



ANALYSE QUALITATIVE DES PARAMÈTRES INFLUENTS POUR LA PLANIFICATION DES TRAJECTOIRES SUR SURFACES GAUCHES

Johanna Senatore

► To cite this version:

Johanna Senatore. ANALYSE QUALITATIVE DES PARAMÈTRES INFLUENTS POUR LA PLANIFICATION DES TRAJECTOIRES SUR SURFACES GAUCHES. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier (Toulouse 3), 2007. Français. NNT : . tel-01930816

HAL Id: tel-01930816

<https://hal.science/tel-01930816>

Submitted on 22 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

(Diplôme national créé par décret et arrêté en date du 30 mars 1992)

par

Johanna SENATORE

ANALYSE QUALITATIVE DES PARAMETRES INFLUENTS POUR LA PLANIFICATION DES TRAJECTOIRES SUR SURFACES GAUCHES

soutenue le 17 janvier 2007 devant la commission d'examen :

M. BES Christian	Examineur
M. FURET Benoît	Rapporteur
M. PARIS Henri	Rapporteur
M. PASTOR François	Examineur
M. REDONNET Jean-Max	Examineur
M. RUBIO Walter	Examineur

Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse
Université Paul Sabatier – 118, route de Narbonne – 31077 TOULOUSE Cedex

Remerciements

Je remercie sincèrement Monsieur Christian BES, Professeur à l'Université Paul Sabatier, pour avoir examiné ce travail et bien voulu participer au jury.

Je suis particulièrement honorée que Monsieur Benoît FURET, Professeur à l'Institut Universitaire de Technologie de Nantes, et Monsieur Henri PARIS, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble aient accepté d'examiner ce travail et d'en être rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier Monsieur François PASTOR, directeur adjoint de la société ALMA SAPEX, pour sa participation au jury.

J'aimerais remercier très sincèrement Monsieur Walter RUBIO, Professeur d'Université à l'Université Paul Sabatier, et Monsieur Jean-Max REDONNET, Maître de Conférence à l'Université Paul Sabatier, pour m'avoir guidée tout au long de ce travail. Leur disponibilité, leurs conseils et leur constant soutien m'ont été d'une aide précieuse.

J'aimerais également remercier mes amis et collègues du Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse pour leur aide et la qualité des moments que j'ai passé en leur compagnie. Que tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont apporté leur soutien dans l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je souhaiterais finir en exprimant ma profonde reconnaissance à Julien, à mes parents, à ma famille et à mes amis, à qui je dois beaucoup. Que leur soutien, leur aide et leur présence soient ici remerciés. Alors qu'une page se tourne, je pense à eux.

Table des matières

Introduction	11
Notations	15
1 État de l’art sur l’usinage en bout	17
1.1 Présentation	17
1.2 Choix des outils	19
1.2.1 Géométrie des outils	19
1.2.2 Choix d’une géométrie d’outil	20
1.3 Stratégies d’usinage « classiques »	22
1.3.1 Surfaces guides	22
1.3.2 Plans parallèles et stratégies dérivées	23
1.3.3 Isoparamétriques	28
1.3.4 Recouvrement de surface	30
1.3.5 Stratégie basée sur la hauteur de crête	31
1.3.5.1 Définition de la hauteur de crête	31
1.3.5.2 Détermination de la hauteur de crête	31
1.3.5.3 Stratégies isocrêtes	34
1.3.5.3.1 Stratégie isocrête en 3 axes avec un outil hémisphérique	34
1.3.5.3.2 Stratégie isocrête en 3 axes avec un outil à bout torique	37
1.3.5.3.3 Stratégie isocrête en 5 axes avec un outil à bout plat ou torique	38
1.3.6 Choix de la première trajectoire	39
2 Planification de trajectoires à hauteur de crête constante en usinage en bout	43
2.1 Introduction	43

2.2	Planification de trajectoires à hauteur de crête constante	44
2.2.1	Planification en 3 axes pour un outil cylindrique à bout sphérique . .	44
2.2.1.1	Présentation du problème	44
2.2.1.2	Détermination du point isocrête	45
2.2.1.3	Détermination de la position adjacente de l'outil	46
2.2.1.3.1	Considérations générales	46
2.2.1.3.2	Détermination de $\mathbf{C}_{\mathbf{L},\mathbf{j}+1}$	47
2.2.1.4	Algorithmes de calcul	48
2.2.1.4.1	Fonction « <i>Calcul de la première trajectoire</i> » . . .	49
2.2.1.4.2	Fonction « <i>Calcul de la trajectoire suivante</i> » . . .	49
2.2.2	Planification en 3 axes pour un outil cylindrique à bout torique . . .	51
2.2.2.1	Présentation du problème	51
2.2.2.2	Détermination du point isocrête	52
2.2.2.3	Détermination de la position adjacente de l'outil	54
2.2.2.4	Algorithmes de calcul	56
2.2.2.4.1	Fonction « <i>Calcul de la première trajectoire</i> » . . .	56
2.2.2.4.2	Fonction « <i>Calcul de la trajectoire suivante</i> » . . .	56
2.2.2.4.2.1	Calcul de l'avance de l'outil	56
2.2.2.4.2.2	Initialisation du système sur $\mathbf{P}_{\text{isoi},\mathbf{j}}$	59
2.2.2.4.2.3	Test sur le côté de la solution	65
2.2.2.4.2.4	Dichotomie sur la variable φ :	66
2.2.2.4.2.5	Initialisation du système sur $\mathbf{C}_{\mathbf{L},\mathbf{j}+1}$	66
2.3	Influence du posage sur la génération de trajectoires	73
2.3.1	Définitions	73
2.3.2	Influence du posage	74
2.3.2.1	Etude d'un cas simple	74
2.3.2.2	Les problèmes de planification causés par les dérives	79
2.3.3	Réflexion sur le posage : études de cas simples	80
2.3.3.1	1 ^{er} usinage : variation nulle de la normale sur toute la surface	81
2.3.3.2	2 ^{ieme} usinage : variation transversale de la normale dans le plan $(\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t)$	81
2.3.3.3	3 ^{ieme} usinage : variation de la normale dans le plan $(\mathbf{z}_t, \mathbf{V})$.	82
2.3.4	Première conclusion sur le posage de la surface	83
2.3.5	Rayon effectif et pas transversal pour un outil torique	85
2.3.5.1	Introduction	85

2.3.5.2	Calcul du rayon effectif	85
2.3.5.3	Calcul du pas transversal	90
2.3.6	Analyse des paramètres influents sur le rayon effectif	91
2.3.6.1	Introduction	91
2.3.6.2	Choix d'une géométrie d'outil en fonction du rayon effectif .	92
2.3.6.3	Choix d'une géométrie d'outil en fonction de l'inclinaison . .	93
2.3.6.4	Choix des dimensions d'un outil	95
2.3.6.4.1	Influence du rayon de tore r et du rayon d'outil R .	95
2.3.6.4.2	choix du rayon de tore r et du rayon d'outil R . . .	98
2.3.7	Seconde conclusion sur le posage de la surface	98
2.3.8	Limites angulaires du posage imposées par l'usinage	100
2.3.8.1	Présentation des essais	101
2.3.8.2	Mesure et analyses	104
2.4	Choix de la première trajectoire	109
2.4.1	Présentation du problème	109
2.4.2	Définition d'une courbe isophote	109
2.4.3	Direction globale d'usinage	110
2.4.4	Choix des courbes isophotes	114
2.4.4.1	Courbes isophotes globalement rectilignes	114
2.4.4.2	Courbes isophotes globalement courbes	115
2.4.5	Conclusion	116
3	État de l'art sur l'usinage en roulant	119
	Notations	119
3.1	L'usinage en roulant	119
3.2	Surfaces réglées et problématique	120
3.2.1	Définition des surfaces réglées	120
3.2.1.1	Généralités	120
3.2.1.2	Surfaces réglées développables	121
3.2.1.3	Surfaces réglées non développables	122
3.2.2	Problématique : Usinage des surfaces réglées non développables . . .	122
3.3	Positionnements pour l'usinage en roulant	123
3.3.1	Introduction	123
3.3.2	Positionnements construits sur la géométrie de la surface	124
3.3.2.1	Le positionnement « logiciel »	124

3.3.2.2	Le positionnement « standard »	125
3.3.2.3	Le positionnement « LIU » ou Méthode « D.P.O »	127
3.3.2.4	Le positionnement « STUTE »	128
3.3.2.5	Le positionnement « MENZEL »	129
3.3.2.6	Le positionnement « amélioré » pour un outil cylindrique [Mon01]	130
3.3.2.7	Le positionnement « amélioré » pour un outil conique [Mon01]	132
3.3.3	Positionnements cinématiques	133
3.3.3.1	Positionnement « CHIOU » [Chi04]	134
3.3.3.2	Positionnement « LURPA » [LDA03]	134
3.3.3.3	Positionnement « T.P.O. »	136
3.3.4	Synthèse sur l'ensemble des positionnement abordés	138
4	Usinage en roulant	143
	Notations	143
4.1	Introduction	143
4.2	Positionnement amélioré pour un outil cylindrique	145
4.2.1	Calculs préliminaires	146
4.2.2	Mise en équation	147
4.3	Étude cinématique du positionnement amélioré	148
4.3.1	Définition de la surface enveloppe	149
4.3.2	Analyse de l'erreur effectuée par une étude géométrique	151
4.3.2.1	Analyse pour les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$	151
4.3.2.2	Analyse pour le point $\mathbf{M}_2$	154
4.3.3	Exemple	155
4.3.3.1	Introduction	155
4.3.3.2	Calcul de l'erreur pour les différents positionnements	156
4.3.3.2.1	Positionnement standard	156
4.3.3.2.2	Positionnement amélioré	156
4.3.3.2.3	Calcul de l'erreur par les surfaces enveloppes	158
4.3.3.3	Usinage et métrologie	158
4.3.4	Conclusion	160
4.4	Choix de l'axe $\mathbf{y}_2$ pour le positionnement amélioré	161
4.4.1	Estimation de l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ permettant d'avoir le point $\mathbf{M}_2$ proche du point $\mathbf{P}_2$	162

4.4.1.1	Remarque sur l'étude	162
4.4.1.2	Calcul préliminaire	162
4.4.1.3	Application sur la surface dans le cas général	164
4.4.1.4	Application sur la surface dans le cas d'une directrice à cour- bure nulle	165
4.4.2	Étude comparative entre les différents positionnements améliorés . . .	166
4.5	Choix d'un outil : relation entre le rayon et l'erreur	169
4.5.1	Première étude : modèle linéaire	170
4.5.1.1	Méthodologie	170
4.5.1.2	Application	172
4.5.1.3	Conclusion	173
4.5.2	Deuxième étude : établissement d'un nouveau modèle	174
4.5.2.1	Méthodologie	174
4.5.2.2	Application	175
4.5.2.3	Conclusion	176
4.5.3	Troisième étude : justification du modèle linéaire	177
4.6	Prédiction des courbes d'erreur	178
4.6.1	Allure des courbes d'erreur pour un outil cylindrique	178
4.6.1.1	Modélisation du problème	178
4.6.1.2	Mise en équation	180
4.6.1.3	Conclusion et synthèse sur la nature de l'erreur	181
4.6.1.4	Fonction $\Delta(v)$ assurant la tangence entre l'outil et la surface	182
4.6.1.4.1	Approximation de la fonction $\Delta(v)$	183
4.6.1.4.2	Monotonie de la fonction $\Delta(\alpha)$	184
4.6.1.4.3	Relation entre $\Delta(v)$ et $\alpha(v)$	185
4.6.1.4.3.1	Mise en évidence du lien de proportionnalité entre $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$	185
4.6.1.4.3.2	Exemple : Surface 1	185
4.6.1.4.3.3	Exemple : Surface 2	187
4.6.2	Mise en application sur différentes surfaces	187
4.6.3	Extension de l'étude aux outils coniques	190
4.6.3.1	Influence de la variation du vecteur $\mathbf{y}_2$ pour un outil cylindrique	191
4.6.3.1.1	Expression des déplacements Δ_0 et Δ_1	192
4.6.3.2	Application des résultats obtenus aux outils coniques	193
4.6.3.2.1	Influence du changement de rayon	193

4.6.3.2.2	Choix de l'axe de rotation	194
4.7	Positionnement amélioré appliqué à la surface offset	195
4.7.1	Définition du nouveau positionnement	196
4.7.2	Comparaison entre les différents positionnements améliorés	197
4.7.2.1	Erreurs obtenues avec les différents positionnements	199
4.8	Positionnement amélioré et minimisation de l'erreur	201
4.8.1	Choix d'un critère d'optimisation	203
4.8.1.1	Critère des moindres carrés	203
4.8.1.2	Minimisation de l'erreur maximale	204
4.8.2	Choix des axes de rotation et de translation	204
4.8.3	Bilan de l'étude	206
4.9	Conclusion et Perspectives	207
Conclusion générale et perspectives		209
Bibliographie		212

Introduction

Les objets présentant des formes gauches sont de plus en plus présents dans notre quotidien. Le mécanicien est confronté à la réalisation de surfaces esthétiques ou fonctionnelles beaucoup plus compliquées à usiner qu'auparavant. Pour s'en persuader, il suffit par exemple de comparer la carrosserie d'un véhicule du début ou de la moitié du 20^{ème} siècle, à celle produite de nos jours. A la difficulté de l'usinage, s'ajoute donc celle associée au respect de la forme.

Au début du 20^{ème} siècle, lorsque le bureau d'études devait spécifier de façon détaillée la forme d'un objet, il le faisait généralement par le tracé d'un certain nombre de sections planes et parallèles entre elles. Des modelleurs réalisaient ensuite des gabarits conformes aux tracés, puis les reportaient sur un bloc solide. Il restait alors à interpoler entre les sections du modèle pour obtenir la forme souhaitée. Bien que les compétences des modelleurs et des ajusteurs n'étaient pas en cause, les formes n'étaient pas identiques d'un opérateur à l'autre : ce procédé laissait en effet, une part importante d'interprétations et d'arbitraire, et était tributaire de l'habileté et du jugement de ceux qui l'exécutaient. La technique d'obtention de la pièce consistait alors à reproduire fidèlement cette forme. La pièce était usinée en ayant recours à une machine à copier. La pièce usinée était alors conforme au modèle volumique, mais ce dernier, en raison du manque de rigueur du procédé employé, ne l'était peut être pas, par rapport au dessin de définition. Cette méthode a été en vigueur jusqu'à l'arrivée de la conception et de la fabrication assistées par ordinateur (CFAO) d'une part et de la commande numérique d'autre part.

Disposant déjà des atouts de la commande numérique, qui vit le jour au début des années quarante, et cherchant sans cesse à rentabiliser son outil, le mécanicien désirait remplacer le modèle physique de l'objet, par un modèle mathématique. La définition numérique de l'objet, immédiatement utilisable par tous les corps de métier de la fabrication, transmissible sans altération, remplacerait ainsi la longue suite des opérations traditionnelles dont chacune était source d'erreur. C'est dans les domaines de la construction navale, de l'automobile et de

l'aéronautique, que des propositions concrètes de définition mathématique des surfaces ont été initiées. Les travaux de J. Ferguson, S. Coons, R. Riesenfeld, P. Bézier, P. de Casteljaeu, dans les années soixante, ont permis de développer des systèmes de modélisation des surfaces gauches, par juxtaposition de carreaux, tous basés sur des fonctions paramétriques polynomiales à coefficients vectoriels. L'émergence du couple commande numérique - conception assistée par ordinateur (CAO), a dès lors remis en cause, de manière profonde, le processus global de fabrication. Il a notamment modifié le niveau d'exigence des pièces réalisées. L'évolution très rapide des performances des ordinateurs et l'apparition des terminaux graphiques interactifs ont apporté la possibilité de représenter et de manipuler les objets sous forme d'entités géométriques. La modélisation géométrique s'est ainsi positionnée au cœur même des systèmes de CFAO, qui trouvent leur origine dans un souci de rationaliser la fabrication. Le modèle géométrique de la pièce sert entre autres, à générer les trajectoires des outils, à évaluer les défauts de forme et d'état de surface, et à détecter les collisions éventuelles. Le copiage traditionnel a donc laissé sa place à de la construction de forme et à un « copiage informatique », où l'outil lors de l'opération de finition suit au mieux le profil de la surface théorique. Lorsque l'objectif est, comme c'est le cas dans une démarche CFAO, de construire un modèle utilisable pour les phases de mise en œuvre des procédés de fabrication, on se doit donc de porter une attention particulière à la justesse du modèle. Ainsi, aux exigences de fidélité de la forme se sont rajoutées des exigences de précision, associées au modèle et aux procédés permettant la réalisation de la pièce.

Depuis le début des années 80, l'avancée technologique des systèmes de CFAO, permettent la numérisation des surfaces au plus près des fonctions projetées, telles que l'aérodynamisme, le design, etc. Ces besoins fonctionnels de la forme de la pièce vont se traduire par des exigences différentes, en termes de spécifications géométriques, telles que la tolérance de forme et l'état de surface. Une fois le modèle géométrique défini avec ses spécifications géométriques, on cherche à obtenir la pièce réelle à partir du calcul des trajectoires d'outils et de l'usinage. Le procédé d'usinage des formes gauches fait appel principalement à l'usinage d'enveloppe par balayage d'une fraise et à l'usinage de forme par électroérosion ; nous nous intéresserons par la suite, uniquement au premier cas.

Les erreurs obtenues sur la pièce, c'est-à-dire les écarts entre la surface réellement usinée et la surface théorique, sont causées à la fois par le calcul des trajectoires de l'outil et par le procédé d'usinage. Ces deux types d'erreurs sont respectivement : l'erreur théorique entre la surface CAO et la surface définie par l'enveloppe des positions successives de l'outil programmées, et l'erreur d'usinage qui comprend celle générée par la machine et celle générée par le processus de coupe.

Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à l'étude de l'erreur théorique ; un des objectifs étant de minimiser celle-ci afin de diminuer le temps requis pour les opérations de polissage. Le problème ne se restreindra pas à un problème purement géométrique ; l'aspect technologique sous tendant toute l'étude.

La première partie concerne l'usinage en bout, c'est-à-dire l'usinage avec l'extrémité de la fraise. Après une recherche bibliographique sur les stratégies utilisées pour l'usinage en bout (choix des trajectoires, choix d'un outil...), nous avons cherché à définir une méthode globale d'usinage permettant d'augmenter la productivité et de maîtriser la précision. Cette méthode s'intitule : « planification de trajectoires à hauteur de crête constante ». Compte tenu des contraintes de productivité et de qualité qui sont de rigueur aujourd'hui, il est nécessaire de mettre en place des stratégies où la hauteur de crête est entièrement maîtrisée. Ne pas maîtriser la hauteur de crête revient à usiner une surface en dehors des tolérances imposées ou à effectuer de la sur-qualité. Le premier temps de cette étude a consisté à développer un programme de calcul de la planification à hauteur de crête constante. Ce travail nous a permis d'analyser et de comprendre l'ensemble des mécanismes qui permettent un bon déroulement de la planification. Ceci nous a amené, dans un second temps, à nous intéresser au positionnement à donner à la surface à usiner, au choix de la géométrie d'outil et au choix de la première trajectoire de la planification qui sont des éléments essentiels au bon déroulement de la planification de trajectoires à hauteur de crête constante. Pour finir, une série d'essais a été menée afin de mieux comprendre le comportement de l'outil lors de l'usinage. Le but de ces essais étant, à terme, de pouvoir intégrer les résultats obtenus à la planification de trajectoire isocrêtes, au choix du posage et de la première trajectoire.

La deuxième partie des travaux concerne l'usinage en roulant, qui constitue un des domaines de recherche parmi les moins explorés de la CFAO. Nous avons commencé par faire une analyse des principales études existantes dans la littérature. Les principaux développements de notre étude concernent la mise au point de procédures adaptées pour le positionnement d'un outil cylindrique. Nous avons pu constater dans la littérature qu'il existait deux familles de positionnements : une qui est basée sur des considérations géométriques et une qui prend en compte les aspects cinématiques de l'usinage. Le premier positionnement développé au laboratoire est un positionnement géométrique appelé « positionnement amélioré ». Nous avons donc analysé, dans un premier temps, l'aspect cinématique de ce positionnement et nous avons montré que, bien que basé sur la géométrie de la surface, ce positionnement avait des propriétés cinématiques intéressantes. Par la suite, nous avons analysé les paramètres caractéristiques du positionnement amélioré et construit de nouveaux positionnements à partir de cette analyse. L'ensemble des positionnements proposés sont comparés à partir du

calcul de l'interférence engendrée par chaque positionnement. Nous concluons par la suite sur l'intérêt que représente un des positionnements développés. Pour finir, l'ensemble des études menées nous ont permis de proposer une procédure de détermination des dimensions de l'outil en fonction de l'erreur imposée par la surface.

Ces études sont sous tendues par l'idée suivante : les méthodes développées doivent être robustes et suffisamment rapides pour permettre une implémentation dans un logiciel de FAO.

Notations

Nous utilisons en général les notations suivantes :

$\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z}$	: points et vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$
$a, \dots, Z, \alpha, \dots, \omega$	: scalaires
$\ \mathbf{a}\ $	: norme du vecteur $\mathbf{a}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	: produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	: produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathcal{R}$	: repère de l'espace

et en particulier :

R	: rayon extérieur de l'outil
r	: rayon de tore d'un outil torique
β	: demi-angle au sommet d'un outil conique
h_c	: hauteur de crête
ρ	: rayon de courbure d'une courbe
s, t, u, v, w	: paramètres descripteurs des courbes et des surfaces
$\mathbf{C}(u)$	: courbe définie paramétriquement
$\mathbf{S}(u, v)$	: surface définie paramétriquement
$\mathbf{S}_{\mathbf{u}}, \mathbf{S}_{\mathbf{v}}$	: dérivées premières de $\mathbf{S}(u, v)$ par rapport à u et v
$\mathbf{S}_{\mathbf{uu}}, \mathbf{S}_{\mathbf{vv}}, \mathbf{S}_{\mathbf{uv}}$	: dérivées secondes de $\mathbf{S}(u, v)$ par rapport à u et v

État de l'art sur l'usinage en bout

1.1 Présentation

L'usinage des surfaces gauches en fraisage en bout sur MOCN à 3 ou 5 axes est un procédé très intéressant car il permet de réaliser tout type de surfaces. Néanmoins, il reste très complexe à mettre en œuvre et est loin d'être encore totalement maîtrisé bien que de nombreux chercheurs se soient déjà penchés sur ce problème.

L'usinage sur MOCN à 3 axes a été longtemps le sujet de nombreuses recherches basées essentiellement sur la mise en place de stratégies, aujourd'hui bien connues, telles que l'usinage par plans parallèles, par isoparamétriques, par surfaces guides... L'usinage sur MOCN à 5 axes a lui-aussi été largement étudié. En effet, pour obtenir un usinage optimal, un certain nombre de méthodes et d'algorithmes doivent être mis en place. Dans un premier temps, les recherches se sont focalisées sur la détermination du positionnement de l'outil pour accéder à un point donné de la surface sans entrer en collision avec celle-ci ou avec d'autres surfaces avoisinantes. Ce problème peut être résolu en deux temps : étude de l'accessibilité locale, puis de l'accessibilité globale de l'outil. Pour résoudre le premier problème, la géométrie locale de la surface (directions principales, courbures, normale...) doit être prise en compte pour déterminer le positionnement initial de l'outil. A l'inverse, pour résoudre le second problème, l'ensemble outil/porte-outil et pièce/porte-pièce doit être considéré. Dans un second temps, l'intérêt s'est porté sur la construction des trajectoires de l'outil. En effet, que ce soit en 3 axes ou en 5 axes, de nouvelles études ont émergé concernant l'établissement de nouveaux modes de calcul de trajectoires. C'est sur ce dernier point que nous allons tout particulièrement travailler sachant que tout ce qui est relatif au positionnement outil a déjà largement été développé au sein du Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse.

Compte tenu des contraintes de productivité et de qualité qui sont de rigueur aujourd'hui,

il paraît nécessaire de mettre en place des stratégies où la hauteur de crête est entièrement maîtrisée. En effet, ne pas maîtriser la hauteur de crête revient à usiner une surface en dehors des tolérances imposées ou à effectuer de la sur-qualité, ce qui n'est pas acceptable. Aujourd'hui, dans la plupart des stratégies développées, seule la hauteur de crête maximale est connue, son évolution le long des trajectoires n'est pas contrôlée. C'est pour cette raison que nous avons choisi de développer une stratégie de fraisage en bout à hauteur de crête constante.

L'utilisation de MOCN 5 axes pour l'usinage de surfaces gauches offre de nombreux avantages par rapport à la MOCN 3 axes malgré un coût d'achat et un coût d'exploitation plus élevés. En effet, la MOCN 5 axes permet de nouvelles possibilités du fait des degrés de liberté supplémentaires autorisés en rotation. Nous pouvons cependant noter que l'augmentation du nombre de liaisons dans la chaîne cinématique de la machine introduit de nouvelles dispersions et donc une plus grande incertitude de positionnement. De plus, la définition des trajectoires d'outil (et donc la programmation) devient elle-aussi beaucoup plus complexe en 5 axes puisqu'en 3 axes le positionnement de l'outil pour accéder à un point donné de la surface est unique : il peut être entièrement défini par le point centre-outil (point **CL** sur la figure 1.1) [Rub93]. Lors de l'usinage en 3 axes, le point de contact outil-pièce (point **CC** sur la figure 1.1) est appelé « **CC point** » (Cutter-Contact Point) tandis que le point centre-outil (point **CL** sur la figure 1.1) est appelé « **CL Point** » (Cutter-Location Point).

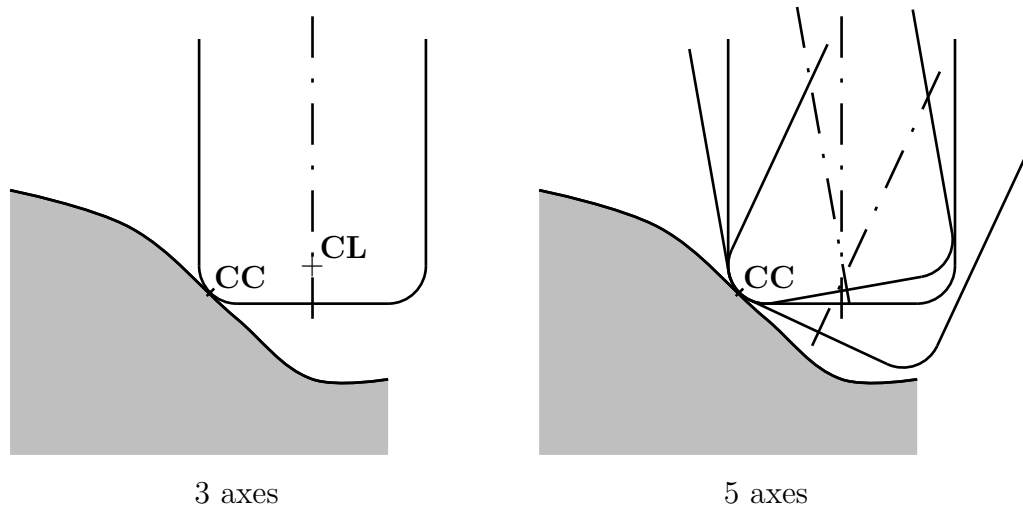


Figure 1.1 – Positionnement de l'outil en 3 et 5 axes

Le travail de recherche effectué par la suite est dédié à l'établissement d'une planification de trajectoires à hauteur de crête constante pour l'usinage de surfaces gauches sur MOCN à 3 axes. Néanmoins la bibliographie proposée s'intéresse aux stratégies d'usinage dans leur

globalité, qu'elles soient développées pour les MOCN à 3 axes ou à 5 axes.

1.2 Choix des outils

1.2.1 Géométrie des outils

Le système APT [Apt67] fournit une définition générale des caractéristiques géométriques d'un outil utilisé pour l'usinage sur MOCN [Mar91] (figure 1.2).

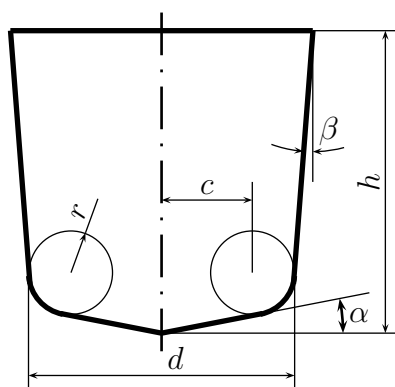
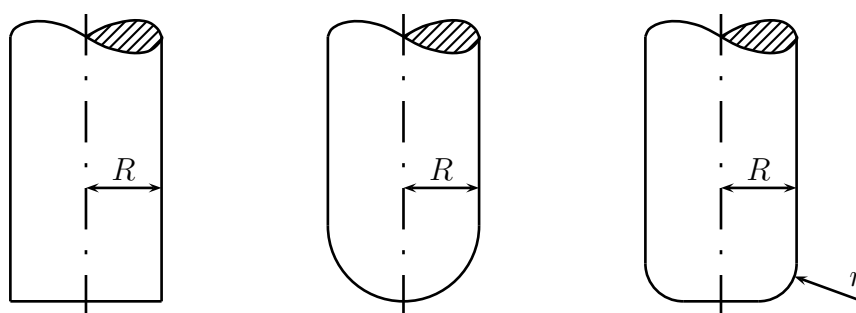


Figure 1.2 – Définition de la géométrie d'un outil APT

Dans la pratique, les principaux types d'outils utilisés sont des cas particuliers de cette définition : les outils à bouts plats, sphériques ou toriques (figure 1.3).



Outil à bout plat Outil à bout sphérique Outil à bout torique

Figure 1.3 – Les principaux types d'outil utilisés pour l'usinage en bout

La géométrie et la taille des outils sont choisies en fonction de la géométrie de la surface et de la cinématique de la machine (nombre de degrés de liberté). La détermination des

caractéristiques géométriques optimales de l'outil pour usiner une surface donnée est un problème complexe qui présente un grand intérêt pour la définition d'une gamme opératoire.

1.2.2 Choix d'une géométrie d'outil

Comme on l'a vu ci-dessus, il existe plusieurs types d'outils qui sont couramment utilisés en fraisage 5 axes : les outils à bout sphérique, à bout plat ou torique (figure 1.3). L'outil le plus utilisé est de loin l'outil à bout sphérique et plusieurs recherches ont été menées sur le choix des dimensions d'un tel outil. Ainsi, [Lo00] présente une méthode très répandue pour aborder l'usinage avec un outil à bout sphérique : on utilise dans un premier temps un outil dont le diamètre est le plus grand possible afin d'enlever un maximum de matière. L'outil laisse alors des zones non usinées qui correspondent aux zones d'interférence locale. Cette matière résiduelle est enlevée lors d'un deuxième usinage avec un outil qui aura cette fois un diamètre beaucoup moins important fonction de la courbure des zones d'interférence. Le choix du petit outil est évident puisqu'il est directement dépendant des courbures de la surface à usiner. Par contre, pour ce qui est du grand outil le choix est plus difficile. [Lo00] met en place un critère de choix basé sur la minimisation de la « longueur totale du trajet outil ». Cette longueur de trajet est la somme des trajets effectués par le petit et par le grand outil. Il choisit donc le diamètre du grand outil de manière à ce que la distance parcourue par l'ensemble des deux outils soit minimale.

[LFS00] quant à lui propose une approche différente adaptée à l'usinage de poches et dimensionne le grand outil en utilisant un critère purement géométrique : il définit la notion de « largeur de passage » (figure 1.4) et dit que le diamètre maximum de l'outil est égal à la largeur de passage minimum.

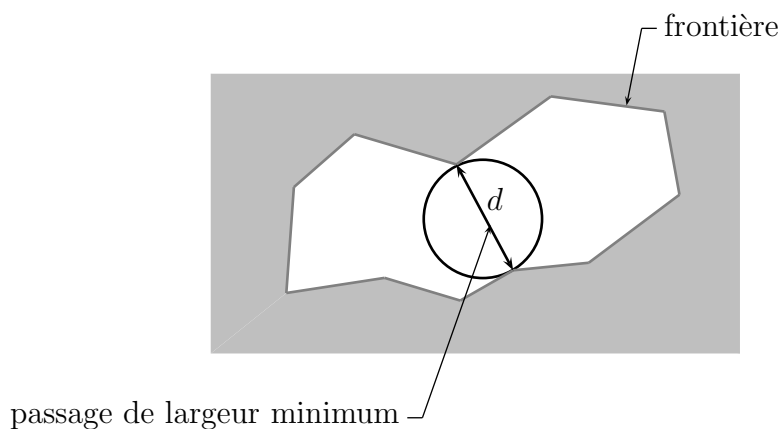


Figure 1.4 – Détermination du diamètre du grand outil

Il existe donc plusieurs recherches qui ont été menées sur le choix d'un outil à bout sphérique. Mais on peut se poser la question de savoir si l'outil à bout sphérique, malgré le fait qu'il soit très utilisé, est le plus performant. Les outils à bout plat ou torique ne sont-ils pas plus efficaces ?

[VQ89] aborde ce problème en établissant une comparaison entre les outils à bout sphérique et à bout plat. Cette étude se déroule en plusieurs points :

- Comparaison du rayon effectif de coupe : lorsqu'on incline l'outil à bout plat d'un angle ϕ , le rayon effectif de coupe évolue (équation 1.1). Ainsi, pour un angle ϕ de 5° , le rayon effectif d'un outil à bout plat de rayon R sera douze fois plus grand que celui d'un outil à bout sphérique de rayon R lui-aussi.

$$R_{eff} = \frac{R}{\sin \phi} \quad (1.1)$$

- Comparaison de la hauteur de crête résultante : le calcul de la hauteur de crête est mené dans différents cas de figure : surface plane, surface convexe ou surface concave. Néanmoins la comparaison entre l'outil à bout sphérique et l'outil à bout plat basée sur la hauteur de crête engendrée n'est menée que pour le cas de l'usinage d'une surface plane :

$$L = 2\sqrt{2h_c R - h_c^2} \quad (\text{usinage d'un plan avec un outil à bout sphérique})$$

$$h_c = \sin \phi \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \quad (\text{usinage d'un plan avec un outil à bout plat})$$

Ainsi, en traçant ces fonctions, on peut se rendre compte que pour un rayon d'outil R et un pas transversal L fixés, la hauteur de crête pour un outil à bout sphérique ne varie pas, alors qu'elle est considérablement réduite pour un outil à bout plat incliné d'un angle ϕ faible.

- Comparaison au niveau de la coupe : l'outil à bout sphérique, de part sa géométrie, va avoir une vitesse de coupe quasiment nulle au voisinage de son axe de rotation. De ce fait, l'outil ne réussit plus à usiner réellement, il se produit localement un écrouissage de la matière et une détérioration rapide des arêtes de coupe. Pour résoudre ce problème, il reste alors la possibilité d'incliner l'outil d'un certain angle afin d'éloigner de la pièce à usiner la zone à vitesse de coupe nulle. Mais cette solution est très limitée car les inclinaisons de l'outil doivent rester faibles afin de limiter les problèmes de collisions globales. L'outil à bout plat quant à lui n'est jamais confronté au problème de la vitesse de coupe nulle.

L'outil à bout sphérique est donc moins performant qu'un outil à bout plat d'un point de vue rayon effectif, hauteur de crête et qualité de la coupe. Il peut donc être remplacé

avantageusement par l'outil à bout plat. On verra ultérieurement que l'outil à bout torique présente lui-aussi de nets avantages par rapport à l'outil sphérique. Néanmoins, l'utilisation d'un outil à bout plat ou d'un outil à bout torique engendre des difficultés supplémentaires telles que le positionnement de l'outil ou la détection de l'interférence locale. C'est pour cette raison que l'outil à bout sphérique est malgré tout couramment utilisé dans les logiciels de FAO actuels, et certaines opérations d'usinage proposées par ces logiciels ne sont utilisables qu'avec ce type d'outil.

1.3 Stratégies d'usinage « classiques »

Une stratégie d'usinage permet de calculer l'ensemble des trajectoires de l'outil lors de l'usinage d'une pièce sur MOCN. De nombreuses stratégies d'usinage ont été envisagées, les plus répandues pour les opérations de fraisage étant l'usinage par plans d'intersections et l'usinage par isoparamétriques. Ces stratégies d'usinage sont directement issues des recherches menées en 3 axes et, bien qu'elles soient tout à fait adaptables au 5 axes, elles n'en utilisent pas toutes les possibilités.

1.3.1 Surfaces guides

Une première définition des trajectoires d'usinage, utilisée dans le système APT [FP85], est basée sur la notion de surface guide. Chaque trajectoire d'outil est définie à partir d'une surface intermédiaire, la surface guide. L'outil se déplace dans une direction donnée tout en restant en contact avec la surface à usiner et avec la surface guide (figure 1.5). Au niveau des

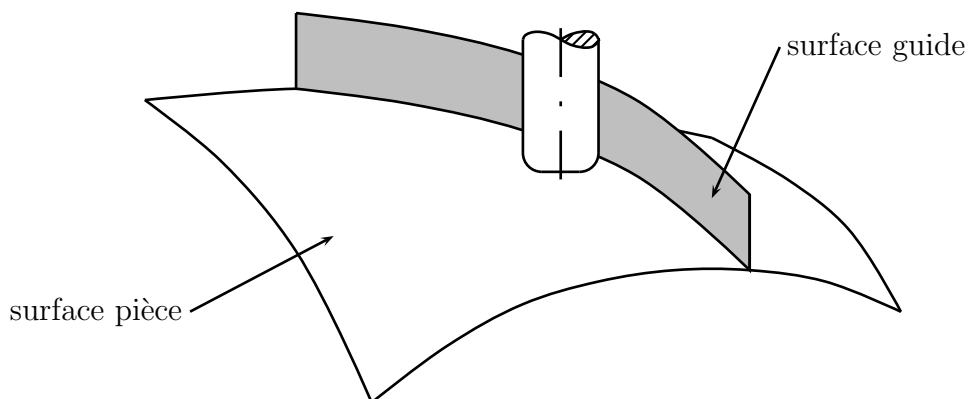


Figure 1.5 – Usinage par surface guide

logiciels de FAO, le mode d'usinage « parallèlement à une courbe de guidage » est souvent

utilisé pour la reprise d'usinage, opération locale pour laquelle il faut s'appuyer sur la forme de la pièce.

Le choix de la surface guide n'est pas immédiat, il peut s'effectuer suivant plusieurs critères tels que la facilité de construction ou la compatibilité avec la surface à usiner [KC00]. Sa mise en place nécessite un calcul itératif numérique pour déterminer la position de l'outil à chaque incrément. Ceci peut requérir un temps de calcul important, cette stratégie est donc à mettre en parallèle avec des méthodes de calcul adaptées ([BFJP87] et [BK90]).

1.3.2 Plans parallèles et stratégies dérivées

Directement issue du procédé d'usinage par surface guide, la stratégie d'usinage par plans d'intersection se base sur des trajectoires d'outil construites à partir des intersections entre la surface à usiner et un ensemble de plans.

Cet ensemble de plans (figure 1.6) peut être défini par une normale commune dans une direction donnée (la direction d'un axe, le plus souvent) ou par un ensemble de normales coplanaires liées à une courbe caractéristique de la pièce. L'outil est alors positionné tangent à la surface sur chaque point d'interpolation de la courbe d'intersection [CLHJ88].

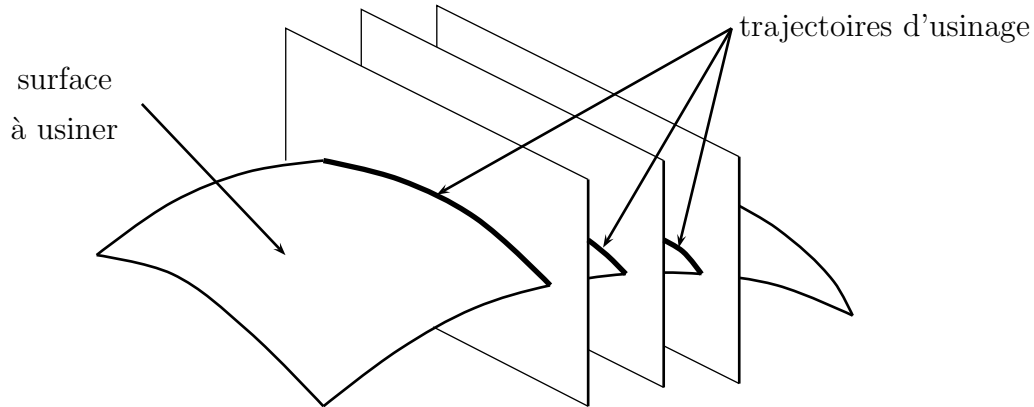


Figure 1.6 – Usinage par plans d'intersection parallèles

Le principal avantage des différentes stratégies par plans d'intersection est de ne pas générer de trajectoires d'outil redondantes ce qui peut occasionner un gain de temps notable [Red99]. D'autre part, il permet aussi d'éviter l'apparition de zones non usinées lors de la planification de trajectoires. Cette stratégie est donc fiable, mais elle n'est pas optimale : dans le cas de pièces à fortes variations de courbure, on peut observer un resserrement des passes successives pour respecter la hauteur de crête imposée, ce qui entraîne une perte de temps et donc de productivité non négligeable. Une étude a été menée dans [FS97] [KC02]

pour mesurer l'influence de l'orientation des plans parallèles et pour limiter ce genre de phénomène.

Les trajectoires définies par les plans d'intersection peuvent être parcourues dans un seul sens (*one way*) ou en *zigzag* (figure 1.7).

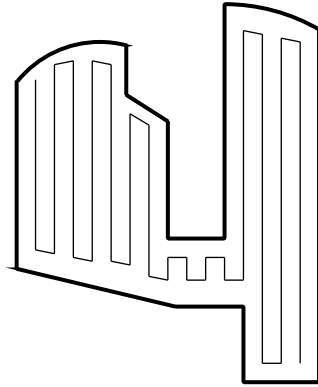


Figure 1.7 – Usinage de poche par plans parallèles, stratégie en *zigzag*

Un sens de parcours de type *one way* améliore l'état de surface. L'outil étant toujours sollicité de la même manière d'une passe à l'autre, les sillons usinés sont homogènes, ce qui n'est pas le cas en *zigzag* où l'on peut identifier un saut d'un sillon à l'autre dû à la variation de la déformation de l'outil. Néanmoins, la méthode en *zigzag* est intéressante car elle offre une diminution du temps d'usinage en évitant les retours hors de la matière [Duc98]. Des études ont été menées sur l'optimisation de cette stratégie d'un point de vue orientation des plans (influence directe sur la hauteur de crête), longueur d'usinage [PC00] [KC02] ou retraits outil hors de la matière pendant l'usinage [TCC98] [Sar99]. D'autres études se sont intéressées à la mise en place des différentes trajectoires en se basant sur la notion de *ligne de balayage* [Tt01] [HA92] [Hel91] (figure 1.8) : les trajectoires outil sont formées par les lignes de balayage et on gère les débuts et fins de trajectoire de l'outil en relevant les intersections entre la frontière de la poche et la ligne de balayage.

Les limites de cette méthode (frontières de la poche de type arc ou ligne uniquement, problème si la frontière est une ligne parallèle à la ligne de balayage) ont conduit au développement des méthodes basées sur les cartes pixels (figure 1.9). Ces méthodes sont encore au stade de développement et n'ont pas été mise en place dans l'industrie [Tt01].

La stratégie d'usinage par plans d'intersection est parmi les plus utilisées industriellement. Sa mise en œuvre nécessite la détermination du pas transversal (distance entre deux passes), facteur influent sur la valeur de la hauteur de crête. Certains chercheurs ont tenté de développer des modèles basés sur le pas transversal destinés à permettre une meilleure

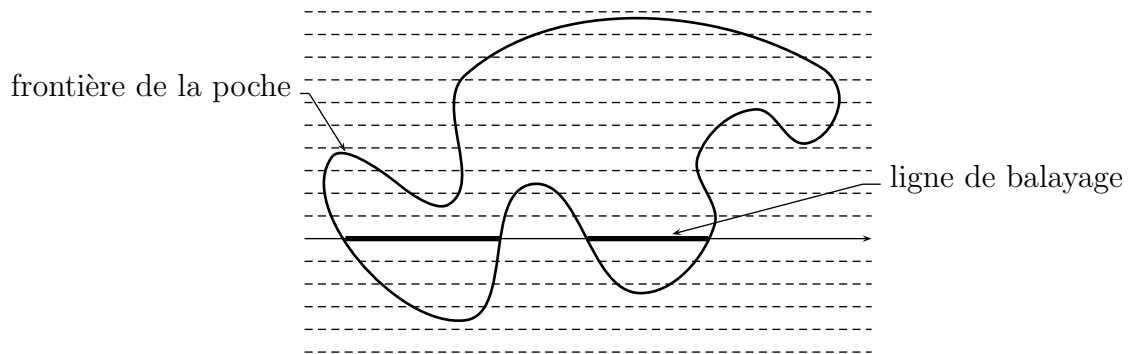


Figure 1.8 – Méthode des lignes de balayage

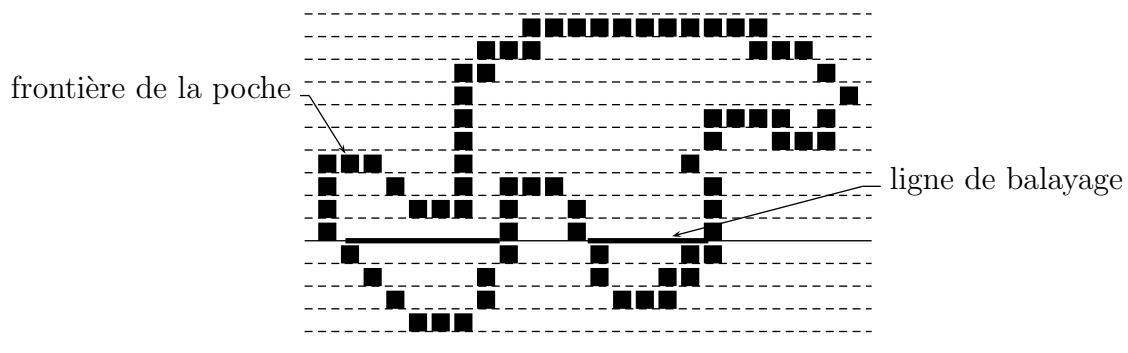


Figure 1.9 – Méthode basée sur les cartes pixels

maîtrise de la hauteur de crête. L'idée de départ a été d'adapter le pas transversal au fur et à mesure de la construction des trajectoires. Dans [HO94], pour chaque point d'interpolation de la trajectoire, on calcule en fonction de la hauteur de crête à respecter et de la géométrie de la pièce un pas transversal par rapport au point adjacent sur la trajectoire précédente. La distance entre chaque plan d'intersection est alors donnée par la valeur minimale des pas ainsi calculés. Cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter le calcul de nombreux points qui ne sont pas utilisés par la suite.

[Rub93] a développé une nouvelle approche sur la stratégie par plans parallèles. L'idée développée est la suivante : les trajectoires de l'outil ne sont plus construites à partir de l'intersection des plans parallèles et de la surface à usiner $S(u, v)$, mais à partir de l'intersection des plans parallèles et de la surface offset à $S(u, v)$. Les avantages et les inconvénients des deux méthodes sont listés ci-après :

- lorsqu'on applique la stratégie par plans parallèles sur $S(u, v)$, les traces laissées par l'outil sur la surface sont parallèles ce qui peut être intéressant, notamment pour les surfaces où l'aspect visuel est important. Les points de contact entre l'outil et la surface

sont alors sur des courbes 2D, ce qui n'est pas le cas des points centre-outil qui sont définis sur des courbes 3D. Sachant que l'outil est piloté à partir de son point centre-outil, le déplacement de l'outil se fait donc dans un espace 3D, ce qui complique le maintien d'une vitesse d'avance constante. D'autre part, la gestion des interférences entre l'outil et la surface devra se faire dans un espace 3D, ce qui complique les calculs à mener.

- lorsqu'on applique la stratégie par plans parallèles sur la surface offset, les traces laissées par l'outil ne sont plus parallèles. Par contre le pilotage de l'outil et la gestion des interférences se font désormais dans un espace 2D ce qui simplifie les calculs.

Dans [MG94] une stratégie dérivée des méthodes par plans d'intersection parallèles est présentée. Cette stratégie se base sur un découpage préalable de la surface en zones où la normale est "fortement inclinée" ou "faiblement inclinée" par rapport à un axe donné (l'axe Z dans une configuration standard). La détermination des plans d'intersection se fait alors différemment selon les zones. Les zones de la pièce où la normale est "faiblement inclinée" seront usinées selon des plans contenant l'axe de l'outil, alors que les zones où la normale est "fortement inclinée" seront usinées selon des plans normaux à l'axe de l'outil. Par rapport à une méthode globale par plans d'intersection parallèles, cette méthode permet de limiter le temps d'usinage, notamment dans le cadre de l'usinage sur MOCN 3 axes.

On a parlé des possibilités d'orientation des plans. Cette possibilité peut être intéressante d'un point de vue section de copeau. Suivant la forme de la pièce à usiner, on peut jouer sur l'orientation des plans pour obtenir une section de copeau la plus constante possible. Par exemple, pour des pièces profondes comme les moules d'injection plastique (figure 1.10), on va privilégier les usinages à altitude constante afin d'éviter les longues montées et descentes de l'outil dans de mauvaises conditions [Duc98].

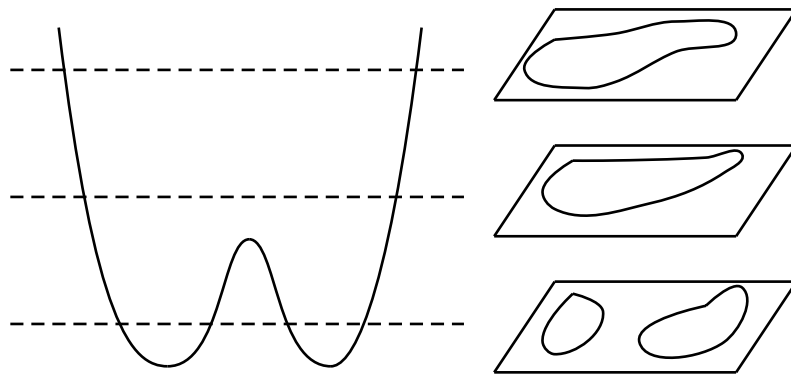


Figure 1.10 – Usinage par enlèvement de couches successives

Lors de l'usinage des poches, cette méthode est donc particulièrement adaptée aux phases d'ébauche [Cat92]. Son principal avantage est de faire varier de manière évolutive la profondeur de chaque passe en fonction de l'épaisseur totale de matière à enlever. Ceci afin de minimiser les variations de la profondeur de passe pour l'ensemble des trajectoires de l'outil et ainsi de diminuer les variations d'efforts de coupe qui constituent une source importante de dispersions d'usinage ([Des97] et [BEP92]).

Des procédures particulières sont nécessaires pour usiner les poches de façon exacte et précise. Voici une présentation de quelques unes de ces procédures.

- Usinage en *zigzag* : cette méthode d'usinage a déjà été décrite précédemment.
- Usinage en spirale : on effectue un offset des parois latérales de la poche et on s'en sert comme support à la construction de la trajectoire [SL90] [Fer88] (figure 1.11).

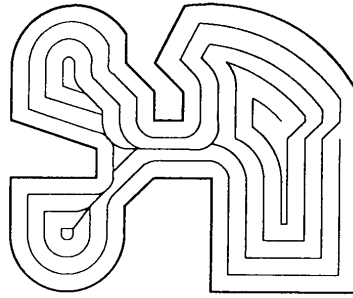


Figure 1.11 – Usinage des poches en spirale

L'inconvénient majeur de cette stratégie par rapport à une stratégie en *zigzag* réside en particulier dans la difficulté de calculer le pas de coupe. L'idée utilisée pour générer le pas de coupe est de rétrécir le profil de la frontière vers l'intérieur ou vers l'extérieur dans le cas particulier d'une poche comprenant une île. Cette procédure d'offset n'est pas simple car elle sous-entend la gestion de tous les problèmes de recouvrement qui peuvent se produire : frontière/frontière, île/frontière, île/île.

- Méthode basée sur les diagrammes de Voronoï :

Le calcul des courbes offset s'effectue à l'aide des diagrammes de Voronoï [Kim98] (figure 1.12). Cette méthode a l'avantage d'offrir un bon recouvrement de la surface.

- Méthode d'usinage selon Person [Per78] : Person décrit une procédure efficace qui se déroule comme suit : on effectue un calcul de courbes équidistantes entre chaque frontière, puis on réitère le calcul entre chaque paire de courbes adjacentes. Ainsi, on verra les trajectoires se dessiner peu à peu. Le problème de cette stratégie est que le calcul d'une "courbe équidistante entre deux courbes indépendantes" est difficile à mener et est vite limité lorsqu'on est en présence de courbes complexes. Cette méthode

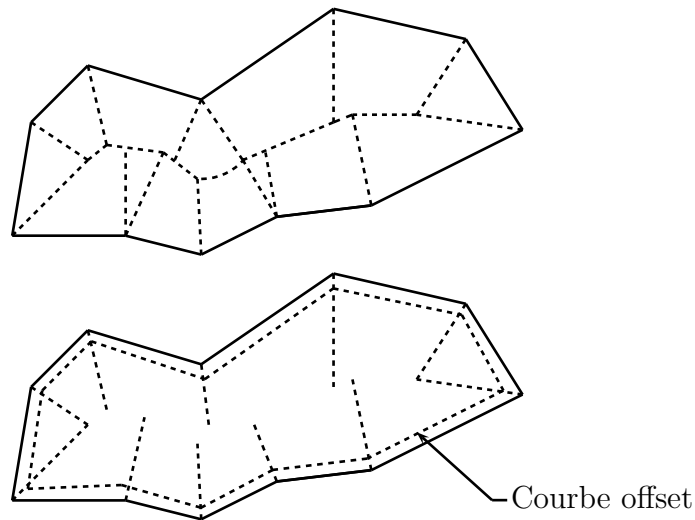


Figure 1.12 – Construction des courbes offset à partir des diagrammes de Voronoï

ne sera donc pas applicable pour des poches limitées par des courbes libres.

1.3.3 Isoparamétriques

L'usinage par isoparamétriques (figure 1.13) est plus facile à mettre en œuvre que l'usinage par plans d'intersection qui nécessite le calcul préalable des courbes d'intersections.

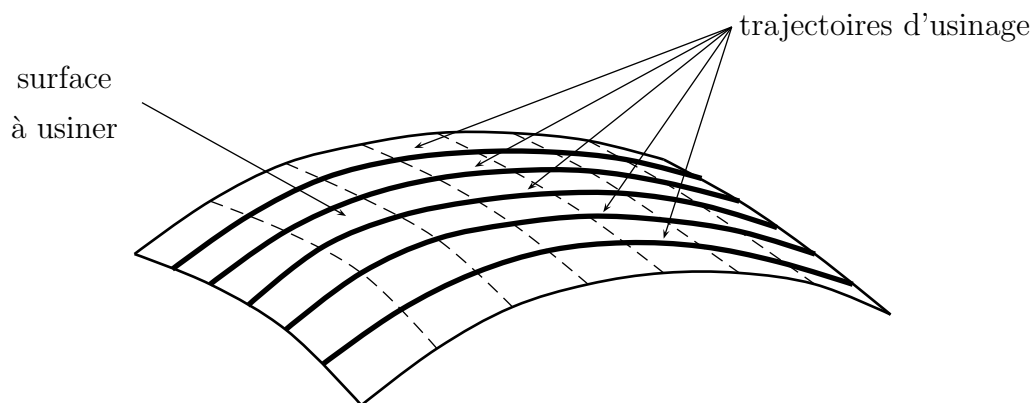


Figure 1.13 – Usinage par isoparamétriques

Suivant le choix qui est fait au niveau des isoparamétriques, la qualité de surface obtenue est tout à fait différente [Zhu93]. Par exemple, la surface présentée sur la figure 1.14 ne présentera pas la même qualité de surface suivant les isoparamétriques choisies.

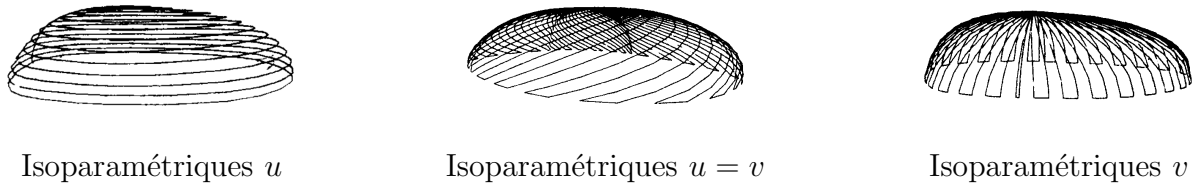


Figure 1.14 – Usinage suivant différentes isoparamétriques [Zhu93]

Il est à noter cependant que l'usinage par isoparamétriques est difficile à mettre en application sur des surfaces composées de plusieurs carreaux définis dans des espaces paramétriques différents (figure 1.15).

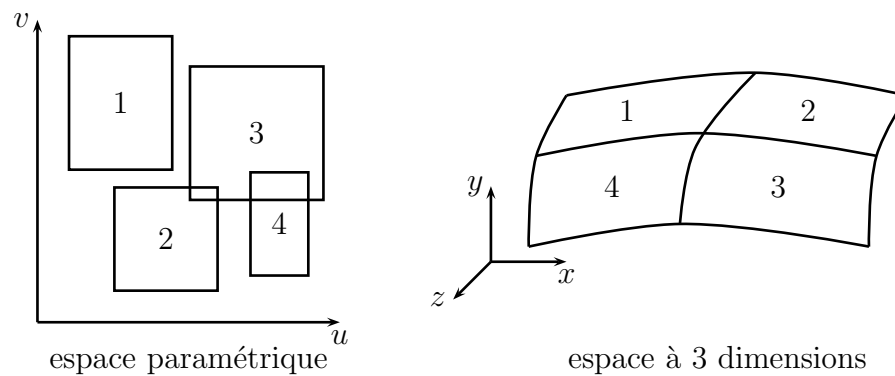


Figure 1.15 – Espaces paramétriques incompatibles

De plus, dans le cas de carreaux singuliers (carreaux triangulaires), la génération automatique de trajectoires d'outil à partir des isoparamétriques peut entraîner des passages multiples de l'outil sur une même zone (figure 1.16). On se trouve alors confrontés au problème des trajectoires redondantes.

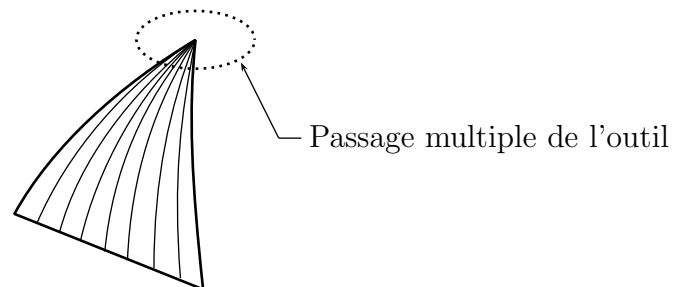


Figure 1.16 – usinage par isoparamétriques sur un carreau singulier

1.3.4 Recouvrement de surface

Il existe aussi des stratégies appelées « stratégies de recouvrement de surface ». Des chercheurs se sont intéressés à la manière de couvrir l'ensemble d'une surface tout en respectant les critères de hauteur de crête, de longueur minimale de trajet et de trajectoires non redondantes. Cette notion de « recouvrement de surface » est définie précisément dans [EC94] : on parle de « couverture valide de surface ».

Parmi les méthodes de couverture, Griffiths en propose une dans [Gri94] basée sur les courbes de Hilbert. La figure 1.17 présente le trajet obtenu dans un cas d'usinage de forme simple.

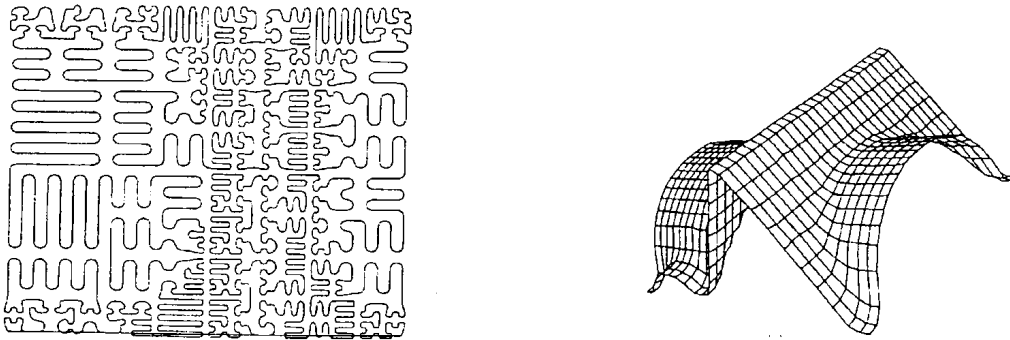


Figure 1.17 – Trajet d'usinage exprimé sous forme de courbes de Hilbert

Cette stratégie a surtout été développée pour de l'usinage en 3 axes. L'adaptation à de l'usinage à 5 axes n'est pas simple et nécessite la prise en compte de problèmes supplémentaires : formes d'outils différentes, optimisation de l'orientation de l'axe de l'outil. Cette méthode donne de meilleurs résultats que les méthodes d'usinage par plans d'intersection ou par iso-paramétriques en terme de couverture de surface. Ceci vient du fait que la technique repose sur l'ajout de portions de courbe là où il n'y a plus respect de la hauteur de crête. Néanmoins la mise en œuvre d'une telle stratégie d'un point de vue usinage est largement discutable du fait des variations de direction incessantes au niveau des trajectoires.

1.3.5 Stratégie basée sur la hauteur de crête

1.3.5.1 Définition de la hauteur de crête

Lorsque l'outil se déplace suivant deux trajectoires adjacentes, il reste de la matière non usinée sur la surface, on parle de « hauteur de crête » (figure 1.18). La hauteur de crête peut se définir comme étant la distance maximale entre la surface nominale et la surface réelle usinée.

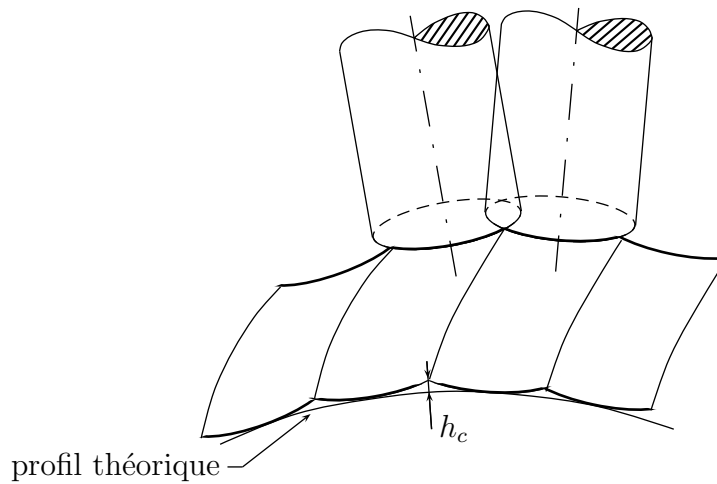


Figure 1.18 – Définition de la hauteur de crête

Afin de pouvoir respecter la qualité imposée sur la surface à usiner et afin de diminuer au maximum les opérations de polissage, cette quantité de matière résiduelle doit être maîtrisée. Il faut donc prendre la hauteur de crête comme un critère important pendant la phase de planification des trajectoires. La hauteur de crête est fonction de plusieurs éléments : géométrie de l'outil, positionnement de l'outil, géométrie de la surface à usiner, pas transversal.

1.3.5.2 Détermination de la hauteur de crête

Lors de l'usinage d'une surface plane, on peut facilement trouver à l'aide d'un calcul algébrique, la relation qui existe entre la hauteur de crête et le pas transversal. Par contre, dans le cas d'une surface gauche, trouver cette même relation par des calculs algébriques est impossible. Deux solutions sont alors envisageables : soit on effectue des approximations sur la géométrie de l'outil et/ou de la surface, on peut alors mener un calcul algébrique ; soit on ne fait aucune approximation, il faut alors mettre en place un calcul numérique.

Dans le cas de surfaces gauches, de nombreuses études considèrent la courbure ρ de la surface localement constante dans un plan normal à la direction d'usinage. Ainsi, en faisant

cette hypothèse, [WBI96] donne plusieurs expressions de la hauteur de crête, pour un outil à bout sphérique, suivant que la surface soit concave ou convexe. [VQ89] en fait de même pour un outil à bout plat incliné d'un angle α dans la direction de l'usinage. Dans [WY02], le raisonnement est mené avec un outil à bout torique pour de l'usinage en 3 axes. Là encore, il s'agit de calculs algébriques basés sur des intersections de surfaces (figure 1.19).

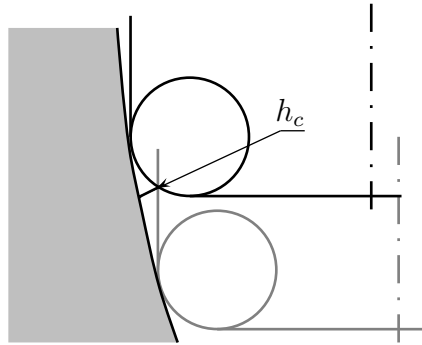


Figure 1.19 – Calcul de la hauteur de crête pour un outil torique en 3 axes

D'autres études ont été menées et ont montré la possibilité d'évaluer la hauteur de crête par une approche algébrique. Mais il ne faut pas négliger le fait que ces études s'appuient sur des hypothèses qui ne sont pas toujours valides : courbure constante, géométrie d'outil approximée, études planes. De plus, dans la plupart des études, les directions d'usinage des deux trajectoires adjacentes sont considérées localement parallèles lorsqu'on met en place le calcul de la hauteur de crête, ceci par un souci de simplification.

L'utilisation de ces approximations dans le cadre des méthodes algébriques ont mené certains auteurs à s'intéresser à des méthodes numériques (méthode de Newton-Raphson par exemple) [Red99]. Là-aussi, les calculs sont menés à partir d'intersections de surfaces : on choisit un outil, un positionnement, une surface nominale, deux trajectoires consécutives et un pas transversal. On peut ainsi en déduire la hauteur de crête résultante entre les deux trajectoires en s'intéressant aux intersections de l'outil dans deux positions adjacentes données (figure 1.18). Ces méthodes présentent néanmoins un inconvénient majeur : les calculs ne peuvent pas être inversés : on peut calculer la hauteur de crête à partir du pas transversal et des données sur l'outil et la surface, mais, à l'inverse, pour une tolérance donnée, et donc une hauteur de crête fixée, on ne pourra pas en déduire la valeur du pas transversal.

Une autre idée qui a été développée dans la littérature est celle de la « surface enveloppe ». La surface enveloppe de l'outil est la surface générée par l'outil sur la pièce lors de l'usinage le long d'une trajectoire. La détermination de cette surface peut s'avérer simple

dans certains cas, mais beaucoup plus complexe dans d'autres. Par exemple, pour un outil à bout sphérique, il sera très facile de déterminer la surface enveloppe puisqu'il s'agit de la demi surface tubulaire générée par une sphère dont le rayon est celui de l'outil et dont la génératrice est la trajectoire des points centre-outils **CL**. Par contre, trouver la surface enveloppe générée par un outil à bout torique est un problème beaucoup plus complexe. Dans [RBIM01] et [MB02], une méthode de calcul est mise en place pour évaluer la surface enveloppe de l'outil lors d'un usinage en 5 axes avec un outil torique. Le raisonnement mené est le suivant : le tore est tout d'abord discrétisé en utilisant un nombre fini de cercles tous coplanaires à l'axe de rotation de l'outil (figure 1.20).

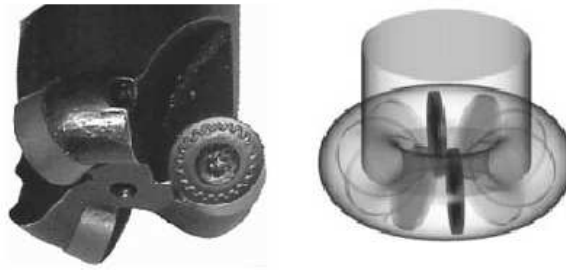


Figure 1.20 – Modélisation de l'outil torique [MB02]

Les intersections entre le tore et les différents plans (cercles coplanaires) représentent des plaquettes « virtuelles ». Le nombre de plans qu'il faut mettre en place dépend du compromis précision/temps de calculs : plus le nombre de plans augmente, plus la précision des résultats obtenus sera importante, mais les temps de calculs augmenteront d'autant. Pour chacune des plaquettes virtuelles, on va chercher le point générateur de la plaquette. Pour cela la définition utilisée est la suivante : le point générateur de la plaquette virtuelle est celui qui a un déplacement (déplacement créé par la vitesse d'avance et par la vitesse de rotation de l'outil) parallèle à la vitesse d'avance de l'outil. Ainsi, pour chaque position de l'outil on va pouvoir identifier les différents points qui usinent effectivement.

La suite de la méthode est une phase d'interpolation où l'on va, dans un premier temps, construire la courbe qui passe par l'ensemble des points générateurs pour une position donnée de l'outil, la courbe obtenue est la courbe enveloppe de l'outil pour la position donnée. Dans un second temps, en effectuant une interpolation entre l'ensemble des courbes enveloppes obtenues, on obtient la surface enveloppe de l'outil lorsqu'il parcourt la trajectoire d'usinage. A partir de la surface enveloppe, la hauteur de crête peut être calculée. Mais cet aspect des calculs n'est pas présenté dans l'article. Cette méthode est néanmoins intéressante dans

la mesure où la qualité des résultats trouvés et les temps de calcul nécessaires peuvent être influencés par le nombre de plaquettes virtuelles utilisées et peuvent donc être maîtrisés.

1.3.5.3 Stratégies isocrêtes

Avec des stratégies type plans parallèles ou isoparamétriques, seule la hauteur de crête maximale est maîtrisée. Le concept de « l'usinage isocrête » est de maintenir une hauteur de crête constante sur toute la surface et d'effectuer ainsi une planification de trajectoires efficace. Il existe plusieurs études dans la littérature concernant ce sujet. Le problème posé étant de trouver une méthode de construction de la trajectoire adjacente qui respecte une hauteur de crête donnée.

1.3.5.3.1 Stratégie isocrête en 3 axes avec un outil hémisphérique

L'approche qui est développée dans [SY94] s'appuie sur la résolution d'un problème plan. Soit $S(u, v)$ la surface nominale, T_i une trajectoire déjà établie sur la surface et CC_i un point de contact outil/matière appartenant à T_i . Le but de la méthode est de trouver le point adjacent à CC_i sur la trajectoire suivante T_{i+1} : CC_{i+1} . Ce point va être défini comme le point d'une courbe géodésique perpendiculaire à T_i en CC_i , à la distance g de ce dernier (figure 1.21). L'utilisation des courbes géodésiques est très limitée puisque seule une approximation à l'ordre 1 de ces dernières est utilisée. La particularité de cette méthode est qu'elle ne se base pas sur la construction d'un point de crête intermédiaire.

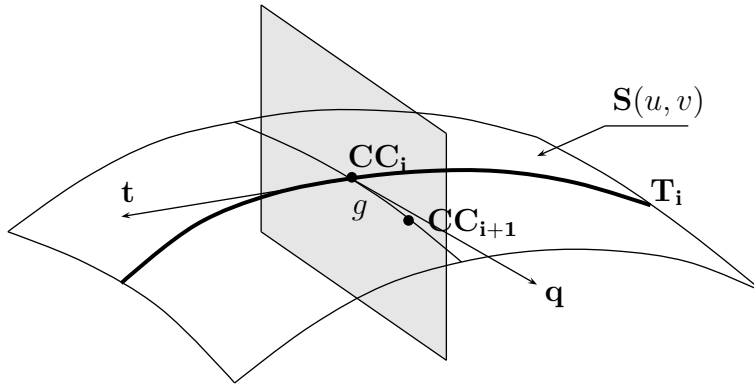


Figure 1.21 – Modélisation établie dans [SY94]

L'approche qui est développée dans [SD97] s'appuie sur la résolution de deux problèmes plans. Cette méthode se base sur la construction d'un point de crête intermédiaire et se déroule comme suit :

Soit $\mathbf{S}(u, v)$ la représentation paramétrique de la surface nominale, $\mathbf{T}_i$ une trajectoire déjà établie sur la surface, $\mathbf{CC}_i$ un point de contact outil/matière appartenant à $\mathbf{T}_i$, $\mathbf{n}(u, v)$ le vecteur normal à $\mathbf{S}(u, v)$ en $\mathbf{CC}_i$ et h_c la hauteur de crête (figure 1.22).

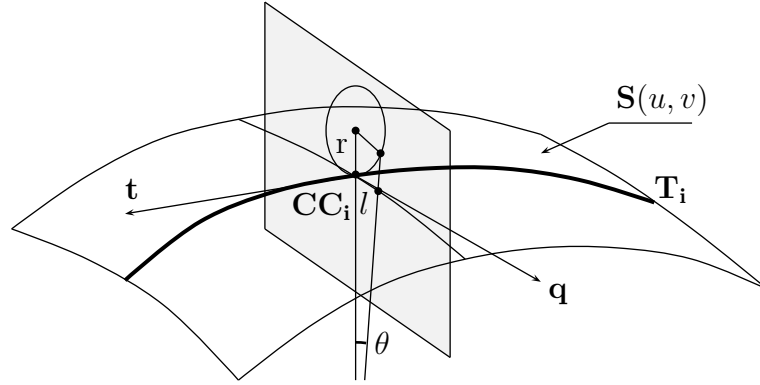


Figure 1.22 – Modélisation établie dans [SD97]

La première étape de cette méthode consiste à trouver le point de crête $\mathbf{P}_i$ à partir de $\mathbf{CC}_i = \mathbf{S}(u_0, v_0)$. Pour cela, on va utiliser les petits déplacements $\delta u, \delta v$ en écrivant :

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{S}(u, v) + h_c \mathbf{n}(u, v)$$

avec : $u = u_0 + \delta u, \quad v = v_0 + \delta v$

La deuxième étape consiste à trouver le point $\mathbf{CC}_{i+1}$ sur $\mathbf{T}_{i+1}$ à partir de $\mathbf{P}_i$. La méthode de résolution est alors identique à la première étape.

Bien que les méthodes proposées dans [SD97] et [SY94] diffèrent, elles s'appuient néanmoins sur un même raisonnement. Dans les deux cas, on cherche à déterminer un point en se basant sur la notion de distance. La valeur de cette distance est différente, mais la mise en équation garde le même esprit. Elle s'appuie sur les notions suivantes :

- Définition du plan dans lequel l'étude sera menée : le plan utilisé pour la mise en équation est le plan perpendiculaire à la tangente $\mathbf{t}$ à la surface $\mathbf{S}(u, v)$ en $\mathbf{CC}_i$. En appelant $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, une base du plan tangent à la surface nominale en $\mathbf{CC}_i$, et en effectuant un développement limité à l'ordre 1 du vecteur $\mathbf{CC}_i \mathbf{P}_i$, les coordonnées du point $\mathbf{P}_i(u_0 + \delta u, v_0 + \delta v)$ doivent vérifier :

$$\mathbf{t} \cdot (\delta u \mathbf{e}_1 + \delta v \mathbf{e}_2) = 0$$

- Calcul de la courbure dans le plan d'étude : La surface est localement approchée par sa sphère osculatrice. La courbure k_n de cette dernière est égale à la courbure normale dans la direction q du plan d'étude :

$$k_n = -\frac{\mathbf{q}B\mathbf{q}'}{\mathbf{q}A\mathbf{q}'}$$

avec A le tenseur métrique et B le tenseur de courbure.

- Calcul de la distance à parcourir :
[SY94] évalue la distance parcourue sur une surface pour un déplacement $(\delta u, \delta v)$ grâce à la première forme fondamentale :

$$dl = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{uu})\delta u^2 + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{uv})\delta u\delta v + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{vv})\delta v^2$$

Par contre, [SD97] utilise la notion de longueur théorique à parcourir définie par :

$$l = \frac{\theta}{k_n}$$

avec :

$$\cos\theta = \frac{(1 + r.k_n)^2 + (1 + h_c.k_n) - r^2.k_n^2}{2(1 + r.k_n)(1 + h_c.k_n)}$$

La démarche effectuée par [SY94] et [SD97] présente un certain nombre de problèmes. Tout d'abord, dans la définition du plan d'étude : le calcul se base sur des variations $\delta u, \delta v$. Or, il n'est pas dit qu'un tel déplacement dans l'espace paramétrique et dans une direction donnée soit facilement transposable à l'espace 3D. Une deuxième source d'erreur dans la définition du plan d'étude réside dans le fait qu'on construit un plan perpendiculaire à la trajectoire des points $\mathbf{CC}_i$ alors qu'on devrait considérer les points $\mathbf{CL}_i$. En effet, la courbe des points $\mathbf{CC}_i$ et celle des points $\mathbf{CL}_i$ ont des tangentes différentes ceci a pour conséquence que la cinématique de la trajectoire ne sera pas respectée au mieux. Si on regarde un peu plus loin dans la méthode, on se rend compte qu'au niveau du calcul de la courbure se situe une nouvelle source d'erreur vu que ce dernier se base sur l'hypothèse que la courbure est localement constante. Toute évolution de la courbure ou toute discontinuité ne sera donc pas prise en compte.

Une autre approche a été développée dans [Tou01] pour l'usinage isocrête adapté à un outil hémisphérique. Cette approche a aussi été développée dans [FL02]. On peut présenter la méthode en plusieurs points :

- Définition de la courbe à hauteur de crête constante : on considère une surface nominale et ses deux surfaces offset de magnitude R et h_c . Sur la surface offset de magnitude

R , on se donne deux trajectoires adjacentes (trajectoires des points **CL**). Sur chaque trajet, la surface enveloppe du mouvement de l'outil est une surface tubulaire de rayon R et de génératrice la trajectoire des points **CL**. La crête engendrée par les deux trajectoires est donc l'intersection des deux surfaces tubulaires. Dans le cadre d'un usinage à hauteur de crête constante, cette courbe est la courbe à hauteur de crête constante et elle appartient à la surface isocrête ou surface offset de magnitude h_c .

