



**HAL**  
open science

**MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES  
TOURNANTES PAR LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS : CALCUL  
DES GRANDEURS MAGNETIQUES AVEC PRISE  
EN COMPTE DU MOUVEMENT**

Rémy Perrin-Bit

► **To cite this version:**

Rémy Perrin-Bit. MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES TOURNANTES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS : CALCUL DES GRANDEURS MAGNETIQUES AVEC PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT. Energie électrique. Institut National Polytechnique Grenoble (INPG), 1994. Français. NNT : . tel-01920220

**HAL Id: tel-01920220**

**<https://hal.science/tel-01920220>**

Submitted on 13 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

présentée par

**Rémy PERRIN-BIT**

Pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de **l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE de GRENOBLE**

( Arrêté ministériel du 30 mars 1992 )

( Spécialité : Génie Electrique )

<p><b>MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES TOURNANTES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS : CALCUL DES GRANDEURS MAGNETIQUES AVEC PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT.</b></p>
---

Date de soutenance : 21 SEPTEMBRE 1994

**Composition du jury :**

Monsieur	M. LAJOIE MAZENC	Président, rapporteur
Monsieur	A. NICOLAS	Rapporteur
Messieurs	J.L. COULOMB	Examineur
	P.F. DESESQUELLES	Examineur
	G. MEUNIER	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble



### **Les trois lois de la logistique.**

- 1) Un logiciel ne doit pas décevoir son utilisateur ni, par son inaction, permettre que son programmeur soit incriminé.
- 2) Un logiciel doit obéir aux ordres donnés par son utilisateur, sauf quand ces ordres entrent en conflit avec la Première Loi.
- 3) Un logiciel doit protéger sa propre existence, tant que cette protection n'entre pas en conflit avec les Première et Deuxième Lois.

Adaptation libre des trois lois de la robotique d'Isaac Asimov  
(Scientifique et écrivain de science-fiction américain).



## REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à :

- Monsieur Lajoie Mazenc, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, qui m'a fait l'honneur de présider le jury et d'être l'un des rapporteurs de cette thèse.

- Monsieur Nicolas, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être l'un des rapporteurs de cette thèse et de participer à ce jury.

- Monsieur Coulomb, Professeur à l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, pour avoir suivi ces travaux, pour les bons conseils et l'aide qu'il m'a apportés dans ces travaux et pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à ce jury.

- Monsieur Desesquelles, Responsable de la simulation des machines électriques tournantes de la société VALEO Systèmes d'Essuyage, pour avoir suivi ces travaux et pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à ce jury.

- Monsieur Meunier, Directeur de recherche au C.N.R.S, pour ces bons conseils et pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à ce jury.



Je tiens aussi à remercier :

- Madame CHATIGNY, Ingénieur calcul de la société VALEO pour avoir suivi ces travaux.

- Thomas DREHER, thésard de grande valeur et co-fondateur du logiciel MV3DYN. Ces idées originales et son travail de qualité ont permis de réaliser un logiciel complexe dans les temps impartis.

Je remercie chaleureusement tous mes collègues, chercheurs, ingénieurs et techniciens et plus particulièrement P. Eustache pour ces capacités à résoudre les problèmes informatiques quotidiens et surtout pour la mise à la disposition de tous, d'utilitaires facilitant grandement la vie de tous les chercheurs. Je remercie G. Barakat, E. Callegher, C. Guérin, P. Guillot, N. Labbe, P. Labie, Y. Maréchal, W. Morweiser, P. Petin, S. Nabeta, O. Sahraoui, V. Silva, F.X. Zgainski .... pour toutes les discussions fructueuses et les bons moments passés ensemble.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble dans le cadre d'un saut technologique MESR. Il résulte d'une collaboration quadripartite entre le L.E.G, le L.E.S.I.R et les sociétés MOULINEX et VALEO. Nous avons effectué la partie du saut correspondant à la simulation en 3D des machines tournantes. Cette partie se subdivise en deux thèses groupées. La première thèse effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE est réalisé par T. Dreher (LEG/MOULINEX) et concerne plus particulièrement la réalisation du couplage circuit électrique dans un logiciel élément finis 3D. La deuxième thèse effectuée par moi-même (LEG/VALEO) s'occupe de la simulation du mouvement dans les machines tournantes en 3D.





## **SOMMAIRE**



<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE 1. MISE EN EQUATIONS DISCRETES DU PROBLEME PHYSIQUE .....</b>	<b>16</b>
Introduction.....	17
1.1. Les hypothèses.....	18
1.2. Problème type .....	18
1.3. Equations de Maxwell en basse fréquence. ....	19
1.4. Prise en compte du mouvement.....	20
1.4.1. Résolution directe de l'équation générale.....	21
1.4.2. Résolution dans deux repères.....	21
1.5. Choix d'une formulation .....	22
1.6. Formulation en potentiel vecteur A et potentiel scalaire électrique V .....	23
1.6.1. Conditions de continuité aux interfaces .....	24
1.6.2. Unicité de la solution par jauge de Coulomb.....	25
1.6.3. Libération de la composante normale An.....	26
1.7. Principe de la méthode des éléments finis nodaux .....	30
1.7.1. Méthode des résidus pondérés.....	30
1.7.2. Discrétisation de la forme intégrale par la méthode des éléments finis nodaux.....	31
1.7.3. Forme discrète et intégrale de la formulation AV-A avec jauge de Coulomb.....	31
1.7.3.1. Introduction de la jauge de Coulomb par pénalité.....	32
1.7.3.2. Formes intégrales et discrètes.....	33
1.7.3.3. Approximation par les différences finies .....	34
Conclusion.....	36
<b>CHAPITRE 2. GEOMETRIES ET MAILLAGES SPECIFIQUES DES MACHINES TOURNANTES TRIDIMENSIONNELLES.....</b>	<b>37</b>

Introduction.....	38
2.1. Les spécificités des machines tournantes en 3D.....	39
2.1.1. Les problèmes posés par la géométrie des moteurs en 3D.....	39
2.1.2. Les problèmes posés par les matériaux des moteurs en 3D .....	41
2.1.3. Les conditions limites des moteurs en 3D .....	43
2.2. Le maillage de la géométrie d'une machine tournante.....	44
2.2.1. Les moyens informatiques en 1994.....	44
2.2.2. Les maillages.....	44
2.2.3. Les maillages automatiques .....	45
2.2.4. Les maillages réglés ou assistés .....	45
2.2.5. Les maillages auto-adaptatifs.....	48
2.2.6. Le maillage optimal.....	49
Conclusion.....	51
<b>CHAPITRE 3. LA PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT.....</b>	<b>52</b>
Introduction.....	53
3.1. Les formules intégrales.....	55
3.1.1. Le macro-élément .....	55
3.1.2. Les intégrales de frontières.....	58
3.2. Les méthodes de remaillages .....	58
3.2.1. Le remaillage complet .....	58
3.2.2. Le remaillage local ou partiel .....	60
3.3. Les méthodes de connexions surfaciques .....	61
3.3.1. Les multiplicateurs de Lagrange.....	62
3.3.2. La connexion par interpolation nodale.....	64
3.3.3. La connexion par extrapolation nodale.....	66
3.3.4. Récapitulatif .....	68

3.3.5. Traitement unifié des méthodes de connexion et des conditions limites.....	69
3.3.5.1. Les conditions limites.....	69
3.3.5.2. Les conditions cycliques.....	72
3.3.5.3. Les conditions anti-cycliques.....	74
3.3.5.4. Les conditions périodiques ou anti-périodiques .....	75
3.3.5.5. Libération de la composante normale .....	76
3.3.5.6. Synthèse .....	77
Conclusion.....	79
<b>CHAPITRE 4. LE LOGICIEL MV3DYN .....</b>	<b>80</b>
Introduction.....	81
4.1. La structuration des données.....	83
4.1.1. Lecture des conditions initiales.....	83
4.1.2. Analyse des fichiers de données.....	83
4.1.3. Création de la base de données.....	84
4.1.4. La lecture des données .....	84
4.1.5. Analyse des données et addition de données pertinentes .....	85
4.2. La résolution en pas à pas dans le temps.....	88
4.2.1. La création des combinaisons linéaires .....	88
4.2.2. Création de la structure de stockage de la matrice et du vecteur principaux .....	89
4.2.3. Intégration et assemblage des éléments.....	89
4.2.4. La résolution.....	90
4.2.5. Le post-calcul .....	91
Conclusion.....	94
<b>CHAPITRE 5. VALIDATIONS du LOGICIEL MV3DYN.....</b>	<b>95</b>
Introduction.....	96

5.1. Le coupleur magnétique .....	97
5.2. Le moteur à réluctance variable .....	103
5.3. Le moteur à courant continu .....	105
5.3.1. Les transitoires numériques .....	108
5.3.2. Visualisation du champ en 3D en fonction du mouvement. ....	112
Conclusion.....	114
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>115</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>117</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>121</b>

## **SOMMAIRE DES FIGURES**





Figure 1 : Schéma de principe.....	14
Figure 2 : Problème général avec déplacement.....	18
Figure 3 : Coupure d'un domaine pour le rendre simplement connexe.....	23
Figure 4 : Canalisation du flux le long d'une interface.....	26
Figure 5 : Continuité de B au passage de l'interface.....	27
Figure 6 : Discontinuité de B au passage de l'interface.....	27
Figure 7 : Module de B sans libération de la composante normale de A.....	29
Figure 8 : Module de B avec libération de la composante normale de A.....	29
Figure 9 : Description d'un moteur et de son bobinage.....	39
Figure 10 : Description de l'entrefer.....	39
Figure 11 : Homogénéisation d'un bobinage filaire.....	40
Figure 12 : Représentation volumique du bobinage d'un stator d'alternateur.....	40
Figure 13 : Machine tournante avec sa boîte d'air.....	41
Figure 14 : Aimantation radiale dans un aimant.....	42
Figure 15 : Différents types de limites sur un quart de machine.....	43
Figure 16 : Eléments finis en 2D.....	44
Figure 17 : Eléments finis en 3D.....	44
Figure 18 : Passage d'une coupe 2D à une géométrie 3D par extrusion.....	46
Figure 19 : Tête de moteur décrite en 3D.....	46
Figure 20 : Maillage assisté d'un quart de géométrie 2D.....	47
Figure 21 : Maillage automatique et assisté.....	48
Figure 22 : Maillage adapté d'une géométrie 2D.....	49
Figure 23 : Maillage mixte d'une machine électrique.....	50
Figure 24 : Agrandissement sur le maillage mixte d'une machine électrique.....	50
Figure 25 : Macro-élément dans un maillage éléments finis.....	55
Figure 26 : Exemple simple en 2D et 3D.....	56
Figure 27 : Graphe des commandes.....	59
Figure 28 : Nombre d'éléments finis en fonction de la position du rotor.....	60
Figure 29 : Double maillage local en 2D.....	61
Figure 30 : Interface de connexion sur 1/4 de géométrie.....	62
Figure 31 : Schéma de connexion par interpolation nodale en 2D.....	64
Figure 32 : Maillages hétérogènes en 2D.....	65
Figure 33 : Schéma de connexion par extrapolation nodale en 2D.....	66
Figure 34 : Conditions limites tangentes en 3D.....	69
Figure 35 : Conditions limites normales en 3D.....	71
Figure 36 : Conditions limites cycliques en 3D.....	73

Figure 37 : Conditions limites anti-cycliques en 3D.....	74
Figure 38 : Conditions limites anti-cycliques en 3D. $\theta = 180^\circ$ autour de l'axe Z.....	75
Figure 39 : Libération de la composante $A_n$ sur l'interface entre les domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$ .....	76
Figure 40 : Organigramme du logiciel MV3DYN.....	82
Figure 41 : Maillage non cylindrique sur une géométrie curviligne.....	86
Figure 42 : Algorithme de localisation des éléments en vis à vis des noeuds à connecter.....	87
Figure 43 : Vecteur normal nodal.....	87
Figure 44 : Connexion d'un noeud d'un élément hexaédrique avec un hexaèdre.....	90
Figure 45 : Géométrie du coupleur magnétique.....	97
Figure 47 : Comparaison du couple entre interpolation nodale et analytique.....	99
Figure 48 : Zoom sur une des perturbations.....	99
Figure 49 : Comparaison du couple entre l'extrapolation nodale et analytique.....	100
Figure 50 : Entrefers partiellement cylindrique.....	101
Figure 51 : Comparaison du couple entre l'interpolation nodale en potentiel scalaire réduit et analytique.....	101
Figure 52 : Comparaison de 4 techniques de simulation du mouvement.....	102
Figure 53 : Moteur à réluctance variable 2D (Schéma de principe).....	103
Figure 54 : Comparaison du couple obtenu par MV3DYN et FLUX3D.....	104
Figure 55 : Quart de moteur à courant continu. Bobinage rotorique non représenté. ..	105
Figure 56 : Comparaison du couple sur un quart et un demi-moteur.....	106
Figure 57 : Comparaison du courant dans une bobine du rotor.....	107
Figure 58 : Comparaison du couple.....	108
Figure 59 : Comparaison du courant dans la première bobine du rotor suivant l'ordre des éléments finis.....	110
Figure 60 : Comparaison du couple suivant l'ordre des éléments finis.....	111
Figure 61 : Flèche de B. Angle de rotation $0^\circ$ .....	112
Figure 62 : Flèche de B. Angle de rotation $90^\circ$ .....	112
Figure 63 : Visualisation des isovaleurs de B de $5^\circ$ en $5^\circ$ (Aimants et bobinages non représentés).....	113

## **INTRODUCTION GENERALE**



La conception des dispositifs électrotechniques fait de plus en plus appel à des modèles numériques pour déterminer les caractéristiques des futurs prototypes. Ces dernières années, la modélisation se faisait essentiellement en deux dimensions. Les systèmes informatiques manquaient alors de vitesse et de mémoire pour traiter de manière efficace et rentable des modélisations en trois dimensions.

De nos jours, le matériel informatique permet ou permettra bientôt la simulation des modèles en trois dimensions de façon raisonnable. Ceci améliorera la connaissance des phénomènes spécifiques aux trois dimensions et donc, par la même occasion, la conception des machines électrotechniques.

L'objet de ce document est de relater les recherches amenant à la réalisation d'un logiciel utilisant la méthode des éléments finis, en trois dimensions, capable de modéliser des machines électrotechniques grâce aux équations magnétiques, cinématique, électriques et de leurs couplages réciproques.

Les recherches ont permis d'analyser les méthodes existantes en deux dimensions et de pratiquer leurs extensions en trois dimensions. Ces méthodes n'étant pas totalement satisfaisantes en trois dimensions, nous proposons des méthodes originales.

Le logiciel, qui résulte de ces recherches, se veut le plus général possible du point de vue électromagnétique, bien que son but premier soit la simulation des moteurs électriques.

Ce logiciel s'apparente à un solveur d'équations. La géométrie, le maillage et l'exploitation s'exécutent de manières indépendantes. Les entrées/sorties du logiciel sont facilement modulables afin de suivre l'évolution inévitable de tous les logiciels de pré et post-traitement.

Le schéma directeur de ce logiciel que nous appellerons par la suite MV3DYN est le suivant :

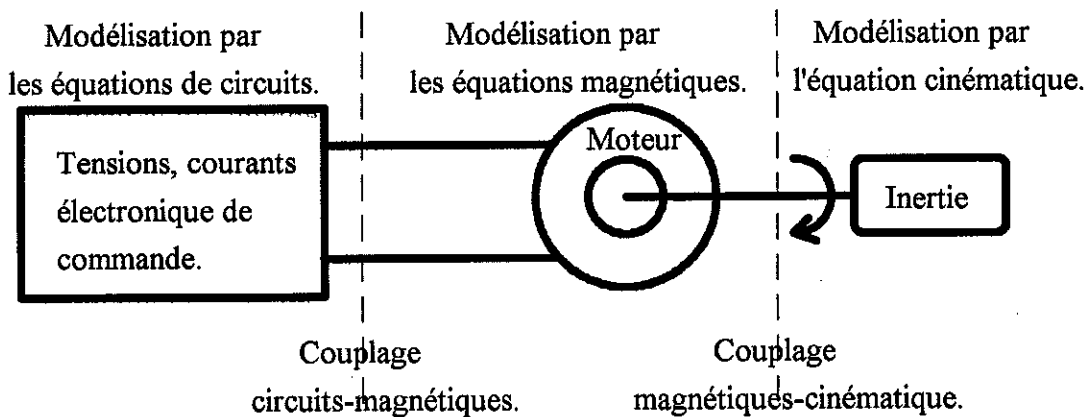


Figure 1 : Schéma de principe.

Les machines à simuler n'ayant généralement ni des alimentations sinusoïdales, ni des vitesses constantes, une méthode de résolution en pas à pas dans le temps sera adoptée.

Le logiciel étant destiné à un usage industriel, notre attention se portera essentiellement sur un compromis le plus favorable entre les résultats, le temps de réponse et le coût de la mise en oeuvre du logiciel. C'est à dire que MV3DYN doit donner de bons résultats en un minimum de temps dans un environnement informatique le plus simple possible.

Dans un premier temps nous rappelons les équations à résoudre ainsi que les hypothèses s'y rapportant. Ce travail s'intéresse plus particulièrement aux problèmes posés par la modélisation du mouvement en trois dimensions. L'étude du couplage avec les équations de circuits électriques fait l'objet d'un développement mené en parallèle par [DREHER 94].

Dans un deuxième temps, nous abordons les spécificités des moteurs électriques ainsi que la manière de résoudre les problèmes qui en découlent.

Dans une troisième partie, nous nous intéressons au couplage cinématique en passant en revue l'existant en deux dimensions. L'analyse de l'utilisation de ces méthodes en trois dimensions est réalisée. Le développement de nouvelles méthodes en trois dimensions permettra finalement de résoudre le problème du mouvement.

Une quatrième partie est consacrée au logiciel MV3DYN dans sa structure, ses possibilités et ses limitations.

