



**HAL**  
open science

# COUPLAGE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS AVEC UNE MÉTHODE D'ANALYSE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE : APPLICATION À LA MODÉLISATION DES MACHINES ÉLECTRIQUES TOURNANTES

Thomas Dreher

► **To cite this version:**

Thomas Dreher. COUPLAGE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS AVEC UNE MÉTHODE D'ANALYSE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE : APPLICATION À LA MODÉLISATION DES MACHINES ÉLECTRIQUES TOURNANTES. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 1994. Français. NNT: . tel-01922391

**HAL Id: tel-01922391**

**<https://hal.science/tel-01922391>**

Submitted on 14 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Thomas Dreher**

**Dipl.-Ing. de la Technische Universität Ilmenau**

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de l'**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**  
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(Spécialité: Génie Électrique)

---

---

**COUPLAGE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS  
TRIDIMENSIONNELS AVEC UNE MÉTHODE D'ANALYSE DU  
CIRCUIT ÉLECTRIQUE : APPLICATION À LA MODÉLISATION  
DES MACHINES ÉLECTRIQUES TOURNANTES**

---

---

Date de soutenance: 4 Octobre 1994

Composition du jury:

Monsieur	Alain NICOLAS	Président, Rapporteur
Messieurs	Jean Marie BIEDINGER	Rapporteur
	Pascal BROCHET	Examineur
	Jean Louis COULOMB	Examineur
	Gilbert DAUGE	Examineur
	Gérard MEUNIER	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble



## Remerciements

Ce projet de recherche a été réalisé au Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble dans le cadre d'un saut technologique du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Il a été mené à bien grâce à l'étroite collaboration entre les laboratoires universitaires, le L.E.G et le L.E.S.I.R et les sociétés MOULINEX (Centre Européen de Recherche de Moulinex à Caen) et VALEO.

Je remercie vivement Monsieur Alain Nicolas, Directeur du C.E.G.E.L.Y pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury et d'être rapporteur de cette thèse. Je tiens également à remercier les autres membres du jury, Monsieur Jean Marie Biedinger et Monsieur Pascal Brochet d'avoir accepté d'être rapporteur et membre du jury pour la soutenance de ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Gérard Meunier, Directeur de Recherche au C.N.R.S, responsable de l'équipe "Modélisation et C.A.O en électromagnétisme" et directeur de ma thèse. Pendant les années passées il a été pour moi professeur, conseiller scientifique et ami, ce qui m'a permis d'effectuer un travail de recherche dans les meilleurs conditions. Il a su me transmettre non seulement sa connaissance et expérience dans le domaine de la simulation numérique, mais aussi la joie de comprendre, de chercher des nouvelles solutions et d'aboutir à des résultats encourageants.

Mes remerciements chaleureux sont également adressés à Monsieur Jean Louis Coulomb, Responsable de la Formation Doctorale en Génie Électrique à l'I.N.P.G et professeur au L.E.G. Sans sa compétence et son expérience dans le domaine de la programmation des logiciels de la C.A.O, la réalisation de notre code de calcul n'aurait sûrement pas abouti. Je suis heureux d'avoir eu l'honneur, la chance et le plaisir de travailler avec lui, et je suis sûr que cette expérience me sera profitable pour mon futur travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Gilbert Dauge, Directeur d'Études de composants au sein du Centre Européen de Recherche de Moulinex à Caen pour l'encadrement très fructueux de mon travail. Ces conseils scientifiques et pratiques m'ont permis de mieux comprendre les besoins industriels de simulation ainsi que les problèmes liés à la fabrication des moteurs performants. Mes remerciements sincères s'adressent également à Monsieur Dr. Heinrich Komesker, Directeur du Centre Européen de Recherche de Moulinex pour son soutien et sa confiance.

Je remercie les responsables du saut technologique dans lequel ce projet s'inscrit, Monsieur Sabonnadière de la part du L.E.G et Monsieur Lalande de la part de la société Moulinex. Cette collaboration nous a permis de travailler dans des meilleures conditions et m'a permis de profiter des expériences des deux partenaires.

Merci avant tout à mon collègue de travail pendant trois années et mon ami, Rémy Perrin-Bit, qui a été un parfait coéquipier lors de la programmation de notre logiciel. Ses idées originales et son travail de programmation de très grande qualité nous ont permis de réaliser un logiciel complexe dans un temps très court.

Je tiens également à remercier tous les professeurs, chercheurs, thésards, ingénieurs et techniciens du L.E.G qui m'ont soutenu avec leur savoir-faire, qui m'ont aidé à résoudre des multiples problèmes informatiques quotidiens et avec lesquels il a été très agréable de travailler dans une atmosphère amicale et chaleureuse. Représentant pour beaucoup d'autres, mes remerciements s'adressent à:

- A Monsieur Albert Foggia, professeur à l'E.N.S.I.E.G et directeur de l'équipes machines du L.E.G pour ses nombreuses suggestions sur la théorie des machines électriques,
- Aux chercheurs Yves Maréchal, Xavier Brunotte et Henri Magnin pour leurs conseils scientifiques,
- Aux ingénieurs Etiennette Callegher, Patrick Guillot, Pascal Perot et Patrice Labie pour leur soutien informatique,
- A mes compatriotes Wolfgang Morweiser, Sigurd Ahrens, Carsten-Sünnke Berendsen et Volker Leitloff pour les moments que nous avons passé ensemble,
- Aux thésards Patrick Lombard, Christophe Guérin, Marc Jarnieux et Patrick Eustache et Nicolas Labbe pour l'accueil chaleureux dans l'équipe modélisation.

Je voudrais aussi remercier mes collègues de la société Moulinex, Michel Le Roux, Michel Guinet et Jean Luc Piton pour leur intérêt et leur collaboration lors de mes multiples séjours au Centre de Recherche à Caen. Ils ont réalisé les mesures présentées dans ce rapport, assisté mon travail informatique et m'ont soutenu grâce à leur compétence industrielle.

Mes remerciements chaleureux sont adressés à Monsieur Désesquelles et Mademoiselle Chatigny, nos collaborateurs de la société VALEO, qui nous ont conseillé dans de nombreuses réunions.

# Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	13
CHAPITRE I: .....	19
Analyse de l'existant.....	19
I.1. Présentation du problème .....	21
I.2. Analyse de littérature .....	21
CHAPITRE II : .....	23
Analyse du circuit électrique .....	23
II.1. Introduction.....	25
II.2. Présentation des éléments concentrés .....	25
II.3. Mise en équations du circuit électrique.....	27
II.3.1. <i>Le premier théorème de Kirchhoff</i> .....	27
II.3.2. <i>Le second théorème de Kirchhoff</i> .....	28
II.3.3. <i>La méthode des potentiels nodaux</i> .....	30
II.3.4. <i>La méthode des courants de mailles</i> .....	31
II.3.5. <i>La méthode des potentiels nodaux intégrés</i> .....	32
II.3. Comparaison des méthodes d'analyse des circuits électriques .....	33
CHAPITRE III : .....	35
La méthode des éléments finis .....	35
III.1. Les Equations du champ magnétique .....	37
III.2. Les potentiels du type électrique .....	38
III.2.1. <i>Le potentiel vecteur magnétique <math>A</math></i> .....	38
III.2.2. <i>Le potentiel scalaire électrique <math>V</math></i> .....	41
III.2.3. <i>Modèle volumique des conducteurs filaires</i> .....	42
III.2.4. <i>Limitations du modèle volumique</i> .....	47
III.2.5. <i>Modèle linéique des conducteurs filaires</i> .....	48
III.3. Les formulations du type magnétique .....	53
III.3.1. <i>Le potentiel scalaire magnétique <math>\psi</math></i> .....	53
III.3.2. <i>Le potentiel vecteur électrique <math>T</math></i> .....	54
III.3.3. <i>Le potentiel vecteur électrique <math>T_0</math></i> .....	54
CHAPITRE IV : .....	61
Couplage des équations du champ magnétique avec les équations du	
circuit électrique.....	61
IV.1. Introduction .....	63
IV.2. Le couplage indirecte .....	63
IV.3. La formulation intégro-différentielle .....	65
IV.4. La résolution simultanée.....	67

IV.5. Réflexions sur le choix de la méthode employée .....	68
IV.6. La méthode de couplage retenue .....	70
<b>CHAPITRE V : .....</b>	<b>73</b>
<b>Méthodes de résolution directe des systèmes d'équations différentielles .....</b>	<b>73</b>
V.1. Introduction .....	75
V.2. Résolution des équations différentielles de premier ordre .....	75
V.2.1. Les schémas de récurrence de Euler .....	75
V.2.2. Discrétisation du temps en éléments finis .....	77
V.3. Résolution des équations différentielles de second ordre .....	78
V.3.1. Méthodes basées sur des différences finies .....	79
V.3.2. Transformation d'un système de second ordre en un système de premier ordre .....	80
V.4. Conclusion .....	81
<b>CHAPITRE VI : .....</b>	<b>83</b>
<b>Réalisation informatique .....</b>	<b>83</b>
VI.1. Introduction.....	85
VI.2. Présentation du logiciel .....	85
VI.3. Structuration des données .....	86
VI.4. Constitution du système d'équations .....	87
VI.4.1. Contributions matricielles des éléments du circuit électrique .....	87
VI.4.2. Prise en compte des composant spéciaux.....	91
VI.5. Adaptation du solveur des systèmes d'équations linéaires .....	93
VI.5.1. Numérotation des variables .....	93
VI.5.2. Préconditionnement de la matrice .....	94
VI.6. Prise en compte des équations non linéaires .....	96
VI.7. Prise en compte du mouvement.....	98
VI.8. Conclusion .....	99
<b>CHAPITRE VII : .....</b>	<b>101</b>
<b>Validations.....</b>	<b>101</b>
VII.1. Étapes de validation.....	103
VII.2. Validation du couplage .....	103
VII.3. Simulation d'une machine universelle.....	109
VII.4. Calcul d'un moteur à réluctance variable .....	113
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>117</b>
<b>Références .....</b>	<b>121</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>129</b>
<b>ANNEXE.....</b>	<b>135</b>

<b>Calcul du problem TEAM #20 .....</b>	<b>135</b>
Présentation du problème.....	137
Méthodes de calcul et analyse des erreurs .....	137
Calcul de la force électromagnétique .....	143
<i>Calcul de la force à partir du tenseur de Maxwell: .....</i>	<i>143</i>
<i>Calcul de la force par la méthode des travaux virtuels: .....</i>	<i>144</i>
Conclusion.....	146





## Table des figures

<b>Fig. 2.1</b>	
Élément à un port et élément à deux ports.....	25
<b>Table 2.1</b>	
Définition des composants du circuit électrique .....	26
<b>Fig.2.2</b>	
Convention de l'orientation des branches du circuit électrique.....	26
<b>Fig. 2.3</b>	
Sélection d'un arbre pour le graphe d'un circuit .....	29
<b>Fig. 2.4</b>	
Choix des mailles fondamentales à partir du coarbre .....	29
<b>Fig. 3.1</b>	
Modèle de la densité de courant homogène .....	43
<b>Fig. 3.2</b>	
Définition du coefficient de foisonnement .....	44
<b>Fig. 3.3</b>	
Définition de la fonction de bobinage .....	45
<b>Fig. 3.4</b>	
Géométrie d'un contacteur et d'un transformateur de tension .....	47
<b>Fig. 3.5</b>	
Géométries d'un moteur à aimants et d'une machine universelle.....	48
<b>Fig. 3.6</b>	
Calcul des segments linéiques.....	52
<b>Fig. 3.7</b>	
Paramètres d'une bobine rectangulaire .....	56
<b>Fig. 3.8</b>	
Potentiel $t_0'$ d'une spire élémentaire .....	56
<b>Fig. 3.9</b>	
Fonction $t_0$ d'une bobine rectangulaire.....	57
<b>Fig. 4.1</b>	
Structure principale d'une matrice de bande .....	66
<b>Fig. 4.2</b>	

Structure de la matrice avec couplage entre les nœuds .....	66
<b>Fig. 4.3</b>	
Structure de la matrice obtenue par la méthode de résolution simultanée .....	68
<b>Fig. 5.1</b>	
Influence de $b$ sur la stabilité et les oscillations .....	76
<b>Fig. 5.2</b>	
Fonctions d'interpolation de premier ordre dans le temps .....	77
<b>Fig. 6.1</b>	
Transformation d'une source de tension réelle en une source de courant réelle .....	91
<b>Fig. 6.2</b>	
Circuit équivalent d'une diode réelle .....	97
<b>Fig. 7.1</b>	
Géométrie du noyau UI76 avec les bobinages discrétisées .....	104
<b>Fig.7.2</b>	
Approximation pour $\mu_r(B)$ et les données expérimentales ( $\Delta$ ) .....	104
<b>Fig.7.3</b>	
Schéma électrique d'alimentation de la bobine .....	105
<b>Fig.7.4</b>	
Discrétisation du noyau de ferrite .....	105
<b>Fig 7.5</b>	
Courants dans la bobine 1 pour différents entrefers $e$ .....	106
<b>Fig. 7.6</b>	
Tension dans la bobine de mesure pour différents entrefers $e$ .....	106
<b>Fig. 7.7</b>	
Valeurs du flux dans la bobine de mesure pour différents entrefers $e$ .....	107
<b>Fig. 7.8</b>	
Flux dans la bobine de mesure en fonction du courant dans la bobine 1 pour différents entrefers $e$ .....	107
<b>Fig.7.9</b>	
Schéma électrique de l'essai pour le système du premier ordre .....	108
<b>Fig. 7.10</b>	

	Courant dans la bobine 1 - bobine 2 pour un entrefer de 1mm .....	108
<b>Fig. 7.11</b>		
	Géométrie de la machine universelle .....	109
<b>Fig. 7.12</b>		
	Perméabilité relative $\mu_{rel}(B)$ .....	109
<b>Fig. 7.13</b>		
	Maillage du stator et du rotor de la machine universelle .....	110
<b>Fig. 7.14</b>		
	Discretisation en courants linéiques des bobinages rotoriques et statoriques .....	111
<b>Fig. 7.15</b>		
	Image du flux dans les parties actives de la machine .....	111
<b>Fig. 7.16</b>		
	Courbes des courants dans les bobinages rotoriques .....	112
<b>Fig. 7.17</b>		
	Allure du couple instantané .....	112
<b>Fig. 7.18</b>		
	Schéma d'alimentation des bobines.....	113
<b>Fig. 7.19</b>		
	Circuit électronique d'alimentation du moteur .....	113
<b>Fig. 7.20</b>		
	Courbes des courants des phases obtenus par la simulation .....	114
<b>Fig. 7.21</b>		
	Courbes des courants des phases mesurés.....	115
<b>Fig. 7.22</b>		
	Allure du couple instantané .....	115
<b>Fig. A.1</b>		
	Modèle géométrique du problème 20 .....	137
<b>Fig. A.2</b>		
	Discretisation des parties massives .....	138
<b>Fig. A.3</b>		
	Aggrandissements du maillage de la partie supérieure du noyau mobile (a) et de l'entrefer inférieur (b) .....	138

<b>Fig. A.4</b>	
Plan de coupe au milieu du noyau.....	139
<b>Fig. A.5</b>	
Relief de la composante $B_z$ .....	139
<b>Fig. A.6</b>	
Carte de l'induction magnétique calculée à partir d'un potentiel vecteur continu (gauche) et avec la composante normale discontinue (droite) .....	140
<b>Fig. A.7</b>	
Emplacement des points de résultat .....	142
<b>Fig. A.8</b>	
Composante $B_z$ aux points $P_1$ et $P_2$ .....	142
<b>Fig. A.9</b>	
Moyenne de $B_z$ aux plans $(\alpha-\beta)$ et $(\gamma-\delta)$ .....	142
<b>Fig. A.10</b>	
Valeur $B_x$ le long du chemin a-b .....	142
<b>Fig. A.11</b>	
Valeur $B_x$ le long du chemin c-d .....	142
<b>Fig. A.12</b>	
Force $F_z$ sur le noyau mobile.....	146

# INTRODUCTION GÉNÉRALE



La conception industrielle des dispositifs électromagnétiques (transformateurs, actionneurs, machines électriques) fait de plus en plus recours à des outils de simulation d'une partie ou de l'ensemble du système à étudier (calcul du champ électromagnétique, de la distribution de la température, des contraintes mécaniques, analyse du circuit électronique). La connaissance de l'état du système en un certain nombre de points de fonctionnement (machine électrique à vide, en charge, lors d'un défaut d'alimentation) laisse conclure à la performance réelle du dispositif avant la construction d'un prototype. Cette forme de conception cependant nécessite une connaissance précise des phénomènes physiques et une grande expérience sur l'utilisation des outils de la C.A.O. En fonction de la performance du matériel informatique à disposition, différentes approches pour la définition des modèles mathématiques sont utilisées. Afin d'obtenir d'une manière plus directe les informations sur la performance, il est devenu courant de les utiliser simultanément. Afin de mieux placer notre travail dans l'ensemble des approches pour la création de modèles utilisés dans la C.A.O., voici les démarches typiques:

En ce qui concerne les machines électriques, la plupart des études menées jusqu'à présent étaient fondées sur des méthodes analytiques. La création de ces modèles passe toujours en quelque sorte par une simplification des phénomènes physiques. Par conséquent, la validité des équations se limite généralement à des domaines de fonctionnement très spécifiques. Les nombreuses approximations, aussi bien sur les géométries que sur les caractéristiques physiques des matériaux permettent de créer seulement une image très approximative de la réalité. Bien que ce type de modèle a pour avantage d'être peu coûteux en ce qui concerne le calcul sur ordinateur, son utilisation est restreinte (absence de la saturation, gamme de vitesse limitée, limitation à un type de machine).

La capacité augmentée des ordinateurs, notamment celle de résoudre des grands systèmes d'équations linéaires, a permis d'utiliser les méthodes mathématiques basées sur la discrétisation de l'espace. En particulier l'emploi de la méthode des éléments finis, dans un premier temps limitée à deux dimensions, constitue une généralisation des modèles pour les diverses géométries de moteurs électriques. Elle permet non seulement de mieux comprendre le fonctionnement lié à la répartition du champ magnétique, mais aussi de prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux. Souvent, la simulation ne représenté qu'un seul point de fonctionnement, car le calcul du champ magnétique exige la connaissance de l'intensité du courant. Cependant la détermination des paramètres nécessaires pour une analyse dynamique grâce à un modèle de circuit électrique équivalent permet néanmoins de tenir compte de la réaction avec le circuit d'alimentation.

Dans un troisième temps on souhaite connaître le comportement dynamique du système électromagnétique, c'est à dire la réaction de l'ensemble du circuit électrique avec la machine sous certaines conditions de fonctionnement (par exemple: réponse transitoire en cas de défaut d'alimentation). Cette approche permet une plus grande généralisation de l'usage des outils de conception. Aujourd'hui un grand nombre de logiciels de calcul du champ magnétique par la méthode des éléments finis ont incorporé un module de couplage avec les équations d'un circuit électrique attaché. La simulation d'un transitoire étant très coûteux en temps de calcul, les méthodes pas à pas dans le temps étaient longtemps limitées aux modèles bidimensionnels ou



axisymétriques. D'autre part la prise en compte d'un conducteur du circuit électrique comme partie d'un problème électromagnétique en trois dimensions pose de nombreuses difficultés sur le plan physique, mathématique et informatique.

Les travaux présentés par la suite, sont une étude des possibilités de couplages des calculs du champ magnétique grâce à la méthode des éléments finis tridimensionnels avec l'analyse d'un circuit électrique. Nous allons démontrer que la façon d'effectuer un tel couplage dépend de la formulation employée pour la résolution des équations de Maxwell et du type du circuit électrique. Nous présenterons une méthode parfaitement adaptée aux besoins de la simulations de machines tournantes avec leurs circuits électriques de commande. Les difficultés de simulation des machines tournantes sont liées d'une part à la structure très complexe des bobinages et d'autre part aux particularités du circuit de commande. En outre, la réalisation dépend de différents aspects informatiques comme: la mémoire occupée pendant la résolution, le temps de calcul, les difficultés de la mise en équation des relations entre circuit électrique et champ magnétique autour d'un de ces conducteurs, ainsi que les aspects de la convivialité d'utilisation dans le contexte de la C.A.O. Une méthode permettant de résoudre ces problèmes a été développée et mise en oeuvre dans un logiciel de calcul du champ magnétique par la méthode des éléments finis en trois dimensions et testée sur différents types de moteurs électriques. Ce logiciel permet de simuler le comportement dynamique de la machine en tenant compte de son circuit électrique d'alimentation, du mouvement mécanique et des propriétés non linéaires des matériaux magnétiques.

Le travail réalisé au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble s'inscrit dans le cadre d'un contrat C.I.F.R.E avec la société MOULINEX. Les méthodes utilisées pour la prise en compte du mouvement ne font pas objet de ce rapport. Cette partie intégrale du projet a été réalisée, en collaboration avec la société VALEO, par Monsieur Remy Perrin-Bit. Pour la compréhension de l'ensemble du projet nous nous référons au rapport de thèse intitulé : "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement".

Notre étude se place dans le contexte des problèmes couplés. En particulier nous considérons le phénomène d'un circuit électrique, dont une ou plusieurs parties sont représentées par un modèle en éléments finis. Les modèle du circuit électrique vérifie les deux lois de Kirchhoff en incluant les relations aux bornes des conducteurs discrétisés. La résolution des équations de Maxwell dans le domaine des éléments répartis permet de prendre en compte leur interaction électromagnétique et le changement de leur caractéristiques en fonction de l'état d'aimantation ou de la modification de la géométrie (mouvement).

Après une présentation principe de la nature des phénomènes à simuler, nous analyserons les méthodes existantes en vue des possibilités de leur utilisation dans le contexte des machines tournantes. La plupart des méthodes de couplage étant élaborées avant tout pour le calcul bidimensionnel du champ, nous montrerons les conséquences sur leur efficacité par le passage en un modèle tridimensionnel.

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes les plus utilisés de la mise en

équation des circuits électriques. Considérant les structures typiques des circuits d'alimentation des moteurs électriques nous discuterons le choix de la variable électrique appropriée.

La résolution des équations de Maxwell en trois dimensions peut être basée sur plusieurs types de formulations. Dans le troisième chapitre nous en présenterons les plus utilisées qui permettent la mise en équations des relations aux bornes d'un conducteur discrétisé dans l'espace. Nous avons élaboré un nouveau modèle pour la représentation des inducteurs filiforme, permettant de faciliter leur maillage et de rendre plus efficace la résolution du problème couplé.

Un quatrième chapitre présente les différentes possibilités d'établir un système d'équations représentant l'ensemble du circuit électrique, y compris ces éléments repartis dans l'espace. Nous analyseront les méthodes de couplage indirecte et directe sous les aspects informatiques, comme le temps de résolution nécessaire et l'occupation de la mémoire du calculateur.

La résolution des équations différentielles dans le temps nécessite également une discrétisation temporelle. Le cinquième chapitre est consacré aux méthodes de simulation pas à pas dans le temps des systèmes de premier et de second ordre.

Après les aspects théoriques nous nous intéresserons à la mise en œuvre des méthodes mathématiques dans un logiciel industriel. Les aspects informatiques, comme la structuration des données, la constitution de la matrice du système d'équations et les mesures destinées à l'accélération de la résolution font objet du chapitre V.

Dans la sixième partie du rapport nous décrirons les étapes de la validation du logiciel. Les simulations d'un cas d'école ainsi que des moteurs électriques réels montrent que les méthodes employées sont efficace, mais ils indiquent aussi les améliorations souhaitables afin d'obtenir une meilleure précision des résultats.

Nous avons ajouté, sous forme d'annexe, le rapport sur l'analyse d'un problème magnétostatique utilisé comme référence sur le plan international. Les résultats de cette étude seront utiles pour une meilleure compréhension des causes d'erreurs de solutions basées sur la formulation en potentiel vecteur magnétique dans le contexte des éléments finis nodaux. Nous montrerons comment ces erreurs peuvent être éliminées par une modification des degrés de liberté du potentiel.



# CHAPITRE I:

## Analyse de l'existant



## I.1. Présentation du problème

La simulation d'une machine électrique dans des différents modes de fonctionnement exige la connaissance des courants dans les conducteurs de la machine. Le champ magnétique est généralement excité par des bobines dans lesquelles la densité de courant est discontinue. Sa direction dépend de la géométrie du bobinage, sa valeur est imposée par l'alimentation branchée sur les bornes de la machine et par l'interaction entre le flux magnétique et l'intensité du champ électrique dans les spires. Le champ d'interaction dans le rotor peut être créé par un bobinage rotorique ou par une cage d'écureuil, un conducteur électrique massif court-circuité. Dans le conducteur massif, il est nécessaire de calculer, et le champ électrique à partir des potentiels sur ses bornes et le champ magnétique.

En ce qui concerne les guides de flux magnétique, nous pouvons distinguer les noyaux massifs, dans lesquels le champ magnétique non constant peut créer des courants de Foucault et les tôles qui sont généralement représentées par des matériaux avec des propriétés anisotropes. Les matériaux ferromagnétiques ont des propriétés magnétiques non linéaires. Dans les régions vides il suffit de calculer le champ magnétique si nous négligeons les courants de déplacement. La méthode des éléments finis permet d'établir un système d'équations linéaires pour les potentiels aux nœuds des éléments, à partir desquels les grandeurs physiques sont obtenues. Afin de prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques, ce système est résolu en plusieurs itérations.

Le réseau électrique, qui alimente la machine, peut être constitué de composants passifs linéaires (des résistances, des inductances, des capacités et des mutuelles) de composants passifs non linéaires ou commandés (diodes, transistors) et des sources idéales (sources de tension et de courant). L'analyse du circuit électrique conduit à la composition d'un système d'équations linéaires ayant les variables d'état (tensions, courants ou potentiels) comme inconnues. Si le circuit comporte des composants non linéaires une partie des coefficients du système d'équations dépend des variables d'état, ce qui nécessite l'application d'un algorithme de résolution itératif (par exemple l'algorithme de Newton-Raphson).

Puisque les solutions du système électrique et du système magnétique ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, il faut coupler les deux calculs. La méthode de couplage mathématique dépend de la formulation choisie pour le calcul du champ magnétique et celle pour l'analyse du circuit électrique.

En ce qui concerne l'interaction magnétique - électrique, il faut tenir compte du mouvement du rotor. Le système d'équations issues de la discrétisation de l'espace n'est alors pas constant dans le temps. De ce fait il s'impose l'utilisation d'un algorithme pas à pas dans le temps, même si nous cherchons à simuler un régime permanent.

## I.2. Analyse de littérature

L'analyse des sources de littérature scientifique montre que le couplage des équations du champ magnétique en deux dimensions et des équations du circuit électrique a été étudié par différentes équipes de chercheurs pendant les dix années passées. Les auteurs ont présenté plusieurs approches pour la réalisation d'un tel couplage. Les publications plus récentes concernent le problème couplé en trois

dimensions. En ce qui concerne la formulation du champ magnétique, le potentiel vecteur magnétique est le plus souvent utilisé. En ce qui concerne la réalisation du couplage, nous pouvons distinguer quatre approches générales :

Une partie des équipes a développé des méthodes qui permettent de ramener les équations de champ magnétique aux équations de circuit. Ceci est possible en calculant les inductances et les mutuelles des bobines de la machine grâce à un logiciel standard éléments finis [1-1], et en modélisant la structure géométrique de la machine par son circuit électrique équivalent [1-1]...[1-6]. La prise en compte des nonlinéarités des matériaux se présente difficile, car nous avons une matrice d'impédances et mutuelles qui est fonction de chaque courant d'alimentation.

Une autre approche étudiée est la transformation du circuit électrique dans le système magnétique par la formulation intégral-différentielle [1-7]...[1-10]. Les équations de circuit sont introduites dans le système des équations obtenu par la méthode des éléments finis, grâce à l'inversion de la matrice représentant le circuit électrique.

Un grand nombre de chercheurs ont présenté des travaux sur la résolution simultanée des équations magnétiques et des équations électriques [1-11]...[1-27]. Dans ce cas les deux systèmes d'équations sont résolus simultanément en ajoutant des termes de couplage à la matrice du système d'équations.

Les publications sur les méthodes de couplage indirectes, comme la résolution itérative, sont peu nombreuses [1-28], [1-29]. Les systèmes d'équations sont résolues indépendamment en prenant comme valeurs initiales la solution de l'autre système. Les itérations sont enchaînées jusqu'à ce que l'erreur soit suffisamment petite.

Nous en concluons que les méthodes de couplage directe des équations du champ magnétique avec les équations du circuit sont souvent utilisées pour l'analyse du régime transitoire des machines en deux dimensions. Les autres méthodes de couplage indirecte sont très peu utilisées car elles nécessitent un grand nombre d'itérations.

Cependant, la plupart des méthodes sont basées sur l'utilisation du potentiel vecteur magnétique. Dans le cas d'un calcul en trois dimensions cela signifie que trois variables nodales sont calculées. La question est alors posée: Peut-on effectuer un couplage avec les équations du circuit en utilisant un potentiel scalaire magnétique? Nous allons discuter les possibilités d'un tel couplage et les restrictions, notamment les problèmes de la connexité du domaine conducteur, au chapitre III.

## CHAPITRE II :

### Analyse du circuit électrique





## II.1. Introduction

Le circuit électrique est caractérisé par ses *éléments* et sa *structure* (ou géométrie). En ce qui concerne les éléments nous pouvons les séparer en *éléments concentrés* et en *éléments répartis*. Les éléments concentrés (ou les composants) sont décrits par leur comportement électrique, c'est à dire par des relations entre la tension aux bornes et le courant qui traverse le composant (par exemple les résistances, les capacités, les interrupteurs). La validité de ces relations est généralement limitée à certains courants et tensions, et à une bande de fréquence. Afin d'élargir cette dernière nous pouvons remplacer un composant par un circuit équivalent qui assimile au mieux le comportement plus complexe (exemple : circuit équivalent des composants électronique de puissance pour les hautes fréquences). Certains éléments ne permettent pas une description précise par des éléments concentrés, comme : un conducteur massif dans un champ magnétique variable, une ligne de transmission, un transformateur en hyperfréquence ou une machine tournante. Dans ce cas nous pouvons les considérer comme des éléments répartis. Ces éléments sont décrits par leur géométrie dans un espace de référence ( $\mathcal{R}^2$  ou  $\mathcal{R}^3$ ), par des équations différentielles entre les grandeurs des champs physiques et par les lois de comportement des matériaux utilisés. La distinction entre éléments concentrés et éléments répartis se réfère alors seulement à la méthode d'analyse des composants du circuit électrique.

## II.2. Présentation des éléments concentrés

La structure des éléments du circuit impose la distinction de deux types d'éléments : les *éléments à un port* et les *éléments à deux ports*. Un élément à un port est caractérisé par une relation entre la tension aux bornes et le courant qui traverse le composant. Un élément à deux ports met en relation les tensions et courants de deux branches du circuit.

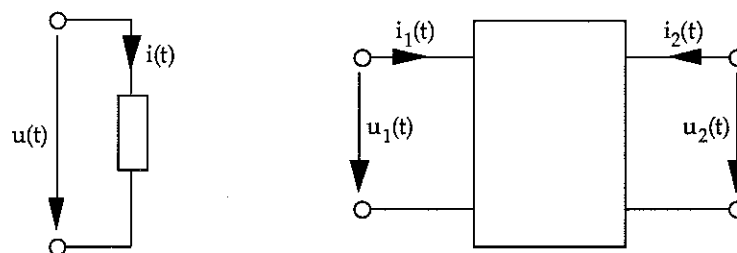


Fig. 2.1 : Élément à un port et élément à deux ports

En ce qui concerne les composants, nous allons définir des sources et des composants passifs. Les sources peuvent être des sources réelles ou idéales et seront représentées par la tension ou le courant, et la résistance interne. Les composants passifs du réseau électrique sont des résistances, des inductances, des mutuelles et des capacités. Afin de pouvoir représenter les diodes et des interrupteurs, nous allons

définir des résistances non linéaires ou commandées.

Table 2.1 : Définition des composants du circuit électrique

Composant	Notation	Équation
source de tension	$u$	$u = u(t)$
source de courant	$i$	$i = i(t)$
résistance	$R$	$u = R i$
inductance	$L$	$u = L \frac{di}{dt}$
mutuelle	$M$	$u = M \frac{di}{dt}$
capacité	$C$	$i = C \frac{du}{dt}$
résistance non linéaire	$r$	$u = r(i) i$
résistance commandée	$R_{\theta}$	$u = R(\theta) i$

Quelles sont les particularités du circuit d'alimentation des machines tournantes?

- Le circuit comporte des interrupteurs mécaniques. Cela signifie qu'il existe des chemins de courant, qui sont interrompus à certains instants de la simulation. On peut les assimiler aux composants non constants.
- Le circuit comporte des inductances, en occurrence les bobinages de la machine.
- Si le circuit électrique comporte des diodes; leur état de conduction doit être évalué à chaque instant du calcul. Il s'agit alors de composants non linéaires.

La structure du circuit électrique est représentée par un graphe orienté [2-1]...[2-4]. Pour un circuit donné on peut établir un graphe  $G$  de la façon suivante : chaque port d'un élément est représenté par une liaison du graphe (ou une branche) entre les deux nœuds qui représentent les bornes du composant. L'orientation de la branche par rapport aux nœuds correspond à un sens arbitraire de référence pour le courant et la tension de la branche. Chaque élément à deux ports est représenté par deux branches.

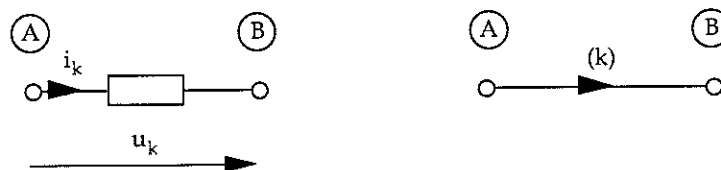


Fig.2.2 : Convention de l'orientation des branches du circuit électrique

Chaque nœud représente un potentiel *unique*. Physiquement il s'agit d'un ensemble de points de contacts qui sont reliés par des lignes de résistance nulle. Ces points ne sont pas toujours réellement accessibles, notamment ceux à l'intérieur d'un circuit équivalent.

## II.3. Mise en équations du circuit électrique

### II.3.1. Le premier théorème de Kirchhoff

Considérons le graphe d'un circuit donné : Soit  $b$  le nombre de branches et  $p$  le nombre total de nœuds. En fonction de l'orientation des liaisons du graphe, nous définissons les courants de branche. Le premier théorème de Kirchhoff, la loi de la conservation des courants impose : à chaque nœud  $i$  et à tout instant  $t$  l'équation suivante doit être vérifiée :

$$\sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot i_j(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2-1)$$

Si  $i_j$  est le courant de la branche  $j$  nous pouvons définir le facteur  $k$  d'orientation des courant par rapport aux nœuds de la façon suivante :

$$n_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si la branche } j \text{ est connectée au nœud } i \\ & \text{et si la branche est orientée vers un autre nœud;} \\ -1 & \text{si la branche } j \text{ est connectée au nœud } i \\ & \text{et si la branches est orientée vers le nœud } i; \\ 0 & \text{si la branche } j \text{ n'est pas connectée au nœud } i. \end{cases}$$

Nous pouvons alors définir une matrice  $[N]$  tel que

$$[N] = (n_{ij}) \quad i=1\dots p, \quad j=1\dots b$$

Nous l'appellons aussi : matrice d'incidence nœud - branche. Elle représente la structure des connexions entre les nœuds du circuit électrique. Les courants des branches forment le vecteur des courants  $\{I\}$  :

$$\{I\} = \langle i_1, i_2, \dots, i_b \rangle^T$$

Le premier théorème de Kirchhoff s'écrit sous forme matricielle :

$$[N] \{I\} = \{0\} \quad (2-2)$$

*Propriétés de la matrice  $N$  :*

Si nous additionnons les lignes de  $[N]$  nous obtenons une ligne de zéros. Ceci est valable pour tous les circuits, puisque chaque colonne  $j$  contient une fois  $+1$  et une

fois -1 aux lignes des nœuds de la liaison  $j$ ; les autres éléments sont zéro. Par conséquent, toutes les lignes de la matrice  $[N]$  ne sont pas linéairement indépendantes. Au moins une peut être écrite comme une combinaison linéaire des autres lignes.