- Présentation de la construction de trajectoires : pour chaque position de l'outil, on évalue dans un premier temps le point $\mathbf{P}_{\text{iso}}$ qui appartient à la courbe isocrête, puis dans un second temps on cherche la position adjacente de l'outil respectant le point $\mathbf{P}_{\text{iso}}$ trouvé :
 - * Détermination du point isocrête : on cherche l'intersection entre la courbe enveloppe de l'outil pour une position donnée et la surface offset d'amplitude h_c ou « surface isocrête ». Ceci va nous permettre d'identifier les deux points du profil générateur de l'outil qui sont à une distance h_c de la surface à usiner $\mathbf{S}(u, v)$.
 - * Détermination de la position adjacente de l'outil : à partir du point isocrête $\mathbf{P}_{\text{iso}}$, on cherche la position de l'outil adjacent qui respectera le critère de hauteur de crête constante.

Par la suite, [Tou01] mène une étude comparative entre les différentes méthodes de constructions des trajectoires isocrêtes et conclut en disant que l'intérêt de cette méthode est de n'utiliser à aucun moment un modèle exprimant la hauteur de crête en fonction du pas transversal, modèle qu'il n'est pas toujours possible d'établir.

1.3.5.3.2 Stratégie isocrête en 3 axes avec un outil à bout torique

[Tou01] a aussi présenté un raisonnement adapté au calcul de trajectoires isocrêtes pour un outil torique en trois axes. L'utilisation d'outil torique en 3 axes n'est pas courante car les interférences avec l'arrière de l'outil ne peuvent être éliminées comme en fraisage à 5 axes. La seule solution est de laisser des parties non usinées qui seront ensuite reprises avec un outil hémisphérique. La mise en équation proposée par [Tou01] se décompose là-encore en deux étapes. Le raisonnement est le même que pour un outil hémisphérique en 3 axes, mais la mise en équation va changer étant donné que la courbe enveloppe de l'outil change (figure 1.23).

- Détermination du point isocrête : on va chercher l'intersection entre la courbe enveloppe et la surface offset d'amplitude h_c ou « surface isocrête » pour une position donnée de l'outil. Ceci va nous permettre d'identifier les deux points du profil générateur $\mathbf{P}_{\text{iso}}$ qui sont à une distance h_c de la surface à usiner.

- Détermination de la position adjacente de l'outil : à partir du point isocrête $\mathbf{P}_{\text{iso}}$, on va chercher la position de l'outil adjacente qui respectera le critère de hauteur de crête constante.

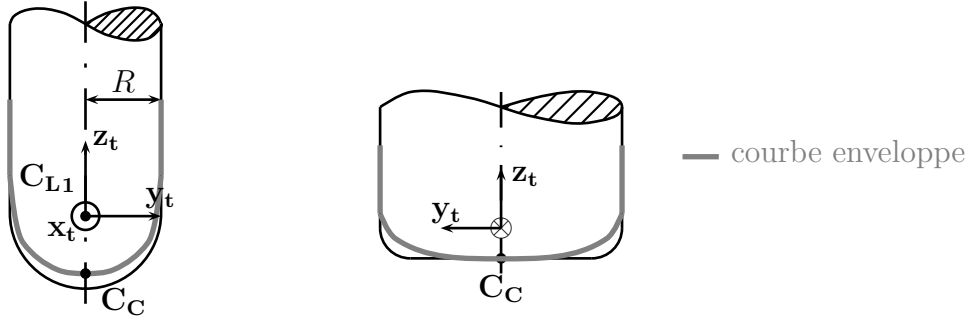


Figure 1.23 – Courbe enveloppe pour un outil torique et un outil hémisphérique

1.3.5.3.3 Stratégie isocrête en 5 axes avec un outil à bout plat ou torique

[Lo99] développe un raisonnement pour le calcul des trajectoires isocrêtes appliquées à un outil à bout plat en 5 axes. Après avoir rappelé brièvement le positionnement de l'outil à partir de deux angles de rotation et évoqué les problèmes d'interférence, [Lo99] propose le calcul du rayon effectif r_e de l'outil à bout plat lorsqu'il est incliné dans sa direction d'avance et du rayon de courbure de la surface R_b dans un plan perpendiculaire à l'avance de l'outil. Il en déduit ensuite l'expression du pas transversal p_t en fonction de la hauteur de crête imposée h_c :

$$p_t = \sqrt{\frac{8R_b r_e h_c}{R_b \pm r_e}}$$

Le signe $\pm$ est mis à 1 dans la cas d'une surface convexe et -1 dans la cas d'une surface concave. Le pas transversal se mesure dans la direction $\mathbf{b}$ perpendiculaire au plan formé par le vecteur avance de l'outil et par la normale à la surface au point de contact.

Par la suite, le raisonnement mené pour la construction de la trajectoire adjacente s'effectue dans l'espace paramétrique (u, v) (figure 1.24). La trajectoire initiale de l'outil est transcrite dans le domaine paramétrique, [Lo99] prend comme première trajectoire une courbe isoparamétrique. La distance entre deux trajectoires adjacentes correspondant au pas transversal évoqué précédemment, il suffit de transcrire ce dernier dans l'espace paramétrique. On appelle $\Delta c = [\Delta u, \Delta v]$ la transcription du pas transversal p_t dans l'espace paramétrique :

$$\Delta u \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} = p_t \mathbf{b}$$

[Lo99] a mis en place le raisonnement utilisé pour calculer à chaque position outil la position

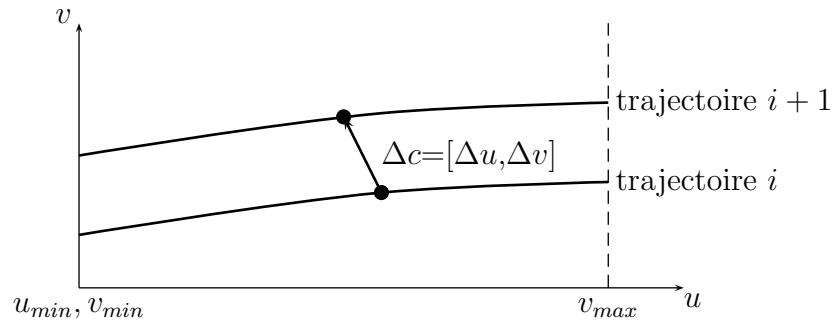


Figure 1.24 – Recherche de la trajectoire adjacente dans l'espace isoparamétrique

adjacente correspondante pour une hauteur de crête h_c donnée. Ce raisonnement est basé sur le pas transversal entre deux trajectoires adjacentes et il s'appuie sur le calcul d'un nombre de points suffisant pour former les trajectoires. Une autre étude est menée en parallèle dans [Lo00] où la notion de pas longitudinal est abordée. Des algorithmes d'interpolation entre les différentes positions outil calculées sont donnés afin de les implémenter sur une machine à commande numérique. Cet article reste concentré sur les outils à bout sphérique et n'aborde pas les outils à bout plat ou torique.

[Lee98] mène un raisonnement identique à [Lo99] en cherchant la trajectoire adjacente dans l'espace paramétrique. La différence réside dans le pas transversal p_t qui est parcouru en n incréments de telle sorte que les dérivées premières de la surface à usiner sont recalculées à chaque incrément. Le calcul proposé par [Lee98] est plus précis que lorsque le pas transversal est appliqué en une seule fois vu qu'on adapte la direction de chaque incrément à la géométrie de la surface.

[Tou01] a lui-aussi abordé le calcul de trajectoires isocrêtes pour un outil torique en 5 axes, le raisonnement mené reste le même qu'en 3 axes à la différence près que l'axe de l'outil est modifiable. La courbe enveloppe dépendra donc des paramètres de positionnement de l'outil.

1.3.6 Choix de la première trajectoire

Du fait de la complexité des surfaces, il n'est pas toujours évident d'avoir une planification des trajectoires optimale. Les méthodes traditionnelles (isoparamétriques, plans parallèles...) débutent systématiquement leur stratégie par les frontières de la surface à usiner. La trajectoire suivante est alors déterminée à partir de la précédente. Il en résulte que, une fois que la trajectoire initiale est choisie, toutes les autres trajectoires en découlent. Il y a eu beaucoup

de recherches effectuées pour trouver une relation entre la géométrie des surfaces à usiner et l'efficacité des trajectoires choisies. Par exemple dans [WCWC87], il a été suggéré que la trajectoire optimale était parallèle à la frontière de plus grande longueur. [Mar87] et [Mar91], quant à eux, ont conclu que la trajectoire optimale était celle qui offrait la passe de largeur maximale (directement dépendant de la courbure de la surface).

[CL99] et [CL02] présentent une nouvelle approche pour la planification des trajectoires en considérant simultanément les propriétés géométriques de la surface et l'optimisation du positionnement outil. Le critère utilisé est le suivant : la trajectoire est optimale si la largeur de la passe est maximale et si la longueur totale du trajet parcourue minimale. La notion de « largeur de la passe » est expliquée plus précisément dans [CL02]. Cette approche est très intéressante, c'est la raison pour laquelle nous allons prendre le temps de la présenter. Les étapes du raisonnement mené sont les suivantes :

- *Définition de la « largeur du chemin de coupe w »* : La largeur du chemin de coupe w est déterminée à partir de l'intervalle de tolérance τ imposée par la surface $\mathbf{S}(u, v)$ (figure 1.25). En effet, la détermination de l'intersection entre la courbe enveloppe de l'outil

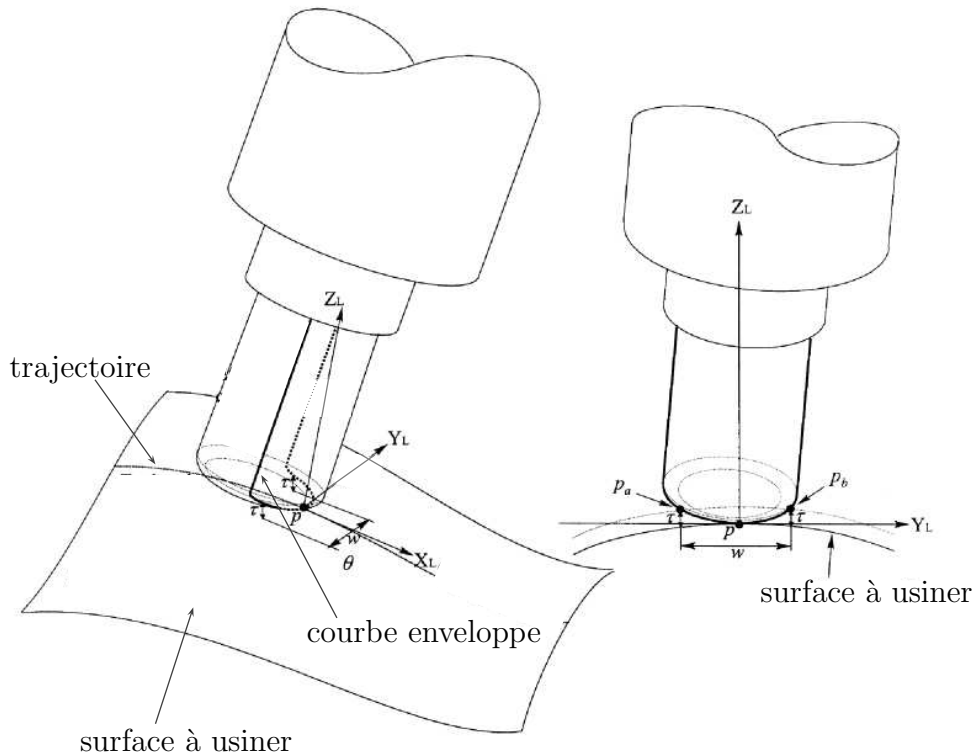


Figure 1.25 – Évaluation du chemin de coupe [CL02]

et la surface offset de $\mathbf{S}(u, v)$ (distance offset : τ) fournit les points $\mathbf{p}_a$ et $\mathbf{p}_b$ qui caractérisent la largeur du chemin de coupe w . En définissant le repère $(\mathbf{X}_L, \mathbf{Y}_L, \mathbf{Z}_L)$,

$\mathbf{X}_L$ étant l'axe instantané de direction d'avance, $\mathbf{Z}_L$ la normale à la surface au point de contact $\mathbf{CC}$ et $\mathbf{Y}_L$ le troisième vecteur défini par $\mathbf{Y}_L = \mathbf{Z}_L \wedge \mathbf{X}_L$, on peut exprimer w de la manière suivante :

$$w = |\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{Y}_L|$$

- « *Machining Potential Field* » (MPF) : Le chemin de coupe w va servir de base pour définir ce que l'on appelle le « Machining Potential Field » (MPF) ou « trajectoires d'usinage potentielles ». Le but est d'avoir une stratégie qui offre une largeur du chemin de coupe w maximale.

La largeur du chemin de coupe w est fonction de la direction d'avance θ de l'outil (figure 1.26). En utilisant le même outil en un point de contact outil/surface identique mais

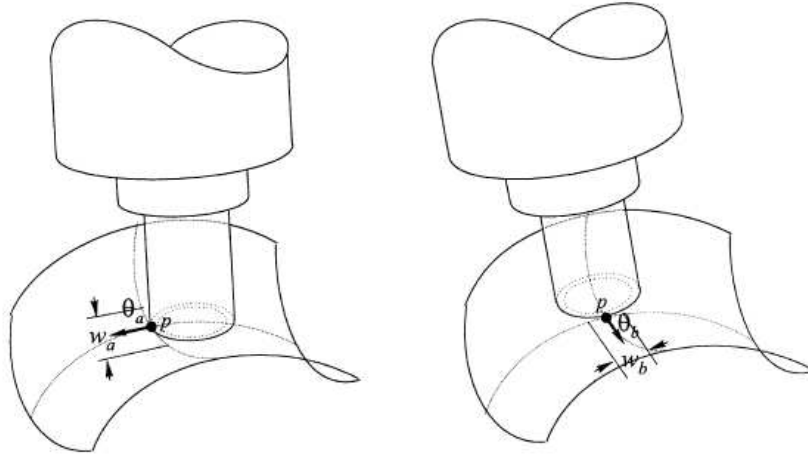


Figure 1.26 – Largeur du chemin de coupe w suivant la direction de coupe θ [CL02]

avec des directions d'avance différentes, on obtient des largeurs de chemin de coupe différentes ($w_a \neq w_b$) (figure 1.26). En reportant autour du point $\mathbf{CC}$, les valeurs w obtenues pour différentes direction θ , on fait apparaître les directions privilégiées d'usinage (figure 1.27). Pour chaque point de contact $\mathbf{CC}$, il existe une direction de coupe optimale $\mathbf{OD}$ qui offre une largeur du chemin de coupe maximale w_{max} (figure 1.27). La construction de la première trajectoire va s'appuyer sur cette notion de direction de coupe optimale $\mathbf{OD}$. Les différentes étapes du raisonnement sont les suivantes (figure 1.27) : choix d'un ensemble de points répartis uniformément sur la surface à usiner, puis calcul des directions optimales en chaque point.

- *Choix de la première trajectoire* : Comme le montre la figure 1.27, l'idée est de construire la trajectoire optimale en se basant sur les directions optimales ($\mathbf{OD}$). Plusieurs possibilités de trajectoires sont donc possibles, le choix de la solution optimale se

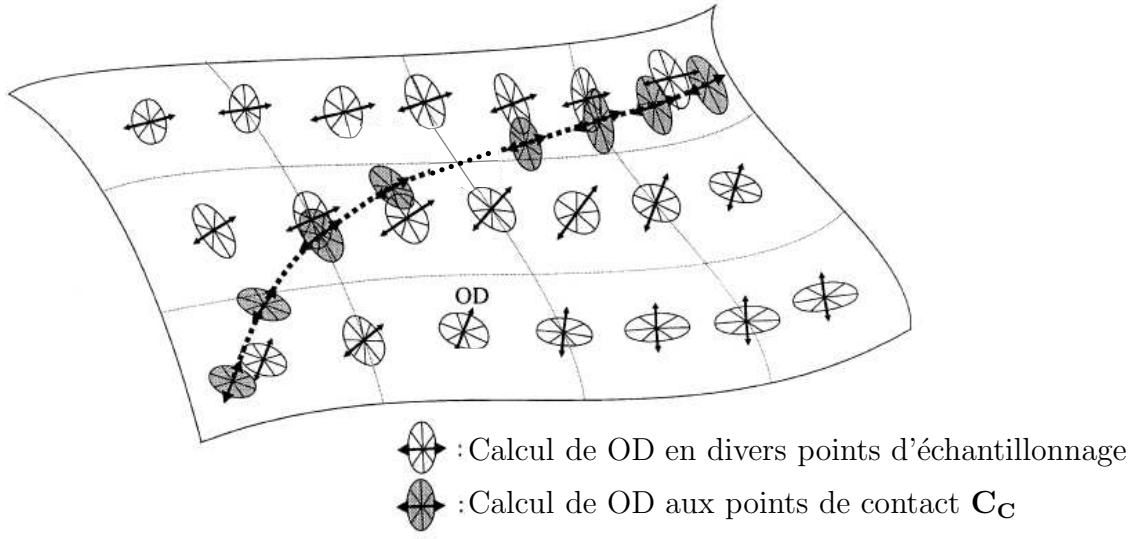


Figure 1.27 – Construction du champ d'usinage potentiel (MPF) [CL02]

base sur la mise en place de différents coefficients dont le but est de qualifier l'efficacité de la trajectoire choisie :

- a) largeur moyenne de la trajectoire w_{moy} : quotient de l'aire totale balayée par l'outil A_{bal} sur la longueur totale du chemin parcouru par l'outil L_{out} . Cette valeur doit être la plus grande possible

$$w_{moy} = \frac{A_{bal}}{L_{out}}$$

- b) efficacité de la trajectoire e_t : quotient de l'aire totale balayée par l'outil A_{bal} sur la somme des pas transversaux p_{tj} multipliés par la largeur du chemin de coupe maximale $w_{max,j}$ de la trajectoire j. e_t prend la valeur maximale 1 lorsque l'outil suit la direction optimale (**OD**) avec une largeur du chemin de coupe w_j maximale.

$$e_t = \frac{A_{bal}}{\sum_{j=1}^n p_{tj} \cdot w_{max,j}}$$

Afin d'avoir une trajectoire optimale, on ne va retenir que les trajectoires où les deux coefficients w_{moy} et e_t sont maximaux. La solution à ce problème n'est pas toujours unique.

Planification de trajectoires à hauteur de crête constante en usinage en bout

2.1 Introduction

Les pièces de forme gauche sont devenues des pièces courantes de notre vie quotidienne. Ces formes harmonieuses répondent à des exigences de style ou fonctionnelles et demandent un niveau de qualité de plus en plus important. Les moules, les matrices sont des exemples de pièces qui sont essentiellement composées de surfaces gauches. Elles requièrent de bons états de surface et elles ont des tolérances de forme très faibles.

L'usinage des moules ou matrices est un procédé long et onéreux. Si l'on considère le temps nécessaire aux opérations de finition et de polissage des surfaces gauches, on observe qu'ils peuvent représenter une part importante du temps d'usinage total. Un des objectifs de la génération automatique de trajectoires est l'obtention d'une planification qui tendra à minimiser les opérations de finition et de polissage sur l'ensemble de la surface tout en maintenant une productivité élevée.

Jusqu'à présent, les méthodes de génération automatique de trajectoires couramment utilisées sont l'usinage par surfaces guides, l'usinage par plans parallèles ou l'usinage par iso-paramétriques. Si l'on regarde le cas de l'usinage par plans parallèles, cette méthode présente l'avantage de générer des trajectoires qui ne se chevauchent pas, ce qui limite l'apparition de zones non usinées. Mais, cette stratégie n'est pas optimale en terme de trajectoires d'usinage et de hauteur de crête. Par exemple, si l'on usine une pièce à fortes variations de la normale, on observe un resserrement des passes successives dû au respect de la hauteur de crête maximale. La perte de temps et donc de productivité provient d'une mauvaise maîtrise de la hauteur de crête le long des trajectoires : seule la hauteur de crête maximale engendrée

est connue. C'est en partant de cette constatation qu'est apparue la notion de « génération de trajectoires à hauteur de crête constante » ou « trajectoires isocrêtes ».

Dans ce chapitre nous allons présenter la planification de trajectoires à hauteur de crête constante pour un outil cylindrique à bout sphérique ou à bout torique en 3 axes. Puis nous aborderons des problématiques liées à la planification isocrête en 3 axes : le choix du positionnement de la surface à usiner, le choix de la première trajectoire de la planification.

2.2 Planification de trajectoires à hauteur de crête constante

2.2.1 Planification en 3 axes pour un outil cylindrique à bout sphérique

2.2.1.1 Présentation du problème

Dans ce paragraphe, nous présentons le principe et la mise en équation de la construction de trajectoires à hauteur de crête constante pour un outil à bout sphérique sur Machine Outil à Commande Numérique 3 axes.

Soit $S(u, v)$ la surface à usiner. On appelle $\mathcal{R}_s$ ($O; \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s$) le repère global dans lequel est exprimé la surface. On note $\mathbf{Axe}$ le vecteur directeur de l'axe de l'outil dans $\mathcal{R}_s$. L'outil est défini dans son repère local : $\mathcal{R}_t$ ($C_{Li,j}, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t = \mathbf{Axe}$). L'indice j correspond à la trajectoire sur laquelle l'outil est positionné, l'indice i indique la position de l'outil sur cette trajectoire.

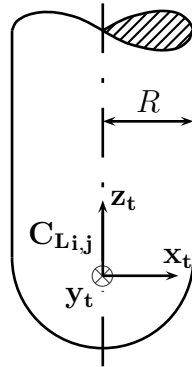


Figure 2.1 – Définition d'un outil à bout sphérique

Lorsque l'outil se déplace, il va engendrer une surface appelée « surface de balayage ». Il s'agit de la surface enveloppe de l'ensemble des positions successives de l'outil. Cette surface enveloppe est la réunion de l'ensemble des profils générateurs de l'outil obtenus pour chaque position qu'il occupe. C'est sur cette notion de « profil générateur », appelé « courbe

enveloppe » que s'appuie la construction de la planification isocrête. Le calcul de la position adjacente de l'outil se fait en deux étapes :

- *Détermination du point isocrête* : on cherche l'intersection entre la courbe enveloppe de l'outil et la surface offset d'amplitude h_c ou « surface isocrête » :

$$\mathbf{S}_h(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + h_c \mathbf{n}(u, v)$$

Ceci nous permet d'identifier les deux points du profil générateur de l'outil qui sont à une distance h_c de la surface à usiner. Ces points sont appelés points isocrêtes $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$.

- *Détermination de la position adjacente de l'outil* : à partir d'un point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, on cherche la position de l'outil adjacent qui respecte le critère de hauteur de crête constante.

2.2.1.2 Détermination du point isocrête

On effectue tout d'abord un changement de repère et on se place dans le repère $\mathcal{R}_1 = (\mathbf{C}_{L,i,j}, \mathbf{t}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{n}_1)$ défini comme suit :

- $\mathbf{n}_1$ est la normale à la surface au point de contact $\mathbf{C}_{C,i,j}$ entre l'outil et la surface,
- $\mathbf{t}_1$ est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{n}_1$ dont l'orientation est donnée par le déplacement de l'outil,
- $\mathbf{b}_1$ est la binormale à $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{t}_1$ définie par $\mathbf{b}_1 = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{t}_1$.

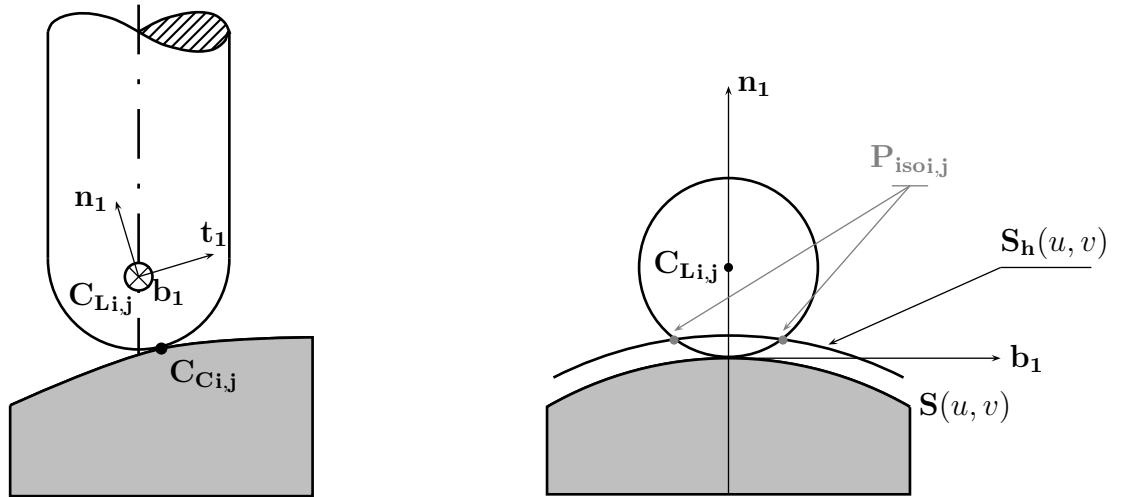


Figure 2.2 – Recherche du point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$

L'usinage s'effectue avec un outil à bout sphérique de rayon R , la courbe enveloppe de l'outil est le cercle de rayon R centré en $\mathbf{C}_{L,i,j}$ appartenant au plan $(\mathbf{b}_1, \mathbf{n}_1)$ (figure 2.2). Les

points isocrêtes $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ sont à l'intersection de la courbe enveloppe de l'outil et de la surface isocrête $\mathbf{S}_h(u, v)$, ils vérifient le système suivant :

$$\left(\begin{array}{l} 0 = X(u, v) + h_c \cdot n_X(u, v) \\ R \cdot \cos(\theta) = Y(u, v) + h_c \cdot n_Y(u, v) \\ R \cdot \sin(\theta) = Z(u, v) + h_c \cdot n_Z(u, v) \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{S}(u, v) = \left(\begin{array}{l} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}(u, v) = \left(\begin{array}{l} n_X(u, v) \\ n_Y(u, v) \\ n_Z(u, v) \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \quad \text{normale à } \mathbf{S}(u, v) \text{ en } (u, v) \quad (2.2)$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 3 inconnues θ, u, v . Après résolution nous obtenons les solutions θ_1, u_1, v_1 définissant un point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j} = \mathbf{S}_h(u_1, v_1)$.

2.2.1.3 Détermination de la position adjacente de l'outil

Après avoir déterminé $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, nous cherchons la position adjacente de l'outil caractérisée par le point $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$. Nous cherchons à définir à partir d'une trajectoire initiale, la trajectoire adjacente telle que la courbe d'intersection entre les deux surfaces balayées par les outils appartiennent à la surface isocrête.

2.2.1.3.1 Considérations générales

1^{ère} propriété : « La tangente à la courbe intersection de deux surfaces appartient à l'intersection des deux plans tangents ».

Soient $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{P}_{t+1}$ deux points appartenant à la courbe intersection de deux surfaces $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ (figure 2.3). Les points $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{P}_{t+1}$ appartiennent à la surface $\mathbf{S}_1$, lorsque $\mathbf{P}_{t+1}$ tend vers $\mathbf{P}_t$ alors $\mathbf{P}_{t+1}$ tend à être sur le plan tangent à la surface $\mathbf{S}_1$ en $\mathbf{P}_t$. De la même manière, on peut écrire que les points $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{P}_{t+1}$ appartiennent à la surface $\mathbf{S}_2$, lorsque $\mathbf{P}_{t+1}$ tend vers $\mathbf{P}_t$ alors $\mathbf{P}_{t+1}$ tend à être sur le plan tangent à la surface $\mathbf{S}_2$ en $\mathbf{P}_t$.

Lorsque le point $\mathbf{P}_{t+1}$ tend vers le point $\mathbf{P}_t$, le vecteur $\mathbf{P}_t\mathbf{P}_{t+1}$ caractérise la tangente à la courbe en $\mathbf{P}_t$. Celle-ci est donc définie par l'intersection des plans tangents à $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ en $\mathbf{P}_t$. Elle est donc donnée par le produit vectoriel des deux normales aux surfaces $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ en $\mathbf{P}_t$. En appelant $\mathbf{t}$ la tangente à la courbe intersection au point $\mathbf{P}_t$, $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$ les normales respectives aux surfaces $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ au point $\mathbf{P}_t$, on peut écrire :

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2$$

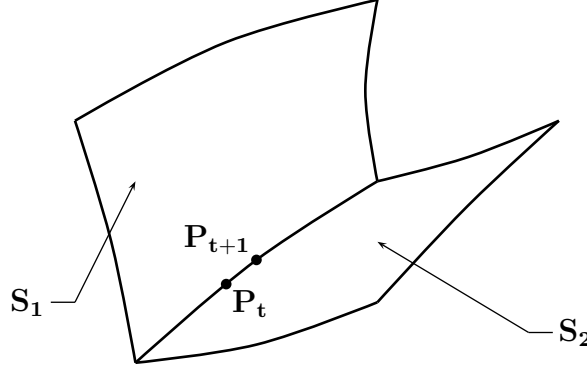


Figure 2.3 – Intersection de deux surfaces

2^{ème} propriété : « La normale à l'outil en un point d'une courbe enveloppe de l'outil est égale à la normale de la surface enveloppe générée par l'outil en ce point ».

La surface enveloppe est définie par un ensemble de courbes enveloppes caractérisées par la relation :

$$\mathbf{n}_M \cdot \mathbf{V}_M = 0$$

avec : $\mathbf{n}_M$ la normale à la surface de l'outil au point M et $\mathbf{V}_M$ la vitesse du point M .

Si M est un point générateur, alors $\mathbf{V}_M$ correspond à une tangente à la surface enveloppe et appartient donc au plan tangent de la surface enveloppe au point M . On en déduit que la normale à la surface enveloppe en un point M est égale à la normale à l'outil $\mathbf{n}_M$ vérifiant la relation précédente. A partir de ces considérations, en prenant en compte la 1^{ère} propriété évoquée précédemment et en considérant que :

- S_1 correspond à la surface enveloppe de la trajectoire initiale,
- S_2 correspond à la surface isocrête.

Nous en déduisons que la tangente à la courbe isocrête $\mathbf{t}_h$ au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ est donnée par :

$$\mathbf{t}_h = \mathbf{n}_h \wedge \mathbf{C}_{L_{i,j}} \mathbf{P}_{\text{isoi},j}$$

avec $\mathbf{n}_h$ la normale à la surface isocrête $\mathbf{S}_h(u, v)$ et $\mathbf{C}_{L_{i,j}} \mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ la normale à l'outil au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$.

2.2.1.3.2 Détermination de $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$

En reprenant les deux propriétés précédentes, nous pouvons écrire que la tangente à la courbe isocrête $\mathbf{t}_h$ au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ est obtenue par le produit vectoriel entre la normale à la surface isocrête $\mathbf{S}_h(u, v)$ au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ et la normale à l'outil de la position adjacente notée $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$. Cela se traduit par le fait que $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ appartient au plan Π_h défini par la normale

$\mathbf{t}_h$. De plus pour un outil sphérique, $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ est à une distance R de $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$. Il est donc sur un cercle de rayon R , de centre $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ contenu dans le plan Π_h .

$\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ est également un point centre-outil appartenant à la surface centre-outil définie par :

$$\mathbf{S}_R(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + R \cdot \mathbf{n}(u, v)$$

La résolution de $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ se fait de la manière suivante : soit le repère $\mathcal{R}_2 = (\mathbf{P}_{\text{isoi},j}, \mathbf{t}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}_2)$ défini comme suit :

- $\mathbf{n}_2$ est la normale à la surface isocrête au point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$: $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_h = \mathbf{n}(u_1, v_1)$
- $\mathbf{t}_2$ est la tangente à la courbe isocrête au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$: $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_h = \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{C}_{L_{i,j}} \mathbf{P}_{\text{isoi},j}$
- $\mathbf{b}_2$ est la binormale à $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{t}_2$ définie par : $\mathbf{b}_2 = \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{t}_2$

La position du point centre-outil adjacent $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ vérifie donc le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 = X(u, v) + R \cdot n_X(u, v) \\ R \cdot \cos(\theta) = Y(u, v) + R \cdot n_Y(u, v) \\ R \cdot \sin(\theta) = Z(u, v) + R \cdot n_Z(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \text{ et } \mathbf{n}(u, v) = \begin{pmatrix} n_X(u, v) \\ n_Y(u, v) \\ n_Z(u, v) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \text{ normale à } \mathbf{S}(u, v) \text{ en } (u, v) \quad (2.4)$$

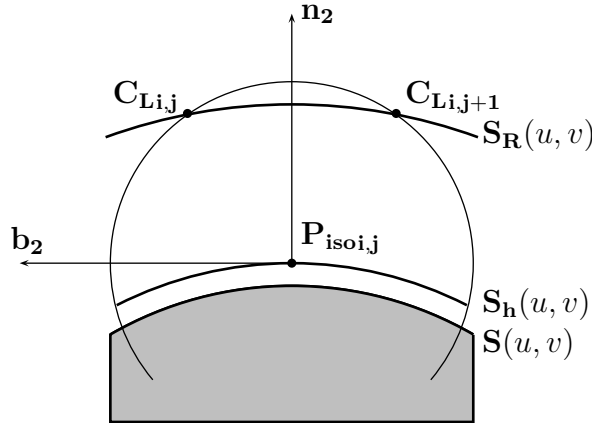


Figure 2.4 – Recherche du point $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$

2.2.1.4 Algorithmes de calcul

Les procédures développées dans les paragraphes précédents nous permettent de définir les principes d'une *stratégie de planification à hauteur de crête constante* adaptée à tout

type de surface pourvu qu'elle ne présente aucun problème d'accessibilité pour l'outil. La procédure générale d'usinage en bout des surfaces gauches que nous proposons est résumée dans l'algorithme représenté figure 2.5. Cet algorithme constitue une méthodologie globale d'usinage en bout des surfaces gauches, chaque fonction appelée, par exemple *Calcul de la trajectoire suivante*, implique l'existence d'un ou plusieurs algorithmes indépendants. Nous allons découvrir à travers plusieurs algorithmes comment s'organise la génération automatique des trajectoires d'outil.

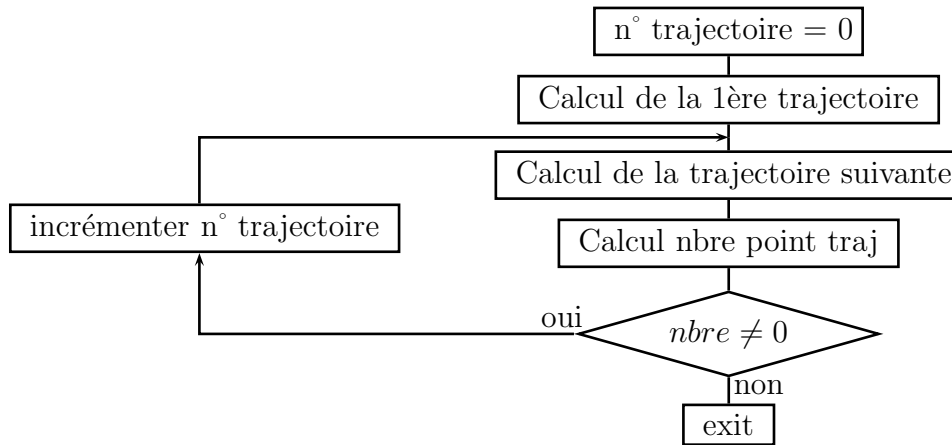


Figure 2.5 – Structure principale du code

2.2.1.4.1 Fonction « *Calcul de la première trajectoire* »

Cette fonction permet d'évaluer les points de la première trajectoire de la planification. Le choix de cette première trajectoire est crucial étant donné que le comportement général de la planification dépend pour une grande partie de la première trajectoire. Notons que la justification du choix de la première trajectoire sera traitée ultérieurement. Pour l'algorithme de la figure 2.6, nous supposons une seule surface définie sur le domaine paramétrique suivant : $(u, v) \in [0, 1]^2$

Plusieurs modes de calcul des points ont été prévus lors du développement. Tout d'abord la possibilité d'utiliser une isoparamétrique comme support pour la première trajectoire. Ce choix a été proposé dans de nombreux articles, mais ne représente pas pour autant la meilleure solution. Aussi, une procédure d'importation d'une première trajectoire a été intégrée.

2.2.1.4.2 Fonction « *Calcul de la trajectoire suivante* »

L'algorithme de calcul de la trajectoire suivante est résumé dans la figure 2.7. Le raisonnement mené pour un outil à bout sphérique reste relativement simple et il n'est pas nécessaire de le détailler plus que dans l'algorithme.

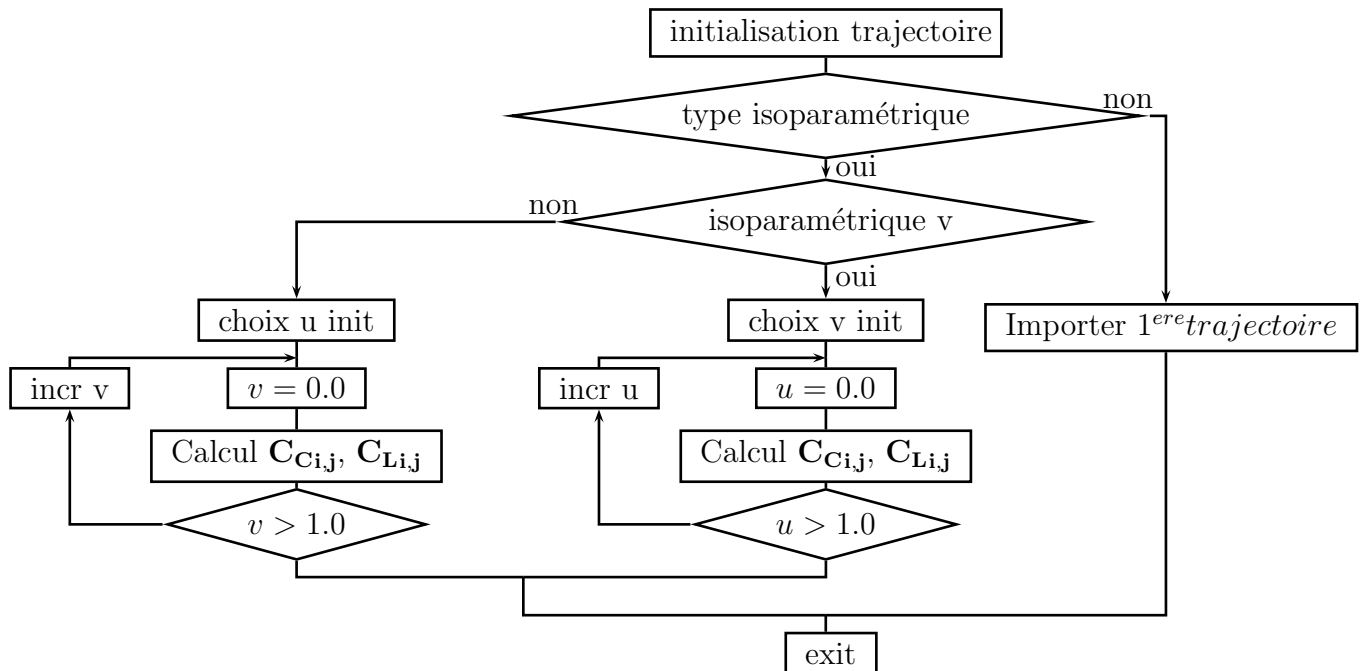


Figure 2.6 – Calcul de la première trajectoire

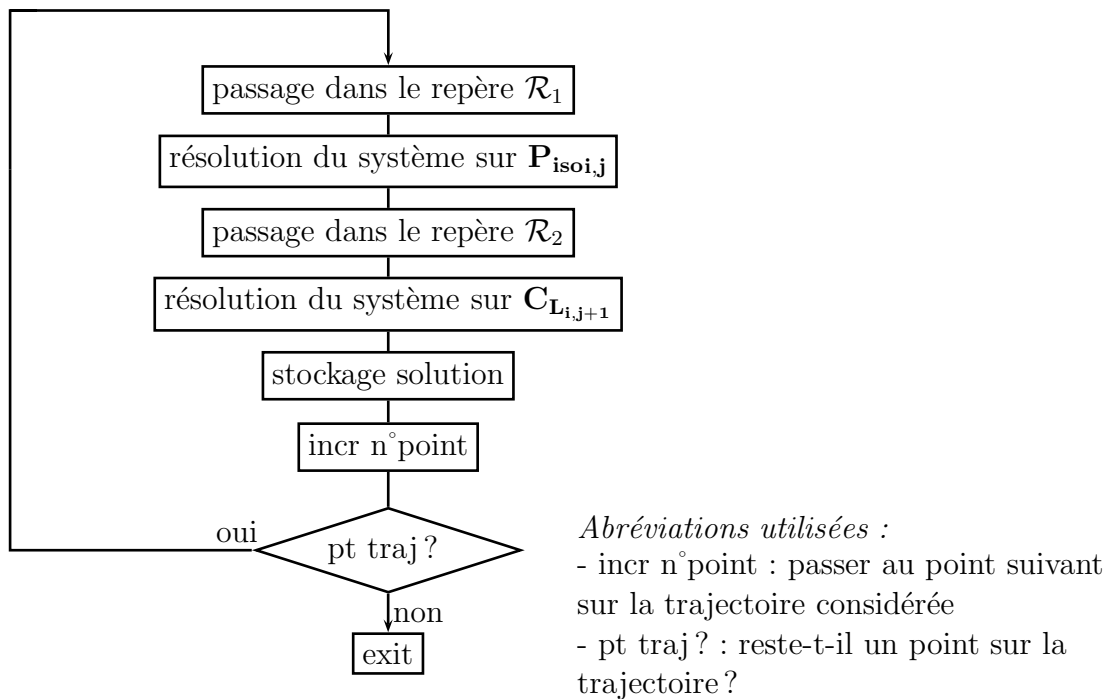


Figure 2.7 – Calcul de la trajectoire suivante

2.2.2 Planification en 3 axes pour un outil cylindrique à bout torique

2.2.2.1 Présentation du problème

Dans ce paragraphe, nous présentons le principe et la mise en équation de la construction de trajectoires à hauteur de crête constante pour un outil à bout torique sur Machine Outil à Commande Numérique 3 axes.

Soit $S(u, v)$ la surface à usiner. On appelle $\mathcal{R}_s$ ($O; \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s$) le repère global dans lequel est exprimé la surface. On note $\mathbf{Axe}$ le vecteur directeur de l'axe de l'outil dans $\mathcal{R}_s$. L'outil est défini dans son repère local : $\mathcal{R}_t$ ($C_{Li,j}; \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t = \mathbf{Axe}$).

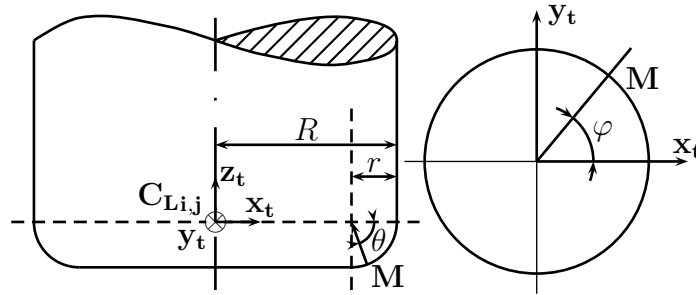


Figure 2.8 – Définition des paramètres de positionnement de l'outil à bout torique

Afin de pouvoir effectuer les calculs relatifs à une planification isocrête, nous faisons l'hypothèse suivante : « Étant donné le ratio qui existe entre le rayon de tore r de l'outil et la valeur de la hauteur de crête h_c , on admet que les intersections d'outils entre deux trajectoires adjacentes se font uniquement sur la partie torique ».

Lorsque l'outil se déplace, il va engendrer une surface appelée « surface de balayage ». Il s'agit de la surface enveloppe de l'ensemble des positions successives de l'outil. La surface de balayage est donc la réunion de l'ensemble des profils générateurs de l'outil obtenus pour chaque position. C'est sur cette notion de « profil générateur », appelé « courbe enveloppe », que s'appuie la construction de la planification isocrête (figure 2.9).

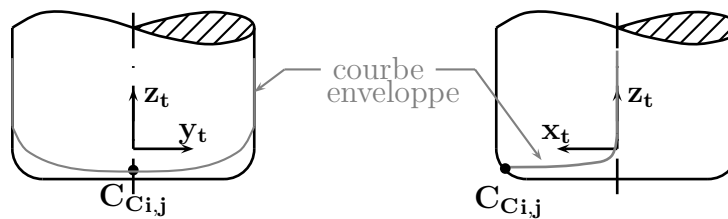


Figure 2.9 – Exemple d'une courbe enveloppe pour un outil torique

La position adjacente de l'outil se calcule en deux étapes :

- Détermination du point isocrête : on va chercher l'intersection entre la courbe enveloppe et la surface offset d'amplitude h_c ou « surface isocrête » pour une position donnée de l'outil. Ceci va nous permettre d'identifier les deux points du profil générateur qui sont à une distance h_c de la surface à usiner. On parle de points isocrêtes $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$.
- Détermination de la position adjacente de l'outil : à partir du point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, on va chercher la position de l'outil adjacent qui respectera le critère de hauteur de crête constante.

2.2.2.2 Détermination du point isocrête

Pour pouvoir connaître le point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, il faut au préalable calculer la courbe enveloppe à laquelle il appartient. On appelle $\mathbf{n}_{\text{ti},j}(\theta, \varphi)$ la normale à l'outil et $\mathbf{V}$ la vitesse d'avance de l'outil, l'ensemble des points appartenant au profil générateur de l'outil est défini par l'équation :

$$\mathbf{n}_{\text{ti},j}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.5)$$

L'outil est défini dans $\mathcal{R}_t$ par :

$$\mathbf{T}_{i,j}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R - r(1 - \cos \theta)) \cos \varphi \\ (R - r(1 - \cos \theta)) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad \text{et} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (2.6)$$

On en déduit l'expression de la normale au tore dans $\mathcal{R}_t$:

$$\mathbf{n}_{\text{ti},j}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

D'autre part, la vitesse d'avance de l'outil dans $\mathcal{R}_t$ est définie par :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

D'où l'expression de la condition d'appartenance d'un point au profil générateur de l'outil :

$$\cos \varphi \cos \theta + a \sin \theta = 0 \quad (2.9)$$

En reportant cette expression dans l'équation (2.6), nous obtenons les équations paramétriques de la courbe enveloppe $\mathbf{T}_{\text{ei},j}(\varphi)$ dans le repère $\mathcal{R}_t$. Le point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ étant à l'intersection de la courbe enveloppe et de la surface isocrête $\mathbf{S}_h(u, v)$ exprimée dans le même repère

outil $\mathcal{R}_t$, il vérifie le système suivant :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{ei},\mathbf{j}}(\varphi) = \mathbf{S}_{\mathbf{h}}(u, v) \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}_{\mathbf{h}}(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + h \cdot \mathbf{n}(u, v) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_t} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}(u, v) = \begin{pmatrix} n_X(u, v) \\ n_Y(u, v) \\ n_Z(u, v) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_t} \quad \text{la normale à } \mathbf{S}(u, v). \quad (2.11)$$

Il faut maintenant distinguer différents cas de figure pour pouvoir résoudre la système sur $\mathbf{P}_{\mathbf{iso},\mathbf{j}}$. Le raisonnement à mener est basé sur la valeur du paramètre a du vecteur avance :

- **1^{er} cas** : l'outil est en montée, a est positif, l'angle φ est défini sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, l'angle θ est défini sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

L'équation 2.9 nous permet alors d'écrire :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \quad (2.12)$$

Le système 2.10 s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \left(R - r \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \cos \varphi = X(u, v) + h_c \cdot n_X(u, v) \\ \left(R - r \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \sin \varphi = Y(u, v) + h_c \cdot n_Y(u, v) \\ -r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} = Z(u, v) + h_c \cdot n_Z(u, v) \end{pmatrix} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.13)$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 3 inconnues φ, u, v . La résolution nous donne les solutions φ_1, u_1, v_1 dont on peut déduire θ_1 à partir des équations 2.12.

- **2^{ieme} cas** : l'outil est en descente, a est négatif, l'angle φ est défini sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, l'angle θ est défini sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

L'équation 2.9 nous permet alors d'écrire :

$$\cos \theta = -\frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \quad (2.14)$$

Le système 2.10 s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \left(R - r \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \cos \varphi = X(u, v) + h_c \cdot n_X(u, v) \\ \left(R - r \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \sin \varphi = Y(u, v) + h_c \cdot n_Y(u, v) \\ r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} = Z(u, v) + h_c \cdot n_Z(u, v) \end{pmatrix} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (2.15)$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 3 inconnues φ , u , v . La résolution fournit les solutions φ_1 , u_1 , v_1 dont on peut déduire θ_1 à partir des équations 2.14.

- **3^{ieme} cas** : l'outil est dans une zone où il se déplace horizontalement, a est nul, l'angle θ est toujours défini sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$. Quant à l'angle φ , le raisonnement est légèrement différent : a étant nul, l'équation 2.9 nous permet en théorie d'écrire que la courbe enveloppe se résume à $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui nous simplifie considérablement le système 2.10 qui s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 = X(u, v) + h_c \cdot n_X(u, v) \\ \pm (R - r(1 - \cos \theta)) = Y(u, v) + h_c \cdot n_Y(u, v) \\ r \cdot \sin \theta = Z(u, v) + h_c \cdot n_Z(u, v) \end{pmatrix} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad (2.16)$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 3 inconnues θ , u , v . Néanmoins, cette mise en équation n'a pas été utilisée. En effet, le cas « a égal à zéro » est un cas quasi inexistant à moins d'usiner un plan horizontal. La valeur de a , tout en étant très proche de zéro, n'est jamais totalement nulle. Ce qui signifie que l'équation $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ n'est pas une équation exacte mais une équation approximée. La solution fournie par le système n'est donc qu'une solution approchée, ce qui ne peut évidemment pas suffire. La solution à ce problème est simple, il suffit de résoudre directement en u , v , φ , θ :

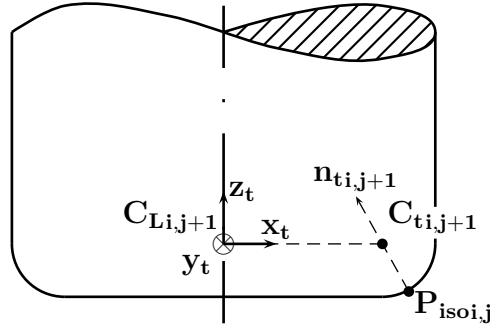
$$\begin{pmatrix} (R - r(1 - \cos \theta)) \cos \varphi = X(u, v) + h_c \cdot n_X(u, v) \\ (R - r(1 - \cos \theta)) \sin \varphi = Y(u, v) + h_c \cdot n_Y(u, v) \\ r \sin \theta = Z(u, v) + h_c \cdot n_Z(u, v) \\ \cos \varphi \cos \theta + a \sin \theta = 0 \end{pmatrix} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] ; \varphi \simeq \pm\frac{\pi}{2} \quad (2.17)$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues u , v , φ , θ . La résolution nous donne les solutions u_1 , v_1 , φ_1 , θ_1 .

2.2.2.3 Détermination de la position adjacente de l'outil

Après avoir déterminé $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, nous cherchons la position du point adjacent $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$. Par définition d'un outil torique, les points $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, $\mathbf{C}_{\text{ti},j+1}$ (point centre-tore) et $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ appartiennent à un plan passant par l'axe de l'outil (figure 2.10). Ils sont reliés géométriquement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{isoi},j} \mathbf{C}_{\text{ti},j+1} &= r \cdot \mathbf{n}_{\text{ti},j+1} \\ \mathbf{C}_{\text{ti},j+1} \mathbf{C}_{\text{Li},j+1} &= (R - r) \frac{\mathbf{Axe} \wedge (\mathbf{n}_{\text{ti},j+1} \wedge \mathbf{Axe})}{\|\mathbf{Axe} \wedge (\mathbf{n}_{\text{ti},j+1} \wedge \mathbf{Axe})\|} \end{aligned}$$


 Figure 2.10 – Définition des points $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$, $\mathbf{C}_{\text{ti},j+1}$ et $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$

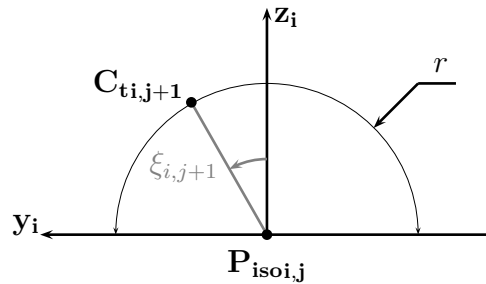
avec : $\mathbf{n}_{\text{ti},j+1}$ la normale à l'outil adjacent au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ commun aux deux outils.

La recherche de $\mathbf{n}_{\text{ti},j+1}$ se fait dans le repère $\mathcal{R}_i$ ($\mathbf{P}_{\text{isoi},j}; \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$) défini comme suit :

- $\mathbf{x}_i$ est la tangente à la courbe isocrête au point $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$: $\mathbf{x}_i = (\mathbf{n}_{\text{ti},j} \wedge \mathbf{n}(u_1, v_1))$
- $\mathbf{z}_i$ est le vecteur perpendiculaire à $\mathbf{x}_i$ contenu dans le plan $(\mathbf{x}_i, \mathbf{Axe})$ et orienté suivant le vecteur $\mathbf{Axe}$: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{Axe}) \wedge \mathbf{x}_i$
- $\mathbf{y}_i$ complète le repère de la manière suivante : $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{x}_i$

Nous avons démontré dans le paragraphe « Considérations générales » que la normale à l'outil $\mathbf{n}_{\text{ti},j+1}$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe isocrête. Nous pouvons donc écrire que (figure 2.11) :

$$\mathbf{P}_{\text{isoi},j} \mathbf{C}_{\text{ti},j+1} = r \cdot \mathbf{n}_{\text{ti},j+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \xi_{i,j+1} \\ r \cos \xi_{i,j+1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i} \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.18)$$


 Figure 2.11 – Définition de l'angle $\xi_{i,j+1}$

D'autre part, l'outil étant positionné tangent à la surface $\mathbf{S}(u, v)$, le point $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ appartient à la surface centre-outil $\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v)$ définie par :

$$\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + r \cdot \mathbf{n}(u, v) + (R - r) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}}(u, v)$$

$\mathbf{n}_p(u, v)$ correspond à la normale $\mathbf{n}(u, v)$ projetée sur le plan ayant pour normale l'axe de l'outil.

Le point centre-outil $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$ est obtenu par la résolution du système de 3 équations à 3 inconnues ξ, u, v suivant :

$$r \cdot \mathbf{n}_{t_{i,j+1}}(\xi) + (R - r) \frac{\mathbf{Axe} \wedge (\mathbf{n}_{t_{i,j+1}}(\xi) \wedge \mathbf{Axe})}{\|\mathbf{Axe} \wedge (\mathbf{n}_{t_{i,j+1}}(\xi) \wedge \mathbf{Axe})\|} = \mathbf{S}(u, v) + r \cdot \mathbf{n}(u, v) + (R - r) \cdot \mathbf{n}_p(u, v) \quad (2.19)$$

La résolution de ce système nous donne la valeur des paramètres u_2, v_2 et ξ_2 qui caractérisent le point $\mathbf{C}_{L_{i,j+1}}$.

2.2.2.4 Algorithmes de calcul

Les procédures développées dans les paragraphes précédents nous permettent de définir les principes d'une *stratégie de planification à hauteur de crête constante* adaptée à tout type de surface pourvu qu'elle ne présente aucun problème d'accessibilité pour l'outil. La procédure générale d'usinage en bout des surfaces gauches pour un outil à bout torique est identique à celle présentée pour un outil à bout sphérique (figure 2.5). Cet algorithme constitue une méthodologie globale d'usinage en bout des surfaces gauches, chaque fonction appelée, par exemple *Calcul de la trajectoire suivante*, implique l'existence d'un ou plusieurs algorithmes indépendants. La différence entre la planification de trajectoires pour un outil sphérique et pour un outil torique s'opère sur ces algorithmes.

Nous allons découvrir à travers plusieurs algorithmes comment s'organise la génération automatique des trajectoires pour un outil à bout torique.

2.2.2.4.1 Fonction « *Calcul de la première trajectoire* »

Cette fonction permet d'évaluer l'ensemble des points de la première trajectoire de la planification. L'algorithme de calcul de la première trajectoire est identique à celui présenté pour un outil sphérique (figure 2.6), il n'est donc pas redétaillé ici.

2.2.2.4.2 Fonction « *Calcul de la trajectoire suivante* »

L'algorithme de calcul de la trajectoire suivante est complexe et fait appel à de nombreuses fonctions de calcul (figure 2.12). Nous allons détailler au fur et à mesure chacune d'entre elles en expliquant les choix effectués.

2.2.2.4.2.1 Calcul de l'avance de l'outil

Le calcul de l'avance peut être différent suivant la trajectoire sur laquelle on se situe.

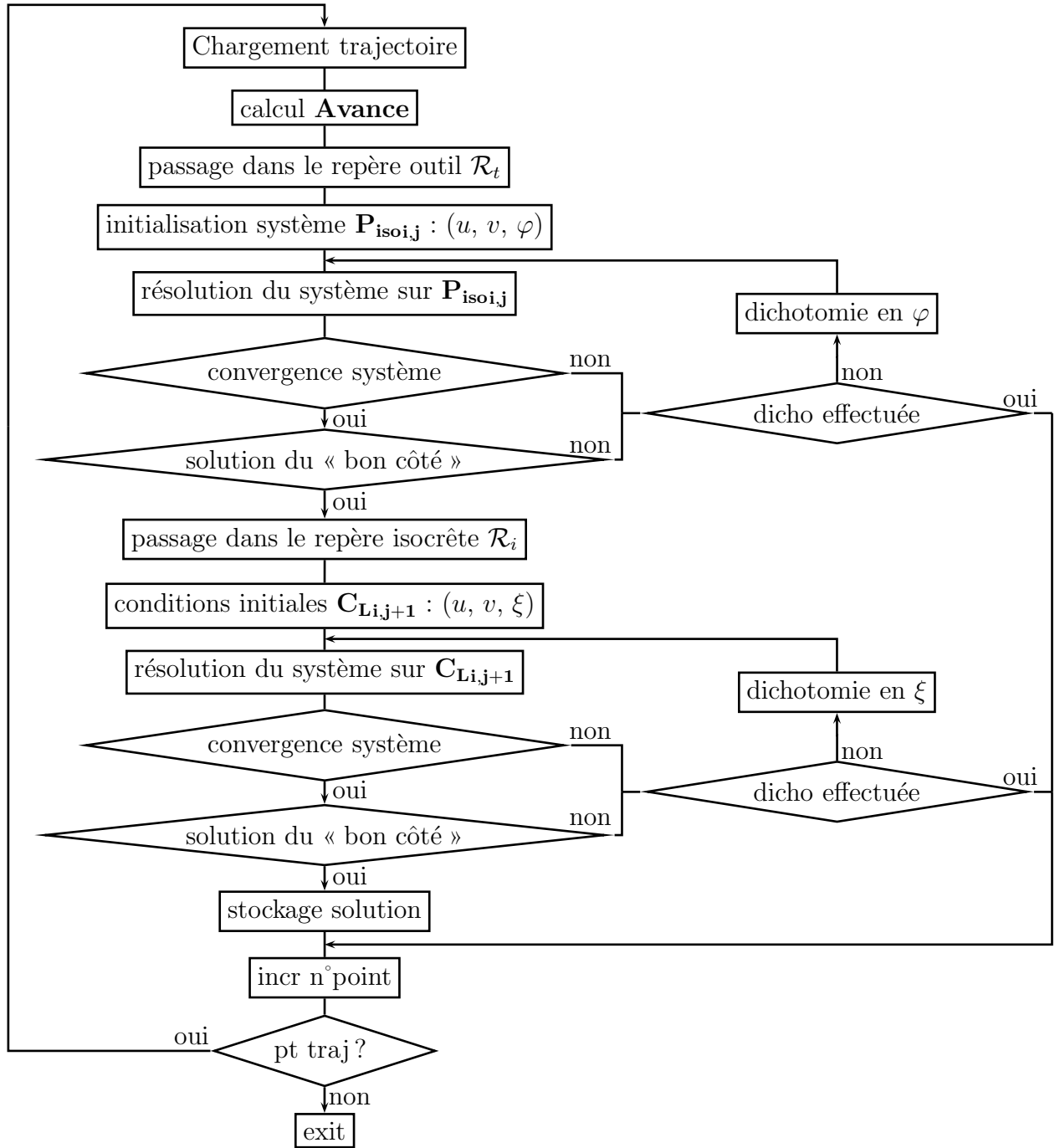


Figure 2.12 – Calcul de la trajectoire suivante

◦ 1^{er} cas : *Calcul de l'avance sur la première trajectoire*

La direction du vecteur avance de l'outil i sur la trajectoire 0, noté $\mathbf{V}_{\text{dir}}$, est connue grâce à la trajectoire initiale en considérant deux positions successives des points centre-outil $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i,0}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i+1,0}}$, ou $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i-1,0}}$ suivant la position sur la trajectoire (gestion des positions de débuts et fins de trajectoire) :

$$\mathbf{V}_{\text{dir}} = \mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i,0}} \mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i+1,0}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{V}_{\text{dir}} = \mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i-1,0}} \mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i,0}}$$

La direction de l'avance de l'outil est ainsi connue et le vecteur $\mathbf{V}_{\text{dir}}$ va servir de support à la construction du repère de l'outil $\mathcal{R}_t$. Le vecteur $\mathbf{V}_{\text{dir}}$ nous donne la direction du vecteur avance mais il ne peut être utilisé directement car :

- l'incrément longitudinal choisi sur la trajectoire initiale (distance séparant les points $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_{i,0}}$) influe sur le vecteur $\mathbf{V}_{\text{dir}}$,
- s'il y a une inversion de pente entre la position i et la position $i + 1$ (l'outil est en montée puis en descente ou inversement), le vecteur $\mathbf{V}_{\text{dir}}$ calculé est incohérent avec le mouvement à donner à l'outil.

Pour calculer le vecteur avance réel, la propriété utilisée est la suivante :

« quelle que soit la trajectoire j et la position outil i considérée, le point de contact outil/matière est un point générateur, il appartient donc à la courbe enveloppe ».

Cette propriété du point de contact va nous permettre de calculer le vecteur avance réel de l'outil $\mathbf{V}$. En appelant $\mathbf{n}_{\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,0}}}$ la normale à la surface au point $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,0}}$, la condition pour que le point de contact $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,0}}$ appartienne à la courbe enveloppe est donnée par l'équation 2.20, cette équation est entièrement écrite dans le repère outil $\mathcal{R}_t$ basé sur le vecteur $\mathbf{V}_{\text{dir}}$.

$$\mathbf{n}_{\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,0}}} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}_{\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,0}}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

On en déduit alors la valeur du paramètre a qui permet de respecter la condition d'appartenance du point de contact outil/matière à la courbe enveloppe :

$$a = -\frac{n_x}{n_z} \quad (n_z \neq 0)$$

◦ 2nd cas : *Calcul de l'avance sur une trajectoire j (figure 2.13)*

La propriété utilisée pour évaluer le vecteur avance est la suivante : « quelle que soit la trajectoire j et la position outil i considérée, le point de contact outil/matière et le point isocrête sont des points générateurs, ils appartiennent donc tous les deux à la courbe enveloppe ».

Les points $\mathbf{P}_{\text{isoi},j-1}$ et $\mathbf{C}_{\text{Ci},j}$ appartenant à la courbe enveloppe, on peut écrire les deux relations suivantes :

$$\mathbf{n}_{\text{ti},j-1} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{\text{C}_{\text{Ci},j}} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.21)$$

avec $\mathbf{n}_{\text{C}_{\text{Ci},j}}$ et $\mathbf{n}_{\text{ti},j-1}$ les normales outil aux points de contact et isocrête respectivement.

On peut déduire de ces deux équations que le vecteur avance est perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{n}_{\text{C}_{\text{Ci},j}}$ et $\mathbf{n}_{\text{ti},j-1}$ simultanément. Il peut donc être calculé de la manière suivante :

$$\mathbf{V} = \mathbf{n}_{\text{ti},j-1} \wedge \mathbf{n}_{\text{C}_{\text{Ci},j}}$$

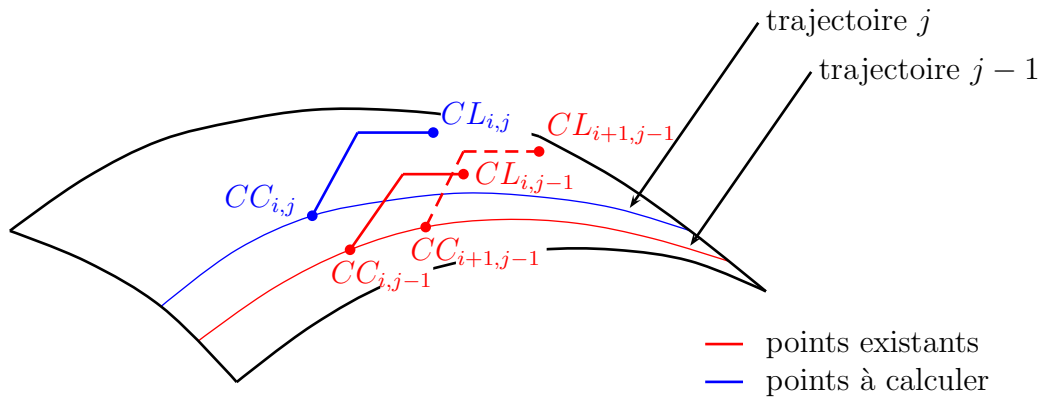


Figure 2.13 – Calcul de l'avance de l'outil

2.2.2.4.2.2 Initialisation du système sur $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$

On a vu précédemment que le point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ était évalué grâce à la résolution du système 2.10. Le système est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode de résolution est une méthode efficace et rapide dans la mesure où les solutions initiales fournies au système sont proches des solutions finales. Avec des valeurs initiales un peu trop éloignées de la solution, on est rapidement confronté à des temps de calculs importants et à des soucis de convergence du système. Le bon déroulement de la planification de trajectoires devient rapidement impossible alors que dans nombre de cas la solution existe et ne devrait pas poser de problème.

Pour évaluer les valeurs initiales des paramètres u , v , φ et θ on distingue plusieurs cas de figure suivant la situation de la position à calculer sur la trajectoire. L'idée retenue pour évaluer les valeurs initiales est la suivante : dans la mesure où le calcul de la position précédente de l'outil a abouti, on peut exploiter les valeurs trouvées pour initialiser le calcul de la position considérée. Dans le cas où la position précédente n'est pas exploitable, on fait

appel à une fonction d'évaluation des valeurs initiales. Les deux possibilités sont détaillées ci-après.

◦ 1^{er} cas : la position précédente de l'outil est exploitable

Pour le calcul de la valeur initiale de l'angle φ , en faisant l'hypothèse que les points $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i-1,j}}$ sont proches, on peut écrire que les angles $\varphi_{i-1,j}$ et $\varphi_{i,j}$ seront sensiblement les mêmes. Il faut néanmoins intégrer à la valeur $\varphi_{i,j}$ évaluée le changement de direction d'avance de l'outil, noté ΔV , qui a une influence non négligeable (figure 2.14). Les positions $(i-1, j)$ et (i, j) étant proches, la variation du vecteur avance restera minime et les courbes enveloppes des positions $(i-1, j)$ et (i, j) seront sensiblement les mêmes.

$$\varphi_{init} = \varphi_{i-1,j} + \Delta V$$

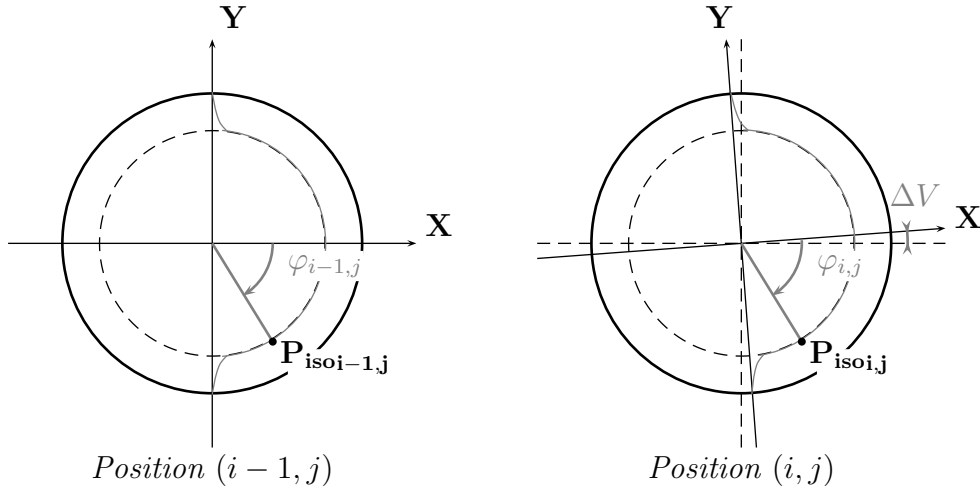


Figure 2.14 – Recherche de la valeur initiale en φ

Pour le calcul des valeurs initiales u_{1init} et v_{1init} , plusieurs situations sont à envisager :

- 1^{ere} situation : seule la position précédente $(i-1, j)$ a convergé, la position $(i-2, j)$ quant à elle a échoué. On peut alors évaluer les conditions initiales à partir de la position $(i-1, j)$. En appelant $\Delta u_{i-1,j}$ et $\Delta v_{i-1,j}$, les incréments en u et v qui ont permis de passer du point $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i-1,j}}$ au point $\mathbf{P}_{iso i-1,j}$, en faisant l'hypothèse que les points $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i-1,j}}$ sont proches, les incréments $\Delta u_{i-1,j}$ et $\Delta u_{i,j}$ d'une part, $\Delta v_{i-1,j}$ et $\Delta v_{i,j}$ d'autre part sont eux-aussi proches. On peut alors écrire :

$$u_{1init} = u_0 + \Delta u_{i-1,j} \quad \text{et} \quad v_{1init} = v_0 + \Delta v_{i-1,j}$$

(u_0, v_0) étant les valeurs paramétriques caractérisant le point $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$: $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}} = \mathbf{S}(u_0, v_0)$

- 2^{ieme} situation : les deux positions précédentes $(i-1, j)$ et $(i-2, j)$ ont convergé vers les solutions. On peut alors inclure dans le calcul de nos valeurs initiales la dérive qui existe sur les valeurs $\Delta u_{i,j}$ et $\Delta v_{i,j}$ (figure 2.15), la convergence du système n'en sera que plus rapide. On obtient les expressions suivantes :

$$u_{1init} = u_0 + \Delta u_{i-1,j} + derive_u = u_0 + \Delta u_{i-1,j} + (\Delta u_{i-1,j} - \Delta u_{i-2,j})$$

$$v_{1init} = v_0 + \Delta v_{i-1,j} + derive_v = v_0 + \Delta v_{i-1,j} + (\Delta v_{i-1,j} - \Delta v_{i-2,j})$$

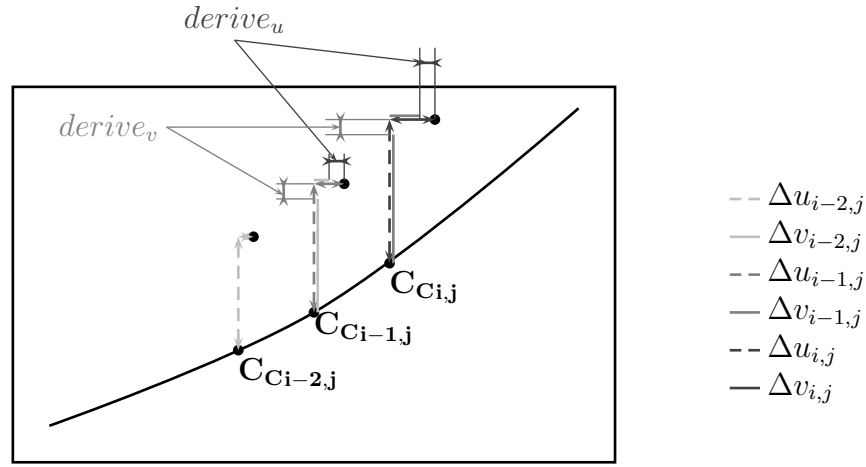


Figure 2.15 – Gestion du phénomène de dérive sur les paramètres u et v

- 2nd cas : la position précédente de l'outil n'est pas exploitable

On dit que la position précédente de l'outil n'est pas exploitable si elle vérifie une des conditions suivantes :

- la position à calculer est en début de trajectoire et il n'existe pas de position précédente,
- la position à calculer se situe à une position quelconque de la trajectoire, mais la position précédente n'a pas convergé,
- le signe du paramètre a (coordonnée de l'avance $\mathbf{V}$ suivant $\mathbf{Axe}$) change entre la position précédente et la position à calculer, on ne peut plus exploiter la position précédente car le domaine de définition de l'angle φ n'est plus le même (figure 2.16).

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée, on utilise une fonction d'évaluation pour trouver les valeurs initiales des paramètres u , v et φ .

Pour évaluer la valeur initiale de φ , il faut considérer les cas suivants :

- l'outil monte, le paramètre a du vecteur avance est strictement positif,
- l'outil descend, le paramètre a du vecteur avance est strictement négatif,
- l'outil se déplace avec un vecteur avance dont le paramètre a est « proche de zéro ».

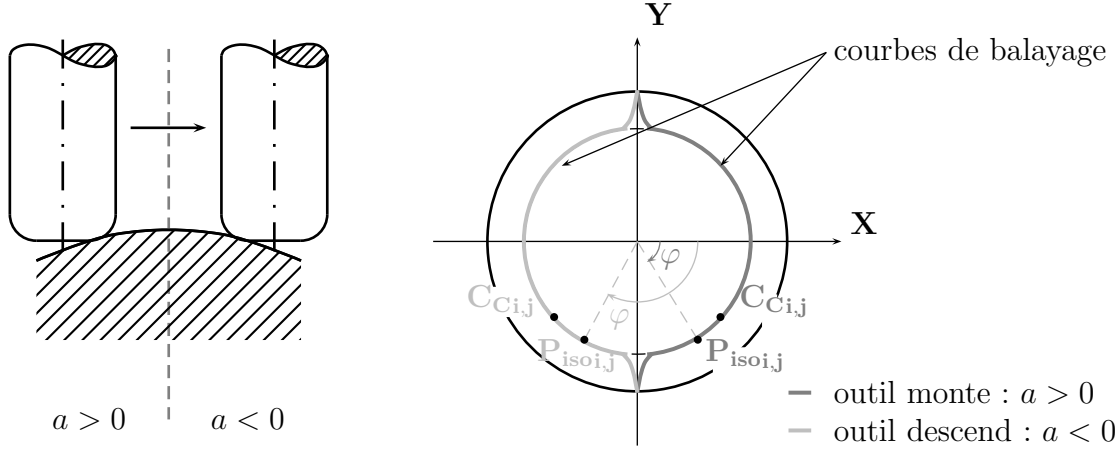


Figure 2.16 – Position relative des points $\mathbf{P}_{\text{iso},i,j}$ et $\mathbf{C}_{\text{Ci},j}$

Cas où a est positif :

Le raisonnement mené est alors le suivant : le point de contact outil/pièce et le point isocrête appartiennent tout les deux à la courbes enveloppe $\mathbf{C}_e(\varphi)$.

$$\mathbf{C}_e(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(R - r \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \cos \varphi \\ \left(R - r \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \sin \varphi \\ -r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \quad \text{et} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.22)$$

On peut donc écrire $\mathbf{C}_{\text{Ci},j} = \mathbf{C}_e(\varphi_0)$ et $\mathbf{P}_{\text{iso-init},i,j} = \mathbf{C}_e(\varphi_{\text{init}})$. φ_0 est une donnée connue puisque le point de contact est connu, par contre φ_{init} est l'inconnue qu'il va falloir évaluer. La normale unitaire à la surface au point de contact $\mathbf{C}_{\text{Ci},j}$, notée $\mathbf{n}_{\text{C}_{\text{Ci},j}}$, est colinéaire et de sens opposé à la normale outil au même point qui est notée $\mathbf{n}(\varphi_0)$ (équation 2.23).

$$\mathbf{n}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \\ \frac{a \sin \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \\ \frac{-\cos \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

En appelant h_c la hauteur de crête, la projection du vecteur $\mathbf{P}_{\text{iso-init},i,j} - \mathbf{C}_{\text{Ci},j}$ sur $\mathbf{n}(\varphi_0)$ est égale à la hauteur de crête, ce qui se traduit par la relation suivante :

$$[\mathbf{C}_e(\varphi_0) - \mathbf{C}_e(\varphi_{\text{init}})] \cdot \mathbf{n}(\varphi_0) = h_c$$

Il suffit alors de résoudre cette équation pour avoir une valeur initiale φ_{init} . Comme le montre la figure 2.17, l'équation a deux solutions φ_1 et φ_2 . On va donc, dans un premier temps

résoudre l'équation par dichotomie en fixant l'intervalle soit autour de φ_1 , soit autour de φ_2 . La solution obtenue par dichotomie servira ensuite de solution initiale pour résoudre la même équation par la méthode de Newton-Raphson. L'association des deux méthodes de résolution nous permet d'aboutir rapidement à une solution et nous affranchit des problèmes de convergence rencontrés lorsque la valeur initiale utilisée pour l'algorithme de Newton-Raphson est éloignée de la solution.

En effet, l'algorithme de Newton-Raphson est un algorithme très robuste et largement éprouvé, mais qui peut rapidement diverger lorsqu'il est confronté à des problèmes comprenant des variables angulaires.