Dans la cinquième partie, nous décrirons les différentes étapes de la validation du logiciel. Plusieurs types de moteurs seront simulés : continus, à réluctance variable, à vide ou en charge, avec les différents couplages circuit ou/et cinématique actifs.

**CHAPITRE 1.**

**MISE EN EQUATIONS DISCRETES DU  
PROBLEME PHYSIQUE**





## INTRODUCTION

Avant toutes réalisations pratiques, il est nécessaire de mettre en équation de manière stricte le problème physique. Dans le domaine qui nous concerne, l'électromagnétisme, les équations décrivant la physique du problème sont connues sous le nom d'équations de Maxwell. Les lois de comportements des milieux associés à ces équations, auxquelles il convient d'ajouter les équations de la cinématique pour rendre compte du mouvement mécanique, permettent une connaissance complète des grandeurs physiques mise en oeuvre. Des hypothèses adaptées aux machines tournantes (symétries) permettent de restreindre le domaine d'étude.

Des hypothèses sur le comportement physique permettent de simplifier les équations de Maxwell en vue de les restreindre au domaine d'étude de la magnétostatique tridimensionnelle avec déplacement. Ces équations reliant des grandeurs de type champ seront transformées en équations reliant des potentiels. Le choix de la formulation, utilisée par la suite, sera explicité.

Ces équations en potentiel seront discrétisées par la méthode des éléments finis nodaux d'un point de vue spatial et par la méthode des différences finies, d'un point de vue temporel.

La formulation "standard" utilisée sera modifiée afin de tenir compte de conditions d'interfaces spécifiques mal modélisées par la formulation originelle.

## 1.1. LES HYPOTHESES

Tout au long de cette étude, seuls les problèmes d'électromagnétismes et de cinématique seront traités. Les phénomènes thermiques ou de déformations mécaniques qui pourraient en résulter ne seront pas abordés.

Les problèmes étudiés vérifient les hypothèses suivantes :

- Les matériaux ont un comportement linéaire anisotrope ou non linéaire isotrope et l'hystérésis des matériaux saturables n'est pas prise en compte.
- Toutes les pièces modélisées sont considérées comme indéformables.
- Les pièces en mouvement possèdent un mouvement de rotation autour d'un axe et suivent les lois de la cinématique.
- D'un point de vue global, le mouvement n'affecte pas la taille de la géométrie : Aucune pièce ne sort ni ne rentre dans le dispositif.
- Vues dans un référentiel local attaché à chaque pièce, les caractéristiques physiques de conductivité, de perméabilité et d'anisotropie sont des grandeurs indépendantes du temps.
- Les bobines géométriques (bobinages rotoriques ou statoriques) peuvent être couplées aux équations de circuits.

Toutes ces hypothèses définissent un type de modélisation où les phénomènes dépendent du temps. Nous décrirons un fonctionnement magnéto-évolutif.

## 1.2. PROBLEME TYPE

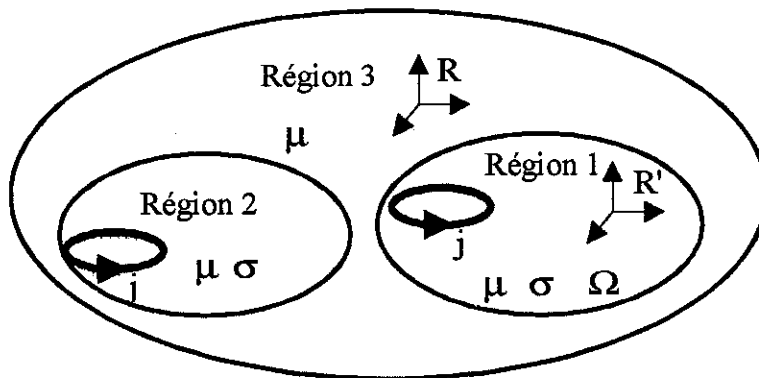


Figure 2 : Problème général avec déplacement.

Afin de gagner en clarté pour la suite de l'exposé, nous définissons un problème type (Fig.2) qui est constitué de manière schématique, par l'ensemble des domaines physiques susceptibles d'être rencontrés dans les machines tournantes réelles.

La région 1 est mobile et peut avoir un comportement ferromagnétique non linéaire ainsi que des bobines inductrices. La région 2 a les mêmes propriétés que la région 1 sauf qu'elle est fixe. La région 3 représente la boîte d'air englobante, prise suffisamment grande, pour que sur ses frontières, les champs magnétiques et électriques soient considérés comme nuls.

### 1.3. EQUATIONS DE MAXWELL EN BASSE FREQUENCE.

Dans chacun des repères fixes attachés à une pièce, les équations de Maxwell, dans le cadre de l'approximation des basses fréquences (courants de déplacement négligés), se présentent sous la forme suivante [Coulomb 88] :

- Loi d'Ampère	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$	(1.1)
- Loi de Faraday	$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$	(1.2)
- Conservation du flux	$\text{div } \mathbf{B} = 0$	(1.3)

avec  $\mathbf{H}$  : Champ magnétique (A/m)  
 $\mathbf{E}$  : Champ électrique (V/m)  
 $\mathbf{B}$  : Induction magnétique (T)  
 $\mathbf{J}$  : Densité de courant source électrique (A/m<sup>2</sup>)  
 $t$  : Temps (s)

A ces équations sont associées les lois de comportement des milieux soumis à des champs magnétiques :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.4)$$

avec  $\mu_0$  : Perméabilité du vide (H.m<sup>-1</sup>)  
 $\mu_r$  : Perméabilité relative (H.m<sup>-1</sup>)

Enfin, sans mouvement, les relations (1.5) et (1.6) expriment respectivement la loi d'Ohm et la conservation du courant :

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	(1.5)
$\text{div } \mathbf{J} = 0$	(1.6)

avec  $\sigma$  : Conductivité (S.m<sup>-1</sup>)

Les quatre équations de Maxwell induisent des conditions de passage aux interfaces entre deux milieux aux propriétés physiques différentes :

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.7)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K} \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (1.9)$$

avec  $\mathbf{n}$  : La normale à l'interface  
 $\mathbf{K}$  : Un courant surfacique qui, dans le cadre de l'étude, est nul

La relation (1.6) se traduit à une interface entre deux milieux de conductivités différentes par la conservation de la composante normale du courant.

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.10)$$

Enfin aux limites du domaine étude, ou sur des plans de symétrie, une des conditions suivantes s'applique :

- sur le champ magnétique :

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.12)$$

- sur le champ électrique :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.14)$$

## 1.4. PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT

La cinématique sera prise en compte au travers de l'équation de la mécanique classique pour les systèmes en rotation autour d'un axe :

$$J \cdot d^2\theta/dt^2 = \Gamma_e - F(d^2\theta/dt^2, d\theta/dt, \theta, \text{cte}) \quad (1.15)$$

$$\Omega = d\theta/dt \quad (1.16)$$

où  $J$  : Inertie totale du rotor et de la charge par rapport à l'axe de rotation (Kg.m<sup>2</sup>).  
 $\theta$  : Angle mécanique du rotor. (Rad.)  
 $\Omega$  : Vitesse angulaire mécanique du rotor. (Rad.s<sup>-1</sup>)  
 $\Gamma_e$  : Couple électrique du moteur. (N.m.)  
 $F$  : Frottement. (N.m)  
 $\text{cte}$  : Constante.

### 1.4.1. Résolution directe de l'équation générale

Soit  $R'$  le référentiel de la région 2 se déplaçant à une vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe et  $r$  la distance à cet axe et  $R$  le référentiel fixe (Fig.2). Les relations de passage du référentiel  $R'$  au référentiel  $R$  sont classiques et conduisent aux transformations suivantes [Gournay-80] :

$$\mathbf{H}_R = \mathbf{H}_{R'} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_{R'} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{R'} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{R'} - (\mathbf{r} \wedge \Omega) \wedge \mathbf{B}_R \quad (1.20)$$

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{J}_{R'} \quad (1.21)$$

Ce qui amène pour les équations de Maxwell dans un repère fixe d'une région en mouvement :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.22)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t + \text{rot} ((\mathbf{r} \wedge \Omega) \wedge \mathbf{B}) \quad (1.23)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (1.24)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.25)$$

Et pour la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} - (\mathbf{r} \wedge \Omega) \wedge \mathbf{B}) \quad (1.26)$$

Cette équation (1.23), exprimée dans un repère fixe, peut être résolue de deux manières.

Si la géométrie de la partie mobile est invariante dans le temps [Maréchal 91], cette équation ne pose pas de problème spécifique.

Au contraire, si la géométrie varie, dans le cadre de la méthode des éléments finis que nous présenterons plus tard, il est nécessaire de remailler l'ensemble de la géométrie à chaque déplacement et ensuite d'établir des relations entre ancien et nouveau maillage. Les relations ne sont établies avec précision que si le maillage est suffisamment fin (surtout dans les zones critiques : encoches, entrefer). Cette solution demande un temps de calcul important (Interpolation de maillage, maillage de la géométrie) et rend la méthode difficilement utilisable dans le cas d'une machine tournante en 3D.

### 1.4.2. Résolution dans deux repères

En fait, il est plus simple de résoudre dans les repères locaux à chaque pièce. Dans le cas d'un moteur, deux repères suffisent, l'un lié au domaine fixe et l'autre au domaine en rotation. Cette méthodologie permet de résoudre les équations classiques de Maxwell sans terme de déplacement.

En éléments finis, ceci nécessite simplement que le maillage attaché au domaine mobile tourne à la même vitesse que la géométrie, celui-ci étant la base nodale de résolution

des équations. La seule contrainte de cette méthode est la modélisation de l'entrefer ou de l'interface mobile/fixe comme nous l'aborderons en détail dans le chapitre 3.

## 1.5. CHOIX D'UNE FORMULATION

Si les équations précédentes décrivent effectivement le problème physique, elles ne peuvent être traitées numériquement. Il est nécessaire de les transformer. En effet, la composante tangentielle de l'induction magnétique, par exemple, est discontinue au passage entre deux milieux de perméabilités différentes.

Les méthodes numériques, susceptible de résoudre ces équations, ne permettent pas ce type de discontinuité. Les potentiels scalaires ou vecteurs magnétiques ou électriques permettent quant à eux les discontinuités sur l'induction, bien qu'étant eux-même continus.

Les méthodes numériques dérivent de deux familles : les éléments finis ou les différences finis. De même, les éléments finis, que nous emploierons, sont divisés en deux groupes : les éléments nodaux et les éléments d'arêtes. Pour des raisons de savoir-faire et de maîtrise interne au laboratoire, nous utiliserons les éléments finis nodaux sans préjuger sur leurs éventuels avantages ou défauts.

Ces raisons nous amènent à choisir une formulation en potentiel pour modéliser les problèmes physiques [Maréchal 91].

Voici la liste des potentiels usuellement employés dans le domaine magnétique en éléments finis nodaux :

<b>A</b>	potentiel vecteur magnétique	<b>B = rot A</b>
<b>A*</b>	potentiel vecteur modifié	<b>A* = A + <math>\int_{\tau=0}^t \text{grad V} d\tau</math></b>
<b>T</b>	potentiel vecteur électrique	<b>J = rot T</b>
<b>φ</b>	potentiel scalaire total magnétique	<b>H = - grad φ</b>
<b>φ<sub>r</sub></b>	potentiel scalaire réduit magnétique	<b>H = - grad φ<sub>r</sub> + H<sub>s</sub></b>
<b>V</b>	potentiel scalaire électrique	<b>E = - grad V</b>

Ainsi que leurs contraintes d'utilisation respectives :

Désignation formulation	Régions avec courants induits	Régions sans courant induit	Contrainte de connexité	Nombre de composants
AV - A	AV	A	aucune	4 - 3
AV - $\phi$ - $\phi_r$	AV	$\phi$ - $\phi_r$	oui	4 - 1
A* - $\phi$ - $\phi_r$	A*	$\phi$ - $\phi_r$	impossible	3 - 1
T $\phi$ - $\phi$	T $\phi$	$\phi$	aucune	4 - 1
T $\phi$ - $\phi$ - $\phi_r$	T $\phi$	$\phi$ - $\phi_r$	oui	4 - 1

Tableau 1 : Contraintes des principales formulations.

Certaines formulations nécessitent des géométries simplement connexes pour leur utilisations.

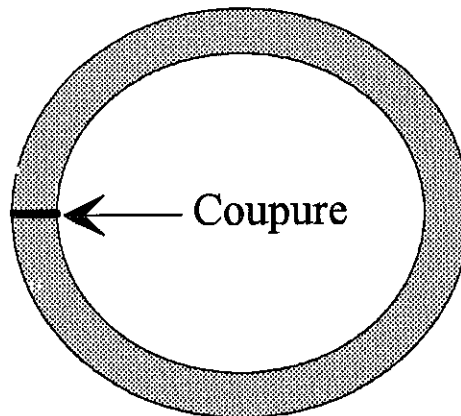


Figure 3 : Coupure d'un domaine pour le rendre simplement connexe.

Il est alors nécessaire de couper la géométrie (Fig.3) pour pouvoir la modéliser . Le calcul automatique de la coupure est bien maîtrisé [Kotiuga 87, Leonard 89] mais rajoute une contrainte d'utilisation à la formulation.

Comme le montre le tableau (Tab.1), il n'existe pas de formulation "idéale". Les formulations sans contrainte ne sont pas économiques et réciproquement. Nous désirons néanmoins créer un logiciel industriel, ce qui nous impose de choisir une formulation avec le moins de contraintes possible. Nous choisissons la formulation AV-A car elle n'a aucune contrainte de connexité et qu'elle est utilisée au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble.

## 1.6. FORMULATION EN POTENTIEL VECTEUR A ET POTENTIEL SCALAIRE ELECTRIQUE V

En introduisant le potentiel vecteur A tel que  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  dans les équations de Maxwell, nous obtenons l'équation suivante :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_r \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \quad (1.27)$$



Si le modèle comporte des régions conductrices massives, il y a couplage entre les champs électriques et magnétiques. Ce couplage se traduit par la création de courants induits dans la masse des conducteurs. Pour tenir compte de cet effet, nous posons :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t = \text{rot} ( -\partial\mathbf{A}/\partial t ) \quad (1.28)$$

En introduisant le potentiel scalaire électrique  $V$  nous obtenons :

$$\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \text{grad } V \quad (1.29)$$

et donc

$$\mathbf{J} = -\sigma \partial\mathbf{A}/\partial t - \sigma \text{grad } V \quad (1.30)$$

L'équation du champ magnétique en terme de potentiel vecteur devient :

$$\text{rot} ( 1/\mu \text{rot } \mathbf{A} - 1/\mu \mathbf{B}_r ) + \sigma \partial\mathbf{A}/\partial t + \sigma \text{grad } V = \mathbf{J}_s \quad (1.31)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\text{rot} ( 1/\mu \text{rot } \mathbf{A} ) \\ &+ \sigma \partial\mathbf{A}/\partial t + \sigma \text{grad } V = \mathbf{J}_s + \text{rot} ( 1/\mu \mathbf{B}_r ) \quad (1.32) \\ &\text{et div} [ -\sigma \partial\mathbf{A}/\partial t - \sigma \text{grad } V ] = 0 \\ &\text{pour les régions avec courant induit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{rot} ( 1/\mu \text{rot } \mathbf{A} ) = \mathbf{J}_s + \text{rot} ( 1/\mu \mathbf{B}_r ) \quad (1.33) \\ &\text{pour les régions sans courant induit} \end{aligned}$$

### 1.6.1. Conditions de continuité aux interfaces

Les conditions de continuités définies par les équations (1.7) à (1.10) doivent être assurées au passage entre deux milieux aux propriétés physiques différentes.

La continuité de la composante normale de l'induction est assurée automatiquement si le potentiel vecteur magnétique est continu. En effet, si nous posons  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  les potentiels de part et d'autre de l'interface et  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  les normales orientées des deux domaines en contact, nous obtenons :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \text{div} ( (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{n}_1 ) = 0 \quad (1.34)$$

car  $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{n}_2$  sont continus à l'interface.

De même la continuité de la composante tangentielle du champ électrique est assurée par la continuité du potentiel scalaire électrique sur l'interface :

$$\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{n}_1 + \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{n}_2 = - \text{grad} (V_1 - V_2) \wedge \mathbf{n}_1 = 0 \quad (1.35)$$

car  $V_1$  et  $V_2$  sont continus à l'interface.

Par contre, il est nécessaire d'explicitier la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$v_1 \text{rot} \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{n}_1 + v_2 \text{rot} \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{n}_2 = 0 \quad (1.36)$$

De même, pour assurer la divergence nulle de la densité de courant, il faut vérifier :

$$- \sigma_1 \text{grad} V_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \sigma_2 \text{grad} V_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (1.37)$$

### 1.6.2. Unicité de la solution par jauge de Coulomb

Les équations (1.32) et (1.33) et les conditions aux limites ne permettent pas de définir une solution unique pour  $\mathbf{A}$  et  $V$ . En effet, seul le rotationnel dans le cas de  $\mathbf{A}$  et le gradient dans le cas de  $V$  sont déterminés. Ainsi toute paire  $(\mathbf{A}', V')$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad} (f) \text{ avec } \text{grad} (f) \text{ vérifiant les conditions aux limites en } \mathbf{A}. \\ V' &= V + g \text{ avec } g \text{ un scalaire vérifiant les conditions aux limites en } V. \end{aligned}$$

vérifient aussi les équations du problème.

Cette particularité de la formulation ne pose en théorie aucun problème. En effet, nous ne nous intéressons pas particulièrement à  $\mathbf{A}$  et  $V$  mais à  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  qui eux sont définis de manière unique et qui sont physiquement mesurables.

Pratiquement, l'expérience montre que les méthodes numériques se comportent très mal lorsque le potentiel n'est pas défini de manière unique. La résolution numérique converge très lentement, soit fournit des solutions erronées [Guérin 90, Bardi 90], soit ne converge pas du tout.

Il est nécessaire d'assurer l'unicité de la solution des équations aux dérivées partielles en potentiel.