Lorsque nous enlevons une ligne de  $[N]$  la matrice devient non singulière. Cela signifie que nous pouvons écrire  $p-1$  équations indépendantes pour les courants du circuit. Il s'agit des équations de conservation des courants en tous les nœuds sauf un nœud pour lequel on admet la combinaison linéaire des autres équations. La matrice modifiée de cette façon  $[N_f]$  est la matrice pour les courants fondamentaux du circuit. On utilisera cette matrice afin d'établir un système d'équations indépendantes pour les courants du circuit électrique.

$$[N_f] \{I\} = \{0\} \quad (2-3)$$

### II.3.2. Le second théorème de Kirchhoff

A partir du graphe  $G$  d'un circuit électrique, nous pouvons définir une liste de chemins de courant fermés, que nous appelons les mailles du circuit. La loi de Kirchhoff constate que la somme des tensions des branches d'une telle boucle fermée est zéro. Nous établirons la liste des chemins fermés possible pour le graphe  $G$  ainsi qu'une orientation arbitraire pour chaque boucle. Soit  $c$  le nombre total de mailles, nous pouvons écrire  $c$  équations de tensions :

$$\sum_{j=1}^b m_{ij} \cdot u_j(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, c \quad (2-4)$$

$u_j$  étant la tension de la branche  $j$ . Le coefficient  $m_{ij}$  fait intervenir les tension des branches dans les équations de la maille de la façon suivante :

- $m_{ij} = +1$  si la branche  $j$  fait partie de la maille  $i$   
 et si les orientations de la branche et de la maille coïncident;  
 $-1$  si la branche  $j$  fait partie de la maille  $i$   
 et si les orientations de la branche et de la maille sont opposées;  
 $0$  si la branche  $j$  ne fait pas partie de la maille  $i$ .

Cela permet la constitution de la matrice  $[M]$  d'incidence maille - branche :

$$[M] = (m_{ij}) \quad i=1\dots c, \quad j=1\dots b$$

Les tensions des branches forment le vecteur  $\{U\}$  :

$$\{U\} = \langle u_1, u_2, \dots, u_b \rangle^T$$

La forme matricielle du second théorème de Kirchhoff s'écrit alors :

$$[M] \{U\} = \{0\} \quad (2-5)$$

Afin d'obtenir un système d'équations indépendantes, il faut choisir parmi les chemins fermés les boucles indépendantes. Pour que l'algorithme soit facilement réalisable sur ordinateur, nous procédons de la façon suivante : pour tout graphe  $G$  connecté nous pouvons définir un arbre. Par définition, les branches de l'arbre ne forment aucune boucle fermée. Les autres branches font partie du coarbre. La figure 2.3 présente un exemple du choix de l'arbre pour un circuit donné.

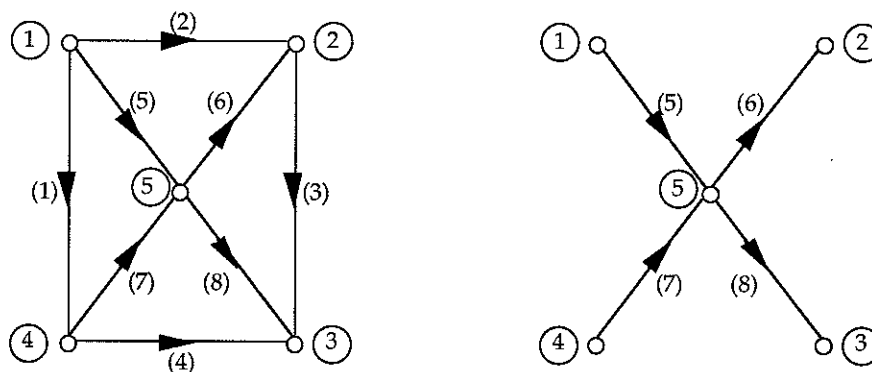


Fig. 2.3 : Sélection d'un arbre pour le graphe d'un circuit

Partant de chaque branche du coarbre, nous pouvons sélectionner un chemin fermé, qui utilise un certain nombre de branches de l'arbre. Chacune de ces boucles fermées forme une maille fondamentale du circuit en considération. Si  $a$  est le nombre de branches de l'arbre, nous avons  $(c-a)$  mailles indépendantes. La figure 2.4 montre comment la connaissance du coarbre permet un choix unique des mailles indépendantes.

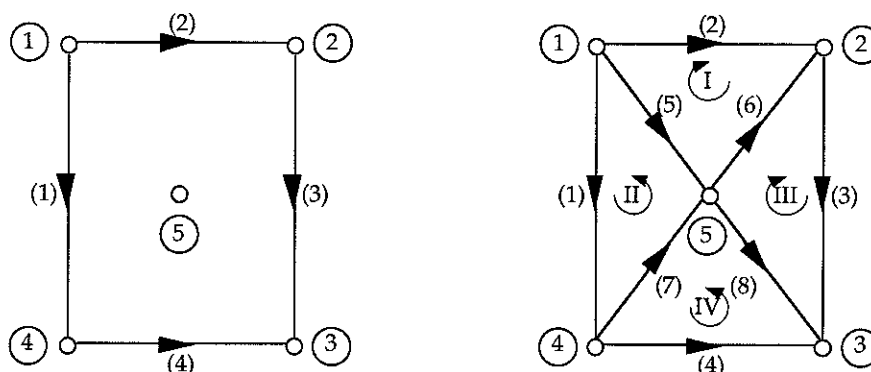


Fig. 2.4 : Choix des mailles fondamentales à partir du coarbre

Nous pouvons démontrer que les équations pour les tensions dans les mailles indépendantes du circuit forment un système d'équations indépendantes. La matrice  $M_f$  donne la relation entre les mailles fondamentales et les branches du circuit. Le système d'équation pour déterminer les tensions des branches peut être écrit sous forme matricielle :

$$[M_f] \{U\} = \{0\} \quad (2-6)$$

Par la suite, nous allons présenter les méthodes les plus utilisées permettant la mise

en équation d'un circuit électrique en vue d'une utilisation pour un couplage avec les équations des éléments repartis. Le choix de la méthode appropriée est également influencé par la structure particulière du circuit d'alimentation des machines tournantes.

### II.3. 3. La méthode des potentiels nodaux

Pour définir un système d'équations indépendantes à partir de la première loi de Kirchhoff nous choisirons un nœud du circuit électrique pour lequel l'équation de la conservation des courants est considérée comme une combinaison linéaire des équations pour les autres nœuds. Nous attribuons à ce nœud l'étiquette 0. Puis on définit  $n-1$  potentiels pour les autres nœuds. Le potentiel  $v_i$  est la chute de tension entre le nœud  $i$  et le nœud 0. Le vecteur  $V$  des potentiels nodaux est défini par :

$$\{V\} = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle^T = \langle u_{1,0}, u_{2,0}, \dots, u_{n-1,0} \rangle^T \quad (2-7)$$

Le choix des potentiels nodaux comme variables d'analyse du circuit assure en soi le second théorème de Kirchhoff. Cela est facilement vérifié : Le vecteur des potentiels nodaux est donné par :

$$\{U\} = [N]^T \{V\} \quad (2-8)$$

Considérons un chemin fermé : La somme des tensions des branches de la maille  $k$  se calcule par :

$$U_k = \sum_{i=1}^b \left( m_{ki} \sum_{j=1}^p n_{ji} V_j \right) = 0 \quad k = 1 \dots c \quad (2-9)$$

Dans la deuxième somme, seulement deux coefficients sont non nuls. Ils indiquent les potentiels des nœuds qui sont liés avec la branche  $i$ . En fonction de l'orientation de la branche, le coefficient  $n_{ji}$  a la valeur  $+1$  ou  $-1$ . Le même coefficient apparaît pour une seule autre branche, disons la branche  $l$ , mais avec le signe opposé, si cette branche est définie avec la même orientation par rapport au sens de la boucle. Cela implique que les facteurs  $m_{ki}$  et  $m_{kl}$  ont le même signe. Dans le cas contraire leur signes sont opposés, mais aussi les signes des coefficients  $n_{ji}$ . Par conséquent, la somme des tensions de la maille  $k$  est nulle, quelles que soient les valeurs des potentiels  $V_j$ .

Le courant de la branche  $i$  est calculé à partir de la tension et la relation  $i=f(u)$  caractérisant le composant. Si le circuit comporte uniquement des conductances, des capacités et sources indépendantes de courant, on a :

$$[G_n]\{V\} + [C_n] \frac{d}{dt} \{V\} + \{I_{sn}\} = \{0\} \quad (2-10)$$

avec :

$$\begin{aligned} [G_n] &= [N_f] [G] [N_f]^T \\ [C_n] &= [N_f] [C] [N_f]^T \\ \{I_{sn}\} &= [N_f] \{I_s\} \end{aligned}$$

ou  $[G]$  et  $[C]$  sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_{ii} &= 1/R_i && \text{conductance de la branche } i \\ g_{ij} &= 0 && i \neq j \\ c_{ii} &= C_i && \text{capacité de la branche } i \\ c_{ij} &= 0 && i \neq j \end{aligned}$$

$\{I_s\}$  est le vecteur des courants sources des branches.

Les matrices  $G$  et  $C$  sont symétriques (car diagonales), donc les matrices  $G_n$  et  $C_n$  sont également symétriques. Les termes sur la diagonale sont positifs, les termes non diagonaux sont négatifs.

### II.3.4. La méthode des courants de mailles

Le système d'équations représentant le circuit électrique est obtenu par décomposition du réseau passif en  $c$  mailles indépendantes. Dans chaque boucle nous définissons un courant de maille avec une orientation arbitraire. Les courants des mailles forment le vecteur  $\{I_m\}$ .

$$\{I_m\} = \langle i_{m1}, i_{m2}, \dots, i_{mc} \rangle^T \quad (2-11)$$

Les courants des branches sont une combinaison linéaire des courants des mailles en tenant compte de l'orientation de la branche par rapport au sens de la maille.

$$\{I\} = [M]^T \{I_m\} \quad (2-12)$$

Les variables d'état pour le calcul seront les courants de mailles. Le choix de cette variable assure la conservation des courant pour chaque nœud du circuit. Lorsqu'on écrit l'équation de la conservation des courants pour un nœud donné on constate que tous les courants des mailles adjacentes à ce nœud apparaissent avec un signe positif et négatif. Nous considérons la somme des courants liés au nœud  $k$ :

$$I_k = \sum_{i=1}^b \left( n_{ki} \sum_{j=1}^c m_{ji} I_{mj} \right) = 0 \quad k = 1 \dots p \quad (2-13)$$

Le coefficients  $m_{ji}$  de l'orientation de la branche  $i$  par rapport à la boucle  $j$  et le coefficient  $n_{ki}$  ont forcément un signe opposé, ce qui prouve que la somme des courants liés à un nœud est nulle.

Le système des équations à résoudre est établi en appliquant la seconde loi de Kirchhoff dans chacune des boucles indépendantes. Après la résolution du système d'équations, les courants de branches du réseau doivent être calculés. Si le circuit comporte uniquement des résistances, des inductances et sources indépendantes de tension, nous avons :

$$[R_m] \{I_m\} + [L_m] \frac{d}{dt} \{I_m\} = \{U_{sm}\} \quad (2-14)$$



avec :

$$\begin{aligned} [R_m] &= [M_f] [R] [M_f]^T \\ [L_m] &= [M_f] [L] [M_f]^T \\ \{U_{sm}\} &= [M_f] \{U_s\} \end{aligned}$$

ou  $[R]$  et  $[L]$  sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r_{ii} &= R_i && \text{résistance de la branche } i \\ r_{ij} &= 0 && i \neq j \\ l_{ii} &= L_i && \text{inductance de la branche } i \\ l_{ij} &= 0 && \text{inductance mutuelle entre la branche } i \text{ et } j \end{aligned}$$

$\{U_m\}$  est le vecteur des tensions source des branches.

Les matrices  $R$  et  $L$  sont symétriques (car diagonales), donc les matrices  $R_m$  et  $L_m$  sont également symétriques et définies positives.

### II.3.5. La méthode des potentiels nodaux intégrés

La méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps permet de prendre en compte des inductances, des conductances et des capacités dans un circuit électrique. De plus, elle permet des discontinuités de la tension sur les interrupteurs. Le couplage des équations du circuit avec les équations du champ est facilement réalisable [2-5].

Nous définissons un potentiel  $\Psi$  tel que :

$$\Psi_i = \int_{\tau=0}^t V_i d\tau \quad i=1\dots p \quad (2-15)$$

Le vecteur des tensions des branches est donné par :

$$\{U\} = [N]^T \frac{d}{dt} \{\Psi\} \quad (2-16)$$

L'utilisation de ce potentiel assure le second théorème de Kirchhoff. La somme des tensions des branches d'un chemin fermé se calcule à partir des potentiels intégrés par :

$$U_k = \sum_{i=1}^b \left( m_{ki} \sum_{j=1}^p n_{ji} \frac{d}{dt} \Psi_j \right) = 0 \quad k=1\dots c \quad (2-17)$$

Comme nous avons déjà démontré, le produit matriciel  $[M][N]^T$  est une matrice nulle. Quelles que soient les nouveaux potentiels ou leur dérivées, la somme des tensions d'une maille est nulle.

L'établissement du système d'équations linéaires consiste à écrire les relations de la conservation du courant en  $p-1$  nœuds à partir des potentiels intégrés.

$$[B_n]\{\Psi\} + [G_n]\frac{d}{dt}\{\Psi\} + [C_n]\frac{d^2}{dt^2}\{\Psi\} + \{I_{sn}\} = \{0\} \quad (2-18)$$

avec :

$$\begin{aligned} [B_n] &= [N_f] [B] [N_f]^T \\ [G_n] &= [N_f] [G] [N_f]^T \\ [C_n] &= [N_f] [C] [N_f]^T \\ \{I_{sn}\} &= [N_f] \{I_s\} \end{aligned}$$

ou [B], [G] et [C] sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} b_{ii} &= (L_i)^{-1} && \text{réductance de la branche } i \\ b_{ij} &= 0 && i \neq j \\ g_{ii} &= (R_i)^{-1} && \text{conductance de la branche } i \\ g_{ij} &= 0 && i \neq j \\ c_{ii} &= C_i && \text{capacité de la branche } i \\ c_{ij} &= 0 && i \neq j \end{aligned}$$

$\{I_s\}$  est le vecteur des courants sources des branches.

### II.3. Comparaison des méthodes d'analyse des circuits électriques

Chacune des trois méthodes de la mise en équations des circuits électriques que nous avons présentées pourrait être utilisée pour l'analyse des circuits électriques des machines tournantes. En effet, les logiciels existants se distinguent en ce qui concerne le choix de la variable des équations du circuit électrique. Le logiciel FLUX2D [2-6], [2-7] utilise les équations des courants de mailles, le logiciel MV2DYN [2-8] est basé sur la méthode des potentiels nodaux, tandis que le logiciel MSC/EMAS [2-5] emploie la méthode des potentiels intégrés dans le temps. Sans doute, le choix de la méthode utilisée influe sur la performance du logiciel. Nous demandons de la variable d'état utilisé pour le calcul les propriétés suivantes:

- A chaque instant  $t$ , la variable d'état doit être définie.
- Les dérivées jusqu'à l'ordre du système d'équations doivent être définies.
- La variable ainsi que les dérivées nécessaires doivent prendre des valeurs finies.
- Afin que la dérivée puisse être définie dans un schéma de différences finies, la variable doit être continue entre deux pas de temps consécutifs.

En outre, nous souhaitons analyser un circuit électrique composé de résistances, d'inductances et de capacités. Analysons les différents types de mise en équation des circuits électriques:

- La méthode des potentiels nodaux permet de prendre en compte des sources de courant, des résistances et des capacités. Les sources de tension ajoutent une relation supplémentaire entre les deux potentiels aux bornes de la source. Les inductances peuvent être prises en compte si leurs courants sont variables du problème. Cependant, le potentiel électrique aux bornes d'une inductance peut être discontinu dans le temps, si le circuit comporte des interrupteurs.
- La formulation des courants de mailles permet de tenir compte des sources de tension, des résistances et des inductances. Le courant dans une

inductance est une grandeur continue dans le temps. La méthode nécessite la mise en œuvre des algorithmes pour le choix de l'arbre du graphe et des mailles fondamentales. Le conditionnement de la matrice du système d'équations dépend du choix des mailles du circuit. En outre, les mailles de courants sont liées à la topologie du graphe. L'ouverture d'un interrupteur entraîne une coupure d'une ou de plusieurs mailles. La prise en compte des capacités exige d'introduire leurs tensions dans le vecteur des variables.

- Les équations des potentiels intégrés dans le temps sont adaptées à l'analyse des circuits électriques composés de sources de courant, d'inductances, de résistances et de capacités. Ce type de potentiel est continu dans le temps. Un changement de la topologie du circuit n'influe pas nécessairement sur le nombre de potentiels.

*Conclusion :*

La méthode des potentiels intégrés dans le temps semble être la mieux adaptée aux circuits électriques d'alimentation des machines électriques. La réalisation est simple et le conditionnement du système d'équations ne dépend pas de la numérotation des nœuds et des branches. La prise en compte des interrupteurs n'ajoute pas de difficulté supplémentaire.

## CHAPITRE III :

### La méthode des éléments finis



### III.1. Les Equations du champ magnétique

Les propriétés des champs magnétiques et électriques sont décrites par les équations de Maxwell simplifiées pour les basses fréquences (nous négligeons l'effet de propagation d'ondes électromagnétiques).

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3-1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (3-3)$$

où  $\mathbf{B}$  est la densité du flux magnétique,  $\mathbf{H}$  l'intensité du champ magnétique,  $\mathbf{J}$  la densité de courant électrique et  $\mathbf{E}$  l'intensité du champ électrique.

A ces équations, il faut associer les lois de comportements des matériaux :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (3-4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (3-5)$$

Dans le cas des matériaux isotropes linéaires  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{E}$  respectivement sont reliés par un coefficient indépendant.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3-7)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement la perméabilité et la conductivité du matériau.

Nous tenons compte des propriétés des matériaux isotropes et non linéaires en utilisant des fonctions  $\mu = \mu(\mathbf{H})$  et  $\sigma = \sigma(\mathbf{E})$ .

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}) \mathbf{H} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}) \mathbf{E} \quad (3-9)$$

En ce qui concerne les matériaux linéaires et anisotropes, il faut considérer  $\mu$  et  $\sigma$  comme des tenseurs.

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (3-10)$$

$$\mathbf{J} = [\sigma] \mathbf{E} \quad (3-11)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j, J_i = \sigma_{ij} E_j, i, j = 1, 2, 3$$

Aux interfaces entre deux régions de propriétés différentes les champs de vecteurs vérifient les conditions de continuité suivantes :

$$\{\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3-12)$$

$$\{\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1\} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3-13)$$

$$\{\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3-14)$$

$$\{\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3-15)$$

$\mathbf{n}$  est un des vecteurs normales à l'interface.

Nous ne pouvons pas directement résoudre les équations précédentes. D'une part nous souhaitons réduire le nombre d'inconnues, d'autre part certaines des composantes des grandeurs physiques sont fortement discontinues aux frontières entre les matériaux de propriétés différentes. Dans le contexte des éléments finis nodaux nous utilisons le plus souvent des potentiels de différents types, à partir lesquels la valeur du champ peut être dérivée. En fonction de la signification physique des potentiels nous distinguons deux groupes de formulations: les formulations à potentiels du type électrique et les formulations à potentiels du type magnétique. Les potentiels du type électrique sont le potentiel scalaire électrique et le potentiel vecteur magnétique, Le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur électrique sont du type magnétique.

## III.2. Les potentiels du type électrique

### III.2.1. Le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$

Dans le chapitre sur l'analyse du circuit électrique nous avons démontré que le choix judicieux de la variable de calcul permet en soi de vérifier une des équations à résoudre. Il en est de même quant au calcul des grandeurs spatiales. La relation  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  est vérifiée lorsque nous dérivons la densité du flux magnétique d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3-16)$$

quel que soit le champ vectoriel  $\mathbf{A}$ , car  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0, \forall \mathbf{A}$ . Cela permet en outre une approximation par éléments finis en utilisant les éléments de Lagrange (souvent le terme moins précis des éléments nodaux est utilisé) [3-1]. Ce type d'élément assure la continuité de la variable nodale mais permet une discontinuité de sa dérivée normale aux interfaces entre deux éléments voisins (continuité  $C^0$ ) [3-2],[3-3].

Pour un champ  $\mathbf{B}$  donné, il y a cependant une infinité de potentiels qui satisfont (2-14). Le potentiel vecteur est défini au gradient d'une fonction scalaire  $f$  près. Si  $\mathbf{A}$  est solution de (2-14) alors  $\mathbf{A}'$  tel que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}(f) \quad (3-17)$$

est aussi solution, car  $\text{rot}(\text{grad } f) = 0, \forall f$ . Afin d'assurer l'unicité de la solution en potentiel, il faut donc imposer une contrainte supplémentaire, une condition de jauge. Les deux jauges les plus utilisées sont les jauges de Coulomb [3-4] ( $\text{div} \mathbf{A} = 0$ ) et de Lorentz [3-5] ( $\text{div} \mathbf{A} = -\sigma \mu V$ ).

Formulation pour les régions non conductrices :

Dans un matériau non conducteur électrique ( $\sigma=0$ ), la relation  $\text{rot } \mathbf{H}=0$  s'écrit en termes du potentiel :

$$\text{rot} [ \nu \text{rot } \mathbf{A} ] = 0 \quad (3-18)$$

où  $\nu$  est la réductivité magnétique ou l'inverse de la perméabilité  $\mu$ .

La composante normale de l'induction magnétique est continue aux interfaces, lorsque les composantes tangentielles du potentiel vecteur sont identiques. A l'interface où la perméabilité passe de  $\mu_1$  à  $\mu_2$ , la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique doit être assurée, soit en terme du potentiel :

$$[\nu_1 \text{rot } \mathbf{A}_1] \times \mathbf{n} = [\nu_2 \text{rot } \mathbf{A}_2] \times \mathbf{n} \quad (3-19)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal à l'interface.

A cette équation, nous ajoutons la jauge de Coulomb sous forme d'un terme de pénalité :

$$\text{rot} [ \nu \text{rot } \mathbf{A} ] + \text{grad}[\nu \text{div } \mathbf{A}] = 0 \quad (3-20)$$

Cette équation admet une solution unique, à condition d'imposer des conditions aux limites adéquates. Néanmoins, l'utilisation du terme de pénalité dans un espace vectoriel discret peut faire apparaître des perturbations locales de la solution. En effet les degrés de liberté des éléments de Lagrange ne permettent pas de gradients très importants des composants de  $\mathbf{A}$ . Or un champ réel,  $n$  fois dérivable, peut avoir des changements brusque de sa valeur ou de sa direction, notamment aux interfaces entre des matériaux de propriétés très différentes. A cet endroit, la valeur approchée de  $\mathbf{A}$  ne peut satisfaire la condition  $\text{div } \mathbf{A}=0$ . Par conséquent on obtient un champ non physique tel que :

$$\text{rot } \mathbf{H} = - \text{grad}[\nu \text{div } \mathbf{A}] \neq 0 \quad (3-21)$$

Dans la littérature [3-4] on trouve trois moyens d'amélioration de la qualité du résultat en potentiel vecteur :

- Résoudre l'équation (2-18) sans terme de pénalité. La divergence du potentiel peut prendre des valeurs quelconques car elle n'intervient pas au calcul du flux magnétique.
- Ajouter des degrés de liberté supplémentaires. La composante normale du potentiel aux interfaces air-fer peut être découplée car elle ne contribue pas au transport du flux à travers l'interface. Ceci permet un saut des composantes tangentielles de la densité du flux.
- Utilisation des éléments d'arêtes (ou éléments de Nedelec). En effet, l'espace vectoriel d'approximation par variable d'arête n'impose aucune condition sur la continuité de la composante normale à l'interface de deux élément voisins.

Analysons les conséquences de chacune de ces propositions sur le comportement numérique lié à la résolution de grands systèmes d'équations linéaires :

- Lorsque aucune condition sur la divergence du potentiel vecteur n'est imposée,



la matrice du système linéaire devient presque singulière. Le nombre d'itérations pour la résolution par gradients conjugués est considérable ou tend vers un nombre infini. Le coût de résolution est donc très élevé et le risque de non convergence important.

- La libération de la composante normale du potentiel vecteur est relativement facile à réaliser lorsqu'il s'agit d'une interface dans un plan principal. Sur le plan YOZ par exemple il faudra calculer deux valeurs de  $A_x$ , une sur chaque côté de l'interface. Afin de conserver la cohérence des résultats, cela nécessite un double maillage du plan concerné avec dédoublement des nœuds. Sur les plans non principaux cependant, il est insuffisant de découpler une des composantes; il faut assurer la continuité des composantes tangentielles par des relations inter variables supplémentaires. Comparé à un problème de variables continues nous ajoutons alors des inconnues, ce qui augmente le temps de résolution.
- Les degrés de liberté des éléments d'arêtes permettent une discontinuité du potentiel vecteur d'un élément à l'autre. Afin d'assurer la convergence de la résolution il faut, d'une manière générale, éliminer des variables du problème. La méthode très utilisée est basée sur la définition d'un arbre d'arêtes dans le maillage. Du point de vue théorique celui-ci peut être arbitraire. L'expérience de nombreux chercheurs cependant montre que le nombre d'itérations et la qualité du résultat sont étroitement liés au choix de l'arbre. En ce qui concerne la robustesse de l'algorithme de nombreux problèmes restent encore posés. Cependant, certains types d'élément finis ont des propriétés favorables pour la convergence. Ceci est notamment le cas pour les tétraèdres du premier ordre. L'ordre d'approximation du potentiel vecteur dans ce type d'élément (entre 0 et 1) cependant impose un maillage très fin afin d'obtenir une approximation suffisante pour  $B$ .

#### *Conclusion :*

En vue d'un algorithme peu coûteux et fiable, il semble que la notion d'un champ de potentiel continu dans un matériau et l'utilisation d'une jauge restent justifiés. Dans ce cas, il est impératif de libérer la composante normale aux interfaces air-fer. Cette option a des conséquences profondes, non seulement sur l'organisation du solveur, mais aussi sur les pré- et post processeurs. En effet, le dédoublement du maillage aux interfaces air - fer doit avoir lieu lors de la création du maillage et peut modifier la structuration géométrique (notion de double face). En ce qui concerne le solveur, une information sur les nœuds voisins doit être créée. En outre, un traitement des combinaisons inter-variables est indispensable. Les conséquences sur le post-traitement et la visualisation des données sont liées au fait que nous avons plusieurs régions avec des maillages distincts.

**Exemple :** Traitement d'un problème de référence internationale sans et avec libération de la composant normale de  $A$  (problème #20 de l'organisation T.E.A.M, voir annexe).

### III.2.2. Le potentiel scalaire électrique $V$

Formulation pour les conducteurs massifs :

Dans les régions conductrices, nous exprimons la relation  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  en termes de potentiel vecteur [3-6] :

$$\text{rot} [\nu \text{ rot } \mathbf{A}] + \text{grad}[\nu \text{ div } \mathbf{A}] - \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (3-22)$$

La répartition de la densité de courant n'est pas connue. Elle dépend de la tension sur les bornes du conducteur et de la dérivée temporelle du flux magnétique traversant le conducteur (couplage électro-magnétique). La relation  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  implique l'existence d'un potentiel scalaire  $V$  tel que :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3-23)$$

car  $\text{rot}(-\text{grad } V) = \mathbf{0}$ ,  $\nabla \nabla V$ .

La densité de courant à l'intérieur du matériau conducteur électrique placé dans un champ magnétique est donné en fonction de deux potentiels :

$$\mathbf{J} = \sigma \left( -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (3-24)$$

En introduisant cette expression en (2-19) on obtient la première équation du système :

$$\text{rot}[\nu \text{ rot} \mathbf{A}] + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad}V = \mathbf{0} \quad (3-25)$$

La relation de la conservation du courant ( $\text{div} \mathbf{J} = 0$ ) fournit la deuxième équation du système :

$$\text{div} \left[ \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] + \text{div}[\sigma \text{grad}V] = 0 \quad (3-26)$$

Aux interfaces où la conductivité subit une discontinuité, il faut vérifier que :

$$\sigma_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} = \sigma_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (3-27)$$

soit la relation entre les potentiels :

$$\sigma_1 \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \text{grad}V_1 \right) \cdot \mathbf{n} = \sigma_2 \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} - \text{grad}V_2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (3-28)$$

Plus particulièrement, cela signifie pour l'interface entre une région conductrice et

une région isolante :

$$\sigma_1 \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \text{grad} V_1 \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3-29)$$

#### *Relations aux bornes d'un conducteur massif*

Aux bornes d'un conducteur il faut assurer l'identité des potentiels avec ceux du circuit électrique ainsi que la conservation du courant.

$$V = V_i \quad (3-30)$$

$$\int_{\Gamma_i} \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \sum_{j \neq i} I_j \quad (3-31)$$

ou  $V_i$  est le potentiel électrique du nœud électrique  $i$  qui est lié avec le conducteur,  $I_j$  le courant passant du nœud  $i$  à un autre nœud  $j$  et enfin  $\Gamma_i$  la surface de connexion.

#### *Approximation pour des conducteurs filaires*

La prise en compte des conducteurs filaires (bobines multi-brins) dans le circuit électrique nécessite un modèle spécifique. Ceci est dû au fait que le maillage de chaque brin conduit obligatoirement à un grand nombre d'éléments finis. Les moyens de calcul ne permettraient pas la résolution du problème. Afin de réduire la finesse de discrétisation en éléments finis dans les régions des conducteurs finement bobinés, nous utilisons une approximation pour la densité de courant. Nous présenterons la méthode conventionnelle, qui consiste en une représentation volumique du courant dans les bobines. Cette méthode permet de réduire d'une façon importante le nombre d'éléments finis dans le conducteur. Cependant, elle nécessite la prise en compte exacte de la géométrie de la bobine lors du processus du maillage. Ceci est possible si la forme des bobinages est relativement simple. En ce qui concerne la modélisation des machines tournantes, une description exacte de leurs bobinages pose quelques problèmes supplémentaires. C'est pourquoi nous avons développé une deuxième méthode, qui est basée sur une représentation filaire des conducteurs.

#### *III.2.3. Modèle volumique des conducteurs filaires*

La méthode conventionnelle est basée sur une densité de courant équivalente dans le conducteur [3-7]. Si la bobine est entièrement remplie avec un grand nombre de filaments, nous pouvons approximer la densité de courant  $\mathbf{J}$ , discontinue en réalité, par une densité de courant  $\mathbf{J}_h$  homogène. Nous considérons le courant comme uniformément réparti dans la section de la bobine. C'est à dire, la valeur de la densité de courant est constante à l'intérieur et nulle dans l'espace entre les fils (isolation). Ceci n'est valable que si le diamètre des fils est faible par rapport à l'épaisseur de

peau (basses fréquences). La valeur du courant total traversant la section de la bobine est donnée par:

$$\int_S \mathbf{J} dS = n_s I \quad (3-32)$$

$n_s$  = nombre de spires,  $S$  = section totale de la bobine.

Nous supposons que le courant soit uniformément réparti sur la section totale. Le module de la densité de courant modèle se calcule par:

$$|J_h| = \frac{n_s I}{S} \quad (3-33)$$

En introduisant le coefficient de foisonnement, nous avons le rapport entre la densité réelle du courant à l'intérieur d'un conducteur et la valeur de la densité homogénéisée:

$$J_h = \lambda J \quad (3-34)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de foisonnement de la bobine concernée.

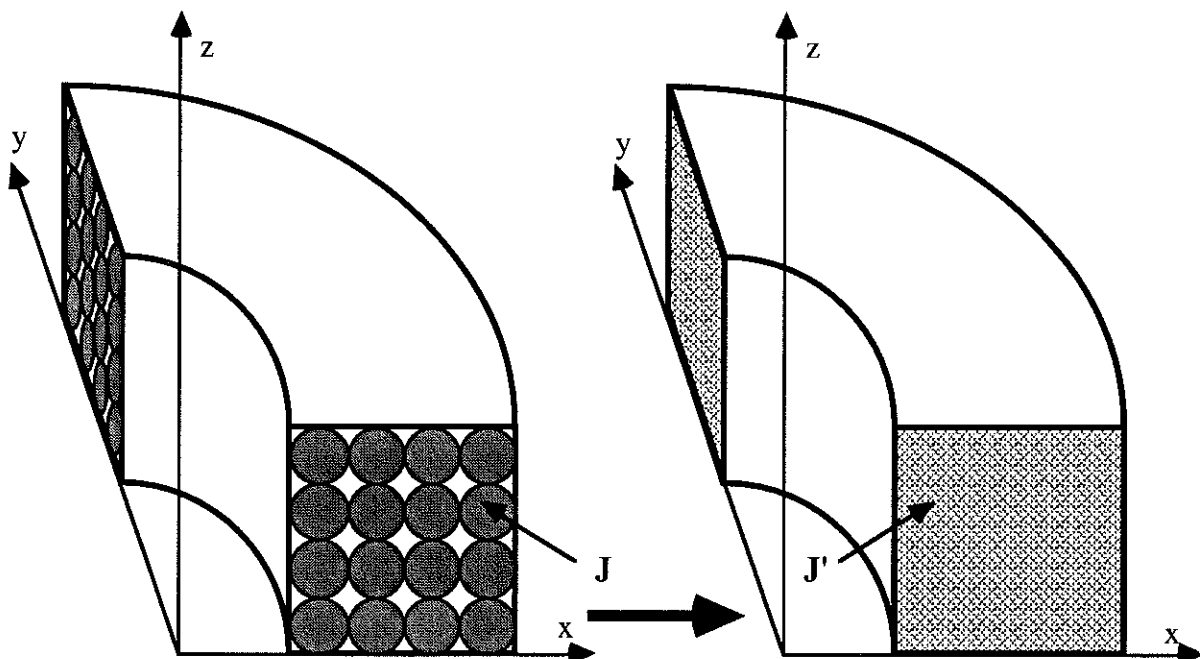


Fig. 3.1 : Modèle de la densité de courant homogène

Pour une bobine avec une section constante, et si la section des fils est également constante, ce facteur de remplissage peut être calculé à partir de la géométrie de la bobine.

$$\lambda = \frac{n_s S_i}{S} \quad (3-35)$$

$n_s$  = nombre de spires,  $s_i$  = section d'un fil,  $S$  = section totale perpendiculaire au courant dans la bobine.

Si la section des conducteurs est circulaire et si ces derniers sont bobinés d'une façon régulière et dense, le facteur maximal de remplissage est donné par :

$$\lambda_{\max} = \pi/4 \approx 0,7854$$

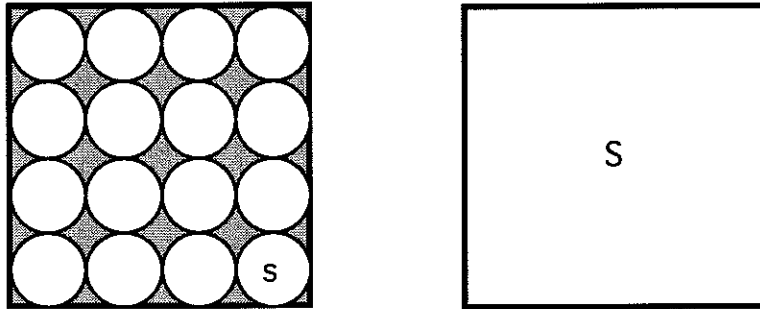


Fig. 3.2 : Définition du coefficient de foisonnement

Puisque la direction de  $\mathbf{J}$  est uniquement définie par la géométrie du bobinage et par la valeur du courant traversant les fils, nous pouvons définir une densité de courant de référence  $\mathbf{j}_0$  tel que:

$$\mathbf{J}_h = I \cdot \mathbf{j}_0 \quad (3-36)$$

*Définition :*  $\mathbf{j}_0$  est la densité de courant modèle de la bobine lorsque celle-ci est alimentée par un courant de 1Ampère.

Nous avons choisi une lettre miniscule, car  $\mathbf{j}_0$  n'a pas l'unité d'une densité de courant, mais celle d'une densité de spires ( $1/m^2$ ). Pour le cas de la bobine de forme simple nous avons :

$$\mathbf{j}_0 = \frac{n_s}{S} \mathbf{t} \quad (3-37)$$

$\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangentiel au fil.

Lorsque la section de la bobine n'est pas constante, la fonction de bobinage doit être évaluée en chaque point du volume de la bobine. Ceci peut être délicat pour des bobines de formes complexes, comme les bobinages rotoriques de moteurs.

