

# **THESE**

présentée par

**Thierry PERA**

Ingénieur diplômé de l'E.N.S.I.E.G.

pour obtenir le grade de **DOCTEUR**

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

( Arrêté ministériel du 30 mars 1992 )

( Spécialité : **Génie électrique** )

=====

**LOIS D'AIMANTATION ANISOTROPES ET NON LINEAIRES :**  
**MODELISATION ET VALIDATION EXPERIMENTALE**

=====

Date de soutenance : le 15 mars 1994

## **Composition du jury :**

Monsieur	B. Cornut	Président
Monsieur	J.M. Biedinger	Rapporteur
Monsieur	F. Fiorillo	Rapporteur
Monsieur	G. Meunier	Examineur
Monsieur	T. Waeckerlé	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble



## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à :

Monsieur Bruno Cornut, Professeur à l'I.N.P.G., qui a présidé le jury de cette thèse, pour la grande confiance qu'il m'a accordée et pour ses remarques constructives lors de l'élaboration de ce manuscrit.

Messieurs Fausto Fiorillo, Primo Ricercatore à l'I.E.N. de Turin, et Jean-Marie Biedinger, Professeur à l'U.T.C., pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Monsieur Gérard Meunier, Directeur de Recherches au C.N.R.S., pour avoir participé au jury et à la définition de ce travail.

Monsieur Thierry Waeckerle, Chargé de Recherches au C.N.R.S., pour avoir suivi ce travail avec beaucoup d'intérêt et pour les nombreuses discussions tant passionnées que passionnantes qui m'ont permis d'accroître sans cesse ma connaissance des matériaux magnétiques.

Monsieur Pierre Brissonneau, dont les remarques précieuses ont contribué à la réalisation de ce travail. Qu'il soit assuré de ma profonde admiration et de mon plus grand respect.

Monsieur Yves Maréchal qui a été mon maître dans le domaine de la modélisation par la méthode des éléments finis et qui n'a pas ménagé son temps pour faire avancer les problèmes de simulation numérique.

Mademoiselle Florence Ossart qui a suivi et soutenu ce travail à ses débuts et dont j'ai pu apprécier les compétences scientifiques.

Mesdames Jacqueline Delaye, Josiane Even, Sylvie Pelletier et Sandrine Fauchey pour leur efficacité à régler nos problèmes administratifs. Je remercie particulièrement Josiane pour avoir assuré la frappe de ce manuscrit.

Sophie Kohler, spécialiste incontestable de la "vie" du laboratoire, pour sa gentillesse et son amitié.

Mouhoub Mekhiche, pour le travail que nous avons mené en commun sur le vaste sujet de la texture cubique ainsi que pour son optimisme et son soutien. Qu'il soit assuré ainsi que sa femme Rebecca de ma profonde amitié.

mon ami Rémi Merle qui par son esprit et sa bonne humeur a transformé notre sordide bureau en un lieu propice à la réflexion.

l'ensemble des chercheurs, ingénieurs et techniciens du laboratoire.

Marie-Cécile pour ce qu'elle est.

# SOMMAIRE

13	INTRODUCTION
17	CHAPITRE I DE LA NECESSITE DE MODELISER LES TOLES MAGNETIQUES
19	I.1 IMPORTANCE DES "LOIS DE COMPORTEMENT" DES MATERIAUX MAGNETIQUES EN MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS
22	I.2 ORIENTATION DU CHAMP DANS QUELQUES DISPOSITIFS ELECTROTECHNIQUES
22	I.2.1 Transformateurs
24	I.2.2 Moteurs et alternateurs
26	I.3 TYPES DE TOLES MAGNETIQUES COURAMMENT UTILISEES EN GENIE ELECTRIQUE
26	I.3.1 Généralités
27	I.3.2 Les tôles à grains orientés (G.O.)
30	I.3.3 Les tôles à grains non orientés (N.O.)
31	I.3.4 Texture "cubique"
32	I.4 CONCLUSION

35	<b>CHAPITRE II</b>
	<b>QUELQUES MODELES DU COMPORTEMENT</b>
	<b>MAGNETIQUE DES TOLES</b>
37	<b>II.1 APPROCHE DES MECANISMES D'AIMANTATION</b>
38	<b>II.1.1 Domaines magnétiques dans un échantillon</b>
	<b>monocristallin</b>
43	<b>II.1.2 Modifications liées au caractère polycristallin des</b>
	<b>tôles</b>
44	<b>II.1.3 Relation entre structure en domaines et courbe</b>
	<b>d'aimantation B-H</b>
45	<b>II.2 MODELES REPOSANT SUR LES MECANISMES</b>
	<b>D'AIMANTATION</b>
45	<b>II.2.1 Déplacement de parois dans un monocristal</b>
49	<b>II.2.2 Rotation des moments magnétiques</b>
52	<b>II.3 MODELE EMPIRIQUES BIDIMENSIONNELS</b>
53	<b>II.3.1 Modèle de séparation des axes</b>
54	<b>II.3.2 Modèle des deux axes</b>
56	<b>II.3.3 Modèle de l'ellipse</b>
58	<b>II.3.4 Modèle de l'ellipse avec rotation d'axes</b>
61	<b>II.3.5 Modèles purement expérimentaux</b>

61	II.4 QUELLES SONT LES CONTRAINTES QUE DOIT SATISFAIRE UN MODELE EN VUE DE LA MODELISATION ELEMENTS FINIS
63	CHAPITRE III APPROCHE THERMODYNAMIQUE : MODELE DE LA COENERGIE
65	III.1 DEFINITION DE LA COENERGIE ET DE L'ENERGIE MAGNETIQUE
66	III.2 JUSTIFICATION EXPERIMENTALE DE L'APPROCHE THERMODYNAMIQUE
69	III.3 INTERET DE L'APPROCHE THERMODYNAMIQUE POUR LA MODELISATION DE L'ANISOTROPIE DES TOLES MAGNETIQUES
71	III.4 TENTATIVE DE REPRESENTATION DES LIGNES ISOVALEURS D'ENERGIE A PARTIR DE COURBES EXPERIMENTALES B-H
73	III.5 MODELE FONDE SUR LA REPRESENTATION DES LIGNES ISOVALEURS DE COENERGIE
73	III.5.1 Principe du modèle
76	III.5.2 Restitution numérique. Aspects pratiques

81	III.5.3	Représentation générale des lignes isovaleurs de coénergie
84	III.5.4	Modèle 2D pour différents matériaux
96	III.5.5	Utilisation de l'énergie : est-ce envisageable ?
98	III.6	APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE
100	III.7	CONCLUSION
103	CHAPITRE IV	
		COMPORTEMENT BIDIMENSIONNEL DES TOLES A GRAINS ORIENTES MESUREES GRACE A UN CADRE EN CHAMPS TOURNANTS. COMPARAISON AVEC LE MODELE DE LA COENERGIE
105	IV.1	PROBLEMES DE LA MESURE DE LA RELATION VECTORIELLE B-H
106	IV.2	PRESENTATION DU CADRE EN CHAMPS TOURNANTS
109	IV.3	MESURE D'UNE TOLE A GRAINS ORIENTES
109	IV.3.1	Induction unidirectionnelle
113	IV.3.2	Induction tournante
116	IV.4	COMPARAISON AVEC LE MODELE DE LA COENERGIE POUR B=1,2T

120	IV.5	CONCLUSION
121	CHAPITRE V	
		IMPLANTATION DU MODELE DANS UN LOGICIEL ELEMENTS FINIS - EXEMPLES D'APPLICATION
123	V.1	EQUATION DE LA MAGNETOSTATIQUE SANS SOURCE DE COURANT
125	V.2	METHODE DES ELEMENTS FINIS
125		V.2.1 Obtention de la forme intégrale
127		V.2.2 Discrétisation de la forme intégrale
128		V.2.3 Formulation en potentiel scalaire total $\Phi$
130	V.3	TRAITEMENT DES NON LINEARITES: METHODE DE NEWTON-RAPHSON
132	V.4	CALCUL DU TENSEUR DES PERMEABILITES INCREMENTABLES
135	V.5	EXEMPLES D'APPLICATION
135		V.5.1 Alternateur
139		V.5.2 Culasse de transformateur
143		V.5.3 Limites numériques

145 CONCLUSION

149 BIBLIOGRAPHIE

# INTRODUCTION



Les équations de Maxwell connues depuis plus d'un siècle ont permis de formaliser les principes de base des machines électriques utilisées en électrotechnique. Mais le progrès scientifique et technique pousse vers une amélioration toujours plus grande de la connaissance des phénomènes électromagnétiques en présence. L'apparition dans les années 70 de logiciels de calcul de champ capables de résoudre intégralement ou partiellement les équations de Maxwell en fonction d'une géométrie et de conditions aux limites spécifiques allait dans ce sens.

Depuis lors les théories mathématiques et les méthodes numériques employées n'ont cessé d'évoluer, mais la solution approchée obtenue ne peut être valable qu'en prenant en compte de manière précise les matériaux constituant le dispositif modélisé. C'est le cas en particulier des tôles ferromagnétiques en Fe-Si qui sont essentielles pour la production, le transport et la transformation de l'énergie électrique. Ainsi le but de notre étude est de prendre en compte le comportement bidimensionnel non linéaire et anisotrope de ces tôles afin de pouvoir effectuer une modélisation par éléments finis aussi réaliste que possible en utilisant les équations de la magnétostatique. Un tel modèle doit être suffisamment simple au niveau numérique et doit s'appuyer sur un nombre limité de valeurs expérimentales, tout en restant proche du comportement physique réel et des mécanismes complexes mis en oeuvre au niveau des processus d'aimantation. Dans le cadre de cette thèse nous n'étudions qu'un comportement anhystérique, l'hystérésis et le calcul des pertes ne sont pas notre propos.

Cette thèse associe les domaines de compétence de deux équipes du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, l'équipe "Modélisation" qui met en oeuvre des outils et des méthodes pour la Conception Assistée par Ordinateur et l'équipe "Matériaux Magnétiques" qui fabrique et caractérise des tôles magnétiques. Deux thèses [SHE-87] [DED-90] préparées au laboratoire sur un sujet similaire ont abouti à des modèles qui n'ont pas eu de suite dans les logiciels flux2d et flux3d développés au Laboratoire. Notre travail

a fait partie d'un projet du Groupement de Recherche du C.N.R.S. "Tôles Magnétiques pour le Génie Electrique" (GR 0934).

Le premier chapitre justifie notre étude en soulignant l'importance des lois de comportement des matériaux magnétiques en modélisation et présente les principaux types de tôles magnétiques utilisées en Génie Electrique.

Les mécanismes et les modèles d'aimantation existants sont décrits dans le Chapitre II. Il nous permet de dégager quelques critères que doit satisfaire un modèle en vue de la modélisation éléments finis.

Le Chapitre III développe notre modèle original du comportement non linéaire et anisotrope pour trois types de tôles magnétiques: les tôles à grains orientés, les tôles à grains non orientés et les tôles dites à texture cubique. Ce modèle est fondé sur une approche thermodynamique grâce à l'utilisation de la densité de coénergie magnétique.

Une validation expérimentale de notre modèle grâce à l'utilisation d'un cadre en champs tournants est présentée au Chapitre IV pour un type de tôles à grains orientés.

Enfin, le Chapitre V expose l'implantation de notre modèle dans un logiciel éléments finis et son application à des dispositifs électrotechniques typiques (alternateur et transformateur).

CHAPITRE I  
DE LA NECESSITE DE MODELISER LES  
TOLES MAGNETIQUES



## I.1 IMPORTANCE DES "LOIS DE COMPORTEMENT" DES MATERIAUX MAGNETIQUES EN MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

La conception d'appareils électrotechniques performants et compétitifs requiert une connaissance très complète des phénomènes électromagnétiques mis en jeu. Les logiciels de Conception Assistée par Ordinateurs apparus dans les années 70 répondent à ce besoin. Ils sont capables - en particulier grâce à la méthode des éléments finis - de résoudre, totalement ou partiellement, les équations de Maxwell pour des appareils de géométries bidimensionnelles et même tridimensionnelles parfois très complexes. Mais la solution approchée des équations de Maxwell ne peut être valable qu'en prenant en compte des matériaux constituant le dispositif modélisé, en particulier les tôles magnétiques qui en électrotechnique sont présentes dans la totalité de la chaîne de production de l'énergie électrique : de l'alternateur transformant l'énergie mécanique en énergie électromagnétique en passant par le transport, nécessitant pour des raisons économiques des cascades de transformateurs, jusqu'aux moteurs électriques dont la consommation peut atteindre 60% de l'énergie [BRI-87]. L'utilisation de tôles minces résulte de la nécessité de diminuer les pertes d'énergie par courant de Foucault et de permettre une répartition sensiblement uniforme du flux magnétique dans la section droite des circuits magnétiques.

Connaître le comportement bidimensionnel des tôles magnétiques c'est connaître une relation entre deux grandeurs vectorielles volumiques l'induction  $\mathbf{B}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  ayant force de "loi", c'est-à-dire une relation volumique macroscopique intrinsèque valable en tout point dans le plan de la tôle. En ce qui nous concerne, nous ne nous intéresserons qu'à une relation bijective (ou biunivoque), la seule relation possible permettant de résoudre les équations de la magnétostatique, entre ces deux grandeurs vectorielles et nous écrirons la fonction  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  ou  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ . Le fait de négliger l'hystérésis résulte d'une nécessité de simplification mais aussi de l'hypothèse, sur laquelle reposent

toutes les lois de comportement des matériaux magnétiques dans les logiciels de C.A.O. commercialisés, que l'hystérésis ne modifie pas fondamentalement la répartition du flux dans un dispositif électrotechnique. C'est cette hypothèse que certains auteurs utilisent pour calculer les pertes dans les machines électriques [BER-94] [DUM-93] et cela même pour des moteurs électriques pour lesquels les tôles présentent de fortes caractéristiques hystérétiques. Le calcul de la répartition du flux se fait en magnétostatique grâce à la méthode des éléments finis, les pertes sont ensuite calculées grâce à des formules théoriques ou expérimentales à partir de la distribution de l'induction magnétique.

Généralement seule la relation bidimensionnelle  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  ou  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  dans le plan de la tôle est à considérer, le flux y étant canalisé. Il ne faut pourtant pas oublier qu'il existe des cas où le flux tente de pénétrer orthogonalement à la tôle. C'est le cas à l'extrémité des stators de machines tournantes avec le flux créé par les têtes de bobines. La géométrie ne peut plus être considérée comme homogène puisque nous avons une succession de tôles et d'air. Des techniques d'homogénéisation peuvent être employées pour résoudre ce problème complexe que nous n'aborderons que de façon succincte par la suite (Chapitre III).

Dans les matériaux magnétiques, les relations qui lient les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  au niveau macroscopique sont les suivantes :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (\text{I-1})$$

ou

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}. \quad (\text{I-2})$$

$\mu_0$  est la perméabilité du vide ( $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m).

Ces relations définissent le vecteur aimantation  $\mathbf{M}$  et le vecteur polarisation magnétique  $\mathbf{J}$  qui sont des fonctions du vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$ . En électrotechnique, l'usage est de ne considérer que la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ .  $\mathbf{B}$  est l'induction représentant la densité de flux magnétique, qui peut être considéré comme l'effet du champ magnétique  $\mathbf{H}$ , considéré lui comme l'excitation à fournir pour provoquer un état magnétique.  $\mathbf{B}$  peut être assimilé à  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{B} \equiv \mathbf{J}$ ) car les valeurs de  $\mu_0 \mathbf{H}$  sont pour les applications électrotechniques souvent négligeables.

Mathématiquement les propriétés des matériaux doux tels que les tôles peuvent être représentées par un tenseur liant le champ magnétique à l'induction, c'est le tenseur des perméabilités  $[\mu(\mathbf{H})]$  :

$$\mathbf{B} = [\mu(\mathbf{H})] \cdot \mathbf{H} . \quad (\text{I-3})$$

Il présente, du fait des propriétés des matériaux ferromagnétiques, deux caractéristiques mathématiques. D'une part le tenseur n'est pas linéaire, sa valeur varie avec le champ magnétique. D'autre part, les composantes du tenseur  $[\mu(\mathbf{H})]$  varient par rapport à une rotation du repère de référence, la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  est anisotrope. L'origine de ces comportements sera étudiée par la suite.

Pour les logiciels flux2d et flux3d commercialisés par la société Cedrat et développés par le L.E.G., les possibilités de définition de lois de comportement pour les matériaux doux sont de deux types : linéaire et anisotrope ou non linéaire et isotrope. En ce qui concerne la première loi le tenseur  $[\mu(\mathbf{H})]$  est linéaire et s'écrit dans un repère  $(x,y)$  :

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} , \quad (\text{I-4})$$

où  $\mu_x$  et  $\mu_y$  sont des constantes.

Outre que ce formalisme purement mathématique est très simple et très commode au niveau de la résolution, il reflète tout de même le fait, vérifié expérimentalement, qu'au niveau macroscopique l'induction et le champ magnétique sont parallèles dans deux directions orthogonales : la direction long (ou de laminage) et la direction travers. Il reflète aussi que la perméabilité puisse être différente suivant ces deux axes. Malheureusement comme nous le verrons, la réalité physique du comportement bidimensionnel des tôles magnétiques est plus complexe et ne peut être schématisée de la sorte.

La deuxième possibilité est de considérer le matériau comme isotrope mais non linéaire. L'anisotropie peu prononcée de certains types de tôles, la façon de les empiler ou l'utilisation de directions privilégiées où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont parallèles justifient cette approche.

Nous verrons dans la partie suivante que ces hypothèses sont trop contraignantes pour permettre une modélisation aussi réaliste que possible des appareils électrotechniques.

## **I.2            ORIENTATIONS DU CHAMP DANS QUELQUES DISPOSITIFS ELECTROTECHNIQUES**

### **I.2.1        Transformateurs**

Dans un transformateur l'axe des culasses correspond à la direction de laminage où induction et champ magnétique sont parallèles. Par contre des études de la répartition du flux dans les transformateurs triphasés ont montré qu'il existe des lieux où l'induction n'est plus dirigée suivant un axe privilégié mais peut prendre de multiples directions dans le plan de la tôle. Une démonstration simple de ce phénomène peut être faite [ZOU-91]. Les noyaux magnétiques des transformateurs sont constitués par des empilements de

portions de tôles judicieusement découpées suivant la direction de laminage qui est une direction de facile aimantation (figure I.1).

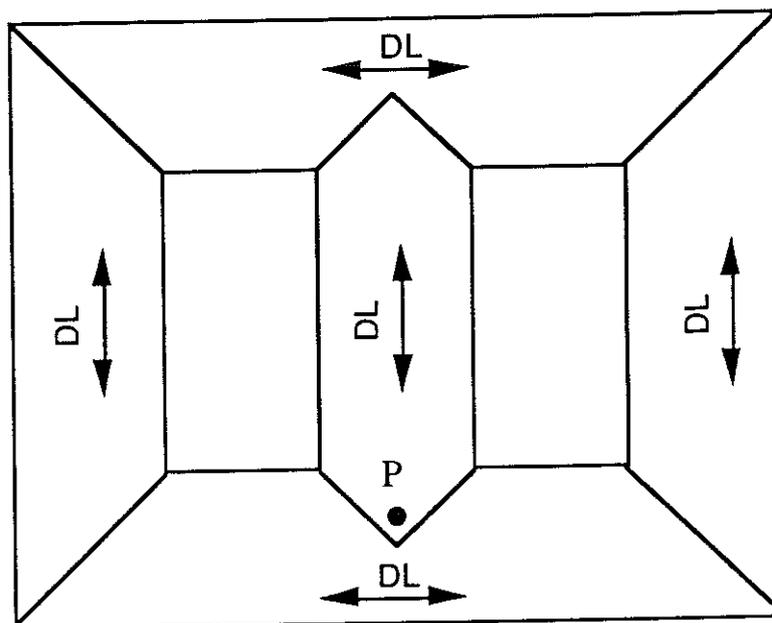


Figure I.1: Schématisation d'un circuit magnétique de transformateur triphasé.

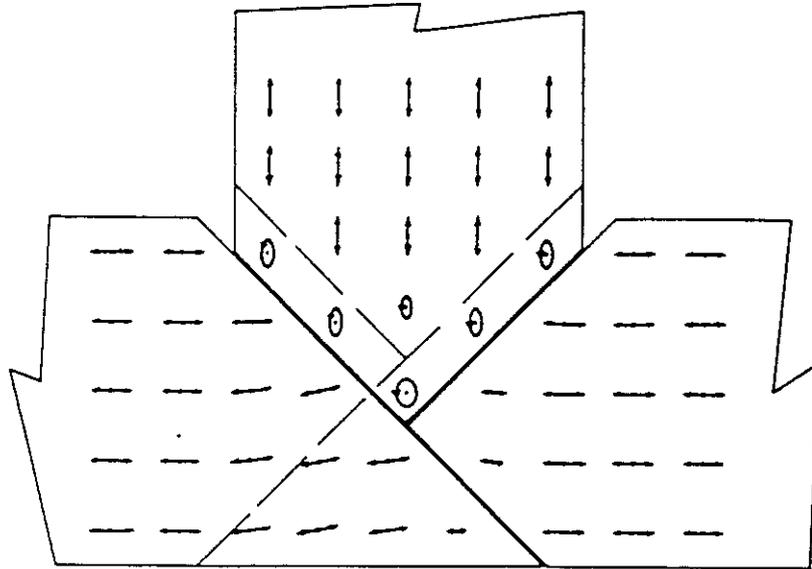
*DL = direction de laminage*

Les parties communes aux colonnes et aux culasses sont les joints. Au niveau des joints en T, qui relie la colonne centrale et le milieu des culasses, la circulation du flux est très difficile.

En un point comme le point P (figure I.1) l'induction ne s'annule jamais, elle "tourne", son extrémité décrit une courbe se rapprochant d'un cercle ou d'une ellipse. Ainsi au joint en T du transformateur triphasé l'induction peut prendre une direction quelconque par rapport à un axe privilégié d'aimantation. L'expérience le confirme pour des joints de transformateurs triphasés en T de  $45^\circ$  (figure I.2) et de  $45^\circ-90^\circ$  [MOS-73].

Les tôles utilisées dans les transformateurs étant fortement anisotropes, ce phénomène, même s'il est très localisé, ne doit pas être négligé. Il provoque une modification de la

réductance du circuit magnétique. Ainsi, la description de la relation  $\mathbf{B-H}$  dans les tôles magnétiques utilisées pour les machines statiques permettrait de quantifier l'influence de champs tournants au niveau des performances de l'appareil.



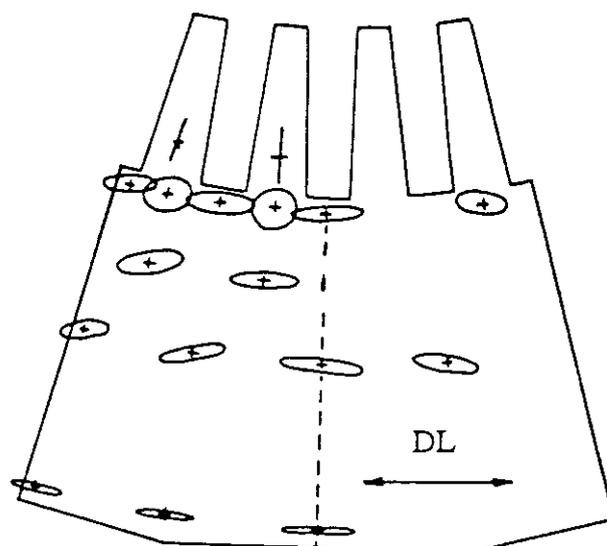
*Figure I.2 : Visualisation de l'extrémité de l'induction déterminée expérimentalement dans un joint en T à 45° d'un transformateur triphasé à 50 Hz [MOS-73]*

Contrairement au transformateur, dans les machines tournantes le fait que le flux n'a pas une direction privilégiée dans le plan de la tôle constitue plus la règle que l'exception.

### I.2.2 Moteurs et alternateurs

Au niveau du stator des machines tournantes, le flux n'a pas de directions privilégiées [ZOU-91]. A de très rares exceptions près toutes les régions du stator sont le siège d'induction tournante. Cela est bien montré expérimentalement par A.J. Moses [MOS-80], la figure I.3 l'illustre pour un gros alternateur.

Sur une mince couronne au dos du stator l'induction reste constamment tangentielle au stator. Ailleurs, l'induction est elliptique ou circulaire et le passage d'un champ presque radial dans les dents à un champ quasiment tangentiel en périphérie du stator se fait de façon parfaitement continue.



*Figure I.3 : Visualisation de l'extrémité de l'induction déterminée expérimentalement dans une partie du stator d'un gros alternateur [MOS-80]*

Pour les gros alternateurs, les tôles sont découpées et empilées suivant des directions privilégiées d'aimantation. La direction travers, orthogonale à la direction de laminage, tend à coïncider dans la plupart des cas avec l'axe des encoches. Cela est dû principalement à des problèmes de tenue mécanique plutôt qu'à des contraintes liées au magnétisme.

Ainsi, pour ces alternateurs, l'aimantation ayant des directions quelconques, une bonne connaissance des propriétés anisotropes des matériaux magnétiques est indispensable à leur modélisation. Pour les machines de plus petites tailles comme les moteurs, les tôles du stator sont d'un seul tenant et elles sont empilées d'une manière plus ou moins aléatoire les unes sur les autres. Les directions de laminage des tôles superposées ne peuvent donc pas

être repérées par rapport à une direction donnée. Etudier l'anisotropie en vue de la modélisation des milieux continus pour ce type d'application n'est pas d'un grand intérêt.

### **I.3 TYPES DE TOLES MAGNETIQUES COURAMMENT UTILISEES EN GENIE ELECTRIQUE [BAV-92], [BRI-87], [FAU-71], [ROB-78], [BRI-80], [BRI-84], [LIT-82]**

#### **I.3.1 Généralités**

Les tôles magnétiques sont composées principalement de fer qui est un des éléments les plus intéressants pour ses propriétés magnétiques. Sa polarisation magnétique à saturation est l'une des plus grandes connues (2,16 T à température ambiante) et sa température de Curie est très élevée (1043 K). Les alliages en fer-silicium sont particulièrement adaptés à un fonctionnement aux fréquences industrielles. Outre les avantages au niveau métallurgique et mécanique, l'adjonction de quelque pour cent en masse de silicium dans le fer améliore d'autres propriétés :

- la résistivité électrique augmente (environ 4 à 5 fois pour une teneur de 3% à température ambiante), ce qui entraîne une diminution des pertes par courants de Foucault,
- la perméabilité magnétique augmente dans les champs faibles ou moyens couramment utilisés,
- le champ coercitif diminue, ce qui entraîne une réduction des pertes par hystérésis.

Mais le silicium rend l'acier fragile, cassant et difficile à travailler. Une teneur en silicium supérieure à 5-6% rend ces alliages pratiquement inutilisables en usages industriels. Un paramètre magnétique influencé défavorablement par le silicium est la polarisation

magnétique à saturation qui diminue légèrement ( $J_s = 2,02$  T pour 3% de silicium à température ambiante). Mais cet inconvénient est largement compensé par les avantages cités précédemment.

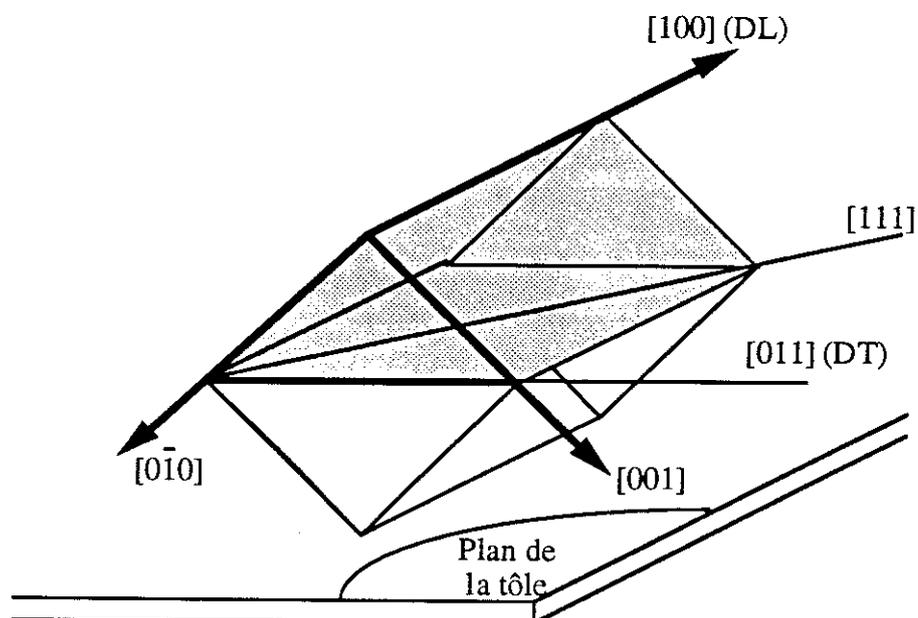
Le fer aidé en cela par le silicium (élément très alphagène) cristallise à température ambiante suivant un réseau cubique centré. Un monocristal de fer présente des propriétés anisotropes. Il est plus facile d'aimanter un cristal de fer de symétrie cubique suivant une arête du cube que suivant une autre direction, en particulier suivant sa diagonale. Les tôles magnétiques que nous étudions sont des polycristaux, où chaque cristal a son orientation propre par rapport au repère de la tôle. L'aptitude plus ou moins grande du matériau à s'aimanter sous champ suivant une direction donnée est ainsi liée à la distribution des directions de facile aimantation par rapport à un axe donné. Cela revient à définir la texture cristallographique, aboutissement de procédés métallurgiques, souvent complexes, de fabrication de la tôle. Pour les tôles à grains orientés (G.O.) les directions de facile aimantation des cristaux tendent vers la direction de laminage. Ainsi ces tôles sont utilisées principalement dans la réalisation de machines statiques où le flux a, comme nous l'avons souligné, une direction préférentielle. Par contre, pour la construction de machines tournantes, les tôles utilisées sont fabriquées de telle sorte que les axes cristallographiques de chaque grain ne soient pas alignés. Ce sont les tôles dites à grains non orientés (N.O.).

### **I.3.2 Les tôles à grains orientés (G.O.)**

La teneur en silicium de toutes les tôles à grains orientés du marché varie entre 2,9% et 3,2% en poids de silicium.

Dans ces tôles les cristaux ont pratiquement tous la même orientation, les axes cristallins sont alignés. Cette texture, appelée texture de Goss du nom de son inventeur, se note

$(0\bar{1}1)$   $[100]$  en indice de Miller. L'axe  $[100]$  correspond à la direction de laminage et l'axe  $[0\bar{1}1]$  est un axe orthogonal au plan de la tôle (figure I.4).



*Figure I.4 : Schéma de la texture GOSS*

*(DL : direction de laminage et DT : direction travers)*

Le procédé métallurgique très complexe d'obtention de cette texture, découvert au début des années 30 par Goss, consiste en une succession de laminages (à chaud et à froid) et de divers traitements thermiques. Commercialisé dans les années 40 aux Etats-Unis et dans les années 50 en Europe, ce type de tôle n'a jamais cessé depuis de progresser sur le plan des performances magnétiques. La dispersion moyenne des grains autour de l'orientation idéale n'est que de 7 à 8° pour les qualités classiques les plus courantes. Pour les tôles les plus performantes, dites tôles Hi-B, des procédés de fabrication permettent un resserrement de la texture. La dispersion moyenne des grains est alors de 3 à 4°. Un isolement minéral à la surface de ces tôles Hi-B exerce une contrainte superficielle dont les effets viennent compléter les avantages offerts par le degré d'orientation particulièrement

élevé. Ainsi dans la direction de laminage ces tôles ont des perméabilités élevées même pour de hautes valeurs de l'induction.

Par contre, ces tôles sont très fortement anisotropes, le rapport des perméabilités entre la direction long et la direction travers est de l'ordre de 10 ou même 100. Ainsi leur utilisation est surtout limitée aux transformateurs. Certains stators d'alternateur sont fabriqués avec ces tôles sous forme d'un assemblage de secteurs de couronne à faible ouverture. La direction travers correspond alors à l'axe des encoches car elle possède une meilleure résistance à la traction.

Le tableau I.5 donne à titre indicatif quelques ordres de grandeurs caractéristiques de ces tôles.

Qualité des tôles	Conventionnelles		Texture améliorée
	M6	M4	M2H
Dispersion angulaire moyenne de la texture (°)	7 à 8		3 à 4
Taille des grains (mm)	2 à 5		5 à 30
Epaisseur (mm)	0,35	0,27	0,30
Champ coercitif (A.m <sup>-1</sup> )	10	8-10	6-8
B(T) pour H = 800 A.m <sup>-1</sup> (DL)	1,78	1,84	1,92
Pertes à 50 Hz pour B=1,5 T (DL) en W.kg <sup>-1</sup>	1,05	0,86	0,82
Pertes à 50 Hz pour B=1,5 T (DT) en W.kg <sup>-1</sup>	3,3	3,5	3,6

*Tableau I.5 : Quelques caractéristiques des tôles à grains orientés  
(DL : direction de laminage et DT : direction travers) [BRI-87],[BAV-92]*

### I.3.3 Les tôles à grains non orientés (N.O.)

D'après leur appellation de tôles à grains non orientés, ces tôles utilisées pour les machines tournantes devraient avoir des orientations de cristaux réparties au hasard. Du fait des opérations métallurgiques successives de laminage et de recuit, les tôles acquièrent presque toujours une certaine texture plus ou moins marquée. Les pertes mesurées dans la direction de laminage et dans la direction travers présentent des écarts relatifs pouvant atteindre 20%. Ainsi ces tôles possèdent une légère texture donc une certaine anisotropie au niveau de leurs propriétés magnétiques. La direction de laminage est toujours une direction de facile aimantation. La direction pour laquelle l'aimantation est la plus difficile au niveau macroscopique est liée à la légère texture de ces tôles, généralement elle coïncide avec la direction travers. C'est ce que nous considérons par la suite.

Deux types de tôles à grains non orientés peuvent être distingués, les tôles fully-process et les tôles semi-process. Les tôles fully-process possèdent toutes leurs caractéristiques magnétiques à l'état de livraison par le sidérurgiste. Ce n'est pas le cas des tôles semi-process qui doivent après découpage subir un traitement thermique chez l'utilisateur. Les tôles semi-process possèdent entre 0,01 et 2% de silicium, les tôles fully-process entre 0,03 et 3,2% de silicium.

Il existe des qualités très variables pour ces matériaux correspondant à une large gamme d'applications de l'alternateur au petit moteur d'appareils électroménagers. Le champ coercitif mesuré peut varier de  $25 \text{ A.m}^{-1}$  pour les meilleurs qualités à  $60-80 \text{ A.m}^{-1}$  pour les moins bonnes. Le tableau I.6 donne à titre indicatif quelques caractéristiques magnétiques de différentes qualités de tôles fully-process. Les pertes et l'induction sont mesurées sur cadre Epstein, la moitié des bandes prélevées parallèlement à la direction de laminage et l'autre moitié perpendiculairement.

L'anisotropie des pertes caractérise la variation des pertes mesurées respectivement suivant la direction de laminage et suivant la direction travers. Elle est calculée (en %) suivant la formule suivante :

$$100 \cdot \frac{P_{t1}-P_{t2}}{P_{t1}+P_{t2}} \quad (I-5)$$

avec  $P_{t1}$  pertes mesurées suivant la direction travers

$P_{t2}$  pertes mesurées parallèlement à la direction de laminage.