Le potentiel scalaire électrique  $V$  devient unique si nous imposons sa valeur en un point de la géométrie. Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  devient lui unique si nous imposons sa divergence en tout point de l'espace ainsi que des conditions limites de type Dirichlet homogène sur ses composantes tangentielles et normales. Cette condition est réalisée automatiquement par les conditions aux limites naturelles dans un problème d'électromagnétisme.

Nous imposons la divergence par l'intermédiaire de la jauge de Coulomb :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1.38)$$

Cette jauge, utilisée conjointement avec les équations de Maxwell et les conditions aux limites naturelles, assure l'unicité du potentiel vecteur magnétique. [Coulomb 81].

Le système final à résoudre pour connaître l'état magnétique du problème se présente sous la forme :

$$\operatorname{rot} ( 1/\mu \operatorname{rot} \mathbf{A} ) + \sigma \partial \mathbf{A} / \partial t + \sigma \operatorname{grad} V = \mathbf{J}_s + \operatorname{rot} ( 1/\mu \mathbf{B}_r ) \quad (1.39)$$

$$\operatorname{div} [ - \sigma \partial \mathbf{A} / \partial t - \sigma \operatorname{grad} V ] = 0$$

pour les régions avec courant induit

$$\operatorname{rot} ( 1/\mu \operatorname{rot} \mathbf{A} ) = \mathbf{J}_s + \operatorname{rot} ( 1/\mu \mathbf{B}_r ) \quad (1.40)$$

pour les régions sans courant induit

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1.41)$$

### 1.6.3. Libération de la composante normale $\mathbf{A}_n$

La méthode des éléments finis nodaux utilisée associée à la formulation en potentiel vecteur permet de garder  $\mathbf{A}$  continue en tout point de l'espace y compris au passage des interfaces. Néanmoins, les conditions d'interface, pour être vérifiées, ne nécessitent que la conservation de la composante tangentielle de  $\mathbf{A}$  pour être respectées (1.34).

Prenons un exemple physique classique.

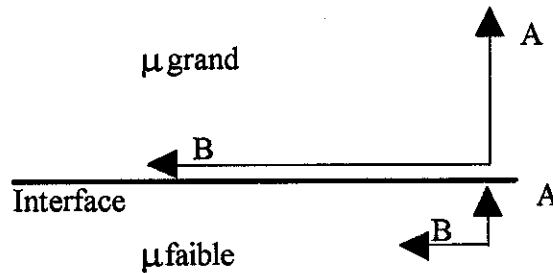


Figure 4 : Canalisation du flux le long d'une interface.

Dans cet exemple (Fig.4), l'induction magnétique constante est canalisée dans le volume où la perméabilité est grande. L'utilisation simultanée de la conservation de composante normale de  $\mathbf{A}$  et de la jauge  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  sur ce type d'interface amène à un résultat non physique. En effet, sur ce type d'exemple, le degré de liberté de  $\mathbf{A}$  n'est pas suffisant pour simuler un fort gradient de  $\mathbf{A}$  [Biro 91].

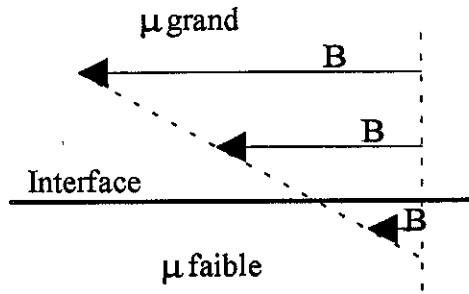


Figure 5 : Continuité de  $\mathbf{B}$  au passage de l'interface.

Comme nous le voyons sur la figure 5, le faible gradient possible sur  $\mathbf{A}$  amène la création d'un champ non physique :

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\text{grad} (\nu \text{ div } \mathbf{A}) \neq 0 \quad (1.42)$$

qui tend à repousser l'induction loin de l'interface.

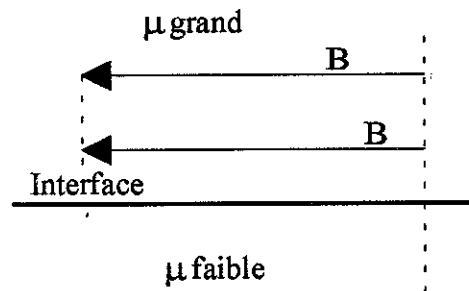


Figure 6 : Discontinuité de  $\mathbf{B}$  au passage de l'interface.

Il est impossible de simuler un flux homogène le long d'une interface. Dans les moteurs électriques pourtant, la culasse joue le rôle de canalisateur de flux. Nous nous trouvons donc dans le cas de la figure 6.

Pour remédier à ce problème numérique (éléments finis nodaux et jauge), nous pouvons envisager trois solutions :

- L'utilisation de la jauge est à l'origine de ces difficultés. Celle-ci n'étant pas utile d'un point de vue purement mathématique, nous pouvons résoudre le problème sans jauge. Les conséquences numériques sont malheureusement importantes. Le système linéaire à résoudre devient presque singulier. Le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre ce type de problème par la méthode des gradients conjugués devient prohibitif voire infini. Le coût devient très important avec un risque non-négligeable d'avoir une non-convergence du processus de résolution.
- L'utilisation d'éléments arêtes et non plus d'éléments nodaux permet de résoudre le problème. En effet, ce type d'élément n'impose pas de condition sur la continuité de la composante normale de  $\mathbf{A}$ . Néanmoins, ce type d'élément libère la composante normale sur tous les éléments. Il est donc nécessaire d'éliminer certaines variables du problème. La méthode la plus usuelle est basée sur la création d'un arbre

d'arêtes dans le maillage. Cet arbre peut être théoriquement arbitraire. L'expérience acquise dans ce domaine ces dernières années montre que la qualité et la vitesse de convergence du système dépend étroitement du choix de l'arbre. Les algorithmes générant cet arbre posent encore des problèmes de robustesse [Albanese 88].

- La dernière solution que nous adopterons consiste à libérer la composante normale de  $\mathbf{A}$  sur les interfaces afin de permettre une discontinuité sur la composante tangentielle de l'induction.

Si nous voulons rester efficace, il est nécessaire de garder l'utilisation du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et la jauge de Coulomb dans les volumes, la libération de la composante normale ne se justifiant que sur des interfaces air-fer. Cette libération de composante est explicitée dans le chapitre 3. Celle-ci est de plus compatible avec l'équation de conservation de l'induction normale au passage de l'interface.

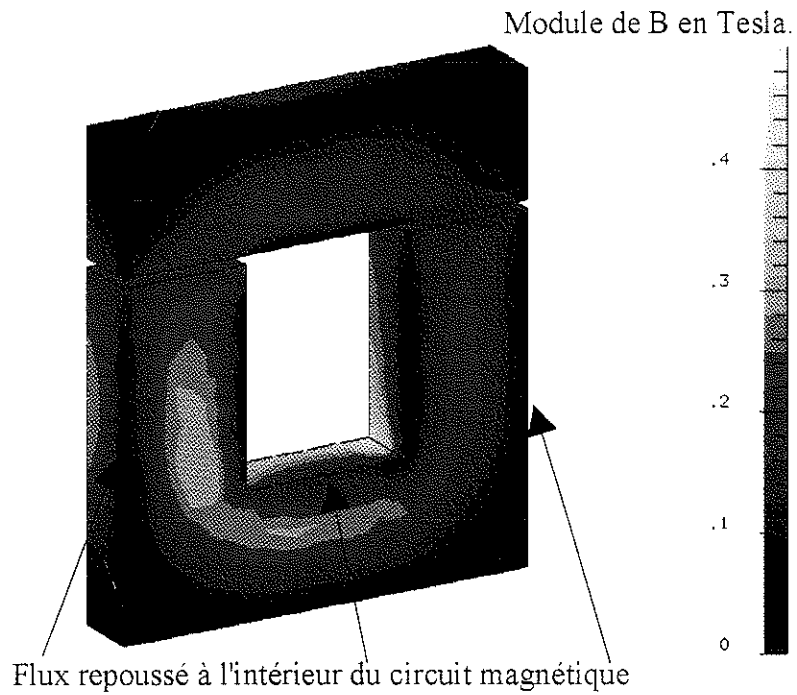


Figure 7 : Module de  $\mathbf{B}$  sans libération de la composante normale de  $\mathbf{A}$ .

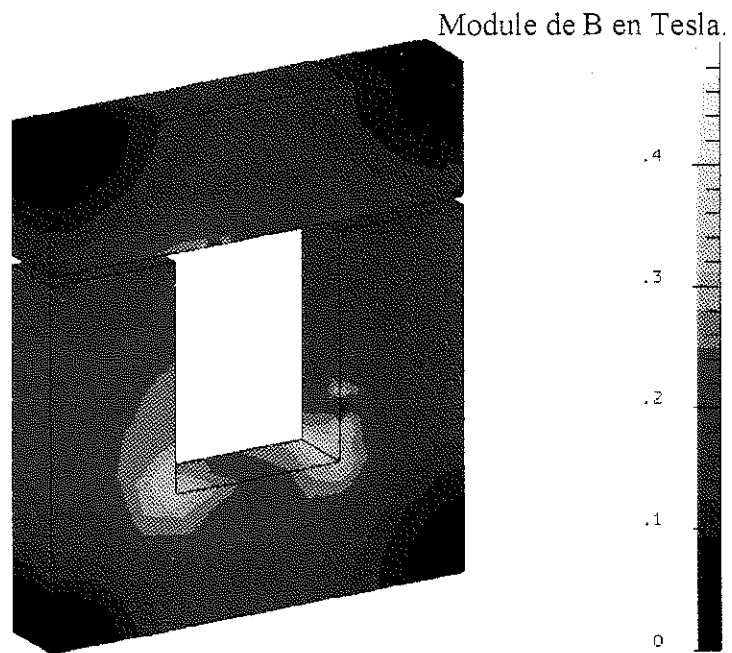


Figure 8 : Module de  $\mathbf{B}$  avec libération de la composante normale de  $\mathbf{A}$ .

Le problème, le long de l'interface air/fer, apparaît nettement dans le cas d'un circuit magnétique (Fig. 7). Ce circuit est alimenté par un bobinage (non représenté). En pratique, le flux est bien canalisé le long de l'interface et normalement, il est homogène dans le fer.

Nous remarquons que le modèle utilisant la conservation de la continuité de  $\mathbf{A}$  et la jauge de Coulomb ne correspond pas à la réalité physique du problème (Fig.7).

La libération de la composante normale de  $\mathbf{A}$  et la conservation de la jauge permettent eux de répondre de manière satisfaisante au problème (Fig.8).

## 1.7. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS NODAUX

Le système d'équations aux dérivées partielles doit être transformé en système discret afin d'être utilisable informatiquement. La méthode des éléments finis nodaux permet cette transformation. Elle est applicable à de nombreux domaines de la physique : électromagnétisme, mécanique des solides, mécanique des fluides, thermiques, etc. Les moyens informatiques ont permis son essor rapide. Nous ferons un bref rappel de la méthode. Pour plus de détails voir [Oden 72, Touzot 84, Sabonnadière 87, Zienkiewicz 89].

### 1.7.1. Méthode des résidus pondérés.

Le comportement d'un phénomène physique continu peut être représenté par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$L(u) - f = 0 \text{ sur le domaine } \Omega \quad (1.43)$$

$$C(u) - g = 0 \text{ sur les frontières } \Gamma \quad (1.44)$$

L'ensemble des variables  $u$  est solution du problème physique si le résidu  $R$  est nul et si l'équation (1.43) est vérifiée par  $u$  :

$$R(u) = L(u) - f \quad (1.45)$$

La méthode des résidus pondérés consiste à remplacer les équations aux dérivées partielles (1.43) par une forme intégrale :

$$\iiint_{\Omega} N.R(u)dV = \iiint_{\Omega} N(L(u) - f)dV \quad (1.46)$$

où  $N$  est une fonction de pondération appartenant à un ensemble de fonctions de pondération  $E_N$ .

Si  $u$  vérifie les équations (1.43) et (1.44) alors l'équation (1.45) est nulle pour toute fonction de pondération  $N$ .

### 1.7.2. Discrétisation de la forme intégrale par la méthode des éléments finis nodaux

La forme intégrale (1.46) représente le problème physique de manière encore continue. La méthode des éléments finis nodaux permet de remplacer cette forme intégrale par une forme discrète. Les variables 'u' du problème ne sont plus calculées de manière continue mais de manière discrète sur des points en nombre fini (appelés noeuds) et interpolées entre ces points par l'intermédiaire de fonctions d'interpolation  $\alpha$  :

$$u_{\text{discret}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x, y, z) u_i \quad (1.47)$$

où n est le nombre de noeuds du domaine.

Les fonctions d'interpolation  $\alpha$  présentent la caractéristique principale suivante :

$$\alpha_i(x, y, z) = 1 \text{ au noeud } i. \quad (1.48)$$

$$\alpha_i(x, y, z) = 0 \text{ pour tous les autres noeuds du domaine.} \quad (1.49)$$

Cette caractéristique est essentielle. L'interpolation de la solution dans un élément fini ne dépend que des valeurs associées aux noeuds de cet élément.

Pour conclure, si  $N_i$  est une fonction de pondération et  $\alpha_j$  une fonction d'interpolation, alors la forme intégrale du résidu est nulle pour l'ensemble des fonctions de pondération si :

$$[M] [u_{\text{discret}}] = [S] \quad (1.50)$$

où

$$M_{ij} = \iiint_{\Omega} N_i L(\alpha_j) dV \quad (1.51)$$

$$S_i = \iiint_{\Omega} N_i f dV$$

$u_j =$  valeurs au noeud j des variables discrètes

Nous noterons que les fonctions d'interpolation doivent assurer au passage entre deux éléments :

- la continuité de l'inconnue.
- la continuité de la dérivée tangentielle de l'inconnue.

Ce type de fonction d'interpolation définit la classe des éléments finis de Lagrange.

### 1.7.3. Forme discrète et intégrale de la formulation AV-A avec jauge de Coulomb

La formulation AV-A jauge de Coulomb est une formulation robuste pour les éléments finis nodaux. Elle permet de traiter tous les type de machines tournantes sans contrainte dans le cadre des hypothèses décrites en début de ce chapitre. Son principal



défaut résidant dans l'utilisation de 3 ou 4 inconnues par noeud. Cette formulation est donc gourmande en espace mémoire et temps de calcul mais génère des résultats fiables dans tous les cas de figures.

### 1.7.3.1. Introduction de la jauge de Coulomb par pénalité

La forme intégrale de la formulation AV-A donne :

$$\iiint_{\Omega_1} N_i (\text{rot}(v_1 \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } V) d\Omega = \iiint_{\Omega_2} N_i \mathbf{J}_s d\Omega \quad (1.52)$$

sur le domaine  $\Omega_1$ .

$$\iiint_{\Omega_2} N_i (\text{rot}(v_2 \text{rot } \mathbf{A})) d\Omega = \iiint_{\Omega_2} N_i \mathbf{J}_s d\Omega \quad \text{sur le domaine } \Omega_2 \quad (1.53)$$

Ces équations ne sont complètes que si nous introduisons la jauge  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  sur tout l'espace afin d'assurer l'unicité de la solution. Cette introduction peut être réalisée de plusieurs façons :

- Soit en prenant des éléments finis satisfaisants intrinsèquement la jauge [Biddlecombe 82]. Cette méthode limite le choix des éléments finis 3D aux éléments tétraédriques ou briques d'ordre 1. Ce qui, avouons-le, est trop restrictif.
- Soit en imposant la jauge sur les noeuds par une méthode de contrainte [Konrad 85]. Cette méthode réduit la taille des matrices à gérer (Elimination d'une composante de  $\mathbf{A}$ ) mais elle n'est pas encore maîtrisée en 3D.
- Soit en introduisant la jauge sous forme de pénalité dans la loi d'Ampère. C'est la méthode la plus usuelle et c'est aussi la méthode que nous emploierons. [Coulomb 81, Biro 89].

Le terme de pondération  $-\text{grad}(v \text{div } \mathbf{A})$  où  $v$  est la reluctivité du milieu est injecté dans la forme intégrale des équations.

$$\text{rot}(v_1 \text{rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(v_1 \text{div } \mathbf{A}) + \sigma \delta \mathbf{A} / \delta t + \sigma \text{grad } V = \mathbf{J}_s \quad (1.54)$$

$$\text{rot}(v_2 \text{rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(v_2 \text{div } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (1.55)$$

Ce système revient bien à imposer la jauge sur tout le domaine car si nous prenons la divergence des équations précédentes, nous obtenons :

$$\Delta(v \text{div } \mathbf{A}) = 0 \quad \text{sur les domaines 1 et 2.} \quad (1.56)$$

### 1.7.3.2. Formes intégrales et discrètes

Posons  $N_i$  et  $W_i$  les fonctions de pondération respectivement scalaires et vectorielles :

$$W_i = \begin{bmatrix} W_i & 0 & 0 \\ 0 & W_i & 0 \\ 0 & 0 & W_i \end{bmatrix}$$

avec  $N_i = 0$  sur les frontières où  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0$  (1.57)

$W_i \cdot \mathbf{n} = 0$  sur les frontières où  $\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0$  (1.58)

$W_i \wedge \mathbf{n} = 0$  sur les frontières où  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$  (1.59)

La forme intégrale de la formulation AV-A jauge de Coulomb devient grâce au théorème de Green :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_1} (\text{rot } W_i v_1 \text{rot } \mathbf{A} + \text{div } W_i v_1 \text{div } \mathbf{A} + \sigma W_i \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \sigma W_i \text{grad } V - W_i \mathbf{J}_s) d\Omega \\ & - \iint_{\Gamma_{12}} W_i (v_1 \text{rot } \mathbf{A} \wedge \mathbf{n}_1) dS - \iint_{\Gamma_{12}} W_i \cdot \mathbf{n}_1 v_1 \text{div } \mathbf{A} dS = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

sur le domaine  $\Omega_1$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_2} (\text{rot } W_i v_1 \text{rot } \mathbf{A} + \text{div } W_i v_1 \text{div } \mathbf{A} - W_i \mathbf{J}_s) d\Omega \\ & - \iint_{\Gamma_{12}} W_i (v_1 \text{rot } \mathbf{A} \wedge \mathbf{n}_1) dS - \iint_{\Gamma_{12}} W_i \cdot \mathbf{n}_1 v_1 \text{div } \mathbf{A} dS = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

sur le domaine  $\Omega_2$

Les intégrales de types surfaciques disparaissent afin d'assurer les conditions aux limites et les conditions d'interfaces même si c'est faiblement.