La définition d'une bobine, nécessaire pour sa simulation, consiste alors à :

- définir son contour
- définir une fonction de bobinage  $\mathbf{t}$
- évaluer la densité de spires

*La densité de courant de référence a des propriétés suivantes :*

- Sa direction indique la tangente au fil en tous les points du volume du bobinage ( $\mathbf{j}_0 \parallel \mathbf{J}$ ).
- Sa valeur est égale à la densité modèle de courant pour  $I=1A$ .
- Son signe correspond au sens du courant de référence.

- Afin d'assurer que  $\text{div}(\mathbf{J}_h)=0$  il faut choisir  $\mathbf{j}_0$  tel que  $\text{div}(\mathbf{j}_0)=0$

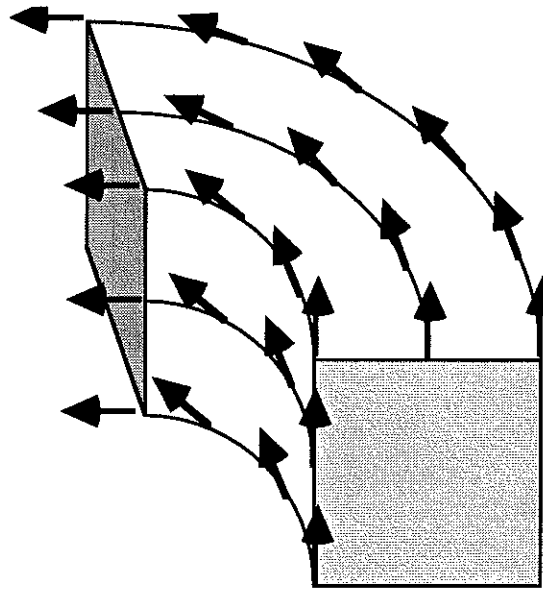


Fig. 3.3 : Définition de la fonction de bobinage

L'équation différentielle à résoudre dans le domaine du conducteur est :

$$\text{rot} [\nu \text{ rot } \mathbf{A}] + I \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad (3-38)$$

*Calcul de la tension aux bornes de la bobine :*

Si la bobine est alimentée par une source de tension ou si elle est branchée sur un réseau électrique, le courant dans la bobine n'est pas connu. Nous vérifions alors la loi d'Ohm pour la tension aux bornes de la bobine :

$$\Delta V = R I + \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3-38)$$

où  $\Delta V$  est la différence des potentiels sur les bornes de la bobine,  $R$  est sa résistance statique, et  $\Phi$  est le flux couplé magnétique traversant la bobine.

En utilisant la relation pour l'énergie libre magnétique

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega \quad (3-40)$$

nous obtenons pour le flux

$$\Phi = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_0 \, d\Omega \quad (3-41)$$

$\Omega$  étant le volume des bobinages.

L'équation de la tension aux bornes d'une bobine devient alors :

$$\Delta V = R I + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_0 \, d\Omega \quad (3-42)$$

*Calcul de la résistance d'une bobine :*

La résistance statique  $R$  de la bobine peut être calculée à partir de la longueur totale de l'enroulement et de la section du fil.

$$R = \rho \frac{L}{s} \quad (3-43)$$

$\rho$  étant la résistivité du matériau du fil,  $L$  - sa longueur totale,  $s$  - sa section.

Le volume de la bobine modèle est entièrement rempli par des filaments dont la section est constante. La résistance d'une spire est donc fonction de son volume occupé.

$$R_i = \rho \frac{v_i}{s^2} \quad (3-44)$$

$R_i$  - résistance d'une spire,  $v_i$  - son volume occupé.

Ceci permet de calculer la résistance d'une bobine à partir de sa géométrie.

$$R = \sum_{i=1}^{n_s} \left( \rho \frac{v_i}{s^2} \right) = \rho \frac{v_s}{s^2} \quad (3-45)$$

$v_s$  - le volume occupé par toutes les spires.

En utilisant  $v_s = \lambda V$  et  $s = \lambda S / n_s$

$$R = \frac{\rho}{\lambda} \left( \frac{n_s}{S} \right)^2 V \quad (3-46)$$

$S$  - surface de la bobine perpendiculaire au courant,  $V$  - volume du bobinage

D'une manière plus générale nous pouvons écrire:

$$R = \frac{\rho}{\lambda} \int_{\Omega} \mathbf{j}_0^2 \, d\Omega \quad (3-47)$$

où  $\rho/\lambda$  représente une 'résistivité spécifique équivalente'.

### III.2.4. Limitations du modèle volumique

Nous avons présenté le modèle de la densité de courant homogène pour la simulation des conducteurs filaires. Ce modèle peut facilement être appliqué pour des géométries relativement simples de conducteurs. Il est évident que la géométrie exacte des bobinages doit être prise en compte par le maillage afin de pouvoir intégrer la densité de courant dans chaque éléments finis du conducteur. Nous avons utilisé ce modèle avec succès pour la simulation d'un contacteur et d'un transformateur. La figure 3.5 montre les géométries des dispositifs avec leur bobinages.

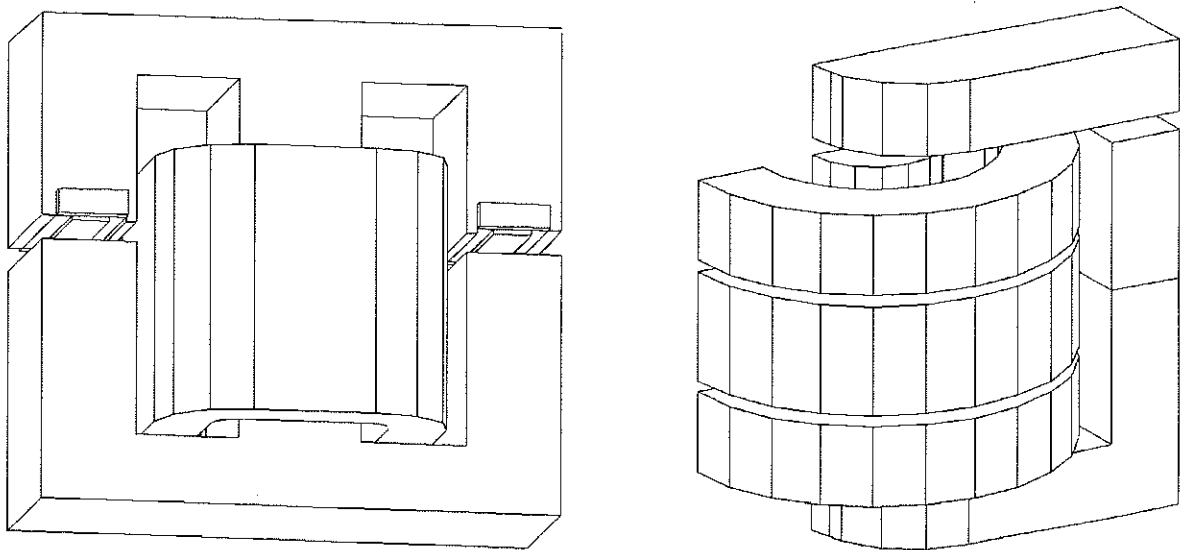


Fig. 3.4 : Géométrie d'un contacteur et d'un transformateur de tension

Cependant, il est très difficile d'utiliser le modèle 'volumique' pour les bobinages typiques des machines tournantes. Généralement, les bobinages rotoriques sont disposés d'une manière compacte dans les encoches du rotor. La définition de la forme de chaque bobine est très floue. A force d'être superposé en paquets, les enroulements prennent la forme d'une selle de cheval. La figure 3.6 présente les géométries d'un moteur à aimants et d'une machine universelle. Les formes des bobines ne sont pas représentées, car une définition exacte n'est pas possible.



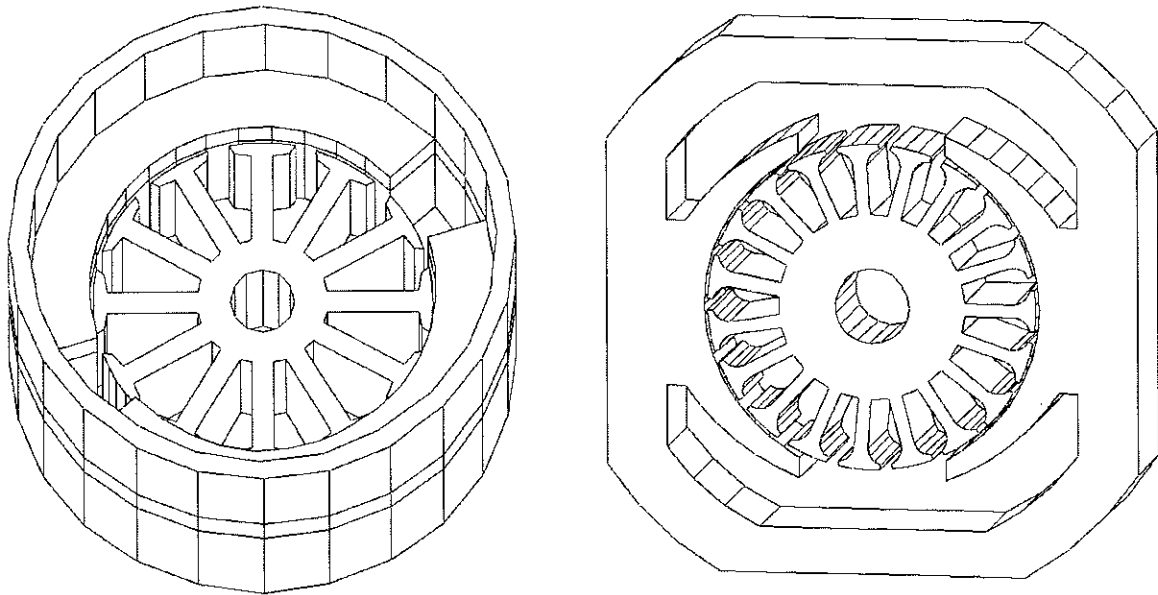


Fig. 3.5 : Géométries d'un moteur à aimants et d'une machine universelle

En ce qui concerne la densité de courant dans les bobinages rotoriques nous constatons :

- La densité de courant dans les têtes des bobines n'est pas uniforme. Nous ne pouvons admettre un vecteur tangentiel constant par morceau.
- La section de chaque bobine n'est pas constante. Le module de la densité de courant n'est pas connu à priori. Il doit être recalculé en chaque point du volume du conducteur afin de vérifier la nullité de la divergence.
- La forme des bobinages est plutôt 'floue'. Les enroulements des différents bobinages sont superposés les uns sur les autres. Lorsque nous voulons approximer les bobines par des formes simples, des intersections entre les volumes des conducteurs sont inévitables.

Pour créer un modèle exact de la géométrie des bobinages d'une machine électrique l'utilisation d'un modeleur géométrique performant s'impose. Celui ci doit notamment traiter des faces compliquées et vérifier des éventuelles intersections de volumes. En se basant sur ce mode de définition de la géométrie, il devient délicat de définir la densité de courant en chaque point du conducteur. Nous pouvons difficilement imaginer que cette façon de préparer un modèle de calcul tridimensionnel soit acceptable pour une utilisation industrielle du logiciel de simulation. C'est pourquoi, nous avons élaboré un nouveau modèle pour la prise en compte des conducteurs fins dans l'espace 3D.

### *III.2.5. Modèle linéique des conducteurs filaires*

Lorsque nous limitons la validité du modèle aux basses fréquences, nous pouvons supposer que l'épaisseur de peau est grande par rapport au diamètre des brins. Par

conséquence, la densité de courant est uniforme dans la section du fil. Au lieu d'homogénéiser le courant dans l'espace, nous cherchons une approximation dans l'autre sens : le courant total d'un fil conducteur est concentré en un courant linéique situé au centre du fil [3-8].

*Définition :*

Le nouveau modèle est défini :

- par le chemin de la ligne dans l'espace,
- par le vecteur tangent à la ligne,
- par la valeur totale du courant.

En coordonnées cartésiennes, la ligne est décrite par :

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{Bmatrix} = \Lambda(s) \quad (3-48)$$

où  $s$  est la coordonnée linéique.

La tangente à la ligne est obtenu par :

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \frac{\partial \Lambda}{\partial s} = \left\langle \frac{d\Lambda_x}{ds}, \frac{d\Lambda_y}{ds}, \frac{d\Lambda_z}{ds} \right\rangle^T \quad (3-49)$$

La valeur du courant est l'intégrale de la densité de courant sur la section du fil :

$$\mathbf{I}_\Lambda = I \cdot \mathbf{t} = \int_{S_f} \mathbf{J} \, dS \quad (3-50)$$

où  $S_f$  correspond à la surface de coupe du fil conducteur.

*Intégration des courants linéiques dans l'élément fini :*

Afin de prendre en compte le courant linéique dans l'espace pour le calcul du champ magnétique, nous appliquons la méthode de Galerkin. En utilisant le potentiel vecteur avec le terme de pénalité dû à la jauge de Coulomb il faut résoudre :

$$\mathbf{rot}[\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}] + \mathbf{grad}[\nu \mathbf{div} \mathbf{A}] - \mathbf{J} = 0 \quad (3-51)$$

En multipliant avec les fonctions test  $W_i$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$  nous avons :

$$\int_{\Omega} W_i \mathbf{rot}[\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}] \, d\Omega + \int_{\Omega} W_i \mathbf{grad}[\nu \mathbf{div} \mathbf{A}] \, d\Omega - \int_{\Omega} W_i \mathbf{J} \, d\Omega = 0 \quad (3-52)$$

Après intégration par parties et élimination des termes surfaciques :

$$\int_{\Omega} \text{rot } W_i \text{ v rot } A \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } W_i \text{ v div } A \, d\Omega - \int_{\Omega} W_i J \, d\Omega = 0 \quad (3-53)$$

L'intégration de la densité de courant dans un élément fini ne peut être effectuée de la façon classique. Sa distribution dans l'espace n'est plus homogène; par contre un certain nombre de courants linéiques traversent le volume élémentaire. Afin de les prendre en compte d'une manière intégrale, il faut intégrer la contribution du courant de chaque segment par une intégrale linéique :

$$\int_{\Omega} W_i J \, d\Omega = \sum_{k=1}^{n_s} \left( \int_{\Lambda} W_i I_{\Lambda k} \, d\Lambda \right) \quad (3-54)$$

où  $n_s$  est le nombre de segments linéiques.

Les intégrales linéiques sont calculées pour chaque élément fini de l'espace du conducteur. Pour déterminer les chemins d'intégration, les intersections des lignes de courant avec les frontières des éléments finis sont calculées. Afin d'approcher au mieux la courbe du courant, il est pratique de la discrétiser en morceau paraboliques. Par une analogie avec les éléments linéiques curvilignes nous trouvons l'algorithme d'intégration des courants linéiques. En utilisant la méthode d'intégration de Gauss, nous déduisons les abscisses et les poids d'intégration sur la ligne de son élément linéique équivalent. L'intégrale est calculée par :

$$\int_{\Lambda} W_i I_{\Lambda} \, d\Lambda = I \sum_{k=1}^{n_p} W_i(\chi_k) \cdot t(\chi_k) \cdot p_k \quad (3-55)$$

où  $n_p$  est le nombre de points de Gauss,  $\chi_k$  leurs coordonnées,  $p_k$  leurs poids d'intégration.  $W_i(\chi_k)$  sont les fonctions test de l'élément *volumique* aux coordonnées des points d'intégration de l'élément *linéique*.

En particulier, les coordonnées du point Gauss  $k$  sont obtenues à partir des coordonnées des points de définition du segment linéique :

$$\chi_k = \sum_{j=1}^{n_{\Lambda}} W_{\Lambda j}(\xi_k) X_{\Lambda j} \quad (3-56)$$

où  $n_{\Lambda}$  est le nombre de nœuds de l'élément linéique,  $X_{\Lambda}$  sont leurs coordonnées,  $\xi_k$  les coordonnées linéiques du point d'intégration.

Les fonctions de forme de l'élément volumique aux coordonnées des points de Gauss de l'élément linéique sont obtenues par la résolution du système d'équations suivant:

$$\chi_k = \sum_{j=1}^{n_{\Omega}} W_{\Omega j}(\xi_{\Omega}) X_{\Omega j} \quad (3-57)$$

Ce système est généralement non linéaire; nous avons utilisé un algorithme du type Newton - Raphson.

*Calcul du flux magnétique :*

La prise en compte la f.e.m. d'une bobine dans les équations du circuit électrique exige le calcul du flux du conducteur à partir du potentiel vecteur. Le flux d'une boucle de courant est calculé en utilisant la loi de Stokes :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Lambda} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, d\Lambda \quad (3-58)$$

où  $\Gamma$  est la surface enfermée par les chemin  $\Lambda$ .

Dans le contexte des éléments finis le potentiel vecteur est interpolé en utilisant les fonction de formes :

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_n} \mathbf{W}_j \mathbf{A}_j \quad (3-59)$$

où  $\mathbf{W}_j$  sont les fonctions vectoriels d'interpolation déduites des fonctions de forme  $\alpha_j$  des éléments volumiques de Lagrange :

$$\mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \alpha_j & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_j \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode d'intégration de Gauss nous avons :

$$\int_{\Lambda} \mathbf{W}_j \mathbf{A}_j \, d\Lambda = \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{W}_j(\chi_k) \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{t}(\chi_k) \cdot p_k \quad (3-60)$$

*Calcul des segments linéiques:*

Le calcul des intersections entre les lignes de courant et les facettes des éléments finis est une opération simple, lorsque nous nous limitons à des formes standard de bobines. La géométrie est décomposée en segments droites et segments cylindriques. Les facettes des élément de l'air étant planes, nous pouvons écrire l'équation à partir des coordonnées des sommets. Dans ce cas les intersections sont calculées par la résolution d'équations de premier ou de second ordre. Nous avons réalisé les algorithmes pour les formes rectangulaires et cylindriques de section rectangulaire et circulaire. Une extension à d'autre formes simples peut facilement être réalisée.

Une généralisation du calcul d'intersection entre des chemins linéiques et de faces

quelconques est difficile. Les équations d'ordre supérieure à trois ne peuvent être résolues d'une manière directe. Cependant il est toujours possible de donner une approximation de la courbe dans l'espace par une équations de troisième ordre. Les intersection sont alors trouvées d'une manière itérative. L'algorithme peut être accéléré en utilisant l'information sur le voisinage des éléments. Comme tout algorithme itératif, le choix des valeurs initiales peut être décisif pour la convergence.

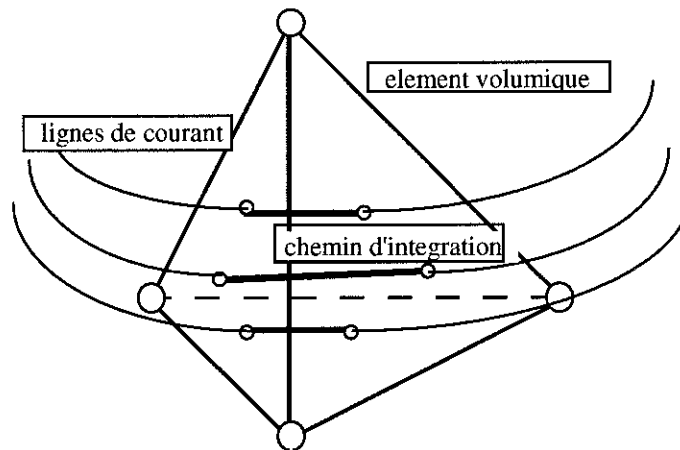


Fig. 3.6 : Calcul des segments linéiques

#### *Densité des lignes de courant:*

La prise en compte fidèle d'un champ de courant homogène par la méthodes des courants linéiques est liée au rapport de la densité des lignes et la densité des mailles. Nos expériences montrent que, si le nombre de spires traversant un élément volumique est supérieur au nombre de points Gauss de cet élément, l'approximation est acceptable.

#### *Conclusion :*

La méthode des courants linéiques permet de prendre en compte des formes quelconques dans le contexte des éléments finis. De plus il est possible d'admettre des intersections de conducteurs, car elles seront prises en compte d'une manière intégrale. De cette façon la description de la géométrie du conducteur peut être indépendante du maillage. On superpose la discrétisation des conducteurs filaires au maillage volumique existant, en calculant toutes les intersections entre les lignes de courant et les facettes des éléments volumiques.

#### *Avantages :*

Les éléments volumiques ne respectant pas obligatoirement les frontières du conducteur, le maillage peut être créé d'une manière simplifié. En particulier nous pouvons accepter un maillage par extrusion des éléments du modèle 2D de la machine. Les problèmes de la création du maillage et la discrétisation des

conducteurs sont découplés.

*Inconvénients :*

Les *lignes de courants* filaires ne correspondent pas au modèle du *courant linéique* dans le sens physique du terme. En particulier, le champ magnétique à proximité du fil ne peut être exploité. Il s'agit plutôt un modèle macroscopique pour un *ensemble* de conducteurs.

La densité des mailles doit être suffisamment élevée pour que l'approximation soit valable. La simplification de la création du maillage ne signifie en aucun cas une réduction du nombre d'éléments.

Le calcul des intersection ainsi que l'intégration des courants sont des algorithmes coûteux. Pour plusieurs pas de calcul il est donc indispensable de mémoriser l'information sur les segments élémentaires.

### III.3. Les formulations du type magnétique

#### III.3.1. Le potentiel scalaire magnétique $\psi$

Le calcul du champ magnétique à l'aide d'un potentiel vecteur en trois dimensions nécessite le calcul des trois composantes de  $\mathbf{A}$ . Le coût de la simulation est élevé et l'occupation de la mémoire de stockage de la matrice est considérable. C'est la raison pour laquelle nous cherchons une méthode qui permet de calculer le champ magnétique à l'aide d'un potentiel scalaire [3-9].

*Formulation dans les régions non conductrices :*

Dans les régions non conductrices la densité du courant est nulle. Le rotationnel du champ magnétique est nul lorsqu'il est dérivé d'un potentiel  $\psi$  tel que :

$$\mathbf{H} = - \mathbf{grad} \psi \quad (3-61)$$

L'équation à résoudre assure que  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  :

$$\text{div}[-\mu \mathbf{grad} \psi] = 0 \quad (3-62)$$

La conservation de la composante tangentielle du champ magnétique est vérifiée si le potentiel scalaire est continu sur les interfaces. Il faut, en revanche, assurer la continuité de la composante normale de l'induction magnétique. Si la perméabilité passe de  $\mu_1$  à  $\mu_2$  nous avons :

$$\mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (3-63)$$

Cela impose pour les potentiels :

$$\mu_1 [-\text{grad}\psi_1] \cdot \mathbf{n} = \mu_2 [-\text{grad}\psi_2] \cdot \mathbf{n} \quad (3-64)$$

### III.3.2. Le potentiel vecteur électrique $T$

*Formulation pour les matériaux conducteurs :*

Dans les régions conductrices il faut résoudre simultanément les problèmes du champ magnétique et du champ électrocinétique. Un champ de densité de courant sans divergence peut être dérivé d'un potentiel vecteur électrique  $T$  tel que [3-10] :

$$\mathbf{J} = \text{rot } [T] \quad (3-65)$$

Considérer  $T$  comme variable d'état permet de calculer le courant dans un conducteur placé dans un champ magnétique. La relation entre le champ électrique et l'induction magnétique est établie par :

$$\text{rot}[\rho \text{ rot } T] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-66)$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau conducteur :  $\rho = 1/\sigma$ .

La relation  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  prouve que le potentiel vecteur électrique et le champ magnétique sont identiques à un gradient près. En posant le gradient du potentiel scalaire magnétique nous avons :

$$\mathbf{H} = T - \text{grad}\psi \quad (3-67)$$

Nous utilisons cette expression afin de remplacer  $\mathbf{B}$  dans l'équation (3-49). La première équation du système à résoudre est alors :

$$\text{rot}[\rho \text{ rot } T] + \mu \frac{\partial}{\partial t} [T - \text{grad}\psi] = 0 \quad (3-68)$$

La seconde équation assure  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , ce qui donne en terme de potentiel :

$$\text{div}[\mu T - \mu \text{ grad}\psi] = 0 \quad (3-69)$$

### III.3.3. Le potentiel vecteur électrique $T_0$

*Formulation dans les bobines :*

Le calcul du champ magnétique à partir d'un potentiel scalaire ne permet pas

directement la prise en compte des courants dans les conducteurs filaires. La densité du courant est représentée par un potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ . Dans tous les cas nous pouvons trouver un potentiel  $\mathbf{T}$  tel que:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{|\mathbf{r}|} d\Omega \quad (3-70)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur du point de calcul de  $\mathbf{T}$  au point d'intégration.

Le calcul du champ magnétique se fait alors par un potentiel scalaire magnétique réduit. En vue d'un couplage avec les équations du circuit électrique attaché aux bornes du conducteur, nous souhaitons que le domaine du potentiel vecteur soit le plus petit que possible. Tous les nœuds de ce domaine seront couplés d'une manière ou d'une autre avec les équations du circuit (voir chapitre IV). Quel serait alors le volume minimal nécessaire pour la définition de  $\mathbf{T}$ ? De toute évidence, dans la région des conducteurs  $\mathbf{T}$  est non nul. Mais aussi dans l'espace enfermé par les spires,  $\mathbf{T}$  ne peut être nul, car le potentiel vecteur est seulement défini dans un volume simplement connexe. Ceci nécessite des coupures afin de coupler les champs dans les domaines avec et sans potentiel électrique.

Un autre problème se pose par le couplage entre les différents potentiels scalaires magnétiques. Lorsque nous utilisons le calcul grâce à l'équation (3-70), la composante tangentielle de  $\mathbf{T}$  à l'interface de couplage est non nulle. Les deux potentiels ne sont alors pas identiques. Le couplage se fait par le calcul d'un incrément de potentiel.

La définition de  $\mathbf{T}$  n'est pas unique. Le vecteur est défini à un gradient près. Pour certaines géométries de bobines, nous pouvons trouver un potentiel  $\mathbf{T}_0$  pour lequel  $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{T}_0$  et en plus

$$\mathbf{T}_0 \times \mathbf{n} = 0 \quad (3-71)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface de connexion.

La continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  à l'interface entre une bobine et une région isolante est alors assurée si  $\psi$  est continu. Nous allons alors chercher uniquement un potentiel  $\mathbf{T}_0$  avec cette propriété.

La distribution de  $\mathbf{T}$  dans l'espace dépend uniquement de la géométrie du bobinage, tandis que le module est lié à l'intensité du courant. Cela nous permet de définir un potentiel vecteur  $\mathbf{t}_0$  tel que :

$$\mathbf{T}_0 = I \cdot \mathbf{t}_0 \quad (3-72)$$

*Définition :* Le champ vectoriel  $\mathbf{t}_0$  est le potentiel vecteur électrique du courant dans une bobine lorsque le courant d'alimentation est de 1 Ampère.

Ce potentiel doit être déterminé au préalable à partir de la distribution du courant dans le bobinage. Si  $\mathbf{t}_0$  est défini, la relation  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  s'écrit :

$$\text{div}[\mu I \cdot \mathbf{t}_0] - \text{div}[\mu \text{ grad } \psi] = 0 \quad (3-73)$$



Calcul du potentiel  $t_0$  :

Pour certaines géométries simples, il est possible d'évaluer  $t_0$  par une simple opération [3-11]. Prenons comme exemple une bobine rectangulaire.

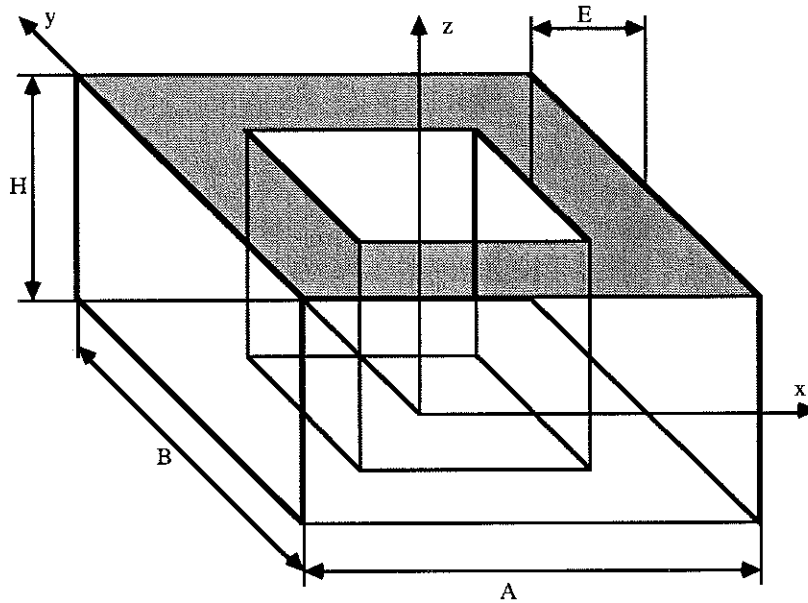


Fig. 3.7 : Paramètres d'une bobine rectangulaire

La distribution du courant de référence peut être discrétisée en filaments. Considérons un des filaments où le courant est  $di=J \cdot de \cdot dh$  (figure 3.8). La magnétisation  $dT_0$  de cette spire est constante sur la surface entourée par la spire :

$$dT_0 = di \cdot de \cdot n \tag{3-74}$$

Nous la référons à la densité de courant de référence  $j_0$  avec  $dt_0 = de \cdot n$ .

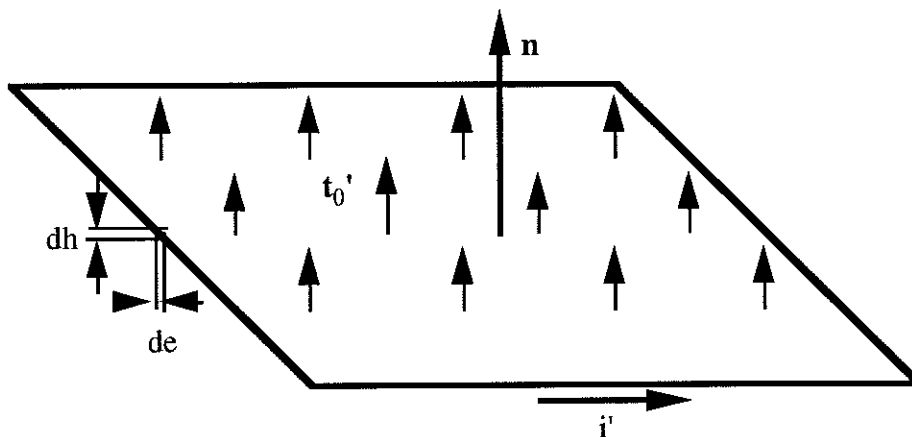


Fig. 3.8 : Potentiel  $t_0'$  d'une spire élémentaire

En intégrant sur tous les filaments élémentaires on obtient la valeur de  $t_0$  à l'intérieur de la bobine :

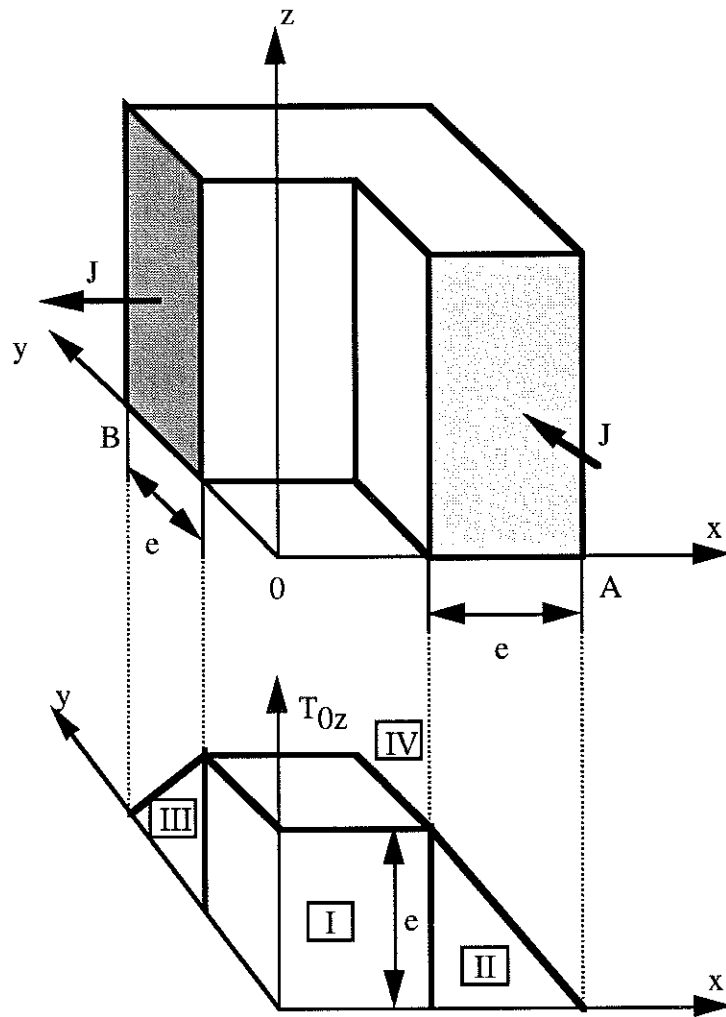


Fig. 3.9 : Fonction  $t_0$  d'une bobine rectangulaire

<p>Zone I :</p> $ x  < A/2 - e$ $ y  < B/2 - e$ $ z  > H$ $t_{0x} = 0$ $t_{0y} = 0$ $t_{0z} = e$	<p>Zone III :</p> $B/2 - e \leq  y  \leq B/2$ $B/2 -  y  \leq A/2 -  x $ $ z  > H$ $t_{0x} = 0$ $t_{0y} = 0$ $t_{0z} = e(B -  y )$
<p>Zone II :</p> $A/2 - e \leq  x  \leq A/2$ $A/2 -  x  < B/2 -  y $ $ z  > H$ $t_{0x} = 0$ $t_{0y} = 0$ $t_{0z} = e(A -  x )$	<p>Zone IV :</p> $ x  > A/2$ $ y  > B/2$ $ z  > H$ $t_{0x} = 0$ $t_{0y} = 0$ $t_{0z} = 0$

Tension induite dans une bobine :

Afin de pouvoir réaliser un couplage avec le circuit électrique, il faut en plus évaluer la f.e.m. induite dans la bobine. Nous nous servirons du même raisonnement que pour le couplage courant - magnétisation. Pour une spire nous avons :

$$E_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_{S_i} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \right) ds \quad (3-75)$$

où  $E_i$  est la f.e.m. induite dans la spire  $i$ .

L'épaisseur du disque volumique enfermé dans la spire étant constante on peut écrire :

$$E_i = - \frac{1}{h} \int_{V_i} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \right) dv \quad (3-76)$$

où  $V_i$  est le volume enfermé dans la spire  $i$ . Ce disque volumique a l'épaisseur  $h$ .

Nous rappelons que  $t_{0i} = e \mathbf{n}$  pour une spire d'épaisseur  $e$ . Il est donc possible de remplacer  $\mathbf{n}$  par  $t_0/e$ .

$$E_i = - \frac{1}{e \cdot h} \int_{V_i} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t}_0 \right) dv \quad (3-77)$$

L'intégrale sur toutes les spires est calculée en utilisant la fonction  $t_0$  connue. De plus, nous remplaçons  $e \cdot h$  par  $S/n_s$ .

$$E = - \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{t}_0 d\Omega \quad (3-78)$$

En substituant  $\mathbf{B}$  par les termes des potentiels on obtient :

$$E = \int_{\Omega} \mu \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{grad} \frac{d\psi}{dt} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \mathbf{t}_0^2 \frac{dI}{dt} d\Omega \quad (3-79)$$

Nous allons introduire une 'inductance intérieure'  $L_i$  que nous calculons à partir de la fonction vecteur  $t_0$  par une intégrale sur le volume de la bobine.

$$\Delta V = R I - L_i \frac{dI}{dt} + \int_{\Omega} \mu \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{d\psi}{dt} \right) d\Omega \quad (3-80)$$

avec :

$$L_i = \int_{\Omega} \mu t_0^2 d\Omega$$

*Restrictions pour l'application de la formulation  $T_0-\psi$  :*

La formulation  $T_0-\psi$  permet de calculer le champ magnétique dans les conducteurs bobinés à l'aide d'un potentiel scalaire. Comparé au potentiel vecteur l'utilisation du potentiel scalaire magnétique réduit la taille de la matrice du système d'équations linéaires et par conséquent, le temps de calcul.

