tant que cela n'interfère pas avec la déformation dans le plan. Modifier la topologie en tricotant un point de riz par exemple, qui alterne endroit et envers en damier, permet de modifier la courbure naturelle que prendra le tricot. En effet, avec le point de riz, comme  $\gamma_w^- = -\gamma_w^+$  et  $\gamma_c^- = -\gamma_c^+$  et qu'il y a autant de maille endroit et envers selon les rangs et les colonnes, le tricot ne gagne rien à se courber, il va donc rester plat. Changer de points pour annuler en moyenne une courbure naturelle est une technique couramment utilisée en habillement



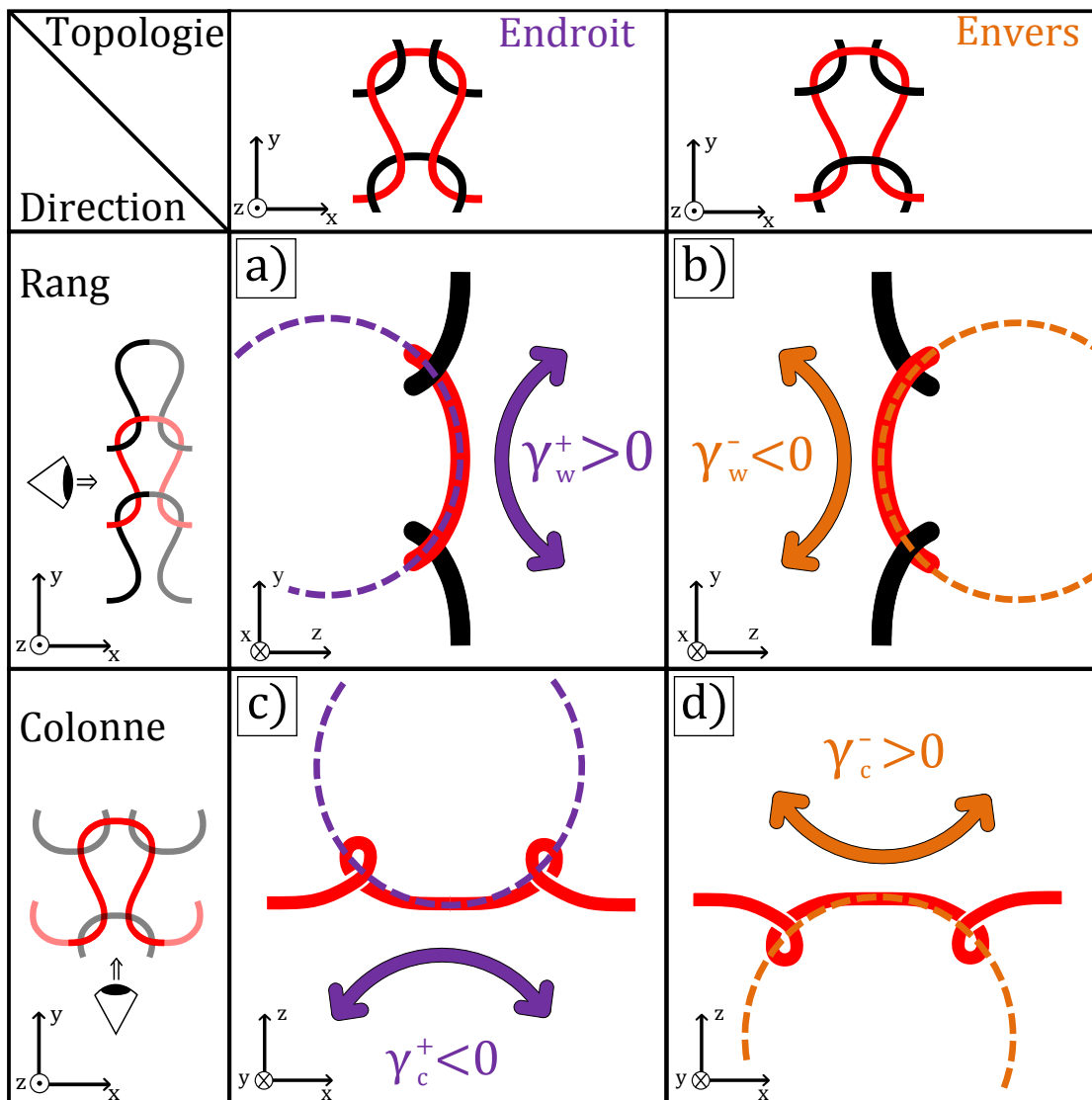


FIGURE IV.1 – Géométrie du fil perpendiculairement au plan du tricot  $(x, y)$ , selon la direction des rangs (a,b) et des colonnes (c,d) pour deux mailles de topologie différentes, la maille endroit (a,c) et envers (b,d). Les courbures  $\gamma_{c/w}^{\pm}$  et les doubles flèches associées schématisent la courbure que doit adopter le tricot pour diminuer l'énergie de flexion du fil dans la maille.

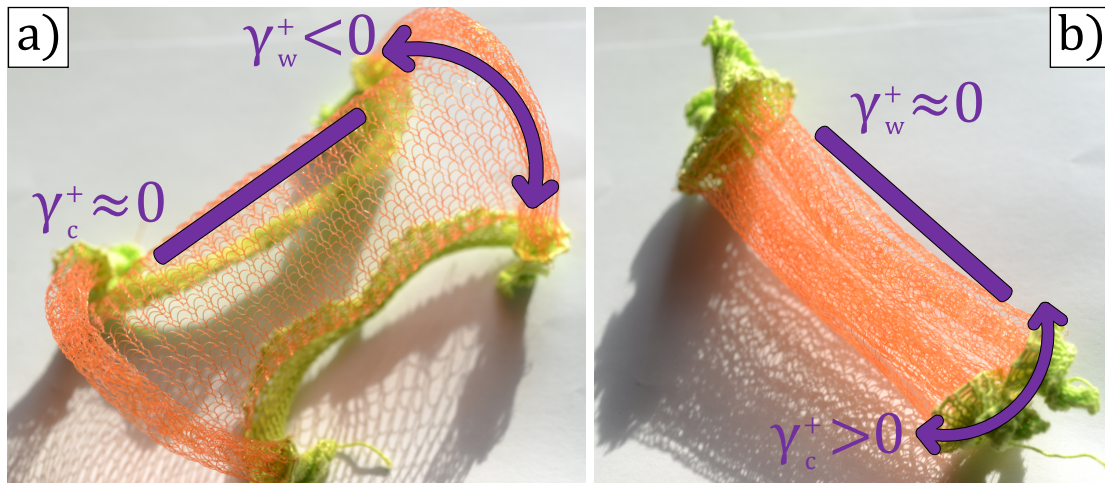


FIGURE IV.2 – Bi-stabilité d'un tricot Jersey. a) Configuration favorisant la courbure selon les colonnes  $\gamma_w$  en gardant la courbure selon les rangs  $\gamma_c$  quasiment nulle pour garder une courbure de Gauss proche de zéro, évitant ainsi les déformations dans le plan du tricot, plus coûteuses en énergie. b) Configuration favorisant la courbure selon les rangs  $\gamma_c$  en gardant la courbure selon les colonnes  $\gamma_w$  quasiment nulle, là aussi pour maintenir une courbure de Gauss proche de zéro sur tout le tricot.

pour tricoter les extrémités des manches et des cols et éviter qu'ils roulottent.

D'autre part, on remarque que pour diminuer au maximum l'énergie d'une maille endroit ou envers, il faut que le tricot adopte une courbure de signe opposée dans deux directions perpendiculaires. La courbure de Gauss de la surface,  $\gamma_w \times \gamma_c$  doit donc être différentes de 0. Or, comme mentionné dans l'introduction, la courbure de Gauss d'une surface est directement liée à une déformation dans le plan de cette surface. Dans le tricot, la différence d'échelle entre les rayons de courbures du fil au sein de sa surface et perpendiculairement à celle-ci, implique que la déformation dans le plan est bien plus coûteuse en énergie que d'en modifier sa courbure. Il n'est donc pas énergétiquement favorable pour une maille de satisfaire simultanément les deux courbures hors plan, elle va donc en favoriser une ou l'autre. En conséquence, un tricot Jersey avec tous ses bords libres et sans forces extérieures appliquées, affiche deux formes d'équilibre. Cette bi-stabilité se manifeste par une configuration favorisant la courbure selon les colonnes  $\gamma_w$  (fig. IV.2.a) et un autre la courbure selon les rangs  $\gamma_c$  (fig. IV.2.b). Les deux configurations sont stables et une certaine force doit être appliquée pour passer de l'une à l'autre.

La courbure naturelle locale d'un tricot est commandée par la topologie du point. Pour concevoir des tricots qui adoptent une forme voulue, on peut donc s'amuser à prescrire la topologie adaptée. De plus, parvenir à activer ou supprimer à souhait l'élasticité du fil permet d'ajouter un paramètre de contrôle à cette forme. Dans ce but, l'étoffe est tricotée avec un fil en alliage nickel-titane (nitinol) qui a la propriété d'être un métal dit à "mémoire de forme" [243]. Cette classe de matériaux montre de surprenantes propriétés mécaniques :

- En dessous d'une température critique (70°C pour notre nitinol) le fil se comporte comme un fil métallique standard, c'est-à-dire ductile et avec une très faible plage

de déformation élastique ( $\varepsilon < 2\%$ ). Il va donc prendre la forme qu'on lui impose et rester dans cet état.

- En revanche, chauffé au-delà de cette température critique, il va spontanément retourner dans une forme prescrite au préalable, d'où l'effet mémoire, et considérablement augmenter sa plage de déformation élastique ( $\varepsilon < 10\%$ ).

Ces propriétés prennent origine dans un changement de phase solide-solide ayant lieu dans le métal à cette température critique. Pour prescrire la forme que prendra le fil au-dessus de sa température critique, il faut le chauffer dans cette forme à une autre température beaucoup plus élevée ( $\sim 600^\circ\text{C}$  pour le nitinol). Pour notre expérience, la forme que l'on prescrit au fil est simplement rectiligne et il est ensuite tricoté à température ambiante. En le chauffant au-delà de sa température critique, le fil veut reprendre sa configuration rectiligne, ce qui revient à lui insuffler de l'élasticité. Ainsi, à température ambiante le tricot est ductile et n'a pas de forme propre, mais dès qu'il est chauffé au-delà de  $70^\circ\text{C}$ , il retourne spontanément dans sa forme qui va minimiser son énergie élastique en adoptant ses courbures naturelles.

Pour illustrer cette mise en forme, on a tricoté un fil de nitinol (Flexinol<sup>®</sup>, de la marque Dynalloy, Inc et ayant une température critique de  $70^\circ\text{C}$ ) de  $150\ \mu\text{m}$  de diamètre en alternant points envers et endroits le long des colonnes, la taille des mailles étant fixée en ajustant à 0 la molette de réglage. Les deux échantillons présentés sont composés de 10 mailles par rangée et le point est inversé toutes les 10 mailles pour le premier échantillon, toutes les 20 mailles pour le second. Cette inversion est réalisée trois fois, le premier et second échantillon ont dès lors respectivement 40 et 80 mailles le long de leurs colonnes. Leurs rangées supérieures et inférieures sont maintenues par des pinces, de sorte à promouvoir l'état qui favorise la courbure  $\gamma_w$  et non  $\gamma_c$ . Un poids est attaché à la pince inférieure ( $\sim 25\ \text{g}$  pour le premier,  $\sim 15\ \text{g}$  pour le second) pour qu'à température ambiante, quand le fil est ductile, le tricot soit complètement allongé. On vient alors chauffer ces tricots avec un pistolet thermique qui souffle un air chaud ( $T > 100^\circ\text{C}$ ) et vient donc restaurer l'élasticité du nitinol. Pour le premier échantillon, les parties du tricot envers et endroit vont alors adopter des courbures de signe opposé, les colonnes du tricot s'ondulent, diminuant de moitié son extension apparente (fig. IV.3.a). Pour le second échantillon, les parties du tricot envers et endroit adoptent aussi la courbure voulue, mais ici, l'ondulation se transforme en enroulement car la longueur des zones de topologie constante est plus grande mais leurs courbures sont la même. Le tricot va alors diviser par 4 son extension apparente.

En jouant avec la structure 3D du tricot, on arrive à obtenir des formes et des propriétés mécaniques remarquables. Avec ces exemples tout simples, on obtient déjà une certaine richesse dans les comportements obtenus avec des étoffes qui s'enroulent spontanément sur elles-mêmes, mais bien d'autres propriétés peuvent être imaginées [38, 244, 35].

### IV.1.2 Changer la métrique du tricot

En plus de la topologie des points, on peut jouer avec les propriétés géométriques des surfaces pour introduire de la courbure et induire des formes 3D. Dans le tricot, les augmentations ou diminutions qui viennent directement modifier le réseau de mailles en remaniant le nombre de rangs ou de colonnes, permettent de créer des formes très variées, notamment avec des courbures de Gauss non nulle [245, 246, 247]. En effet, en diminuant

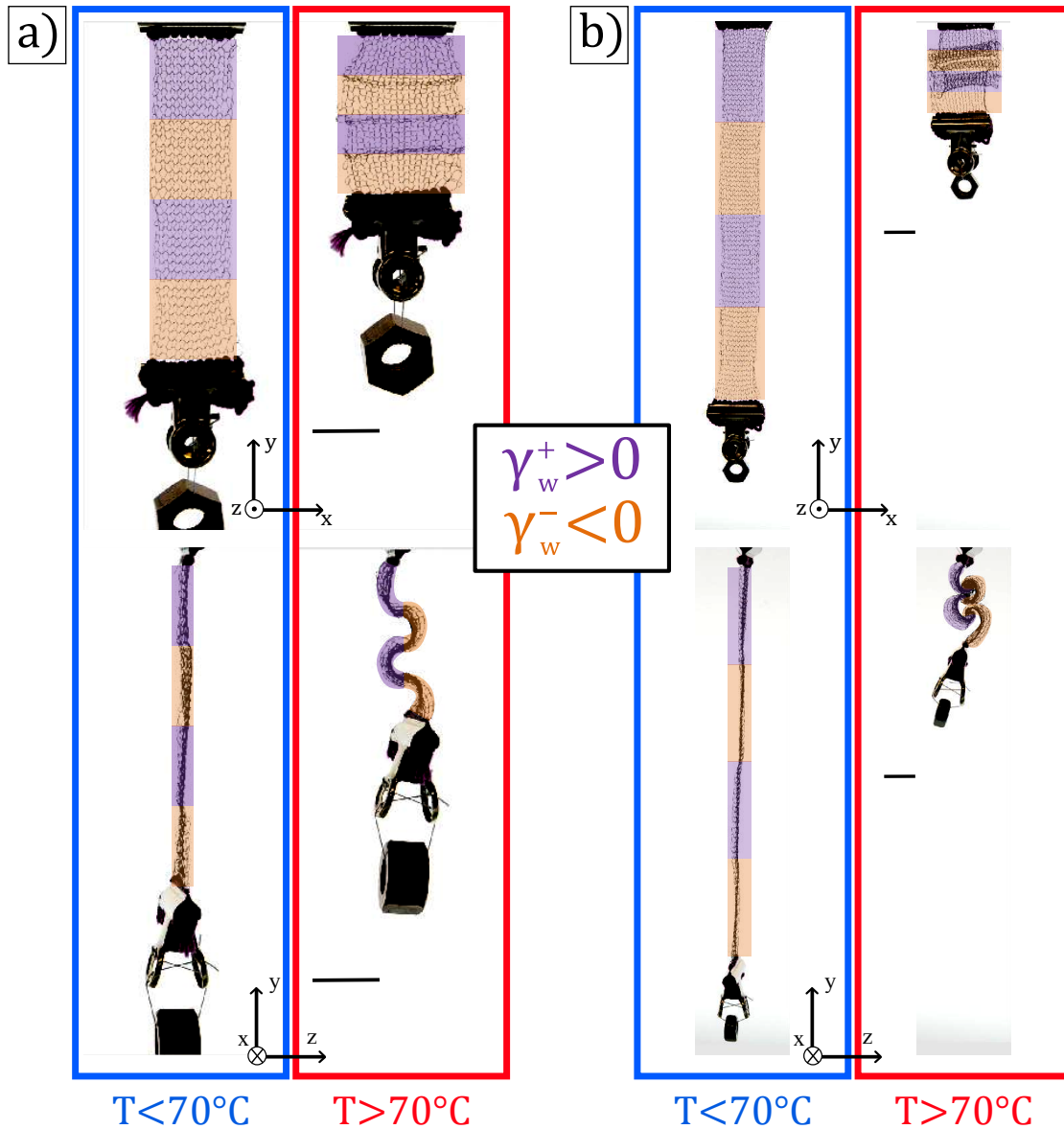


FIGURE IV.3 – a) Premier échantillon,  $10 \times 40$  (rang  $\times$  colonne) mailles de nitinol, le point est inversé toutes les 10 mailles dans la direction des colonnes. Gauche, à température ambiante le fil est ductile, le tricot est allongé par la masse accrochée. Droite, après chauffage au-dessus de la température critique du fil, celui-ci en voulant redevenir droit, retrouve son élasticité. Le tricot adopte par conséquent la forme qui minimise l'énergie élastique du fil en se courbant dans la direction imposée par la topologie du point, générant ce motif ondulant. b) Second échantillon,  $10 \times 80$  mailles de nitinol, le point est inversé toutes les 20 mailles dans la direction des colonnes. Même phénomène que pour a), sauf que l'ajout de longueur permet au tricot de s'enrouler au lieu de s'onduler. Les zones de tricot endroit sont coloriées en violet, celle envers en orange. La barre d'échelle vaut 2 mm dans chacune des photos. Les échantillons sont présentés de face (haut) et de profil (bas).

par exemple progressivement le nombre de colonnes à l'intérieure d'un tricot, rester en 2D demande alors de fortes déformations dans son plan, il va alors spontanément adopter une forme 3D (sans que la topologie du point n'entre en jeu). Cet effet rejoint l'idée de changement de métrique d'une surface qui consiste à altérer les distances d'équilibres dans le matériau pour faire émerger des formes 3D [248, 249]. La mise en forme par changement de métrique se retrouve par exemple dans les ondulations obtenues après déchirement d'un sac plastique [250, 251, 252] ou dans la croissance inhomogène des feuilles d'arbres et des pétales de fleurs [253, 254]. Dans le tricot, qui n'est pas un matériau continu, ce changement de métrique peut s'opérer par modification du réseau de mailles, mais aussi en changeant localement la longueur de fil par maille et par conséquent leurs dimensions. Pour opérer ces variations locales de longueur de fil, il ne faut pas qu'il puisse se redistribuer facilement car, les petites mailles portant plus d'énergie élastique que les grosses, une longueur de fil identique pour toutes les mailles est plus favorable énergétiquement. Dans l'exemple que l'on va présenter pour illustrer cet effet, la longueur de fil par maille est identique pour toute une rangée mais va varier d'une rangée à l'autre. Le transfert de fil est plus difficile entre rangs puisque le fil parcourt le tricot le long d'une rangée, ce changement de métrique va donc être moins sujet aux redistributions de fil. De plus, on ne peut pas trop faire autrement car notre machine à tricoter ne permet pas de varier la longueur de fil par maille au sein d'une même rangée.

On a donc tricoté une étoffe de  $40 \times 24$  (rang  $\times$  colonne) mailles, avec des "petites" mailles (réglage 1 de la molette) sur les 7 premiers et derniers rangs et des "grandes" (réglage 10 de la molette) pour les 10 rangs du milieu. Les premières et dernières rangées sont maintenues de sorte à empêcher la courbure due à la topologie  $\gamma_c$  et le rapport d'aspect du tricot permet aussi de minimiser la courbure  $\gamma_w$ , l'effet observé sera par conséquent imputable au changement de métrique. Le fil utilisé est encore du nitinol (Flexinol<sup>®</sup>, température critique 70°C) de 150  $\mu\text{m}$  de diamètre pour donner un effet activable à la forme émergente. À température ambiante, le tricot est étiré dans le sens des colonnes jusqu'à ce que la largeur de chaque rang soit identique, les petites mailles restent dès lors dans une configuration peu déformée alors que les grandes sont très allongées. Quand le tricot est chauffé au-delà de sa température critique et que le nitinol retrouve son élasticité, les petites mailles gardent la même forme alors que les grandes veulent retrouver leurs dimensions qui minimisent leurs énergies de flexion en se raccourcissant et élargissant. Cependant, elles sont entourées par les petites mailles qui gardent une largeur fixe et vont s'opposer à cet élargissement. La bande centrale de grandes mailles va donc subir une instabilité de flambement, c'est-à-dire qu'elle va sortir du plan en ondulant pour obtenir sa largeur désirée (fig. IV.4). On remarque en prime que l'ondulation n'est pas symétrique par rapport au plan du tricot avec notamment les parties  $\gamma_c < 0$  beaucoup plus courbées que celles  $\gamma_c > 0$ . Le point présenté dans l'exemple étant endroit, la courbure  $\gamma_c < 0$  contribue de surcroît à diminuer l'énergie du fil alors que  $\gamma_c > 0$  la fait augmenter, justifiant de fait cette asymétrie. L'effet de la topologie se retrouve aussi dans la courbure  $\gamma_w > 0$  qui apparaît seulement dans les zones où  $\gamma_c < 0$  mais aussi bien pour les grandes que les petites mailles.  $\gamma_w > 0$  est favorable pour le point endroit mais à cause des contraintes géométriques supplémentaires dues à la métrique, cette courbure ne se développe pas partout, engendrant pour les rangs des grandes mailles une alternance entre courbures de Gauss positive et nulle.

Même dans un matériau non continu comme le tricot, il est possible de jouer sur des



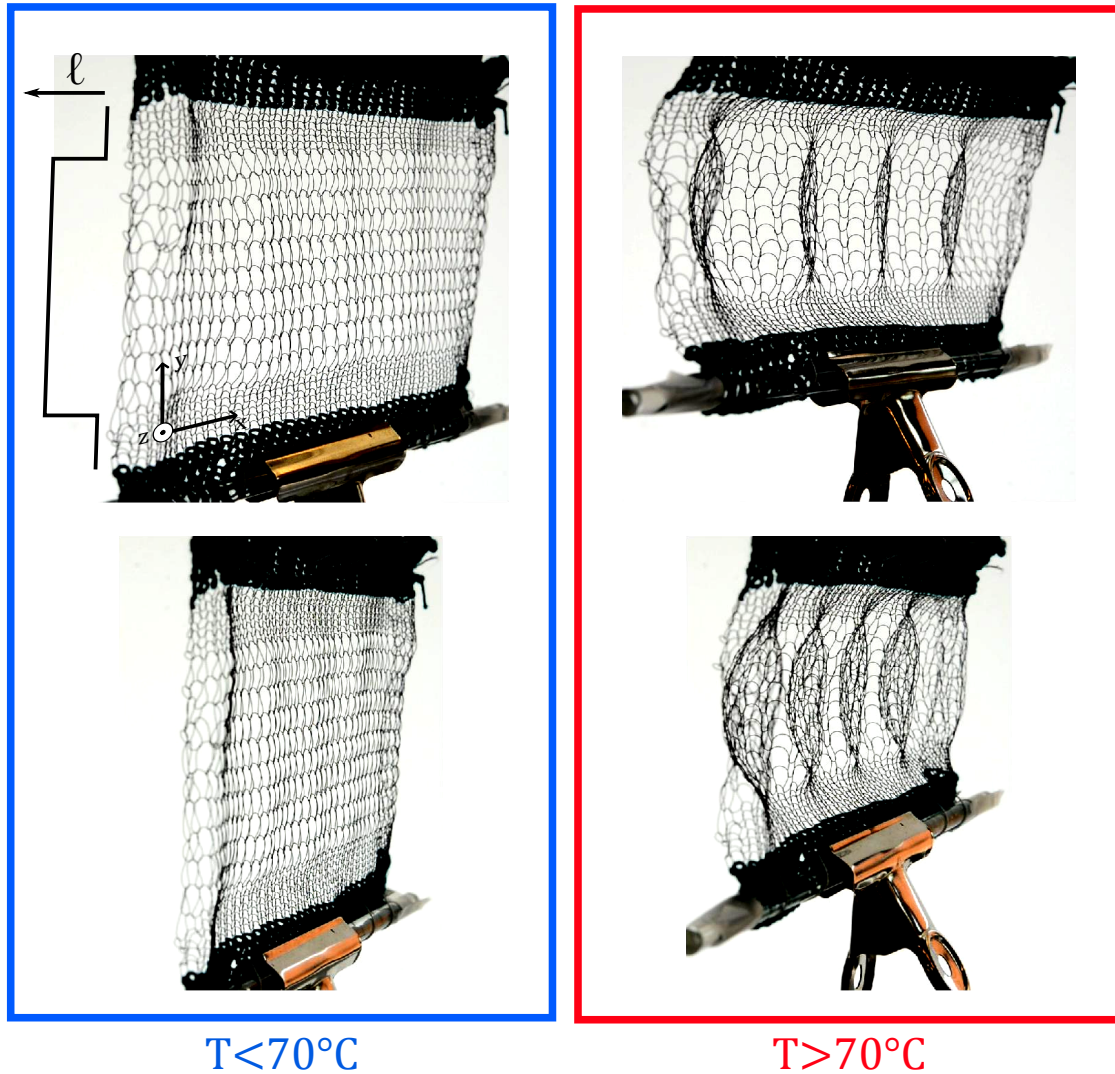


FIGURE IV.4 – Tricot de nitinol de  $40 \times 24$  (rang  $\times$  colonne), avec une courte longueur de fil  $\ell$  pour les 7 premiers et derniers rangs, et une plus longue pour 10 rangs centraux. Gauche, à température ambiante le tricot est déformé plastiquement pour que sa largeur soit uniforme. Droite, une fois l'élasticité du nitinol restaurée à haute température, les mailles centrales veulent se raccourcir et s'élargir pour diminuer leur énergie, alors que celles des bords gardent les mêmes dimensions. Pour tout de même s'élargir malgré les contraintes géométriques, les rangs centraux flambent et forment des ondulations en s'échappant du plan du tricot.

effets de métrique pour faire émerger des formes. En outre, dans le tricot, la forme finale résulte de l'effet combiné de la topologie et de la métrique, permettant une surprenante richesse de formes.

### IV.1.3 Vers une approche formelle

Le modèle mécanique mis en place dans le second chapitre ne se limitait qu'à une description 2D. Au vue de la richesse que recèlent les formes 3D du tricot, il est tentant d'essayer de généraliser ce modèle en l'étendant la troisième dimension et en y incorporant les effets de topologie et de métrique. Cette section vise donc à donner des pistes pour la généralisation du modèle pour la description de formes 3D.

Le tricot restant une surface, il est encore paramétré par ses coordonnées dans son état de référence 2D  $(x, y)$ , mais cette fois le champ de position a trois composantes :

$$\vec{u}(x, y) = \begin{cases} x + a(x, y) \\ y + b(x, y) \\ \zeta(x, y) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Avec  $a$ ,  $b$  et  $\zeta$  les champs de déplacement latéraux, longitudinaux et verticaux. La cinématique du modèle est toujours définie par les vecteurs dimensions du réseau de mailles,  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$ . Cette définition étant basée sur le réseau de référence qui reste 2D, ils gardent la même relation vis-à-vis du champ de déplacement et la contrainte topologique est inchangée  $\frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} - \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} = 0$ , on obtient donc :

$$\vec{c}(x, y) = c^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = c^* \begin{cases} 1 + a_{,x}(x, y) \\ b_{,x}(x, y) \\ \zeta_{,x}(x, y) \end{cases} \quad \vec{w}(x, y) = w^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = w^* \begin{cases} a_{,y}(x, y) \\ 1 + b_{,y}(x, y) \\ \zeta_{,y}(x, y) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Le terme d'énergie dans le plan est inchangé, car la contribution d'un changement de courbures hors plan du fil est toujours négligeable comparée aux courbures du plan. Cependant, pour rendre compte de la diminution d'énergie du fil lorsque le tricot suit les courbures naturelles dictées par la topologie, il convient de rajouter un terme d'énergie qui fait intervenir la courbure du tricot en tant que surface. Les courbures du tricot s'écrivent en fonction du déplacement vertical  $\zeta$  :  $\gamma_c = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\vec{c}}{c^*} \cdot \vec{e}_z \right]$  et  $\gamma_w = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\vec{w}}{w^*} \cdot \vec{e}_z \right]$ . L'énergie apportée par cette courbure doit être minimum lorsqu'elle est égale à la courbure naturelle  $\gamma_c^*$  et  $\gamma_w^*$  prescrite par la topologie de la maille. On écrit alors simplement cette énergie sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\gamma &= K_c c (\gamma_c - \gamma_c^*)^2 + K_w w (\gamma_w - \gamma_w^*)^2 \\ &= K_c \left( c (\gamma_c - \gamma_c^*)^2 + k_\gamma w (\gamma_w - \gamma_w^*)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Les coefficients  $K_c$  et  $K_w$  rendent comptent de la résistance à la flexion du tricot selon les rangs et les colonnes, le paramètre  $k_\gamma$  quantifie l'asymétrie entre les deux coefficients.



Les courbures naturelles dépendent directement de la courbure hors plan du fil, proportionnelle à  $\frac{d}{c^2}$  le long d'un rang et  $\frac{d}{w^2}$  pour les colonnes. On peut alors les écrire de la manière suivante :

$$\gamma_c^*(x, y) = -t(x, y)\beta_{\gamma_c}\frac{d}{c(x, y)^2} \quad \gamma_w^*(x, y) = t(x, y)\beta_{\gamma_w}\frac{d}{w(x, y)^2} \quad (\text{IV.4})$$

Les coefficients de proportionnalité sont notés  $\beta_{\gamma_c}$  et  $\beta_{\gamma_w}$ , et le champ  $t(x, y)$ , que l'on peut qualifier de champ topologique, traduit le motif de points du tricot. Il prend la valeur de +1 si le point est endroit et -1 s'il est envers.