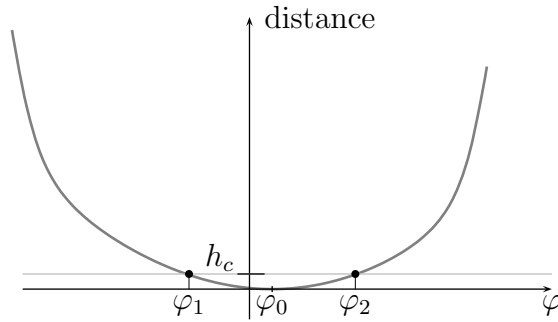


Figure 2.17 – Recherche de la valeur initiale φ_{init}

Cas où a est négatif :

Lorsque l'outil descend, le paramètre a du vecteur avance est négatif, les équations utilisées vont donc changer par rapport au cas précédent. Par contre le raisonnement reste le même. La différence de mise en équation se trouve au niveau des expressions de la normale $\mathbf{n}(\varphi_0)$ et de la courbe enveloppe $\mathbf{C}_e(\varphi)$.

$$\mathbf{C}_e(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(R - r \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \cos \varphi \\ \left(R - r \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \right) \right) \sin \varphi \\ r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a^2}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \quad \text{et} \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (2.24)$$

$$\mathbf{n}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{-a \cos \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \\ \frac{-a \sin \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \\ \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + a^2}} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Cas où a est proche de zéro :

L'outil usine dans une zone où son déplacement est quasiment horizontal (a proche de zéro). Cette fois-ci, la mise en équation va changer : le système à résoudre n'est plus seulement en (u, v, φ) , mais en (u, v, φ, θ) . Le paramètre a étant proche de zéro, on sait que l'angle φ est proche de $\frac{\pi}{2}$. En retenant cette valeur comme valeur initiale de l'angle φ , on peut approximer la courbe enveloppe par l'équation suivante :

$$\mathbf{C}_e(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp (R - r(1 - \cos \theta)) \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad (2.26)$$

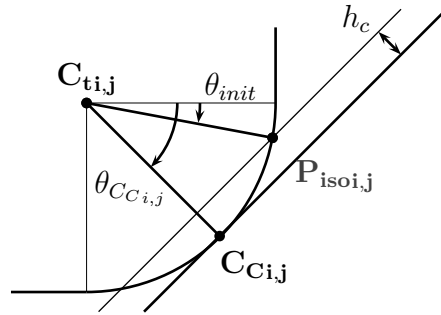


Figure 2.18 – Calcul de θ_{init} lorsque a est proche de zero

En appelant $\theta_{CCi,j}$, la valeur de l'angle θ correspondant au point de contact outil/matière $\mathbf{C}_{Ci,j}$, une valeur initiale θ_{init} proche de l'angle θ caractérisant le point $\mathbf{P}_{iso-initi,j}$ est donnée par (figure 2.18) :

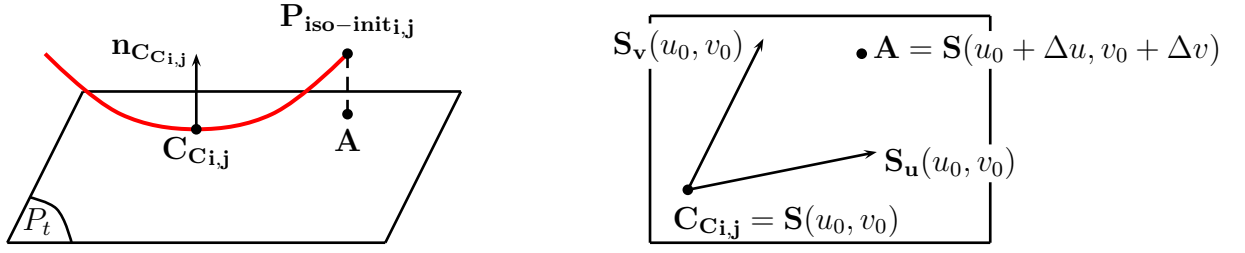
$$\theta_{init} = \theta_{CCi,j} \pm \arccos\left(\frac{r - h_c}{r}\right)$$

L'approximation faite sur l'angle φ est ici sans conséquence étant donné qu'il s'agit de trouver une valeur initiale proche de la solution et non la valeur exacte de celle-ci. L'étape suivante consiste à trouver les valeurs des paramètres u_{init} et v_{init} caractérisant le point isocrête, on connaîtra alors l'ensemble des solutions initiales à injecter dans le système.

Pour évaluer les valeurs initiales u_{init} et v_{init} des paramètres u et v , on va raisonner dans le plan P_t tangent à la surface au point de contact outil/matière $\mathbf{C}_{Ci,j}$ (figure 2.19). Le plan P_t est perpendiculaire à la normale à la surface au point $\mathbf{C}_{Ci,j} = \mathbf{S}(u_0, v_0)$, notée $\mathbf{n}_{C_{Ci,j}}$. En appelant $\mathbf{A}$ la projection du point $\mathbf{P}_{iso-initi,j} = \mathbf{T}_{i,j}(\varphi_{init}, \theta_{init})$ suivant la normale $\mathbf{n}_{C_{Ci,j}}$ dans le plan P_t (figure 2.19), on peut écrire la relation suivante :

$$\mathbf{C}_{Ci,j}\mathbf{A} = \mathbf{C}_{Ci,j}\mathbf{P}_{iso-initi,j} + (\mathbf{P}_{iso-initi,j}\mathbf{C}_{Ci,j} \cdot \mathbf{n}_{C_{Ci,j}}) \cdot \mathbf{n}_{C_{Ci,j}} \quad (2.27)$$

D'autre part, on considère les dérivées partielles de $\mathbf{S}(u, v)$ au point $\mathbf{C}_{Ci,j} = \mathbf{S}(u_0, v_0)$: $\mathbf{S}_u(u_0, v_0)$ et $\mathbf{S}_v(u_0, v_0)$; celles-ci sont contenues dans le plan tangent P_t (figure 2.19) et


 Figure 2.19 – Recherche de la valeur initiale pour les paramètres u et v

représentent respectivement les deux tangentes en $C_{Ci,j}$ aux courbes isoparamétriques $u = u_0$ et $v = v_0$. Le point A peut alors être exprimé à partir du point $C_{Ci,j}$ en considérant qu'on passe de l'un à l'autre grâce à un incrément Δu et un incrément Δv :

$$C_{Ci,j}A = \Delta u \cdot S_u(u_0, v_0) + \Delta v \cdot S_v(u_0, v_0) \quad (2.28)$$

En combinant les équations 2.27 et 2.28, on peut facilement exprimer les valeurs Δ_u et Δ_v nécessaires au calcul des valeurs initiales $u_{init} = u_0 + \Delta u$ et $v_{init} = v_0 + \Delta v$.

$$\Delta_u = \frac{(S_u(u_0, v_0) \cdot C_{Ci,j}A)(S_v(u_0, v_0) \cdot S_v(u_0, v_0)) - (S_v(u_0, v_0) \cdot C_{Ci,j}A)(S_u(u_0, v_0) \cdot S_v(u_0, v_0))}{\| S_u(u_0, v_0) \wedge S_v(u_0, v_0) \|^2}$$

$$\Delta_v = \frac{(S_v(u_0, v_0) \cdot C_{Ci,j}A)(S_u(u_0, v_0) \cdot S_u(u_0, v_0)) - (S_u(u_0, v_0) \cdot C_{Ci,j}A)(S_u(u_0, v_0) \cdot S_v(u_0, v_0))}{\| S_u(u_0, v_0) \wedge S_v(u_0, v_0) \|^2}$$

Ainsi, on vient de voir comment établir la fonction d'évaluation des valeurs initiales dans les cas cités précédemment.

A ce stade du raisonnement, il ne reste plus qu'à lancer la résolution du système sur $P_{iso,i,j}$.

2.2.2.4.2.3 Test sur le côté de la solution

Pour chaque position de l'outil il existe deux solutions pour lesquelles le système sur le point centre-outil est vérifié. Ces deux solutions sont exactes, seulement il y en a une qui nous permet de construire la trajectoire adjacente voulue et l'autre qui nous ramène sur la trajectoire précédente que l'on connaît déjà. Le test mis en place est très simple puisqu'il suffit de tester la position du point isocrête relativement à celle du point $C_{Ci,j}$ par rapport à la direction d'avance (figure 2.20).

Le test sur le côté de la solution se résume à relever le signe d'un produit scalaire (figure 2.20) et à en déduire si la solution trouvée est du « bon côté » ou du « mauvais côté ».

- si on cherche la trajectoire à gauche, en appelant V_{gauche} le vecteur normal à l'avance dans le sens trigonométrique, le signe du produit scalaire suivant doit être positif :

$$C_{Ci,j}P_{iso,i,j} \cdot V_{gauche} > 0$$

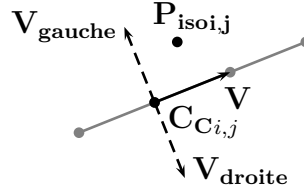


Figure 2.20 – Gestion du côté sur lequel la solution converge

- si on cherche la trajectoire à droite, en appelant V_{droite} le vecteur normal à l'avance dans le sens anti-trigonométrique, le signe du produit scalaire suivant doit être positif :

$$C_{C_{i,j}} P_{\text{isoi},j} \cdot V_{\text{droite}} > 0$$

2.2.2.4.2.4 Dichotomie sur la variable φ :

Cette fonction n'est pas utilisée fréquemment, on y fait appel lorsque le système sur le point isocrête n'a pas convergé et que les solutions initiales ont été construites à partir des positions précédentes. Il peut arriver qu'une légère erreur sur l'évaluation des conditions initiales engendre la non-convergence du système. D'où la volonté de relancer une seconde fois la résolution du système lorsque celui-ci n'a pas convergé, à la différence près que la valeur initiale sur φ sera évaluée par dichotomie.

2.2.2.4.2.5 Initialisation du système sur $C_{L_{i,j+1}}$

Le point $C_{L_{i,j+1}}$ est évalué grâce à la résolution du système 2.19. Le système est résolu par la méthode de Newton-Raphson. De la même manière que pour le système sur $P_{\text{isoi},j}$ (système 2.10), cette méthode de résolution est efficace et rapide dans la mesure où les solutions initiales fournies au système sont proches des solutions. Avec des valeurs initiales éloignées de la solution, on est rapidement confronté à des temps de calculs importants et à des problèmes de convergence du système. Le bon déroulement de la planification de trajectoire devient rapidement impossible alors que dans nombre de cas la solution existe.

Le raisonnement effectué pour évaluer les valeurs initiales nécessaires à la résolution du système sur le point $C_{L_{i,j+1}}$ se décompose en plusieurs cas de figure. L'idée directrice est la suivante : si le calcul de la position précédant celle sur laquelle on se situe a convergé et si la solution peut être exploitée, on peut se baser sur les valeurs obtenues à la position précédente pour fournir les valeurs initiales de la position actuelle ; par contre si la position précédente ne peut être exploitée, on met en place une fonction d'évaluation des valeurs initiales.

◦ 1^{er} cas : la position précédente de l'outil est exploitable

Le raisonnement à mener sur les valeurs initiales u_{2init} et v_{2init} est sensiblement le même que pour les variables u_{1init} et v_{1init} du premier système. Plusieurs situations sont à envisager :

- 1^{ere} situation : seule la position précédente $(i-1, j+1)$ a convergé, la position $(i-2, j+1)$ quant à elle a échoué. On peut alors évaluer les conditions initiales à partir de la position $(i-1, j)$. En appelant $\Delta u'_{i-1, j+1}$ et $\Delta v'_{i-1, j+1}$, les incréments en u et v qui ont permis de passer du point $\mathbf{P}_{iso i-1, j}$ au point $\mathbf{C}_{L i-1, j+1}$, en faisant l'hypothèse que les points $\mathbf{C}_{C i, j+1}$ et $\mathbf{C}_{C i-1, j+1}$ sont proches, les incréments $\Delta u'_{i-1, j+1}$ et $\Delta u'_{i, j+1}$ d'une part, $\Delta v'_{i-1, j+1}$ et $\Delta v'_{i, j+1}$ d'autre part sont eux-aussi proches. On peut alors écrire :

$$u_{2init} = u_1 + \Delta u'_{i-1, j+1} \quad \text{et} \quad v_{2init} = v_1 + \Delta v'_{i-1, j+1}$$

- 2^{nde} situation : les deux positions précédentes $(i-1, j+1)$ et $(i-2, j+1)$ ont convergé vers les solutions se situant du « bon côté ». On peut alors inclure dans le calcul de nos valeurs initiales la dérive qui existe sur les valeurs $\Delta u'_{i, j+1}$ et $\Delta v'_{i, j+1}$ (figure 2.15). On obtient les expressions suivantes :

$$u_{2init} = u_1 + \Delta u'_{i-1, j+1} + \text{dérive}'_u = u_1 + \Delta u'_{i-1, j+1} + (\Delta u'_{i-1, j+1} - \Delta u'_{i-2, j+1})$$

$$v_{2init} = v_1 + \Delta v'_{i-1, j+1} + \text{dérive}'_v = v_1 + \Delta v'_{i-1, j+1} + (\Delta v'_{i-1, j+1} - \Delta v'_{i-2, j+1})$$

Quant à la variable ξ_{init} , le calcul est assez similaire, là-aussi deux situations sont à envisager :

- 1^{ere} situation : seule la position précédente $(i-1, j+1)$ a convergé, la position $(i-2, j+1)$ a échoué. On évalue la valeur initiale à partir de la position $(i-1, j+1)$:

$$\xi_{init} = \xi_{i-1, j+1}$$

- 2^{nde} situation : les deux positions précédentes $(i-1, j+1)$ et $(i-2, j+1)$ ont convergé vers les solutions se situant du « bon côté ». On peut alors inclure dans le calcul de la valeur initiale le phénomène de dérive. On obtient l'expression suivante :

$$\xi_{init} = \xi_{i-1, j+1} + (\xi_{i-1, j+1} - \xi_{i-2, j+1})$$

◦ 2nd cas : la position précédente de l'outil n'est pas exploitable

On dit que la position précédente de l'outil n'est pas exploitable si elle vérifie une des conditions suivantes :

- la position à calculer est en début de trajectoire et aucune position précédente n'a été calculée,

- la position à calculer se situe à une position quelconque de la trajectoire, mais la position précédente n'a pas convergé,
- le signe du paramètre a (coordonnée de l'avance $\mathbf{V}$ suivant $\mathbf{Axe}$) change entre la position précédente et la position à calculer, on ne peut plus exploiter la position précédente.

Lorsqu'une de ces conditions est vérifiée, on utilise une fonction d'évaluation pour trouver les valeurs initiales des paramètres ξ , u et v .

Commençons par présenter la fonction d'évaluation de la valeur initiale ξ_{init} (figure 2.21).

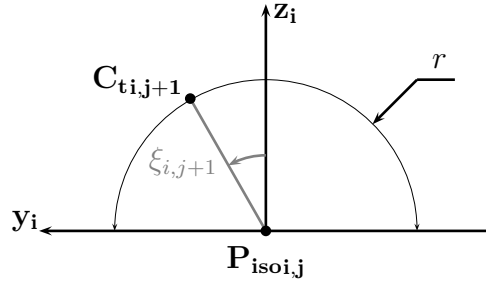


Figure 2.21 – Définition de l'angle $\xi_{i,j+1}$

Deux situations sont à envisager pour prédire la valeur de ξ_{init} :

- on est capable de prédire avec précision la valeur de ξ_{init} quelle que soit la surface à usiner,
- on n'est pas capable de prédire ξ_{init} avec précision, on met en place une résolution par dichotomie.

La prédiction de ξ_{init} doit être possible quelle que soit la situation rencontrée. Aussi, commençons par regarder la possibilité d'évaluer ξ_{init} dans les cas suivants : usinage d'un plan incliné avec une direction d'avance de l'outil parallèle ou perpendiculaire à la ligne de plus grande pente, « passage d'un sommet » lors de l'usinage d'une surface quelconque.

1^{er} cas : usinage d'un plan incliné avec $a \neq 0$:

La vitesse d'avance est parallèle à la ligne de plus grande pente (figure 2.22). Les deux positions adjacentes de l'outil vont être symétriques par rapport au plan $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ et on le démontre :

La tangente à la courbe isocrête $\mathbf{x}_i$ en $\mathbf{P}_{iso i,j}$ peut être définie de deux manières différentes suivant que l'on considère l'une ou l'autre des deux positions adjacentes de l'outil. En appelant $\mathbf{n}_{ti,j}$ et $\mathbf{n}_{ti,j+1}$ les normales aux deux outils adjacents au point isocrête $\mathbf{P}_{iso i,j}$ qu'ils ont en commun :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{n}_{ti,j} \wedge \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}_{ti,j+1} \wedge \mathbf{n}(u, v) \quad (2.29)$$

L'égalité ci-dessus a deux solutions mathématiques : soit « $\mathbf{n}_{t,i,j} = \mathbf{n}_{t,i,j+1}$ », ce qui signifie que les deux outils sont confondus, ce qui ne correspond pas à notre problème, soit $(\mathbf{n}_{t,i,j} - \mathbf{n}_{t,i,j+1})$ est colinéaire à la normale au plan $\mathbf{n}(u, v)$. Le vecteur $\mathbf{n}(u, v)$ appartenant au plan $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$, le vecteur $(\mathbf{n}_{t,i,j} - \mathbf{n}_{t,i,j+1})$ appartient aussi à ce plan. Le problème est donc symétrique par rapport au plan $(\mathbf{P}_{\text{isoi},j}, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$.

La symétrie entre les deux positions adjacentes de l'outil nous permet d'évaluer simplement la valeur initiale ξ_{init} :

$$\xi_{\text{init}} = -\xi_{i,j}$$

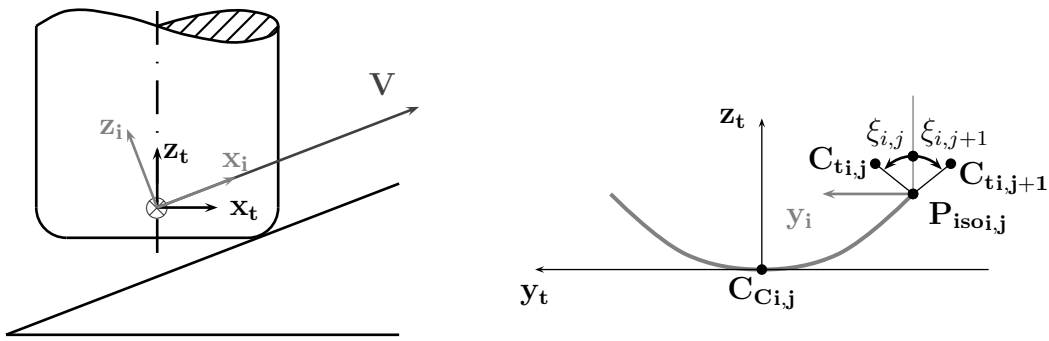


Figure 2.22 – Prédiction de l'angle ξ_{init} pour un plan incliné avec $a \neq 0$

2nd cas : usinage d'un plan incliné avec $a = 0$:

La vitesse d'avance est perpendiculaire à la ligne de plus grande pente (figure 2.23). Les deux positions adjacentes de l'outil vont être symétriques par rapport au plan $(\mathbf{n}_{\mathbf{P}_{\text{isoi},j}}, \mathbf{x}_i)$ et on le démontre :

La tangente à la courbe isocrête $\mathbf{x}_i$ en $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$ est définie par :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{n}_{t,i,j} \wedge \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}_{t,i,j+1} \wedge \mathbf{n}(u, v)$$

L'égalité ci-dessus a deux solutions mathématiques : soit « $\mathbf{n}_{t,i,j} = \mathbf{n}_{t,i,j+1}$ », ce qui signifie que les deux outils sont confondus, ce qui ne correspond pas à notre problème, soit $(\mathbf{n}_{t,i,j} - \mathbf{n}_{t,i,j+1})$ est colinéaire à $\mathbf{n}(u, v)$, solution qui correspond à notre problème. La projection de $\mathbf{n}(u, v)$ sur $\mathbf{x}_t$ étant nulle, on en déduit :

$$\mathbf{n}_{t,i,j} \cdot \mathbf{x}_t = \mathbf{n}_{t,i,j+1} \cdot \mathbf{x}_t$$

L'outil (i,j) a une direction d'avance $\mathbf{V}$ confondue avec $\mathbf{x}_t$, la courbe de balayage est donc donnée par $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Ceci implique que le produit scalaire $(\mathbf{n}_{t,i,j} \cdot \mathbf{x}_t)$ est nul. Par conséquent, le

produit scalaire $(\mathbf{n}_{t,i,j+1} \cdot \mathbf{x}_t)$ est lui-aussi nul, les vecteurs $\mathbf{n}_{t,i,j}$ et $\mathbf{n}_{t,i,j+1}$ sont donc coplanaires.

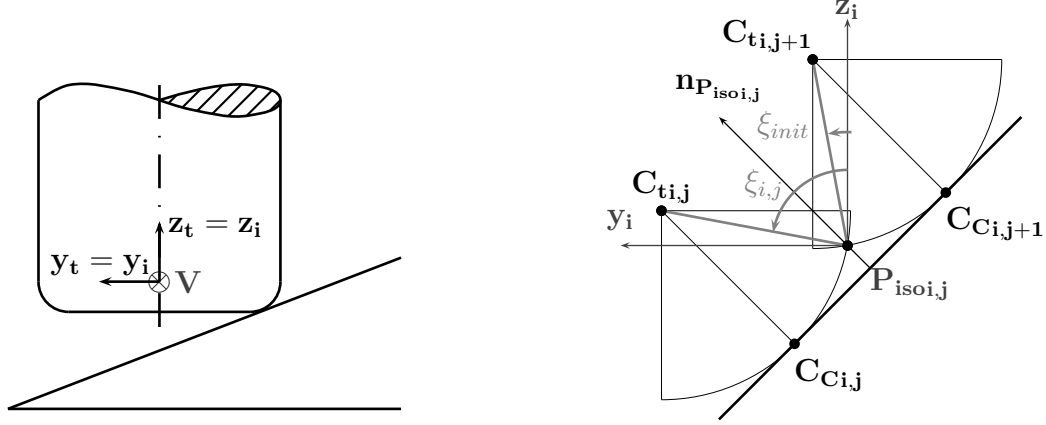


Figure 2.23 – Prédiction de l'angle ξ_{init} pour un plan incliné avec $a = 0$

Le point centre-tore $\mathbf{C}_{t,i,j+1}$ est donc le symétrique de $\mathbf{C}_{t,i,j}$ par rapport au plan $(\mathbf{n}_{P_{oi,j}}, \mathbf{x}_i)$. Dans la configuration de la figure 2.23, ξ_{init} sera évalué de la manière suivante :

$$\xi_{init} = 2 \arccos(\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{n}_{P_{oi,j}}) - \xi_{i,j}$$

3^{ieme} cas : usinage d'une surface quelconque lors du « passage d'un sommet » :

Dans cette configuration, le vecteur $\mathbf{z}_i$ est proche de l'axe de l'outil et l'angle ξ_{init} à évaluer est proche de zéro (figure 2.24).

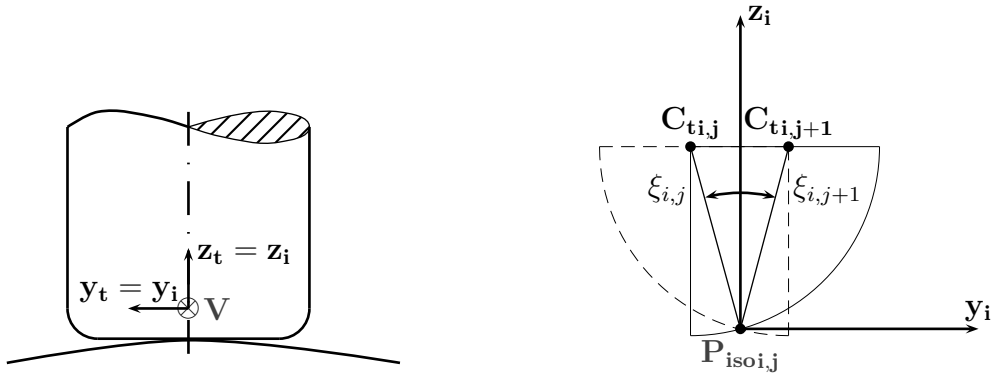


Figure 2.24 – Prédiction de l'angle ξ_{init} lors du « passage d'un sommet »

Le vecteur $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ peut alors être approximé par :

$$\mathbf{P}_{\text{isoi},j}\mathbf{C}_{\text{Li},j+1} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \xi_{i,j+1} \\ r \cos \xi_{i,j+1} \end{pmatrix} + (R - r) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin \xi_{i,j+1}}{|\sin \xi_{i,j+1}|} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Lors de la résolution par la méthode de Newton-Raphson le paramètre $\xi_{i,j+1}$ est proche de zéro et peut changer de signe. Le vecteur $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ varie alors sur $\mathbf{y}_i$ de $\pm(R - r)$. Le système diverge, l'idée d'évaluer ξ_{init} quelle que soit la surface à usiner est donc à abandonner.

En conclusion, on va évaluer ξ_{init} par dichotomie. Le raisonnement mis en place est le suivant : le vecteur $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ est fonction de l'angle ξ_{init} , on impose une valeur à l'angle ξ_{init} et on résout le système 2.31

$$[\mathbf{P}_{\text{isoi},j}\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}]_{R_i} = [\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v)]_{R_i} + \varepsilon[\mathbf{n}(u, v)]_{R_i} \quad (2.31)$$

Ce système a trois inconnues : u , v , et ε . Le point $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$ appartenant à la surface centre-outil $\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v)$ et l'équation étant établie dans le repère $\mathcal{R}_i$, à chaque valeur ξ_{init} imposée correspond un ε calculé que l'on cherche à minimiser. La valeur ξ_{init} qui minimisera la valeur ε sera celle retenue pour initialiser le second système.

Le choix de reporter l'erreur ε sur la normale $\mathbf{n}(u, v)$ plutôt que sur l'axe de l'outil ou sur $\mathbf{z}_i$ n'a pas de répercussion importante vu que le but est d'obtenir une erreur ε nulle ou très proche de zéro. Si on voulait vraiment exprimer la distance entre $\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v)$ et le point $\mathbf{C}_{\text{Li},j+1}$, il faudrait le faire suivant la normale à la surface centre-outil $\mathbf{S}_{\text{CO}}(u, v)$, ce qui compliquerait considérablement les calculs sans améliorer de manière conséquente la précision.

L'équation 2.31 a deux solutions $\xi_{i,j}$ et $\xi_{i,j+1}$, $\xi_{i,j}$ correspond à la position de l'outil connue et $\xi_{i,j+1}$ correspond à celle que l'on cherche. Pour que la dichotomie soit efficace il faut donc que l'intervalle de balayage de l'angle $\xi_{i,j+1}$ exclut la valeur $\xi_{i,j}$: on démarre donc la dichotomie à la valeur $\xi_{i,j} + \delta\xi$ ($\delta\xi$ est pris égal à 1°). Cette méthode de prédiction est relativement lourde, mais elle n'est pas appliquée systématiquement. Le raisonnement mené est résumé ci-après (figure 2.25).

Pour pouvoir débiter la dichotomie, il faut au préalable fixer les bornes de l'intervalle de balayage sur $\xi_{i,j+1}$. On considère l'angle ξ_n , l'angle entre le vecteur $\mathbf{z}_i$ du repère $\mathcal{R}_i$ et la projection de $\mathbf{n}_{\mathbf{P}_{\text{isoi},j}}$ (normale à la surface au point isocrête $\mathbf{P}_{\text{isoi},j}$) dans le plan $(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ (figure 2.25). On appelle ξ_{deb} et ξ_{fin} les bornes de l'intervalle sur lequel se déroule la dichotomie, Δ_ξ l'incrément de balayage sur l'angle $\xi_{i,j+1}$ et k l'amplitude de l'intervalle de balayage.

- si $(\xi_n - \xi_{i,j}) > 0$ alors : $\xi_{\text{deb}} = \xi_{i,j} + \frac{\pi}{180}$ et $\xi_{\text{fin}} = \xi_{i,j} + k \cdot (\xi_n - \xi_{i,j})$
- si $(\xi_n - \xi_{i,j}) < 0$ alors : $\xi_{\text{deb}} = \xi_{i,j} + k \cdot (\xi_n - \xi_{i,j})$ et $\xi_{\text{fin}} = \xi_{i,j} - \frac{\pi}{180}$

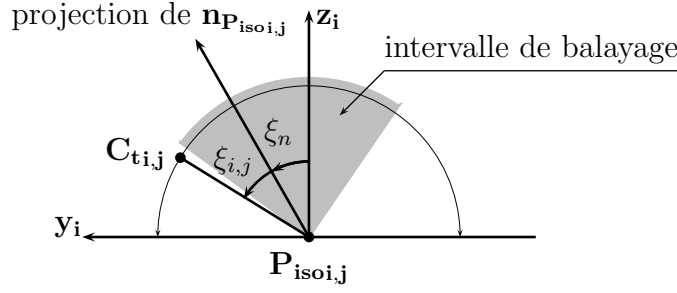


Figure 2.25 – Initialisation de la dichotomie en ξ

Il suffit ensuite de vérifier que ξ_{deb} et ξ_{fin} sont bien compris dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et la dichotomie peut être lancée (figure 2.26). Le principe est de partir de la borne inférieure de l'intervalle de balayage de $\xi_{i,j+1}$ et d'incrémenter la valeur de $\xi_{i,j+1}$ tant qu'on n'a pas une inversion de signe sur la valeur de ε . Lorsque cette inversion arrive, on diminue alors l'intervalle de balayage en le réduisant aux deux valeurs de $\xi_{i,j+1}$ où l'inversion de signe est survenue. On réitère ces opérations jusqu'à ce que la précision sur $\xi_{i,j+1}$ soit inférieure à 1° .

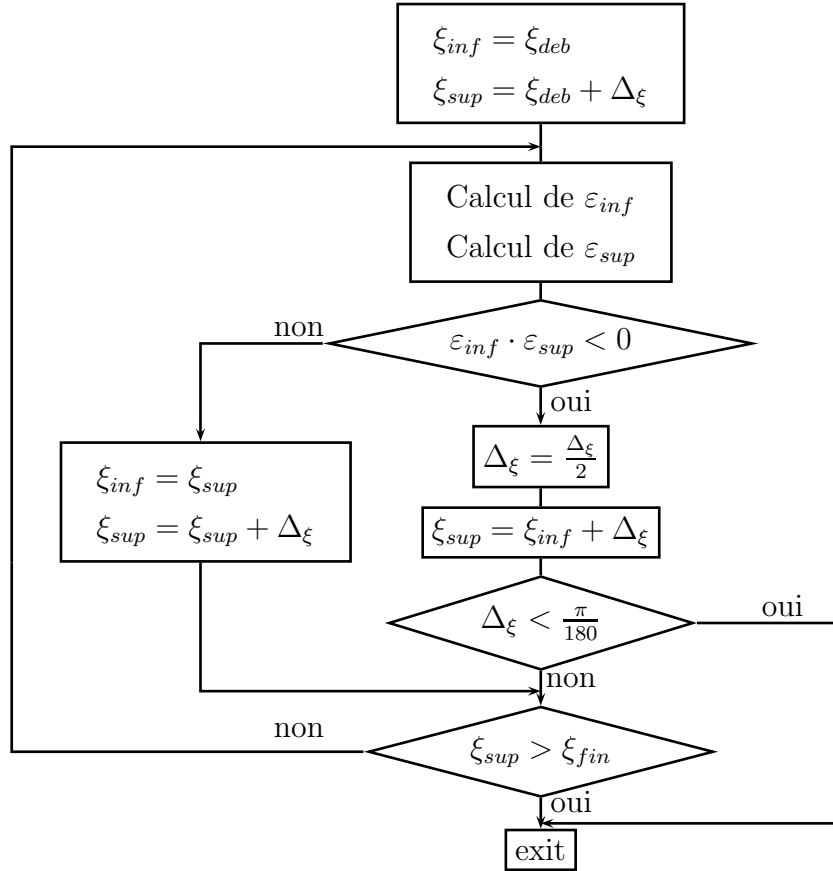


Figure 2.26 – Dichotomie en ξ , minimisation de ε

2.3 Influence du posage sur la génération de trajectoires

Avant de pouvoir calculer les trajectoires d'usinage qui permettront d'avoir une planification isocrête, il faut auparavant réfléchir à la façon de poser la surface vis à vis de l'axe de l'outil (usinage sur machine 3 axes). L'orientation de la surface est un paramètre influent puisqu'elle peut être à l'origine du bon ou du mauvais déroulement de la planification isocrête. Bien que dans la mise en place d'une planification isocrête, la question du posage de la surface se pose avant le calcul des trajectoires, il était important de présenter auparavant la planification pour comprendre son fonctionnement.

2.3.1 Définitions

Pour la suite du raisonnement, il est nécessaire de donner les définitions suivantes (figure 2.27) :

- pas longitudinal P_l : distance entre les points centre-outils de deux outils consécutifs i et $i + 1$ sur une trajectoire j ,
- dérive longitudinale : variation du pas longitudinal entre des positions outil i et $i + 1$ de la trajectoire j et les positions associées i et $i + 1$ de la trajectoire $j + 1$, elle se mesure dans le plan $(\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)$ de l'outil (i, j)
- pas transversal P_t : distance entre les points centre-outils de deux outils adjacents (i, j) et $(i, j + 1)$,
- dérive transversale : variation du pas transversal entre les positions outil i des trajectoires j et $j + 1$ et les positions $i + 1$ des trajectoires j et $j + 1$, elle se mesure dans le plan $(\mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t)$ de l'outil (i, j) .

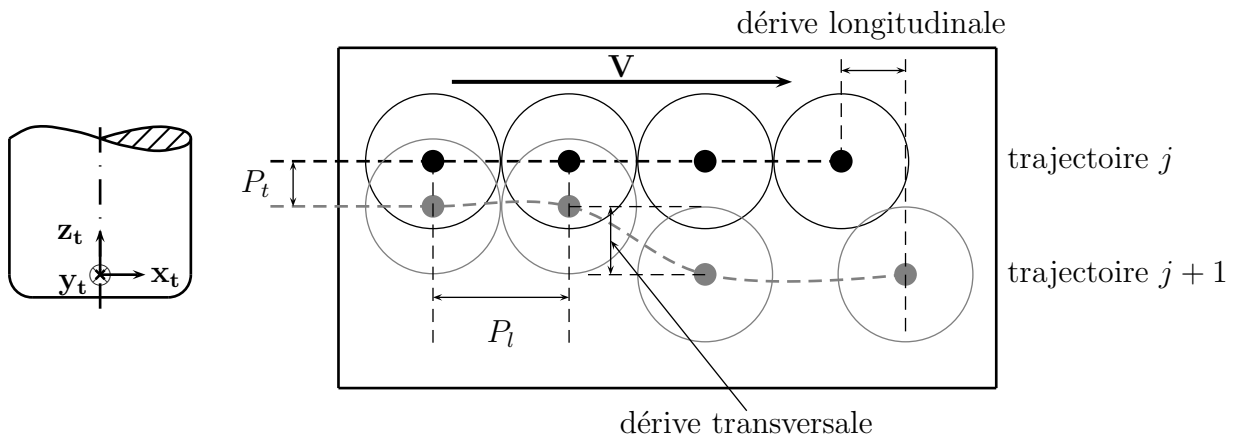


Figure 2.27 – Définitions des pas et dérives

2.3.2 Influence du posage

2.3.2.1 Etude d'un cas simple

Pour mieux appréhender le problème du posage et l'influence qu'il peut avoir sur la planification des trajectoires à hauteur de crête constante, on s'intéresse à l'usinage d'une surface simple définie comme suit (figure 2.28) :

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 60 \cdot v \\ \rho_0 \cdot \sin \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) \\ \rho_0 \cdot \cos \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) + t \cdot v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} \quad (2.32)$$

avec $(u, v) \in [0, 1]^2$, $\rho_0 = 50$, $\Delta z = 10$, $t = 20$

On rappelle que le repère global de la surface est noté $\mathcal{R}_s = (\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G)$. Cette surface est une surface réglée définie par deux arcs de cercle identiques de rayon ρ_0 . Le premier arc est dans le plan $x_G = 0$ et le second dans le plan $x_G = 60$, décalé suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ par rapport au premier arc de cercle. Le décalage suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ est défini par le paramètre t . Le paramètre Δz caractérise la différence de hauteur suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ entre les extrémités et le sommet de chaque arc de cercle (figure 2.28).

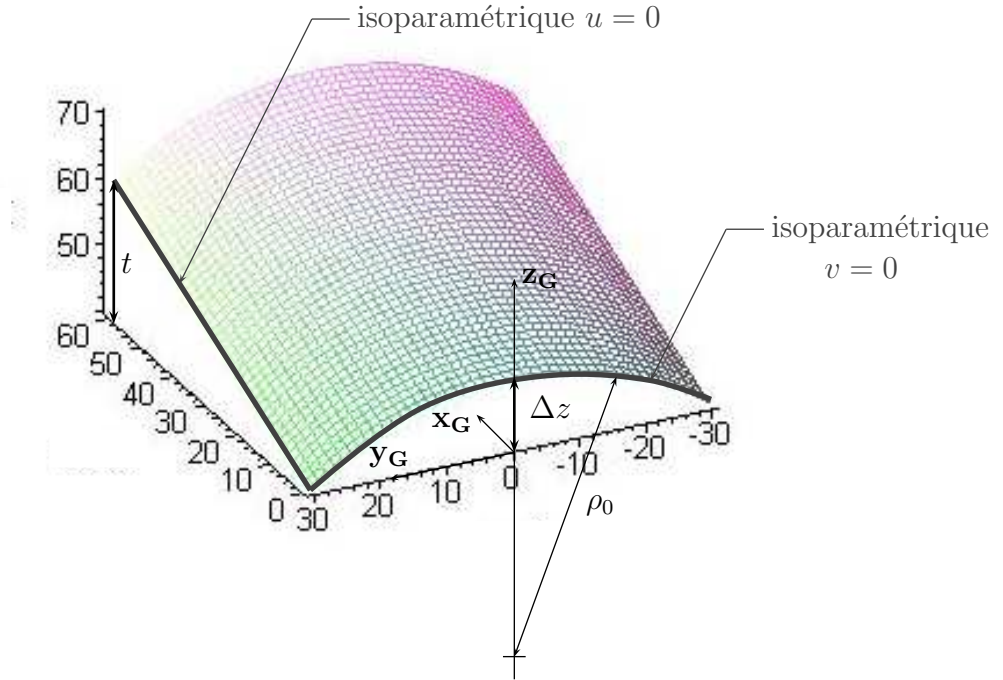


Figure 2.28 – Représentation de la surface à positionner

On peut imaginer différents posages pour usiner cette surface : on peut la poser « à plat », l'incliner légèrement ou fortement en choisissant des axes de rotations différents. En faisant varier le paramètre « t » de la surface 2.32, la géométrie de la surface va être modifiée. Néanmoins, cela nous donne une idée de l'influence que peut avoir le posage. Les figures 2.30 et 2.31 illustrent l'influence que peut avoir le posage sur la planification de trajectoires quelle que soit la première trajectoire choisie. Sur la figure 2.30, la première trajectoire est la courbe isoparamétrique $u = 0$. Sur la figure 2.31, la première trajectoire est la courbe isoparamétrique $v = 0$.

Les différents tests menés sont détaillées ci-après (figure 2.29) :

- *surface (1)* : la surface est posée telle qu'elle est définie sur la figure 2.28. On peut caractériser ce posage par une translation suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ entre les courbes $\mathbf{S}(u, 0)$ et $\mathbf{S}(u, 1)$. L'amplitude de la translation vaut 20 mm,
- *surface (2)* : L'amplitude de la translation entre les courbes $\mathbf{S}(u, 0)$ et $\mathbf{S}(u, 1)$ suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ vaut 60 mm,
- *surface (3)* : L'amplitude de la translation entre les courbes $\mathbf{S}(u, 0)$ et $\mathbf{S}(u, 1)$ suivant l'axe $\mathbf{z}_G$ vaut 100 mm,
- *surface (4)* : la surface initiale est définie par les deux arcs de cercle à $x = 0$ et à $x = 60$

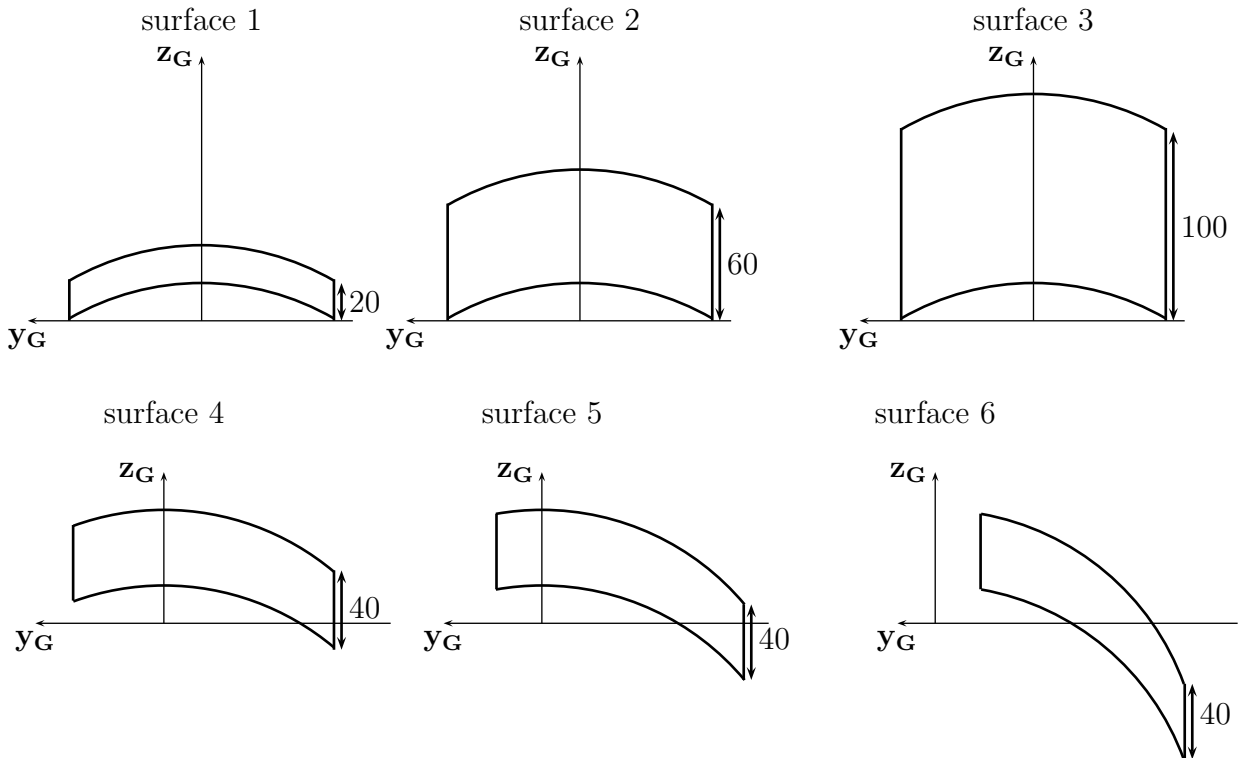


Figure 2.29 – Posages de la surface

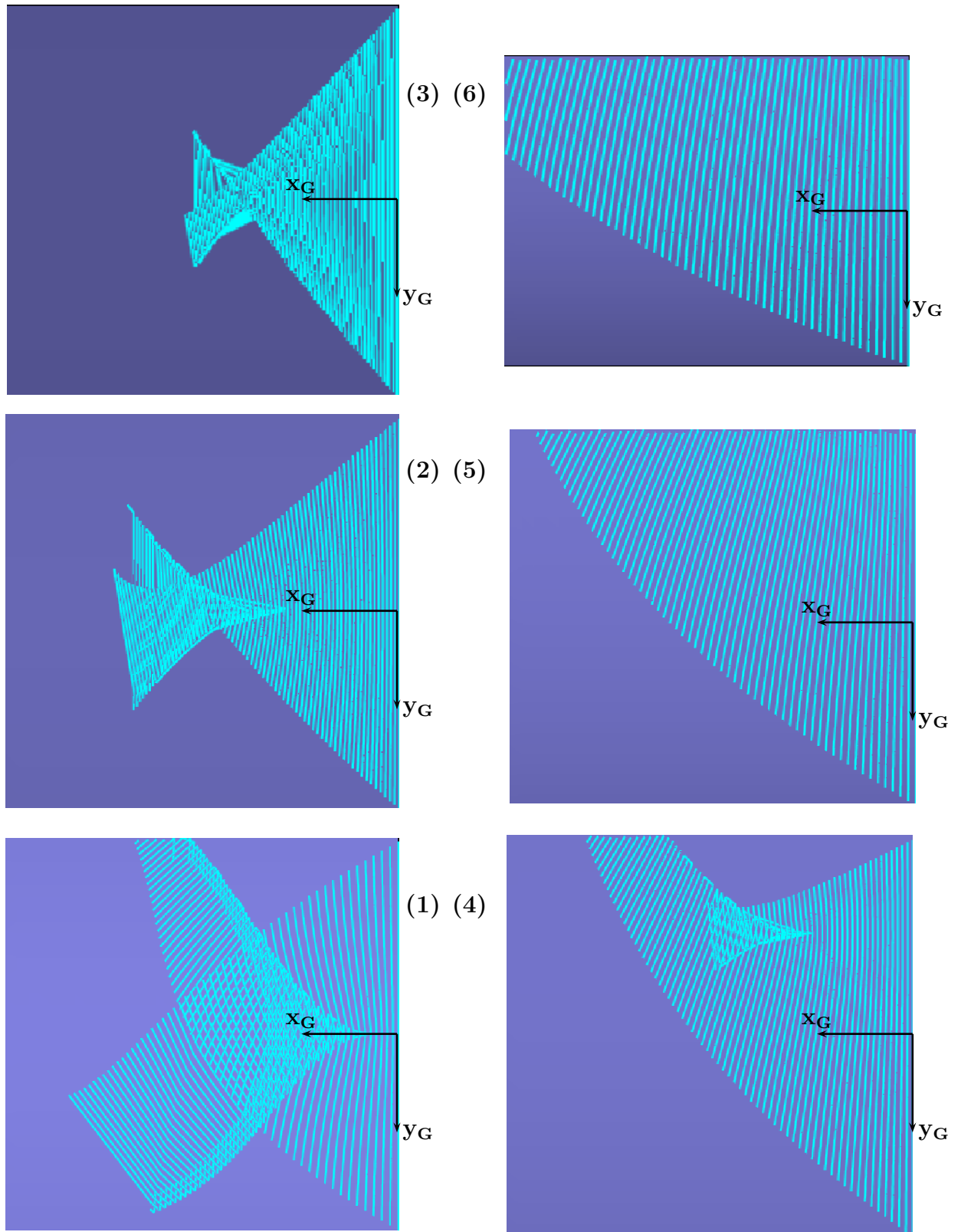


Figure 2.31 – Planifications obtenues pour différents posages

sans décalage suivant $\mathbf{z}_G$ (toutes les règles de la surface sont horizontales). Dans un premier temps, une rotation de 10° autour de $\mathbf{x}_G$ est effectuée, puis le second arc de cercle est translaté de 40 mm suivant $\mathbf{z}_G$,

- *surface (5)* : la surface est identique à la surface (4), mais avec une rotation initiale de 20° autour de $\mathbf{x}_G$,
- *surface (6)* : la surface est identique à la surface (4), mais avec une rotation initiale de 40° autour de $\mathbf{x}_G$,

Les posages adoptés sur la figure 2.31 sont identiques à ceux de la figure 2.30. L'outil utilisé lors des planification des figures 2.30 et 2.31 est un outil torique de rayon $R = 4$ et de rayon de tore $r = 2$. La hauteur de crête vaut 0.05 mm.

On observe l'influence du posage sur la planification sur les figures 2.30 et 2.31. La figure 2.30 met surtout en évidence la modification de la dérive longitudinale d'un posage à l'autre. Il y a modification du pas transversal entre deux posages (figure 2.32), mais le phénomène de dérive transversale n'apparaît pas : la première trajectoire choisie est une droite (isoparamétrique $u = 0$) et l'ensemble des trajectoires qui constituent la planification sont des droites parallèles à la première trajectoire. Sur la figure 2.31, on observe des dérives longitudinale et transversale combinées qui engendrent des situations différentes suivant le posage choisi : sur certaines planifications, la dérive transversale est telle qu'on voit apparaître un « bouclage » des trajectoires.

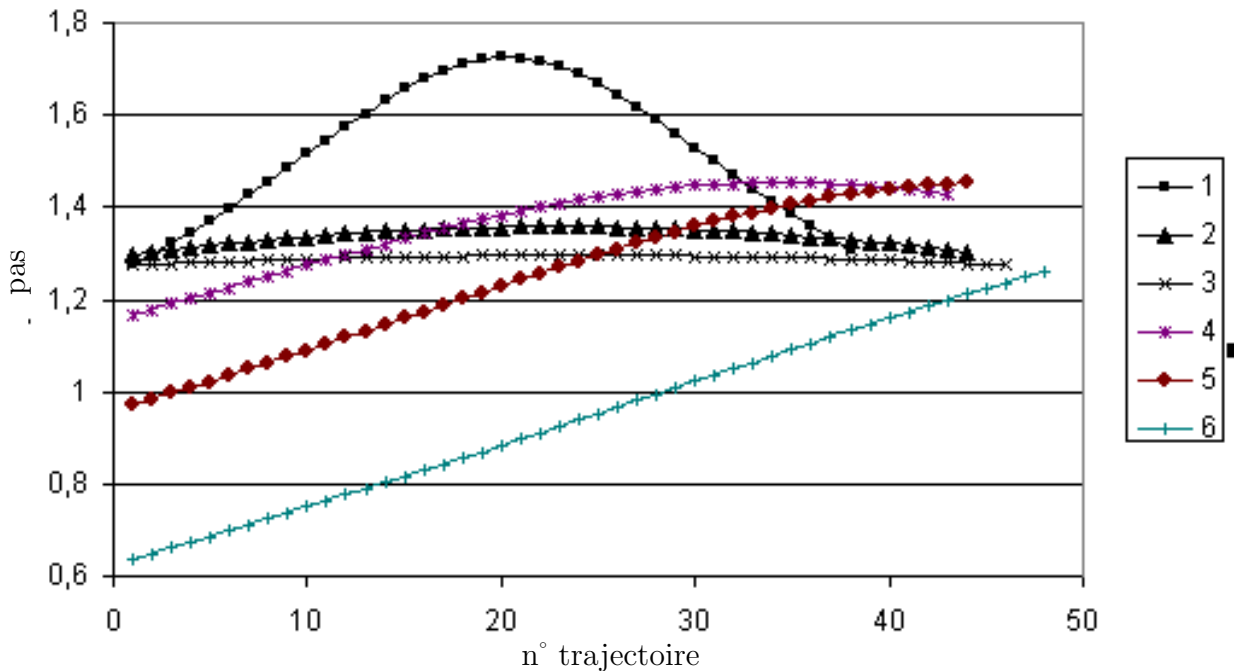


Figure 2.32 – Evolution du pas transversal (1^{ère} trajectoire $u = 0$)

Les courbes 1 à 6 de la figure 2.32 correspondent respectivement aux surfaces (1) à (6), la première trajectoire étant l'isoparamétrique $u = 0$. Dans un premier temps, on constate sur les courbes 1, 2 et 3 que le pas transversal varie fortement pour de faibles inclinaisons (courbe 1) alors que lorsque les pentes deviennent importantes, le pas est quasiment constant (courbes 2 et 3). D'autre part, on relève le nombre de trajectoires total nécessaires pour usiner la surface :

- surface (1) : 38 trajectoires, surface (2) : 44 trajectoires, surface (3) : 46 trajectoires,
- surface (4) : 43 trajectoires, surface (5) : 44 trajectoires, surface (6) : 48 trajectoires,

Lorsque l'inclinaison augmente, le nombre de trajectoires augmentent de manière non négligeable. Les trajectoires étant toutes des droite parallèles de longueur identique (la zone non usinée doit être planifiée elle-aussi), l'augmentation du nombre de trajectoires implique une augmentation du temps d'usinage. Ceci nous incite à penser qu'il vaut mieux poser la surface le plus « à plat » possible.

2.3.2.2 Les problèmes de planification causés par les dérives

Lorsqu'il y a une dérive longitudinale constante sur toute la trajectoire et qu'il n'y a pas de dérive transversale, le seul problème qui se pose est celui de l'apparition de zones non usinées sur la surface (figure 2.33). L'apparition d'une zone non usinée dans la planification doit être retouchée afin d'usiner l'ensemble de la surface. Deux solutions sont envisagées :

- la zone non usinée est considérée comme une surface à part entière et il faut choisir une nouvelle trajectoire initiale,
- pour chaque trajectoire présentant une dérive longitudinale, on prolonge la trajectoire jusqu'à la limite du domaine paramétrique en prenant en compte les points existant

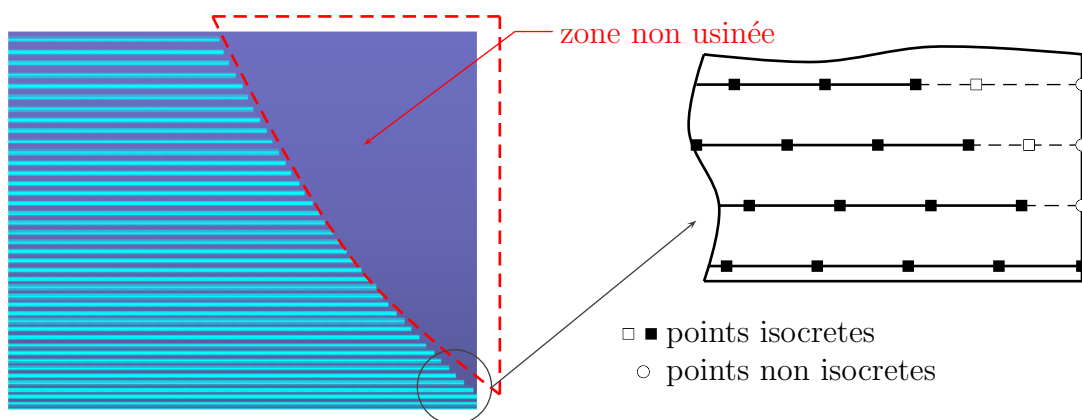


Figure 2.33 – Conséquence d'une dérive longitudinale

sur la trajectoire.

Dans le premier cas, on est confronté à une difficulté de choix de la nouvelle trajectoire initiale, cependant les trajets obtenus seront isocrêtes. Le principal problème de cette méthode étant la non continuité des deux planifications calculées pour usiner la surface.

Dans le second cas, on a une planification de trajectoires régulière sur l'ensemble du domaine paramétrique, mais la zone initialement non usinée n'est pas entièrement isocrête (figure 2.33) : le « bord » de la surface ne sera pas isocrête. C'est la solution que nous avons choisie et mise en œuvre.

Lorsqu'on observe simultanément sur la surface une dérive transversale et une dérive longitudinale, il y a un risque de bouclage de la trajectoire (figure 2.34). Ce bouclage qui apparaît sur la trajectoire $(j + 1)$ (figure 2.34) a des conséquences immédiates sur la planification. Il y a une « inversion » de la vitesse d'avance de l'outil au niveau du bouclage. Lorsqu'on calcule la trajectoire $(j + 2)$, l'inversion du déplacement outil va amener le système à calculer des points incohérents d'un point de vue planification et le système va rapidement diverger au niveau de la zone de bouclage.

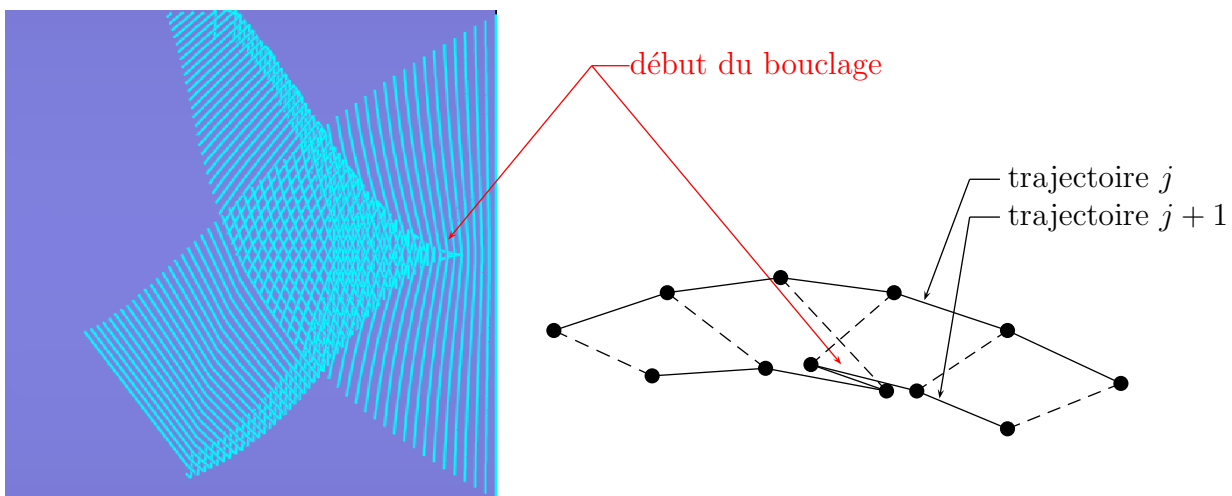


Figure 2.34 – Bouclage des trajectoires

2.3.3 Réflexion sur le posage : études de cas simples

Pour comprendre l'influence que peut avoir l'orientation de la surface par rapport à l'axe de l'outil sur la planification, on va, dans un premier temps, étudier une série de cas simple.

2.3.3.1 1^{er} usinage : variation nulle de la normale sur toute la surface

On étudie le cas de l'usinage d'un plan incliné d'un angle α (figure 2.35). La direction d'usinage $\mathbf{V}$ est telle que $\mathbf{n}(u, v) \cdot \mathbf{y}_t = 0$. On observe que la « dérive longitudinale » est nulle (propriété démontrée précédemment) alors que le pas transversal P_t est fonction de l'inclinaison.

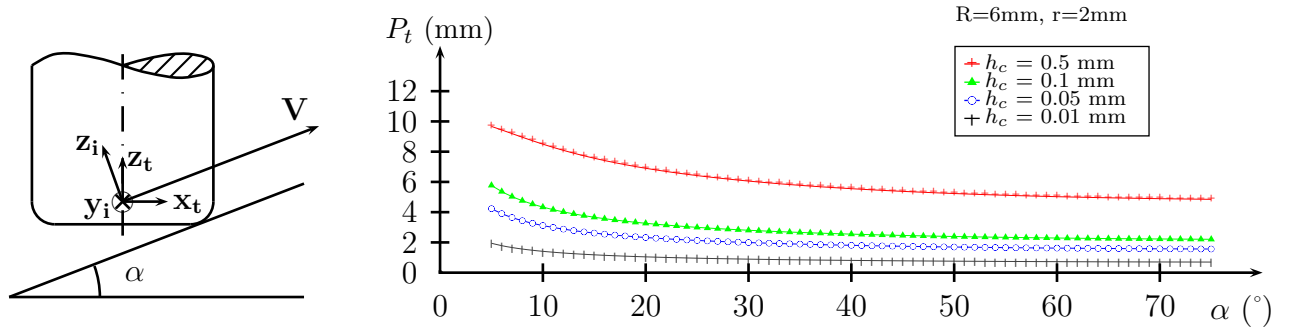


Figure 2.35 – Usinage d'un plan incliné d'un angle α

2.3.3.2 2^{ieme} usinage : variation transversale de la normale dans le plan ($\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t$)

Pour connaître l'influence d'une variation d'inclinaison de la normale dans le plan perpendiculaire au vecteur d'avance $\mathbf{V}$ ou plan transversal, on va se placer dans le cas simple de l'usinage d'un plan incliné. La direction d'usinage $\mathbf{V}$ est telle que $\mathbf{n}(u, v) \cdot \mathbf{x}_t = 0$ (figure 2.36).

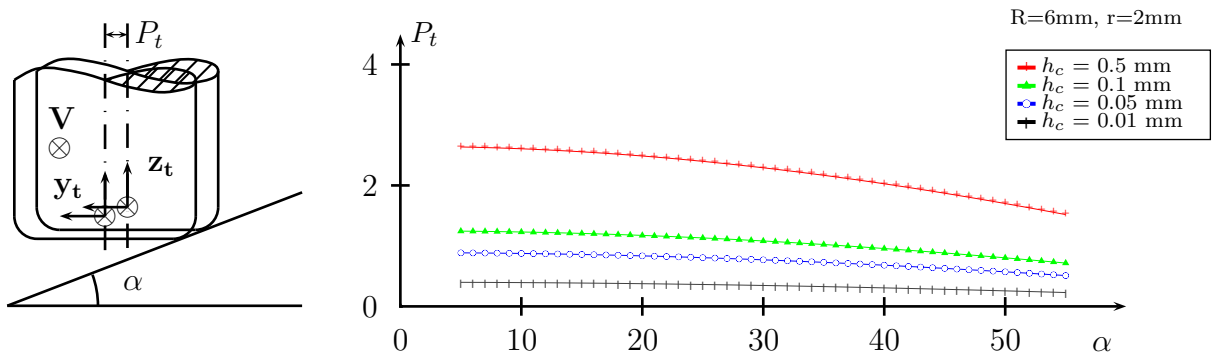


Figure 2.36 – Usinage d'un plan incliné d'un angle α

On observe que la « dérive longitudinale » est nulle (propriété démontrée précédemment) alors que le pas transversal P_t est fonction de l'inclinaison. Ce dernier vérifie la relation

suivante :

$$P_t = 2 \cdot \cos \alpha \sqrt{2rh_c - h_c^2}$$

Dans le cas d'une surface plus complexe, on peut assimiler localement la surface par un plan avec un angle d'inclinaison α constant (figure 2.37). On peut donc appliquer localement les résultats obtenus précédemment : il n'y a pas de variation longitudinale entre deux positions d'outil adjacentes. Par contre, étant donné qu'entre deux positions adjacentes d'outil il y a une variation d'inclinaison, il va y avoir un changement de la valeur du pas transversal entre deux trajectoires : lorsque l'angle α augmente, le pas transversal diminue et lorsque l'angle α diminue, le pas transversal augmente (figure 2.37). Ceci n'est pas gênant d'un point de vue planification de trajectoires puisque, dans ce cas de figure, la variation du pas transversal n'engendre pas de modification de la direction d'avance $\mathbf{V}$.

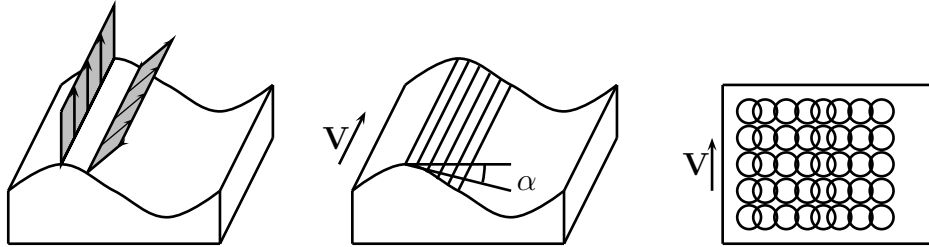


Figure 2.37 – Variation de la normale dans le plan transversal

2.3.3.3 3^{ieme} usinage : variation de la normale dans le plan ($\mathbf{z}_t, \mathbf{V}$)

Il n'y a aucune variation de la normale dans la direction transversale, seulement dans le plan défini par l'axe de l'outil et par le vecteur $\mathbf{V}$.

On peut assimiler localement la surface par un plan avec un angle d'inclinaison α constant (figure 2.38). On peut donc appliquer localement les résultats suivants : il n'y a pas de dérive longitudinale entre deux positions adjacentes. Par contre il va y avoir une variation du pas transversal entre deux positions d'outil étant donné qu'il y a une variation d'inclinaison entre deux positions consécutives de l'outil : lorsque l'angle α augmente, le pas transversal diminue et lorsque l'angle α diminue, le pas transversal augmente (figure 2.35 et 2.38).

La variation du pas transversal qui est apparue entre les deux trajectoires est gênante puisqu'elle va se propager sur l'ensemble des trajectoires. La première trajectoire où l'on observe une variation du pas transversal va entraîner un changement de la direction d'avance $\mathbf{V}$ tout au long de la trajectoire. Au fil de la planification, les dérives transversale et longitudinales vont se cumuler et peuvent aboutir sur un bouclage de la trajectoire. L'apparition

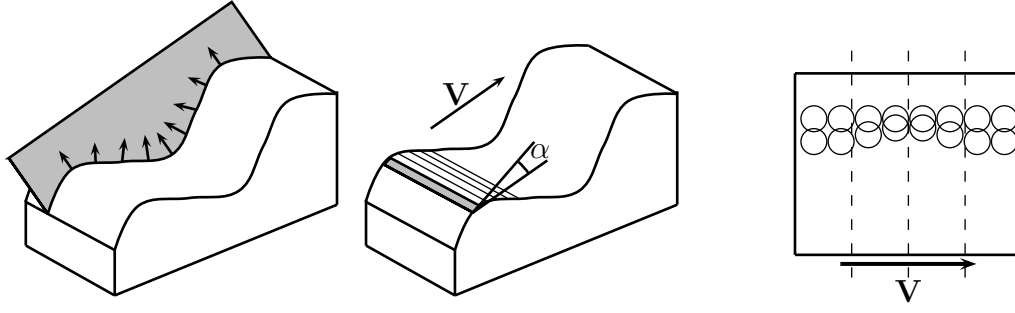


Figure 2.38 – Variation de la normale dans le plan $(z_t, \mathbf{V})$

du bouclage n'est pas systématique pour autant et la présence de dérives transversale et longitudinale peut ne pas être néfaste pour la planification. Sur la figure 2.39, seule une partie de la première trajectoire et des positions calculées est affichée afin de mettre en évidence la présence des dérives. On peut remarquer que le nombre de points de la première trajectoire n'est pas suffisant du fait de la dérive (pas longitudinal important sur la dernière trajectoire).

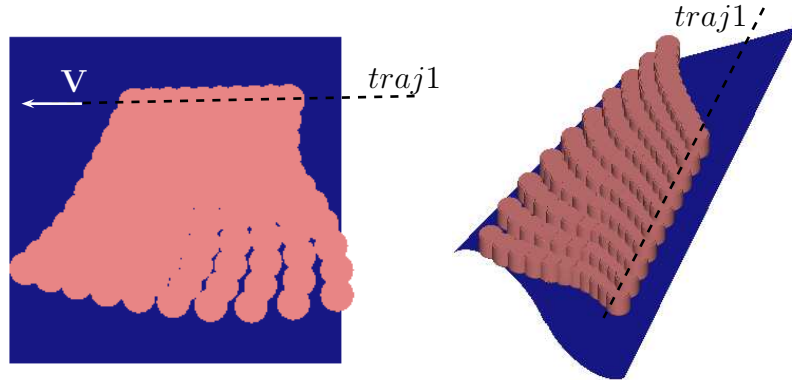


Figure 2.39 – Dérives longitudinale et transversale

2.3.4 Première conclusion sur le posage de la surface

Une variation de la normale dans le plan $(z_t, \mathbf{V})$ ou dans le plan (y_t, z_t) entraîne une dérive transversale. On peut alors essayer de poser la pièce de manière à limiter cette variation car cela entraîne des dégénérescences sur les trajectoires voisines. Cela n'est cependant pas possible car $\mathbf{V}$ n'est pas connu sur l'ensemble de la surface.

A partir de ces conclusions, on peut définir une méthodologie de posage de la pièce en énonçant le critère suivant : « il faut limiter au maximum les variations de l'ensemble des normales par rapport à l'axe de l'outil », ce qui équivaut à limiter l'angle Ψ qui existe entre la normale à la surface et l'axe de l'outil. En considérant un nombre fini de points sur la

surface, il faut trouver la position de la surface qui minimisera la valeur du Ψ maximum de la surface.

On autorise deux degrés de liberté en rotation (γ et λ) pour poser la surface et on cherche le balancement de la surface qui minimise la valeur maximale des angles Ψ . Pour un point de calcul (u, v) défini, la normale $\mathbf{n}(\lambda, \gamma)$ à la surface dans le repère machine $\mathcal{R}_m$ ($\mathbf{O}_m, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{z}_m$) s'écrit :

$$\mathbf{n}(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ 0 & \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}(u, v) \quad (2.33)$$

Il faut chercher pour chaque position λ et γ donnée la valeur maximale des angles Ψ , et retenir le couple (λ, γ) qui minimisera cette valeur. La résolution de ce problème se fait numériquement.

$$\Psi = \arccos(\mathbf{n}(\lambda, \gamma) \cdot \mathbf{z}_m)$$

$$\Psi = \arccos(\sin(\gamma).n_x(u, v) + \cos(\gamma).(-\sin(\lambda).n_y(u, v) + \cos(\lambda).n_z(u, v)))$$

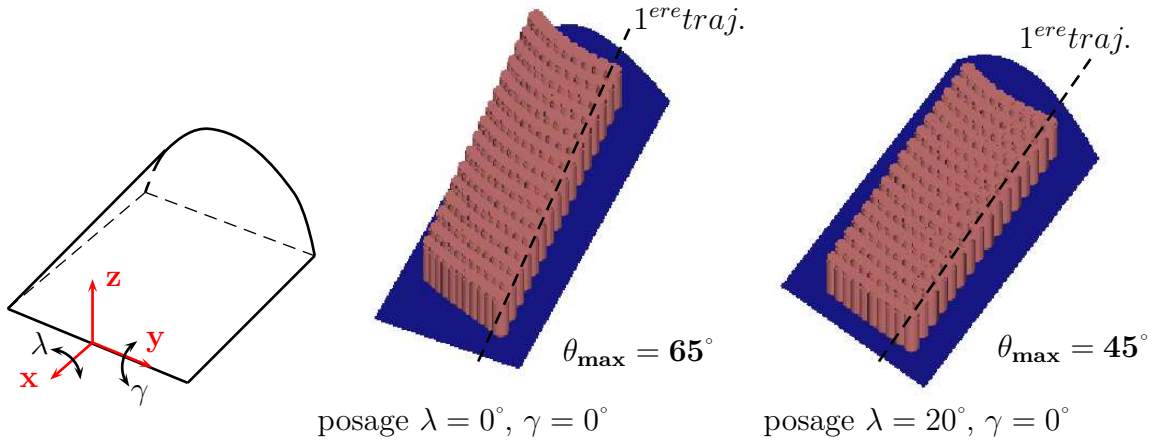


Figure 2.40 – Positionnement de la surface

La figure 2.40 présente un exemple qui permet d'illustrer la résolution proposée. Avec le positionnement initial ($\theta_{max} = 65^\circ$), la planification de trajectoires présente une dérive longitudinale importante. Les calculs d'optimisation du posage de la pièce fournissent comme résultat : $\lambda = 20^\circ$ et $\gamma = 0^\circ$. Il faut donc faire pivoter la surface de 20° autour de l'axe $\mathbf{x}$ pour réduire la dérive. Après balancement de la surface, l'angle maximal d'inclinaison vaut $\theta_{max} = 45^\circ$ et la dérive longitudinale est quasiment annulée. Dans l'exemple traité, la dérive longitudinale fait apparaître une zone non usinée, mais il y a absence de dérive transversale et donc absence de risque de bouclage. Dans cet exemple, le calcul du posage permet donc

d'éviter l'apparition de zone non usinée qu'il faudra gérer par la suite. On remarque que la première trajectoire a volontairement été choisie incomplète pour mettre en évidence l'influence du posage.

2.3.5 Rayon effectif et pas transversal pour un outil torique

2.3.5.1 Introduction

Dans les paragraphes précédents on a constaté que suivant le posage de la surface, on observait des phénomènes de dérives transversale et longitudinale plus ou moins prononcés. Ainsi, on a cherché à diminuer les phénomènes de dérives en limitant l'angle maximum entre l'axe de l'outil et les normales de la surface. En concluant de la sorte, on s'est placé dans l'optique d'un bon déroulement de la planification de trajectoire. Mais aucune garantie n'est fournie quant à l'efficacité du posage en terme de temps d'usinage. En effet, suivant le posage choisi, la distance entre les trajectoires sera plus ou moins importante et le temps d'usinage sera affecté. La question abordée dans ce paragraphe est la suivante : trouver un posage de la surface qui sera « optimal » en terme de temps d'usinage. Si l'on considère que le temps d'usinage est proportionnel à la longueur totale d'usinage, il faut chercher à minimiser le trajet. Cela suppose que la vitesse d'avance programmée est atteinte et constante. Cette hypothèse est vraie jusqu'à une certaine vitesse d'avance programmée.

Pour cela, nous allons aborder la notion de rayon effectif et de pas transversal. La question que l'on se posera à la fin est la suivante : les deux posages obtenus sont-ils proches l'un de l'autre ? sont-ils compatibles ou totalement différents ?

2.3.5.2 Calcul du rayon effectif

On considère la surface (figure 2.41) définie par l'équation 2.34. Cette surface a déjà été utilisée lors des études précédentes. Cette pièce ne présente aucun problème d'accessibilité ou d'interférence, le choix de l'outil est complètement libre ainsi que la stratégie à appliquer (choix de la première trajectoire, choix du sens de parcours...).

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 60 \cdot v \\ \rho_0 \cdot \sin \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) \\ \rho_0 \cdot \cos \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) + 20 \cdot v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} \quad (2.34)$$

$$\text{avec } (u, v) \in [0, 1]^2, \rho_0 = 50, \Delta z = 10$$

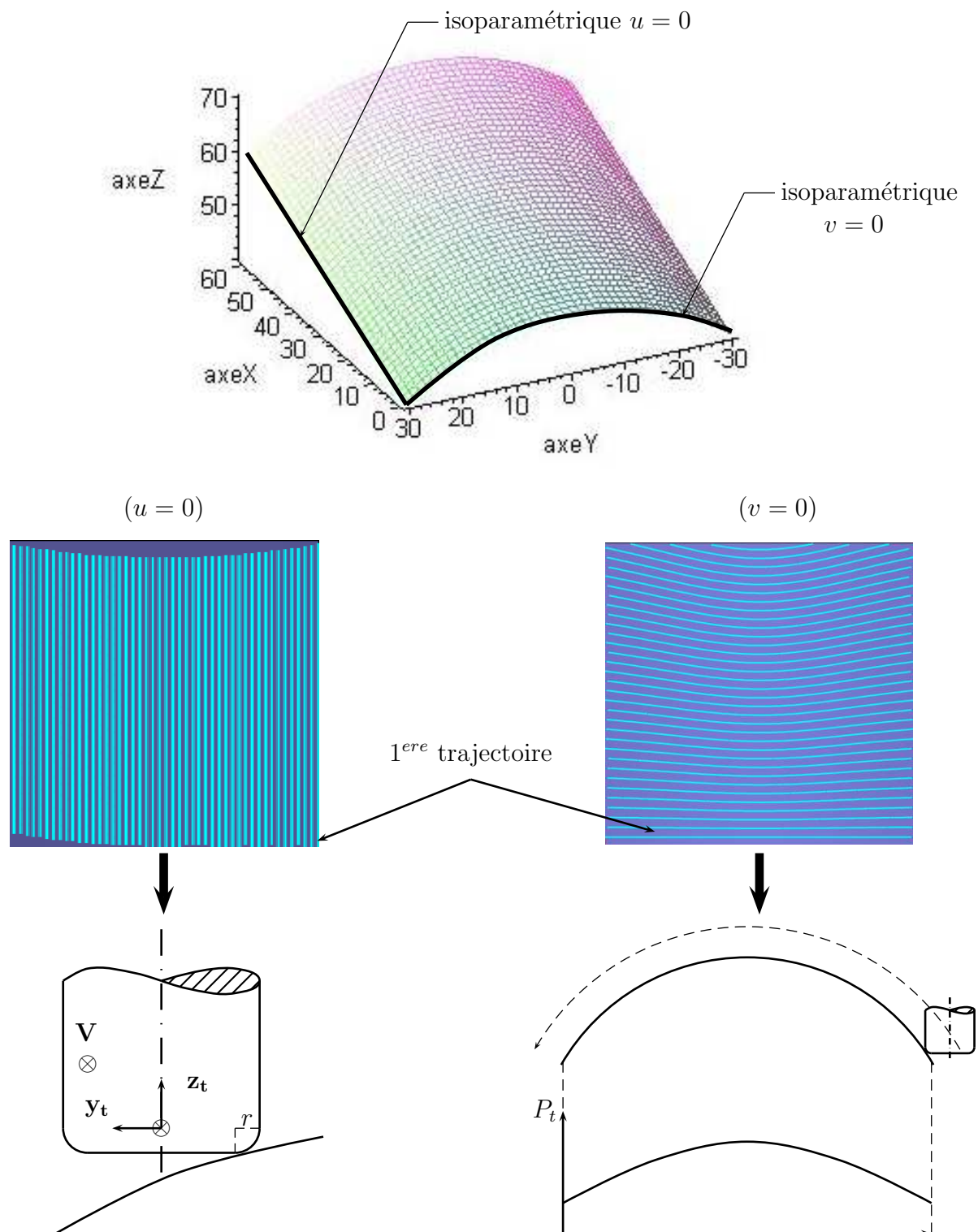


Figure 2.41 – Représentation de la surface à positionner

Considérons que la première trajectoire est horizontale et construite sur le « bord » de la surface correspondant, par exemple, à l'isoparamétrique $u = 0$ (figure 2.41), nous avons planifié les trajectoires isocrêtes en faisant varier la géométrie des outils (variation du rayon de tore r et du rayon d'outil R). Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 2.41. Sur ce cas simple, on voit que sur la première trajectoire, l'outil torique est quasiment équivalent du point de vue du calcul de la hauteur de crête à un outil de rayon r (rayon de tore). Le rayon R n'intervient presque pas si ce n'est sur la vitesse de coupe.