Néanmoins, la mise en œuvre nécessite la prise en compte de la géométrie des bobines d'une manière plus complexe. Le volume enfermé par la bobine doit être coupé de l'extérieur, car le potentiel vecteur électrique  $\psi$  est non nul. La méthode exige l'évaluation au préalable de la fonction  $T_0$ . Ceci limite son application à des formes simples de bobinages.

D'une manière générale, la prise en compte des conducteurs massifs est plus délicate. L'alimentation par une tension ne peut être modélisée d'une manière directe. Les régions conductrices doivent être simplement connexes. Une façon de traiter ce problème consiste à remplir les trous dans les conducteurs massifs avec un matériau d'une conductivité très faible mais non nulle [3-12]. Une meilleure méthode, qui permet également l'alimentation du conducteur par une source externe, consiste à définir une coupure du domaine dans le trou de chaque conducteur et d'inclure un saut de potentiel dans les équations du champ magnétique [3-13], [3-14].



## CHAPITRE IV :

Couplage des équations du champ magnétique avec les  
équations du circuit électrique



## IV.1. Introduction

La résolution du système des équations du champ magnétique ou du système des équations du circuit électrique ne peut être effectuée indépendamment l'une de l'autre. Le calcul de la solution commune des deux systèmes exige un couplage mathématique entre les équations des deux systèmes. Les différentes possibilités d'un tel couplage seront expliquées en prenant l'exemple du calcul du champ magnétique créé par des conducteurs bobinés. Nous avons choisi la formulation du potentiel vecteur magnétique pour le champ et la méthode des courants des mailles du circuit électrique. Les conducteurs filaires sont représentés par le modèle linéique. Il est également possible de choisir les autres formulations présentées dans les chapitres II et III en appliquant les *méthodes* de couplage que nous allons présenter.

## IV.2. Le couplage indirecte

Le domaine d'étude est discrétisé en éléments finis. La méthode de Galerkin fournit le système d'équations pour les valeurs du potentiel vecteur dans les nœuds des éléments. Le vecteur des valeurs nodales est donné par :

$$\{A\} = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle^T \quad (4-1)$$

n étant le nombre de nœuds.

Le second membre du système est composé des termes du aux aimants et des contributions des courants des bobines :

$$[S]\{A\} = [T] + [C]\{I\} \quad (4-2)$$

avec:

$$S_{ij}(n, n) = \int_{\Omega} (\text{rot } W_i \cdot \text{rot } W_j + \text{div } W_i \cdot \text{div } W_j) d\Omega,$$

$$T_i(n) = \int_{\Omega} W_i \cdot \text{rot } H_c d\Omega,$$

$$C_{ik}(n, b) = \int_{\Lambda_k} W_i \cdot t d\Lambda,$$

b est le nombre de branches, {I} représente le vecteur des courants. Lorsque une branche n'est pas liée à une bobine discrétisée, alors  $C_{ik}$  est nul.

Prenons le cas de l'analyse du circuit électrique par la méthode des courants des mailles. Le vecteur des variables d'état est :

$$\{I_m\} = \langle I_{m1}, I_{m2}, \dots, I_{mc} \rangle^T \quad (4-3)$$

où c est le nombre de mailles du circuit électrique.

Dans les équations de mailles, les f.e.m. des bobines, calculées par les intégrales du potentiel vecteur, apparaissent comme termes sources :



$$[R_m]\{I_m\} + [L_m]\frac{d}{dt}\{I_m\} = \{U_m\} - \frac{d}{dt}\{\Phi_m\} \quad (4-4)$$

avec:

$$\begin{aligned} [R_m] &= [M][R][M]^T \\ [L_m] &= [M][L][M]^T \\ \{U_m\} &= [M]\{U\} \\ \{\Phi_m\} &= [M]\{\Phi\} \\ \{\Phi\} &= [C]^T\{A\} \\ \{I\} &= [M]^T\{I_m\} \end{aligned}$$

où  $[R]$  et  $[L]$  sont les matrices des résistances et des inductances,  $\{U\}$  et  $\{\Phi\}$  sont les vecteurs des tensions sources et des flux des conducteurs bobinés des branches.  $[M]$  est la matrice d'incidence des mailles fondamentales et les branches branche.

Le couplage du calcul du champ et des courants des mailles est effectué d'une manière indirecte. Les deux systèmes d'équations sont résolus successivement en prenant les termes sources issus de la résolution précédente. Les itérations sont répétées jusqu'à convergence à la précision demandée.

Avantages :

Puisque les problèmes sont réduits à un problème de champ et un problème de circuit électrique, nous pouvons envisager l'utilisation de logiciels bien adaptés à la résolution de telles équations. Le conditionnement de la matrice, correspondant à la méthode des éléments finis, n'est pas modifiée par le couplage.

*Inconvénients :*

Lorsque les deux systèmes physiques sont couplés d'une manière forte, et lorsque leurs constantes de temps sont proches l'une de l'autre, cette méthode demande un grand nombre d'itérations. Cela n'est pas efficace, car le temps de résolution d'un problème de champ en trois dimensions est élevé. Par conséquent, un couplage indirect n'est envisageable que si la réaction d'un système par rapport à l'autre est suffisamment faible pour un pas de temps donné.

Lorsque un couplage indirect ne correspond pas à la nature du problème, il est préférable de prendre en compte la réaction des deux systèmes par une méthode de couplage directe. Elles consistent à créer un système composé des équations des variables des éléments finis et des variables du circuit électrique. En fonction de la structure du système ainsi obtenu on distingue les méthodes suivantes : la formulation intégral-différentielle et la résolution simultanée.

### IV.3. La formulation intégr-différentielle

Cette méthode permet un couplage directe des équations du champ magnétique avec les équations du circuit électrique. Il s'agit d'inclure les équations liées au circuit électrique dans les équations magnétiques [4-1]. Considérons les équations du circuit d'un pas de temps :

$$[Z_m]\{I_m\} + \frac{d}{dt}\{\Phi_m\} = \{U_m\} \quad (4-5)$$

avec:  $[Z_m] = [R_m] + [L_m]\frac{d}{dt}$

L'inversion de la matrice  $[Z_m]$  donne une expression pour le vecteur des courants :

$$\{I_m\} = [Z_m]^{-1}\left(\{U_m\} - \frac{d}{dt}\{\Phi_m\}\right) \quad (4-6)$$

En ce qui concerne l'équation les équations pour le champ nous reprenons :

$$[S]\{A\} - [C]\{I\} = [T] \quad (4-7)$$

Le courant d'un conducteur est calculé à partir des courants de mailles par :

$$\{I\} = [M]^T \{I_m\} \quad (4-8)$$

Les flux des conducteurs bobinés sont calculés à partir des potentiels :

$$\{\Phi\} = [C]^T \{A\} \quad (4-9)$$

L'expression pour les courants sert à les éliminer dans les équations du champ. De cette façon, le système d'équations conserve seulement les potentiels vecteurs comme inconnues.

$$[S]\{A\} + [C][M]^T[Z]^{-1}[M][C]^T \frac{d}{dt}\{A\} = [T] - [C][M]^T[Z]^{-1}[M]\{U\} \quad (4-10)$$

Afin de mettre en évidence les propriétés d'un tel système nous allons choisir la forme suivante :

$$[S]\{A\} + [D]\frac{d}{dt}\{A\} = \{F\} \quad (4-11)$$

avec :

$$[D] = [C][M]^T[Z]^{-1}[M][C]^T$$

$$\{F\} = \{T\} - [C][M]^T[Z]^{-1}[M]\{U\}$$

Une propriété typique de la matrice  $[S]$  est que seulement une partie faible des termes est non nulle. Le stockage d'une telle matrice creuse est possible d'une manière efficace en utilisant des tableaux de pointeurs. Ce mode de stockage nécessite uniquement la mémoire pour le stockage des termes non nuls et de leur numéros de lignes et colonnes. La figure 4.1 représente les emplacements occupés par les termes d'une matrice typique.

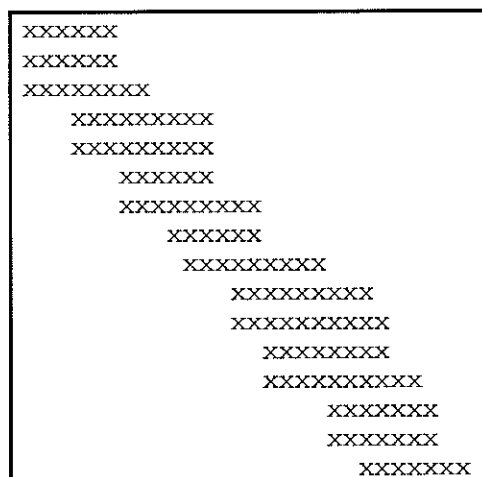


Fig. 4.1 : Structure principale d'une matrice de bande

Les opérations matricielles pour le calcul de la matrice  $[D]$  transposent les termes de la matrice d'impédance du circuit électrique dans le système du champ magnétique. Les termes sources du circuit apparaissent également sous forme traduite. La matrice  $[D]$  a des termes non nuls pour les inconnues liées aux nœuds des conducteurs. Les potentiels de ces nœuds sont couplés mutuellement à travers le comportement électrique du circuit. S'il y a plusieurs conducteurs liés avec un circuit électrique dans le domaine magnétique, la matrice globale sera fortement remplie. La figure 4.2 présente la structure typique de la matrice  $[S]+[D]$ .

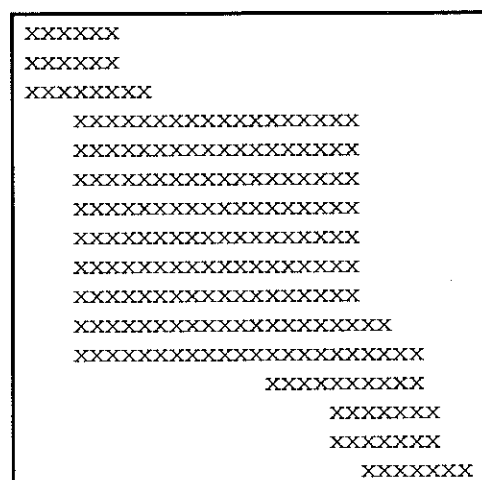


Fig. 4.2 : Structure de la matrice avec couplage entre les nœuds

Le nombre de termes non nuls étant considérablement augmenté, la matrice occupe

fortement la mémoire du calculateur. Lorsque celui ci n'est pas équipé avec suffisamment de mémoire vive, le temps de pagination sur disque devient prépondérant par rapport au temps CPU. Souvent dans ce cas nous constatons un faible rendement du calculateur.

Nous remarquons que les sources de tension électrique apparaissent dans le système magnétique comme courants.

*Inconvénients :*

L'inconvénient majeur de cette méthode consiste en une utilisation inefficace de la mémoire de l'ordinateur. En ce qui concerne les calculs en trois dimensions, la taille de la matrice à stocker dépasse rapidement la mémoire disponible sur les stations de travail.

Un algorithme itératif de résolution du système matriciel est généralement bien adapté à la structure creuse de la matrice. Une augmentation considérable de la largeur de bande peut avoir des conséquences négatives sur la convergence de l'algorithme. Un solveur direct peut être mieux adapté. Cependant son utilisation exige la mémoire pour la matrice pleine.

La constitution de la matrice composite nécessite une inversion de la matrice du système électrique ainsi que des opérations de multiplication de grandes matrices. Il s'agit là des algorithmes très coûteux en temps CPU.

*Avantages :*

La matrice globale est bien conditionnée, l'ordre de grandeurs des coefficients liés au circuit électrique est adapté au système magnétique. Cela contribue à une réduction des erreurs numériques du calcul.

#### IV.4. La résolution simultanée

Le principe est de résoudre simultanément les équations de champ magnétique et les équations de circuit. Les inconnues du système résultant sont alors le potentiel vecteur magnétique en chaque nœud des éléments finis et les courants dans les mailles du circuit [4-2], [4-3].

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_m \end{Bmatrix} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, I_{m1}, I_{m2}, \dots, I_{mc} \rangle^T \quad (4-12)$$

où n est le nombre de nœuds des éléments finis, et c le nombre de mailles du circuit électrique.

Le système est composé des équations du champ magnétique et des équations du circuit électrique :

$$[S]\{A\} - [C][M]^T \{I_m\} = \{T\} \quad (4-13)$$

$$[M][C]^T \frac{d}{dt}\{A\} + [R_m]\{I_m\} + [L_m] \frac{d}{dt}\{I_m\} = \{U_m\}$$

Afin de comprendre pourquoi la méthode de la résolution simultanée est plus efficace que la méthode intégr-différentielle il faut analyser la structure de la matrice composée. La figure 4.3 présente un schéma des de la construction de la matrice.

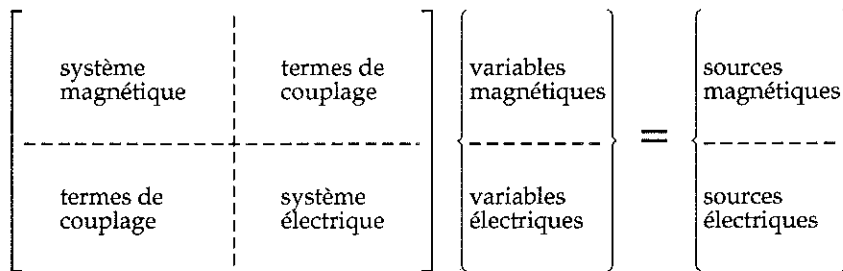


Fig. 4.3 : Structure de la matrice obtenue par la méthode de résolution simultanée

Les matrices et les termes sources des deux systèmes sont conservés dans leur structure initiale. Le couplage est réalisé en ajoutant de lignes et des colonnes de termes de couplage.

#### Avantages :

Le grand avantage de la résolution simultanée est qu'elle conserve les propriétés 'intéressantes' de la matrice creuse. En effet les matrices  $[S]$ ,  $[R_m]$  et  $[L_m]$  sont construites d'une manière classique. On ajoute uniquement les termes de couplage. Par conséquent l'occupation de la mémoire n'est guère augmentée. Les grandeurs électriques comme les courants des conducteurs sont directement fournis par le calcul. Contrairement à la méthode intégr-différentielle, un calcul supplémentaire des flux des conducteurs n'est pas nécessaire.

#### Inconvénients :

La matrice est moins bien conditionnée. Il peut y avoir des écarts importants entre les termes des équations du champ et ceux des équations du circuit. La matrice n'est plus définie positive. Le nombre de variables du problème est légèrement augmenté.

### IV.5. Réflexions sur le choix de la méthode employée

L'analyse des différentes formulations pour le calcul du champ magnétique, des

formulations pour le calcul des courants et tensions du circuit électrique et des méthodes du couplage des calculs l'un avec l'autre montre que le choix d'une méthode de calcul efficace est influencé par le problème à traiter, par des facteurs de l'informatique, comme : occupation de place en mémoire, temps de calcul, ainsi que par l'effort nécessaire pour la mise en œuvre des algorithmes correspondants.

En ce qui concerne la facilité de mise en œuvre, la formulation A-V donne beaucoup d'avantages. Par contre, en appliquant la formulation T- $\psi$ , nous pouvons considérablement réduire le temps de calcul. En revanche cette formulation pose des problèmes liés aux régions non simplement connexes. En ce qui concerne l'utilisation d'un potentiel électrique  $T_0$ , sa définition n'est possible que pour certaines formes simples de conducteurs bobinés.

Les méthodes d'analyse du circuit électrique par les potentiels nodaux ou par les courants de mailles sont duales. L'algorithme sera plus simple si nous choisissons les potentiels des nœuds comme inconnues. Par contre la formulation des courants de mailles est bien adaptée à un couplage avec la formulation A-V du champ électromagnétique. L'utilisation des courants des mailles pose des problèmes lorsque le circuit électrique comporte des interrupteurs. Par conséquent, il est préférable d'utiliser les potentiels électriques intégrés dans le temps.

Les différences entre les diverses méthodes de couplage magnéto-électrique sont décisives pour l'efficacité du calcul. Afin de pouvoir traiter des problèmes électromagnétiques complexes pas à pas dans le temps, la formulation itérative est exclue car elle demande un temps de calcul considérable. De même la mémoire installée dans les stations de travail actuelles ne permet pas la mise en œuvre de la formulation intégréo-différentielle. En ce qui concerne les calculs en trois dimensions, l'utilisation de la méthode de résolution simultanée s'impose. Sa mise en œuvre exige la définition d'une fonction vecteur de bobinage pour chacune des bobines. Cet inconvénient est éliminé par l'utilisation des lignes de courants.

#### *Résumé:*

Pour la réalisation du logiciel de calcul des machines tournantes nous avons combiné l'utilisation des méthodes suivantes:

- Calcul du champ magnétique en utilisant le potentiel vecteur magnétique dans le contexte des éléments finis nodaux en trois dimensions;
- Représentation des conducteurs bobinés par le modèle des lignes de courant dans l'espace;
- Analyse du circuit électrique en utilisant les potentiels électriques intégrés dans le temps et les courants des bobines comme inconnues;
- Résolution simultanée des équations du champ magnétique et des équations du circuit électrique;
- Discrétisation du temps en différences finies

Ce choix des méthodes employées assure d'une part la possibilité de simuler des machines avec les moyens informatiques disponibles et d'autre part la généralité nécessaire pour la représentation des différents types de machines.

#### IV.6. La méthode de couplage retenue

Comme nous avons démontré au chapitre II, la mise en équation des circuits électriques par la méthode des potentiels nodaux intégrés dans les temps est mieux adaptée aux circuits typiques d'alimentation des moteurs. C'est pourquoi nous effectuons un couplage entre les équations des potentiels électriques et les équations du champ [4-4]. Les inconnues des deux systèmes sont les valeurs nodales de  $\mathbf{A}$  et les potentiels électriques  $\Psi$ . Le couplage s'effectue en ajoutant également les courants des conducteurs bobinés aux inconnues du problème.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \\ \Psi \end{Bmatrix} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, I_1, I_2, \dots, I_b, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p \rangle^T \quad (4-14)$$

où  $b$  est le nombre de conducteur bobinés,  $p$  représente le nombre de potentiels électriques actifs.

Le système final est composé des équations des potentiels vecteurs aux nœuds des éléments finis, des équations pour la tension aux bornes des bobines, et des équations des potentiels électriques intégrés dans le temps.

$$[\mathbf{S}]\{\mathbf{A}\} - [\mathbf{C}]\{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{T}\}$$

$$[\mathbf{C}]^T \frac{d}{dt} \{\mathbf{A}\} + [\mathbf{R}]\{\mathbf{I}\} - [\mathbf{N}]^T \{\Psi\} = \{0\} \quad (4-15)$$

$$[\mathbf{N}]\{\mathbf{I}\} + [\mathbf{B}_n]\{\Psi\} + [\mathbf{G}_n] \frac{d}{dt} \{\Psi\} = -\{\mathbf{I}_{sn}\}$$

où  $[\mathbf{R}]$  est la matrice diagonale des résistances des bobines.  $[\mathbf{B}_n]$  et  $[\mathbf{G}_n]$  sont les matrices des réluctances et conductances des mailles transformées aux équations de la conservation du courant aux nœuds électriques.

$$[\mathbf{B}_n] = [\mathbf{N}][\mathbf{B}][\mathbf{N}]^T$$

$$[\mathbf{G}_n] = [\mathbf{N}][\mathbf{G}][\mathbf{N}]^T$$

$$\{\mathbf{I}_{sn}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{I}_s\}$$

où  $[\mathbf{N}]$  est la matrice d'incidence nœud-branche.

Dans le calcul en pas à pas dans le temps nous remplaçons la dérivé d'une variable

d'état par la différence finie. Par exemple, pour la dérive du potentiel vecteur est obtenue à partir des valeurs de deux pas consécutifs :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta \mathbf{A}^{(i)}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i-1)}}{\Delta t} \quad (4-16)$$

En appliquant la méthode implicite, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{C}^T & -\Delta t \mathbf{R} & \mathbf{N}^T \\ 0 & \mathbf{N} & \mathbf{B}_n + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{G}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{(i)} \\ \mathbf{I}^{(i)} \\ \Psi^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(i-1)} + \mathbf{N}^T \Psi^{(i-1)} \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{G}_n \Psi^{(i-1)} - \mathbf{I}_{sn}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

La matrice ainsi obtenue est symétrique. Les matrices initiales des systèmes des équations magnétiques et électriques sont définies positives. En revanche, les lignes de couplage ajoutent des termes négatifs sur la diagonale. Ceci a des conséquences sur la convergence de la résolution itérative, que nous détaillerons au chapitre VI.





## CHAPITRE V :

# Méthodes de résolution directe des systèmes d'équations différentielles



## V.1. Introduction

La discrétisation dans l'espace d'un problème couplé électromagnétique par la méthode des éléments finis conduit à un système d'équations différentielles du premier ordre dans le temps. Lorsque nous effectuons l'analyse du circuit électrique en utilisant les potentiel nœuds intégrés dans le temps, et si le circuit électrique ne comporte pas de capacités, nous avons également un système d'équations différentielles dans le temps de la forme :

$$[B_n]\{\Psi\} + [G_n]\frac{d}{dt}\{\Psi\} = \{-I_{sn}\} \quad (5-1)$$

La présence des capacités du circuit électrique imposent le passage à un système d'équations différentielles du second ordre :

$$[B_n]\{\Psi\} + [G_n]\frac{d}{dt}\{\Psi\} + [C_n]\frac{d^2}{dt^2}\{\Psi\} = \{-I_{sn}\} \quad (5-2)$$

Nous allons présenter les méthodes les plus utilisées pour la résolution directe des systèmes d'équation différentielles par des schémas pas à pas dans le temps. En ce qui concerne les équations du premier ordre, nous appliquons un schéma de récurrence de Euler.

## V.2. Résolution des équations différentielles de premier ordre

### V.2.1. Les schémas de récurrence de Euler

*Algorithme :*

La méthode consiste à définir une interpolation linéaire de  $\Psi$  entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$ . Nous écrivons l'équation à l'instant  $t+\beta\Delta t$  avec  $0 \leq \beta \leq 1$  [5-1].

A l'instant  $t+\beta\Delta t$  la variable est donné par :

$$\{\Psi_{t+\beta\Delta t}\} = \beta\{\Psi_{t+\Delta t}\} + (1-\beta)\{\Psi_t\} \quad (5-3)$$

$$\frac{d}{dt}\{\Psi_{t+\beta\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t}(\{\Psi_{t+\Delta t}\} - \{\Psi_t\}) \quad (5-4)$$

L'algorithme pour la résolution d'un pas de temps de (5-1) s'écrit :

$$[K]\{\Psi_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (5-5)$$

où:

$$[K] = \beta[B_n] + \frac{1}{\Delta t}[G_n]$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \beta\{-I_{t+\Delta t}\} + (1-\beta)\{-I_t\} - (1-\beta)[B_n]\{\Psi_t\} + \frac{1}{\Delta t}[G_n]\{\Psi_t\}$$

*Stabilité :*

Pour  $\beta \geq 0.5$ , l'algorithme est inconditionnellement stable. Pour  $\beta < 0.5$ ,  $\Delta t$  doit être inférieur ou égale à une valeur critique  $t_c$ :

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1-2\beta)\lambda_{\max}} = t_c \quad (5-6)$$

où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de  $[G_n]^{-1}[B_n]$ .

En dehors de la condition de stabilité, il faut tenir compte de l'influence du choix du paramètre  $\beta$  sur la forme des résultats. Si le paramètre est mal choisi, des oscillations peuvent apparaître.

Le domaine de stabilité *sans oscillations* est défini par :  $(1-\beta)\Delta t\lambda_{\max} < 1$ .

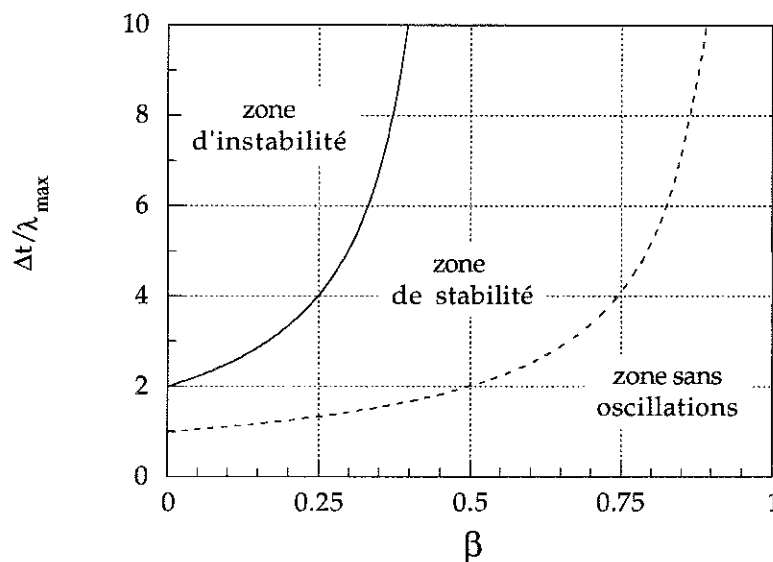


Fig. 5.1 : Influence de  $\beta$  sur la stabilité et les oscillations

Les valeurs de  $\beta$  les plus souvent utilisées sont 0, 0.5 et 1. Pour  $\beta=0$ , il s'agit du schéma d'Euler explicite; si  $\beta=1$ , nous avons un algorithme implicite. Pour les  $\beta$  entre 0 et 1 les algorithmes sont semi-implicite. Lorsque  $\beta=0.5$ , nous obtenons la méthode souvent utilisé de Crank-Nicholson.

*Choix optimale de  $\beta$  :*

Les méthodes de Euler imposent l'incrément de temps en fonction du choix du paramètre  $\beta$ . La méthode explicite nécessite un pas de temps assez petit pour que l'erreur de troncature soit acceptable. Afin que la solution reste bornée lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, il faut que  $\Delta t \leq 2 / \lambda_{\max}$ . De plus, afin d'éviter des oscillations de  $\Psi$ , il est préférable de choisir  $\Delta t \leq 1 / \lambda_{\max}$ .

Le choix de  $\beta=1$  procure la meilleure sécurité. Dans ce cas, l'algorithme est inconditionnellement stable et la solution reste lisse. La précision, cependant, est comparable à celle de l'algorithme explicite.

La meilleure précision peut être obtenue en utilisant la méthode de Crank-Nicholson ( $\beta=0.5$ ). Elle assure la stabilité quel que soit le choix de  $\Delta t$ . Cependant,  $\Delta t$  a une valeur critique en ce qui concerne l'apparition d'oscillations. Nous rappelons que ces oscillations n'affectent pas la précision car la solution encadre la valeur analytique.

### V.2.2. Discrétisation du temps en éléments finis

Pour donner une solution au problème du choix de  $\beta$ , il est intéressant de considérer une discrétisation du temps en éléments finis. Dans ce cas, les inconnues sont définies par des valeurs nodales et des fonctions d'interpolation non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps. La méthode des résidus pondérés peut alors être appliquée aux équations différentielles dans le temps. Toutes les valeurs nodales pourraient être résolues, en une seule itération, en quatre dimensions. Le besoin de mémoire vive pour un tel calcul serait très supérieur à celui d'un pas de temps. Pour cette raison, il est plus commode d'utiliser la méthode des résidus pondérés uniquement pour un pas de calcul [5-2].

Considérons une intervalle entre 0 et  $\Delta t$  : les inconnues sont définies à des instants 0 et  $\Delta t$ . À l'intérieur de cette intervalle, elle sont définies par des fonctions d'interpolation. Comme pour la discrétisation spatiale, nous définissons des 'fonctions de forme'  $\alpha_i$  appropriées. Elle doivent satisfaire les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 1 \text{ à l'instant } i \\ \alpha_i &= 0 \text{ aux autres instants} \\ \sum \alpha_i &= 1 \text{ dans une intervalle}\end{aligned}$$

Pour un algorithme pas à pas dans le temps nous admettons une interpolation linéaire de la forme:

$$\alpha_0 = (\Delta t - t) / \Delta t \quad (5-7)$$

$$\alpha_1 = t / \Delta t \quad (5-8)$$

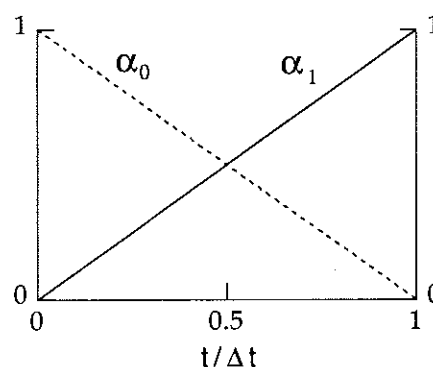


Fig. 5.2 : Fonctions d'interpolation de premier ordre dans le temps

La valeur à l'instant  $t(0, \Delta t)$  est donné par la somme des valeurs nodales pondérées:

$$\Psi(t) = \sum_{i=0}^1 \alpha_i(t) \Psi_i \quad (5-9)$$

Nous utilisons par la suite la forme vectorielle:

$$\{\Psi\} = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} \quad (5-10)$$

La dérive est également liée aux fonctions d'interpolation:

$$\frac{\partial \{\Psi\}}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right\rangle \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \langle -1, 1 \rangle \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} \quad (5-11)$$

Les valeurs à l'instant 0 étant connues, la méthode des résidus pondérés est appliquée uniquement pour l'instant 1. Par conséquent, l'équation (5-1) est multipliée par  $\alpha_1$  et intégrée dans l'intervalle  $(0, \Delta t)$ :

$$\int_0^{\Delta t} \alpha_1 \left( [B_n] \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} + [G_n] \left\langle \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right\rangle \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} + \{I_{ns}\} \right) dt = \{0\} \quad (5-12)$$

En utilisant les fonctions d'interpolation (5-7) et (5-8), l'intégration peut être effectuée d'une manière exacte. Nous avons:

$$[B_n] \left( \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \end{Bmatrix} \right) + \frac{1}{\Delta t} [G_n] \left( - \begin{Bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Psi_1 \end{Bmatrix} \right) + \frac{2}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} t \{I_{sn}\} dt = \{0\} \quad (5-13)$$

Ce résultat est plus ou moins équivalent à la méthode semi-implicite avec un paramètre  $\beta=2/3$ . Néanmoins, l'approche est différente, car plus générale. De la même manière nous pouvons facilement augmenter l'ordre d'interpolation à l'intérieur d'une intervalle, soit en ajoutant des instants de calcul, soit par des variables supplémentaires (comme des dérivées du temps). Cependant, le besoin de mémoire d'un tel calcul est trop important. Nous nous limitons à des algorithmes à pas simples.

### V.3. Résolution des équations différentielles de second ordre

Lorsque le circuit électrique comporte des capacités nous devons résoudre un système d'équations du second ordre dans le temps. Une multitude d'algorithmes est présenté dans la littérature concernant les simulations de la mécanique [5-1]. Cependant, dans notre système d'équations, la dérivée seconde n'apparaît pas dans

les équations des éléments finis. En fait, une petite quantité des équations se présente comme équation de 2<sup>ème</sup> ordre. C'est la raison pour laquelle nous n'utilisons pas des algorithmes complexes présentés dans ce qui suit.

### V.3.1. Méthodes basées sur des différences finies

*Différences finies centrales :*

La méthode est explicite et utilise une approximation des dérivées par différences finies centrées :

$$\frac{d}{dt} \{\Psi_t\} \approx \frac{1}{2\Delta t} \left( \{\Psi_{t+\Delta t}\} - \{\Psi_{t-\Delta t}\} \right) \quad (5-14)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_t\} \approx \frac{1}{\Delta t^2} \left( \{\Psi_{t+\Delta t}\} - 2\{\Psi_t\} + \{\Psi_{t-\Delta t}\} \right) \quad (5-15)$$

Le système à résoudre s'écrit alors:

$$[K] \{\Psi_{t+\Delta t}\} = \{R_t\} \quad (5-16)$$

où:

$$[K] = \frac{1}{2\Delta t} [G_n] + \frac{1}{\Delta t^2} [C_n]$$

$$\{R_t\} = \{-I_{sn,t}\} - [B_n] \{\Psi_t\} + \frac{1}{2\Delta t} [G_n] \{\Psi_{t-\Delta t}\} + \frac{1}{\Delta t^2} [C_n] \left( 2\{\Psi_t\} - \{\Psi_{t-\Delta t}\} \right)$$

Nous remarquons que le premier membre ne comporte pas des termes de la matrice  $[B_n]$ . Ce système d'équations n'est alors pas couplé avec les équations discrétisées dans l'espace. C'est pourquoi, il faut enchaîner une résolution en éléments finis afin d'obtenir les potentiels nodaux. Cette méthode demande un pas de temps assez petit pour que les approximations (5-14) et (5-15) soient acceptables. La stabilité n'est assurée que pour  $\Delta t$  inférieur à une valeur critique, qui est liée à la plus petite période caractéristique de résonance du système physique étudié. Le nombre de résolutions nécessaire étant trop important, nous considérons plutôt les algorithmes implicites :

*Méthode de Newmark :*

Représentant pour tout un groupe d'algorithmes nous présentons la base de la méthode de Newmark. On retrouve ce schéma dans d'autres algorithmes, avec des modifications mineures, destinées à amortir les modes de fréquences élevées. La méthode est basée sur les développements limités suivants:

$$\frac{d}{dt} \{\Psi_{t+\Delta t}\} = \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} + \Delta t \left[ (1 - \beta_1) \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_t\} + \beta_1 \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_{t+\Delta t}\} \right] \quad (5-17)$$



$$\text{et} \quad \{\Psi_{t+\Delta t}\} = \{\Psi_t\} + \Delta t \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ (1-\beta_2) \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_t\} + \beta_2 \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_{t+\Delta t}\} \right] \quad (5-18)$$

où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent les paramètres de l'algorithme.  
Le système d'équation à l'instant  $t+\Delta t$  s'écrit:

$$[K] \{\Psi_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \text{où:} \quad [K] &= \frac{\Delta t^2}{2} \beta_2 [B_n] + \Delta t \beta_1 [G_n] + [C_n] \\ \{R_{t+\Delta t}\} &= \frac{\Delta t^2}{2} \beta_2 \{-I_{sn,t+\Delta t}\} \\ &+ [G_n] \left[ \Delta t \beta_1 \{\Psi_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta_1 - \beta_2) \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} + \frac{\Delta t^3}{2} (\beta_1 - \beta_2) \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_t\} \right] \\ &+ [C_n] \left[ \{\Psi_t\} + \Delta t \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - \beta_2) \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi_t\} \right] \end{aligned}$$

Cet algorithme suppose la connaissance des dérivées secondes du pas précédent, si  $\beta_1 < 1$  et  $\beta_2 < 1$ . En ce qui concerne les dérivées secondes, nous ne pouvons pas admettre leur continuité, notamment quand il s'agit des tensions aux bornes des inductances ou des interrupteur au moment de la commande. Seul l'algorithme implicite est utilisable ( $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ). Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} [K] &= [B_n] + \frac{2}{\Delta t} [G_n] + \frac{2}{\Delta t^2} [C_n] \\ \{R_{t+\Delta t}\} &= \{-I_{sn,t+\Delta t}\} \\ &+ \frac{2}{\Delta t} [G_n] \left[ \{\Psi_t\} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} \right] \\ &+ \frac{2}{\Delta t^2} [C_n] \left[ \{\Psi_t\} + \Delta t \frac{d}{dt} \{\Psi_t\} \right] \end{aligned} \quad (5-20)$$

Ce choix des paramètres assure une stabilité inconditionnelle de l'algorithme de Newmark.

### V.3.2. Transformation d'un système de second ordre en un système de premier ordre

Cette transformation est toujours possible en ajoutant les dérivées premières aux variables du problème. Nous posons :

$$\frac{d}{dt} \{\Psi\} = \{V\} \quad (5-21)$$

Le système (5-2) s'écrit:

$$[B_n] \{\Psi\} + [G_n] \{V\} + [C_n] \frac{d}{dt} \{V\} + \{-I_{sn}\} = \{0\} \quad (5-22)$$

Il s'y ajoute la relation entre chaque variable  $\Psi$  et sa dérivée:

$$[\delta] \frac{d}{dt} \{\Psi\} - [\delta] \{V\} = \{0\}$$

où  $[\delta]$  est une matrice unitaire.