Dans notre modèle décrivant la mécanique 2D, la longueur du fil est imposée constante pour l'ensemble du tricot. Le fil peut donc librement se répartir entre les mailles. Si on veut maintenant imposer une métrique locale, il faut renforcer cette contrainte en imposant une longueur de fil constante par maille, le fil ne peut alors se redistribuer qu'entre rang et colonne au sein d'une même maille. La contrainte locale donne donc directement une relation entre  $c$  et  $w$  :

$$\ell(x, y) = c(x, y) + \delta w(x, y) \quad (\text{IV.5})$$

La métrique imposée lors du tricotage est donc traduite par le champ  $\ell(x, y)$  et s'exprime par une forte contrainte locale.

Le Lagrangien du tricot, sans force extérieure additionnelle, a par conséquent l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\vec{c}, \vec{w}] = & \tilde{Y} \iint_{x,y} dx dy \left( \frac{1}{c} + \frac{\beta}{w} \right) \\ & + K_c \iint_{x,y} dx dy \left[ c \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\vec{c}}{c^*} \cdot \vec{e}_z \right] + t\beta_{\gamma_c} \frac{d}{c^2} \right)^2 + k_{\gamma} w \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\vec{w}}{w^*} \cdot \vec{e}_z \right] - t\beta_{\gamma_w} \frac{d}{w^2} \right)^2 \right] \\ & + \iint_{x,y} dx dy \alpha [\ell - (c + \delta w)] - \iint_{x,y} dx dy \vec{T}(x, y) \cdot \left( \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Avec  $t(x, y)$  et  $\ell(x, y)$  les champs scalaires décrivant respectivement la topologie et la métrique du réseau de mailles. Le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de longueur de fil devient alors un champ scalaire local  $\alpha(x, y)$ . Le problème devient donc significativement plus complexe que l'approche 2D, mais contient peut-être une base pour prédire la forme 3D d'un tricot, pour une topologie et une métrique données. Il peut aussi servir de point de départ pour le problème inverse, c'est-à-dire trouver quelle topologie et/ou métrique sont nécessaires pour obtenir une forme voulue.

## IV.2 La métamorphose du Jersey

Au gré du tricotage d'échantillons, on s'est aperçu que le tricot pouvait sortir du plan d'une autre manière qu'en adoptant une courbure. Au niveau de la maille même, le fil peut spontanément changer de géométrie en adoptant une forme tri-dimensionnelle sans séparation d'échelle entre son épaisseur et ses dimensions dans le plan. Cette "métamorphose" a notamment été étudiée plus en détail par Léo Régnier lors de son stage au laboratoire et cette section reprend une partie de ses observations et expériences.

### IV.2.1 Deux configurations : le point Jersey et le point "clos"

En cherchant à concevoir un tricot-modèle, la taille des mailles a été augmentée le plus possible pour séparer au mieux les échelles. Toutefois, lorsque la longueur de fil par maille devient trop grande, l'aspect du Jersey au sortir de la machine ne ressemble plus au réseau bien défini de boucles comme il est représenté habituellement. La trajectoire du fil semble échapper à une structure bien définie même si la topologie reste conservée car lorsque le tricot est mis sous tension, le motif usuel est restauré. Cette observation a, dans un premier temps, été simplement vue comme une limite haute à la taille des mailles. Ce changement de configuration a de nouveau attiré notre intérêt lorsque l'on s'est aperçu que des tricots présentant le motif standard après tricotage et pendant plusieurs semaines d'expériences, commençaient à manifester spontanément ce changement de configuration sur certaines zones après des mois sans y avoir touché. Ce phénomène étant spontané, il doit procéder d'une minimisation de l'énergie élastique du fil, mais pouvant mettre un certain temps à apparaître, le frottement doit aussi jouer un rôle.

Pour étudier ce phénomène un peu plus en détail, j'ai tricoté une série de tricots en augmentant progressivement la taille des mailles. Pour observer au mieux le changement de configuration, il faut que le fil porte beaucoup d'énergie élastique et présente peu de frottement fil-fil. Le fil choisi est en nylon de  $190\ \mu\text{m}$  de diamètre et enrobé d'une couche de téflon qui décroît fortement le frottement (marque Suffix Ultraknot<sup>®</sup>) et est tricoté sur  $51 \times 51$  mailles. Pour un réglage de longueur de fil par maille de 3, tout le tricot reste dans sa configuration standard, pour 4, le changement de configuration apparaît sur quelques zones du tricot mais pas dans son ensemble. Avec une taille de 5, l'ensemble du tricot change de configuration. Dans tous les cas lorsque le tricot est mis sous tension, il reprend progressivement la configuration habituelle (fig. IV.5.a).

Quand on se place à la marge de ce changement d'aspect du fil, on s'aperçoit que la nouvelle configuration possède bien une structure identifiable qui se répète. Une maille vient quasiment disparaître en rapprochant les deux mailles au-dessus et en dessous d'elle, fournissant un excès de fil qui se redistribue à ses voisines du même rang (fig. IV.5.b). Ces voisines sortent alors du plan pour former chacune une grande boucle. Cette structure subit toutefois de nombreuses variations. D'abord il semble qu'elle évolue continûment de la structure habituelle car on peut observer des structures intermédiaires entre les deux. Ensuite, ce changement de configuration modifie considérablement son voisinage en terme de longueur de fil et de contraintes imposées par les croisements. Les transformations de configuration ont donc tendance à se regrouper en zones. À l'intérieur de ces zones, cette structure s'adapte à celle de ses voisines pour donner un ensemble cohérent. Cette configuration particulière ne semble pas, à ma connaissance, avoir été décrite dans la littérature, peut être car les conditions pour l'obtenir sont rarement celles de l'utilisation habituelle des tricots. Pour donner un nom à cette structure, Frédéric a suggéré de l'appeler le point "cloux" en référence au nom de l'auteur de cette thèse. Je suggère un nom légèrement différent, le point "clos" ("closed stitch" en anglais) qui, dans le même esprit s'inspire de l'origine étymologique du nom Poincloux, mais qui rend aussi compte du fait que cette structure semble se refermer sur elle-même par rapport au Jersey.

Lorsque tout le tricot est dans la configuration point "clos", la taille apparente du tricot dans la direction des colonnes est quasiment divisée de moitié, alors que la largeur apparente reste sensiblement la même. Tout l'excès de fil passe dans la structure 3D de la

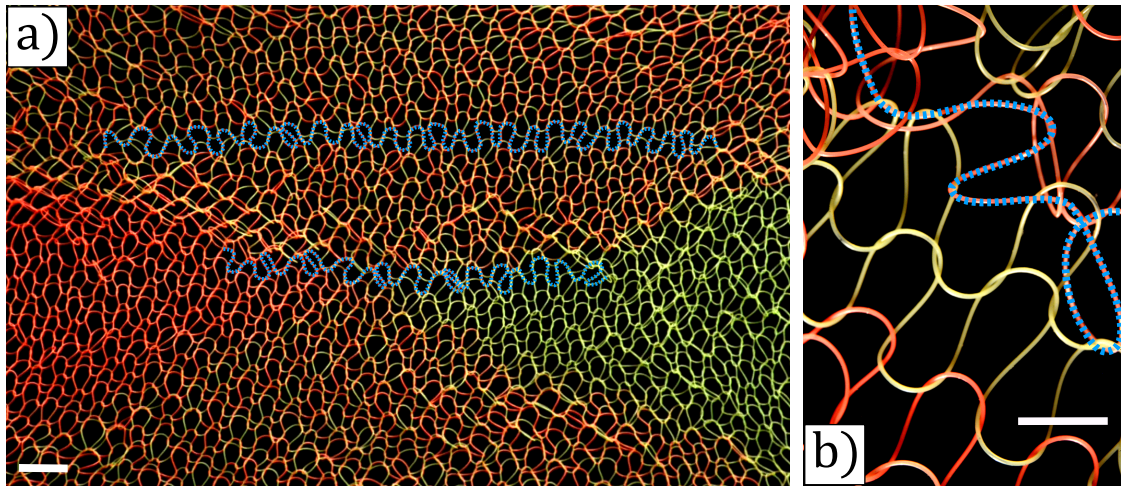


FIGURE IV.5 – a) Tricot de  $51 \times 51$  mailles, monofilament nylon Sufix Ultraknot<sup>®</sup> de diamètre  $190 \mu\text{m}$ , réglage 5 de la machine à tricoter. Il est légèrement étiré de sorte à montrer une mosaïque de zones en configuration standard Jersey et en zone de point "clos". Les trajectoires du fil le long de deux rangs sont accentuées. On remarque alors les zones où la trajectoire suit bien la structure du Jersey et les endroits où elle commence à s'en éloigner et à prendre une structure 3D. Les zones dont la configuration a été le plus fortement modifiée se situent entre les deux lignes accentuées, mais il n'est plus possible d'y suivre la trajectoire sur une simple projection dans le plan  $(x, y)$ , la trajectoire du fil sortant considérablement du plan. La barre d'échelle vaut 2 cm. b) Élargissement sur une zone marquant la frontière entre le point Jersey (bas) et le point "clos" (haut). La trajectoire du fil dans le point "clos" est mise en évidence et on voit clairement la disparition quasiment complète d'une maille, ses deux voisines l'entourant forment alors deux grandes boucles qui sortent du plan. La barre d'échelle fait 5 mm de long. Le fil alterne de couleur, entre jaune et orange, tous les 1 m, d'où les changements de couleur que l'on observe. Photographies de Léo Régnier.

trajectoire, ce qui se traduit par une épaisseur apparente beaucoup plus élevée ( $\sim 5$  mm, comparé à  $\sim 0.5$  mm pour le Jersey) mais homogène, sans effet de flambement de la surface. Dans un sens, la surface du tricot peut s'emmagasiner dans son épaisseur à la manière de certaines étoffes non-tissées [25].

#### IV.2.2 Mécanismes et quantification

On va maintenant se pencher sur la compréhension des mécanismes à l'œuvre dans ce changement de configuration. Les seuls ingrédients apparemment présents sont encore l'élasticité et le frottement du fil. Le changement de configuration s'effectue spontanément, il doit donc faire diminuer l'énergie élastique du système, cependant il n'apparaît pas partout et pas immédiatement, le frottement joue donc probablement le rôle de frein à ce changement.

Si l'on compare la courbure que prend le fil entre le point Jersey et le point clos (fig. IV.5.b), il est clair que la courbure du fil est bien plus faible dans ce dernier. En

disparaissant, la maille perd quasiment toute courbure et en redistribuant le fil, les boucles voisines peuvent s'affranchir de certains contacts et donc s'élargir en envahissant la 3D, diminuant aussi l'énergie de flexion. Toutefois, ce changement d'orientation du fil doit s'accompagner systématiquement d'une légère torsion. Qualitativement, en passant dans la configuration point clos, le fil semble perdre beaucoup d'énergie de flexion mais acquérir un peu d'énergie de torsion. Le bilan apparaît donc largement favorable pour cette nouvelle configuration et joue le rôle de moteur au changement.

En revanche, le passage entre les deux configurations nécessite un transfert très conséquent de fils entre les mailles qui doit vaincre les forces de frottement aux croisements pour y parvenir. Un des éléments limitants semble donc être la friction du fil qui empêche le fil de circuler librement entre les mailles pour permettre le changement de forme. Cette interprétation permet d'expliquer pourquoi ce phénomène n'est observable qu'avec les mailles de grandes dimensions, alors que la perte d'énergie associée est effective quelque soient leurs tailles. Plus une maille est petite, plus l'énergie qu'elle stocke est importante et plus la valeur des forces entre fils est élevée. Or, le seuil de glissement d'un contact frottant est directement proportionnel à ces forces. Par conséquent, plus la maille est petite, plus le transfert de fil entre mailles est difficile et rend le changement de configuration plus ardu. En revanche, le frottement seul ne permet pas d'expliquer pourquoi les points clos ont tendance à se regrouper entre eux sur des zones plus ou moins étendues, au lieu d'apparaître de manière homogène. Une piste de réflexion pour expliquer ces inhomogénéités consiste à remarquer que le point clos vient briser la symétrie du réseau en sélectionnant certaines mailles qui disparaissent et d'autres qui forment de larges boucles. On peut imaginer que cette asymétrie prend racine dans celles déjà présentes à cause de petits défauts du réseau. Une asymétrie peut alors former un point de "nucléation" à partir de laquelle elle va grossir, portée par le gain en énergie, et venir perturber son voisinage. Le changement de configuration se propage alors de proche en proche poussé par l'élasticité du fil et déclenché par brisure de symétrie. Cette propagation peut être stoppée par un point particulièrement frottant ou contraint, ou encore en rencontrant une autre zone de point clos ayant choisi un chemin d'asymétrie différent.

De plus, la configuration peut être changée de manière réversible et continue en modifiant l'élongation globale du tricot. En effet, le point clos se refermant sur lui-même en faisant disparaître des rangs, il diminue fortement la taille du tricot dans la direction des colonnes. En prenant un tricot entièrement en point clos au repos et en le tirant dans cette direction, on peut inverser le changement de configuration pour ne retrouver que du Jersey (fig. IV.6). En diminuant de nouveau l'élongation, le tricot retourne progressivement dans le point clos. Un pas pour comprendre un peu mieux ce changement passe par quantifier la proportion de tricots en point Jersey ou clos au gré de l'élongation du tricot. L'aspect des deux phases étant très différent, l'une très ordonnée l'autre plus brouillonne, une piste pour les quantifier peut passer par la transformée Fourier spatiale de la photographie du tricot, un peu à la manière des figures de diffraction qui permettent de détecter des changements de structure dans un réseau cristallin (fig. IV.6, inserts).

Pour finir, l'effet de raccourcissement engendré par le changement de configuration peut faire échos au phénomène bien connu de rétrécissement des habits tricotés après passages répétés à la machine à laver [70, 93]. Même si les paramètres des tricots pour l'habillement les portent peu au changement de configuration (mailles serrées et fils de laine ou coton peu élastique et très frottant), l'action de la machine à laver, avec l'eau qui

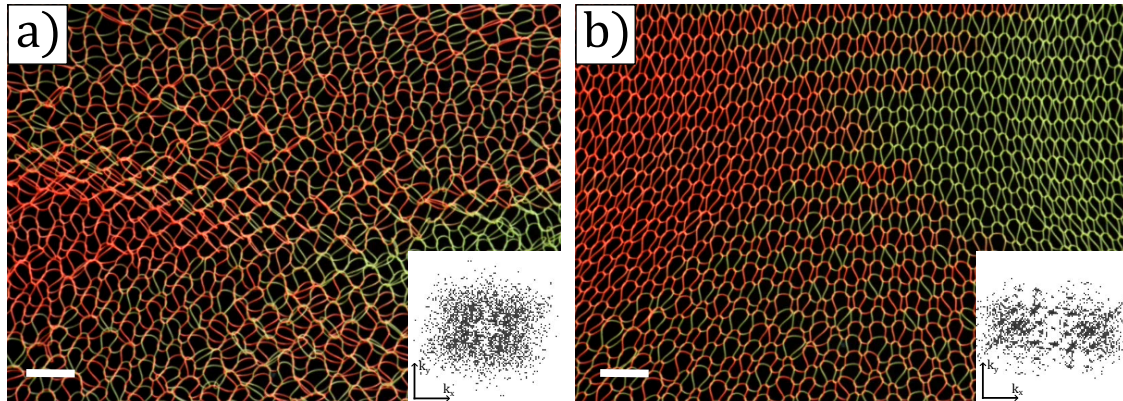


FIGURE IV.6 – Même tricot que dans la figure précédente (fig. IV.5), au repos dans la figure a) qui présente en grande partie des points clos, et allongé d'environ 100% dans la figure b) où le point Jersey est dominant. Inserts, transformée de Fourier spatiale de ces images,  $k_x$  et  $k_y$  sont les fréquences spatiales dans les directions  $x$  et  $y$ . Les maxima traduisant la structure ordonnée sont bien présents pour le point Jersey, mais quasiment absent pour le point clos. Barre d'échelle de 2 cm pour les deux photos. Photographies et analyses d'images par Léo Régner.

permet aux contacts de se décrocher et l'action mécanique qui fait explorer aux mailles de nombreuses configurations, peut déclencher l'apparition (au moins partielle) du point clos, participant ainsi au rétrécissement de notre pull préféré.

### IV.3 Conclusion

Cette courte partie prend un peu de recul par rapport aux deux précédentes en mettant en évidence, de manière qualitative, la relation entre structure et forme tridimensionnelle d'un tricot. La structure est donnée par la topologie et la géométrie du fil qui viennent en quelque sorte coder dans le tricot l'information sur la forme qu'il doit adopter. Ce code est alors interprété par l'élasticité du fil qui permet de le transcrire dans la forme du tricot par la minimisation de son énergie, comme montré avec le nitinol. Tricoter s'apparente donc à de la programmation, avec un langage qui s'exprime en points et tailles de mailles et la minimisation de l'énergie élastique jouant le rôle de compilateur, pour au final obtenir la forme voulue.

En outre, un phénomène qui apparaissait comme une déplaisante limitation à la confection de mes tricots, s'est révélé être un sujet d'une grande richesse. Ce changement de configuration entre point Jersey et point clos fait intervenir l'élasticité 3D du fil, des redistributions de longueurs, une brisure de symétrie, un aspect collectif de propagation et le tout assujéti par le frottement aux contacts. Le travail présenté ne fait qu'effleurer le problème. Sa compréhension approfondie et sa relation avec le rétrécissement des tricots, initiées par Léo Régner, constituent une perspective prometteuse de cette thèse.



# Chapitre V

## Conclusion et perspectives

Ce dernier chapitre a moins vocation à rappeler les principaux résultats qu'à pointer les compléments et perspectives envisageables à ce travail.

Le premier aboutissement de cette thèse consiste en la définition d'un tricot-modèle et la construction d'une théorie minimale permettant d'en expliquer la réponse mécanique sans paramètre ajustable. Toutefois, cette théorie manque d'une comparaison plus approfondie avec la mécanique standard des plaques qui permettrait de pointer en détail les propriétés véritablement intrinsèques au tricot. La construction de cette théorie s'étant révélée plus fastidieuse qu'escompté, pour ne pas limiter ma thèse à ce problème, j'ai préféré me tourner vers l'aspect statistique. Par conséquent, la priorité n'a pas été mise sur la consolidation de la théorie en étudiant plus systématiquement le comportement de chaque paramètre avec par exemple, la taille du tricot, le diamètre ou type de fil, ou encore la vitesse de chargement mais aussi la sensibilité des formes finales à ces différents paramètres. Pour ce qui est de l'utilisation de cette théorie pour des problématiques en lien direct avec des applications, elle risque d'être assez limitée du fait du nombre d'hypothèses simplificatrices sous-jacentes. En revanche, les paramètres introduits et leur signification physique bénéficient d'une certaine robustesse. Ils peuvent alors servir de guides pour la conception de tricots techniques en pointant au moins l'influence de tel ou tel paramètre de fabrication sur la mécanique finale. En tout cas, ces travaux auront au moins le mérite, comme l'attestent les publications dans des revues de physique fondamentale et les nombreux retours que j'ai pu avoir au cours de conférences, d'avoir attiré l'attention d'une certaine partie de la communauté des physiciens sur la richesse souvent insoupçonnée que recèle le tricot en particulier, mais aussi les textiles de manière générale.

Ensuite, la deuxième partie de nos travaux a permise de mettre en évidence que, de l'effet combiné de l'élasticité et de la friction, pouvait émerger une phénoménologie d'avalanches dans les fluctuations de la réponse mécanique d'un tricot. De plus, le tricot montre des propriétés hybrides entre différents systèmes avec son réseau ordonné, ses lignes de glissement et la propagation de proche en proche dans les directions de redistribution de la déformation. Il peut donc apporter une contribution originale à la compréhension des mécanismes gouvernant les propriétés des avalanches. Dans nos travaux, la comparaison s'est limitée aux matériaux amorphes et aux tremblements de terre. Les tremblements de tricots partagent l'aspect statistique et le mécanisme de propagation avec les milieux amorphes, mais la morphologie des lignes de glissement se rapproche fortement des failles sismiques, justifiant, pour moi, la dénomination de *tremblements de tricot* ou *knitquakes*

en anglais. En revanche, même si le parallèle avec les séismes ouvre beaucoup de pistes d'analyses, la réciproque, c'est-à-dire de savoir si les résultats obtenus sur nos tricots sont transférables aux failles sismiques est beaucoup moins probable. L'avancée des recherches sur les séismes est telle que le tricot apparaît comme un système trop simplifié pour modéliser la tectonique des plaques par exemple. Toutefois, il serait très intéressant de pousser la comparaison avec d'autres systèmes, comme le dépiégeage d'un milieu élastique ou la dynamique des dislocations dans les cristaux. Les perspectives qu'offrent les tremblements de tricot passent aussi par l'étude de caractéristiques qui leur sont propres. Le glissement a été seulement observé à l'échelle de la maille, il serait aussi fondamental de le regarder à l'échelle du contact et en passant par exemple par la reconstruction de la propagation contact après contact. Cela passe aussi par une analyse beaucoup plus poussée de la dynamique, les résultats présentés ici étant issus d'expériences d'abord conçues pour accumuler des statistiques, donc avec une échelle de temps limitée. Cette dynamique semble être aussi riche du point de vue externe avec le signal de force, qu'interne avec la propagation des lignes de glissement. Une étape supplémentaire envisageable serait d'obtenir simultanément la dynamique précise de la force et de la déformation. Les résultats présentés se limitent presque exclusivement à des résultats expérimentaux, il reste donc un large champ d'ouvert pour des analyses théoriques et numériques. Ces approches peuvent passer par l'écriture et la résolution d'une équation similaire à celles utilisées pour les milieux amorphes (eq. (III.26)) mais adaptées à l'élasticité particulière du tricot, ou encore dans sa version numérique sur réseau.

Le tricot est, en outre, très bien adapté à l'étude de l'impact des défauts dans sa réponse statistique. Ces défauts peuvent être d'ordre structurel, en modifiant par exemple le réseau de mailles avec des diminutions ou augmentations, la topologie des contacts, ou encore la courbure locale du tricot. Ils peuvent aussi simplement consister à modifier les propriétés d'un ou plusieurs contacts en le rendant plus ou moins frottant avec un liquide plus ou moins mouillant, ou même carrément en le soudant. Pour finir, un point qui n'a pas non plus été abordé en détail dans cette thèse est la transition entre la réponse à frottement dominant et celle à élasticité dominante, qui nous a permis de définir un état initial de déformation. Au passage de cette élongation particulière, les contacts passent d'un glissement quasiment ininterrompu à un glissement fortement intermittent, alors que la réponse mécanique globale passe d'une absence d'élasticité (presque "liquide") à une réponse élastique bien définie. Ce passage peut faire penser à un phénomène de *percolation*, où tous les contacts se mettent à ne plus glisser en un court laps d'élongation.

La partie sur l'envahissement de la troisième dimension par le tricot est particulièrement succincte car elle relate les résultats obtenus lors de projets à durées limitées dans le temps. Le développement plus quantitatif de ces résultats présentés constituent néanmoins des perspectives très intéressantes. La mise en évidence de l'effet de la topologie des mailles sur la courbure naturelle n'est pas du tout un résultat nouveau, mais la version simplifiée présentée laisse penser qu'une quantification, au moins avec des arguments d'ordre de grandeur, est envisageable. À ma connaissance, l'interaction entre métrique et topologie pour faire émerger spontanément des formes complexes reste assez peu considérée. Le véritable défi réside surtout dans la généralisation de la théorie 2D à la forme 3D. Si les équations qui en résultent ne sont pas trop obscures, et surtout que leurs solutions se comparent bien avec l'expérience, cet outil pourrait s'avérer très utile pour la conception de tricots techniques qui ont besoin de formes précises. En effet, il serait alors aussi



possible de résoudre le problème inverse qui, pour une forme arbitraire voulue, fournit la topologie et la métrique du tricot qui permet de s'en approcher au mieux. Cependant, le modèle étant continu, il faut que les variations de propriétés se fassent plus lentement que la taille caractéristique des mailles, il se posera alors des questions de validité pour les motifs qui varient rapidement comme les côtes. Il serait aussi instructif de comparer les équations obtenues à celle gouvernant la mécanique standard des plaques. Là aussi, pointer les différences fondamentales permettrait de spécifier les caractéristiques intrinsèques au tricot. Concernant le changement de configuration du fil à l'échelle de la maille, passant du Jersey habituel au point "clos", même si un important effort de compréhension a été effectué par Léo Régner, de très nombreuses questions restent ouvertes. Une première série de questions concerne le changement d'une maille isolée et la description précise des deux configurations, les variations d'énergie associées, le chemin emprunté pour passer de l'une à l'autre ou encore les paramètres qui déclenchent ou empêchent le changement. Une deuxième série de questions se rapportent plus à l'aspect collectif de ce phénomène avec l'apparition d'un centre de nucléation d'une phase point clos et sa propagation, la brisure de symétrie associée ou encore l'interaction entre différentes phases. De manière encore plus fondamentale, on peut se poser la question de savoir si ce changement de configuration peut s'apparenter à une transition de phase, avec l'élongation du tricot comme paramètre contrôlant la transition. Ce phénomène ayant aussi pour conséquence directe le rétrécissement du tricot, comprendre à quelle hauteur il joue un rôle dans le rétrécissement bien connu des habits tricotés après plusieurs passages à la machine à laver est aussi une perspective de recherche avec des applications directes très intéressantes.

En guise de conclusion, j'espère que cette thèse, avec les questions qu'elle soulève et les éléments de réponse qu'elle apporte, saura trouver l'intérêt de la communauté de recherche textile, mais aussi celui des physiciennes et physiciens travaillant sur la mécanique des métamatériaux, ou encore, celles et ceux étudiant les systèmes à avalanches.



# Annexe A

## Solution analytique de $a_0$ par décomposition en série de Fourier

L'équation à résoudre est :

$$a_{0,xx} + \nu\chi a_{0,yy} = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec les conditions aux bords suivante :

$$\forall x, y = \pm \frac{L_w^*}{2} \quad a_0 = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \quad (\text{A.2})$$

$$\forall y, x = \pm \frac{L_c^*}{2} \quad a_{0,x} = -\chi \quad (\text{A.3})$$

De plus, la symétrie des conditions de chargement et du tricot impose que  $a_0$  soit impair en  $x$ ,  $a_0(-x, y) = -a_0(x, y)$  et pair en  $y$ ,  $a_0(x, -y) = a_0(x, y)$ . L'équation étant elliptique, on peut proposer une solution sous la forme d'une série de fonction trigonométrique et hyperboliques avec les bonnes symétries :

$$a_0(x, y) = -x\chi + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin\left((2n+1)\pi \frac{x}{L_c^*}\right) \cosh\left((2n+1)\pi \sqrt{\nu\chi} \frac{y}{L_c^*}\right) \quad (\text{A.4})$$

Cette expression vérifie directement l'équation différentielle  $a_{0,xx} + \nu\chi a_{0,yy} = 0$  ainsi que la condition sur les bords latéraux,  $a_{0,x}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y) = -\chi$ . Il reste maintenant à trouver les coefficients  $a_n$  qui vont permettre de vérifier la condition sur les bords haut et bas. Pour cela, il suffit d'exprimer  $a_0$  sur ces bords là :

$$a_0\left(x, y = \pm \frac{L_w^*}{2}\right) = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \iff x = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{\frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} - \chi} \cosh\left((2n+1)\pi \sqrt{\nu\chi} \frac{L_w^*}{2L_c^*}\right)}_{\lambda_n} \sin\left((2n+1)\pi \frac{x}{L_c^*}\right) \quad (\text{A.5})$$

Cette équation prend donc la forme d'un développement en série de Fourier de la fonction  $x$  sur la base de  $\sin\left((2n+1)\pi\frac{x}{L_c^*}\right)$ . Les coefficients  $\lambda_n$  de cette base sont alors facilement calculables :

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= \frac{2}{L_c^*} \int_{-\frac{L_c^*}{2}}^{\frac{L_c^*}{2}} x \sin\left((2n+1)\pi\frac{x}{L_c^*}\right) dx \\
 &= \frac{2}{L_c^*} \left( \underbrace{\left[ -\frac{L_c^*}{(2n+1)\pi} \cos\left((2n+1)\pi\frac{x}{L_c^*}\right) \right]_{-\frac{L_c^*}{2}}^{\frac{L_c^*}{2}}}_{=0} + \frac{L_c^*}{(2n+1)\pi} \int_{-\frac{L_c^*}{2}}^{\frac{L_c^*}{2}} \cos\left((2n+1)\pi\frac{x}{L_c^*}\right) dx \right) \\
 &= \frac{2L_c^*}{\pi^2(2n+1)^2} 2 \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{4L_c^*}{\pi^2(2n+1)^2} (-1)^n \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

Or  $\lambda_n$  peut aussi être exprimé en fonction de  $a_n$  :  $\lambda_n = \frac{a_n}{\frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} - \chi} \cosh\left((2n+1)\pi\sqrt{\nu\chi}\frac{L_w^*}{2L_c^*}\right)$ , d'où l'expression de  $a_n$  :

$$a_n = \frac{4L_c^*(-1)^n \left(\frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} - \chi\right)}{\pi^2(2n+1)^2 \cosh\left((2n+1)\pi\sqrt{\nu\chi}\frac{L_w^*}{2L_c^*}\right)} \tag{A.7}$$

Pour finalement obtenir la solution analytique pour  $a_0$ .

$$\begin{aligned}
 a_0(x, y) &= 4L_c^* \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{((2n+1)\pi)^2} \sin\left((2n+1)\pi\frac{x}{L_c^*}\right) \\
 &\quad \times \left( -\chi + \left(\frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} - \chi\right) \frac{\cosh\left((2n+1)\pi\sqrt{\nu\chi}\frac{y}{L_c^*}\right)}{\cosh\left((2n+1)\pi\sqrt{\nu\chi}\frac{L_w^*}{2L_c^*}\right)} \right) \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