Considérons que la première trajectoire est construite sur l'isoparamétrique $v = 0$ (figure 2.41), nous obtenons un pas transversal variable le long de la trajectoire. Celui-ci est fonction de la normale à la surface au point de contact et de l'orientation du déplacement en ce point. Nous allons à partir de ce constat définir la notion de rayon effectif. Le rayon effectif que nous allons déterminer correspond au rayon de courbure de la courbe enveloppe au point de contact outil pièce.

On évalue le rayon effectif de l'outil en fonction de la direction d'avance qu'il va suivre. Cette direction est indiquée par un angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ repéré par rapport au repère outil $\mathcal{R}_P(\mathbf{C}_{L,i,j}, \mathbf{x}_P, \mathbf{y}_P, \mathbf{z}_P)$. Le vecteur $\mathbf{z}_P$ est colinéaire à l'axe de l'outil, les vecteurs $\mathbf{x}_P$ et $\mathbf{y}_P$ sont perpendiculaires à $\mathbf{z}_P$ et fixes par rapport à la pièce. On considère le repère $\mathcal{R}_\alpha(\mathbf{C}_{L,i,j}, \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha, \mathbf{z}_\alpha)$ que l'on déduit du repère $\mathcal{R}_P$ par une rotation d'angle α autour de l'axe $\mathbf{z}_P$ (figure 2.42). Ce repère est défini tel que le plan $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{z}_\alpha)$ contienne la vitesse d'avance. Le passage de $\mathcal{R}_P$ à $\mathcal{R}_\alpha$ est donné par :

- $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_P$
- $\mathbf{x}_\alpha = \cos(\alpha) \cdot \mathbf{x}_P + \sin(\alpha) \cdot \mathbf{y}_P$
- $\mathbf{y}_\alpha = -\sin(\alpha) \cdot \mathbf{x}_P + \cos(\alpha) \cdot \mathbf{y}_P$

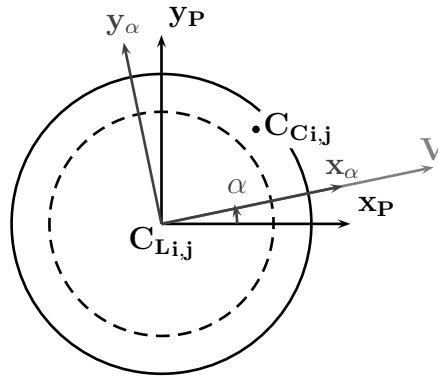


Figure 2.42 – Définition du repère $\mathcal{R}_\alpha$

Soit $\mathbf{C}_{C,i,j}$ le point de contact entre l'outil et la pièce. D'un point de vue géométrique, l'outil doit se déplacer en $\mathbf{C}_{C,i,j}$ tangent à la surface. Le plan tangent en $\mathbf{C}_{C,i,j}$ étant caractérisé par

la normale à la surface $\mathbf{n}_{C_{i,j}}$ au point $C_{i,j}$, la vitesse d'avance de l'outil $\mathbf{V}(\alpha)$ doit donc être telle que $\mathbf{V}(\alpha) \cdot \mathbf{n}_{C_{i,j}} = 0$.

La vitesse d'avance s'exprime de la manière suivante dans le plan $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{z}_\alpha)$ (figure 2.43) :

$$\mathbf{V}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\alpha} \quad \text{avec } a(\alpha) = \frac{-\mathbf{n}_{C_{i,j}} \cdot \mathbf{x}_\alpha}{\mathbf{n}_{C_{i,j}} \cdot \mathbf{z}_\alpha} \quad (2.35)$$

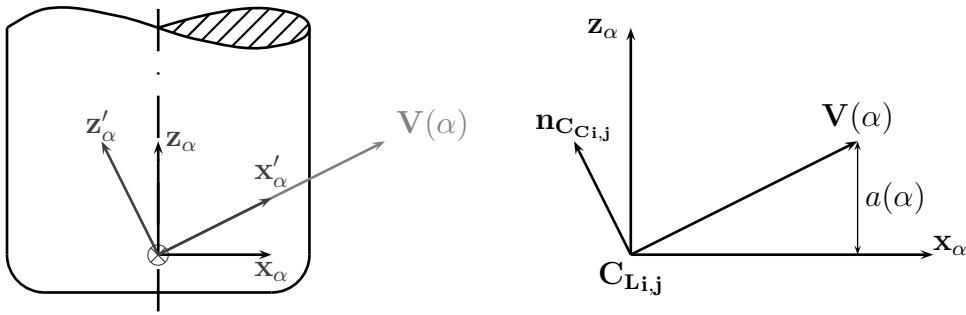


Figure 2.43 – Définition du repère $\mathcal{R}'_\alpha$ et du paramètre $a(\alpha)$

Pour chaque direction $\mathbf{x}_\alpha$, nous pouvons définir une courbe enveloppe correspondante en résolvant $\mathbf{V}(\alpha) \cdot \mathbf{n}_{\text{outil}} = 0$. Nous obtenons l'expression de la courbe enveloppe de l'outil :

$$\mathbf{C}_e(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix} \left(R - r \left(1 - \frac{a(\alpha)}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a(\alpha)^2}} \right) \cos \varphi \right) \\ \left(R - r \left(1 - \frac{a(\alpha)}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a(\alpha)^2}} \right) \sin \varphi \right) \\ \frac{-r \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + a(\alpha)^2}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\alpha} \quad (2.36)$$

$$\text{avec } a(\alpha) > 0 \quad , \quad \varphi \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{et } \alpha \in [0, \pi]$$

Nous traitons ici le cas où l'outil monte ($a(\alpha) > 0$), mais nous pourrions traiter de la même manière le cas où l'outil descend ($a(\alpha) < 0$).

On considère ensuite le repère $\mathcal{R}'_\alpha(\mathbf{C}_{L,i,j}, \mathbf{x}'_\alpha, \mathbf{y}'_\alpha, \mathbf{z}'_\alpha)$ que l'on déduit du repère $\mathcal{R}_\alpha$ par une rotation autour de l'axe $\mathbf{y}_\alpha$ et qui admet pour premier axe un vecteur colinéaire à l'avance $\mathbf{V}(\alpha)$ (figure 2.43) :

$$\begin{aligned} - \mathbf{x}'_\alpha &= \frac{V(\alpha)}{\|V(\alpha)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+a(\alpha)^2}} \cdot \mathbf{x}_\alpha + \frac{a(\alpha)}{\sqrt{1+a(\alpha)^2}} \cdot \mathbf{z}_\alpha \\ - \mathbf{y}'_\alpha &= \mathbf{y}_\alpha \\ - \mathbf{z}'_\alpha &= \frac{-a(\alpha)}{\sqrt{1+a(\alpha)^2}} \cdot \mathbf{x}_\alpha + \frac{1}{\sqrt{1+a(\alpha)^2}} \cdot \mathbf{z}_\alpha \end{aligned}$$

Nous exprimons la courbe enveloppe $\mathbf{C}_e(\varphi, \alpha)$ dans le repère $\mathcal{R}'_\alpha$ et la projetons sur le plan $(\mathbf{y}'_\alpha, \mathbf{z}'_\alpha)$. En appelant $\mathbf{C}_{e\mathcal{R}'_\alpha}(\varphi, \alpha)$ l'expression de la courbe enveloppe que nous avons projetée sur $(\mathbf{y}'_\alpha, \mathbf{z}'_\alpha)$ et que nous exprimons dans le repère $\mathcal{R}'_\alpha$, on calcule le rayon effectif $R_{eff}(\phi, \alpha)$ de la manière suivante :

$$R_{eff}(\varphi, \alpha) = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{C}_{e\mathcal{R}'_\alpha}(\varphi, \alpha)}{\partial \varphi} \right)^3}{\left\| \frac{\partial \mathbf{C}_{e\mathcal{R}'_\alpha}(\varphi, \alpha)}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial^2 \mathbf{C}_{e\mathcal{R}'_\alpha}(\varphi, \alpha)}{\partial \varphi^2} \right\|} \quad (2.37)$$

Le calcul du rayon effectif doit se faire au point de contact $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$. L'outil étant tangent au point de contact, la normale en $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$ est confondue avec la normale de l'outil en ce point (figure 2.44). Toutes les normales au tore passant par l'axe de l'outil, on calcule l'angle φ caractérisant le point de contact par :

$$\cos(\varphi) = \frac{-\mathbf{n}_{\mathbf{C}_{i,j}\mathcal{R}_\alpha} \cdot \mathbf{x}_\alpha}{\left\| \mathbf{n}_{\mathbf{C}_{i,j}\mathcal{R}_\alpha} \right\|} \quad (2.38)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{-\mathbf{n}_{\mathbf{C}_{i,j}\mathcal{R}_\alpha} \cdot \mathbf{y}_\alpha}{\left\| \mathbf{n}_{\mathbf{C}_{i,j}\mathcal{R}_\alpha} \right\|} \quad (2.39)$$

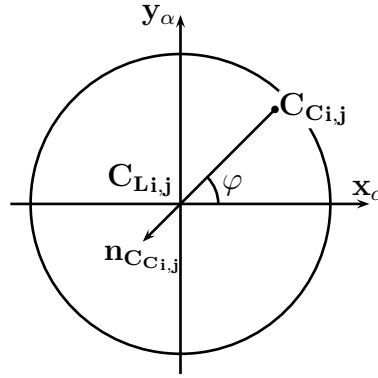


Figure 2.44 – Définition de l'angle φ

En reportant dans l'équation 2.37 du rayon effectif la valeur de l'angle φ déduite des expressions 2.38 et 2.39, nous pouvons calculer, quel que soit l'angle α , la valeur du rayon effectif au point de contact $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{i,j}}$.

En considérant ensuite que la hauteur de crête h_c reste petite en fonction des dimensions de l'outil, on peut considérer que pour calculer la valeur du pas transversal, on va garder la valeur du rayon effectif caractérisant le point de contact. On notera la valeur retenue R_e . Les paramètres influents du rayon effectif seront étudiés par la suite.

2.3.5.3 Calcul du pas transversal

L'idée de ce paragraphe est d'évaluer la valeur du pas transversal à partir du rayon effectif, ceci afin de pouvoir qualifier, par la suite, l'efficacité du posage de la surface. Pour évaluer le pas transversal, on suppose tout d'abord que la surface a un rayon de courbure ρ localement constant dans le plan $(\mathbf{y}'_\alpha, \mathbf{z}'_\alpha)$ et grand devant les dimensions de l'outil. Le rayon de courbure est fonction de l'angle α car en faisant varier α de 0 à 2π , le rayon de courbure de la surface va varier. En se plaçant dans le plan $(\mathbf{y}'_\alpha, \mathbf{z}'_\alpha)$ perpendiculaire à l'avance $\mathbf{V}$, dans le triangle OAB on a (figure 2.45) :

$$R_e^2 = (R_e + \rho)^2 + (\rho + h_c)^2 - 2(R_e + \rho)(\rho + h_c)\cos(\beta)$$

Avec :

$$\frac{P_t}{2} = (\rho + R_e)\sin(\beta)$$

En éliminant l'angle β entre les deux relations, puis en négligeant la hauteur de crête h_c devant le rayon de courbure ρ , la relation sur le pas devient :

$$P_t = 2R_e\sqrt{2h_c\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_e}\right)}$$

Nous voyons sur cette relation l'influence directe du rayon effectif sur le pas.

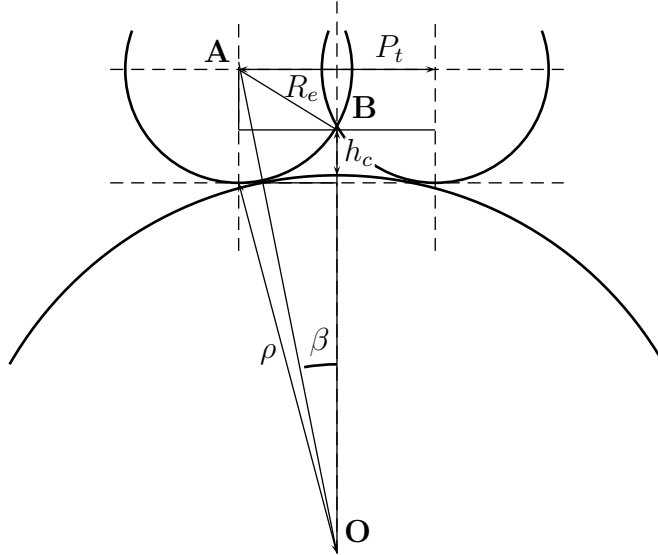
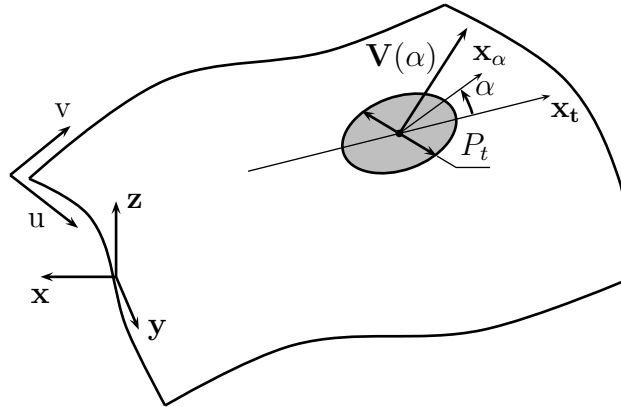


Figure 2.45 – Evaluation du pas transversal P_t

Le rayon effectif R_e dépendant de l'angle α , le pas transversal calculé est lui aussi fonction de l'angle α . Pour un point donné de la surface, on peut reporter les valeurs du pas transversal pour l'ensemble des valeurs de α . On peut tracer autour de chaque point considéré une surface représentative S_{r_i} des différents pas transversaux possibles (figure 2.46).

Figure 2.46 – Pas transversaux P_t possibles en un point

2.3.6 Analyse des paramètres influents sur le rayon effectif

2.3.6.1 Introduction

L'analyse des paramètres influents sur le rayon effectif de l'outil a été menée dans le but de trouver un critère de posage intéressant du point de vue de la planification isocrête. Les résultats obtenus dans cette étude peuvent néanmoins être utilisés dans un autre domaine : le choix d'une géométrie d'outil et de ses dimensions.

Il existe plusieurs types d'outils qui sont couramment utilisés en fraisage 3 axes : les outils à bout sphérique, à bout plat ou torique. Il n'existe, à ce jour, aucune étude importante portant sur le choix entre ces différentes géométries d'outil. A l'inverse, de nombreux articles abordent le choix des dimensions d'un outil à bout sphérique : choix basé sur les problèmes d'interférences locales (analyse des courbures locales), sur l'optimisation de la longueur totale du trajet effectué par l'outil.

Dans le cadre d'une planification isocrête, le choix d'un outil (sphérique ou torique) doit être corrélé avec la planification de trajectoires à hauteur de crête constante dont l'objectif peut être résumé par la phrase suivante : « minimiser les opérations de finition et de polissage sur l'ensemble de la surface tout en maintenant une productivité élevée ».

Ceci implique que l'outil choisi doit être optimal d'un point de vue productivité et du point de vue planification isocrête. L'analyse menée doit donc être capable de donner la géométrie d'outil à utiliser en fonction de la surface à usiner et de son posage.

2.3.6.2 Choix d'une géométrie d'outil en fonction du rayon effectif

En reprenant l'étude menée sur le rayon effectif, nous avons analysé le choix entre l'outil torique (rayon d'outil R et rayon de tore r), l'outil sphérique (rayon d'outil R) et l'outil à bout plat (rayon d'outil R et rayon de tore nul).

Nous nous sommes placés dans le cadre de l'usinage d'un plan incliné (figure 2.47). Plusieurs directions d'avance peuvent être choisies pour aborder l'usinage. Ces directions sont repérées par un angle d'attaque α , l'angle $\alpha = 0$ correspondant à la direction de plus grande pente (usinage en montant ou en descendant), l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ étant perpendiculaire à la direction de plus grande pente (usinage horizontal).

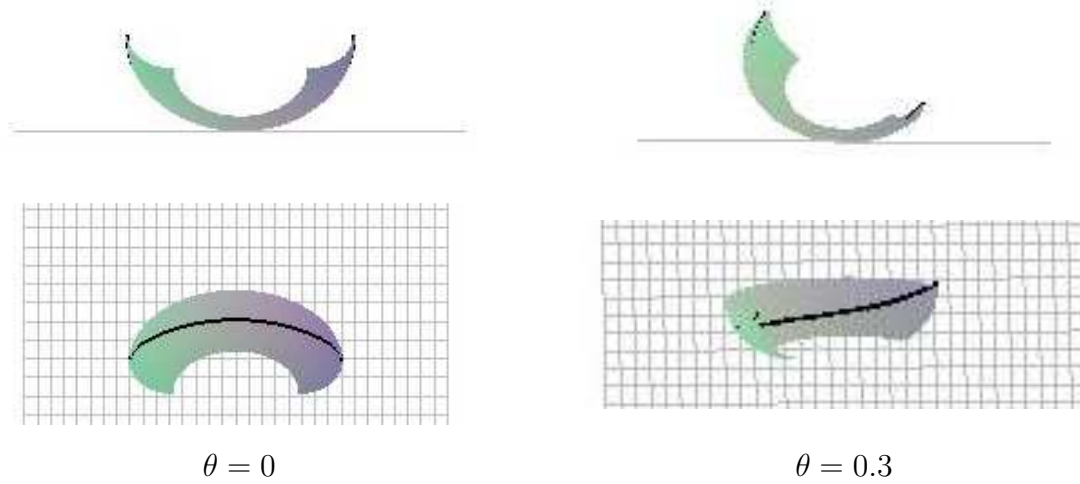


Figure 2.47 – Représentation de l'outil pour différents angles θ

La première constatation à effectuer est la suivante : pour une géométrie et des dimensions d'outil fixés, pour une inclinaison du plan fixée, la direction d'attaque influe directement sur la valeur du rayon effectif. Pour chaque direction d'attaque α , nous pouvons calculer le rayon effectif de l'outil torique. L'ensemble des rayons effectifs calculés est représenté sur la figure 2.48. Les deux graphiques présentés sont établis pour un outil torique de rayon $R = 5$ et de rayon de tore $r = 2$. On représente sur les mêmes graphiques le rayon effectif d'un outil sphérique de rayon $R = 5$: celui-ci est constant et égal à 5 quelle que soit la direction d'attaque α .

Nous pouvons définir un domaine angulaire $[\alpha_1, \alpha_2]$ où l'outil torique est plus intéressant que l'outil sphérique du point de vue rayon effectif : $(R_e)_{torique} > (R_e)_{sphérique}$. Les deux graphiques amènent les réflexions suivantes :

- lorsque le plan a une inclinaison faible, l'outil torique est très intéressant du point de vue rayon effectif : $\frac{(R_e)_{torique}}{(R_e)_{sphérique}} \simeq 6$ pour la position $\alpha = 0$. L'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ où l'outil

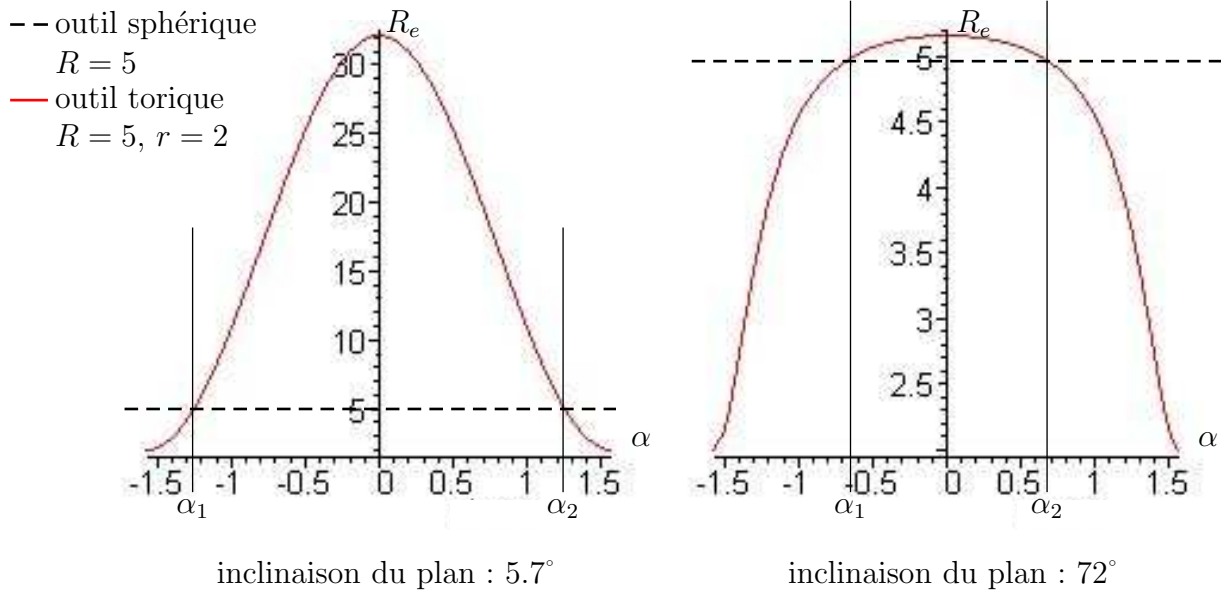


Figure 2.48 – Représentation du rayon effectif pour différents angles α

torique est plus performant est extrêmement large : de -80° à 80° . L'outil sphérique sera plus performant pour une direction d'attaque comprise entre 80° et 90° d'une part et -80° et -90° d'autre part, résultat logique vu que pour un déplacement quasi horizontal de l'outil, le rayon effectif de l'outil torique est proche du rayon de tore.

- lorsque le plan a une forte inclinaison, l'outil torique n'est plus aussi intéressant du point de vue rayon effectif : $\frac{(R_e)_{torique}}{(R_e)_{sphérique}} \simeq 1$ sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$. En dehors de cet intervalle, le rayon effectif de l'outil torique chute jusqu'à atteindre la valeur du rayon de tore. L'outil sphérique sera donc plus intéressant sur ce second exemple.

Il faut noter que l'analyse est purement géométrique et qu'elle n'est menée que pour deux inclinaisons de plan. Nous ne tirons aucune conclusion pour l'instant.

2.3.6.3 Choix d'une géométrie d'outil en fonction de l'inclinaison

L'analyse est menée pour un outil torique de rayon $R = 5$ et de rayon de tore $r = 2$ d'une part, et pour un outil sphérique de rayon $R = 5$ d'autre part. Le but de cette section est de généraliser les résultats précédents, à savoir :

- pour une faible inclinaison du plan, l'outil torique est plus intéressant que l'outil sphérique du point de vue rayon effectif sur un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ à définir, en dehors de cet intervalle l'outil sphérique redevient intéressant,
- pour une forte inclinaison du plan, l'outil sphérique devient le plus intéressant du point

de vue rayon effectif. Sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ la différence entre les rayons effectifs des outils torique et sphérique n'est pas significative, les deux type d'outil sont équivalents du point de vue rayon effectif.

Nous représentons, sur un graphique en trois dimensions, les valeurs du rayon effectif en fonction de la direction d'attaque α , ceci pour plusieurs valeurs d'inclinaison (figure 2.49).

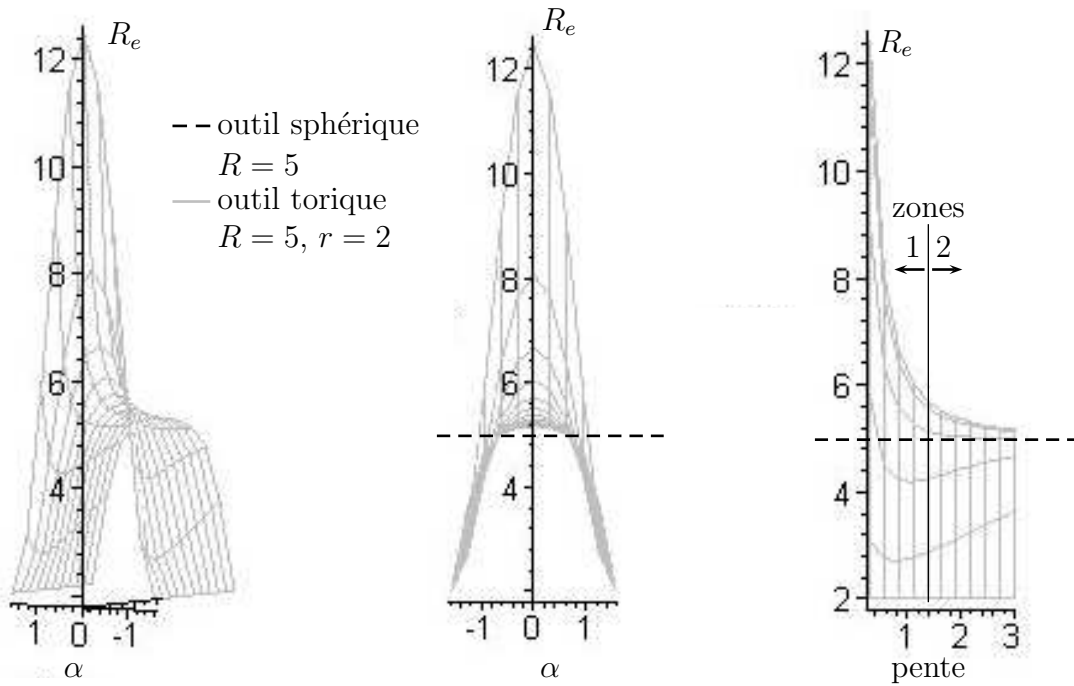


Figure 2.49 – Représentation du rayon effectif en fonction de l'inclinaison

On rappelle que l'étude menée est géométrique, elle ne prend pas en compte l'aspect cinématique de l'usinage. On distingue principalement deux zones sur la figure 2.49 :

- zone 1 : le rayon effectif de l'outil sphérique vaut 5 mm. Lorsque la direction d'attaque de l'outil est comprise entre -1 radian et 1 radian, le rayon effectif de l'outil torique est supérieur ($\frac{(R_e)_{torique}}{(R_e)_{sphérique}} \simeq 2.5$ pour $\alpha = 0$). En dehors de cet intervalle, l'outil sphérique est le plus intéressant du point de vue rayon effectif.
- zone 2 : quelle que soit la direction d'attaque, le rayon effectif de l'outil sphérique vaut 5 mm, celui de l'outil torique varie entre 2 mm et 6 mm. L'apport de l'outil torique n'est pas suffisamment significatif, il sera ici plus intéressant de choisir un outil sphérique.

La limite entre ces deux zones est approximative. Dans le cadre de notre étude, cette limite se situe pour une pente de 1.5 environ, soit une inclinaison de 56° .

Grâce à cette étude, on peut proposer la géométrie d'outil qui permettra d'être le plus productif en fonction de l'inclinaison rencontrée sur la surface et des directions d'attaque.

Prenons deux exemples :

- Exemple 1 : on désire usiner une poche. On peut décomposer les surfaces à usiner en deux ensembles : les parois latérales de la poche qui sont fortement inclinées et le fond de la poche qui est proche de l'horizontale. Pour usiner le fond de la poche, la pente est très faible, l'outil torique est le plus intéressant. Pour les parois latérales, soit on usine les parois avec des trajectoires horizontales et l'outil sphérique est le plus intéressant, soit on usine les parois en « montant / descendant » et l'outil torique redevient intéressant. Néanmoins l'apport de l'outil torique n'est pas conséquent et dans la majeure partie des cas, l'outil sphérique sera choisi : il est plus facile de gérer les trajectoires horizontales que les trajectoires en « montant / descendant ».
- Exemple 2 : on désire usiner la surface suivante (figure 2.50) :

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 60 \cdot v \\ \rho_0 \cdot \cos \left((2u - 1) \frac{\pi}{2} \right) \\ \rho_0 \cdot \sin \left((2u - 1) \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} \quad \text{avec : } \rho_0 = 50mm \quad (2.40)$$

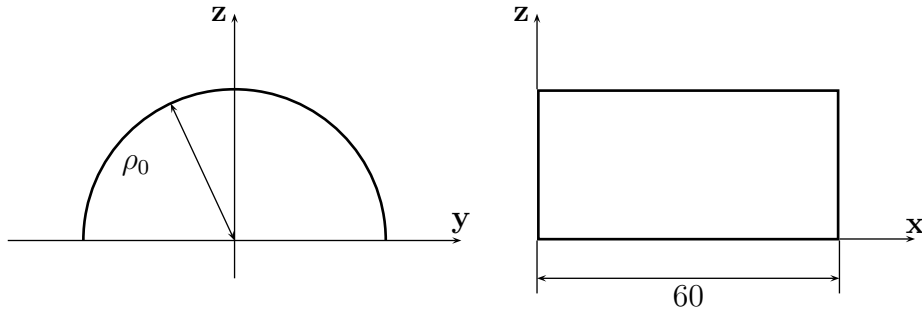


Figure 2.50 – Surface « tuile »

Les « bords » de la surface sont fortement inclinées alors que sur le « dessus » on observe une zone horizontale. L'usinage des « bords » de la surface peut être effectué avec un outil sphérique, alors que le « dessus » sera usiné avec un outil torique. Ceci implique d'avoir des trajectoires compatibles avec cette division de la surface.

2.3.6.4 Choix des dimensions d'un outil

2.3.6.4.1 Influence du rayon de tore r et du rayon d'outil R

On considère la surface précédemment rencontrée :

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 60 \cdot v \\ \rho_0 \cdot \sin \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) \\ \rho_0 \cdot \cos \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) + 20 \cdot v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} \quad (2.41)$$

avec $(u,v) \in [0,1]^2$, $\rho_0 = 50$

Le paramètre Δz caractérisant la surface sera successivement pris égal à 0, 10, 20 lors des différents essais réalisés. La première trajectoire de la planification est construite sur l'isoparamétrique $v = 0$. Les figures 2.51 et 2.52 illustrent l'influence que peut avoir le rayon

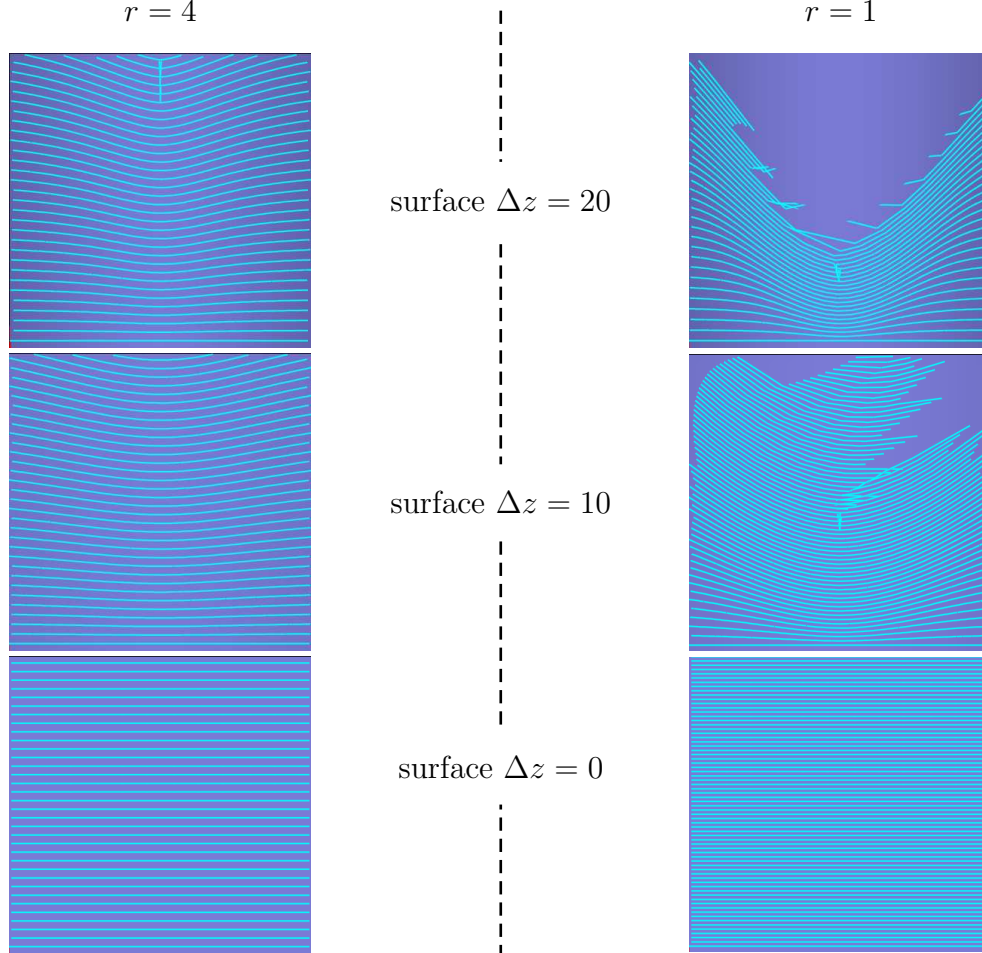


Figure 2.51 – Variation du rayon de tore r ($R = 5$)

de tore r et le rayon d'outil sur la planification. On retrouve des résultats précédemment évoqués : si l'outil torique se déplace perpendiculairement à la pente, son rayon effectif est le rayon du tore : lorsque r augmente, le nombre de trajectoires diminue, le rayon d'outil n'influe pas sur le nombre de trajectoires (surface « $\Delta z = 10$ » sur les figures 2.51 et 2.52).

Au niveau de la planification isocrête, on constate que quelles que soient les dimensions de l'outil, lorsque le rayon de tore est proche du rayon d'outil, les variations des pas transversaux (dérives transversales) entre deux trajectoires ont tendance à diminuer et le bouclage des trajectoires, s'il a lieu, intervient plus tard dans la planification. Ce résultat est logique et s'explique de la manière suivante : lorsque le rayon de tore devient proche du rayon d'outil,

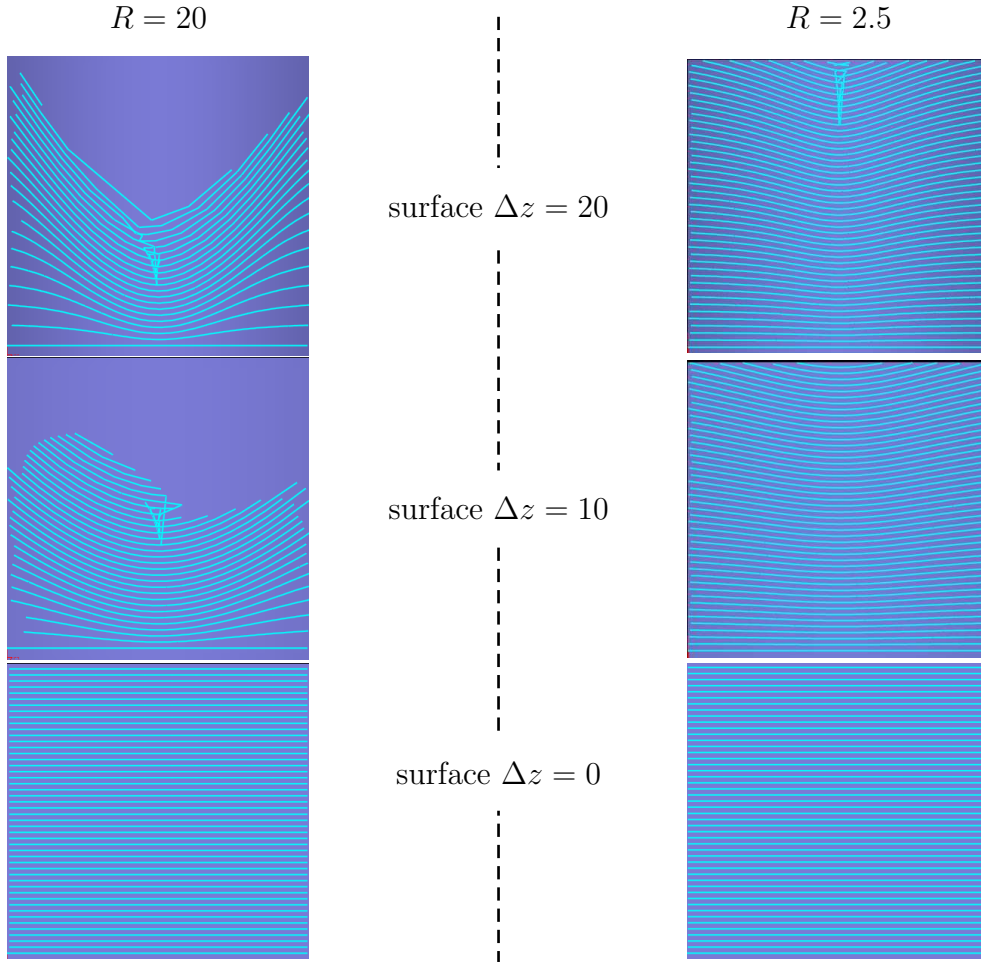


Figure 2.52 – Variation du rayon d'outil R ($r = 2$)

l'outil torique a une géométrie qui se rapproche de l'outil sphérique. L'outil sphérique a un rayon effectif constant est égal à son rayon d'outil, le pas transversal entre deux trajectoires variera moins (seule la géométrie de la surface le fait varier).

Du point de vue planification de trajectoires, on peut conclure de la manière suivante :

- pour les trajectoires présentant des variations de la normale dans le plan formé par l'axe de l'outil et par l'avance, le pas transversal entre deux trajectoires varie et risque de créer, à terme, un bouclage des trajectoires. Pour minimiser le risque de bouclage, la géométrie d'outil préconisée est la suivante : outil sphérique de rayon R ou un outil torique de rayon de tore r proche du rayon d'outil R .
- pour les trajectoires présentant peu de variations de la normale dans le plan formé par l'axe de l'outil et par l'avance, le pas transversal varie peu et le risque de bouclage est diminué. Dans ce cas, on choisit la géométrie d'outil et les dimensions qui permettent d'être le plus productif : outil offrant le rayon effectif le plus important.

2.3.6.4.2 choix du rayon de tore r et du rayon d'outil R

L'analyse est menée pour un outil torique de rayon $R = 6$, le rayon de tore est variable. Lorsque le rayon de tore est égal au rayon d'outil nous obtenons un outil sphérique, lorsqu'il tend vers zero nous obtenons un outil deux tailles.

Nous représentons, sur un graphique en trois dimensions, les valeurs du rayon effectif en fonction du rayon de tore r (figure 2.53). Le choix de l'outil n'est pas immédiat : suivant la direction d'attaque α , suivant l'inclinaison de la surface à usiner, l'outil à utiliser est différent :

- inclinaison forte (pente 3 sur la figure 2.53) : quelle que soit la direction d'attaque, le rayon effectif de l'outil sphérique vaut 6 mm, celui de l'outil deux tailles ($r = 0$) varie entre 0 mm et 6.5 mm. L'apport de l'outil deux tailles n'est pas suffisamment significatif du point de vue rayon effectif, il sera ici plus intéressant de choisir un outil sphérique.
- inclinaison faible (pente 0.3 sur la figure 2.53) : le rayon effectif de l'outil sphérique vaut 6 mm. Lorsque la direction d'attaque de l'outil est comprise entre -1 radian et 1 radian environ, le rayon effectif de l'outil deux tailles est très supérieur ($\frac{(Re)_{2tailles}}{(Re)_{sphérique}} \simeq 3.5$ pour $\alpha = 0$). En dehors de cet intervalle, l'outil sphérique est le plus intéressant du point de vue rayon effectif.

Pour des surfaces fortement inclinées, l'outil sphérique est le bon choix car il offre un rayon effectif constant quelle que soit la direction d'attaque. L'apport de l'outil deux tailles n'est pas suffisant pour justifier son utilisation.

Pour des surfaces faiblement inclinées, la discussion est plus complexe : suivant la direction d'attaque de l'outil, l'une ou l'autre des géométrie est intéressante. Le choix de l'outil dépend donc de la construction des trajectoires. Le gain que représente l'outil deux tailles du point de vue productivité nous incite à choisir cette géométrie ou une géométrie proche avec un outil torique présentant un rayon de tore faible. Mais la solution finale est incertaine, il est conseillé de calculer les planifications pour les deux géométries d'outil et de conclure seulement après.

2.3.7 Seconde conclusion sur le posage de la surface

Avec l'ensemble des études menées, on a vu l'intérêt d'avoir une surface « à plat ». Dans la pratique, pour mettre en place ce raisonnement, on va opérer de la manière suivante :

- dans un premier temps, on choisit un certain nombre de point sur la surface à usiner. Pour cela, on se base sur les courbes isoparamétriques en u et en v à intervalles réguliers et on considère les points qui se trouvent à l'intersection des différentes courbes isopa-

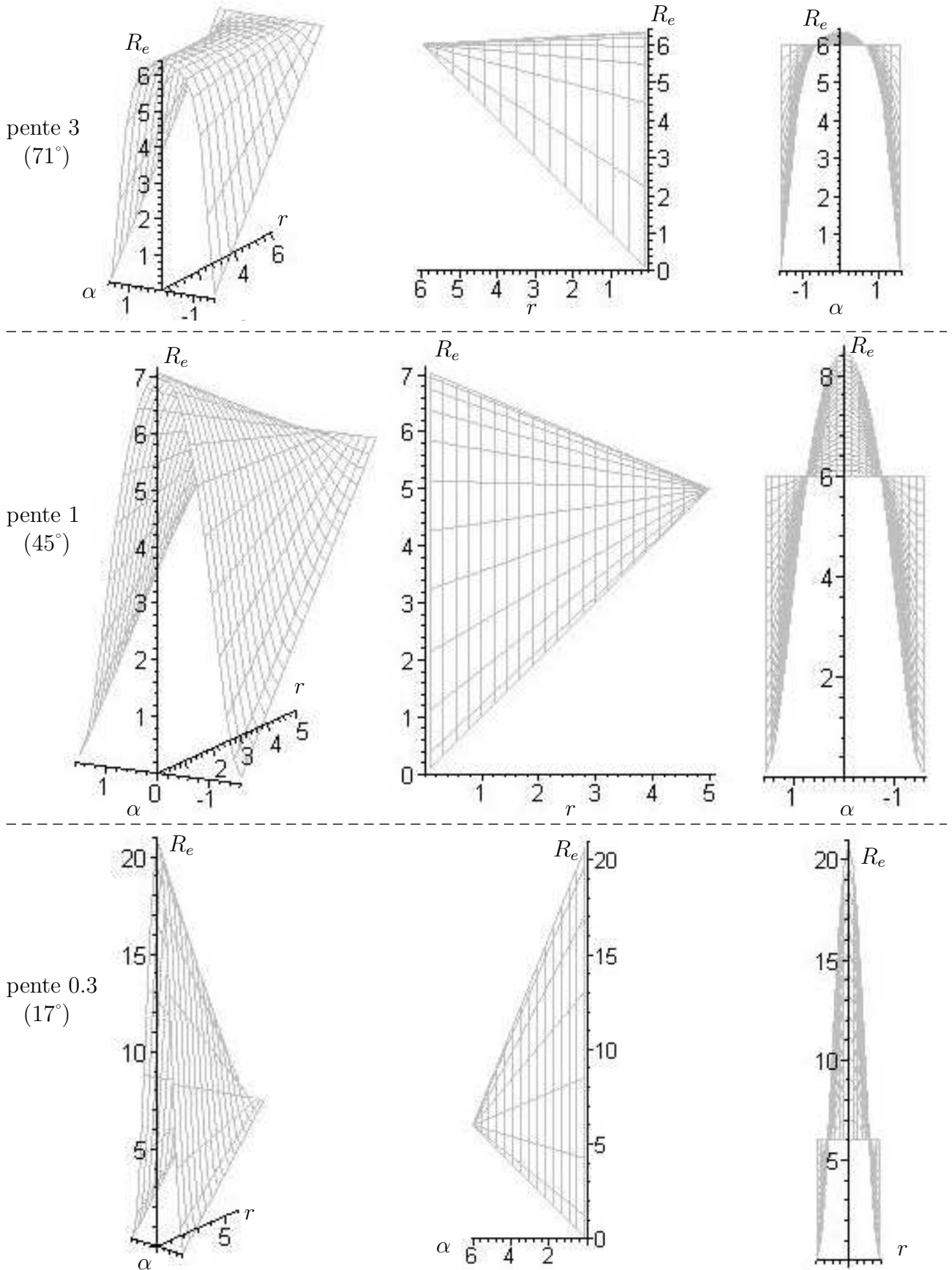


Figure 2.53 – Représentation du rayon effectif en fonction du rayon de tore

ramétriques (figure 2.54).

- pour chacun des points considérés, on évalue l'ensemble des pas transversaux possibles et on calcule les surfaces S_{r_i} (figure 2.54).
- en additionnant l'ensemble des surfaces S_{r_i} calculées en chacun des points, on obtient une valeur représentative du posage de la surface : $\sum_{i=1}^n S_{r_i}$, n étant le nombre total de point où les surfaces S_{r_i} sont évaluées.

Ainsi, en effectuant les opérations précédentes pour différents posages de la surface, on peut évaluer le posage qui maximisera la somme de ces surfaces représentatives. Ceci est intéressant dans le cadre d'une planification isocrête, car en maximisant la somme de ces surfaces, on aura, par la suite, des pas transversaux potentiellement plus important quelle que soit la première trajectoire choisie, et donc un temps d'usinage moindre.

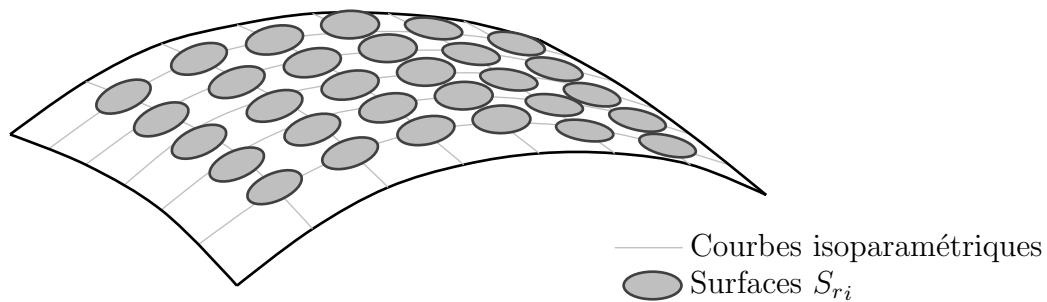


Figure 2.54 – Quadrillage de la surface

2.3.8 Limites angulaires du posage imposées par l'usinage

Les deux critères établis pour le choix du posage de la surface ne prennent pas en compte les limitations éventuelles provenant du comportement de l'outil lors de l'usinage. En jouant sur l'inclinaison de la pièce, on change les conditions de chargement sur l'outil, ce qui se traduit par un changement du comportement dynamique de l'outil. Dans certains cas, avec l'utilisation d'outils de faibles rapport diamètre sur longueur, nous pouvons observer facilement l'apparition de phénomènes vibratoires. L'amplitude des vibrations change en fonction de l'inclinaison de la surface et la qualité de la surface usinée s'en trouve affectée. Une série d'essais a donc été menée afin de mieux comprendre le comportement de l'outil, le but étant, à terme, de pouvoir intégrer les résultats obtenus à la planification de trajectoire isocrêtes.

2.3.8.1 Présentation des essais

Nous avons fait deux campagnes d'essais, l'inclinaison du plan sur lequel s'effectue les usinages est variable :

- 1^{ère} campagne : usinages en montant ou en descendant avec une passe « centrale », une passe où l'outil travaille en opposition et une passe où l'outil travaille en avalant (figure 2.55). Les essais ont été menés pour les inclinaisons suivantes : angle allant de 0° à 60°, par 10°,

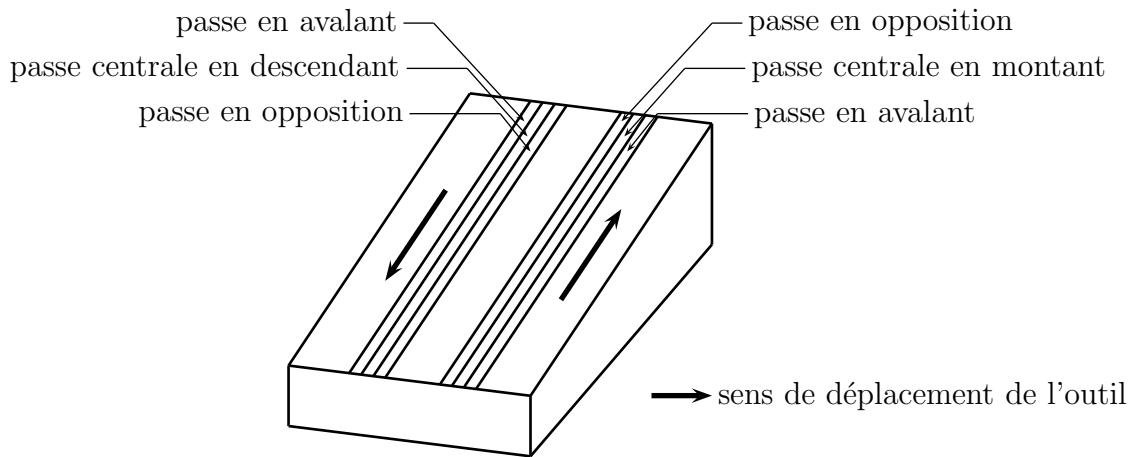


Figure 2.55 – Première campagne d'essais

- 2^{nde} campagne : usinages en rainurage horizontal avec une passe centrale en pleine matière, deux passes au-dessus de la rainure centrale avec un usinage en avalant et un usinage en opposition, puis, deux passes en-dessous de la rainure centrale avec un usinage en avalant et un usinage en opposition (figure 2.56). Les essais ont été menés pour les inclinaisons suivantes : angle allant de 0° à 80°, par 10°.

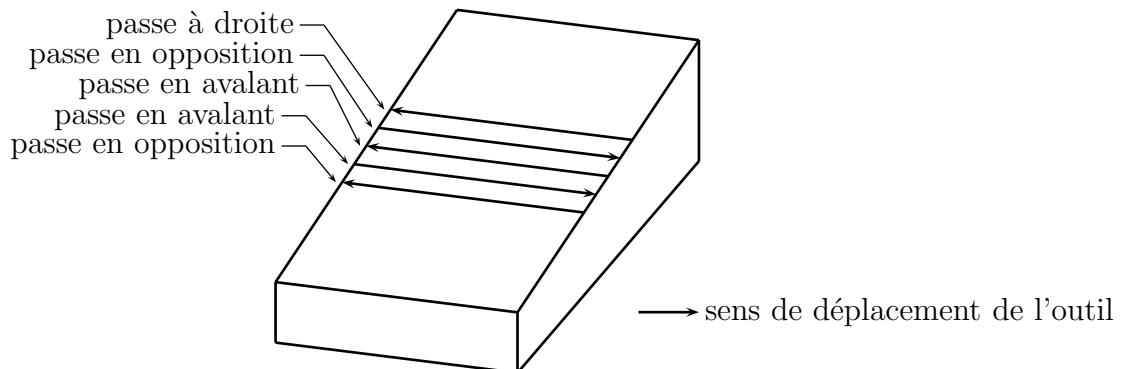


Figure 2.56 – Deuxième campagne d'essais

Les deux campagnes d'essais se sont déroulées dans les conditions suivantes :

- Utilisation d'une Machine Outil à Commande Numérique à 5 axes (DMU 50 Evo),
- Matériau constituant la pièce : C40,
- Outil : outil torique de rayon extérieur $R=4$ mm et de rayon de tore $r=2.5$ mm, à plaquette carbure ronde,
- Vitesse de rotation de la broche : $N=4775$ tr/mn correspondant à la vitesse de coupe préconisée par le fabricant $V_c = 120$ m/mn,
- Profondeur de passe : 1 mm,
- Avance par dent $f_z = 0.1$ mm par dent,
- hauteur de crête $h_c = 1$ mm.

Durant tous les essais, une mesure acoustique de l'usinage est réalisée. Les moyens de mesure acoustiques utilisés sont décrits ci-après :

- un micro dynamique Shure SM58 (référéncé 1 sur la figure 2.58) à directivité cardioïde placé dans l'enceinte au dessus de la zone d'usinage. Sa grande robustesse est un atout pour pouvoir s'approcher au plus près de l'outil.
- un micro statique Stagg (référéncé 2 sur la figure 2.58) à large membrane à directivité cardioïde, placé à l'extérieur de l'enceinte de travail au vu de sa grande fragilité. La porte était légèrement ouverte, le micro pointant vers la zone d'usinage. L'intérêt de ce type de micro est sa grande dynamique, sa grande sensibilité et sa réponse large et plate en fréquence. Il doit par ailleurs être monté sur pied et suspension pour l'isoler de sa structure.

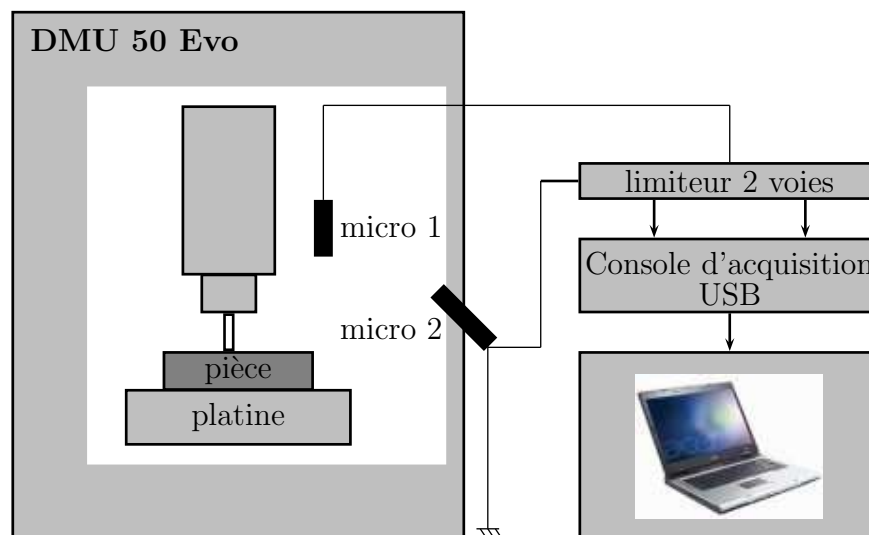
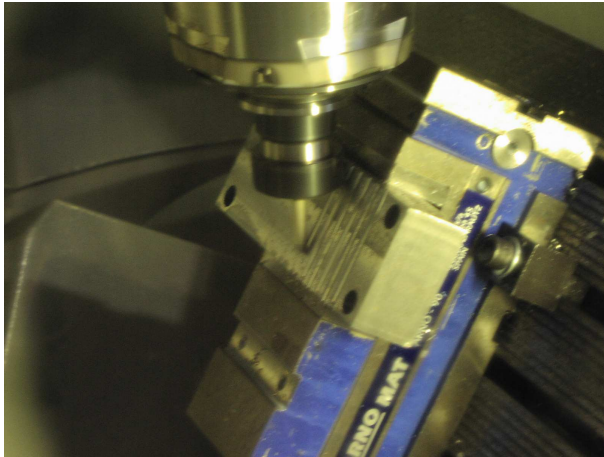
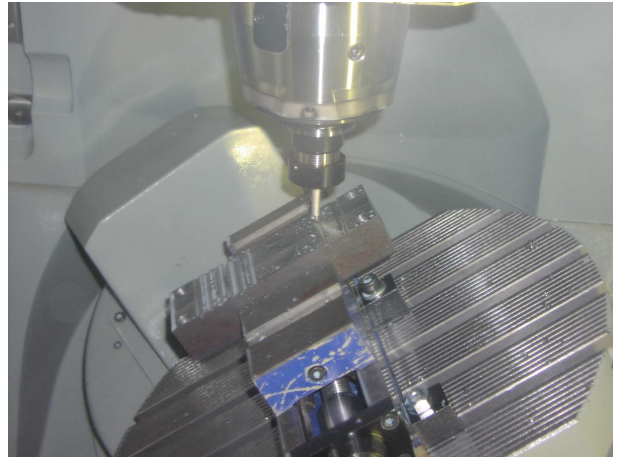


Figure 2.57 – Schématisation des essais

1^{ère} campagne
Usinages montant / descendant



2^{ème} campagne
Usinages horizontaux



Chaine d'acquisition acoustique

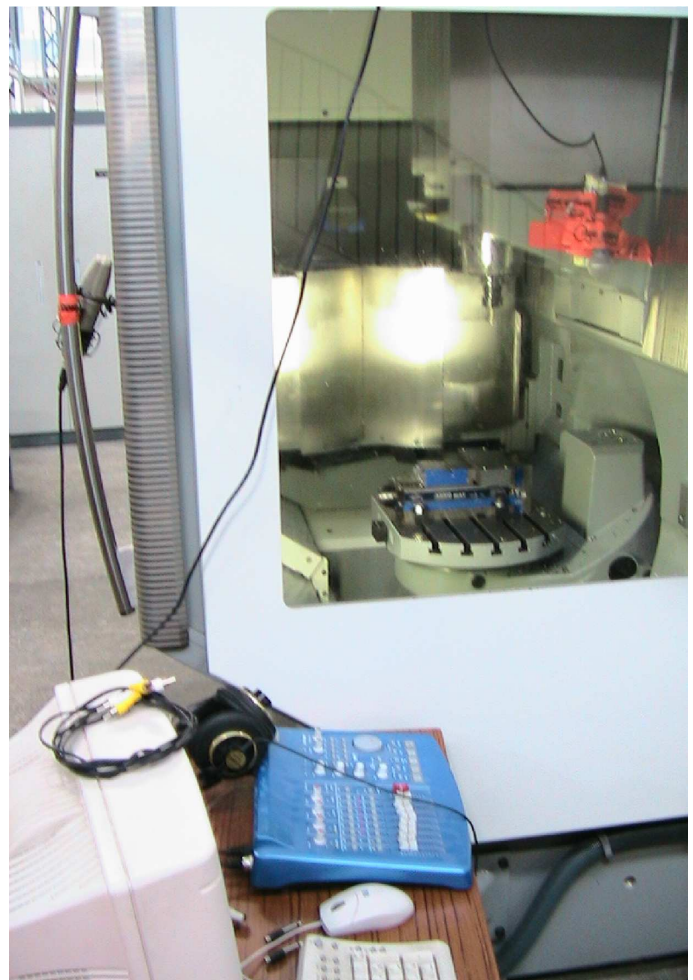


Figure 2.58 – Schématisation des essais

Les signaux analogiques issus des deux micros ont transité par un préamplificateur/limiteur stéréo avant d'être numérisés. La chaîne de numérisation est constituée d'une interface USB2 4 voies TASCAM US428 et d'un PC portable équipé d'un logiciel d'acquisition audio spécifique.

Nous avons privilégié des essais équipés de moyens de mesures acoustiques plutôt que des capteurs piézo-électriques (accéléromètres) afin de s'affranchir au mieux des vibrations machines. Seules les vibrations outils nous intéressent. La pièce a volontairement été choisie massive par rapport à l'outil afin de s'affranchir des vibrations de la pièce.

2.3.8.2 Mesure et analyses

En plus de l'exploitation acoustique, tous les usinages ont été observés finement par analyse systématique au projecteur de profil, par passage au rugosimètre, par analyse visuelle des stries et par corrélation des surfaces vibrées avec l'analyse acoustique. Du point de vue planification de trajectoires, la synthèse des résultats de ces mesures a apporté plusieurs éléments intéressants. Il est à noter que toute extrapolation de ces résultats à d'autres outils et à d'autres matériaux reste à faire.

Lors de la première campagne d'essais, en observant les usinages effectués par l'outil en montée, nous avons observé de nombreux défauts : stries longitudinales, surface vibrée, mauvaise rugosité, et cela quelle que soit l'inclinaison du plan. La réponse acoustique met également en évidence de fortes vibrations lors de l'usinage (figure 2.59).

Le signal filtré montre différents pics : les 3 premiers correspondent au fondamental (4775 tr/mn soit 80 Hz) et aux première et seconde harmoniques (160 Hz et 240Hz) de la vitesse de rotation de l'outil. Le 4^{ème} pic (4.7kHz) n'est plus une harmonique de la fréquence de rotation, il correspond au premier mode propre de l'outil.

La valeur du premier mode propre de l'outil peut être approximée de manière théorique en modélisant l'outil par une poutre en vibrations transversales (solicitations de flexion). La difficulté est de modéliser le contact entre l'outil et la matière au niveau de la zone de coupe. En considérant successivement les deux modélisations des conditions limites suivantes : outil encastré/libre ou encastré/appuyé, on obtient des valeurs du premier mode propre qui encadrent la valeur trouvée :

- modèle encastré / libre : $\omega^2 = 12.36 \frac{EI_z}{\rho SL^4}$ soit une fréquence de 3.6kHz,
- modèle encastré / appuyé : $\omega^2 = 237 \frac{EI_z}{\rho SL^4}$ soit une fréquence de 957kHz,

La modélisation des conditions limites de l'outil est entre l'appui (liaison ponctuelle) et l'absence d'appui (pas de liaison). La réalité correspond à une modélisation du contact entre l'outil et la matière par un appui élastique (raideur).

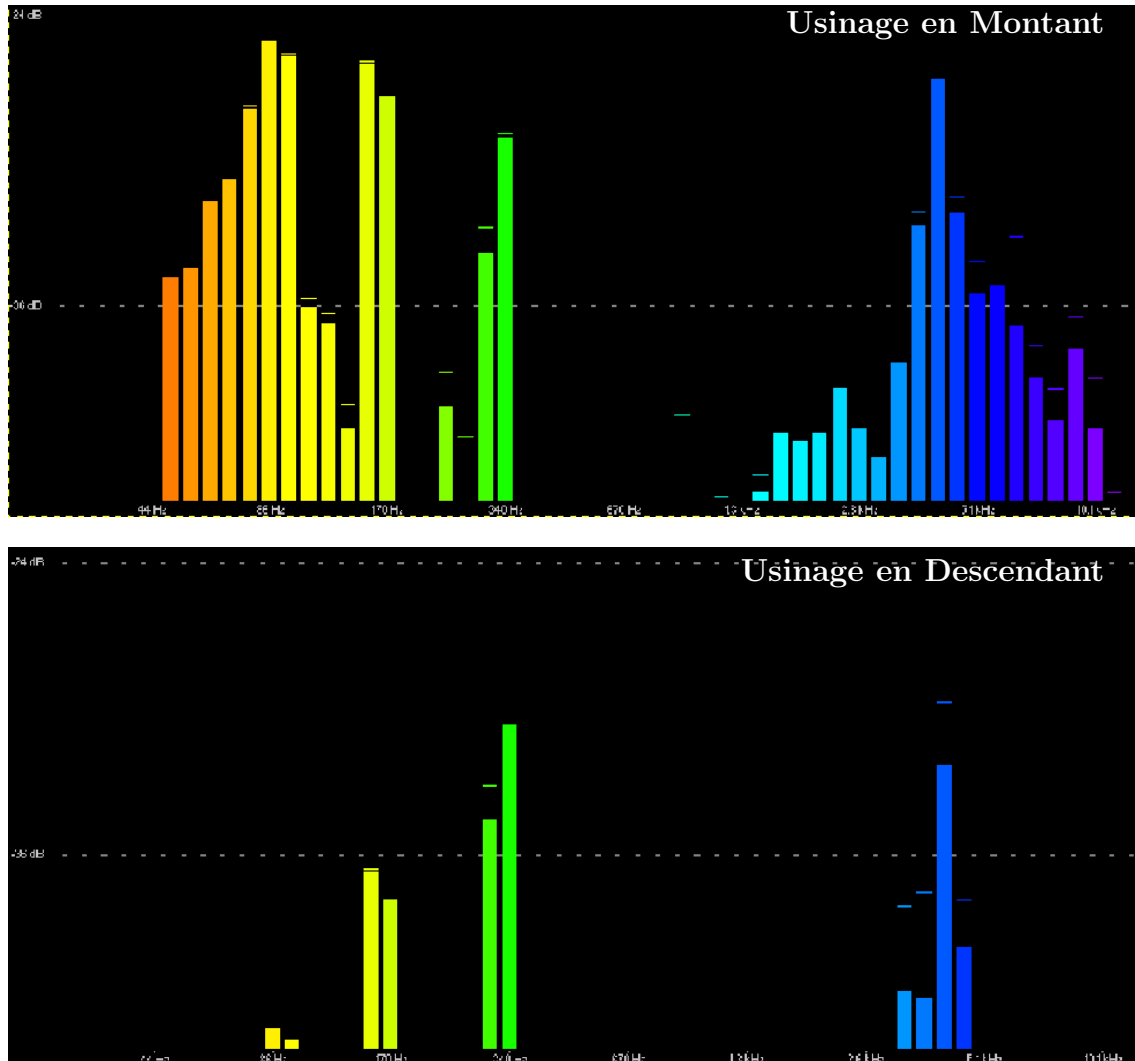


Figure 2.59 – Réponse acoustique

Le mode vibratoire observé lors de l'usinage en montant ne se réitère pas lors de l'usinage en descendant de l'outil. On peut expliquer cette différence de comportement de la manière suivante : lors de la descente de l'outil, celui-ci travaille en compression et les vibrations transversales sont amoindries. Ainsi, l'usinage en descendant est conseillé quelles que soient les dimensions de l'outil, alors que l'usinage en montant est déconseillé pour les petits rapports rayon sur longueur de l'outil. L'ensemble des usinages effectués et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2.42.

inclinaison	passe	<i>descente</i>				<i>montee</i>		
		R_a	a_p	h_c		R_a	a_p	h_c
10	rainurage	1.22	1.01			0.53	0.98	
	en avalant	1.06	1.02	0.1		0.58	0.98	0.1
	en opposition	0.62	1.01			0.76	0.98	
20	rainurage	0.9	0.97				0.95	
	en avalant	0.69	0.99	0.11			0.95	0.1
	en opposition	0.63	0.97				0.95	
30	rainurage	0.95	0.94				0.91	
	en avalant	0.7	0.94	0.11			0.91	0.11
	en opposition	1.02	0.92				0.91	
40	rainurage	0.62	0.91				0.88	
	en avalant	0.64	0.91	0.11			0.88	0.11
	en opposition	0.38	0.91				0.88	
50	rainurage	0.65	0.9				0.83	
	en avalant	0.58	0.9	0.11			0.86	0.095
	en opposition	0.32	0.9				0.86	
60	rainurage	0.67	0.89				0.84	
	en avalant	0.56	0.89	0.1			0.88	0.08
	en opposition	0.52	0.89				0.88	

(2.42)

La remarque suivante peut être faite sur les essais menés : à partir d'une inclinaison de 20°, la mesure de la rugosité R_a , n'a pas été effectuée pour les usinages en montant car les plus gros défauts sont parallèles à l'avance (vibrations), le rugosimètre donne une valeur faible non représentative de la surface usinée.

Lors de la deuxième campagne d'essais, les résultats s'orientent vers une augmentation des défauts quand α augmente et cela autant en opposition qu'en avalant. Ceci peut s'expliquer par l'apparition d'une dissymétrie au niveau de la zone d'usinage qui augmente avec l'inclinaison de la surface. Les mouvements horizontaux de l'outil dans des zones de forte inclinaison sont donc à éviter.

inclinaison	passe	R_t	R_a	a_p	h_c
10	rainurage	5	0.6	0.99	0.09
	en-dessous en opposition	4	0.2	0.99	
	en-dessous en avalant	4	0.6	0.99	
	au-dessus en opposition	3	0.2	0.99	0.09
	au-dessus en avalant	7	0.6	0.99	
20	rainurage	11	1.2	0.98	0.11
	en-dessous en opposition	2	0	0.98	
	en-dessous en avalant	8	0.6	0.98	
	au-dessus en opposition	3	0.2	0.98	0.11
	au-dessus en avalant	5	0.6	0.98	
30	rainurage	17	1.8	0.96	0.1
	en-dessous en opposition	2	0	0.97	
	en-dessous en avalant	7	0.6	0.97	
	au-dessus en opposition	3	0.4	0.97	0.1
	au-dessus en avalant	5	0.6	0.97	
40	rainurage	27	5.6	0.94	0.1
	en-dessous en opposition	3	0.2	0.96	
	en-dessous en avalant	4	0.6	0.96	
	au-dessus en opposition	7	0.8	0.95	0.11
	au-dessus en avalant	5	0.8	0.95	
50	rainurage	32	3	0.92	0.1
	en-dessous en opposition	2	0.2	0.94	
	en-dessous en avalant	5	0.6	0.94	
	au-dessus en opposition	7	1.2	0.93	0.1
	au-dessus en avalant	5	0.6	0.93	
60	rainurage	29	2.8	0.93	0.11
	en-dessous en opposition	5	0.8	0.93	
	en-dessous en avalant	10	1.4	0.93	
	au-dessus en opposition	7	1.4	0.93	0.11
	au-dessus en avalant	7	0.6	0.93	

(2.43)

50	rainurage	32	3	0.92	
	en-dessous en opposition	2	0.2	0.94	0.1
	en-dessous en avalant	5	0.6	0.94	
	au-dessus en opposition	7	1.2	0.93	0.1
	au-dessus en avalant	5	0.6	0.93	
60	rainurage	29	2.8	0.93	
	en-dessous en opposition	5	0.8	0.93	0.11
	en-dessous en avalant	10	1.4	0.93	
	au-dessus en opposition	7	1.4	0.93	0.11
	au-dessus en avalant	7	0.6	0.93	
70	rainurage	15	3	0.9	
	en-dessous en opposition	7	1.1	0.9	0.11
	en-dessous en avalant	7	1.4	0.9	
	au-dessus en opposition	9	1.6	0.9	0.11
	au-dessus en avalant	5	0.8	0.9	
80	rainurage	26	3	0.86	
	en-dessous en opposition	8	1.6	0.89	0.09
	en-dessous en avalant	7	1.4	0.89	
	au-dessus en opposition	8	1	0.87	
	au-dessus en avalant	12	1.6		

(2.44)

La remarque suivante peut être faite sur les essais menés : sur les faibles inclinaisons, les passes « au-dessus » du rainurage ont tendance à vibrer, ce qui n'est pas le cas sur les passes « en-dessous » du rainurage.

Cette démarche globale d'analyse semble prometteuse. Elle doit permettre d'enrichir les choix concernant les stratégies. A ces fins, nous envisageons de pousser l'étude expérimentale et de la coupler à des études théoriques afin de pouvoir prédire le comportement vibratoire de l'outil dans différentes configurations d'usinage. De manière plus globale, des études sont menées en parallèle, dans le laboratoire, sur l'aspect dynamique de l'usinage.

2.4 Choix de la première trajectoire

2.4.1 Présentation du problème

Du fait de la complexité des surfaces, il n'est pas facile d'avoir une planification des trajectoires optimale. Les méthodes traditionnelles (isoparamétriques, plans parallèles...) débutent systématiquement leur stratégie par une des frontières de la surface à usiner. Dans le cadre d'une planification isocrête, le choix de la première trajectoire est capital étant donné que toute la planification est déterminée à partir de cette dernière. Il y a eu beaucoup de recherches effectuées pour trouver une relation entre la géométrie des surfaces à usiner et l'efficacité des trajectoires choisies. Par exemple dans [WCWC87], il a été suggéré que la trajectoire optimale était parallèle à la frontière de plus grande longueur. [Mar87] et [Mar91], quant à eux, ont conclu que la trajectoire optimale était celle qui offrait la passe de largeur maximale (directement dépendante de la courbure de la surface). [CL99] et [CL02] présentent une nouvelle approche pour la planification des trajectoires en considérant simultanément les propriétés géométriques de la surface et l'optimisation du positionnement outil. Le critère utilisé est le suivant : la trajectoire est optimale si la largeur de la passe est maximale et si la longueur totale du trajet parcourue minimale.

La démarche à mener pour choisir une première trajectoire peut-être découpée en plusieurs étapes. Tout d'abord l'identification d'une direction globale d'usinage fonction de la géométrie de la pièce et de son posage par rapport à l'outil, et ensuite seulement le choix d'une première trajectoire respectant la direction globale d'usinage trouvée et permettant une planification isocrête. L'ensemble du raisonnement s'appuie sur la notion de courbes « isophotes ».

2.4.2 Définition d'une courbe isophote

Une courbe isophote est définie comme le lieu des points de la surface où la normale $\mathbf{n}(u, v)$ fait un angle α avec une direction connue $\mathbf{d}$ (figure 2.60). La courbe isophote est un outil qui est apparu dans [Poe84] et qui est utilisé pour analyser et corriger les irrégularités des surfaces [Har99] [Elb01] (figure 2.61)

Dans le cadre de notre étude, en prenant comme direction d'observation l'axe de l'outil, on peut visualiser sur l'ensemble de la surface l'évolution de la normale vis à vis de l'axe de l'outil. En corrélant ces informations avec l'étude réalisée sur l'influence de la variation de la normale, on va choisir une direction d'usinage.

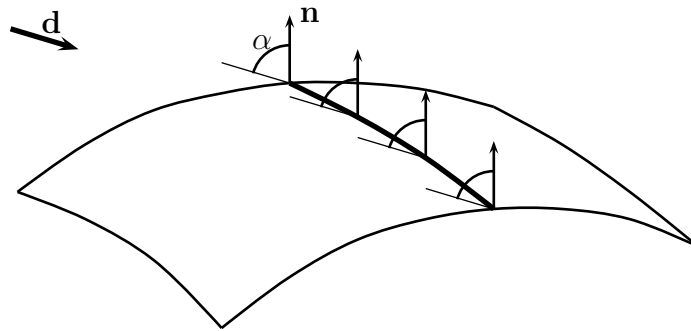


Figure 2.60 – Définition d'une courbe isophote

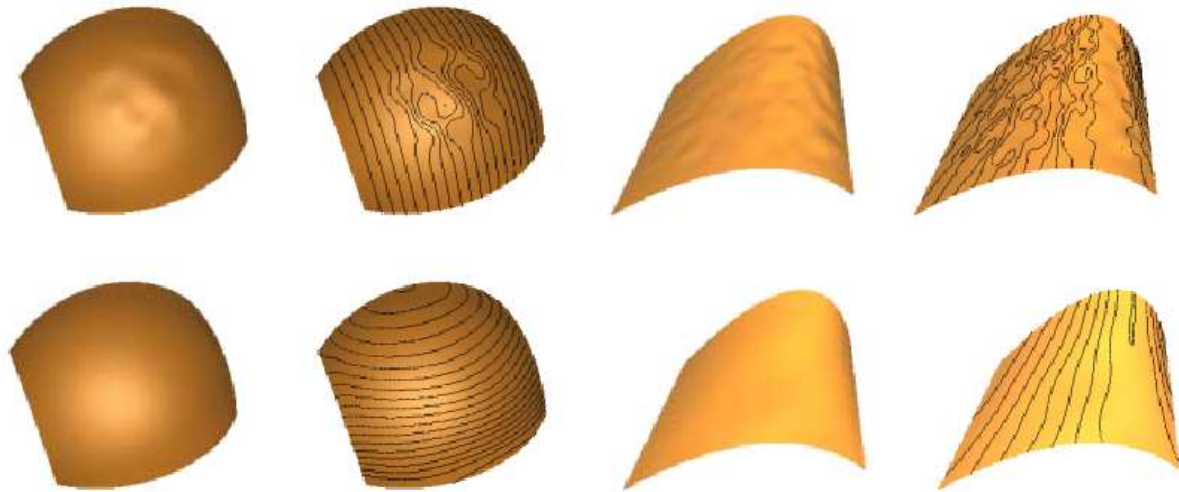


Figure 2.61 – Analyse et correction des surfaces [Tou03]

2.4.3 Direction globale d'usinage

On a vu dans les paragraphes précédents qu'une variation de la normale le long de la trajectoire engendrait une variation du pas transversal et par conséquent l'apparition d'une dérive au niveau de la planification. Il faut donc choisir la direction globale d'usinage dans le but de limiter les variations angulaires entre la normale et l'axe de l'outil. C'est pour cette raison que la notion de courbes isophotes est intéressante dans le cadre de notre étude : la construction des trajectoires va être élaborée à partir des courbes isophotes. De plus, ce raisonnement présente l'avantage d'intégrer la géométrie de la surface à usiner au début de la

planification de trajectoires. Prenons l'exemple de la surface 2.45 précédemment rencontrée :

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 60 \cdot v \\ \rho_0 \cdot \sin \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) \\ \rho_0 \cdot \cos \left((2u - 1) \arccos \left(\frac{\rho_0 - \Delta z}{\rho_0} \right) \right) + t \cdot v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} \quad (2.45)$$

avec $(u, v) \in [0, 1]^2$, $\rho_0 = 50$, $\Delta z = 10$, $t = 20$

Les courbes isophotes de cette surface sont des droites parallèles entre elles et parallèles aux isoparamétriques u (figure 2.62). Ainsi, en choisissant une première trajectoire basée sur une des courbes isophotes (courbe isoparamétrique $u = 0$ par exemple), on a une planification où les variations de la normale sont limitées. La planification ne connaît pas de bouclage des trajectoires, ce qui n'est pas le cas lorsque la première trajectoire est construite à partir de l'isoparamétrique $v = 0$.

Afin de pouvoir travailler sur les courbes isophotes, il faut dans un premier temps pouvoir identifier leur allure générale : si les courbes isophotes sont globalement rectilignes, on peut trouver une direction globale d'usinage significative et exploitable. Par contre, si les courbes isophotes sont globalement courbes, il risque de n'exister aucune direction privilégiée et il n'y aura pas de direction d'usinage. La forme des courbes isophotes peut être déterminée en regardant successivement le résultat de l'intersection des courbes isophotes avec un champs de plans parallèles, puis avec un champs de cylindres coaxiaux. Le champs qui présente le moins d'intersections avec les courbes isophotes nous renseigne sur la forme globale des courbes isophotes.

Cette comparaison nécessite de déterminer pour chacun des deux champs la position qui minimise le nombre d'intersection. Or l'optimisation dans l'espace 3D de la position des deux champs peut s'avérer rapidement compliquée dans la cadre d'une surface complexe. C'est pour cette raison qu'il est intéressant de raisonner dans le domaine paramétrique. La résolution s'effectue dans un plan et le problème d'optimisation est largement simplifié. Les champs mis en œuvre sont désormais des champs de lignes parallèles ou de cercles concentriques. Pour pouvoir comparer les résultats obtenus avec chacun des deux champs, il faut avoir un pas équivalent : la distance entre chaque plan doit être égale à la différence de rayon entre deux cylindres consécutifs.