Cette méthode n'est pas employée car elle rend la matrice du système non symétrique. Il est, par contre, possible d'obtenir une matrice symétrique en ajoutant uniquement les tensions aux bornes des capacités aux inconnues. Les équations supplémentaires représentent les relations entre les potentiels et les tensions des capacités. Les courants des capacités sont alors exprimés à partir des tensions, et ajoutés aux équations nodales. Finalement nous avons :

$$\begin{aligned} [\delta] \{U_c\} - [N]^T \frac{d}{dt} \{\Psi\} &= \{0\} \\ [N][C] \frac{d}{dt} \{U_c\} + [B_n] \{\Psi\} + [G_n] \frac{d}{dt} \{\Psi\} &= \{-I_{sn}\} \end{aligned} \quad (5-23)$$

La matrice peut être rendue symétrique en multipliant la première ligne par  $[C]$ .

#### V.4. Conclusion

Le plus souvent, les équations des circuits d'alimentation des moteurs se présentent comme des équations différentielles du premier ordre dans le temps. Nous utilisons alors l'algorithme implicite de Euler. Le passage à un algorithme semi-implicite est délicat, lorsque le mouvement du rotor est pris en compte. Dans ce cas les variables sont numérotées dans un ordre différent à chaque pas du temps, afin de garder une largeur minimale de bande. Cela implique que, après la renumérotation, les termes sources utilisant l'ancienne matrice ne peuvent être calculés. C'est pourquoi nous avons préféré de mettre en œuvre la méthode implicite de Euler. Les tensions aux bornes des capacités sont gardées comme inconnues, ce qui nous permet d'utiliser la même algorithme, quel que soit l'ordre du système.



## CHAPITRE VI :

### Réalisation informatique



## VI.1. Introduction

Dans le cadre de la thèse, le logiciel MV3DYN, de simulation des machines tournantes à été réalisé. Ce logiciel permet le calcul de la distribution du champ magnétique en trois dimensions dans le moteur en prenant en compte le mouvement du rotor et les équations du circuit électrique. La résolution est basée sur des calculs pas à pas dans le temps. Le calcul du couple à chaque position permet un couplage indirecte avec l'équation cinématique de l'arbre du rotor. Le couplage avec les équations du circuit électrique est réalisé d'une manière directe. Le logiciel permet de simuler les régimes permanents et les régimes transitoires des différents types de moteurs. Il a été validé sur des moteurs à aimants, sur des machines universelles et sur des moteurs à réluctance variable.

## VI.2. Présentation du logiciel

Le logiciel MV3DYN est programmé dans le langage standard FORTRAN 77. Il est installé sur différents types de stations de travail tel que : APOLLO 400, IBM RISC 6000 et HP 700. Le logiciel comporte uniquement les modules nécessaires pour la constitution des systèmes d'équations, leur résolution et la mise à disposition des résultats. Il est donc dépendant d'autres logiciels destinés à la définition de la géométrie, au maillage et à l'exploitation des résultats du calcul.

Le modèle du champ magnétique est basé sur la méthode des éléments finis. Nous utilisons des éléments nodaux de premier ou de second ordre. Afin de pouvoir adapter au mieux le maillage à la structure de la machine, le logiciel prend en compte tous les types conventionnels d'éléments finis (tétraèdres, prismes et hexaèdres). Pour des raisons de généralité de la formulation, le potentiel vecteur  $A$  est choisi comme variable nodale. Le maillage est fourni sous forme d'un fichier, du type 'UNIVERSEL', crée par le logiciel d'analyse mécanique SUPERTAB. Ce fichier comporte la liste des noeuds, leurs connexions et la référence de matériau pour chaque élément fini. Les conditions aux limites sont imposées par des références à des éléments surfaciques aux bords du domaine d'étude.

Le résultat de chaque calcul est enregistré dans un fichier également au format 'UNIVERSEL'. Les valeurs des potentiels nodaux de chaque pas de temps sont stockées dans un fichier séparé. Un post-processeur permet le calcul des valeurs physiques comme l'induction, le champ magnétique et la perméabilité. Un autre fichier comporte les valeurs de temps, couple, vitesse et position pour chaque pas.

Les propriétés magnétiques et électriques des matériaux sont fournis dans un fichier de paramètres. Le calcul prend en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques.

Le circuit électrique est analysé en utilisant la méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps. Pour cela, la structure du circuit et la liste des composants sont fournis dans un fichier distinct. Les composants sont définis par leur type, les noeuds de connexion et les paramètres spécifique à chaque composant. Les types suivants sont acceptés par le logiciel : résistances, inductances, capacités, diodes, sources de courant, sources de tension, transistors commandés et connexions balais - lame des machines à commutateur. Les résultats directes de chaque calcul sont les

potentiels électriques intégrés des noeuds du circuit et les courants des bobinages de la machine. Les tensions et les courants des branches sont calculés à posteriori et stockés dans des fichiers spécifiques.

### VI.3. Structuration des données

Toutes les données nécessaires pour un pas de calcul sont lues dans les fichiers et stockées dans une base de données en mémoire [6-1]. Celle-ci permet de garder en mémoire la structure des données et le stockage dynamique des entités. Les informations de la base de données sont enchaînées dans des tables d'entiers ou de réels. Une gestion dynamique de la mémoire permet une adaptation à des problèmes de différentes tailles.

En ce qui concerne la mémorisation des informations liées au circuit électrique nous avons adopté la structure suivante :

Pour chacun des composants :

- *type du composant*
- *nombre de paramètres*
- *liste des valeurs des paramètres*
- *numéro de la branche du circuit*

Une résistance par exemple pourrait avoir les attribut suivants :

- <type> = RÉSISTANCE
- <nombre de paramètres> = 1
- <valeur 1> = résistance en  $\Omega$
- <branche> = référence à une entité branche

La structure du circuit électrique est représentée par des liaisons orientés (les branches) entre les noeuds du circuit.

Pour chaque branche :

- *numéro de référence*
- *premier noeud de connexion*
- *second noeud de connexion*
- *valeur de la tension*
- *valeur du courant*

Les noeuds du circuit sont porteurs de la variable de calcul. Il est donc nécessaire d'établir le liens aux potentiels électriques.

Pour chaque noeud :

- *numéro du potentiel électrique*
- *valeur du potentiel*

Les bobinages de la machine sont donnés sous forme de types standardisés de conducteurs, placés dans l'espace de calcul. Cela facilite leur définition et leur

modification par l'utilisateur. Dans un processus de discrétisation, toutes les intersections avec les éléments finis sont déterminées. Les éléments filaires porteurs du courant sont mémorisés sous forme d'éléments linéiques. Une référence au numéro de la bobine permet d'établir la liste des morceaux de lignes pour chaque conducteur.

Pour chaque bobine :

- *numéro de référence*
- *type*
- *repère de définition*
- *coordonnée du centre de la bobine*
- *nombre de paramètres*
- *liste des valeurs des paramètres*

A titre d'exemple voici les données d'une bobine cylindrique:

<numéro> = 1  
<type> = CYLINDRIQUE  
<repère> = REPÈRE GLOBAL CARTÉSIEN  
<centre> = X,Y,Z  
<nombre de paramètres> = 3  
<paramètre 1> = rayon en mètres  
<paramètre 2> = hauteur en mètres  
<paramètre 3> = épaisseur en mètres

## VI.4. Constitution du système d'équations

### VI.4.1. Contributions matricielles des éléments du circuit électrique

Dans le chapitre II, nous avons présenté la méthode de constitution des équations des potentiels nodaux intégrés dans le temps. La matrice de réductance est définie par des opérations matricielles. Cependant, il n'est pas efficace d'effectuer directement ces multiplications matricielles. En vue d'une meilleure utilisation de la mémoire de l'ordinateur, nous avons adopté une mémorisation symbolique de la matrice. Elle nécessite uniquement le stockage des termes non nuls. Chaque terme est caractérisé par un numéro de ligne, un numéro de colonne et sa valeur en double précision. Nous utilisons une des méthodes conventionnelles de stockage des matrices creuses utilisé pour les calcul par la méthode des éléments finis : le stockage morse. En se basant sur cette forme de stockage, les opérations matricielles sont effectuées sur le niveau des éléments finis ou des éléments du circuit électrique. Les sous-matrices ainsi obtenues sont assemblé dans la matrice globale du système. De cette façon, la mémoire nécessaire pour le calcul et le nombre d'opérations élémentaires (additions, multiplications) sont réduites. Par la suite nous présentons les différentes étapes de la constitution du système matricielle. En particulier, nous considérons la contribution matricielle de chaque type de composant électrique standard, ainsi que les opération nécessaires pour la prise en compte des composants spéciaux.



L'ensemble des systèmes d'équations à résoudre est composée des équations des valeurs nodales des éléments finis, des équations de la tension aux bornes des conducteurs bobinés et des équations des potentiels électriques :

$$[S]\{A\} - [C]\{I\} = \{T\}$$

$$-[C]^T \frac{d}{dt} \{A\} - [R_c] \{I\} + [N]^T \frac{d}{dt} \{\Psi\} = 0 \quad (6-1)$$

$$[N]\{I\} + [B_n]\{\Psi\} + [G_n] \frac{d}{dt} \{\Psi\} + [C_n] \frac{d^2}{dt^2} \{\Psi\} = \{-I_{sn}\}$$

avec :

$$S_{ij}(n,n) = \int_{\Omega} (\text{rot } W_i \cdot \text{rot } W_j + \text{div } W_i \cdot \text{div } W_j) d\Omega,$$

$$T_i(n) = \int_{\Omega} W_i \cdot \text{rot } H_c d\Omega,$$

$$C_{ik}(n,b) = \int_{\Lambda_k} W_i \cdot t d\Lambda,$$

et

$$\begin{aligned} [B_n] &= [N] [B] [N]^T \\ [G_n] &= [N] [G] [N]^T \\ [C_n] &= [N] [C] [N]^T \end{aligned}$$

$R_{kk}$  := résistance du conducteur bobiné k

$B_{kk}$  := réluctance de la branche k

$G_{kk}$  := conductance de la branche k

$C_{kk}$  := capacité de la branche k

Les matrices  $[S]$  et  $[T]$  sont calculées et assemblées de la manière conventionnelle liée à la méthode des éléments finis. Les intégrales sont évaluées au niveau de chaque élément. Il en résulte une sous-matrice élémentaire, qui est assemblée aux lignes et colonnes de la matrice symbolique, correspondant aux numéros des variables nodales.

En ce qui concerne les termes ajoutés par les équations du circuit électrique, nous procédons d'une façon similaire. Tout d'abord, un numéro d'inconnue est attribué à chaque nœud du circuit. Puis, les contributions à la matrice de chaque composant sont calculées et accumulées dans la matrice globale. Pour cela les données suivantes sont récupérées :

Pour chaque élément du circuit :

- numéro du potentiel  $\Psi_a$
- numéro du potentiel  $\Psi_b$
- type de l'élément
- paramètres de l'élément

La valeur du paramètre correspond à l'inductance, la résistance ou la capacité du composant. Prenons l'exemple d'une conductance G. Elle représente la branche k qui

relie les noeuds A et B. Les noeuds sont porteurs des potentiels électriques  $\Psi_a$  et  $\Psi_b$ . Le courant de la branche est donné par :

$$I_k = G_k \cdot U_k = G_k \left( \frac{d\Psi_a}{dt} - \frac{d\Psi_b}{dt} \right) \quad (6-2)$$

avec: 
$$G_k = \frac{1}{R_k}$$

Par conséquent, ce courant intervient aux équations a et b :

$$a) \quad +G_k \frac{d\Psi_a}{dt} - G_k \frac{d\Psi_b}{dt} = 0 \quad (6-3)$$

$$b) \quad -G_k \frac{d\Psi_a}{dt} + G_k \frac{d\Psi_b}{dt} = 0 \quad (6-4)$$

La conductance apporte les termes suivantes à la matrice globale :

$$\begin{array}{l} \text{1)} \\ \vdots \\ \text{a)} \\ \text{équation: } \vdots \\ \text{b)} \\ \vdots \\ \text{n)} \end{array} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & +G_k & \cdots & -G_k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -G_k & \cdots & +G_k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{c} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_a \\ \vdots \\ \Psi_b \\ \vdots \\ \Psi_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (6-5)$$

De cette façon nous caractérisons les différents types d'éléments du circuit électrique par les numéros des potentiels nodaux et la matrice spécifique au composant [6-2].

*Matrice élémentaire d'une résistance :*

$$[G_n^{(e)}] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \\ -\frac{1}{R_k} & +\frac{1}{R_k} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

*Matrice élémentaire d'une inductance :*

$$[B_n^{(e)}] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{L_k} & -\frac{1}{L_k} \\ -\frac{1}{L_k} & +\frac{1}{L_k} \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

*Matrice élémentaire d'une capacité :*

$$[C_n^{(e)}] = \begin{bmatrix} +C_k & -C_k \\ -C_k & +C_k \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

Matrice élémentaire d'une source de courant :

$$\{I_n^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} -I_k \\ +I_k \end{Bmatrix} \quad (6-9)$$

Matrice élémentaire d'un transformateur :

$$[B_n^{(e)}] = \left( \frac{1}{1-K} \right) \begin{bmatrix} +\frac{1}{L_k} & -\frac{1}{L_k} & +\frac{1}{M_{kl}} & -\frac{1}{M_{kl}} \\ -\frac{1}{L_k} & +\frac{1}{L_k} & -\frac{1}{M_{kl}} & +\frac{1}{M_{kl}} \\ +\frac{1}{M_{kl}} & -\frac{1}{M_{kl}} & +\frac{1}{L_l} & -\frac{1}{L_l} \\ -\frac{1}{M_{kl}} & +\frac{1}{M_{kl}} & -\frac{1}{L_l} & +\frac{1}{L_l} \end{bmatrix} \quad (6-10)$$

avec: 
$$K = \frac{M_{kl}^2}{L_k L_l}$$

Contribution d'un conducteur bobiné :

Les conducteurs filaires sont pris en compte d'une part par leur termes dans les équations de circuit électrique et d'autre part par les termes de couplage avec les éléments finis dans l'espace 3D. Le courant d'un conducteur est ajouté à la liste des variables du problème. La contribution de la densité du courant dans l'espace du conducteur est ajoutée par les termes de [C]. Puis, sa contribution dans les équations des nœuds A et B est prise en compte. Enfin, la loi d'Ohm couple la chute de tension sur la résistance du conducteur et la f.e.m. des spires avec la différence des potentiels  $\Psi_a$  et  $\Psi_b$ .

$$\begin{bmatrix} [0] & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & -[C] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & +1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -[C]^T & \dots & +1 & \dots & -1 & \dots & -R_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \{A\} \\ \vdots \\ \Psi_a \\ \frac{d}{dt} \vdots \\ \Psi_b \\ \vdots \\ I_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-11)$$

En utilisant la méthode de la discrétisation du temps en différence finis, les contributions des éléments du circuit électrique conduisent à des équations linéaires pour chaque pas de temps avec des termes source dérivés du pas de calcul précédent. La matrice est symétrique et garde sa structure de bande dans la partie supérieure. Les termes de couplage avec les courants des bobines dégradent néanmoins le conditionnement de la matrice globale.

L'algorithme de la constitution de la matrice globale se présente de la façon suivante:

Pour chaque élément fini du domaine :

- Intégration de la matrice élémentaire
- Récupération des numéros de potentiels nodaux
- Assemblage de la matrice élémentaire

Pour chaque élément du circuit électrique :

- Constitution de la matrice élémentaire
- Récupération des numéros de potentiels électriques
- Assemblage de la matrice élémentaire

Pour chaque élément linéique d'une bobine :

- Intégration du courant dans l'élément volumique
- Récupération des numéros de potentiels nodaux
- Récupération du numéro du courant de la bobine
- Assemblage de la matrice élémentaire

Les trois algorithmes correspondent à la façon classique d'établir la matrice dans un logiciel de calcul par la méthode des éléments finis. Par conséquent, les algorithmes conventionnels pour la numérotation des variable et pour l'assemblage des matrices élémentaires sont parfaitement adaptés à cette tâche.

#### VI.4.2. Prise en compte des composant spéciaux

*Prise en compte des sources de tension :*

La méthode d'analyse du circuit électrique, que nous avons choisie, ne permet pas de prendre en compte d'une manière directe les sources de tension. Cependant, les machines tournantes sont habituellement alimentées par des sources de tension ou par le réseau électrique. Une source de tension réelle, avec une résistance non nulle peut se transformer en une source réelle de courant.

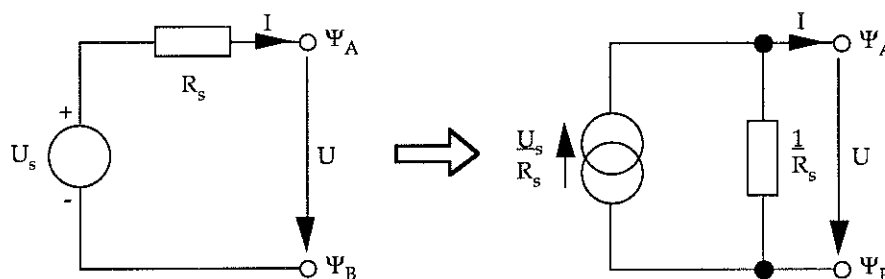


Fig. 6.1 : Transformation d'une source de tension réelle en une source de courant réelle

Lorsque la résistance interne de la source de tension est nulle, la transformation en une source de courant n'est pas possible. Par conséquent, il faut un traitement

spécifique pour ce composant. Formellement, nous ajoutons le courant de la source aux variables du problème [6-3]. Dans ce cas la contribution d'une source de tension entre les nœuds A et B devient :

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & +1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & -1 & \dots & +1 & \dots & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_a \\ \vdots \\ \Psi_b \\ \vdots \\ I_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \int_{\tau=0}^t (U_s) d\tau \end{Bmatrix} \quad (6-12)$$

Nous constatons : Les termes ajoutés par le couplage du courant de la source rendent la matrice non symétrique. De plus, le terme diagonal lié au courant est nul. L'utilisation du solveur itératif n'est alors pas possible. C'est pourquoi, nous avons préféré appliquer une autre méthode. La différence des potentiels aux nœuds A et B est définie par :

$$\Psi_a - \Psi_b = \int_{\tau=0}^t U_s d\tau \quad (6-13)$$

où  $U_s$  est la tension de la source.

La connaissance de la différence entre les intégrales des potentiels permet d'établir une relation intervariable. En effet, chaque variable peut être substituée par une combinaison linéaire d'autres variables du système. Lorsqu'une variable peut être exprimée par combinaison linéaire, son calcul n'est pas indispensable. Il suffit de la remplacer dans chacune des équations dans laquelle elle apparaît, par les facteurs de ses constituants. Le potentiel  $\Psi_a$  de la source de tension est exprimé en termes du potentiel  $\Psi_b$  et de l'intégrale de la tension source :

$$\Psi_a \Leftarrow \Psi_b + \int_{\tau=0}^t U_s d\tau \quad (6-14)$$

La méthode de substitution intervariable réduit le nombre d'inconnues. Cependant la connexité de la matrice est augmentée. La symétrie de la matrice n'est pas alternée. L'utilisation de cette méthode est possible dans un contexte plus générale. La mise en équation de certaines conditions aux limites des éléments finis et le couplage entre les régions de différentes formulations peut être réalisée d'une manière élégante par des relations entre des variables nodales. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit cette technique dans le solveur du système d'équations du logiciel MV3DYN (voir: Rémy Perrin-Bit: "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels: Calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", rapport de thèse, L.E.G, 1994).

## VI.5. Adaptation du solveur des systèmes d'équations linéaires

### VI.5.1. Numérotation des variables

Nous avons démontré que les équations des variables nodales des éléments finis, ainsi que les équations des potentiels nodaux électriques, ont la particularité de former une matrice creuse. En effet, le nombre de termes non nuls dans chaque ligne de la matrice (la largeur de bande) dépend essentiellement du type des éléments finis. Ce nombre est quasiment indépendant du nombre d'éléments. Cela permet le stockage et la résolution des grands systèmes d'équations liés à la méthode des éléments finis avec des moyens de calcul généralement limités. Une inversion ou une factorisation complète de la matrice augmenterait considérablement la mémoire nécessaire sur le calculateur. C'est pourquoi, nous avons opté pour un algorithme itératif de résolution des équations linéaires. Or, la convergence de ce type d'algorithmes est étroitement liée à l'ordre dans laquelle les équations sont assemblées [6-4]. Il est toujours préférable de placer le maximum de termes autour de la diagonale principale de la matrice.

Afin d'obtenir une numérotation optimale, nous procédons de la manière suivante : Dans un premier temps, les variables du problème sont numérotées dans un ordre arbitraire. Un algorithme rapide consiste à numéroter les variables nodales dans l'ordre croissant des numéros des nœuds. Puis, la structure de la matrice est créée en utilisant la numérotation initiale. Il s'agit de réserver les termes non nuls à partir des connexions intervariables. Les variables des nœuds d'un élément fini, par exemple, sont toutes en relation par les équations du champ magnétique. La troisième phase consiste à renuméroter les variables donc, réorganiser la structure de matrice d'une manière à ce que les connexions se rapprochent au mieux de la diagonale. Une méthode très efficace est donnée par l'algorithme de Cuthill-McKee inverse. L'algorithme est le suivant :

- (1) Choisir arbitrairement une variable de départ.
- (2) Cette variable forme le front initial de la numérotation.
- (3) Numéroter toutes les variables directement liées au front et non numérotées.
- (4) Les variables nouvellement numérotées forment le nouveau front.
- (5) Répéter (3) et (4) jusqu'à épuisement des variables non numérotées.
- (6) Inverser la numérotation ainsi obtenue.

Nous avons étudié l'influence de la numérotation des variables lorsque la structure de la matrice est modifiée par les termes du couplage directe avec les équations du circuit électrique. Ce type de couplage s'effectue par des connexions entre les courants des bobines et tous les nœuds des éléments finis du conducteur concerné. La largeur de bande est localement augmentée. L'algorithme de renumérotation de Kuthill-McKee reporte ces termes de couplage de préférence aux premières lignes de la matrice. Nous observons un comportement très désavantageux de la convergence de la résolution du système d'équations ainsi obtenues.

L'idée apparaît d'appliquer cet algorithme seulement à la partie de la matrice issue des équations du champ dans les éléments finis. Les termes liés aux équations du circuit et le couplage direct entre les deux systèmes sont ajoutés, en respectant leur

numérotation initiale, à la partie inférieure de la matrice. Dans ce cas, le conditionnement est nettement amélioré. La répartition des termes sur les dernières lignes cependant n'est pas gérée de cette façon. En fait, la distribution est presque arbitraire, car la renumérotation des variables nodales ne tient pas compte du couplage avec les équations du circuit.

La largeur de bande de la matrice peut être réduite d'avantage, lorsque un algorithme de numérotation légèrement modifié est appliqué sur l'ensemble de la matrice : la numérotation obtenue par les actions (1) à (5) n'est pas inversée (6). Nous avons observé que, en utilisant ce type de numérotation, les termes de couplage se reportent entièrement dans la partie inférieure droite de la matrice. Par conséquent, la renumérotation de Kuthill-McKee directe est bien adaptée au conditionnement des matrices issues d'un couplage direct (couplage direct) des équations du circuit électrique avec les équations de la méthode des éléments finis.

### VI.5.2. Préconditionnement de la matrice

Le conditionnement de la matrice ainsi réorganisé ne permet pas directement la résolution par la méthode des gradients conjugués. Le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une erreur acceptable peut être élevé ou les résultats peuvent diverger. Il est avantageux d'effectuer un preconditionnement de la matrice afin d'accélérer la convergence [6-5]. Soit  $[A]$  la matrice initiale du système d'équations à résoudre :

$$[A]\{X\} = \{B\}. \quad (6-15)$$

Il est souvent possible de séparer la matrice  $[A]$  en

$$[A] = [M] - [E]. \quad (6-16)$$

La matrice  $[M]$  est plus facilement inversible et son comportement ressemble d'une certaine manière à celui de la matrice  $[A]$ .  $[E]$  est la matrice d'erreur qu'on commet par cette transformation. Le système preconditionné :

$$[M]^{-1}[A]\{X\} = [M]^{-1}\{B\} \quad (6-17)$$

peut avoir un comportement plus favorable à la résolution itérative. Au lieu de résoudre l'équation (6-19) nous préférons de résoudre le système :

$$[\tilde{A}]\{Y\} = \{\tilde{B}\}. \quad (6-18)$$

avec:

$$\begin{aligned} [\tilde{A}] &= [M]^{-\frac{1}{2}}[A][M]^{-\frac{1}{2}} \\ [\tilde{B}] &= [M]^{-\frac{1}{2}}[B] \\ [Y] &= [M]^{-\frac{1}{2}}[X] \end{aligned}$$

Puisque nous avons une matrice symétrique, nous pouvons appliquer la factorisation de Choleski incomplète. Contrairement à une factorisation complète, elle ne crée pas de termes non nuls supplémentaires (les 'fill ins') dans la matrice. La structure creuse est donc conservée. Selon la méthode conventionnelle, la matrice modifiée est donnée par :

$$[M] = [L][L]^T = [A] + [E] \quad (6-19)$$

où  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure.

Les termes de la matrice  $[M]$  sont calculés à partir des termes initiaux de la façon suivante :

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} \quad i=1,n \quad (6-20)$$

$$L_{ij} = \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk} \right) \div L_{ii} \quad j=1,i \quad (6-21)$$

Lorsque la matrice contient des termes de couplage, les termes diagonaux des lignes concernées sont négatifs. Par conséquent, il n'est pas possible de calculer la racine carré dans (6-20). Nous avons donc adopté une méthode différente qui consiste à calculer la matrice  $[M]$  de la façon suivante :

$$[M] = [L][D][L]^T = [A] + [E] \quad (6-22)$$

où  $[D]$  est une matrice diagonale.

Maintenant les termes de la matrice préconditionnée se calculent par :

$$D_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{L_{ik}^2}{D_{kk}} \quad i=1,n \quad (6-23)$$

$$L_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{L_{ik}L_{jk}}{D_{ii}} \quad j=1,i \quad (6-24)$$

*Dominance de la diagonale :*

Le rapport entre les valeurs sur la diagonale et les autres valeurs de la même ligne/colonne influe d'une manière importante sur la convergence de l'algorithme des gradients conjugués. Lorsque  $[M]$  a une diagonale dominante, elle est plus facilement inversible. Le cas extrême est une matrice diagonale, dont l'inversion est immédiate. Afin d'augmenter le poids des termes diagonaux de  $[M]$ , nous utilisons, au lieu de l'équation (6-27) la formule suivante :



$$D_{ii} = \gamma A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{L_{ik}^2}{D_{kk}} \quad i=1,n \quad (6-25)$$

Le facteur d'accélération  $\gamma$  est légèrement supérieur à 1. Sa valeur exacte dépend du conditionnement initial de la matrice [A]. Plus le facteur d'accélération est grand, mieux la matrice [M] est conditionnée. Par contre [M] ressemble de moins en moins à la matrice initiale, donc le nombre d'itérations nécessaires est plus élevé. Inversement, lorsque  $\gamma$  est trop proche de 1, la résolution peut diverger. Par conséquent, sa valeur doit être déterminée pour chaque matrice. Nous obtenons une bonne mesure pour la stabilité en observant la valeur des termes diagonaux de [M]. Nous vérifions deux critères :

$$\frac{|D_{ii}|}{\max(|A_{ii}|)} > \varepsilon, \quad (6-26)$$

et 
$$\frac{|D_{ii}|}{|A_{ii}|} < \delta. \quad (6-27)$$

où  $\varepsilon$  et  $\delta$  sont des paramètres de mesure de stabilité. Il sont déterminés d'une manière empirique. Lorsque nous avons une matrice issue d'un problème magnétostatique classique nous choisissons :  $\varepsilon=10^{-6}$  et  $\delta=256$ . Une matrice qui contient des termes de couplage est généralement moins bien conditionnée. Nous avons trouvé les paramètres:  $\varepsilon=10^{-8}$  et  $\delta=16$ .

## VI.6. Prise en compte des équations non linéaires

Les propriétés magnétiques des matériaux utilisés imposent que le problème est généralement non linéaire. De plus, les composants semi-conducteurs du circuit électrique possèdent une caractéristique courant - tension non linéaire. C'est pourquoi les équations doivent être résolues d'une manière itérative [6-6]. La méthode de Newton - Raphson permet de les transformer en équations linéaires par morceau et d'atteindre le point de fonctionnement au bout de plusieurs itérations.

Prenons comme exemple les diodes semi-conductrices : L'état d'ouverture ou de fermeture d'une diode dépend de la tension aux bornes du composant. Il pourrait être estimé avant chaque pas de calcul par une méthode de prédiction de la tension. Dans ce cas, le modèle bi-résistif est acceptable pour les circuits électroniques de puissance. Par contre, si le circuit comporte des interrupteurs commandés, l'état conducteur des diodes peut brusquement changer. Le résultat d'un pas de calcul doit alors être rejeté, et il est nécessaire de répéter la résolution. Nous avons jugé que le temps de calcul du champ en trois dimensions est trop long pour accepter cette approche. C'est pourquoi nous avons opté pour le modèle non linéaire de la diode : L'état de conduction est vérifié et corrigé lors des itérations de l'algorithme de Newton-Raphson.

Typiquement, le courant  $I_d$  d'une diode est donné par :

$$I_d = I_s \left( \exp \left[ \frac{U_{pn}}{U_T} \right] - 1 \right) \quad (6-28)$$

$U_{pn}$  est la tension à l'interface p-n. Les paramètres spécifiques au type de la diode sont  $I_s$ , le courant de saturation et  $U_T$ , la tension de température. Cette dernière peut être calculée par :

$$U_T = \frac{k T}{\lambda q} \quad (6-29)$$

$k$  - constante de Boltzmann ( $k=1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K)

$T$  - température absolue de la puce

$\lambda$  - constante empirique ( $0.5 < \lambda < 1$ )

$q$  - charge élémentaire ( $q=1.6 \cdot 10^{-19}$  C)

Des valeurs typiques pour  $I_s$  et  $U_T$  sont :

$$I_s = 1 \mu\text{A} \dots 1 \text{mA}$$

$$U_T = 25 \text{mV}$$

La tension  $U_{pn}$  n'est pas accessible de l'extérieur du composant. La construction impose qu'il apparaisse une résistance de série. Le circuit équivalent d'une diode réelle est présenté sur la figure 6.2.

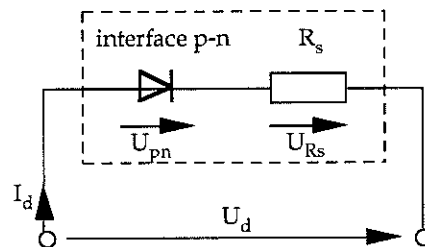


Fig. 6.2 : Circuit équivalent d'une diode réelle

Considérons le système d'équations non linéaires :

$$[M(X)] \{X\} = \{F\} \quad (6-30)$$

L'algorithme de Newton - Raphson consiste en une série de résolutions de :

$$[M_t^{(i-1)}] \{\Delta X^{(i)}\} = \{R^{(i-1)}\} \quad (6-31)$$

afin d'obtenir les incréments  $\Delta X$  :

$$\{X^{(i)}\} = \{X^{(i-1)}\} + \{\Delta X^{(i)}\} \quad (6-32)$$

La matrice tangente  $[M_t]$  est la dérivé du résidu par rapport au vecteur de résolution :

$$[M_t(X^{(i-1)})] = - \left[ \frac{\partial \{R(X^{(i-1)})\}}{\partial \{X\}} \right] = [M(X^{(i-1)})] + \left[ \frac{\partial [M(X^{(i-1)})]}{\partial \{X\}} \{X\} \right] \quad (6-33)$$

Le résidu est donné par :

$$\{R^{(i)}\} = \{R(X^{(i-1)})\} = \{F\} - [M(X^{(i-1)})] \{X^{(i-1)}\} \quad (6-34)$$

Nous appliquons cette méthode aux équations de la diode. Dans ce cas, le résidu élémentaire représente le courant dans la diode. La matrice tangente représente la conductance dynamique pour une tension donnée. A l'itération  $i$  de la boucle Newton - Raphson, les termes suivants sont assemblés :

$$\begin{bmatrix} +G_d^{(i-1)} & -G_d^{(i-1)} \\ -G_d^{(i-1)} & +G_d^{(i-1)} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \Delta \Psi_a^{(i)} \\ \Delta \Psi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_d^{(i-1)} \\ +I_d^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (6-35)$$

avec :

$$G_d^{(i-1)} = \frac{1}{1 / g_{pn}^{(i-1)} + R_s}$$

$$g_{pn}^{(i-1)} = \frac{dI_d^{(i-1)}}{dU_{pn}} = \frac{I_s}{U_T} \left( \exp \left[ \frac{U_{pn}^{(i-1)}}{U_T} \right] - 1 \right)$$

$$I_d^{(i-1)} = I_s \left( \exp \left[ \frac{U_{pn}^{(i-1)}}{U_T} \right] - 1 \right)$$

La tension  $U_{pn}$  de la diode n'est pas directement fournie par le calcul. Par conséquent, elle est déterminé à partir de  $U_d$  en tenant compte du comportement non linéaire. Il faut alors résoudre l'équation non linéaire :

$$U_{pn} + R_s I(U_{pn}) = U_d \quad (6-36)$$

## VI.7. Prise en compte du mouvement

Afin de prendre en compte la rotation du moteur, le problème est résolu dans deux repères différents : un repère fixe et un repère mobile. Le champ magnétique est calculé dans des maillages distincts: un maillage comportant le stator et la boîte d'air, et un maillage du rotor avec l'entrefer. La frontière du dernier doit être axisymétrique. A chaque pas du calcul, les coordonnées des noeuds du domaine mobile subissent une transformation géométrique liée à l'angle d'avancement du rotor. La position relative des noeuds dans le repère mobile reste inchangée.

Il est clair que les champs magnétiques dans les zones distincts ne peuvent être calculé d'une manière indépendante. Il faut donc assurer une condition de passage à l'interface mobile-fixe. La continuité du potentiel vecteur magnétique à cette interface est assurée grâce à une connexion des valeurs nodales par interpolation de maillage [6-7]. Au bord du maillage mobile nous appliquons la condition suivante : la valeur nodale du potentiel est égale à la valeur d'interpolation dans l'élément fini de la région fixe en face:

$$\mathbf{A}^m = \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i \mathbf{A}_i^f \quad (6-36)$$

ou  $\mathbf{A}_m$  - potentiel vecteur au nœud de la région mobile,  
 $\mathbf{A}_i^f$  - potentiel vecteur des nœuds de l'élément en face,  
 $\mathbf{W}_i$  - fonctions d'interpolation de l'élément en face,  
 $N$  - nombre de nœuds de cet élément.

La valeur nodale du bord mobile étant définie de cette façon, elle peut être éliminée du système d'équations du problème.

Ce type de connexion conserve l'aspect symétrique, bien conditionné du système matriciel. Les points suivants sont à noter:

- Si les nœuds au bord de l'interface de connexion sont coïncidents, le système d'équations est identique à celui d'un maillage continu. Nous appliquons donc la méthode classique des éléments finis.
- Entre ces positions la topologie de la matrice varie de façon continue en fonction du mouvement.
- Les oscillations du résultat dû au mouvement sont alors minimales.

Néanmoins la méthode a les inconvénients suivants:

- La continuité de la variable d'état n'est assurée que d'une manière intégrale. Le degré d'interpolation est donc réduit, ce qui nécessite un maillage suffisamment dense sur l'interface mobile-fixe.
- La largeur de bande de la matrice du système est localement augmentée si les nœuds ne sont pas superposés. Ceci accroît les temps de calculs.

## VI.8. Conclusion

Nous avons créé un logiciel capable de simuler de différents types de moteurs électriques. Le régime transitoire peut être calculé grâce à la prise en compte du circuit électrique d'alimentation. Ce circuit peut comporter tous les composants utilisés dans la pratique. Le logiciel permet la prise en compte des contacts balais - lames des machines classiques, ainsi que des composants utilisés dans les circuits de commutation électronique. Le comportement non linéaire des diodes est modélisé par l'algorithme de Newton-Raphson.

Le couplage directe des équations du champ magnétique avec les équations du circuit électrique modifie le conditionnement de la matrice du système. Nous avons

élaboré des méthodes permettant un meilleur pré conditionnement de la matrice. Ceci augmente la robustesse du solveur et réduit le temps de résolution.

Le couplage des équations du potentiel vecteur magnétique avec les équations des potentiels électrique intégrés dans le temps représente un modèle général et efficace pour la simulation de structures complexe, comme des machines électriques. Il est particulièrement adapté aux circuits électriques d'alimentation des machines à commutation électronique. La structuration des données et l'organisation des modules de calcul permettent facilement d'introduire de nouveaux types de composants électronique ou améliorer les modèles existants.