## Annexe B

# Solution analytique de $a_0$ par transformée de Schwartz-Christofel

L'équation à résoudre est :

$$a_{0,xx} + \nu\chi a_{0,yy} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Avec les conditions aux bords :

$$a_0(x, y = \pm \frac{L_w^*}{2}) = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \quad (\text{B.2})$$

$$a_{0,x}(x = \pm \frac{L_c^*}{2}, y) = -\chi \quad (\text{B.3})$$

Pour alléger les expression dans la suite et adimensionner le problème, on opère au changement de variables suivant :

$$x = X \frac{L_c^*}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$y = Y \frac{\sqrt{\nu\chi} L_c^*}{2} \quad (\text{B.5})$$

$$a_0 = \frac{L_c^*}{2} \left( \left( \chi + \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} \right) A + \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} X \right) \quad (\text{B.6})$$

$$L = \frac{L_w^*}{\sqrt{\nu\chi} L_c^*} \quad (\text{B.7})$$

L'équation devient donc :

$$A_{XX} + A_{YY} = 0 \Leftrightarrow \Delta A = 0 \quad (\text{B.8})$$

Avec  $\Delta$  le Laplacien 2D. Les conditions aux bords :

$$A(X, Y = \pm L) = 0 \text{ et } A_X(X = \pm 1, Y) = -1 \quad (\text{B.9})$$

La solution générale d'un Laplacien s'écrit :

$$A(X, Y) = \text{Im } F(Z) \quad (\text{B.10})$$

où  $Z = X + iY$  et  $F(Z)$  est une fonction analytique du domaine  $[-1, 1] \times [-L, L]$  et qui satisfait les bords :

$$\operatorname{Im} F(Z) = 0 \text{ pour } Z = X \pm iL \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} F(Z) = 1 \text{ pour } Z = \pm 1 + iy \quad (\text{B.11})$$

On procède maintenant à la transformation conforme des coordonnées  $Z = X + iY$  associé au domaine  $[-1, 1] \times [-L, L]$ , dans la moitié supérieure du plan complexe décrit par  $\zeta = \xi + i\eta$ . En utilisant la transformée de Schwarz-Christoffel :

$$Z'(\zeta) = \frac{dZ}{d\zeta} = \frac{-\phi}{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - \omega^2)}} \quad (\text{B.12})$$

$$Z(\zeta) = -iL - \phi \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \omega^2)}} \quad (\text{B.13})$$

où  $\omega > 1$  et  $\phi$  sont des nombres réels. Les points  $\zeta = \xi = \pm 1$  correspondent aux points  $Z = \pm 1 - iL$  et les points  $\zeta = \xi = \pm\omega$  correspondent aux points  $Z = \pm 1 + iL$ . Dans le but de déterminer  $\omega$  et  $\phi$ , les équations suivante doivent être satisfaites :

$$-iL + \phi \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\omega^2 - \xi^2)}} = 1 - iL \quad (\text{B.14})$$

$$-iL + \phi \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\omega^2 - \xi^2)}} + i\phi \int_1^\omega \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(\omega^2 - \xi^2)}} = 1 + iL \quad (\text{B.15})$$

que l'on peut réécrire :

$$\phi \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\omega^2 - \xi^2)}} = 1 \quad (\text{B.16})$$

$$\phi \int_1^\omega \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(\omega^2 - \xi^2)}} = 2L \quad (\text{B.17})$$

Par conséquent, les solutions pour  $\omega$  et  $\phi$  sont données par

$$\phi^{-1} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\omega^2 - \xi^2)}} \quad (\text{B.18})$$

$$\int_1^\omega \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(\omega^2 - \xi^2)}} = 2L \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\omega^2 - \xi^2)}} \quad (\text{B.19})$$

Les conditions aux bords sur  $F(Z)$  deviennent des conditions aux bords sur  $F(\zeta)$  sur l'axe des réels de  $\zeta$ . Elles sont données par :

$$\operatorname{Im} F(\xi) = 0 \text{ for } |\xi| > \omega \text{ or } |\xi| < 1 \quad (\text{B.20})$$

$$\operatorname{Re} F'(\xi) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \text{ for } 1 < |\xi| < \omega \quad (\text{B.21})$$

Qui peuvent être reformulées sous la forme :

$$F'(\xi + i\epsilon) - \overline{F'}(\xi - i\epsilon) = 0 \text{ for } |\xi| > \omega \text{ or } |\xi| < 1 \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{F'(\xi + i\epsilon)}{Z'(\xi + i\epsilon)} - \frac{\overline{F'}(\xi - i\epsilon)}{\overline{Z'}(\xi - i\epsilon)} = 2i \text{ for } 1 < \xi < \omega \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{F'(\xi + i\epsilon)}{Z'(\xi + i\epsilon)} - \frac{\overline{F'}(\xi - i\epsilon)}{\overline{Z'}(\xi - i\epsilon)} = -2i \text{ for } -\omega < \xi < -1 \quad (\text{B.24})$$

La solution générale est donc donnée par :

$$\frac{F'(\zeta)}{Z'(\zeta)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} k_n \zeta^n + \left[ -\int_{-\omega}^{-1} + \int_1^{\omega} \right] \frac{1}{t - \zeta} \frac{dt}{\pi} \quad (\text{B.25})$$

où les  $k_n$  sont des constantes réelles. En conséquence de quoi,

$$F'(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \frac{dZ}{d\zeta} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} k_n \zeta^n + \log \frac{\zeta^2 - \omega^2}{\zeta^2 - 1} \right] \quad (\text{B.26})$$

ou encore,

$$F'(Z) = \frac{dF}{dZ} = \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} k_n \zeta^n + \log \frac{\zeta^2 - \omega^2}{\zeta^2 - 1} \right] \quad (\text{B.27})$$

Sachant que  $Z \sim 1/\zeta$  pour  $\zeta \rightarrow \infty$ , on doit obtenir  $k_n = 0$  pour  $n \neq 0$  pour éviter mes pôles de  $F'(Z)$  à  $Z = iL$ . Grâce aux symétries, la constante  $k_0$  peut être fixée en imposant  $F'(0) = 0$ . On obtient donc finalement :

$$F'(Z) = \frac{dF}{dZ} = \frac{1}{\pi} \log \frac{(\zeta^2 - \omega^2)}{\omega^2(\zeta^2 - 1)} \quad (\text{B.28})$$

D'où la solution à notre équation adimensionnée :

$$X + iY = Z(\zeta) = -iL - \phi \int_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \omega^2)}} \quad (\text{B.29})$$

$$A(X, Y) = \text{Im } F(Z) = -\phi \text{Im} \left[ \int_0^{\zeta} \frac{\log \left[ \frac{((t/\omega)^2 - 1)/(t^2 - 1)}{\sqrt{(t^2 - \omega^2)(t^2 - 1)}} \right] dt}{\pi} \right] \quad (\text{B.30})$$

Cette solution est implicite mais peut être estimée numériquement grâce à la Toolbox Matlab pour les transformation de Schwarz-Christoffel [255].





## Annexe C

# Résolution numérique des équations de $a_1$ et $b_1$

Les équations de  $a_1$  et  $b_1$  peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (1 - 3a_{0x})a_{1xx} + \nu\chi \left(1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) b_{0y}\right) a_{1yy} + \nu(1 - \chi)a_{0y}b_{1yy} \\ = -\nu a_{0yy} \left(3\chi a_{1x} + (1 - \chi)b_{1y} + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) b_{0y}\right) b_{1xx} + \frac{\nu}{\chi} (1 - 3b_{0y}) b_{1yy} + \frac{\nu}{\chi} (1 - \chi)a_{0y}a_{1yy} \\ = \frac{\nu}{\chi} (1 - \chi)a_{0yy} (\chi b_{1x} - a_{1y}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

avec les conditions aux bords :

$$\forall x \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = \pm \frac{L_w^0}{2} \end{cases} \quad \forall y \quad \begin{cases} a_{1,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{2(3\chi+1)} \\ b_{1,x} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Pour résoudre numériquement ce système d'équations, il faut commencer par discrétiser cet espace dans lequel il doit être résolu. Le maillage choisi est simplement carré avec un nombre de cases qui peut être choisi arbitrairement sans lien avec le nombre de mailles du tricot. L'indice  $n_x \in [1, N_x]$  va s'étendre dans la direction des  $x$  et  $n_y \in [1, N_y]$  dans la direction  $y$ . Les dérivées spatiales sont discrétisées en fonction de ces indices tel que :  $\frac{\partial f(n_x, n_y)}{\partial x} = \frac{f(n_x+1, n_y) - f(n_x-1, n_y)}{2dx}$  et  $\frac{\partial^2 f(n_x, n_y)}{\partial x^2} = \frac{f(n_x+1, n_y) + f(n_x-1, n_y) - 2f(n_x, n_y)}{dx^2}$ , avec  $dx = \frac{L_c^*}{N_x}$  et on obtient des formules équivalentes pour les dérivées suivant  $y$ ,  $dy = \frac{L_w^*}{N_y}$ . Les équations précédentes discrétisées peuvent alors prendre la forme suivante :

$$a_1(n_x, n_y)A + b_1(n_x, n_y)B = C \quad (\text{C.4})$$

$$a_1(n_x, n_y)\tilde{A} + b_1(n_x, n_y)\tilde{B} = \tilde{C} \quad (\text{C.5})$$

Avec les coefficients  $A, B, C, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  qui ne dépendent plus des valeurs de  $a_1$  ni de  $b_1$  à la position  $(n_x, n_y)$ , mais dans leur voisinage. Par contre, ces coefficients dépendent des

valeurs de  $a_0$  et  $b_0$  et de leur dérivées à la position  $(n_x, n_y)$  qui sont supposées être des fonctions connues de ce problème. Les coefficients ont les expressions suivantes :

$$A = -2 \left( \frac{1 - 3a_{0,x}(n_x, n_y)}{dx^2} + \frac{\nu\chi \left(1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) b_{0,y}(n_x, n_y)\right)}{dy^2} \right) \quad (C.6)$$

$$B = -2 \frac{\nu(1 - \chi)a_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} \quad (C.7)$$

$$\tilde{A} = -2 \frac{\nu}{\chi} \frac{(1 - \chi)a_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} \quad (C.8)$$

$$\tilde{B} = -2 \left( \frac{1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) a_{0,x}(n_x, n_y)}{dx^2} + \frac{\nu}{\chi} \frac{1 - 3b_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} \right) \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} C = & -\nu a_{0,yy}(n_x, n_y) \left( 3\chi \frac{a_1(n_x + 1, n_y) - a_1(n_x - 1, n_y)}{2dx} + \right. \\ & (1 - \chi) \frac{b_1(n_x, n_y + 1) - b_1(n_x, n_y - 1)}{2dx} (n_x, n_y) + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} \left. \right) \\ & - \frac{1 - 3a_{0,x}(n_x, n_y)}{dx^2} (a_1(n_x + 1, i) + a_1(n_x - 1, n_y)) \\ & - \frac{\nu\chi \left(1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) b_{0,y}(n_x, n_y)\right)}{dy^2} (a_1(n_x, n_y + 1) + a_1(n_x, n_y - 1)) \\ & - \frac{\nu(1 - \chi)a_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} (b_1(n_x, n_y + 1) + b_1(n_x, n_y - 1)) \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} = & \frac{\nu}{\chi} (1 - \chi) a_{0,yy}(n_x, n_y) \left( \chi \frac{b_1(n_x + 1, n_y) - a_1(n_x - 1, n_y)}{2dx} (n_x, n_y) - \right. \\ & \left. \frac{a_1(n_x, n_y + 1) - a_1(n_x, n_y - 1)}{2dx} (n_x, n_y) \right) \\ & - \frac{1 + \left(\frac{1}{\chi} - 1\right) a_{0,x}(n_x, n_y)}{dx^2} (b_1(n_x + 1, n_y) + b_1(n_x - 1, n_y)) \\ & - \frac{\nu}{\chi} \frac{1 - 3b_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} (b_1(n_x, n_y + 1) + b_1(n_x, n_y - 1)) \\ & - \frac{\nu}{\chi} \frac{(1 - \chi)a_{0,y}(n_x, n_y)}{dy^2} (a_1(n_x, i + 1) + a_1(n_x, n_y - 1)) \end{aligned} \quad (C.11)$$

Le système d'équations précédent n'est qu'un système classique à deux équation et deux inconnues dont les solutions sont  $\forall n_x \times n_y \in [2, N_x - 1] \times [2, N_y - 1]$  :

$$a_1(n_x, n_y) = \frac{C\tilde{B} - \tilde{C}B}{A\tilde{B} - \tilde{A}B} \quad (C.12)$$

$$b_1(n_x, n_y) = - \frac{C\tilde{A} - \tilde{C}A}{A\tilde{B} - \tilde{A}B} \quad (C.13)$$

Toutefois, notre modèle étant à la base linéarisé en  $a_{0,x}, b_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,y}$ , il faut prendre des précautions avec les dénominateurs des expressions de  $a_1(n_x, n_y)$  et  $b_1(n_x, n_y)$  qui peuvent s'annuler car elles sont intervenir ces dérivées. Pour éviter ce problème et rester cohérent

avec les développements précédents les expressions de  $a_1(n_x, n_y)$  et  $a_1(n_x, n_y)$  sont aussi linéarisé au premier ordre. Les conditions aux bords associés sont les suivantes :

$$a_1(n_x, 1) = a_1(n_x, N_y) = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$a_1(1, n_y) = a_1(2, n_y) + \frac{\tilde{\alpha}_1}{3\tilde{\alpha}_0 - 1} dx \quad (\text{C.15})$$

$$a_1(N_x, n_y) = a_1(N_x - 1, n_y) - \frac{\tilde{\alpha}_1}{3\tilde{\alpha}_0 - 1} dx \quad (\text{C.16})$$

$$b_1(n_x, 1) = -\frac{L_w^0}{2} \quad (\text{C.17})$$

$$b_1(n_x, N_y) = \frac{L_w^0}{2} \quad (\text{C.18})$$

$$b_1(1, n_y) = b_1(2, n_y) \quad (\text{C.19})$$

$$b_1(N_x, n_y) = b_1(N_x - 1, n_y) \quad (\text{C.20})$$

La solution finale est obtenue par itération, le nombre d'itération est nommée  $t$ . En commençant par  $a_1(x, y) = 0$  et  $b_1(x, y) = y \frac{L_w^0}{L_w^*}$  comme état initial pour l'itération  $t = 0$ , les conditions aux bords sont dans un premier temps imposées, puis les valeurs de  $a_1(n_x, n_y)$  et  $b_1(n_x, n_y)$  sont actualisée pour tous les points en prenant la valeur des coefficients  $A, B, C, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  de l'itération  $t - 1$ . L'itération est répétée jusqu'à ce que la solution pour  $a_1$  et  $b_1$  convergent, ce qui en pratique on considère atteint lorsque l'erreur relative maximale entre deux itération pour  $a_1$  et  $b_1$  devient inférieure à  $10^{-6}$ .

Pendant, cette méthode numérique est sensible aux oscillations qui seront amplifiées si elles commencent à apparaître. Ce genre de problème arrive notamment dans les coins du tricot où par exemple les conditions aux bords pour  $a_1$  sont incompatibles pour la case en position  $(n_x = 1, n_y = 1)$  par exemple. Cela ne pose pas de problème analytiquement car les solutions sont exprimées sous forme de limites, mais numériquement cela a tendance à faire diverger les solutions. Pour remédier à ce problème, la solution retenue consiste à "adoucir" les conditions aux bords de  $a_1$  pour éviter les changements abruptes. Ainsi la conditions  $a_{1,x}(x = \pm \frac{L_c^* y}{2}) = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{2(3\chi+1)}$  est transformée en  $a_{1,x}(x = \pm \frac{L_c^* y}{2}) = -\frac{\tilde{\alpha}_1 S(y)}{2(3\chi+1)}$  avec  $S(y)$  une fonction telle que  $S(\pm \frac{L_w^*}{2}) \approx 0$  pour être compatible avec les conditions en  $\pm \frac{L_w^*}{2}$ , et ailleurs  $S(y) \approx \tilde{\alpha}_1$  avec une variations pas trop rapide vers les extrémités. On a choisi une fonction du type sigmoïde qui permet de bien respecter ces conditions :

$$S(y) = \frac{1}{\left(1 + e^{\left(y + \frac{L_w^*}{2} + \delta y\right)\sigma}\right) \left(1 + e^{\left(y - \frac{L_w^*}{2} - \delta y\right)\sigma}\right)} \quad (\text{C.21})$$

Avec  $\delta y$  qui contrôle la position de  $S(y) = 0.5$  et  $\sigma$  qui gère la pente maximale de la courbe. Ces paramètre ont des valeurs typiques de  $\delta y = 7$  mm et  $\sigma = 0.3$ , ce qui place la transition entre 0 et  $\tilde{\alpha}_1$  à environ 3 mailles du bords et une transition qui prend quelques mailles à se faire. Faire varier ces paramètres autour de ces valeurs a un impact négligeable sur le résultat final.



## Annexe D

# Champ de déplacement autour d'un centre de nucléation d'avalanche

Les équations à résoudre sont :

$$0 = \frac{\partial^2 v^x}{\partial x^2} + \nu\chi \frac{\partial^2 v^x}{\partial y^2} \quad (\text{D.1})$$

$$0 = \frac{\partial^2 v^y}{\partial y^2} + \frac{\nu}{\chi} \frac{\partial^2 v^y}{\partial x^2} \quad (\text{D.2})$$

Avec les conditions aux bords suivantes :

$$v^x(x = \pm r_n, y = 0) = \pm \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{D.3})$$

$$v^x(x = 0, y = \pm r_n) = \mp \omega_0 r_n \quad (\text{D.4})$$

$$v^y(x = \pm r_n, y = 0) = \pm \omega_0 r_n \quad (\text{D.5})$$

$$v^y(x = 0, y = \pm r_n) = \mp \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{D.6})$$

$$v^x(x, y \rightarrow \infty) = v^y(x, y \rightarrow \infty) = 0 \quad (\text{D.7})$$

Les équations pour  $v^x$  et  $v^y$  sont indépendantes l'une de l'autre. Pour résoudre ces équations on va se placer dans un système de coordonnées polaires qui est toutefois différent légèrement différent pour les deux équations à cause de l'asymétrie entre les équations.

Pour  $v^x$ , on introduit le changement de variables suivant :

$$X_r = x \quad Y_r = \frac{y}{\sqrt{\nu\chi}} \quad (\text{D.8})$$

$$r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{Y_r}{X_r}\right) \quad (\text{D.9})$$

L'équation et ses conditions aux bords s'écrivent alors de la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v^x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v^x}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$v^x(r = r_n, \theta = 0) = \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{D.11})$$

$$v^x(r = r_n, \theta = \pi) = -\varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{D.12})$$

$$v^x\left(r = \frac{r_n}{\sqrt{\nu\chi}}, \theta = \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \omega_0 r_n \quad (\text{D.13})$$

$$v^x(r \rightarrow \infty, \theta) = 0 \quad (\text{D.14})$$

On cherche alors une solution de la forme  $v^x(r, \theta) = \frac{V_1}{r^k} \cos(k\theta) + \frac{V_2}{r^k} \sin(k\theta)$  qui est vérifiée directement l'équation différentielle, il reste alors trois paramètres à ajuster,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $k$ , pour satisfaire les conditions aux bords. Les conditions  $v^x(r = r_n, \theta = 0) = \varepsilon_{d0} r_n$  et  $v^x(r = r_n, \theta = \pi) = -\varepsilon_{d0} r_n$  amènent à l'équation  $\cos(k\pi) = -1$ . Le déplacement s'annule à l'infini, ce qui impose  $\alpha > 0$  et on choisit la solution dominante qui soit à plus longue portée possible, c'est à dire  $k = 1$ . On peut alors en déduire  $V_1 = r_n^2 \varepsilon_{d0}$ . Les conditions  $v^y(x = 0, y = \pm r_n) = \mp \varepsilon_{d0} r_n$  implique directement  $V_2 = -\frac{\omega_0 r_n^2}{\sqrt{\nu\chi}}$ . L'expression finale s'écrit alors :

$$v^x(r, \theta) = \frac{r_n^2}{r} \left( \varepsilon_{d0} \cos(\theta) - \frac{\omega_0}{\sqrt{\nu\chi}} \sin(\theta) \right) \quad (\text{D.15})$$

$$= r_n^2 \frac{x\varepsilon_{d0}\nu\chi - y\omega_0}{x^2\nu\chi + y^2} \quad (\text{D.16})$$

Pour  $v^y$ , on procède au changement de variables suivant :

$$X_r = x \quad Y_r = y\sqrt{\frac{\chi}{\nu}} \quad (\text{D.17})$$

$$r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{Y_r}{X_r}\right) \quad (\text{D.18})$$

Ce qui donne l'équation différentielle et conditions aux bords suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v^y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v^y}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$v^y(r = r_n, \theta = 0) = \omega_0 r_n \quad (\text{D.20})$$

$$v^y(r = r_n, \theta = \pi) = -\omega_0 r_n \quad (\text{D.21})$$

$$v^y\left(r = r_n\sqrt{\frac{\chi}{\nu}}, \theta = \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \varepsilon_{d0} r_n \quad (\text{D.22})$$

$$v^y(r \rightarrow \infty, \theta) = 0 \quad (\text{D.23})$$

En utilisant la même procédure que pour  $v^x$ , on trouve la solution analytique suivante :

$$v^y(r, \theta) = \frac{r_n^2}{r} \left( \omega_0 \cos(\theta) - \varepsilon_{d0} \sqrt{\frac{\chi}{\nu}} \sin(\theta) \right) \quad (\text{D.24})$$

$$= r_n^2 \frac{x\omega_0\frac{\chi}{\nu} - y\varepsilon_{d0}}{x^2\frac{\chi}{\nu} + y^2} \quad (\text{D.25})$$



# Annexe E

## Articles publiés

1. Geometry and Elasticity of a Knitted Fabric,  
Samuel Poincloux, Mokhtar Adda-Bedia and Frédéric Lechenault,  
Physical Review X, – Publié le 22 Juin 2018.
2. Crackling Dynamics in the Mechanical Response of Knitted Fabrics,  
Samuel Poincloux, Mokhtar Adda-Bedia and Frédéric Lechenault,  
Physical Review Letters, – Publié le 30 Juillet 2018
3. **La mécanique du tricot**,  
Samuel Poincloux,  
Article en ligne de vulgarisation pour la Société Française de Physique,  
Le Rayon, – Publié le 09 Octobre 2018

**Geometry and Elasticity of a Knitted Fabric**Samuel Poincloux,<sup>1,\*</sup> Mokhtar Adda-Bedia,<sup>2</sup> and Frédéric Lechenault<sup>1</sup><sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, PSL Research University, Sorbonne University, CNRS, F-75231 Paris, France*<sup>2</sup>*Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Université Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France* (Received 25 January 2018; revised manuscript received 16 May 2018; published 22 June 2018)

Knitting is not only a mere art and craft hobby but also a thousand-year-old technology. Unlike weaving, it can produce loose yet extremely stretchable fabrics with almost vanishing rigidity, a desirable property exhibited by hardly any bulk material. It also enables the engineering of arbitrarily shaped two- and three-dimensional objects with tunable mechanical response. In contrast with the extensive body of related empirical knowledge and despite a growing industrial interest, the physical ingredients underlying these intriguing mechanical properties remain poorly understood. To make some progress in this direction, we study a model tricot made of a single elastic thread knitted into a common pattern called stockinette. On the one hand, we experimentally investigate its tensile response and measure local displacements of the stitches during deformation. On the other hand, we derive a first-principle mechanical model for the displacement field based on the yarn-bending energy, the conservation of its total length, and the topological constraints on the constitutive stitches. Our model solves both the shape and mechanical response of the knit and agrees quantitatively with our measurements. This study thus provides a fundamental framework for the understanding of knitted fabrics, paving the way to thread-based smart materials.

DOI: [10.1103/PhysRevX.8.021075](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021075)Subject Areas: Materials Science, Mechanics,  
Soft Matter**I. INTRODUCTION**

Because of the wide range of applications, the advancement in knitting technology, and the availability of high-performance fibers, knitted materials are commonly employed in various innovative areas. For instance, they are intensively utilized in the textile industry [1], advanced engineering [2], and biomedical and biomimetic applications [3,4]. A basic knit consists in a single yarn that is topologically constrained to form intertwined loops, or stitches, from which its effective dimensionality originates. While the topological properties of a knitted fabric are usually unaltered, the stitches can undergo large deformations due to their curved nature and the fact that the yarn can slide from one stitch into the neighboring ones. Those properties also manifest in the outstanding drapability of the resultant knitted fabrics, allowing for the shaping of complex curved composite components. Moreover, while the constituent yarn shows significant resistance to elongation, a

knitted fabric can endure large strains in response to small applied tractions. Pulling on a typical scarf can easily produce deformations of the order of 100%, while the same force applied on the yarn itself would only deform it by a few percent. A stretched knit also exhibits a characteristic catenary shape, similarly to incompressible bulk materials.

Although most of the efforts have focused on woven fabrics, the peculiar properties of knitted materials have induced increasing interest in modeling their mechanical behavior. Several early studies have addressed the fact that a knit is comprised of a discrete network of repetitive stitches characterized by a given topology. On the one hand, geometrical models have focused on the geometry of the loops formed by a stitch and the resulting dimensional properties of the fabric [5–9]. They consist in deriving a set of parameters and equations for modeling the crossing of yarns in a stitch as a set of inextensible curves. On the other hand, mechanical models that take into account both the elasticity of the yarn and the topology of the stitch have been proposed. To assess the equilibrium shape of a stitch and its mechanical properties, many variations of Euler-Bernoulli beam theory or beam and truss models have been proposed over the past years [10–17]. Although those studies allow for modeling local equilibrium configurations and mechanical properties of a single stitch, they do not describe the mechanics of a whole fabric unless

\*spoincloux@lps.ens.fr

*Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.*

homogeneous deformations are assumed. Recently, new approaches emerged that describe the fabric as a grid where stitches are base units [18–20]. Each stitch is subdivided into constituent elements; each element represents a mechanical equivalent of yarn when it undergoes deformations and length redistribution during the fabric extension. The deformation of the whole fabric is determined by imposing boundary conditions and kinematic relationships between adjacent cells. Finally, robust and efficient cloth simulation has long been a research focus in the computer graphics community. Progress in numerical modeling allowed for the development of yarn-based simulation techniques for realistic and efficient dynamic simulation of knitted clothing and their mechanical modeling [21,22]. However, producing the required yarn-level models remains a challenge for this type of approach.

Despite a long history of domestic use and intensive industrial applications, few approaches have focused on deriving the mechanical properties of knits and their morphology from fundamental principles. To this purpose, we crafted a fabric using a model elastic yarn knitted into a stockinette stitch pattern [23]. Then, we implemented tensile test experiments under different loading configurations to measure the mechanical response of the fabric, while monitoring its shape using high-precision imaging. Furthermore, we developed a two-dimensional model relying on a description of the stitch field from which we derived the mechanical properties of the whole fabric. Our approach is based on the regular structure of the stitches that imposes topological constraints during the deformation of the fabric. The model invokes scale separation between the yarn diameter and the stitch extension and neglects the stretching and twisting of the yarn. These assumptions allow us to focus on the bending energy of the yarn, which, combined with conservation of its total length and kinematic conditions on neighboring stitches, yields general equations for the mechanics of the fabric. The equations of the model are solved for the corresponding experimental situations, and the predicted deformation field is found to be in agreement with experimental data. Although our model is specifically applied to the stockinette stitch pattern, it provides a general framework for the study of a large class of knits.

## II. EXPERIMENTAL STUDY

As a model experiment, we use a thin nylon thread and a mechanical knitting machine to manufacture a  $51 \times 51$  stitch fabric in the topologically simplest knit pattern known as stockinette, or “point Jersey” [see Fig. 1(a)]. In the plane of the fabric, stitches are organized along rows and columns, and the corresponding directions are usually called “course” and “wale,” respectively. During mechanical tests, the fabric is stretched along the wale direction while clamped along the course direction using two parallel rows of 51 equidistant nails with the same spacing as the

one between the needles of the knitting machine. In this configuration, the upper and lower rows have a fixed length  $L_c^0 = 227$  mm, and the size  $L_w$  in the wale direction is varied during the experiment (see Sec. VI). A sample is cyclically stretched uniaxially up to a maximum extension and then released back to its initial state. As shown in Fig. 1(b), the mechanical response of the fabric can be separated into two regions: the first with large variability over the cycles and almost vanishing stiffness, and a second one, starting at  $L_w \equiv L_w^0 = 125$  mm, showing a stiffening behavior, together with a large hysteresis between loading and unloading phases.

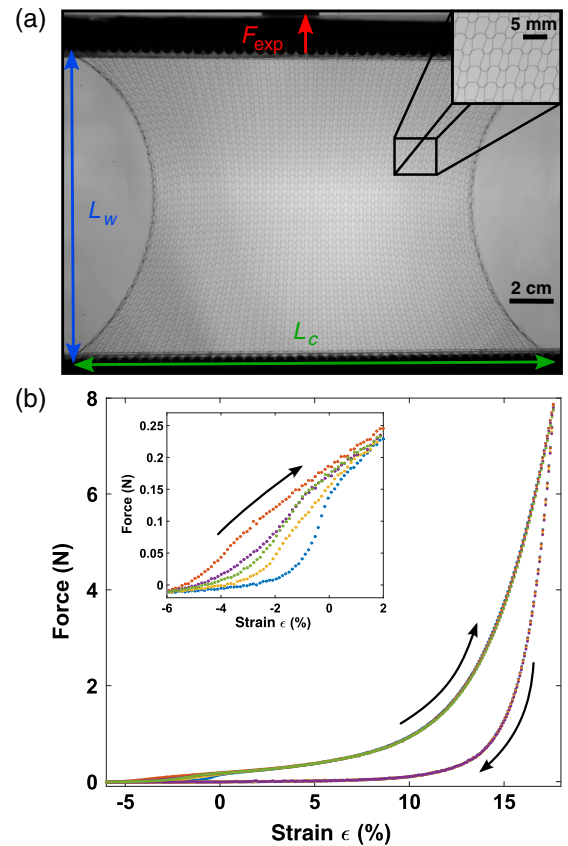


FIG. 1. A knitted fabric is stretched along the wale direction. Clamps hold the upper and lower rows, preventing any displacement of the corresponding stitches. The mechanical response is probed using a traction bench equipped with a dynamometer, and the stitch pattern is imaged through a digital camera (see Sec. VI and Movie S1 in Supplemental Material Ref. [24]). (a) Picture of the deformed stockinette-knit fabric showing the topology of the stitches and their layout in the typical catenary shape. The global dimensions of the fabric  $L_c$  and  $L_w$  as well as the direction of the pulling force are shown. (b) Mechanical response of the fabric over 5 loading-unloading cycles, each cycle labeled by a different color. The strain is defined by  $\epsilon = (L_w - L_w^0)/L_w^0$  such that the origin  $\epsilon = 0$  corresponds to the extension above which the force signal is reproducible over the cycles. The inset zooms in on the force curves close to  $\epsilon = 0$  and for different cycles during the loading phase.