Posons les fonctions d'interpolations de  $\mathbf{A}$  et  $V$  :

$$\mathbf{A}_{\text{discret}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x, y, z) \mathbf{A}_j \quad (1.62)$$

$$V_{\text{discret}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x, y, z) V_j$$

avec :

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j \end{bmatrix}$$

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n A_j \iiint_{\Omega_1} (\text{rot} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{rot} \alpha_j + \text{div} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{div} \alpha_j) d\Omega \\
& + \sum_{j=1}^n \frac{\delta A_j}{\delta t} \iiint_{\Omega_1} \sigma \mathbf{W}_i \alpha_j d\Omega + \sum_{j=1}^n V_j \iiint_{\Omega_1} \sigma \mathbf{W}_i \text{grad} \alpha_j d\Omega \\
& = \iiint_{\Omega_1} \mathbf{W}_i \mathbf{J}_s d\Omega
\end{aligned} \tag{1.63}$$

dans le domaine  $\Omega_1$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n A_j \iiint_{\Omega_1} (\text{rot} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{rot} \alpha_j + \text{div} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{div} \alpha_j) d\Omega \\
& = \iiint_{\Omega_1} \mathbf{W}_i \mathbf{J}_s d\Omega
\end{aligned} \tag{1.64}$$

dans le domaine  $\Omega_2$ .

Ce qui amène à l'écriture matricielle :

$$[\mathbf{M}_1][\mathbf{A}] + [\mathbf{T}]\delta[\mathbf{A}]/\delta t + [\mathbf{M}_2][\mathbf{V}] = [\mathbf{S}] \quad \text{dans le domaine } \Omega_1. \tag{1.65}$$

$$[\mathbf{M}_1][\mathbf{A}] = [\mathbf{S}] \quad \text{dans le domaine } \Omega_2. \tag{1.66}$$

où :

$$\begin{aligned}
M_{1ij} &= \iiint_{\Omega_1} (\text{rot} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{rot} \alpha_j + \text{div} \mathbf{W}_i \mathbf{v}_1 \text{div} \alpha_j) d\Omega \\
M_{2ij} &= \iiint_{\Omega_1} \sigma \mathbf{W}_i \text{grad} \alpha_j d\Omega \\
T_{ij} &= \iiint_{\Omega_1} \sigma \mathbf{W}_i \alpha_j d\Omega \\
S_i &= \iiint_{\Omega_1} \mathbf{W}_i \mathbf{J}_s d\Omega
\end{aligned} \tag{1.67}$$

### 1.7.3.3. Approximation par les différences finies

La dérivée temporelle des équations matricielles doit aussi être discrétisée. Nous emploierons la méthode des différences finis :

$$\frac{\delta[\mathbf{A}(t)]}{\delta t} \approx \frac{[\mathbf{A}]_{t+\Delta t} - [\mathbf{A}]_t}{\Delta t} \tag{1.68}$$

Les matrices de raideur  $[\mathbf{M}]$  et source  $[\mathbf{S}]$  sont fonctions du temps du fait de leur mobilité ou de leurs propriétés physiques. Nous pouvons les approximer par des sommes pondérées de leurs valeurs aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}_1][\mathbf{A}] &\approx \theta [\mathbf{M}_1]_{t+\Delta t} [\mathbf{A}]_{t+\Delta t} + (1-\theta) [\mathbf{M}_1]_t [\mathbf{A}]_t \\
[\mathbf{M}_2][\mathbf{V}] &\approx \theta [\mathbf{M}_2]_{t+\Delta t} [\mathbf{V}]_{t+\Delta t} + (1-\theta) [\mathbf{M}_2]_t [\mathbf{V}]_t \\
[\mathbf{S}] &\approx \theta [\mathbf{S}]_{t+\Delta t} + (1-\theta) [\mathbf{S}]_t
\end{aligned} \quad \text{avec } \theta \in [0,1] \tag{1.69}$$

Finalement, le système matriciel d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( \theta[M_1]_{t+\Delta t} + \frac{[T]}{\Delta t} \right) [A]_{t+\Delta t} + (\theta[M_2]_{t+\Delta t}) [V]_{t+\Delta t} \\ & = \theta[S]_{t+\Delta t} + (1-\theta)[S]_t + \left( (\theta-1)[M_1]_t + \frac{[T]}{\Delta t} \right) [A]_t + ((\theta-1)[M_2]_t) [V]_t \end{aligned} \quad (1.70)$$

Ce système peut avoir trois formes typiques :

Avec  $\theta = 1$ , la méthode est dite implicite. Cette méthode converge toujours mais oblige à prendre un pas de temps fin pour obtenir de bons résultats. Par cette méthode, le système matriciel devient :

$$\left( [M_1]_{t+\Delta t} + \frac{[T]}{\Delta t} \right) [A]_{t+\Delta t} + [M_2]_{t+\Delta t} [V]_{t+\Delta t} = [S]_{t+\Delta t} \quad (1.71)$$

Avec  $\theta = 0$ , la méthode est dite explicite. Cette méthode donne de bons résultats mais elle peut diverger si le pas de temps n'est pas assez fin. Le système devient :

$$\frac{[T]}{\Delta t} [A]_{t+\Delta t} = [S]_t - \left( [M_1]_t - \frac{[T]}{\Delta t} \right) [A]_t - [M_2]_t [V]_t \quad (1.72)$$

Avec  $\theta = 1/2$ , la méthode est dite de Crank-Nicholson. Cette méthode converge et est la plus précise.

Notre choix s'est porté sur la méthode implicite qui est la plus simple à mettre en oeuvre du point de vue programmation et qui a l'avantage de toujours converger. Le pas de temps est choisi en fonction du déplacement mécanique de la partie mobile :

$$t_{\min} \leq t = \frac{\theta_m}{\Omega} \leq t_{\max} \quad (1.73)$$

avec  $t_{\min}$  : Pas de temps minimal  
 $t_{\max}$  : Pas de temps maximal si la vitesse de rotation est nulle.

## CONCLUSION

Ce chapitre a permis de déterminer les équations magnétiques et cinématique nécessaires à la modélisation des machines tournantes.

Le caractère temporel des équations est traité par les différences finies alors que le caractère spatial est traité par les éléments finis nodaux.

Dans les régions volumiques conductrices, la formulation en potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique  $AV$  avec jauge de Coulomb est retenue. Dans les autres régions, le potentiel vecteur magnétique  $A$  avec jauge suffit.

Nous libérerons la composante normale de  $A$  le long des interfaces air-fer afin de simuler de manière juste des flux homogènes dans le fer. Ce qui est le cas généralement dans la culasse de la plupart des moteurs.

La formulation retenue permet de se passer de toute contrainte de connexité et assure grâce à la jauge de Coulomb une convergence rapide et sûre quel que soit le problème. Mais revers de la médaille, elle nécessite une taille mémoire importante (3 ou 4 variables par noeuds).

Nous verrons, dans le chapitre suivant, les méthodes utilisables pour réduire au mieux la taille des systèmes à résoudre sans dégrader les résultats.

**CHAPITRE 2.**

**GEOMETRIES ET MAILLAGES  
SPECIFIQUES DES MACHINES  
TOURNANTES TRIDIMENSIONNELLES.**



## INTRODUCTION

Actuellement, la modélisation des machines tournantes se fait de façon standard et industrielle en 2D.

Le but de ce chapitre est de décrire le plus finement possible les différences induites par le passage du 2D au 3D sur la modélisation des moteurs électriques.

Ces différences portent notamment sur la description des sources, le mouvement rotatif, la description des matériaux, la formulation employée et enfin les moyens informatiques nécessaires.

Nous décrirons les méthodes à mettre en oeuvre pour prendre en compte ces différences ainsi que leur influence sur le résultat de la modélisation.

Ce chapitre se divise en deux parties, l'une traitant plus spécialement des problèmes physiques et géométriques et l'autre plus particulièrement des problèmes de maillage qui influencent la taille des systèmes matriciels à résoudre et donc des moyens informatiques à mettre en oeuvre.

L'idée générale de ce chapitre sera de permettre la modélisation la plus fidèle possible des moteurs électriques avec les moyens informatiques actuellement à notre disposition (1994).



## 2.1. LES SPECIFICITES DES MACHINES TOURNANTES EN 3D

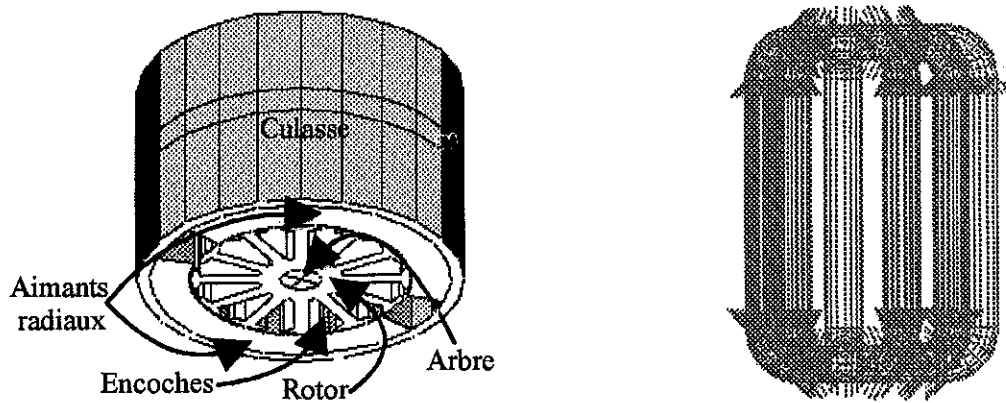


Figure 9 : Description d'un moteur et de son bobinage.

La figure 9 représente la géométrie d'une machine à courant continu ayant comme inducteurs des aimants radiaux collés sur la culasse et comme induit douze bobines dans les encoches du rotor. La visualisation des bobinages est dans ce cas réalisée de manière filaire.

### 2.1.1. Les problèmes posés par la géométrie des moteurs en 3D

#### a) L'entrefer.

Les moteurs pour avoir une efficacité maximale possèdent des entrefers minces. L'optimisation consistant à réduire au minimum l'entrefer pour avoir un rendement mécanique maximal.

La taille de cet entrefer est de l'ordre du centième voire du millième de la taille globale de la machine.

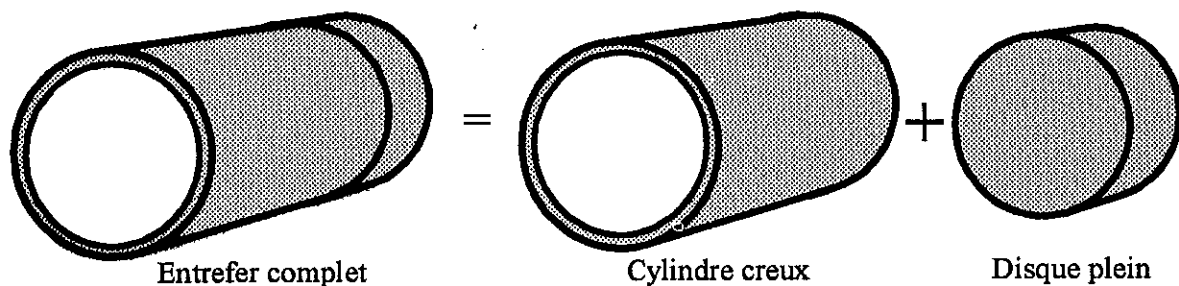


Figure 10 : Description de l'entrefer.

Classiquement en 2D, l'entrefer est représenté par une bande cylindrique. L'extrusion de cette bande en 3D donne un cylindre creux. Le moteur n'étant pas infiniment long, ce cylindre est obturé par un disque plein (Fig.10). De manière générale, nous définirons l'entrefer comme le ou les volumes séparant les parties mobiles des parties fixes. Ces volumes ont comme propriétés d'être indéformables (très faiblement déformables dans le cas d'un excentrage de l'axe de rotation) par le mouvement et de posséder une symétrie de révolution.

Le maillage éléments finis de ces volumes, essentiellement le cylindre creux, pose des problèmes importants que nous résoudrons en employant des techniques spéciales de maillage.

b) Les bobinages.

En 2D, la modélisation des bobinages se fait soit par une technique d'homogénéisation classique dans le cas des conducteurs filaires, soit par une densité de courant dans le cas des conducteurs massifs (Fig. 11).

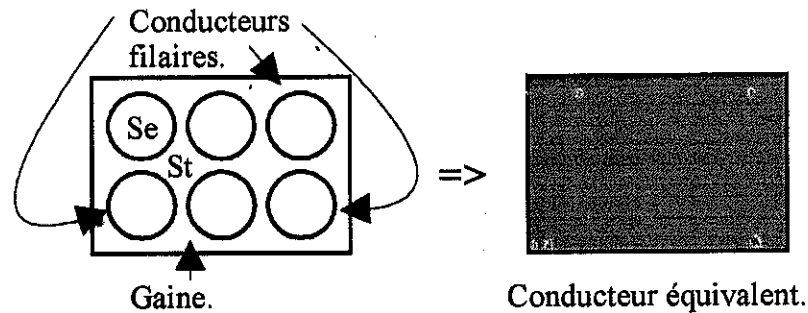


Figure 11 : Homogénéisation d'un bobinage filaire.

Un bobinage filaire se ramène à une densité de courant surfacique si nous considérons que la densité de courant traversant la face simulant le bobinage est de :

$$J = \frac{N \cdot I}{St} \quad (2.1)$$

- Où
- N : Nombre de fils dans un bobinage
  - I : Courant dans le bobinage
  - St : Surface totale du conducteur y compris les fils conducteurs

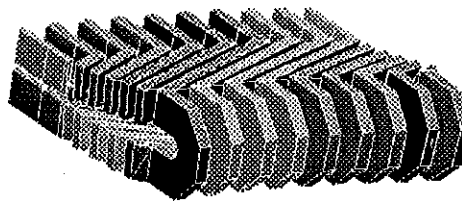


Figure 12 : Représentation volumique du bobinage d'un stator d'alternateur.

Nous considérons en 2D que la direction du courant est colinéaire à l'axe Z. L'évolution de cette technique en 3D pose deux problèmes.

1) L'utilisateur est censé décrire volumiquement les bobinages (Fig.12). Cette description ardue dans le cas de la partie principale des bobinages et quasiment impossible dans le cas des têtes de bobine. En effet, les bobinages se croisent, voire s'interpénètrent.

2) Si l'utilisateur a réussi à décrire son bobinage, il est nécessaire qu'il donne une direction de parcours du courant. Dans la figure présentée, il faut décrire le courant (densité et direction) en tous points du conducteur ou au moins sur des sous volumes à courant constant en direction et densité.

Pour ces deux raisons, il a été nécessaire d'innover dans les techniques de prise en compte des bobinages. Une méthode originale consiste à décrire et simuler les bobinages de manière filaire [Dreher 94].

c) L'air

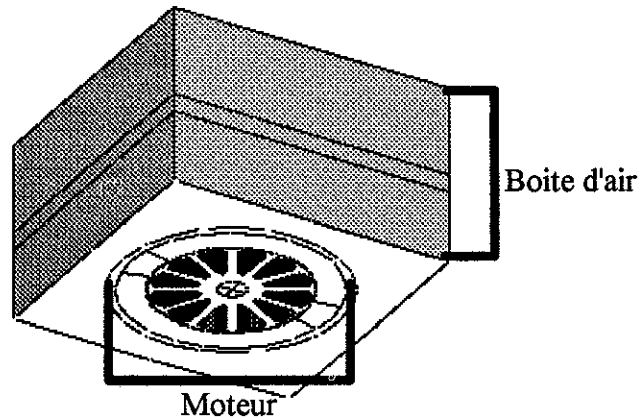


Figure 13 : Machine tournante avec sa boîte d'air.

Contrairement par exemple à la modélisation mécanique, l'électromagnétisme doit prendre en compte l'air. Il est nécessaire de décrire géométriquement cette boîte d'air (Fig.13). La complexité géométrique intérieure de cette boîte d'air rend très délicat son maillage. En fait, il faut nécessairement passer par des maillages automatiques.

d) Le mouvement

Le mouvement 3D et ses implications seront développés dans le chapitre 3.

### 2.1.2. Les problèmes posés par les matériaux des moteurs en 3D

Les matériaux utilisés en 2D possèdent les mêmes propriétés en 3D, seuls leurs descriptions spatiales changent.

a) Les matériaux magnétiques.

Les matériaux composant le stator et le rotor des machines sont, dans la plupart des cas, magnétiques. Ces matériaux sont en réalité anisotropes, saturables avec des cycles d'hystérésis.

La modélisation des cycles d'hystérésis n'étant pas encore maîtrisée et donc d'utilisation courante, nous modéliserons les matériaux sans cycle d'hystérésis comme en 2D.

De même l'anisotropie non-linéaire n'est pas suffisamment maîtrisée. Nous considérerons que les matériaux sont soit non-linéaires isotrope, soit anisotropes linéaires.

Ceci posé, il nous reste à décrire l'anisotropie dans l'espace 3D. Nous choisirons de décrire le matériau par un repère (cartésien ou cylindrique) et trois valeurs de la perméabilité  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  ou  $\mu_r, \mu_\theta, \mu_z$ .

b) Les aimants.

La forme des aimants dans les machines tournantes est le plus souvent cylindrique (Fig.14).