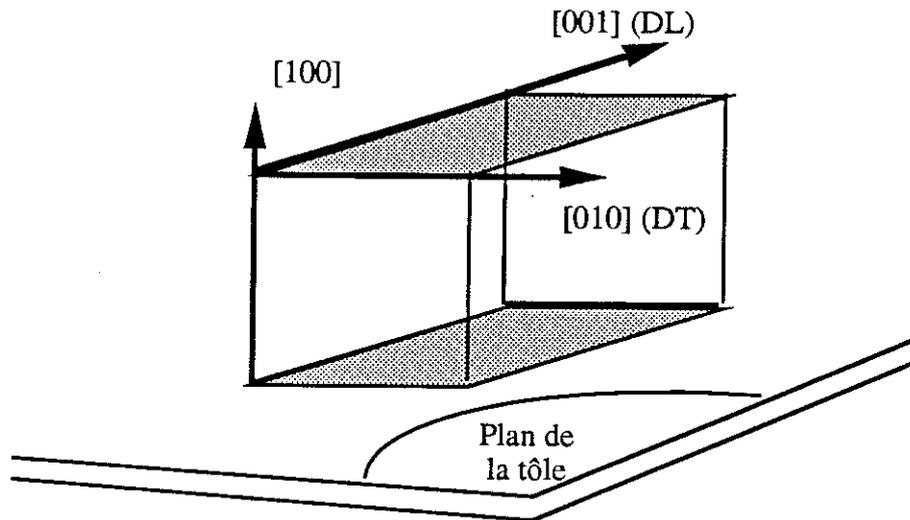
Qualités	FeV 250-35 HA	FeV 400-50 HA	FeV 1000-65 HA
Epaisseur (mm)	0,35	0,50	0,65
Pertes à 50 Hz pour B = 1,5 T (W.kg <sup>-1</sup> )	2,50	4,00	10,00
Pertes à 50 Hz pour B = 1,0 T (W.kg <sup>-1</sup> )	1,00	1,70	4,40
B(T) pour H = 2500 A.m <sup>-1</sup>	1,49	1,51	1,58
B(T) pour H = 5000 A.m <sup>-1</sup>	1,60	1,61	1,68
B(T) pour H = 10000 A.m <sup>-1</sup>	1,71	1,72	1,78
Anisotropie maximale des pertes (%)	± 18	± 14	± 12

*Tableau I.6 : Quelques caractéristiques des tôles à grains non orientés [BAV-92]*

### I.3.4 Texture "cubique"

Le développement de matériaux Fe-Si présentant une texture cubique (100) [001] c'est-à-dire possédant des grains ayant deux directions de facile aimantation, respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction de laminage (figure I.7) s'annonce principalement comme une alternative aux tôles à grains non orientés pour la construction de machines tournantes plus performantes. Des recherches sont effectuées sur ce type de matériaux

depuis les années 50 mais les procédés d'obtention ne sont pas encore suffisamment maîtrisés pour être rentables industriellement. Le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble poursuit depuis quelques années des recherches dans ce sens.



*Figure I.7 : Schéma de la texture cubique*

*(DL : direction de laminage et DT : direction travers)*

Il est intéressant tout de même de noter que certaines tôles actuellement commercialisées sous une dénomination de tôles à grains non orientés sont loin d'avoir leurs grains orientés au hasard et sont caractérisées par la présence d'une texture planaire (100) [0 v w]. Une face du cube est parallèle au plan de laminage mais les directions des arêtes dans ce plan sont réparties au hasard.

#### **I.4 CONCLUSION**

Pour tirer le meilleur parti des logiciels de conception utilisés en Génie Electrique une bonne modélisation des matériaux magnétiques semble nécessaire. En particulier pour les tôles magnétiques la relation entre les vecteurs induction **B** et le champ magnétique **H** doit être modélisée correctement. Cela est valable pour les différentes catégories de tôles (grains

orientés, grains non orientés, texture cubique) qui ont chacune des applications spécifiques (machines statiques ou tournantes).

Dans le chapitre suivant nous verrons que les lois de comportement magnétique macroscopiques, à déterminer, valables dans un matériau considéré comme homogène, décrivent des phénomènes microscopiques complexes. Différents modèles existants seront ensuite examinés afin de dégager les critères auxquels devra satisfaire un modèle performant.



CHAPITRE II

QUELQUES MODELES DU  
COMPORTEMENT MAGNETIQUE DES  
TOLES



## II.1 APPROCHE DES MECANISMES D'AIMANTATION

Le but de cette partie est d'expliquer, le plus simplement et le plus schématiquement possible, que le comportement macroscopique des matériaux magnétiques, en particulier la relation **B-H** est le reflet de phénomènes physiques complexes. L'aspect le plus original de ces mécanismes est sans aucun doute la structure en domaines magnétiques. Aux températures nettement inférieures au point de Curie, les moments magnétiques électroniques d'un corps ferromagnétique sont pratiquement tous alignés à l'échelle atomique, bien qu'au niveau macroscopique le moment magnétique peut être bien inférieur au moment de saturation. Un champ magnétique important doit être appliqué si l'on veut saturer un échantillon. Ceci est valable aussi bien pour des monocristaux que pour des échantillons polycristallins. Ce phénomène est expliqué par le fait que l'orientation parallèle des moments magnétiques est un phénomène local, à l'échelle atomique. Un échantillon de taille macroscopique est divisé en un grand nombre de petites régions homogènes appelées domaines, à l'intérieur desquelles l'aimantation locale est saturée. L'orientation locale des moments change d'une région à l'autre, l'aimantation macroscopique pouvant très bien être nulle. Ces domaines magnétiques ou domaines de Weiss se situent ainsi à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique. Pour des raisons de commodité nous parlerons d'échelle microscopique par opposition à l'échelle macroscopique qui intéresse l'électrotechnicien.

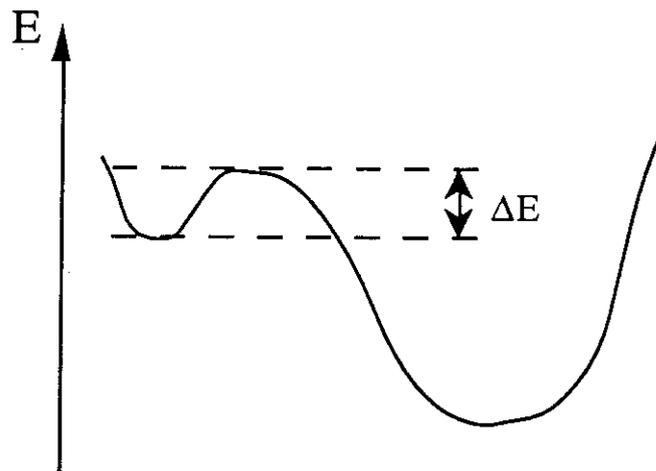
Nous évoquons tout d'abord la structure en domaines dans un échantillon monocristallin puis les contraintes liées aux tôles magnétiques possédant une structure polycristalline. Le parallèle avec la courbe **B(H)** macroscopique est proposé.

Ce genre d'approche microscopique visant à expliquer un comportement macroscopique est classique, de nombreux auteurs l'ont développé [BRI-74], [BRI-87], [BRU-87], [KIT-83], [ROB-78].

### II.1.1 Domaines magnétiques dans un échantillon monocristallin

Un échantillon ferromagnétique est formé d'un ensemble de domaines élémentaires dont les moments magnétiques sont orientés parallèlement entre eux. Le système ainsi constitué possède une énergie interne ayant différentes contributions.

Parmi l'ensemble des structures en domaines possibles, seules peuvent se réaliser celles qui correspondent à un minimum d'énergie interne de l'échantillon. Nous parlons d'un minimum énergétique car il arrive que l'énergie nécessaire  $\Delta E$  pour atteindre le minimum fasse défaut (figure II.1).



*Figure II.1 : Analogie mécanique : la structure des domaines magnétiques peut correspondre à un équilibre métastable [ROB-78]*

Parmi les énergies contribuant à l'énergie interne on peut citer :

- l'énergie d'échange,
- l'énergie d'anisotropie magnétocristalline,
- l'énergie magnétostatique,

- l'énergie magnétoélastique,
- l'énergie de couplage moment-champ

L'énergie d'échange est responsable du ferromagnétisme du fer. Deux moments magnétiques voisins tendent à s'aligner parallèlement. L'énergie d'échange a surtout pour effet d'interdire à l'échelle atomique toute variation brutale d'orientation des moments.

Pour la plupart des cristaux magnétiques il existe des directions de facile et des directions de difficile aimantation. Cela se traduit par un terme de l'énergie interne appelé *énergie d'anisotropie* magnétocristalline. L'énergie d'anisotropie s'exprime généralement en fonction des cosinus directeurs  $\alpha_i$  du vecteur polarisation magnétique à saturation  $\mathbf{J}_s$  par rapport aux axes du cristal (figure II.2).

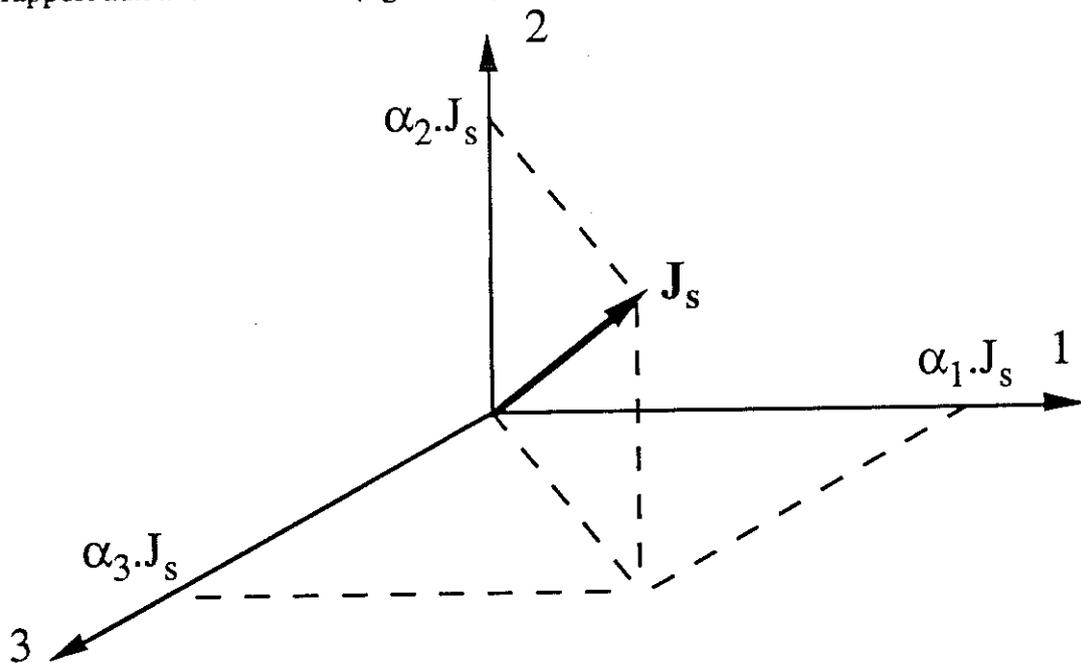
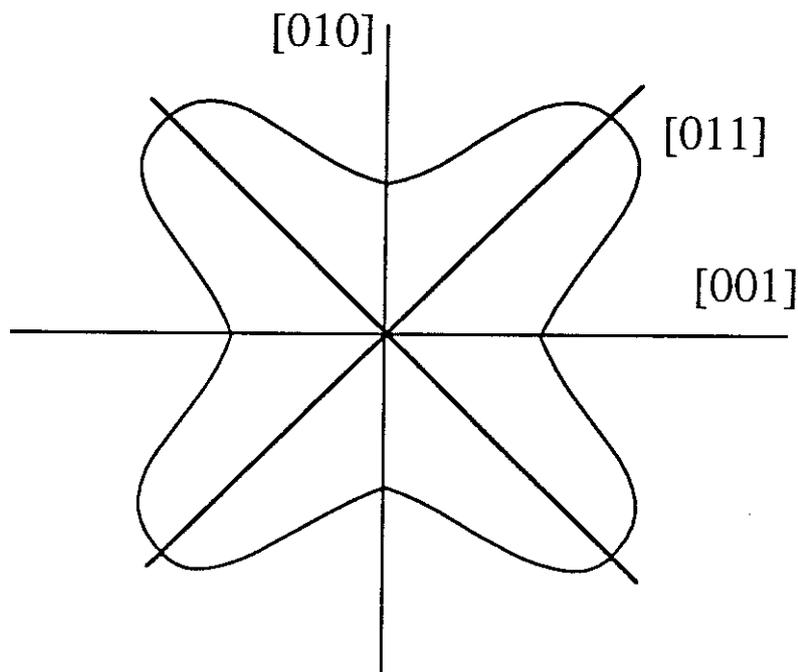


Figure II.2 : Représentation des cosinus directeurs

Pour un cristal de symétrie cubique comme le fer, elle a pour expression, en première approximation :

$$E_{an} = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2). \quad (II-1)$$

Le coefficient  $K_1$  est la première constante d'anisotropie du matériau. Pour le fer ce coefficient est positif, il est égal à  $4,5 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3$ . Dans le plan (100) d'un cristal cubique (figure II.3)  $E_{an}$  est minimum selon les directions [001] et [010], ce sont les directions de facile aimantation au niveau magnétocristallin, les directions [011] correspondent à des valeurs maximales de  $E_{an}$ , ce sont des directions de difficile aimantation au niveau magnétocristallin.



*Figure II.3 : Schéma de diagramme polaire de  $E_{an}$  dans le plan (100)  
d'un cristal cubique [ROB-78]*

Dans le plan  $(0\bar{1}1)$  d'un cristal cubique (que l'on peut rapprocher du plan de la tôle pour un cristal d'une texture Goss), les directions de facile aimantation magnétocristalline sont les directions [100], les directions [111] sont des directions de difficile aimantation. Quant aux directions [011] perpendiculaires aux directions [100], elles sont considérées comme des directions intermédiaires d'aimantation moyenne.

Pour calculer l'énergie magnétostatique  $E_m$  on considère que chaque moment élémentaire étant placé dans un champ local dû à tous ses voisins, il en résulte :

$$E_m = -\frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}' \, dv \quad (\text{II-2})$$

où  $\mathbf{J}$  désigne la polarisation magnétique  
et  $\mathbf{H}'$  le champ d'excitation en chaque point.

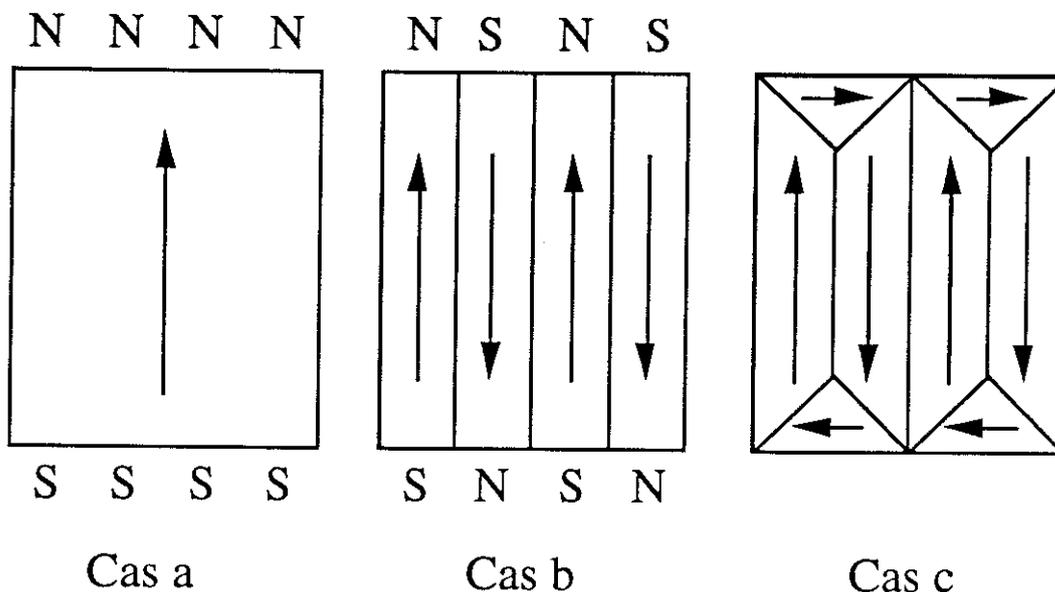
L'intégrale est définie sur tout le volume  $v$  de matière aimantée. Une autre expression équivalente de l'énergie magnétostatique définie aussi par une intégrale valable cette fois sur un volume  $V$  défini par tout l'espace est :

$$E_m = \frac{1}{2} \int \mu_0 \cdot \mathbf{H}'^2 \, dV \quad (\text{II-3})$$

L'énergie magnétostatique apparaît comme une somme de termes tous positifs. Ainsi, afin de la diminuer, les sources de champs  $\mathbf{H}'$  doivent être diminuées. Ces sources sont les "masses magnétiques".

Les trois énergies décrites précédemment sont les énergies qui dominent, en l'absence de champs extérieurs et qui expliquent parfaitement la configuration en domaines. Leurs influences peuvent être illustrées en considérant un échantillon parallélépipédique rectangle de fer monocristallin, taillé parallèlement aux axes quaternaires du cristal. L'énergie d'échange et l'énergie magnétostatique tendent à faire prévaloir des structures totalement différentes. L'énergie d'échange impose en permanence le parallélisme des moments atomiques ce qui signifie qu'à l'échelle atomique le cristal est aimanté à saturation dans les seules directions de facile aimantation afin de minimiser l'énergie d'anisotropie (figure

II.4, cas a). Mais cette situation correspond à une énergie magnétostatique trop importante. Le compromis consiste à subdiviser le monocristal en régions plus petites, aimantées chacune à saturation mais dans des directions opposées (figure II.4, cas b).



*Figure II.4 : Origine des domaines*

Dans le cas c l'énergie magnétostatique est nulle. En effet, les composantes de l'aimantation normale aux parois séparant les domaines sont continues le long des parois, il n'y a pas de champ magnétique.

D'autres énergies contribuent à l'énergie interne dans le cas d'un monocristal comme l'énergie magnétoélastique qui résulte de l'interaction entre la direction de l'aimantation et les déformations du réseau cristallin. Sans rentrer dans les détails, cette énergie n'est pas négligeable car elle peut modifier considérablement la répartition en domaines d'un échantillon.

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué au matériau, à l'énergie interne s'ajoute une énergie de couplage entre le champ et la polarisation magnétique. La configuration en

domaines s'en trouve grandement modifiée afin de minimiser l'énergie interne. L'aimantation de l'échantillon change. C'est ainsi que la courbe **B-H** correspond à une succession d'états énergétiques reflétant des mécanismes très complexes.

### **II.1.2 Modifications liées au caractère polycristallin des tôles**

Dans le cas de tôles magnétiques la relation **B-H** correspond aussi à une structure de domaines reflétant un minimum de l'énergie interne du système. Mais ce minimum ne peut bien sûr être obtenu en réduisant individuellement l'énergie interne de chaque grain, considéré comme isolé des autres. L'énergie magnétostatique, par exemple, dépend pour chaque grain de l'environnement dans lequel il se trouve. La division en domaines au sein de chaque grain aura donc seulement tendance à se réaliser selon les schémas décrits pour un monocristal. Cette tendance sera plus forte pour un matériau texturé que pour une tôle à grains non orientés qui présente des configurations en domaines très compliquées et souvent impossibles à interpréter.

La structure des domaines est également influencée par la présence de défauts ponctuels, tels que les cavités, les inclusions de matière non magnétique ou les précipités. Ces défauts freinent le déplacement des parois de Bloch et donnent naissance à des structures secondaires.

Lorsqu'une direction de facile aimantation n'est pas exactement parallèle à la surface de la tôle, il apparaît des pôles magnétiques à la surface qui sont compensés par des domaines de fermeture d'allure triangulaire.

Les différences entre un monocristal parfait et les tôles magnétiques sont nombreuses et la liste n'est pas exhaustive, loin s'en faut. Toutes ces différences modifient grandement la structure en domaine. Ainsi la détermination des propriétés magnétiques macroscopiques à

partir d'un calcul global de l'énergie interne du système est un projet mythique. Par contre, l'intérêt de cette approche est didactique, elle est de comprendre que les lois de comportement macroscopique des tôles magnétiques sont le reflet d'interactions microscopiques nombreuses et compliquées.

### II.1.3 Relation entre structure en domaines et courbe d'aimantation B-H

La structure en domaines et les mécanismes d'aimantation permettent d'interpréter qualitativement la forme d'une courbe d'aimantation d'une tôle d'une manière très simple. A partir d'un état désaimanté, un champ magnétique coïncidant avec une direction de facile aimantation est appliqué. La courbe  $B(H)$  ayant l'allure de la figure II.5 est ainsi obtenue.

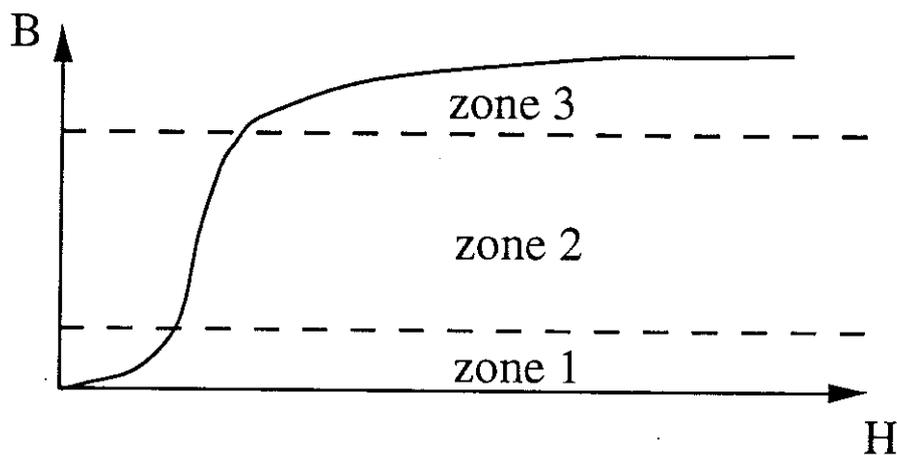


Figure II.5 : Schématisation d'une courbe  $B(H)$

Dans la zone 1, en champ très faible, l'aimantation est réversible. La structure en domaines est très peu perturbée par rapport à la structure initiale.

Dans la plus grande partie de la courbe d'aimantation (zone 2) les processus d'aimantation dominants sont dûs aux déplacements de parois, les processus sont très compliqués et fortement irréversibles. La structure en domaines est sans cesse remise en question, certaines parois disparaissent alors que d'autres font des sauts énormes et d'autres enfin

restent presque immobiles. Du point de vue énergétique, à partir d'un état métastable, l'évolution du système est localement déterminée tant que le puits de potentiel correspondant subsiste. Lors de la disparition de ce puits le système se modifie pour trouver un nouvel état métastable. Ainsi le comportement est irréversible et correspond à ce que l'on appelle des sauts de Barkhausen.

La zone 3 correspond à l'approche à la saturation. L'aimantation est réversible car les domaines ont quasiment disparu, il n'y a pratiquement que des rotations de moments magnétiques.

## **II.2 MODELES REPOSANT SUR LES MECANISMES D'AIMANTATION**

Dans cette partie nous décrivons schématiquement des modèles de relation **B-H** s'appuyant sur les mécanismes d'aimantation décrits précédemment. Le but de ces modèles est de reproduire pour comprendre, d'une manière plus ou moins complète, le processus d'aimantation. Ils n'en décrivent qu'une partie : déplacement des parois ou rotation des moments magnétiques. Ces modèles s'appliquent à des monocristaux de fer, idéaux et parfaits, placés dans un champ magnétique uniforme. Par idéal et parfait nous entendons des cristaux dont le réseau est identique au réseau théorique, sans lacunes, inclusions ni déformations. Malgré ces restrictions, ils ont un très grand intérêt formel pour comprendre certains mécanismes des tôles texturées. Nous analysons ainsi les limites de la généralisation de ces modèles dans le cas des tôles magnétiques polycristallines.

### **II.2.1 Déplacement de parois dans un monocristal**

Ce type de modèle a été exposé par Heisenberg [HEI-31] et repris par Bozorth [BOZ-32]. Il correspond au mode d'aimantation I de la théorie de phase de Néel [NEE-44].

A l'état désaimanté afin, comme nous l'avons signalé, de minimiser l'énergie magnétostatique, un monocristal de fer se subdivise en un grand nombre de domaines élémentaires appartenant à six catégories différentes. Chaque catégorie correspond à une des six directions de facile aimantation (définie au niveau cristallographique) des axes quaternaires du cristal.

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les parois entre les domaines se déplacent afin d'augmenter le volume du domaine dont la composante de l'aimantation dans la direction du champ appliqué est la plus grande. Ce processus nécessite une énergie faible, il se produit donc dans les régions non saturées de la courbe d'aimantation.

Soit  $N$  le nombre total de domaines par unité de volume et considérons un repère orthonormé direct  $(x,y,z)$  dont les axes coïncident avec les axes quaternaires du cristal.

Chaque distribution de domaines est définie par les nombres  $N_1, N_3, N_5$  de domaines par unité de volume ayant leurs moments magnétiques respectivement dans les directions des axes  $x,y,z$  positifs et par  $N_2, N_4, N_6$  les nombres de domaines ayant leurs moments magnétiques respectivement dans les directions des axes  $x,y,z$  négatifs. La polarisation magnétique  $\mathbf{J}$  que l'on peut confondre avec  $\mathbf{B}$ , ( $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mathbf{J}=\mathbf{J}$ ) a pour coordonnées  $J_x, J_y$  et  $J_z$  tels que :

$$\begin{aligned} J_x &= J_s \frac{(N_1-N_2)}{N} \\ J_y &= J_s \frac{(N_3-N_4)}{N} \\ J_z &= J_s \frac{(N_5-N_6)}{N} \end{aligned} \tag{II-4}$$

$J_s$  est la polarisation magnétique de chaque domaine, c'est-à-dire la polarisation à saturation. La probabilité d'avoir  $N$  domaines suivant la distribution  $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$  est donnée par :

$$P(N_1, N_2, \dots, N_6) = \frac{N!}{(N_1!)(N_2!) \dots (N_6!)} \left(\frac{1}{6}\right)^N. \quad (\text{II-5})$$

Soit  $J_H \cdot \mathbf{u}$  la projection de  $\mathbf{J}$  sur  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{u}$  étant un vecteur unitaire, nous avons :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{J} = J_H. \quad (\text{II-6})$$

De plus, nous avons :

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_6. \quad (\text{II-7})$$

La détermination du maximum de la fonction  $P$  est réalisée en utilisant deux multiplicateurs de Lagrange pour tenir compte des deux contraintes précédentes. Les valeurs de  $N_1, N_2, \dots, N_6$  sont ainsi calculées, déterminant la configuration en domaines la plus probable. Ce modèle détermine le vecteur polarisation magnétique  $\mathbf{J}$  à partir de la direction du champ magnétique ( $\mathbf{u}$ ) et de la projection de la polarisation sur cette direction ( $J_H$ ). Nous n'avons pas de relation explicite entre le vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  et le vecteur polarisation magnétique  $\mathbf{J}$ . La relation vectorielle  $\mathbf{J}-\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ ) n'est pas déterminée.

La figure II.6 montre le diagramme polaire de la polarisation dans le plan  $(0\bar{1}1)$ . Les courbes expérimentales (obs.) et modélisées (calc.) y sont représentées pour différentes directions du champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

La polarisation et le champ magnétique sont parallèles en bas champs (pour  $J < \frac{J_s}{4}$ ).

Ce résultat ne peut être appliqué aux tôles magnétiques de texture de Goss bien que la configuration des cristaux y soit équivalente. En effet, dans le cas d'une tôle magnétique l'épaisseur est faible, ainsi le fait d'avoir des domaines dont les moments magnétiques sont à  $45^\circ$  par rapport au plan de la tôle (suivant les directions  $[001]$  et  $[010]$ ) entraîne la création de champ démagnétisant pour limiter l'énergie magnétostatique apparaissant ainsi. L'hypothèse du champ magnétique homogène dans l'échantillon n'est plus valable. Afin de prendre en compte la finesse de la tôle on peut considérer que les probabilités d'occupation des six directions ne sont plus les mêmes. La probabilité d'occupation des directions correspondant à la direction de laminage  $[100]$ , dont les moments sont dans le plan de la tôle, est plus grande que pour les autres directions situées à  $45^\circ$  par rapport au plan de la tôle.

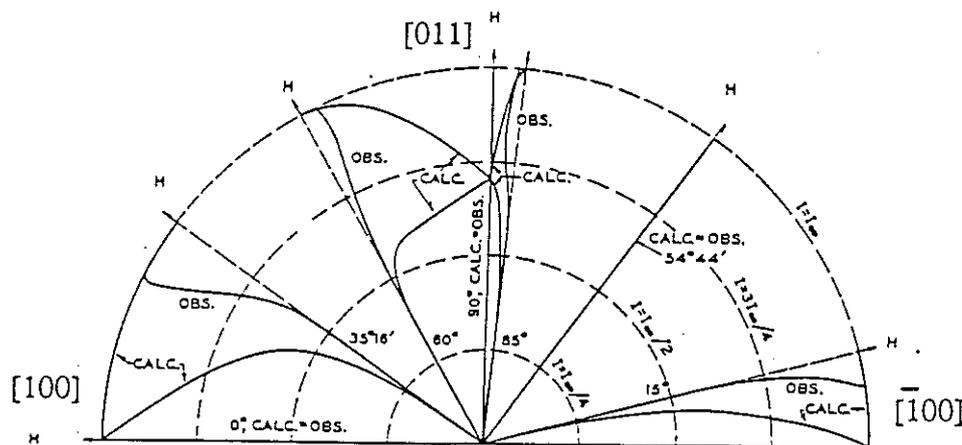


Figure II.6 : Diagramme polaire de la polarisation magnétique  $J=I$  dans le plan  $(0\bar{1}1)$

[BOZ-32]

Le modèle précédent a ainsi été modifié par G.M. Fasching [FAS-64] mais les résultats obtenus ne sont que qualitatifs.

Par contre, dans le cas d'une tôle de texture cubique l'aimantation dans le plan de la tôle ne fait intervenir que des moments magnétiques dans ce plan. Les fractions volumiques de

domaines  $N_5$  et  $N_6$  sont alors nulles, n'interviennent alors que les quatre nombres  $N_1, N_3, N_2$  et  $N_4$  correspondant aux moments magnétiques dans le plan de la tôle. Le parallélisme entre la polarisation magnétique (ou même l'induction) et le champ magnétique peut être considéré comme un résultat très valable en bas champ.

### II.2.2 Rotation des moments magnétiques

Nous considérons à nouveau un monocristal de fer. Pour des champs forts les domaines tendent à disparaître et les moments magnétiques subissent une rotation, ils s'écartent de la direction de facile aimantation cristallographique pour se rapprocher de celle du champ appliqué. Pour cela il faut surmonter l'énergie magnétocristalline, ce phénomène se situe dans la partie terminale de la courbe d'aimantation (zone 3 de la figure II.5) [BOZ-51], [WIL-37].

Ce modèle repose sur la minimisation de l'énergie interne. Deux de ses composantes seulement sont utilisées, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline  $E_{an}$  et l'énergie d'interaction  $E_i$  entre le champ magnétique et la polarisation.

Soient  $\beta$  l'angle entre la polarisation du cristal  $J_s$  (polarisation à saturation) et l'axe de facile aimantation et  $\theta$  l'angle entre le champ magnétique  $H$  et l'axe de facile aimantation.  $J_H$  est la projection de la polarisation sur la direction de  $H$ .

L'énergie interne totale est donnée par :

$$E = E_{an} - HJ_s \cos(\theta - \beta) . \quad (II-8)$$

A l'équilibre magnétique  $\frac{dE}{d\beta} = 0$ , d'où :

$$H = \frac{dE_{an}}{d\beta} \left[ \frac{1}{J_s \sin(\theta-\beta)} \right] \quad (II-9)$$

et

$$J_H = J_s \cos(\theta-\beta) . \quad (II-10)$$

L'énergie d'anisotropie magnétocristalline s'écrit comme nous l'avons déjà souligné :

$$E_{an} = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) \quad (II-11)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  désignent les cosinus directeurs de  $J_s$  par rapport aux axes quaternaires.

$K_1$  est la constante d'anisotropie.

Le modèle peut être appliqué pour un champ magnétique situé dans le plan  $(0\bar{1}1)$ . Pour  $\theta$  inférieur à  $54,7^\circ$  (angle entre la direction  $[100]$  et  $[111]$ ), l'énergie d'anisotropie est déterminée par :

$$E_{an} = K_1 \left( \frac{1}{4} \sin^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta \right), \quad (II-12)$$

d'où :

$$\frac{d E_{an}}{d\beta} = \frac{K_1}{8} (2 \sin(2\beta) + 3 \sin(4\beta)) . \quad (II-13)$$

Ainsi les relations permettant d'avoir  $J$  à partir de  $H$  sont :

$$H = \frac{K_1 (2 \sin 2\beta + 3 \sin 4\beta)}{8 J_s \sin(\theta-\beta)} , \quad (II-14)$$

$$J_H = J_s \cos(\theta - \beta) . \quad (\text{II-15})$$

Ces relations sont intéressantes car elles donnent des ordres de grandeurs significatifs, en particulier sur l'importance de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline. Pour obtenir une rotation de  $5^\circ$  de la polarisation magnétique par rapport à son axe de facile aimantation, il faut appliquer un champ magnétique de  $5400\text{A/m}$  à  $50^\circ$  par rapport à cet axe ou de  $15000\text{A/m}$  à  $20^\circ$ .

Cependant ce modèle est hasardeux à appliquer dans le cas de polycristaux. Des domaines inverses apparaissent du fait de la désorientation des axes cristallographiques entre grains. Un modèle récent a été proposé dans le cas de tôles magnétiques ayant une texture de Goss en tenant compte de la délocalisation des directions de facile aimantation et de la fraction volumique  $f$  de domaines inverses à la frontière des grains [WAE-92.1], [WAE-92.2]. L'énergie interne est alors donnée par :

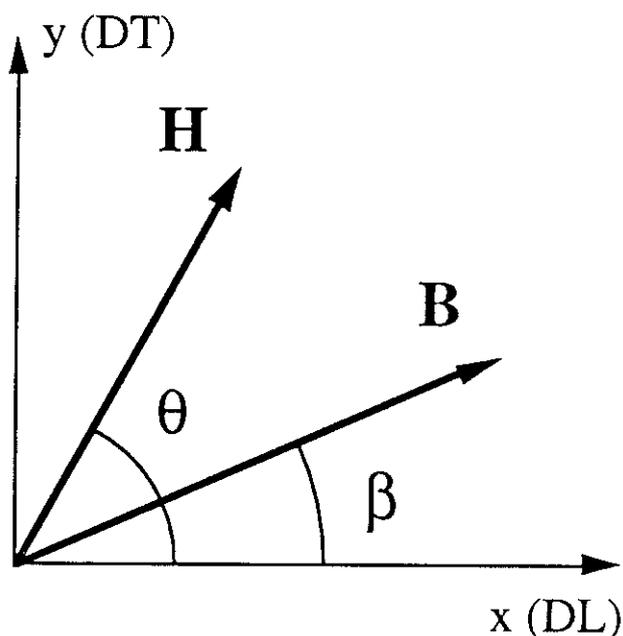
$$E = E_{an} - H J_s (1 - 2f) \cos(\theta - \beta) . \quad (\text{II-16})$$

$f$  la fraction volumique de domaines inverses n'est fonction que de  $H$  et de l'angle de désorientation de la texture. Or, cette fraction peut très bien être différente selon qu'interviennent des moments magnétiques dans la plan de la tôle (direction [100]) ou des moments magnétiques à  $45^\circ$  par rapport au plan de la tôle (directions [010] ou [001]). D'autre part, les directions [100] des cristaux ne sont généralement pas absolument parallèles à la surface de la tôle, ce qui entraîne l'existence de domaines de fermeture. Ces domaines ont une grande importance car ils modifient grandement la loi d'approche à saturation [BRI-87], ils ne peuvent être négligés.