La méthode d'identification de la forme globale des courbes isophotes se déroule donc de la manière suivante (figure 2.63) :

- calcul des courbes isophotes pour un posage donné de la surface,
- transformation des courbes isophotes de l'espace 3D au domaine paramétrique,
- mise en place d'un champs de lignes parallèles ou de cercles concentriques,

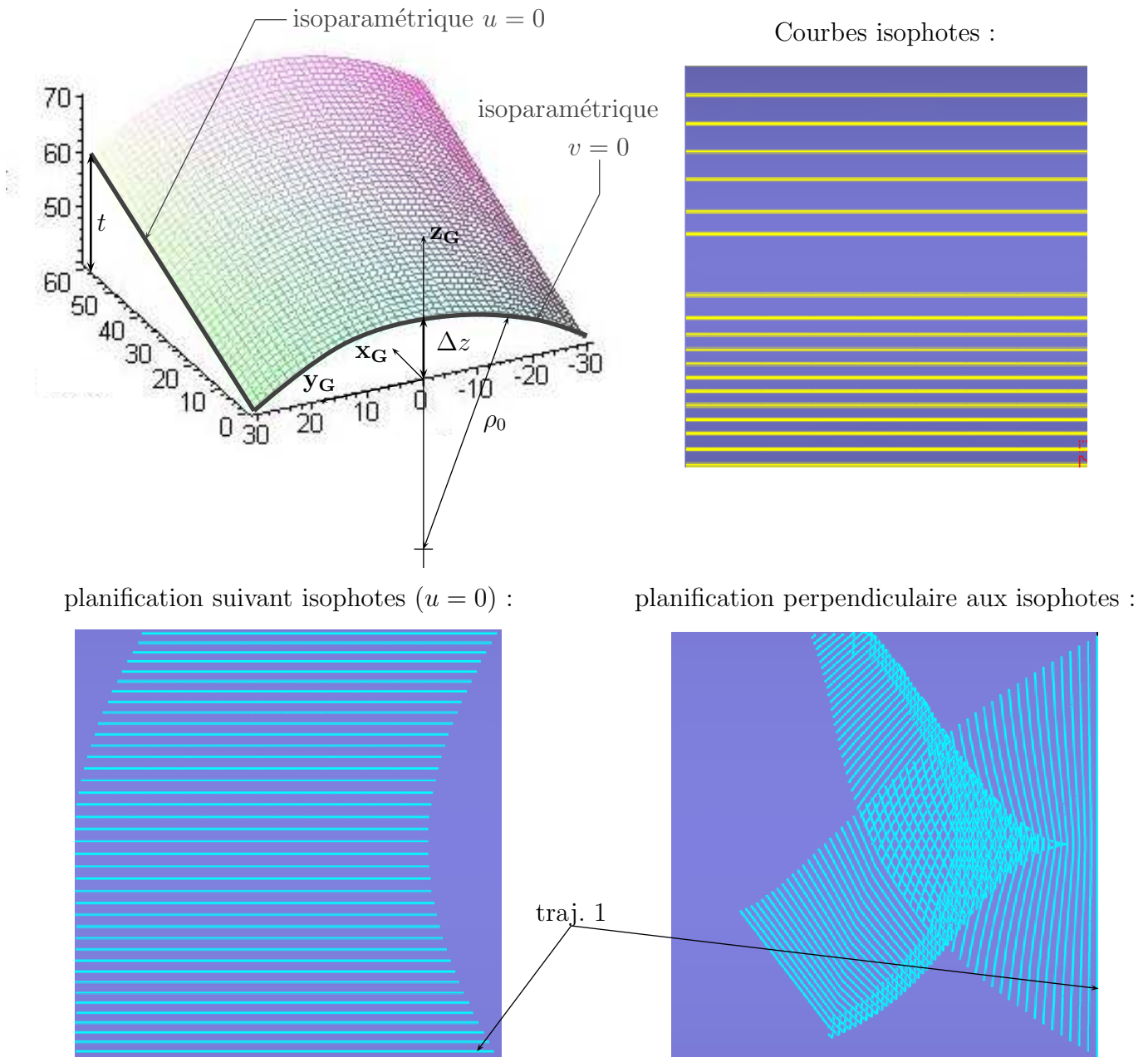


Figure 2.62 – Interêt des courbes isophotes

- optimisation de l'orientation des lignes ou de la position des cercles pour minimiser le nombre d'intersection,
- comparaison du nombre d'intersections provoquée par le champs de lignes et par le champs de cercles.

Dans le cas où les courbes isophotes sont globalement rectilignes, il existe une direction privilégiée donnée par l'orientation du champs de lignes une fois l'optimisation effectuée.

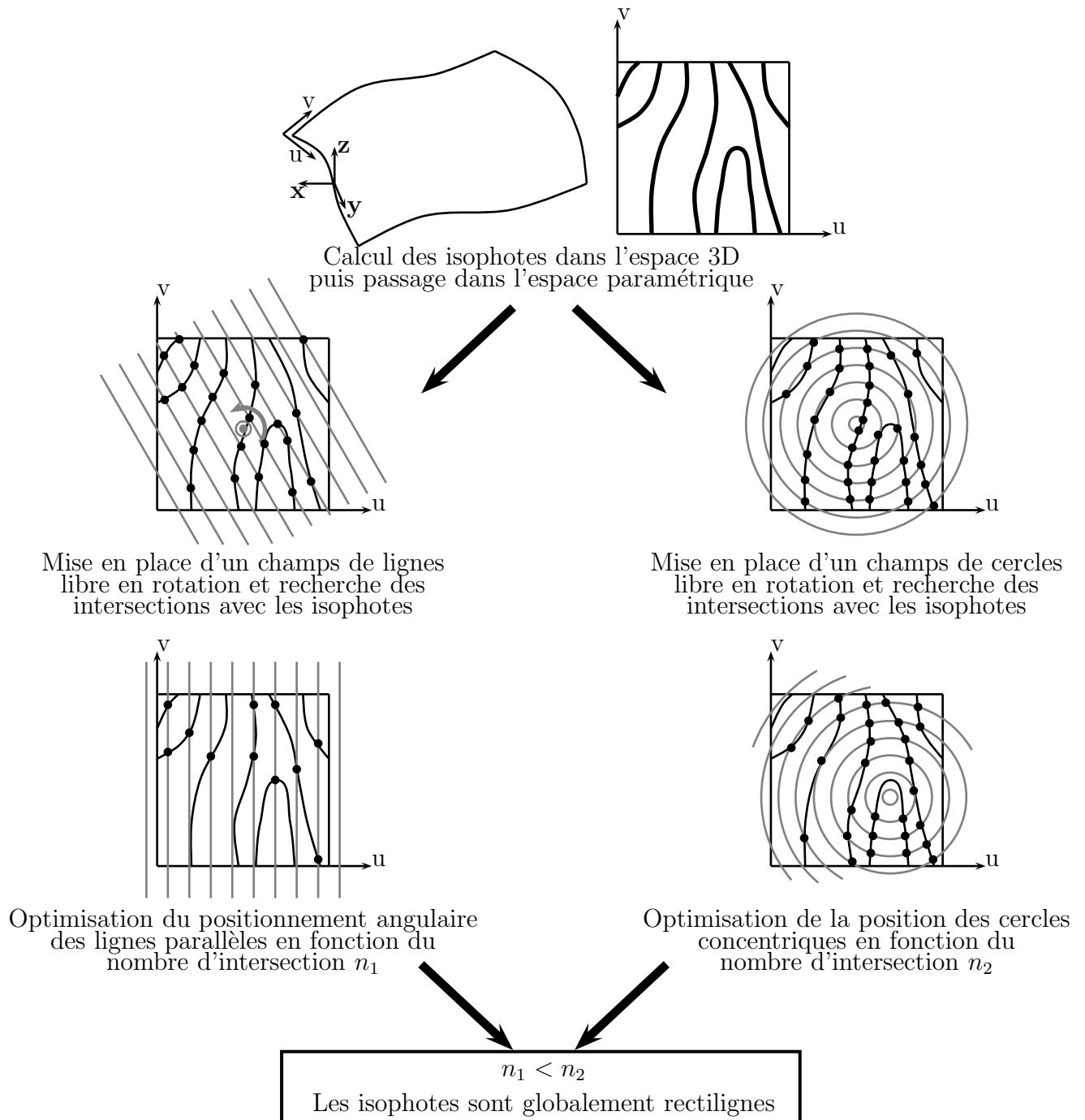


Figure 2.63 – Exemple de détermination de la forme des courbes isophotes

Cette direction correspond à la direction globale d'usinage dans l'espace paramétrique. Il suffit alors de la traduire dans l'espace 3D et de s'en servir comme support de la première trajectoire. Dans le cas où les courbes isophotes sont globalement courbes, il n'y a pas de direction privilégiée linéaire.

Le raisonnement présenté connaît, bien entendu des limites : pour des surfaces très complexes (variations incessantes de la normale, des inclinaisons, des courbures sur toute la surface), il n'existe pas de première trajectoire idéale. La planification sera dans tous les cas très difficile à mettre en œuvre.

2.4.4 Choix des courbes isophotes

2.4.4.1 Courbes isophotes globalement rectilignes

La planification de trajectoires étant isocrête, il faut choisir une première trajectoire la plus droite possible. En effet, la présence d'une portion de trajectoire courbe risque de créer un bouclage des trajectoires : convergence des outils si la trajectoire est calculée à « l'intérieur » de la courbure (figure 2.64). A l'inverse, si la trajectoire suivante est calculée à « l'extérieur » de la courbure, les outils vont diverger, dans ce cas, il suffira d'augmenter le nombre de points par trajectoire et le problème sera résolu.

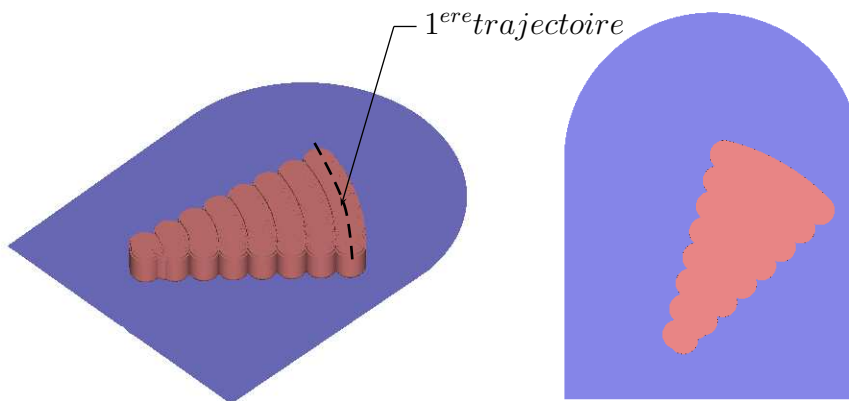


Figure 2.64 – Convergence des trajectoires dans le cadre de trajectoires courbes

Comme pour le choix de la direction globale d'usinage, la sélection de la première trajectoire s'appuie sur l'étude de l'évolution des normales. Les critères de choix de la première trajectoire sont :

- une variation minimum de la normale le long de la trajectoire afin de limiter les dérives,
- une forme globale de la trajectoire qui soit au minimum courbe pour éviter la convergence des trajectoires.

- une orientation identique à la direction globale d’usinage.

Ainsi, la première trajectoire peut-être assimilée à la courbe isophote qui respecte au mieux les critères précédents.

La méthode d’identification de cette courbe isophote se déroule dans le domaine paramétrique et s’appuie sur une série de droites parallèles qui vont « quadriller » la surface. L’orientation des droites est donnée par la direction globale d’usinage. On cherche la courbe isophote qui présente un nombre d’intersection minimal avec les droites.

L’ensemble du raisonnement effectué nous conduit au choix d’une courbe isophote. La première trajectoire va être construite à partir de cette courbe isophote. On désire mettre en place une première trajectoire qui soit au maximum rectiligne, ceci pour éviter les phénomènes de convergence des trajectoires qui sont à l’origine des zones non usinées. On va donc admettre une modification légère de la forme de la courbe isophote (intervalle de tolérance sur l’angle lié à la courbe isophote) afin d’avoir une première trajectoire la plus rectiligne possible.

2.4.4.2 Courbes isophotes globalement courbes

Le raisonnement est totalement différent dans le cas de courbes isophotes globalement courbes. Nous illustrons cette différence sur la figure 2.65.

L’exemple de la figure 2.65 est peu représentatif des surfaces rencontrées puisqu’il s’agit d’une surface quasiment sphérique. Dans la réalité, nous allons être confronté à des surfaces présentant des zones avec des courbes isophotes très différentes : certaines seront plutôt rectilignes, d’autres plutôt courbes. Ceci indique la nécessité de choisir des stratégies différentes suivant la zone dans laquelle on se situe. Prenons l’exemple d’une tuile ayant un bord « relevé » (figure 2.66). Les courbes isophotes de la partie « relevée » sont des cercles alors qu’ailleurs on observe des courbes isophotes rectilignes. Aucune stratégie globale isocrête ne peut convenir sur cette pièce. Pour avoir une cohérence, il est nécessaire d’avoir deux trajectoires initiales : une pour la partie où les courbes isophotes sont courbes et une pour le reste de la surface. On pourra, par exemple choisir la courbe isophote la plus « à gauche » comme première trajectoire de la planification du bord relevé, puis on choisira une des deux isophotes rectilignes figurant sur les bords de la tuile (isophotes rectilignes les plus longues) comme première trajectoire pour la planification du reste de la surface. L’analyse sur chacune de ces zones avec des stratégies différentes peut nous conduire à choisir des outils différents.

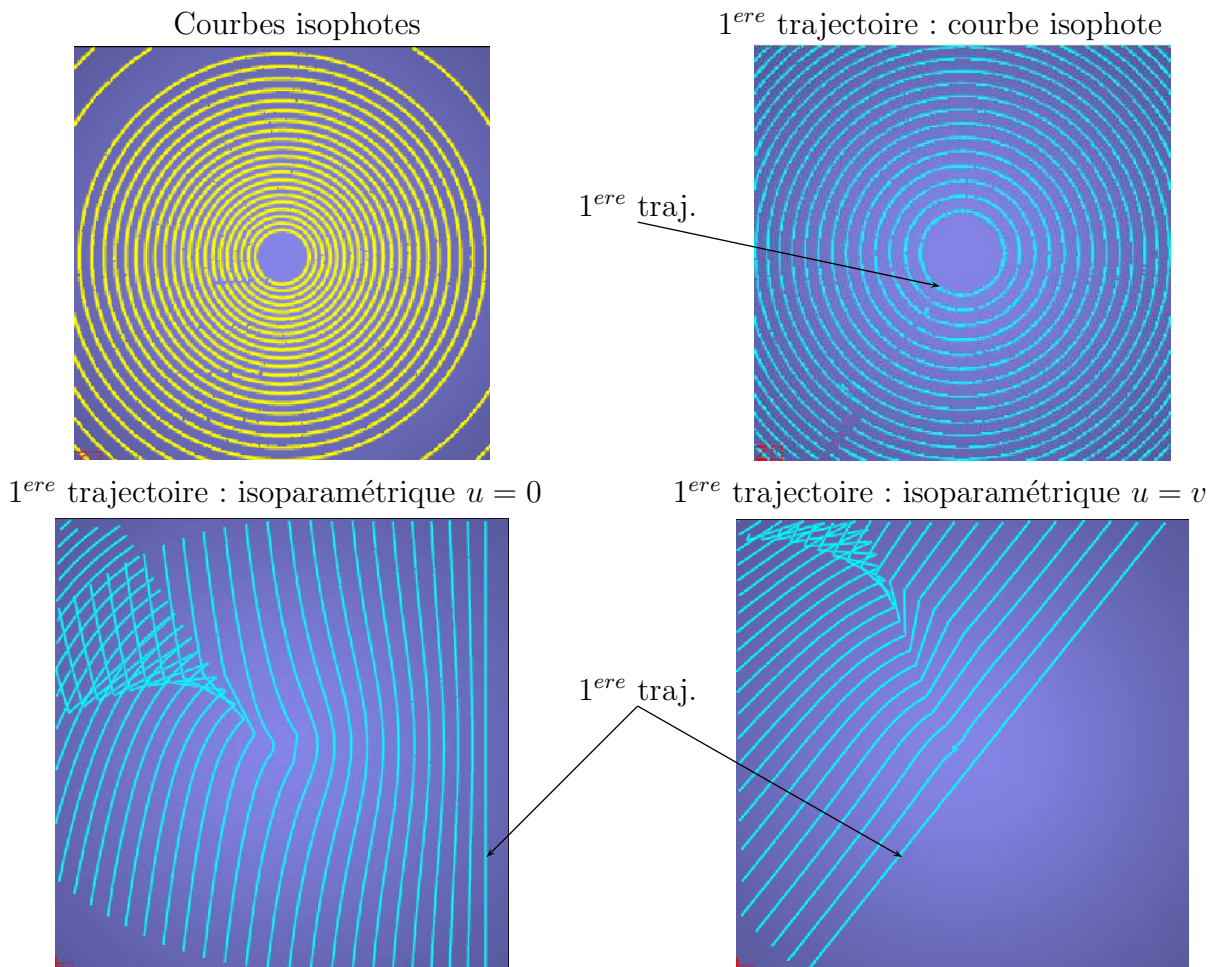


Figure 2.65 – Choix de la première trajectoire pour des courbes isophotes globalement courbes

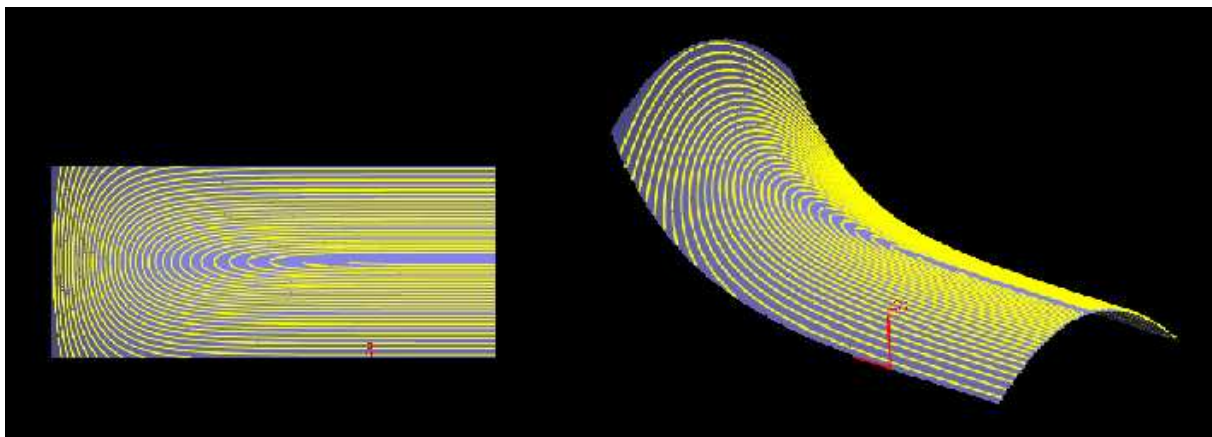


Figure 2.66 – Cas d'une surface possédant des courbes isophotes rectilignes et courbes

2.4.5 Conclusion

L'usinage en bout des surfaces gauches sur MOCN 3 axes est un problème dont la complexité peut évoluer de manière considérable en fonction de la topologie de la surface. Celle-ci

peut évoluer non seulement d'une pièce à l'autre, mais aussi au sein de la même pièce voire de la même surface. Or le concepteur/fabricant de pièces mécaniques doit avant tout faire face à chaque instant au compromis précision – productivité. L'approche que nous avons développée prend en compte ce compromis : nous proposons une planification de trajectoires à hauteur de crête constante. Le respect de la hauteur de crête caractérise la précision de la surface, mais aussi un gain de productivité. Par exemple, l'usinage des moules ou matrices est un procédé long et onéreux. Si l'on considère le temps nécessaire aux opérations de finition et de polissage des surfaces gauches, on observe qu'ils peuvent représenter une part importante du temps d'usinage total.

Ainsi, nous avons développé un programme permettant de calculer une planification isocrête adaptée à l'usinage des surfaces gauches. La mise en place d'une planification isocrête n'est pas facile et soulève un certain nombre de questions : choix du posage de la surface, choix de la première trajectoire de la planification, choix de la géométrie de l'outil et de ses dimensions.

En effet, avant de pouvoir calculer les trajectoires d'usinage qui permettront d'avoir une planification isocrête, il faut auparavant réfléchir à la façon de poser la surface vis à vis de l'axe de l'outil (usinage sur machine 3 axes). L'orientation de la surface est un paramètre influent puisqu'elle peut être à l'origine du bon ou du mauvais déroulement de la planification isocrête. A ce premier problème nous avons répondu en établissant deux critères différents : l'un basé sur l'orientation des normales à la surface, l'autre basé sur la notion de rayon effectif. Le premier critère de posage est établi dans le but d'obtenir un bon déroulement de la planification isocrête, le second est établi dans le but de productivité. Quel que soit le critère considéré, nous avons constaté que la solution du posage était la suivante : positionner la surface pour qu'elle soit le plus « à plat » possible.

Au cours de cette étude, nous avons établi le calcul du rayon effectif qui est à l'origine du choix de la géométrie de l'outil. Du point de vue planification de trajectoires, nous avons proposé un choix d'outil basé sur la nature de la surface.

Pour finir, nous avons analysé le problème du choix de la première trajectoire de la planification isocrête. Ce choix est essentiel au bon déroulement de la planification. La notion de courbes isophotes a été présentée et l'intérêt de ces courbes du point de vue choix de la première trajectoire a été illustré.

Pour conclure, nous rappelons la corrélation qui existe entre les différentes études menées : le choix du posage de la surface est fonction de l'outil choisi puisque fonction de la notion de rayon effectif, le choix de la première trajectoire est fonction des isophotes qui dépendent directement du posage, le choix de l'outil est fonction des trajectoires construites. La mise en

place d'une planification isocrête ne peut pas être posé comme une optimisation globale avec une fonction objectif définie telle que le trajet soit minimal. En effet, en terme de temps de calcul, on ne peut pas calculer une planification pour plusieurs posages, plusieurs trajectoires initiales et plusieurs outils.

État de l'art sur l'usinage en roulant

Notations

$S(u, v)$	: surface réglée
$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$	: règle considérée
u_p	: paramètre u de la surface correspondant à la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$
$\mathbf{C}_0(u), \mathbf{C}_1(u)$	: directrices de la surface
$\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1$	: normales unitaires aux extrémités de la règle respectivement en $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$
$\alpha = (\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1)$	: angle entre les normales aux extrémités de la règle appelé « vrille »

3.1 L'usinage en roulant

L'usinage en roulant consiste à usiner une pièce avec la partie latérale de l'outil (figure 3.1). Ce procédé est très utilisé dans l'industrie pour toutes les opérations de contournage. Les parties des pièces ainsi réalisées sont des plans, des portions de cylindres ou de cônes et plus généralement les surfaces réglées développables.

Ce mode d'usinage peut toutefois s'appliquer à d'autres types de surfaces : il est particulièrement bien adapté aux surfaces gauches convexes ou à courbure gaussienne négative qui ont des courbures principales faibles devant le rayon de l'outil sur toute la surface. Les surfaces réglées répondent aux critères précédents et sont généralement usinées de cette façon : elles concernent souvent des pièces telles que les aubes de turbine, les voilures d'avions ou les hélicoïdes qui interviennent dans les phénomènes de la dynamique des fluides. C'est pour

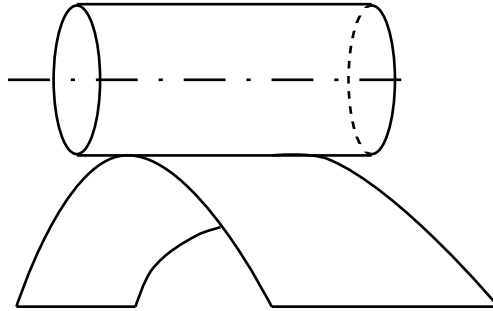


Figure 3.1 – Usinage en roulant d'une surface développable

cette raison que l'usinage de ces surfaces doit être effectué avec précision.

L'usinage en roulant est un procédé qui permet l'usinage de zones qui sont parfois impossibles à usiner en fraisage en bout (problème d'accessibilité) et qui offre des possibilités d'enlèvement de matière important. L'usinage en roulant peut donc engendrer un gain de productivité en diminuant les temps d'usinage et par conséquent les coûts de production.

Dans la suite de ce chapitre, nous passerons en revue les différents travaux de recherche qui ont été menés sur l'usinage des surfaces réglées non développables en fraisage en roulant.

3.2 Surfaces réglées et problématique

3.2.1 Définition des surfaces réglées

3.2.1.1 Généralités

Une surface composée par une famille de lignes droites est appelée « surface réglée » [QD87], [PPR99]. Elle est engendrée par le déplacement d'une droite, appelée « règle » ou « génératrice », s'appuyant sur deux courbes $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ appelées « directrices ».

Les surfaces réglées sont souvent utilisées pour le dessin de surfaces fonctionnelles en ingénierie mécanique. Elles répondent au problème suivant : étant donné deux courbes $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ dans l'espace définies sur le même intervalle de paramétrage $u \in [0, 1]$, trouver une surface $\mathbf{S}$ qui contienne les deux courbes comme courbes frontières « opposées », ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\mathbf{S}(u, 0) = \mathbf{C}_0(u) \quad , \quad \mathbf{S}(u, 1) = \mathbf{C}_1(u)$$

On retiendra le modèle suivant pour exprimer une surface réglée :

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u) \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

Les surfaces réglées présentent la propriété suivante : chaque ligne isoparamétrique (paramètre u constant), appelée règle, est un segment de ligne droite (figure 3.2). Une autre propriété importante des surfaces réglées est qu'il y a peu de restriction sur les courbes directrices, il suffit qu'elles soient définies sur le même intervalle de paramètre. L'intervalle $[0, 1]$ est retenu, mais tout autre intervalle peut convenir : un simple changement de variable permet de passer de l'un à l'autre. Par exemple, une des courbes en entrée peut être une courbe polynomiale cubique, l'autre une courbe de Bézier ou une B-spline.

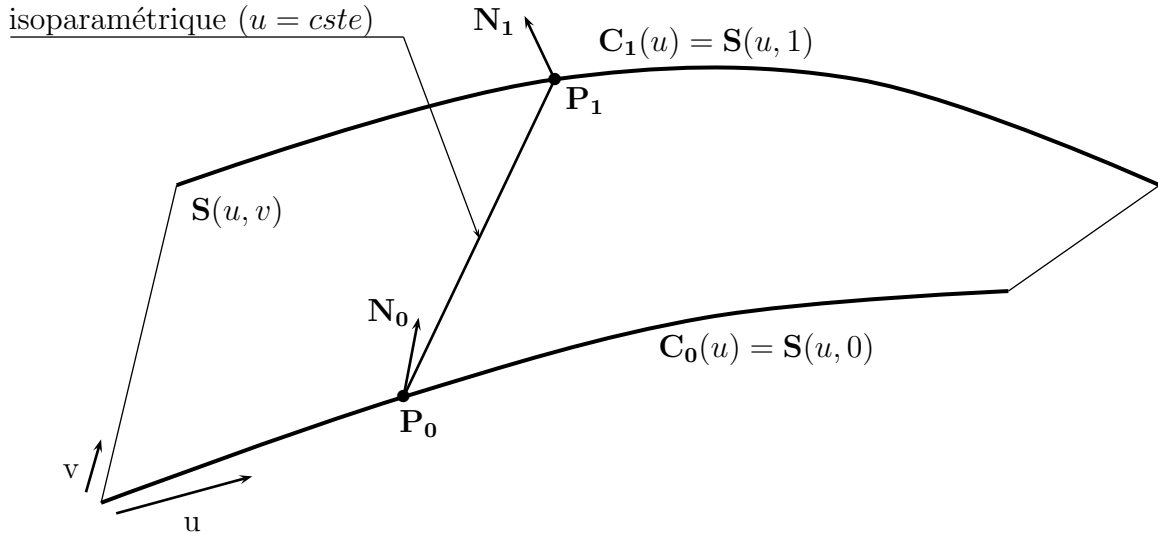


Figure 3.2 – Définition d'une surface réglée

Cette définition de surface est très utilisée dans la modélisation de pièces issues de l'industrie aéronautique, navale ou automobile et en particulier pour les aubes de turbine qui sont des pièces à très forte valeur ajoutée. On distingue deux types de surfaces réglées : les surfaces développables et les surfaces non développables.

3.2.1.2 Surfaces réglées développables

Par définition, une surface est développable si sa courbure gaussienne K est nulle et sa courbure moyenne H non nulle, en tout point. En appliquant cette définition aux équations caractéristiques précédentes, nous pouvons écrire :

« En considérant $\mathbf{N}$ la normale à la surface en un point quelconque et $\mathbf{S}_{uv}$ la dérivée seconde de $\mathbf{S}(u, v)$ par rapport aux paramètres u et v , on peut dire que $\mathbf{S}(u, v)$ est une surface réglée développable si et seulement si $\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}_{uv} = 0$ est vérifiée en tout point de la surface ».

Dans ce cas, la vrille est nulle en toute position de règle sur la surface : $\alpha = 0$.

3.2.1.3 Surfaces réglées non développables

Nous nous intéressons uniquement à ces surfaces par la suite. Elles peuvent être caractérisées par l'une des propriétés définies ci-dessous :

- les surfaces réglées non développables ont une vrille non nulle : $\alpha \neq 0$,
- tous les points situés sur une règle donnée n'ont pas le même plan tangent,
- la courbure gaussienne des surfaces réglées est négative.

3.2.2 Problématique : Usinage des surfaces réglées non développables

Le positionnement de l'outil (cylindrique ou conique) pour l'usinage en roulant d'une surface réglée non développable engendre une interférence inévitable : l'existence de la vrille implique qu'il est impossible d'usiner parfaitement la pièce avec un outil de diamètre non nul. Il est alors intéressant de rechercher le positionnement provoquant l'interférence minimale, pour utiliser les outils de plus grandes sections qui permettent de respecter la tolérance de forme de la surface et qui offrent une rigidité maximale et un débit maximal de matière.

L'usinage en roulant de pièces présentant ce type de surfaces, nécessite l'utilisation de machines-outils à commande numérique cinq axes, pour pouvoir orienter l'outil et respecter chaque positionnement.

Dans la littérature, les interférences engendrées par l'usinage en roulant de surfaces réglées non développables ont été calculées de deux manières différentes : une méthode dite « géométrique » et une autre dite « cinématique ». La méthode géométrique est définie de la manière suivante : pour une configuration outil-pièce donnée, l'interférence maximale générée par l'outil peut être calculée géométriquement en considérant la position de l'outil relativement à la surface. Cependant, lors d'un processus d'usinage, l'outil est en mouvement, il faut alors considérer les points générateurs de l'outil pour pouvoir déterminer l'interférence maximale engendrée sur la surface. On parle alors d'erreur cinématique. Ces deux méthodes de calcul conduisent à des résultats différents et caractérisent les différentes approches développées dans les études de positionnement de l'outil visant à minimiser l'interférence engendrée.

On distingue deux types d'interférences engendrées par l'outil (figure 3.3) :

- l'outil a enlevé trop de matière : erreur d'overcut

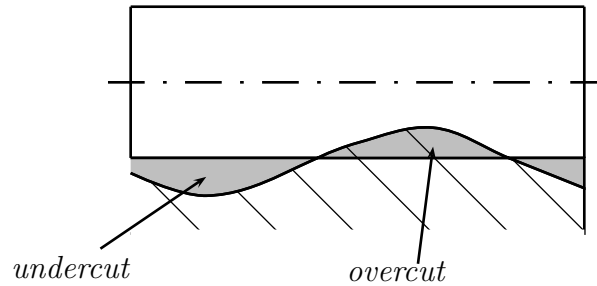


Figure 3.3 – Undercut et overcut

- l'outil a laissé trop de matière : erreur d'undercut

Nous appelons erreur la distance ε entre un point de la surface théorique $\mathbf{S}(u, v)$ et un point de la surface usinée $\mathbf{S}_i(u, v)$ suivant la normale $\mathbf{n}(u, v)$ au point de $\mathbf{S}(u, v)$:

$$\mathbf{S}(u, v) + \varepsilon \cdot \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{S}_i(u, v)$$

Cette définition de l'erreur correspond à la définition du tolérancement par une spécification de forme d'une surface quelconque. Une surface usinée sera alors considérée dans la tolérance si la somme des erreurs maximales d'undercut et d'overcut (en valeur absolue) est inférieure à la tolérance de forme imposée.

Il est alors intéressant de chercher le positionnement susceptible de provoquer l'interférence minimale. Voici maintenant les principaux modèles de positionnement de l'outil appliqués à l'usinage en roulant de surfaces réglées non développables.

3.3 Positionnements pour l'usinage en roulant

3.3.1 Introduction

Lorsqu'on parle de positionnement de l'outil, cela ne concerne évidemment pas les surfaces réglées développables. En effet, pour ces surfaces, l'outil n'engendre aucune erreur due au positionnement, seuls les problèmes de visibilité (accès à la surface) sont à considérer.

Peu de méthodes ont été développées pour le positionnement de l'outil lors de l'usinage en roulant de surfaces réglées non développables. On distingue principalement deux grandes approches de positionnement de l'outil tout comme on l'a fait pour le calcul de l'erreur :

- *Positionnement géométrique* :

en s'appuyant sur la géométrie de la surface, on peut définir différentes méthodes de positionnement de l'outil. Le but de chaque positionnement étant de minimiser

l'erreur entre la surface usinée et la surface théorique. On peut alors comparer l'efficacité des différentes méthodes en comparant la valeur de l'erreur théorique engendrée. Il est à noter cependant que pour les positionnements les plus évolués, les systèmes de résolution mis en place deviennent rapidement complexes.

– *Positionnement cinématique :*

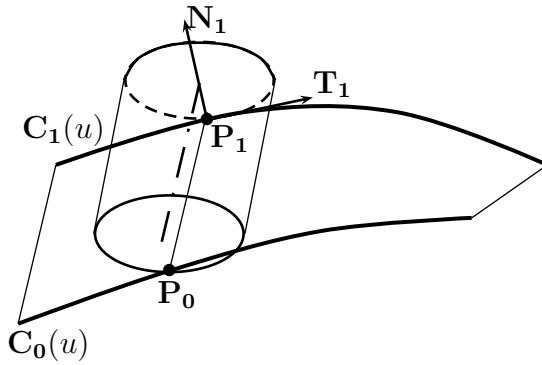
le positionnement n'est plus simplement basé sur la géométrie de la surface, mais sur le déplacement de l'outil. Ces études utilisent les notions de « courbe enveloppe » ou de « surface enveloppe » que l'on a pu découvrir lors de l'usinage en bout.

3.3.2 Positionnements construits sur la géométrie de la surface

3.3.2.1 Le positionnement « logiciel »

Ce positionnement est présent dans plusieurs logiciels de CFAO actuels et s'applique exclusivement à un outil cylindrique. Il consiste à positionner l'axe de l'outil parallèle à la règle considérée ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$) et l'outil tangent à une directrice ($\mathbf{C}_1(u)$ par exemple). Toute l'interférence entre l'outil et la pièce se trouve alors concentrée sur l'autre directrice ($\mathbf{C}_0(u)$) (figure 3.4).

Tangence de l'outil sur $\mathbf{C}_1(u)$



Visualisation de l'erreur d'overcut
(vue suivant $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$)

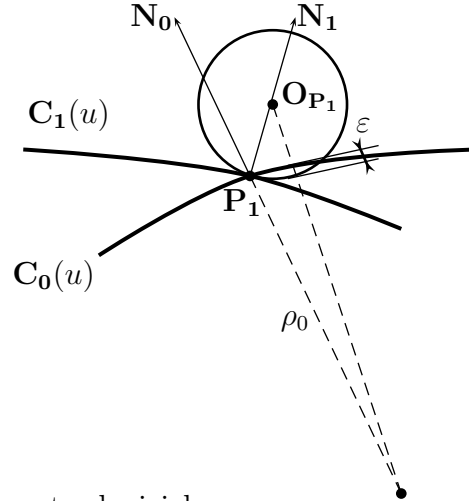


Figure 3.4 – Positionnement « logiciel »

On impose à l'axe de l'outil le parallélisme avec la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ considérée et on détermine le positionnement outil en calculant le point centre-outil de l'axe $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$:

$$\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1} = \mathbf{P}_1 + R \cdot \mathbf{N}_1(u) \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_1(u) = \frac{\mathbf{T}_1(u) \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}{\|\mathbf{T}_1(u) \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|}$$

$$\mathbf{T}_1(u) = \frac{d\mathbf{C}_1(u)}{du}$$

Nous appellerons ε l'interférence qui peut apparaître dès lors que la surface réglée n'est pas développable. Soit ρ_0 le rayon de courbure en $\mathbf{P}_0$ de la directrice $\mathbf{C}_0(u)$. La courbure étant supposée constante dans la zone étudiée, l'erreur maximale d'interférence ε est donnée par :

$$\varepsilon = \rho_0 + R - \sqrt{R^2 + \rho_0^2 + 2\rho_0 R \cdot \cos(\alpha)}$$

Cette équation permet d'obtenir l'outil de diamètre maximal permettant d'usiner la surface, en respectant sa tolérance de forme, et ceci de manière algébrique puisque :

$$R = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 2\rho_0)}{2(\rho_0 \cdot (\cos \alpha - 1) + \varepsilon)}$$

Avantages :

- le positionnement et le calcul de l'erreur maximale d'interférence sont immédiats,
- la détermination de l'outil de diamètre maximal est très simple.

Inconvénients :

- le choix d'un outil de rayon R important conduit à une erreur d'interférence ε grande ; ceci nous conduit à avoir des outils de rayons très petits, incompatibles avec l'usinage,
- l'aspect cinématique du positionnement de l'outil n'est pas pris en compte,
- ce positionnement implique que seule la directrice $\mathbf{C}_1(u)$ est préservée, l'erreur sur la directrice $\mathbf{C}_0(u)$ n'est pas nulle. Ceci peut être gênant dans le cadre de l'usinage de surfaces quelconques discrétisées en surfaces réglées car le respect des directrices représentent alors l'assurance d'une continuité globale sur toute la surface à usiner,
- cette méthode n'a été développée que pour des outils cylindriques.

3.3.2.2 Le positionnement « standard »

Ce positionnement s'applique lui-aussi à un outil cylindrique. L'axe de l'outil est colinéaire à la règle considérée et un point de l'axe est calculé de telle sorte que les interférences entre la pièce et l'outil au niveau des directrices soient égales [Rub93].

Le positionnement décrit sur la figure 3.5 permet de diminuer les erreurs générées lors de l'usinage. Pour optimiser ce positionnement, il est intéressant de déterminer α_0 et α_1 de manière à obtenir $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$. Comme dans le cas précédent il est facile de montrer que [Rub93] :

$$\varepsilon_i = \rho_i + R - \sqrt{R^2 + \rho_i^2 + 2R\rho_i \cos(\alpha_i)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} \rho_1 + R - \sqrt{R^2 + \rho_1^2 + 2R\rho_1 \cos(\alpha_1)} = \rho_0 + R - \sqrt{R^2 + \rho_0^2 + 2R\rho_0 \cos(\alpha_0)} \\ \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha \end{cases}$$

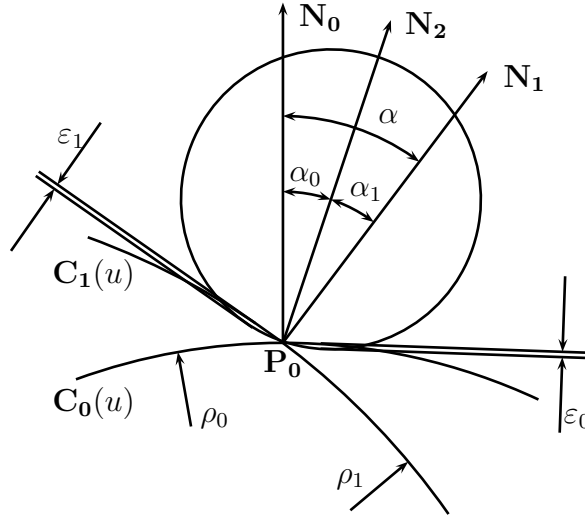


Figure 3.5 – Positionnement standard de l'outil cylindrique

On détermine alors les angles α_0 et α_1 qui vérifient $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$, et le vecteur $\mathbf{N}_2$ défini à partir des normales $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$ (figure 3.5). Ceci permet ensuite de calculer un point de l'axe grâce à la relation :

$$\mathbf{O}_{P_0} = \mathbf{P}_0 + R \cdot \mathbf{N}_2$$

Le choix de l'outil de diamètre maximal permettant d'usiner une surface avec sa tolérance de forme (Intervalle de Tolérance noté IT) s'obtient à partir de la résolution numérique du système de trois équations à trois inconnues (R, α_0, α_1) ci-dessous :

$$\begin{cases} \rho_0 + R - \sqrt{R^2 + \rho_0^2 + 2R\rho_0 \cos(\alpha_0)} = \varepsilon \\ \rho_1 + R - \sqrt{R^2 + \rho_1^2 + 2R\rho_1 \cos(\alpha_1)} = \varepsilon \\ \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{IT}{2}$$

Avantages :

- le positionnement et le calcul de l'erreur maximale d'interférence sont très rapides,
- l'erreur est diminuée de manière significative par rapport au positionnement « logiciel ».

Inconvénients :

- cette méthode s'applique exclusivement aux outils cylindriques,
- la détermination du rayon outil permettant de respecter la tolérance de la surface se fait numériquement,
- ce positionnement implique qu'aucune des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ ne sont préservées,
- l'aspect cinématique du positionnement de l'outil n'est pas pris en compte.

3.3.2.3 Le positionnement « LIU » ou Méthode « D.P.O »

Pour les deux types de positionnement précédents, l'axe de l'outil est colinéaire à la règle considérée. Ce positionnement adopte une philosophie différente : cette fois-ci, l'outil pivote par rapport à la règle. Cette méthode est appelée *Double Point Offsets* (DPO) [Liu95] et s'applique à un outil cylindrique.

L'angle que forment l'axe de l'outil et la règle est calculé à partir de deux normales à la règle $\mathbf{P_0P_1}$ (figure 3.6). Soit $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, et $\mathbf{B}$ trois points également répartis le long de la règle, $\mathbf{N_A}$, $\mathbf{N_P}$, et $\mathbf{N_B}$, les normales unitaires à la surface en ces trois points, l'outil de rayon R est alors placé de telle sorte que son axe passe par les points $\mathbf{C_A}$ et $\mathbf{C_B}$ définis par

$$\mathbf{C_A} = \mathbf{A} + R \cdot \mathbf{N_A} \quad \text{et} \quad \mathbf{C_B} = \mathbf{B} + R \cdot \mathbf{N_B}$$

Ce positionnement engendre une interférence de type *undercut* aux extrémités $\mathbf{P_0}$ et $\mathbf{P_1}$ de la règle et de type *overcut* au centre $\mathbf{P}$ de la règle.

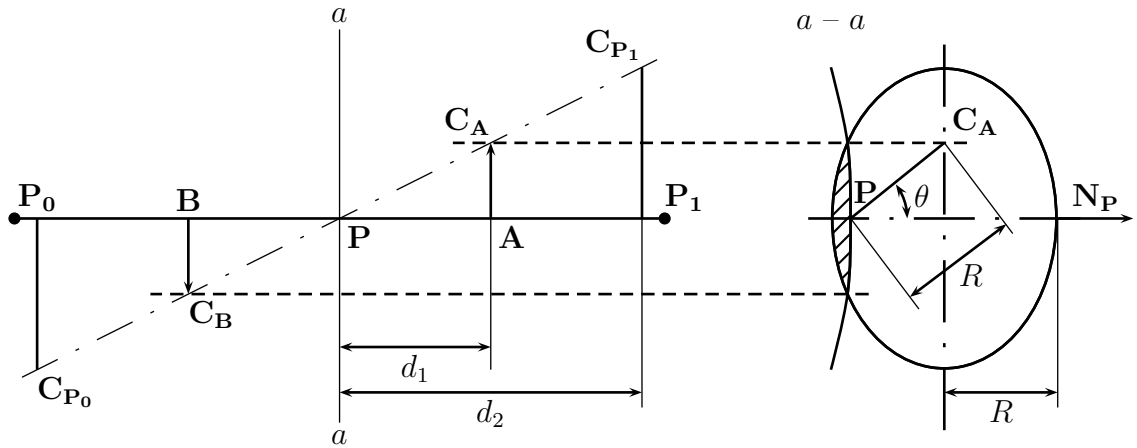


Figure 3.6 – La méthode DPO

Ces deux interférences que nous appelons ε_P et ε_{P_0, P_1} peuvent être calculées par :

$$\varepsilon_P = R (1 - \cos(\theta))$$

$$\varepsilon_{P_0, P_1} = R \left(\sqrt{\cos^2(\theta) + \frac{d_2^2}{d_1^2} \sin^2(\theta)} - \sqrt{1 + \frac{R^2 d_2^2 \sin^2(\theta) \tan^2(\theta)}{d_1^2 (d_2^2 \tan^2(\theta) + d_1^2 + R^2 \sin^2(\theta))}} \right)$$

L'erreur totale générée par ce positionnement est égale à la somme de ces erreurs :

$$\varepsilon = \varepsilon_{P_0, P_1} + \varepsilon_P$$

Par la suite l'auteur propose de répartir équitablement l'erreur de part et d'autre de la surface théorique en déplaçant l'outil selon la normale $\mathbf{N}_P$ d'une distance δ . Cette distance peut être déterminée algébriquement par :

$$\delta = -\frac{\varepsilon_P + \varepsilon_{P_0, P_1}}{1 + \sqrt{\frac{d_1^2}{d_1^2 + d_2^2 \tan^2(\theta)}}}$$

Avantages :

- Le positionnement et le calcul de l'erreur d'interférence sont très rapides, ils sont résolus algébriquement,
- par rapport au positionnement « logiciel », le positionnement est encore amélioré.

Inconvénients :

- la détermination du diamètre de l'outil n'est possible que de manière numérique,
- le choix des points de passage de l'axe est non justifié,
- l'aspect cinématique du positionnement de l'outil n'est pas pris en compte,
- ce positionnement implique qu'aucune des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ ne sont préservées,
- cette méthode s'applique exclusivement aux outils cylindriques.

3.3.2.4 Le positionnement « STUTE »

Cette méthode décrite dans [SSS79] et [LK98], présente de fortes similitudes avec le positionnement « Liu » et est elle-aussi destinée à un outil cylindrique. Ici, les points de passages de l'axe outil sont calculés à partir des points extrémités de la règle $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$: l'axe outil passe par deux points $\mathbf{O}_{P_0}$ et $\mathbf{O}_{P_1}$ calculés de la manière suivante :

$$\mathbf{O}_{P_0} = \mathbf{P}_0 + R \cdot \mathbf{N}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{O}_{P_1} = \mathbf{P}_1 + R \cdot \mathbf{N}_1$$

L'erreur est de type overcut entre les deux extrémités de la règle : l'erreur maximale se situe au milieu de la règle et les erreurs aux points $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$ sont nulles. L'outil est ensuite translaté pour répartir l'erreur d'interférence.

Avantages :

- le positionnement et le calcul de l'erreur d'interférence sont très rapides,
- l'erreur est diminuée de manière très significative par rapport au positionnement « logiciel ».

Inconvénients :

- l'erreur d'interférence est supérieure à celles des positionnements « standard » et « Liu »,
- l'aspect cinématique du positionnement de l'outil n'est pas pris en compte,
- ce positionnement implique qu'aucune des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ ne sont préservées,
- cette méthode s'applique exclusivement aux outils cylindriques.

3.3.2.5 Le positionnement « MENZEL »

Cette méthode est basée sur les travaux publiés dans [BMM03] et est développée pour un outil cylindrique. Dans cet article, la possibilité d'effectuer un positionnement cinématique est évoquée, des notions de calcul de la vitesse de l'outil et de surface enveloppe sont développées. Néanmoins, le positionnement proposé ne s'en inspire pas vraiment puisqu'il reste basé sur la géométrie de la surface.

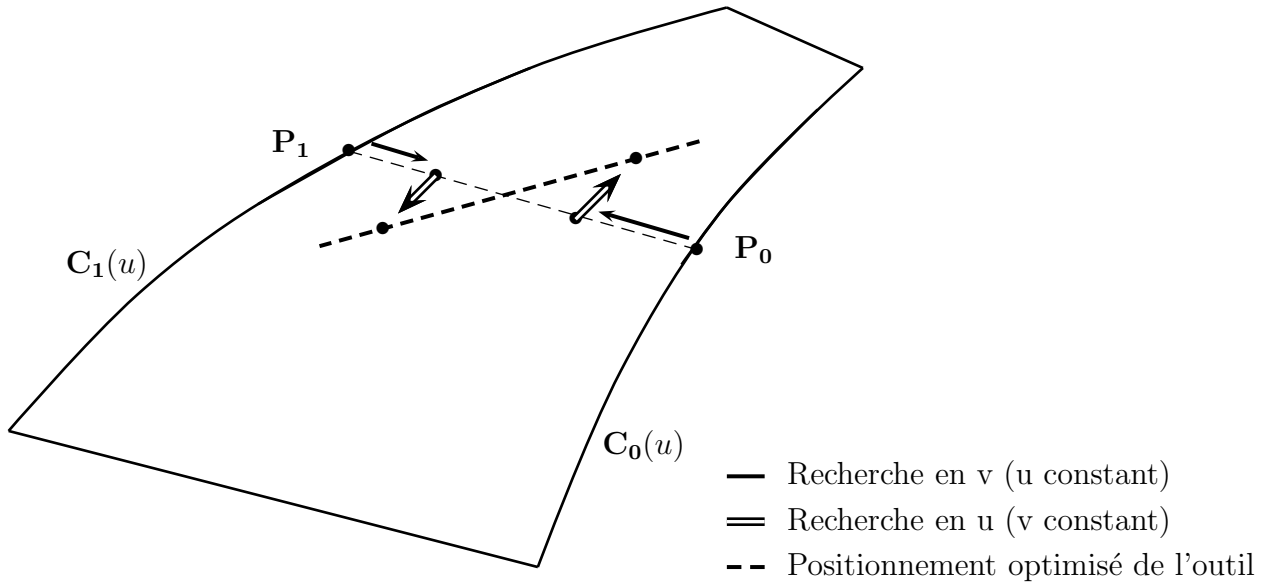


Figure 3.7 – Le positionnement Menzel

Dans [MBM03] un nouveau positionnement est proposé (figure 3.7), basé sur le positionnement « Stute » évoqué précédemment :

- Premier positionnement : l'outil est tangent au niveau des deux directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ en $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}(u, 0)$ et $\mathbf{P}_1 = \mathbf{S}(u, 1)$ respectivement. L'hypothèse suivante est alors effectuée : l'erreur maximale se trouve à $u = 0,5$.
- Première modification du positionnement : on fait translater dans la direction de la règle (u constant) les points de tangence entre l'outil et la surface depuis les frontières $v = 0$ et $v = 1$ jusqu'à la valeur paramétrique $v = 0,5$. A chaque nouvelle position de l'outil correspond une erreur d'usinage différente : on observe de l'overcut sur les côtés de la règle et de l'undercut au milieu. Pour chaque couple (u, v_1) et (u, v_2) , on évalue les erreurs d'overcut et d'undercut engendrées et on retient la solution $[(u, v_1), (u, v_2)]$ qui minimise l'erreur.
- Deuxième modification du positionnement : à partir de la position caractérisée par la solution $[(u, v_1), (u, v_2)]$, on translate les points de tangence de l'outil suivant des

isoparamétriques en v . La translation de chaque point de tangence s'effectue en sens opposés : le point de tangence (u, v_1) va se transformer en (u_1, v_1) , le point de tangence (u, v_2) va se transformer en (u_2, v_2) . Les paramètres u_1 et u_2 sont tels que $(u - u_1)$ et $(u - u_2)$ ont des signes différents. Les points de tangence sont translatés jusqu'à ce que la distance minimum entre l'axe de l'outil et la règle considérée soit égale au rayon outil. Un troisième point de tangence est alors créé au niveau de la règle. La rotation engendrée par cette deuxième optimisation est de l'ordre de 5° au maximum.

En conclusion de cet article une remarque est effectuée sur l'opportunité de développer un positionnement cinématique : le calcul de l'erreur se fait à partir du positionnement d'un seul outil, ce qui n'est pas suffisant vu qu'il faut considérer l'outil suivant pour évaluer correctement l'erreur. La notion de « surface enveloppe » est une nouvelle fois évoquée et une simulation numérique est proposée. Cependant, aucune démonstration mathématique n'est établie.

Avantages :

- on observe une diminution très significative de l'erreur par rapport aux positionnements précédents.

Inconvénients :

- cet article évoque les possibilités d'un positionnement cinématique sans pour autant le développer,
- ce positionnement implique qu'aucune des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ ne sont préservées,
- cette méthode s'applique exclusivement aux outils cylindriques.

3.3.2.6 Le positionnement « amélioré » pour un outil cylindrique [Mon01]

La méthode de positionnement présentée dans [MFR⁺02], [RRD98], [RRDL98], consiste à effectuer une rotation de l'outil autour d'un axe calculé à partir des normales à la surface aux extrémités de la règle après avoir mis l'outil dans la configuration du positionnement standard. Cette méthode est basée sur la recherche de deux points de tangence entre l'outil et les deux directrices et un point de contact sur la règle considérée.

Ce positionnement amélioré, décrit sur la figure 3.8, se base sur les deux points suivants :

- contact entre la règle $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ et la génératrice inférieure de l'outil au point $\mathbf{M}_2$.
- tangence avec les deux courbes directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ de part et d'autre des points extrêmes de la règle : points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$.

A partir de ces paramètres et des conditions imposées, le positionnement passe par la résolution d'un système non linéaire de sept équations à sept inconnues. La position de l'outil est alors définie par l'angle γ entre l'axe de l'outil et la règle (la rotation s'effectue autour

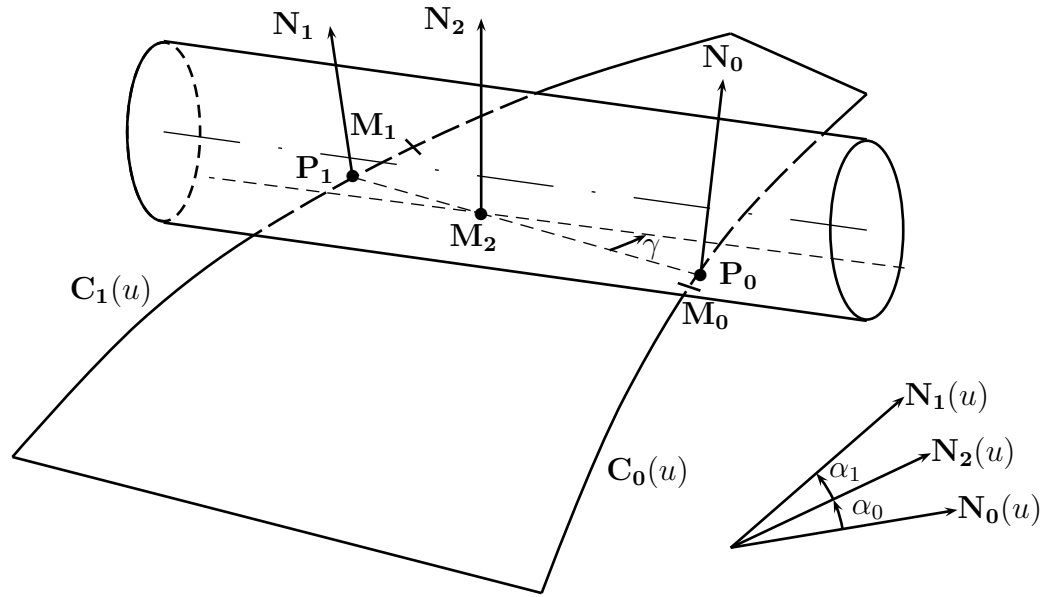


Figure 3.8 – Positionnement « amélioré » pour un outil cylindrique

du vecteur $\mathbf{N}_2$ défini lors du positionnement standard), et par la position du point $\mathbf{M}_2$ sur la règle.

Ce positionnement crée deux zones d'erreur situées de part et d'autre du point $\mathbf{M}_2$. Dans [Mon01], la résolution du calcul de l'erreur maximale est basée sur une méthode par dichotomie, avec variation dans les deux directions paramétriques u et v , en prenant comme bornes de l'intervalle de calcul les valeurs des paramètres aux points de contacts $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$.

Une détermination de l'outil respectant la tolérance de forme est également proposée dans [Mon01]. L'algorithme développé est basé sur l'allure générale de la courbe d'erreur en fonction du rayon d'outil; notons que lorsque le rayon d'outil augmente, l'erreur croît. Cet algorithme permet, à partir de la saisie initiale d'un rayon d'outil maximal, d'obtenir en un nombre minimum d'itérations, un rayon assurant que l'erreur d'interférence est dans l'intervalle de tolérance.

Avantages :

- la diminution de l'erreur est très significative par rapport aux autres positionnements présentés,
- une méthode est proposée pour calculer le rayon d'outil respectant la tolérance imposée sur la surface à usiner.
- ce positionnement assure la tangence de l'outil avec les deux directrices, ce qui peut

s'avérer très intéressant, notamment dans l'optique de la discrétisation d'une surface gauche en surfaces réglées,

- ce positionnement est développé pour un outil cylindrique, mais il est adaptable à un outil conique comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Inconvénients :

- toute la procédure est numérique.
- cet article évoque les possibilités d'un positionnement cinématique sans pour autant le développer,

Au terme de cette étude, il ressort que le positionnement « amélioré » génère une erreur géométrique bien inférieure à celles générées par les autres positionnements. Néanmoins, ce positionnement reste géométrique et aucun aspect cinématique n'est abordé.

3.3.2.7 Le positionnement « amélioré » pour un outil conique [Mon01]

Ce type de positionnement est utilisé pour des pièces du type aubes de turbine, pales de ventilateur qui présentent des difficultés d'accessibilité et qui ne peuvent pas être usinées avec un outil cylindrique de diamètre raisonnable. En effet, les industriels utilisent des outils coniques pour ce type d'usinage car ils permettent d'usiner le pied des aubes tout en possédant un corps d'outil à l'extrémité de la pale plus conséquent, limitant ainsi les problèmes de flexion.

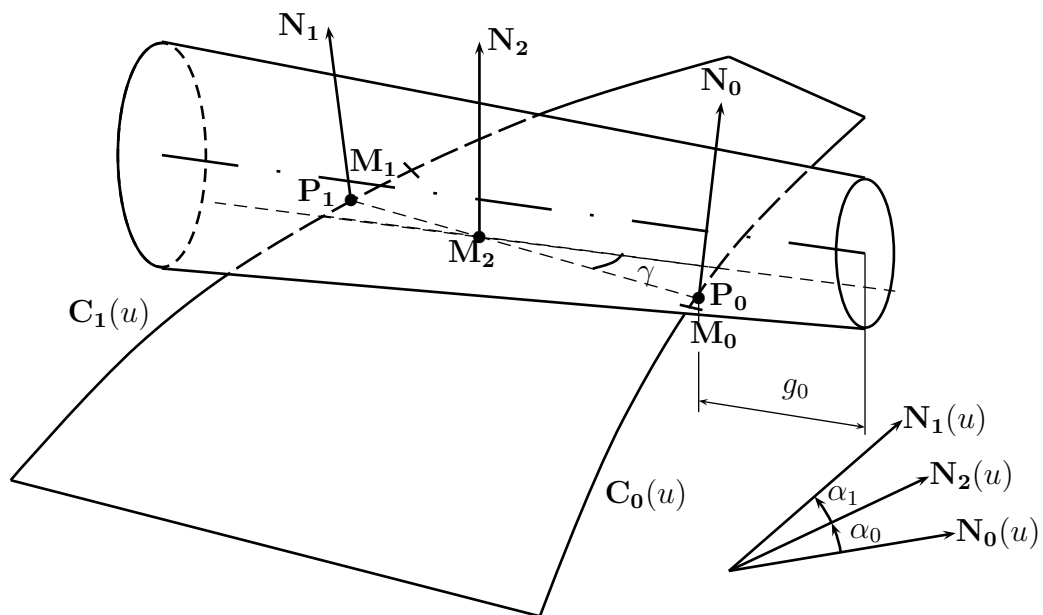


Figure 3.9 – Positionnement « amélioré » pour un outil conique

Le positionnement amélioré de l'outil conique proposé (figure 3.9) est caractérisé par deux points de tangence et un point de contact entre l'outil et la surface tout comme pour l'outil cylindrique :

- contact entre la génératrice inférieure de l'outil et la règle ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$) : point $\mathbf{M}_2$,
- tangence avec les deux courbes directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$: points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$.

Ce positionnement est obtenu par une rotation de l'outil d'un angle γ autour d'un axe $\mathbf{N}_2$ au point $\mathbf{M}_2$ à partir de la règle considérée.

L'outil conique ayant un rayon évolutif qu'il faut prendre en compte dans la recherche du positionnement, on définit un nouveau paramètre géométrique g_0 appelé « garde » (figure 3.9). La garde est la distance, suivant l'axe outil, entre le point extrémité de l'outil et le plan osculateur en $\mathbf{P}_0$. La garde est fixée au départ par l'utilisateur.

Le positionnement de l'outil est donc défini de façon complète par les trois paramètres suivants :

- l'angle γ entre la règle et l'axe de l'outil projeté dans le plan ayant pour normale le vecteur $\mathbf{N}_2$,
- la position du point $\mathbf{M}_2$ sur la règle,
- la garde g_0 .

A partir de ces paramètres et des conditions imposées, le positionnement passe par la résolution d'un système non linéaire de sept équations à sept inconnues. Ce système est résolu numériquement par la méthode de Newton-Raphson.

Une analyse quantitative de l'erreur est aussi proposée par [Mon01]. Le résultat obtenu est que plus les dimensions de l'outil augmentent, plus l'erreur entre l'outil conique et la surface réglée non développable augmente. Ce résultat est ensuite exploité pour mettre en œuvre une méthodologie de choix d'outil optimal permettant d'usiner la surface réglée en respectant une tolérance donnée.

3.3.3 Positionnements cinématiques

Ce type de positionnement n'a pas beaucoup été abordé dans la littérature. Il se base sur la notion de surface enveloppe qui a déjà été abordée lors de l'usinage en bout. Pour ce type de positionnement, l'idée directrice est la suivante : pour les positionnements géométriques, le calcul de l'erreur se faisait à partir du positionnement d'un seul outil, ce qui n'est pas suffisant ; il faut aussi considérer l'outil suivant pour pouvoir évaluer correctement l'erreur. D'où l'intégration de paramètres cinématiques.

3.3.3.1 Positionnement « CHIOU » [Chi04]

Ce positionnement est développé pour un outil conique. Dans cet article, la notion de « courbe enveloppe » est intégrée aux calculs lors de l'évaluation de l'erreur théorique.

L'outil est positionné à partir des deux directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ de la surface réglée. On considère la règle se situant à $u = u_p$. L'outil est contraint tangent en deux points $\mathbf{P}_1 = \mathbf{S}(u_p, 1)$ et $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}(u_p, 0)$ ayant la même valeur du paramètre $u : u_p$. Ce positionnement est source d'erreur, l'erreur maximale étant située au milieu de la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Ce positionnement est présenté pour des opérations d'ébauche uniquement car l'erreur engendrée est du type undercut. Pour ce qui est de la finition de la surface, ce positionnement n'est pas suffisamment performant, d'où l'élaboration d'un nouveau raisonnement.

Lorsque la vrille α de la surface réglée devient importante, le positionnement précédent n'est plus possible : l'outil ne peut pas être tangent aux deux directrices pour la même valeur du paramètre u . L'outil est alors repositionné par une translation et une rotation qui s'effectuent dans le plan comprenant la normale à la directrice $\mathbf{C}_0(u)$ et l'axe outil. Les amplitudes de ces deux mouvements sont calculées à partir de l'erreur engendrée par le premier positionnement. L'erreur engendrée étant évaluée à partir de la courbe enveloppe.

En conclusion, l'auteur remarque que le changement du positionnement de l'outil n'a pas l'influence escomptée sur la valeur de l'erreur qui ne diminue pas beaucoup. En conséquence, il conclut en disant qu'en diminuant la valeur des rayons de l'outil conique, il réussit à diminuer l'erreur. Cette conclusion est basée sur une simulation numérique et en aucun cas sur une démonstration mathématique.

Avantage :

- l'aspect cinématique est abordé dans ce positionnement par l'intermédiaire des courbes enveloppes.

Inconvénients :

- le positionnement développé n'atteint pas les performances souhaitées,
- la conclusion quant à l'influence des rayons de l'outil conique sur la valeur de l'erreur est assez évidente.

3.3.3.2 Positionnement « LURPA » [LDA03]

Le raisonnement développé dans ce positionnement est basé sur une compensation de l'erreur théorique : l'idée est de poser l'outil de manière simple et non optimisée tout en sachant que ce positionnement sera source d'erreur. En raisonnant ainsi, [LDA03] évitent de mettre en place des méthodes de résolution lourdes en temps de calcul. Il leur suffit alors de

corriger le positionnement pour minimiser l'erreur.

L'optimisation du positionnement s'appuie donc sur l'évaluation de l'erreur engendrée par le premier posage : l'erreur est quantifiée et sert de point de départ à un problème d'optimisation qui doit minimiser l'erreur théorique en jouant sur le positionnement outil.

Dans un premier temps, la surface enveloppe est évaluée à partir d'un positionnement géométrique qui n'est pas défini dans l'article. Tout ce qu'on sait est que l'outil est positionné par rapport aux deux directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$. Pour chaque position de l'outil, la courbe enveloppe est calculée. L'ensemble des courbes enveloppes calculées sont ensuite interpolés par une surface à pôles.

La seconde étape réside dans la mise en place d'un quadrillage sur la surface à usiner $\mathbf{S}(u, v)$. En chaque point de cette grille, on calcule la distance entre la surface à usiner et la surface enveloppe générée par l'outil, on obtient ainsi une grille des erreurs de positionnement sur toute la surface.

La troisième étape consiste en un déplacement des pôles de la surface enveloppe de l'outil afin de minimiser l'erreur maximale. En modifiant la surface enveloppe, on modifie l'ensemble des positionnements outil (figure 3.10).

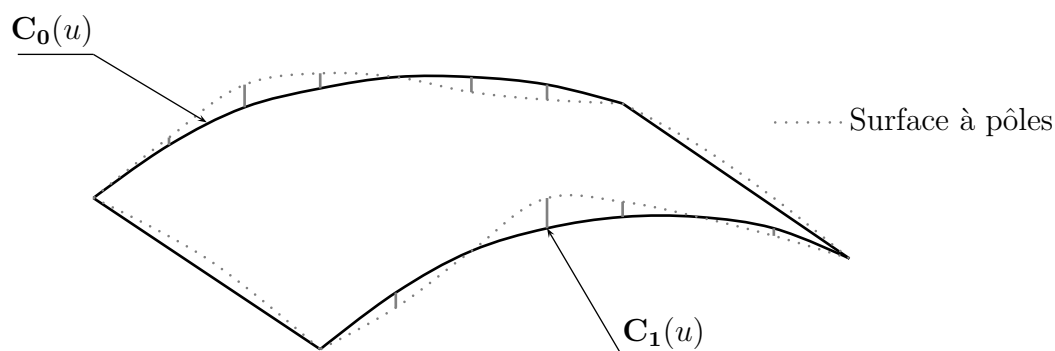


Figure 3.10 – Recherche du positionnement optimal : modification des pôles

Avantages :

- l'aspect cinématique est totalement intégré dans le positionnement développé grâce à la notion de surface enveloppe.
- la méthode proposée est peu coûteuse en temps de calcul puisque le positionnement de départ est simple (non détaillé dans l'article).

Inconvénients :

- le positionnement géométrique de départ et les trajectoires outils ne sont pas fournis, cela aurait été intéressant de les connaître pour avoir une vision globale du raisonnement effectué.

- la surface de test utilisée est une surface peu vrillée, les erreurs engendrées sont faibles. Il serait intéressant de pouvoir quantifier les résultats d'un tel positionnement sur une surface ayant un angle de vrille plus important,
- ce positionnement n'impose pas le respect des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$.

3.3.3.3 Positionnement « T.P.O. »

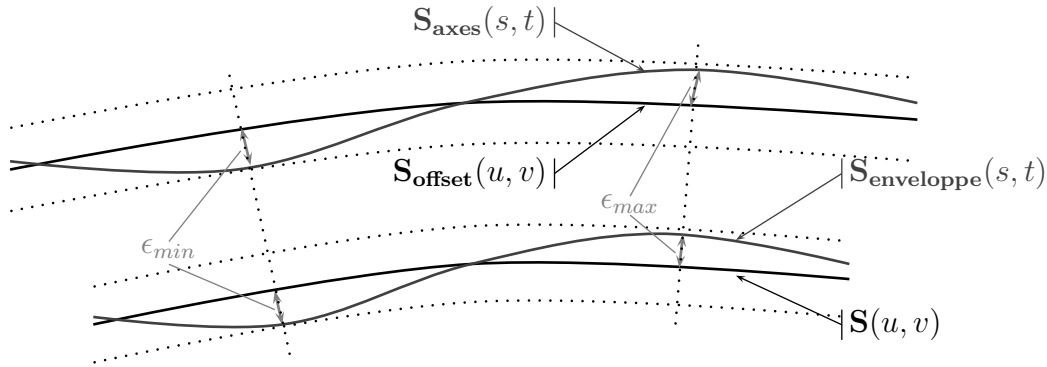


Figure 3.11 – Erreur existant entre les différentes surfaces

La méthode *Three Points Offset* (T.P.O.) développée dans [GXL05] est basée sur la notion de surface enveloppe. L'étude présentée est menée dans le cadre de l'usinage des surfaces réglées non développables par un outil cylindrique. La particularité de cette méthode réside dans le fait que les positionnements de l'outil se font globalement et non pas individuellement en raisonnant sur la surface formée par l'ensemble des différentes positions occupées par l'axe outil. Le raisonnement mené s'appuie sur les deux points suivants :

- la surface offset à la surface générée par la trajectoire de l'axe de l'outil est la surface enveloppe (surface usinée), la distance offset étant égale au rayon de l'outil. Cette propriété avait déjà été abordée dans [BMM03], mais aucune démonstration mathématique n'avait été établie.
- Dans un second temps, il est démontré que l'erreur d'usinage qui existe entre la surface enveloppe de l'outil et la surface à usiner $\mathbf{S}(u, v)$ d'une part, et l'erreur entre la surface offset de $\mathbf{S}(u, v)$ (la distance offset étant égale au rayon outil) et la surface des trajectoires centre-outil d'autre part, sont égales. Ainsi, il est possible de raisonner directement au niveau de l'axe de l'outil (figure 3.11).

Le positionnement « T.P.O. » consiste à positionner l'axe de l'outil tangent en trois points de la surface offset à $\mathbf{S}(u, v)$. Pour cela on va considérer deux points $\mathbf{P}_{0\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u, 0)$ et $\mathbf{P}_{1\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u, 1)$ appartenant aux deux directrices $\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u)$ et $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u)$ de la

surface offset (figure 3.12). Le point $\mathbf{P}_{0\text{offset}}$ est fixe tout au long du raisonnement ($u = u_p$), par contre le point $\mathbf{P}_{1\text{offset}}$ translate le long de la directrice $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u)$.

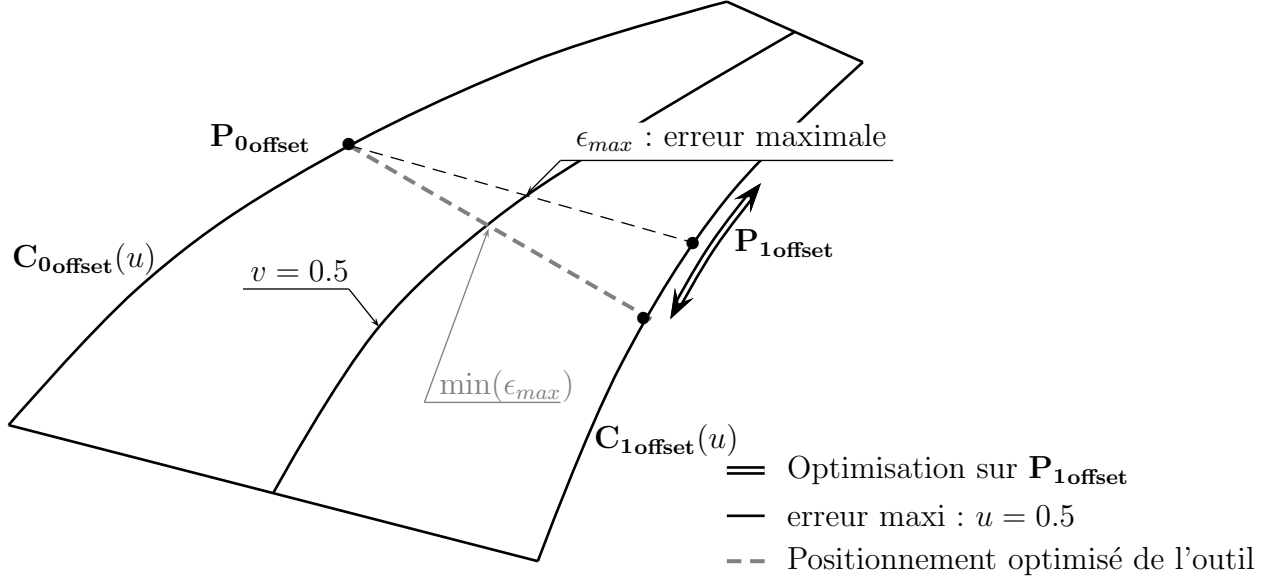


Figure 3.12 – Positionnement « T.P.O. » pour un outil cylindrique

Pour chaque position occupée par $\mathbf{P}_{1\text{offset}}$, on calcule l'erreur maximum entre la surface offset et le segment $[\mathbf{P}_{0\text{offset}}\mathbf{P}_{1\text{offset}}]$. L'hypothèse suivante est faite : l'erreur maximale est située en $v = 0.5$. On gardera la position de $\mathbf{P}_{1\text{offset}}$ qui minimise la valeur de cette erreur pour positionner l'outil. L'axe de l'outil est alors défini par les deux points $\mathbf{P}_{0\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u, 0)$ et $\mathbf{P}_{1\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u', 1)$. L'erreur située à $v = 0.5$ est considérée suffisamment petite pour pouvoir affirmer que $[\mathbf{P}_{0\text{offset}}\mathbf{P}_{1\text{offset}}]$ intersecte la courbe isoparamétrique $v = 0.5$. On peut donc ainsi affirmer que l'outil intersecte les trois courbes isoparamétriques de la surface offset : $v = 0$, $v = 0.5$ et $v = 1$. L'outil est considéré tangent en trois point de la surface.

Avantages :

- une approche totalement nouvelle intégrant le positionnement de l'outil à partir de la surface offset est proposée,
- les deux hypothèses de départ servant à l'élaboration de ce travail sont très intéressantes et peuvent être réutilisées pour tout type de positionnement,
- La méthode de positionnement proposée est simple d'un point de vue calcul.

Inconvénients :

- Le positionnement proposé intègre la rotation de l'outil autour du point $\mathbf{P}_{0\text{offset}}$. Aucune justification n'est fournie quant au choix de ce point et aucune garantie n'est avancée sur le fait que ce point permettra d'obtenir une erreur minimale,

- le fait d'imposer le point de rotation de l'outil en $\mathbf{P}_{\text{offset}}$ peut conduire à un angle de rotation important, ce qui peut devenir gênant en terme de couverture de surface. Choisir un autre point permettrait peut-être de diminuer à la fois l'erreur et la valeur de l'angle de rotation.
- La tangence entre l'outil et les directrices de la surface n'est pas assurée.

3.3.4 Synthèse sur l'ensemble des positionnement abordés

La plupart des positionnements ont été développés pour un outil cylindrique, néanmoins, on peut en adapter certains au positionnement d'un outil conique [Mon01]. On peut effectuer une comparaison des différents positionnements à partir de l'erreur maximale engendrée. Par définition, l'erreur maximale de positionnement est la somme des erreurs maximales d'undercut et d'overcut. Les résultats ne peuvent être donnés que de manière quantitative étant donnée que certains positionnements ne peuvent être connus que de manière numérique.