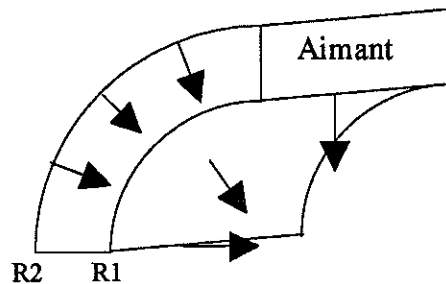


Figure 14 : Aimantation radiale dans un aimant.

Cette forme spécifique génère des champs magnétiques radiaux. La modélisation doit prendre en compte le plus fidèlement possible cet aspect. Nous remarquons que le module du champ en un point de rayon R2 est  $R1/R2$  plus faible qu'au rayon R1.

Lors de la modélisation, nous considérons que cet effet est négligeable ( $R1 \approx R2$ ). Un repère cylindrique permet alors de définir l'aimantation en terme de  $r, \theta, z$  de manière simple et homogène avec la description des matériaux magnétiques.

### 2.1.3. Les conditions limites des moteurs en 3D

L'utilisation judicieuse des conditions aux limites permet généralement dans les moteurs électriques de diviser par  $n$  la géométrie à modéliser. Nous savons par expérience que les temps de résolution seront alors d'au moins  $n^2$  plus court. L'utilisation de conditions limites est donc essentielle en 3D.

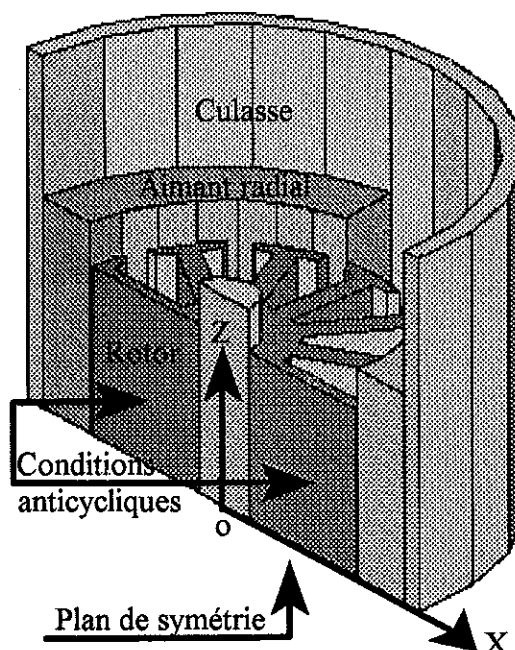


Figure 15 : Différents types de limites sur un quart de machine.

Nous étudierons quatre types de conditions sur les limites (Fig.15). Ces conditions s'appliquent sur la variable d'état du problème.

La condition limite de type normal ( $B_n = 0$ ) permet, dans le cas de l'utilisation du potentiel vecteur magnétique  $A$  comme variable d'état, de définir des conditions extérieures. L'induction est tangente à la limite du domaine, l'utilisation principale se faisant sur la boîte d'air englobant la géométrie du moteur.

La condition limite de type tangent ( $H_t = 0$ ) définit quant à elle une induction normale à la frontière.

La condition limite de type symétrique permet d'utiliser la symétrie du problème par rapport à un plan. L'utilisation de ce type de limite permet de diminuer par deux la taille de la géométrie à simuler.

La condition limite de type cyclique (ou anti-cyclique) permet dans notre exemple de diviser par deux la géométrie. Cette limite n'est utilisable que sur des machines électriques alimentées de façon équilibrée.

## 2.2. LE MAILLAGE DE LA GEOMETRIE D'UNE MACHINE TOURNANTE

### 2.2.1. Les moyens informatiques en 1994

La modélisation des machines tournantes en 3D doit encore prendre en compte les capacités des systèmes informatiques. Nous prendrons comme hypothèse de travail, que l'usage industrielle de tous logiciels de modélisation ne doit en aucun cas nécessiter un "super" ordinateur. Une station de travail se doit de répondre à nos besoins même si elle est considérablement pourvue en mémoire vive et en capacité disque.

Ces considérations, purement matérielles, nous amènent à minimiser le plus possible la taille mémoire et les temps de calculs nécessaires pour modéliser un moteur.

Dans cette optique, chaque routine est analysée, structurée pour être optimale en vitesse d'exécution. De même, le maillage éléments finis doit être créé soigneusement.

### 2.2.2. Les mailleurs

Les mailleurs ont pour objet de transformer la géométrie définie par l'utilisateur en la décomposant en éléments finis respectant les contours de celle-ci. Ces éléments sont de type triangle et rectangle en 2D (Fig.16).

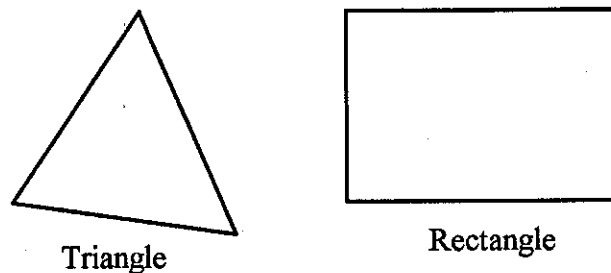


Figure 16 : Eléments finis en 2D.

et de type tétraèdre, brique et prisme (voire pyramide) en 3D (Fig.17).

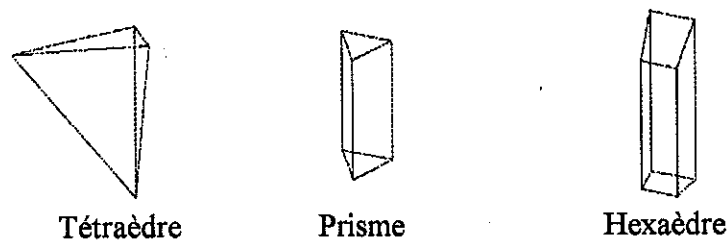


Figure 17 : Eléments finis en 3D.

De ce maillage dépend la taille du système matriciel à résoudre et la qualité de la solution finale.

A l'heure actuelle, il existe trois grandes familles de mailleurs, les mailleurs automatiques, assistés et auto adaptatifs.

### **2.2.3. Les mailleurs automatiques**

Ce type de mailleur permet la décomposition en éléments finis de géométrie complexe telle que le volume d'air entourant les têtes de bobines. L'utilisateur n'intervient que de façon limitée en indiquant la taille moyenne des éléments qu'il désire. Toutes les géométries sont maillables automatiquement en tétraèdres. Malheureusement, rien ne garantit que le maillage sera minimal pour une qualité de solution souhaitée. En effet, ces types de mailleur ne génèrent usuellement que des éléments finis du type tétraèdres (des travaux en cours permettent l'utilisation d'hexaèdres). Par exemple, le maillage d'une géométrie simple telle qu'un cube produira non pas une brique, qui serait l'élément fini idéal, mais de six à  $n$  tétraèdres suivant la qualité du mailleur et suivant les indications qui lui sont fournies.

Dans le cas spécial des moteurs, si la tête de la machine est correctement maillée, l'entrefer (cylindrique à paroi mince), par contre, va demander au mailleur un nombre déraisonnable de tétraèdres (constation effectuée sur CAEDS/IBM et FLUX3D/LEG). En effet, le mailleur, dans un but d'optimisation de la solution, crée des éléments finis de bonne qualité et très homogènes entre eux. Ceci signifie que chaque tétraèdre aura des cotés pratiquement égaux. Certes le maillage et la solution seront de bonnes qualités mais le problème sera difficile, voire impossible, à résoudre avec des moyens informatiques standards.

### **2.2.4. Les mailleurs réglés ou assistés**

Le nombre d'éléments finis générés par le mailleur automatique est dans le cas des moteurs totalement disproportionné. En effet, nous pouvons, sur certaines machines, réduire fortement ce maillage grâce à un mailleur non plus automatique mais assisté.

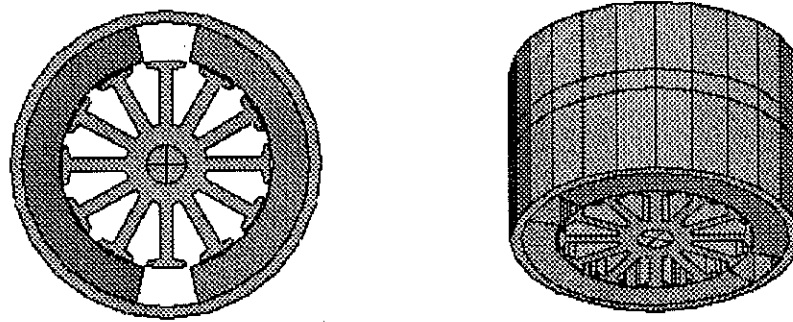


Figure 18 : Passage d'une coupe 2D à une géométrie 3D par extrusion.

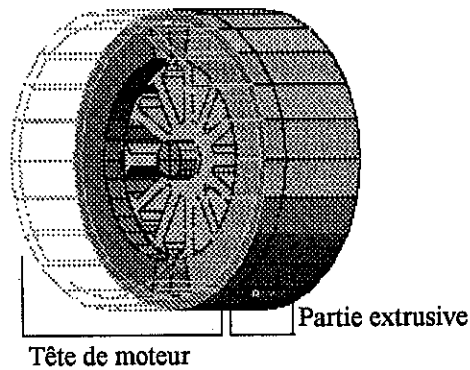


Figure 19 : Tête de moteur décrite en 3D.

Ces machines sont de type extrusif, c'est-à-dire que la composition de la géométrie provient en grande partie d'une coupe 2D qui est extrudée (Fig.18), seule la partie haute du moteur (tête du moteur) est décrite en 3D (Fig.19).

Ces maillages, contrairement aux précédents, demandent l'assistance éclairée de l'utilisateur. Celui-ci se doit de connaître les principes élémentaires d'un bon maillage dans le domaine de l'électromagnétisme. Ces maillages ne permettent le maillage que de géométrie simple. De plus, la méthode des éléments finis nécessite un maillage continu, ce qui implique que toute la géométrie du problème doit être simple si nous voulons un maillage exploitable. Les opérations exécutables par les maillages assistés sont de deux types.



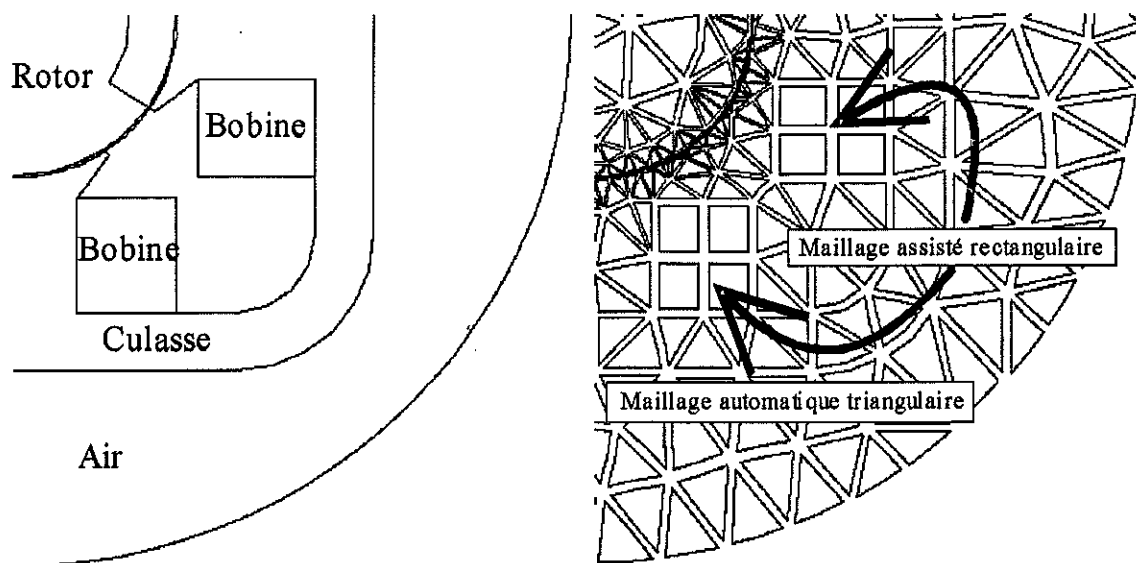


Figure 20 : Maillage assisté d'un quart de géométrie 2D.

Le premier type d'opération consiste à décrire une grille volumique. Un cube sera ainsi décomposé en briques ou en prismes. Dans ce type de maillage, seules des briques sont créées en opposition aux maillages automatiques où seuls des tétraèdres étaient créés.

Le deuxième type d'opération consiste à prendre des maillages existants. Ceux-ci seront dupliqués, propagés ou/et extrudés (Fig.20). Ces types d'opérations nécessitent de la part de l'utilisateur une grande expérience du maillage pour garder au maillage final un caractère continu.

Nous partirons généralement d'une coupe 2D du moteur. L'assistance du maillage consistera à préciser le sens de l'extrusion et le nombre de couches nécessaires pour créer un maillage de bonne qualité. La coupe 2D pouvant contenir soit des triangles soit des rectangles soit une combinaison des deux, nous arriverons à un maillage 3D contenant des prismes ou/et des hexaèdres.

Cette extrusion permet de régler de façon fine la taille des éléments dans l'axe de rotation. L'extrusion idéale devant permettre de créer des éléments très allongés au centre du moteur pour aller vers des éléments fins en bout. Les effets au centre étant essentiellement de type 2D, dans les moteurs de type extrusif. Par contre, la taille des éléments doit être plus petite dans les zones à fort effet 3D qui se trouve en bout de machine.

La formulation magnétique en potentiel vecteur assure de manière forte la conservation du flux normal aux facettes des éléments finis. Il apparaît donc que le maillage prismatique ou hexaédrique assurera mieux le passage du flux dans les parties à effet 2D que ne pourraient le faire les tétraèdres.

Ce type de maillage permet de mailler, de façon optimale, le corps de la machine avec un coût en élément faible et assure une solution fiable. Les maillages assistés ne sont néanmoins pas utilisables sur les têtes des moteurs.

A titre d'exemple, nous allons comparer le nombre d'éléments finis générés par un mailleur automatique et un mailleur assisté (Fig.21). Afin de réaliser une comparaison valable, nous prendrons la même densité de maille pour les deux problèmes.

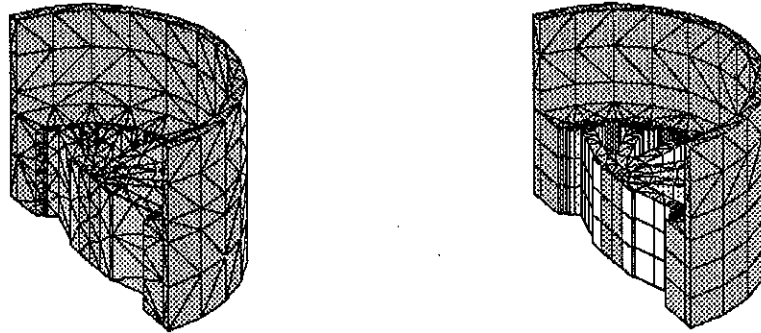


Figure 21 : Maillage automatique et assisté.

	Mailleur automatique.	Mailleur assisté.
Nombre de noeuds.	26066	17060
Nombres d'éléments finis.	18746	7740

Tableau 2 : Comparaison entre deux mailleurs.

Comme nous le voyons dans ce tableau 2, le mailleur automatique crée beaucoup plus de noeuds et donc d'éléments que le mailleur assisté. Ce surplus n'apporte pas de meilleurs résultats. En effet, dans ce type de géométrie, les tétraèdres sont généralement fortement aplatis et par conséquent ne donnent pas de bons résultats numériques.

### 2.2.5. Les mailleurs auto-adaptatifs

Ce type de mailleur ne nécessite aucune intervention de la part de l'utilisateur. Il génère de façon autonome un maillage qui se veut optimal : adapté à la géométrie et aux grandeurs calculées dans celui-ci.

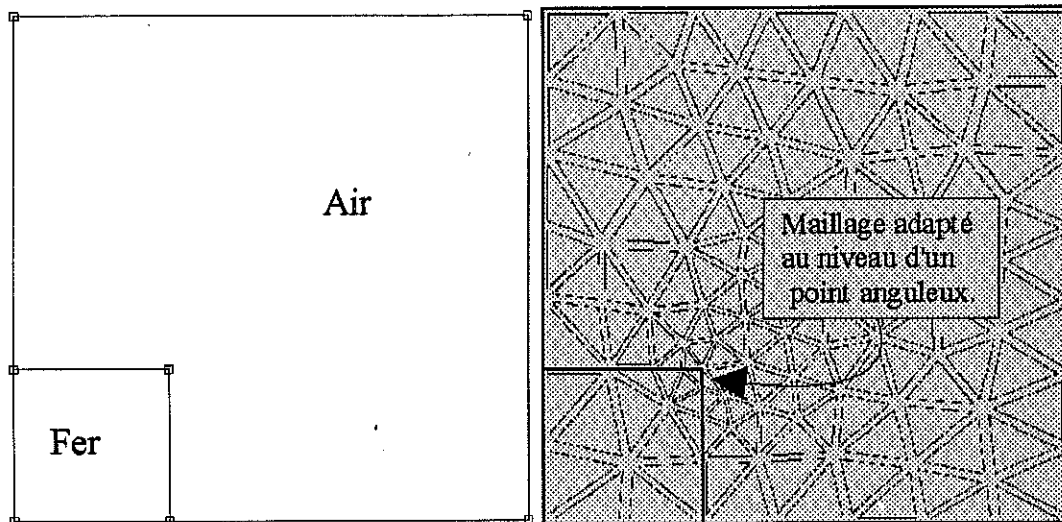


Figure 22 : Maillage adapté d'une géométrie 2D.

Ce mailleur est de type itératif et doit pouvoir analyser les résultats des calculs, ce qui implique un couplage du mailleur avec le solveur. La première étape du processus de résolution du problème consiste à créer un maillage grossier de la géométrie. Une première résolution du problème permet de définir les zones où se trouvent de forts gradients et donc par la même où il faut un maillage fin. Les erreurs sont calculées sur l'énergie, la continuité d'une variable, etc.. Cette première étape exécutée, la seconde consiste à raffiner le maillage dans les zones critiques et de nouveau à résoudre le problème. Ce processus se répète tant que les erreurs ne sont pas inférieures à un seuil désiré (Fig.22).