La finalité des modèles précédents est de décrire les phénomènes d'aimantation pour les comprendre. Le développement des logiciels de C.A.O. en électromagnétisme dans les années 70 a apporté une nouvelle façon d'appréhender les comportements magnétiques. La relation **B-H** est devenue un outil nécessaire. Des modèles sont nés de cette nécessité, nous les appelons modèles empiriques par opposition aux modèles reposant sur la connaissance des mécanismes d'aimantation. Ce vocable reflète l'unité de ces modèles qui utilisent tous des courbes **B(H)** expérimentales.

### II.3 MODELES EMPIRIQUES BIDIMENSIONNELS

Les notations que nous employons ici et que nous conservons par la suite sont résumées sur la figure II.7.



*Figure II.7 : Notations utilisées*

Le repère  $(x,y)$  est un repère du plan de la tôle tel que  $x$  coïncide avec la direction de laminage (DL),  $y$  avec la direction travers (DT). Le vecteur champ magnétique  $H$  est défini

par son module  $H$  et par l'angle  $\theta$  qu'il fait avec la direction de laminage. Le vecteur induction  $\mathbf{B}$  est défini par son module  $B$  et par l'angle  $\beta$  qu'il fait avec la direction de laminage.

### II.3.1 Modèle de séparation des axes [NAK-75]

Ce modèle est très simple, il est parfois appelé modèle conventionnel. Il s'applique plutôt pour des tôles à grains non orientés. Elles présentent une direction de facile aimantation et une direction de difficile aimantation orthogonale à la précédente. Ces notions de facile et de difficile aimantation sont à prendre au sens macroscopique. Dans ces deux directions, induction et champ magnétique sont parallèles. Ainsi les fonctions  $\mu_L(H)$  et  $\mu_T(H)$  peuvent être facilement déterminées expérimentalement.  $\mu_L(H)$  est la perméabilité suivant la direction de laminage (axe  $x$ ).  $\mu_T(H)$  est la perméabilité suivant la direction travers (axe  $y$ ). Pour déterminer les composantes de  $\mathbf{B}$  les relations suivantes sont utilisées :

$$B_x = \mu_L(H_x) \cdot H_x, \quad (\text{II-17})$$

$$B_y = \mu_T(H_y) \cdot H_y. \quad (\text{II-18})$$

Les phénomènes suivant les deux axes sont ainsi séparés mathématiquement.

Un petit exemple numérique, dans le cas d'une tôle à grains non orientés référencée FeV270-35 HA, montre l'incongruité d'un tel modèle en haut champ. Pour  $H = 5000$  A/m on a  $\mu_L(H) = \frac{1,62}{5000}$  et  $\mu_T(H) = \frac{1,53}{5000}$ . Pour un vecteur  $\mathbf{H}$  à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage et de module égal à  $7071$  A/m les composantes de  $\mathbf{B}$  sont donc :

$$B_x (H_x = 5000 \text{ A/m}) = 1,62 \text{ T}, \quad (\text{II-19})$$

$$B_y (H_y = 5000 \text{ A/m}) = 1,53 \text{ T}. \quad (\text{II-20})$$

Une norme de  $B$  de 2,23 T est ainsi trouvée dépassant largement l'induction à saturation!  
Dans sa version linéaire ( $\mu_L$  et  $\mu_T$  sont des constantes) c'est ce modèle qui est utilisé dans les versions commercialisées de flux2d et de flux3d pour modéliser l'anisotropie.

### II.3.2 Modèle des deux axes [HUT-84], [SHE-87], [DED-90]

Comme précédemment les données expérimentales nécessaires pour ce modèle sont les courbes  $B(H)$  dans les deux directions long et travers. Ce modèle s'applique aux tôles à grains non orientés.

Afin d'éviter les aberrations provoquées par le modèle précédent, il part de l'hypothèse que les propriétés dans les autres directions peuvent être déduites par interpolation linéaire des propriétés dans les directions de facile et de difficile aimantation.

Les courbes d'aimantation sont séparées en trois zones (figure II.8): la zone linéaire pour  $H \leq H_1$ , la zone non linéaire pour  $H_1 < H < H_s$  et la zone saturée pour  $H > H_s$ . La courbe  $B(H)$  expérimentale est appelée  $B_L(H)$  dans la direction long et  $B_T(H)$  dans la direction travers.

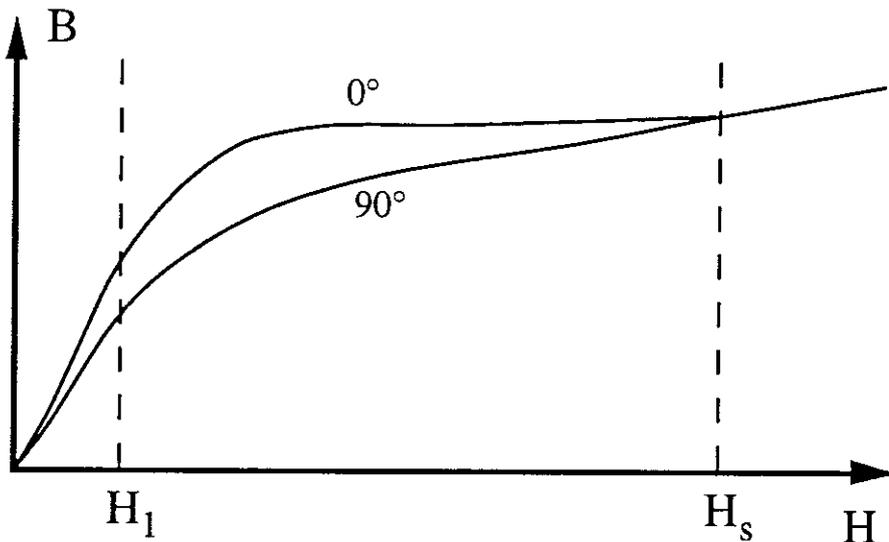


Figure II.8 : Schéma des courbes  $B(H)$  dans les directions long et travers

Pour la zone linéaire les courbes  $B_L(H)$  et  $B_T(H)$  peuvent être assimilées à des segments de droites, le modèle précédent est utilisé :

$$B_x = \mu_L H_x = B_L(H_x) , \quad (\text{II-21})$$

$$B_y = \mu_T H_y = B_T(H_y) . \quad (\text{II-22})$$

$\mu_L$  et  $\mu_T$  sont des constantes et représentent les perméabilités suivant les directions long et travers.

Lorsque  $H=H_1$ , l'angle limite  $\beta_1$  entre  $\mathbf{B}$  et la direction de laminage est défini par :

$$\beta_1 = \text{Arctg} \left( \frac{\mu_T}{\mu_L} \text{tg}(\theta) \right) . \quad (\text{II-23})$$

Dans la zone non linéaire, le module de  $\mathbf{B}$  et sa direction sont calculés par interpolation :

$$B = B_L(H) + \frac{\theta}{90^\circ} (B_T(H) - B_L(H)) , \quad (\text{II-24})$$

$$\beta = \beta_1 + \frac{\theta - \beta_1}{H_s - H_1} (H - H_1) . \quad (\text{II-25})$$

Lorsque  $H > H_s$ , on a  $\beta = \theta$  et  $B = B_L(H) = B_T(H)$ .

Ce modèle se comporte correctement d'un point de vue qualitatif pour des tôles à grains non orientés en évitant les aberrations du modèle précédent. Le problème est la définition de  $H_s$  qui est le champ pour lequel les courbes d'aimantation dans les directions long et

travers se rejoignent. Cette valeur nous semble quasiment impossible à atteindre expérimentalement.

### II.3.3 Modèle de l'ellipse [DIN-83], [SHE-87], [DED-90]

Il s'agit encore d'un modèle pour des tôles à grains non orientés. Ce modèle suppose que pour une norme constante du champ magnétique  $H$  le vecteur  $B$  décrit dans le plan  $B_x$ - $B_y$  une ellipse dont le grand axe correspond à la direction de facile aimantation. Ainsi, nous avons la relation :

$$\frac{B_x^2}{a^2} + \frac{B_y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{II-26})$$

pour  $H$  constant.

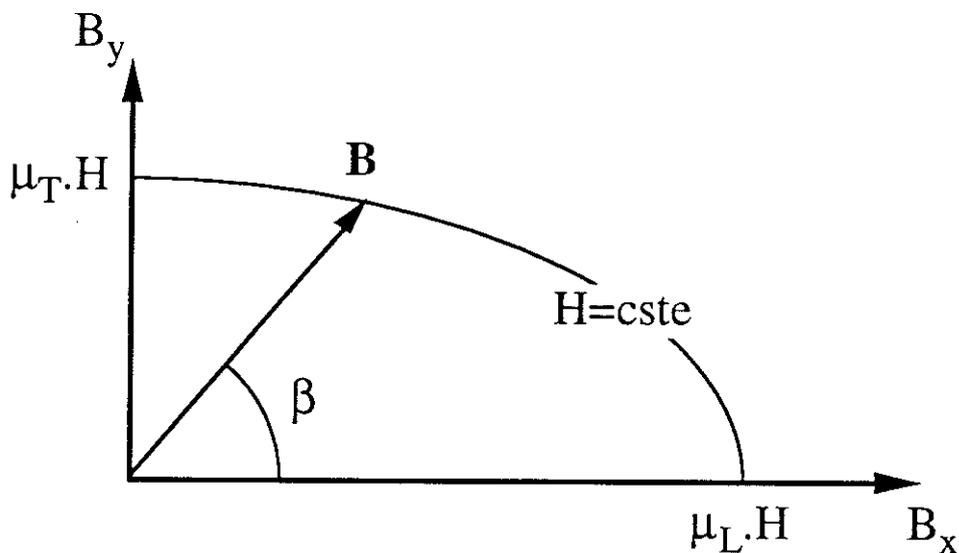


Figure II.9 : Représentation de l'ellipse pour  $H$  constant

Pour  $B_y = 0$ ,  $B$  est aligné sur la direction  $x$  de facile aimantation et  $B^2 = \mu_L^2(H) H^2 = a^2$  de même pour  $B_x = 0$  nous avons  $b^2 = \mu_T^2(H) H^2$ , d'où :

$$\frac{B_x^2}{\mu_L^2(H)} + \frac{B_y^2}{\mu_T^2(H)} = H^2 . \quad (\text{II-27})$$

L'équation précédente est l'équation de l'ellipse (figure II.9).

Afin de calculer l'angle  $\beta$  entre  $\mathbf{B}$  et la direction de laminage (axe  $x$ ) on prend :

$$\text{tg } \beta = \frac{B_y}{B_x} , \quad (\text{II-28})$$

avec  $B_y = \mu_T(H) H_y$  et  $B_x = \mu_L(H) H_x$ .

Cela revient à considérer que les rapports  $\frac{B_y}{H_y}$  et  $\frac{B_x}{H_x}$  ne dépendent pas de la direction du champ magnétique, ce qui est discutable. Cela donne :

$$\text{tg } \beta = \frac{\mu_T(H) H_y}{\mu_L(H) H_x} = \frac{\mu_T(H)}{\mu_L(H)} \text{tg } \theta . \quad (\text{II-29})$$

L'angle  $\beta$ , entre  $\mathbf{B}$  et la direction de laminage, en fonction de l'angle  $\theta$ , entre  $\mathbf{H}$  et cette direction, est donc donné par :

$$\beta = \text{Arctg} \left( \frac{\mu_T(H)}{\mu_L(H)} \text{tg } \theta \right) . \quad (\text{II-30})$$

Puisque  $B_x = B \cos\beta$  et  $B_y = B \sin\beta$ , on a :

$$B = \frac{H}{\sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\mu_L^2(H)} + \frac{\sin^2 \beta}{\mu_T^2(H)}}} . \quad (\text{II-31})$$

Ce modèle se comporte correctement d'un point de vue qualitatif. Par contre la relation  $B(H)$  n'est pas le reflet d'un comportement anhystérétique. Les densités d'énergie ou de coénergie ne sont pas définies de manière univoque [SHE-87].

#### II.3.4 Modèle de l'ellipse avec rotation d'axes [DIN-83], [DED-90]

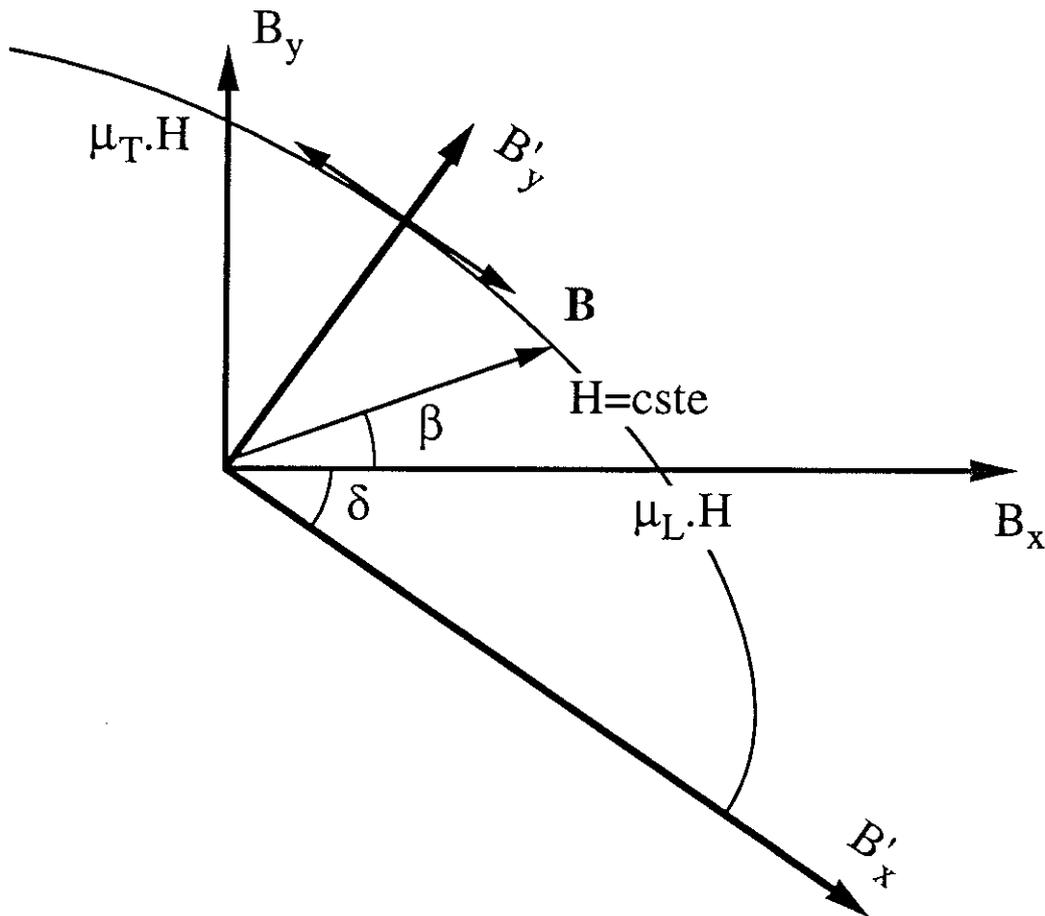


Figure II.10 : Représentation de l'ellipse basculée pour  $H$  constant

Ce modèle a été développé par Dedulle [DED-90] à partir d'une idée de Di Napoli [DIN-83]. Il est sensé s'appliquer pour des tôles à grains orientés ayant une texture de Goss. Son principe est d'assimiler la direction de difficile aimantation cristallographique [111] des cristaux avec la direction macroscopique de difficile aimantation. Selon cette hypothèse

la direction de difficile aimantation fait un angle de  $54,7^\circ$  environ ( $\text{Arctg } \sqrt{2}$ ) par rapport à la direction de laminage. Pour un module  $H$  constant de champ magnétique, l'induction est alors minimale pour une direction de  $54,7^\circ$  par rapport à la direction long. La direction travers est une direction de moyenne aimantation. L'idée est de reprendre le modèle de l'ellipse et de faire subir à l'ellipse une rotation de  $(90-54,7)^\circ$  par rapport au cas précédent, le petit axe de l'ellipse coïncidant alors avec la direction de difficile aimantation (figure II.10).

Soient  $\alpha$  et  $\delta$  tel que :

$$\alpha = \text{Arctg } (\sqrt{2}) = 54,7^\circ \text{ et } \delta = 90 - \alpha . \quad (\text{II-32})$$

Nous avons ainsi deux repères. Le repère  $(0, B'_x, B'_y)$  où la courbe décrite par le vecteur  $\mathbf{B}$  pour  $H$  constant est une ellipse dont les axes correspondent aux axes du repère. Le repère  $(0, B_x, B_y)$  est défini par rapport au précédent par une rotation d'angle  $\beta$ .

Dans le repère  $(0, B'_x, B'_y)$  on a :

$$a B_x'^2 + b B_y'^2 = H^2 , \quad (\text{II-33})$$

qui est l'équation de l'ellipse. Un calcul en identifiant les valeurs de  $B$  sur les axes montre que  $a$  et  $b$  sont donnés par :

$$a = \frac{\mu_L^2 \sin^2 \delta - \mu_T^2 \cos^2 \delta}{\mu_L^2 \mu_T^2 (\sin^2 \delta - \cos^2 \delta)} , \quad (\text{II-34})$$

$$b = \frac{-\mu_L^2 \cos^2 \delta + \mu_T^2 \sin^2 \delta}{\mu_L^2 \mu_T^2 (\sin^2 \delta - \cos^2 \delta)} . \quad (\text{II-35})$$

Or l'induction a pour coordonnées dans le repère  $(0, B'_x, B'_y)$  :

$$B'_x = B \cos (\beta + \delta) , \quad (\text{II-36})$$

$$B'_y = B \sin (\beta + \delta) . \quad (\text{II-37})$$

Il s'en déduit que :

$$H^2 = B^2 [a \cos^2(\beta + \delta) + b \sin^2 (\beta + \delta)] , \quad (\text{II-38})$$

donc :

$$B = \frac{H}{\sqrt{a \cos^2(\beta + \delta) + b \sin^2(\beta + \delta)}} . \quad (\text{II-39})$$

Pour le calcul de l'angle  $\beta$  entre  $\mathbf{B}$  et la direction de laminage, J.M. Dedulle propose la même formule que pour le modèle elliptique :

$$\beta = \text{Arctg} \left( \frac{\mu_T(H)}{\mu_L(H)} \text{tg } \theta \right) . \quad (\text{II-40})$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et l'induction  $\mathbf{B}$  sont ainsi parallèles suivant les directions long et travers. Par contre suivant la direction de difficile aimantation  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  ne sont pas parallèles. D'autre part cette direction de difficile aimantation ne varie pas avec le champ magnétique ce qui est infirmé par l'expérience. De plus comme le modèle elliptique ce modèle n'est pas le reflet d'un comportement anhystérétique.

### II.3.5 Modèles purement expérimentaux

Dans ce cas la relation **B-H** est obtenue à partir d'un réseau de courbes expérimentales en les interpolant. Ce réseau de courbes peut prendre plusieurs formes par exemple  $\beta(\theta, H)$  et  $B(\theta, H)$  [WEG-76] ou encore  $B_x(H_x, H_y)$  et  $B_y(H_x, H_y)$  [NAK-93].

La relation peut ainsi être stockée sous la forme de tenseur des perméabilités  $[\mu(\mathbf{H})]$  grâce à ses quatre composantes [ENO-94].

Ces modèles qui sont le reflet de mesures expérimentales nécessitent pour chaque type et chaque nuance de tôles un nombre de mesures très important ainsi que des bancs de mesures appropriés qui ne sont fabriqués que dans quelques laboratoires au monde.

## II.4 QUELLES SONT LES CONTRAINTES QUE DOIT SATISFAIRE UN MODELE EN VUE DE LA MODELISATION ELEMENTS FINIS

Aucun des modèles précédents n'est entièrement satisfaisant, nous allons donc dégager quelques critères que doit remplir un modèle en vue de la modélisation par la méthode des éléments finis.

Un modèle est un schéma simplificateur construit afin de se rapprocher du contenu d'expériences. Dans notre cas c'est le comportement magnétique **B-H** des tôles. La simplification ne doit pas être trop forte pour ne pas tomber dans un schéma trop réducteur, mais il faut se garder d'une complexité rapidement envahissante nous éloignant de notre but : l'implantation dans un logiciel éléments finis. Cette implantation est compliquée à réaliser et fait intervenir de nombreux calculs numériques qu'il faut effectuer dans les meilleures conditions. Nous devons ainsi trouver un compromis. Dans la mesure

du possible le modèle décrira au mieux un processus physique complexe, qui comme nous l'avons vu est fondé sur des interactions microscopiques difficiles à appréhender.

Le processus d'aimantation devra être décrit, dans sa totalité, c'est-à-dire pour une large plage de valeurs de champ magnétique (de zéro à plusieurs milliers d'Ampère par mètre).

Un tel modèle doit à notre avis reposer sur des valeurs expérimentales accessibles à tout utilisateur de logiciels de C.A.O. qui ne dispose pas d'un matériel sophistiqué de caractérisation magnétique. Les courbes  $B(H)$  suivant les directions long et travers nous semblent par exemple parfaitement indiquées car elles figurent sur les catalogues des métallurgistes (en particulier pour les tôles à grains orientés).

D'autre part, il est plus sain, pour que la méthode des éléments finis ne nous procure qu'une solution unique, que la relation  $B(H)$  ou  $H(B)$  soit le reflet d'un comportement anhystérique.

Dans le chapitre suivant nous développons un modèle avec une approche thermodynamique en tentant de respecter les contraintes ci-dessus. Nous l'appliquons pour les trois types d'aciers magnétiques : les tôles à grains non orientés, les tôles à grains orientés et les tôles à texture cubique.

## CHAPITRE III

# APPROCHE THERMODYNAMIQUE : MODELE DE LA COENERGIE



### III.1 DEFINITION DE LA COENERGIE ET DE L'ENERGIE MAGNETIQUE

Le but de notre travail est la modélisation de la relation entre le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et l'induction  $\mathbf{B}$  en l'absence de l'hystérésis, c'est à dire dans le cas où l'état magnétique du matériau ne dépend pas de son histoire, de ses états antérieurs. Ainsi l'hypothèse du comportement anhystérétique est très forte. Dans ces conditions l'application de principes thermodynamiques [LAN-69] aux transformations isothermes de l'induction magnétique conduit au fait que l'expression  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ , accroissement de la densité volumique de l'énergie libre magnétique, soit une différentielle exacte. De même, pour une transformation du champ magnétique,  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}$  est une différentielle exacte. Ainsi se trouvent définies les densités volumiques d'énergie magnétique  $\omega$  et de coénergie magnétique  $\omega'$  par les relations :

$$d\omega = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (\text{III-1})$$

et

$$d\omega' = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} . \quad (\text{III-2})$$

Par la suite pour des raisons de commodités nous appelons  $\omega$  l'énergie magnétique et  $\omega'$  la coénergie magnétique. Puisqu'elles sont associées à des différentielles exactes,  $\omega$  et  $\omega'$  sont des fonctions respectivement de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{H}$  seulement et ne dépendent pas du passé magnétique du matériau. L'existence de ces fonctions n'est possible que si  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont reliés par les relations suivantes dans un repère  $(x,y)$  et en considérant par exemple la coénergie :

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x} . \quad (\text{III-3})$$

Nous dirons que le rotationnel de  $\mathbf{B}$  dans l'espace du champ magnétique  $\mathbf{H}(H_x, H_y)$  est nul:

$$\mathbf{rot}_H \mathbf{B} = \mathbf{0} . \quad (\text{III-4})$$

De même en considérant l'énergie nous avons :

$$\mathbf{rot}_B \mathbf{H} = \mathbf{0} . \quad (\text{III-5})$$

Cela impose que les composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $H_x$ ,  $H_y$  de l'induction et du champ magnétique soient mutuellement dépendantes trois à trois. Les relations précédentes sont très contraignantes du point de vue mathématique. Pour qu'un matériau se comporte de manière anhystérétique, il ne suffit pas d'avoir une fonction  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  unique pour une valeur donnée de  $\mathbf{H}$ . Par exemple le modèle de l'ellipse ne vérifie pas la condition de matériau anhystérétique [SHE-87].

En ce qui concerne les mécanismes d'aimantation, on ne considère plus ici que la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  reflète un minimum énergétique du système mais LE minimum énergétique.

Pour avoir un comportement anhystérétique de la relation  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  nous fondons notre modèle sur cette approche thermodynamique qui se justifie non seulement d'un point de vue théorique mais aussi d'un point de vue expérimental.

### III.2 JUSTIFICATION EXPERIMENTALE DE L'APPROCHE THERMODYNAMIQUE [TIM-84]

Cette étude a été faite à l'Institut de Métrologie de Bucarest sur des tôles fer silicium à grains orientés (M6X). Les auteurs ont conçu un dispositif de mesures très complexe

permettant d'effectuer des mesures de caractéristiques magnétiques dans des directions quelconques. En particulier ils ont obtenu deux familles de caractéristiques expérimentales de tôles à deux variables du type  $B_x = B_x(H_x, B_y)$  et  $B_y = B_y(H_y, B_x)$ . Pour la première famille par exemple,  $B_y$  est obtenu grâce à une excitation continue ;  $B_x$  et  $H_x$  sont obtenus par une mesure en courant alternatif en prenant le sommet des cycles d'hystérésis. Si le matériau est anhystérétique il est possible à partir des courbes  $B_x(H_x, B_y)$  de calculer les courbes  $B_y(H_y, B_x)$  et de les comparer aux courbes expérimentales, c'est ce qu'ont démontré les auteurs de la façon suivante.

L'énergie magnétique  $\omega(B_x, B_y)$  est donnée par la différentielle exacte :

$$d\omega = H_x dB_x + H_y dB_y = \left( \frac{\partial \omega}{\partial B_x} \right) dB_x + \left( \frac{\partial \omega}{\partial B_y} \right) dB_y . \quad (\text{III-6})$$

Comme la fonction précédente est une différentielle exacte, l'on peut écrire :

$$\left( \frac{\partial H_x}{\partial B_y} \right)_{B_x} = \left( \frac{\partial H_y}{\partial B_x} \right)_{B_y} . \quad (\text{III-7})$$

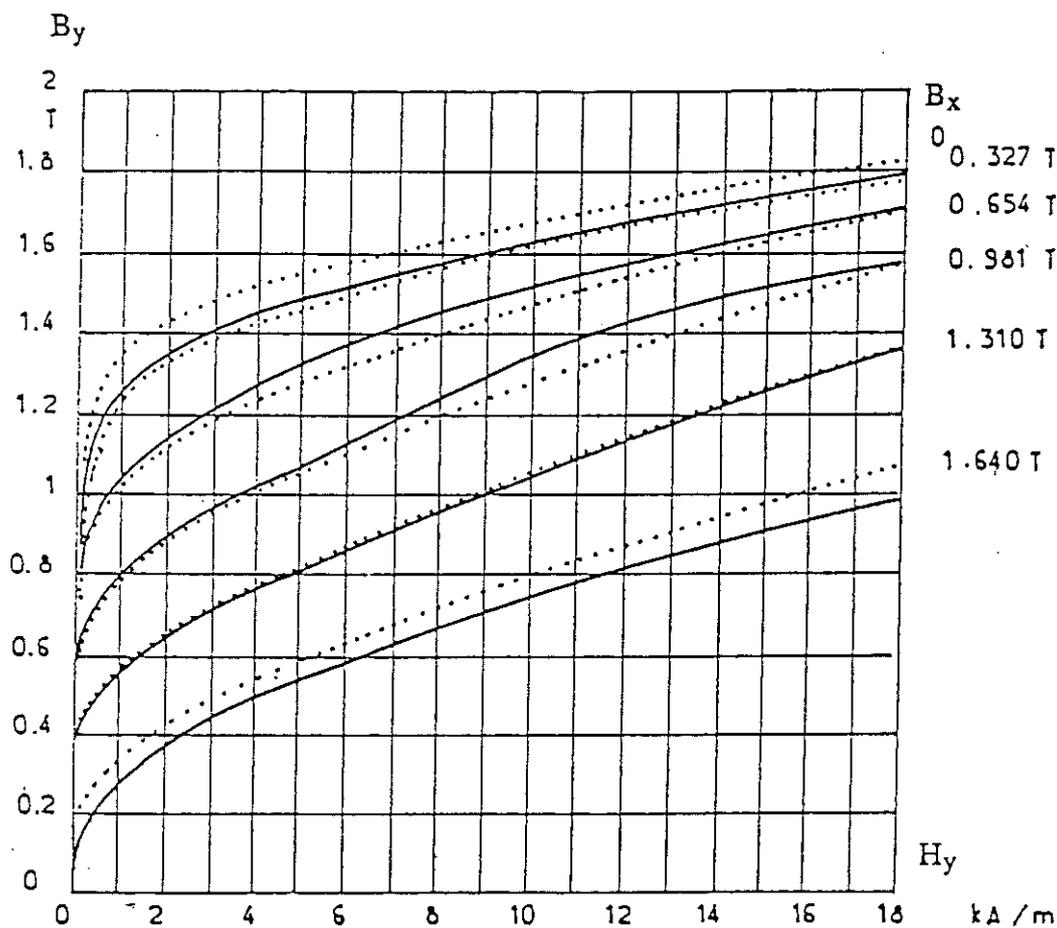
Cette relation nous permet d'écrire que :

$$H_y(B_x, B_y) = H_y(B_y, 0) + \int_{b=0}^{b=B_x} \frac{\partial H_y}{\partial B_x}(b, B_y) db , \quad (\text{III-8})$$

est égal à :

$$H_y(B_x, B_y) = H_y(B_y, 0) + \int_{b=0}^{b=B_x} \frac{\partial H_x}{\partial B_y}(b, B_y) db . \quad (\text{III-9})$$

Ainsi en connaissant expérimentalement  $B_x=B_x(H_x,B_y)$  (ou  $H_x(B_x,B_y)$ ) et la courbe "primaire"  $H_y(B_y,0)$  il est possible grâce à l'hypothèse de matériau anhystérétique de calculer  $H_y(B_x,B_y)$  ou si l'on préfère  $B_y(H_y,B_x)$ .



*Figure III.1 : Famille de caractéristiques d'aimantation  $B_y(H_y,B_x)$  obtenue par le calcul (courbes en tracé continu) à partir de la première courbe  $B_y(H_y,0)$  et de la famille  $B_x(H_x,B_y)$ . Les caractéristiques relevées lors des mesures sont tracées en pointillé [TIM-84].*

La figure III.1 représente le réseau de courbe  $B_y(H_y,B_x)$  obtenu par le calcul et par l'expérience. Malgré les erreurs de mesures, le fait de négliger l'hystérésis et les erreurs de discrétisation très importantes à cause du nombre réduit de courbes de chaque famille,

entraînant une mauvaise évaluation des dérivées, nous remarquons que les différences entre les deux réseaux de courbes sont remarquablement faibles.

Ainsi l'approche thermodynamique peut se vérifier expérimentalement, grâce à des mesures performantes. L'hypothèse du comportement anhystérétique apparaît donc comme acceptable pour des tôles à grains orientés où l'hystérésis est négligeable.

### III.3 INTERET DE L'APPROCHE THERMODYNAMIQUE POUR LA MODELISATION DE L'ANISOTROPIE DES TOLES MAGNETIQUES [SIL-91]

En considérant le matériau comme anhystérétique, la coénergie magnétique  $\omega'$  est une fonction du champ magnétique qui est définie par la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  grâce à l'intégration vectorielle :

$$\omega'(\mathbf{H}) = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{H} . \quad (\text{III-10})$$

Nous pouvons aussi inversement exprimer la fonction  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  à partir de la fonction  $\omega'(\mathbf{H})$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \text{grad}_{\mathbf{H}} \omega'(\mathbf{H}) . \quad (\text{III-11})$$

L'opérateur  $\text{grad}_{\mathbf{H}}$  est le gradient dans l'espace du champ magnétique  $\mathbf{H}$ , en coordonnées cartésiennes en notant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  les vecteurs unitaires définissant le repère  $(x,y)$  il s'écrit :

$$\text{grad}_{\mathbf{H}} = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial H_x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial H_y} . \quad (\text{III-12})$$

La coénergie magnétique  $\omega'$  représente ainsi le potentiel dont dérive l'induction  $\mathbf{B}$  dans l'espace du champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

D'après les relations précédentes, il est totalement équivalent de représenter le comportement magnétique anhystérétique par la relation vectorielle de  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$  que de le représenter par la densité de coénergie  $\omega'$  en fonction de  $\mathbf{H}$ . C'est cette équivalence qui permet à P. Silvester et à R. Gupta de décrire une méthodologie afin de modéliser le comportement anisotrope des matériaux magnétiques [SIL-91]. Ils proposent pour les modéliser de représenter dans le plan  $H_x$ - $H_y$  de la tôle, l'axe  $x$  coïncidant avec la direction de laminage, les lignes isovaleurs de coénergie qui définissent les valeurs de la coénergie pour toutes valeurs du champ magnétique  $\mathbf{H}(H_x, H_y)$ . L'équivalence entre la représentation scalaire de la coénergie en fonction de  $\mathbf{H}$  et la représentation vectorielle de  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$  est schématisée sur la figure III.2.

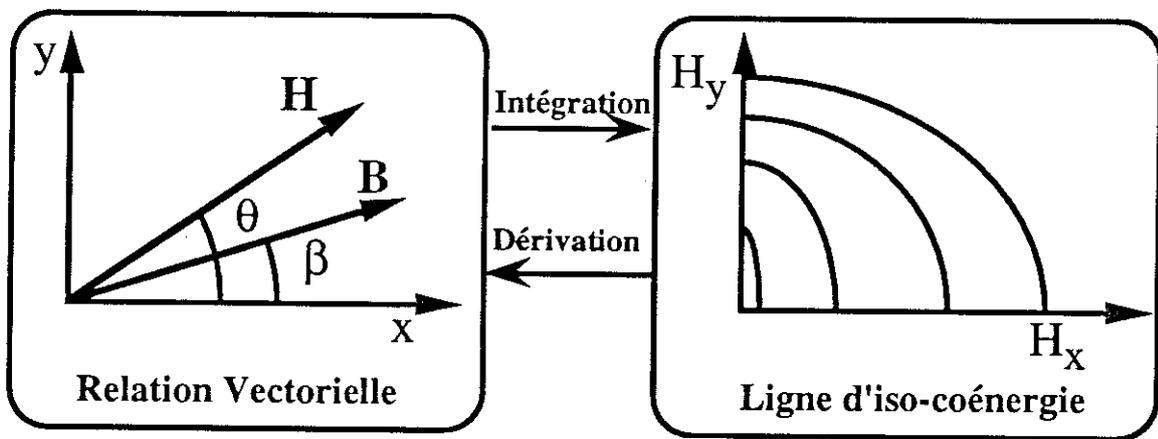


Figure III.2 : Equivalence des représentations

Le passage d'une représentation à l'autre s'effectue soit en dérivant vectoriellement soit en intégrant vectoriellement conformément aux formules que nous avons données précédemment.