Figure 1(b) also shows that the work performed to return to the initial state is nearly half that needed to stretch the fabric, yet the response is consistently elastic and repeatable over the cycles, as the fabric always retrieves its initial shape. This dissipative behavior results from self-friction of the yarn, which contributes oppositely in the loading and unloading phases [25]: When one stretches the fabric, the frictional part of the force points down, thus adding to the elastic load, but when one unloads the sample, this force points upwards, thus subtracting from the elastic part of the load. This effect yields different stiffening behavior upon loading and unloading of the fabric. Finally, as far as plastic deformation goes, we have checked that during deformation of the knit, the thread does not undergo irreversible deformation; it remains straight upon unknitting the fabric after the deformation cycles.

Together with force measurements, the morphology of the fabric is recorded with a high-resolution camera. After image segmentation, the geometric center of each stitch is tracked individually during the stretching and unloading phases of the cycles. As shown in Fig. 2(a), a striking feature during the deformation of the fabric is that all the stitch centroids follow quite straight trajectories as long as  $\epsilon \geq 0$ , where  $\epsilon = (L_w - L_w^0)/L_w^0$  is the global stretching of the fabric. This allows us to write the individual positions of the stitches as  $\vec{u}(j, i) = \vec{u}_0(j, i) + \epsilon \vec{u}_1(j, i)$ , where the indices  $(j, i)$  designate the stitch position along the course and wale directions, respectively, and the vector field  $\vec{u}$  is defined with respect to a common reference point in the  $(x, y)$  plane of the fabric. For  $\epsilon > 0$  and within the whole range of applied stretching, the displacement field of the stitches is described by a strain-independent vector field  $\vec{u}_1$  whose components  $(a_1, b_1)$  can be retrieved experimentally [see Fig. 2(b)]. The same affine behavior of the displacement field is observed during the unloading phase (see Movie S2 in Supplemental Material Ref. [24]). This confirms that the hysteretic behavior in the elastic response of the fabric originates from interyarn friction and could therefore be included in a global stiffness constant while maintaining the same local displacement field of the stitches in loading and unloading phases.

The vector field  $\vec{u}_0$  describes a reference state of the system for which  $L_w = L_w^0$ . In this configuration, the fabric is already deformed, deviating from a homogeneous state, thus indicating the presence of nonuniform internal stresses. In fact, the observation that the free edges of the fabric spontaneously depart out of the  $(x, y)$  plane by winding is a signature of an in-built prestress. Moreover, for  $L_w < L_w^0$  the interyarn contacts are not established everywhere; thus, stitches can slide without further deformation, providing the fabric with very low stiffness. Thanks to the affine behavior, the prestressed state associated with the vector field  $\vec{u}_0$  can be interpreted as the result of an elongation of the fabric from an absolute, homogeneous, reference configuration for which  $L_w \equiv L_w^* < L_w^0$  and

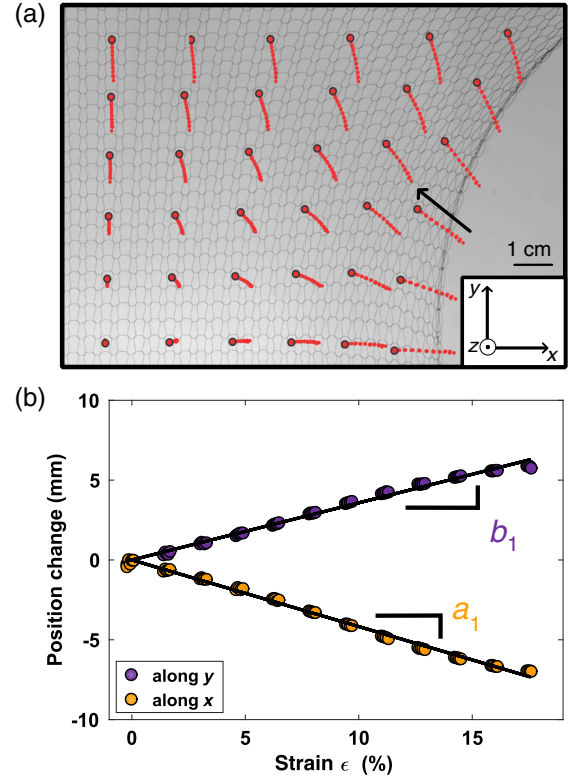


FIG. 2. The trajectories of the stitches are tracked while the fabric is stretched. (a) Picture of the upper-right part of the fabric for  $\epsilon = 18\%$ , referred to as the actual configuration. Red dots represent the paths of a selection of stitch centroids when the strain  $\epsilon$  is varied from 0 to 18% during the stretching phase of the 5 cycles (Movie S2 in Supplemental Material Ref. [24] shows the corresponding trajectories). Black circles show the corresponding positions in the actual configuration. (b) Plot of the projections of the change in position of the stitch's centroid next to the black arrow along the  $x$  (wale) and  $y$  (course) directions as a function of the applied strain during the stretching phases. Black solid lines represent the best linear fit, whose slopes are measures of  $a_1$  and  $b_1$ .

$L_c \equiv L_c^* < L_c^0$ , where all the stitches have the same size. This allows us to describe the position field of the stitches  $\vec{u}$  as lateral and longitudinal displacements from this homogeneous state. Assuming that the size of a stitch is very small compared to the size of the fabric, the displacement field can be written as a function of continuous space variables  $(x, y)$ :

$$\vec{u}(x, y) = \begin{cases} x + a_0(x, y) + \epsilon a_1(x, y) \\ y + b_0(x, y) + \epsilon b_1(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

where  $(a_0, b_0)$  is an inhomogeneous displacement field that quantifies the deviation from the absolute reference configuration  $|x| \leq (L_c^*/2)$  and  $|y| \leq (L_w^*/2)$ . The affine trajectories of the stitches for  $\epsilon > 0$  motivate the decomposition of the displacement field as an embedded



deformation induced by the knitting process on top of a linear response to the applied strain. Moreover, the experimental results show that all the fields involved in Eq. (1) are slowly varying functions in space, so the components of their spatial gradients are small compared to 1.

### III. STITCH-BASED MODEL

#### A. Kinematics

A knit is made of a single yarn that follows a complex constrained path. As the yarn runs along a given row, it alternatively intertwines with the top and bottom adjacent rows. To derive the morphological and mechanical properties of the whole fabric, we do not base our model on the yarn itself but rather on the periodic geometry of the knit. The fabric can be seen as a network of repetitive unit cells characterized by the yarn self-crossing topology. The stockinette pattern shows the advantage of having a single topology such that each stitch can be associated to a unit cell (see Fig. 3). We describe each cell by two vectors,  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$ , whose orientations prescribe the course and wale directions, while their norms  $c = \|\vec{c}\|$  and  $w = \|\vec{w}\|$  impose the local dimensions of the cell. Notice that the yarn is not attached to these topological units and is allowed to slide from one stitch to another.

We can now write the constraints on the fabric that account for the permanence of the stitch topology. Indeed, whatever deformation we impose on the fabric, the crossing points cannot interchange. Therefore, the stitch grid cannot lose or exchange cells, and every stitch always keeps the same neighbors. This property imposes the following kinematic condition:  $\vec{w}(j, i) + \vec{c}(j, i + 1) = \vec{w}(j + 1, i) + \vec{c}(j, i)$ . It simply states that, to go from one stitch to another, traveling along the rows and then the columns is equivalent to traveling along the columns and

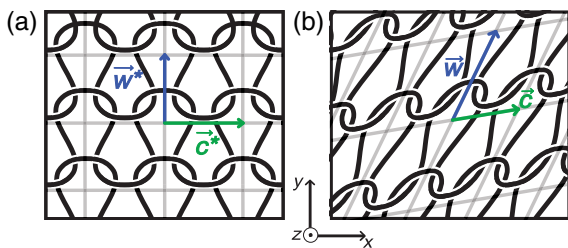


FIG. 3. Schematic representation of the absolute reference configuration and a deformed state of the fabric. A geometrical representation of the stockinette stitch network consists in joining the geometric centers of neighboring stitches along the wale and course directions. This defines a four-degree planar graph (light gray lines) that is uniquely determined by the edge vectors along the course and wale directions. (a) Absolute reference state of the fabric: The vectors  $\vec{c}^*$  and  $\vec{w}^*$  are orthogonal and identical for all cells. (b) Deformed state of the fabric: Directions and norms of the vector fields  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$  vary across the fabric.

then the rows. Within a continuous representation, this constraint can be stated as

$$\frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y}(x, y), \quad (2)$$

where  $c^*$  and  $w^*$  are the norms of the corresponding vectors in the absolute reference state of the fabric in which all the stitches have the same size [see Fig. 3(a)]. Interestingly, Eq. (2) can be seen as a component-wise vanishing divergence, which ensures the existence of a vector potential  $\vec{u}$  defined by

$$\vec{c} = c^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad \text{and} \quad \vec{w} = w^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}. \quad (3)$$

For a given  $x$  (column) and  $y$  (row),  $\vec{u}(x, y)$  simply gives the position of the corresponding stitch, so this potential is identical to the position field introduced experimentally in Eq. (1). We can thus directly relate the vector fields  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$  to the displacement fields  $(a_0, b_0)$  and  $(a_1, b_1)$ .

#### B. Energy

Our mechanical model proceeds from first-principle energy minimization under the constraint of fixed yarn length and a steady topology. Within the framework of our grid-based model, we should express both elastic energy and the constraints as functions of  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$ . In the general case, the yarn would undergo stretching, bending and twisting. However, these deformation modes do not contribute equally to the energy of the fabric. First, the assumption of a scale separation between the size of a stitch and the diameter of the yarn, which corresponds to a rather *loose* knit, allows us to invoke a slender-body approximation in which the energy cost of stretching is very large compared to that of bending. Moreover, the twist in the yarn does not change upon deformation of the stitch in the  $(x, y)$  plane and thus will not produce any work. Therefore, the main contribution to elastic energy is provided by bending of the yarn and can be estimated using simple geometric arguments.

In the  $(x, y)$  plane of a given stitch, we can distinguish two characteristic radii of curvature  $R_c$  and  $R_w$  along the wale and course directions [see Fig. 4(a)]. Those curvatures are geometrically correlated to the dimensions  $c$  and  $w$  of the stitch. If we assume simple proportionality relations  $R_c \sim c$  and  $R_w \sim w$ , the bending energies associated with deformations along the course (resp. wale) direction scale as  $\mathcal{E}_c \sim B/c$  (resp.  $\mathcal{E}_w \sim B/w$ ), where  $B$  is the bending modulus of the yarn. Orthogonally to the  $(x, y)$  plane, the yarn is also bent with two characteristic radii of curvature  $R'_c$  and  $R'_w$  (see Fig. 4). The thickness of the fabric scales with the diameter of the yarn  $d$ ; thus, one has  $R'_c \sim R_c^2/d$  and  $R'_w \sim R_w^2/d$ . We consider here a slender yarn in a loose fabric, so  $R_c \ll R'_c$  and  $R_w \ll R'_w$ , with the result that

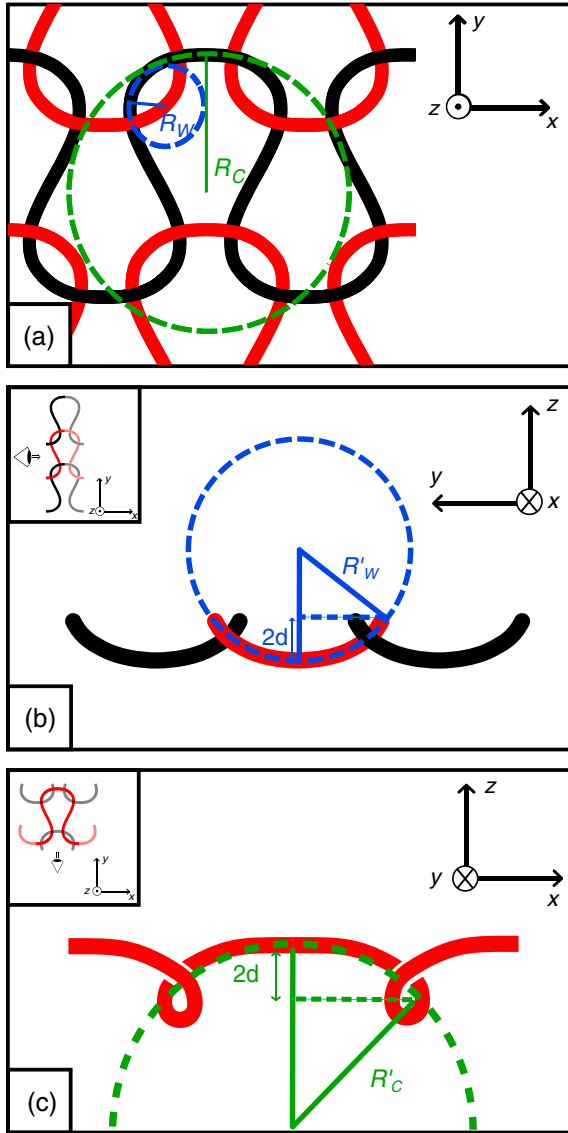


FIG. 4. The main characteristic curvatures of the yarn that can be extracted from the geometry of a stockinette stitch. Panels (a) to (c) show the three different orthogonal planes.

bending energy carried in the orthogonal planes is negligible compared to that within the fabric plane. Nevertheless,  $R'_c$  and  $R'_w$  are responsible for the three-dimensional shape that naturally occurs in an unloaded knitted fabric, in particular, for the curling of the free edges of a stockinette sample. These out-of-plane effects do not directly impact the mechanical response of a clamped fabric but play a significant role in building up internal stresses. In our two-dimensional setting, the elastic energy of the stitch can thus be approximated by

$$\mathcal{E}_s \approx \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_w = \tilde{B} \left( \frac{1}{c} + \frac{\beta}{w} \right), \quad (4)$$

where  $\tilde{B}$  is an effective bending modulus and  $\beta$  is a dimensionless factor that quantifies the asymmetry between bending energies carried along the course and wale directions.

### C. Conservation of yarn length

Unlike a weaved fabric which can be modeled by a Chebyshev net for which all the edges retain fixed lengths [26], the deformation of a knitted fabric allows for sliding of the yarn from one stitch into the adjacent ones. Nevertheless, the assumption that the yarn experiences only bending deformations imposes that its total length in the fabric is conserved. The length of the yarn is correlated with the cumulated lengths of the edges of the associated network defined by the vectors  $(\vec{c}, \vec{w})$ . In each cell, the yarn length should be proportional to  $\ell = c + \delta w$ , with  $\delta$  a constant that embodies the complex geometry of the yarn in the stitch.

We assume beforehand that  $\delta$  is a spatially uniform material parameter that is solely imposed by the machining process of the fabric. Therefore, the constraint on yarn length amounts to requiring that the average effective length over all stitches  $\langle \ell \rangle = \langle c \rangle + \delta \langle w \rangle$  remains constant upon deformation. Using Eq. (3), the average sizes  $\langle c \rangle$  and  $\langle w \rangle$  can be determined from the experimentally measured deformation fields  $\vec{u}(i, j)$ . Figure 5 shows that both  $\langle c \rangle$  and  $\langle w \rangle$  are affine functions of  $\epsilon$  for all  $\epsilon > 0$ . Therefore, one can tune the parameter  $\delta$  to prescribe a constant effective length  $\langle \ell \rangle = \ell^*$ . For our fabric, one finds  $\delta = 0.86$ , which yields  $\ell^* = 5.86$  mm. This result justifies *a posteriori* our assumption that  $\delta$  is a material parameter that characterizes the fabric geometry independently of the applied strain.

In the absolute reference state, the homogeneous rectangular configuration as defined by  $c^*$  and  $w^*$  should also satisfy the yarn-length constraint, that is,  $c^* + \delta w^* = \ell^*$ . A second equation relating  $c^*$  to  $w^*$  can be deduced by using the affine behavior of the vector field  $\vec{u}$  as a function of  $\epsilon$

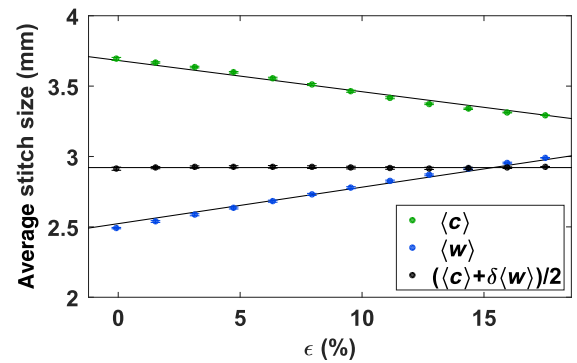


FIG. 5. The average stitch size as a function of the applied strain  $\epsilon > 0$  of the fabric used in Fig. 1. It is shown that  $\langle c \rangle$  (resp.  $\langle w \rangle$ ) follows a negative (resp. positive) linear trend; thus, we can define a parameter  $\delta = 0.86$  such that  $\langle c \rangle + \delta \langle w \rangle$  is constant for all  $\epsilon > 0$ . Each data point is the average over 5 images at a given strain, and the error bars are twice their standard deviation.

(see Fig. 2) and by assuming slowly varying deformation fields (see Appendix A). We find that the absolute reference state of the fabric used in Fig. 1 is given by  $c^* = 3.93$  mm and  $w^* = 2.08$  mm. It is noteworthy that the conservation of yarn length, combined with the experimental characterization of the local deformation field of the stitches, allows us to determine both the geometric parameter  $\delta$  and the absolute reference state. Moreover, using these quantities, we can estimate the coupling of deformations in orthogonal directions by defining a geometric Poisson ratio  $\nu \equiv [(c^* - \langle c \rangle) / c^*][w^* / (\langle w \rangle - w^*)] = \delta(w^* / c^*) = 0.46$ . Quite unexpectedly, even though the knitted fabric is very hollow, it behaves like an incompressible elastic bulk material with a conserved effective area.

#### IV. ELASTIC RESPONSE OF THE FABRIC

##### A. Homogeneous deformations

Let us first investigate the case of a knit that is uniformly deformed from its absolute reference configuration. Stretching the fabric in the wale direction by an amount  $\varepsilon_h$  results in a deformation of each stitch given by  $w = w^*(1 + \varepsilon_h)$ . Using the conservation of yarn length, the deformation in the course direction should read  $c = c^*[1 - \delta(w^*/c^*)\varepsilon_h]$ . Therefore, the bending energy of the fabric is simply given by

$$\mathcal{E}_h = \tilde{B}N_cN_w \left( \frac{1}{c^*(1 - \delta \frac{w^*}{c^*} \varepsilon_h)} + \frac{\beta}{w^*(1 + \varepsilon_h)} \right), \quad (5)$$

where  $N_c$  and  $N_w$  are the number of stitches in the course and wale directions. Notice that the asymmetry of bending energies between the course and wale directions results both from the fact that the reference state is rectangular ( $c^* \neq w^*$ ) and that the two directions of the stitch contribute to the yarn length in different proportions of its size. Equation (5) shows that the stiffening behavior observed in the experiment is directly recovered: The elastic energy diverges as  $\varepsilon_h \rightarrow (c^*/\delta w^*)$ . More importantly, this energy should reach equilibrium at the absolute reference state  $\varepsilon_h = 0$ . This condition allows us to prescribe  $\beta = \delta(w^*/c^*)^2 \approx 0.24$ . Similarly to  $\delta$ , the asymmetry parameter  $\beta$  should be spatially homogeneous and marginally dependent on the applied deformation. Thus,  $\beta$  can also be considered as a characteristic of the stitch.

To test the relevance of Eq. (5), we have performed tensile tests using a loading configuration in which the knitted fabric is submitted to a quasihomogeneous deformation. To this purpose, a knit made of  $N_c \times N_w = 20 \times 30$  stitches is held by almost frictionless bars at its lower and upper rows such that the stitches can slide laterally. Movie S3 in Supplemental Material Ref. [24] and the inset of Fig. 6 show that the resulting catenary shape of the fabric is much less pronounced than in the case of clamped boundary conditions, confirming that the fabric

deforms almost homogeneously for a large range of applied strains. For this case, one can define the deformation of the fabric with respect to the absolute reference configuration. Moreover, using Eq. (5), one can explicitly derive the elastic response of the fabric,

$$F(\varepsilon_h) = -\frac{\partial \mathcal{E}_h}{\partial L_w} = \tilde{Y}N_c\delta \frac{w^*}{c^*} \left[ \frac{1}{(1 + \varepsilon_h)^2} - \frac{1}{(1 - \delta \frac{w^*}{c^*} \varepsilon_h)^2} \right], \quad (6)$$

where the identities  $\beta = \delta(w^*/c^*)^2$  and  $L_w = N_w w^*(1 + \varepsilon_h)$  have been used. The parameter  $\tilde{Y} = \tilde{B}/(c^*w^*)$  is an effective stretching modulus that should be determined experimentally from the mechanical response of the fabric. Notice that  $\tilde{Y}$  is a line tension (of dimension  $\text{J.m}^{-1}$ ), which emphasizes that the mechanical response of the fabric originates from the tensions exerted on the entangled yarn. The parameters  $\delta$ ,  $w^*$ , and  $c^*$  should be determined from the conservation of total yarn length. Using the procedure described in Sec. III C, we find  $\delta = 0.71$ ,  $w^* = 2.1$  mm, and  $c^* = 2.7$  mm. Figure 6 shows the experimental mechanical response compared to the one given by Eq. (6). Fits to the linear regimes ( $\varepsilon_h \ll 1$ ) in the loading ( $\uparrow$ ) and unloading ( $\downarrow$ ) phases yield  $\tilde{Y}^\uparrow = 3.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$  and  $\tilde{Y}^\downarrow = 0.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$ .

Finally, Fig. 6 also shows that in this favorable loading configuration, the model allows us to keep track of the mechanical response up to more than 100% deformations. However, the sharp rise of the predicted force occurs at

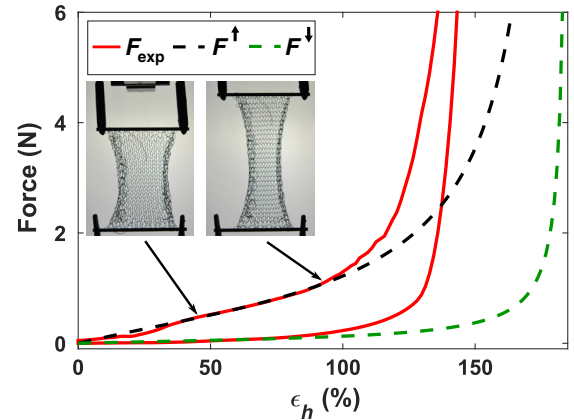


FIG. 6. A  $20 \times 30$  stitch fabric is attached by its lower and upper rows to almost frictionless bars such that the stitches can slide laterally. The experimental pulling force  $F_{\text{exp}}$  is averaged over 5 cycles. The absolute reference state  $F_{\text{exp}}(\varepsilon_h = 0) = 0$  is determined by the position where loading and unloading curves coincide. The mechanical response  $F(\varepsilon_h)$  is computed using Eq. (5), with  $\tilde{Y}$  as the only fitting parameter to the experimental results. Because of friction within the knitted fabric, loading and unloading phases have different effective stretching moduli:  $\tilde{Y}^\uparrow = 3.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$  and  $\tilde{Y}^\downarrow = 0.8 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$ .



deformations  $\varepsilon_h \sim c^*/(\delta w^*)$ , which is larger than the experimental ones. Obviously, at this range of deformations, one cannot invoke scale separation between the size of a stitch and the diameter of the yarn, a necessary condition to approximate the elastic energy of the stitch by Eq. (4).

### B. Inhomogeneous deformations

Before moving on to the inhomogeneous spatial deformation problem, let us summarize the parameters introduced in the model. There are mainly four internal geometrical parameters— $w^*$ ,  $c^*$ ,  $\beta$ , and  $\delta$ —and one parameter related to the mechanics, the effective stretching modulus  $\tilde{Y}$ . As far as geometry is concerned,  $w^*$  and  $c^*$  are the extensions of the stitch at rest and thus specify the length scales of the microstructure and can be viewed as inputs. Here,  $\beta$ , which represents the curvature asymmetry of the loops in the stitch, is determined from the mechanical equilibrium of the stitch at rest;  $\delta$ , which accounts for the asymmetry of thread length contributions to the stitch extensions in the course and wale directions, is recovered from thread length conservation. So at this point, there are no adjustable parameters other than a global stiffness scale  $\tilde{Y}$ .

Now, we have all the ingredients to study the mechanical response of the knit for any loading conditions. Within the experimental configuration of Fig. 1 and using a continuous representation, the Lagrangian  $\mathcal{L}\{\vec{c}, \vec{w}\}$  of the fabric reads

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \tilde{Y} \iint_{x,y} dx dy \left( \frac{1}{c} + \frac{\beta}{w} \right) + \alpha \iint_{x,y} dx dy (c + \delta w) \\ & - \iint_{x,y} dx dy \vec{T}(x, y) \cdot \left( \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right) \\ & - \iint_{x,y} dx dy \mathcal{T}(x) \vec{e}_y \cdot \vec{w}. \end{aligned} \quad (7)$$

The first term in Eq. (7) is the elastic energy of the whole fabric, the second one ensures yarn-length conservation, the third one enforces the local topological constraint, and the last one is the work of the tractions exerted by external loads at the boundaries  $y = \pm L_w^*/2$ , with  $\alpha$ ,  $\vec{T}(x, y)$ , and  $\mathcal{T}(x)$  being the corresponding Lagrange multipliers. One can interpret  $\alpha$  as a global scaling for the tension in the fabric (see Appendix B), while  $\vec{T}(x, y)$  is a local tension and  $\mathcal{T}(x)$  is the applied traction along the clamped edges.

In Appendix B, we show that the minimization of the Lagrangian with respect to the two vector fields  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$ , combined with the local topological constraint, yields two Euler-Lagrange equations, which can be expressed in terms of the displacement fields  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ , and  $b_1$ . Since these

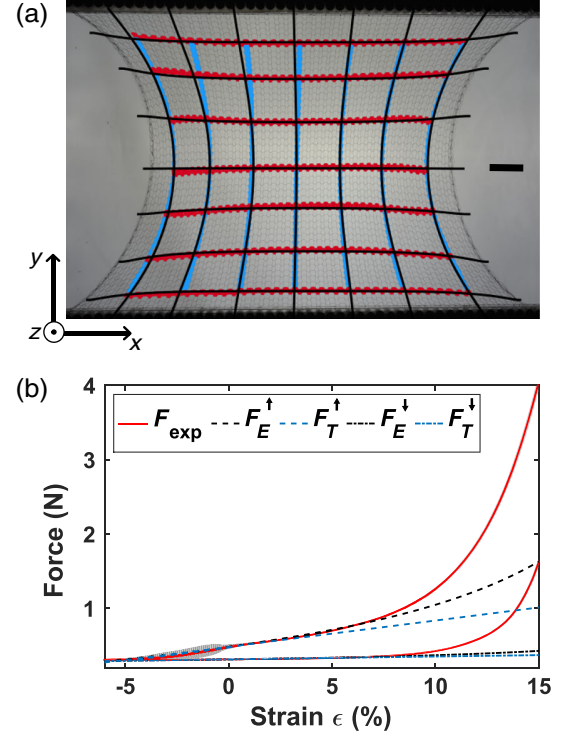


FIG. 7. Predicted and experimental deformations of a stretched fabric in the  $y$ -direction and its mechanical response. (a) The measured displacement field  $\vec{u}(x, y)$  is displayed along 7 course (red line) and 7 wale (blue line) directions, while the black curves (black line) are their corresponding predictions without adjustable parameters. The applied strain in the picture is  $\varepsilon = 11\%$  and the scale bar in the panels indicates 2 cm. (b) Red curves reproduce the experimental results of Fig. 1(b). The grey area represents 2 times the standard deviation of the force signals over the 5 cycles. The forces  $F_E$  (dashed line) and  $F_T$  (dot and dashed line) are calculated respectively from the variation of bending energy and the Lagrange multiplier  $\mathcal{T}(x)$  (see Appendix C).

fields are slowly varying functions in space, only terms that are linear in their first spatial derivatives are retained. Then, the problem is solved in the limit of small strains, and the corresponding displacement fields are computed. Figure 7(a) shows the resulting shape of the fabric compared to the experimental one. It is worth underlining that the prediction of the morphology of the fabric is parameter-free once the geometrical material parameters  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $c^*$ ,  $w^*$  and the Lagrange multiplier  $\alpha$  are determined. Moreover, although we assume a small strain approximation, a fairly good quantitative agreement is found between the results of our model and experiments for stretching up to  $\varepsilon = 15\%$ .

Once the morphology of the fabric is computed, the force applied at  $y = \pm L_w^*/2$  can be determined up to a scaling constant, using either the Lagrange multipliers  $\vec{T}(x, y)$  and  $\mathcal{T}(x)$ , or the elastic energy of the fabric (Appendix C).

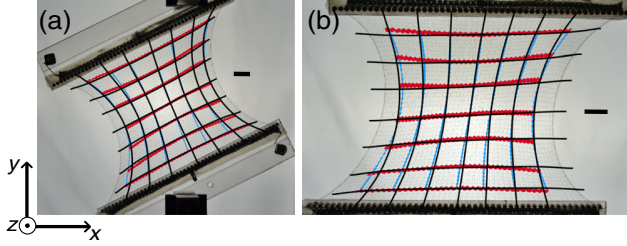


FIG. 8. Predicted and experimental deformations of a stretched fabric under two different loading configurations. In panel (a), the fabric is initially tilted by  $25^\circ$ , and in panel (b), the fabric is initially sheared along the  $x$  direction by an angle of  $10^\circ$ . The parameters  $c^*$ ,  $w^*$ ,  $\delta$ , and thus  $\beta$  are the same as for the fabric used in Fig. 7(a). The boundary conditions of these configurations are shown in Appendix D. The applied strain is  $\varepsilon = 11\%$  for both fabrics, and scale bars in the panels are 2 cm.