La qualité essentielle de ce mailleur repose sur l'assurance de la validité de la solution. Son caractère itératif, néanmoins, ne plaide pas en sa faveur. Dans le cas du mouvement, rien ne garantit qu'un maillage optimal le reste quel que soit la position du rotor. Ce type de maillage apparaît donc coûteux en temps (maillage à chaque mouvement) et surtout nécessite un couplage fort avec le solveur.

L'utilisation de ce mailleur, dans le cadre de notre étude, n'est donc pas envisageable.

### 2.2.6. Le maillage optimal

En conclusion, la qualité du maillage aboutit à la qualité de la solution. Le maillage est vital pour la simulation. Le solveur MV3DYN ne peut fournir de bons résultats qu'avec un maillage étudié de façon fine.

Aucun des mailleurs ne correspondant totalement aux exigences des machines tournantes, nous avons mis au point une méthode combinant au mieux les mailleurs automatiques et assistés. L'utilisateur doit dans un premier temps se servir du mailleur automatique pour créer des tétraèdres sur la géométrie complexe de la tête du moteur. Dans un deuxième temps, ce maillage est extrudé par extrusion de sa partie surfacique, créant la partie centrale de la machine grâce au mailleur assisté. Cette manipulation suppose de disposer d'un logiciel permettant l'utilisation simultanée de ces deux mailleurs.

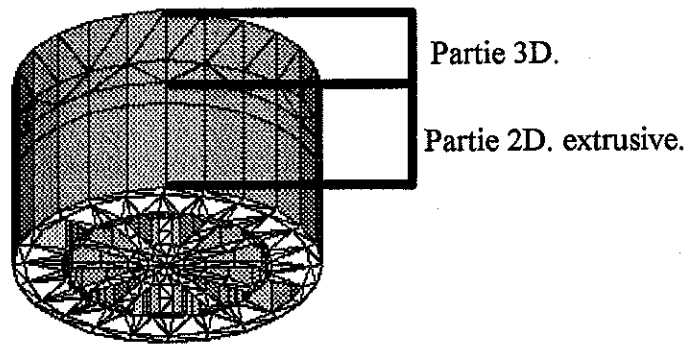


Figure 23 : Maillage mixte d'une machine électrique.

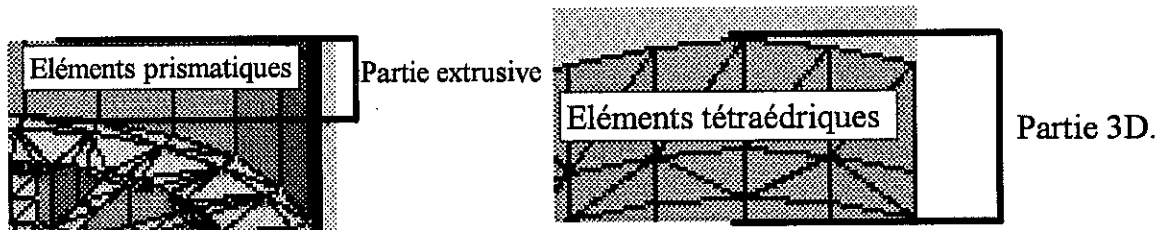


Figure 24 : Agrandissement sur le maillage mixte d'une machine électrique.

Le maillage final est optimal (éléments allongés dans les parties à effet 2D (Fig.23) et tétraédriques dans les parties à effet 3D (Fig.24)) pour l'électromagnétisme des machines tournantes mais surtout, la résolution est possible de manière satisfaisante avec des moyens informatiques standards.

## CONCLUSION

Au terme de ce chapitre, nous avons vu les principaux problèmes posés par la modélisation des machines tournantes en 3D.

Les matériaux sont décrits par l'intermédiaire de repères qui les positionnent dans l'espace et de leurs propriétés physiques (propriétés classiques 2D si le matériau est isotrope).

La description des conditions limites demande l'utilisation d'une interface graphique pour être conviviale et surtout fiable.

Le plus grand problème est posé par la capacité limitée des moyens informatiques à notre disposition. Une méthode de maillage spécifique a été développée pour contourner ce problème dans le cas des moteurs à géométries extrusives.

Cette méthode est néanmoins limitative. En effet, les géométries purement 3D (non extrusives) ne sont à l'heure actuelle pas modélisables de manière fine et valides avec le matériel informatique actuellement à notre disposition bien que le logiciel lui en soit capable.

**CHAPITRE 3.**  
**LA PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT**



## INTRODUCTION

La prise en compte du mouvement de rotation se fera essentiellement à la jonction entre une partie fixe et une partie mobile. Cette partie intermédiaire sera le plus souvent de l'air mais rien ne limite a priori son utilisation avec un matériau conducteur ou magnétique. Néanmoins cette particularité permet d'ignorer, dans un premier temps, les phénomènes dépendants de la vitesse tels que les courants de Foucault dans cette partie intermédiaire.

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédant, la qualité du maillage influe sur la solution mais MV3DYN ne peut contrôler celui-ci. La solution retenue pour décrire la mobilité est de diviser le maillage en trois régions. Le maillage fixe qui comprend pour un moteur toutes les parties statoriques ainsi que l'air extérieur. Le maillage mobile qui comprend le rotor et l'air interne au rotor et le maillage entrefer sur lequel sera pris en compte le mouvement.

Pour des raisons de mécanique, l'entrefer doit être cylindrique ou au moins présenter une symétrie de révolution. Dans les exemples, nous traiterons uniquement des entrefers de type cylindrique creux, fermés ou non par un disque.

Les solutions pour traiter la zone de jonction dérivent de trois grandes familles utilisées en deux dimensions avec succès. Dans ce chapitre, nous décrirons leurs principes, leurs avantages et inconvénients et surtout leurs extensions éventuelles en trois dimensions.

Les critères de comparaisons, entre les différentes méthodes, sont au nombre de quatre que nous allons expliciter.

a) Le calcul par éléments finis consiste à résoudre un système du type  $[M]*[A] = [S]$  où M est la matrice principale, A le vecteur des inconnues et S le vecteur source. M est constituée de l'assemblage des matrices élémentaires de chaque élément fini. Cette matrice creuse est définie positive et est bien conditionnée. Les solveurs permettant de résoudre ces systèmes sont fiables et rapides. Il est donc important que la méthode retenue permette de garder ce type de matrice.

b) Les valeurs globales telles que le couple ou le flux doivent varier de façon continue quel que soit le déplacement des pièces mécaniques si l'alimentation électrique varie continûment. Cette continuité nécessite que la méthode génère des erreurs de calculs les plus faibles possibles ou du moins homogènes entre elles en fonction du déplacement. Cette condition est respectée si le système à résoudre est invariant ou varie de façon continue en fonction du mouvement.

c) La méthode retenue doit de même être facile à mettre en oeuvre. L'utilisateur ou le programmeur désire, dans notre cas, modéliser essentiellement le comportement électromagnétique. Le traitement du comportement cinématique ne doit pas alourdir exagérément le système à résoudre. Si l'interface (mobile/fixe) représente n% de la géométrie, son traitement ne doit pas dépasser n% de l'effort de calcul.



d) Il est parfois nécessaire de résoudre les problèmes en utilisant différents modèles et formulations. (Modèle Electrostatique, Magnétostatique, Electrocinétiq ue, Dynamique etc. avec les formulations Potentiel scalaire réduit, Potentiel vecteur etc.). Il est souhaitable dans la mesure du possible que la méthode de prise en compte du mouvement soit transposable simplement quels que soient le modèle et la formulation retenue. La méthode idéale devra être indépendante des variables d'état à traiter.

Nous étudierons dans un premier temps les méthodes utilisant les intégrales de frontière ou apparentées. Ces méthodes sont usuellement employées en 2D. Leurs utilisations en 3D posent quelques problèmes, comme nous le verrons par la suite, qui les rendent rédhibitoires. La modélisation du mouvement se réalise dans ce cas sur le volume de l'entrefèr.

Dans un deuxième temps, nous aborderons les méthodes utilisant le remaillage total ou partiel de la géométrie. Ces méthodes d'usage courant en 2D peuvent être utilisées aussi en 3D à condition de posséder des maillèurs suffisamment spécialisés. Nous verrons que les résultats obtenus ne sont pas réellement convaincants. La modélisation du mouvement se réalise, comme précédemment, sur le volume de l'entrefèr.

Dans un troisième temps, nous étudierons des méthodes permettant au contraire des précédentes de modéliser le mouvement sur une surface mobile/fixe et non plus sur un volume. Ces méthodes, en raison de leurs aspects surfaciques, sont plus en mesure de répondre à nos besoins et à nos critères de validité. Les techniques d'interpolation que nous utiliserons appartiennent à cette famille.

Ce chapitre se terminera sur le traitement unifié des conditions limites de tous types et du mouvement par l'utilisation judicieuse de combinaisons linéaires.

### 3.1. LES FORMULES INTEGRALES

Cette famille peut être séparée en deux cas distincts qui sont les intégrales de frontières et le macro-élément.

#### 3.1.1. Le macro-élément

Le but du macro-élément [Abdel-Razek 82] est de remplacer les éléments finis indéformables composant l'entrefer par un unique élément appelé macro-élément qui lui aura une géométrie déformable.

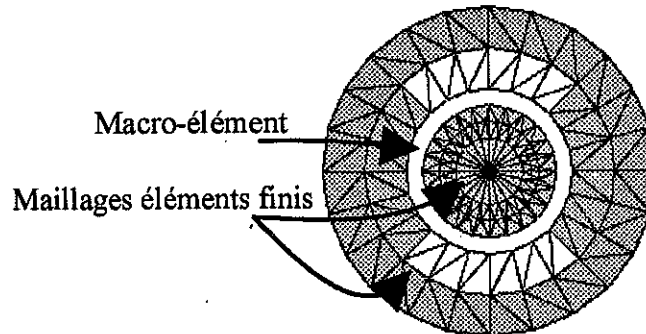


Figure 25 : Macro-élément dans un maillage éléments finis.

Le macro-élément (Fig.25) se présente sous la forme d'un élément fini qui serait composé de  $N$  noeuds où  $N$  est le nombre de noeuds délimitant l'entrefer.

Comme pour un élément classique, il est nécessaire de trouver des fonctions de forme de l'élément respectant :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i \quad (3.1)$$

où  $\alpha_i$  sont les fonctions de forme de l'élément sachant que  $\alpha_i = 1$  au noeud  $i$  et 0 sur les autres noeuds.

Cette méthode a des avantages incontestables. Elle permet de mailler de manière totalement indépendante et donc de manière hétérogènes les parties mobiles et fixes de la géométrie. Du fait de l'ordre élevé des fonctions utilisées, la solution obtenue dans l'entrefer est de bonne qualité. Le macro-élément générant un système d'équations invariant par le mouvement, il s'ensuit que la précision obtenue sera elle aussi invariante quel que soit le déplacement. Ceci assure une dispersion minimale de l'erreur commise sur les grandeurs globales. Comme nous l'avons vu au chapitre précédant, le maillage de l'entrefer pose un problème du fait de son épaisseur. Grâce à cette méthode, ce problème ne se pose plus. Le mailleur automatique devient a priori utilisable pour tous les types de machines tournantes.

Néanmoins, toute méthode a ses défauts. Si nous regardons finement le macro-élément, nous remarquons que chaque noeud le composant est connecté à  $N-1$  noeuds. Cela implique que le système d'équations, produit par ce type élément, est de taille  $N*N$ .

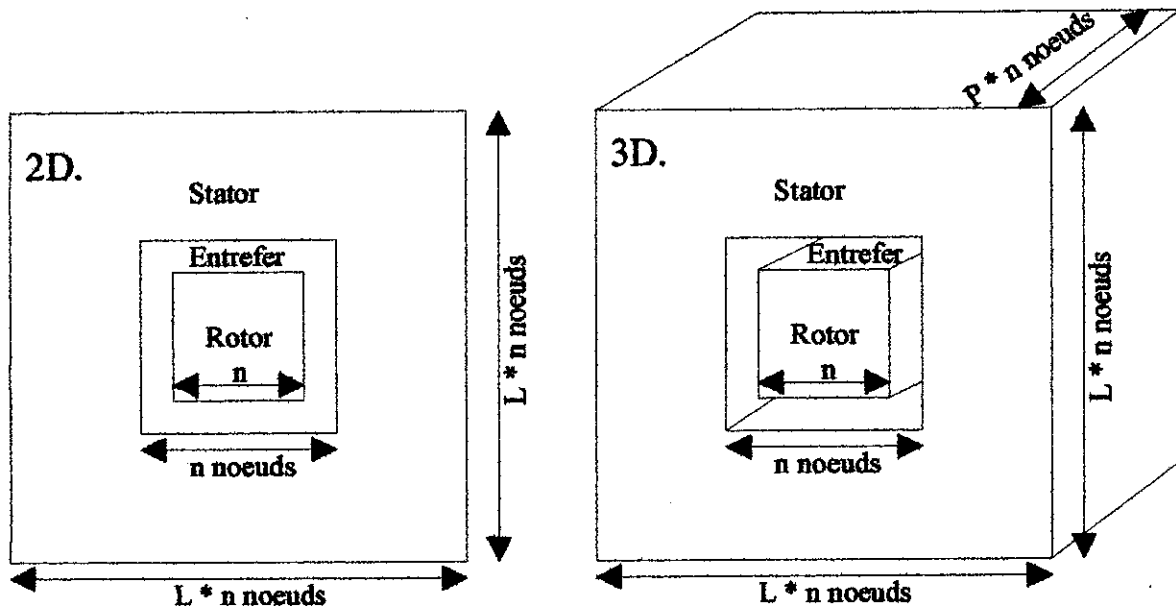


Figure 26 : Exemple simple en 2D et 3D.

Comparons les cas 2D et 3D sur une géométrie simple (Fig.26). Nous considérons que le rotor est défini par  $4 * n$  noeuds. L'entrefer est suffisamment fin pour être délimité lui aussi par  $4 * n$  noeuds. Le stator est lui, délimité par  $4 * L * n$  noeuds. La profondeur en 3D est représentée par  $P * n$  noeuds. Nous prendrons comme largeur de bande pour la matrice éléments finis 2D : 10 et 3D : 100.

Caractéristiques.	2D.	3D.
Noeuds au total : $n_t$	$(L*n)^2$	$(L*n)^2*P*n$
Noeuds délimitant l'entrefer : $n_e$	$2*4*n$	$2*6*n*P*n$
Taille de la sous-matrice du macro-élément d'entrefer : $M_e$	$n_e^2 = (8n)^2$	$(12n^2*P)^2$
Taille totale de la matrice des éléments finis : $M_t$	$10*n_t = 10 * (L*n)^2$	$100*n_t = 100 * (L*n)^2*P*n$
Rapport $(M_e + M_t) / M_t$	$\frac{((8n)^2 + 10(Ln)^2)}{10(Ln)^2}$ $= 1 + \frac{64}{10L^2}$	$\frac{((12n^2P)^2 + 100(nL)^2 nP)}{100(nL)^2 nP}$ $= 1 + \frac{1.44P}{L^2} . n$

Nous remarquons que l'utilisation du macro-élément est totalement justifié en 2D puisque le rapport éléments finis/macro-élément reste constant quel que soit le maillage utilisé et est de l'ordre de quelques unités.

Il en est tout autrement en 3D car là le rapport varie proportionnellement au nombre de noeuds et donc proportionnellement à la finesse du maillage employé. Prenons comme profondeur du moteur  $P = 10$  couches, comme largeur  $L = 10$  et un nombre de noeuds de 3000 pour délimiter l'entrefer. Le rapport des tailles de la matrice du macro-élément sur la matrice élément finis est de l'ordre de 400. Cet exemple ne prend, de plus, pas en compte le fait que le potentiel vecteur magnétique  $A$  compte une variable en 2D et 3 en 3D.

L'utilisation du macro-élément nécessite donc quelques centaines de fois plus de place que tous les autres éléments finis !

Réfléchissons maintenant sur le système informatique nécessaire pour résoudre ce problème. L'expérience en 3D nous montre que les éléments finis nécessitent l'utilisation de plusieurs centaines de Moctects si nous voulons obtenir de bons résultats. L'utilisation du macro-élément est totalement proscrite s'il faut multiplier cette taille par 400.

Pour cette raison, cette solution, bien qu'acceptable en 2D, ne peut être utilisée en 3D de manière rentable.

### **3.1.2. Les intégrales de frontières**

Cette méthode de connexion [Bouillault 86-88] comme la précédente permet de se passer du maillage de l'entrefer. Celle-ci est surtout utilisée dans le cas de domaine ouvert. Elle permet la simulation de l'infini en décrivant celui-ci exclusivement à partir de la fonction inconnue et de sa dérivée sur la frontière du domaine à étudier.

Cette méthode présente les mêmes avantages et malheureusement les mêmes défauts que le macro-élément à savoir une bonne qualité de solution quel que soit le mouvement mais elle génère un système qui croît avec le carré du nombre de noeuds sur le domaine à modéliser.

Donc pour les mêmes raisons, les intégrales de frontières ne sont pas envisageables en 3D en potentiel vecteur avec le type de géométrie que nous avons à traiter.

## **3.2. LES METHODES DE REMAILLAGES**

Le remaillage peut se réaliser de deux façons différentes soit par un remaillage complet de la géométrie à chaque position soit par un remaillage partiel, dans notre cas de l'entrefer.

Le système matriciel à résoudre est dans ce cas de type éléments finis (creux et défini positif).

### **3.2.1. Le remaillage complet**

Cette méthode, comme son nom l'indique, consiste à remailler totalement la géométrie à chaque mouvement. Ceci impose que le logiciel possède un mailleur intégré et qu'il puisse lire la géométrie du modèle. En effet, un mailleur se base sur les faces et volumes d'une géométrie et non sur un maillage originel.