La description précédente peut aussi se faire avec la représentation duale de la coénergie, c'est à dire l'énergie. La représentation scalaire de l'énergie  $\omega(\mathbf{B})$  est équivalente à la représentation vectorielle  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ .

Outre que cette méthode assure le caractère anhystérique du comportement des matériaux magnétiques, elle est plus pratique que toute autre méthode puisqu'elle ne fait intervenir qu'une grandeur scalaire plus facile à manipuler qu'une grandeur vectorielle. En revanche la restitution du vecteur  $\mathbf{B}$  (ou de  $\mathbf{H}$ ) à partir des lignes isovaleurs de coénergie (ou d'énergie) est susceptible de poser certains problèmes liés à la dérivation numérique. Il s'agit de prendre des précautions.

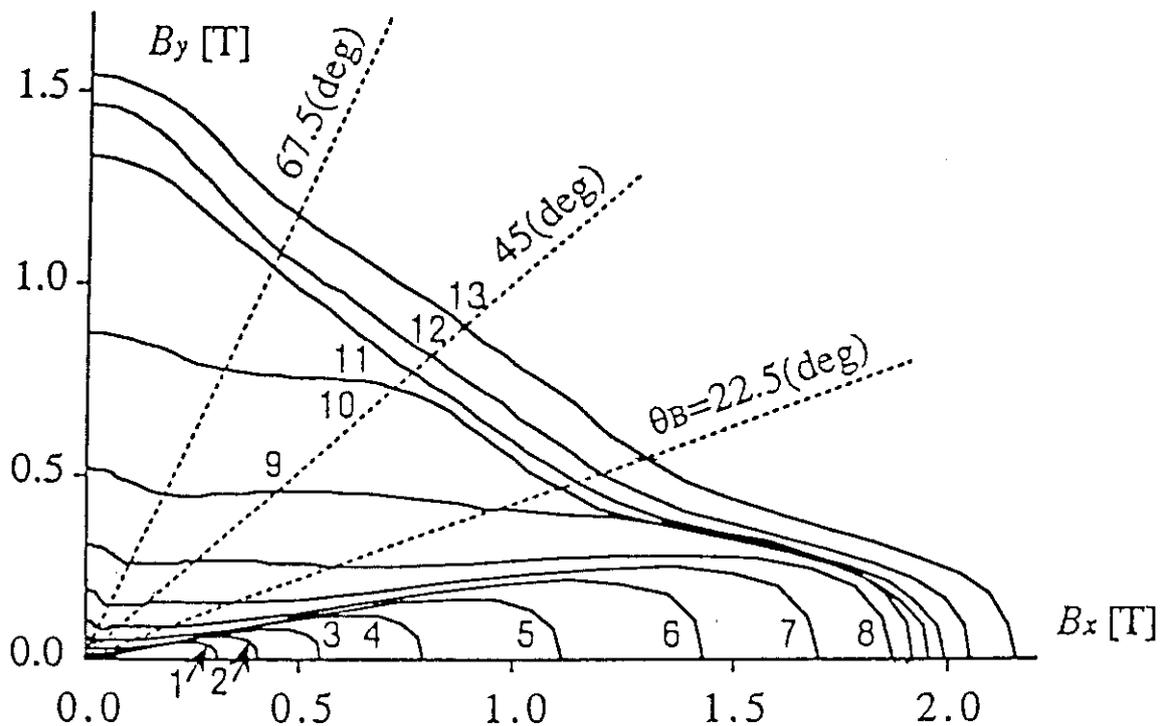
#### III.4 TENTATIVE DE REPRESENTATION DES LIGNES ISOVALEURS D'ENERGIE A PARTIR DE COURBES EXPERIMENTALES B-H [OLS-92]

Ce travail a été effectué au Département de Génie Electrique d'Okayama (Japon) par l'Equipe du Professeur T. Nakata. C'est une approche purement expérimentale fondée sur la détermination des lignes isovaleurs d'énergie magnétique dans le plan  $(B_x, B_y)$ .

Grâce à un cadre en champs tournants, du type de celui dont nous disposons au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et que nous présentons au Chapitre IV, la projection du champ magnétique  $H_B$  sur l'induction est déterminée pour cinq valeurs de l'angle  $\beta$  entre l'induction et la direction  $x$  de laminage. Ces valeurs de  $\beta$  sont  $0^\circ$ ,  $22,5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67,5^\circ$  et  $90^\circ$ , la tôle étudiée est une tôle à grains orientés (AISI M-OH). Pour chacune de ces directions  $\beta$  l'énergie magnétique est calculée pour chaque valeur de la norme de l'induction  $B$  par :

$$\omega(B) = \int_0^B H_B(B) dB \quad . \quad (III-13)$$

Ainsi pour cinq valeurs de l'angle  $\beta$ , l'énergie dans l'espace  $B_x$ - $B_y$  est calculée. Les lignes isovaleurs d'énergie sont ensuite interpolées par les auteurs, sans que ceux-ci détaillent leur méthode, à partir de ces cinq points pour en avoir une représentation dans l'espace  $B_x$ - $B_y$  (figure III.3).



**Figure III.3 :** Représentation des lignes isovaleurs d'énergie dans le plan  $B_x$ - $B_y$  déterminées expérimentalement (AISI M-OH) [OLS-92]

A partir de ces lignes isovaleurs d'énergie magnétique des réseaux de courbes B-H dans différentes directions sont restitués. Plusieurs remarques s'imposent concernant ce travail. Pour les courbes expérimentales suivant les axes long et travers, l'induction  $B$  et le champ magnétique  $H$  devraient être parallèles. Or cela est loin d'être le cas, par exemple lorsque

**B** est dans la direction de laminage ( $\beta=0^\circ$ ) pour une norme de l'induction inférieure à 1 T, l'angle entre **B** et **H** est compris entre  $50$  et  $60^\circ$  [OSL-92].

D'autre part, compte tenu de la texture de la tôle et de son caractère anhystérique  $H_x$  et  $B_x$  (respectivement  $H_y$  et  $B_y$ ) ont le même signe. Si l'induction se trouve dans un des quatre quadrants de l'espace  $B_x$ - $B_y$  le champ magnétique sera dans le même quadrant. En effet ce sont les moments dont la projection dans le plan de la tôle a l'écart angulaire le plus faible avec le champ magnétique qui fournissent l'aimantation pour chacun des axes  $x$  et  $y$ . Or la restitution des courbes isovalues d'énergie ne respecte pas toujours cela. C'est une conséquence directe du fait que les fonctions implicites des lignes isovalues  $B_y(B_x)$  de la figure III.3 ne sont pas décroissantes (en particulier les lignes de 1 à 8).

Ce travail souligne qu'il faut s'assurer que les conditions expérimentales permettent de négliger l'hystérésis pour ne pas aboutir à des contradictions. De plus, de nombreux problèmes numériques apparaissent lors de la restitution de la loi  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  à partir des lignes isovalues d'énergie. C'est ce dernier point qui a conduit ses auteurs à abandonner ce travail visant à modéliser le comportement des matériaux magnétiques en vue de la modélisation par éléments finis.

### **III.5 MODELE FONDE SUR LA REPRESENTATION DES LIGNES ISOVALEURS DE COENERGIE**

#### **III.5.1 Principe du modèle**

Nous voulons que notre modèle s'appuie sur un nombre minimal de valeurs expérimentales facilement accessibles à un utilisateur de logiciels éléments finis ne possédant pas d'appareils sophistiqués de mesures magnétiques. Ainsi pour modéliser les

tôles à grains orientés et à grains non orientés nous utilisons les courbes  $B(H)$  dans les directions long et travers où l'induction et le champ magnétique sont parallèles.

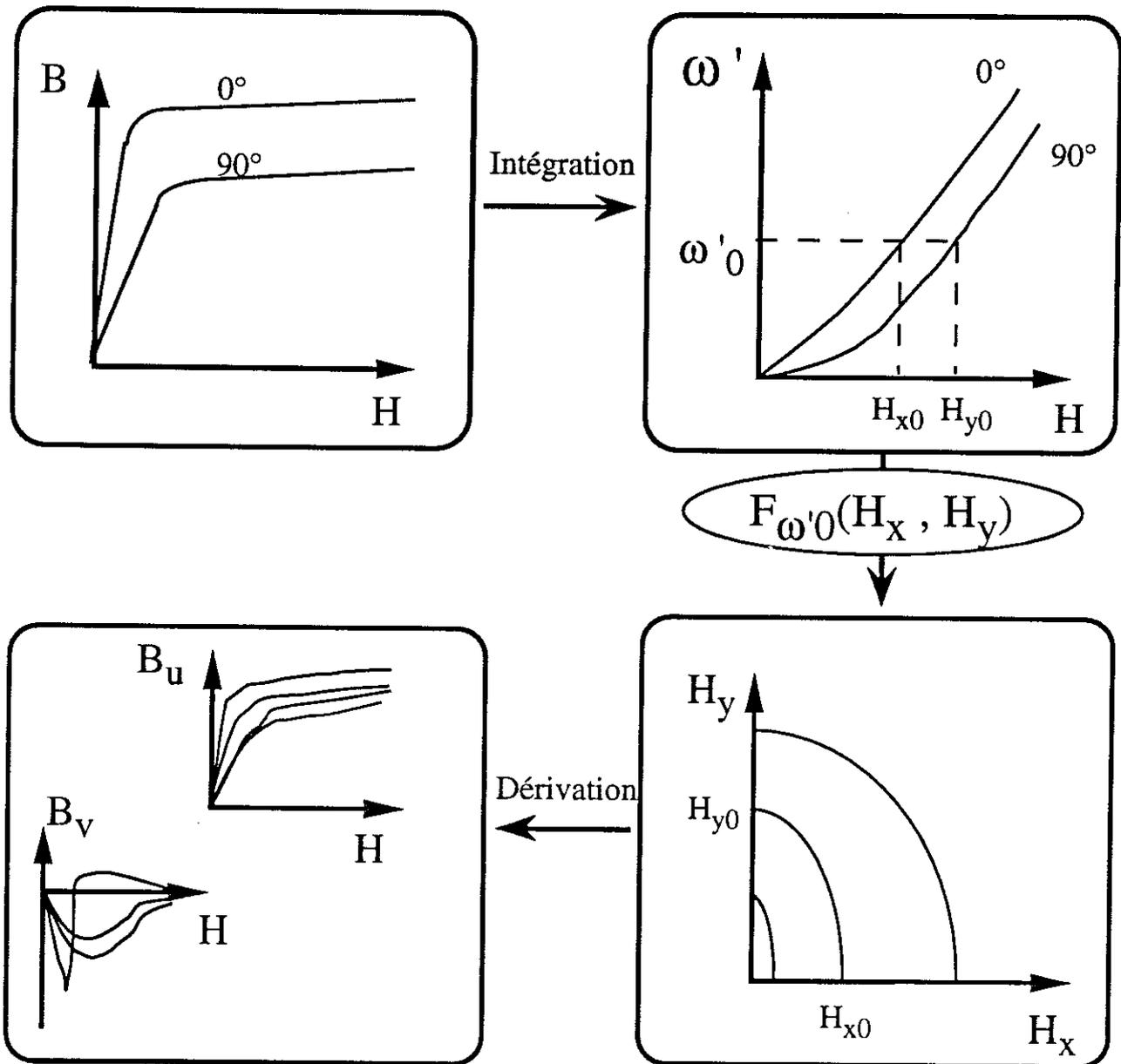


Figure III.4 : Principe du modèle

Comme le fait tout utilisateur de logiciel de C.A.O. nous considérons les courbes mesurées en courant alternatif, en prenant l'extrémité des cycles d'hystérésis, ou en courant continu comme des courbes anhystériques, réversibles. Cela constitue une approximation étant

donné que la courbe  $B(H)$  anhystérique est une courbe théorique, le travail exposé dans le paragraphe III.2 semblant quoiqu'il en soit la justifier. Les courbes expérimentales que nous utilisons pour modéliser le comportement des tôles à texture cubique sont différentes mais nous n'abordons ce point que plus tard. Nous exposons ainsi le principe du modèle en prenant uniquement les courbes expérimentales  $B(H)$  suivant la direction de laminage et celle qui lui est orthogonale (figure III.4).

Dans ces deux directions  $B$  et  $H$  sont parallèles ce qui nous permet d'obtenir par une simple intégration les valeurs de la coénergie en fonction de  $H$  pour ces deux directions. En effet, nous pouvons écrire :

$$\omega'(H_x, 0) = \int_0^{H_x} B_x(H_x, 0) \cdot dH_x \quad , \quad (\text{III-14})$$

et :

$$\omega'(0, H_y) = \int_0^{H_y} B_y(0, H_y) \cdot dH_y \quad . \quad (\text{III-15})$$

Pour une coénergie donnée  $\omega'_0$  nous pouvons définir les valeurs  $H_{x0}$  et  $H_{y0}$  par :

$$\omega'_0 = \omega'(H_{x0}, 0) = \omega'(0, H_{y0}) \quad (\text{III-16})$$

Dans l'espace  $H_x$ - $H_y$  les valeurs précédentes  $H_{x0}$  et  $H_{y0}$  nous permettent de connaître l'intersection de la ligne isovaleur de coénergie  $\omega'_0$  avec les axes principaux du repère. Le principe de notre modèle est alors de déterminer une équation  $F_{\omega'_0}(H_x, H_y) = 0$  représentant une ligne isovaleur pour  $\omega'(H_x, H_y) = \omega'_0$ . En tout point de l'espace  $H_x$ - $H_y$  la coénergie est ainsi définie. En pratique pour des raisons de symétrie nous ne nous intéressons qu'au quart de plan où les valeurs de  $H_x$  et de  $H_y$  sont positives. A partir de cette répartition des

lignes isovaleurs, des opérations de dérivations numériques nous fournissent la relation vectorielle entre **B** et **H** dans un repère donné (**u,v**).

Les propriétés physiques liées aux mécanismes d'aimantation sont prises en compte par l'équation  $F_{\omega'}(H_x, H_y) = 0$ . Avant de déterminer cette fonction, nous examinons brièvement comment les opérations numériques sont effectuées.

### III.5.2 Restitution numérique. Aspects pratiques

Les aspects numériques sont fondamentaux pour l'application de ce modèle. Nous les abordons succinctement ici en soulignant les méthodes et les techniques employées.

Une simple intégration numérique des courbes expérimentales fournit la coénergie suivant les deux directions. Nous utilisons la méthode de Gauss.

Contrairement à l'intégration numérique, la dérivation numérique est source d'instabilité et d'oscillation. L'outil d'interpolation et de dérivation le plus utilisé en pratique est la méthode spline cubique, mais nous lui avons préféré la méthode d'Akima qui nous semble plus performante [AKI-70]. Dans les deux méthodes la fonction  $f(x)=y$  passant par des points donnés  $(x_i, y_i)$  est composée de fonctions polynomiales de degré trois par morceaux et applicables entre chaque intervalle défini par ces points. Mais la méthode d'Akima est fondée sur une procédure locale. La pente de la courbe  $f(x_i)=y_i$  est calculée en chaque point à partir des coordonnées des deux points précédents et des deux points suivants (figure III.5) :

$$y'_i = \frac{|m_{i+1}-m_i| m_{i-1} + |m_{i-1}-m_{i-2}| m_i}{|m_{i+1}-m_i| + |m_{i-1}-m_{i-2}|}, \quad (\text{III-17})$$

avec :

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{III-18})$$

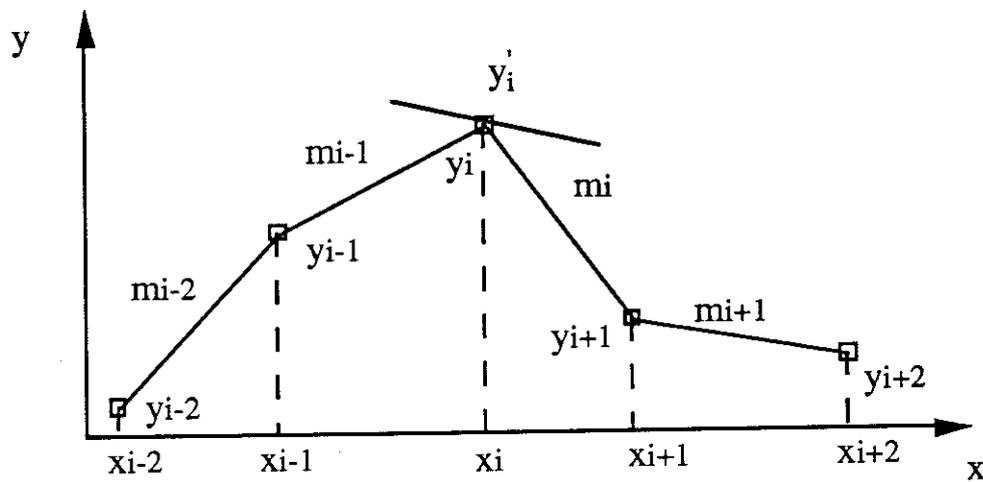


Figure III.5 : Méthode d'Akima, détermination de  $y'_i$

Chaque polynôme du troisième ordre représentant une portion de la courbe entre deux points est défini par les coordonnées et les pentes de ces points. La courbe ainsi interpolée est proche de celle que l'on obtient en opérant un tracé manuel. La dérivée de la courbe en tout point est facilement accessible par la dérivée des polynômes par morceaux. L'immense avantage de cette méthode par rapport à la méthode spline cubique vient de son caractère local qui évite les oscillations numériques.

L'outil d'interpolation et de dérivation étant décrit, examinons comment s'opère la restitution du vecteur  $\mathbf{B}$  à partir de la connaissance des lignes isovaleurs de coénergie dans le plan  $H_x$ - $H_y$ . L'induction s'obtient en calculant le gradient de la coénergie dans l'espace du champ magnétique. Le problème est que les dérivations numériques sont sources d'erreur et le calcul de l'induction par les formules :

$$B_x = \frac{\partial \omega'}{\partial H_x} \quad (\text{III-19})$$

et

$$B_y = \frac{\partial \omega'}{\partial H_y} . \quad (\text{III-20})$$

sans précaution particulière n'aboutit pas à des résultats exploitables. Afin de limiter ces erreurs de dérivation nous travaillons dans un repère  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  lié au champ magnétique  $\mathbf{H}$  (figure III.6).

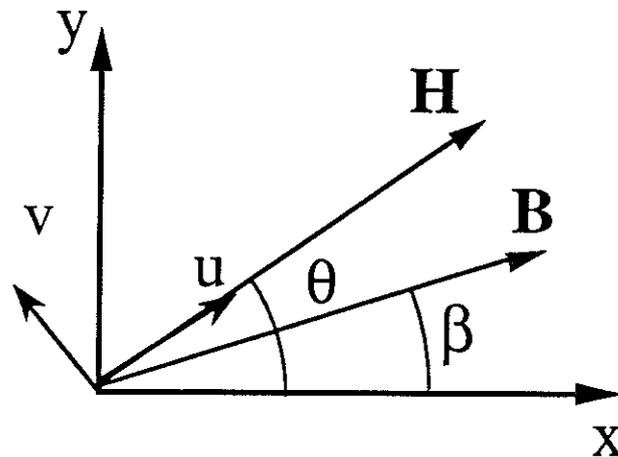


Figure III.6 : Définition du repère  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

L'induction  $\mathbf{B}$  s'exprime dans ce repère en fonction de ses coordonnées  $B_u$  et  $B_v$  qui sont deux fonctions du champ magnétique  $\mathbf{H}(H, \theta)$ . La coénergie s'écrit alors :

$$\omega'(\mathbf{H}) = \omega'(H, \theta) = \int_0^H B_u dH . \quad (\text{III-21})$$

La relation précédente nous permet de déterminer la composante  $B_u$  par :

$$B_u = \frac{\partial \omega'(H, \theta)}{\partial H} . \quad (\text{III-22})$$

Ainsi à partir des lignes isovaleurs de coénergie dans l'espace  $H_x$ - $H_y$ ,  $B_u$  est calculé grâce à une dérivation numérique (méthode d'Akima) pour une valeur constante de l'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et la direction de laminage. La composante  $B_v$  peut être déterminée par la relation :

$$B_v = \frac{1}{H} \frac{\partial \omega'(H, \theta)}{\partial \theta} . \quad (\text{III-23})$$

Cependant il est beaucoup plus simple de déterminer la direction de l'induction  $\mathbf{B}$  qui est la même que la direction du gradient de  $F_{\omega'}(H_x, H_y)$  pour une coénergie donnée car ce gradient est orthogonal à la ligne isovaleur de coénergie au point  $\mathbf{H}(H, \theta)$  (figure III.7). La direction de  $\mathbf{B}$  et la valeur  $B_u$  nous permettent alors de déterminer  $B_v$  :

$$B_v(H, \theta) = B_u(H, \theta) \cdot \text{tg}(\beta - \theta) .$$

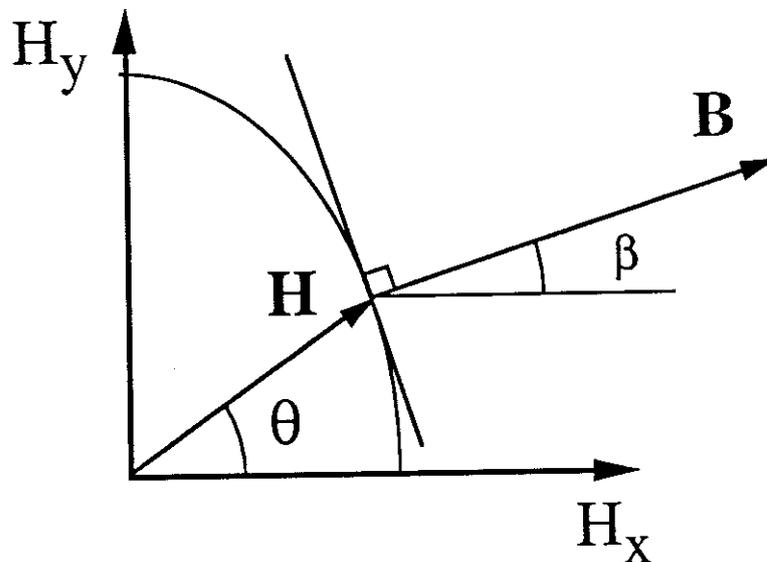


Figure III.7 : Direction de l'induction  $\mathbf{B}$

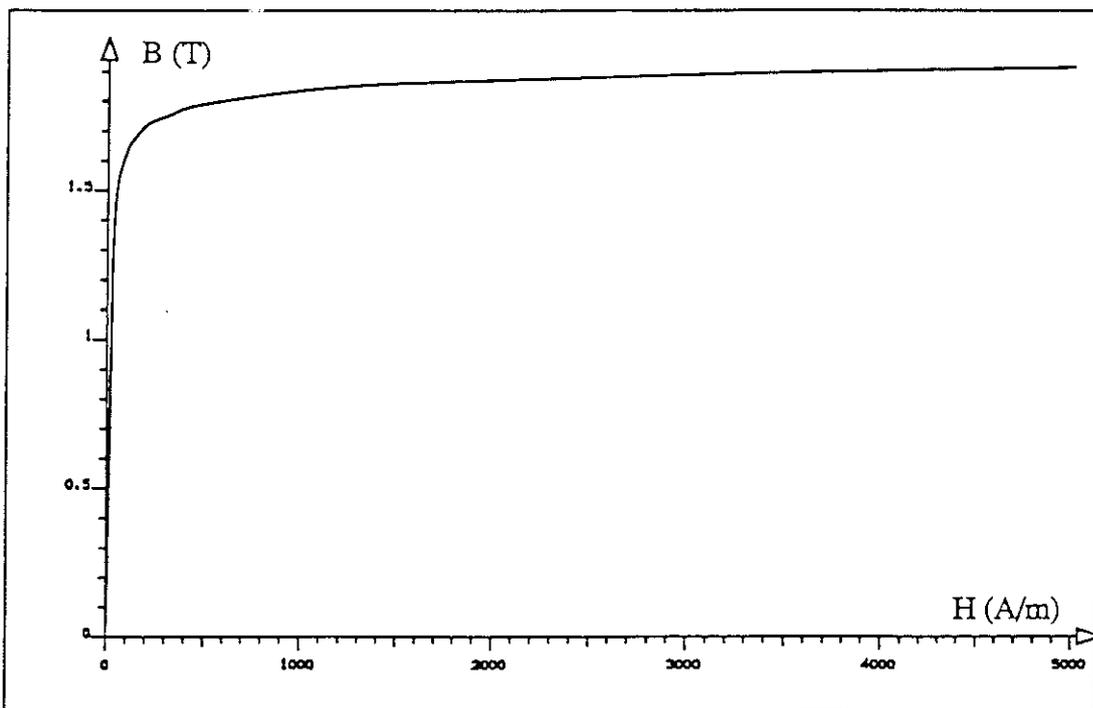
Afin d'examiner le comportement numérique de la méthode nous simulons un matériau isotrope en prenant pour identifier le modèle la même caractéristique  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  suivant les axes

long et travers. Les courbes  $B(H)$  sont identiques pour tout angle  $\theta$ , ainsi les lignes isovaleurs de coénergie sont des cercles ( $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  parallèles) :

$$F_{\omega_0}(H_x, H_y) = \frac{(H_x^2 + H_y^2)}{H_{x0}^2} - 1 = 0, \quad (\text{III-24})$$

avec  $H_{x0} = H_{y0}$  dans ce cas.

La restitution de la courbe  $B(H)$  pour différentes directions ( $\theta=0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ) montre le bon comportement numérique de la méthode : les six courbes sont confondues (figure III.8).



*Figure III.8 : Matériau isotrope ( $\theta=0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ )*

### III.5.3 Représentation générale des lignes isovaleurs de coénergie

Les outils numériques ayant été décrits, il nous faut déterminer l'équation,  $F_{\omega'_0}(H_x, H_y) = 0$ , des lignes isovaleurs de coénergie dans l'espace  $H_x$ - $H_y$ . Nous donnons ici la forme générale que nous avons choisie afin de représenter différents matériaux.

Pour modéliser les lignes isovaleurs de coénergie dans le cas général, nous disposons des informations suivantes.

a) Nous connaissons les caractéristiques magnétiques expérimentales  $B(H)$  dans la direction de laminage (axe  $x$ ) et dans la direction travers (axe  $y$ ). Cela nous permet d'avoir facilement les valeurs de la coénergie  $\omega'$  suivant ces axes, l'induction et le champ magnétique  $y$  étant parallèles :

$$\omega'(H) = \int_0^H B dH . \quad (\text{III-25})$$

Ainsi pour une ligne isovaleur de coénergie  $\omega'_0$  donnée nous connaissons, grâce à des mesures expérimentales, deux points particuliers  $(H_{x0}, 0)$  et  $(0, H_{y0})$  tels que :

$$F_{\omega'_0}(H_{x0}, 0) = 0 = F_{\omega'_0}(0, H_{y0}) . \quad (\text{III-26})$$

b) Le fait que suivant les axes  $x$  et  $y$  l'induction et le champ magnétique soient parallèles implique que :

$$\frac{\partial F_{\omega'_0}(H_{x0}, 0)}{\partial H_y} = 0 = \frac{\partial F_{\omega'_0}(0, H_{y0})}{\partial H_x} . \quad (\text{III-27})$$

Les lignes isovaleurs de coénergie magnétique sont localement orthogonales aux axes  $H_x$  et  $H_y$ .

c) L'hypothèse du caractère anhystérique ainsi que le fait que la direction de laminage et la direction travers soient des axes de symétrie au niveau cristallographique imposent que les valeurs  $H_x$  et  $B_x$  (respectivement  $H_y$  et  $B_y$ ) aient le même signe. Autrement dit les vecteurs induction  $\mathbf{B}$  et champ magnétique  $\mathbf{H}$  sont dans le même quadrant. Nous savons que pour un point  $\mathbf{H}$  donné,  $\mathbf{B}$  est orthogonal à la tangente à la ligne isovaleur de coénergie en ce point. La proposition précédente signifie donc que dans le quart de plan considéré (premier quadrant), la fonction implicite  $H_y(H_x)$  décrivant une ligne isovaleur de coénergie est décroissante.

d) Une caractéristique importante du comportement des tôles magnétiques anisotropes utilisées en électrotechnique est évidemment l'existence d'une direction de difficile aimantation au niveau macroscopique. Dans une direction de difficile aimantation  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont parallèles, nous pouvons dire aussi que la norme  $H$  du vecteur champ magnétique qui décrit une ligne isovaleur de coénergie présente un maximum. Pour une coénergie donnée  $\omega'_0$  la norme de  $\mathbf{H}$  est maximale dans la direction de difficile aimantation. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial H(\omega'_0, \theta_d)}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (\text{III-28})$$

où la direction de difficile aimantation est définie par l'angle  $\theta_d$  par rapport à la direction de laminage.

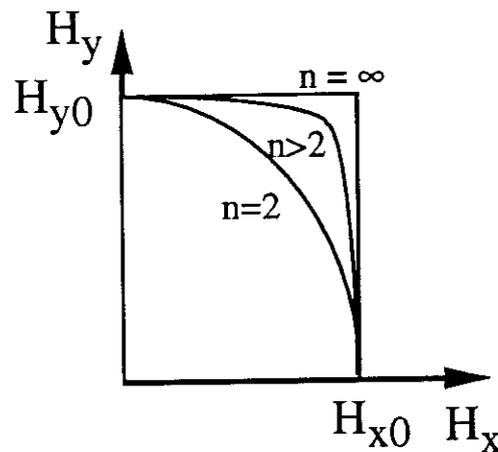
Nous avons trouvé quatre critères que doit satisfaire chaque ligne isovaleur de coénergie et ceci pour tous les matériaux que nous souhaitons modéliser. En tenant compte de ces

considérations nous avons choisi pour représenter les lignes isovaleurs de coénergie des fonctions de la forme :

$$F_{\omega_0}(H_x, H_y) = \frac{H_x^n}{H_{x0}^n} + \frac{H_y^n}{H_{y0}^n} - 1 = 0 \quad , \quad (\text{III-29})$$

$n$  est une fonction réelle de la coénergie dont les valeurs sont positives et supérieures strictement à 1. On vérifie facilement que ces fonctions remplissent les trois conditions a), b) et c). La valeur de  $n$  est déterminée en pratique à partir de considérations sur la direction de difficile aimantation pour remplir la condition d).

Le paramètre  $n$  permet de faire varier la forme des lignes isovaleurs de coénergie (figure III.9).



*Figure III.9 : Représentation  $F_{\omega_0}(H_x, H_y) = 0$  pour différentes valeurs de  $n$*

Lorsque  $n$  est égal à 2 la ligne isovaleur de coénergie est une ellipse et lorsque  $n$  est infini la ligne isovaleur de coénergie est un rectangle.

### III.5.4 Modèle 2D pour différents matériaux

Nous avons établi une équation donnant la forme des lignes isovaleurs de coénergie dans le cas général. Dans cette partie nous décrivons comment nous déterminons la fonction  $n(\omega')$  en fonction des différents types de tôles magnétiques. Nous présentons également les caractéristiques  $B(H)$  restituées par le modèle pour différentes directions du champ magnétique.

#### - Tôles à grains orientés

Ce travail est le sujet de [PER-93.1].

Pour ce type de matériau nous faisons évoluer le paramètre  $n$  en fonction de la coénergie afin de prendre en compte la direction macroscopique de difficile aimantation. Cette direction doit être déterminée or cela n'est pas évident car comme nous l'avons souligné au Chapitre II elle ne coïncide pas toujours avec la direction cristallographique de difficile aimantation à  $54,7^\circ$  par rapport à la direction de laminage (direction [111] des cristaux), en particulier pour des champs faibles lorsque les mécanismes de déplacement de parois sont prépondérants. Du fait notamment des effets démagnétisants des moments magnétiques à  $45^\circ$ , les domaines créant une induction suivant la direction travers sont défavorisées par rapport aux domaines dont les parois sont parallèles à la direction long. Ainsi en champ faible la direction de difficile aimantation est d'autant plus proche de la direction travers que la coénergie stockée est faible. Pour des champs plus forts les mécanismes d'aimantation fondés sur les déplacements de parois ont une moindre importance et la direction de difficile aimantation cristallographique se confond avec la direction de difficile aimantation macroscopique au niveau de la tôle. Elle est égale à  $54,7^\circ$ , valeur que nous appelons  $\theta_1$ . Les considérations théoriques précédentes sont confirmées expérimentalement au Chapitre IV. Pour déterminer  $n$  nous avons besoin d'introduire l'angle  $\alpha$  qui est une fonction de la coénergie  $\omega'_0$ , tel que (figure III.10) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H_{y0}}{H_{x0}} \quad (\text{III-30})$$

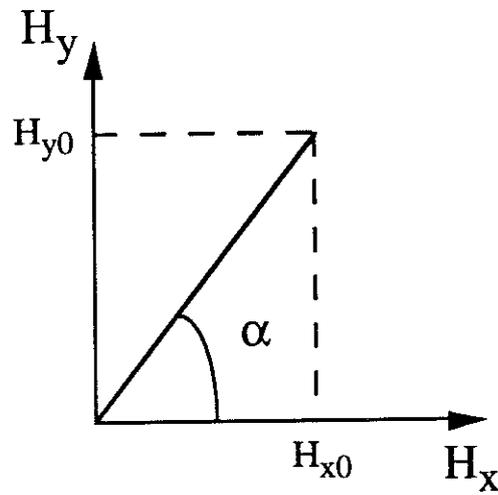


Figure III.10 : Définition de la fonction  $\alpha(\omega'_0)$

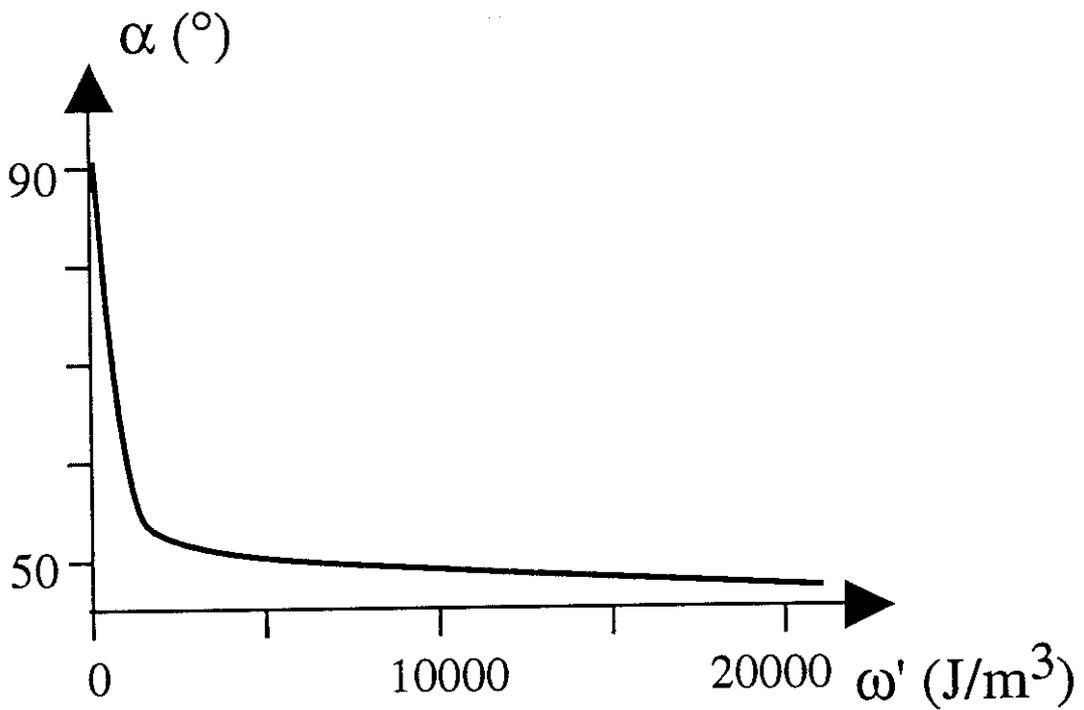


Figure III.11 :  $\alpha$  en fonction de la coénergie  $\omega'$  calculé à partir de courbes expérimentales (Thyssen-OrsiIII-0,35 mm)

Cet angle est l'angle entre la direction de laminage dans l'espace  $H_x$ - $H_y$  avec la diagonale du rectangle formé par les axes principaux avec les droites  $H_x=H_{x0}$  et  $H_y=H_{y0}$ . Cet angle est une fonction de la coénergie entièrement défini expérimentalement par les courbes  $B(H)$  suivant les directions long et travers. La figure III.11 donne la variation de  $\alpha$  en fonction de la coénergie pour un matériau à grains orientés conventionnel (tôle Thyssen-OrsiIII-0,35 mm), les courbes expérimentales utilisées étant des courbes constructeurs.