The former ( $F_T$ ) yields the affine behavior of the force at small strains, and the latter ( $F_E$ ) includes nonlinearities in the strain as the elastic energy is a nonlinear function of  $c$  and  $w$ . The comparison with the measured force at small strains allows for the estimation of the effective stretching modulus  $\tilde{Y}$ . For the fabric used in Fig. 1, we find  $\tilde{Y}^\uparrow \approx 1.5 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1} \approx 10^{-2} B/d^2$  for loading and  $\tilde{Y}^\downarrow \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ J.m}^{-1} \approx 10^{-3} B/d^2$  for unloading phases ( $B$  is the bending modulus of the yarn and  $d$  its diameter), showing that the fabric is very stretchable compared to its constituent yarn. Figure 7(b) shows that, though linearized, our model allows for a reasonable prediction of the mechanical response, up to 5% deformation. Notice that for a clamped fabric, the applied strain  $\varepsilon$  is defined with respect to an intermediate prestressed state described by the deformation field  $\vec{u}_0$ , in contrast to the homogeneous case where the absolute configuration is accessible. This explains the strain scale difference between Figs. 6 and 7(b). As in the homogeneous case, the rise of the predicted force at deformations much larger than that observed experimentally confirms that a jamming phenomenon occurs before the nonlinear behavior of our model, which confirms the relevance of our linearized approach for more complex loading configurations.

Finally, the framework we developed can be used for any in-plane deformation of the fabric. In order to further assess the predictive power of our model, we have investigated two other different loading configurations: The first one consists in tilting the initial knit with respect to the axis of applied loading by an angle  $\theta = 25^\circ$ , and the second one ascribes an initial shear to the knit before uniaxial loading. Snapshots of representative deformed configurations for the two tests are shown in Figs. 8(a) and 8(b), and the corresponding equations for the model are featured in Appendix D. Despite the symmetry breaking, our model performs with an accuracy comparable to that obtained in the symmetrical loading case.

## V. DISCUSSION

The experimental study of the mechanical response of a stretched fabric knitted into a stockinette stitch pattern allows us to build a reliable elastic model that accurately recovers its deformation field. The model assesses the elastic energy of the fabric from the bending energy of its constituent yarn. Furthermore, the yarn self-crossing topology is represented as a four-degree planar graph that fully describes the state of the fabric. The topology imposes kinematic conditions, and yarn-length conservation prescribes geometric properties of the resulting network. The displacement field of the stitches is then determined by constrained energy minimization. The model correctly accounts for the spatial deformation of the fabric over a reasonable range of applied stretching and consistently captures the mechanical response upon setting a single material modulus  $\tilde{Y}$  that differs depending on whether the fabric is stretched or relaxed. The results show that a knit behaves similarly to a rubberlike material: It is very stretchable and exhibits a geometric Poisson ratio close to 0.5. Importantly, this analogy holds even though the material points of the underlying network are purely topological entities that do not correspond to bulk material points.

The equilibrium state for a stockinette pattern is not a flat surface but rather a three-dimensional configuration in which the fabric wraps around its edges due to out-of-plane bending of the yarn. The forced flattening and clamping of the fabric induce residual stresses and thus impose an inhomogeneous two-dimensional displacement field that deviates from an absolute homogeneous state. Such pre-stress would probably disappear from a fabric made of a seed pattern, characterized by fully alternated knit and purl stitches [23], for which the equilibrium state is a flat surface. Nevertheless, our model is able to capture the equivalent two-dimensional residual deformation field of any fabric made of a periodic stitch pattern. This is in contrast with prestressed bulk elastic material for which the residual strain should be a prescribed field [27].

Let us recall the role of friction in the morphology and mechanical response of the fabric. Friction is responsible for the large hysteresis observed in the dynamometry: In contrast to the elastic part of the response, friction opposes the deformation. This effect yields different stiffening behavior upon loading and unloading the fabric while keeping its morphology globally unaltered. Consequently, our measurements do not access the “frictionless” elastic modulus of the fabric, but they allow for the definition of two effective stretching moduli,  $\tilde{Y}^\uparrow$  for the loading and  $\tilde{Y}^\downarrow$  for the unloading phase. It turns out that friction in a knitted fabric proceeds through stick-slip events and that the strong elastic-recall forces bring the system back to its minimum energy configuration in high-frequency, collective relaxation events of small amplitude. A rich phenomenology

emerges from this frictional dynamics and the spatially extended avalanche-like relaxation events [28].

Our model assumes scale separation between the yarn diameter and the stitch extension and thus applies as long as the yarn diameter is very small compared to stitch dimensions  $c$  and  $w$ . Very often in commercial knits, the fluffiness of the thread gives the impression of tight stitches, but the fabric remains very stretchable. In these cases, such as for a scarf or a wool sweater, we expect the model to hold. Of course, there are occurrences of tightly knitted fabric that do not feel any different from woven textile from a mechanical aspect; in such a case, our model would not be appropriate since deformation might involve significant thread elongation. In addition, the so-called jamming of the stitches [12] could occur when this scale separation no longer holds because of large local deformations. In those stitches, the yarn is maximally bent and starts to undergo stretching, which alters the elasticity of the whole fabric. Even though jamming is localized in a few stitches, the mechanical response of the knit becomes dominated by stretching of the yarn. Since the deformation field is inhomogeneous in the fabric, this phenomenon could occur locally even for small strains starting mainly from the corners. This mechanism is responsible for the nonlinear behavior of the force-strain curve [see Fig. 7(b)] that is not captured by our model. However, it does not seem to affect the overall catenary shape of the fabric as drastically, which is still quantitatively predicted by the model. Indeed, we observe that the prediction of the model for the shape holds for larger deformation than that for the mechanical response.

## VI. MATERIALS AND METHODS

The fabrics were crafted using a Toyota KS858 single-bed knitting machine. All samples used for inhomogeneous deformation experiments were composed of  $51 \times 51$  stockinette stitches made of a nylon-based monofilament (Stroft® GTM) of diameter  $d = 80 \mu\text{m}$  and length of approximately 25 m. The yarn Young's modulus  $E \approx 5.1 \text{ GPa}$  was measured using a tensile test, yielding a bending modulus  $B \approx 10^{-8} \text{ J.m}$ . The fabrics were clamped at both extremities along the course direction by means of screws holding each stitch individually, imposing along the corresponding rows a constant spacing between the stitches. For homogeneous deformation experiments, a fabric of  $20 \times 30$  stockinette stitches made of the same nylon-based yarn but of diameter  $d = 200 \mu\text{m}$  was attached by its lower and upper rows to cylindrical steel bars such that the stitches can slide laterally. The steel bars were lubricated with silicon oil to reduce friction with the knit as much as possible. In all experiments, fabrics were stretched in the wale direction [except for the configuration of Fig. 8(b)] at a constant speed of 0.1 mm/s using an Instron® (model 5965) mounted with a 50 N load cell. Starting from an initial configuration with given  $L_c^0$  and  $L_w$ ,

the fabrics were pulled over a distance of 30 mm. The visualization was made using a Nikon® D800 camera with a 60-mm 1:2.8:G AFS MicroNikkor lens. Both image and further data analyses were made using MATLAB R2014b.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank Clément Assoun for his valuable advice in manufacturing the knitted samples, Sylvie Mégret and Jean-François Bassereau from the École Nationale Supérieure des Arts Décoratifs for making their knitting workshop available to us, and Sébastien Moulinet for fruitful discussions. This work was carried out in the framework of the METAMAT Project No. ANR-14-CE07-0031 funded by Agence Nationale pour la Recherche.

## APPENDIX A: DETERMINATION OF THE GEOMETRICAL PARAMETERS $\delta$ , $c^*$ , AND $w^*$

The geometrical parameters of the knit can be directly measured from the position field of the stitches  $\vec{u}(j, i)$ . We can estimate the average value of the stitch sizes  $\langle c \rangle$  and  $\langle w \rangle$ , with  $\langle \rangle$  the average over all the stitches of the fabric for a given elongation (see Fig. 5). From the measurements, we find that for  $\varepsilon > 0$ , both  $\langle c \rangle$  and  $\langle w \rangle$  vary linearly with  $\varepsilon$ . Thus, we can define a simple scalar  $\delta = 0.86$ , which generates  $\ell^* = \langle c \rangle + \delta \langle w \rangle = 5.86 \text{ mm}$ , that is invariant with elongation. We then assume that  $\ell^*$  is proportional to the physical yarn length in the fabric.

The linear trajectories of the stitches allow us to approximate the position field by  $\vec{u}(j, i, \varepsilon) = \vec{u}_0(j, i) + \varepsilon \vec{u}_1(j, i)$ . Moreover, we assume the existence of a reference configuration of the fabric where all the stitches have the same size,  $\vec{c} = c^* \vec{e}_x$  and  $\vec{w} = w^* \vec{e}_y$ . The reference configuration must also comply with the yarn-length condition such that  $\langle c \rangle + \delta \langle w \rangle = c^* + \delta w^*$ . This equation, in the limit of small deformation and slowly varying fields, reads  $\ell_0 + \varepsilon \ell_1 = c^* + \delta w^*$ , with

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{1}{N_c N_w} \iint_{x,y} \frac{dx dy}{c^* w^*} (c^* (1 + a_{0,x}) + \delta w^* (1 + b_{0,y})) \\ &= c^* + \delta w^*, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{1}{N_c N_w} \iint_{x,y} \frac{dx dy}{c^* w^*} (c^* a_{1,x} + \delta w^* b_{1,y} + c^* b_{1,x} b_{0,x} \\ &\quad + \delta w^* a_{1,y} a_{0,y}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

where  $N_c$  and  $N_w$  are the number of stitches in the course and wale directions, respectively, and  $f_{,x} = [(\partial f)/(\partial x)]$ . The size of the reference fabric is unknown, and for this reason, the experimental displacement fields  $a_0$  and  $b_0$  are functions of  $c^*$  and  $w^*$ . The two previous equations can then be written as a function of the experimental position fields  $\vec{u}_0(i, j)$ ,  $\vec{u}_1(i, j)$ , and  $c^*, w^*$ :

$$\ell_0 = c^* + \delta w^* \Leftrightarrow \frac{1}{N_c N_w} \sum_{i,j} [u_0^x(j+1, i) - u_0^x(j, i) + \delta(u_0^y(j, i+1) - u_0^y(j, i))] = c^* + \delta w^*, \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} \ell_1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{N_c N_w} \sum_{i,j} [u_1^x(j+1, i) - u_1^x(j, i) + \delta(u_1^y(j, i+1) - u_1^y(j, i))] \\ &= -\sum_{i,j} \left[ (u_1^y(j+1, i) - u_1^y(j, i)) \frac{u_0^y(j+1, i) - u_0^y(j, i)}{c^*} + \delta(u_1^x(j, i+1) - u_1^x(j, i)) \frac{u_0^x(j, i+1) - u_0^x(j, i)}{w^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

with  $\vec{u}_0 = u_0^x \vec{e}_x + u_0^y \vec{e}_y$  and  $\vec{u}_1 = u_1^x \vec{e}_x + u_1^y \vec{e}_y$ . Those equations can be solved to compute  $c^*$  and  $w^*$ . For the fabric used in Fig. 1, we find  $w^* = 2.08$  mm and  $c^* = 3.93$  mm. The quantity  $c^* + \delta w^*$  can then be compared to  $\ell^*$  to verify the validity of our approximations. We measure  $c^* + \delta w^* = 5.70$  mm, which generates less than 3% discrepancy, confirming the hypothesis of a reference knit sharing the same properties as the experimental knit and validating the approximation of small deformation and slowly varying displacement fields.

## APPENDIX B: DERIVATION OF THE EQUILIBRIUM EQUATIONS AND SOLUTIONS FOR THE DISPLACEMENT FIELDS

When the deformation in the fabric is heterogeneous, solving the Lagrangian of the system Eq. (7) provides us with differential equations whose solutions ensure the energy minimization and the compliance with the constraints. Derivation of the Lagrangian with respect to  $\vec{c}$ :  $\mathcal{L}\{\vec{c} + \delta\vec{c}, \vec{w}\} - \mathcal{L}\{\vec{c}, \vec{w}\} = 0$  gives the following equation and its corresponding boundary condition:

$$-\tilde{Y} \frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha \frac{\vec{c}}{c} + \frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} = \vec{0}, \quad (\text{B1})$$

$$[\vec{T} \cdot \delta\vec{c}]_{y=\pm \frac{L_w^*}{2}} = 0, \quad (\text{B2})$$

and with respect to  $\vec{w}$ :  $\mathcal{L}\{\vec{c}, \vec{w} + \delta\vec{w}\} - \mathcal{L}\{\vec{c}, \vec{w}\} = 0$ ,

$$-\tilde{Y} \beta \frac{\vec{w}}{w^3} + \delta\alpha \frac{\vec{w}}{w} - \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} = \mathcal{T}(x) \vec{e}_y, \quad (\text{B3})$$

$$[\vec{T} \cdot \delta\vec{w}]_{x=\pm \frac{L_c^*}{2}} = 0. \quad (\text{B4})$$

Notice that the dependence of  $\alpha$  in Eqs. (B1) and (B3) can be suppressed by normalizing  $(\vec{c}, \vec{w})$  by  $\sqrt{\alpha}$  and  $(\vec{T}, \mathcal{T})$  by  $\alpha$ . This scaling allows us to interpret the Lagrange parameter  $\alpha$  as a global scaling for the tension in the fabric. Moreover, Eqs. (B1) and (B3) can be combined to eliminate the Lagrange multiplier  $\vec{T}$ :

$$c^* \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\tilde{Y} \frac{\vec{c}}{c^3} + \alpha \frac{\vec{c}}{c} \right] + w^* \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\tilde{Y} \beta \frac{\vec{w}}{w^3} + \delta\alpha \frac{\vec{w}}{w} \right] = 0. \quad (\text{B5})$$

Using Eqs. (B2) and (B4), the boundary conditions corresponding to the experimental setup of Fig. 1 are  $\vec{c}[x, y = \pm(L_w^*/2)] = (L_c^*/N_c) \vec{e}_x$  and  $\int[(dy)/w^*] \vec{w} = L_w \vec{e}_y$ . The conditions on the free edges at  $x = \pm(L_c^*/2)$  are  $\vec{T}[x = \pm(L_c^*/2), y] = 0$ , which we can rewrite as a function of  $\vec{c}$  thanks to Eq. (B1),  $-(\vec{c}/c^3) + \alpha(\vec{c}/c)|_{x=\pm(L_c^*/2)} = 0$ . To guarantee the topological constraint, we write this equation and the boundary conditions as a function of the displacement fields  $a_0, b_0, a_1$ , and  $b_1$  thanks to the relations

$$\vec{c} = c^* \begin{vmatrix} 1 + a_{0,x} + \epsilon a_{1,x} \\ b_{0,x} + \epsilon b_{1,x} \end{vmatrix} \quad (\text{B6})$$

$$\vec{w} = w^* \begin{vmatrix} a_{0,y} + \epsilon a_{1,y} \\ 1 + b_{0,y} + \epsilon b_{1,y} \end{vmatrix} \quad (\text{B7})$$

with the underscore,  $x$  or  $y$  designating a partial derivative in the corresponding direction. Experimental observations suggest that those displacement fields are linear in  $\epsilon$ , so we also express the Lagrange multiplier  $\alpha = \alpha_0 + \epsilon \alpha_1$  as varying linearly with  $\epsilon$ . Equation (B5) will be solved in the limit of small deformation and consequently developed at the first order of  $\epsilon$ . We also consider that inner stress induces only a small deformation of the stitches, meaning that  $a_{0,x}, b_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,y} \ll 1$ ; thus, the equation will also develop up to the first order in  $a_{0,x}, b_{0,x}, a_{0,y}, b_{0,y}$ . By projecting Eq. (B5) along  $x$  and  $y$ , we end up with two sets of equations, each one with one part independent of  $\epsilon$  and another one proportional to the strain. Equilibrium of the homogeneous fabric for  $c = c^*$  and  $w = w^*$  imposes  $\beta = \delta(w^*/c^*)^2$ . We define the dimensionless Lagrange multiplier  $\tilde{\alpha} = [(c^{*2}\alpha)/\tilde{Y}]$  and introduce the following two coefficients to lighten the mathematical expressions,  $\nu = \delta(w^*/c^*)$  and  $\chi = [(\tilde{\alpha}_0 - 1)/2]$ . For the independent part of the strain, one gets

$$a_{0,xx} + \nu \chi a_{0,yy} = 0, \quad (\text{B8})$$



$$b_{0,xx} + \frac{\nu}{\chi} b_{0,yy} = 0. \quad (\text{B9})$$

Canceling the part proportional to  $\varepsilon$  leads to

$$a_{1,xx} + \nu\chi a_{1,yy} + P_a = 0, \quad (\text{B10})$$

$$b_{1,xx} + \frac{\nu}{\chi} b_{1,yy} + P_b = 0, \quad (\text{B11})$$

with  $P_a$  and  $P_b$  terms that arise from the nonuniform initial state for  $\varepsilon = 0$ , whose expressions are

$$P_a(x, y) = -3 \frac{\partial}{\partial x} [a_{1,x} a_{0,x}] + \nu \left( (1 - \chi) \frac{\partial}{\partial y} [b_{1,y} a_{0,y} + a_{1,y} b_{0,y}] + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} a_{0,yy} \right), \quad (\text{B12})$$

$$P_b(x, y) = \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} [b_{1,x} a_{0,x}] + \nu \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) a_{1,y} a_{0,y} - \frac{3}{\chi} b_{1,y} b_{0,y} \right] \right). \quad (\text{B13})$$

The boundary conditions written with the displacement fields are

$$\forall x \begin{cases} a_0 = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \\ b_0 = \pm \frac{L_w^0 - L_w^*}{2} \end{cases} \quad \forall y \begin{cases} a_{0,x} = -\chi \\ b_{0,x} = 0 \end{cases} \quad (\text{B14})$$

and

$$\forall x \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = \pm \frac{L_w^0}{2} \end{cases} \quad \forall y \begin{cases} a_{1,x} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{2(3\chi+1)} \\ b_{1,x} = 0. \end{cases} \quad (\text{B15})$$

$$(1 - 3a_{0,x})a_{1,xx} + \nu\chi \left( 1 + \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) b_{0,y} \right) a_{1,yy} + \nu(1 - \chi)a_{0,y}b_{1,yy} = -\nu a_{0,yy} \left( 3\chi a_{1,x} + (1 - \chi)b_{1,y} + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} \right), \quad (\text{B23})$$

$$\left( 1 + \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) b_{0,y} \right) b_{1,xx} + \frac{\nu}{\chi} (1 - 3b_{0,y}) b_{1,yy} + \frac{\nu}{\chi} (1 - \chi) a_{0,y} a_{1,yy} = \frac{\nu}{\chi} (1 - \chi) a_{0,yy} (\chi b_{1,x} - a_{1,y}). \quad (\text{B24})$$

These equations combined with the boundary conditions (B15) are solved numerically on a discrete lattice.

Recall that the geometrical parameters of the knit,  $c^*$ ,  $w^*$ , and  $\delta$ , are computed from the measured position field of the stitches. However, the calculated displacement field is still parametrized by the Lagrange multipliers  $\tilde{\alpha}_0$  and  $\tilde{\alpha}_1$ , which

First, the solutions for  $a_0$  and  $b_0$ , the displacement from the absolute reference configuration, should be determined. The solution for  $b_0$  is straightforward; it is simply a linear solution in  $y$ :

$$b_0(x, y) = \frac{L_w^0 - L_w^*}{L_w^*} y. \quad (\text{B16})$$

The solution for  $a_0(x, y)$  is more advanced; let us make the following change of variables:

$$x = X \frac{L_c^*}{2}, \quad (\text{B17})$$

$$y = Y \frac{\sqrt{\nu\chi} L_c^*}{2}, \quad (\text{B18})$$

$$a_0 = \frac{L_c^*}{2} \left( \left( \chi + \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} \right) A + \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} X \right), \quad (\text{B19})$$

$$L = \frac{L_w^*}{\sqrt{\nu\chi} L_c^*}. \quad (\text{B20})$$

The equations for  $a_0$  become

$$A_{,XX} + A_{,YY} = 0, \quad (\text{B21})$$

with the boundary conditions

$$A(X, Y = \pm L) = 0 \quad \text{and} \quad A_{,X}(X = \pm 1, Y) = -1. \quad (\text{B22})$$

Therefore,  $A(x, y)$  is a harmonic function inside a rectangle that satisfies Eq. (B22) at the boundaries. Semianalytical resolution can be performed using conformal mapping techniques. In the present case, we numerically solve this problem using the Schwarz-Christoffel transform Matlab Toolbox [29].

Combining Eqs. (B10)–(B13), one gets the following equations for the affine displacement field  $(a_1, b_1)$ :

are the only parameters left to compute the shape of the fabric. With  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 + \varepsilon \tilde{\alpha}_1$  being the Lagrange multiplier associated with the yarn-length conservation, we find its value using the corresponding equations  $\ell_0 = c^* + \delta w^*$  and  $\ell_1 = 0$  but this time estimated from our model and not from experimental measurements; i.e., one should satisfy

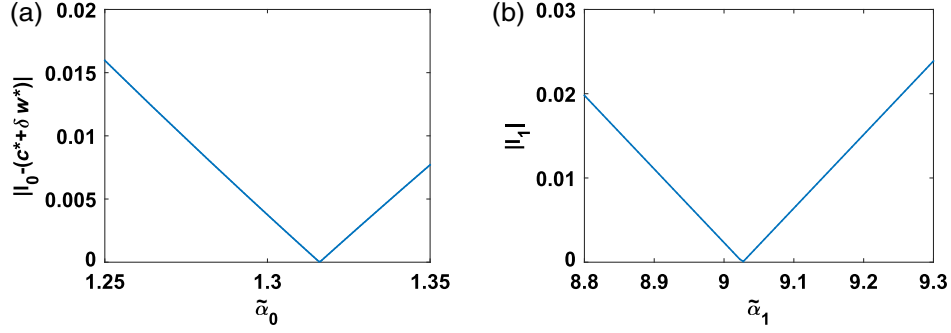


FIG. 9. Determination of the Lagrange parameter  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 + \varepsilon\tilde{\alpha}_1$ . (a) For each value of  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $a_0$  and  $b_0$  are calculated and  $\ell_0$  is estimated; we find that  $\ell_0 - (c^* + \delta w^*) = 0$  for  $\tilde{\alpha}_0 = 1.32$ . (b) For  $\tilde{\alpha}_0 = 1.32$ , while  $\tilde{\alpha}_1$  is varied,  $a_1$  and  $b_1$  are calculated to estimate  $\ell_1$ ; we find  $\ell_1 = 0$  for  $\tilde{\alpha}_1 = 9.04$ .

Eqs. (A3) and (A4) using the computed deformation vector field  $\vec{u}(x, y)$ . Notice that  $\ell_0$  is independent of  $\tilde{\alpha}_1$ ; thus, we can compute  $\tilde{\alpha}_0$  such that  $\ell_0(\tilde{\alpha}_0) = c^* + \delta w^*$  [see Fig. 9(a)]. Then, with the selected  $\tilde{\alpha}_0$ , we apply the same treatment to  $\ell_1$  and thus determine the  $\tilde{\alpha}_1$  that satisfies  $\ell_1(\tilde{\alpha}_1) = 0$  [see Fig. 9(b)]. For the fabric used in Fig. 1, we find  $\tilde{\alpha}_0 = 1.32$  and  $\tilde{\alpha}_1 = 9.04$ .

### APPENDIX C: COMPUTATION OF THE LAGRANGE MULTIPLIER $\vec{T}(x, y)$ AND THE APPLIED FORCE

We have introduced the vector  $\vec{T}$  as the Lagrange multiplier associated with the topological constraint. Since we express the variables  $\vec{c}$  and  $\vec{w}$  directly in terms of displacement fields, the topological constraint is automatically fulfilled; thus,  $\vec{T}$  does not appear explicitly in the solutions. However, once  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  are determined, one can evaluate this vector field using Eqs. (B1) and (B3), and the boundary condition  $\vec{T}[x = \pm(L_c^*/2), y] = \vec{0}$ . Recall that  $\mathcal{T}(x)$  is a traction distribution such that the total force applied on the fabric is written

$$F_T = w^* \int_{-L_c^*/2}^{L_c^*/2} \mathcal{T}(x) dx. \quad (\text{C1})$$

Let us define a new vector  $\vec{T}(x, y) = \tilde{Y}\vec{T}_1(x, y)$  and  $\mathcal{T}(x) = \tilde{Y}\mathcal{T}_1(x)/w^{*2}$ . Equations (B1) and (B3) become

$$\frac{1}{c^*} \frac{\partial \vec{T}_1}{\partial y} = \frac{\vec{c}}{c^3} - \frac{\tilde{\alpha}}{c^{*2}} \frac{\vec{c}}{c} \equiv \frac{1}{c^{*2}} \vec{f}_c(x, y), \quad (\text{C2})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^*} \frac{\partial \vec{T}_1}{\partial x} &= -\delta \left( \frac{w^*}{c^*} \right)^2 \left[ \frac{\vec{w}}{w^3} - \frac{\tilde{\alpha}}{w^{*2}} \frac{\vec{w}}{w} \right] - \frac{1}{w^{*2}} \mathcal{T}_1(x) \vec{e}_y \\ &\equiv \frac{1}{w^{*2}} \vec{f}_w(x, y) - \frac{1}{w^{*2}} \mathcal{T}_1(x) \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

The determination of the vector field  $\vec{T}_1(x, y)$  allows us to compute the applied force. Integrating Eq. (C3) and using the boundary condition  $\vec{T}[x = -(L_c^*/2), y] = \vec{0}$  yields

$$\vec{T}_1(x, y) = \frac{1}{w^*} \int_{-L_c^*/2}^x \vec{f}_w(x', y) dx' - \frac{1}{w^*} \int_{-L_c^*/2}^x \mathcal{T}_1(x') \vec{e}_y dx'. \quad (\text{C4})$$

Using Eq. (B5), one can show that this solution for  $\vec{T}_1$  satisfies Eq. (C2). Moreover, using the boundary condition  $\vec{T}[x = (L_c^*/2), y] = \vec{0}$ , one finds

$$F_T = \tilde{Y} \int_{-L_c^*/2}^{L_c^*/2} \vec{f}_w(x, y) \cdot \vec{e}_y \frac{dx}{w^*}. \quad (\text{C5})$$

This shows that the integral of the tension over the course direction should be a conserved quantity independent of the coordinate in the wale direction.

To remain consistent with the solutions obtained for  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ , and  $b_1$ , the vector field  $\vec{f}_w(x, y)$  is developed to first order in  $\varepsilon$  and in  $a_{0,x}$ ,  $b_{0,x}$ ,  $a_{0,y}$ ,  $b_{0,y}$ . To compute the tension field  $\vec{T}$  and the force  $F_T$ , one needs to know the stretching modulus  $\tilde{Y}$ . However, the force needed to pull the fabric can also be obtained from the variation of bending energy with respect to  $L_w$ . This provides an alternative estimation of the force that we name  $F_E$ . Both  $F_T$  and  $F_E$  are proportional to the unknown effective stretching modulus  $\tilde{Y}$ . This coefficient is adjusted such that the slopes of  $F_{\text{exp}}$  and  $F_T$  near  $\varepsilon = 0$  coincide; we find  $\tilde{Y}^\uparrow \approx 1.5 \times 10^{-2} \text{ J.m}^{-1}$ . The resulting three curves are shown in Fig. 7(b). The consistency of the model and the correctness of the computations appear here, as the slope of  $F_E$  matches those of  $F_{\text{exp}}$  and  $F_T$  in the vicinity of  $\varepsilon = 0$ . While  $F_{\text{exp}}(\varepsilon)$  is well described by  $F_T$  at small strains (up to  $\varepsilon \approx 4\%$ ), the nonlinear behavior of  $F_E$  manages to capture  $F_{\text{exp}}$  until  $\varepsilon \approx 8\%$ . We apply the same process for the unloading phase, and we find  $\tilde{Y}^\downarrow \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ J.m}^{-1}$ .

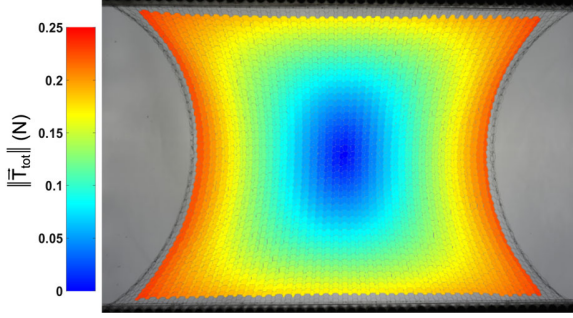


FIG. 10. Amplitude of the vector Lagrange multiplier  $\|\vec{T}_{\text{tot}}\|$  evaluated for  $\varepsilon = 11\%$  and displayed over the corresponding picture of the fabric, where the color of each stitch is set by the numerical value of  $\|\vec{T}_{\text{tot}}\|$ .

The tension  $\vec{T}(x, y)$  over the fabric cannot be retrieved independently of  $\mathcal{T}(x)$ . However, one can compute an equivalent total stress  $\vec{T}_{\text{tot}} = \vec{T} + w^* \int_0^x \mathcal{T}(x) dx \vec{e}_y$ ; see Fig. 10 for the amplitude of this vector field over the fabric. Notice that  $\vec{T}$  is the Lagrange multiplier associated with the topological constraint, so one interpretation of  $\|\vec{T}_{\text{tot}}\|$  would be how hard it is to fulfill this constraint. In other words, it can be interpreted as an interstitch tension, and its behavior reflects a stress distribution within the fabric.