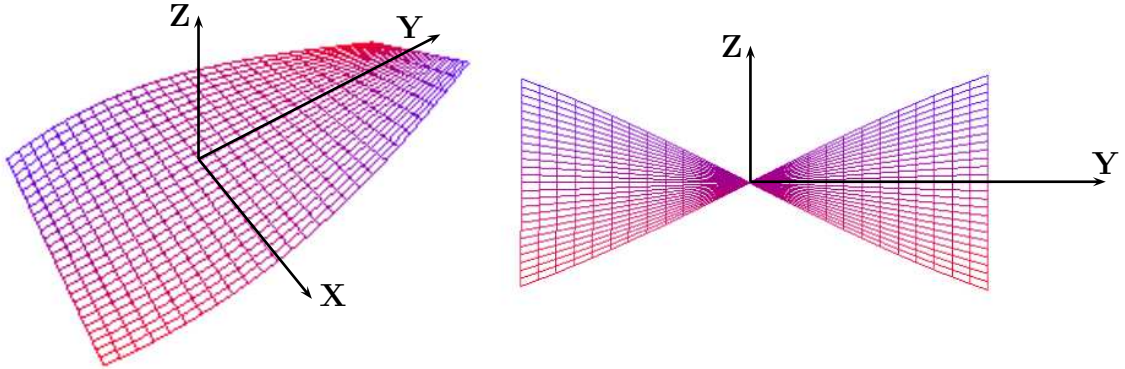


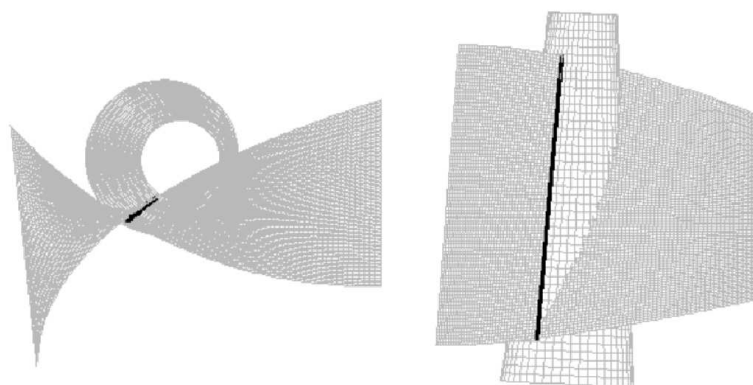
Figure 3.13 – Représentation de la surface à usiner

La comparaison des positionnements se fera à partir de la surface suivante (figure 3.13) :

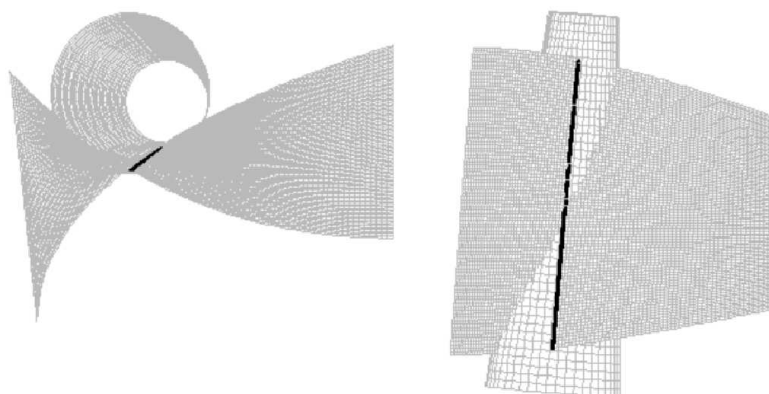
$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 20 \cdot (2v - 1) \cdot \cos\left((1 - 2u)\frac{\pi}{4}\right) \\ 37.5 \cdot (2u - 1) \\ 20 \cdot (2v - 1) \cdot \sin\left((1 - 2u)\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (3.1)$$

Pour une meilleure comparaison, la règle à partir de laquelle s'effectue la mise en position de l'outil est représentée en trait gras pour chaque positionnement testé (figure 3.14). Un premier test visuel indique très clairement que le positionnement amélioré (figure 3.15) engendre la zone d'overcut la plus réduite. Par contre on ne peut pas encore dire grand chose de la zone d'undercut avec un simple test visuel. D'autre part, le positionnement amélioré

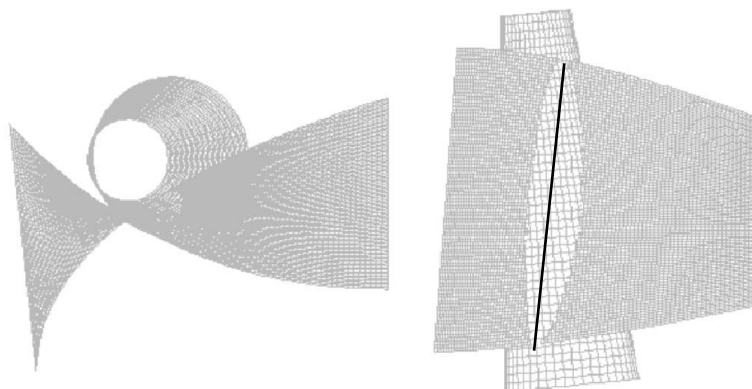
Positionnement logiciel



Positionnement standard



Positionnement Stute



Positionnement Liu

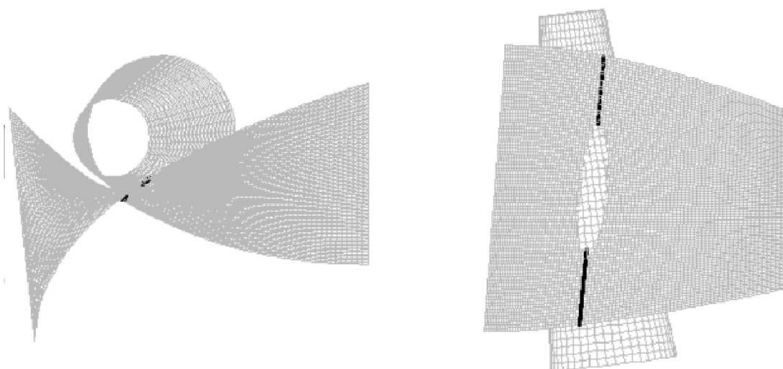


Figure 3.14 – Localisation des erreurs pour les différents positionnements

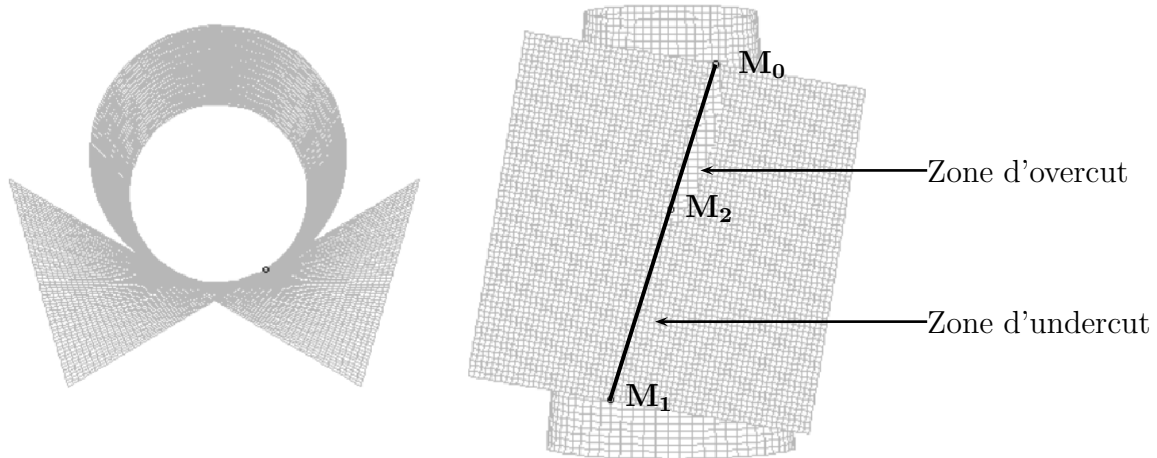


Figure 3.15 – Localisation des erreurs pour le positionnement amélioré

préserve les directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ de la surface réglée. Cette caractéristique est très importante, notamment dans l'optique de la discrétisation d'une surface gauche en surfaces réglées.

Une comparaison est menée entre les différents positionnements géométriques et le positionnement « amélioré ». Il s'avère que ce dernier est le plus performant : il engendre des erreurs maximales de positionnement au moins deux fois moins importantes que tous les autres positionnements. En outre, il s'exécute en un temps très court et peut être intégré dans un logiciel de FAO. Le positionnement « logiciel » est quant à lui, le moins performant car il crée des erreurs très importantes. Il est à noter que cette étude ne prend pas en compte les positionnements les plus récents basés sur des notions de cinématique.

En effet, il n'est pas intéressant de comparer le positionnement [Chi04] avec les autres dans la mesure où il n'est pas encore abouti ; le positionnement [LDA03] quant à lui ne peut être comparé dans la mesure où une partie du raisonnement n'est pas fourni (le positionnement initial de l'outil servant de support au raisonnement n'est pas fourni). Quant au positionnement « T.P.O », on peut l'apparenter au niveau du raisonnement au positionnement amélioré, à la différence près que le point de rotation de l'axe est fixé en $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}(u, 0)$ et que l'axe de rotation dépend du point $\mathbf{P}_1 = \mathbf{S}(u', 1)$ choisi. Aucun raisonnement n'est mené sur le choix du point et de l'axe de rotation, on verra ultérieurement lors de l'étude du positionnement amélioré que le choix de $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}(u, 0)$ comme point de rotation n'est pas optimal du point de vue de l'erreur engendrée.

En conséquence, on peut classer les différents positionnements géométriques testés d'un

point de vue erreur d'interférence de la manière suivante :

« logiciel » < « Liu » < « Stute » < « standard » < « T.P.O » < « amélioré »

Le critère retenu pour classer les positionnements est uniquement celui de l'erreur engendrée. En élargissant le champ d'application de ces positionnements aux surfaces gauches discrétisées en surfaces réglées, on peut remarquer que le positionnement amélioré reste le plus intéressant dans la mesure où, contrairement aux autres, il assure la tangence avec les directrices de la surface réglée. Cette propriété est essentielle dans le cadre de l'usinage de surfaces gauches discrétisées en surfaces réglées.

Usinage en roulant

Notations

$S(u, v)$	: surface réglée,
P_0P_1	: règle considérée,
u_p	: paramètre u de la surface correspondant à la règle P_0P_1 ,
P_2	: milieu de la règle considérée ($v = 0.5$),
$C_0(u), C_1(u)$	: directrices de la surface,
N_0, N_1	: normales unitaires aux extrémités de la règle respectivement en P_0 et P_1 ,
T_0, T_1	: tangentes unitaires aux courbes $C_0(u), C_1(u)$ en P_0 et P_1 ,
$\alpha = (N_0, N_1)$	: angle entre les normales aux extrémités de la règle appelé « vrille »,
$N(u, v)$	: normale unitaire à la surface,
R	: rayon outil,

4.1 Introduction

Ce chapitre va se concentrer sur l'usinage en roulant des surfaces réglées non développables à l'aide d'un outil cylindrique ou conique. Ce travail trouve des applications directes dans le domaine de l'usinage des aubes de turbines produites sur des Machines Outil à Commande Numérique à cinq axes.

Lors de l'usinage des pièces, il faut limiter les interférences entre l'outil et la surface à usiner. Ceci est d'autant plus facile que les dimensions de l'outil sont petites. Mais, en diminuant

le rayon outil, on risque d'être confronté à des problèmes de flexion non négligeables, fonctions de la longueur d'outil en prise et des efforts provoqués par la coupe. L'intérêt n'étant pas de diminuer la longueur de l'outil en prise et les efforts de coupe pour garder un certain niveau de productivité, il faut choisir un outil ayant un rayon suffisant vis à vis du problème de flexion. Ainsi, nous arrivons à un paradoxe : en diminuant le rayon de l'outil on limite les problèmes d'interférence source d'erreurs d'usinage, mais on augmente simultanément l'amplitude du mouvement de flexion de l'outil qui est lui-aussi source d'erreur.

Cette problématique a été étudiée par de nombreux chercheurs comme on a pu le voir dans le chapitre précédent. Le « positionnement amélioré » développé au Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse [MFR⁺02], est, parmi les positionnements géométriques les plus performants. Dans ce chapitre, nous nous sommes posés les questions suivantes : est-il possible d'améliorer ce positionnement et est-il possible de quantifier son efficacité d'un point de vue cinématique ?

L'étude du positionnement amélioré est effectuée à partir de considérations géométriques en supposant que les points de tangence entre l'outil et la surface théorique aux extrémités de la règle sont ceux qui généreront la surface usinée. Or la trace laissée par l'outil dans la matière est donnée par les points de l'outil qui ont une vitesse d'avance perpendiculaire à la normale à la surface de l'outil, ces points forment la « courbe enveloppe » et appartiennent à la surface enveloppe. La courbe enveloppe ne peut être définie qu'à partir du moment où la trajectoire de l'outil est connue, étant donné que sans trajectoire le mouvement de l'outil ne peut être défini et la vitesse des points de l'outil ne peut pas être calculée. On ne peut donc pas faire l'étude du posage de la surface enveloppe sur la surface théorique de la pièce car elle n'est définie qu'après le calcul de la trajectoire de l'outil. C'est pour cette raison que nombre des positionnements présentés dans le chapitre précédent sont issus d'études géométriques entre l'outil et la surface.

Dans ce chapitre, après avoir brièvement rappelé les principales étapes du positionnement amélioré, nous allons en étudier différents aspects. Cette étude est principalement menée pour un outil cylindrique :

- dans un premier temps, nous étudions l'aspect cinématique du positionnement amélioré : après avoir calculé la surface enveloppe, nous regardons la position des points caractéristiques $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ par rapport à celle-ci et calculons l'erreur théorique engendrée. L'usinage d'une pièce test vient ensuite conclure cette étude,
- dans un second temps nous allons analyser les paramètres du positionnement amélioré dans le but de diminuer l'erreur engendrée : l'axe $\mathbf{N}_2$, défini à partir de $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$, est l'axe de rotation de l'outil utilisé lors du positionnement amélioré et a été imposé

sans connaître l'influence qu'il pouvait avoir sur l'erreur. Nous nous intéresserons donc au choix de cet axe et nous quantifierons son influence. Dans la mesure où l'axe de rotation de l'outil est désormais variable, nous n'utiliserons plus la notation précédente $\mathbf{N}_2$, nous l'appellerons désormais $\mathbf{y}_2$,

- dans un troisième temps nous nous intéressons au choix du rayon optimal de l'outil en analysant la relation entre l'erreur d'usinage et le rayon de l'outil.
- à partir des relations obtenues dans l'étude précédente, nous mettons en place des outils de prédictions de l'erreur qui permettent ensuite de choisir un positionnement pour un outil conique.
- dans un dernier temps, en reprenant l'idée développée par [GXL05], nous appliquerons le positionnement amélioré à la surface offset et regarderons si ce nouveau positionnement amène des performances intéressantes.

4.2 Positionnement amélioré pour un outil cylindrique

Cette méthode, développée dans [Mon01], est basée sur la recherche de deux points de tangence entre l'outil et les deux directrices et un point de contact sur la règle considérée.

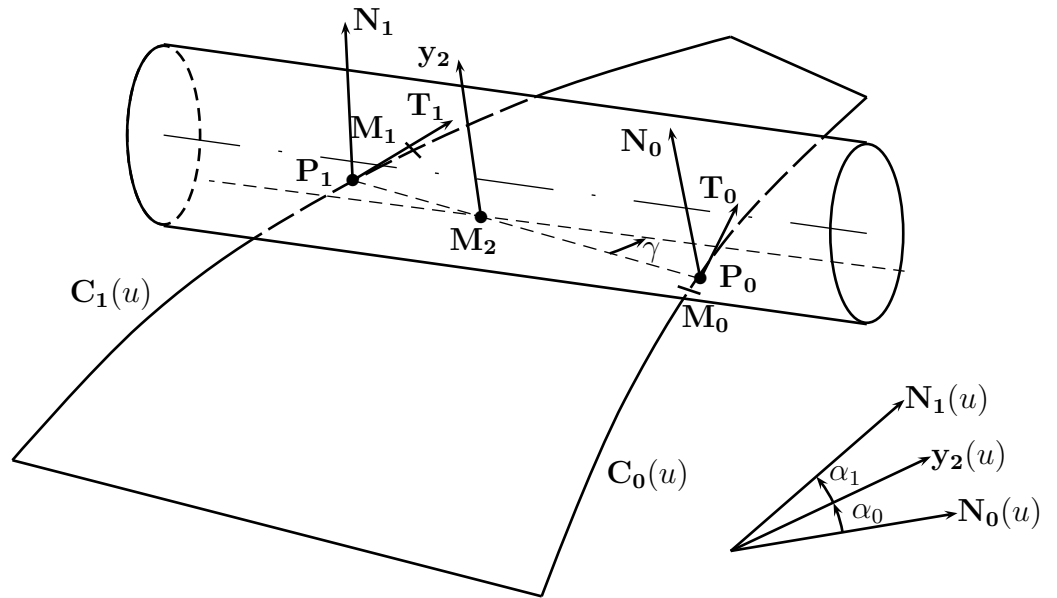


Figure 4.1 – Positionnement « amélioré » pour un outil cylindrique

Ce positionnement est décrit sur la figure 4.1 : l'outil tourne en $\mathbf{M}_2$ autour de $\mathbf{y}_2$ en imposant $(\mathbf{N}_0, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_2, \mathbf{N}_1)$, tout en vérifiant les conditions suivantes :

- le point $\mathbf{M}_0$ est le point de tangence entre la courbe $\mathbf{C}_0(u)$ et l'outil,

- le point $\mathbf{M}_1$ est le point de tangence entre la courbe $\mathbf{C}_1(u)$ et l'outil.

A partir de ces paramètres et des conditions imposées, le positionnement passe par la résolution d'un système non linéaire de sept équations à sept inconnues qui est résolu par la méthode de Newton-Raphson. La résolution du système permet de déterminer les points centre-outil des deux extrémités de l'outil se situant au niveau des courbes $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$. Voici un rappel détaillé sur le positionnement amélioré.

4.2.1 Calculs préliminaires

Nous allons tout d'abord donner quelques définitions :

- h_0 : distance entre les points $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{M}_2$,
- h_1 : distance entre les points $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{P}_1$,
- h_p : longueur de la règle définie par $u = u_p$ ($h_p = h_0 + h_1$).

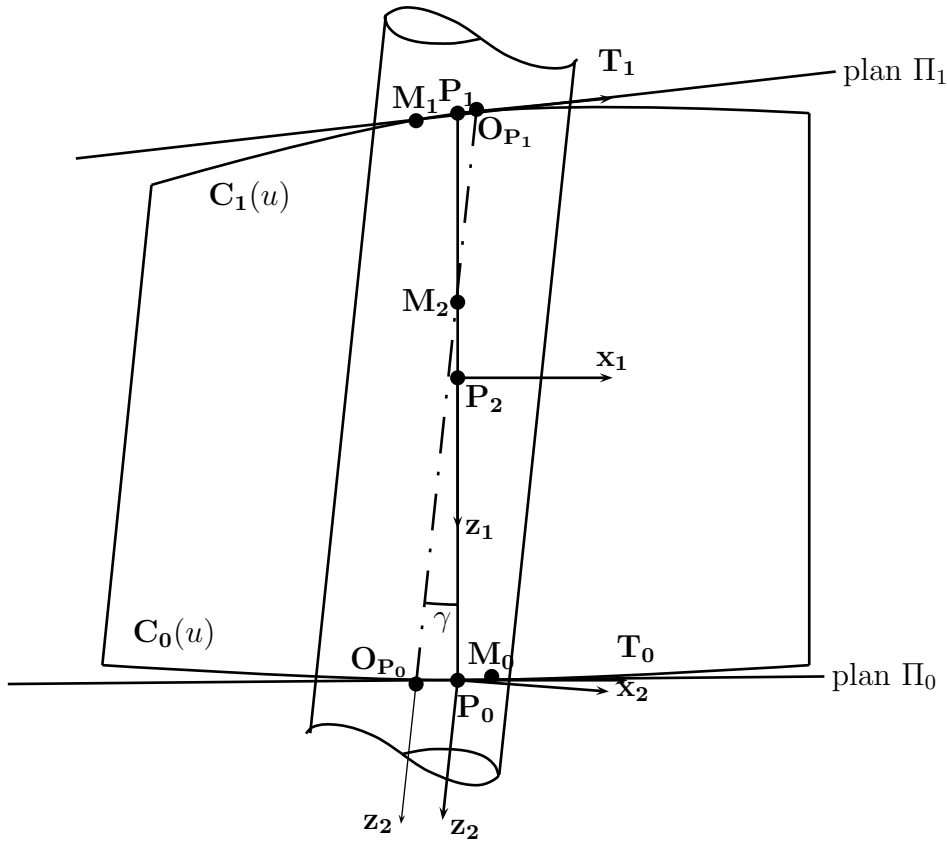


Figure 4.2 – Positionnement amélioré vu suivant $\mathbf{y}_1$

Voici ensuite la définition des repères nécessaires à la compréhension du raisonnement (figure 4.2) :

- $\mathcal{R}_1 : (\mathbf{P}_2, \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_1 = \frac{\frac{1}{2}\mathbf{N}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{N}_1}{\|\frac{1}{2}\mathbf{N}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{N}_1\|}, \mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|})$,
l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$ utilisé lors du positionnement amélioré est défini à partir de ce repère : $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1$.
- $\mathcal{R}_2 : (\mathbf{M}_2, \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{O}_{P_1}\mathbf{O}_{P_0}}{\|\mathbf{O}_{P_1}\mathbf{O}_{P_0}\|})$
l'axe $\mathbf{z}_2$ est défini par l'axe de l'outil

On définit ensuite les repères $\mathcal{R}_{2a}$ et $\mathcal{R}_{2b}$ suivants (figure 4.3) :

- $\mathcal{R}_{2a} : (\mathbf{P}_0, \mathbf{x}_{2a} = \frac{(\mathbf{y}_{2a} \wedge \mathbf{T}_0) \wedge \mathbf{y}_{2a}}{\|(\mathbf{y}_{2a} \wedge \mathbf{T}_0) \wedge \mathbf{y}_{2a}\|}, \mathbf{y}_{2a} = \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_{2a} = \mathbf{x}_{2a} \wedge \mathbf{y}_{2a})$
- $\mathcal{R}_{2b} : (\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_{2b} = \frac{(\mathbf{y}_{2b} \wedge \mathbf{T}_1) \wedge \mathbf{y}_{2b}}{\|(\mathbf{y}_{2b} \wedge \mathbf{T}_1) \wedge \mathbf{y}_{2b}\|}, \mathbf{y}_{2b} = \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_{2b} = \mathbf{x}_{2b} \wedge \mathbf{y}_{2b})$

On considère ensuite les plans Π_0 et Π_1 définis par : $\Pi_0 = (\mathbf{P}_0, \mathbf{x}_{2a}, \mathbf{y}_{2a})$ et $\Pi_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_{2b}, \mathbf{y}_{2b})$. Les courbes $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ sont considérées comme étant proches des plans Π_0 et Π_1 . La suite du raisonnement va se dérouler dans ces deux plans. Les intersections entre l'outil et les plans Π_0, Π_1 définissent deux ellipses $\mathbf{Ell}_0(\delta)$ et $\mathbf{Ell}_1(\delta)$ qui admettent pour centre les points centre-outil $\mathbf{O}_{P_0}$ et $\mathbf{O}_{P_1}$ (figure 4.3). Nous pouvons alors exprimer les conditions de tangence entre l'outil et la surface en $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$.

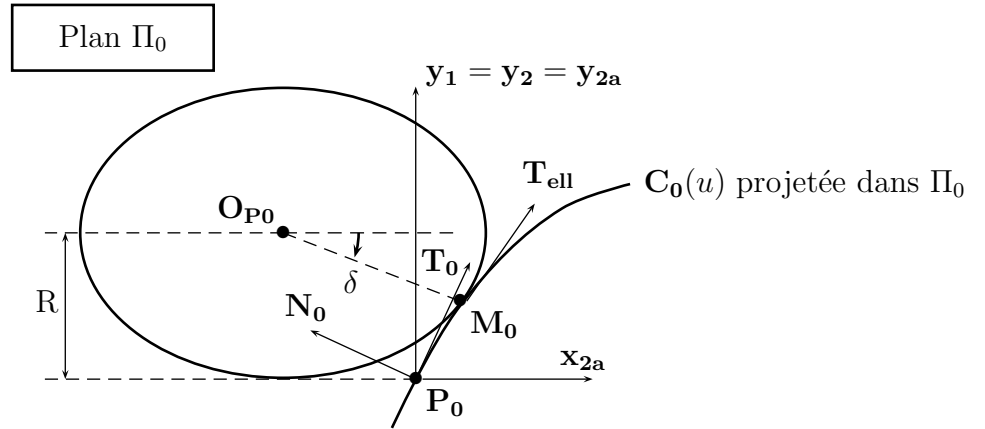


Figure 4.3 – Positionnement amélioré dans le plan Π_0

4.2.2 Mise en équation

La condition de tangence entre l'outil et la directrice $\mathbf{C}_0(u)$ se traduit par l'unicité de la solution au problème d'intersection entre l'ellipse $\mathbf{Ell}_0(\delta)$ et la directrice $\mathbf{C}_0(u)$. En définissant $\mathbf{TanEll}_0(\delta)$, le vecteur tangent à l'ellipse $\mathbf{Ell}_0(\delta)$, nous pouvons écrire la condition de tangence en exprimant que l'ellipse $\mathbf{Ell}_0(\delta)$ et la directrice $\mathbf{C}_0(u)$ ont la même pente au point

d'intersection.

Nous poserons les mêmes conditions dans le plan Π_1 .

Pour mener à bien le raisonnement, nous avons besoin des expressions de $\mathbf{C}_0(u)$ et de $\mathbf{C}_1(u)$ dans les repères $\mathcal{R}_{2a}$ et $\mathcal{R}_{2b}$ respectivement : $\mathbf{C}_0\mathbf{r}_{2a}(u)$ et $\mathbf{C}_1\mathbf{r}_{2b}(u)$

L'intersection au point $\mathbf{M}_0$ se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_0\mathbf{r}_{2a}(u_0) \cdot \mathbf{x}_{2a} = \mathbf{Ell}_0(\delta_0) \cdot \mathbf{x}_{2a} \\ \mathbf{C}_0\mathbf{r}_{2a}(u_0) \cdot \mathbf{y}_{2a} = \mathbf{Ell}_0(\delta_0) \cdot \mathbf{y}_{2a} \end{cases} \quad (4.1)$$

L'égalité des pentes entre l'ellipse et la directrice au point de tangence s'exprime dans le repère $\mathcal{R}_{2a}$ par :

$$\frac{\mathbf{TanEll}_0(\delta_0) \cdot \mathbf{y}_{2a}}{\mathbf{TanEll}_0(\delta_0) \cdot \mathbf{x}_{2a}} = \frac{\frac{d\mathbf{C}_0\mathbf{r}_{2a}(u_0)}{du} \cdot \mathbf{y}_{2a}}{\frac{d\mathbf{C}_0\mathbf{r}_{2a}(u_0)}{du} \cdot \mathbf{x}_{2a}} \quad (4.2)$$

L'intersection au point $\mathbf{M}_1$ se traduit de la même façon par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1\mathbf{r}_{2b}(u_1) \cdot \mathbf{x}_{2b} = \mathbf{Ell}_1(\delta_1) \cdot \mathbf{x}_{2b} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{r}_{2b}(u_1) \cdot \mathbf{y}_{2b} = \mathbf{Ell}_1(\delta_1) \cdot \mathbf{y}_{2b} \end{cases} \quad (4.3)$$

L'égalité des pentes entre l'ellipse et la directrice au point de tangence s'exprime dans le repère $\mathcal{R}_{2b}$ par :

$$\frac{\mathbf{TanEll}_1(\delta_1) \cdot \mathbf{y}_{2b}}{\mathbf{TanEll}_1(\delta_1) \cdot \mathbf{x}_{2b}} = \frac{\frac{d\mathbf{C}_1\mathbf{r}_{2b}(u_1)}{du} \cdot \mathbf{y}_{2b}}{\frac{d\mathbf{C}_1\mathbf{r}_{2b}(u_1)}{du} \cdot \mathbf{x}_{2b}} \quad (4.4)$$

Pour finir, on considère la condition géométrique suivante :

$$h_p = h_0 + h_1 \quad (4.5)$$

En considérant les expressions obtenues dans les équations (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5), on obtient un système à sept équations et sept inconnues : u_0 , u_1 , δ_0 , δ_1 , h_0 , h_1 et γ .

4.3 Étude cinématique du positionnement amélioré

Nous cherchons à analyser les erreurs commises par une étude géométrique qui ne prend pas en compte l'aspect cinématique de l'usinage. Pour cela une fois la surface enveloppe définie, nous étudions la position des points caractéristiques du positionnement amélioré par rapport à celle-ci. Un exemple complet de l'usinage d'une surface réglée est traité à la fin de cette section pour conclure l'ensemble de l'étude : les trajectoires des outils correspondant aux positionnements standard et amélioré sont calculées sous Maple, les surfaces enveloppes sont définies et les erreurs entre les surfaces théorique et enveloppe sont évaluées. Les pièces sont ensuite usinées et mesurées, les sources d'erreur sont identifiées et l'aspect cinématique du positionnement amélioré basée sur des considérations géométriques est analysé.

Dans le repère $\mathcal{R}'_2$, les points $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ sont définis de la manière suivante :

$$\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_{\mathbf{P}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_{p1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}) = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La vitesse d'un point $\mathbf{M}$ de l'outil $\mathbf{V}(\mathbf{M})$ peut être calculée à partir de la vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0})$ du point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ par la relation suivante :

$$\mathbf{V}(\mathbf{M}) = \mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) + \mathbf{M}\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

La vitesse de rotation instantanée de l'outil $\boldsymbol{\Omega}$ peut être déterminée de la manière suivante :

$$\mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) = \mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}) + \mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (4.9)$$

On en déduit alors :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{V_{0y} - V_{1y}}{Z_{p1}} \\ \beta = \frac{V_{1x} - V_{0x}}{Z_{p1}} \\ \omega \text{ connu par la vitesse de coupe.} \end{cases} \quad (4.10)$$

D'autre part, un point $\mathbf{M}$ de l'outil appartiendra à la surface enveloppe si la normale $\mathbf{N}_{\mathbf{M}}$ à la surface de l'outil $\mathbf{T}(\theta, s)$ en $\mathbf{M}$ est perpendiculaire à la vitesse d'avance $\mathbf{V}(\mathbf{M})$ en ce point. Pour une position de l'outil sur une règle la courbe enveloppe est donc donnée par :

$$\mathbf{V}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{M}} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

On peut alors écrire grâce à l'équation 4.8 :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) + \mathbf{M}\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0} \wedge \boldsymbol{\Omega}) = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) + (\mathbf{N}_{\mathbf{M}} \wedge \mathbf{M}\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$$

En effectuant les calculs, on obtient ensuite :

$$\cos(\theta) \cdot (V_{0x} + s \cdot \beta) + \sin(\theta) \cdot (V_{0y} - s \cdot \alpha) = 0$$

Dans $\mathcal{R}'_2$, l'orientation des vecteurs $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{y}_2$ impose $V_{0_x} > 0$, $V_{1_x} > 0$ et $V_{0_y} \cdot V_{1_y} < 0$. La courbe enveloppe effectuant l'usinage sera définie sur le secteur angulaire $\theta \in [-\pi, 0]$, ce qui implique $\sin(\theta) \leq 0$. On obtient donc :

$$\cos(\theta) = \frac{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)}{\sqrt{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)^2 + (V_{0_x} + s \cdot \beta)^2}} \quad (4.12)$$

$$\sin(\theta) = -\frac{(V_{0_x} + s \cdot \beta)}{\sqrt{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)^2 + (V_{0_x} + s \cdot \beta)^2}} \quad (4.13)$$

En reportant ces équations dans $\mathbf{T}(\theta, s)$, on trouve l'expression de la courbe enveloppe $\mathbf{C}_E(s)$:

$$\mathbf{C}_E(s) = \begin{pmatrix} R \cdot \frac{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)}{\sqrt{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)^2 + (V_{0_x} + s \cdot \beta)^2}} \\ R \cdot \frac{(V_{0_x} + s \cdot \beta)}{\sqrt{(V_{0_y} - s \cdot \alpha)^2 + (V_{0_x} + s \cdot \beta)^2}} \\ s \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Soit r le paramètre donnant la position de la règle, l'expression de $\mathbf{C}_E(s)$ dans le repère global de la surface permet alors de définir la surface enveloppe $\mathbf{S}_{\text{env}}(r, s)$.

Lorsqu'on a $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, l'angle θ est constant et les mouvements de l'outil sont limités à de l'usinage en trois axes. Ce cas de figure intervient lorsque la surface à usiner est une surface réglée développable. Les normales à la surface le long d'une règle sont toutes parallèles. La courbe enveloppe est alors une droite. Étant donné que l'outil est tangent aux deux directrices de la surface réglée et que la courbe enveloppe est une droite, la surface usinée est donc identique à la surface nominale.

En revanche, pour l'usinage des surfaces réglées en cinq axes, la condition ci-dessus n'est en général pas vérifiée. Si on considère une surface réglée non développable, les normales à la surface le long d'une règle ne sont pas parallèles. L'outil tangent aux deux directrices voit ses deux points extrémités $\mathbf{O}_{P_0}$ et $\mathbf{O}_{P_1}$ se déplacer dans des directions différentes lors d'un usinage en cinq axes. L'outil effectue donc en permanence des mouvements combinés de rotation et de translation. La courbe enveloppe ne coïncide plus avec la règle à chaque instant. Il y a donc apparition d'une erreur d'usinage.

4.3.2 Analyse de l'erreur effectuée par une étude géométrique

Dans cette section, nous allons étudier la position des points $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ par rapport à la surface enveloppe.

4.3.2.1 Analyse pour les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$

Soit $\mathbf{T}_{\text{ell}}$ la tangente à l'ellipse en $\mathbf{M}_0$ (figure 4.4). On considère que la vitesse du point $\mathbf{M}_0$ est colinéaire à $\mathbf{T}_{\text{ell}}$ car les positionnements se font sur des règles très proches les unes

des autres. On définit le plan Π_2 passant par $\mathbf{M}_0$ et perpendiculaire à l'axe de l'outil (figure 4.5). On note φ l'angle entre les plans Π_0 et Π_2 . On note $\mathbf{E}(\delta)$ l'équation polaire de l'ellipse $\mathbf{Ell}_0(\delta)$ dans le repère $\mathcal{R}'_{2a}$ (figure 4.4) :

$$\mathbf{E}(\delta) = \begin{pmatrix} \frac{R \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi) \cdot \cos^2(\delta)}} \\ \frac{R \cdot \sin(\delta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi) \cdot \cos^2(\delta)}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

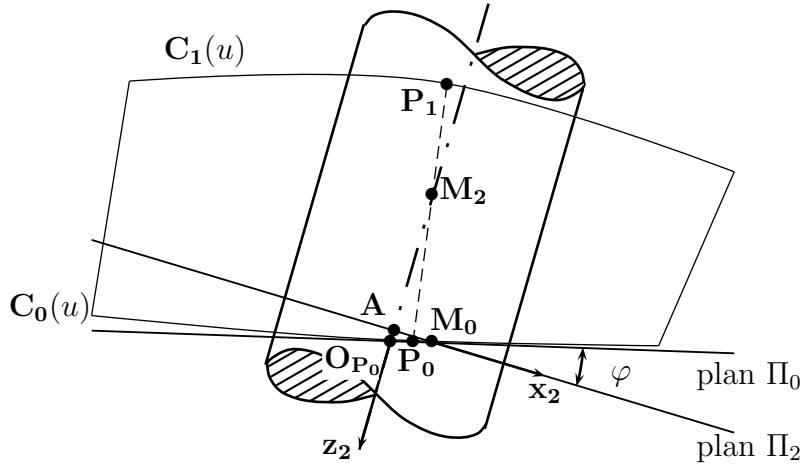


Figure 4.5 – Analyse cinématique au niveau du point $\mathbf{M}_0$

Soit δ_0 la valeur de δ telle que $\mathbf{E}(\delta_0) = \mathbf{M}_0$, on peut alors écrire :

$$\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} -\sin(\delta_0) \\ \cos^2(\varphi) \cos(\delta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Dans le plan Π_2 , le point $\mathbf{M}_0$ appartient au cercle de centre $\mathbf{A} = (0, 0, z_A)_{\mathcal{R}'_2}$ qui admet comme équation polaire dans le repère $\mathcal{R}'_2$ l'équation suivante :

$$\mathbf{C}(\mu) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\mu) \\ R \cdot \sin(\mu) \\ z_A \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Le point $\mathbf{M}_0$ appartenant au cercle $\mathbf{C}(\mu)$, on peut définir le paramètre μ_0 tel que : $\mathbf{C}(\mu_0) = \mathbf{M}_0$. D'autre part, étant donné que $\mathbf{y}_{2a} = \mathbf{y}_2$, on peut écrire :

$$\mathbf{C}(\mu_0) \cdot \mathbf{y}_{2a} = \mathbf{E}(\delta_0) \cdot \mathbf{y}_2$$

dont on peut déduire :

$$\sin(\mu_0) = \frac{\sin(\delta_0)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi) \cos^2(\delta_0)}} \quad (4.18)$$

$$\cos(\mu_0) = \frac{\cos(\delta_0) \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi) \cos^2(\delta_0)}} \quad (4.19)$$

Les vecteurs de $\mathcal{R}'_2$ sont issus des vecteurs de $\mathcal{R}'_{2a}$ par une rotation d'angle φ autour de $\mathbf{y}_{2a}$.

La tangente $\mathbf{T}_{\text{ell}}$ devient dans le repère $\mathcal{R}'_2$:

$$\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \cdot \sin(\delta_0) \\ \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\delta_0) \\ -\sin(\varphi) \cdot \sin(\delta_0) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

La normale à l'outil $\mathbf{N}_{\mathbf{M}_0}$ dans $\mathcal{R}'_2$ en $\mathbf{M}_0$ est donnée par :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{M}_0} = \begin{pmatrix} \cos(\mu_0) \\ \sin(\mu_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

On peut alors vérifier que $\mathbf{T}_{\text{ell}} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{M}_0} = 0$. Le point $\mathbf{M}_0$ est donc un point qui appartient à la surface enveloppe.

De la même manière on démontre que $\mathbf{M}_1$ est un point appartenant à la surface enveloppe et on détermine l'angle μ_1 tel que $\mathbf{C}(\mu_1) = \mathbf{M}_1$. La courbe enveloppe en projection sur le plan $(\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ est définie entre les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ (figure 4.6).

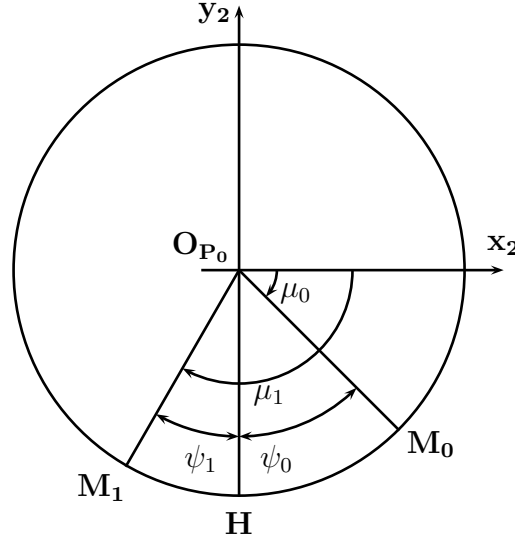


Figure 4.6 – Angles définissant la courbe enveloppe

En conclusion, on peut dire que les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$, issus d'une étude géométrique, sont des points générateurs. Ceci permet de préserver les directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$.

4.3.2.2 Analyse pour le point $\mathbf{M}_2$

Nous cherchons la position du point $\mathbf{M}_2$, centre de la rotation de l'outil autour de l'axe $\mathbf{y}_2$, par rapport à la surface enveloppe. [BMM03] ont montré que la courbe enveloppe était très proche d'une hélice. La position du point bas $\mathbf{H}$ (figure 4.6) suivant l'axe $\mathbf{z}_2$ est donc déterminé par rapport à $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$.

En posant $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - |\mu_0|$ et $\psi_1 = |\mu_1| - \frac{\pi}{2}$ (figure 4.6), on obtient :

$$\frac{\mathbf{M}_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{M}_0 \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{z}_2} = \frac{\psi_0}{\psi_0 + \psi_1} \quad (4.22)$$

Pour simplifier le problème considérons que les courbures à $\mathbf{C}_0(u)$ en $\mathbf{P}_0$ et à $\mathbf{C}_1(u)$ en $\mathbf{P}_1$ sont nulles. On pose alors que $\mathbf{N}_{\mathbf{M}_0} = \mathbf{N}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{N}_{\mathbf{M}_1} = \mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}$ (figure 4.7). $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}$ étant les normales aux points $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$. En appliquant le positionnement standard, la position de

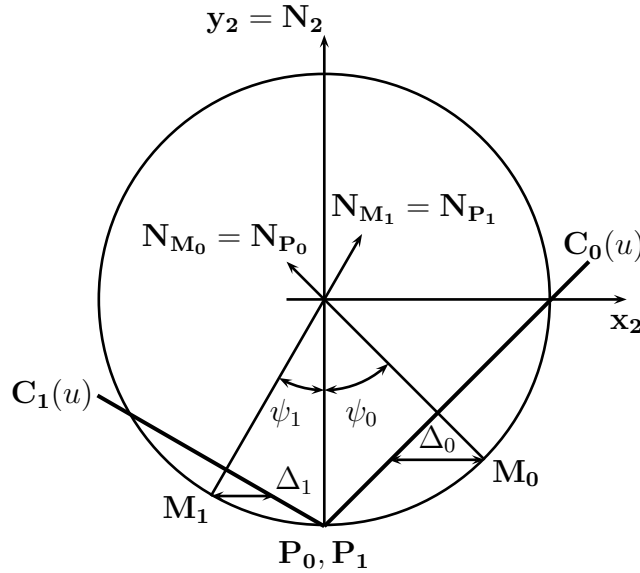


Figure 4.7 – Position de l'outil avant la rotation autour de $\mathbf{y}_2$

l'outil est donnée par la figure 4.7. En supposant que les erreurs Δ_0 et Δ_1 sont définies aux angles ψ_0 et ψ_1 , on a alors :

$$\Delta_0 = R \cdot \frac{(1 - \cos \psi_0)}{\sin \psi_0} \quad \text{et} \quad \Delta_1 = R \cdot \frac{(1 - \cos \psi_1)}{\sin \psi_1}$$

On effectue ensuite une rotation de l'outil autour de $\mathbf{y}_2$ en $\mathbf{M}_2$ pour éliminer les erreurs Δ_0 et Δ_1 . Ceci se traduit par :

$$\frac{\Delta_0}{\mathbf{M}_2 \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{z}_2} = \frac{\Delta_1}{\mathbf{P}_1 \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \quad (4.23)$$

On en déduit :

$$\frac{\mathbf{P}_0\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{z}_2} = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} = \frac{(1 - \cos \psi_0) \cdot \sin \psi_1}{\sin \psi_0 + \sin \psi_1 - \sin(\psi_0 + \psi_1)} \quad (4.24)$$

On pose $\alpha = \psi_0 + \psi_1$, cet angle caractérise la vrille de la surface, on peut poser :

$$\cos \psi \simeq 1 - \frac{\psi^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin \psi \simeq \psi - \frac{\psi^3}{6}$$

On obtient :

$$\frac{\mathbf{P}_0\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{z}_2} = \left(1 - \frac{\psi_1^2}{6}\right) \frac{\psi_0}{\psi_0 + \psi_1} \simeq \frac{\psi_0}{\psi_0 + \psi_1} \quad (4.25)$$

En comparant cette équation avec l'équation 4.22, on peut en déduire que les points $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{H}$ sont très proches. Le point $\mathbf{H}$ étant un point générateur, on peut en déduire que le point $\mathbf{M}_2$ est un point générateur.

4.3.3 Exemple

4.3.3.1 Introduction

Afin de conclure sur la méthodologie liée au positionnement amélioré de l'outil, nous avons fait l'étude de l'usinage de la surface réglée (figure 4.8) définie par l'équation 4.26

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 20 \cdot (2v - 1) \cdot \cos((1 - 2u)\frac{\pi}{4}) \\ 37.5 \cdot (2u - 1) \\ 20 \cdot (2v - 1) \cdot \sin((1 - 2u)\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (4.26)$$

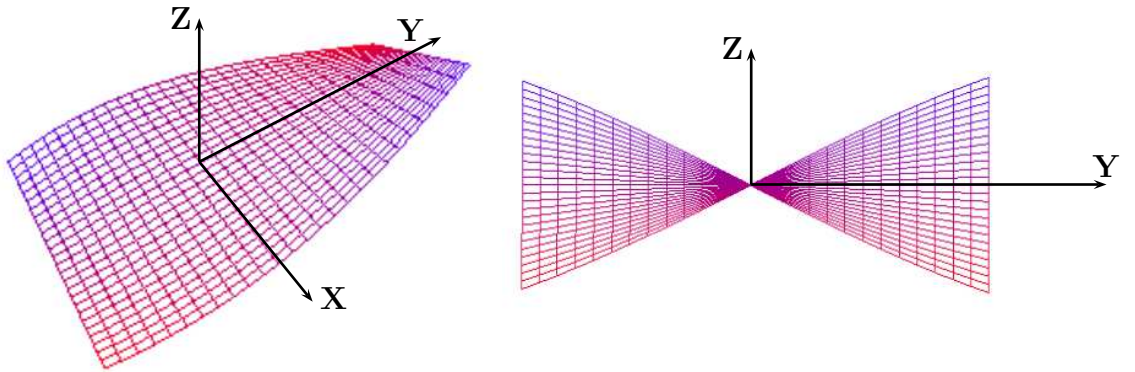


Figure 4.8 – Représentation de la surface à usiner

Cette surface possède les caractéristiques suivantes : les règles sont toutes de longueur égale à 40 mm et l'angle α entre les normales aux extrémités des règles est constant et égal à $45,45^\circ$.

L'outil utilisé a un diamètre de 40 mm et une longueur d'arête de 60 mm. Deux pièces ont été usinées : une avec le positionnement standard, une autre avec le positionnement amélioré (figure 4.9).

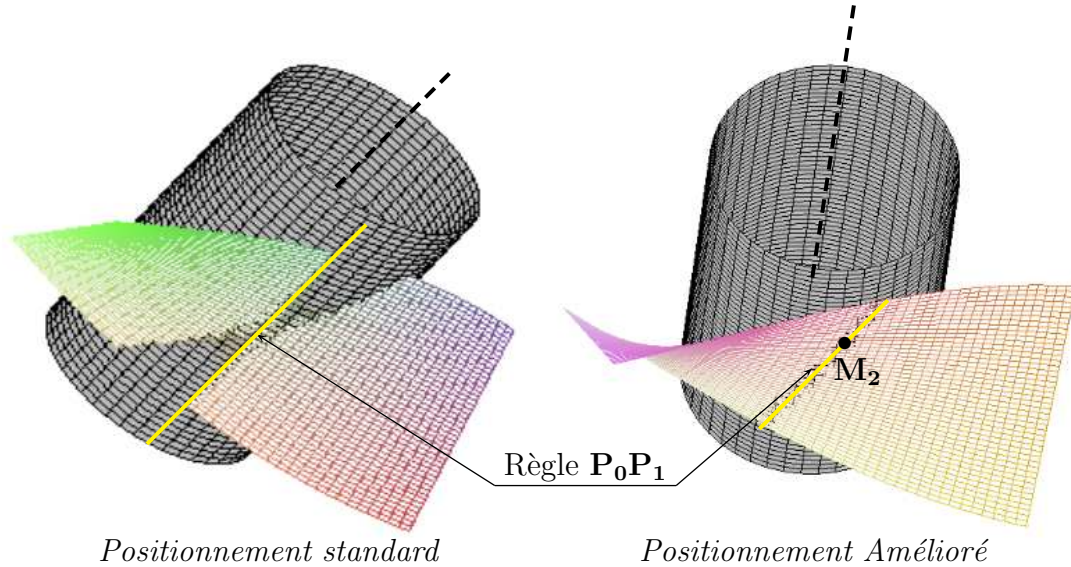


Figure 4.9 – Positionnements « standard » et « amélioré »

4.3.3.2 Calcul de l'erreur pour les différents positionnements

4.3.3.2.1 Positionnement standard

Ce positionnement est illustré sur les figures 4.9 et 4.10. L'axe de l'outil est colinéaire avec la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ et à une distance R de celle-ci. Le positionnement angulaire de l'outil est tel que l'erreur est répartie sur les deux directrices. Pour cette surface la résolution du système définissant le positionnement standard donne $\alpha_0 = \alpha_1$.

Le rayon de courbure sur les directrices étant très grand devant le rayon de l'outil, l'erreur sur les directrices peut être approchée par la relation suivante :

$$\varepsilon = R \cdot (1 - \cos \alpha_0) = 1.52mm$$

4.3.3.2.2 Positionnement amélioré

Ce positionnement est illustré sur les figures 4.9 et 4.10. Le calcul du positionnement amélioré a montré que la position du point $\mathbf{M}_2$ est confondu avec le point $\mathbf{P}_2$. La rotation de l'outil autour de l'axe défini par $\mathbf{y}_2$ est de l'ordre de $11,5^\circ$.

On voit sur la figure 4.9 que l'outil est très proche de la surface. On ne peut pas quantifier comme dans le cas du positionnement standard une erreur maximale à partir de la position de l'outil sur la pièce : pour les deux positionnements il faut définir les surfaces enveloppes.

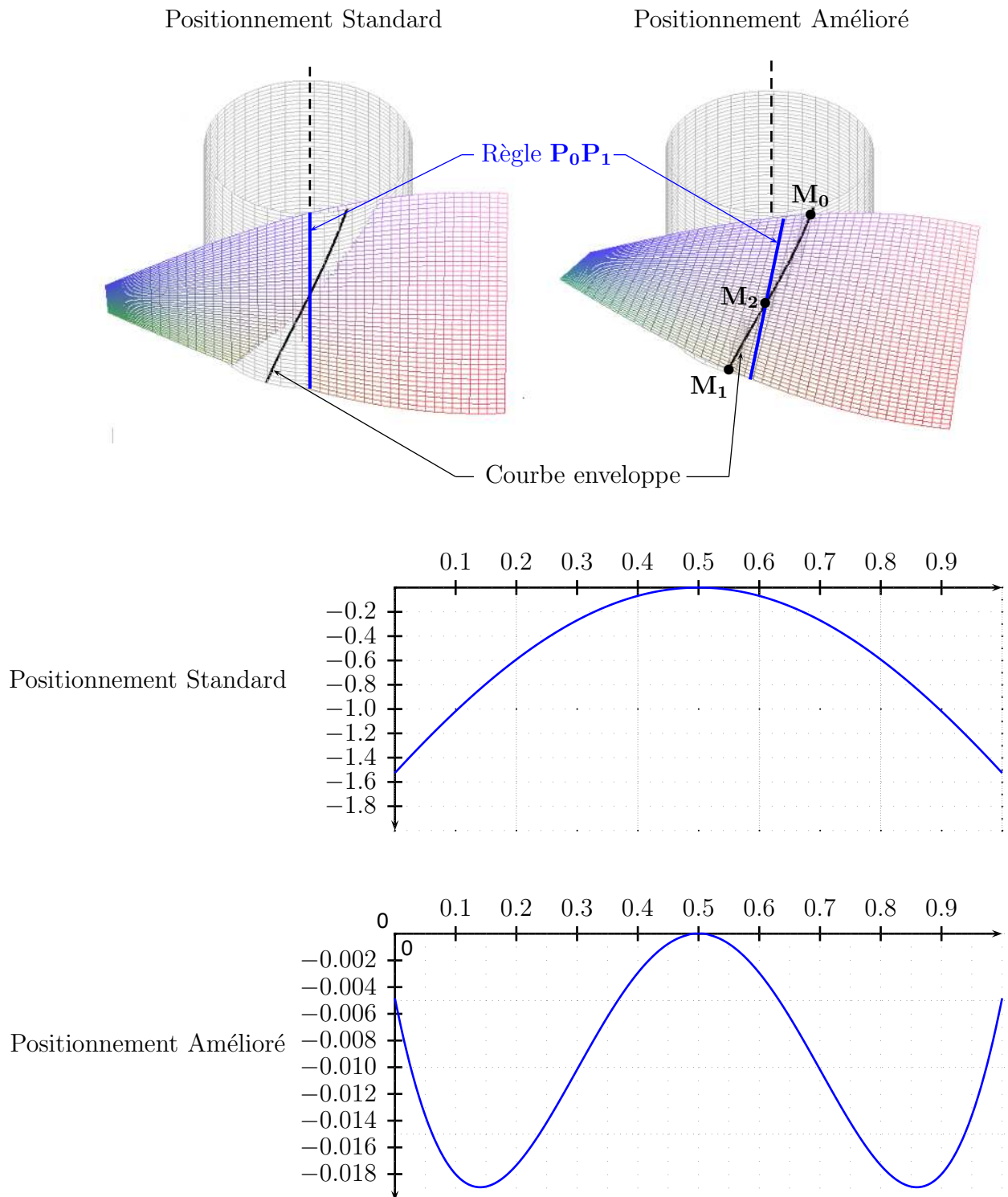


Figure 4.10 – Courbes enveloppes et courbes d'erreurs pour les positionnements standard et amélioré

4.3.3.2.3 Calcul de l'erreur par les surfaces enveloppes

De par la géométrie de la pièce (angle de vrille et longueur de règle constante), l'erreur d'usinage commise quel que soit le positionnement étudié est la même pour toutes les règles. Nous avons défini à l'aide du logiciel Maple la surface enveloppe qu'il est inutile de représenter car elle est très proche visuellement de la surface nominale. Cependant on peut représenter, pour chaque position d'outil, la courbe enveloppe générée (figure 4.10). Soit u_p la valeur paramétrique pour la règle considérée. L'erreur ε entre la surface enveloppe et cette règle se traduit par :

$$\mathbf{S}(u_p, v) + \varepsilon \cdot \mathbf{n}(u_p, v) = \mathbf{S}_{\text{env}}(r, s) \quad \text{avec } v \in [0, 1]$$

Les courbes d'erreur le long de cette règle pour les positionnements standard et amélioré sont représentées sur la figure 4.10. Les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ sont effectivement des points générateurs car la surface enveloppe passe par ces points. On voit également que le point $\mathbf{P}_2$ correspondant au milieu de la règle ($v = 0.5$), qui est confondu avec le point $\mathbf{M}_2$, est un point générateur puisque la surface enveloppe passe par ce point.

4.3.3.3 Usinage et métrologie

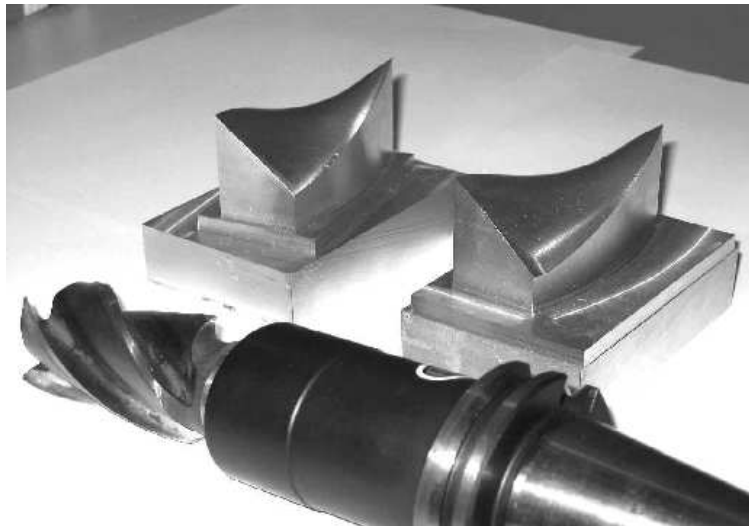


Figure 4.11 – Pièces obtenues en usinage en roulant

Ces deux pièces (figure 4.11) ont été usinées sur une machine outil à commande numérique 5 axes. La métrologie des pièces a été faite sur une machine à mesurer tridimensionnelle. Lors d'un palpé d'un point sur la pièce, la technologie des capteurs dynamiques utilisés (liaison de Boys) ne permet pas de connaître le point de contact mais seulement le centre de la bille

du palpeur. Pour retrouver le point palpé, on a utilisé la procédure décrite ci-dessous. Lors de l'opération de fraisage les surfaces de référence (plans) et la surface réglée ont été usinées sans démontage de la pièce. Les surfaces de référence ont servi de repère de mesure ($\mathbf{O}$, $\mathbf{X}_{\text{mes}}$, $\mathbf{Y}_{\text{mes}}$) (figure 4.12). Le repère de la surface ($\mathbf{O}_{\text{PP}}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$) est recalé dans le repère de mesure ce qui permet de déterminer lors du palpage la normale théorique du point palpé. On appelle (X_{PP}, Y_{PP}) les coordonnées du centre de la bille dans le repère de la surface. A partir de l'équation de la surface (équation 4.26), on déduit les valeurs paramétriques correspondant au point palpé de la manière suivante :

$$\begin{cases} 20 \cdot (2v_{PP} - 1) \cdot \cos((1 - 2u_{PP})\frac{\pi}{4}) = X_{PP} \\ 37.5 \cdot (2u_{PP} - 1) = Y_{PP} \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} u_{PP} = \frac{Y_{PP}}{75} + 0.5 \\ v_{PP} = \frac{X_{PP}}{40 \cdot \cos(\frac{\pi \cdot Y_{PP}}{150})} + 0.5 \end{cases} \quad (4.27)$$

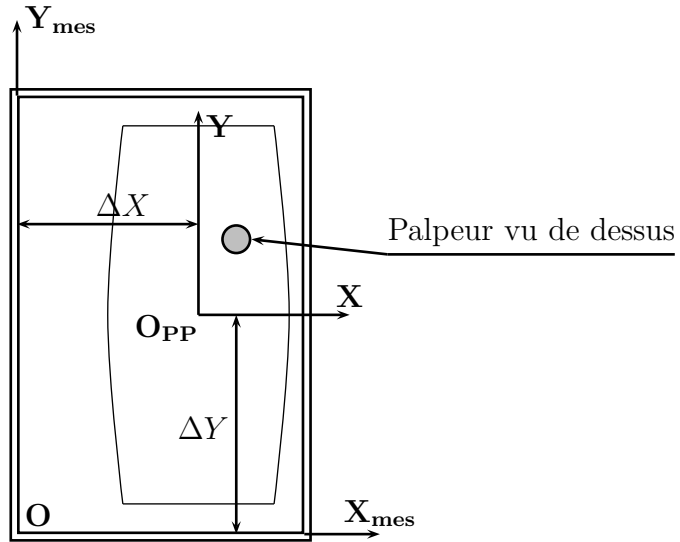


Figure 4.12 – Repère de mesure

Le diamètre du palpeur étant faible (1 mm), l'erreur commise entre les valeurs paramétriques du point centre bille et du point palpé est négligeable pour le calcul de la normale à la surface. Les valeurs paramétriques (u_{PP}, v_{PP}) servent à calculer la normale et à déterminer le point palpé à partir du point centre bille. Les résultats de la mesure des pièces relative à une règle sont données sur la figure 4.13.

La mesure de la pièce en positionnement standard donne bien les résultats attendus. Pour la pièce en positionnement amélioré il semblerait que l'angle entre l'axe de l'outil et la règle dans le plan ayant pour normale $\mathbf{y}_2$ soit légèrement plus important sur la machine que celui calculé. La différence entre ces deux angles serait inférieure à 0.3° . Ceci montre

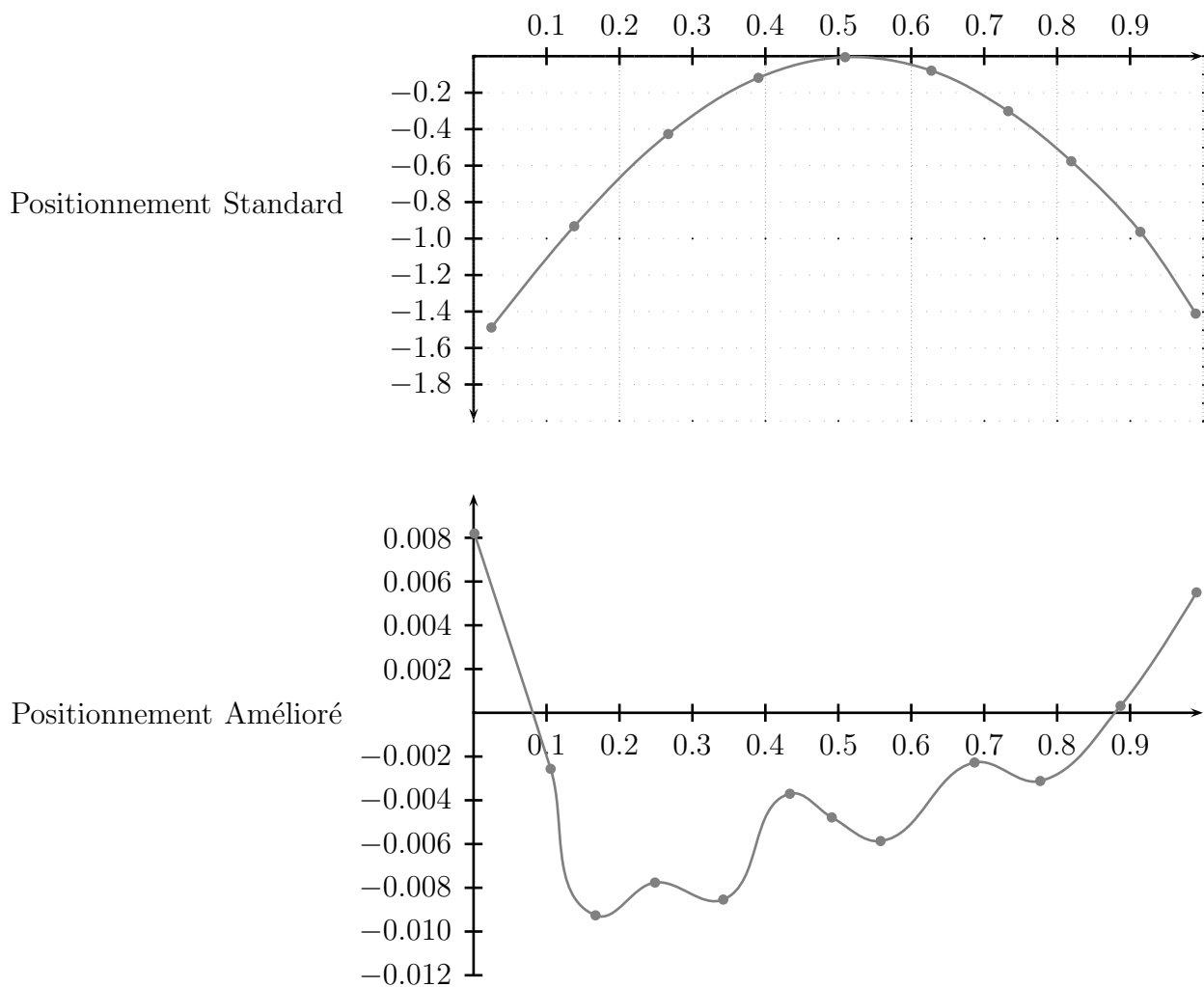


Figure 4.13 – Mesure d’une règle pour les positionnements standard et amélioré

l’importance de la qualité du réglage de la machine. De plus les erreurs rencontrées sont de l’ordre de la précision de la machine tridimensionnelle à mesurer. Cet usinage montre que le positionnement amélioré permet d’obtenir une surface usinée quasiment sur la surface nominale tout en se basant sur une étude géométrique. Les ordres de grandeur des erreurs dues au positionnement amélioré étant très faibles, les opérations de préparation de la fabrication deviennent prépondérantes.

4.3.4 Conclusion

Le positionnement amélioré a fait l’objet de plusieurs articles et est toujours comparé avec les nouveaux positionnements proposés. Dans chaque article, les résultats montrent

qu'il est celui qui génère le moins d'interférence entre la surface théorique et l'outil. Les principales remarques émises portent sur le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un système de 7 équations à 7 inconnues. Cependant étant donné aujourd'hui les possibilités élevées des ordinateurs les temps de calcul du module informatique programmé en langage C sont aujourd'hui très courts (de l'ordre de 3 secondes pour 100 positionnements sur un Pentium 4, 1.7 Ghz pour la surface définie dans [Liu95]).

De ce fait, il nous paraissait plus important d'analyser l'aspect cinématique de la méthode du positionnement amélioré qui est basée sur un problème géométrique. Finalement nous avons montré que les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ appartenaient à la surface enveloppe et que le point $\mathbf{M}_2$ en était très proche. Enfin nous avons étudié un exemple avec des valeurs importantes (grand diamètre d'outil, angle entre les normales aux extrémités des règles important) qui a montré après usinage et mesure que les résultats étaient conformes à l'étude cinématique. La mesure de la pièce semble montrer que l'angle réel de rotation de l'outil autour de $\mathbf{y}_2$ a été légèrement plus grand que la valeur calculée. Ceci s'est traduit par des directrices qui n'ont pas été exactement respectées. Le réglage se doit donc d'être très précis.

4.4 Choix de l'axe $\mathbf{y}_2$ pour le positionnement amélioré

Le positionnement amélioré présenté lors de l'état de l'art sur l'usinage en roulant [MFR⁺02] est basé sur l'axe $\mathbf{y}_2 = \mathbf{N}_2$ défini par le positionnement standard. $\mathbf{y}_2$ a été imposé sans connaître l'influence qu'il pouvait avoir sur l'erreur d'usinage. Nous allons donc étudier différents choix pour l'axe $\mathbf{y}_2$ et quantifier l'influence de ces choix sur l'erreur engendrée. Si l'on suppose que les valeurs des erreurs maximales (undercut et overcut) évoluent dans les mêmes proportions que les distances $\|\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2\|$ et $\|\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\|$, nous allons chercher à effectuer la rotation de l'outil d'angle γ autour d'un point proche du point $\mathbf{P}_2$, milieu de la règle. Ce choix est d'autant plus justifié que nous avons démontré dans l'analyse cinématique précédente que les erreurs d'usinage sont proches de zéro en $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$. Ainsi, trois possibilités ont été comparées sur le choix de l'axe $\mathbf{y}_2$, chaque possibilité conduisant à un point de rotation $\mathbf{M}_2$ proche du point $\mathbf{P}_2$:

- 1^{er} choix : on impose à l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$ d'être confondu avec la bissectrice des normales $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$, ce positionnement s'appelle « positionnement amélioré »,
- 2^{ième} choix : on impose au point de rotation $\mathbf{M}_2$ d'être confondu avec le point $\mathbf{P}_2$, ce positionnement s'appelle « positionnement amélioré centré »
- 3^{ième} choix : on choisit l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$ de telle sorte que les erreurs d'undercut et d'overcut soient égales.

Le positionnement amélioré tel qu'il a été défini dans [MFR⁺02] a été programmé en langage C au sein de notre laboratoire. Le code tel qu'il a été écrit permet de choisir l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ mais en aucun cas le point de rotation $\mathbf{M}_2$. Afin de pouvoir utiliser directement le code existant pour le positionnement amélioré centré (point de rotation $\mathbf{M}_2$ en $\mathbf{P}_2$), nous allons effectuer une étude permettant d'estimer l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ qui nous conduirait à avoir le point $\mathbf{M}_2$ proche du centre de la règle. La volonté d'utiliser le code existant se justifie car celui-ci a déjà été largement testé, sa fiabilité est donc connue.

4.4.1 Estimation de l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ permettant d'avoir le point $\mathbf{M}_2$ proche du point $\mathbf{P}_2$

4.4.1.1 Remarque sur l'étude

Nous aurions pu chercher à définir le nouveau positionnement en imposant la position du point $\mathbf{M}_2$ en un lieu précis de la règle. Le problème se traduit mathématiquement de la manière suivante :

L'axe $\mathbf{y}_2 = \frac{(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1}{\|(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1\|}$ est une inconnue et fonction de $a \in [0, 1]$. Les 6 équations traduisant la tangence en $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ sont inchangées. L'équation $h_0 + h_1 = h_P$ est dès le départ validée par le choix du point $\mathbf{M}_2$. Nous nous retrouvons donc avec un système de 6 équations à 6 inconnues $u_0, u_1, \delta_0, \delta_1, \gamma$ et a .

Cette résolution, codée sous Maple, est un peu plus complexe car les matrices de rotation ne sont pas connues. L'intérêt d'un tel algorithme est d'imposer le point de rotation $\mathbf{M}_2$ en un point particulier de la règle. Bien que le code développé fonctionne, nous avons préféré utiliser le code existant où seul l'axe $\mathbf{y}_2$ peut être imposé, ceci pour des raisons de robustesses et de fiabilité.

La réflexion que nous avons alors eu a été la suivante : sommes nous en mesure de choisir la position de $\mathbf{M}_2$ qui va minimiser l'erreur ? Par rapport à cette réflexion, il nous a semblé que la réponse à cette question était de positionner $\mathbf{M}_2$ en $\mathbf{P}_2$. Ainsi, l'intérêt de l'algorithme permettant de choisir le positionnement exact du point $\mathbf{M}_2$ n'est plus aussi évident. A partir de ce constat nous avons préféré faire une étude sur l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ que nous indiquerions au positionnement amélioré qui est déjà programmé.

4.4.1.2 Calcul préliminaire

Pour mener ce raisonnement, on définit le repère suivant : $\mathcal{R} (\mathbf{O}_0, \mathbf{X} = \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}{\|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1\|})$ (figure 4.14). Le choix du vecteur $\mathbf{Y}$ sera défini ultérieurement. L'outil est mis

dans la position initiale suivante : l'axe de l'outil est confondu avec la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, puis il est translaté suivant l'axe $\mathbf{Y}$ du rayon R . L'étude que nous allons mener se situe au niveau de la directrice $\mathbf{C}_0(u)$, elle sera identique pour la directrice $\mathbf{C}_1(u)$. A partir du positionnement initial, l'outil est en overcut avec les deux directrices. Nous considérons les rayons de courbure des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$, notés respectivement ρ_0 et ρ_1 , localement constants.

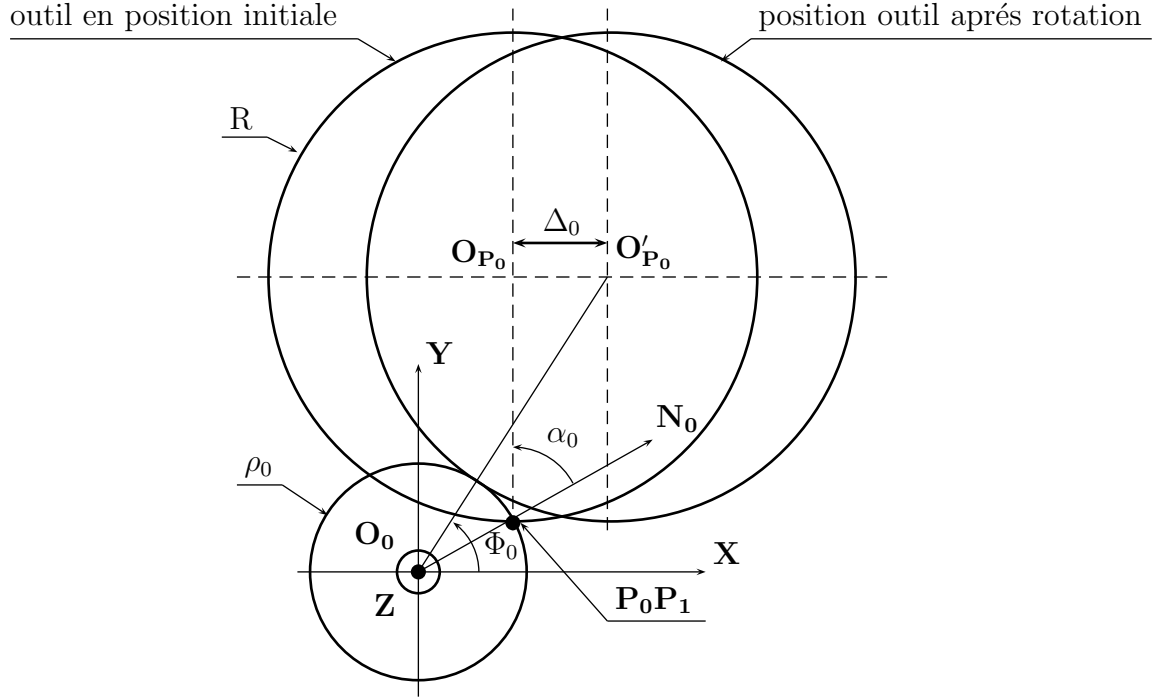


Figure 4.14 – Schéma du mouvement des extrémités de l'outil

Analysons le point suivant : si suite au positionnement amélioré (rotation de l'outil autour de $\mathbf{Y}$), le point de rotation $\mathbf{M}_2$ est situé au milieu de la règle, les déplacements des points centre-outil $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ respectivement dans les plans Π_0 et Π_1 seront très proches. Ceci est vrai car les plans Π_0 et Π_1 sont angulairement proches et l'angle de rotation γ faible. Réciproquement si les points centre-outil se déplacent d'une même valeur dans les plans Π_0 et Π_1 , l'outil tournera autour d'un point proche du milieu de la règle. A partir de ce constat nous allons étudier le déplacement d'un cercle de rayon R (correspondant à une section de l'outil dans le plan Π_0) afin de le positionner tangent à la directrice. L'approximation réalisée (on ne considère pas une ellipse) ne perturbe pas le résultat car celle-ci est faite pour les deux directrices.

Notons $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ le centre du cercle en position initiale défini par $\alpha_0 = (\mathbf{N}_0, \mathbf{Y})$. On déplace le point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ de Δ_0 suivant l'axe $\mathbf{X}$ jusqu'à ce que le cercle soit tangent à la directrice. La

position du centre du cercle est alors notée $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_0}$ et est repérée par l'angle Φ_0 .

On exprime les coordonnées des deux positions successives des centres $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_0}$:

$$\mathbf{O}_0\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0} \begin{cases} x_0 = \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0) \\ y_0 = \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0) + R \end{cases} \quad \mathbf{O}_0\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_0} \begin{cases} x'_0 = (R + \rho_0) \cdot \cos(\Phi_0) \\ y'_0 = (R + \rho_0) \cdot \sin(\Phi_0) \end{cases} \quad (4.28)$$

On a également les relations suivantes :

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \Delta_0 \\ y'_0 = y_0 \end{cases} \quad (4.29)$$

dont on déduit :

$$\begin{cases} \sin(\Phi_0) = \frac{\rho_0 \cdot \cos(\alpha_0) + R}{R + \rho_0} \\ \Delta_0 = -\rho_0 \cdot \sin(\alpha_0) + (R + \rho_0) \cdot \cos(\Phi_0) \end{cases} \quad (4.30)$$

4.4.1.3 Application sur la surface dans le cas général

La démarche menée lors des calculs préliminaires est appliquée aux niveau des deux directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ afin d'évaluer l'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ qui conduit à un point $\mathbf{M}_2$ centré sur la règle (figure 4.15). Le raisonnement mené est le suivant : lorsque l'outil tourne autour de l'axe $\mathbf{y}_2$ avec une amplitude γ , les deux points $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ appartenant à l'axe outil se déplacent respectivement de Δ_0 et Δ_1 . Le point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ se déplace en $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_0}$ et le point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ en $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_1}$. Les positions initiales des points $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$, paramétrées respectivement par les angles α_0 et α_1 , sont alors cherchées de telle sorte que les déplacements de points $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ soient identiques. On remarque que l'axe $\mathbf{Y}$ évoqué lors des calculs préliminaires correspond en réalité à l'axe $\mathbf{y}_2$ recherché.

Le déplacement Δ_0 qui permet de passer du point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ au point $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_0}$ est donné par l'équation 4.30. Le déplacement Δ_1 du point $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ le long de l'axe $\mathbf{X}$ se calcule de la même manière que Δ_0 . On exprime les coordonnées des deux positions successives des centres $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$ et $\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_1}$ dans le repère $(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}, \mathbf{Y}=\mathbf{y}_2, \mathbf{Z})$:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1} \begin{cases} x_1 = -\rho_1 \cdot \sin(\alpha_1) \\ y_1 = \rho_1 \cdot \cos(\alpha_1) + R \end{cases} \quad \mathbf{O}_1\mathbf{O}'_{\mathbf{P}_1} \begin{cases} x'_1 = (R + \rho_1) \cdot \cos(\Phi_1) \\ y'_1 = (R + \rho_1) \cdot \sin(\Phi_1) \end{cases} \quad (4.31)$$

On a également les relations suivantes :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - \Delta_1 \\ y'_1 = y_1 \end{cases} \quad (4.32)$$

dont on déduit :

$$\begin{cases} \sin(\Phi_1) = \frac{\rho_1 \cdot \cos(\alpha_1) + R}{R + \rho_1} \\ \Delta_1 = -\rho_1 \cdot \sin(\alpha_1) - (R + \rho_1) \cdot \cos(\Phi_1) \end{cases} \quad (4.33)$$

L'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Delta_1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha \end{cases} \quad (4.34)$$

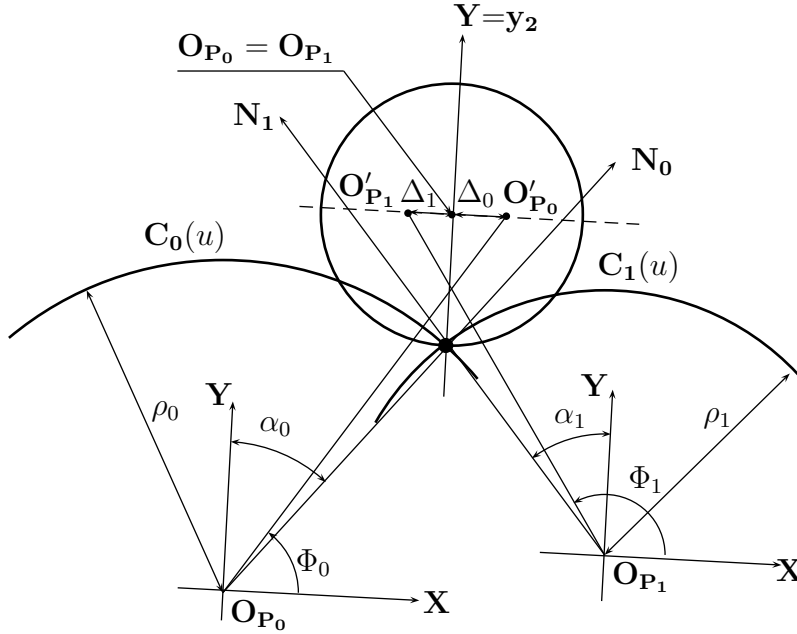


Figure 4.15 – Recherche de l'axe $\mathbf{y}_2$ initial correspondant au positionnement amélioré centré

4.4.1.4 Application sur la surface dans le cas d'une directrice à courbure nulle

L'algorithme développé dans le paragraphe précédent est valable tant que les directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ sont des courbes. Dès lors qu'une des directrices devient une droite, son rayon de courbure est infini et les relations obtenues précédemment ne peuvent plus être exploitées.