Cette méthode permet de simuler de façon économique le mouvement si l'on dispose d'un logiciel permettant le paramétrage de la géométrie et capable de lire des fichiers de commandes. Le paramétrage permet par l'intermédiaire d'un angle de rotation de faire pivoter le rotor. Le fichier de commandes permet le bouclage (Fig.27) :

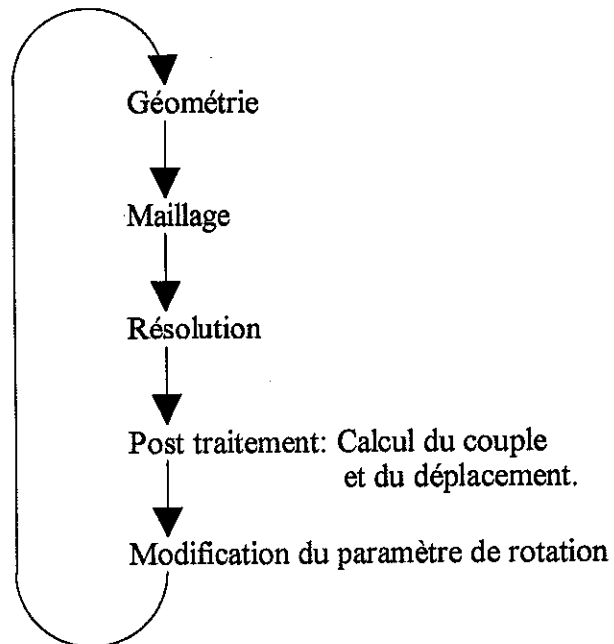


Figure 27 : Graphe des commandes.

Le mailleur intégré ne peut généralement générer que des tétraèdres, qui comme nous l'avons vu, ne sont pas adaptés aux moteurs. Cette solution ne permet pas d'assurer une dispersion homogène des erreurs commises lors de la résolution en fonction du mouvement.

A titre d'expérience le mailleur automatique du logiciel FLUX3D [Coulomb 85] a été utilisé. La figure 28 indique le nombre d'éléments finis obtenu en fonction de la position du rotor.

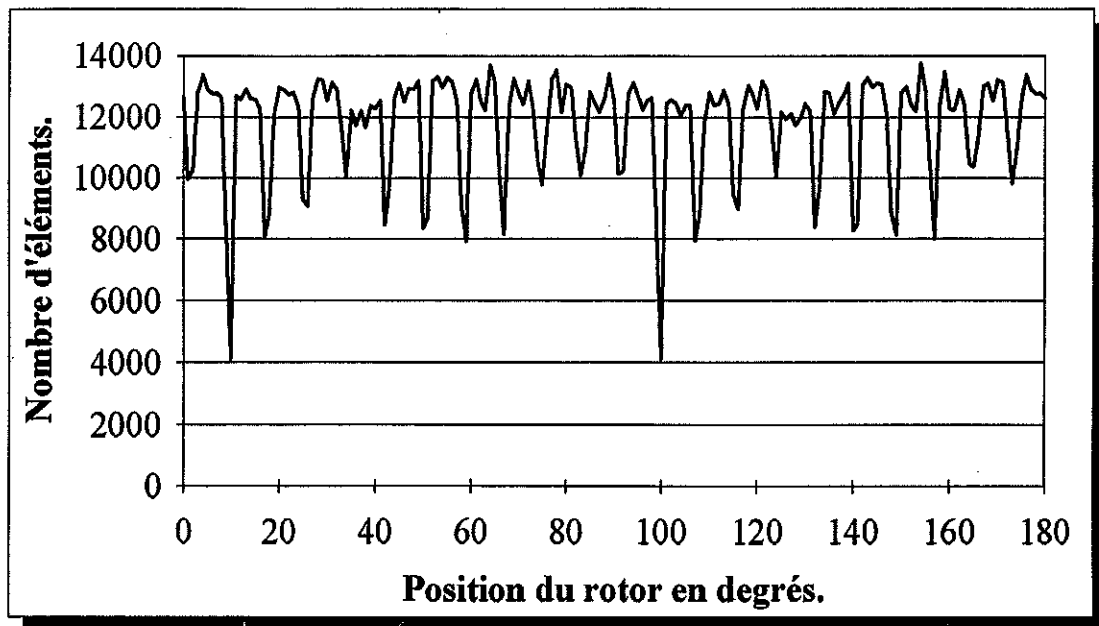


Figure 28 : Nombre d'éléments finis en fonction de la position du rotor.

Sur cet exemple, nous remarquons que le nombre d'éléments finis nécessaires au maillage du moteur peut varier du simple au triple en l'espace de quelques degrés. La répercussion sur les grandeurs calculées est loin d'être négligeable.

De plus, la lecture de la géométrie est nécessaire pour créer un maillage valide. Cette lecture est des plus ardue puisque pratiquement chaque modelleur géométrique possède sa propre définition des entités faces, volumes, lignes et points. Cela a fort heureusement été compris par les développeurs de logiciels qui proposent des commandes permettant l'exportation de la géométrie dans des formats standards. Malheureusement, notre expérience nous a montré que le terme "standard" repose sur des bases floues ; en effet, l'interprétation est permise. Nous rappellerons, de plus, que chaque logiciel est susceptible d'évoluer. Il est alors nécessaire de réactualiser de manière périodique les routines de lecture. Cette solution est difficilement maîtrisable dans le temps et nécessite des investissements en programmation non nuls à chaque nouvelle version du modelleur géométrique.

Pour toutes ces raisons, MV3DYN ne peut se permettre de faire du remaillage total.

### 3.2.2. Le remaillage local ou partiel

Dans ce type de remaillage, [Davat 85, Hole 85, Salon 89, Vassent 90] seule la partie de transition entre la partie mobile et fixe est remaillée. Cette méthode est couramment utilisée dans les logiciels 2D car elle permet de garder intégralement la méthode des éléments finis et de plus elle est facile à mettre en oeuvre en 2D.

Cette méthode de modélisation du mouvement pose néanmoins un problème. Le maillage et par la même occasion la topologie du problème varient de façon discontinue. Ceci provoque des bruits numériques indésirables sur les grandeurs globales qui peuvent dans certains cas critiques dissimuler les harmoniques de temps ou/et d'espace propres au modèle simulé.

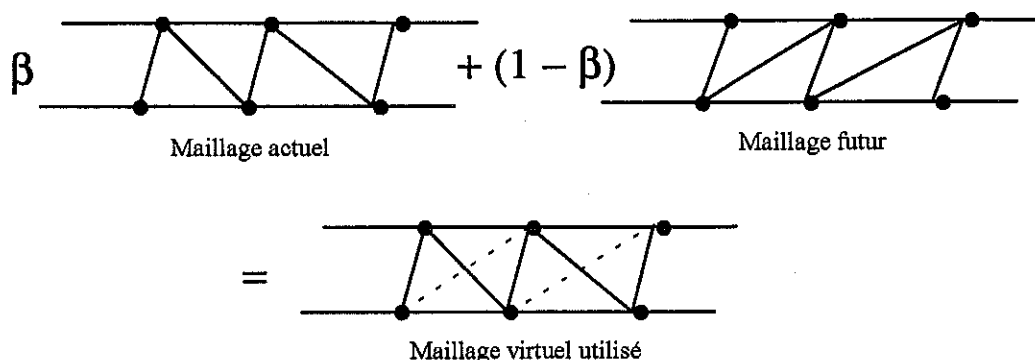


Figure 29 : Double maillage local en 2D.

Cette restriction peut être levée en utilisant des techniques de double maillage local (Fig.29). Le maillage résultant est calculé proportionnellement à la qualité de chaque maillage

( $\beta \in [0,1]$ ). Cette solution permet de rendre la variation de topologie plus continue en fonction du mouvement.

En 2D, le remaillage de l'entrefeu ne pose aucun problème. Il suffit de connecter des lignes en vis à vis pour former des éléments triangulaires ou rectangulaires. En 3D, le problème est plus ardu à résoudre de façon générale et pratique.

Ce maillage doit se faire sans rajouter de noeuds sur les parties frontières. Il s'ensuit qu'il est difficile de garantir que deux maillages indépendants sont connectables sans rajouter de noeuds avec des éléments standards de types tétraèdres, prismes ou hexaèdres. Seules les géométries simples, permettant des maillages simples issus d'extrusion 2D, peuvent garantir, à coup sûr, la faisabilité du remaillage.

Pour cette raison, cette méthode n'a été testée et validée que sur une géométrie simple "Le coupleur magnétique" comme nous le verrons dans le chapitre 5.

Le remaillage local ne paraît pas envisageable de façon simple et efficace dans les cas plus généraux. Une étude approfondie sur le maillage par éléments finis permettrait sans doute d'aller plus loin mais ceci n'est pas le but de notre travail.

### 3.3. LES METHODES DE CONNEXIONS SURFACIQUES

Ces méthodes permettent de garder intégralement le maillage original. Les méthodes intégrales modélisent de façon volumique la zone de mouvement tandis que les méthodes de connexion modélisent seulement de façon surfacique celle-ci.



La géométrie est divisée en deux maillages distincts. Le maillage fixe, qui est similaire au maillage fixe défini précédemment, comprend toutes les parties statiques d'un moteur. Le maillage mobile qui regroupe le maillage mobile et entrefer comprend le reste de la géométrie. La zone de connexion est formée par une surface cylindrique fermée ou non par un disque (Fig.30).

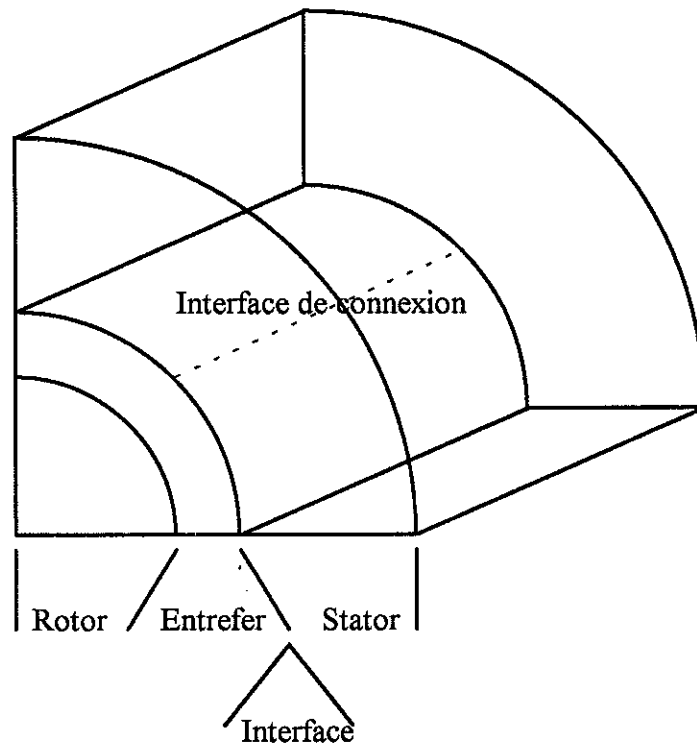


Figure 30 : Interface de connexion sur 1/4 de géométrie.

La connexion de ces deux maillages peut se faire à l'aide de trois méthodes.

### 3.3.1. Les multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode [Maréchal 90, Rodger 90, Lai 91] permet de garantir la continuité de la composante normale de l'induction le long de l'interface de connexion.

Classiquement, la fonctionnelle d'énergie à minimiser s'écrit en potentiel vecteur :

$$F = \int_{\Omega} \left( \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{J} \right) d\Omega + \text{conditions limites} \quad (3.2)$$

Les intégrales, liées aux conditions limites, n'interviennent pas dans la description de la méthode. A la fonctionnelle classique, nous rajoutons une fonctionnelle valable uniquement sur l'interface de connexion entre deux régions :

$$F' = \int_{\Gamma} \lambda (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) dS \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  sont les potentiels vecteurs magnétiques de part et d'autre de l'interface et  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange [Zienkiewicz 89].

L'optimisation de la fonctionnelle totale  $\Pi$  consiste à annuler sa différentielle :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (\mathbf{H} \text{ rot} \delta\mathbf{A} - \mathbf{J} \delta\mathbf{A}) d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda (\delta\mathbf{A}_1 - \delta\mathbf{A}_2) dS + \int_{\Gamma} \delta\lambda (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) dS = 0 \quad (3.4)$$

L'introduction du théorème de Green, sur cette équation, donne :

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\mathbf{A} (\text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{A}_1 (v_1 \text{ rot} \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{n}_1 + \lambda) dS \\ + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{A}_2 (v_2 \text{ rot} \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{n}_2 - \lambda) dS + \int_{\Gamma} \delta\lambda (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  : Normales extérieures aux régions à raccorder.  
 $v_1, v_2$  : Reluctivités respectives des régions à raccorder.

Ce qui nous amène au système d'équations suivant :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{sur } \Omega_1 \quad (3.6)$$

$$\lambda_1 = -v_1 \text{ rot} \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{n}_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3.7)$$

$$\lambda_2 = +v_2 \text{ rot} \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{n}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) assure la continuité de  $\mathbf{A}$  au passage de l'interface et par la même occasion la continuité de la composante normale de l'induction. Les équations (3.7) et (3.8) permettent l'identification du multiplicateur de Lagrange avec la composante tangentielle du champ. Cette composante est continue donc  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Cette manière de traiter l'interface génère des systèmes matriciels mals conditionnés qui convergent de manière lente vers la solution. L'obtention d'un résultat fiable dépend de la densité de maillage de part et d'autre de l'interface.

Cette méthode est de plus fortement liée à la formulation. Il sera nécessaire de définir des routines spécifiques pour chaque formulation utilisable.

Néanmoins, elle génère des topologies de systèmes très proches des systèmes éléments finis donc économiques en mémoire. De même, si la zone de transition représente n% de la géométrie, elle sera modélisée avec n% du système.

### 3.3.2. La connexion par interpolation nodale

Cette méthode s'appuie sur l'interpolation de maillage [Perrin-Bit 94]. Elle est donc indépendante de la formulation et garde au système matriciel son caractère creux. De plus, lors du mouvement, les interpolations varient de façon continue, ce qui entraîne que la topologie du système matriciel à résoudre et la solution varient de façon continue.

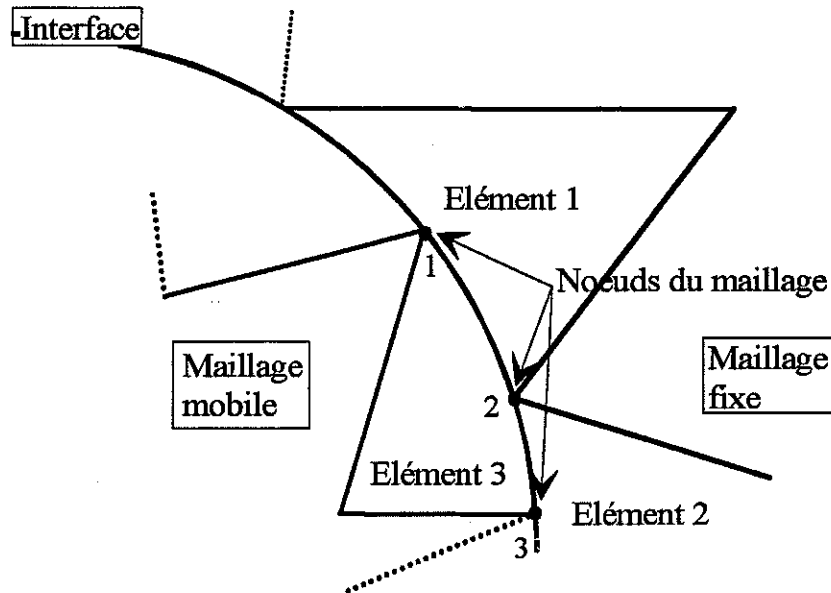


Figure 31 : Schéma de connexion par interpolation nodale en 2D.

Le bord du maillage mobile est considéré comme une limite sur laquelle il est nécessaire d'appliquer des conditions limites spéciales.

La connexion par interpolation nodale se propose de connecter de façon satisfaisante chaque nœud mobile avec chaque élément volumique fixe. L'expression de la variable nodale sur le nœud mobile sera du type :

$$u^m = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^f \quad (3.10)$$

- où
- $n$  : Représente le nombre de nœuds de l'élément volumique en vis à vis du nœud à connecter.
  - $u^m$  : La variable d'état du problème sur le nœud mobile.
  - $u^f$  : Les variables d'états sur les nœuds fixes.
  - $\alpha$  : Facteurs restant à déterminer de façon la plus satisfaisante possible.

Le but de cette méthode de connexion est de préserver au mieux les propriétés de la modélisation par éléments finis.

Ce qui amène la constatation suivante. Si le noeud mobile à connecter et en face d'un noeud fixe dans l'élément volumique, l'équation doit se réduire à :

$$u^m = u_i^f \quad (3.11)$$

où  $i$  : L'indice du noeud fixe occupant en fait la même place que le noeud à connecter.

Ce comportement rappelle les propriétés des fonctions de formes qui sont égales à 1 en un noeud et à 0 sur les autres. Cela nous amène à décrire  $\alpha_i$  comme étant les valeurs des fonctions de forme des noeuds  $i$  évaluées au noeud à connecter.

Ce type de connexion permet de garder l'aspect symétrique, bien conditionné du système matriciel.

Les points forts de cette méthode sont :

- Le fait que, s'il n'y a pas de mouvement, le problème est alors un problème éléments finis standard.
- La topologie de la matrice de résolution varie de façon continue en fonction du mouvement.
- Cette connexion est utilisable quelle que soit la formulation adoptée pour décrire les phénomènes magnétiques.

Les défauts sont les suivants :

- La connexion par interpolation nodale n'assure qu'en moyenne la continuité de la variable d'état du problème.
- Si les maillages de part et d'autre de l'interface sont fortement hétérogènes certains noeuds ne seront pas connectés.