Cette courbe est un exemple particulier mais sa forme peut être généralisée pour toute tôle à grains orientés. En particulier la fonction  $\alpha$  est une fonction décroissante de la coénergie. Pour une coénergie nulle sa valeur est proche de  $90^\circ$  et tend, sans jamais l'atteindre, vers  $45^\circ$  pour des coénergies tendant vers l'infini. Nous avons toujours  $H_{y0}$  supérieur à  $H_{x0}$ . Nous distinguons deux cas suivant la position de  $\alpha$  par rapport à l'angle  $\theta_1 = 54,7^\circ$ .

Dans le premier cas pour des valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $\theta_1$ , c'est-à-dire pour des valeurs faibles de la coénergie,  $\theta_1$  ne peut pas être la direction macroscopique de difficile aimantation. La norme du champ magnétique décrivant une ligne isovaleur de coénergie ne peut pas présenter de maximum dans cette direction. Nous pouvons démontrer cela par l'absurde (figure III.12).

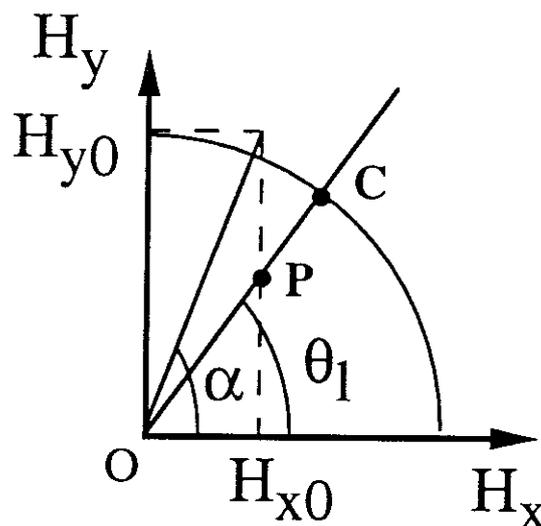


Figure III.12 : Cas  $\alpha > \theta_1$

Si  $\theta_1 = 54,7^\circ$  est la direction de difficile aimantation, essayons de déterminer l'intersection  $M$  entre cette direction et la ligne isovaleur de coénergie  $\omega'_0$  passant par  $(0, H_{y0})$  et  $(H_{x0}, 0)$ . C'est dans cette direction que le module de  $\mathbf{H}$  est maximum donc nécessairement il est supérieur à  $H_{y0}$ . Le point  $M$  est donc sur la droite  $(OC)$  mais à l'extérieur du segment  $[OC]$  (le point  $C$  est défini par l'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon  $H_{y0}$  avec la droite  $\theta = \theta_1$ ). Mais nous avons vu que la fonction implicite  $H_y(H_x)$  de la ligne isovaleur de coénergie  $\omega'_0$  est une fonction décroissante, le point  $M$  doit donc se situer sur le segment  $[OP]$  (le point  $P$  est l'intersection entre la droite  $H_x = H_{x0}$  et la droite  $\theta = \theta_1$ ). Mais si  $M$  se situe sur le segment  $[OP]$  il ne peut se situer à l'extérieur du segment  $[OC]$ . L'absurde nous a rejoint. L'hypothèse de départ est à rejeter, la direction de difficile aimantation cristallographique à  $54,7^\circ$  par rapport à la direction de laminage ne peut pas être la direction de difficile aimantation macroscopique de la tôle et cela pour des valeurs de la coénergie correspondant à un angle  $\alpha$  supérieur à  $54,7^\circ$ . Ce petit raisonnement théorique fondé sur le caractère anhystérétique du matériau et sur la connaissance des deux courbes  $B(H)$  suivant les directions long et travers confirme des considérations physiques sur la répartition en domaines ainsi que des données expérimentales.

Par un raisonnement analogue on peut montrer que la direction de difficile aimantation est, pour une coénergie donnée, comprise entre  $\alpha$  et  $90^\circ$ . Ainsi pour de faibles valeurs de la coénergie nous prenons comme direction de difficile aimantation l'angle  $\alpha$ . Les lignes isovaleurs de coénergie sont alors des rectangles et la valeur de  $n$  est infinie. Cela définit ce que nous appelons un découplage des axes  $x$  et  $y$  au niveau des processus d'aimantation. Pour une coénergie  $\omega'_0$  donnée, si l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{H}$  et la direction de laminage est inférieur à  $\alpha$  l'induction  $\mathbf{B}$  est aligné sur la direction de laminage, dans le cas contraire  $\mathbf{B}$  est aligné sur la direction travers.

La description précédente pour des valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $54,7^\circ$  est valable sur une courte plage de faibles valeurs de la coénergie. La majeure partie de la courbe

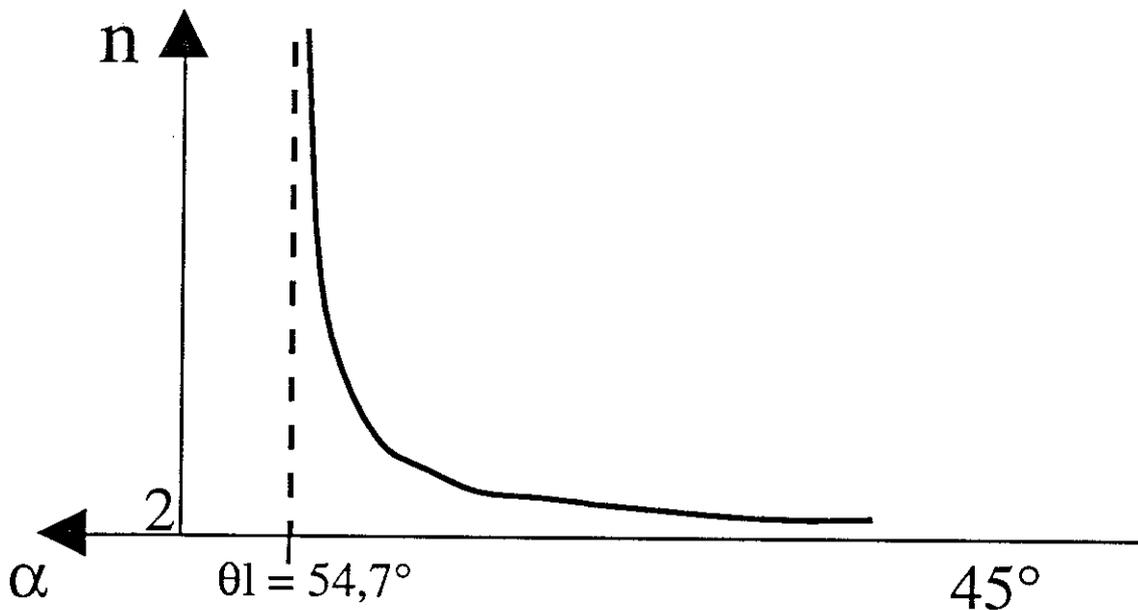
d'aimantation se situe pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures à  $54,7^\circ$ . Dans cette plage la valeur  $\theta_1 = 54,7^\circ$  peut être la direction de difficile aimantation de la tôle nous la prenons comme telle. En écrivant que  $54,7^\circ$  est la direction de difficile aimantation, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial H(\theta_1, \omega'_0)}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{III-31})$$

nous en déduisons la valeur de  $n$  :

$$n = \frac{2 \cdot \ln(\text{tg}\theta_1)}{\ln(\text{tg}\theta_1) - \ln(\text{tg}\alpha)}. \quad (\text{III-32})$$

Par l'intermédiaire de la fonction  $\alpha$ ,  $n$  est une fonction de la coénergie  $\omega'_0$ . Pour  $\alpha = \theta_1 = 54,7^\circ$  l'équation précédente donne  $n = \infty$  ce qui est cohérent avec le cas antérieur. La figure III.13 donne  $n$  en fonction de  $\alpha$ .



*Figure III.13 : Allure de  $n$  en fonction de  $\alpha$*

La forme des lignes isovaleurs de coénergie évolue du rectangle à l'ellipse lors de l'augmentation de la coénergie (figure III.14).

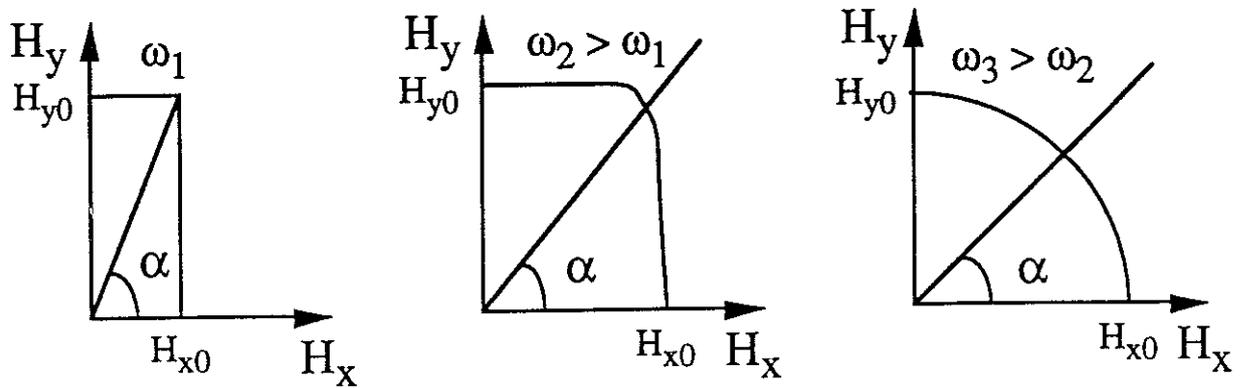


Figure III.14 : Evolution de la forme des lignes isovaleurs de coénergie pour une tôle à grains orientés

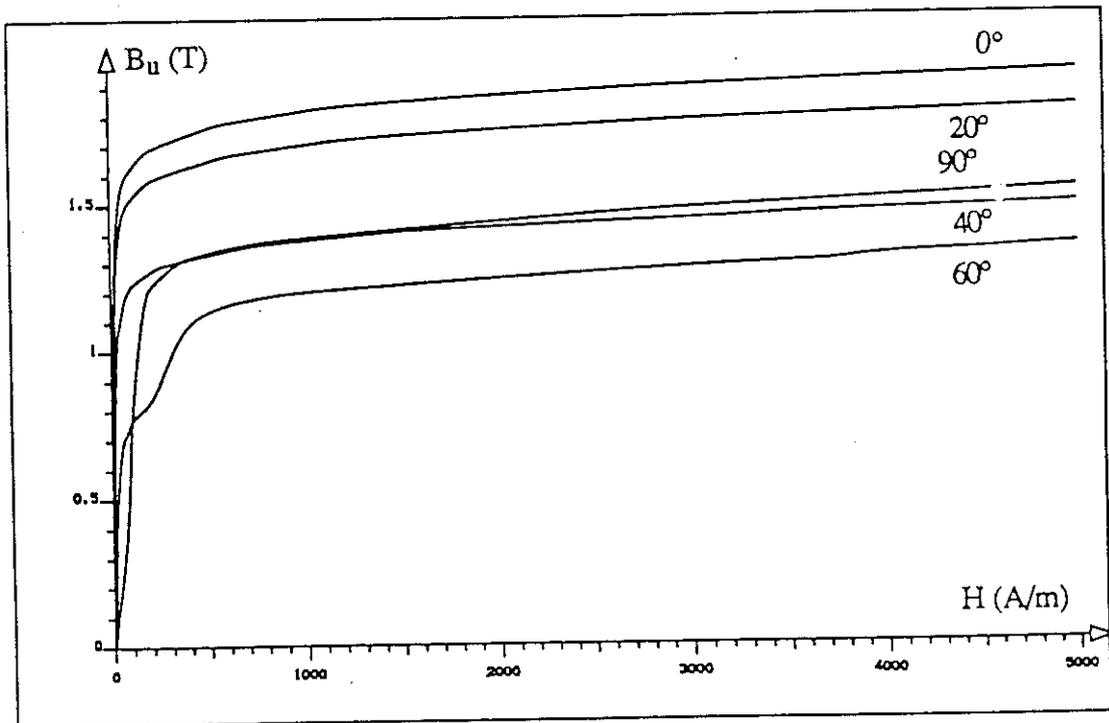
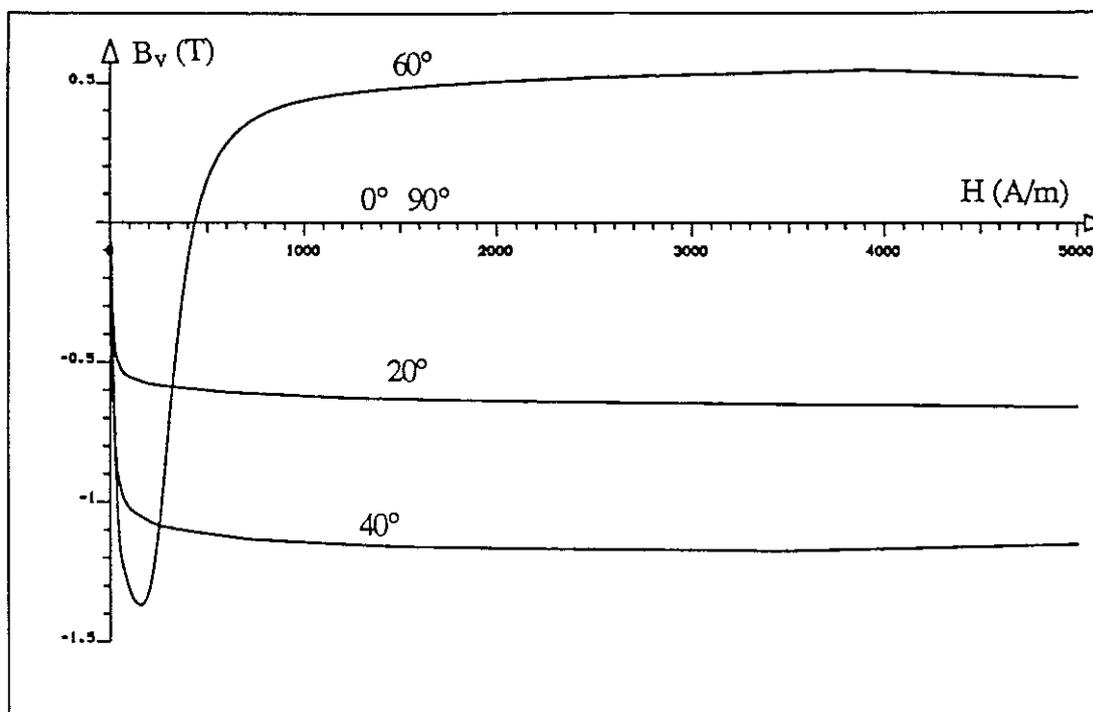


Figure III.15 : Courbes  $B_u(H)$  pour une tôle à grains orientés (Thyssen-Orsi III) pour  $\theta=0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$



*Figure III.16 : Courbes  $B_v(H)$  pour une tôle à grains orientés (Thyssen-Orsi III) pour  $\theta=0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$*

Les fonctions  $F_{\omega'0}(H_x, H_y)$  sont maintenant parfaitement définies, le modèle peut être appliqué pour des tôles à grains orientés. Les figures III.15 et III.16 donnent les courbes  $B_u(H)$  et  $B_v(H)$  restituées pour une tôle à grains orientés (Thyssen-OrsiIII-0,35mm) pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et la direction de laminage.

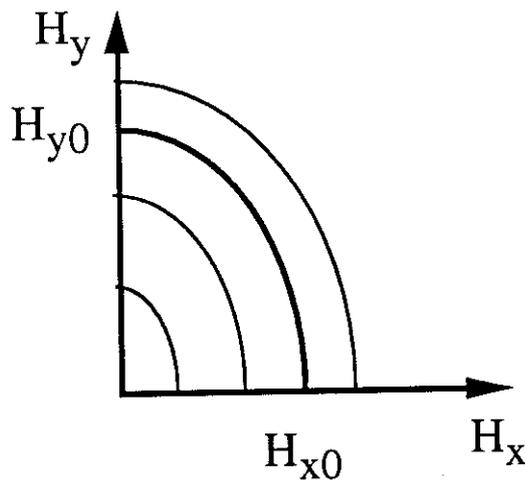
- Tôles à grains non orientés

Ce type de tôle ne possède pas de texture prononcée. La direction de laminage est une direction de facile aimantation, la direction travers qui lui est orthogonale est la direction de

difficile aimantation. Pour un matériau idéalement isotrope les lignes isovaleurs de coénergie sont des cercles. Les tôles à grains non orientés, contrairement à ce que peut indiquer leur nom, possèdent une légère texture aussi nous considérons des ellipses pour modéliser les lignes isovaleurs de coénergie. Nous prenons donc  $n=2$  quelle que soit la valeur de la coénergie. L'équation des lignes isovaleurs de coénergie est :

$$F_{\omega_0}(H_x, H_y) = \frac{H_x^2}{H_{x0}^2} + \frac{H_y^2}{H_{y0}^2} . \quad (\text{III-33})$$

Les lignes de coénergie sont des ellipses de grand axe  $H_y$  et de petit axe  $H_x$  (figure III.17).



*Figure III.17 : Lignes isovaleurs de coénergie pour un matériau à grains non orientés*

Les figures III.18 et III.19 donnent les courbes  $B_u(H)$  et  $B_v(H)$  restituées pour une tôle à grains non orientés classique FeV250-50HA pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et la direction de laminage.

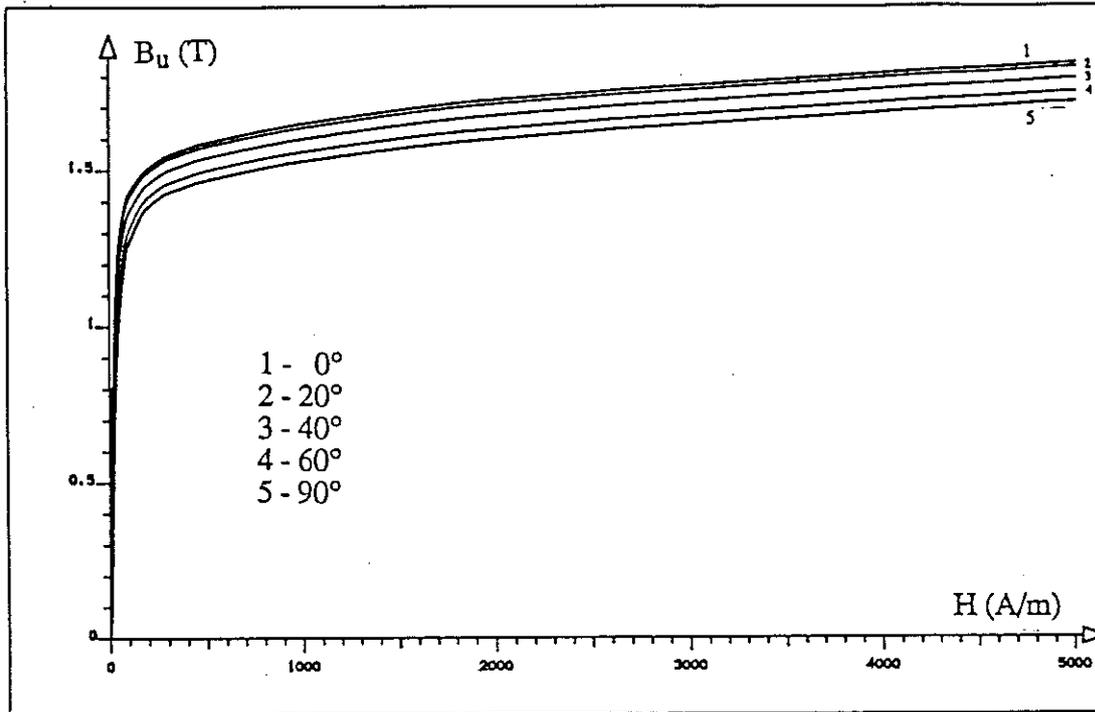


Figure III.18 : Courbes  $B_u(H)$  pour une tôle à grains non orientés pour  $\theta = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$

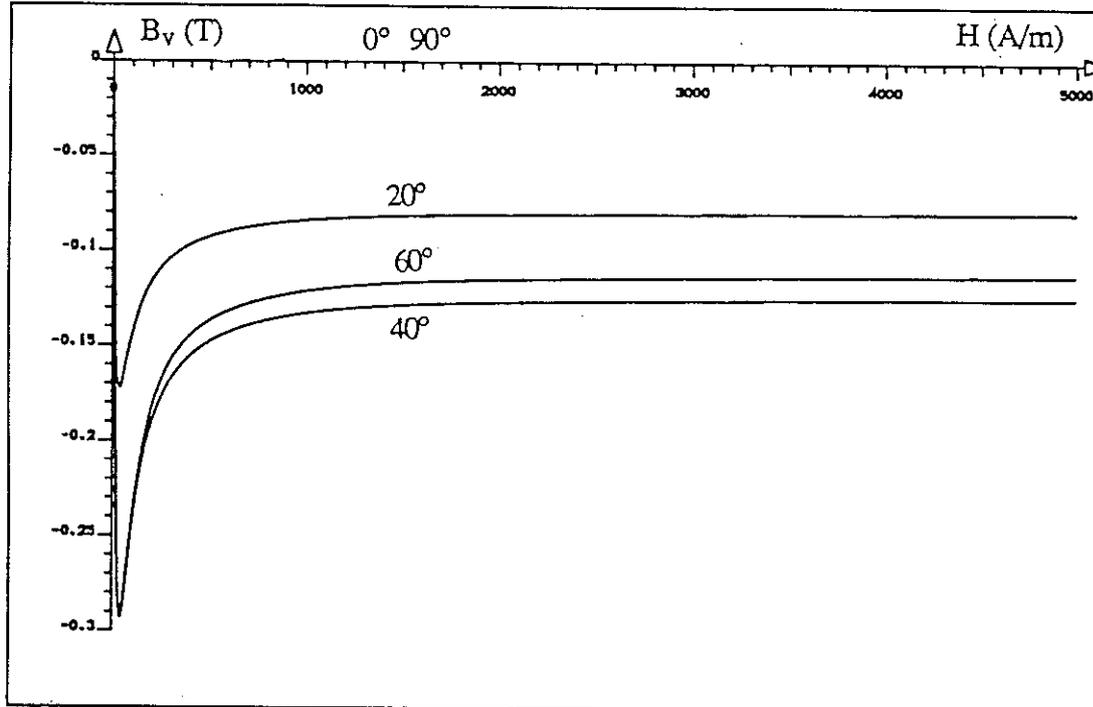


Figure III.19 : Courbes  $B_v(H)$  pour une tôle à grains non orientés pour  $\theta = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$

- Tôles à texture cubique

Ce travail est le sujet de [PER-94.3].

Dans le cas d'une tôle à texture cubique idéale les courbes  $B(H)$  dans les directions long et travers sont les mêmes. Ces directions constituent les directions de facile aimantation. Les moments magnétiques créant une induction dans le plan de la tôle sont orthogonaux et situés dans le plan de la tôle. Ainsi (cf. Chapitre II) l'induction et le champ magnétique sont parallèles en bas champ lors du processus de déplacement de parois. Pour des champs plus forts la direction de difficile aimantation de la tôle est la direction de difficile aimantation cristallographique à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage.

Expérimentalement [MEK-94] les courbes long et travers sont sensiblement les mêmes, nous les assimilons à leurs courbes moyennes. L'esprit du modèle s'en trouve changé légèrement car les valeurs du champ sur les axes  $H_x$ - $H_y$  pour une même coénergie sont identiques  $H_{x0}=H_{y0}$ . Nous prenons pour équations des lignes isovaleurs de coénergie  $\omega'_0$ :

$$F_{\omega'_0}(H_x, H_y) = \frac{H_x^n}{H_{x0}^n} + \frac{H_y^n}{H_{y0}^n}, \quad (\text{III-34})$$

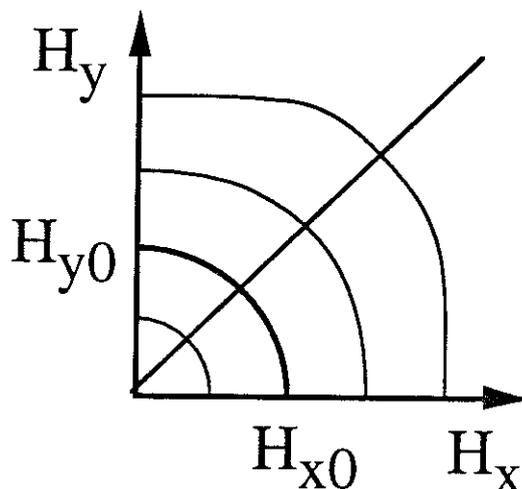
avec  $H_{x0} = H_{y0}$ .

Pour toute valeur de  $n$  supérieure à 2,  $45^\circ$  est une direction de difficile aimantation. Afin de déterminer la fonction  $n$  nous avons besoin de la courbe expérimentale  $B(H)$  à  $45^\circ$ . L'induction et le champ magnétique étant parallèles dans cette direction [MEK-94] une simple intégration nous donne pour une coénergie  $\omega'_0$  donnée la valeur  $H_{xy0}$  de la norme du champ magnétique à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage. En écrivant que pour

une coénergie  $\omega'_0$  la ligne isovaleur de coénergie passe par le point  $H(H_{xy0}, 45^\circ)$  nous en déduisons les valeurs de  $n$  :

$$n = \frac{\ln 2}{\ln \left( \frac{\sqrt{2} H_{x0}}{H_{xy0}} \right)} \quad (\text{III-35})$$

Pour de faibles valeurs de la coénergie  $H_{x0} = H_{xy0}$ ,  $n$  est donc égal à 2, le matériau se comporte comme un matériau isotrope. Pour des valeurs plus élevées  $H_{x0}$  est inférieur à  $H_{xy0}$  la direction de difficile aimantation à  $45^\circ$  apparaît nettement (figure III.20).



*Figure III.20 : Schématisation des lignes isovaleurs de coénergie pour un matériau à texture cubique*

Pour assurer l'existence de valeurs de  $n$  nous devons avoir la relation suivante quelle que soit la valeur de la coénergie:

$$H_{x0} \geq H_{xy0} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{III-36})$$

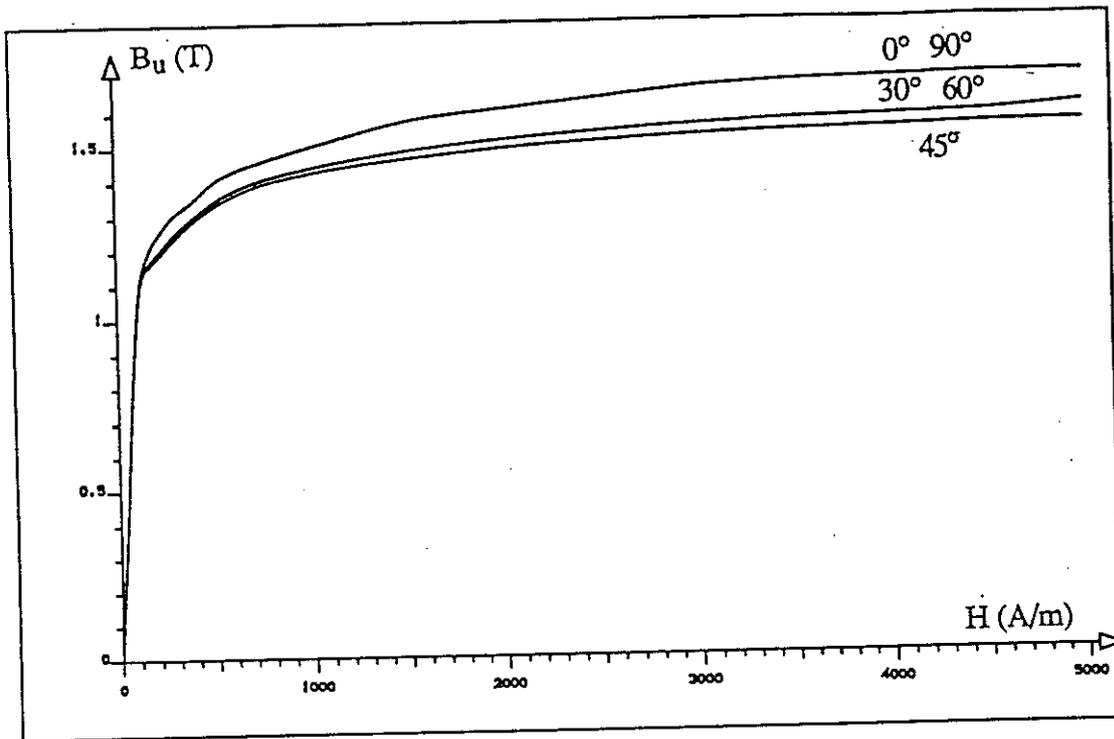


Figure III.21 : Courbes  $B_u(H)$  pour une tôle à texture cubique pour  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

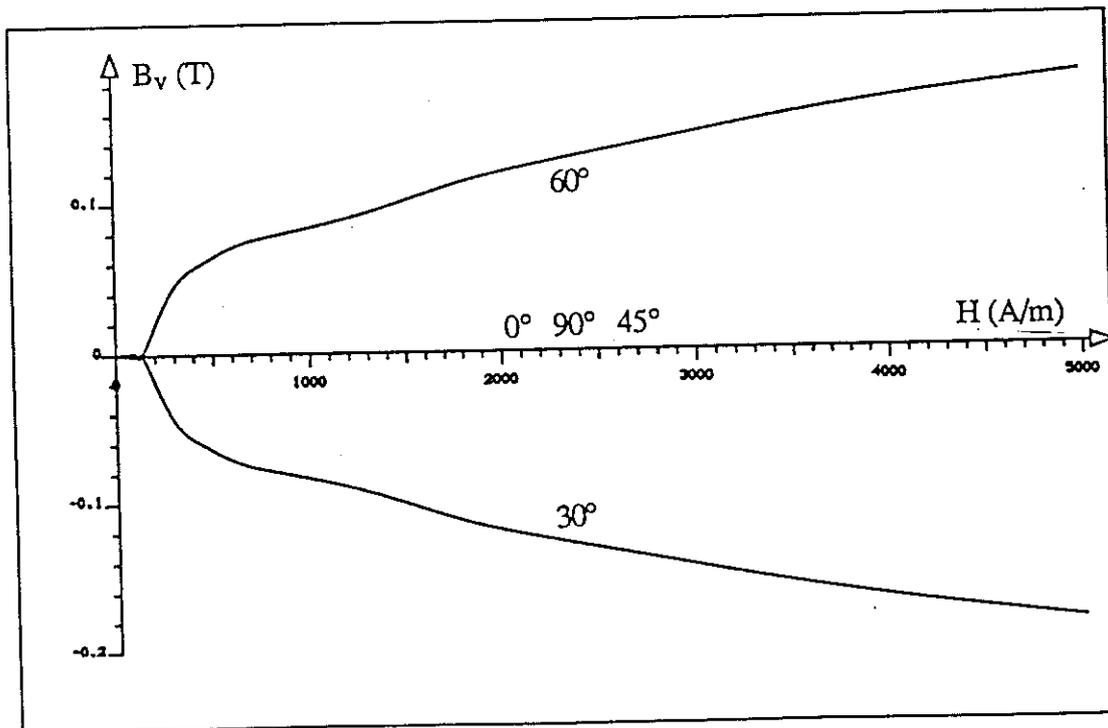
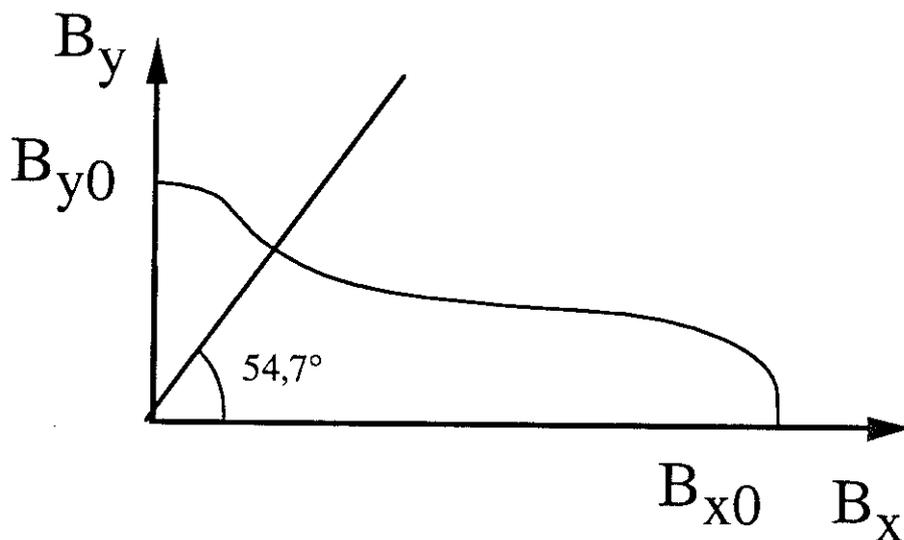


Figure III.22 : Courbes  $B_v(H)$  pour une tôle à texture cubique pour  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Cette relation peut être considérée comme un critère assurant le caractère anhystérique des mesures ainsi que le caractère cubique de la texture de la tôle. Cela est le cas pour les mesures que nous avons utilisées.

Les figures III.21 et III.22 donnent les courbes  $B_u(H)$  et  $B_v(H)$  restituées pour une tôle à texture cubique fabriquée au L.E.G. pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et la direction de laminage.