Considérons la directrice $\mathbf{C}_0(u)$ avec un rayon de courbure infini. Nous recherchons le déplacement Δ_0 (figure 4.16) qui positionne le cercle tangent à la droite. Dans cette nouvelle configuration, nous avons :

$$\cos(\alpha_0) = \frac{R - \varepsilon}{R} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha_0) = \frac{\Delta_0}{\varepsilon}$$

d'où :

$$\Delta_0 = \frac{R \cdot (1 - \cos(\alpha_0))}{\sin(\alpha_0)}$$

Cette relation sera à prendre en compte si la courbure est nulle.

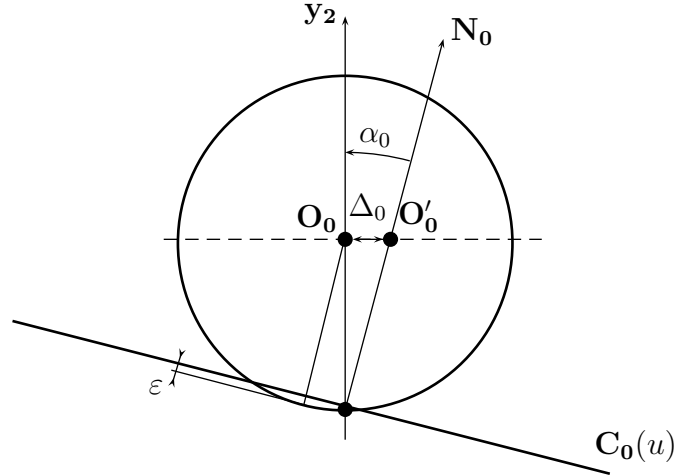


Figure 4.16 – Recherche de l'axe y_2 initial dans le cas d'une directrice droite

4.4.2 Étude comparative entre les différents positionnements améliorés

Une étude comparative sur les différents positionnements a déjà été menée dans [Mon01]. Les conclusions de cette étude ont montré que le positionnement amélioré était plus performant que les autres. Nous nous concentrerons ici sur la comparaison entre les différents positionnements améliorés suivants :

- l'axe de rotation y_2 est confondu avec la bissectrice des normales N_0 et N_1 ,
- le point de rotation M_2 est confondu avec le point P_2 (positionnement amélioré centré),
- l'axe de rotation y_2 est choisi de telle sorte que les erreurs d'undercut et d'overcut sont égales.

L'erreur d'usinage ne peut pas être calculée de manière analytique du fait de la complexité du système à résoudre correspondant au positionnement amélioré. L'étude de l'erreur d'usinage est donc effectuée de manière numérique grâce à différents exemples. Les paramètres ayant une influence sur la valeur de l'erreur sont les suivants :

- le rayon de l'outil R ,
- les différentes valeur de la vrille α de la surface,
- la longueur de la règle.

L'étude comparative sera conduite à partir de la surface suivante (figure 4.17) :

$$S(u, v) = (1 - v) \cdot C_0(u) + v \cdot C_1(u)$$

$$\text{avec : } C_0(u) \begin{cases} \rho \cdot (2u - 1) \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad C_1(u) \begin{cases} -\rho \cdot \cos(\pi u) \\ -\rho \cdot \sin(\pi u) \\ h_p \end{cases} \quad \rho = 20 \quad h_p = 40 \quad (4.35)$$

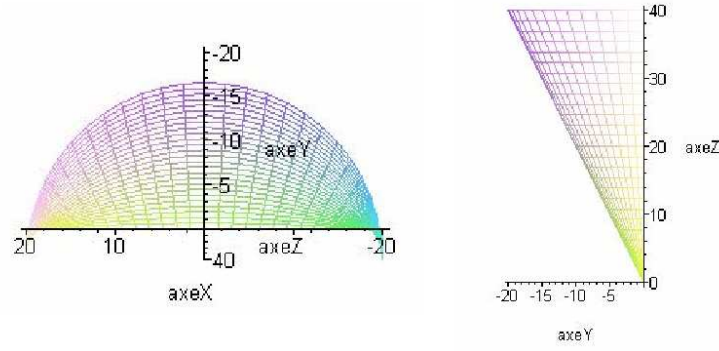


Figure 4.17 – Représentation de la surface à usiner

Cette surface a été choisie pour les raisons suivantes :

- La vrille α varie en continu de 90° à 0° (pour $u = 0$ à $u = 0.5$),
- Les courbes $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$ ont une courbure constante (demi-cercle de rayon ρ pour $\mathbf{C}_1(u)$ et une courbure nulle pour $\mathbf{C}_0(u)$).

Les essais ont été menés sur l'ensemble de la surface avec un outil cylindrique de diamètre 25mm (figure 4.18). Les dimensions de l'outil ont volontairement été choisies importantes par rapport aux dimensions de la surface afin d'avoir des erreurs significatives.

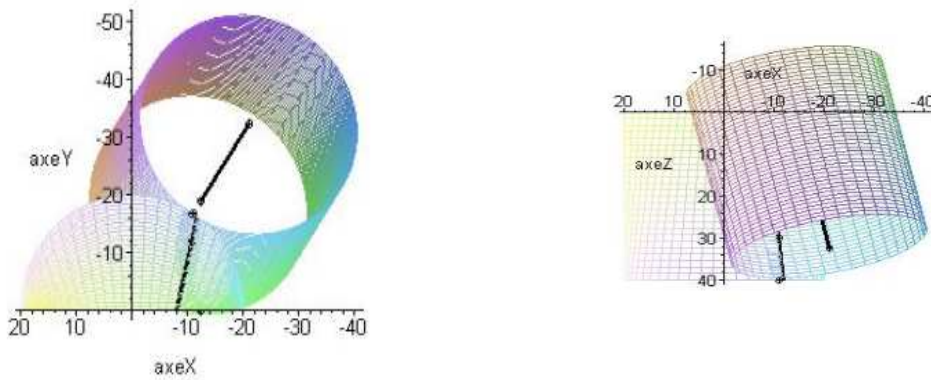


Figure 4.18 – Positionnement amélioré centré

La figure 4.19 montre les courbes d'erreurs à $u_p = 0.05$ et à $u_p = 0.45$. Deux zones apparaissent : erreur d'overcut ε_{over} (outil dans la matière) et erreur d'undercut ε_{under} (outil hors de la matière). Ces deux zones ne sont pas d'amplitudes identiques.

Trois courbes apparaissent sur les graphiques correspondant aux trois positionnements cités précédemment :

- Courbe $\text{---}\bullet\text{---}$: cette courbe correspond au positionnement amélioré, l'axe $\mathbf{y}_2$ est sur la bissectrice de l'angle formé par $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$, le point $\mathbf{M}_2$ se situe sur la règle à une position calculée.

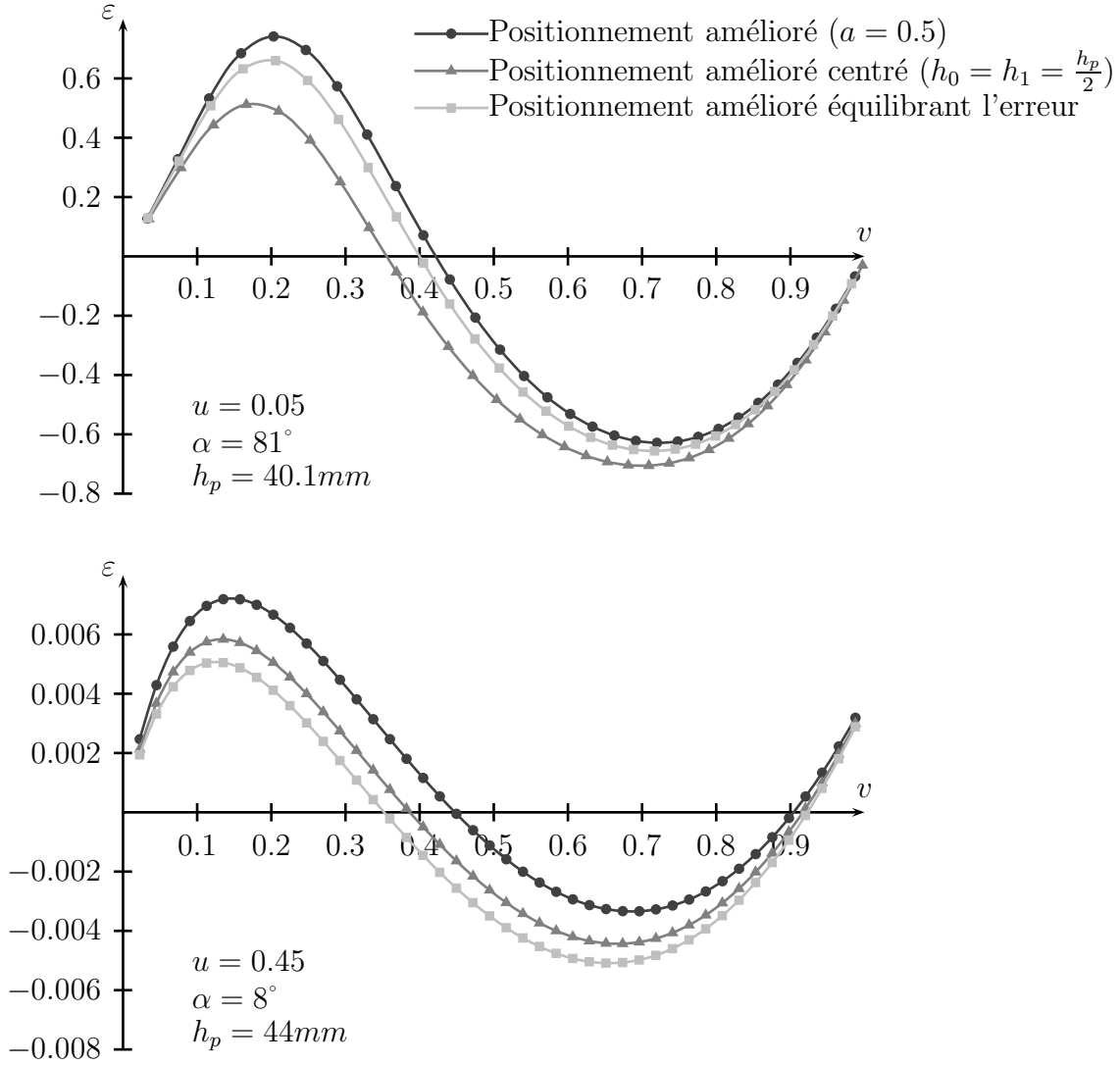


Figure 4.19 – Erreurs d'usinage à $u_p = 0.05$ et $u_p = 0.45$

- Courbe $\blacktriangle$: cette courbe correspond au positionnement amélioré centré, l'axe $\mathbf{y}_2$ est estimé pour avoir le point $\mathbf{M}_2$ au milieu de la règle ($h_0 = h_1 = \frac{h_p}{2}$).
- Courbe $\blacksquare$: cette courbe correspond au positionnement amélioré qui équilibre les erreurs d'overcut et d'undercut. Ce positionnement est effectué par dichotomie. A partir d'un premier positionnement et du calcul de l'erreur nous effectuons une modification de l'axe $\mathbf{y}_2$ afin d'égaliser les erreurs d'overcut et d'undercut.

Nous avons également tracé sur la figure 4.20 l'amplitude maximale des erreurs d'overcut et d'undercut pour les 3 positionnements. Cela donne par exemple :

- Positionnement amélioré ($a = 0.5$) : $\varepsilon_{max} = 1.37 \text{ mm}$ à $u_p = 0.05$, $\varepsilon_{max} = 0.011 \text{ mm}$ à $u_p = 0.45$

- Positionnement amélioré centré ($h_0 = h_1 = \frac{h_p}{2}$) : $\varepsilon_{max} = 1.21$ mm à $u_p = 0.05$, $\varepsilon_{max} = 0.010$ mm à $u_p = 0.45$
- Positionnement amélioré équilibrant les erreurs ($\varepsilon_{over} = \varepsilon_{under}$) : $\varepsilon_{max} = 1.32$ mm à $u_p = 0.05$, $\varepsilon_{max} = 0.010$ mm à $u_p = 0.45$

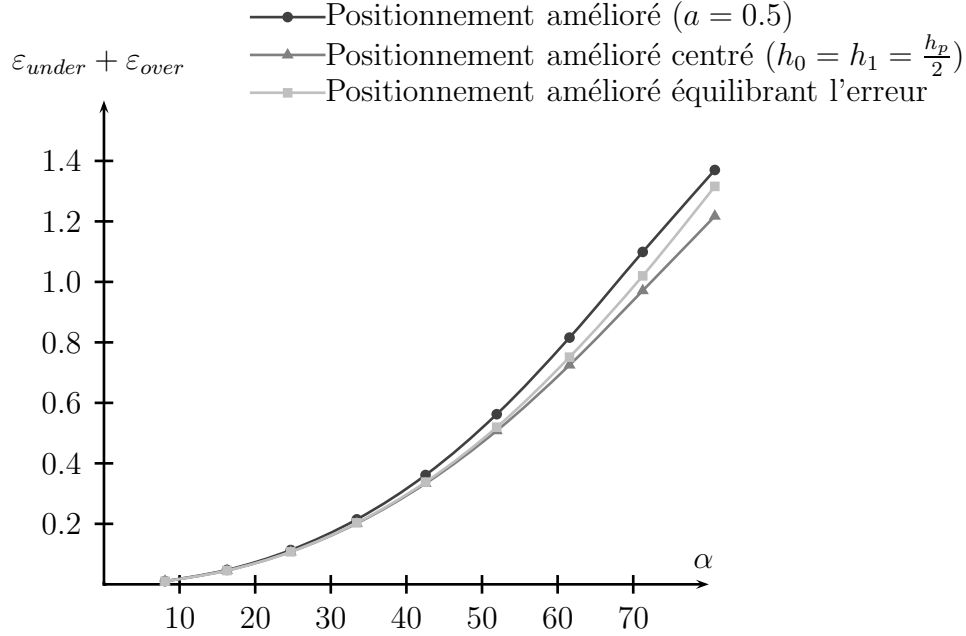


Figure 4.20 – Évolution de l'erreur maximale en fonction de la vrille

En conclusion, on peut remarquer que lorsque la vrille n'est pas importante les trois positionnements donnent des erreurs quasi identiques qui sont très faibles. L'écart est plus significatif lorsque la vrille est importante. Le positionnement amélioré centré a toujours été le plus performant quelle que soit la vrille du point de vue de l'erreur maximale engendrée. En comparant ces positionnements sur d'autres surfaces non mentionnées ici, on arrive toujours à la même conclusion : même si les performances obtenues par les différents positionnements améliorés sont proches en terme d'erreur, le positionnement qui offre une erreur minimale est le positionnement amélioré centré ($h_0 = h_1 = \frac{h_p}{2}$).

4.5 Choix d'un outil : relation entre le rayon et l'erreur

L'influence du rayon R a été montré dans [Mon01] : il modifie les erreurs en amplitude mais ne change pas l'allure générale des courbes d'erreur. Le problème posé est donc d'être capable de choisir un rayon d'outil qui engendrera une erreur inférieure à l'intervalle de

tolérance imposé par la surface.

L'algorithme de calcul de l'erreur d'usinage existe et a été développé lors des études précédentes. L'idée de l'aide au choix du rayon de l'outil n'est pas de mettre en place un raisonnement itératif où l'algorithme serait exécuté jusqu'à ce qu'on trouve la valeur du rayon donnant l'erreur maximale admissible. Au contraire, le but est de lancer une seule fois l'algorithme en choisissant arbitrairement un rayon d'outil et d'être ensuite capable, sans plus de calcul, de donner le rayon maximal à choisir pour l'outil. Pour atteindre cet objectif, il faut donc mettre en évidence la relation qui existe entre le rayon de l'outil et l'erreur engendrée. D'autre part, dans les études précédentes, on a pu constater que les zones de la surface où l'erreur est maximale sont celles où la vrille est maximale. Pour choisir le rayon maximum de l'outil, on va donc se positionner sur la règle où la vrille est maximale.

4.5.1 Première étude : modèle linéaire

4.5.1.1 Méthodologie

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il existe deux zones sur les courbes d'erreurs d'usinage (overcut et undercut) qui ne sont pas d'amplitudes identiques (figure 4.19). Lorsqu'on regarde pour la surface présentée précédemment (équation 4.35) l'évolution de l'erreur en fonction du rayon d'outil, on observe une relation de quasi linéarité entre les deux grandeurs (figure 4.21). Cette observation a été vérifiée sur d'autres surfaces testées qui ne sont pas présentées ici.

Nous allons mettre en évidence la relation de quasi linéarité qui existe entre le rayon d'outil et l'erreur engendrée. Pour cela, nous allons travailler dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'outil (figure 4.22). On considère :

- Π_P le plan perpendiculaire à l'outil contenant le point de la courbe enveloppe où l'erreur est maximale,
- $\mathbf{C}_v(u)$ la courbe d'intersection entre le plan Π_P et la surface réglée,
- ρ_v le rayon de courbure de $\mathbf{C}_v(u)$ qui est supposé constant dans la zone étudiée,
- $\mathbf{M}_0 = \mathbf{S}(u_0, 0)$ le point de tangence entre l'outil et la surface au niveau de la directrice $\mathbf{C}_0(u)$
- $\mathbf{N}_v$ la normale à la surface $\mathbf{S}(u, v)$ en (u_0, v) ,
- $\mathbf{O}_v$ le centre de courbure de $\mathbf{C}_v(u)$ lorsque $u = u_0$,
- α_v l'angle entre les vecteurs $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_v$

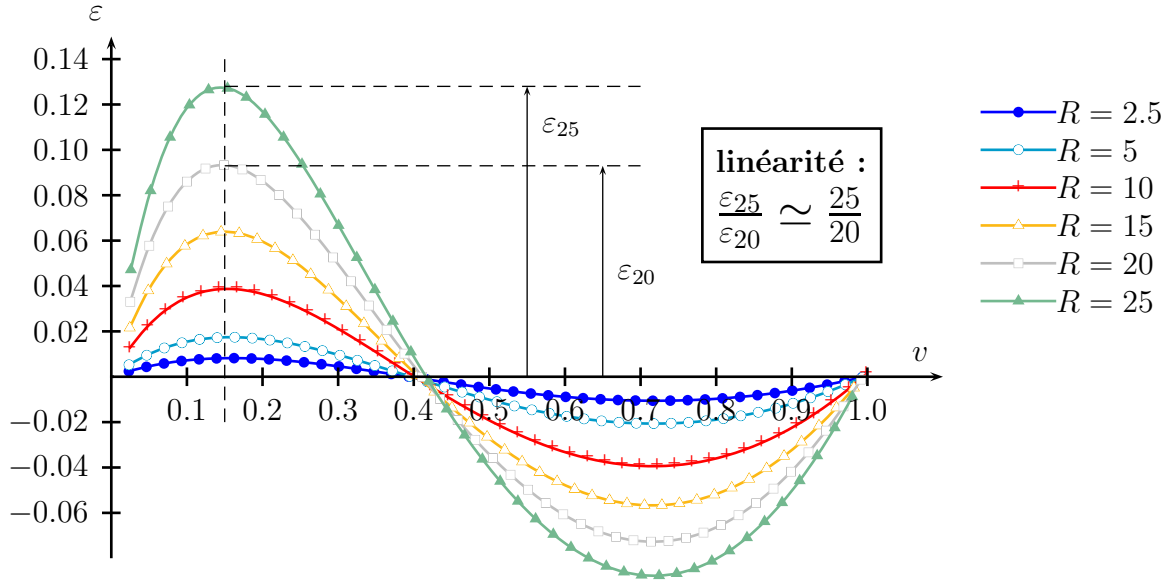


Figure 4.21 – Évolution de l'erreur en fonction du rayon R

On considère le triangle formé par les points $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{O}$ et $\mathbf{O}_v$ (figure 4.22). Nous avons :

$$(\rho_v + R - \varepsilon)^2 = \rho_v^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_v \cdot R \cdot \cos(\Pi - \alpha_v)$$

soit :

$$\varepsilon = \rho_v + R - \sqrt{\rho_v^2 + R^2 + 2 \cdot \rho_v \cdot R \cdot \cos(\alpha_v)}$$

et :

$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\rho_v}{R} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\rho_v}{R}\right)^2 + 1 + 2 \cdot \frac{\rho_v}{R} \cdot \cos(\alpha_v)}$$

et :

$$\frac{\varepsilon}{R} = 1 + \frac{\rho_v}{R} - \sqrt{\left(\frac{\rho_v}{R} + \cos(\alpha_v)\right)^2 + \sin(\alpha_v)}$$

Les surfaces réglées auxquelles on s'intéresse présentant toutes des rayons de courbure importants, on peut donc faire l'hypothèse suivante : $\rho_v \gg R$.

Ceci entraîne :

$$\frac{\rho_v}{R} + \cos(\alpha_v) \gg 1 + \cos(\alpha_v)$$

Les termes $(1 + \cos(\alpha_v))$ et $\sin(\alpha_v)$ appartiennent respectivement aux intervalles $[0;2]$ et $[-1;1]$. Ils sont donc du même ordre de grandeur.

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\rho_v}{R} + \cos(\alpha_v) \gg \sin(\alpha_v)$$

Et par conséquent :

$$\frac{\varepsilon}{R} \simeq 1 + \frac{\rho_v}{R} - \sqrt{\left(\frac{\rho_v}{R} + \cos(\alpha_v)\right)^2}$$

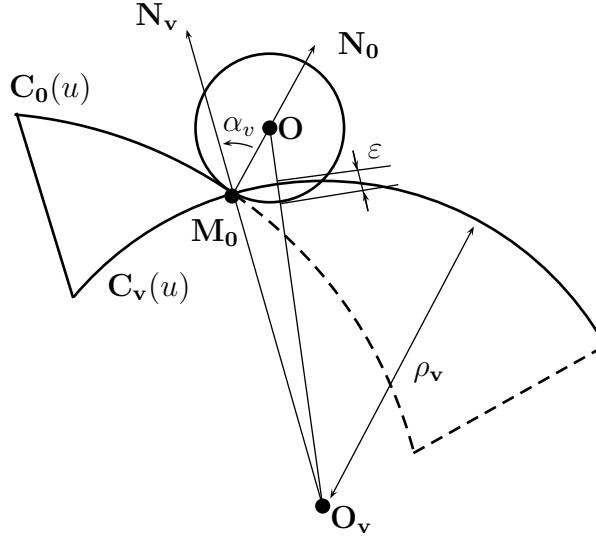


Figure 4.22 – Relation entre l'erreur et le rayon

Soit :

$$\frac{\varepsilon}{R} \simeq 1 + \cos(\alpha_v)$$

Le terme $(1 + \cos(\alpha_v))$ étant constant, ceci prouve qu'il existe une relation de quasi linéarité entre l'erreur et le rayon d'outil.

4.5.1.2 Application

La surface présentée sur la figure 4.17 a une erreur de forme imposée de 0.4 mm avec un intervalle de tolérance centré sur la valeur nulle, ce qui signifie que les erreurs d'overcut et d'undercut ne doivent pas excéder 0.2 mm. On se place à $u_p = 0.1$ pour avoir une vrille maximale et un outil entièrement positionné sur la surface. La vrille vaut 69.3° sur la règle. Le choix initial (et arbitraire) du rayon d'outil est $R = 20$ mm. L'algorithme de calcul de l'erreur nous fournit les résultats suivants :

- Erreur maximale d'undercut : $\varepsilon_{under} = 0.432$ mm
- Erreur maximale d'overcut : $|\varepsilon_{over}| = 0.390$ mm

Les erreurs d'undercut et d'overcut sont donc largement au-dessus de l'erreur maximale admissible qui vaut respectivement 0.2 mm pour chaque type d'erreur. En appliquant la relation de quasi linéarité obtenue précédemment, nous pouvons écrire que le rayon d'outil R maximum est tel que :

- Rayon maximum imposé par l'erreur d'undercut :

$$\frac{R}{20} \simeq \frac{0.2}{0.432} \quad \text{soit :} \quad R \simeq 9.25 \text{ mm}$$

- Rayon maximum imposé par l'erreur d'overcut :

$$\frac{R}{20} \simeq \frac{0.2}{0.390} \quad \text{soit :} \quad R \simeq 10.25 \text{ mm}$$

On retient logiquement la valeur minimum des rayons maximum admissibles dans les deux zones afin de ne dépasser dans aucune d'entre elles l'intervalle de tolérance fixé. Un raisonnement itératif basé sur le calcul exact de l'erreur pour différents rayons nous aurait mené à un rayon maximum de 9.2 mm. Le résultat obtenu par ce premier raisonnement est donc largement satisfaisant pour cet exemple. En relançant l'algorithme avec cette nouvelle valeur de rayon d'outil ($R = 9.25$ mm), nous obtenons les résultats suivants :

- Erreur maximale d'undercut : $\varepsilon_{under} = 0.148$ mm
- Erreur maximale d'overcut : $|\varepsilon_{over}| = 0.202$ mm

4.5.1.3 Conclusion

L'exemple proposé nous permet de voir que l'étude menée est cohérente, mais cela ne valide pas ce raisonnement pour autant. En effet, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été mises en place, et on peut se poser la question de leur influence sur le bon déroulement de cette méthodologie :

- on a considéré que la projection orthogonale du point $\mathbf{M}_0$ sur le plan Π_P appartenait à la courbe $\mathbf{C}_v(u)$, ce qui n'a pas lieu d'être. Il existe une distance d entre $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{C}_v(u)$ qui est de l'ordre de ε et qui ne peut donc pas être négligée.
- la calcul de la normale $\mathbf{N}_v$ s'effectue à partir de la valeur paramétrique u_0 connue grâce au point $\mathbf{M}_0$. Or lors de la mise en place du positionnement amélioré, il existe un angle γ caractérisant la rotation entre l'axe de l'outil et la règle $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Ceci implique que le point $\mathbf{M}_0$ et sa projection orthogonale sur le plan Π_P n'appartiennent pas à la même isoparamétrique en u . En prenant la valeur u_0 pour le calcul de $\mathbf{N}_v$ nous ajoutons une source d'erreur dans nos calculs.

L'ensemble des remarques précédentes nous amène à développer une seconde étude qui prend en compte l'ensemble de ces remarques. Le but étant de rendre plus fiable le raisonnement mené.

4.5.2 Deuxième étude : établissement d'un nouveau modèle

4.5.2.1 Méthodologie

L'étude que nous allons mener se situe entre les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_2$. Elle sera identique pour la zone se situant entre $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_1$. Pour mettre en évidence la relation entre le rayon d'outil et l'erreur engendrée, on considère les définitions suivantes :

- Π_P le plan perpendiculaire à l'outil contenant le point de la courbe enveloppe où l'erreur est maximale,
- $\mathbf{C}_v(u)$ la courbe d'intersection entre le plan Π_P et la surface réglée,
- ρ_v le rayon de courbure de $\mathbf{C}_v(u)$ qui est supposé constant dans la zone étudiée,
- $\mathbf{O}_v$ le centre de courbure de $\mathbf{C}_v(u)$ au point où l'erreur est maximale,
- $\mathbf{N}_v$ la normale à la courbe $\mathbf{C}_v(u)$ au point où l'erreur est maximale,
- α_v l'angle entre les vecteurs $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_v$.

Nous avons déterminé deux relations distinctes entre l'erreur et le rayon d'outil dépendant de la nature de la courbe $\mathbf{C}_v(u)$: courbe convexe ou concave. Seul le cas convexe sera étudié (figure 4.23).

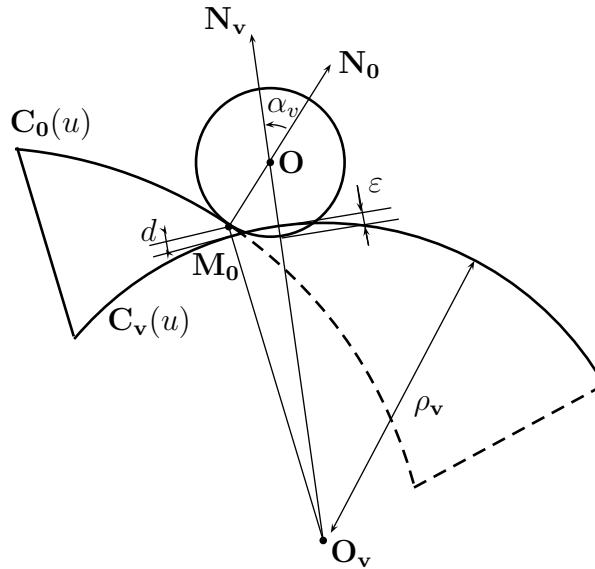


Figure 4.23 – Relation entre l'erreur et le rayon d'outil pour une courbe convexe

Si $\mathbf{C}_v(u)$ est convexe (figure 4.23), on considère le triangle formé par les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_v$ et

$\mathbf{M}_0$, la relation obtenue est :

$$(d + \rho_v)^2 = (\rho_v + R - \varepsilon)^2 + R^2 - 2 \cdot (\rho_v + R - \varepsilon) \cdot R \cdot \cos(\alpha_v)$$

L'erreur ε étant proche de zéro, on néglige ε^2 devant les autres termes :

$$\varepsilon = \frac{(1 + \frac{d}{\rho_v})^2 - 1 + 2 \cdot \frac{R}{\rho_v} \cdot (1 + \frac{R}{\rho_v}) \cdot (\cos(\alpha_v) - 1)}{\frac{2}{\rho_v} \cdot (\frac{R}{\rho_v} \cdot \cos(\alpha_v) - \frac{R}{\rho_v} - 1)}$$

La distance d est de l'ordre de ε , elle est négligeable devant ρ_v , les rayons de courbure des surfaces considérées dans le cadre de notre étude sont grands devant 0, on peut simplifier l'expression de ε :

$$\varepsilon = \frac{R \cdot (1 - \cos(\alpha_v))}{1 - \frac{R}{R + \rho_v} \cdot \cos(\alpha_v)}$$

4.5.2.2 Application

La surface présentée sur la figure 4.17 a une erreur de forme imposée de 0.4 mm avec un intervalle de tolérance centré sur la valeur nulle, ce qui signifie que les erreurs d'overcut et d'undercut ne doivent pas excéder 0.2 mm. On se place à $u_p = 0.1$ pour avoir une vrille maximale et un outil entièrement positionné sur la surface. La vrille vaut 69.3° sur la règle. Le raisonnement mené pour évaluer le rayon optimal est résumé dans l'algorithme de la figure 4.24.

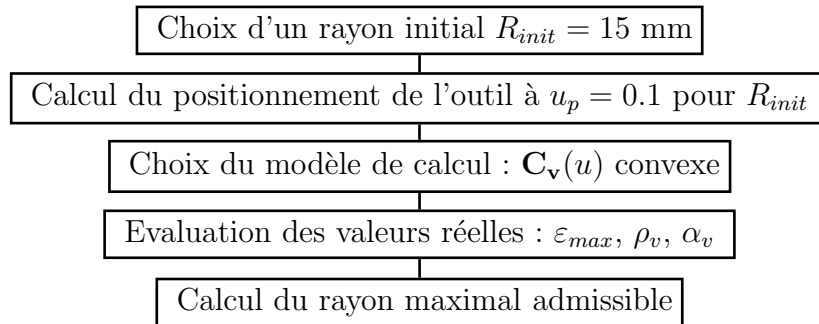


Figure 4.24 – Algorithme de calcul du rayon optimal appliqué à la surface 4.35

La première étape du raisonnement se résume à choisir un rayon initial dont les dimensions sont cohérentes avec la surface. La surface choisie fait 40 mm dans la direction perpendiculaire à la règle. On choisira comme rayon initial $R_{init} = 15$ mm. On calcule ensuite le positionnement de l'outil à $u_p = 0.1$ pour $R_{init} = 15$ mm. On évalue les courbes

$\mathbf{C}_v(u)$ et leurs rayons de courbure ρ_v aux maximums des erreurs d'undercut et d'overcut. La courbe $\mathbf{C}_v(u)$ de la zone d'undercut est convexe, il en est de même pour la courbe $\mathbf{C}_v(u)$ de la zone d'overcut. Le modèle adopté pour le calcul de l'erreur est donc :

$$\varepsilon = \frac{R \cdot (1 - \cos(\alpha_v))}{1 - \frac{R}{R+\rho_v} \cdot \cos(\alpha_v)}$$

Le calcul du positionnement de l'outil nous fournit les valeurs réelles de ε et de ρ_v pour $R = R_{init}$, ce qui nous permet d'évaluer la valeur réelle de l'angle α_v :

- Erreur maximale d'undercut entre $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_2$:
 $\varepsilon = 0.281$ mm, $\rho_v = 134.29$ mm, dont on déduit $\alpha_v = 10.54^\circ$,
- Erreur maximale d'overcut entre $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_1$:
 $\varepsilon = 0.305$ mm, $\rho_v = 22.43$ mm, dont on déduit $\alpha_v = 9^\circ$.

L'erreur maximale admissible en undercut et en overcut étant de 0.2 mm, on calcule le rayon optimal en se basant sur le modèle précédemment retenu :

- Rayon optimal dans la zone d'undercut : $R_{opt} = 10.97$ mm,
- Rayon optimal dans la zone d'overcut : $R_{opt} = 10.99$ mm.

On retient logiquement la valeur minimum des rayons maximums admissibles dans les deux zones afin de ne dépasser dans aucune d'entre elles l'intervalle de tolérance fixé. La modélisation proposée nous conduit à une valeur du rayon maximal de l'outil de 10.97 mm, soit un rayon d'environ 11 mm. Un raisonnement itératif basé sur le calcul exact de l'erreur pour différents rayons nous aurait mené à un rayon maximum de 9.2 mm.

4.5.2.3 Conclusion

On remarque que cette seconde étude qui était censée nous amener une fiabilité supérieure au niveau des résultats se révèle moins efficace que la première étude menée. La valeur du rayon maximal admissible trouvée avec cette seconde théorie est plus éloignée que celle obtenue grâce au premier modèle.

La distance d qui a désormais été prise en compte dans la modélisation n'intervient pas dans les relations obtenues, elle disparaît lorsqu'on applique l'hypothèse suivante : « La distance d est de l'ordre de ε , elle est négligeable devant ρ_v ».

La difficulté à évaluer l'angle α_v conduit à une mauvaise estimation de l'erreur. Pour évaluer cet angle, on choisit arbitrairement un rayon d'outil initial et on calcule le positionnement pour cet outil. L'angle α_v est évalué à partir du point de la courbe enveloppe où l'erreur est maximale. Or, pour deux rayons d'outil différents, la courbe enveloppe varie et le

point où l'erreur est maximale varie lui-aussi. Ainsi, la normale $\mathbf{N}_v$ et l'angle α_v ne sont pas identiques pour deux rayons d'outil différents. Ceci explique les mauvais résultats obtenus lors de cette seconde étude.

4.5.3 Troisième étude : justification du modèle linéaire

Les études menées précédemment nous ont démontré que le modèle linéaire était le plus efficace et que, contrairement à ce qu'on pouvait penser, développer un modèle de degré supérieur était finalement source d'erreur. Nous nous proposons donc dans cette partie de démontrer la fidélité du modèle linéaire.

Soit la configuration donnée par la figure 4.23 en considérant le cas d'une courbe convexe. On néglige désormais la distance d et on considère l'angle α'_v formé par le vecteur $\mathbf{N}_0$ et par la projection du vecteur $\mathbf{M}_0\mathbf{O}_v$ dans le plan Π_P . Une situation avec une courbe concave amènerait les mêmes conclusions que celles que nous allons établir. Étant donné la géométrie des surfaces réglées, nous pouvons supposer des courbures constantes sur les différentes zones étudiées.

On considère le triangle formé par les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_v$ et par la projection du point $\mathbf{M}_0$ dans Π_P , la relation obtenue est :

$$(\rho_v + R - \varepsilon)^2 = \rho_v^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_v \cdot R \cdot \cos(\alpha'_v)$$

Nous en déduisons :

$$\varepsilon = \rho_v + R - \sqrt{\rho_v^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_v \cdot R \cdot \cos(\alpha'_v)}$$

Nous posons cette équation sous forme paramétrique pour étudier le rayon de courbure de cette courbe :

$$\mathbf{E}(R) \begin{cases} R \\ \varepsilon = \rho_v + R - \sqrt{\rho_v^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_v \cdot R \cdot \cos(\alpha'_v)} \\ 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Le rayon de courbure de la fonction $\mathbf{E}(R)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \rho_E(R) &= \frac{\left\| \frac{d\mathbf{E}(R)}{dR} \right\|^3}{\left\| \frac{d^2\mathbf{E}(R)}{dR^2} \wedge \frac{d\mathbf{E}(R)}{dR} \right\|} \\ &= \frac{\left(\rho_v^2(2 + \cos^2(\alpha'_v)) + 3R^2 - 6R\rho_v \cdot \cos(\alpha'_v) + 2(\rho_v \cdot \cos(\alpha'_v) - R)\sqrt{R^2 + \rho_v^2 - 2R\rho_v \cdot \cos(\alpha'_v)} \right)^{3/2}}{\rho_v^2 \cdot \sin^2(\alpha'_v)} \end{aligned}$$

L'angle α'_v étant proche de π , nous pouvons simplifier la relation précédente en posant : $\cos(\alpha'_v) = -1$ et $\sin(\alpha'_v) = \pi - \alpha'_v$. Nous obtenons :

$$\rho_E(R) = \frac{(\rho_v + R)^3}{\rho_v^2 \cdot (\pi - \alpha'_v)^2}$$

L'étude de cette fonction montre qu'elle est strictement croissante avec un minimum pour $R=0$ soit $\rho_E(0) = \frac{\rho_v}{(\pi - \alpha_v)^2}$. En considérant que le rayon ρ_v est très grand, ce résultat montre que le rayon de courbure de la fonction erreur $\mathbf{E}(R)$ est très important. Nous pouvons donc à partir d'un premier rayon d'outil R_0 et de la valeur maximale de l'erreur obtenue à l'issue du positionnement, en déduire le rayon d'outil optimal en linéarisant la fonction $\mathbf{E}(R)$ entre le point $R = 0$ et le point $R = R_0$. Ainsi, ceci justifie que la première étude effectuée, où l'hypothèse de linéarité a été retenue, est suffisante.

4.6 Prédiction des courbes d'erreur

Lors des raisonnements menés dans ce chapitre, nous avons mené plusieurs études portant sur différentes surfaces. Nous avons pu remarquer que les courbes d'erreur obtenues avec les différents positionnements améliorés testés pour un outil cylindrique n'avaient pas forcément toujours la même allure. Certaines courbes sont du type « overcut / overcut », d'autres du type « undercut / overcut » ou encore du type « overcut / undercut » (figure 4.25). Le choix du positionnement amélioré a une influence sur l'amplitude des erreurs, mais aucunement sur l'allure générale de la courbe. On a donc cherché à analyser le pourquoi de ces différents cas de figure pour un outil cylindrique, puis on a étendu cette étude aux outils coniques.

4.6.1 Allure des courbes d'erreur pour un outil cylindrique

4.6.1.1 Modélisation du problème

L'idée développée dans ce paragraphe est la suivante : lors du positionnement amélioré, l'axe de l'outil est parallèle à la règle $u = u_p$ considérée, puis l'outil est translaté suivant $\mathbf{y}_2$ de la valeur de son rayon R . On observe alors deux erreurs d'overcut de part et d'autre du point où la normale à la surface est confondue avec $\mathbf{y}_2$. On fait ensuite tourner l'outil autour de l'axe $(\mathbf{M}_2, \mathbf{y}_2)$ d'une valeur γ . L'amplitude γ de cette rotation est calculée pour assurer la tangence avec $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$. La question à se poser est donc la suivante : γ est-il suffisamment grand pour éliminer les erreurs d'overcut de part et d'autre du point $\mathbf{M}_2$? Si l'amplitude de l'angle γ est trop importante, une erreur d'undercut va apparaître.

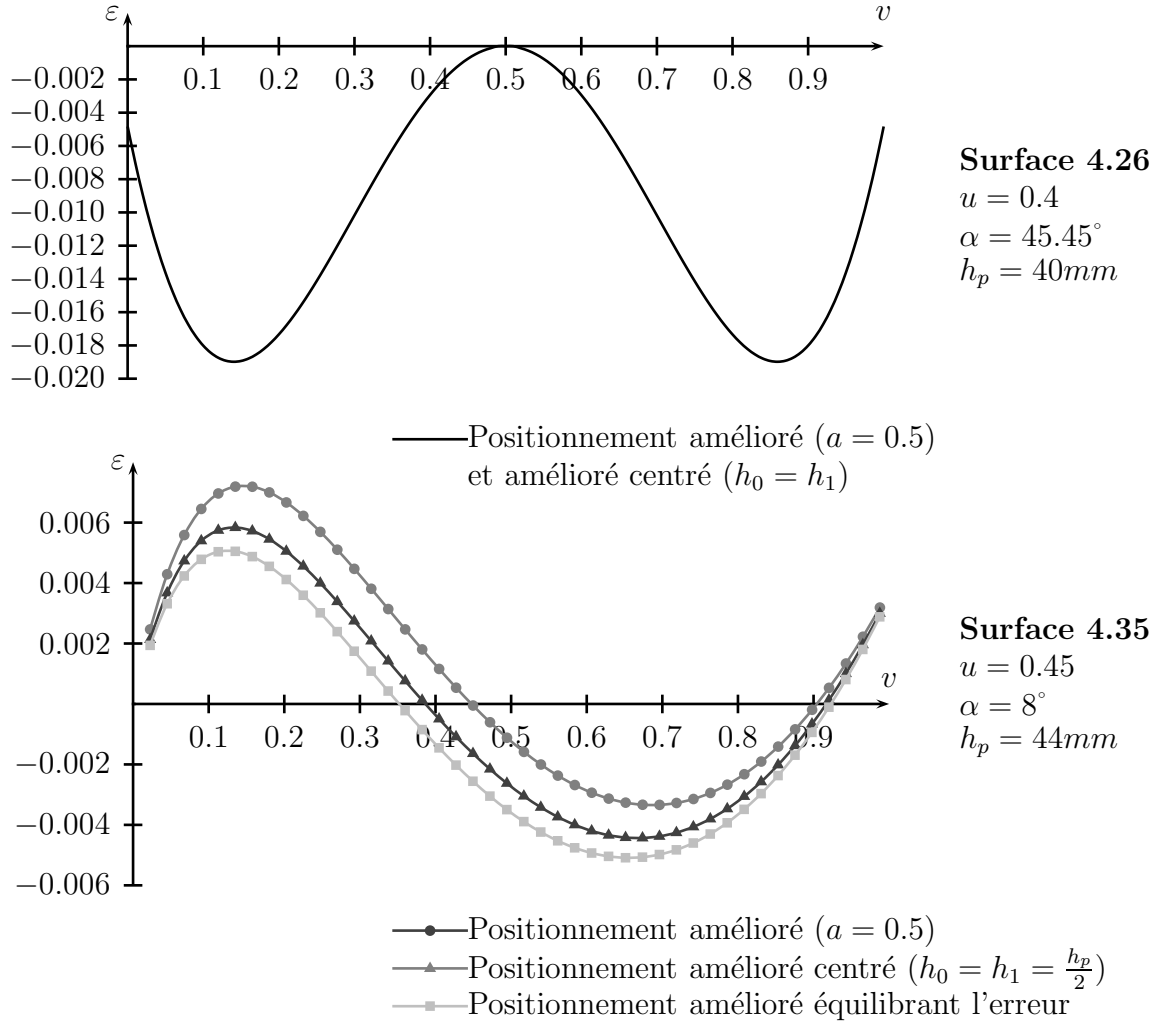


Figure 4.25 – Allures générales des courbes d'erreur obtenues précédemment

A l'inverse, si γ n'est pas assez important l'erreur d'overcut ne sera pas éliminée. Entre ces deux situations, l'amplitude de l'angle γ peut être telle que la tangence est assurée.

Pour comprendre l'allure de la courbe d'erreur, nous allons regarder ce qu'il se passe en chaque point de l'outil et statuer sur la question précédente : γ est-il suffisant ou non ?

Regarder en chaque point de l'outil revient à s'intéresser aux sections de l'outil normales à l'axe sur toute la longueur de l'outil (figure 4.26). Pour chaque section, une analyse géométrique va nous permettre de statuer sur la nature de l'erreur : overcut ou undercut ou tangence.

En considérant chaque section indépendamment les unes des autres, le problème peut se modéliser simplement (figure 4.27). L'intersection entre la surface et le plan contenant la section de l'outil est une courbe dont le rayon de courbure peut être considéré comme étant

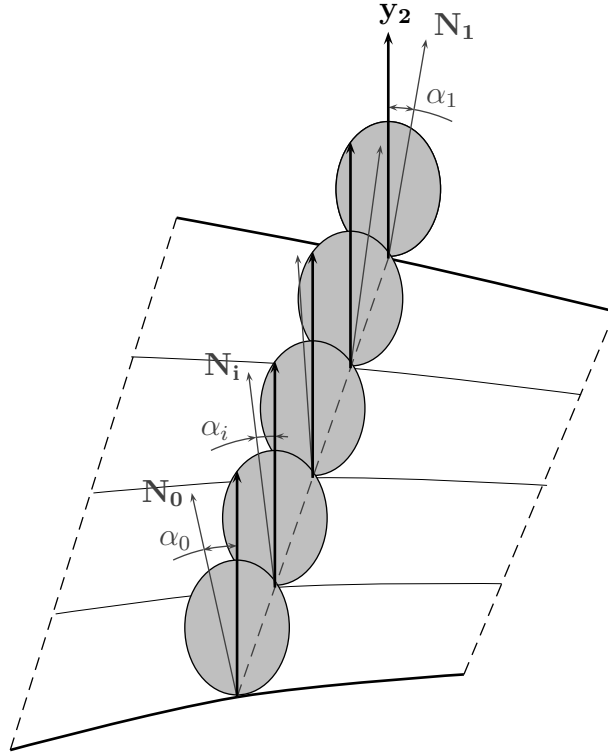


Figure 4.26 – Découpage de l'outil en sections normales à l'axe

localement constant.

La figure 4.27 représente le début du positionnement amélioré appliqué à une des sections de l'outil : l'axe est parallèle à la règle $u = u_p$, puis il est translaté de la valeur R suivant $\mathbf{y}_2$. Pour achever la mise en place du positionnement amélioré, l'outil va tourner d'une valeur γ autour de $(\mathbf{M}_2, \mathbf{y}_2)$. Au niveau de la section considérée, cela va avoir pour conséquence de la faire translater d'une valeur Δ_i . Lorsque la rotation a lieu, la section circulaire devient une ellipse, l'angle γ restant faible, on fera l'hypothèse que la section reste circulaire.

4.6.1.2 Mise en équation

Le déplacement Δ_i est le déplacement nécessaire pour que la tangence soit assurée entre la surface et la section de l'outil considérée. On peut déterminer Δ_i de la manière suivante : soit $\mathbf{O}'_0$ le centre de la section lorsque celle-ci est tangente à la surface, on peut exprimer les coordonnées de ce point de deux manières différentes :

- Le point $\mathbf{O}'_0$ est sur le cercle de rayon $(R + \rho_i)$ centré en $\mathbf{O}$ (figure 4.27). Ses coordonnées (X, Y) peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\mathbf{O}'_0 \begin{cases} X = (R + \rho_i) \cdot \cos(\beta_i) \\ Y = (R + \rho_i) \cdot \sin(\beta_i) \end{cases} \quad \text{avec } \beta_i \in [0, 2\pi] \quad (4.37)$$

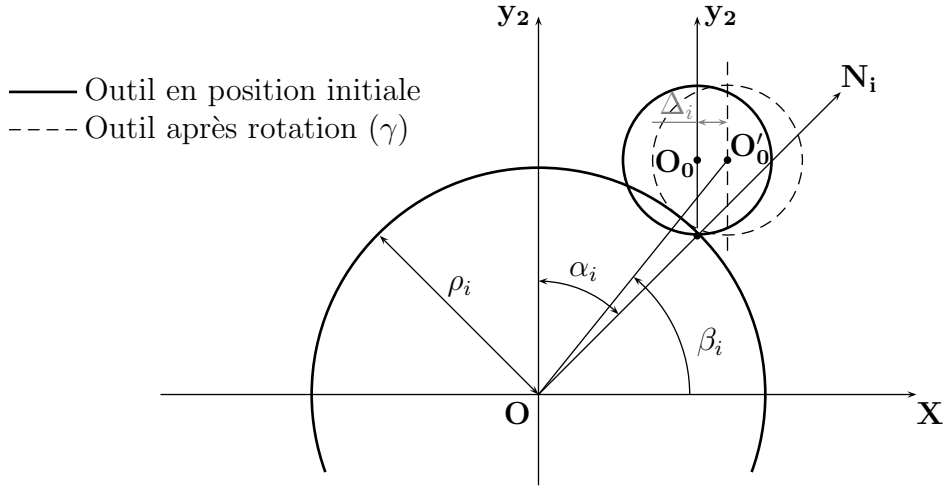


Figure 4.27 – Modélisation de la section

- Les coordonnées du point $\mathbf{O}'_0$ peuvent être calculées à partir du point $\mathbf{O}_0$ en exprimant qu'ils sont distants de Δ_i suivant $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{O}'_0 \begin{cases} X = \rho_i \cdot \sin(\alpha_i) + \Delta_i \\ Y = \rho_i \cdot \cos(\alpha_i) + R \end{cases} \quad (4.38)$$

En exprimant l'égalité des coordonnées X et Y du point $\mathbf{O}'_0$, on obtient un système de deux équations à deux inconnues β_i et Δ_i . Il est alors facile d'obtenir l'expression du déplacement Δ_i du point $\mathbf{O}'_0$ assurant la tangence :

$$\Delta_i = \sqrt{(R + \rho_i)^2 - (R + \rho_i \cdot \cos(\alpha_i))^2} - \rho_i \cdot \sin(\alpha_i) \quad (4.39)$$

4.6.1.3 Conclusion et synthèse sur la nature de l'erreur

Pour conclure sur le type d'erreur obtenue au niveau de la section, il suffit de comparer le déplacement théorique Δ_i permettant d'assurer la tangence au déplacement réel de la section Δ'_i . En orientant les déplacements :

- si le déplacement réel Δ'_i est plus grand que Δ_i et de sens identique, cela signifie que l'erreur d'usinage sera du type undercut.
- si le déplacement réel Δ'_i est plus petit que Δ_i et de sens identique, cela signifie que l'erreur d'usinage sera du type overcut.
- si le déplacement réel Δ'_i et le déplacement assurant la tangence Δ_i sont égaux, cela signifie que la tangence est assurée, l'erreur est nulle.
- si le déplacement réel Δ'_i et Δ_i sont de sens opposés avec $\Delta'_i < 0$ et $\Delta_i > 0$, cela signifie que l'erreur d'usinage sera du type overcut,

- si le déplacement réel Δ'_i et Δ_i sont de sens opposés avec $\Delta'_i > 0$ et $\Delta_i < 0$, cela signifie que l'erreur d'usinage sera du type undercut.

Le déplacement réel Δ'_i de chaque section est facile à évaluer à partir des déplacements Δ'_0 et Δ'_1 des deux sections figurant aux deux extrémités de l'outil. En effet, l'outil étant considéré comme indéformable lors du positionnement amélioré, on peut effectuer une interpolation linéaire entre les deux extrémités de l'outil pour connaître Δ'_i . D'autre part, le positionnement amélioré assure la tangence avec les deux directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$, les déplacements Δ'_0 et Δ'_1 sont donc respectivement égaux aux déplacements Δ_0 et Δ_1 suivant :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \sqrt{(R + \rho_0)^2 - (R + \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0))^2} - \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0) \\ \Delta_1 &= - \left(\sqrt{(R + \rho_1)^2 - (R + \rho_1 \cdot \cos(\alpha_1))^2} - \rho_1 \cdot \sin(\alpha_1) \right) \\ &\text{avec : } \alpha_0 > 0 \quad \text{et : } \quad \alpha_1 > 0\end{aligned}\tag{4.40}$$

L'ensemble du raisonnement mené est résumé sur la figure 4.28

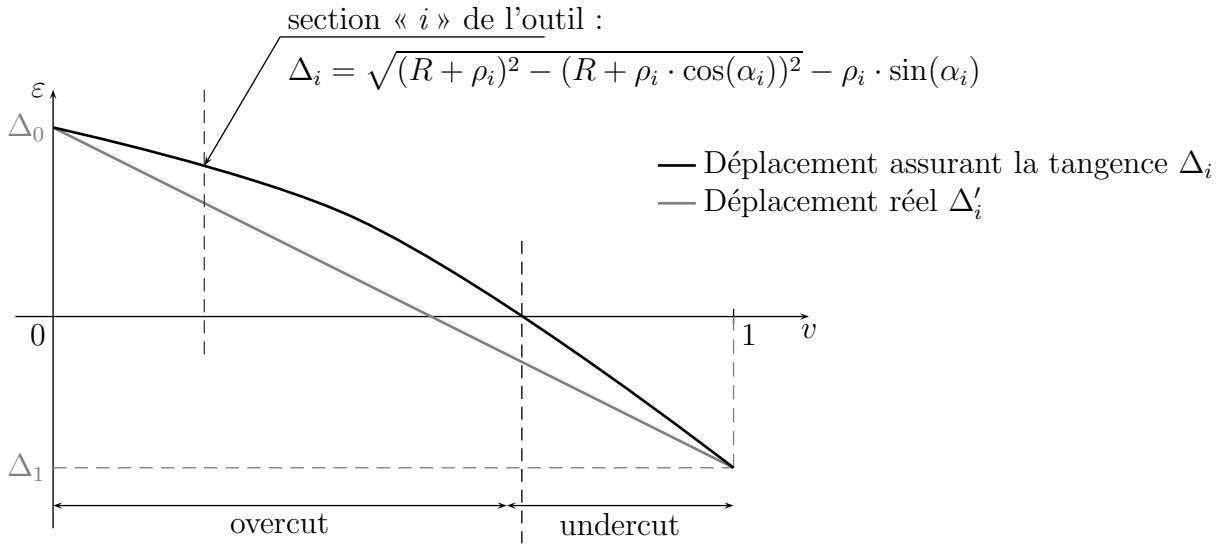


Figure 4.28 – Synthèse sur le raisonnement mené

4.6.1.4 Fonction $\Delta(v)$ assurant la tangence entre l'outil et la surface

Pour chaque section i de l'outil, on va donc pouvoir prédire la nature de l'erreur grâce à la fonction Δ_i exprimant le déplacement nécessaire de la section pour qu'il y ait tangence. Le déplacement Δ_i est fonction des valeurs du rayon de courbure ρ_i et de l'angle α_i . Or, ρ_i et α_i sont fonctions du paramètre u_p de la règle considérée et de la valeur v représentant le

point de la règle où le calcul est effectué. Ainsi :

$$\Delta(v) = \sqrt{(R + \rho(v))^2 - (R + \rho(v) \cdot \cos(\alpha(v)))^2} - \rho(v) \cdot \sin(\alpha(v))$$

La fonction $\Delta(v)$ permettant de prédire la nature de l'erreur est fonction de $\rho(v)$ et de $\alpha(v)$. La question que l'on se pose est la suivante : l'étude de $\rho(v)$ et de $\alpha(v)$ est-elle suffisante pour prédire l'erreur ?

4.6.1.4.1 Approximation de la fonction $\Delta(v)$

La fonction $\Delta(v)$ s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta(v) = \rho(v) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{\rho(v)} + 1\right)^2 - \left(\frac{R}{\rho(v)} + \cos(\alpha(v))\right)^2} - \rho(v) \cdot \sin(\alpha(v))$$

Les surfaces réglées sur lesquelles nous travaillons présentent toutes des rayons de courbure importants. Nous pouvons donc faire l'hypothèse suivante : le rayon de courbure $\rho(v)$ est grand devant le rayon d'outil R .

On considère la fonction $f(X)$ suivante pour laquelle nous allons effectuer un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(X) = \sqrt{(1 + X)^2 - (\cos(\alpha) + X)^2}$$

Soit :

$$f'(X) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sqrt{(1 + X)^2 - (\cos(\alpha) + X)^2}}$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en 0 de cette fonction, on obtient :

$$f(X) \simeq \sin(\alpha) + X \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Le développement limité effectué sur la fonction $f(X)$ nous permet d'approximer l'expression de $\Delta(v)$ (avec $X = \frac{R}{\rho(v)}$) :

$$\Delta(v) \simeq \rho(v) \cdot \left(\sin(\alpha(v)) + \frac{R}{\rho(v)} \frac{1 - \cos(\alpha(v))}{\sin(\alpha(v))} \right) - \rho(v) \cdot \sin(\alpha(v))$$

soit :

$$\Delta(v) \simeq R \cdot \left(\frac{1 - \cos(\alpha(v))}{\sin(\alpha(v))} \right)$$

On peut tirer une première conclusion du résultat obtenu, à savoir que seul l'angle $\alpha(v)$ a une influence sur $\Delta(v)$. L'influence de $\rho(v)$ existe mais elle est négligeable. Nous allons donc étudier l'évolution de $\Delta(v)$ en fonction de $\alpha(v)$.

4.6.1.4.2 Monotonie de la fonction $\Delta(\alpha)$

On considère la fonction $\Delta(\alpha)$ pour une section donnée de l'outil, le paramètre v est fixé et le rayon $\rho(v) = \rho$ est connu. La fonction $\Delta(\alpha)$ s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta(\alpha) = \sqrt{(R + \rho)^2 - (R + \rho \cdot \cos(\alpha))^2} - \rho \cdot \sin(\alpha)$$

Soit :

$$\Delta(\alpha) = \sqrt{2 \cdot R \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \rho^2 \cdot \sin^2(\alpha)} - \rho \cdot \sin(\alpha)$$

La dérivée de $\Delta(\alpha)$ s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (2\rho^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 2\rho R \sin(\alpha))}{\sqrt{2 \cdot R \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \rho^2 \cdot \sin^2(\alpha)}} - \rho \cdot \cos(\alpha)$$

Pour étudier $\Delta(\alpha)$, on va tout d'abord chercher les valeurs qui annulent sa dérivée :

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \rho \cdot \cos(\alpha) \sqrt{2 \cdot R \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \rho^2 \cdot \sin^2(\alpha)} = (\rho^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \rho R \sin(\alpha))$$

Dont on déduit l'équation suivante :

$$2\rho \cos(\alpha) \cdot (\cos(\alpha) - 1) = R \sin^2(\alpha)$$

Ce qui nous donne en simplifiant :

$$\frac{-\cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{R}{2\rho}$$

Sachant que R et ρ sont des grandeurs positives et que l'angle α est pris positivement dans l'expression de $\Delta(\alpha)$ (on considère la valeur absolue de l'angle et non sa valeur algébrique), l'équation précédente n'a pas de solution. $\Delta(\alpha)$ est donc une fonction monotone. On a :

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\rho R}{\sqrt{2\rho R + \rho^2}} > 0$$

Cela signifie que la fonction $\Delta(\alpha)$ est strictement croissante. Ceci a pour conséquence que :

- si la fonction $\alpha(v)$ est croissante, la fonction $\Delta(v)$ sera elle-aussi croissante.
- si la fonction $\alpha(v)$ est décroissante, la fonction $\Delta(v)$ sera elle-aussi décroissante.

Les fonctions $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$ ont donc la même monotonie, mais cela n'est pas suffisant pour conclure. Il reste à étudier si oui ou non il existe un lien plus concret en $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$.

4.6.1.4.3 Relation entre $\Delta(v)$ et $\alpha(v)$

4.6.1.4.3.1 Mise en évidence du lien de proportionnalité entre $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$

On a démontré précédemment que la fonction $\Delta(v)$ pouvait être approximée de la manière suivante :

$$\Delta(\alpha) \simeq R \cdot \left(\frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 4 des fonctions $\cos(\alpha(v))$ et $\sin(\alpha(v))$, on obtient une approximation de la fonction $\Delta(\alpha)$:

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + o(\alpha^4) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^4)$$

$$\Delta(\alpha) \simeq R \cdot \frac{\alpha \cdot (\alpha^2 - 12)}{4 \cdot (\alpha^2 - 6)}$$

Cherchons à estimer l'erreur d'approximation commise entre $\Delta(\alpha)$ et la droite $D(\alpha)$ passant par les points $(0, \Delta(0) = 0)$ et $(\alpha_{max}, \Delta(\alpha_{max}))$. On obtient :

$$D(\alpha) = R \cdot \frac{(\alpha_{max}^2 - 12)}{4 \cdot (\alpha_{max}^2 - 6)} \cdot \alpha$$

On fait l'hypothèse suivante : l'erreur relative $E(\alpha)$ entre $\Delta(\alpha)$ et $D(\alpha)$ est maximale en $\frac{\alpha_{max}}{2}$.

$$E\left(\frac{\alpha_{max}}{2}\right) = \frac{|\Delta(\frac{\alpha_{max}}{2}) - D(\frac{\alpha_{max}}{2})|}{|\Delta(\frac{\alpha_{max}}{2})|} = \frac{18 \cdot \alpha_{max}^2}{|(\alpha_{max}^2 - 48)(\alpha_{max}^2 - 6)|}$$

Plus la valeur α_{max} augmente, plus l'erreur relative $E(\frac{\alpha_{max}}{2})$ augmente. En prenant comme valeur maximale $\alpha_{max} = 45^\circ$, on trouve une erreur relative inférieure à 5%. Ainsi, on peut considérer que jusqu'à $\alpha = 45^\circ$, la fonction $\Delta(\alpha)$ est assimilable à une droite.

En conclusion, étant donné que les fonctions $\Delta(v)$ et $\alpha(v)$ présentent un lien de proportionnalité entre elles, on peut facilement appliquer le raisonnement mené sur $\Delta(v)$ à la fonction $\alpha(v)$. Ainsi, pour prédire le type d'erreur que nous obtiendrons sur la surface, il suffit de regarder l'évolution de l'angle $\alpha(v)$ et d'y appliquer le même raisonnement que pour $\Delta(v)$.

4.6.1.4.3.2 Exemple : Surface 1

La 1^{ère} surface testée (figure 4.29) est définie par l'équation suivante :

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u)$$

$$\text{avec :} \quad \mathbf{C}_0(u) \begin{cases} \rho_0 \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) \cdot u\right) - \rho_0 \sin(\alpha_0) \\ \rho_0 \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) \cdot u\right) - \rho_0 \cos(\alpha_0) \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_1(u) \begin{cases} \rho_1 \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) \cdot u\right) + \rho_1 \sin(\alpha_1) \\ \rho_1 \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) \cdot u\right) - \rho_1 \cos(\alpha_1) \\ h_p \end{cases} \quad (4.41)$$

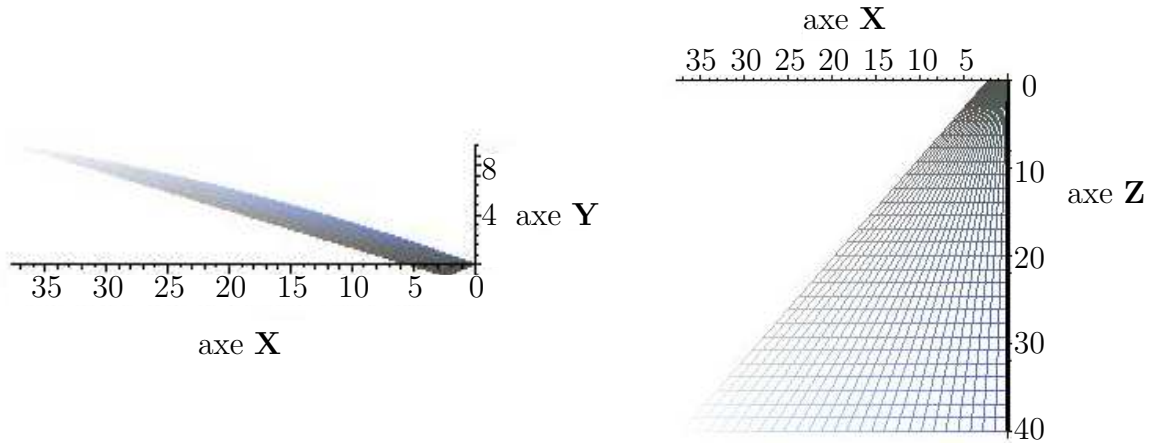


Figure 4.29 – Surface 1

$$\rho_0 = 20 \quad \rho_1 = 200 \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 20^\circ \quad h_p = 40 \quad u \in [0; 1]$$

On se place sur une règle de la surface ($u_p = 1$) et on calcule les fonctions $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$. Lorsqu'on trace ces deux fonctions (figure 4.30), la similitude entre les deux tracés illustre la quasi-proportionalité entre $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$. Le tracé des fonctions $\Delta(\alpha)$ et $D(\alpha)$ permet d'évaluer l'erreur de proportionalité $E(\alpha)$ (figure 4.30).

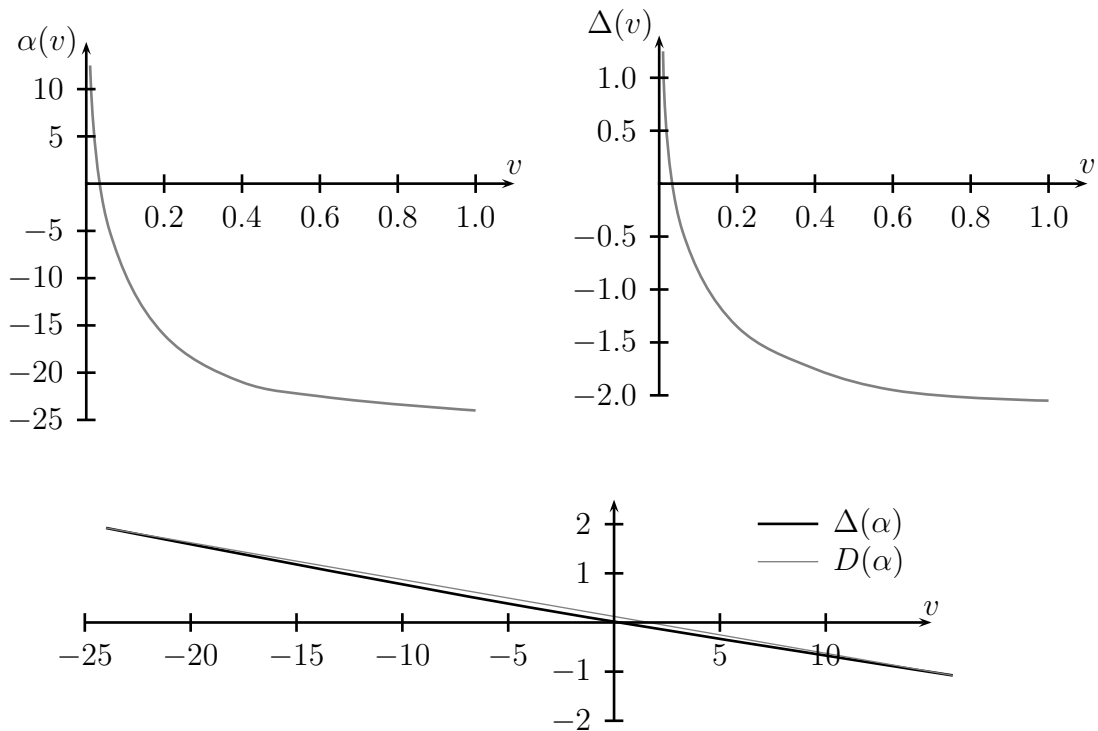


Figure 4.30 – Fonctions $\alpha(v)$, $\Delta(v)$ et $\Delta(\alpha)$ pour la surface 1

4.6.1.4.3.3 Exemple : Surface 2

La 2^{nde} surface testée (figure 4.31) est définie par l'équation suivante :

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u)$$

$$\text{avec : } \mathbf{C}_0(u) \begin{cases} -\rho_0 \cos(\pi u) \\ -\rho_0 \sin(\pi u) \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_1(u) \begin{cases} -\rho_1 \cos(\text{angle}(u)) \\ -\rho_1 \sin(\text{angle}(u)) + 400 \\ h_p \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\text{avec : } \text{angle}(u) = (\pi - 2 * \alpha_2) \cdot u + \alpha_2$$

$$\rho_0 = 20 \quad \rho_1 = 400 \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \quad h_p = 20 \quad u \in [0; 1]$$

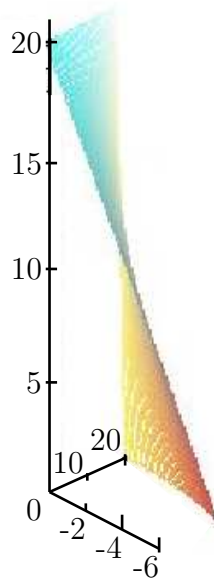
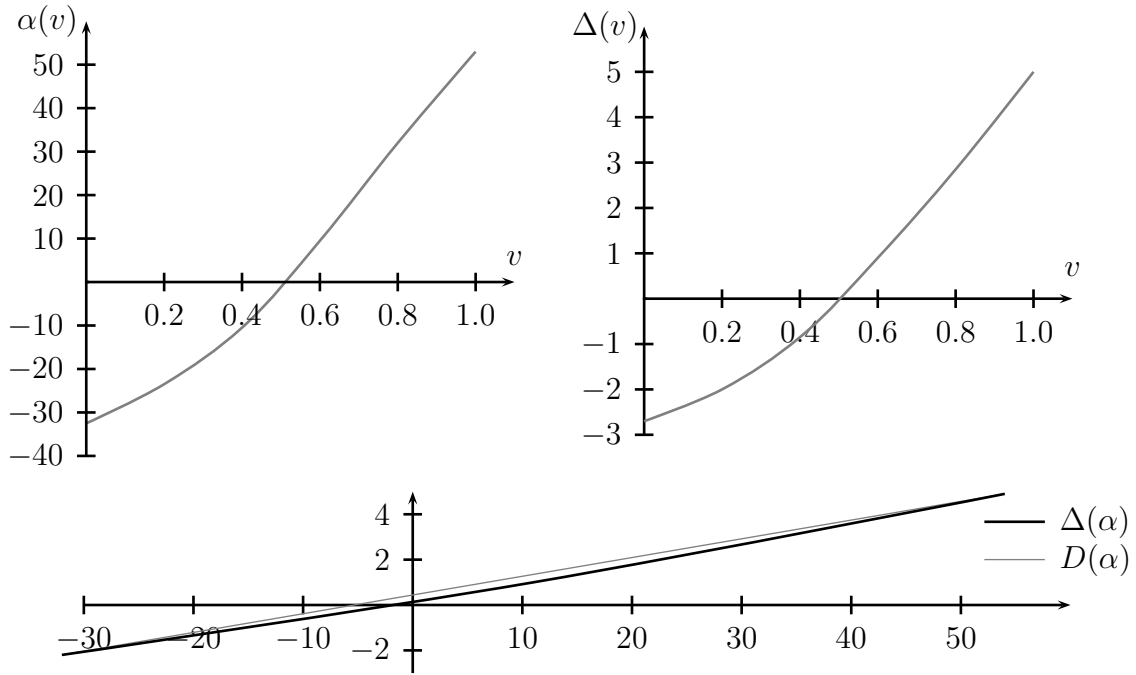


Figure 4.31 – Surface 2

On se place sur une règle de la surface ($u_p = 1$) et on calcule les fonctions $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$. Lorsqu'on trace ces deux fonctions (figure 4.32), on observe encore une fois une relation de quasi linéarité entre $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$.

4.6.2 Mise en application sur différentes surfaces

Le raisonnement mené a été appliqué sur trois surfaces différentes. Pour chacune de ses surfaces, le positionnement amélioré de l'outil est calculé pour une règle donnée et la courbe d'erreur est tracée à partir de la courbe enveloppe. La figure 4.33 montre la concordance entre les courbes d'erreurs et les graphiques de prédiction de l'allure des courbes d'erreur.


 Figure 4.32 – Fonctions $\alpha(v)$ et $\Delta(v)$ pour la surface 2

- **Surface 1** : la première surface testée est celle utilisée lors de l’analyse cinématique du positionnement amélioré, les courbes d’erreur obtenues sur cette surface sont du type « overcut / overcut ».

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} 20 \cdot (2v - 1) \cdot \cos((1 - 2u)\frac{\pi}{4}) \\ 37.5 \cdot (2u - 1) \\ 20 \cdot (2v - 1) \cdot \sin((1 - 2u)\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (4.43)$$

- **Surface 2** : la deuxième surface testée a été utilisée lors de l’étude comparative entre les différents positionnements améliorés. Les courbes d’erreurs obtenues sont du type « undercut / overcut ». La vrille α de cette surface varie en continu de 90° à 0° pour $u = 0$ à $u = 0.5$.

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u)$$

$$\text{avec : } \mathbf{C}_0(u) = \begin{cases} \rho \cdot (2u - 1) \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_1(u) = \begin{cases} -\rho \cdot \cos(\pi u) \\ -\rho \cdot \sin(\pi u) \\ H_p \end{cases} \quad \rho = 20 \quad H_p = 40 \quad (4.44)$$

- **Surface 3** : la troisième surface testée va être utilisée dans la suite de l’étude pour tester les performances de nouveaux positionnements. Les courbes d’erreurs obtenues

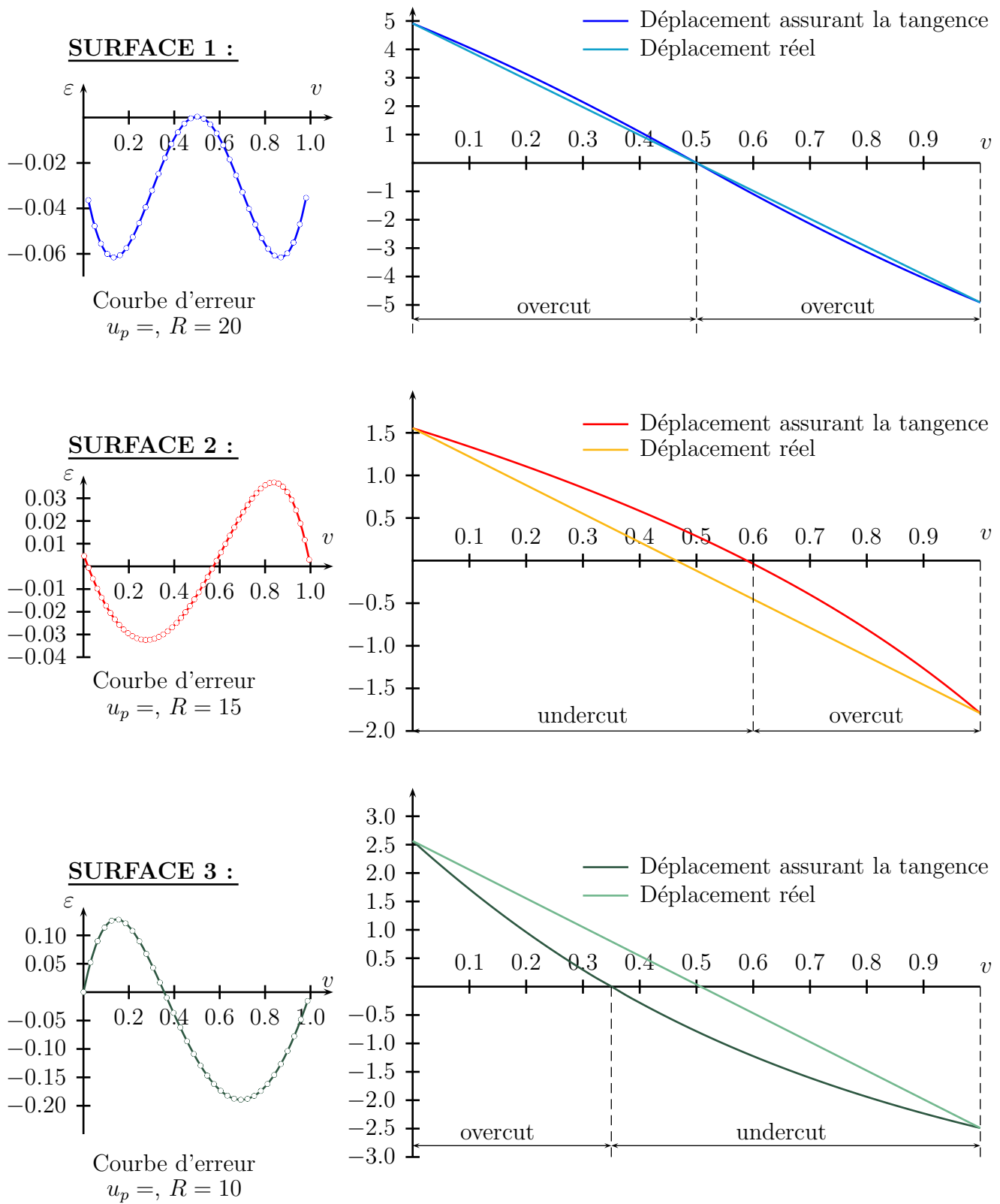


Figure 4.33 – Prédiction de la nature des erreurs

sont du type « overcut / undercut ». Cette surface sert de référence dans de nombreux articles traitant de l'usinage en roulant. La vrille α de cette surface varie de 0° à 60° pour $u = 0$ à $u = 1$.

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u)$$

$$\text{avec : } \mathbf{C}_0(u) \begin{cases} 23.014 \cdot u \\ 20.429 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_1(u) \begin{cases} 23.014 \cdot u \\ 20.2324 \cdot u^2 \\ 33.995 \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (4.45)$$

La figure 4.33 nous permet de voir que les courbes d'erreur obtenues avec le positionnement amélioré sont prévisibles et qu'elle nous fournissent un ordre de grandeur de la valeur du paramètre v à laquelle le changement d'erreur s'effectue :

- Surface 1 : le diagramme de prédiction nous dit que l'erreur sera nulle à $v = 0.5$ et que l'erreur sera du type « overcut / overcut », ce qui se vérifie sur la courbe d'erreur.
- Surface 2 : le diagramme de prédiction nous dit que l'erreur sera nulle pour une valeur légèrement inférieure à $v = 0.6$ et que l'erreur sera du type « undercut / overcut », ce qui se vérifie sur la courbe d'erreur.
- Surface 3 : le diagramme de prédiction nous dit que l'erreur sera nulle pour une valeur légèrement inférieure à $v = 0.4$ et que l'erreur sera du type « overcut / undercut », ce qui se vérifie sur la courbe d'erreur.