## CHAPITRE VII :

### Validations



## VII.1. Étapes de validation

Nous avons préféré d'effectuer plusieurs types de calcul et de mesures comparatives, ayant comme but de vérifier le fonctionnement correct du logiciel MV3DYN. Chaque étape des calculs est destinée à vérifier en particulier le fonctionnement d'un module du logiciel, et la précision de l'algorithme. De cette façon la source d'éventuelles erreurs peut être localisée. Les différentes simulations sont séparées en trois phases :

Dans un premier temps nous vérifions le fonctionnement correct du module destiné au calcul de la répartition du champ magnétique par la méthode des éléments finis à partir d'un conducteur bobiné. La bobine est représentée par le modèle des courants linéiques. Elle est alimentée par une tension constante. Nous vérifions le calcul du champ magnétique par des mesures du flux. Les propriétés non linéaires du matériau sont prises en compte.

Une deuxième phase est destinée à la validation du calcul d'un transitoire lié à l'inductance d'un circuit magnétique et au comportement d'un circuit électrique. Celui ci comporte des résistances et une capacité. Il s'agit alors de valider le module du couplage des équations magnétiques avec celles du circuit électrique. Le calcul est effectué pas à pas dans le temps jusqu'à l'amortissement du transitoire.

La troisième étape comporte des simulations des moteurs réels dans des conditions fidèles à la réalité. Dans ce cas, nous nous intéressons plus particulièrement à la prise en compte du mouvement et des composants électriques commandés. La connexion balais - lame est testée, prenant l'exemple d'une machine universelle. Un moteur à réluctance variable alimenté par un circuit de commande est l'application des transistors et des diodes semi-conductrices.

## VII.2. Validation du couplage

Les deux premières étapes sont effectuées en prenant comme exemple un cas d'école: il s'agit d'un circuit ferromagnétique excité par une bobine multi-spire. Le noyau de la forme UI permet de varier l'épaisseur de l'entrefer. Le résultat de calcul pour la distribution du champ magnétique est vérifié à un endroit précis, en déterminant le flux principal à l'aide d'une spire de mesure. La bobine étant alimentée avec différents courants, ce modèle permet de valider la prise en compte de la saturation magnétique du matériau utilisé pour le guide de flux. La bobine d'excitation a une forme relativement simple; il est donc possible d'utiliser le modèle des lignes de courant. Le flux dans la spire de mesure est également calculé par des intégrales linéiques. La prise en compte des équations du circuit électrique est vérifiée sur deux niveaux : une fois par l'alimentation de la bobine avec une tension, et puis, en simulant un circuit électrique plus complexe contenant l'inducteur, des résistances et une capacité.



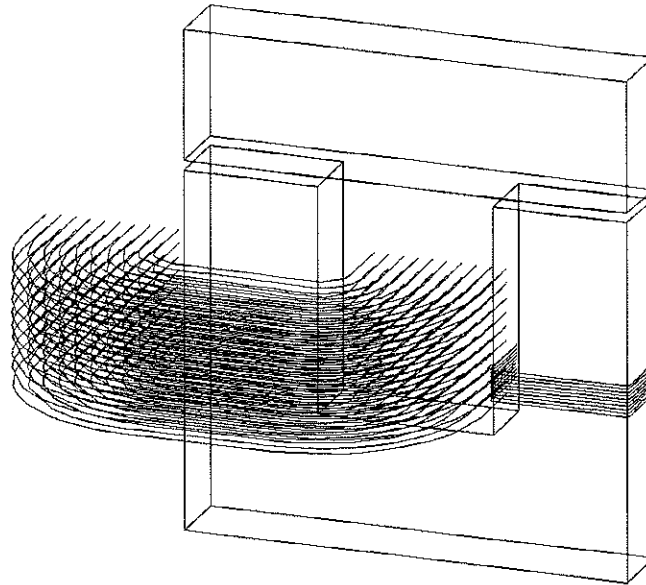


Fig. 7.1 : Géométrie du noyau UI76 avec les bobinages discrétisés

Le modèle géométrique représente un circuit magnétique sous forme UI avec un entrefer. Une bobine rectangulaire de 3100 spires est placée sur le noyau en ferrite. Une deuxième bobine de mesure est placée sur le côté opposé du noyau U. En profitant de la symétrie du champ, la simulation ne représente que la moitié de la géométrie. La figure 7.1 montre la géométrie du noyau et les deux bobines discrétisées en spires linéiques.

Le comportement non linéaire du matériau ferrite est pris en compte par des paramètres équivalents de l'approximation analytique de Marrocco. L'approximation de Marrocco étant définie par :

$$v(B) = \epsilon + (C - \epsilon) \frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + T}$$

nous avons adopté les paramètres suivants :

- $\epsilon = 1.7136 \cdot 10^{-4}$
- $C = 1.0$
- $\alpha = 5.65$
- $T = 0.2$

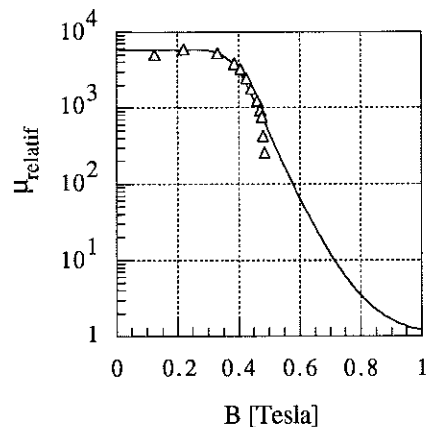


Fig.7.2 : Approximation pour  $\mu_r(B)$  et les données expérimentales ( $\Delta$ )

La figure 7.2 compare l'approximation de la courbe  $\mu_r(B)$  avec les données du fabricant du noyau ( $\Delta$ ).

La figure 7.3 montre le schéma électrique de l'essai réalisé. La bobine est alimentée en crêneau de tension, créant ainsi un champ magnétique croissant d'une manière exponentielle. Les valeurs finales des courants ont été mesurées pour différents

entrefers. L'intensité était suffisamment grande pour créer une saturation magnétique.

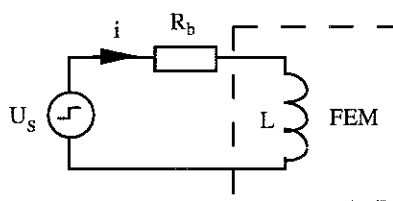


Fig.7.3 : Schéma électrique d'alimentation de la bobine

Nous avons déterminé le flux principal dans le noyau en mesurant l'intégrale dans le temps de la tension induite. Afin de mieux illustrer ce procédé de mesure nous avons réalisé le calcul équivalent sur l'ordinateur :

Le noyau magnétique et la boîte d'air ont été discrétisés en éléments tétraédriques de second ordre en utilisant le mailleur libre de FLUX3D. Les bobines ne sont pas représentées dans le modèle géométrique. Leurs discrétisation en courants linéiques sont superposées au maillage libre de la boîte d'air. La table 7.1 présente les données de discrétisation pour les différents entrefers.

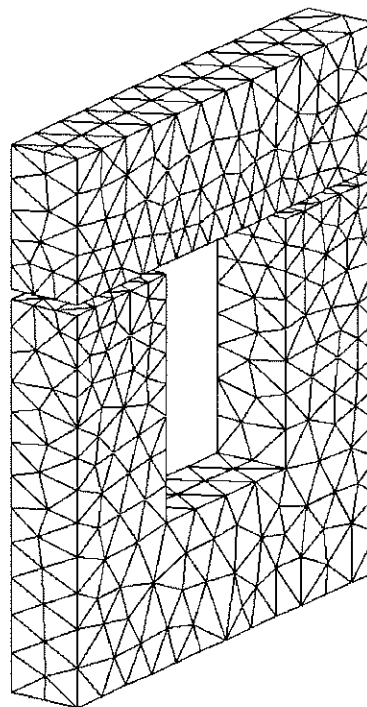


Fig.7.4 : Discrétisation du noyau de ferrite

Table 7.1 : Données de discrétisation en éléments finis:

entrefer [mm]	nombre d'éléments	nombre de nœuds
0.5	9211	15868
1.0	8465	14211
2.0	8387	13091

Comme pour le procédé de mesure, la bobine est alimentée avec une tension continue. Par conséquent, nous obtenons un courant transitoire. La valeur finale est déterminée par la résistance de la bobine. La figure 7.5 montre les courants calculés dans la bobine 1 pour une alimentation avec une tension de 20V. Nous observons que l'inductance du circuit magnétique se réduit par l'effet de saturation. La tension calculée dans la bobine de mesure est tracée dans le figure 7.6. La mesure du flux nécessite une intégration de cette tension dans le temps. Cependant, notre simulation utilise les potentiels électriques intégrés dans le temps comme variable d'état. Nous pouvons alors directement obtenir le flux dans la bobine à partir de la différence des

potentiels. La figure 7.7 montre les résultats de la simulation pour le flux dans la bobine 2.

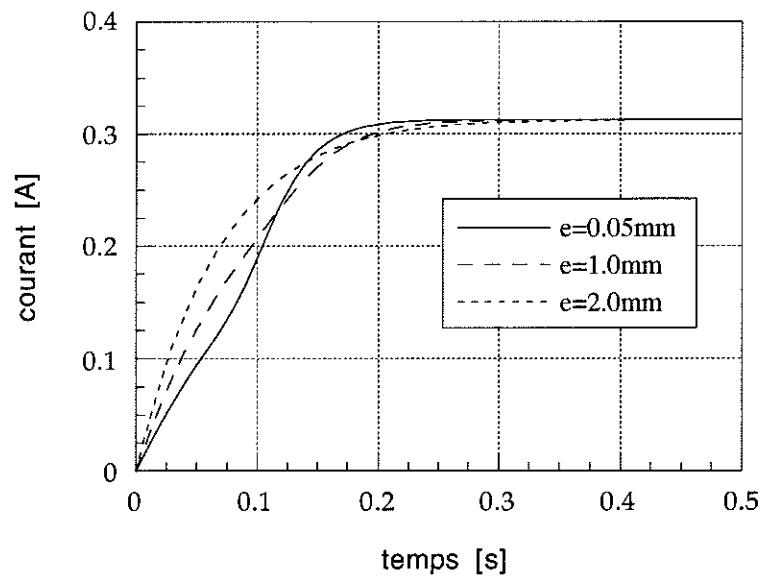


Fig 7.5 : Courants dans la bobine 1 pour différents entrefers  $e$

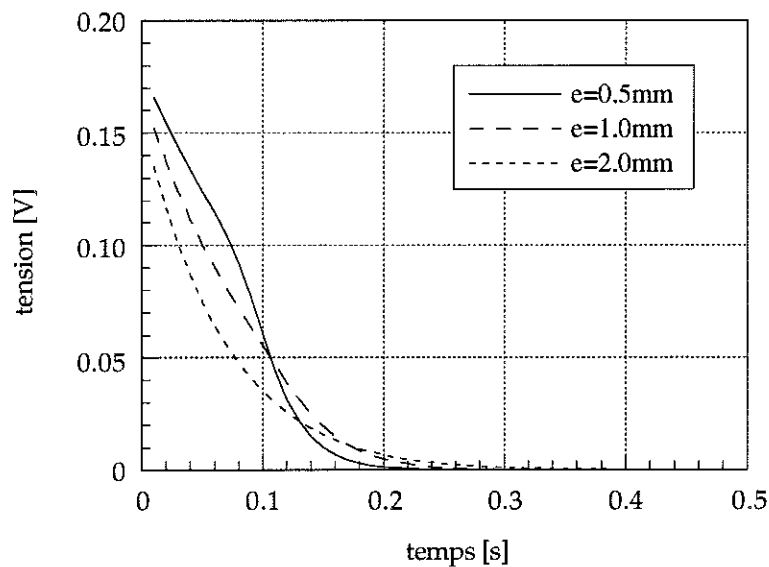


Fig. 7.6 : Tension dans la bobine de mesure pour différents entrefers  $e$

En ce qui concerne le procédé expérimental, nous avons déterminé le flux principal dans le circuit magnétique pour différentes valeurs du courant final. Cette fonction peut être comparée avec celle obtenue par la simulation. Pour cela, nous mettons en relation les courbes de la figure 7.5 (courant en fonction du temps) et celle de la figure 7.7 (flux en fonction du temps). Dans la figure 7.8 nous comparons les résultats de calcul avec les mesures correspondantes. Nous observons : le flux principal est légèrement sous-estimé par le modèle en éléments finis. Ceci est une

propriété typique de la formulation du potentiel vecteur. Cependant, le comportement non linéaire du matériau est respecté. Afin d'obtenir une meilleure précision la finesse de la discrétisation doit être augmentée.

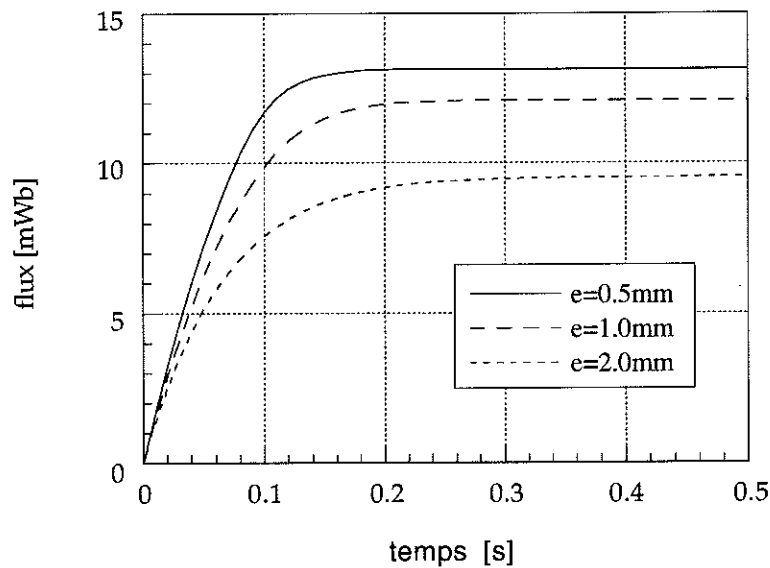


Fig. 7.7 : Valeurs du flux dans la bobine de mesure pour différents entrefers e

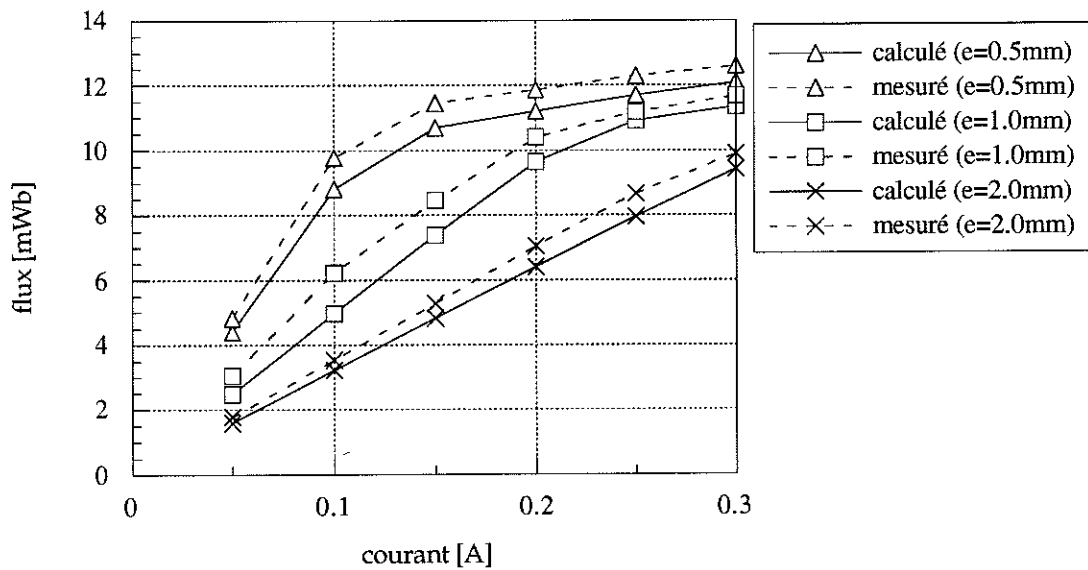


Fig. 7.8: Flux dans la bobine de mesure en fonction du courant dans la bobine 1 pour différents entrefers e

*Simulation d'un système de second ordre:*

L'essai pour le transitoire d'un système de second ordre a été réalisé avec un circuit électrique plus complexe. Le circuit comporte une capacité; nous simulons alors des équations différentielles de second ordre dans le temps. La figure 7.9 montre le

schéma électrique de l'essai réalisé. La bobine est alimentée avec une tension à travers un filtre RC. La capacité et l'inductance forment un circuit de résonance, qui génère des oscillations. L'amortissement du transitoire est déterminé par la résistance de la bobine et la résistance R.

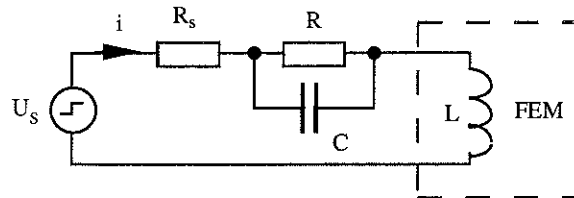


Fig.7.9: Schéma électrique de l'essai pour le système du premier ordre

La figure 7.10 compare les courants calculés dans la bobine 1 avec les mesures correspondantes. Nous présentons également une courbe de la solution analytique pour la réaction du circuit, en représentant la bobine par son inductance mesurée. Nous observons que la courbe analytique et la solution en éléments finis sont en bon accord. Nous remarquons également que la fréquence des oscillations du modèle en élément finis est supérieure à celle de la courbe analytique. Cela montre que la valeur de l'inductance représentée dans le calcul est inférieure à sa valeur mesurée.

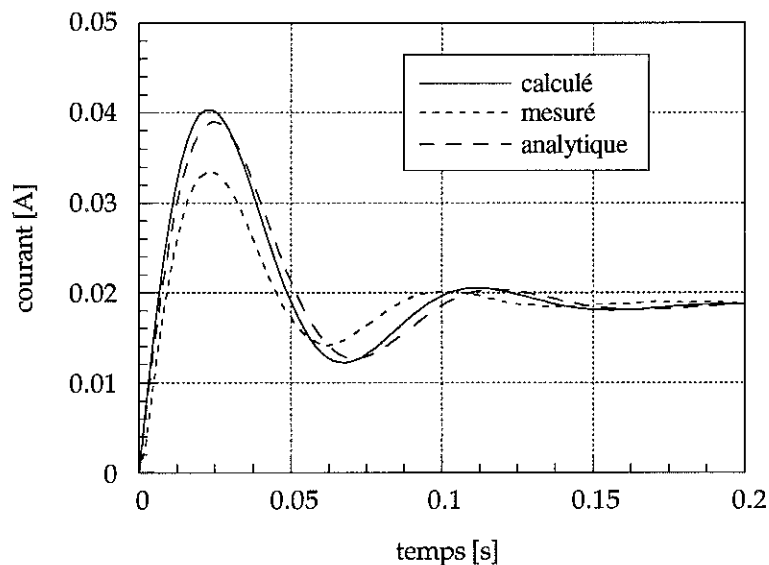


Fig. 7.10 : Courant dans la bobine 1 - bobine 2 pour un entrefer de 1mm

En ce qui concerne la courbe de courant mesuré nous constatons un écart par rapport aux deux calculs. Nous expliquons la différence par l'apparition des pertes dans la réalité, qui ne sont pas prises en compte dans les modèles. Ces pertes peuvent être évaluées par une mesure de la résistance apparente de la bobine pour différentes fréquences. Nous avons mesuré  $63.9\Omega$  pour un courant continu,  $71\Omega$  pour une fréquence de 20Hz, et  $75.6\Omega$  pour 50Hz. L'augmentation de la résistance avec la fréquence confirme l'hypothèse de la présence des pertes.

### VII.3. Simulation d'une machine universelle

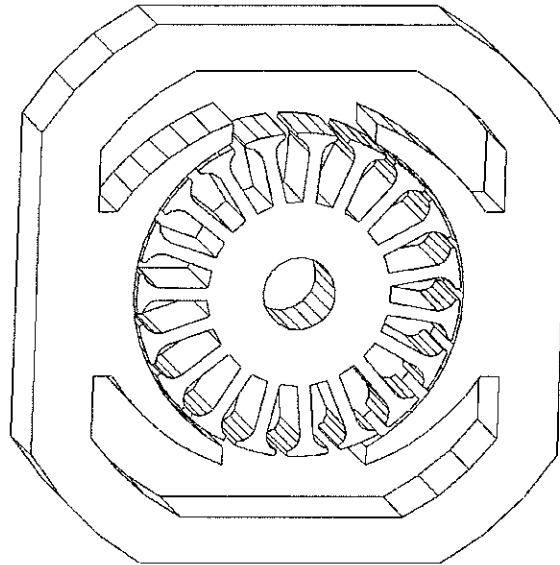


Fig. 7.11: Géométrie de la machine universelle

Une machine universelle a été simulée en tenant compte de sa rotation et de son alimentation par un collecteur. Le moteur comporte deux bobinages statoriques et 19 encoches rotoriques. Il existe un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe rotorique. La figure 7.11 montre la géométrie des parties fer de la géométrie considérée. Le domaine discrétisé en éléments finis comporte le rotor entouré par un cylindre d'air et le stator plongé dans une boîte d'air.

Le comportement non linéaire des tôles magnétiques est représenté par la formule de Marrocco. Les paramètres suivants sont adoptés :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2.1749 \cdot 10^{-4} \\ C &= 1.0 \\ \alpha &= 5.71 \\ T &= 1.65 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

La figure 7.12 présente la fonction  $\mu_{\text{relatif}}(B)$  utilisé pour le calcul et les données du constructeur.

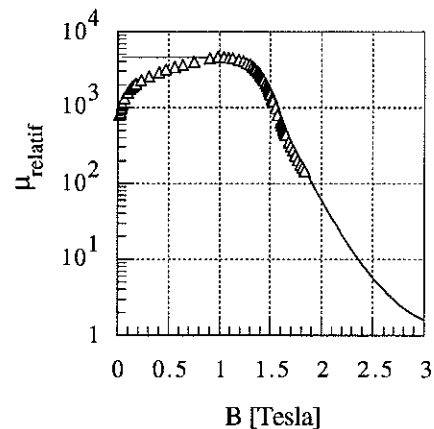


Fig. 7.12: Perméabilité relative  $\mu_{\text{rel}}(B)$  (données du constructeur en  $\Delta$ )

La discrétisation du bout de la machine est un maillage libre en éléments tétraédriques de second ordre. Ce maillage tient compte d'un cylindre d'air autour des têtes des bobines rotoriques. Cette partie des éléments finis subit une rotation

géométrique à chaque pas du calcul. Par conséquent, la discrétisation des conducteurs rotoriques est calculée une fois au premier pas. Ensuite, les segments des spires sont tournés de la même façon que les éléments volumiques du cylindre d'air.

Les couches d'éléments finis de la partie active de la machine sont créés par une extrusion des facettes des tétraèdres du maillage libre. De cette manière, une continuité parfaite entre les différents types d'éléments (tétraèdres et prismes) est assurée. La figure 7.13 montre le maillage par extrusion du stator et du rotor de la machine.

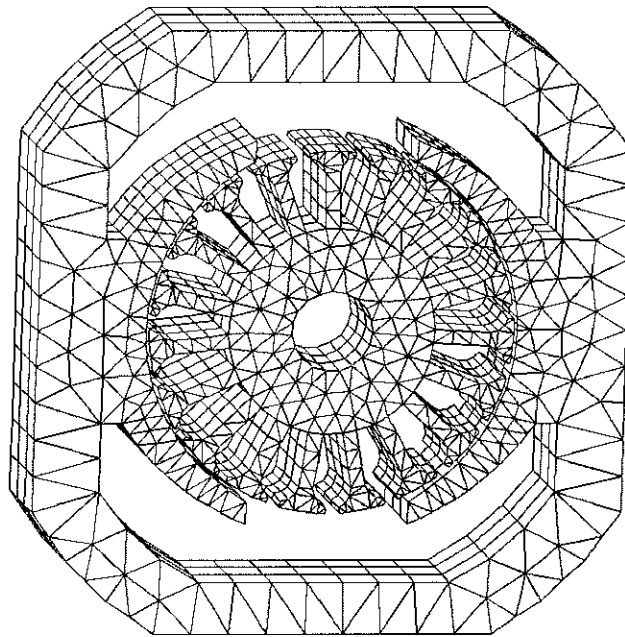


Fig. 7.13: Maillage du stator et du rotor de la machine universelle

La complexité de la géométrie de ce type de moteur et l'absence d'un second plan de symétrie du champ (nombre impair de pôles) sont les raisons pour lesquelles le nombre de nœuds du modèle complet est élevé. Le nombre total de nœuds a été choisi tel que la taille de la matrice ne dépasse pas la mémoire vive de l'ordinateur utilisé (station de travail HP 750 avec 128Mo de mémoire). Le temps CPU pour les 56 pas de calcul était de 569,3 heures.

Table 7.2 : Discrétisation de la machine universelle

partie de la géométrie	nombre d'éléments	nombre de nœuds
totale	12402	26499
bout du moteur	7452	11665
partie extrudée	4950	14834
partie des bobines	4317	9866

Les bobinages rotoriques et statoriques sont représentés par des formes de conducteurs standard avec une section circulaire. La section de chaque conducteur est discrétisée en lignes équidistantes de courants. Le calcul des intersections entre les conducteurs et le maillage prend en compte la symétrie du problème. La figure 7.14 montre les segments des lignes de courant des conducteurs.

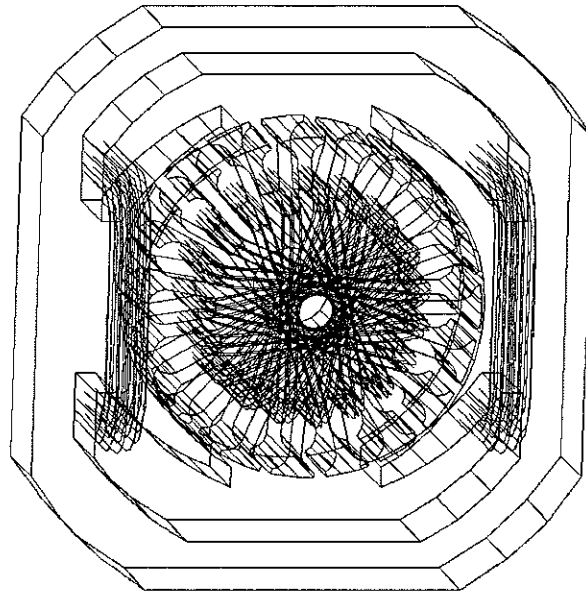


Fig. 7.14 : Discrétisation en courants linéiques des bobinages rotoriques et statoriques

L'alimentation de la machine par le contact balais-lames avec prise en compte de la rotation permet le calcul de l'angle interne du champ rotorique en fonction de la vitesse. Celui-ci étant constant pour une vitesse donnée, on obtient des images typiques pour le champ magnétique, comme le montre la figure 7.15.

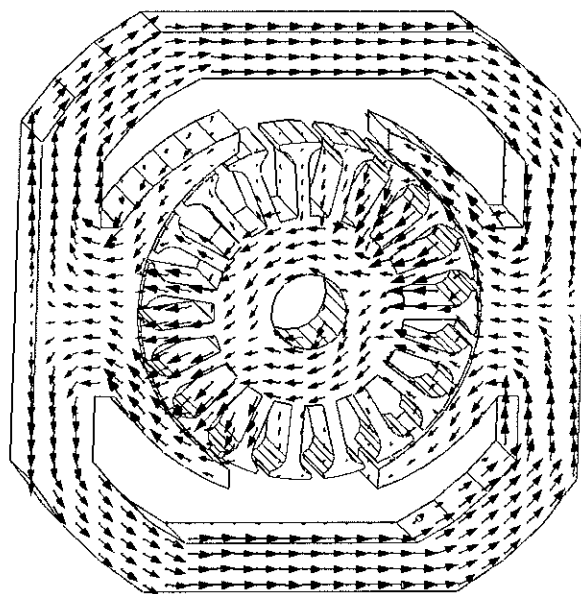


Fig. 7.15: Image du flux dans les parties actives de la machine



Les courbes des courants de chaque bobine rotorique sont également obtenues par la simulation du moteur avec son alimentation. Une phase de la machine a un courant alternant entre les courants d'alimentation positifs et négatifs. Le passage est fortement influé par l'angle et la durée du court-circuit entre deux lames consécutives. La figure 7.16 montre des formes typiques des courants des bobines rotoriques.

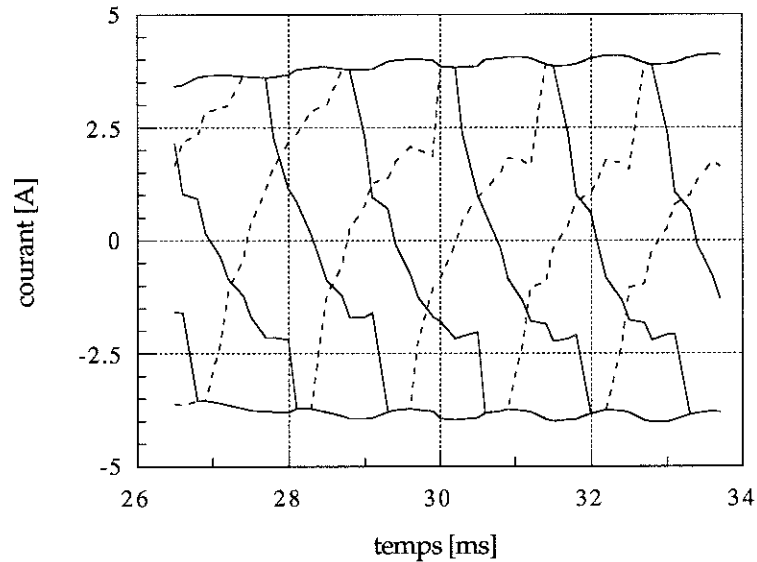


Fig. 7.16: Courbes des courants dans les bobinages rotoriques

À partir du champ obtenu pour chaque pas de temps nous calculons le couple instantané. La figure 7.17 montre bien la superposition du couple permanent avec une composante oscillante.

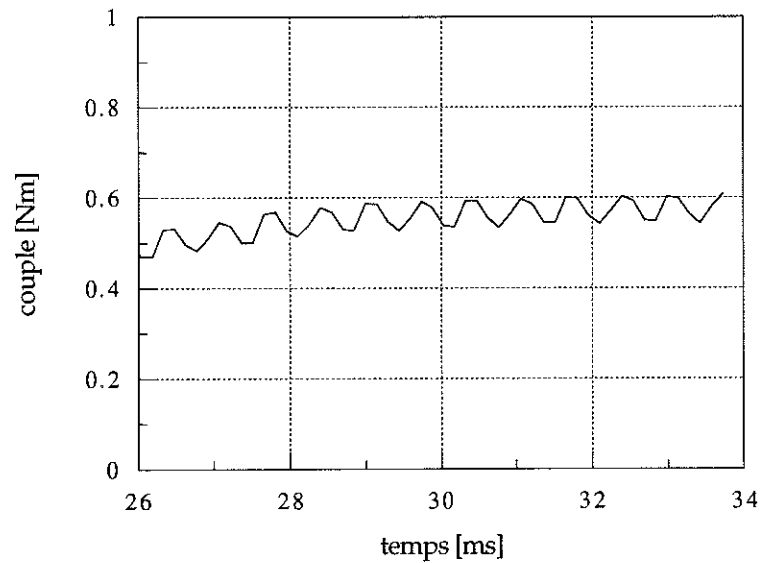


Fig. 7.17: Allure du couple instantané

## VII.4. Calcul d'un moteur à réluctance variable

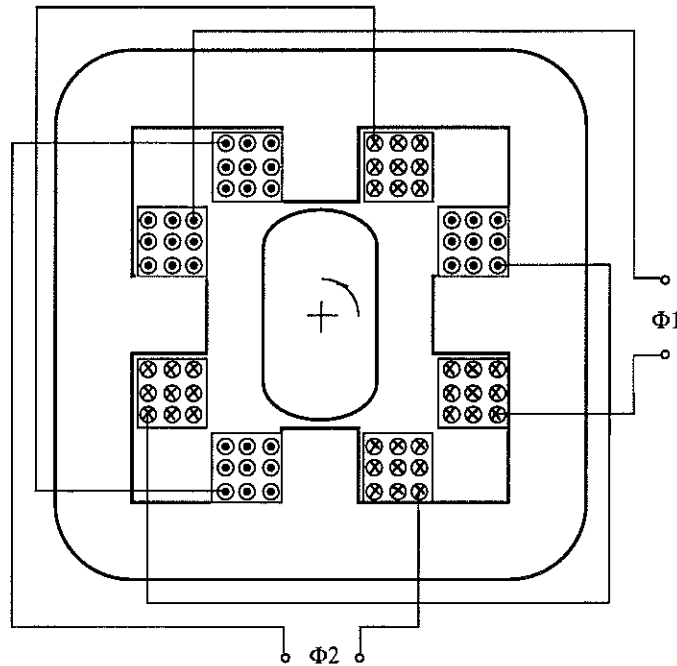


Fig. 7.18: Schéma d'alimentation des bobines

Le moteur à réluctance variable est l'exemple pour une alimentation par un circuit électronique. La figure 7.18 montre sa géométrie schématisée avec la connexion des bobines statoriques. Le champ magnétique est créé par deux phases de bobinages statoriques. Le rotor a tendance de prendre une position qui correspond à la réluctance minimale. Afin de créer une rotation continue il faut alimenter les phases en fonction de l'angle rotorique, en assurant toujours une avance due à cette position de réluctance minimale par rapport au rotor. Un capteur de position donne les consignes de commande pour les transistors d'alimentation.

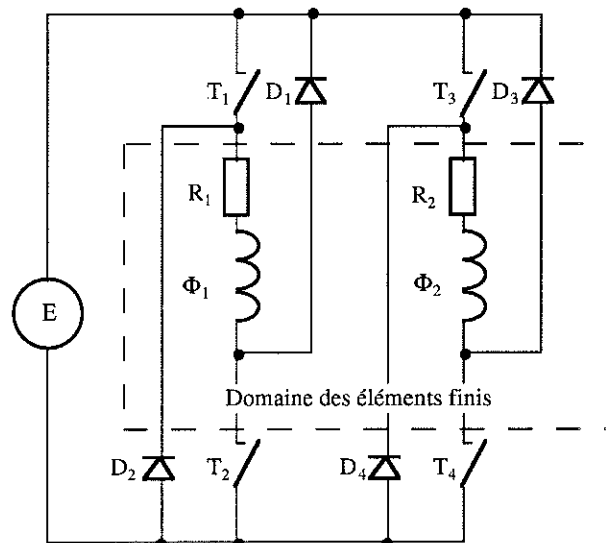


Fig. 7.19: Circuit électronique d'alimentation du moteur

La figure 7.19 présente le schéma électrique du circuit d'alimentation. Lorsque les transistors d'une phase sont ouverts, le courant de désaimantation traverse les diodes.

L'instant de la fermeture des diodes n'est alors pas connu. C'est pourquoi leur comportement non linéaire est pris en compte dans le modèle du circuit électrique.

La géométrie possède un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe du moteur. Une deuxième symétrie cyclique permet de réduire le domaine discrétisé à un quart du moteur. En profitant de ces symétries nous pouvons considérablement réduire le nombre d'inconnues du problème. La table 7.3 présente les données de discrétisation.

Table 7.3 : Discrétisation du moteur à réluctance variable

partie de la géométrie	nombre d'éléments	nombre de nœuds
totale	4932	10526
bout du moteur	3090	5041
partie extrudée	1842	5485
partie des bobines	486	1377

Nous avons effectué 208 pas de calculs. Le temps total de CPU était de 484,5 heures. Le moteur est simulé pour une vitesse constante. Les valeurs initiales de la période précédente n'étant pas connues, nous les fixons à zéro. Par conséquent le calcul traverse un transitoire numérique, avant d'atteindre le régime permanent d'alimentation. La figure 7.20 montre les courbes calculés des courants des deux phases. On observe le transitoire du courant de la phase 2. Les courbes des courants mesurés sont présentées dans la figure 7.21.