### III.5.5 Utilisation de l'énergie : est-ce envisageable ?



*Figure III.23 : Schéma d'une ligne isovaleur d'énergie pour une tôle à grains orientés*

A partir de deux courbes expérimentales  $B(H)$  dans deux directions privilégiées des tôles nous sommes capables grâce à une fonction analytique adéquate d'avoir une représentation de la coénergie  $\omega'$  dans le plan  $H_x-H_y$ . Nous avons ainsi pu déterminer le vecteur induction  $\mathbf{B}$  en fonction du vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Il serait intéressant de pouvoir faire l'opération inverse, c'est-à-dire de déterminer  $\mathbf{H}$  à partir de  $\mathbf{B}$ . Cela revient à

modéliser l'énergie magnétique  $\omega$  dans l'espace  $B_x$ - $B_y$  de l'induction, ce qui est théoriquement envisageable. Pour une énergie constante  $\omega_0$ , les valeurs correspondantes  $B_{x0}$  et  $B_{y0}$  de l'induction sur les axes  $x$  et  $y$  peuvent être déduites des courbes expérimentales. Une direction de difficile aimantation est alors une direction pour laquelle la norme de l'induction pour une énergie donnée est minimale. Il paraît alors très difficile de trouver une fonction analytique décrivant une ligne isovaleur pour l'énergie comme nous l'avons fait pour la coénergie. Une représentation schématique de la forme hypothétique d'une de ces lignes pour une tôle à grains orientés en champ assez fort (direction de difficile aimantation à  $54,7^\circ$ ) est donnée par la figure III.23, pour souligner la difficulté d'une approche analytique.

Il est difficilement envisageable de faire un modèle similaire à celui que nous avons fait avec la coénergie pour l'énergie magnétique dans le cas de tôles à grains orientés et des tôles à texture cubique qui présentent une direction de difficile aimantation ne coïncidant pas avec un axe  $x$  ou  $y$ . Par contre, il est aisé d'imaginer le comportement d'une tôle à grains non orientés, par analogie la fonction décrivant une ligne isovaleur d'énergie est donnée par :

$$F_{\omega_b}(H_x, H_y) = \frac{B_x^2}{B_{x0}^2} + \frac{B_y^2}{B_{y0}^2} - 1 = 0 \quad . \quad (\text{III-37})$$

La restitution de  $\mathbf{H}$  à partir de  $\mathbf{B}$  a été faite dans ce cas, elle fournit des résultats identiques à ceux du modèle de la coénergie pour un matériau à grains non orientés.

Il est très séduisant d'utiliser l'énergie magnétique pour avoir le champ magnétique en fonction de l'induction mais nous sommes limités dans le nombre de matériaux que nous pouvons représenter car l'imagination nous manque pour déterminer de manière analytique des formes de lignes isovaleurs d'énergie dans le plan  $B_x$ - $B_y$ .

### III.6 APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE

Dans cette partie nous développons quelques idées simples pour aborder le problème d'une extension tridimensionnelle de notre modèle de la coénergie. En particulier le problème est celui des caractéristiques magnétiques suivant la direction orthogonale à un empilement de tôles. Nous déduisons certaines conséquences sur la forme tridimensionnelle des lignes isovaleurs de coénergie dans l'espace  $H_x$ - $H_y$ - $H_z$  ( $z$  est l'axe orthogonal au plan de la tôle).

Les circuits magnétiques sont constitués de tôles magnétiques empilées les unes sur les autres. Ces tôles sont revêtues pour assurer une isolation électrique entre elles. En supposant que la distance entre deux tôles adjacentes est constante, on peut définir la distance  $d$  entre les plans médians de ces deux tôles ainsi que l'épaisseur  $ed$  du fer d'une tôle. Le coefficient de foisonnement  $\varepsilon$  est caractéristique du circuit magnétique. Il a été calculé dans la direction  $z$  une perméabilité s'appliquant en tout point d'un bloc, considéré comme un milieu continu, équivalent au paquet feuilleté de tôles [BAS-85]. Cette perméabilité est donnée par la relation :

$$\frac{1}{\mu_z} = \frac{(1-\varepsilon)}{\mu_0} + \frac{\varepsilon}{\mu_f} , \quad (\text{III-38})$$

où  $\mu_f$  est la perméabilité de la tôle orthogonalement à son plan. En négligeant le terme  $\frac{\varepsilon}{\mu_f}$  il vient :

$$\mu_z = \frac{\mu_0}{1 - \varepsilon} . \quad (\text{III-39})$$

La perméabilité ne dépend pas alors du matériau. Pour un coefficient de foisonnement de 0,94 on trouve une perméabilité relative suivant l'axe  $z$  de 17. Cette valeur est proche de celle déterminée expérimentalement par H. Pfützner [PFU-92] pour deux types totalement

différents de tôles magnétiques (à grains orientés et amorphes). La relation précédente n'est pas infirmée par l'expérience. En supposant que  $B_z$  ne dépend ni de  $H_x$  ni de  $H_y$  nous pouvons écrire :

$$B_z = \mu_z H_z, \quad (\text{III-40})$$

avec  $\mu_z$  constant. Le rotationnel de l'induction dans l'espace du champ magnétique étant nul, la relation précédente implique que  $B_x$  et  $B_y$  ne sont des fonctions que de  $H_x$  et  $H_y$  et non de  $H_z$ . Nous pouvons écrire :

$$B_x = B_x(H_x, H_y) \quad (\text{III-41})$$

$$B_y = B_y(H_x, H_y). \quad (\text{III-42})$$

Soient les vecteurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_p$  et  $\mathbf{H}_q$  définis par leurs coordonnées :

$$\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z), \quad (\text{III-43})$$

$$\mathbf{H}_p(H_x, H_y, 0) \text{ et} \quad (\text{III-44})$$

$$\mathbf{H}_q(0, 0, H_z). \quad (\text{III-45})$$

Nous pouvons écrire la coénergie en  $\mathbf{H}$  :

$$\omega'(\mathbf{H}) = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = \int_0^{\mathbf{H}_p} (B_x dH_x + B_y dH_y) + \int_0^{\mathbf{H}_q} B_z dH_z. \quad (\text{III-46})$$

La première intégrale est une fonction  $f$  de  $H_x$  et de  $H_y$  uniquement donc :

$$\omega'(\mathbf{H}) = f(H_x, H_y) + \frac{\mu_z H_z^2}{2}. \quad (\text{III-47})$$

Ainsi l'équation d'une ligne isovaleur de coénergie ( $\omega'(\mathbf{H})=\omega'_0$ ) dans l'espace  $H_x$ - $H_y$ - $H_z$  sera de la forme :

$$F_{\omega'_0}(H_x, H_y, H_z) = g(H_x, H_y) + \frac{\mu_z H_z^2}{2} = 0 . \quad (\text{III-48})$$

$g(H_x, H_y)$  est déterminé suivant le type de tôle magnétique.

Les considérations précédentes sont intéressantes du point de vue formel. A partir de remarques sur la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  suivant la troisième dimension nous sommes arrivés à définir une forme de ligne isovaleur de coénergie. Cette démarche est un peu la démarche inverse de celle faite pour le modèle bidimensionnel. Cependant cela a peu d'intérêt en pratique car le flux est bien canalisé dans le plan des tôles sauf dans des cas exceptionnels (têtes de bobines dans les moteurs).

### III.7 CONCLUSION

Nous avons développé un modèle original du comportement non linéaire et anisotrope des tôles magnétiques utilisées en Génie Electrique. Ce modèle se fonde sur la détermination de la coénergie magnétique en fonction du champ magnétique ce qui permet d'en déduire l'induction. Ce modèle a été développé pour trois types de tôles : les tôles à grains orientés, à grains non orientés et à texture cubique. Les seules données expérimentales nécessaires pour identifier ce modèle sont les deux courbes  $B(H)$  dans des directions où le champ magnétique et l'induction sont parallèles (directions de laminage et travers pour les tôles à grains orientés et non orientés ou direction de laminage et à  $45^\circ$  pour les tôles à texture cubique).

L'intérêt est d'utiliser une approche thermodynamique cohérente, la relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  ainsi restituée par le modèle est anhystérétique. Le principal problème lié à ce modèle est la restitution numérique qui demande beaucoup de soin.



## CHAPITRE IV

COMPORTEMENT BIDIMENSIONNEL  
DES TOLES A GRAINS ORIENTES  
MESUREES GRACE A UN CADRE EN  
CHAMPS TOURNANTS.  
COMPARAISON AVEC LE MODELE  
DE LA COENERGIE



#### IV.1 PROBLEMES DE LA MESURE DE LA RELATION VECTORELLE $B-H$

Le modèle que nous avons développé se doit d'être confronté à des mesures expérimentales. Les mesures de la relation vectorielle  $B(H)$  sont rares, on se limite à des mesures de courbes  $B(H)$  dans des directions où le champ magnétique et l'induction sont parallèles. Ces mesures sont le plus souvent réalisées sur un dispositif normalisé, le cadre Epstein (Norme CEI 404-2 de 1978). Il est construit de bandes de tôles assemblées en carré avec des joints de recouvrement. L'assemblage constitue un circuit carré de périmètre moyen égal à 1 m.

Certains métallurgistes donnent dans leurs catalogues des courbes  $B(H)$  suivant différentes directions par rapport à la direction de laminage. Les bandes du cadre Epstein sont découpées selon un certain angle par rapport à la direction de laminage. Les mesures effectuées sur ce type de circuit où l'induction et le champ magnétique ne sont pas parallèles sont difficilement interprétables. Certains auteurs considèrent purement et simplement que ces mesures représentent la norme de l'induction en fonction de la norme du champ magnétique [DED-90], d'autres considèrent qu'il s'agit de la norme de l'induction en fonction de la projection du champ magnétique sur la direction de l'induction [TAM-94] ou de la projection de l'induction sur la direction du champ magnétique [WAE-92.1], [WAE-92.2]. La prudence s'impose lors de l'utilisation de telles mesures d'autant plus que la manière d'empiler les tôles les unes sur les autres joue un rôle au niveau des résultats obtenus [DAV-82]. Les auteurs distinguent ainsi deux types d'empilement, le type A où les directions de laminage de tôles adjacentes coïncident et le type C où les directions de laminage de tôles adjacentes sont renversées en tournant alternativement chaque ruban. Cette méthode est donc à rejeter si l'on veut autre chose que des résultats approximatifs, peu exploitables.

Des dispositifs spécialement conçus pour mesurer la relation vectorielle entre l'induction et le champ magnétique existent. L'échantillon peut être enroulé en forme de tore et placé en circuit ouvert dans un électroaimant [TIM-84]. L'échantillon peut être un disque placé dans un circuit fermé [FAS-63.1].

Le dispositif de caractérisation le plus répandu pour décrire le comportement des tôles magnétiques dans des directions quelconques est un appareil de mesures appelé cadre en champs tournants. Nous avons un tel outil au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble [ZOU-91], [ZOU-92]. Cet appareil permet la détermination des vecteurs induction  $\mathbf{B}$  et champ magnétique  $\mathbf{H}$  sous certaines conditions d'excitation. Dans ce chapitre nous présentons rapidement le cadre en champs tournants et ses possibilités.

Nous étudions des tôles à grains orientés car elles sont suffisamment anisotropes et dépourvues d'hystérésis afin de se placer dans les conditions de mesures les plus favorables pour le cadre en champs tournants tout en se rapprochant d'un comportement anhystérétique. Nous présentons ensuite des mesures effectuées en induction sinusoïdale puis en induction tournante. Notre but est double. Il est d'abord de comprendre le comportement magnétique de ces tôles en interprétant les résultats de mesure, c'est une démarche délicate étant donnée la complexité des mécanismes mis en oeuvre mais qui nous paraît particulièrement importante. Nous comparons ensuite les mesures avec le modèle que nous avons développé. Ces travaux sont rapportés par ailleurs [PER-94.1], [PER-94.2].

## **IV.2 PRESENTATION DU CADRE EN CHAMPS TOURNANTS**

Afin de pouvoir déterminer le comportement bidimensionnel des tôles magnétiques dans des directions quelconques, un dispositif a été réalisé il y a quelques années au Laboratoire

d'Electrotechnique de Grenoble : le cadre en champs tournants (CCT). Le schéma de principe est présenté sur la figure IV.1.

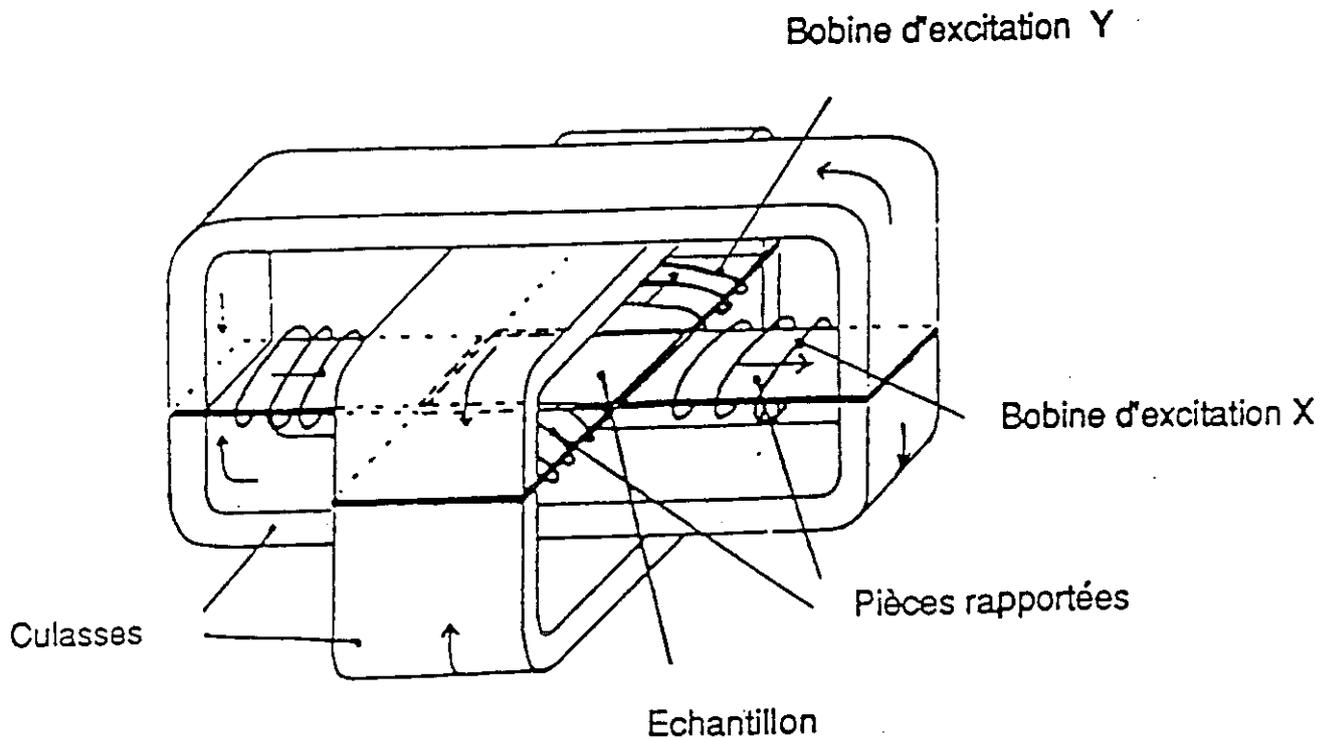


Figure IV.1 : Schéma du cadre en champs tournants [ZOU-91]

L'échantillon à tester est de forme carrée ( $80 \times 80 \text{ mm}^2$ ) et est disposé au milieu de deux circuits magnétiques perpendiculaires formés de culasses et de pièces rapportées qui assurent la fermeture du flux. Un entrefer de l'ordre du millimètre entre l'échantillon et les pièces rapportées est nécessaire pour assurer l'homogénéité du flux dans l'échantillon. Pour chacune des deux directions notées x et y deux culasses sont utilisées afin de maintenir une induction homogène dans toute l'épaisseur de l'échantillon. L'induction est créée par deux bobines inductrices composées chacune de deux enroulements alimentés en série et disposés autour des pièces rapportées de part et d'autre de l'échantillon.

Le champ magnétique au centre de l'échantillon est mesuré dans chacune des deux directions x et y par une bobine plate placée dans l'air à une distance de 2,5 millimètres de

l'échantillon en vertu de la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de deux milieux différents. Les composantes de l'induction suivant les axes  $x$  et  $y$  sont déterminées séparément en utilisant des bobines détectrices par l'intermédiaire de trous percés dans l'échantillon définissant deux zones de mesure de  $20 \times 30 \text{ mm}^2$  (figure IV.2).

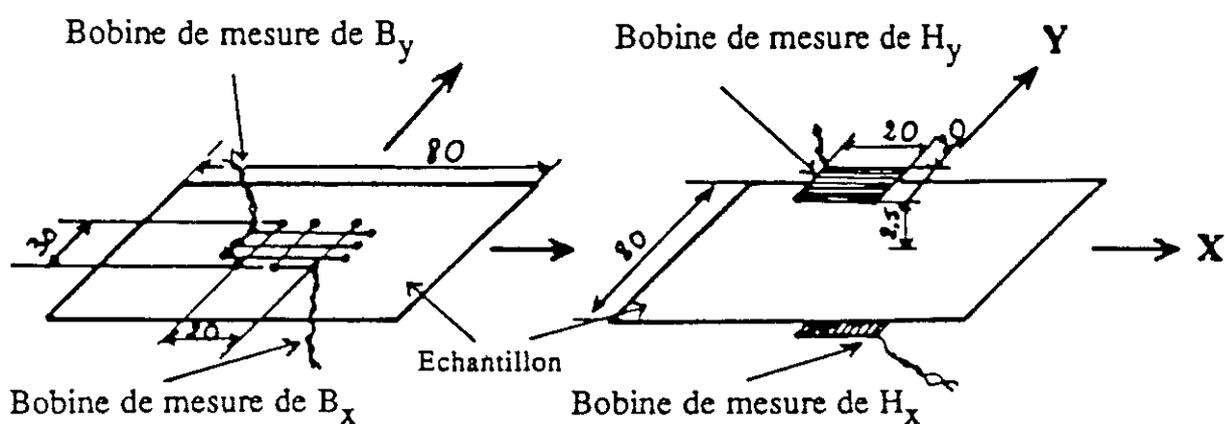


Figure IV.2 : Moyens de mesure de  $B$  et de  $H$  [ZOU-91]

La caractérisation de l'échantillon s'effectue en contrôlant l'induction grâce à un système d'asservissement. Les composantes  $B_x$  et  $B_y$  de l'induction mesurées dans l'échantillon sont ainsi sinusoïdales de fréquence  $50 \text{ Hz}$ . Si les deux bobines d'excitation sont alimentées en quadrature l'induction mesurée est tournante (circulaire ou elliptique) à une fréquence de  $50 \text{ Hz}$ . C'est pour ce type de fonctionnement que le cadre a été conçu. Nous avons aussi la possibilité en alimentant les deux bobines d'excitation en phase d'obtenir une induction mesurée sinusoïdale de direction quelconque de fréquence égale à  $50 \text{ Hz}$ . Un des défauts du dispositif de mesures est que la valeur maximale de l'induction est limitée du fait de la présence d'entrefer permettant d'homogénéiser le flux dans la zone de travail de l'échantillon. L'induction maximale pour une tôle à grains orientés est en régime d'induction tournante de  $1,5 \text{ T}$  dans le meilleur des cas, en pratique on ne peut guère

dépasser 1,2 T. Par ailleurs la faiblesse des signaux acquis ne nous permet que très difficilement d'atteindre des valeurs d'induction inférieures à 0,5 T.

Afin de déterminer les caractéristiques magnétiques de l'échantillon, dans des conditions compatibles avec les hypothèses de notre modèle, nous devons pouvoir estimer la relation entre l'induction et le champ magnétique de manière univoque. Cela n'est possible qu'en s'affranchissant des phénomènes d'hystérésis. Nous avons choisi une tôle à grains orientés M4X de qualité conventionnelle, son faible champ coercitif (environ 10 A/m) répond bien au critère précédent.

### IV.3 MESURE D'UNE TOLE A GRAINS ORIENTES

#### IV.3.1 Induction unidirectionnelle

Nous utilisons dans ce chapitre les mêmes notations que dans les chapitres précédents (figure III.6). L'axe x coïncide avec la direction de laminage, l'axe y avec la direction travers.  $\beta$  est l'angle entre l'induction  $\mathbf{B}$  et la direction de laminage.  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{H}$  et la direction de laminage. L'induction est unidirectionnelle (angle  $\beta$  constant) et varie sinusoidalement à la fréquence de 50 Hz.

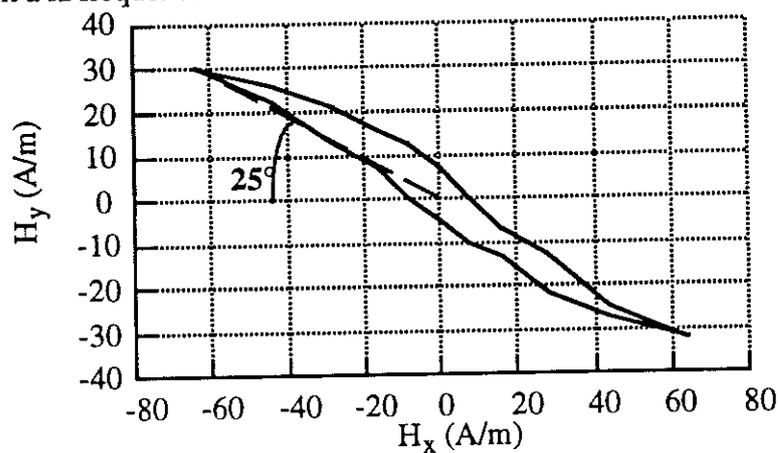
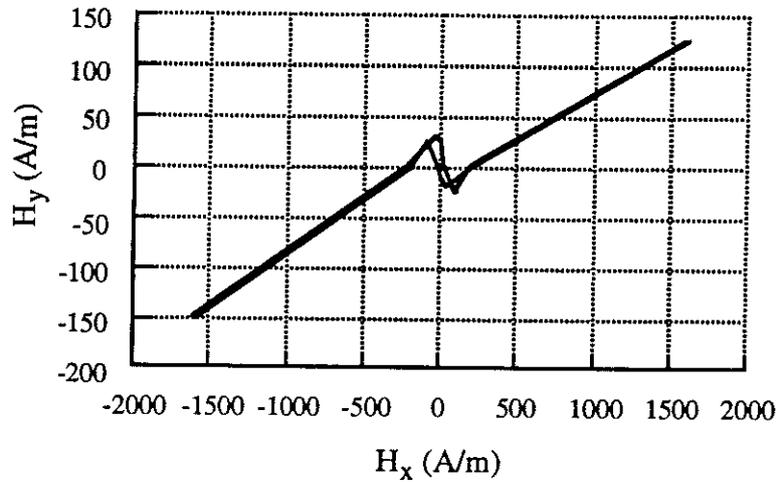


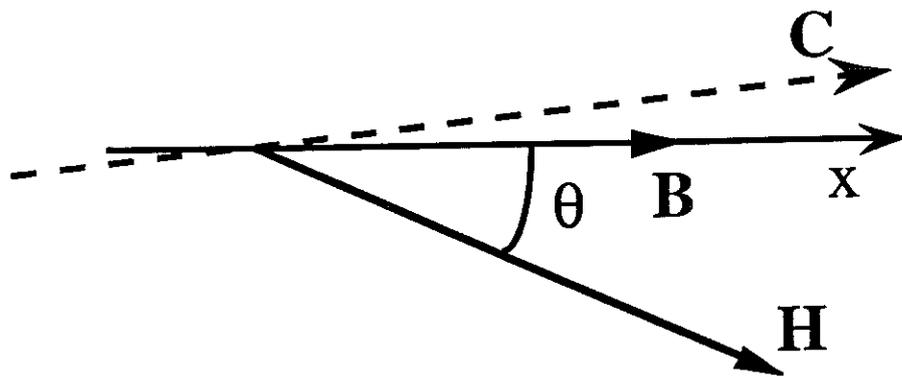
Figure IV.3 :  $H_y(H_x)$ , pour une induction unidirectionnelle avec  $|B|_{max} = 1,2 T$  et  $\beta = 0^\circ$  (les échelles sont différentes sur les deux axes)



*Figure IV.4 :  $H_y(H_x)$  pour une induction unidirectionnelle avec  $|B|_{max} = 1,9 T$  et  $\beta = 0^\circ$  (les échelles sont différentes sur les deux axes)*

Ici l'induction est suivant la direction de laminage ( $\beta=0^\circ$ ). Les courbes  $H_y(H_x)$ , décrivant l'extrémité du vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  le point (0,0) étant pris pour origine, pour des inductions maximales de 1,2 T et de 1,9 T sont données sur les figures IV.3 et IV.4.

En théorie dans la direction de laminage l'induction  $\mathbf{B}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  devraient être parallèles . Ce n'est pas tout à fait le cas. Lorsque l'induction atteint son maximum à 1,2T (figure IV.3), l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{H}$  et la direction de laminage est d'environ  $25^\circ$ . Un tel comportement a déjà été observé sur un banc de mesures similaire à celui dont nous disposons [TAM-94]. Ce comportement peut avoir pour cause la désorientation entre l'axe macroscopique de facile aimantation  $\mathbf{C}$  (où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont parallèles et qui devrait coïncider avec la direction de laminage) et la direction de l'induction  $\mathbf{B}$ . Quelques degrés de décalage entre l'axe  $\mathbf{C}$  et l'induction  $\mathbf{B}$  peuvent expliquer que le champ magnétique  $\mathbf{H}$  doit être à  $25^\circ$  par rapport à la direction de laminage pour maintenir l'induction  $\mathbf{B}$  le long de l'axe  $x$  (figure IV.5).



*Figure IV.5 : Désorientation de l'axe macroscopique C de facile aimantation*

Cette désorientation peut avoir plusieurs origines telles que l'imprécision de la découpe de la tôle ou encore la position approximative des bobines de mesure de l'induction. Nous pouvons également nous interroger sur la représentativité de l'échantillon. La désorientation de la zone de mesure représente-t-elle la désorientation réelle de la tôle ? La taille de la zone où l'on caractérise les propriétés magnétiques ( $20 \times 20 \text{ mm}^2$ ) est trop petite pour moyenniser la désorientation de chaque grain aussi bien que cela est fait sur un échantillon beaucoup plus large. Les résultats observés sur la figure IV.4 pour  $|B|_{\text{max}} = 1,9 \text{ T}$  diffèrent notablement des précédents puisque le vecteur  $H$  change de quadrant après  $200 \text{ A/m}$  environ. Pour la valeur maximale de l'induction, le champ magnétique fait un angle de quelques degrés par rapport à la direction de laminage. Nous pouvons penser, vue la faiblesse de cet angle, que les bobines de mesure du champ magnétique ne détectent pas des angles  $\theta$  avec suffisamment de précision du fait d'un positionnement relatif par rapport à l'échantillon imparfait.

Les figures IV.6 et IV.7 montrent les courbes  $H_y(H_x)$  pour une induction sinusoïdale à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage ( $\beta = 45^\circ$ ). Les valeurs maximales du module de l'induction  $B$  sont ici de  $0,8 \text{ T}$  et de  $1,2 \text{ T}$ . Pour une induction maximale de  $0,8 \text{ T}$  l'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et la direction de laminage est de  $80^\circ$  et pour une induction maximale de  $1,2 \text{ T}$  cet angle est de  $60^\circ$ .

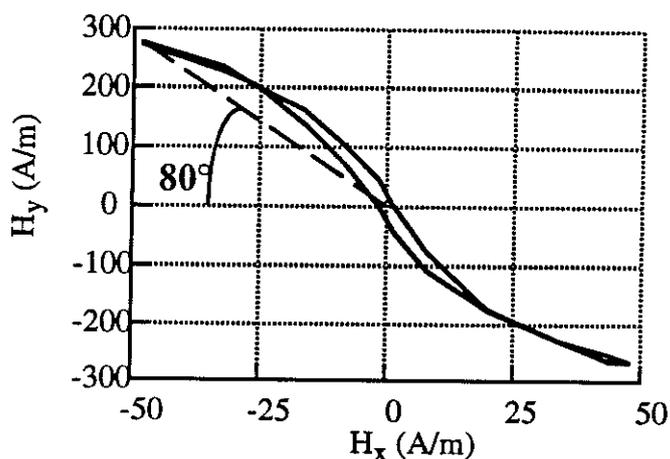


Figure IV.6 :  $H_y(H_x)$  pour une induction unidirectionnelle avec  $|B|_{max} = 0,8T$  et  $\beta = 45^\circ$

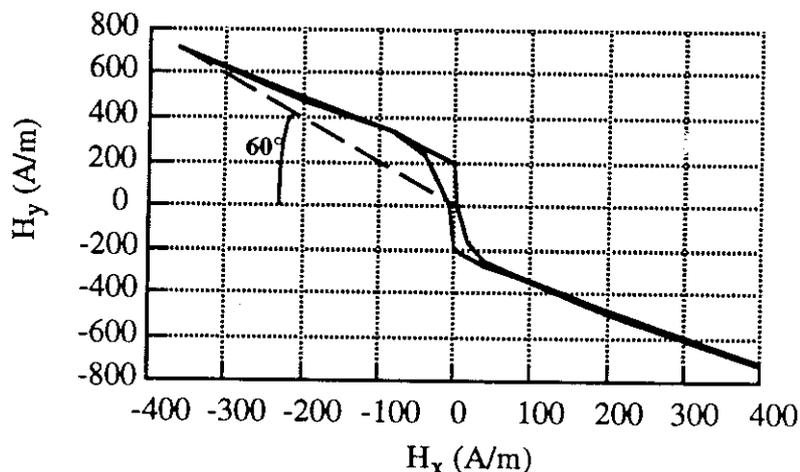


Figure IV.7 :  $H_y(H_x)$  pour une induction unidirectionnelle avec  $|B|_{max} = 1,2 T$  et  $\beta = 45^\circ$

Ainsi il est plus difficile de créer une composante de l'induction dans la direction travers que de créer une composante de l'induction dans la direction de laminage. La texture Goss  $(0\bar{1}1) [100]$  explique ce comportement. En fait les domaines qui créent une induction suivant la direction de laminage ont pour direction d'aimantation la direction cristallographique  $[100]$ . Cet axe se situant dans le plan de laminage, l'aimantation est facile. Par contre les directions d'aimantation des domaines qui créent une induction dans la direction travers coïncident avec les directions cristallographiques  $[010]$  et  $[001]$  à  $45^\circ$

par rapport au plan de laminage. Du fait de la faible épaisseur de la tôle il en résulte un champ démagnétisant important qui est minimisé par une structure de domaines de fermeture. D'un point de vue énergétique il est difficile de créer une composante de l'induction selon la direction travers, bien plus difficile que de créer une composante de l'induction selon la direction de laminage.

Nous pouvons noter que le comportement magnétique de la tôle reproduit sur les figures précédentes n'est pratiquement pas hystérétique. Les courbes  $H_y(H_x)$  correspondant à des sens différents du parcours de l'induction sont très proches.

### IV.3.2 Induction tournante

Dans cette partie l'échantillon est caractérisé en champs tournants circulaires. L'induction est asservie, elle tourne à vitesse angulaire constante à la fréquence de 50 Hz et avec un module constant. Les courbes  $H_y(H_x)$  correspondant à des inductions tournantes de modules constants sont représentées sur la figure IV.8 pour  $|B| = 0,5$  T, sur la figure IV.9 pour  $|B| = 0,9$  T et sur la figure IV.10 pour  $|B| = 1,2$  T.

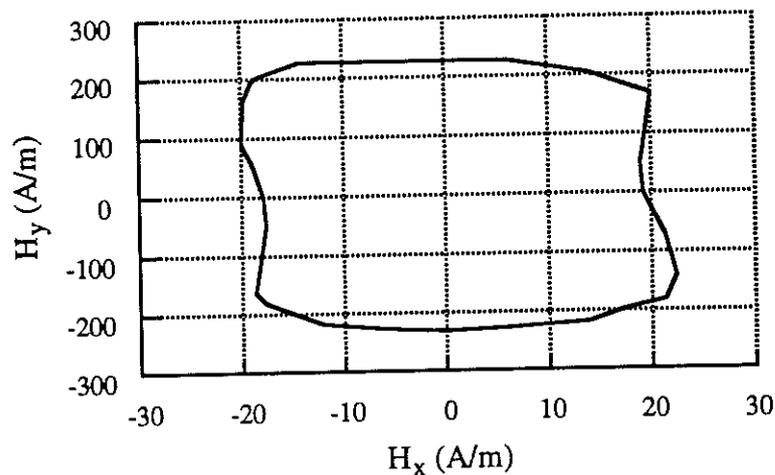


Figure IV.8 :  $H_y(H_x)$  pour une induction tournante avec  $|B| = 0,5$  T

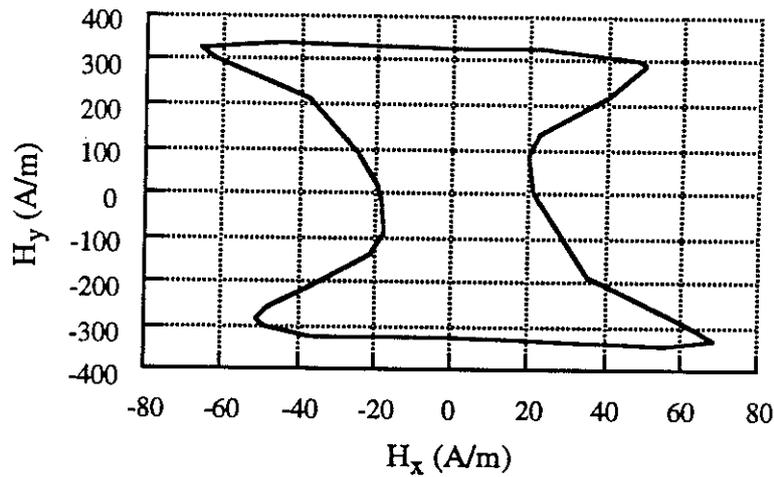


Figure IV.9 :  $H_y(H_x)$  pour une induction tournante avec  $|B| = 0,9T$

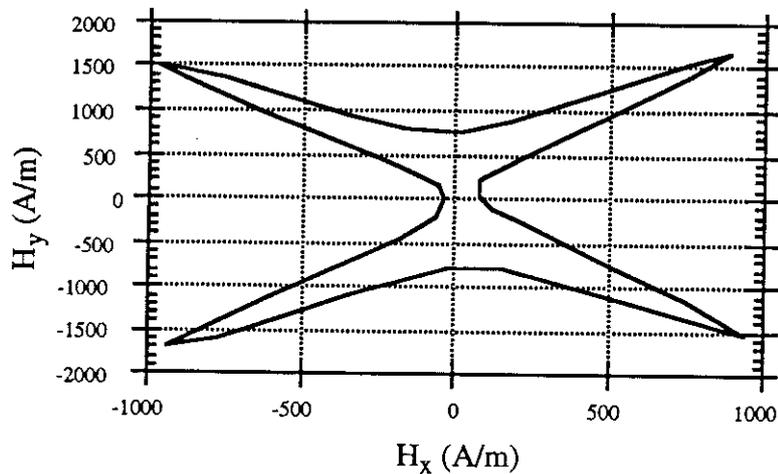


Figure IV.10 :  $H_y(H_x)$  pour une induction tournante avec  $|B| = 1,2 T$

Ces valeurs d'induction correspondent à différents processus d'aimantation. Nous allons tenter de les expliciter en fonction des courbes précédentes et des résultats d'expérience (dont certains sont reportés sur les figures IV.11 et IV.12) en nous intéressant plus particulièrement à la direction de difficile aimantation. Pour  $|B|=0,5T$  l'extrémité du vecteur champ magnétique décrit un rectangle très allongé suivant la direction travers. Lorsque l'induction varie de  $\beta = -20^\circ$  à  $\beta = +20^\circ$ , l'angle  $\theta$  que fait le champ magnétique  $H$  avec la direction de laminage varie de  $\theta = -80^\circ$  à  $\theta = +80^\circ$  environ. Nous sommes dans un domaine d'induction où les parois à  $180^\circ$  parallèles à la direction de laminage sont prépondérantes, c'est-à-dire que l'induction a tendance à rester dans la direction

crystallographique [100] pour une plage d'angle  $\theta$  très importante. C'est ce que nous avons appelé au chapitre précédent le phénomène de "découplage" des directions long et travers. Comme l'asservissement impose que l'angle  $\beta$  varie linéairement en fonction du temps, l'angle  $\theta$  subit des variations brutales et importantes afin d'empêcher l'induction de rester suivant la direction de laminage. Cela pose des problèmes d'acquisition entravant toute tentative d'interprétation du déphasage spatial entre l'induction et le champ magnétique. Ainsi le champ magnétique est minimal lorsqu'il se situe suivant la direction de laminage mais l'induction peut parfois faire alors un angle  $\beta$  de  $15^\circ$  avec cette direction.