Ainsi, il est possible de connaître l'allure des courbes d'erreur pour un outil cylindrique. Mais qu'en est-il pour un outil conique ? Peut-on se servir de l'outil de prédiction de l'erreur qu'on vient d'établir pour choisir les dimensions d'un outil conique ? C'est la question que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

4.6.3 Extension de l'étude aux outils coniques

On est maintenant capable de prédire la nature de l'erreur obtenue avec un outil cylindrique. Peut-on se servir des raisonnements mis en place pour avoir une idée des rayons de l'outil conique à utiliser d'une part, et est-on capable de dire quel positionnement appliquer à l'outil pour minimiser l'erreur d'autre part ? Pour cela, il faut étudier deux choses :

- l'influence de la variation du rayon sur les courbes de prédiction de l'erreur et sur les courbes d'erreur lorsqu'on passe d'un outil cylindrique à un outil conique.
- l'influence de la variation du vecteur $\mathbf{y}_2$ et donc des angles α_0 et α_1 sur les courbes de prédiction de l'erreur et sur les courbes d'erreur, ceci pour positionner au mieux l'outil conique.

4.6.3.1 Influence de la variation du vecteur $\mathbf{y}_2$ pour un outil cylindrique

Lorsqu'on modifie l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$ du positionnement amélioré, on modifie l'amplitude de l'erreur que ce soit pour une erreur d'overcut ou d'undercut ainsi que le point où l'erreur s'annule (figure 4.34).

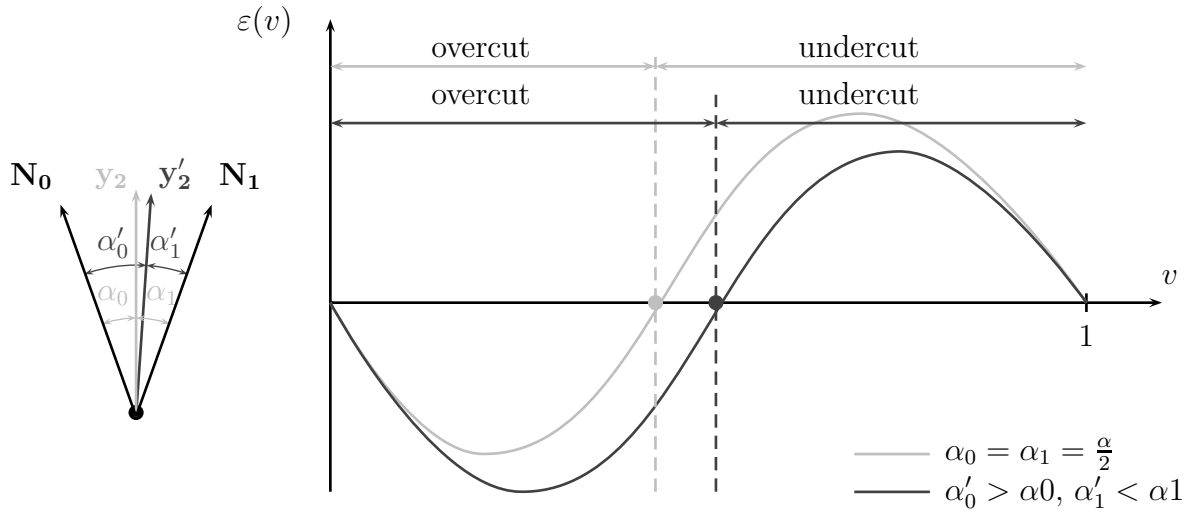
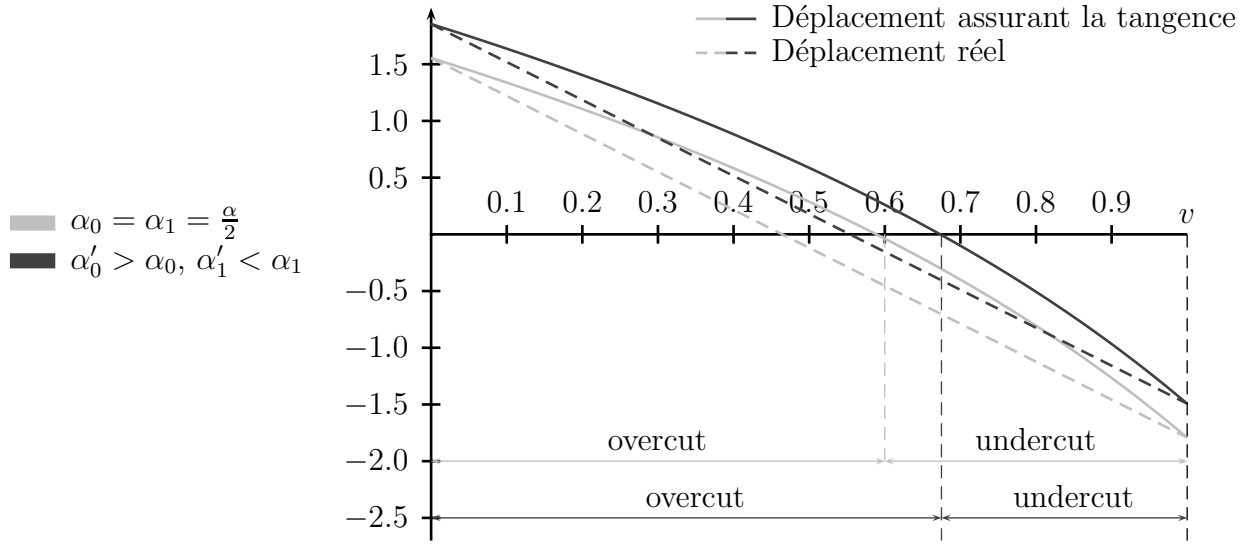


Figure 4.34 – Influence de $\mathbf{y}_2$ sur les courbes d'erreur

Sur la figure 4.34, on part du positionnement amélioré ($\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$) et on modifie $\mathbf{y}_2$: α_0 est augmenté et α_1 est diminué. Ceci a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la plage de l'erreur d'overcut et de diminuer celle de l'erreur d'undercut. Ce résultat se retrouve sur les courbes de prédiction de l'erreur (figure 4.35) : lorsque $|\alpha_0|$ augmente, $|\Delta_0|$ augmente et lorsque $|\alpha_1|$ diminue, $|\Delta_1|$ diminue. Ainsi la droite représentant le déplacement réel va se déplacer vers le « haut » du graphique et le point où l'erreur s'annule se déplace vers « la droite ».

Comme l'indique la figure 4.35, le mouvement subi par la droite représentant le déplacement réel est en réalité une translation suivant l'axe des ordonnées. Pour démontrer cette propriété il faut démontrer que :

- la fonction $\Delta(\alpha)$ est croissante : lorsque $|\alpha_0|$ augmente, $|\Delta_0|$ augmente et lorsque $|\alpha_1|$ diminue, $|\Delta_1|$ diminue, cette démonstration a déjà été menée précédemment,
- il y a égalité entre les déplacements subis par les points $(0, \Delta_0)$ et $(1, \Delta_1)$.


 Figure 4.35 – Influence de y_2 sur les courbes de prédiction de l'erreur

4.6.3.1.1 Expression des déplacements Δ_0 et Δ_1

On a pu établir dans le paragraphe précédent l'expression de la dérivée de la fonction $\Delta(\alpha)$:

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{(\rho^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \rho R \sin(\alpha))}{\sqrt{2 \cdot R \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \rho^2 \cdot \sin^2(\alpha)}} - \rho \cdot \cos(\alpha)$$

Les surfaces réglées sur lesquelles nous travaillons présentent toutes des rayons de courbure important. Nous pouvons donc faire l'hypothèse suivante : le rayon de courbure ρ est très grand devant le rayon d'outil R . Une valeur approchée de la dérivée peut donc être calculée en effectuant un développement limité à l'ordre 1.

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \rho \cdot \frac{(\sin(\alpha) \cos(\alpha) + \frac{R}{\rho} \sin(\alpha))}{\sqrt{2 \cdot \frac{R}{\rho} \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha)}} - \rho \cdot \cos(\alpha)$$

On pose alors :

$$g(X) = \frac{(\sin(\alpha) \cos(\alpha) + X \cdot \sin(\alpha))}{\sqrt{2 \cdot X \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha)}}$$

La dérivée de cette fonction vaut :

$$g'(X) = \frac{\sin(\alpha) \cdot \sqrt{2 \cdot X \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha)} - (\sin(\alpha) \cos(\alpha) + X \cdot \sin(\alpha)) \cdot \frac{2(1 - \cos(\alpha))}{\sqrt{2 \cdot X \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha)}}}{2 \cdot X \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha)}$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $g(X)$:

$$g(X) \simeq g(0) + X \cdot g'(0) = \cos(\alpha) + X \cdot \frac{\sin^2(\alpha) - \cos(\alpha)(1 - \cos(\alpha))}{\sin^2(\alpha)}$$

Soit :

$$g(X) \simeq \cos(\alpha) + X \frac{1}{1 + \cos(\alpha)}$$

En revenant à la fonction dérivée de $\Delta(\alpha)$, on peut écrire :

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \simeq \rho \cdot \left(\cos(\alpha) + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{1 + \cos(\alpha)} \right) - \rho \cos(\alpha)$$

En revenant à la définition mathématique d'une dérivée, on en déduit :

$$\frac{\Delta(\alpha + \delta\alpha) - \Delta(\alpha)}{\delta\alpha} \simeq \frac{R}{1 + \cos(\alpha)}$$

Soit :

$$\Delta(\alpha + \delta\alpha) - \Delta(\alpha) = \delta\alpha \cdot \frac{R}{1 + \cos(\alpha)}$$

Ainsi, l'écart entre les anciennes et les nouvelles valeurs du déplacement réel pour $v = 0$ et $v = 1$ valent respectivement $\left(\frac{\delta\alpha \cdot R}{1 + \cos(\alpha_0)} \right)$ et $\left(\frac{\delta\alpha \cdot R}{1 + \cos(\alpha_1)} \right)$. Sachant que pour le positionnement amélioré, on a $\alpha_0 = \alpha_1$ et que pour le positionnement amélioré centré, on a $\alpha_0 \simeq \alpha_1$, on peut dire que les déplacements des points $(0, \Delta_0)$ et $(1, \Delta_1)$ sont identiques. Le mouvement de la droite représentant les déplacements réels (figure 4.35) est donc une translation.

4.6.3.2 Application des résultats obtenus aux outils coniques

L'idée de ce paragraphe est la suivante : le positionnement à appliquer à un outil cylindrique est connu, l'erreur engendrée est connue et minimisée. Mais la possibilité d'utiliser un outil conique et de lui appliquer le positionnement amélioré n'a pas encore été étudiée. Il se peut que l'outil conique soit la solution pour réduire une nouvelle fois l'erreur d'usinage. Il faut donc étudier le positionnement amélioré pour l'outil conique. Cette étude est complexe et ne sera pas effectuée ici. Dans ce paragraphe, seule l'influence de la variation du rayon lors du passage d'un outil cylindrique à un outil conique est étudiée. On pourra, à l'issue de cette étude, en déduire une tendance sur le choix de l'axe de rotation à utiliser pour le positionnement amélioré appliqué à l'outil conique.

4.6.3.2.1 Influence du changement de rayon

En étudiant l'influence de la variation du rayon sur les courbes de prédiction de l'erreur, on pourra connaître son influence sur les courbes d'erreur. Pour connaître l'influence de la variation du rayon sur les courbes de prédiction de l'erreur, on va étudier la fonction $\Delta(R)$:

$$\Delta(R) = \sqrt{(R + \rho)^2 - (R + \rho \cdot \cos(\alpha))^2} - \rho \cdot \sin(\alpha)$$

La dérivée de $\Delta(R)$ s'exprime comme suit :

$$\frac{d\Delta(R)}{dR} = \frac{\rho \cdot (1 - \cos(\alpha))}{\sqrt{(R + \rho)^2 - (R + \rho \cdot \cos(\alpha))^2}}$$

la fonction dérivée étant strictement positive, la fonction $\Delta(R)$ est strictement croissante. L'influence de cette propriété sur les courbes de prédiction de l'erreur est résumée sur la figure 4.36.

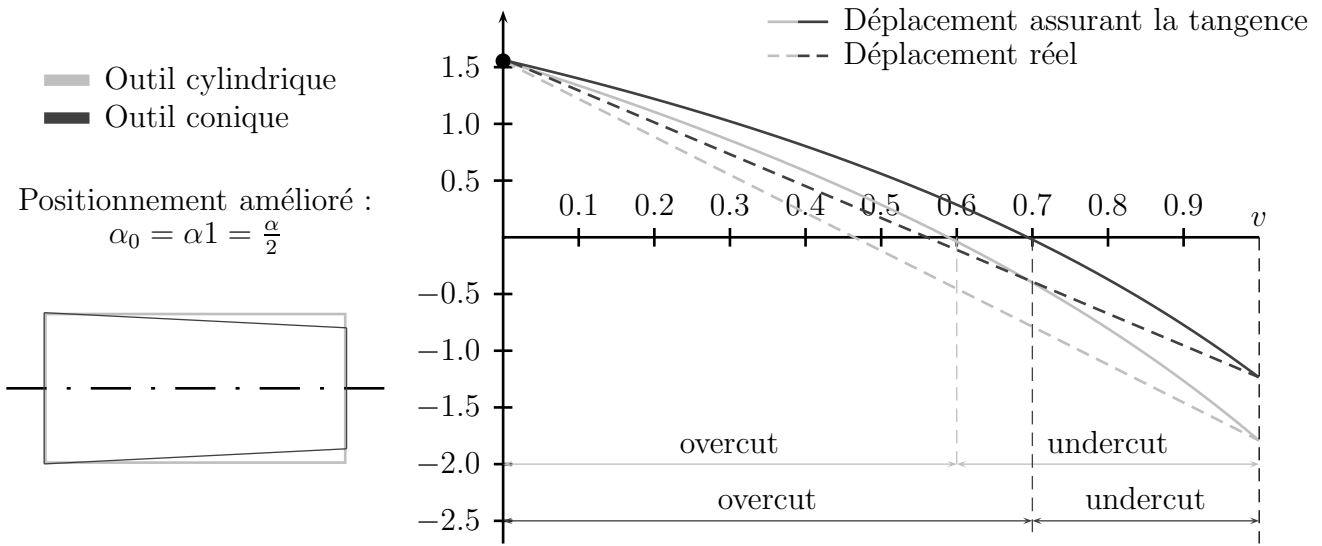


Figure 4.36 – Influence de la variation du rayon sur les courbes de prédiction de l'erreur

En passant de l'outil cylindrique à l'outil conique, on va augmenter la plage où l'erreur est du type overcut et diminuer celle où l'erreur est du type undercut.

4.6.3.2.2 Choix de l'axe de rotation

On sait que les positionnements améliorés proposés pour un outil cylindrique ne sont pas loin d'être optimaux. En effet, le passage à un outil conique va peut-être améliorer l'erreur engendrée mais à ce niveau d'optimisation le gain apporté sera minime, même si en terme d'usinage ce gain reste intéressant. Cela signifie que le diagramme de prédiction de l'erreur traduisant le positionnement amélioré de l'outil cylindrique représente une situation proche de l'optimum. Pour positionner l'outil conique, on va se rapprocher de cette position, notamment au niveau du point où l'erreur s'annule (figure 4.37). La modification nécessaire pour retrouver cette position va nous indiquer la tendance à suivre pour modifier l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$. Sur la figure 4.37, pour optimiser le positionnement de l'outil conique, il va donc falloir diminuer α_0 et augmenter α_1 .

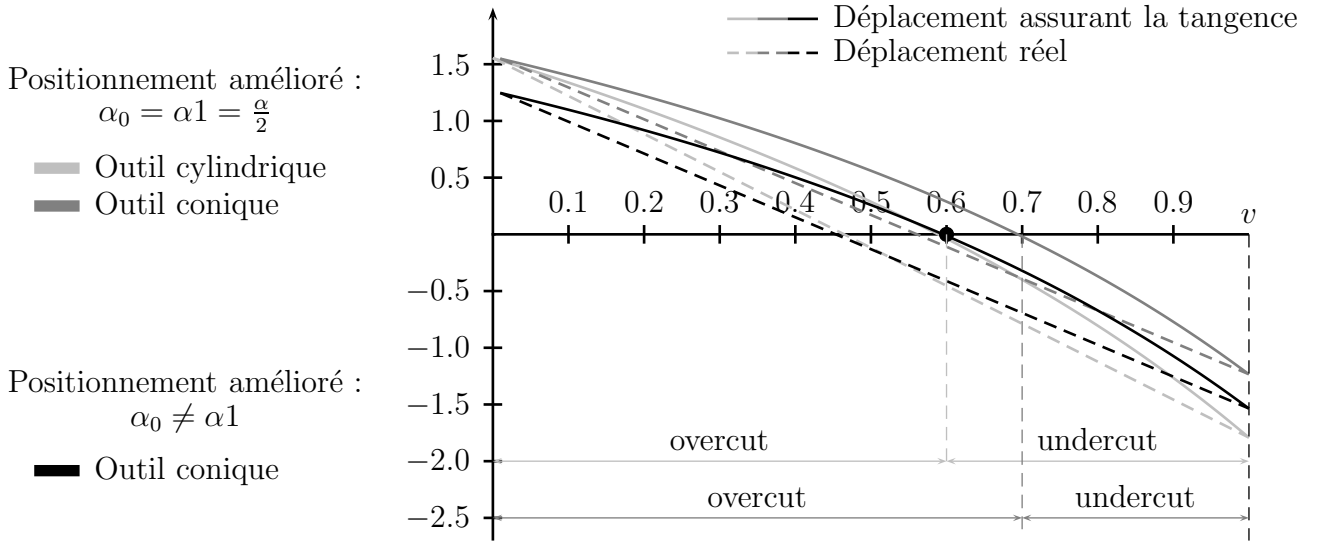


Figure 4.37 – Choix de l'axe de rotation pour un outil conique

4.7 Positionnement amélioré appliqué à la surface offset

A partir des constats effectués par [GXL05] sur la surface offset et sur les erreurs :

- la surface offset à la surface générée par la trajectoire de l'axe de l'outil est la surface enveloppe (surface usinée), la distance offset est égale au rayon de l'outil,
- « l'erreur maximale d'usinage qui existe entre la surface enveloppe de l'outil et la surface à usiner $\mathbf{S}(u, v)$ d'une part, et l'erreur entre la surface offset de $\mathbf{S}(u, v)$ (la distance offset étant égale au rayon outil) et la surface des trajectoires centre-outil d'autre part, sont égales. Ainsi, il est possible de raisonner directement au niveau de la surface offset et de l'axe de l'outil »,

nous avons cherché à appliquer le positionnement amélioré entre l'axe et la surface offset.

Notations

- $\mathbf{S}_{\text{offset}}(u, v)$ est la surface offset de $\mathbf{S}(u, v)$:

$$\mathbf{S}_{\text{offset}}(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + R \cdot \mathbf{n}(u, v)$$

- $\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u)$ et $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u)$ les courbes offset des directrices $\mathbf{C}_0(u)$ et $\mathbf{C}_1(u)$:

$$\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u) = \mathbf{C}_0(u) + R \cdot \mathbf{n}(u, 0)$$

$$\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u) = \mathbf{C}_1(u) + R \cdot \mathbf{n}(u, 1)$$

- $\mathcal{R}_1(\mathbf{P}_2, \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_2 = \frac{(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1}{\|(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1\|}, \mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}{\|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1\|})$,
- $\mathbf{C}_{0\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u)$ et $\mathbf{C}_{1\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u)$ les expressions de $\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u)$ et $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u)$ dans le repère $\mathcal{R}_1$,
- $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$ est le point offset de $\mathbf{M}_2$:

$$\mathbf{M}_{2\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u_p, v) = \mathbf{M}_2(u_p, v) + R \cdot \mathbf{n}(u_p, v)$$

4.7.1 Définition du nouveau positionnement

Le positionnement amélioré appliqué à la surface offset $\mathbf{S}_{\text{offset}}(u, v)$ suit le même principe que le positionnement amélioré appliqué à $\mathbf{S}(u, v)$: on effectue une rotation de l'axe de l'outil autour de l'axe $\mathbf{y}_2$, le centre de la rotation se situe en $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$. On cherche une position de l'axe qui passe par $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$ et qui coupe les deux directrices offset $\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u)$ et $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u)$. On distingue alors deux positionnements :

- le positionnement amélioré où l'axe $\mathbf{y}_2$ est imposé ($\mathbf{y}_2 = \frac{\frac{1}{2}\mathbf{N}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{N}_1}{\|\frac{1}{2}\mathbf{N}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{N}_1\|}$) et la position du point $\mathbf{M}_{2\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u_p, v_2)$ sera connue après la résolution du système,
- le positionnement amélioré centré où la position du point $\mathbf{M}_{2\text{offset}} = \mathbf{S}_{\text{offset}}(u_p, 0.5)$ est connue. L'orientation de l'axe $\mathbf{y}_2$ sera déterminée après la résolution du système ($\mathbf{y}_2 = \frac{(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1}{\|(1-a) \cdot \mathbf{N}_0 + a \cdot \mathbf{N}_1\|}$).

L'étude menée est illustrée sur la figure 4.38. Le positionnement géométrique de l'axe de l'outil peut s'exprimer de la manière suivante :

- le vecteur $\mathbf{M}_{2\text{offset}}\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u_0)$ est perpendiculaire à l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$,
- le vecteur $\mathbf{M}_{2\text{offset}}\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u_1)$ est perpendiculaire à l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$,
- les points $\mathbf{C}_{0\text{offset}}(u_0)$, $\mathbf{C}_{1\text{offset}}(u_1)$ et $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$ sont alignés étant donné qu'ils appartiennent tous les trois à l'axe de l'outil.

Pour le positionnement amélioré ($a = \frac{1}{2}$), le système à résoudre est un système de trois équations à trois inconnues (u_0, u_1, v_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, v_2) - \mathbf{C}_{0\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_0)) \cdot \mathbf{y}_2 = 0 \\ (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, v_2) - \mathbf{C}_{1\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_1)) \cdot \mathbf{y}_2 = 0 \\ [(\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, v_2) - \mathbf{C}_{0\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_0)) \wedge (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, v_2) - \mathbf{C}_{1\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_1))] \cdot \mathbf{y}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

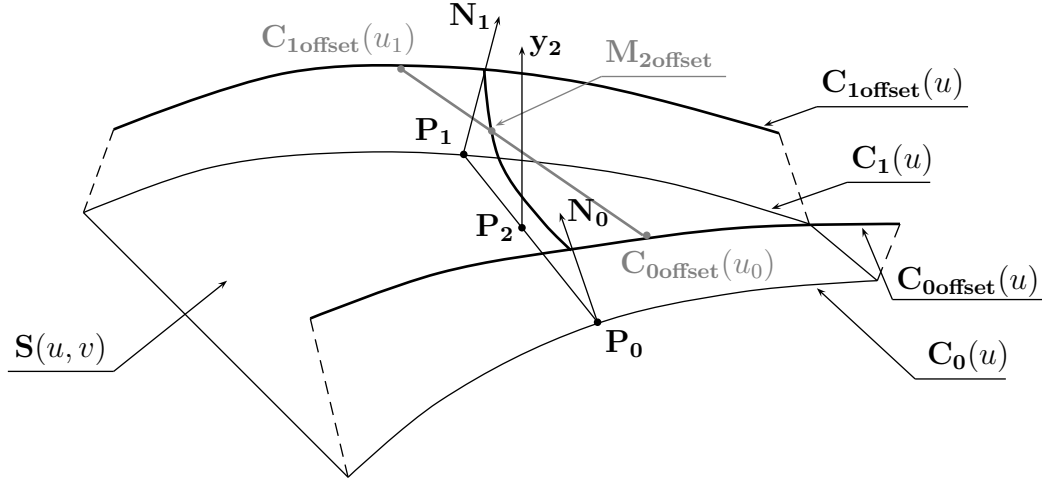


Figure 4.38 – Positionnement amélioré appliqué à la surface offset

Pour le positionnement amélioré centré ($v_2 = \frac{1}{2}$), le système à résoudre est un système de trois équations à trois inconnues (u_0, u_1, a) :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, \frac{1}{2}) - \mathbf{C}_{0\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_0)) \cdot \mathbf{y}_2(a) = 0 \\ (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, \frac{1}{2}) - \mathbf{C}_{1\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_1)) \cdot \mathbf{y}_2(a) = 0 \\ [(\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, \frac{1}{2}) - \mathbf{C}_{0\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_0)) \wedge (\mathbf{S}_{\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_p, \frac{1}{2}) - \mathbf{C}_{1\text{offset}-\mathcal{R}_1}(u_1))] \cdot \mathbf{y}_2(a) = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Ces nouveaux positionnements basés sur la surface offset $\mathbf{S}_{\text{offset}}(u, v)$ présentent l'avantage d'être beaucoup moins complexes que les positionnements basés sur la surface $\mathbf{S}(u, v)$: on passe d'un système de sept équations à sept inconnues à un système de trois équations à trois inconnues. Ceci se traduit par un gain de temps en terme de temps de résolution. Par contre l'inconvénient de ce type de positionnement vient du fait que la tangence entre l'outil et les courbes directrices n'est plus garantie étant donné qu'elle n'est plus imposée dans le système d'équations.

4.7.2 Comparaison entre les différents positionnements améliorés

Nous nous concentrons ici sur la comparaison du positionnement amélioré et du positionnement amélioré centré lorsqu'ils sont appliqués à la surface $\mathbf{S}(u, v)$ et à la surface offset $\mathbf{S}_{\text{offset}}(u, v)$. Cette comparaison s'appuie sur l'erreur engendrée par les différents positionnements améliorés appliqués sur une même surface dans des conditions identiques. Cette comparaison ne peut être menée de manière analytique, nous allons donc étudier différents

exemples. La surface (figure 4.39) qui sert de support à notre étude est définie comme suit :

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{C}_0(u) + v \cdot \mathbf{C}_1(u)$$

$$\text{avec : } \mathbf{C}_0(u) \begin{cases} 23.014 \cdot u \\ 20.429 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_1(u) \begin{cases} 23.014 \cdot u \\ 20.2324 \cdot u^2 \\ 33.995 \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (4.48)$$

Cette surface sert de référence dans de nombreux articles traitant de l'usinage en roulant.

La vrille α varie en continu de 0° à 60° pour $u = 0$ à $u = 1$.

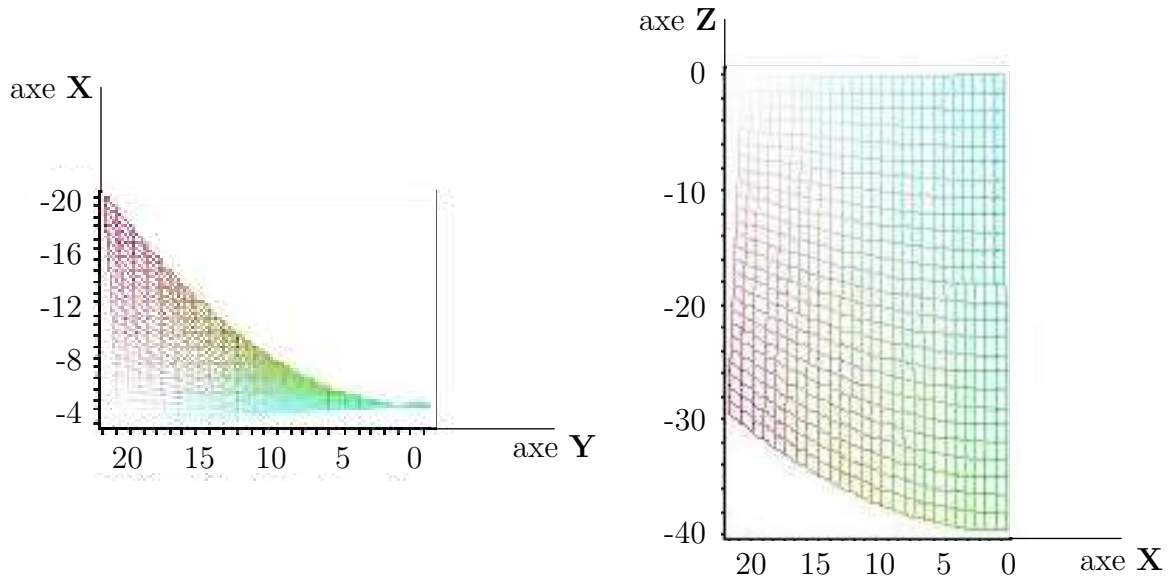


Figure 4.39 – Représentation de la surface à usiner

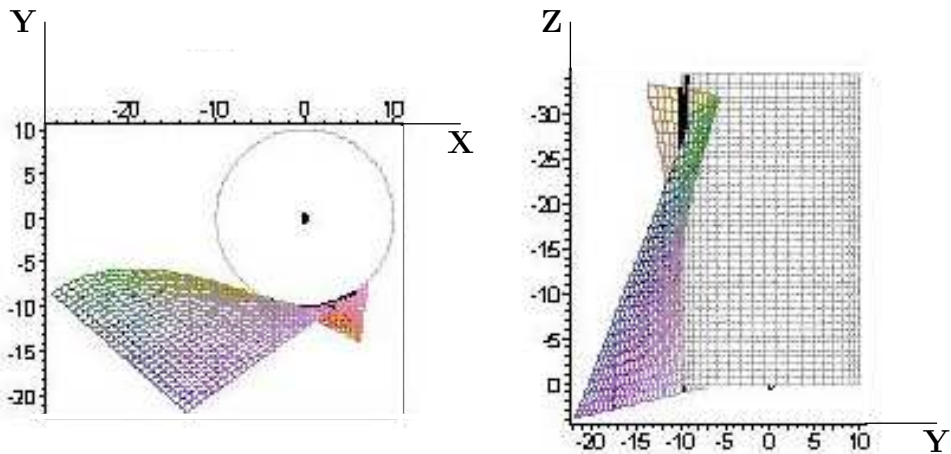


Figure 4.40 – Positionnement de l'outil sur la surface

Les essais ont été menés sur l'ensemble de la surface avec un outil cylindrique de diamètre

$R = 10$ mm (figure 4.40). Les dimensions de l'outil ont volontairement été choisies importantes par rapport aux dimensions de la surface afin d'avoir des erreurs significatives.

4.7.2.1 Erreurs obtenues avec les différents positionnements

Le figure 4.41 montre les courbes d'erreurs à $u_p = 0.1$, $u_p = 0.5$ et $u_p = 0.9$. Les courbes représentées correspondent aux définitions suivantes :

- (a) Courbe $\text{---}\circ\text{---}$: cette courbe correspond au positionnement amélioré appliqué à la surface offset. L'axe $\mathbf{y}_2$ est sur la bissectrice de l'angle formé par $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$, le point $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$ est connu après résolution.
- (b) Courbe $\text{---}\bullet\text{---}$: cette courbe correspond au positionnement amélioré centré appliqué à la surface offset. Le point $\mathbf{M}_{2\text{offset}}$ est donné par $v_2 = 0.5$, l'axe $\mathbf{y}_2$ est défini à partir de $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$ après résolution.
- (c) Courbe $\text{---}\square\text{---}$: cette courbe correspond au positionnement amélioré appliqué à la surface. L'axe $\mathbf{y}_2$ est sur la bissectrice de l'angle formé par $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$, le point $\mathbf{M}_2$ se situe sur la règle à une position connue après résolution.
- (d) Courbe $\text{---}\blacksquare\text{---}$: cette courbe correspond au positionnement amélioré centré appliqué à la surface. Le point $\mathbf{M}_2$ se situe au milieu de la règle à $v_2 = 0.5$ ($h_0 = h_1 = \frac{h_p}{2}$), l'axe $\mathbf{y}_2$ est défini à partir de $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$ après résolution.

Pour les différents positionnements, on observe deux zones sur les courbes d'erreur : une zone d'overcut ($\varepsilon_{\text{over}}$) et une zone d'undercut ($\varepsilon_{\text{under}}$). Les résultats obtenus (exprimés en mm) sont résumés dans le tableau 4.49. On calcule ensuite l'amplitude maximale ε_{max} résultant de l'erreur d'undercut et de l'erreur d'overcut : $\varepsilon_{\text{max}} = |\varepsilon_{\text{over}}| + |\varepsilon_{\text{under}}|$

Lorsque la vrille n'est pas importante ($u_p = 0.1$), les différents positionnements testés engendrent des erreurs quasi-identiques qui sont très faibles, de l'ordre de $1 \mu\text{m}$. L'écart devient plus significatif lorsque la vrille est importante (vrille de 57° à $u_p = 0.9$) : de l'ordre de 0.339 mm environ pour les positionnements appliqués à la surface offset, alors que ceux appliqués à la surface elle-même engendrent une erreur de l'ordre de 0.317 mm.

	$u_p = 0.1$			$u_p = 0.5$			$u_p = 0.9$		
	$\varepsilon_{\text{under}}$	$\varepsilon_{\text{over}}$	ε_{max}	$\varepsilon_{\text{under}}$	$\varepsilon_{\text{over}}$	ε_{max}	$\varepsilon_{\text{under}}$	$\varepsilon_{\text{over}}$	ε_{max}
(a)	0,00066	-0,00039	0.00105	0,0236	-0,0428	0.0664	0,0560	-0,2833	0.3393
(b)	0,00075	-0,00032	0.00107	0,0433	-0,0294	0.0727	0,2205	-0,1192	0.3397
(c)	0,00074	-0,00031	0.00105	0,0326	-0,0328	0.0654	0,1277	-0,1894	0.3171
(d)	0,00065	-0,00038	0.00103	0,0296	-0,0349	0.0645	0,1216	-0,1948	0.3164

(4.49)

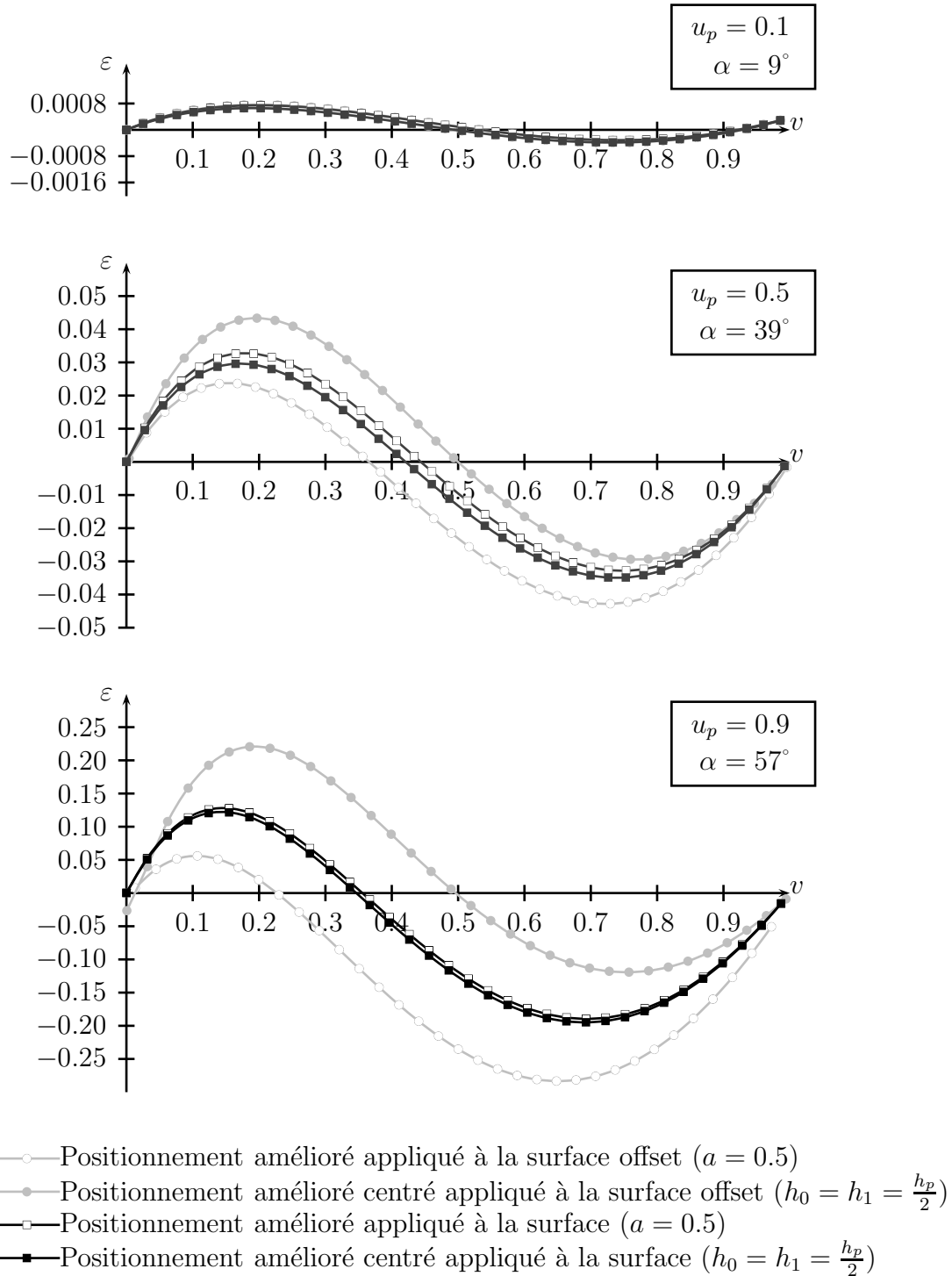


Figure 4.41 – Courbes d'erreur correspondant aux différents positionnements améliorés

En résumé, les positionnements appliqués à la surface offset sont intéressants pour les surfaces réglées présentant une vrille peu importante : les systèmes à résoudre sont moins complexes (trois équations à trois inconnues au lieu de sept équations à sept inconnues) et l'erreur engendrée est du même ordre que les positionnements basées sur la surface. Par contre, la tangence avec les directrices n'étant pas assurée, ces positionnements ne sont pas conseillés pour les surfaces quelconques discrétisées en surfaces réglées.

Pour les surfaces réglées ou pour les surfaces quelconques discrétisées en surfaces réglées présentant une vrille importante, le positionnement à utiliser reste le positionnement amélioré appliqué à la surface : il est optimal en terme d'erreur et il assure la tangence entre l'outil et les directrices de la surface. On remarque que le positionnement amélioré centré (point $\mathbf{M}_2$ au milieu de la règle : $v_2 = 0.5$) semble plus efficace que le positionnement amélioré (axe $\mathbf{y}_2$ sur la bissectrice de l'angle formé par $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$). Les erreurs obtenues par les positionnements appliqués à la surface offset présentent une dissymétrie plus importante que les positionnements appliqués à la surface elle-même, ce qui peut s'avérer gênant dans le cadre de l'usinage d'une surface réglée présentant un intervalle de tolérance centré sur la valeur nulle.

4.8 Positionnement amélioré et minimisation de l'erreur

Dans l'étude proposée ci-après nous cherchons à réduire les erreurs d'usinage en modifiant le positionnement de l'outil initialement proposé (positionnement amélioré).

Les positionnements améliorés évoqués précédemment partent tous du même principe : on translate l'outil dans une direction $\mathbf{y}_2$ donnée et on effectue une rotation autour du même axe. L'outil a six degrés de liberté dans l'espace : trois rotations et trois translations. Pour un outil cylindrique, la translation et la rotation suivant son axe ne modifient pas son positionnement. Il reste donc deux degrés de liberté qui n'ont pas été exploités lors du positionnement de l'outil. Ces degrés de liberté sont à la base de la minimisation proposée.

Le positionnement de l'outil est un problème en trois dimensions, le calcul de l'erreur s'effectue à partir de la courbe enveloppe qui est une courbe 3D. Pour simplifier l'étude, la courbe enveloppe est ramenée dans un plan à définir. L'optimisation est effectuée dans ce plan puis les déplacements à appliquer à l'outil sont évalués dans l'espace 3D.

L'optimisation du positionnement de l'outil s'effectue donc à partir des courbes d'erreur (figure 4.42). Ces courbes comprennent généralement deux zones (overcut et undercut) qui peuvent être caractérisées par les points suivants :

- $\mathbf{M}_0(x_{M_0}, \varepsilon_0)$: point de la courbe enveloppe correspondant à $v = 0$,

- $\mathbf{M}_{\max}(x_{M_{\max}}, \varepsilon_{\max})$: point de la courbe enveloppe correspondant à l'amplitude maximale de l'erreur,
- $\mathbf{M}_{\mathbf{m}}(x_{M_{\mathbf{m}}}, 0)$: point de la courbe enveloppe correspondant à une erreur nulle à un abscisse différent de $v = 0$ et $v = 1$,
- $\mathbf{M}_{\min}(x_{M_{\min}}, \varepsilon_{\min})$: point de la courbe enveloppe correspondant à l'amplitude minimale de l'erreur,
- $\mathbf{M}_1(x_{M_1}, \varepsilon_1)$: point de la courbe enveloppe correspondant à $v = 1$.

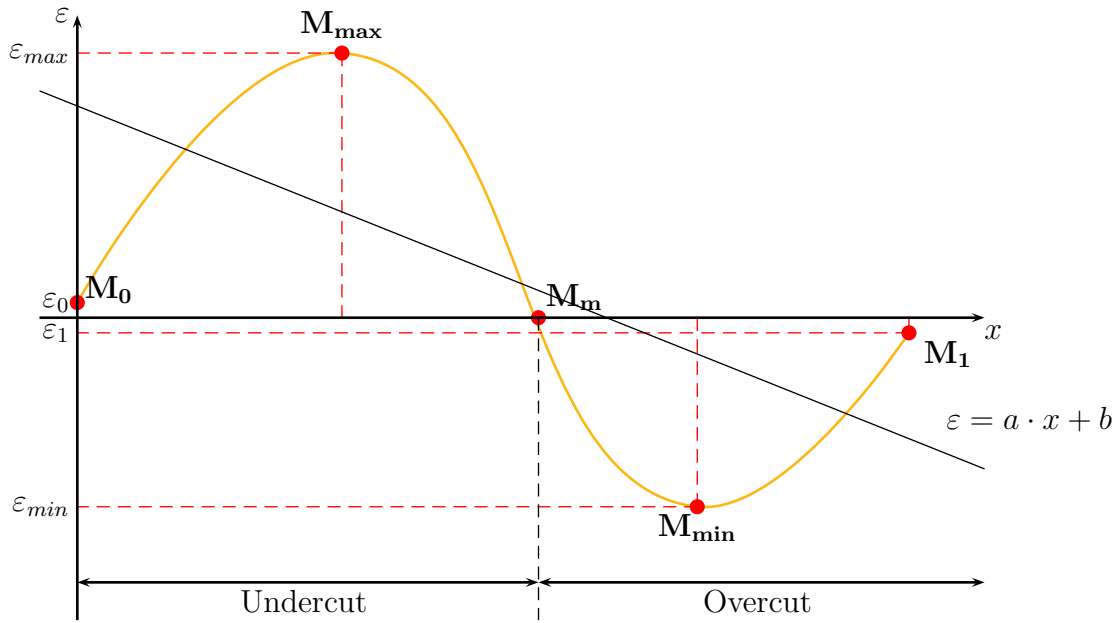


Figure 4.42 – Minimisation de l'erreur

Ces points caractéristiques vont être utilisés dans le problème d'optimisation qui nous permettra de connaître la position optimale de l'outil. Pour définir ce nouveau positionnement, plusieurs choses sont à définir :

- le critère d'optimisation nous permettant d'évaluer la nouvelle position de l'outil, et donc, on le verra ultérieurement, la droite d'équation $\varepsilon = a \cdot x + b$,
- le choix de l'axe de rotation et de l'axe de translation à utiliser pour le passage de l'espace 2D dans lequel les calculs d'optimisation sont menés à l'espace 3D dans lequel l'outil doit être positionné.

4.8.1 Choix d'un critère d'optimisation

On cherche la droite d'équation $\varepsilon = a \cdot x + b$ qui minimise l'erreur engendrée par l'outil. On appelle ε'_i les erreurs engendrées par l'outil lorsque l'orientation de l'axe de l'outil est modifiée (figure 4.43). Deux critères sont possibles :

- Critère des moindres carrés : on considère l'ensemble des points caractéristiques (x_i, ε_i) simultanément en minimisant la somme des erreurs au carré $\sum \varepsilon_i'^2$.
- Minimisation de l'erreur maximum : on considère l'ensemble des points caractéristiques (x_i, ε_i) simultanément, mais le traitement s'applique uniquement sur la valeur maximum de l'erreur $Max(\varepsilon'_i)$.

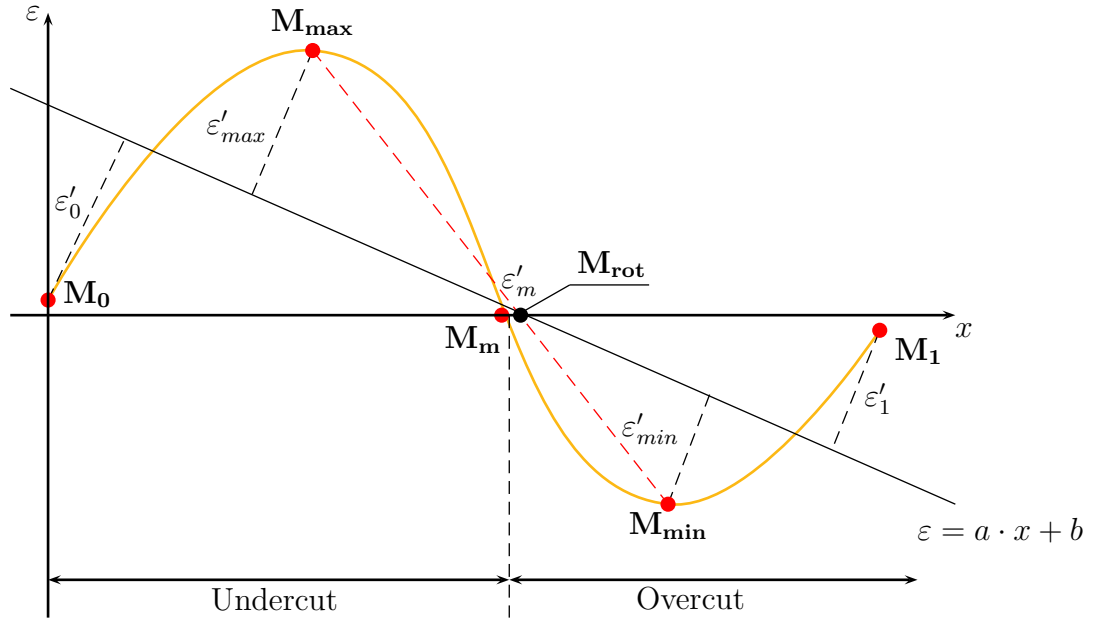


Figure 4.43 – Critère d'optimisation

4.8.1.1 Critère des moindres carrés

Pour optimiser la position de l'outil, on minimise la somme des erreurs au carré $\sum \varepsilon_i'^2$. Les paramètres du problème d'optimisation sont le coefficient directeur « a » et l'ordonnée à l'origine « b » de la droite. Ceci se traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum \varepsilon_i'^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i'^2}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sum \varepsilon_i'^2 = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_{max} + \varepsilon'_m + \varepsilon'_{min} + \varepsilon'_1$$

Les coefficients optimaux a_{opt} et b_{opt} caractérisant la position optimale de la droite sont :

$$a_{opt} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

4.8.1.2 Minimisation de l'erreur maximale

Pour optimiser la position de l'outil, on minimise la valeur maximale des erreurs ε'_i , soit $\max(\varepsilon'_0, \varepsilon'_{max}, \varepsilon'_m, \varepsilon'_{min}, \varepsilon'_1)$. La méthode suivante est utilisée pour minimiser la valeur maximale des ε'_i : nous faisons pivoter la droite $\varepsilon = a \cdot x + b$ autour du point $\mathbf{M}_{rot}$ (figure 4.43). Le point $\mathbf{M}_{rot}$ est à l'intersection de l'axe x et de la droite passant par les points caractéristiques $(x_{M_{max}}, \varepsilon_{max})$ et $(x_{M_{min}}, \varepsilon_{min})$. Le choix de $\mathbf{M}_{rot}$ présente les intérêts suivants :

- après la rotation, les proportions entre les erreurs ε_{max} et ε_{min} sont conservées :

$$\left| \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{min}} \right| = \left| \frac{\varepsilon'_{max}}{\varepsilon'_{min}} \right|$$

- après la rotation, les erreurs ε_0 et ε_1 varient inversement à ε_{max} et ε_{min} ; leurs proportions sont quasiment conservées :

$$\left| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right| = \left| \frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon'_1} \right|$$

Ces deux propriétés nous permettent de converger rapidement vers la solution optimale.

4.8.2 Choix des axes de rotation et de translation

Les erreurs d'usinage ont été calculées le long de la courbe enveloppe et ont été tracées dans le plan (x, ε) . Les axes de rotation et de translation dépendent directement de la géométrie de la courbe enveloppe et peuvent être choisis de façons multiples (figure 4.44).

Nous cherchons à définir $(\mathbf{x}_{r_i}, \mathbf{y}_{r_i})$ tel que :

- la rotation de l'outil s'effectue autour de l'axe $(\mathbf{M}_0, \mathbf{x}_{r_i})$ avec une amplitude $-a_{opt}$,
- la translation de l'outil s'effectue suivant l'axe $\mathbf{y}_{r_i}$ avec une amplitude $-b_{opt}$.

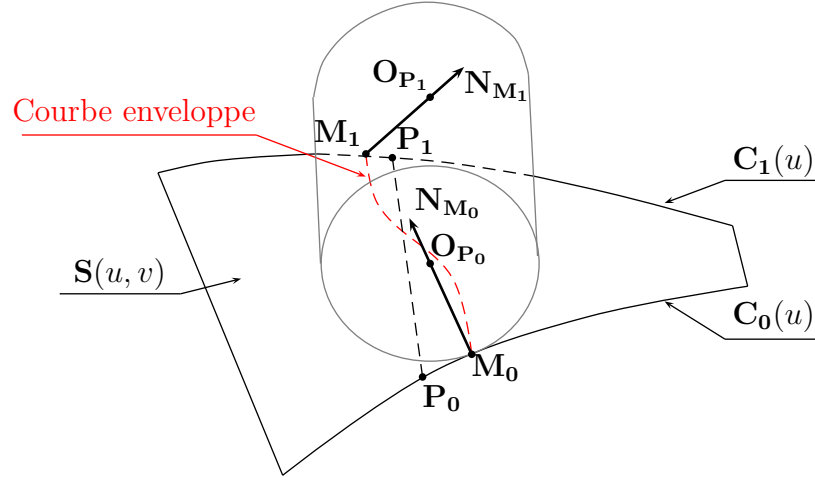


Figure 4.44 – Éléments de construction des axes de rotation et de translation

1^{er} choix : les axes de translation et de rotation sont construits à partir de $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$

Les points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ se situent aux deux extrémités de la courbe enveloppe. On calcule les axes à l'aide des erreurs ε_{max} et ε_{min} afin de privilégier la direction où l'erreur est maximale. En appelant n_{max} et n_{min} les normales à la surface respectivement en $\mathbf{M}_{max}$ et $\mathbf{M}_{min}$, les axes sont construits de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r1} &= \mathbf{y}_{r1} \wedge \mathbf{z}_{r1} & \mathbf{y}_{r1} &= \frac{\mathbf{y}_{som}}{\|\mathbf{y}_{som}\|} & \mathbf{z}_{r1} &= \frac{\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1}{\|\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\|} \\ \text{avec : } \mathbf{y}_{som} &= \mathbf{z}_{r1} \wedge (\mathbf{y}_{som0} \wedge \mathbf{z}_{r1}) \\ \text{et : } \mathbf{y}_{som0} &= \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max} + |\varepsilon_{min}|} \cdot \mathbf{n}_{max} + \frac{|\varepsilon_{min}|}{\varepsilon_{max} + |\varepsilon_{min}|} \cdot \mathbf{n}_{min} \end{aligned} \quad (4.50)$$

2^{ieme} choix : les axes de translation et de rotation sont construits à partir de $\mathbf{O}_{P_0}\mathbf{O}_{P_1}$

Les points $\mathbf{O}_{P_0}$ et $\mathbf{O}_{P_1}$ se situent aux deux extrémités de l'axe de l'outil. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r2} &= \mathbf{y}_{r2} \wedge \mathbf{z}_{r2} & \mathbf{y}_{r2} &= \frac{\mathbf{y}_{som}}{\|\mathbf{y}_{som}\|} & \mathbf{z}_{r2} &= \frac{\mathbf{O}_{P_0}\mathbf{O}_{P_1}}{\|\mathbf{O}_{P_0}\mathbf{O}_{P_1}\|} \\ \text{avec : } \mathbf{y}_{som} &= \mathbf{z}_{r2} \wedge (\mathbf{y}_{som0} \wedge \mathbf{z}_{r2}) \\ \text{et : } \mathbf{y}_{som0} &= \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max} + |\varepsilon_{min}|} \cdot \mathbf{n}_{max} + \frac{|\varepsilon_{min}|}{\varepsilon_{max} + |\varepsilon_{min}|} \cdot \mathbf{n}_{min} \end{aligned} \quad (4.51)$$

3^{ieme} choix : les axes de translation et de rotation sont construits à partir de $\mathbf{n}_{max}$ et $\mathbf{n}_{min}$

pour privilégier les directions où l'erreur est minimum et maximum :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r3} &= \mathbf{y}_{r3} \wedge \mathbf{z}_{r3} & \mathbf{y}_{r3} &= \frac{\mathbf{y}_{\text{som}}}{\|\mathbf{y}_{\text{som}}\|} & \mathbf{z}_{r3} &= \mathbf{n}_{\text{max}} \wedge \mathbf{n}_{\text{min}} \\ \text{avec : } \mathbf{y}_{\text{som}} &= \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{\varepsilon_{\text{max}} + |\varepsilon_{\text{min}}|} \cdot \mathbf{n}_{\text{max}} + \frac{|\varepsilon_{\text{min}}|}{\varepsilon_{\text{max}} + |\varepsilon_{\text{min}}|} \cdot \mathbf{n}_{\text{min}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.8.3 Bilan de l'étude

Le paragraphe précédent a montré que la minimisation de l'erreur pouvait être menée de manières différentes : plusieurs critères d'optimisation sont possibles, plusieurs axes de rotation et de translation sont envisageables.

L'étude comparative menée précédemment sur les différents positionnements a montré que le positionnement amélioré centré appliqué à la surface était le plus performant. Nous allons donc comparer les différents types de minimisation de l'erreur à partir de ce positionnement. L'étude se base sur la surface présentée figure 4.39 et définie par l'équation 4.48.

Quel que soit le critère d'optimisation choisi, les zones d'overcut ($\varepsilon_{\text{over}}$) et d'undercut ($\varepsilon_{\text{under}}$) sont conservées. La comparaison entre les différents types de minimisation est menée sur la règle $u_p = 0.9$ avec une vrille de 57° . Le rayon de l'outil est de 10 mm. Les résultats obtenus (exprimés en mm) sont résumés dans le tableau suivant :

		$\varepsilon_{\text{under}}$	$\varepsilon_{\text{over}}$	$\varepsilon_{\text{under}} + \varepsilon_{\text{over}} $
Positionnement initial		0.1216	-0.1948	0.3164
Optimisation basée sur $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$	$\sum \varepsilon_i'^2$	0.1354	-0.1435	0.2789
	$\max(\varepsilon_i')$	0.1522	-0.0640	0.2162
Optimisation basée sur $\mathbf{O}_{P_0}\mathbf{O}_{P_1}$	$\sum \varepsilon_i'^2$	0.1352	-0.1435	0.2787
	$\max(\varepsilon_i')$	0.1521	-0.0640	0.2161
Optimisation basée sur $\mathbf{n}_{\text{max}}$ et $\mathbf{n}_{\text{min}}$	$\sum \varepsilon_i'^2$	0.1216	-0.1463	0.2679
	$\max(\varepsilon_i')$	0.1661	-0.0639	0.2300

(4.53)

En comparant les données du tableau, nous remarquons que les optimisations basées sur $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$ et sur $\mathbf{O}_{P_0}\mathbf{O}_{P_1}$ sont équivalentes : les erreurs obtenues sont quasiment égales pour un même critère d'optimisation. Il apparaît aussi que le critère de minimisation de l'erreur maximale engendrée est plus efficace que celui des moindres carrés quel que soit le système d'axes. Cela était prévisible mais les résultats numériques montrent l'intérêt du choix de la minimisation de l'erreur maximale. Cette optimisation est d'autant plus intéressante qu'elle est cohérente avec le système de cotation actuel (GPS - Geometrical Products Specification)

où seul l'écart maximum est pénalisant. L'optimisation basée sur $\mathbf{n}_{\max}$ et $\mathbf{n}_{\min}$ apparaît comme la moins performante des trois. Ceci s'explique car l'axe $\mathbf{z}_{\mathbf{r}_3}$ calculé est angulairement éloigné de l'axe de l'outil. L'axe $\mathbf{z}_{\mathbf{r}_3}$ n'est pas cohérent avec les positions des erreurs calculées.

En conclusion, l'optimisation à retenir est la suivante :

- Les axes de translation et de rotation de l'outil sont construits à partir des points $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_0}$ et $\mathbf{O}_{\mathbf{P}_1}$, la rotation s'effectue autour de l'axe $(\mathbf{M}_0, \mathbf{x}_{\mathbf{r}_2})$ et la translation suivant l'axe $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_2}$.
- Le critère d'optimisation à retenir est celui de la minimisation de l'erreur maximale.

La minimisation de l'erreur est efficace puisqu'elle permet d'obtenir une erreur totale de 0.216 mm (0.316 mm avant optimisation). En revanche, après une telle optimisation, la tangence entre l'outil et les directrices de la surface n'est plus assurée.

4.9 Conclusion et Perspectives

L'usinage en roulant de surfaces gauches, sur MOCN 5 axes, est un domaine de recherche de plus en plus abordé en CFAO. Ce procédé est très utilisé industriellement et concerne souvent des pièces à très forte valeur ajoutée, ce qui accroît d'autant l'intérêt d'en effectuer une étude approfondie. L'usinage en roulant est particulièrement bien adapté à l'usinage des surfaces réglées. Nous avons donc axé notre étude sur l'usinage des surfaces réglées, sachant que des modèles de discrétisation de surfaces gauches quelconques en surfaces réglées existent et nous permettent d'étendre notre champ d'application à tout type de surfaces gauches.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au positionnement amélioré développé dans [Mon01]. Le positionnement amélioré a fait l'objet de plusieurs articles et est toujours comparé avec les nouveaux positionnements proposés. Il reste aujourd'hui aussi performant que les positionnements « cinématiques » du point de vue de l'erreur engendrée. En analysant l'aspect cinématique de ce positionnement, nous avons prouvé que les points caractéristiques du positionnement amélioré ($\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$) étaient des points générateurs, ceci peut expliquer en partie les performances du positionnement amélioré en terme d'erreur d'usinage.

Dans un second temps, nous avons analysé l'influence de l'axe de rotation $\mathbf{y}_2$ utilisé dans le positionnement amélioré en développant de nouveaux positionnements : le positionnement amélioré centré et un positionnement équilibrant les erreurs d'overcut et d'undercut. Sur les surfaces présentant une vrille peu importante, les trois positionnements donnent des erreurs quasi identiques qui sont très faibles. Par contre, dès que la vrille devient importante l'écart entre les positionnement devient significatif et le positionnement amélioré centré est le plus performant.

Par la suite, en remarquant l'étude menée par [GXL05] sur la possibilité de construire un positionnement à partir de la surface offset, nous avons cherché à appliquer le positionnement amélioré sur la surface offset en raisonnant sur l'axe de l'outil. Nous sommes arrivés à la conclusion que ces positionnements sont intéressants pour les surfaces réglées présentant une vrille peu importante car les systèmes à résoudre sont moins complexes et l'erreur engendrée est du même ordre que celle obtenue avec les positionnements améliorés appliqués à la surface. Par contre, la tangence avec les directrices n'étant pas assurée, ces positionnements ne sont pas conseillés pour les surfaces quelconques discrétisées en surfaces réglées. Pour les surfaces réglées présentant une vrille importante, le positionnement à utiliser reste le positionnement amélioré centré appliqué à la surface : il est optimal en terme d'erreur et il assure la tangence entre l'outil et les directrices de la surface. Il est à noter que quel que soit le positionnement développé, la fiabilité des algorithmes de calculs est assurée.

Pour finir, l'ensemble des études menées pour améliorer l'erreur d'interférence entre l'outil et la surface se concluent sur le problème d'optimisation suivant : en observant que les positionnements proposés n'exploitaient pas l'ensemble des degrés de liberté de l'outil, nous avons proposé une amélioration du positionnement amélioré afin de diminuer l'erreur d'usinage. Cette optimisation s'est avérée efficace en terme d'erreur, en revanche, la tangence entre l'outil et les directrices de la surface n'est plus assurée, cette optimisation ne sera donc pas utilisée pour les surfaces quelconques discrétisées en surfaces réglées.

En parallèle avec les études précédentes, nous avons proposé une méthode de choix simple et rapide du rayon de l'outil. Pour cela, nous avons mis en évidence la relation de quasi linéarité qui existe entre le rayon de l'outil et l'erreur engendrée. Ainsi, pour connaître le rayon maximal de l'outil à utiliser permettant de respecter l'erreur maximale imposée, il suffit de calculer l'erreur d'interférence pour un rayon d'outil donné et d'exploiter la relation de quasi-linéarité.

Au cours des essais réalisés, nous avons obtenu deux types d'erreur : erreur d'overcut et erreur d'undercut. Ces deux types d'erreur ont engendré des courbes d'erreur de natures différentes : overcut/overcut, undercut/overcut ou overcut/undercut. Une analyse a permis de donner une explication à ces différences et a permis d'établir une méthode de prédiction des courbes d'erreur. Cette étude a été menée pour les outils cylindriques et élargie aux outils coniques. La suite logique de cette étude est la suivante : trouver un nouveau positionnement, adapté à l'outil conique, qui améliorerait l'erreur d'usinage. Cette étude n'a pas été menée dans cet ouvrage et mérite d'être achevée ultérieurement.

Conclusion générale et Perspectives

Le travail de recherche entrepris dans cette thèse s'inscrit dans l'optique de la génération automatique de trajectoires d'usinage sur surfaces gauches, sur machine-outil à commande numérique trois et cinq axes. Nous cherchons au niveau de la FAO, à obtenir une pièce usinée, dans les tolérances imposées par le bureau d'études. Notons que ces valeurs sont minorées lors de nos calculs afin de s'assurer que les erreurs globales, c'est-à-dire les erreurs géométriques associées aux erreurs d'usinage, soient dans la tolérance. Une connaissance des capacités du procédé permet d'ajuster les tolérances à respecter.

Parmi toutes les tolérances imposées, la plus contraignante est celle de forme. Les tolérances de forme définissent un écart entre la surface réellement usinée et la surface théorique. Elles sont souvent serrées pour pouvoir exprimer des contraintes que le dessin technique n'a pas la possibilité de traduire, ceci implique une très bonne maîtrise du positionnement de l'outil sur la surface ainsi que des trajectoires formant la planification. Il apparaît nécessaire dans un premier temps d'être capable d'usiner juste (dans la tolérance) donc d'être capable de positionner l'outil sur la surface, puis dans un second temps de maîtriser le choix des trajectoires de l'outil.

Pour l'usinage en roulant de surfaces réglées, nous avons cherché à positionner un outil cylindrique tangent aux deux directrices et en contact en un point avec la règle. Les positionnements proposés permettent de diminuer considérablement l'interférence entre l'outil et la surface tout en préservant les directrices de la surface réglée. Tous les exemples traités font apparaître qu'il permettent de diminuer l'erreur de manière significative. Pour respecter les tolérances imposées sur leurs pièces, les industriels sont pour l'instant obligés d'utiliser des outils de faibles dimensions et les problèmes de vibrations de l'outil. Il en résulte des profondeurs de passes faibles, avec des avances diminuées, pour éviter notamment des flexions d'outil trop importantes. Ceci entraîne des temps d'occupation machines plus importants et une productivité moindre. En développant les différents positionnements présentés, nous avons analysé le processus d'apparition de l'erreur et proposé une méthode de choix des dimensions

de l'outil cylindrique en rapport avec l'intervalle de tolérance imposé sur la surface.

Le positionnement amélioré que nous avons établi, pour l'usinage en roulant de surfaces réglées avec un outil cylindrique, permet de répondre à l'attente des industriels : utilisation d'outils de sections importantes pour une productivité maximale avec respect des tolérances.

Pour l'usinage en bout de moules et de matrices, l'aspect positionnement de l'outil n'a pas été abordé puisqu'intégralement développé lors de précédents travaux au sein du laboratoire. A ce stade nous savons positionner un outil sans interférence avec la pièce. Nous nous sommes intéressés à l'élaboration des trajectoires d'usinage dans le cadre d'une planification isocrête. D'un point de vue industriel, ce type de planification présente un grand intérêt puisqu'il permet de réduire de manière considérable les opérations de polissage. Le travail mené sur le choix de la première trajectoire n'est pas complètement abouti, mais de nombreuses pistes de réflexion ont été avancées et une proposition a été effectuée. D'autre part, l'étude de la planification isocrête nous a amené à nous intéresser à la géométrie de l'outil à choisir selon la surface à usiner. Les résultats obtenus sont d'un grand intérêt puisque jusqu'à présent aucune étude n'avait été entreprise sur ce thème : une comparaison entre les rayons effectifs avait déjà été menée, mais sans faire le lien avec la planification isocrête. En conclusion, nous pouvons dire que la planification de trajectoires à hauteur de crête constante sur MOCN à 3 axes a été étudiée dans sa globalité : choix du posage de la surface à usiner, choix d'une première trajectoire, choix d'une géométrie d'outil et calcul de la planification.

Du point de vue des perspectives de recherche à développer pour finaliser les travaux présentés dans cette thèse, deux grands axes se dessinent :

- *Validation pratique des résultats issus de la théorie :*

Une campagne d'essais sur MOCN 3 axes est indispensable pour valider expérimentalement les algorithmes numériques développés pour l'usinage en bout. Ces essais devraient permettre de valider les performances de nos méthodes. Par ailleurs, à ce stade des recherches, il est essentiel de prendre en compte les aspects dynamiques de l'usinage (vitesse de coupe effective, problèmes vibratoires) à chaque étape du raisonnement : choix du posage, choix de la première trajectoire.

- *S'intéresser à la planification isocrête d'une manière plus globale*

Nous avons établi l'ensemble des outils nécessaires au calcul d'une planification isocrête et nous avons analysé ses principaux paramètres influents : choix du posage et de la première trajectoire. Le raisonnement mené sur le choix de la première trajectoire n'est pas totalement abouti et mérite d'être encore étudié. De la même manière, la gestion des zones non usinées et le découpage d'une surface en différentes zones d'usinage

(planifications isocrêtes distinctes) n'ont pas été suffisamment développés et méritent d'être analysés plus profondément.

Enfin, à plus long terme, l'extension de nos travaux aux domaines connexes s'inscrit dans le cadre du développement d'un logiciel complet d'usinage des surfaces gauches. L'ensemble des travaux effectués ont été menés en laboratoire et n'ont pas été menés en partenariat direct avec un industriel. De nombreux résultats obtenus devraient néanmoins intéresser le monde industriel et une des directions à adopter par la suite est d'établir les contacts industriels nécessaires.

Bibliographie

- [Apt67] *APT Part Programming*. New-York Mc Grawhill, 1967.
- [BEP92] K. D. Bouzakis, K. Efstathiou, and R. Paraskevopoulou. NC-Code preparation with optimum cutting conditions in 3 axis milling. *Annals of CIRP*, 4(1) :513, 1992.
- [BFJP87] R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan, and B. R. Piper. Surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 4 :3–16, 1987.
- [BK90] R. E. Barnhill and S. N. Kersey. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 7 :257–280, 1990.
- [BMM03] S. Bedi, S. Mann, and C. Menzel. Flank milling with flat end milling cutter. *Computer Aided Design*, 35 :293–300, 2003.
- [Cat92] G. Catania. A computer-aided prototype system for NC rough milling of free-form shaped mechanical part-pieces. *Computer in Industry*, 20 :275–293, 1992.
- [Chi04] C. J. Chiou. Accurate tool position for five-axis ruled surface machining by swept envelope approach. *Computer Aided Design*, 36 :967–974, 2004.
- [CL99] Chuang-Jang Chiou and Yuan-Shin Lee. A shape-generating approach for multi-axis machining G-buffer models. *Computer-Aided Design*, 31 :761–776, 1999.
- [CL02] Chuang-Jang Chiou and Yuan-Shin Lee. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 34 :357–371, 2002.
- [CLHJ88] B. K. Choi, C. S. Lee, J. S. Hwang, and C. S. Jun. Compound surface modelling and machining. *Computer Aided Design*, 20(3) :127–136, 1988.
- [Des97] G. Dessen. *Qualification et optimisation d’une machine-outil à commande numérique*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 1997.
- [Duc98] Duc. *titre*. Thèse d’Etat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Paris, 1998.

- [EC94] G. Elbert and E. Cohen. Toolpath generation for freeform surface models. *Computer Aided Design*, 26(6) :490–496, 1994.
- [Elb01] G. Elber. Curve evaluation and interrogation on surfaces. *Graphical Models*, 63 :197–210, 2001.
- [Fer88] Ferstenberg. *Geometric considerations for automatic generation of optimised cutter paths for 3-axis numerically controlled milling*. Thèse d’Etat, Cornell University, USA, 1988.
- [FL02] H.-Y. Feng and H. Li. Constant scallop-height tool path generation for three-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 34 :647–654, 2002.
- [FP85] I. D. Faux and M. J. Pratt. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Mathematics and its applications. Ellis Horwood Ltd., 4ème edition, 1985.
- [FS97] F.Klock and S.Altmüller. High speed milling in tool and die making. Revolution or evolution? In *1st french and german conference on HIGH SPEED MACHINING*, page 263, , june 1997.
- [Gri94] J. G. Griffiths. Toolpath based on hilbert’s curve. *Computer Aided Design*, 26(11) :839–844, 1994.
- [GXL05] Hu Gong, L. X.Cao, and Jian Liu. Improved positioning of cylindrical cutter for flank milling ruled surface. *Computer-Aided Design*, 2005.
- [HA92] A. Hansen and F. Arbab. An algorithm for generating NC tool paths for arbitrarily shaped pockets with islands. *ACM Transactions on Graphics*, 11(2) :152–182, 1992.
- [Har99] E. Hartmann. On the curvature of curves and surfaces defined by normalforms. *Computer Aided Geometric Design*, 16 :355–376, 1999.
- [Hel91] M. Held. A geometry-based investigation of the tool path generation for zigzag pocket machining. *The visual computer*, 7 :296–308, 1991.
- [HO94] Y. Huang and J. H. Oliver. Non-Constant Parameter NC Tool Path Generation on Sculptured surfaces. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 9 :281–290, 1994.
- [KC00] B.H. Kim and B.K. Choi. Guide surface based tool path generation in 3-axis milling : an extension of the guide plane method. *Computer Aided Design*, 32 :191–199, 2000.

-
- [KC02] B.H. Kim and B.K. Choi. Machining efficiency comparison direction-parallel tool path with contour-parallel tool path. *Computer Aided Design*, 34 :89–95, 2002.
- [Kim98] Deok-Soo Kim. Polygon offsetting using a voronoï diagram and two stacks. *Computer Aided Design*, 30(14) :1069–1076, 1998.
- [LDA03] C. Lartigue, E. Duc, and A. Affouard. Tool path deformation in 5-axis flank milling using envelope surface. *Computer Aided Design*, 35 :375–382, 2003.
- [Lee98] Y.-S. Lee. Non-isoparametric tool path lanning by machining strip evaluation for 5-axis sculptured surface machining. *Computer Aided Design*, 30(7) :559–570, 1998.
- [LFS00] W. Lai, T. Faddis, and R. Sorem. Incremental algorithms for finding the offset distance and minimum passage width in a pocket machining toolpath using the voronoï technique. *Journal of Materials Processing Technology*, 100 :30–35, 2000.
- [Liu95] X. W. Liu. Five axis nc cylindrical milling of sculptured surfaces. *Computer-Aided Design*, 27 :887–894, 1995.
- [LK98] Y. S. Lee and B. Koc. Ellipse-offset approach and inclined zig-zag method for multi-axis roughing of ruled surface pockets. *Computer-Aided Design*, 30 :957–971, 1998.
- [Lo99] C.-C. Lo. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 31 :557–566, 1999.
- [Lo00] C.-C. Lo. Two-stage cutter-path scheduling for ball-end milling of concave and wall-bounded surfaces. *Computer-Aided Design*, 32 :597–603, 2000.
- [Mar87] K. Marciniak. Influence of surface shape on admissible tool positions in 5-axis face milling. *Computer-Aided Design*, 19(5) :233–236, 1987.
- [Mar91] K. Marciniak. Geometric modelling for numerically controlled machining. *Oxford University Press*, 1991.
- [MB02] S. Mann and S. Bedi. Generalization of the imprint method to general surfaces of revolution for nc machining. *Computer-Aided Design*, 34 :373–378, 2002.
- [MBM03] C. Menzel, S. Bedi, and S. Mann. Triple tangent flank milling of ruled surfaces. *University of Waterloo, Ontario, Canada*, 2003.
- [MFR⁺02] F. Monies, J.N. Felices, W. Rubio, J.M. Redonnet, and P. Lagarrigue. Five-axis nc milling of ruled surfaces : optimal geometry of a conical tool. *The International Journal of Production and Research*, 40(12) :2901–2922, 2002.

- [MG94] S. Marshall and J. G. Griffiths. A new cutter-path topology for milling machines. *Computer Aided Design*, 26(3) :204–214, 1994.
- [Mon01] Frédéric Monies. *Positionnement hors interférence pour l’usinage en bout et en roulant des surfaces gauches*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
- [PC00] S.C. Park and P.K. Choi. Tool path planning for direction-parallel area milling. *Computer Aided Design*, 32 :17–25, 2000.
- [Per78] H. Person. NC machining of arbitrarily shaped pockets. *Computer Aided Geometric Design*, 10(3) :169–174, 1978.
- [Poe84] T. Poeschl. Detecting surface irregularities using isophotes. *Computer Aided Geometric Design*, 1, 1984.
- [PPR99] M. Peternell, H. Pottmann, and B. Ravani. On the computational geometry of ruled surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 1 :17–32, 1999.
- [QD87] D. Qiulin and B.J. Davis. Surface Engineering Geometry for Computer Aided Design and Manufacture. *Ellis Horwood Ltd*, 1987.
- [RBIM01] D. Roth, S. Bedi, F. Ismail, and S. Mann. Surface swept by a toroidal cutter during 5-axis machining. *Computer Aided Design*, 33 :57–63, 2001.
- [Red99] Jean-Max Redonnet. *Etude globale du positionnement d’un outil pour l’usinage de surfaces gauches sur machines cinq axes et génération de trajectoires*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1999.
- [RRD98] J.M. Redonnet, W. Rubio, and G. Dessein. Side milling of ruled surfaces-Optimum positioning of the milling cutter and calculation of interference. *The international Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 14(7) :459–465, 1998.
- [RRDL98] J.M. Redonnet, W. Rubio, G. Dessein, and P. Lagarrigue. Side milling of ruled surfaces-Optimum tool radius determination and milling cutter positioning. *2nd Scientific International Conference of Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Compiègne, France, 27/29 mai*, 1998.
- [Rub93] W. Rubio. *Génération de trajectoires du centre de l’outil pour l’usinage de surfaces complexes sur machines à trois et cinq axes*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 1993.
- [Sar99] S.E. Sarma. The crossing function and its application to zigzag tool paths. *Computer Aided Design*, 31 :881–890, 1999.

-
- [SD97] R. Sarma and D. Dutta. The Geometry and Generation of NC Tool Paths. *Journal of Mechanical Design*, 119 :253–258, 1997.
- [SL90] Y. S. Suh and K. Lee. NC milling tool path generation for arbitrary pockets defined by sculptured surfaces. *Computer Aided Design*, 22(5) :273–284, 1990.
- [SSS79] G. Stute, A. Storr, and W. Sielaff. NC programming of ruled surfaces for five axis machining. *Annals of the CIRP*, 28 :267–271, 1979.
- [SY94] K. Suresh and D.C.H. Yang. Constant scallop-height machining of free-form surfaces. *Journal of Engineering for Industry*, 116, 1994.
- [TCC98] K. Tang, C.-Y. Chou, and L.-L. Chen. An algorithm for reducing tool retractions in zigzag pocket machining. *Computer Aided Design*, 30(2) :123–129, 1998.
- [Tou01] C. Tournier. *Contribution à la conception de formes complexes : La surface d’usinage en fraisage à 5 axes isocrête*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2001.
- [Tou03] C. Tournier. Les différents outils d’analyse de surface en CAO. *Manufacturing* 21, 2003.
- [Tt01] S. Tao and K.-L. ting. Unified rough cutting tool path generation for sculptured surface machining. *International Journal of Production Research*, 39(13) :2973–2989, 2001.
- [VQ89] G. W. Vickers and K. W. Quan. Ball-mills versus end-mills for curved surface machining. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 111 :22–26, 1989.
- [WBI96] A. Warkentin, S. Bedi, and F. Ismail. 5-axis milling of spherical surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 36(2) :229–243, 1996.
- [WCWC87] H. Wang, H. Chang, R. A. Wysk, and A. Chandawarkar. On the efficiency of nc tool path planning for face milling operations. *Engineering for Industry*, 109(4) :370–376, 1987.
- [WY02] X.C. Wang and Y. Yu. An approach to interference-free cutter position for five-axis free-form surface side finishing milling. *Journal of Materials Processing Technology*, 123 :191–196, 2002.
- [Zhu93] Cui Zhu. How to obtain a good surface finish in nc machining of free-formed surfaces. *Computer in Industry*, 23 :227–233, 1993.