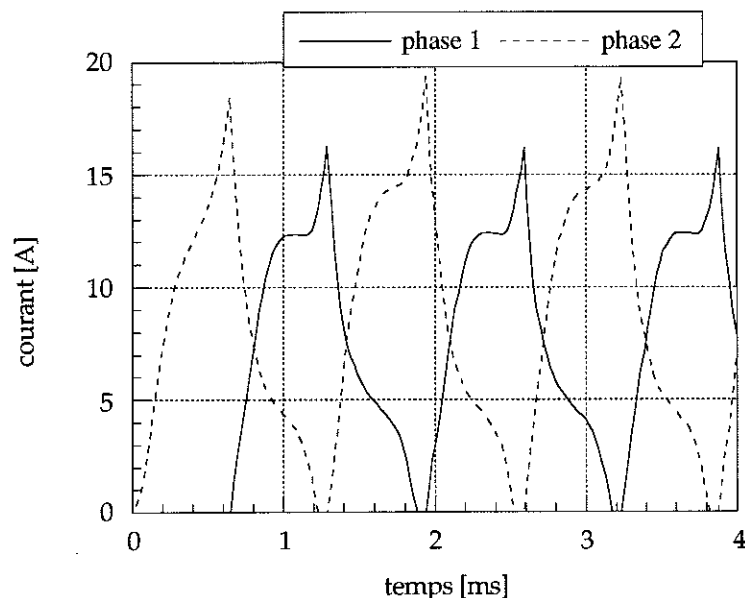


Fig. 7.20: Courbes des courants des phases obtenus par la simulation

La comparaison montre que l'allure qualitative des courants calculés correspond aux résultats expérimentaux. Cependant la précision des valeurs instantanées n'est pas suffisante. Il sera nécessaire d'affiner la discrétisation du modèle. D'autre part nous avons utilisé la formulation du potentiel vecteur continu aux interfaces air-fer (formulation standard). Ceci conduit à des sous-estimations locales de l'induction et donc à une mauvaise prise en compte de la saturation du matériau magnétique.

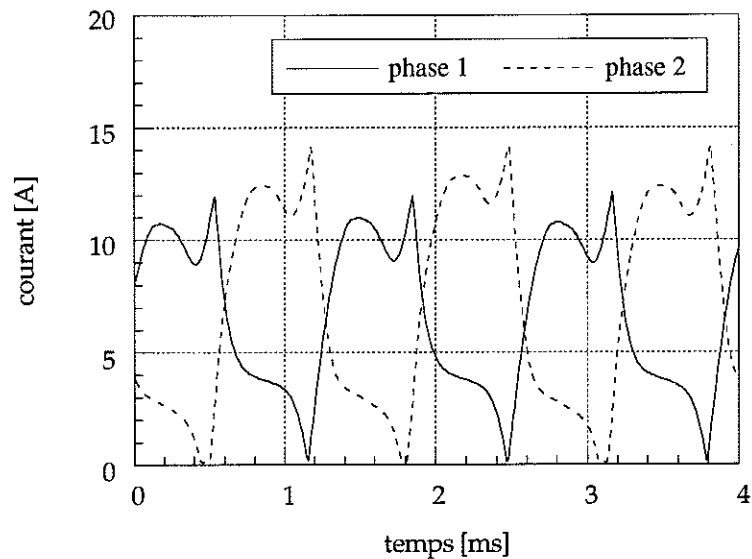


Fig. 7.21: Courbes des courants des phases mesurés

La courbe du couple instantané est présentée dans la figure 7.22. Nous observons les fortes oscillations du couple qui sont typique pour ce type de moteur.

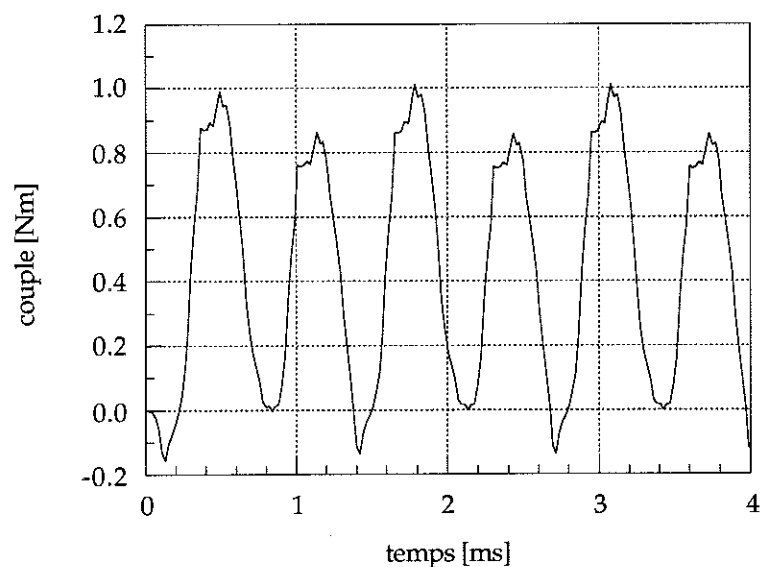


Fig. 7.22: Allure du couple instantané



## CONCLUSION GENERALE



Nous avons réalisé un logiciel de simulation des machines tournantes en trois dimensions avec leur circuit électrique d'alimentation. Les méthodes, que nous avons choisi, sont bien adaptées aux problèmes typiques des moteurs.

Nous avons sélectionné, parmi les méthodes mathématiques connues, un ensemble d'algorithmes adaptés à ce problème spécifique. En outre, nous avons élaboré de nouvelles méthodes de calcul nécessaire pour la réalisation des simulations avec les moyens informatiques existants.

En ce qui concerne la mise en équation du circuit électrique d'alimentation, nous utilisons la méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps. Ce potentiel est toujours continu dans le temps, et sa dérivée est également définie. Pour cette raison nous sommes capable de simuler les circuits électriques de commande de machines électriques.

La formulation utilisée pour le calcul du champ magnétique est basée sur le potentiel vecteur magnétique. Ceci assure la généralité de la méthode; des problèmes de connexité des régions ne sont pas posés.

Néanmoins, afin d'améliorer la précision des résultats de calculs, il nous semble important d'apporter des modifications à cette formulation. La composante normale du potentiel doit être libérée aux interfaces des régions air et fer. Ceci élimine les erreurs causées par l'utilisation de la jauge de Coulomb sous forme d'un terme de pénalité.

Le maillage des bobinages des moteurs électriques étant délicat, nous proposons un nouveau modèle pour la prise en compte des inducteurs. Nous les discrétisons en lignes de courant, ce qui permet de rendre la définition des bobines indépendante du maillage. Ce modèle est adapté à un couplage fort des équations magnétiques et électriques.

Les méthodes de calcul ont été validées sur des exemples simples, ainsi que sur des moteurs réels. Les discrétisations en éléments finis des exemples traités ont été imposées avant tous par les limites en mémoire et en performance des ordinateurs à notre disposition. Nous avons obtenu des résultats cohérents, et nous espérons, que l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs permettra à l'avenir une représentation fidèle des transitoires des machines électriques.

En effet, les temps de calculs sont encore prohibitifs. Les simulations des problèmes tridimensionnels en électromagnétisme avec un couplage d'analyse du circuit électrique ne permettent pas encore d'exploiter réellement le logiciel existant. Pour le développement de nouveaux prototypes, par exemple, un grand nombre de calculs est nécessaire. La précision requise nécessite des maillages plus affinés, et des pas de temps plus petits.

Nous espérons que, malgré tout, ce logiciel sera utilisé dans la conception industrielle, et que des améliorations y seront apportées.





## Références



- [1-1] J.A.M.Davidson, M.J.Balchin: "Three dimensional eddy current calculation using a network method", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-19, N°6, pp 2325-2328, November 1983
- [1-2] M.Iwahara, E.Miyazawa: "A numerical method for calculation of electromagnetic circuits using the tableau approach", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-19, N°6, pp 2457-2460, November 1983
- [1-3] Francis Piriou, Adel Rizek: "Calculation of saturated inductances for numerical simulation of synchronous machines", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-19, N°6, pp 2628-2631, November 1983
- [1-4] Y.Saito, S.Hayano, N.Tsuya: "Field computations by the complementary networks", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2280-2283, November 1985
- [1-5] A.Demenko: "Equivalent RC networks with mutual capacitances for electromagnetic field simulation of electrical machine transients", IEEE Transactions on Magnetism, vol. 28, N°2, pp 1406-1409, March 1992
- [1-6] L.Bompa, P.Schueller, J.C.Sabonnadière: "Analysis and synthesis of an electromagnet used for circuit breaker operation", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2464-2467, November 1985
- [1-7] D.Shen, G.Meunier, J.L.Coulomb, J.C.Sabonnadière: "Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2288-2291, November 1985
- [1-8] Gérard Meunier, Dazhong Shen, Jean-Louis Coulomb: "Modélisation of 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite elements method", IEEE Transactions on Magnetism, vol.24, N°1, pp 166-169, January 1988
- [1-9] A.Konrad: "Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady state skin effect problems", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-18, pp 284-292, March 1982
- [1-10] G.Meunier, J.L.Coulomb: "Solution of 3D eddy currents and electrical circuit combined problems", Eddy Current Seminar, Oxford, Mars 1986
- [1-11] B.Davat, H.Foch, B.Trannoy: "Analysis of a converter fed asynchronous machine by a global simulation method", Electric Machines and Electromechanics, vol.5, pp 201-210, 1980
- [1-12] M.V.K.Chari: "Finite element analysis of electrical machinery and devices", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-16, N°5, pp 1014-1019, 1980

- [1-13] E.G.Strangas, K.R.Theis: "Shaded pole motor design and evaluation using coupled field and circuit equations", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-21, N°5 pp 1880-1882, September 1985
- [1-14] B.Davat, Z.Ren, M.Lajoie-Mazenc: "Coupling of electrical machine field equations to power static converter equation", INTERMAG, Phoenix (USA), pp 14-18, April 1986
- [1-15] Elias G.Strangas: "Coupling the circuit equations to the non-linear time dependend field solution in inverter driven induction motors", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-21, N°6, pp 2408-2411, November 1985
- [1-16] D.Shen, G.Meunier: "Modeling of squirrel cage induction machines by the finite elements method combined with the circuits equations", Proceedings of the International Conference on Evolution and Modern Aspects of Induction Machines, Torino, pp 384-388, 8-11 July 1986
- [1-17] S.J.Salon, B.Istfan, J.C.Sabonnadière, G.Meunier: "Advances in numerical modeling techniques applicable to induction machinery", Proceeding Annexes of the International Conference on Evolution and Modern Aspects of Induction Machines, Torino, pp 1-4, 8-11 July 1986
- [1-18] J.Luomi, A.Niemenmaa, A.Arkkio: "On the use of effective reluctivities in magnetic field analysis of induction motors fed from a sinusoidal voltage source", Proceedings of the International Conference on Electrical Machines, München, 8.-10. September 1986, Pt.2, pp 706-709, 1986
- [1-19] A.Arkkio: "Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations", Helsinki, Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series N°59, p 97, 1987
- [1-20] S.J.Salon, R.Palma, C.C.Hwang: "Dynamic modeling of an induction motor connected to an adjustable speed drive", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-25, N°4, pp 3061-3063, 1989
- [1-21] Tang Renyuan, Xu Guangren, Tian Lijian, Zhao Danqun: "Calculation of end region magnetic field and circulating losses for turbo-generators using a coupled field and circuit equations method", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, pp 497-500, March 1990
- [1-22] A.Arkkio: "Finite element analysis of cage inductions motors fed by static frequency converters", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, pp 551-554, March 1990
- [1-23] F.Hecht, A.Marroco: "A finite element simulation of an alternator connected to a non linear external circuit", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, pp 964-967, March 1990
- [1-24] Francis Piriou, Adel Razek: "A model for coupled magnetic-electric circuits in electric machines with skewed slots", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, pp 1096-1100, March 1990

- [1-25] C.N.Ashtiani, D.A.Lowther: "The use of finite elements in the simulation of the steady state operation of a synchronous generator with a known terminal loading condition", IEEE Transaction on Magnetics, vol.MAG-19, N°6, pp 2381-2384, November 1983
- [1-26] Tang Renyuan, Li Ge, Sun Changzhi: "The application of the finite element method to the design of REPM synchronous generators", IEEE Transaction on Magnetics, vol. MAG-21, N°6, pp 2472-2475, November 1985
- [1-27] Francis Piriou, Yvan Lefèvre, Bernard Davat: "Couplage magnétique - électrique pour la modélisation des machines électriques et de leur alimentation", Texte des Communications des journées d'études: "Modélisation numérique 3-D dans les systèmes électromagnétiques", Ecole Supérieure d'Electricité Gif-sur-Yvette, pp 11-18, 20 et 21 Mars 1991
- [1-28] S.Williamson, M.C.Begg: "Analysis of cage induction motors - A combined fields and circuits approach", IEEE Transactions on Magnetics, vol.MAG-21, N°6, pp 2396-2399, November 1985
- [1-29] A.A Arkadan, B.W.Kielgas: "The coupled problem in switched reluctance motor drive systems during fault conditions", Proceedings of Compumag, Miami, Nov.1993
- [2-1] Louis Weinberg: "Network analysis and synthesis", McGraw-Hill Book Company Inc., New York, San Francisco, Toronto, London, 1962
- [2-2] F.Mesa "Méthodes d'études des circuits électriques", Eyrolles, pp 189-228, 1985
- [2-3] Pierre Joubert: "Circuit électriques et systèmes", Technique et Documentation, Paris, 1986
- [2-4] Adrian Loinovici: "Computer-aided analysis of active circuits", Marcel Dekker Inc., New York & Basel, 1990
- [2-5] J.R. Brauer, B.E. MacNeal, L.A. Larkin, V.D Overbye: "New method of modeling electronic circuits coupled with 3D electromagnetic finite element models", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, N°5, pp 4085-4088, 1991
- [2-6] Patrick Lombard: "Couplage des équations électriques et magnétiques", rapport de thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, septembre 1992
- [2-7] Marc Jarnieux: "Modélisation des lanceurs électromagnétiques par la méthode des éléments finis", rapport de thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, mars 1994
- [2-8] Stéphane Brisset, Pascal Brochet: "Finite element model for an electronic-magnetic-mechanical coupled simulation of a switched

- reluctance motor start", Proceedings of CEFC, Aix-Les-Bains, July 1994
- [3-1] Jean Louis Coulomb: "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis", Thèse d'état, INPG, 1981
- [3-2] O.C. Zienkiewicz: "The finite element method in engineering science", McGraw-Hill, New York, 1st edition 1967, 3rd edition 1977
- [3-3] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot: "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A. Editeur, 1ere édition 1891, 2eme édition 1984
- [3-4] K.Preis, I. Bardi, O.Bíro, C.Magele, W. Renhart, K. R. Richter: "Numerical analysis of 3D magnetostatic fields", IEEE Transactions on Magnetics, vol.27, N°5, pp 3798-3803, September 1991
- [3-5] O.Bíro, K.Preis: "Finite element analysis of 3-D eddy currents", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26 N°2, pp 418-423, March 1990
- [3-6] M.V.K.Chari, A.Konrad, M.A.Palmo, J.D'Angelo: "Three-Dimensional Vector Potential Analysis for Machine Field Problems", IEEE Transactions on Magnetics, vol.MAG-18, N°2, pp 436-446, March 1982
- [3-7] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, A.Ahagon: "3-D Finite Element Method for Analyzing Magnetic Field in Electric Machines Excited from Voltage Sources", IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, N°6, pp 2582-2584, November 1988
- [3-8] T.Dreher, M.Le-Roux, G.Meunier: "A 3D Line Current Model of Voltage Driven Coils", Proceedings of COMPUMAG, Miami, November 1-5, 1993
- [3-9] T.W.Preston, A.B.J.Reece: "Solution of 3-dimensional current problems: the T- $\Omega$  method", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-18, N°2, pp 486-491, March 1982
- [3-10] W.Renhardt, H.Stögner, K.Preis: "Calculation of 3D eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential", IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, N°1, pp 122-125, January 1988
- [3-11] Shaoming Zheng, Renhong Wang: "A new method of three dimensional magnetostatic fields, using a scalar potential", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-21, N°6, pp 2177-2180, November 1985
- [3-12] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, Y.Okada: "Improvements of the T- $\Omega$  method for 3-D eddy current analysis", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, N°1, pp 94-97, January 1988

- [3-13] P.J.Leonard, D.Rodger: "Modeling External Energy Sources in Massive Conductor Circuits Using the  $A\psi$  Formulation with a 'Re-Modified' Vector Potential", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, N°5, pp 2370-2372, September 1990
- [3-14] P.J.Leonard, R.J.Hill-Cottingham, D.Rodger:"3D Finite Element Models and External Circuits Using the  $A\psi$  Scheme with Cuts", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, N°5, pp 3220-3223, September 1994
- [4-1] Stéphane Brisset, Pascal Brochet: "Finite element model for an electronic-magnetic-mechanical coupled simulation of a switched reluctance motor start", Proceedings of CEFC, Aix-Les-Bains, July 1994
- [4-2] Patrick Lombard: "Couplage des équations électriques et magnétiques", rapport de thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, septembre 1992
- [4-3] Marc Jarnieux: "Modélisation des lanceurs électromagnétiques par la méthode des éléments finis", rapport de thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, mars 1994
- [4-4] T.Dreher, G.Meunier: "3D Line Current Model of Coils and External Circuits", Proceedings of CEFC, Aix-les-Bains, France, July 1994
- [5-1] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot: "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A. Editeur, 1ere édition 1991, 2eme édition 1984
- [5-2] O.C. Zienkiewicz: "The finite element method in engineering science", McGraw-Hill, New York, 1st edition 1967, 3rd edition 1977
- [6-1] O.Santana, J.P.Iafrate, J.L.Coulomb: "A Data Structure For a Finite Element Package", IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, N°1, pp 350-353, January 1988
- [6-2] J.R. Brauer, B.E. MacNeal, L.A. Larkin, V.D Overbye: "New method of modeling electronic circuits coupled with 3D electromagnetic finite element models", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 5, pp 4085-4088, 1991
- [6-3] Adrian Loinovici: "Computer-aided analysis of active circuits", Marcel Dekker Inc., New York & Basel, 1990
- [6-4] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara: "Efficient Solving Techniques of Matrix Equations for Finite Element Analysis of Eddy Currents", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, N°1, pp 170-173, 1988



- [6-5] T.A.Manteuffel: "The Shifted Incomplete Cholesky Factorization", SAND78-8226, May 1978
  
- [6-6] Francis Piriou, Adel Razek: "Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices", IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, N°1, pp 274-277, January 1988
  
- [6-7] Rémy Perrin-Bit: "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", rapport de thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, octobre 1994
  
- [A-1] T. Nakata, N. Takahashi, Suharotono, H. Morishige: "Proposal of a model for verification of softwares for 3-D static force calculation", Verification of Softwares for 3-D Electromagnetic field Analysis (Editors: Z. Cheng, K. Jiang, N. Takahashi), pp.139-147, 1992, International Academic Publishers
  
- [A-2] N.Takahashi, T.Nakata, Suhartono, M.Morishige: "Investigation of a Model to Verify Software for 3-D Static Force Calculation", IEEE Transactions on Magnetics, vol.30, N°5, pp 3483-3486, January 1988
  
- [A-3] T.Nakata, N.Takahashi, M.Nakano, H.Morishige, K.Matsubara: "Improvement of Measurement of 3-D Static Force Problem (Problem 20)", Proceedings of int. TEAM workshop, Miami, November 1993
  
- [A-4] N.Takahashi, T.Nakata, H.Morishige: "Summary of Results for Problem 20 (3-D Static Force Problem)", Proceedings of int. TEAM workshop, Miami, November 1993
  
- [A-5] J.L.Coulomb: "A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-19, N°6, pp 2514-2519, November 1983
  
- [A-6] T.Dreher, J.L.Coulomb, T.Nakata, N.Takahashi: "Magnetic Field and Force Computation Using a Nodal Vector Potential", Proceedings of int. TEAM workshop, Miami, November 1993

# Bibliographie



- [1] R.Albanese, R.Martone, G.Miano, G.Rubinacci: "A T formulation for 3D finite element eddy current computation", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2299-2302, November 1985
- [2] G.Asche, Ph.K.Sattler: "Numerical calculation of the dynamic behaviour of electromagnetic actuators", IEEE Transactions on Magnetism, vol.26, N°2, pp 979-982, March 1990
- [3] P.Belforte, M.Chiampi, M.Tartaglia: "A finite element computation procedure for electromagnetic fields under different supply conditions", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2284-2287, November 1985
- [4] C.S.Biddlecombe, E.A.Heighway, J.Simkin, C.W.Trowbridge: "Methods for eddy current computation in three dimensions", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-18, N°2, pp 492-497, March 1982
- [5] O.Bíro: "Use of a two component vector potential for 3-D eddy current calculations", IEEE Transactions on Magnetism, vol.24, N°1, pp 102-105, January 1988
- [6] O.Bíro, K.Preis, W.Renhart, K.R.Richter, G.Vrisk: "Performance of different vector potential formulations in solving multiply connected 3-D eddy current problems", IEEE Transaction on Magnetism, vol.26, N°2, pp 438-441, March 1990
- [7] L.Bompa, P.Schueller, J.C.Sabonnadière: "Analysis and synthesis of an electromagnet used for circuit breaker operation", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-21, N°6, pp 2464-2467, November 1985
- [8] G.Carron de la Morinais: "Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en trois dimensions", thèse Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, février 1990
- [9] M.V.K.Chari, A.Konrad, M.A.Palmo, J.D'Angelo: "Three dimensional vector potential analysis for machine field problems", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-18, N°2, pp 436-446, March 1982
- [10] B.Davat, M.Lajoie-Mazenc, J.Hector: "Magnetic structure and feeding circuit modelling", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-19, N°6, pp 2471-2473, November 1983
- [11] T.Dreher, G.Meunier: "3D Modelling of Electromagnetic Coil Fed by Alternating Voltage Sources", IEEE Transactions on Magnetism, vol.20, N°2, March 1993
- [12] P.Faucheux: "Couplage d'équations électriques dans FLUXLAB", rapport de D.E.A, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 1989

- [13] H.Haas, F.Schmoellebeck: "A finite-element method for transient skin effect in 2-D loaded multiconductor systems", IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, N°1, pp 174-177, January 1988
- [14] Y.Jagut: "Méthode de résolution des équations du champ magnétodynamique", rapport de D.E.A, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 1988
- [15] Wang Jiabing, Tong Baoqian: "Calculation of 3D eddy current problems using a modified T- $\Omega$  method", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, N°1, pp 114-117, January 1988
- [16] A.Kladas, F.Piriou, A.Razek: "Résolution simultanée des équations magnétiques et électriques dans les systèmes électromagnétiques", Colloque S.E.E à SUPELEC, Gif-sur Yvette le 13 Mars 1987, pp 63-69, 1987
- [17] H.Lindfors, J.Luomi: "A general method for the numerical solution of coupled magnetic field and circuit equations", Proceedings of the International Conference on Electrical Machines, pp 141-146, 1988
- [18] P.Lombard, G.Meunier: "A General Method for Electric and Magnetic Coupled Problems in 2D and Magnetodynamic Domain", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, March 1990
- [19] P.Lombard, G.Meunier: "Couplage des équations électriques et magnétiques", Journal de Physique III, pp 397-412, mars 1993
- [20] W.Long, F.Piriou, A.Razek: "An Adapted Cholesky Decomposition Method for the Solution of Coupled Magnetic-Electric Equations", COMPEL, vol.8, N°4, pp 203-208, 1989
- [21] L.Lu, S.Yamada, K.Bessho: "Time-periodic field analysis with saturation and hysteresis characteristics by harmonic balance finite element method", IEEE Transactions on Magnetics, vol.26, N°2, pp 995-998, March 1990
- [22] Y.Maréchal: "Modélisation des circuits électriques par le logiciel FLUXLAB", rapport de D.E.A, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 1987
- [23] J.A.McBain: "Magnetic field simulation from a voltage source", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-19, N°5, pp 2180-2182, 1983
- [24] T.Nakata, N.Takahashi: "Direct finite element analysis of flux and current distributions under specified conditions", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-18, N°2, pp 325-330, March 1982
- [25] T.Nakata, N.Takahashi: "Numerical analysis of transients magnetic field in a capacitor discharge impulse magnetizer", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-22, N°5, pp 526-528, 1986
- [26] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara: "Efficient solving techniques of matrix equations for finite element analysis of eddy

- currents", IEEE Transactions on Magnetism, vol.24, N°1, pp 170-173, January 1988
- [27] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara: "Physical meaning of grad(V) in eddy current analysis using magnetic vector potentials", IEEE Transactions on Magnetism, vol.24, N°1, pp 178-181, January 1988
- [28] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, A.Ahagon: "3D Non-linear Eddy Current Analysis Using the Time-periodic Finite Element Method", IEEE Transactions on Magnetism, vol.25, N°5, pp 4150-4152, September 1989
- [29] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, K.Muramatsu: "Investigation of effectiveness of various methods with different unknown variables for 3-D eddy current analysis", IEEE Transactions on Magnetism, vol.26, N°2, pp 442-445, March 1990
- [30] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, H.Niinobe, K.Misawa: "Finite element analysis of induced currents in axisymmetric multi-conductors connected in parallel to voltage sources", IEEE Transactions on Magnetism, vol.26, N°2, pp 968-970, March 1990
- [31] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, K.Muramatsu, H.Ohashi, H.C.Zhu: "Practical Analysis of 3-D Dynamic Nonlinear Magnetic Field Using Time-Periodic Finite Element Method", Proceedings of CEFC, Aix-les-Bains, France, July 5-7, 1994
- [32] T.W.Nehl, A.M.Pawlak, N.Mikhaeils Boules: "ANTIC 85: A general purpose finite element package for computer aided design and analysis of electromagnetic devices", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-24, N°1, pp 358-361, January 1988
- [33] A.M.Pawlak, T.W.Nehl: "Transient finite element modeling of solenoid actuators: The coupled power electronics, mechanical and magnetic field problem", IEEE Transactions on Magnetism, vol.24, N°1, pp 270-273, January 1988
- [34] R.Perrin-Bit, J.L.Coulomb: "A Three Dimensional Finite Element Mesh Connection for Problems Involving Movement", Proceedings of CEFC, Aix-les-Bains, France, July 5-7, 1994
- [35] F.Piriou, A.Razek: "Simulation of electromagnetic systems by coupling of magnetic and electric equations", Mathematics and Computer in Simulation, N°31, pp 189-194, 1989
- [36] F.Piriou, A.Razek: "Modèle non-linéaire 3D magnéto-statique - équations de circuit", Texte des Communications des journées d'études: "Modélisation numérique 3-D dans les systèmes électromagnétique", Ecole Supérieure d'Electricité Gif-sur-Yvette, pp 65-70, 20 et 21 Mars 1991
- [37] Philip G.Potter, Gregory K.Cambrell: "A combined finite element and loop analysis for nonlineary interacting magnetic fields and circuits", IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-19, N°6, pp 2352-2355, November 1983

- [38] K.Preis "A contribution to eddy currents calculation on plane and axisymmetric multiconductor systems", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-19, N°6, pp 2397-2400, November 1983
- [39] Z.Ren, A.Razek: "A Strong Coupled Model for Analyzing Dynamic Behaviors of Non-linear Electromechanical Systems", IEEE Transactions on Magnetics, vol.30, N°5, pp 3252-3255, September 1994
- [40] Z.Ren: "Comparison of Different Force Calculation Methods in 3D Finite Element Modelling", IEEE Transactions on Magnetics, vol.30, N°5, pp 34712-3474, September 1994
- [41] J.Weiss, V.K.Garg: "One step finite element formulation of skin effect problems in multiconductor systems with rotational symmetry", IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-21, N°6, pp 2313-2316, November 1985
- [42] O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, N.W. Hines: "A unified set of single step algorithms", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.20, pp. 1529-1552, 1984

# ANNEXE

Calcul du problem TEAM #20





## Présentation du problème

Le problème #20 de l'organisation TEAM est un problème magnéto-statique standardisé afin de valider les logiciels de calcul du champ magnétique et les méthodes du calcul de la force électromagnétique. Le dispositif est composé d'un noyau fixe, d'un inducteur et d'un noyau mobile. La définition exacte des dimensions géométriques et des propriétés des matériaux sont données dans [A-1]. La tâche consiste à calculer la distribution du champ magnétique ainsi que la force résultante pour des intensités de courant données. Les auteurs du problème ont mesuré avec précision la force exercée par le noyau. De plus ils ont déterminé le champ magnétique dans certains points de l'entrefer et le flux totale traversant la culasse ainsi que le noyau. La symétrie du problème permet de réduire le modèle à un quart de la géométrie totale. La figure A.1 présente le modèle géométrique.

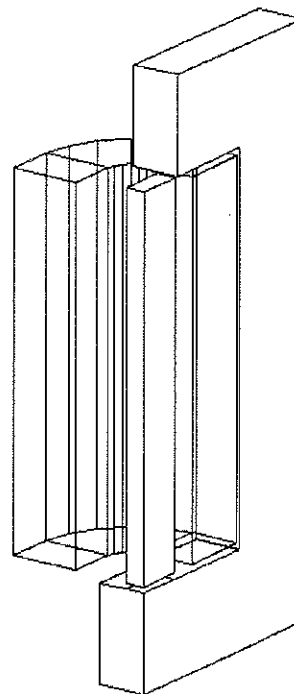


Fig. A.1 : Modèle géométrique du problème 20

## Méthodes de calcul et analyse des erreurs

Nous avons traité ce problème afin de valider la précision du calcul du champ magnétique en utilisant la formulation du potentiel vecteur. Deux méthodes du calcul de la force électromagnétique ont été appliquées: la méthode des travaux virtuels et la méthode du tenseur de Maxwell. La discrétisation en éléments tétraédriques a été créée par le mailleur automatique du logiciel FLUX3D. Les parties massives sont entourées par une boîte d'air et une boîte de transformation de l'infini. La discrétisation comporte 15531 éléments nodaux avec une interpolation du second ordre. Le nombre total de nœuds est 23436. La figure A.2 montre les éléments surfaciques des parties massives. La densité des mailles est localement augmentée afin de tenir compte des effets de saturation locale. Deux agrandissements du maillage sont présentés dans la figure A.3.

Dans un premier temps nous avons utilisé la formulation standard du potentiel vecteur de FLUX3D (voir chapitre III). Cette formulation exige la prise en compte de la géométrie de l'inducteur afin de pouvoir intégrer la densité de courant source. La précision des résultats du champ ainsi obtenus était insuffisante. Apparemment les valeurs de l'induction dans le noyau mobile étaient fortement perturbées. Une exploitation des valeurs calculées pour la divergence du potentiel nous a montré la

cause des erreurs. L'utilisation de la jauge de Coulomb dans le contexte des éléments nodaux pose des problèmes aux interfaces air - fer.

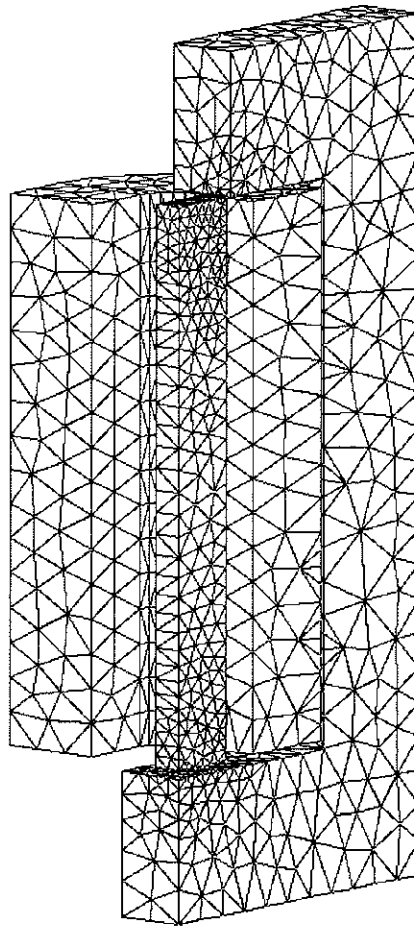


Fig. A.2 : Discrétisation des parties massives

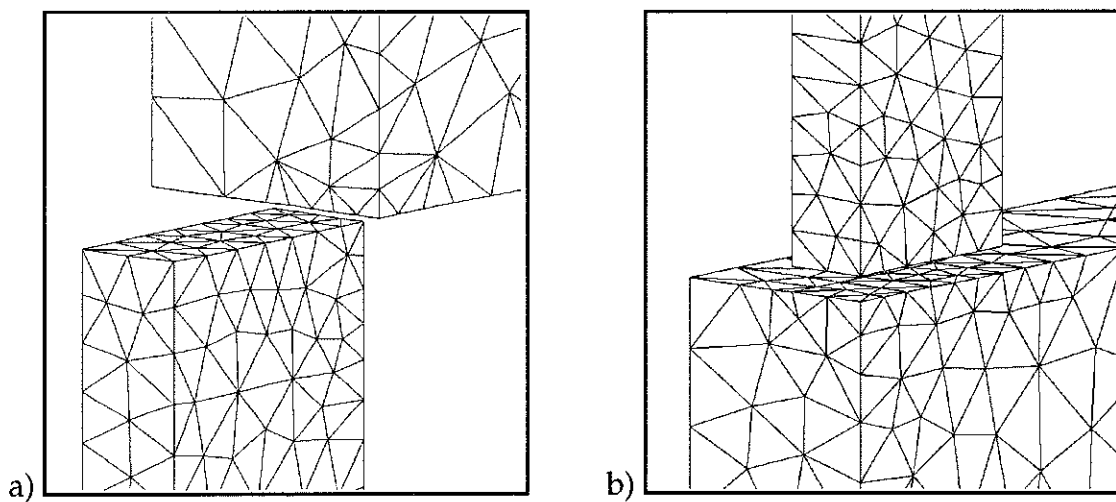


Fig. A.3 : Agrandissements du maillage de la partie supérieure du noyau mobile (a) et de l'entrefer inférieur (b)

Afin de mettre en évidence l'influence de la jauge sur la répartition de l'induction magnétique aux interfaces air - fer nous avons défini un plan de coupe au milieu du noyau (figure A.4). Le champ  $B$  doit être canalisé dans ce noyau en direction  $z$ . La perméabilité du fer étant grande par rapport à celle de l'air, nous nous attendons à un saut de l'induction sur cette interface. Or les résultats montrent une forte chute de l'induction sur l'arête du noyau, comme le montre le relief de la figure A.5a. Dans le contexte des éléments nodaux, la composante normale de  $A$  n'a pu fournir ce saut de l'induction.

Le problème a été résolu en ajoutant des degrés de liberté supplémentaires. Plus particulièrement nous avons libéré les composantes normales du potentiel dans le fer et dans l'air. Pour cela nous avons utilisé des éléments surfaciques à double couche de nœuds. Les mêmes numéros de variables ont été attribués aux composantes tangentielles de ces nœuds, ce qui assure leur continuité. Ceci n'est que possible si l'interface en question correspond à un plan principal.

Maintenant nous constatons que la canalisation du champ magnétique est représentée d'une manière correcte. Le niveau de l'induction est parfaitement homogène sur la section du noyau.