#### APPENDIX D: EQUATIONS FOR THE ALTERNATIVE LOADING CONDITIONS

Figures 8(a) and 8(b) show the deformation fields for different loading configurations applied to the fabric. In the model, those changes will not affect the equilibrium equations of the displacement fields but only the associated boundary conditions. In Fig. 8(a), the fabric is tilted by an angle  $\theta = 25^\circ$  and loaded in the  $y$  direction. The initial configuration is identical as the symmetrically loaded one; hence,  $a_0$  and  $b_0$  satisfy the same equations with the same boundary conditions. For the affine displacement fields  $a_1$  and  $b_1$ , the boundary conditions become

$$\forall x \begin{cases} a_1 = \pm \frac{L_w^0}{2} \sin(\theta) \\ b_1 = \pm \frac{L_w^*}{2} \cos(\theta) \end{cases} \quad \forall y \begin{cases} a_{1,x} = -\frac{\tilde{a}_1}{2(3\chi+1)} \\ b_{1,x} = 0. \end{cases} \quad (D1)$$

For the second configuration displayed in Fig. 8(b), the fabric is initially sheared by an angle of  $\gamma = 10^\circ$ , thus inducing an additional lateral displacement. The boundary conditions associated with the prestressed state are then


$$\forall x \begin{cases} a_0 = \frac{L_c^0 - L_c^*}{L_c^*} x \pm \tan(\gamma) \frac{L_w^0}{2} \\ b_0 = \pm \frac{L_w^0 - L_w^*}{2} \end{cases} \quad \forall y \begin{cases} a_{0,x} = -\chi \\ b_{0,x} = 0. \end{cases} \quad (D2)$$

The equations and boundary conditions for  $a_1$  and  $b_1$  are functions of  $a_0$  and  $b_0$ , so their solutions are different from the symmetric case, even if their expressions are identical.

- 
- [1] J. Hu, H. Meng, G. Li, and S. I. Ibekwe, *A Review of Stimuli-Responsive Polymers for Smart Textile Applications*, *Smart Mater. Struct.* **21**, 053001 (2012).
  - [2] K. H. Leong, S. Ramakrishna, Z. M. Huang, and G. A. Bibo, *The Potential of Knitting for Engineering Composites—A Review*, *Composites Part A* **31**, 197 (2000).
  - [3] A. S. Gladman, E. A. Matsumoto, R. G. Nuzzo, L. Mahadevan, and J. A. Lewis, *Biomimetic 4D Printing*, *Nat. Mater.* **15**, 413 (2016).
  - [4] C. S. Haines, N. Li, G. M. Spinks, A. E. Aliev, J. Di, and R. H. Baughman, *New Twist on Artificial Muscles*, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **113**, 11709 (2016).
  - [5] F. T. Peirce, *Geometrical Principles Applicable to the Design of Functional Fabrics*, *Text. Res. J.* **17**, 123 (1947).
  - [6] J. C. H. Hurd and P. J. Doyle, *Fundamental Aspects of the Design of Knitted Fabrics*, *J. Text. Inst. Proc.* **44**, P561 (1953).
  - [7] G. A. V. Leaf and A. Glaskin, *43—The Geometry of a Plain Knitted Loop*, *J. Text. Inst. Trans.* **46**, T587 (1955).
  - [8] D. L. Munden, *The Geometry and Dimensional Properties of Plain-Knitted Fabrics*, *J. Text. Inst. Trans.* **50**, T448 (1959).
  - [9] P. Popper, *The Theoretical Behavior of a Knitted Fabric Subjected to Biaxial Stresses*, *Text. Res. J.* **36**, 148 (1966).
  - [10] G. A. V. Leaf, *Models of the Plain-Knitted Loop*, *J. Text. Inst. Trans.* **51**, T49 (1960).
  - [11] W. J. Shanahan and R. Postle, *A Theoretical Analysis of the Plain-Knitted Structure*, *Text. Res. J.* **40**, 656 (1970).
  - [12] B. Hepworth and G. A. V. Leaf, *The Mechanics of an Idealized Weft-Knitted Structure*, *J. Text. Inst.* **67**, 241 (1976).
  - [13] H. Hong, M. D. De Araujo, R. Figueiro, and O. Ciobanu, *Theoretical Analysis of Load-Extension Properties of Plain Weft Knits Made from High Performance Yarns for Composite Reinforcement*, *Text. Res. J.* **72**, 991 (2002).
  - [14] G. Dusserre, L. Balea, and G. Bernhart, *Elastic Properties Prediction of a Knitted Composite with Inlaid Yarns Subjected to Stretching: A Coupled Semi-analytical Model*, *Composites Part A* **64**, 185 (2014).
  - [15] S. De Jong and R. Postle, *An Energy Analysis of the Mechanics of Weft-Knitted Fabrics by Means of Optimal-Control Theory: Part II: Relaxed-Fabric Dimensions and Tensile Properties of the Plain-Knitted Structure*, *J. Text. Inst.* **68**, 316 (1977).
  - [16] K. F. Choi and T. Y. Lo, *An Energy Model of Plain Knitted Fabric*, *Text. Res. J.* **73**, 739 (2003).
  - [17] K. F. Choi and T. Y. Lo, *The Shape and Dimensions of Plain Knitted Fabric: A Fabric Mechanical Model*, *Text. Res. J.* **76**, 777 (2006).
  - [18] W.-L. Wu, H. Hamada, and Z.-I. Maekawa, *Computer Simulation of the Deformation of Weft-Knitted Fabrics for Composite Materials*, *J. Text. Inst.* **85**, 198 (1994).
  - [19] A. U. Loginov, S. A. Grishanov, and R. J. Harwood, *Modelling the Load-Extension Behaviour of Plain-Knitted*



- Fabric: Part I: A Unit-Cell Approach Towards Knitted-Fabric Mechanics*, *J. Text. Inst.* **93**, 218 (2002).
- [20] C. Yuksel, J.M. Kaldor, D.L. James, and S. Marschner, *Stitch Meshes for Modeling Knitted Clothing with Yarn-Level Detail*, *ACM Trans. Graph.* **31**, 37 (2012).
- [21] Y. Chen, S. Lin, H. Zhong, Y.-Q. Xu, B. Guo, and H.-Y. Shum, *Realistic Rendering and Animation of Knitwear*, *IEEE Trans. Visual. Comput. Graph.* **9**, 43 (2003).
- [22] J.M. Kaldor, D.L. James, and S. Marschner, *Simulating Knitted Cloth at the Yarn Level*, *ACM Trans. Graph.* **27**, 65 (2008).
- [23] N. Anbumani, *Knitting Fundamentals, Machines, Structures and Developments* (New Age International, Daryaganj, 2007).
- [24] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevX.8.021075> for additional movies of the uni-axial inhomogeneous and homogeneous deformation and trajectories of tracked stitches.
- [25] G. Dusserre, *Modelling the Hysteretic Wale-wise Stretching Behaviour of Technical Plain Knits*, *Eur. J. Mech. A* **51**, 160 (2015).
- [26] É. Ghys, *Sur la Coupe des Vêtements. Variation Autour d'un Thème de Tchebychev*, *Enseign. Math.* **57**, 165 (2011).
- [27] Y. Klein, E. Efrati, and E. Sharon, *Shaping of Elastic Sheets by Prescription of Non-Euclidean Metrics*, *Science* **315**, 1116 (2007).
- [28] S. Poincloux, M. Adda-Bedia, and F. Lechenault, *Crackling dynamics in the mechanical response of knitted fabrics*, [arXiv:1803.00815](https://arxiv.org/abs/1803.00815).
- [29] T.A. Driscoll, *Algorithm 756: A MATLAB Toolbox for Schwarz-Christoffel Mapping*, *ACM Trans. Math. Softw.* **22**, 168 (1996).

**Crackling Dynamics in the Mechanical Response of Knitted Fabrics**Samuel Poincloux,<sup>1,\*</sup> Mokhtar Adda-Bedia,<sup>2</sup> and Frédéric Lechenault<sup>1</sup><sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, PSL Research University, Sorbonne University, CNRS, F-75231 Paris, France*<sup>2</sup>*Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Université Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France* (Received 21 March 2018; revised manuscript received 8 June 2018; published 30 July 2018)

Crackling noise, which occurs in a wide range of situations, is characterized by discrete events of various sizes, often correlated in the form of avalanches. We report experimental evidence that the mechanical response of a knitted fabric displays such broadly distributed events both in the force signal and in the deformation field, with statistics analogous to that of earthquakes or soft amorphous materials. A knit consists of a regular network of frictional contacts, linked by the elasticity of the yarn. When deformed, the fabric displays spatially extended avalanchelike yielding events resulting from collective interyarn contact slips. We measure the size distribution of these avalanches, at the stitch level from the analysis of nonelastic displacement fields and externally from force fluctuations. The two measurements yield consistent power law distributions reminiscent of those found in other avalanching systems. Our study shows that a knitted fabric is not only a thread-based metamaterial with highly sought after mechanical properties, but also an original, model system, with topologically protected structural order, where an intermittent, scale-invariant response emerges from minimal ingredients, and thus a significant landmark in the study of out-of-equilibrium universality.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.058002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.058002)

Crackling dynamics in a material mechanical response is currently intensively studied owing to its fundamental and industrial relevance and to the vast range of systems it encompasses. Indeed, examples of such a response is usually found in disordered physical systems like granular materials [1–3], foams [4], metallic glasses [5,6], seismic regions [7], or front propagation in heterogeneous media [8,9] but is also documented in structurally ordered situations [10–12]. In the case of soft amorphous materials, though the origin of elasticity and plasticity and their typical length scales [13] largely differ from one system to another, a common framework has been established to investigate and predict the avalanche features [14–16].

This work aims at demonstrating that, despite their fundamentally ordered nature, knitted fabrics can also be studied within this framework. A knit is made of an elastic yarn, morphed into a 2D surface by imposing a topological, periodic pattern of self-crossing points, resulting in a network of so-called stitches [Fig. 1(a)]. Stitches deform elastically through bending of the yarn, but friction at the crossing points adds an uncertainty to the contact forces, inducing irreversible stick-slip activity. Those events propagate in the stitch network, generating avalanches and producing plastic events in the mechanical response. In this study, we use tools borrowed from the study of soft amorphous materials to characterize, externally and internally, the avalanches in this system and illustrate why it provides a handy tool to make progress in this field.

*Experiments.*—We perform a tensile test on a model fabric, knitted out of a nylon monofilament of diameter  $150\ \mu\text{m}$  (Stroft® GTM), and record its stitch displacement fields and global mechanical response. The sample is crafted using a single-bed knitting machine and is composed of  $83 \times 83$  stitches with an average lateral and longitudinal size of, respectively, 3.9 and 2.8 mm. It is then clamped on its upper and lower rows, preventing lateral displacement of the corresponding stitches. The tensile test consists on varying cyclically  $L$ , the elongation of the fabric along the so-called wale direction, between  $L_i = 215\ \text{mm}$  and  $L_f = 234\ \text{mm}$ . The mechanical response is analyzed during the stretching phase on a shorter elongation range, between  $L_m = 230\ \text{mm}$  and  $L_f$ . In this interval, the force needed to deform the fabric is recorded at a high acquisition frequency with an Instron® mounted with a 50 N load cell, and high-resolution pictures ( $7360 \times 4912$  pixels) of the sample are taken every  $\Delta L = 0.2\ \text{mm}$  increase in elongation. To approach the quasistatic deformation limit in the interval  $[L_m, L_f]$ , we impose a constant pulling speed  $v$  of the dynamometer and set it at a small value ranging from 1 to  $10\ \mu\text{m/s}$ . To reduce the duration of the experiment, we fix  $v = 0.5\ \text{mm/s}$  outside this measurement window. The imposed elongation  $L$  as a function of time is shown in Supplemental Fig. S1 [17], and Supplemental Table S1 [17] summarizes the parameters of all conducted tensile tests. Finally, a typical image of the fabric and the recorded force during one measurement window are shown in Fig. 1.

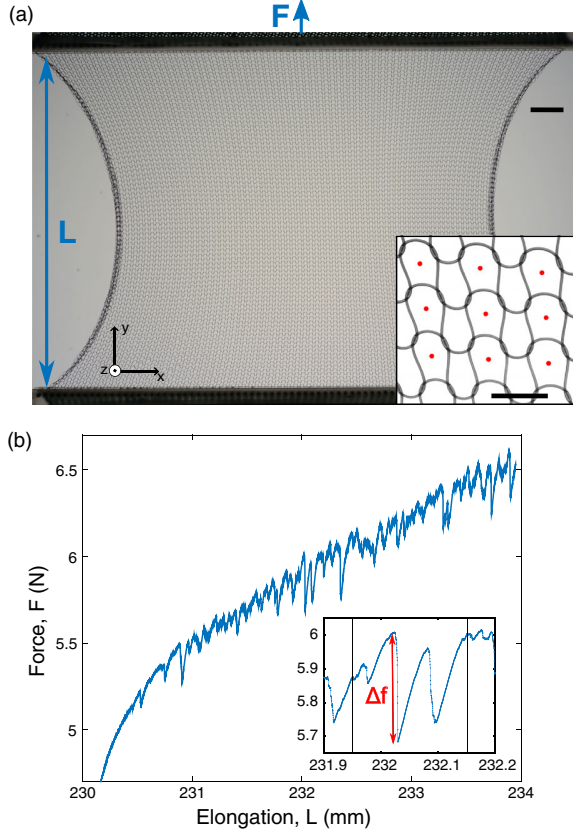


FIG. 1. Experimental system and typical force response. (a) A knitted fabric is stretched uniaxially while its mechanical response is recorded and the position of the stitches is tracked through digital image processing, with a precision of approximately  $10 \mu\text{m}$ . Typical picture of the knit; the stretching direction is materialized by the arrow associated to the force  $F$ , while  $L$  denotes its elongation. The scale bar is 25 mm long. Inset: Enlargement over a few stitches tagged by a red dot indicating their position defined as their geometric center. Here the scale bar is 4 mm long. (b) Typical mechanical response of the fabric while stretched between  $L_m = 230 \text{ mm}$  and  $L_f = 234 \text{ mm}$  at a constant speed of  $v = 5 \mu\text{m/s}$ . Stick-slip events at the contact points generate an intermittent signal, typical of crackling dynamics. Inset: Enlargement over a small interval, the definition of  $\Delta f$  is emphasized, and the two vertical lines distant by  $\Delta L = 0.2 \text{ mm}$  point to elongations at which two successive pictures of the fabric are taken.

*Estimation of avalanche size.*—Upon stretching, the force signal displays, around an average elastic response, typical force fluctuations indicative of avalanches. The fluctuations consist in linear regions, stiffer than the average response, interrupted by plastic events provoking abrupt drops. The height of the drops  $\Delta f$  can be measured and is expected to be correlated to the avalanche size. Furthermore, evidence of those avalanches is identified in the deformation field of the stitch network. Performing an external measurement associated with an internal one is

crucial to characterize the events and to rule out other possible phenomena.

Digital image processing allows us to recover the position field of the stitch network, and its displacement field between two successive pictures  $\vec{u}_{\text{tot}}$  is computed. To emphasize its nonelastic component, the affine part  $\vec{u}_{\text{lin}}$  is removed. We name  $\vec{u}$  the resulting nonaffine displacement field:  $\vec{u} = \vec{u}_{\text{tot}} - \vec{u}_{\text{lin}} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ ; Supplemental Fig. S2 [17] illustrates such an operation. Figure 2(a) shows that the nonaffine displacement field appears highly heterogeneous, with abrupt spatial changes in the direction and size of  $\vec{u}$  seemingly organized along diagonal lines. Those changes indicate that regions of the fabric are sliding against one another and are reminiscent of dislocation lines in crystals [18]. However, unlike the crystalline case, the connectivity of the network is locked, and sliding events remain small compared to the size of a unit cell. On that account, in order to characterize the features in  $\vec{u}$ , we use two invariants of the deformation tensor [19]: the vorticity  $\omega = \{[(\partial u_y)/(\partial x)] - [(\partial u_x)/(\partial y)]\}$  and the deviatoric strain  $\varepsilon_d = \sqrt{\{[(\partial u_x)/(\partial x)] - [(\partial u_y)/(\partial y)]\}^2 + \{[(\partial u_y)/(\partial x)] + [(\partial u_x)/(\partial y)]\}^2}$ . The values of  $\omega$  and  $\varepsilon_d$  associated to the displacement field depicted in Fig. 2(a) are displayed in, respectively, Figs. 2(b) and 2(c) [see Movie S1 in Supplemental Material [17] showing these fields for different  $\Delta L$  along the curve  $F(L)$  in Fig. 1(b)]. The boundaries between sliding regions of the knit are well captured by the two invariants  $\omega$  and  $\varepsilon_d$ , which hence are good candidates to evaluate the size of the sliding events from the local measurements. In contrast, it is worth noticing that  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  and the shear strain  $[(\partial u_y)/(\partial x)] + [(\partial u_x)/(\partial y)]$  are always vanishingly small and show no significant variation in the vicinity of a sliding line (see Supplemental Fig. S3 [17]). The sign of  $\omega$  allows us to discern two main event orientations: We define positive events as those featuring  $\omega > 0$  and negative ones as those with  $\omega < 0$ . To retrieve an event size  $S_\omega$  from the scalar fields  $\omega$ , we detect the connected stitches with  $|\omega|$  higher than a threshold value and then integrate  $|\omega|$  over those stitches. A demonstration of this process is shown in Supplemental Fig. S4 [17]. The same operation is applied to measure the event size  $S_d$  from  $\varepsilon_d$ .

Finally, we have verified that the location and size of sliding events are robust against the use of the total vector field  $\vec{u}_{\text{tot}}$ , instead of  $\vec{u}$ , for the definition of  $\omega$  and  $\varepsilon_d$ . This is mainly due to the fact that, even though a heterogeneous underlying loading is applied to the fabric, the spatial variations of  $\vec{u}_{\text{lin}}$  are small compared to those due to plastic events.

*Distribution of avalanche size.*—We now have a tool to measure the size of “quakelike” events, from an external perspective with the force drops  $\Delta f$  but also internally using two different means: high vorticity regions  $S_\omega$  and high deviatoric strain regions  $S_d$ . The protocol, and especially  $\Delta L$ , is chosen such that the interval between



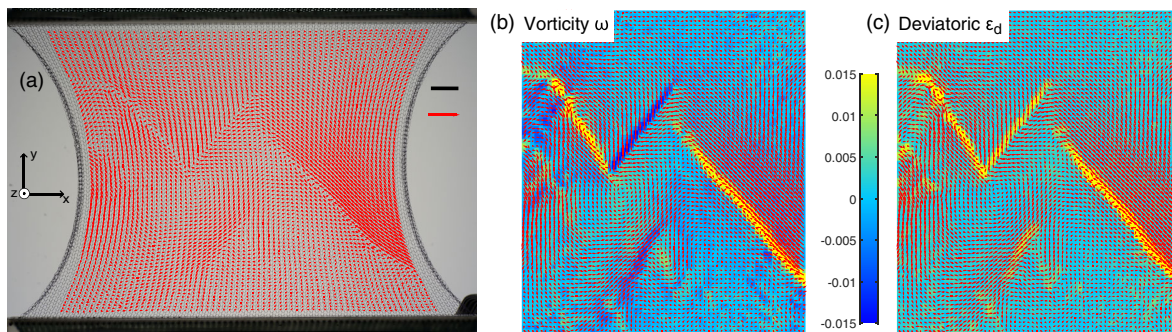


FIG. 2. Local detection of slip events. (a) Displacement field corresponding to the inset in Fig. 1(b). Each stitch is tagged by its nonaffine displacement  $\vec{u}$ , portrayed by red arrows magnified by a factor of 35. Black scale bar (position), 25 mm; red scale bar (displacement), 0.6 mm. (b) Vorticity  $\omega$  and (c) deviatoric strain  $\varepsilon_d$  of the displacement field in the stitch network. Each arrow of the displacement field is associated to a single stitch.

pictures is much longer than the duration of an event; hence, each image is not correlated to the previous one, and each cycle can be seen as another, statistically independent trial. In that way, we can build up statistics to characterize the probability distribution of event size. Figure 3(a) shows this distribution for  $\Delta f$ , while Fig. 3(b) shows the ones for  $S_\omega$  and  $S_d$ . The three distributions exhibit a power law decay with exponents of  $-1.50 \pm 0.03$  for  $\Delta f$ ,  $-1.61 \pm 0.03$  for  $S_d$ , and  $-1.51 \pm 0.05$  for  $S_\omega$ . Those power law distributions are characteristic of avalanching phenomena [5,6,8], and the exponents we find are consistent with the prediction  $-3/2$  of mean-field models [15] for soft amorphous solids. However, the universality of this exponent is still debated [3,16,20]. These scaling laws are robust upon varying the threshold value of  $|\omega|$  and  $\varepsilon_d$  for the event detection (Supplemental Fig. S5), the loading speed (Supplemental Fig. S6 for  $\Delta f$  and Fig. S7 for  $S_\omega$  and  $S_d$ ), or the stretching range (Supplemental Fig. S8) [17]. Internal and external measurements of event size have noticeably similar distribution, so one should probe if they are indeed two aspects of the same avalanches [21,22]. Thus, for each interval between two images, we sum  $S_\omega$  and  $S_d$  over all the events detected within, giving, respectively,  $\Sigma S_\omega$  and  $\Sigma S_d$ , and compare them to the sum of  $\Delta f$ , named  $\Sigma \Delta f$ , measured during the same interval. The resulting scatter plot [Fig. 3(a), inset] shows a clear linear tendency, which establishes a statistical correspondence between internal and external events. The slope  $E_p = 0.12$  N allows us to extract an avalanche parameter relating plastic deformation and force drops. Besides, comparing  $\Sigma S_\omega$  and  $\Sigma S_d$  [Fig. 3(b), inset] reveals proportionality with a coefficient close to 1. This suggests that, in this system, the sliding events are also characterized by a strong correlation between the deviatoric strain and the vorticity of the displacement field, as retrieved theoretically below.

*Avalanche propagation.*—Though it does not flow, the system at hand is reminiscent of soft amorphous solids which are commonly described using elastoplastic models [23]. These approaches assume the material as an elastic

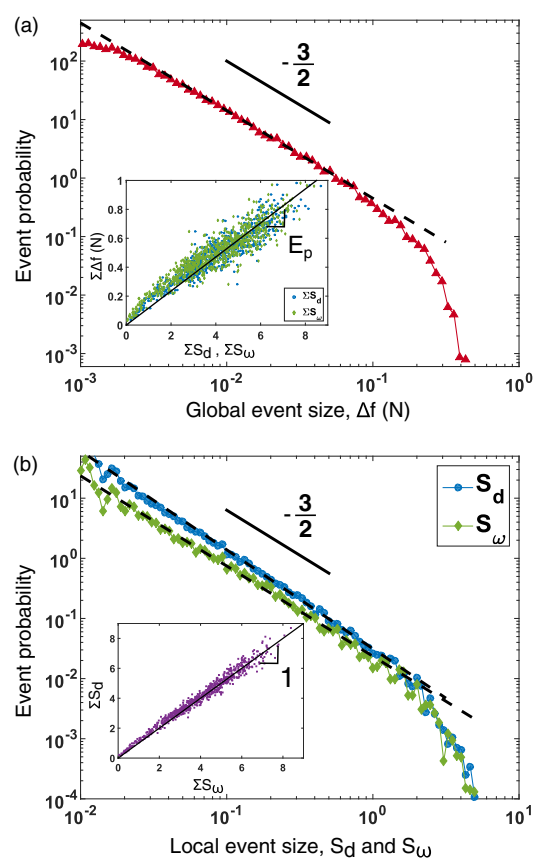


FIG. 3. Event size distribution measured from external and internal quantities. (a) Probability distribution of global event size measurement  $\Delta f$ . The dotted line is the best linear fit with a slope of  $-1.50 \pm 0.03$ . Inset: For each interval between two images, the sum of event sizes measured externally is compared to the sum of events measured internally. (b) Probability distribution of local event size measurements from vorticity  $S_\omega$  and deviatoric strain  $S_d$  of the displacement field. Dotted lines are the best linear fit with a slope of  $-1.51 \pm 0.05$  and  $-1.61 \pm 0.03$  for, respectively,  $S_\omega$  and  $S_d$ . Inset: Comparison between the sum of  $S_\omega$  and the sum of  $S_d$  for each interval. The loading speed for the data shown in this figure is  $v = 5 \mu\text{m/s}$ . The uncertainty in the exponents is evaluated from the standard error and a 95% confidence interval.

matrix with a plastic (or yield) limit and a distance to this limit distributed inhomogeneously in space [24,25]. While the stress is globally increased in the material, areas close to the plastic limit will yield first and induce a stress redistribution that may trigger other plastic events [26,27], resulting in propagating avalanches [14,28–30]. To test if a knitted fabric fits in this framework, we first analyze the nucleation and morphology of plastic events. The viewing of different images shows that the slip lines can actually intersect, although a V-shaped morphology seems to be the generic feature. To further assess this specific feature, we performed high-speed imagery of an avalanche (see Fig. S9 in Ref. [17]). It turns out that avalanches often start from a single, bulk stitch and then propagate from this particular site in all possible favored directions.

Now, let us study how plastic events are correlated in space [31]. Since high values of the vorticity in the nonaffine displacement field  $\omega$  are a good signature of plastic events in our fabric, event spatial correlation can be evaluated with the following quantity:

$$C_{\omega}^{\pm}(\delta x, \delta y) = 1 + \frac{\langle \omega(x + \delta x, y + \delta y) - \omega(x, y) \rangle_{\pm}}{\langle \omega(x, y) \rangle_{\pm}}, \quad (1)$$

where the average  $\langle \rangle_{\pm}$  runs over all the stitches detected in a positive (+) or negative (−) event.  $C_{\omega}^{+}$ , displayed in Fig. 4(a), presents a strong correlation in the direction  $-(\pi/4)$ , indicating that positive events propagate along the diagonal of the stitch network. For a negative event, the result is the same but with the direction  $(\pi/4)$ . To uncover the relation between the avalanche propagation and how the elastic matrix reacts to a local plastic event, we use a framework [32] which provides us with a continuous model of knit elasticity. Considering a homogeneous fabric, we locally impose a nonzero vorticity  $\omega_0$  and a deformation field  $\varepsilon_{d_0} = \{[(\partial u_x)/(\partial x)] - [(\partial u_y)/(\partial y)]\}$  that is related to the deviatoric strain and allows us to account for the sign of this quantity. Those deformations are applied over a region of size  $d$ , with  $\omega_0 > 0$  for a positive event and  $\omega_0 < 0$  for a negative event, while  $\varepsilon_{d_0} < 0$  for both types of event. We then compute the resulting displacement field with a vanishing displacement far from the perturbation. In the stitch network, the vorticity and deviatoric strain have the following expressions in polar coordinates  $(r, \theta)$ :  $\omega(r, \theta) = [(\varepsilon_{d_0} d^2)/(2r^2)] \sin 2\theta$  and  $\varepsilon_d(r, \theta) = [(\omega_0 d^2)/(2r^2)] \sin 2\theta$ , valid for  $r \geq d$ . More details on the elastic model and calculations can be found in Supplemental Material [17]. The resulting displacement field around a positive event is shown in Fig. 4(b), together with the angular variation of  $\omega(r, \theta)$ . The elastic response of the knit allows us to retrieve two properties of the measured events. First, the maxima of the vorticity and deviatoric fields are located along the same directions as those measured experimentally, irrespective of the event sign. Second, the elastic model gives  $\omega(r, \theta)$

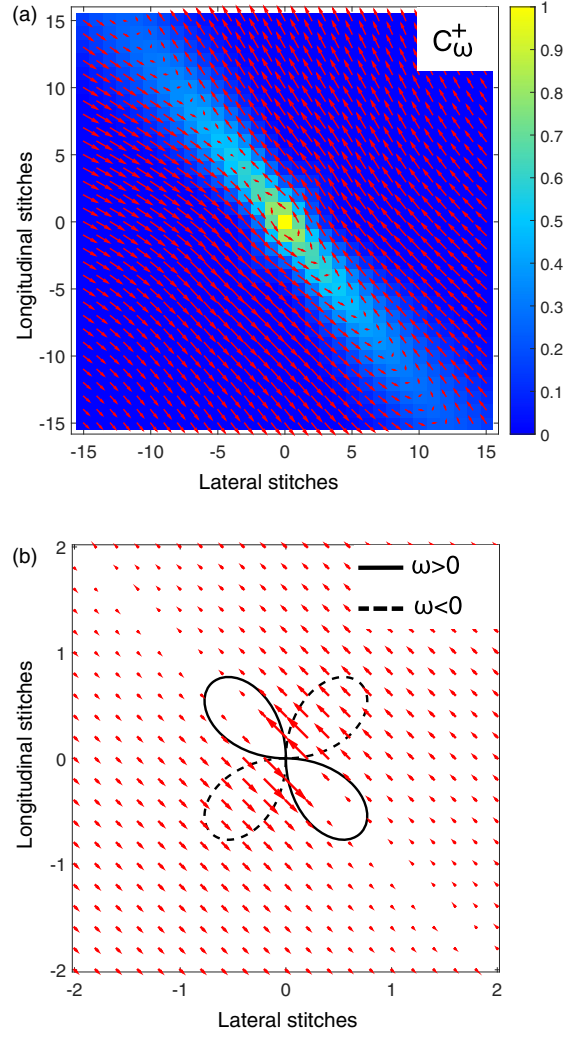


FIG. 4. Experimental spatial correlation and theoretical elastic deformation of positive events. (a) Amplitude of the correlation function  $C_{\omega}^{+}$  of the vorticity, showing the events propagating along diagonal stitches, together with the relative displacement field during positive events  $\vec{u}_{+}(\delta x, \delta y) = \langle \vec{u}(x + \delta x, y + \delta y) - \vec{u}(x, y) \rangle_{+}$ . Data shown for  $v = 5 \mu\text{m/s}$ . (b) Analytical response of the elastic network to a local perturbation shown through the displacement field around the perturbation, along with the angular dependence of the vorticity field  $r^2\omega(r, \theta)$ . The direction of maximum vorticity redistribution matches the orientation of the slip lines, suggesting that the events are formed by triggered successive slips.

directly proportional to  $\varepsilon_{d_0}$ , along with  $\varepsilon_d(r, \theta)$  proportional to  $\omega_0$ , suggesting that, during event propagation, the vorticity and deviatoric are strongly correlated as evidenced experimentally [see the inset in Fig. 3(b)].