Le résultat le plus significatif résultant de l'observation expérimentale pour  $|B| = 0,5$  T est que la direction macroscopique de difficile aimantation où l'induction et le champ magnétique sont parallèles est proche de la direction travers.

En champ tournant pour  $|B| = 0,9$  T de rapides variations de l'angle  $\theta$  sont observées autour de la direction de laminage ce qui montre qu'à cette induction la prépondérance des paroies à  $180^\circ$  dans les mécanismes d'aimantation est encore très nette. Les différences relatives de perméabilité entre les axes long et travers sont encore énormes. Le champ magnétique et l'induction sont parallèles suivant les axes long et travers mais aussi pour un angle situé entre  $80^\circ$  et  $85^\circ$  par rapport à la direction de laminage. Cet angle peut être considéré comme la direction macroscopique de difficile aimantation. Pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à cette valeur,  $\beta$  est toujours inférieur à  $\theta$ . Par contre, pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à cette valeur,  $\beta$  est toujours supérieur à  $\theta$ .

En champ tournant pour  $|B| = 1,2$  T nous observons nettement une direction pour laquelle le champ magnétique présente une valeur maximale. La direction de difficile aimantation se situe entre  $55^\circ$  et  $60^\circ$ . L'induction et le champ magnétique sont également parallèles lorsqu'ils sont dirigés suivant les axes long et travers. Pour cette valeur d'induction nous

études plus précisément l'aspect quantitatif de l'aimantation au paragraphe suivant où nous comparons les données expérimentales avec le modèle que nous avons développé.

#### **IV.4 COMPARAISON AVEC LE MODELE DE LA COENERGIE POUR $B = 1,2$ T**

Afin de mener à bien cette comparaison nous avons utilisé notre modèle fondé sur la représentation de la forme des lignes isovaleurs de coénergie dans le cas des matériaux à grains orientés ayant une texture de Goss. Les valeurs expérimentales nécessaires à l'identification du modèle sont les courbes  $B(H)$  suivant les directions long et travers, nous les avons mesurées grâce au cadre en champs tournants.

Qualitativement, pour de faibles inductions ( $|B| = 0,5$  T) nous avons observé grâce au cadre en champs tournants que les mécanismes d'aimantation selon les axes long et travers sont fortement "découplés". La présence des parois à  $180^\circ$  constitue un mécanisme prépondérant. Ce phénomène est bien modélisé en représentant les lignes isovaleurs de coénergie par des courbes se rapprochant d'une forme rectangulaire.

D'autre part, nous avons remarqué que la direction macroscopique de difficile aimantation varie de  $90^\circ$  à  $55^\circ$  lors de l'augmentation du module de l'induction. Le modèle va dans ce sens car nous avons fait varier la direction de difficile aimantation de  $90^\circ$  à  $54,7^\circ$  par l'intermédiaire du paramètre que nous avons appelé  $\alpha$ .

D'un point de vue quantitatif nous avons comparé les résultats de mesure en régime de champs tournants pour  $|B| = 1,2$  T et les résultats donnés par notre modèle pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  à la même induction. La comparaison est donnée grâce aux courbes  $\beta(\theta)$  et  $H(\theta)$  (figures IV.11 et IV.12).

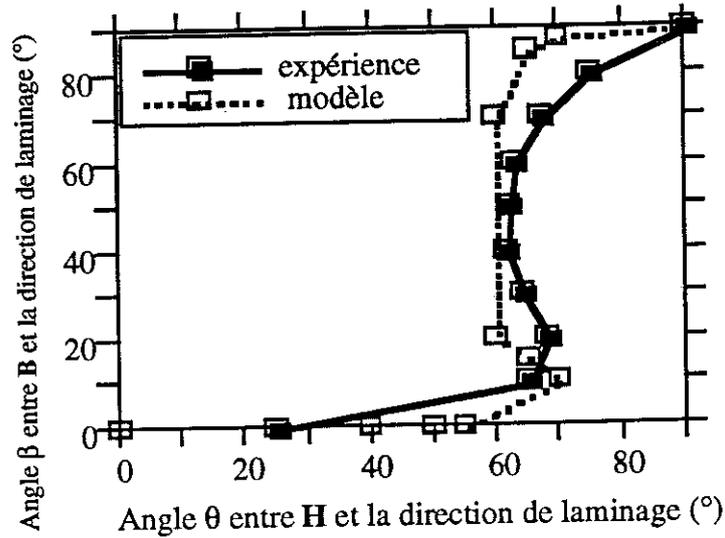


Figure IV.11 : Comparaison des courbes  $\beta(\theta)$  pour  $B = 1,2$  T

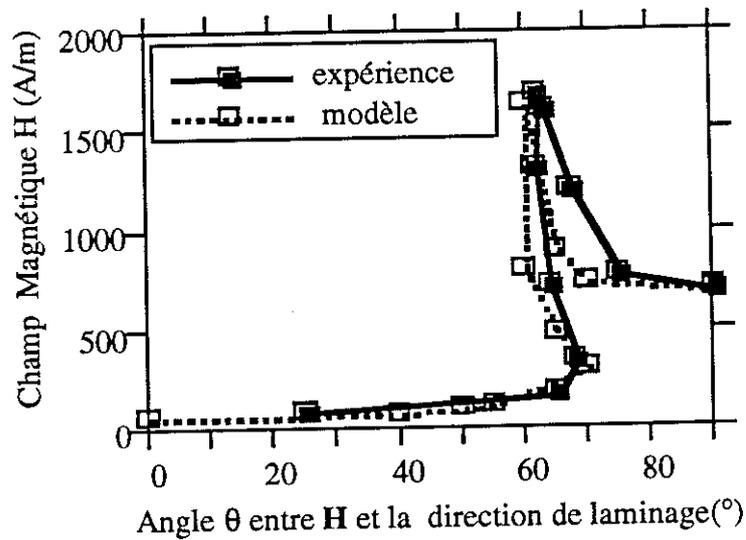
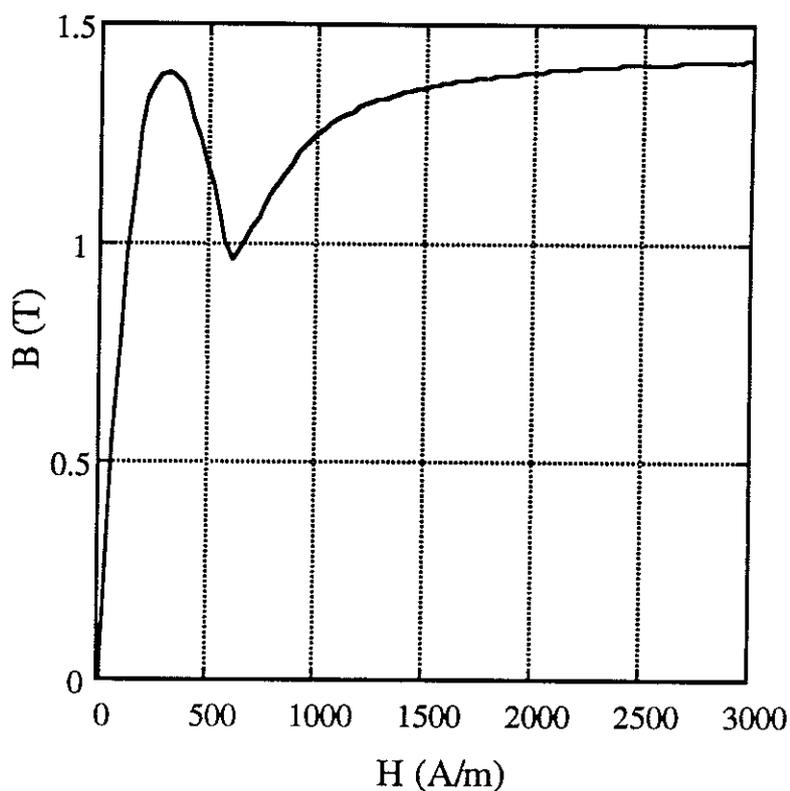


Figure IV.12 : Comparaison des courbes  $H(\theta)$  pour  $B = 1,2$  T

En ce qui concerne les valeurs expérimentales elles représentent une moyenne, pour chaque valeur de l'angle  $\theta$ , entre les mesures effectuées en faisant tourner l'induction entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  dans les deux sens (sens trigonométrique et sens des aiguilles d'une montre).

Une grande concordance entre le comportement mesuré et le comportement modélisé de la tôle pour  $B = 1,2$  T apparaît clairement.



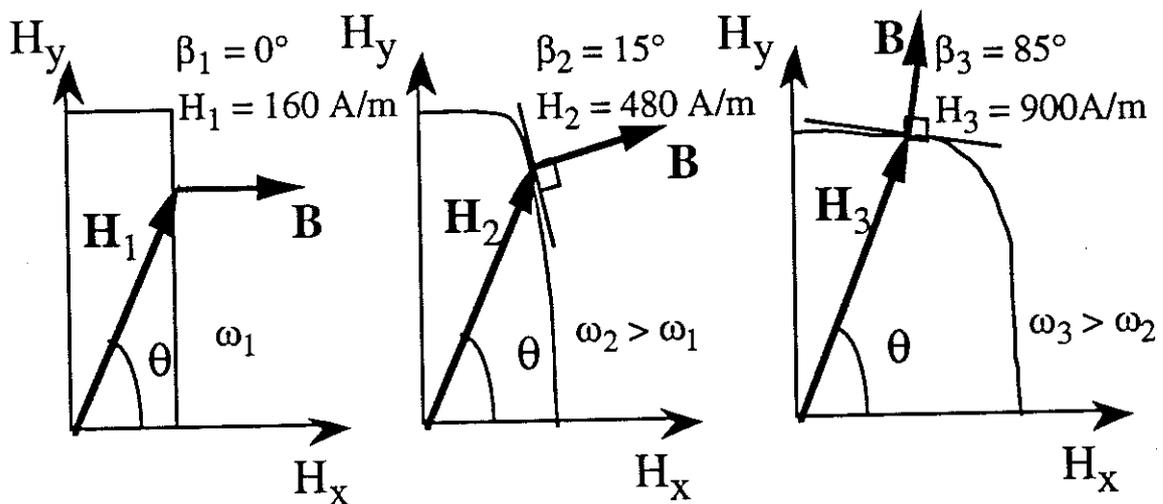
*Figure IV.13 : Courbe du module de l'induction en fonction du module du champ magnétique pour  $\theta = 65^\circ$  et  $B = 1,2$  T obtenue par le modèle*

Pour une direction constante du champ magnétique entre  $60^\circ$  et  $70^\circ$  par rapport à la direction de laminage, nous observons que trois états magnétiques sont possibles. Ainsi pour une valeur constante de  $\theta$  proche de  $65^\circ$  le module de l'induction peut diminuer lors d'une augmentation de la valeur du module du champ magnétique. Pour de faibles valeurs du champ magnétique les domaines participant aux mécanismes d'aimantation sont des domaines dont les moments magnétiques sont dans une direction  $[100]$  et l'aimantation est assez facile. Par contre pour de fortes valeurs du champ magnétique les domaines participant principalement aux mécanismes d'aimantation sont des domaines dont les moments magnétiques sont dans des directions  $[010]$  ou  $[001]$  à  $45^\circ$  par rapport au plan de la tôle. Il en résulte comme nous l'avons déjà souligné une aimantation dans le plan de la tôle bien plus difficile à obtenir. Un état intermédiaire d'aimantation existe où les deux

types de domaines sont présents. Pour une valeur de l'angle  $\theta$  de  $65^\circ$  le modèle décrit bien le phénomène, l'induction peut décroître pour certaines valeurs croissantes du champ magnétique (figure IV.13). Il faut noter que le matériau continue bien entendu à stocker de l'énergie puisque la projection  $B_u$  de  $\mathbf{B}$  sur  $\mathbf{H}$  augmente pour des valeurs croissantes du champ magnétique  $\mathbf{H}$  ( $d\omega'=\mathbf{B}\cdot d\mathbf{H}>0$ ).

Ce phénomène a déjà été observé par Fasching et Hofman [FAS-63.2] sur des tôles à grains orientés. Ce comportement peut d'ailleurs être obtenu en utilisant la loi statistique de Heisenberg [HEI-31] ou de Borzorth [BOZ-32] en admettant une probabilité d'occupation de la direction  $[100]$  dans le plan  $(0\bar{1}1)$  plus grande que suivant les deux autres directions de facile aimantation cristallographique situées à  $45^\circ$  par rapport au plan de la tôle [FAS-64].

L'évolution de la forme des lignes isovaleurs de coénergie permet de refléter ce comportement. Pour  $\theta = 65^\circ$  et  $B = 1,2$  T les trois états d'aimantation  $(\beta_1, H_1)$ ,  $(\beta_2, H_2)$  et  $(\beta_3, H_3)$  sont décrits sur la figure IV.14 ( $H_1 < H_2 < H_3$  et  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ ).



*Figure IV.14 : Evolution de la forme des lignes isovaleurs de coénergie pour  $\theta = 65^\circ$  et  $B = 1,2$  T (valeurs croissantes de la coénergie)*

#### IV.5 CONCLUSION

Nous avons décrit les processus d'aimantation d'une tôle à grains orientés dans des directions quelconques en utilisant un cadre en champs tournants. Cela nous a permis de valider certains comportements de notre modèle.

En particulier nous avons souligné l'importance prépondérante des parois à  $180^\circ$  en bas champs ainsi que le passage de la direction de difficile aimantation de  $90^\circ$  à  $55^\circ$  lors de l'augmentation de la norme de l'induction. Lorsque l'angle entre le champ magnétique et la direction de laminage est proche de  $65^\circ$  et pour une norme de l'induction de 1,2 T nous avons mis en évidence qu'il existe trois états magnétiques possibles. Le modèle restitue bien ce phénomène.

## CHAPITRE V

# IMPLANTATION DU MODELE DANS UN LOGICIEL ELEMENTS FINIS. EXEMPLES D'APPLICATION



La connaissance du champ magnétique et de l'induction dans tout appareil électrotechnique permet d'accéder au calcul des performances et du fonctionnement de celui-ci. La méthode des éléments finis utilisée depuis de nombreuses années au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble [MEU-81] remplit parfaitement ce rôle. Elle permet à partir d'une géométrie, de propriétés physiques et de conditions aux limites connues de résoudre les équations de Maxwell afin de connaître la répartition des grandeurs électromagnétiques.

Dans ce chapitre nous rappelons les principes de la méthode des éléments finis [SAB-86], [ZIE-89], [MAR-91] dans le cas de la magnétostatique. Nous décrivons comment y insérer notre modèle d'aimantation pour les matériaux non linéaires et anisotropes par l'intermédiaire de la matrice des perméabilités incrémentales.

Nous terminons par des exemples d'application qu'il faut considérer comme tel. Nous n'avons pas la prétention d'être exhaustif et de décrire tous les problèmes liés à l'anisotropie des matériaux magnétiques dans les dispositifs électrotechniques. Cette partie est une ouverture sur les nouvelles possibilités que laisse entrevoir la modélisation des matériaux magnétiques.

## V.1 EQUATION DE LA MAGNETOSTATIQUE SANS SOURCE DE COURANT

Afin de modéliser des matériaux magnétiques doux aux caractéristiques non linéaires et anisotropes nous utilisons les équations de la magnétostatique. Le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps  $\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\right)$ .

Si dans le domaine d'étude aucun courant d'excitation n'est présent, les équations de Maxwell décrivant le problème sont :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{V-1})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0} . \quad (\text{V-2})$$

Ces équations sont complétées par une relation intrinsèque au matériau reliant  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{H}$ . Le caractère anhystérétique de la modélisation du matériau obtenu grâce à l'utilisation de la coénergie nous permet d'écrire que l'on a :

$$\text{rot}_H \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (\text{V-3})$$

Pour décrire le matériau nous utilisons par la suite, pour des raisons pratiques, la relation formelle :

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (\text{V-4})$$

où  $[\mu]$  est la matrice des perméabilités magnétiques respectant l'équation précédente.

Le rotationnel du champ magnétique étant nul le champ magnétique  $\mathbf{H}$  dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$  :

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \Phi . \quad (\text{V-5})$$

L'équation d'état du potentiel scalaire s'écrit :

$$\text{div}([\mu] \text{grad } \Phi) = 0 . \quad (\text{V-6})$$

Aux interfaces entre deux milieux contenant des matériaux ayant des propriétés magnétiques différentes, les conditions de passage résultant des équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (\text{V-7})$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (\text{V-8})$$

$\mathbf{n}$  étant le vecteur unitaire normal à la frontière des milieux 1 et 2.

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée par la continuité du potentiel scalaire. Par contre, la continuité de la composante normale de l'induction n'est pas assurée et doit être explicitée par la méthode des éléments finis. Sur les frontières du domaine d'étude les conditions aux limites portent sur la composante tangentielle du champ magnétique (condition de Dirichlet) ou sur sa composante normale (condition de Neumann).

## V.2 METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles associé à des conditions limites en un système matriciel par discrétisation de leurs formes intégrales.

### V.2.1 Obtention de la forme intégrale

Le comportement d'un système physique continu est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles :

$L(u) = f$  sur un domaine  $\Omega$

$C(u) = g$  sur des frontières  $\Gamma$

où  $L$  et  $C$  sont des opérateurs différentiels

$u$  la variable d'état inconnue

$f$  une fonction du domaine  $\Omega$

$g$  une fonction des frontières  $\Gamma$ .

La méthode des résidus pondérés ou méthode de Galerkin consiste à projeter l'équation  $L(u)=f$  sur un ensemble de fonctions tests  $N$  constituant une base de fonctions si possible orthogonales et à chercher  $u$  vérifiant l'ensemble des équations intégrales ainsi obtenues :

$$\int_{\Omega} N(L(u)-f) d\Omega = 0 . \quad (V-9)$$

Les fonctions  $N$  sont appelées fonctions de pondération.

La méthode des résidus pondérés n'est pas la seule méthode permettant d'obtenir une forme intégrale. La méthode de Ritz qui minimise la fonctionnelle d'énergie du système physique peut être également utilisée. Lorsque l'opérateur  $L$  est auto-adjoint c'est-à-dire lorsque pour toutes fonctions  $u$  et  $v$ ,  $L$  vérifie :

$$\int_{\Omega} uL(v) d\Omega = \int_{\Omega} vL(u) d\Omega , \quad (V-10)$$

la méthode de Ritz et celle de Galerkin sont équivalentes.

### V.2.2 Discrétisation de la forme intégrale

La méthode des éléments finis consiste à remplacer le système continu défini par la formulation intégrale présentée précédemment par une solution discrète approchée. La variable d'état  $u$  n'est calculée qu'en un nombre fini de points (les noeuds), sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions indépendantes connues  $\alpha_j$ . Ces fonctions sont en général des fonctions polynomiales par morceaux.

La solution recherchée  $u$  est alors approchée par :

$$u \equiv \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j u_j \quad (\text{V-11})$$

où  $N_n$  est le nombre de noeuds du domaine. Les fonctions  $\alpha_j$  sont appelées fonctions d'interpolation et présentent entre autres la caractéristique suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 \text{ au noeud } i, \\ \alpha_i &= 0 \text{ pour les autres noeuds du domaine.} \end{aligned}$$

Ainsi la discrétisation des équations intégrales et l'approximation de la variable d'état  $u$  revient à résoudre le système ( $N_n \times N_n$ ) suivant :

$$[M] [u] = [S] , \quad (\text{V-12})$$

avec :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i L(u_j) d\Omega , \quad (\text{V-13})$$

$$S_i = \int_{\Omega} N_i f \, d\Omega . \quad (\text{V-14})$$

En général les fonctions de pondérations  $N_i$  et d'approximations  $\alpha_i$  sont identiques en particulier lorsque l'opérateur est auto-adjoint. C'est ce que nous employons par la suite. Lors de l'utilisation de propriétés magnétiques non linéaires, la matrice  $[M]$  dépend du vecteur solution  $[u]$ . Le système est non linéaire et l'on doit utiliser une méthode itérative pour le résoudre. Nous sommes dans ce cas de figure avec notre modèle.

### V.2.3 Formulation en potentiel scalaire total $\Phi$

La méthode de Galerkin appliquée à l'équation de la magnétostatique donne ainsi les systèmes d'équations intégrales suivantes ( $1 \leq i \leq N_n$ ) :

$$\int_{\Omega} \alpha_i \operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \Phi) \, d\Omega = 0 . \quad (\text{V-15})$$

En intégrant par partie (méthode de Green), cette équation devient :

$$\int_{\Omega} [\operatorname{grad} \alpha_i]^T [\mu] \operatorname{grad} \Phi \, d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_i B_n \, d\Gamma . \quad (\text{V-16})$$

L'introduction de condition de Neumann homogène c'est-à-dire de  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  sur la frontière implique la nullité du second membre de l'équation précédente. L'introduction des conditions de Dirichlet entraîne un choix de  $N = 0$  sur la frontière. Ainsi on peut écrire :

$$\int_{\Omega} [\operatorname{grad} \alpha_i]^T [\mu] \operatorname{grad} \Phi \, d\Omega = 0 . \quad (\text{V-17})$$

En introduisant les fonctions d'approximation le système linéaire s'écrit ( $1 \leq i \leq N_n$ ) :

$$\sum_{j=1}^{N_n} \Phi_j \int_{\Omega} [\mathbf{grad}\alpha_j]^T [\mu] \mathbf{grad}\alpha_j d\Omega = 0 \quad (\text{V-18})$$

car :

$$\mathbf{H} = - \mathbf{grad}\Phi = - \sum_{j=1}^{N_n} \Phi_j \mathbf{grad}\alpha_j . \quad (\text{V-19})$$

Nous avons ainsi le système :

$$[\mathbf{M}] [\Phi] = 0 \quad (\text{V-20})$$

avec :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} [\mathbf{grad}\alpha_i]^T [\mu] \mathbf{grad}\alpha_j d\Omega = 0 . \quad (\text{V-21})$$

Du fait de l'introduction des caractéristiques anisotropes non linéaires du matériau, le système n'est pas linéaire.

Pour le résoudre nous utilisons la méthode itérative de Newton-Raphson. C'est une méthode très classique, elle est utilisée dans les logiciels flux2d et flux3d.

### V.3 TRAITEMENT DES NON LINEARITES : METHODE DE NEWTON-RAPHSON

La méthode consiste à construire une suite  $[\Phi_n]$  de vecteurs de telle manière que la limite de  $[\Phi_n]$  quand  $n$  tend vers l'infini soit  $[\tilde{\Phi}]$ , où  $[\tilde{\Phi}]$  est la solution du système non linéaire.

Fixons  $[\Phi_0]$  (typiquement  $[\Phi_0] = [0]$ ) et notons  $[R(\Phi)]$  le résidu qui est défini lorsque l'on substitue  $[\Phi]$  à la solution  $[\tilde{\Phi}]$  du système :

$$[R(\Phi)] = - [M(\Phi)] [\Phi] . \quad (V-22)$$

Posons :

$$[R_n] = [R(\Phi_n)] \text{ et } [M_n] = [M(\Phi_n)] . \quad (V-23)$$

Nous pouvons écrire grâce à un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$[R_{n+1}] = [R_n] + \left[ \frac{dR}{d\Phi} \right]_{\Phi=\Phi_n} ([\Phi_{n+1}] - [\Phi_n]) . \quad (V-24)$$

On cherche  $[R_{n+1}] = 0$  ce qui donne :

$$[R_n] = - \left[ \frac{dR}{d\Phi} \right]_{\Phi=\Phi_n} ([\Phi_{n+1}] - [\Phi_n]) . \quad (V-25)$$

La suite  $[\Phi_n]$  est donc définie connaissant  $[\Phi_0]$ .

La figure V.1 illustre cette méthode.

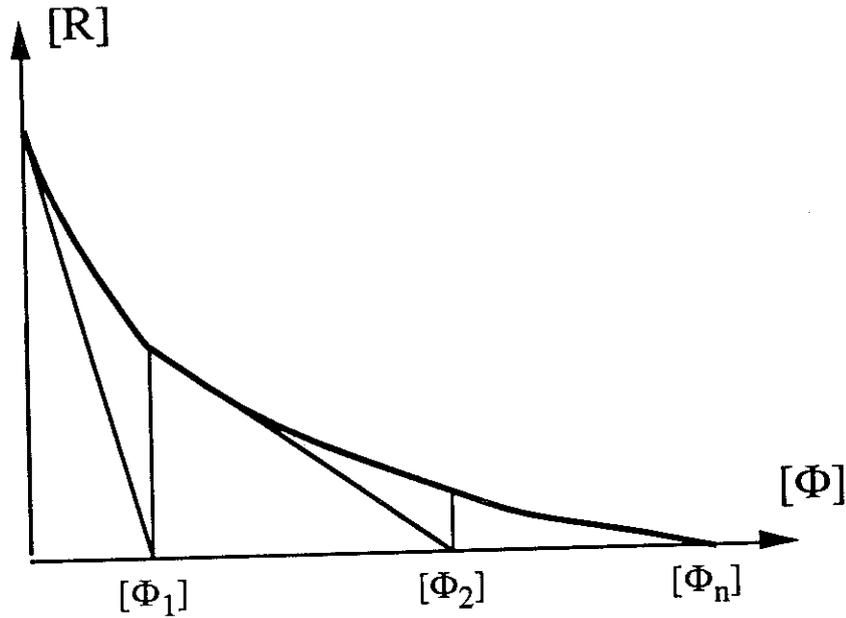


Figure V.1 : Schéma de la méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative très efficace au voisinage de la solution. Il faut connaître les variations de  $[R(\Phi)]$  pour calculer  $\left[\frac{dR}{d\Phi}\right]$ .

Dans notre cas  $[R]$  a pour terme général ( $1 \leq i \leq N_n$ ) :

$$R_i = - \int_{\Omega} [\text{grad}\alpha_i]^T [\mu] [\text{grad}\Phi] d\Omega , \quad (\text{V-26})$$

soit :

$$R_i = \int_{\Omega} [\text{grad}\alpha_i]^T [\mathbf{B}(\mathbf{H})] d\Omega . \quad (\text{V-27})$$

Or en utilisant la discrétisation nous avons :

$$\mathbf{H} = - \text{grad}\Phi = - \sum_{j=1}^{N_b} (\text{grad}\alpha_j)\Phi_j \quad (\text{V-28})$$

et :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Phi_j} = - \text{grad}\alpha_j \quad (\text{V-29})$$

d'où

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Phi_j} = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Phi_j} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]^T [\text{grad}\alpha_j] . \quad (\text{V-30})$$

Nous pouvons en déduire le terme général de  $\left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Phi} \right]$  qui est :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \Phi_j} = - \int_{\Omega} [\text{grad}\alpha_j]^T \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]^T [\text{grad}\alpha_j] d\Omega . \quad (\text{V-31})$$

Le calcul numérique de  $\left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Phi} \right]_{\Phi=\Phi_n}$  requiert donc le calcul du tenseur  $\left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]$  appelé tenseur des perméabilités incrémentales.

#### V.4 CALCUL DU TENSEUR DES PERMEABILITES INCREMENTALES

La convergence de la méthode de Newton-Raphson est bonne au voisinage de la solution. Sinon elle peut être difficile voire même impossible comme c'est le cas dans de nombreux problèmes formulés en potentiel scalaire avec des matériaux non linéaires et isotropes. Une méthode permettant une meilleure convergence du processus itératif est la méthode de sous

relaxation. La valeur incrémentée de la solution  $[\Phi_{n+1}]$  n'est plus calculée comme précédemment, mais par les formules :

$$[R_n] = - \left[ \frac{dR}{d\Phi} \right]_{\Phi=\Phi_n} [\Delta\Phi_n], \quad (V-32)$$

$$[\Phi_{n+1}] = [\Phi_n] + \beta_n [\Delta\Phi_n]. \quad (V-33)$$

Le paramètre  $\beta_n$  est le coefficient de sous relaxation qui est un nombre compris entre 0 et 1. Pour  $\beta_n = 1$  on retrouve la méthode classique de Newton-Raphson exposée précédemment. Dans la version standard de flux3d les valeurs du coefficient de sous relaxation peuvent être définies à chaque itération par l'utilisateur.

Une méthode a été développée par K.Fujiwara [FUJ-92] et implantée dans Flux3d [NEA-93] afin de calculer à chaque itération la valeur optimale du facteur de sous relaxation qui minimise la fonctionnelle :

$$W_{n+1} = \sum_{i=1}^{N_n} (R_i)_{n+1}^2 \quad (V-34)$$

$(R_i)_{n+1}$  étant les coordonnées du vecteur résidu  $[R_{n+1}]$ .

Afin de calculer ce tenseur des perméabilités incrémentales en deux dimensions et en coordonnées cartésiennes, nous nous plaçons dans un repère (Oxy) lié au matériau, x coïncidant avec la direction de laminage, y avec la direction travers. En effet, il est aisé de le calculer dans un repère quelconque (Ox'y') en utilisant une matrice de rotation [P] du repère (Oxy) au repère (Ox'y'), ce qui conduit à écrire :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]_{\text{Oxy}} = [\mathbf{P}]^T \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]_{\text{Ox'y'}} [\mathbf{P}]. \quad (V-35)$$

Dans le repère lié au matériau la matrice des perméabilités incrémentales est définie dans le cas bidimensionnel par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} \end{bmatrix}. \quad (\text{V-36})$$

Dans le cadre du modèle fondé sur la coénergie (Chapitre III) nous avons assuré le caractère anhystérétique du comportement des matériaux, ce qui revient à dire comme nous l'avons déjà souligné que :

$$\text{rot}_{\mathbf{H}} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (\text{V-37})$$

ce qui implique une matrice des perméabilités incrémentales symétrique et donc :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \end{bmatrix}. \quad (\text{V-38})$$

La restitution du vecteur  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$  grâce au modèle de la coénergie se fait dans l'espace du champ magnétique ( $\mathbf{B} = B_u \mathbf{u} + B_v \mathbf{v}$ ) avec les notations utilisées au Chapitre III.

Les termes de la matrice peuvent ainsi s'écrire à partir de coordonnées polaires dans le repère (Oxy) :

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_x} = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial B_u}{\partial H} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial B_v}{\partial H} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{H} \left( \frac{\partial B_v}{\partial \theta} + B_u \right) \quad (\text{V-39})$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial H_y} = \sin^2 \theta \frac{\partial B_u}{\partial H} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial B_v}{\partial H} + \cos^2 \theta \left( \frac{\partial B_v}{\partial \theta} + B_u \right) \quad (\text{V-40})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x} = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial B_u}{\partial H} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial B_v}{\partial H} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{H} \left( \frac{\partial B_v}{\partial \theta} + B_u \right) .$$

Le calcul des termes de la matrice s'effectue numériquement à partir de la forme des lignes isovaleurs de coénergie. Il est assez délicat mais la validité des dérivations numériques peut se vérifier aisément par le fait que l'on doit respecter l'équation suivante :

$$\frac{\partial B_u}{\partial \theta} = H \frac{\partial B_v}{\partial H} + B_v , \quad (V-42)$$

qui reflète le caractère anhystérétique des processus d'aimantation ( $\text{rot}_{\mathbf{H}} \mathbf{B} = 0$ ).

L'égalité précédente est vérifiée avec moins de 1% d'erreur relative sur les valeurs du champ magnétique que nous avons testées [PER-93.2]. Les opérations numériques (interpolations et dérivations) que nous effectuons grâce à la méthode d'Akima sont correctes.

En pratique ceci nous conduit pour calculer la matrice des perméabilités incrémentales au calcul de trois termes uniquement :  $\frac{\partial B_v}{\partial H}$ ,  $\frac{\partial B_u}{\partial H}$  et  $\frac{\partial B}{\partial \theta}$ .

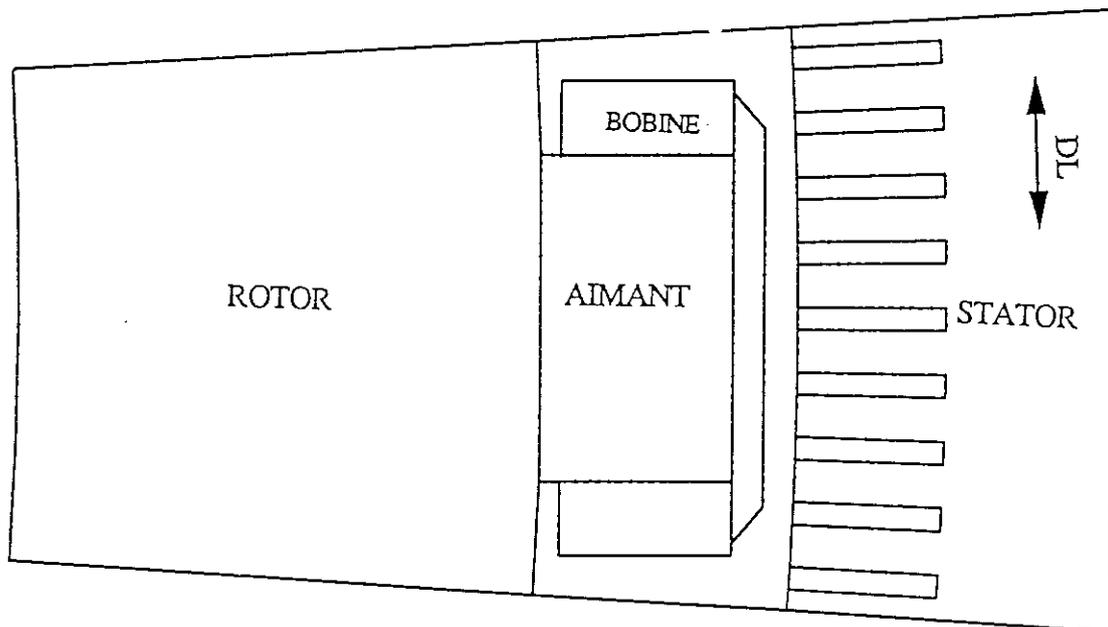
## V.5 EXEMPLES D'APPLICATION

### V.5.1 Alternateur

Ce travail est le sujet de [PER-94.3]

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un gros alternateur de cinquante deux pôles. La géométrie est périodique, nous modélisons donc un pôle unique en appliquant des conditions anticycliques sur les axes de symétrie. Le modèle bidimensionnel se résume à la figure V.2.