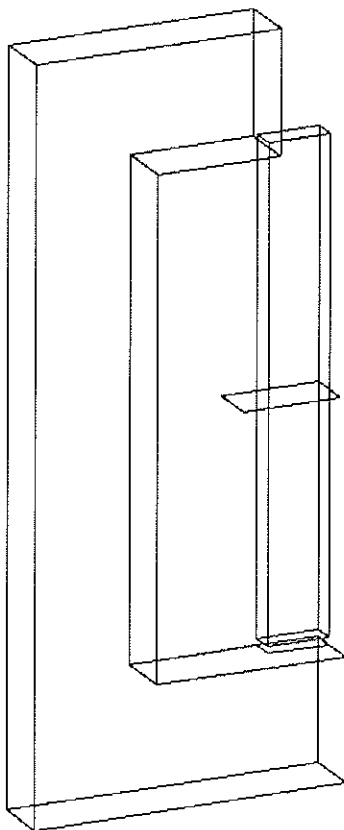
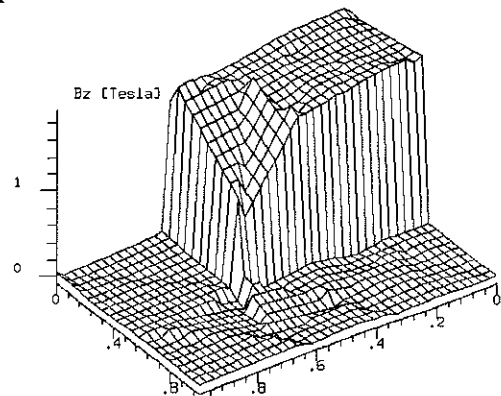


Fig. A.4 : Plan de coupe au milieu du noyau

a) potentiel vecteur continu



b) composante normale du potentiel libérée

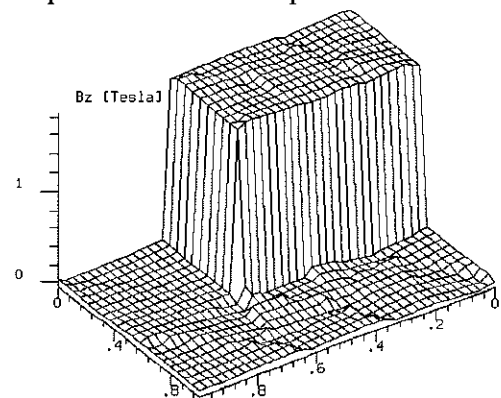
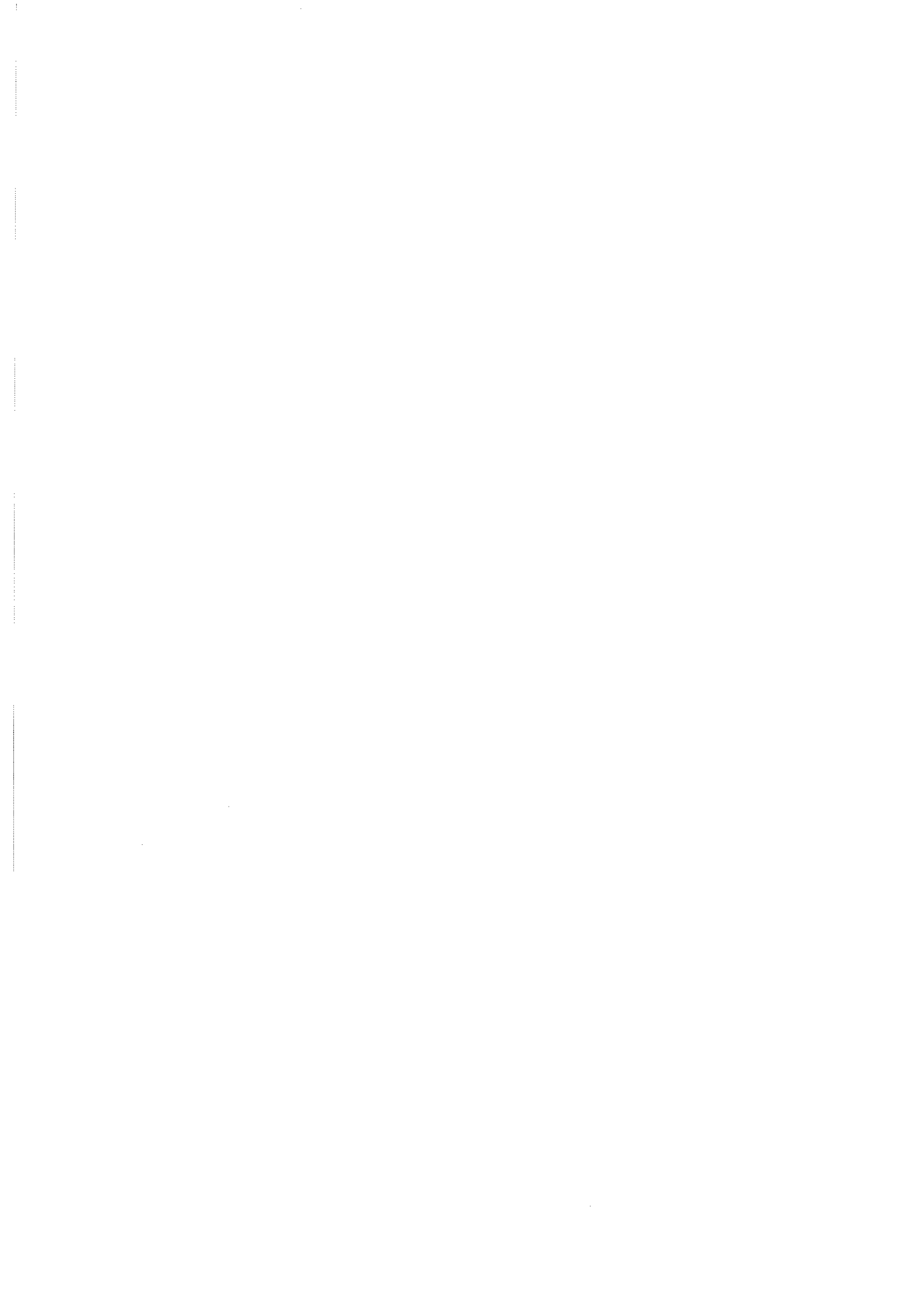


Fig. A.5 : Relief de la composante  $B_z$

Il nous semble d'être important de réaliser la libération de la composante normale du potentiel aux interfaces air - fer dans le contexte des éléments nodaux. L'utilisation d'un potentiel continu introduit non seulement des erreurs de calcul du champ magnétique mais aussi le comportement non linéaire du matériau n'est pas pris en



compte d'une manière correcte. La comparaison de la carte de l'induction obtenue à partir d'un potentiel continu et le résultat du calcul avec un potentiel discontinu montre bien l'influence de la jauge par terme de pénalité sur la distribution du champ magnétique. Dans le premier cas le champ est 'repoussé' des arêtes des guides de flux. Dans le noyau, où la canalisation de  $B$  est très importante cela conduit à de fortes oscillations du résultat. La méthode de la libération de  $A_n$  améliore visiblement la qualité de la solution. La distribution du flux est devenue beaucoup plus homogène dans les parties fer, donc le résultat a un sens physique.

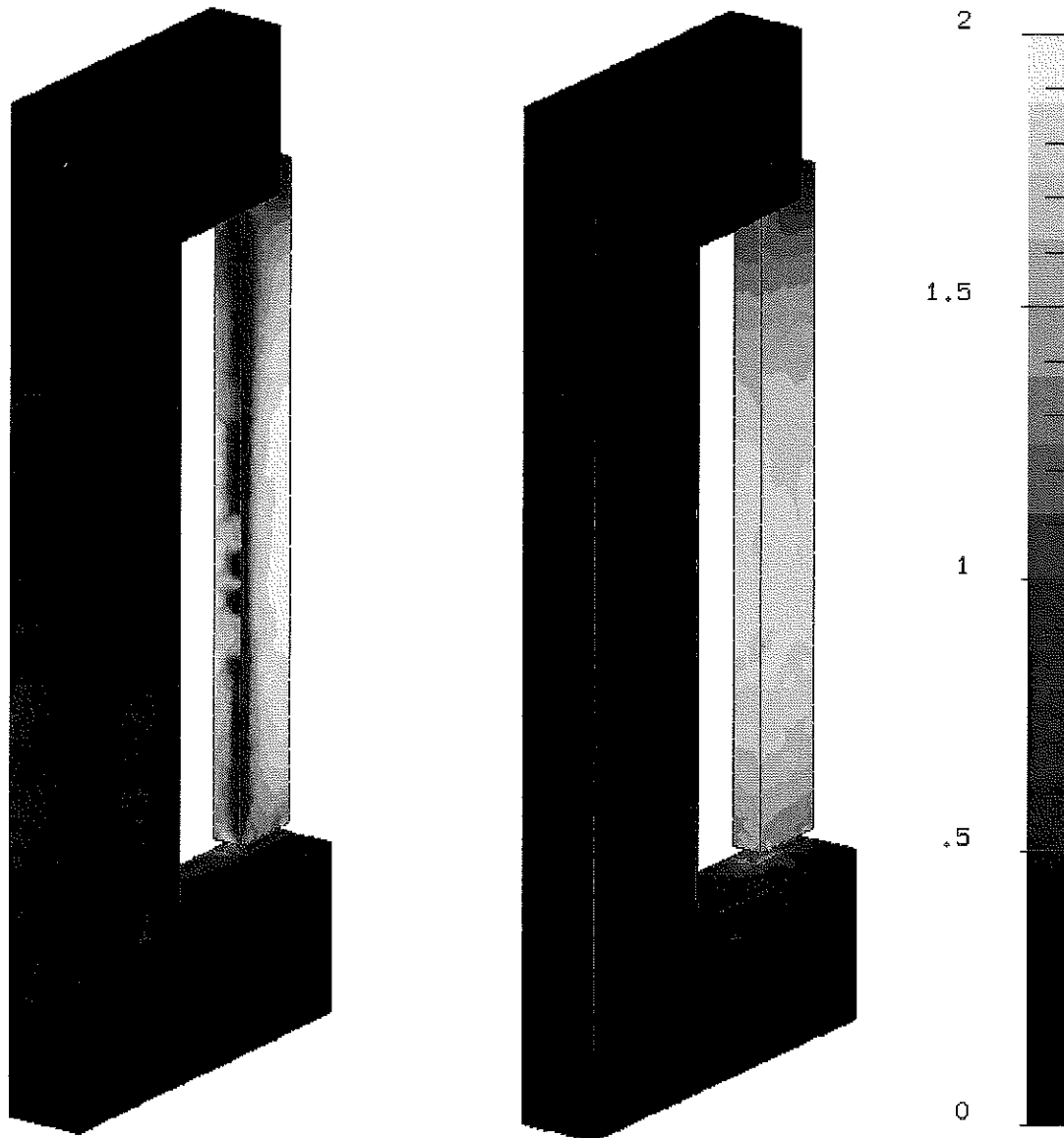
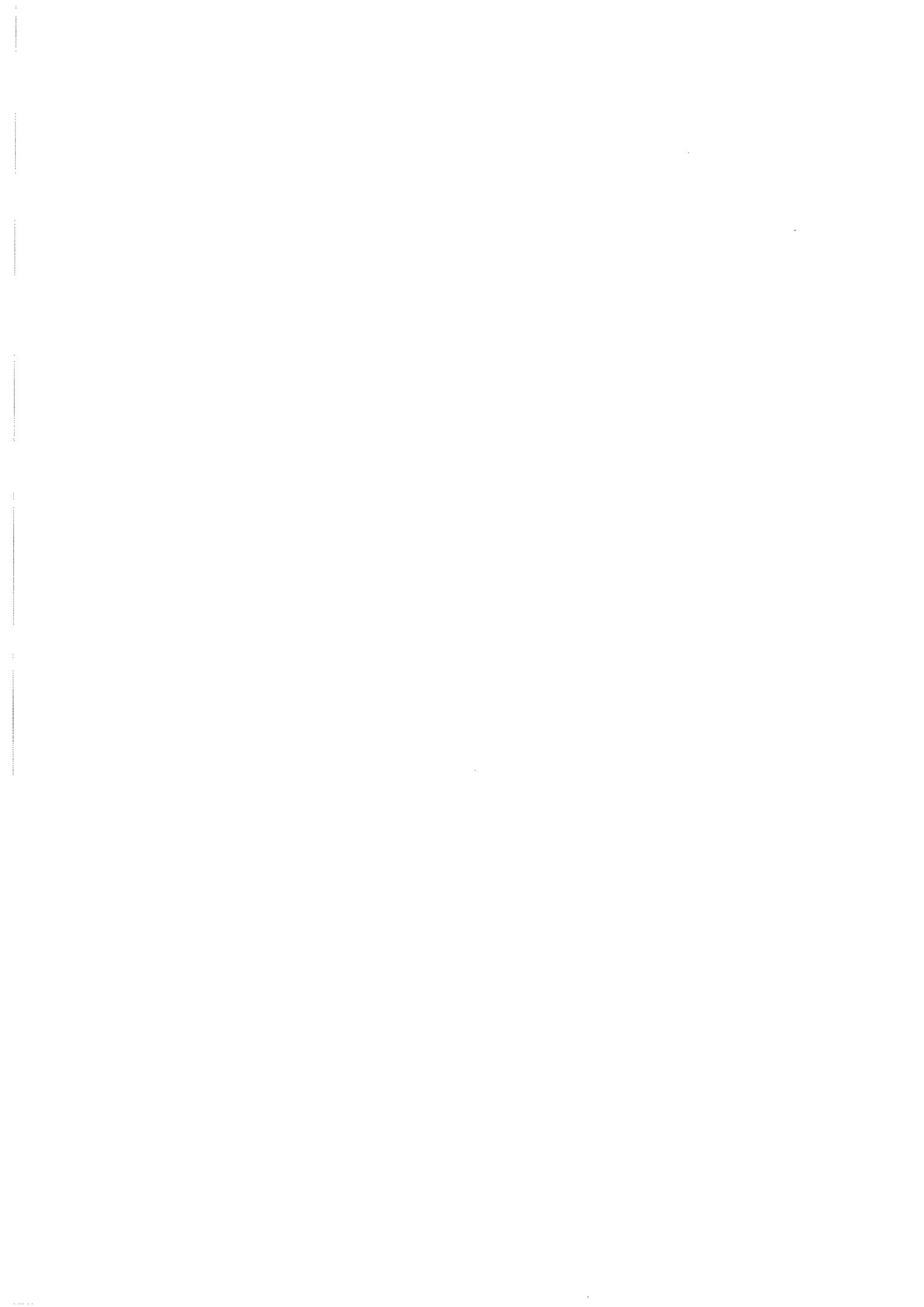


Fig. A.6 : Carte de l'induction magnétique calculée à partir d'un potentiel vecteur continu (gauche) et avec la composante normale discontinue (droite)

Dans une seconde étape nous avons comparé les résultats pour la force électromagnétique avec les valeurs mesurées. Nous avons constaté que la précision n'était toujours pas suffisante (10 à 20% d'écart). Une augmentation de la finesse de la discrétisation aux endroits sensibles n'apporte pas la solution. Une vérification de la



qualité du maillage (déformation des éléments par rapport à l'élément de référence) a montré que la distance très faible entre la bobine et la culasse contribue à la création d'éléments de mauvaise précision à cet endroit. Bien que cette zone ne soit pas considérée comme sensible, ces éléments ont une influence non négligeable à la précision globale du calcul. Une amélioration peut être apportée en ajoutant beaucoup d'éléments dans cette couche d'air. Une autre solution serait d'utiliser un maillage réglé sur la base d'éléments hexaédriques. La qualité de ce type d'élément est moins liée au rapport entre les dimensions dans les trois axes. Par contre un maillage localement dense se répercute dans les autres régions où on souhaite réduire le nombre d'élément.

La qualité du maillage libre peut être amélioré en utilisant un potentiel réduit (potentiel scalaire ou potentiel vecteur réduit). Dans ce cas la discrétisation de la bobine n'est pas nécessaire, car le champ magnétique  $H_0$  créé par la bobine est pris en compte dans toute la région d'air. Une comparaison avec des résultats obtenues par ces types de formulation nous a montré l'importance d'assurer une bonne qualité globale du maillage.

Dans le but d'améliorer la qualité du maillage sans une augmentation importante des inconnues du système d'équations nous avons testé le modèle des courants linéiques sur le problème #20. Par le fait que la bobine n'est pas introduit dans la géométrie, le procédé de la création du maillage est considérablement simplifiée. Nous pouvons créer un maillage plus 'détendu', et les éléments de meilleure précision peuvent être créés. La discrétisation de la bobine en lignes de courant est assurée ensuite par le calcul des intersections entre les lignes et les facettes des éléments. Si la discrétisation en spires est suffisamment dense par rapport à la densité des mailles volumiques, la densité de courant homogène est prise en compte d'une façon correcte.

L'utilisation de la nouvelle méthode nous a permis non seulement de résoudre correctement le problème posé (en utilisant le potentiel vecteur), mais ce calcul représente une autre validation de la méthode des lignes de courant. Nous présentons par la suite les résultats obtenus pour le champ dans des différents points de la géométrie, pour les flux totaux ainsi que pour la force électromagnétique. Ces valeurs sont comparées avec les mesures des auteurs du problème, ce qui montre la bonne précision du calcul.

La distribution du champ magnétique est calculée pour quatre intensités de courant: 1000, 3000, 4500 et 5000 Ampère-tours. Les paramètres à déterminer à partir de chaque résultat sont présentés dans la figure A.7. La composante  $B_z$  est demandée aux points  $P_1$  et  $P_2$  dans l'entrefer inférieur. La figure A.8 les compare avec les mesures respectives. La densité moyenne du flux traversant les plans de coupe de la culasse ( $\alpha$ - $\beta$ ) et du noyau ( $\gamma$ - $\delta$ ) sont comparées avec les résultats expérimentaux dans la figure A.9. Les auteurs du problème ont défini deux chemins à proximité de l'entrefer supérieur (a-b et c-d) le long desquels ils ont mesuré la composante  $B_x$  de l'induction. Nous présentons les résultats à partir de nos calculs dans les figures A.10 et A.11. La comparaison des estimations des valeurs du flux total à travers la culasse et le noyau avec les mesures montre que la précision globale de la résolution est très bien. Cependant, lorsqu'on regarde les valeurs locales on observe des oscillations de la solution. Ceci est très bien visible dans les courbes de  $B_x$  le long des chemins a-b et c-d.



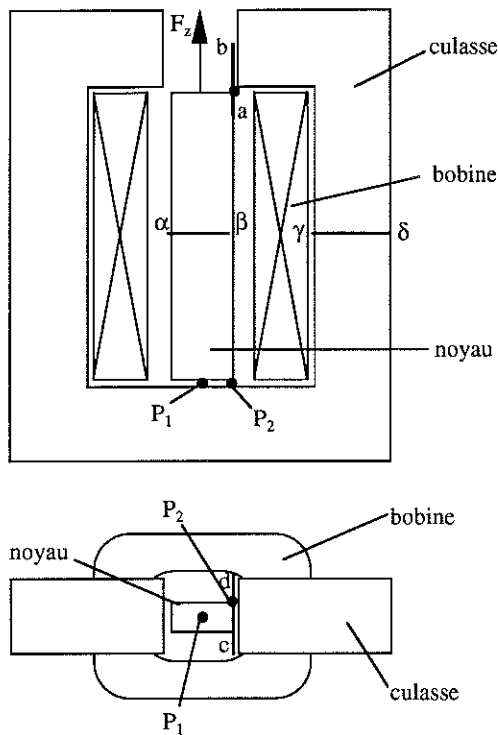


Fig. A.7 : Emplacement des points de résultat

L'erreur du calcul de la composante  $B_z$  au point  $P_2$  s'explique également par le fait que la position de ce point dans un élément fini est arbitraire. Le point  $P_1$  a une position privilégiée, car il se trouve à l'intersection de deux plans de symétrie. Par ce fait les valeurs calculées sont en parfaite concordance avec les résultats expérimentaux.

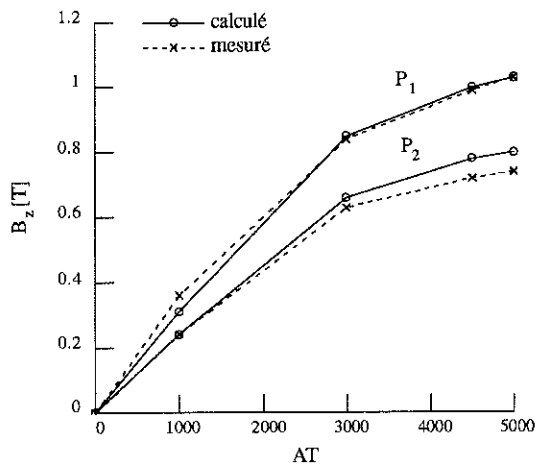


Fig. A.8 : Composante  $B_z$  aux points  $P_1$  et  $P_2$

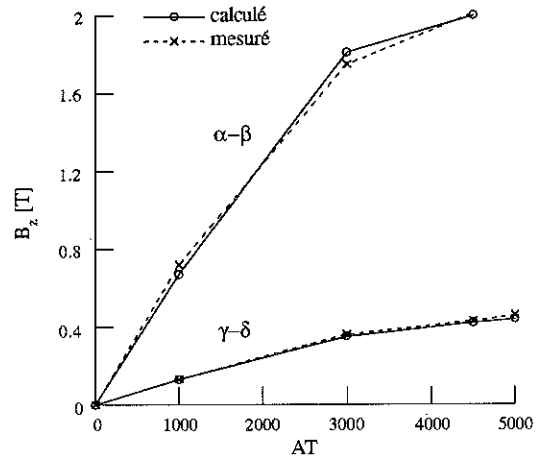


Fig. A.9: Moyenne de  $B_z$  aux plans  $(\alpha-\beta)$  et  $(\gamma-\delta)$

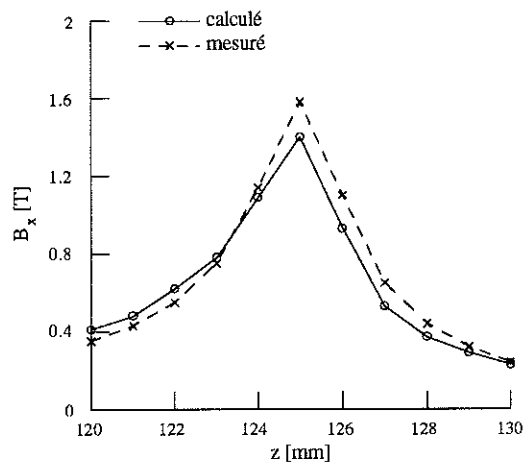


Fig. A.10 : Valeur  $B_x$  le long du chemin a-b (5000 AT)

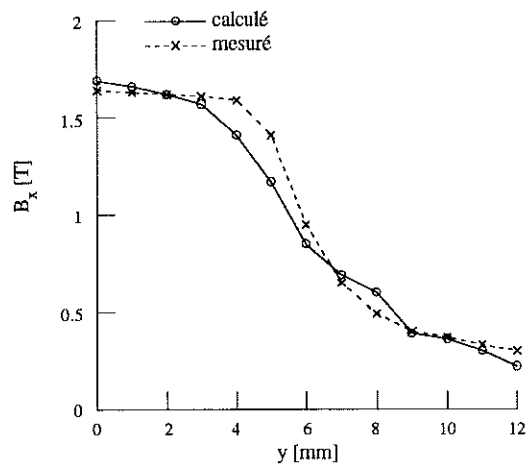


Fig. A.11 : Valeur  $B_x$  le long du chemin c-d (5000 AT)

## Calcul de la force électromagnétique

Le problème #20 est avant tout destiné à valider les différentes méthodes du calcul de la force électromagnétique. Nous avons utilisé deux méthodes: la méthode des travaux virtuels et le tenseur de Maxwell.

### *Calcul de la force à partir du tenseur de Maxwell:*

Le tenseur de Maxwell est défini par:

$$[\mathbf{T}] = (T_{ij}) \quad i = 1 \dots 3, \quad j = 1 \dots 3$$

avec:

$$T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta=0$  pour  $i \neq j$ ;  $\delta=1$  pour  $i=j$ ).  
Dans un milieu isotrope et uniforme ( $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ ) nous avons:

$$T_{ij} = \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mu H^2$$

ce qui donne:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \mu(H_x^2 - H^2/2) & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu(H_y^2 - H^2/2) & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu(H_z^2 - H^2/2) \end{bmatrix}$$

La densité de force  $\mathbf{f}$  peut s'obtenir à partir de

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dv} = \text{div} [\mathbf{T}]$$

La divergence du tenseur de 2<sup>eme</sup> ordre en coordonnées cartésiennes est définie par:

$$\text{div} [\mathbf{T}] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{array} \right\}$$

Par conséquent, la force électromagnétique exercée sur un volume peut s'obtenir par une intégrale volumique de la densité de force. Cependant, il est préférable d'éviter le calcul des dérivées des grandeurs du champ dans le contexte des éléments finis, car d'une part ce calcul n'est pas toujours possible, et d'autre part la précision est faible. Nous utilisons la propriété que l'intégrale volumique de la divergence peut se

reporter sur la surface  $\Gamma$  limitant le volume  $\Omega$ . Lorsque la quantité qui figure dans l'intégrale est un scalaire on a:

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{a}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale de  $\Gamma$ .

En ce qui concerne le tenseur  $[\mathbf{T}]$  cette relation peut être appliquée pour chacune des ces colonnes ce qui nous donne une des composantes de la force électromagnétique. Par exemple pour la composante  $x$  nous avons:

$$F_x = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}_x) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} H_x - \frac{1}{2} \mu H^2 n_x \, d\Gamma$$

La méthode du calcul de la force consiste alors à définir une surface autour de la pièce mobile et de calculer l'intégrale surfacique:

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mu (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu H^2 \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Le calcul de cette intégrale est délicat car nous avons une discrétisation irrégulière. Le résultat n'est donc pas indépendant de la position de cette surface. De plus une intégration numérique s'impose. Nous avons effectué l'intégration sur des faces au milieu de l'entrefer, discrétisées en petits rectangles.

#### *Calcul de la force par la méthode des travaux virtuels:*

Selon la méthode des travaux virtuels la force (ou le couple) électromagnétique est considérée comme la dérivée de l'énergie du système par rapport à un déplacement virtuel [A-5]. L'énergie du système s'écrit:

$$W = \int_{\Omega} \left( \int_0^B \mathbf{H} \, d\mathbf{B} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

La frontière extérieure du domaine est supposée non déformée par le déplacement, ce qui fait disparaître l'intégrale surfacique au cours de la dérivation. Lors du déplacement virtuel seuls les éléments qui sont soumis à une déformation participent à la variation de l'énergie. Il est pratique de considérer les éléments d'air autour d'une pièce mobile comme matière déformable. La dérivée totale de l'énergie est alors la somme des contributions de ses éléments.

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{déformés}}} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega_e} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \, d\Omega$$

Pour chaque élément déformé nous exprimons cette intégrale dans le système ces coordonnées locales  $(u, v, w)$ :

$$\frac{\partial W_e}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} |J| du dv dw$$

où  $|J|$  est le déterminant de la matrice jacobienne  $[J]$  qui fait passer des coordonnées locales  $(u,v,w)$  aux coordonnées réelles  $(x,y,z)$ . Pour chaque élément cette matrice s'obtient par:

$$[J] = \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{X}_k$$

où  $\alpha_k$  sont les fonctions d'interpolation des éléments isoparamétriques, et  $\mathbf{X}_k$  les coordonnées de ces nœuds. Le mouvement virtuel est pris en compte par intermédiaire du déplacement des nœuds:

$$\frac{\partial [J]}{\partial s} = \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_k}{\partial s}$$

La dérivée du déterminant est calculée par:

$$\frac{\partial |J|}{\partial s} = \left| \frac{\partial C_x}{\partial s}, C_y, C_z \right| + \left| C_x, \frac{\partial C_y}{\partial s}, C_z \right| + \left| C_x, C_y, \frac{\partial C_z}{\partial s} \right|$$

où  $C_x, C_y$  et  $C_z$  représentent les trois vecteurs colonnes de  $[J]$  et  $\partial C_x / \partial s, \partial C_y / \partial s$  et  $\partial C_z / \partial s$  sont les trois vecteurs colonnes de  $\partial [J] / \partial s$ .

Les coordonnées locales n'étant pas affectées par le déplacement, la dérivation par rapport à  $s$  peut être rapportée dans l'intégrale. Nous avons alors deux termes:

$$\frac{\partial W_e}{\partial s} = \int_{\Omega_e} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} |J| + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \frac{\partial |J|}{\partial s} \right) du dv dw$$

L'induction  $\mathbf{B}$  est dérivée des valeurs nodales du potentiel vecteur par:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \sum_i \alpha_i \mathbf{A}_i = \sum_i \text{grad} \alpha_i \times \mathbf{A}_i \\ &= \sum_i \left( [J]^{-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{u}} \right) \times \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

$[J]^{-1}$ , l'inverse de la matrice jacobienne est dépendante du déplacement. En utilisant:

$$\frac{\partial [J]^{-1}}{\partial s} = -[J]^{-1} \frac{\partial [J]}{\partial s} [J]^{-1}$$

la dérivée de  $\mathbf{B}$  s'écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} = \sum_i \left( [J]^{-1} \cdot \frac{\partial [J]}{\partial s} \cdot \mathbf{grad} \alpha_i \right) \times \mathbf{A}_i$$

Les éléments concernés faisant partie de l'air nous posons  $\mu = \mu_0$ :

$$\mathbf{F} = \sum_{\substack{\text{éléments } \Omega_e \\ \text{déformés}}} \int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 [J]^{-1} \frac{\partial [J]}{\partial s} \right) d\Omega$$

La figure A.11 montre une comparaison des valeurs de la force électromagnétique obtenues avec les deux méthodes ainsi que les résultats expérimentaux. Nous avons obtenu une plus grande précision en utilisant la méthode des travaux virtuels. Néanmoins l'écart entre la force mesurée et celle à partir du tenseur de Maxwell n'est pas important. La différence entre les calculs est notamment liée aux erreurs d'intégration surfacique du tenseur de Maxwell.

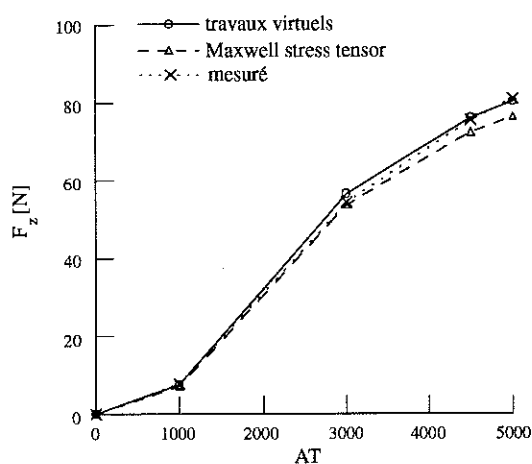


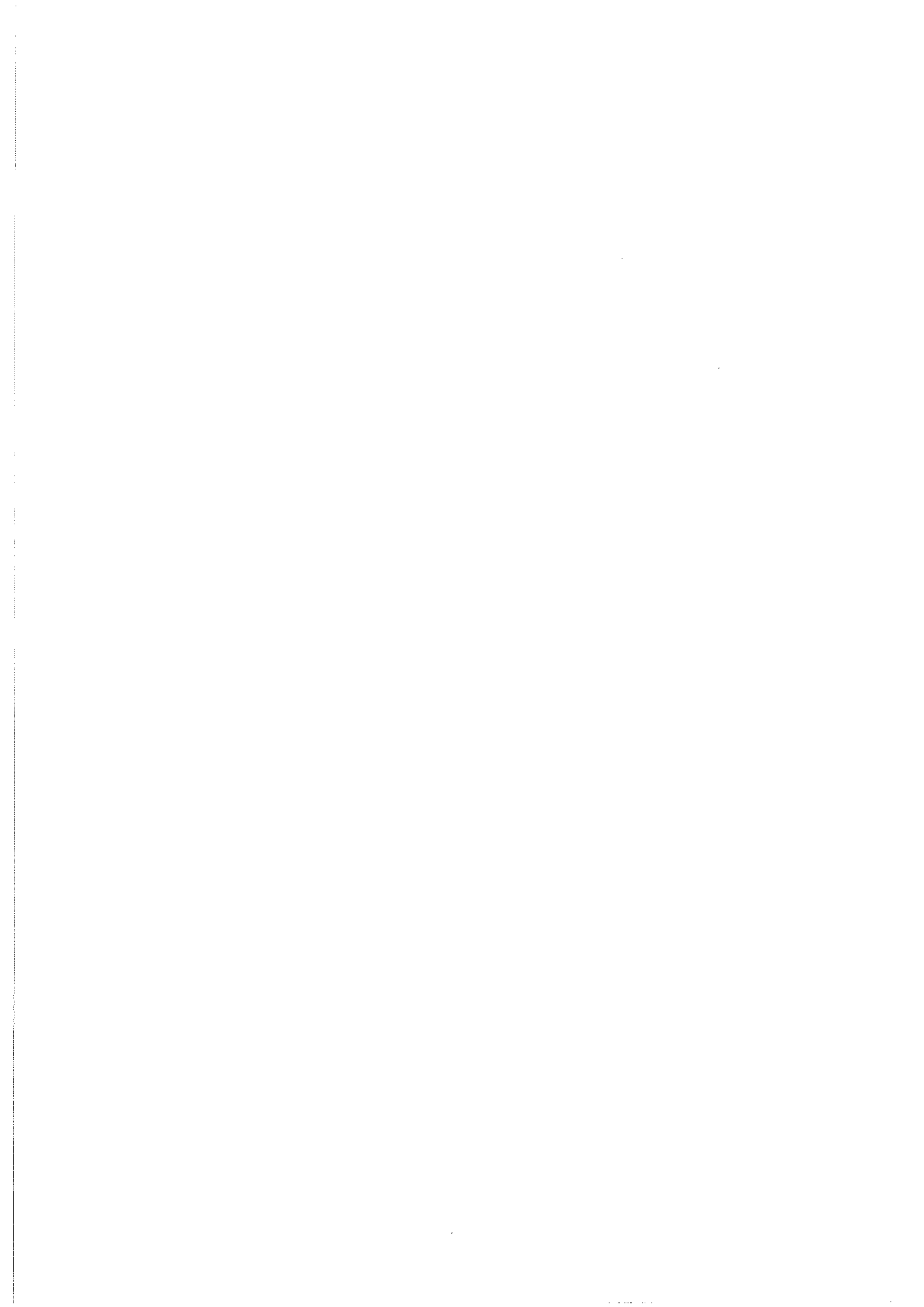
Fig. A.12 : Force  $F_z$  sur le noyau mobile

## Conclusion

La formulation du potentiel vecteur dans le contexte des éléments nodaux permet de représenter correctement un problème magnétostatique lorsque nous admettons une discontinuité de la composante normale du potentiel aux interfaces entre des matériaux de perméabilité très différente. Autrement l'emploi de la jauge de Coulomb sous forme d'un terme de pénalité conduit à des perturbations locales de la solution.

La précision globale est très sensible à la qualité du maillage, comme des éléments déformés. L'utilisation du modèle des lignes de courant peut, sous certaines conditions, permettre de réduire le nombre d'éléments de mauvaise qualité.

Le calcul de la force électromagnétique par la méthode des travaux virtuels est équivalent au calcul à partir du tenseur de Maxwell. Le calcul de la dérive de l'énergie par rapport à un déplacement virtuel est mieux adapté à l'utilisation d'un maillage libre.



## **Couplage de la méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique: Application à la modélisation des machines électriques tournantes.**

Une méthode de simulation du régime transitoire des machines électriques à été développée et mise en œuvre dans un logiciel éléments finis en trois dimensions. Le couplage direct des équations du circuit électrique avec les équations du champ magnétique est implémenté dans un algorithme pas à pas dans le temps.

Le calcul de la distribution du champ magnétique est basé sur la formulation du potentiel vecteur magnétique dans le contexte des éléments finis nodaux. Le circuit électrique est analysé grâce à la méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps. Les relations aux bornes des conducteurs bobinés sont utilisées pour le couplage avec les équations du circuit d'alimentation. Un modèle 3D de courants linéiques permet de faciliter le maillage des inducteurs des moteurs électriques.

Les différents modules du logiciel de calcul et la structuration des données sont détaillés. Les algorithmes sont validés dans le cas d'une machine universelle et d'un moteur à réluctance variable.

### **Mots-clé:**

Électromagnétisme	Régime transitoire
Éléments finis nodaux	Potentiel vecteur magnétique en 3D
Analyse des circuits électriques	Potentiel électrique intégré dans le temps
Problème couplé	Modèle linéique de courant
Machine électrique	

## **Coupling of the Three Dimensional Finite Element Method with an Electric Circuit Analysis: Application to the Modelling of Electric Rotating Machines.**

A simulation method of the transient regime of electric machines has been developed and realised in a three dimensional finite element software. The direct coupling of the electric circuit equations with the equations of the magnetic field is implemented in a time stepping scheme.

The computation of the magnetic field distribution is based on the magnetic vector potential formulation in a nodal finite element context. The electric circuit is analysed using the method of time integrated electric potentials. The relationships at the coil terminations are used for the coupling with the feeding electric circuit equations. A 3D line current model allows to simplify the meshing of electric motor inductors.

The different modules of the computation software and the data structure are presented in detail. The computational algorithms are validated taking the cases of a universal current machine and a switched reluctance motor.

### **Keywords:**

Electromagnetism	Transient regime
Nodal finite elements	3D magnetic vector potential
Electric circuit analysis	Time integrated electric potential
Coupled problem	Line current model
Electric machine	