**Conclusion.**—In this study, we show that the mechanical response of a knitted fabric displays crackling dynamics in its mechanical response through stick-slip events, despite its topologically protected structural order; thus, it is not prone to either structural rearrangement or yielding or failure. Global and local avalanche size display power law

distributions as those predicted by mean-field models of soft amorphous materials. This approach differs from previous studies on friction in textiles [33,34] and may trigger new perspectives for the study of textile mechanics. Moreover, the quality of the experimental measurements of the avalanche statistics in this original system ends up rivaling the latest similar experimental analysis on more commonly studied systems [3,6,22]. Knitted fabrics can thus be used as a tool to investigate the universal crackling response, allowing us to distinguish between the effects of plastic threshold distributions present here and the missing structural disorder. This approach also proves advantageous for several reasons such as a straightforward experimental implementation and analysis or the presence of numerous easily tunable parameters.

The authors thank E. Agoritsas, A. Rosso, and J.-L. Barrat for fruitful discussions. This work was carried out in the framework of the METAMAT Project No. ANR-14-CE07-0031 funded by Agence Nationale pour la Recherche.

\*spoincloux@lps.ens.fr

- [1] I. Albert, P. Tegzes, B. Kahng, R. Albert, J. G. Sample, M. Pfeifer, A.-L. Barabasi, T. Vicsek, and P. Schiffer, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5122 (2000).
- [2] N. W. Hayman, L. Ducloué, K. L. Foco, and K. E. Daniels, *Pure Appl. Geophys.* **168**, 2239 (2011).
- [3] D. Denisov, K. Lörincz, J. Uhl, K. Dahmen, and P. Schall, *Nat. Commun.* **7**, 10641 (2016).
- [4] J. Lauridsen, M. Twardos, and M. Dennin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 098303 (2002).
- [5] B. A. Sun, H. B. Yu, W. Jiao, H. Y. Bai, D. Q. Zhao, and W. H. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 035501 (2010).
- [6] J. Antonaglia, W. J. Wright, X. Gu, R. R. Byer, T. C. Hufnagel, M. LeBlanc, J. T. Uhl, and K. A. Dahmen, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 155501 (2014).
- [7] K. Chen, P. Bak, and S. P. Obukhov, *Phys. Rev. A* **43**, 625 (1991).
- [8] D. Bonamy, S. Santucci, and L. Ponsou, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 045501 (2008).
- [9] T. Chevalier, A. K. Dubey, S. Atis, A. Rosso, D. Salin, and L. Talon, *Phys. Rev. E* **95**, 042210 (2017).
- [10] N. Friedman, A. T. Jennings, G. Tsekenis, J.-Y. Kim, M. Tao, J. T. Uhl, J. R. Greer, and K. A. Dahmen, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095507 (2012).
- [11] G. Sparks and R. Maaß, *Acta Mater.* **152**, 86 (2018).
- [12] L. Carrillo, L. Mañosa, J. Ortin, A. Planes, and E. Vives, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1889 (1998).
- [13] J. T. Uhl *et al.*, *Sci. Rep.* **5**, 16493 (2015).
- [14] E. Bouchbinder, J. S. Langer, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **75**, 036107 (2007).
- [15] K. A. Dahmen, Y. Ben-Zion, and J. T. Uhl, *Nat. Phys.* **7**, 554 (2011).
- [16] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **111**, 14382 (2014).
- [17] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.121.058002> for further information on the experimental protocol, effects of different parameters, and calculation derivation.
- [18] S. Papanikolaou, D. M. Dimiduk, W. Choi, J. P. Sethna, M. D. Uchic, C. F. Woodward, and S. Zapperi, *Nature (London)* **490**, 517 (2012).
- [19] C. E. Maloney and M. O. Robbins, *J. Phys. Condens. Matter* **20**, 244128 (2008).
- [20] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 065501 (2016).
- [21] A. Amon, V. B. Nguyen, A. Bruand, J. Crassous, and E. Clément, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 135502 (2012).
- [22] J. Barés, D. Wang, T. Bertrand, C. S. O'Hern, and R. P. Behringer, *Phys. Rev. E* **96**, 052902 (2017).
- [23] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, [arXiv:1708.09194](https://arxiv.org/abs/1708.09194).
- [24] J.-C. Baret, D. Vandembroucq, and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 195506 (2002).
- [25] E. Agoritsas, E. Bertin, K. Martens, and J.-L. Barrat, *Eur. Phys. J. E* **38**, 71 (2015).
- [26] K. W. Desmond and E. R. Weeks, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 098302 (2015).
- [27] X. Cao, A. Nicolas, D. Trimcev, and A. Rosso, *Soft Matter* **14**, 3640 (2018).
- [28] C. E. Maloney and A. Lemaitre, *Phys. Rev. E* **74**, 016118 (2006).
- [29] A. Tanguy, F. Leonforte, and J.-L. Barrat, *Eur. Phys. J. E* **20**, 355 (2006).
- [30] B. Tyukodi, S. Patinet, S. Roux, and D. Vandembroucq, *Phys. Rev. E* **93**, 063005 (2016).
- [31] A. Le Bouil, A. Amon, S. McNamara, and J. Crassous, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 246001 (2014).
- [32] S. Poincloux, M. Adda-Bedia, and F. Lechenault, *Phys. Rev. X* **8**, 021075 (2018).
- [33] M. Matsuo and T. Yamada, *Text. Res. J.* **79**, 275 (2009).
- [34] G. Dusserre, *Eur. J. Mech. A* **51**, 160 (2015).



# Bibliographie

- [1] D. SCHURIG, J. MOCK, B. JUSTICE, S. A. CUMMER, J. B. PENDRY, A. STARR & D. SMITH ; «Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies» ; Science **314**, p. 977–980 (2006). 1
- [2] U. LEONHARDT ; «Optical conformal mapping» ; Science **312**, p. 1777–1780 (2006). 1
- [3] Y. DING, Z. LIU, C. QIU & J. SHI ; «Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density» ; Physical review letters **99**, p. 093 904 (2007). 1
- [4] N. KAINA, F. LEMOULT, M. FINK & G. LEROSEY ; «Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials» ; Nature **525**, p. 77 (2015). 1
- [5] M. FARHAT, S. ENOCH, S. GUENNEAU & A. MOVCHAN ; «Broadband cylindrical acoustic cloak for linear surface waves in a fluid» ; Physical review letters **101**, p. 134 501 (2008). 1
- [6] S. BRÛLÉ, E. JAVELAUD, S. ENOCH & S. GUENNEAU ; «Experiments on seismic metamaterials : Molding surface waves» ; Physical review letters **112**, p. 133 901 (2014). 1
- [7] R. LAKES ; «Foam structures with a negative Poisson’s ratio» ; Science **235**, p. 1038–1041 (1987). 1
- [8] K. BERTOLDI, P. M. REIS, S. WILLSHAW & T. MULLIN ; «Negative Poisson’s Ratio Behavior Induced by an Elastic Instability» ; Advanced Materials **22**, p. 361–366 (2010) ; ISSN 1521-4095. 1
- [9] R. H. BAUGHMAN, S. STAFSTRÖM, C. CUI & S. O. DANTAS ; «Materials with negative compressibilities in one or more dimensions» ; Science **279**, p. 1522–1524 (1998). 1
- [10] A. B. CAIRNS, J. CATAFESTA, C. LEVELUT, J. ROUQUETTE, A. VAN DER LEE, L. PETERS, A. L. THOMPSON, V. DMITRIEV, J. HAINES & A. L. GOODWIN ; «Giant negative linear compressibility in zinc dicyanoaurate» ; Nature materials **12**, p. 212 (2013). 1
- [11] T. FRENZEL, M. KADIC & M. WEGENER ; «Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist» ; Science **358**, p. 1072–1074 (2017) ; ISSN 0036-8075. 1, 3
- [12] C. COULAIS, E. TEOMY, K. DE REUS, Y. SHOKEF & M. VAN HECKE ; «Combinatorial design of textured mechanical metamaterials» ; Nature **535**, p. 529 (2016). 2



- [13] C. COULAIS, D. SOUNAS & A. ALÙ; «Static non-reciprocity in mechanical metamaterials»; *Nature* **542**, p. 461 (2017). 2
- [14] Z. Y. WEI, Z. V. GUO, L. DUDTE, H. Y. LIANG & L. MAHADEVAN; «Geometric Mechanics of Periodic Pleated Origami»; *Phys. Rev. Lett.* **110**, p. 215 501 (2013). 2
- [15] J. L. SILVERBERG, A. A. EVANS, L. MCLEOD, R. C. HAYWARD, T. HULL, C. D. SANTANGELO & I. COHEN; «Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials»; *Science* **345**, p. 647–650 (2014); ISSN 0036-8075. 2
- [16] K. MIURA; «Method of packaging and deployment of large membranes in space»; *The Institute of Space and Astronautical Science report* **618**, p. 1 (1985). 2
- [17] Y. CHEN, R. PENG & Z. YOU; «Origami of thick panels»; *Science* **349**, p. 396–400 (2015); ISSN 0036-8075. 2
- [18] T. C. SHYU, P. F. DAMASCENO, P. M. DODD, A. LAMOUREUX, L. XU, M. SHLIAN, M. SHTEIN, S. C. GLOTZER & N. A. KOTOV; «A kirigami approach to engineering elasticity in nanocomposites through patterned defects»; *Nature materials* **14**, p. 785 (2015). 2
- [19] M. A. DIAS, M. P. MCCARRON, D. RAYNEAU-KIRKHOPE, P. Z. HANAKATA, D. K. CAMPBELL, H. S. PARK & D. P. HOLMES; «Kirigami actuators»; *Soft matter* **13**, p. 9087–9092 (2017). 2
- [20] B. FLORIJN, C. COULAIS & M. VAN HECKE; «Programmable mechanical metamaterials»; *Physical review letters* **113**, p. 175 503 (2014). 2, 3
- [21] C. COULAIS, J. T. OVERVELDE, L. A. LUBBERS, K. BERTOLDI & M. VAN HECKE; «Discontinuous buckling of wide beams and metabeams»; *Physical review letters* **115**, p. 044 301 (2015). 2
- [22] K. E. EVANS & A. ALDERSON; «Auxetic materials : functional materials and structures from lateral thinking!»; *Advanced materials* **12**, p. 617–628 (2000). 3
- [23] A. REID, F. LECHENAULT, S. RICA & M. ADDA-BEDIA; «Geometry and design of origami bellows with tunable response»; *Physical Review E* **95**, p. 013 002 (2017). 3
- [24] G. VERHILLE, S. MOULINET, N. VANDENBERGHE, M. ADDA-BEDIA & P. LE GAL; «Structure and mechanics of aegagropilae fiber network»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **114**, p. 4607–4612 (2017); ISSN 0027-8424. 2
- [25] P. GRANDGEORGE, N. KRINS, A. HOURLIER-FARGETTE, C. LABERTY-ROBERT, S. NEUKIRCH & A. ANTKOWIAK; «Capillarity-induced folds fuel extreme shape changes in thin wicked membranes»; *Science* **360**, p. 296–299 (2018). 2, 142
- [26] B. AUDOLY, N. CLAUVELIN & S. NEUKIRCH; «Elastic knots»; *Physical Review Letters* **99**, p. 164 301 (2007). 4, 17
- [27] N. CLAUVELIN, B. AUDOLY & S. NEUKIRCH; «Matched asymptotic expansions for twisted elastic knots : a self-contact problem with non-trivial contact topology»; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **57**, p. 1623–1656 (2009). 4, 17
- [28] M. JAWED, P. DIELEMAN, B. AUDOLY & P. M. REIS; «Untangling the mechanics and topology in the frictional response of long overhand elastic knots»; *Physical review letters* **115**, p. 118 302 (2015). 4, 17

- [29] D. E. MOULTON, P. GRANDGEORGE & S. NEUKIRCH ; «Stable elastic knots with no self-contact» ; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **116**, p. 33–53 (2018). 4
- [30] M. BUENO ; «Structure and mechanics of knitted fabrics» ; *Structure and mechanics of textile fibre assemblies* p. 84–113 (2008). 4
- [31] K. H. LEONG, S. RAMAKRISHNA, Z. HUANG & G. BIBO ; «The potential of knitting for engineering composites—a review» ; *Composites Part A : applied science and manufacturing* **31**, p. 197–220 (2000). 7
- [32] A. ALRUHBAN ; *Contribution à l'analyse de la déformabilité de renforts tricotés* ; Thèse de doctorat ; Université Lille 1 (2013). 7
- [33] J. HU, H. MENG, G. LI & S. I. IBEKWE ; «A review of stimuli-responsive polymers for smart textile applications» ; *Smart Materials and Structures* **21**, p. 053 001 (2012). 8
- [34] C. S. HAINES, N. LI, G. M. SPINKS, A. E. ALIEV, J. DI & R. H. BAUGHMAN ; «New twist on artificial muscles» ; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **113**, p. 11 709–11 716 (2016). 8
- [35] M.-W. HAN & S.-H. AHN ; «Blooming Knit Flowers : Loop-Linked Soft Morphing Structures for Soft Robotics» ; *Advanced Materials* **29** (2017). 8, 9, 135
- [36] A. MAZIZ, A. CONCAS, A. KHALDI, J. STÅLHAND, N.-K. PERSSON & E. W. JAGER ; «Knitting and weaving artificial muscles» ; *Science advances* **3**, p. e1600 327 (2017). 8
- [37] J. ABEL, J. LUNTZ & D. BREI ; «A two-dimensional analytical model and experimental validation of garter stitch knitted shape memory alloy actuator architecture» ; *Smart Materials and Structures* **21**, p. 085 011 (2012). 9
- [38] J. ABEL, J. LUNTZ & D. BREI ; «Hierarchical architecture of active knits» ; *Smart materials and Structures* **22**, p. 125 001 (2013). 9, 135
- [39] M. L. ROLLINS & V. W. TRIPP ; «Optical and electron microscopic studies of cotton fiber structure» ; *Textile Research Journal* **24**, p. 345–357 (1954). 9
- [40] G. DUSSERRE ; «Modelling the hysteretic wale-wise stretching behaviour of technical plain knits» ; *European Journal of Mechanics-A/Solids* **51**, p. 160–171 (2015). 9, 128
- [41] B. AUDOLY & Y. POMEAU ; *Elasticity and geometry : from hair curls to the non-linear response of shells* (Oxford University Press) (2010). 13, 14, 16
- [42] A. E. H. LOVE ; *A treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge university press) (1927). 13, 15
- [43] G. KIRCHHOFF ; «Uber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dunnen elastischen Stabes» ; *J. Reine Angew. Math.* **56**, p. 285–313 (1859). 15
- [44] S. NEUKIRCH, G. VAN DER HEIJDEN & J. THOMPSON ; «Writhing instabilities of twisted rods : from infinite to finite length» ; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **50**, p. 1175–1191 (2002). 15
- [45] S. NEUKIRCH & M. E. HENDERSON ; «Classification of the spatial equilibria of the clamped elastica : Symmetries and zoology of solutions» ; *Journal of Elasticity* **68**, p. 95–121 (2002). 15

- [46] L. LANDAU & E. LIFCHITZ; *Théorie de l'élasticité* (Éditions MIR) (1990). 16
- [47] C. MATE, G. MCCLELLAND, R. ERLANDSSON & S. CHIANG; «Atomic-scale friction of a tungsten tip on a graphite surface.»; *Physical review letters* **59**, p. 1942 (1987). 17
- [48] W. ZHONG & D. TOMANEK; «First-principles theory of atomic-scale friction»; *Physical review letters* **64**, p. 3054 (1990). 17
- [49] J. H. DIETERICH & B. D. KILGORE; «Imaging surface contacts : power law contact distributions and contact stresses in quartz, calcite, glass and acrylic plastic»; *Tectonophysics* **256**, p. 219–239 (1996). 17
- [50] S. M. RUBINSTEIN, G. COHEN & J. FINEBERG; «Detachment fronts and the onset of dynamic friction»; *Nature* **430**, p. 1005 (2004). 17
- [51] E. BAYART, I. SVETLIZKY & J. FINEBERG; «Fracture mechanics determine the lengths of interface ruptures that mediate frictional motion»; *Nature Physics* **12**, p. 166 (2016). 17
- [52] G. AMONTONS; *De la resistance causée dans les machines* (Mémoire de l'Académie Royale) (1699). 17
- [53] C. A. COULOMB; *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages* (Bachelier) (1821). 17
- [54] F. HESLOT, T. BAUMBERGER, B. PERRIN, B. CAROLI & C. CAROLI; «Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics : Experiments and a heuristic model»; *Physical review E* **49**, p. 4973 (1994). 17
- [55] T. BAUMBERGER & C. CAROLI; «Solid friction from stick–slip down to pinning and aging»; *Advances in Physics* **55**, p. 279–348 (2006). 17, 18, 19, 84
- [56] N. GRALEN; «Friction between single fibres»; *Proc. R. Soc. Lond. A* **212**, p. 491–495 (1952). 17
- [57] B. CORNELISSEN, B. RIETMAN & R. AKKERMAN; «Frictional behaviour of high performance fibrous tows : Friction experiments»; *Composites Part A : Applied science and manufacturing* **44**, p. 95–104 (2013). 17
- [58] D. DURVILLE; «Contact-friction modeling within elastic beam assemblies : an application to knot tightening»; *Computational Mechanics* **49**, p. 687–707 (2012). 17
- [59] F. BERTAILS-DESCOUBES, F. CADOUX, G. DAVIET & V. ACARY; «A nonsmooth Newton solver for capturing exact Coulomb friction in fiber assemblies»; *ACM Transactions on Graphics (TOG)* **30**, p. 6 (2011). 17
- [60] G. DAVIET, F. BERTAILS-DESCOUBES & L. BOISSIEUX; «A hybrid iterative solver for robustly capturing coulomb friction in hair dynamics»; **30**, p. 139 (2011). 17
- [61] E. SYERKO, S. COMAS-CARDONA & C. BINETRUY; «Models of mechanical properties/behavior of dry fibrous materials at various scales in bending and tension : A review»; *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* **43**, p. 1365–1388 (2012). 17
- [62] C. JIANG, T. GAST & J. TERAN; «Anisotropic elastoplasticity for cloth, knit and hair frictional contact»; *ACM Transactions on Graphics (TOG)* **36**, p. 152 (2017). 17

- [63] B. CAMILLIERI & M.-A. BUENO ; «Artificial finger design for investigating the tactile friction of textile surfaces» ; *Tribology International* **109**, p. 274–284 (2017). 17
- [64] F. P. BOWDEN & D. TABOR ; *The friction and lubrication of solids* ; tome 1 (Oxford university press) (1950). 17
- [65] S. NASUNO, A. KUDROLLI, A. BAK & J. P. GOLLUB ; «Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers» ; *Physical Review E* **58**, p. 2161 (1998). 19
- [66] F. T. PEIRCE ; «Geometrical principles applicable to the design of functional fabrics» ; *Textile Research Journal* **17**, p. 123–147 (1947). 20, 21
- [67] J. HURD & P. DOYLE ; «Fundamental aspects of the design of knitted fabrics» ; *Journal of the Textile Institute Proceedings* **44**, p. P561–P578 (1953). 20
- [68] G. LEAF & A. GLASKIN ; «The geometry of a plain knitted loop» ; *Journal of the Textile Institute Transactions* **46**, p. T587–T605 (1955). 20
- [69] D. MUNDEN ; «The geometry and dimensional properties of plain-knit fabrics» ; *Journal of the Textile Institute Transactions* **50**, p. T448–T471 (1959). 20, 54
- [70] H. M. FLETCHER & S. H. ROBERTS ; «The geometry of plain and rib knit cotton fabrics and its relation to shrinkage in laundering» ; *Textile Research Journal* **22**, p. 84–88 (1952). 20, 143
- [71] H. M. FLETCHER & S. H. ROBERTS ; «The geometry of knit fabrics made of staple rayon and nylon and its relationship to shrinkage in laundering» ; *Textile Research Journal* **22**, p. 466–471 (1952). 20
- [72] H. M. FLETCHER & S. H. ROBERTS ; «The Relationship of the Geometry of Plain Knit Cotton Fabric to Its Dimensional Change and Elastic Properties» ; *Textile Research Journal* **24**, p. 729–737 (1954). 20
- [73] P. POPPER ; «The theoretical behavior of a knitted fabric subjected to biaxial stresses» ; *Textile Research Journal* **36**, p. 148–157 (1966). 20, 21
- [74] J. WHITNEY & J. EPTING JR ; «Three-Dimensional Analysis of a Plain Knitted Fabric Subjected to Biaxial Stresses1» ; *Textile Research Journal* **36**, p. 143–147 (1966). 21
- [75] H. KARIMI, A. A. JEDDI & A. RASTGOO ; «Theoretical analysis of load–extension behaviour of plain-weft-knitted fabric» ; *The Journal of The Textile Institute* **100**, p. 18–27 (2009). 21
- [76] A. KURBAK & T. ALPYILDIZ ; «A geometrical model for the double lacoste knits» ; *Textile Research Journal* **78**, p. 232–247 (2008). 21
- [77] A. KURBAK ; «Geometrical models for balanced rib knitted fabrics part I : conventionally Knitted 1 × 1 rib fabrics» ; *Textile Research Journal* **79**, p. 418–435 (2009). 21
- [78] A. KURBAK & A. S. SOYDAN ; «Basic Studies for Modeling Complex Weft Knitted Fabric Structures Part III : A Geometrical Model for 1 × 1 Purl Fabrics» ; *Textile Research Journal* **78**, p. 377–381 (2008). 21
- [79] O. KAYACAN & A. KURBAK ; «Basic studies for modeling complex weft knitted fabric structures part IV : Geometrical modeling of miss stitches» ; *Textile Research Journal* **78**, p. 659–663 (2008). 21

- [80] A. KURBAK & O. KAYACAN; «Basic studies for modeling complex weft knitted fabric structures part V : Geometrical modeling of tuck stitches»; *Textile Research Journal* **78**, p. 577–582 (2008). 21
- [81] C. E. KNITTEL, M. TANIS, A. L. STOLTZFUS, T. CASTLE, R. D. KAMIEN & G. DION; «Modelling textile structures using bicontinuous surfaces»; arXiv preprint arXiv :1807.03627 (2018). 21
- [82] G. LEAF; «Models of the plain-knitted loop»; *Journal of the Textile Institute Transactions* **51**, p. T49–T58 (1960). 22
- [83] R. POSTLE & D. MUNDEN; «Analysis of the dry-relaxed knitted-loop configuration. Part I : two-dimensional analysis»; *Journal of the Textile Institute* **58**, p. 329–351 (1967). 22
- [84] R. POSTLE & D. MUNDEN; «Analysis of the dry-relaxed knitted-loop configuration. Part II : three-dimensional analysis»; *Journal of the Textile Institute* **58**, p. 352–365 (1967). 22
- [85] W. SHANAHAN & R. POSTLE; «A theoretical analysis of the plain-knitted structure»; *Textile Research Journal* **40**, p. 656–665 (1970). 22
- [86] W. SHANAHAN & R. POSTLE; «A theoretical analysis of the tensile properties of plain-knitted fabrics. Part II : the initial load-extension behaviour for fabric extension parallel to the courses»; *Journal of the Textile Institute* **65**, p. 200–212 (1974). 22
- [87] W. SHANAHAN & R. POSTLE; «A theoretical analysis of the tensile properties of plain-knitted fabrics. Part II : the initial load-extension behaviour for fabric extension parallel to the wales»; *Journal of the Textile Institute* **65**, p. 254–260 (1974). 22, 82
- [88] B. M. MACRORY, J. R. MCCRAITH & A. B. MCNAMARA; «The biaxial load-extension properties of plain, weft-knitted fabrics—a theoretical analysis»; *Textile Research Journal* **45**, p. 746–760 (1975). 22
- [89] B. HEPWORTH & G. LEAF; «The mechanics of an idealized weft-knitted structure»; *Journal of the Textile Institute* **67**, p. 241–248 (1976). 22
- [90] B. HEPWORTH; «The biaxial load-extension behaviour of a model of plain weft-knitting. Part I»; *Journal of the Textile Institute* **69**, p. 101–107 (1978). 22
- [91] S. DE JONG & R. POSTLE; «An energy analysis of the mechanics of weft-knitted fabrics by means of optimal-control theory. Part I : the nature of loop-interlocking in the plain-knitted structure»; *The Journal of The Textile Institute* **68**, p. 307–315 (1977). 22
- [92] S. DE JONG & R. POSTLE; «An energy analysis of the mechanics of weft-knitted fabrics by means of optimal-control theory part II : relaxed-fabric dimensions and tensile properties of the plain-knitted structure»; *Journal of the Textile Institute* **68**, p. 37–41 (1977). 22
- [93] S. ALLAN HEAP, P. F. GREENWOOD, R. D. LEAH, J. T. EATON, J. C. STEVENS & P. KEHER; «Prediction of finished weight and shrinkage of cotton knits—the starfish project : Part I : Introduction and general overview»; *Textile research journal* **53**, p. 109–119 (1983). 22, 143

- [94] S. A. HEAP, P. F. GREENWOOD, R. D. LEAH, J. T. EATON, J. C. STEVENS & P. KEHER ; «Prediction of finished relaxed dimensions of cotton knits—the starfish project : Part II : Shrinkage and the reference state» ; *Textile Research Journal* **55**, p. 211–222 (1985). 22
- [95] H. HONG, M. DE ARAUJO, R. FANGUEIRO & O. CIOBANU ; «Theoretical analysis of load-extension properties of plain weft knits made from high performance yarns for composite reinforcement» ; *Textile research journal* **72**, p. 991–996 (2002). 22, 23, 50, 53
- [96] K. CHOI & T. LO ; «An energy model of plain knitted fabric» ; *Textile research journal* **73**, p. 739–748 (2003). 22
- [97] K. F. CHOI & T. Y. LO ; «The shape and dimensions of plain knitted fabric : A fabric mechanical model» ; *Textile research journal* **76**, p. 777–786 (2006). 22
- [98] D. LIU, D. CHRISTE, B. SHAKIBAJAHROMI, C. KNITTEL, N. CASTANEDA, D. BREEN, G. DION & A. KONTOSOS ; «On the role of material architecture in the mechanical behavior of knitted textiles» ; *International Journal of Solids and Structures* **109**, p. 101–111 (2017). 22
- [99] J. M. KALDOR, D. L. JAMES & S. MARSCHNER ; «Simulating knitted cloth at the yarn level» ; dans «ACM Transactions on Graphics (TOG)», , tome 27p. 65 (ACM) (2008). 22, 23, 25
- [100] Y. RÉMION, J.-M. NOURRIT & D. GILLARD ; «Dynamic animation of spline like objects» ; p. 426–432 (1999). 22
- [101] Y. REMION, J.-M. NOURRIT & D. GILLARD ; «A dynamic animation engine for generic spline objects» ; *The Journal of Visualization and Computer Animation* **11**, p. 17–26 (2000). 22
- [102] O. NOCENT, J.-M. NOURRIT & Y. REMION ; «Towards mechanical level of detail for knitwear simulation» ; (2001). 22
- [103] Y. CHEN, S. LIN, H. ZHONG, Y.-Q. XU, B. GUO & H.-Y. SHUM ; «Realistic rendering and animation of knitwear» ; *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* **9**, p. 43–55 (2003). 23
- [104] W.-L. WU, H. HAMADA & Z.-i. MAEKAWA ; «Computer simulation of the deformation of weft-knitted fabrics for composite materials» ; *Journal of the Textile Institute* **85**, p. 198–214 (1994). 24
- [105] G. CIRIO, J. LOPEZ-MORENO & M. A. OTADUY ; «Efficient simulation of knitted cloth using persistent contacts» ; dans «Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation», p. 55–61 (ACM) (2015). 24
- [106] A. LOGINOV, S. GRISHANOV & R. HARWOOD ; «Modelling the Load–Extension Behaviour of Plain-knitted Fabric : Part I : A Unit-cell Approach towards Knitted-fabric Mechanics» ; *Journal of the Textile Institute* **93**, p. 218–238 (2002). 24
- [107] A. LOGINOV, S. GRISHANOV & R. HARWOOD ; «Modelling the Load–Extension Behaviour of Plain-knitted Fabric : Part II : Energy Relationships in the Unit Cell» ; *Journal of the Textile Institute* **93**, p. 239–250 (2002). 24, 25



- [108] A. LOGINOV, S. GRISHANOV & R. HARWOOD ; «Modelling the Load–Extension Behaviour of Plain-knitted Fabric : Part III : Model Implementation and Experimental Verification» ; Journal of the Textile Institute **93**, p. 251–275 (2002). 24
- [109] C. YUKSEL, J. M. KALDOR, D. L. JAMES & S. MARSCHNER ; «Stitch meshes for modeling knitted clothing with yarn-level detail» ; ACM Transactions on Graphics (TOG) **31**, p. 37 (2012). 24, 25
- [110] M.-F. DE LA VILLEHUCHET & M. COULON ; *Guide du tricot* (Brodard et Taupin) (1939). 30
- [111] N. ANBUMANI ; *Knitting Fundamentals, Machines, Structures and Developments* (New Age International) (2007). 30, 31
- [112] J. C. CROCKER & D. G. GRIER ; «Methods of digital video microscopy for colloidal studies» ; Journal of colloid and interface science **179**, p. 298–310 (1996). 38
- [113] S. GRISHANOV, V. MESHKOV & A. OMELCHENKO ; «A topological study of textile structures. Part I : An introduction to topological methods» ; Textile Research Journal **79**, p. 702–713 (2009). 57, 58
- [114] W. R. LICKORISH ; *An introduction to knot theory* ; tome 175 (Springer Science & Business Media) (2012). 56
- [115] S. GRISHANOV, V. MESHKOV & V. VASSILIEV ; «Recognizing textile structures by finite type knot invariants» ; Journal of knot theory and its ramifications **18**, p. 209–235 (2007). 58
- [116] H. R. MORTON & S. GRISHANOV ; «Doubly periodic textile structures» ; Journal of Knot Theory and Its Ramifications **18**, p. 1597–1622 (2008). 58
- [117] S. GRISHANOV, V. MESHKOV & A. OMELCHENKO ; «A topological study of textile structures. Part II : Topological invariants in application to textile structures» ; Textile Research Journal **79**, p. 822–836 (2009). 58
- [118] J. W. THOMAS ; *Numerical partial differential equations : finite difference methods* ; tome 22 (Springer Science & Business Media) (2013). 67
- [119] S. POINCLOUX, M. ADDA-BEDIA & F. LECHENAULT ; «Geometry and elasticity of a knitted fabric» ; Physical Review X **8**, p. 021 075 (2018). 78
- [120] C. E. MALONEY & M. O. ROBBINS ; «Evolution of displacements and strains in sheared amorphous solids» ; Journal of Physics : Condensed Matter **20**, p. 244 128 (2008). 98
- [121] E. A. BRENER, M. ALDAM, F. BARRAS, J.-F. MOLINARI & E. BOUCHBINDER ; «Unstable slip pulses and earthquake nucleation as a non-equilibrium first-order phase transition» ; arXiv preprint arXiv :1807.06890 (2018). 106
- [122] J. P. SETHNA, K. A. DAHMEN & C. R. MYERS ; «Crackling noise» ; Nature **410**, p. 242 (2001). 110, 117
- [123] B. ALESSANDRO, C. BEATRICE, G. BERTOTTI & A. MONTORSI ; «Domain-wall dynamics and Barkhausen effect in metallic ferromagnetic materials. I. Theory» ; Journal of applied physics **68**, p. 2901–2907 (1990). 110
- [124] B. ALESSANDRO, C. BEATRICE, G. BERTOTTI & A. MONTORSI ; «Domain-wall dynamics and Barkhausen effect in metallic ferromagnetic materials. II. Experiments» ; Journal of Applied Physics **68**, p. 2908–2915 (1990). 110