Pour ce type d'alternateur, les tôles du stator sont découpées en secteurs et empilées suivant des directions privilégiées d'aimantation. Dans notre cas la direction de laminage (DL) est notée sur la figure V.2. Trois matériaux magnétiques différents sont modélisés dans cet exemple. Tout d'abord nous avons un matériau de texture cubique fabriqué au Laboratoire [MEK-94] et que nous appelons CUB-A. Nous avons aussi pris un matériau à grains non orientés, noté NO, dont la courbe  $B(H)$  suivant la direction de laminage coïncide avec la courbe  $B(H)$  dans les directions long et travers du matériau CUB-A et cela pour des valeurs de l'induction inférieures à 1,2 T. Nous avons donc un élément de comparaison entre les deux matériaux. Enfin, nous disposons des caractéristiques magnétiques d'un matériau de texture cubique fabriqué au Japon par des chercheurs de Nippon Steel [ARA-90]. Nous notons ce matériau CUB-B.



*Figure V.2 : Modèle bidimensionnel de l'alternateur*

Le maillage de la géométrie est réalisé avec des éléments triangulaires du deuxième ordre. Il y a à peu près deux cents éléments dans la région du stator où nous avons le matériau anisotrope et non linéaire.

La formulation employée pour résoudre le problème est une formulation en potentiel scalaire pour les équations de la magnétostatique. L'absence de couplage, dans la version du logiciel flux3d utilisé en 2D, entre les potentiels scalaire et vecteur nous contraint à étudier l'alternateur à vide en remplaçant le flux créé par les bobines d'excitation par le flux créé par un aimant situé au rotor. Cet artifice ne change en rien l'esprit de notre étude.

Dans les trois cas de figure correspondant aux trois matériaux différents la méthode de Newton-Raphson converge après une quinzaine d'itérations avec un coefficient de sous relaxation constant égal à 0,5 et cela pour différentes valeurs de l'induction moyenne dans l'entrefer sous un pôle.

Afin de comparer les matériaux entre eux nous avons calculé dans différents cas de figure l'énergie libre totale dans le stator S, cette énergie notée E est définie par l'intégrale suivante :

$$E = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dS . \quad (\text{V-43})$$

Cette énergie, intégrale sur le stator du produit scalaire  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ , est la moitié de la somme de l'énergie magnétique W et de la coénergie magnétique W' (à ne pas confondre avec les densités d'énergie  $\omega$  et de coénergie  $\omega'$ ). Pour une valeur donnée de l'induction dans l'entrefer le matériau le plus performant est celui qui dépense le moins d'énergie libre.

Les résultats de simulation pour les trois matériaux et pour différentes valeurs de l'induction moyenne dans l'entrefer sont donnés dans le tableau V.3.

Pour des inductions dans l'entrefer n'atteignant pas de trop fortes valeurs il est intéressant de comparer les matériaux CUB-A et NO qui présentent comme nous l'avons vu des caractéristiques magnétiques similaires dans la direction de laminage. Nous remarquons alors que pour créer la même induction dans l'entrefer le matériau CUB-A de texture cubique a besoin de dépenser moins d'énergie que le matériau à grains non orientés NO. L'influence de l'anisotropie est donc ici comme nous pouvions nous y attendre en faveur de la texture cubique qui pour de faibles inductions a un comportement isotrope. Pour la valeur maximale de l'induction dans l'entrefer ( $B_e=1,06$  T) la tendance est inversée, l'énergie dans le stator construit avec le matériau CUB-A est la plus importante car l'induction à saturation de ce matériau n'est pas suffisante.

Induction dans l'entrefer	Energie pour le NO (J/m)	Energie pour le CUB-A (J/m)	Energie pour le CUB-B (J/m)
$B_e = 0,43$ T	5,1	3,4	1,2
$B_e = 0,64$ T	16,1	11,4	7,0
$B_e = 0,86$ T	195	195	175
$B_e = 1,06$ T	1545	2275	471

*Tableau V.3 : Energie libre totale dans le stator modélisé pour différentes valeurs de l'induction moyenne sous un pôle dans l'entrefer ( $B_e$ )*

Quand au matériau CUB-B à texture cubique fabriqué chez Nippon Steel il a toujours besoin de beaucoup moins d'énergie que les deux autres matériaux pour fournir la même induction moyenne sous un pôle. Ce matériau possède en effet deux avantages importants par rapport à d'autres matériaux utilisés pour ce type d'application. Il présente de très bonnes caractéristiques magnétiques (à titre d'exemple  $B = 1,9 \text{ T}$  à  $800 \text{ A/m}$  suivant la direction de laminage) tout en ayant, du fait de sa texture, une anisotropie macroscopique peu marquée en bas champ. L'intérêt de ce type de matériau texturé est manifeste dans un alternateur en ce qui concerne ses caractéristiques magnétiques anhystériques.

Il faut remarquer que l'énergie fournie au matériau du stator ne représente que quelques pour cents (15 % au maximum dans les exemples précités) par rapport à l'énergie dans l'entrefer. L'influence de la perméabilité des matériaux sur le fonctionnement global de la machine peut ainsi être discutée. Il n'en demeure pas moins que son importance indirecte est essentielle puisque des flux de fuites peuvent être à l'origine d'échauffements localisés très graves pour la survie de la machine [BRI-87], [NEI-78].

### **V.5.2 Culasse de transformateur**

Ce travail est le sujet de [PER-94.4].

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à une culasse de circuit magnétique du type de celle d'un transformateur. Nous effectuons une modélisation bidimensionnelle sans prendre en compte de manière satisfaisante les phénomènes aux joints entre colonnes comme la présence d'entrefer ou l'imbrication des joints. Notre but est uniquement d'essayer de quantifier l'influence de l'anisotropie sur un tel dispositif. La géométrie possède des axes de symétrie, nous n'en modélisons que la moitié. Les dimensions sont indiquées sur la figure V.4.

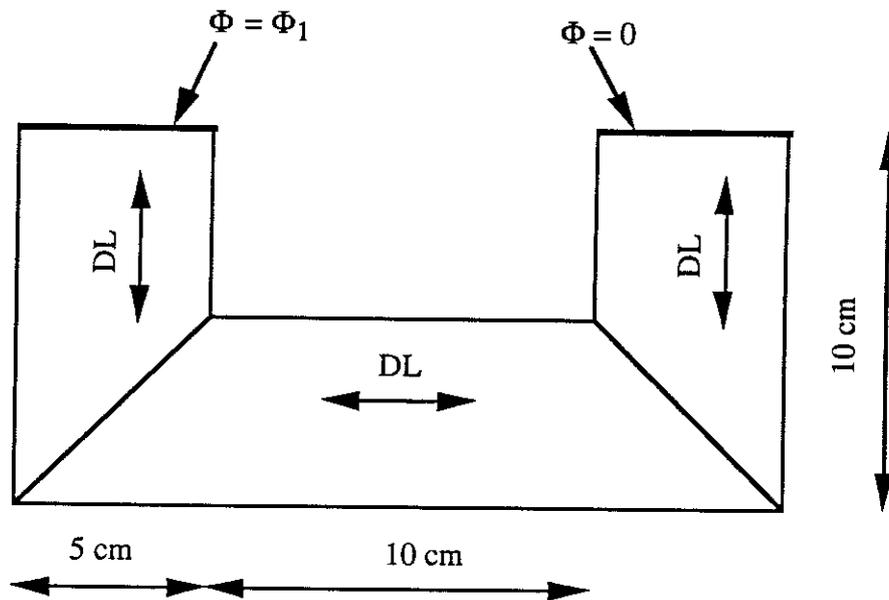
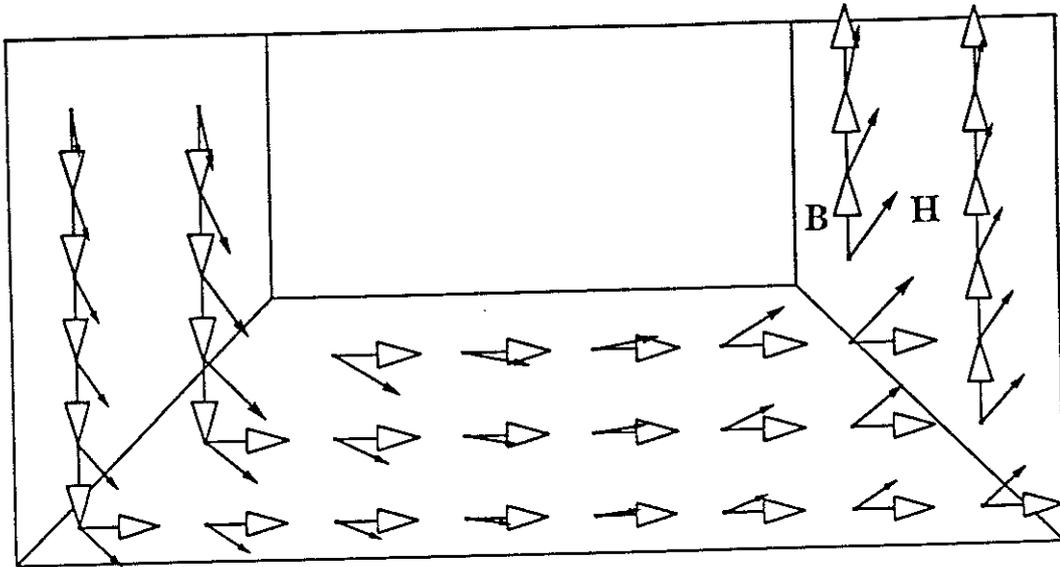
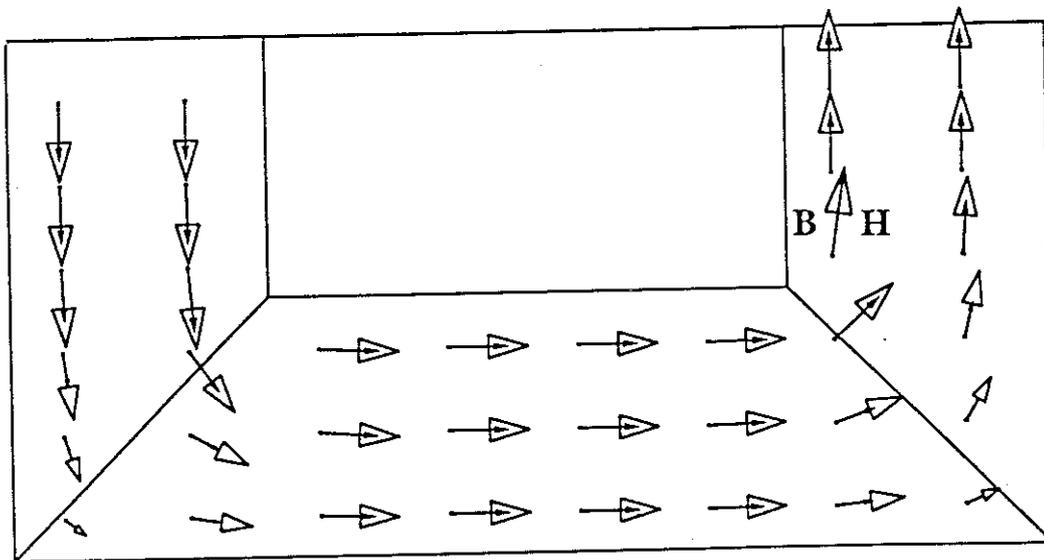


Figure V.4 : Géométrie modélisée de la culasse de circuit magnétique

Le problème est résolu en potentiel magnétique scalaire. Les conditions aux limites sont de type Neumann homogène  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\right)$  partout sauf sur les axes de symétrie où l'on applique des conditions de Dirichlet comme indiqué sur la figure V.4. Deux exemples sont traités pour deux valeurs du potentiel scalaire  $\Phi_1=10A$  et  $\Phi_1=200A$ . Le maillage de la culasse est effectué avec 270 éléments triangulaires du deuxième ordre. Nous avons pris pour traiter ce problème un matériau à grains orientés modélisé avec notre modèle (Thyssen-Orsi 111). Afin d'avoir un élément de comparaison nous avons aussi traité le problème en prenant un matériau isotrope dont la courbe B(H) est la courbe B(H) de la tôle à grains orientés suivant la direction de laminage. Nous nous sommes heurtés lors de la résolution à de gros problèmes de convergence de la méthode de Newton-Raphson. Le problème ne converge pas avec la méthode classique de Newton-Raphson en prenant un coefficient de sous relaxation de 0,5 que ce soit avec le matériau anisotrope ou avec le matériau isotrope. Grâce à la méthode de calcul optimisé du coefficient de sous relaxation que nous avons mentionnée, la résolution converge avec le matériau isotrope dans les deux cas de figure. Par contre seul le cas  $\Phi_1=10A$  converge en 21 itérations pour le matériau anisotrope. Pour



*Figure V.5 : Représentation des vecteurs  $B$  et  $H$  pour une induction moyenne de 1,4 T pour la tôle à grain orientés*



*Figure V.6 : Représentation des vecteurs  $B$  et  $H$  pour une induction moyenne de 1,4 T pour le matériau isotrope*

faire converger le cas  $\Phi_1=200A$  où le matériau est saturé nous devons enchaîner la résolution du problème avec la tôle à grains orientés à partir d'une résolution avec le matériau isotrope, nous obtenons alors la convergence du problème.

Pour  $\Phi_1=10A$  l'induction moyenne dans la culasse est de 1,4 T et pour  $\Phi_1=200A$  elle est de 1,8 T. Les figures V.5 et V.6 représentent les vecteurs induction et champ magnétique dans le cas de la tôle à grains orientés et dans le cas du matériau isotrope. La répartition des vecteurs est très différente, avec la tôle à grains orientés l'induction reste suivant la direction de laminage. Dans ce cas la continuité de la composante normale de l'induction et de la composante tangentielle du champ magnétique au niveau des joints est respectée.

Afin de pouvoir quantifier ces différences nous avons comme dans le cas précédent calculé l'énergie libre définie par l'intégrale sur les culasses du produit scalaire  $\mathbf{B.H}$ . Les résultats sont reportés dans le tableau V.7.

Type de matériau	$\Phi_1 = 10A$	$\Phi_1 = 200A$
à grains orientés	0,37 J/m	9,1 J/m
isotrope	0,36 J/m	8,9 J/m
Différence relative (%)	- 2 %	- 1 %

*Tableau V.7 : Energie libre totale sur la culasse pour différentes valeurs des conditions limites*

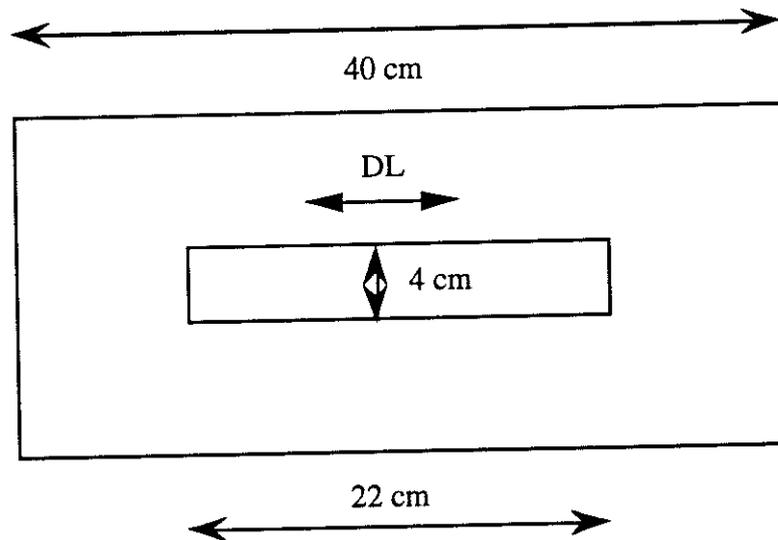
L'avantage au niveau énergétique est du côté du matériau isotrope. La différence relative d'énergie entre le matériau isotrope et le matériau anisotrope est si faible que l'on peut se demander si cet écart est représentatif compte-tenu de la précision de la méthode des éléments finis. L'anisotropie, qui est visible localement avec un déphasage important entre

le champ magnétique et l'induction, n'a pas réellement dans l'exemple que nous avons traité de conséquence directe sur une grandeur macroscopique comme l'énergie libre.

### V.5.3 Limites numériques

Un problème test, créé afin de modéliser par la méthode des éléments finis le caractère non linéaire et anisotrope des tôles à grains orientés en deux dimensions, nous a été proposé par le Laboratoire de Génie Electrique d'Okayama au Japon dans le cadre d'une collaboration avec notre laboratoire.

La géométrie de ce cas test est donnée sur la figure V.8.



*Figure V.8 : Géométrie et dimension du cas test (DL : direction de laminage)*

Nous avons tenté d'étudier ce problème avec différents types de conditions aux limites et de maillages. Nous avons jusqu'à présent été impuissants à faire converger le problème quelles que soient les variantes de la méthode de Newton-Raphson que nous avons utilisées. Cela est dommageable car nous sommes ainsi limités dans l'exploitation des

possibilités de la modélisation du caractère non linéaire et anisotrope des matériaux magnétiques.

Deux perspectives s'ouvrent ainsi quant à la suite de cette étude. D'une part, l'amélioration des techniques de convergence pour résoudre les problèmes non linéaires pourrait faire l'objet d'efforts plus soutenus. D'autre part, une adaptation du modèle, allant vers une plus grande simplification, au regard des causes des difficultés de convergence du processus itératif peut tout à fait être envisagée. Enfin nous pensons que ces deux projets doivent être menés de front.

## CONCLUSION



Afin de tirer le meilleur parti des logiciels de conception utilisés en Génie Electrique, une bonne modélisation des matériaux magnétiques est nécessaire. En particulier pour les tôles magnétiques Fe-Si la relation entre les vecteurs induction  $\mathbf{B}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  doit être modélisée correctement. Cela est valable pour les différentes catégories de tôles (grains orientés, grains non orientés, texture cubique) qui ont chacune des applications spécifiques (machines statiques ou tournantes).

Ces lois de comportement magnétique macroscopiques sont valables pour un matériau considéré comme homogène et résultent de phénomènes microscopiques complexes. Une réflexion sur les modèles existants nous a permis de choisir une approche thermodynamique cohérente pour décrire le comportement non linéaire et anisotrope des tôles magnétiques. Notre travail est ainsi une solution de continuité par rapport aux travaux effectués au laboratoire sur le même thème.

Nous avons développé un modèle original fondé sur l'équivalence entre la relation vectorielle  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  et une représentation plus compacte utilisant la densité de coénergie magnétique  $\omega'$  qui est une fonction du champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Les données expérimentales nécessaires sont les courbes  $B(H)$  dans des directions où l'induction et le champ magnétique sont parallèles. En général ces directions sont la direction de laminage (axe  $x$ ) et la direction travers qui lui est orthogonale (axe  $y$ ). Le comportement magnétique des tôles est alors pris en compte grâce à une représentation analytique adéquate des lignes isovalues de densité de coénergie dans le plan  $H_x$ - $H_y$ . La relation vectorielle  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  est ensuite restituée à partir de la densité de coénergie. Le modèle a été appliqué à trois types de tôles, à texture cubique, à grains non orientées et à grains orientés.

En ce qui concerne les tôles à grains orientés notre modèle reproduit l'importance prépondérante des parois à  $180^\circ$  en bas champ ainsi que le passage de la direction macroscopique de difficile aimantation de  $90^\circ$  à  $55^\circ$  lors de l'augmentation de la norme du

champ magnétique. Les considérations précédentes ont été vérifiées expérimentalement grâce à un dispositif de caractérisation, le cadre en champs tournants. Ce dispositif nous a permis de montrer que lorsque l'angle entre le champ magnétique et la direction de laminage est proche de  $65^\circ$  et pour une norme constante de l'induction de 1,2 T trois états magnétiques sont possibles. Nous sommes capables de modéliser ce phénomène.

Notre modèle a été implanté dans un logiciel éléments finis en prenant une formulation en potentiel scalaire pour résoudre l'équation de la magnétostatique et cela grâce au calcul de la matrice des perméabilités incrémentales. L'application à deux dispositifs électrotechnique (alternateur et transformateur) nous a laissé entrevoir les nouvelles possibilités de la modélisation des matériaux magnétiques. Nous sommes malheureusement limité dans l'exploitation de ces possibilités par les difficultés voire l'absence de convergence du processus itératif de Newton-Raphson permettant la résolution des équations non linéaires. La poursuite de cette étude conduirait donc à s'intéresser à ces problèmes de convergence soit en développant de nouvelles techniques, soit en adaptant notre modèle en regard des causes de ces difficultés.

## BIBLIOGRAPHIE



- [AKI-70] **H. AKIMA**  
"A new method of interpolation of smooth curve fitting based on local procedures".  
Journal of the Association for Computing Machinery, vol.17(4), pp 589-602, 1970.
- [ARA-90] **S. ARAI**  
"The magnetic properties of doubly oriented 3 % SiFe and its application".  
J. Appl. Phys., vol.67(9), pp 5577-5579, 1990.
- [BAS-85] **J.P.A. BASTOS, G. QUICHAUD**  
"3D modelling of a non-linear anisotropic lamination".  
IEEE Trans. Mag., vol.21(6), pp 2366-2369, 1985.
- [BAV-92] **J.C. BAVAY, J. VERDUN**  
"Alliages fer-silicium".  
Techniques de l'Ingénieur, traité Génie Electrique, pp D2110-D2113, 1992.
- [BER-94] **G. BERTOTTI, A. CANOVA, M. CHIAMPI, D. CHIRABAGLIO, F. FIORILLO, A.M. RIETTO**  
"Core loss prediction combining physical models with numerical field analysis".  
SMM 11, S6-38, à paraître dans J.M.M.M. en 1994.
- [BOZ-32] **R.M. BOZORTH**  
"The theory of ferromagnetic anisotropy of single crystals".  
Phys. Rev., vol.42, pp 882-892, 1932.

- [BOZ-51] **R.M. BOZORTH**  
"Ferromagnetism".  
D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1951.
- [BRI-74] **P. BRISSONNEAU**  
"Les domaines magnétiques".  
Revue de Physique Appliquée, vol.9, pp 783-792, 1974.
- [BRI-80] **P. BRISSONNEAU**  
"Non oriented Si-Fe sheets".  
J.M.M.M., vol.19, pp 52-59, 1980.
- [BRI-84] **P. BRISSONNEAU**  
"Non oriented electrical sheets".  
J.M.M.M., vol.41, pp 38-46, 1984.
- [BRI-87] **P. BRISSONNEAU**  
"Magnétisme classique et tôles magnétiques pour le Génie Electrique".  
Cours de Formation Professionnelle INPG, Grenoble 1987.
- [BRU-87] **M. BRUGEL**  
"Magnétisme classique et matériaux magnétiques pour le Génie Electrique".  
Cours de formation professionnelle INPG, Grenoble 1987.
- [DAV-82] **D. DAVIES, A.J. MOSES**  
"Causes of some errors in measurements in grain oriented silicon iron using the Epstein square".  
J.M.M.M., vol.26, pp 35-36, 1982.

- [DED-90] **J.M. DEDULLE**  
"Contribution à la modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle des phénomènes d'anisotropie dans les transformateurs triphasés".  
Thèse INPG, Grenoble, 1990.
- [DIN-83] **A. DI NAPOLI, R. PAGGI**  
"A model of anisotropic grain-oriented steel".  
IEEE Trans. Mag., vol. 19(4), pp 1557-1561, 1983.
- [DUM-93] **F. DUMAS**  
"Contribution à la prédétermination des pertes fer dans les circuits magnétiques des machines électriques par la méthode des éléments finis".  
Thèse de Doctorat, UTC, 1993.
- [ENO-94] **M. ENOKIZONO, S. KANAO, K. YUKI**  
"Permeability tensor of grain oriented steel sheet".  
SMM 11 Conference, S2-25, à paraître dans J.M.M.M. en 1994.
- [FAS-63.1] **G.M. FASCHING, H. HOFMANN**  
"Le champ magnétique stationnaire dans les tôles anisotropes et sa mesure"  
(en allemand).  
Z. Angew. Phys., vol.16, pp 227-230, 1963.
- [FAS-63.2] **G.M. FASCHING, H. HOFMANN**  
"Les vecteurs **B** et **H** dans les champs faibles dans les tôles anisotrope"  
(en allemand).  
Z. Angew. Phys., vol.17, pp 244-247, 1963.

- [FAS-64] **G.M. FASCHING**  
"Du comportement statistique des domaines pour les structures ferromagnétiques cubiques" (en allemand).  
Österr. Ing-Arch., vol.18 H.1 2, pp 123-130, 1964.
- [FAU-71] **A. FAUSSURIER, R. SERVAN**  
"Les matériaux électrotechniques".  
Dunod, Paris, 1971.
- [FUJ-92] **K. FUJIWARA, T. NAKATA**  
"Improvements of modified Newton-Raphson method"  
CEFC Conference, Claremont, 1992
- [HEI-31] **W. HEISENBERG**  
"De la théorie de la magnétostriction et des courbes d'aimantation"  
(en allemand).  
Z. Physik, vol.69, pp 287-297, 1931.
- [HUT-84] **D. HUTTENLOHER, H.W. LORENZEN, D. NUSHELER**  
"Investigation of the importance of the anisotropy of cold rolled electrical steel sheet".  
IEEE Trans. Mag., vol. 20(5), pp 1968-1970, 1984.
- [KIT-83] **C. KITTEL**  
"Physique de l'état solide".  
Dunod, Paris, 1983.

- [LAN-69] **L. LANDAU, E. LIFCHITZ**  
"Electrodynamique des milieux continus".  
Editions Mir, Moscou, 1969.
- [LIT-82] **M.F. LITTMANN**  
"Grain oriented silicon steel sheets".  
J.M.M.M., vol.26, pp 1-10, 1982.
- [MAR-91] **Y. MARECHAL**  
"Modélisation de phénomènes magnétostatiques avec terme de transport.  
Application aux ralentisseurs électromagnétiques".  
Thèse de l'INPG, Grenoble, 1991.
- [MEK-94] **M. MEKHICHE, T. WAECKERLE, B. CORNUT**  
"Influence of a small amount of Al content on anomalous growth in 3%  
SiFe magnetic sheets".  
SMM 11, S2-10, à paraître dans J.M.M.M. en 1994.
- [MEU-81] **G. MEUNIER**  
"Application de la méthode des éléments finis à la modélisation des  
micromoteurs".  
Thèse de Docteur Ingénieur, INPG, Grenoble, 1981.
- [MOS-73] **A.J. MOSES, B. THOMAS**  
"The spacial variation of localized power loss in two practical transformer  
T-joints".  
IEEE Trans. Mag., vol.9(4), pp 655-659, 1973.

- [MOS-80] **A.J. MOSES, G.S. RADLEY**  
"Experimental simulation of magnetic flux and power loss distribution in the stator core of a large rotating machine".  
J.M.M.M., vol.19, pp 60-62, 1980.
- [NAK-75] **T. NAKATA, Y. ISHIHARA, K. YAMADA, A. SASANO**  
"Non linear analysis of rotating flux in the T-joint of a three-phase, three-limbed transformer core".  
Proc. of the Soft Magnetic Materials 2 Conference, pp 57-62, 1975.
- [NAK-93] **T. NAKATA, N. TAKAHASHI, F. FUJIWARA, M. NAKAN, N. OKAMOTO**  
"An improved numerical analysis of flux distributions in anisotropic materials".  
Proc. of Compumag, Miami, 1993.
- [NEA-93] **C.E. NEAGOE**  
"Traitement numérique des problèmes magnétostatiques non linéaires".  
D.E.A. de Génie Electrique, L.E.G., Grenoble, 1993.
- [NEE-44] **L. NEEL**  
"Les lois de l'aimantation et de la subdivision en domaines élémentaires d'un monocristal de fer".  
J. Phys. Rad., vol.5, pp 241-251, 1944.

- [NEI-78] **G. NEIDHOEFFFER, A. SCHWENGELER**  
"The application and signifiante of magnetic materials in large generator construction".  
J.M.M.M., vol.9, pp 112-122, 1978.
- [OLS-92] **P. OLSZEWSKI, T. NAKATA, N. TAKAHASHI, K. FUJIWARA**  
"Numerical model for soft anisotropic materials and its experimental verification".  
J.M.M.M., vol.112, pp 447-449, 1992.
- [PER-93.1] **T. PERA, F. OSSART, T. WAECKERLE**  
"Numerical representation for anisotropic materials based on coenergy modeling".  
J. Appl. Phys., vol.73(10), pp 6784-6786, 1993.
- [PER-93.2] **T. PERA, F. OSSART, T. WAECKERLE**  
"Field computation in non linear anisotropic sheets using the coenergy model".  
IEEE Trans. Mag., vol. 29(6), pp 2425-2427, 1993.
- [PER-94.1] **T. PERA, T. WAECKERLE, F. OSSART**  
"Experimental checking of the coenergy model using a rotating field device".  
SMM 11, S2-07, à paraître dans J.M.M.M. en 1994.

- [PER-94.2] **T. PERA, T. WAECKERLE**  
"2D anisotropic behavior of grain oriented sheets measured with a rotating single sheet tester. Comparison with the coenergy model".  
Proceedings of the Third International Workshop on the Magnetic Properties of Electrical Steel Sheets under 2D Excitation publié par l'Italian Metallurgical Association. A paraître en 1994.
- [PER-94.3] **T. PERA, M. MEKHICHE, Y. MARECHAL**  
"Model of the anisotropic behavior of double oriented and non oriented materials using coenergy. Application to a turbogenerator".  
Soumis à CEFC'94, Grenoble, 1994.
- [PER-94.4] **T. PERA, C. NEAGOE, F. OSSART**  
"Analysis of convergence problems for the study of anisotropy on a transformer core".  
Soumis à CEFC'94, Grenoble, 1994.
- [PFU-92] **H. PFÜTZNER, T. BOOTH, C. BENGTSSON, K. GRAMM**  
"3D flux distributions in laminated soft magnetic materials".  
Proceedings of the Second International Workshop on Magnetic Perspectives of Electrical sheet Steel under Two-Dimensional Excitation, Oita, pp 20-30, 1992.
- [ROB-78] **P. ROBERT**  
"Matériaux de l'électrotechnique".  
Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1978.

- [SAB-86] **J.C. SABONNADIÈRE, J.L. COULOMB**  
"Elements finis et C.A.O."  
Traité des Nouvelles Technologies, Hermès, 1986.
- [SIL-91] **P.P. SILVESTER, R.P. GUPTA**  
"Effective computational models for anisotropic soft B-H curves".  
IEEE Trans. Mag., vol.27(5), pp 3804-3807, 1991.
- [SHE-87] **D. SHEN**  
"Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques".  
Thèse INPG, Grenoble, 1987.
- [TAM-94] **Y. TAMURA, Y. ISHIHARA, T. TODAKA**  
"Measurement of magnetic characteristics of silicon steel in any direction by RSST and SST".  
SMM 11, S4-03, à paraître dans J.M.M.M. en 1994.
- [TIM-84] **A. TIMOTIN, J. VILMOS**  
"Aimantation de la tôle anisotrope sous l'influence d'un champ transversal. Propriétés thermodynamiques".  
Revue Roumaine des Sciences Techniques, Electrotechnique et Energétique, Tome 29, pp 205-213, 1984.
- [WAE-92.1] **T. WAECKERLE, B. CORNUT, A. LÉBOUC, J.C. PERRIER**  
"Model of approach to saturation for textured steels".  
J.M.M.M., vol.112, pp 454-456, 1992.

- [WAE-92.2] **T. WAECKERLE, B. CORNUT**  
"Influence of texture in grain oriented steel on magnetization calculated curve in the range of rotation processes".  
IEEE Trans. Mag., vol.28, pp 2793-2795, 1992.
- [WEG-76] **P.T. WEGGLER**  
"Computation of magnetic fields in non linear anisotropic media with field dependent degree of anisotropy".  
Proc. of Compumag, Oxford, pp 168-176, 1976.
- [WIL-37] **H.J. WILLIAMS**  
"Magnetic properties of single crystals of silicon iron".  
Phys. Rev., vol.52, pp 747-751, 1937.
- [ZIE-89] **O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR**  
"The finite element method".  
Vol.1, Mac Graw Hill, 1989.
- [ZOU-91] **S. ZOUZOU**  
"Contribution à l'étude des pertes magnétiques en champs tournants".  
Thèse de l'INPG, Grenoble, 1991.
- [ZOU-92] **S. ZOUZOU, A. KEDOUS-LEBOUC, P. BRISSONNEAU**  
"Magnetic properties under unidirectional and rotational field".  
J.M.M.M., vol.112, pp 106-108, 1992.



AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992 relatifs aux Etudes Doctorales

Vu les Rapports de présentations de :

Monsieur Jean-Marie BIEDINGER

Monsieur FAUSTO FIORILLO

Monsieur Thierry PERA

est autorisé à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, spécialité "Génie Electrique".

Fait à Grenoble, le 23 Février 1994

Pour le Bureau de l'INPG  
et par son  
le Directeur des Ecoles Doctorales  
J.L. LACOUME





## RESUME

Le but de notre étude est de prendre en compte le comportement bidimensionnel non linéaire et anisotrope des tôles magnétiques, utilisées en génie électrique, afin de pouvoir effectuer une modélisation par éléments finis aussi réaliste que possible.

Nous avons développé un modèle original de loi de comportement de tôles magnétiques (à grains orientés, à grains non orientés, à texture cubique) fondé sur l'équivalence entre la relation vectorielle  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  et une représentation plus compacte utilisant la densité de coénergie magnétique qui est une fonction du champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Les données expérimentales nécessaires sont les courbes  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  suivant la direction de laminage (axe  $x$ ) et suivant la direction travers qui lui est orthogonale (axe  $y$ ). Le comportement magnétique des tôles est pris en compte par une représentation adéquate des lignes isovaleurs de coénergie dans le plan  $H_x$ - $H_y$ . La relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  est ensuite restituée à partir de la densité de coénergie. Une vérification expérimentale du modèle a été effectuée grâce à un cadre en champs tournants. Nous avons implanté le modèle dans un logiciel éléments finis avec une formulation en potentiel scalaire. Des exemples d'application ont été traités (alternateur et transformateur).

**Mots clés :** Tôles magnétiques, anisotropie magnétique, modélisation, méthode éléments finis, densité de coénergie, validation expérimentale

## ABSTRACT

The aim of our study is to take into account the 2D anisotropic and non linear behavior of magnetic sheets, used in electrical engineering, to get the best out of simulation tools. We have proposed a new model of the magnetization laws of different magnetic sheets (grain oriented, non oriented and double oriented) based on the equivalence between the vectorial  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  relationship and a compact representation using the coenergy density as a function of the magnetic field  $\mathbf{H}$ . The experimental data needed are the  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  curves in the rolling and transverse directions (respectively  $x$  and  $y$ ). The anisotropic behavior of the sheet is taken into account by a proper modeling of the contours of equal coenergy in the  $H_x$ - $H_y$  plan. Then the  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  curves along any direction are derived from the coenergy density. An experimental checking of the model has been done with a rotating field single sheet tester. The model has been implemented in a finite elements software using scalar potential. Examples have been computed (turbogenerator and transformer).