- [125] G. DURIN & S. ZAPPERI; «Scaling exponents for Barkhausen avalanches in polycrystalline and amorphous ferromagnets»; *Physical Review Letters* **84**, p. 4705 (2000). 110
- [126] H. J. HERRMANN & S. ROUX; *Statistical models for the fracture of disordered media* (Elsevier) (1990). 110
- [127] A. PETRI, G. PAPARO, A. VESPIGNANI, A. ALIPPI & M. COSTANTINI; «Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes»; *Physical review letters* **73**, p. 3423 (1994). 110
- [128] S. ZAPPERI, A. VESPIGNANI & H. E. STANLEY; «Plasticity and avalanche behaviour in microfracturing phenomena»; *Nature* **388**, p. 658 (1997). 110
- [129] E. MILANESE, O. YILMAZ, J.-F. MOLINARI & B. SCHREFLER; «Avalanches in dry and saturated disordered media at fracture»; *Physical Review E* **93**, p. 043002 (2016). 110
- [130] S. FIELD, J. WITT, F. NORI & X. LING; «Superconducting vortex avalanches»; *Physical review letters* **74**, p. 1206 (1995). 110
- [131] E. ALTSHULER, T. H. JOHANSEN, Y. PALTIEL, P. JIN, K. E. BASSLER, O. RAMOS, Q. CHEN, G. F. REITER, E. ZELDOV & C. CHU; «Vortex avalanches with robust statistics observed in superconducting niobium»; *Physical Review B* **70**, p. 140505 (2004). 110
- [132] M. SACHTJEN, B. CARRERAS & V. LYNCH; «Disturbances in a power transmission system»; *Physical Review E* **61**, p. 4877 (2000). 110
- [133] M. CIEPLAK & M. O. ROBBINS; «Dynamical transition in quasistatic fluid invasion in porous media»; *Physical review letters* **60**, p. 2042 (1988). 110
- [134] M. SAHIMI; «Flow phenomena in rocks : from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing»; *Reviews of modern physics* **65**, p. 1393 (1993). 110
- [135] I. ALBERT, P. TEGZES, B. KAHNG, R. ALBERT, J. SAMPLE, M. PFEIFER, A.-L. BARABASI, T. VICSEK & P. SCHIFFER; «Jamming and fluctuations in granular drag»; *Physical review letters* **84**, p. 5122 (2000). 111
- [136] N. W. HAYMAN, L. DUCLOUÉ, K. L. FOCO & K. E. DANIELS; «Granular controls on periodicity of stick-slip events : kinematics and force-chains in an experimental fault»; *Pure and applied geophysics* **168**, p. 2239–2257 (2011). 111
- [137] D. DENISOV, K. LÖRINCZ, J. UHL, K. DAHMEN & P. SCHALL; «Universality of slip avalanches in flowing granular matter»; *Nature communications* **7**, p. 10641 (2016). 111, 117, 118
- [138] J. BARÉS, D. WANG, D. WANG, T. BERTRAND, C. S. O’HERN & R. P. BEHRINGER; «Local and global avalanches in a two-dimensional sheared granular medium»; *Physical Review E* **96**, p. 052902 (2017). 111
- [139] A. ARGON & L. T. SHI; «Development of visco-plastic deformation in metallic glasses»; *Acta Metallurgica* **31**, p. 499–507 (1983). 111
- [140] B. SUN, H. YU, W. JIAO, H. BAI, D. ZHAO & W. WANG; «Plasticity of ductile metallic glasses : A self-organized critical state»; *Physical review letters* **105**, p. 035501 (2010). 111

- [141] J. ANTONAGLIA, W. J. WRIGHT, X. GU, R. R. BYER, T. C. HUFNAGEL, M. LEBLANC, J. T. UHL & K. A. DAHMEN ; «Bulk metallic glasses deform via slip avalanches» ; Physical review letters **112**, p. 155 501 (2014). [111](#), [117](#), [120](#), [122](#)
- [142] J. LAURIDSEN, M. TWARDOS & M. DENNIN ; «Shear-induced stress relaxation in a two-dimensional wet foam» ; Physical review letters **89**, p. 098 303 (2002). [111](#)
- [143] A. ARGON ; «Plastic deformation in metallic glasses» ; Acta metallurgica **27**, p. 47–58 (1979). [111](#)
- [144] C. E. MALONEY & A. LEMAÎTRE ; «Amorphous systems in athermal, quasistatic shear» ; Physical Review E **74**, p. 016 118 (2006). [111](#)
- [145] A. TANGUY, F. LEONFORTE & J.-L. BARRAT ; «Plastic response of a 2D Lennard-Jones amorphous solid : Detailed analysis of the local rearrangements at very slow strain rate» ; The European Physical Journal E **20**, p. 355–364 (2006). [111](#)
- [146] E. BOUCHBINDER, J. LANGER & I. PROCACCIA ; «Athermal shear-transformation-zone theory of amorphous plastic deformation. I. Basic principles» ; Physical Review E **75**, p. 036 107 (2007). [111](#)
- [147] E. BOUCHBINDER, J. LANGER & I. PROCACCIA ; «Athermal shear-transformation-zone theory of amorphous plastic deformation. II. Analysis of simulated amorphous silicon» ; Physical Review E **75**, p. 036 108 (2007). [111](#)
- [148] A. AMON, A. BRUAND, J. CRASSOUS, E. CLÉMENT *et al.* ; «Hot spots in an athermal system» ; Physical review letters **108**, p. 135 502 (2012). [111](#)
- [149] K. CHEN, P. BAK & S. OBUKHOV ; «Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes» ; Physical Review A **43**, p. 625 (1991). [111](#)
- [150] L. CARRILLO, L. MAÑOSA, J. ORTÍN, A. PLANES & E. VIVES ; «Experimental evidence for universality of acoustic emission avalanche distributions during structural transitions» ; Physical review letters **81**, p. 1889 (1998). [111](#)
- [151] D. BONAMY, S. SANTUCCI & L. PONSON ; «Crackling dynamics in material failure as the signature of a self-organized dynamic phase transition» ; Physical review letters **101**, p. 045 501 (2008). [111](#)
- [152] N. FRIEDMAN, A. T. JENNINGS, G. TSEKENIS, J.-Y. KIM, M. TAO, J. T. UHL, J. R. GREER & K. A. DAHMEN ; «Statistics of dislocation slip avalanches in nanosized single crystals show tuned critical behavior predicted by a simple mean field model» ; Physical review letters **109**, p. 095 507 (2012). [111](#)
- [153] S. PAPANIKOLAOU, D. M. DIMIDUK, W. CHOI, J. P. SETHNA, M. D. UCHIC, C. F. WOODWARD & S. ZAPPERI ; «Quasi-periodic events in crystal plasticity and the self-organized avalanche oscillator» ; Nature **490**, p. 517 (2012). [111](#)
- [154] J.-C. BARET, D. VANDEMBROUCQ & S. ROUX ; «Extremal model for amorphous media plasticity» ; Physical review letters **89**, p. 195 506 (2002). [111](#)
- [155] A. NICOLAS, E. E. FERRERO, K. MARTENS & J.-L. BARRAT ; «Deformation and flow of amorphous solids : a review of mesoscale elastoplastic models» ; arXiv preprint arXiv :1708.09194 (2017). [111](#)
- [156] I. KOLVIN & E. BOUCHBINDER ; «Simple nonlinear equation for structural relaxation in glasses» ; Physical Review E **86**, p. 010 501 (2012). [112](#)

- [157] E. AGORITSAS, E. BERTIN, K. MARTENS & J.-L. BARRAT ; «On the relevance of disorder in athermal amorphous materials under shear» ; *The European Physical Journal E* **38**, p. 71 (2015). [112](#)
- [158] J. D. ESHELBY ; «The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems» ; *Proc. R. Soc. Lond. A* **241**, p. 376–396 (1957). [116](#)
- [159] X. CAO, A. NICOLAS, D. TRIMCEV & A. ROSSO ; «Soft modes and strain redistribution in continuous models of amorphous plasticity : the Eshelby paradigm, and beyond?» ; *Soft matter* **14**, p. 3640–3651 (2018). [116](#)
- [160] K. W. DESMOND & E. R. WEEKS ; «Measurement of stress redistribution in flowing emulsions» ; *Physical review letters* **115**, p. 098 302 (2015). [116](#)
- [161] A. LE BOUIL, A. AMON, S. MCNAMARA & J. CRASSOUS ; «Emergence of cooperativity in plasticity of soft glassy materials» ; *Physical review letters* **112**, p. 246 001 (2014). [116](#)
- [162] S. MCNAMARA, J. CRASSOUS & A. AMON ; «Eshelby inclusions in granular matter : theory and simulations» ; *Physical Review E* **94**, p. 022 907 (2016). [116](#)
- [163] P. BAK, C. TANG & K. WIESENFELD ; «Self-organized criticality : An explanation of the  $1/f$  noise» ; *Physical review letters* **59**, p. 381 (1987). [117](#)
- [164] P. BAK, C. TANG & K. WIESENFELD ; «Self-organized criticality» ; *Physical review A* **38**, p. 364 (1988). [117](#)
- [165] L. P. KADANOFF, S. R. NAGEL, L. WU & S.-m. ZHOU ; «Scaling and universality in avalanches» ; *Physical Review A* **39**, p. 6524 (1989). [117](#)
- [166] J. P. SETHNA, K. DAHMEN, S. KARTHA, J. A. KRUMHANSL, B. W. ROBERTS & J. D. SHORE ; «Hysteresis and hierarchies : Dynamics of disorder-driven first-order phase transformations» ; *Physical Review Letters* **70**, p. 3347 (1993). [117](#)
- [167] P. LE DOUSSAL & K. J. WIESE ; «First-principles derivation of static avalanche-size distributions» ; *Physical Review E* **85**, p. 061 102 (2012). [117](#)
- [168] J. LIN, E. LERNER, A. ROSSO & M. WYART ; «Scaling description of the yielding transition in soft amorphous solids at zero temperature» ; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **111**, p. 14 382–14 387 (2014). [117](#), [118](#), [122](#)
- [169] C. LIU, E. E. FERRERO, F. PUOSI, J.-L. BARRAT & K. MARTENS ; «Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition» ; *Physical review letters* **116**, p. 065 501 (2016). [117](#)
- [170] Z. BUDRIKIS, D. F. CASTELLANOS, S. SANDFELD, M. ZAISER & S. ZAPPERI ; «Universal features of amorphous plasticity» ; *Nature communications* **8**, p. 15 928 (2017). [117](#), [122](#)
- [171] K. A. DAHMEN, Y. BEN-ZION & J. T. UHL ; «Micromechanical model for deformation in solids with universal predictions for stress-strain curves and slip avalanches» ; *Physical review letters* **102**, p. 175 501 (2009). [117](#)
- [172] K. A. DAHMEN, Y. BEN-ZION & J. T. UHL ; «A simple analytic theory for the statistics of avalanches in sheared granular materials» ; *Nature Physics* **7**, p. 554 (2011). [117](#), [118](#)

- [173] J. T. UHL, S. PATHAK, D. SCHORLEMMER, X. LIU, R. SWINDEMAN, B. A. BRINKMAN, M. LEBLANC, G. TSEKENIS, N. FRIEDMAN, R. BEHRINGER *et al.*; «Universal quake statistics : from compressed nanocrystals to earthquakes»; *Scientific reports* **5**, p. 16 493 (2015). 117
- [174] J. LIN, T. GUEUDRÉ, A. ROSSO & M. WYART; «Criticality in the approach to failure in amorphous solids»; *Physical review letters* **115**, p. 168 001 (2015). 118
- [175] K. KARIMI, E. E. FERRERO & J.-L. BARRAT; «Inertia and universality of avalanche statistics : The case of slowly deformed amorphous solids»; *Physical Review E* **95**, p. 013 003 (2017). 120
- [176] G. SPARKS & R. MAASS; «Shapes and velocity relaxation of dislocation avalanches in Au and Nb microcrystals»; *Acta Materialia* **152**, p. 86–95 (2018). 120
- [177] S. PAPANIKOLAOU, F. BOHN, R. L. SOMMER, G. DURIN, S. ZAPPERI & J. P. SETHNA; «Universality beyond power laws and the average avalanche shape»; *Nature Physics* **7**, p. 316 (2011). 122
- [178] L. LAURSON, X. ILLA, S. SANTUCCI, K. T. TALLAKSTAD, K. J. MÅLØY & M. J. ALAVA; «Evolution of the average avalanche shape with the universality class»; *Nature communications* **4**, p. 2927 (2013). 122
- [179] A. DOBRINEVSKI, P. LE DOUSSAL & K. J. WIESE; «Avalanche shape and exponents beyond mean-field theory»; *EPL (Europhysics Letters)* **108**, p. 66 002 (2015). 122
- [180] S. ZAPPERI, C. CASTELLANO, F. COLAIORI & G. DURIN; «Signature of effective mass in crackling-noise asymmetry»; *Nature Physics* **1**, p. 46 (2005). 122
- [181] P. LE DOUSSAL & T. GIAMARCHI; «Moving glass theory of driven lattices with disorder»; *Physical Review B* **57**, p. 11 356 (1998). 122
- [182] S. BRAZOVSKII & T. NATTERMANN; «Pinning and sliding of driven elastic systems : from domain walls to charge density waves»; *Advances in Physics* **53**, p. 177–252 (2004). 122
- [183] E. AGORITSAS, V. LECOMTE & T. GIAMARCHI; «Disordered elastic systems and one-dimensional interfaces»; *Physica B : Condensed Matter* **407**, p. 1725–1733 (2012). 122
- [184] C. REICHHARDT & C. O. REICHHARDT; «Depinning and nonequilibrium dynamic phases of particle assemblies driven over random and ordered substrates : a review»; *Reports on Progress in Physics* **80**, p. 026 501 (2016). 122
- [185] S. MOULINET, C. GUTHMANN & E. ROLLEY; «Roughness and dynamics of a contact line of a viscous fluid on a disordered substrate»; *The European Physical Journal E* **8**, p. 437–443 (2002). 122
- [186] H. PERRIN, R. LHERMEROUT, K. DAVITT, E. ROLLEY & B. ANDREOTTI; «Thermally activated motion of a contact line over defects»; *Soft matter* **14**, p. 1581–1595 (2018). 122
- [187] K. J. MÅLØY, S. SANTUCCI, J. SCHMITTBUHL & R. TOUSSAINT; «Local waiting time fluctuations along a randomly pinned crack front»; *Physical review letters* **96**, p. 045 501 (2006). 122

- [188] S. SANTUCCI, K. J. MÅLØY, A. DELAPLACE, J. MATHIESEN, A. HANSEN, J. Ø. H. BAKKE, J. SCHMITTBUHL, L. VANEL & P. RAY; «Statistics of fracture surfaces»; *Physical review E* **75**, p. 016 104 (2007). 122
- [189] L. PONSON; «Depinning transition in the failure of inhomogeneous brittle materials»; *Physical review letters* **103**, p. 055 501 (2009). 122
- [190] T. CHEVALIER, A. DUBEY, S. ATIS, A. ROSSO, D. SALIN & L. TALON; «Avalanches dynamics in reaction fronts in disordered flows»; *Physical Review E* **95**, p. 042 210 (2017). 122
- [191] U. YARON, P. GAMMEL, D. HUSE, R. KLEIMAN, C. OGLESBY, E. BUCHER, B. BATLOGG, D. BISHOP, K. MORTENSEN & K. CLAUSEN; «Structural evidence for a two-step process in the depinning of the superconducting flux-line lattice»; *Nature* **376**, p. 753 (1995). 122
- [192] M. CHARALAMBOUS, J. CHAUSSY & P. LEJAY; «Evidence from resistivity measurements along the c axis for a transition within the vortex state for H|| ab in single-crystal YBa 2 Cu 3 O 7»; *Physical Review B* **45**, p. 5091 (1992). 122
- [193] P. D. ISPÁNOVITY, L. LAURSON, M. ZAISER, I. GROMA, S. ZAPPERI & M. J. ALAVA; «Avalanches in 2D dislocation systems : Plastic yielding is not depinning»; *Physical review letters* **112**, p. 235 501 (2014). 122
- [194] B. TYUKODI, S. PATINET, S. ROUX & D. VANDEMBROUCQ; «From depinning transition to plastic yielding of amorphous media : A soft-modes perspective»; *Physical Review E* **93**, p. 063 005 (2016). 122
- [195] B. GUTENBERG & C. F. RICHTER; «Frequency of earthquakes in California»; *Bulletin of the Seismological Society of America* **34**, p. 185–188 (1944). 122
- [196] Y. FIALKO, M. SIMONS & D. AGNEW; «The complete (3-D) surface displacement field in the epicentral area of the 1999 Mw7. 1 Hector Mine earthquake, California, from space geodetic observations»; *Geophysical Research Letters* **28**, p. 3063–3066 (2001). 123
- [197] K. KASAHARA; *Earthquake mechanics* (Cambridge university press) (1981). 123
- [198] C. H. SCHOLZ; *The mechanics of earthquakes and faulting* (Cambridge university press) (2002). 123
- [199] N. H. DAWERS, M. H. ANDERS & C. H. SCHOLZ; «Growth of normal faults : Displacement-length scaling»; *Geology* **21**, p. 1107–1110 (1993). 123
- [200] R. W. SCHLISCHE, S. S. YOUNG, R. V. ACKERMANN & A. GUPTA; «Geometry and scaling relations of a population of very small rift-related normal faults»; *Geology* **24**, p. 683–686 (1996). 123
- [201] I. J. HAMLING, S. HREINSDÓTTIR, K. CLARK, J. ELLIOTT, C. LIANG, E. FIELDING, N. LITCHFIELD, P. VILLAMOR, L. WALLACE, T. J. WRIGHT *et al.*; «Complex multi-fault rupture during the 2016 M w 7.8 Kaikōura earthquake, New Zealand»; *Science* **356**, p. eaam7194 (2017). 123
- [202] P. A. COWIE & C. H. SCHOLZ; «Physical explanation for the displacement-length relationship of faults using a post-yield fracture mechanics model»; *Journal of Structural Geology* **14**, p. 1133–1148 (1992). 124

- [203] Y.-S. KIM & D. J. SANDERSON; «The relationship between displacement and length of faults : a review»; *Earth-Science Reviews* **68**, p. 317–334 (2005). 124
- [204] A. TORABI & S. S. BERG; «Scaling of fault attributes : A review»; *Marine and Petroleum Geology* **28**, p. 1444–1460 (2011). 124
- [205] E. J. WILLEMSE, D. D. POLLARD & A. AYDIN; «Three-dimensional analyses of slip distributions on normal fault arrays with consequences for fault scaling»; *Journal of Structural Geology* **18**, p. 295–309 (1996). 125
- [206] K. AKI; «Generation and propagation of G waves from the Niigata Earthquake of June 16, 1964. Part 2. Estimation of earthquake movement, released energy, and stress-strain drop from the G wave spectrum»; *Bull. Earthq. Res. Inst.* **44**, p. 73–88 (1966). 124
- [207] H. KANAMORI; «The energy release in great earthquakes»; *Journal of geophysical research* **82**, p. 2981–2987 (1977). 126
- [208] P. SEGALL & D. POLLARD; «Mechanics of discontinuous faults»; *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* **85**, p. 4337–4350 (1980). 127
- [209] S. G. WESNOUSKY; «Seismological and structural evolution of strike-slip faults»; *Nature* **335**, p. 340 (1988). 127
- [210] N. H. DAWERS & M. H. ANDERS; «Displacement-length scaling and fault linkage»; *Journal of Structural Geology* **17**, p. 607–614 (1995). 127
- [211] J. WALSH, W. BAILEY, C. CHILDS, A. NICOL & C. BONSON; «Formation of segmented normal faults : a 3-D perspective»; *Journal of Structural Geology* **25**, p. 1251–1262 (2003). 127
- [212] D. D. POLLARD & A. AYDIN; «Progress in understanding jointing over the past century»; *Geological Society of America Bulletin* **100**, p. 1181–1204 (1988). 127
- [213] J. F. GALE, S. E. LAUBACH, J. E. OLSON, P. EICHHUBL & A. FALL; «Natural fractures in shale : A review and new observations Natural Fractures in Shale : A Review and New Observations»; *AAPG bulletin* **98**, p. 2165–2216 (2014). 127
- [214] P. WHIPP, C.-L. JACKSON, R. SCHLISCHE, M. WITHJACK & R. GAWTHORPE; «Spatial distribution and evolution of fault-segment boundary types in rift systems : observations from experimental clay models»; *Geological Society, London, Special Publications* **439**, p. SP439–7 (2016). 127
- [215] D. PEACOCK & D. SANDERSON; «Displacements, segment linkage and relay ramps in normal fault zones»; *Journal of Structural Geology* **13**, p. 721–733 (1991). 127
- [216] E. J. WILLEMSE; «Segmented normal faults : Correspondence between three-dimensional mechanical models and field data»; *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* **102**, p. 675–692 (1997). 127
- [217] S. J. WILKINS & M. R. GROSS; «Normal fault growth in layered rocks at Split Mountain, Utah : influence of mechanical stratigraphy on dip linkage, fault restriction and fault scaling»; *Journal of Structural Geology* **24**, p. 1413–1429 (2002). 127
- [218] E. H. FIELD, R. J. ARROWSMITH, G. P. BIASI, P. BIRD, T. E. DAWSON, K. R. FELZER, D. D. JACKSON, K. M. JOHNSON, T. H. JORDAN, C. MADDEN *et al.*;



- «Uniform California earthquake rupture forecast, version 3 (UCERF3)—The time-independent model»; *Bulletin of the Seismological Society of America* **104**, p. 1122–1180 (2014). 127
- [219] J.-H. CHOI, P. EDWARDS, K. KO & Y.-S. KIM; «Definition and classification of fault damage zones : A review and a new methodological approach»; *Earth-Science Reviews* **152**, p. 70–87 (2016). 127
- [220] N. D. MERMEN; «The topological theory of defects in ordered media»; *Reviews of Modern Physics* **51**, p. 591 (1979). 128
- [221] M. V. KURIK & O. LAVRETOVICH; «Defects in liquid crystals : homotopy theory and experimental studies»; *Physics-Uspekhi* **31**, p. 196–224 (1988). 128
- [222] M. KLÉMAN; «Defects in liquid crystals»; *Reports on Progress in Physics* **52**, p. 555 (1989). 128
- [223] J. PROST & P.-G. DE GENNES; *The physics of liquid crystals*; tome 83 (Oxford university press) (1995). 128
- [224] L. S. HIRST, A. OSSOWSKI, M. FRASER, J. GENG, J. V. SELINGER & R. L. SELINGER; «Morphology transition in lipid vesicles due to in-plane order and topological defects»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, p. 3242–3247 (2013). 128
- [225] V. SCHALLER & A. R. BAUSCH; «Topological defects and density fluctuations in collectively moving systems»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* p. 201215368 (2013). 128
- [226] S. J. DECAMP, G. S. REDNER, A. BASKARAN, M. F. HAGAN & Z. DOGIC; «Orientational order of motile defects in active nematics»; *Nature materials* **14**, p. 1110 (2015). 128
- [227] G. DUCLOS, C. ERLenkÄMPER, J.-F. JOANNY & P. SILBERZAN; «Topological defects in confined populations of spindle-shaped cells»; *Nature Physics* **13**, p. 58 (2017). 128
- [228] L. GIOMI, M. J. BOWICK, X. MA & M. C. MARCHETTI; «Defect annihilation and proliferation in active nematics»; *Physical review letters* **110**, p. 228 101 (2013). 128
- [229] S. P. THAMPI, R. GOLESTANIAN & J. M. YEOMANS; «Instabilities and topological defects in active nematics»; *EPL (Europhysics Letters)* **105**, p. 18 001 (2014). 128
- [230] T. B. SAW, A. DOOSTMOHAMMADI, V. NIER, L. KOCGOZLU, S. THAMPI, Y. TOYAMA, P. MARCQ, C. T. LIM, J. M. YEOMANS & B. LADOUX; «Topological defects in epithelia govern cell death and extrusion»; *Nature* **544**, p. 212 (2017). 128
- [231] M. M. GENKIN, A. SOKOLOV, O. D. LAVRETOVICH & I. S. ARANSON; «Topological defects in a living nematic ensnare swimming bacteria»; *Physical Review X* **7**, p. 011 029 (2017). 128
- [232] M.-A. BUENO, B. LAMY, M. RENNER & P. VIALLIER-RAYNARD; «Tribological investigation of textile fabrics»; *Wear* **195**, p. 192–200 (1996). 128



- [233] M.-A. BUENO, M. RENNER & M. PAC ; «Influence of properties at micro-and mesoscopic levels on macroscopic level for weft knitted fabrics» ; Journal of materials science **37**, p. 2965–2974 (2002). 128
- [234] M. MATSUO, T. YAMADA & N. ITO ; «Stress relaxation behavior of knitted fabrics under uniaxial and strip biaxial excitation as estimated by corresponding principle between elastic and visco-elastic bodies» ; Textile Research Journal **76**, p. 465–477 (2006). 128
- [235] M. MATSUO & T. YAMADA ; «Hysteresis of Tensile load—Strain Route of Knitted Fabrics under Extension and Recovery Processes Estimated by Strain History» ; Textile research journal **79**, p. 275–284 (2009). 128
- [236] E. BAUSSAN, M.-A. BUENO, R. ROSSI & S. DERLER ; «Experiments and modelling of skin-knitted fabric friction» ; Wear **268**, p. 1103–1110 (2010). 128
- [237] J. P. SETHNA, M. K. BIERBAUM, K. A. DAHMEN, C. P. GOODRICH, J. R. GREER, L. X. HAYDEN, J. P. KENT-DOBIAS, E. D. LEE, D. B. LIARTE, X. NI *et al.* ; «Deformation of crystals : Connections with statistical physics» ; Annual Review of Materials Research **47**, p. 217–246 (2017). 128
- [238] S. POINCLOUX, M. ADDA-BEDIA & F. LECHENAULT ; «Crackling Dynamics in the Mechanical Response of Knitted Fabrics» ; Phys. Rev. Lett. **121**, p. 058 002 (2018). 128
- [239] J. UNDERWOOD ; *The design of 3D shape knitted preforms* ; Thèse de doctorat ; RMIT University (2009). 132
- [240] K. LANDAHL ; *On form thinking in knitwear design* ; Thèse de doctorat ; University of Borås (2013). 132
- [241] V. NARAYANAN, L. ALBAUGH, J. HODGINS, S. COROS & J. MCCANN ; «Automatic Machine Knitting of 3D Meshes» ; ACM Transactions on Graphics (TOG) **37**, p. 35 (2018). 132
- [242] K. WU, X. GAO, Z. FERGUSON, D. PANOZZO & C. YUKSEL ; «Stitch meshing» ; ACM Transactions on Graphics (TOG) **37**, p. 130 (2018). 132
- [243] G. GUÉNIN ; *Alliages à mémoire de forme* (Ed. Techniques Ingénieur) (1996). 134
- [244] J. M. ABEL ; *Active Knit Actuation Architectures.* ; Thèse de doctorat ; University of Michigan (2014). 135
- [245] S.-M. BELCASTRO ; «Every topological surface can be knit : a proof» ; Journal of Mathematics and the Arts **3**, p. 67–83 (2009). 135
- [246] J. MCCANN, L. ALBAUGH, V. NARAYANAN, A. GROW, W. MATUSIK, J. MANKOFF & J. HODGINS ; «A compiler for 3D machine knitting» ; ACM Transactions on Graphics (TOG) **35**, p. 49 (2016). 135
- [247] M. POPSCU, M. RIPPMANN, T. VAN MELE & P. BLOCK ; «Automated generation of knit patterns for non-developable surfaces» ; dans «Humanizing Digital Reality», p. 271–284 (Springer) (2018). 135
- [248] Y. KLEIN, E. EFRATI & E. SHARON ; «Shaping of elastic sheets by prescription of non-Euclidean metrics» ; Science **315**, p. 1116–1120 (2007). 137

- [249] E. EFRATI, E. SHARON & R. KUPFERMAN; «Elastic theory of unconstrained non-Euclidean plates»; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **57**, p. 762–775 (2009). 137
- [250] E. SHARON, B. ROMAN, M. MARDER, G.-S. SHIN & H. L. SWINNEY; «Mechanics : Buckling cascades in free sheets»; *Nature* **419**, p. 579 (2002). 137
- [251] B. AUDOLY & A. BOUDAUD; «Self-similar structures near boundaries in strained systems»; *Physical review letters* **91**, p. 086 105 (2003). 137
- [252] E. SHARON, B. ROMAN & H. L. SWINNEY; «Geometrically driven wrinkling observed in free plastic sheets and leaves»; *Physical Review E* **75**, p. 046 211 (2007). 137
- [253] H. LIANG & L. MAHADEVAN; «The shape of a long leaf»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **106**, p. 22 049–22 054 (2009). 137
- [254] H. LIANG & L. MAHADEVAN; «Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **108**, p. 5516–5521 (2011). 137
- [255] T. A. DRISCOLL; «Algorithm 756 : A MATLAB toolbox for Schwarz-Christoffel mapping»; *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **22**, p. 168–186 (1996). 153