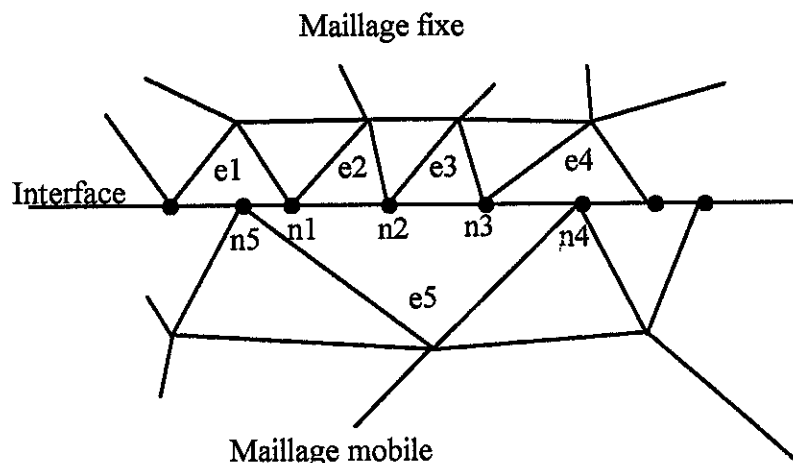


Figure 32 : Maillages hétérogènes en 2D.

Dans cet exemple (Fig.32), le maillage de la partie fixe est quatre fois plus dense que le maillage de la partie mobile. Le noeud mobile 5 est connecté aux noeuds fixes de l'élément 1 et le noeud 4 est lui connecté aux noeuds fixes de l'élément 4. Les noeuds fixes 1 et 3 sont donc connectés, par contre le noeud 2 est libre. Cette non-connexion n'est pas acceptable et peut être résolue de deux manières différentes.

La première solution consiste à créer **localement** une connexion inverse allant des noeuds fixes aux mobiles (connexion du noeud 2 à l'élément 5 en gardant les précédentes connexions). Cette solution suppose la réalisation d'un outil de vérification de connexion de maillage qui peut se révéler complexe à mettre en oeuvre.

La deuxième solution consiste à inverser, de manière **générale**, le sens des connexions (connexion n1-e5 n2-e5 n3-e5). Il faut dans ce cas détecter au préalable quel est le maillage le plus dense au voisinage de l'interface.

Ces deux solutions ne sont pas réellement satisfaisantes d'un point de vue général. Mais nous noterons que généralement la géométrie entière est maillée en une seule fois. Le maillage est donc homogène et continu dans tout le domaine modélisé. Le long de l'interface, le maillage est donc aussi homogène. Nous n'aurons donc pas de problème de connexion de noeud.

c) Le caractère nodal (1D) de la connexion dans un domaine 3D n'est pas satisfaisant. Comme le montre la figure (32), le noeud mobile 5 ne dépend que de l'élément 1 alors que l'élément mobile 5 dont il est issu voit les éléments 1, 2, 3, 4.

### 3.3.3. La connexion par extrapolation nodale

Pour résoudre les défauts de la connexion par interpolation, il paraît utile de créer une connexion plus forte du type surfacique. Cette méthode permet de connecter un élément surfacique aux éléments volumiques lui faisant face. La continuité de la variable d'état du problème sera dans ce cas assurée de façon locale.

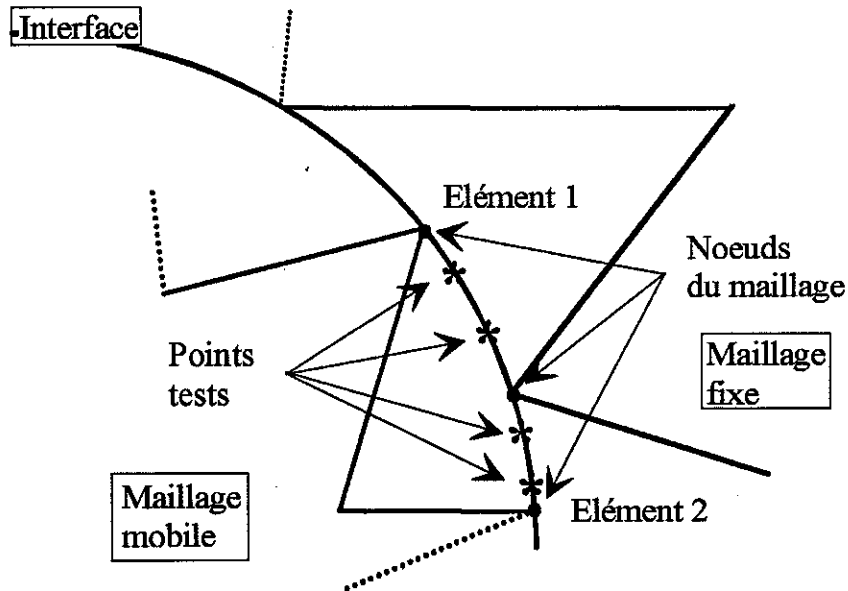


Figure 33 : Schéma de connexion par extrapolation nodale en 2D.

Au lieu de connecter les noeuds de l'élément surfacique, la méthode consiste à connecter des points tests définis sur l'élément surfacique (Fig.33). La méthode des éléments finis se servant des points de Gauss des éléments, il peut être intéressant de connecter ces mêmes points. Sur chaque point test, les  $\alpha_i$  de l'équation :

$$u^m = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i^f \quad (3.12)$$

sont déterminés.

Les coordonnées des points tests sont reliées aux coordonnées réelles des noeuds de l'élément surfacique par la relation :

$$[C_{te}] = [T][C_{es}] \quad (3.13)$$

où  $C_{te}$  : Coordonnées des points tests.  
 $C_{es}$  : Coordonnées des noeuds de l'élément surfacique à connecter.  
 $T$  : Matrice de transformation.

Les équations de connexion sur chaque point test sont projetées sur les noeuds de l'élément surfacique par la relation :

$$[U_{es}^m] = T^{-1} \left[ \sum_i \alpha_i u_i^f \right] \quad (3.14)$$

La résolution se fera de la même manière que pour la connexion par interpolation nodale car les équations sont aussi des combinaisons linéaires des variables d'état.

Cette méthode de connexion possède les mêmes avantages que la méthode d'interpolation nodale et résout les inconvénients de cette dernière si le nombre de points tests par élément surfacique est suffisant.

Néanmoins, cette méthode possède un défaut. En effet, l'inversion de la matrice  $T$  prend un temps d'unité centrale non négligeable mais surtout du fait que le couplage est plus fort, la largeur de bande de la matrice de résolution croit. Ceci accroît ainsi les temps de calculs.

### 3.3.4. Récapitulatif

	Taille matrice.	Traitement entrefer.	Topologie matrice.	Utilisation.
Macro-élément.	$N*N$	Aucun	Inchangée	2D
Intégrales de frontière.	$N*N$	Aucun	Inchangée	2D
Remaillage.	$N*Lb$	Mailleur spécialisé	Variation discontinue	2D-3D Bruits numériques
Multiplicateur de Lagrange.	$N*Lb*Cf\_Lg$	Localisateur	Variation continue	2D 3D Difficile
Interpolation nodale.	$N*Lb$	Localisateur	Variation continue	2D-3D entrefer maillage régulier
Extrapolation nodale.	$N*Lb\_std*Cf\_Ext$	Localisateur	Variation continue	2D-3D Plus coûteux que l'interpolation

Tableau 3 : Récapitulatif.

- N** : Nombre d'équations de la partie "entrefer" du système matriciel.  
**Lb** : Largeur de bande de la matrice du système.  
**Cf\_Lg** : Coefficient de Lagrange ~ 2.  
**Cf\_Ext** : Coefficient d'extrapolation nodale ~ 2. (Valeur constatée lors des tests)  
**Localisateur** : Outil permettant de localiser élément volumique le plus proche d'un noeud.

### 3.3.5. Traitement unifié des méthodes de connexion et des conditions limites

La connexion repose sur le traitement d'une combinaison linéaire par variables et par noeuds du type :

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \quad (3.15)$$

où  $\beta_i$  peut en particulier représenter les  $\alpha_i$  des fonctions de formes. Afin de généraliser cette équation, nous rajoutons une constante. Le traitement sera ainsi le plus complet possible.

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \quad (3.16)$$

Cette généralisation va nous permettre de traiter de façon simple et élégante des conditions limites de type Dirichlet, tangentes, normales ainsi que des conditions cycliques ou périodiques et de résoudre les problèmes de libération de la composante normale sur une interface.

#### 3.3.5.1. Les conditions limites

##### 3.3.5.1.1. Conditions tangentes

Ce type de limite permet, dans le cas du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , d'imposer une induction normale à la limite. Cette limite peut être géométriquement quelconque. Les combinaisons linéaires permettent, en effet, d'appliquer des conditions limites sur n'importe quelle géométrie.

Prenons un exemple :

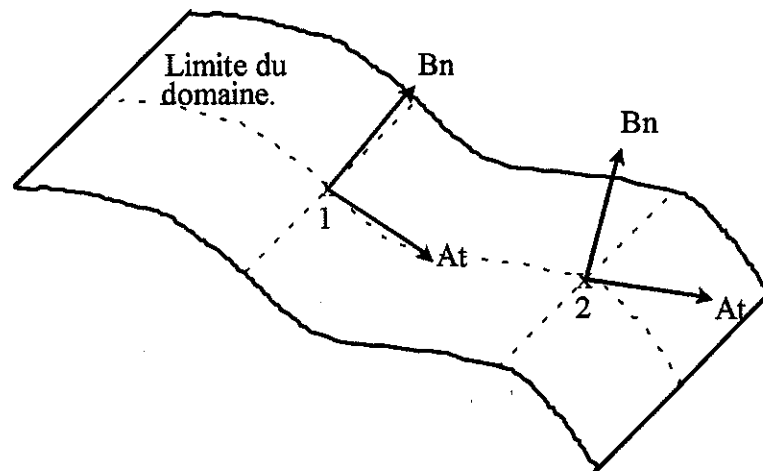


Figure 34 : Conditions limites tangentes en 3D.



La limite du domaine est représentée par une surface quelconque (Fig.34). Les noeuds 1 et 2 supporte le maillage interne. Sur ces noeuds, B sera normal, ce qui peut être obtenu en imposant  $\mathbf{A}$  tangent à la frontière. Nous arrivons aux équations suivantes pour le noeud :

Posons :

$$\begin{Bmatrix} A_{t1} \\ A_{t2} \\ A_n \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

où  $R$  : Représente une matrice de rotation.  
 $A_{x,y,z}$  : Composantes dans le repère général du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .  
 $A_{t1,t2}$  : Composantes tangentielles de  $\mathbf{A}$  sur la limite du domaine.  
 $A_n$  : Composante normale de  $\mathbf{A}$  sur la limite du domaine.

Il suffit d'annuler la composante normale, ce qui donne :

$$A_n = r_{31}A_x + r_{32}A_y + r_{33}A_z = 0 \quad (3.18)$$

pour assurer que  $\mathbf{A}$  est tangent à la limite sur les noeuds frontières.

Nous pouvons donc exprimer une des composantes de  $\mathbf{A}$  en fonction des 2 autres :

$$\text{soit } A_x = -\frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{31}}A_y - \frac{\Gamma_{33}}{\Gamma_{31}}A_z \quad (3.19)$$

$$\text{soit } A_y = -\frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{32}}A_x - \frac{\Gamma_{33}}{\Gamma_{32}}A_z \quad (3.20)$$

$$\text{Soit } A_z = -\frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{33}}A_x - \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{33}}A_y \quad (3.21)$$

Pour des raisons numériques, nous imposerons, de préférence, la limite sur la composante dont l'équation a le plus grand dénominateur afin de garder des ordres de grandeurs les plus homogènes possibles dans le calcul.

Dans tous les cas nous obtenons une expression du type de (3.16).

### 3.3.5.1.2. Conditions normales

La condition normale sur  $\mathbf{A}$  permet d'avoir une condition sur la limite de type tangent en B (Fig.35). Ces conditions seront utilisées essentiellement sur les bords extérieurs de la boîte englobant la géométrie et sur les plans de symétries. Les équations à établir sont similaires aux précédentes.

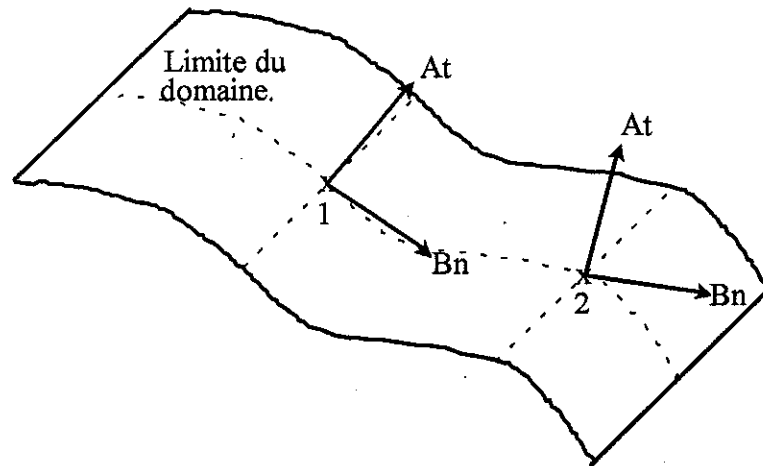


Figure 35 : Conditions limites normales en 3D.

Posons :

$$\begin{Bmatrix} A_{t1} \\ A_{t2} \\ A_n \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Nous voulons :

$$\begin{Bmatrix} A_{t1} \\ A_{t2} \\ A_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_n \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

pour assurer que  $\mathbf{A}$  est normal sur la frontière du domaine.

En combinant les deux équations précédentes, nous arrivons :

$$\text{soit à :} \quad [R_{xy}] \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma_{13} \\ \Gamma_{23} \end{Bmatrix} A_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\text{soit à :} \quad [R_{yz}] \begin{Bmatrix} A_y \\ A_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{21} \end{Bmatrix} A_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\text{soit à :} \quad [R_{xz}] \begin{Bmatrix} A_x \\ A_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma_{12} \\ \Gamma_{22} \end{Bmatrix} A_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

où

$$[\mathbf{R}_{xy}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$[\mathbf{R}_{yz}] = \begin{bmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{22} & r_{23} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[\mathbf{R}_{zx}] = \begin{bmatrix} r_{13} & r_{11} \\ r_{23} & r_{21} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Ce qui nous amène à :

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} = -[\mathbf{R}_{xy}]^{-1} \begin{Bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \end{Bmatrix} A_z \quad (3.30)$$

$$\begin{Bmatrix} A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = -[\mathbf{R}_{yz}]^{-1} \begin{Bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \end{Bmatrix} A_x \quad (3.31)$$

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_z \end{Bmatrix} = -[\mathbf{R}_{xz}]^{-1} \begin{Bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{Bmatrix} A_y \quad (3.32)$$

Nous garderons l'équation qui possède le déterminant le plus grand toujours dans le but de garder les ordres de grandeurs les plus homogènes dans les calculs. Ce qui correspond en fait à exprimer deux composantes en fonction de la composante la plus proche de la normale du noeud.

Là encore, nous obtenons une expression du type de (3.16)

### 3.3.5.2. Les conditions cycliques

Ces conditions sont utilisées essentiellement sur des géométries possédant des motifs se répétant aussi bien géométriquement que physiquement. Dans le cas des moteurs, les conditions du type cyclique (ou anti-cyclique) permettent de modéliser  $1/p$  (ou  $1/2p$ ) du moteur où  $p$  est le nombre de paires de pôles de la machine. L'emploi de ces conditions suppose que le moteur soit alimenté de façon équilibrée.

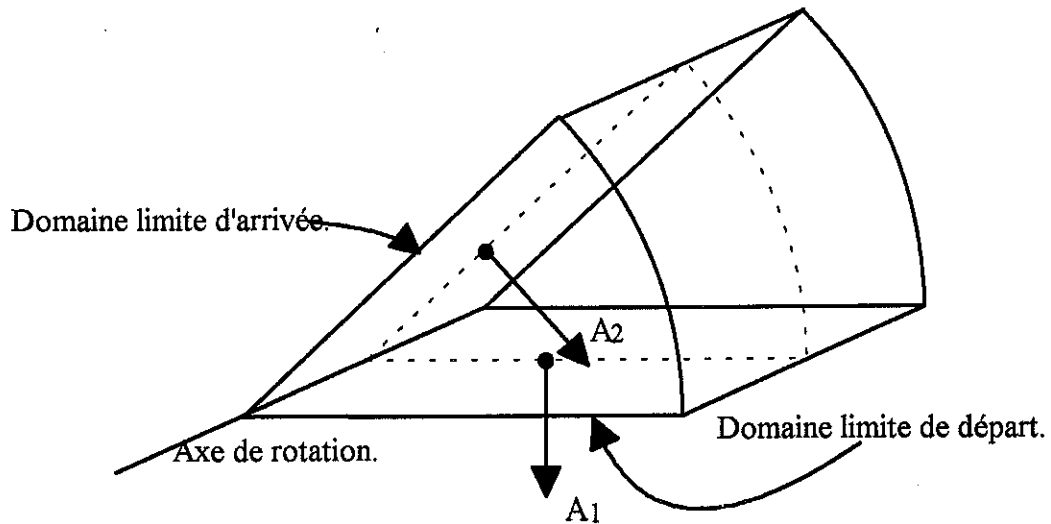


Figure 36 : Conditions limites cycliques en 3D.

Posons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

où  $R$  : Matrice de rotation permettant de passer du noeud de départ 1 au noeud d'arrivée 2.

Les maillages des deux plans cycliques sont dans la plupart des cas différents. Il est peu probable que la position du noeud 2 corresponde effectivement à un noeud du maillage du plan d'arrivée. Pour cette raison, nous posons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{Bmatrix} = \sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.34)$$

où  $n$  : Nombre de noeuds de l'élément volumique contenant le noeud 2 touchant le domaine "a" d'arrivée.

$\alpha_i$  : Valeurs des fonctions de forme de l'élément volumique calculées aux coordonnées du noeud 2 issu d'une interpolation ou d'une extrapolation nodale.

Finalement en combinant les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.35)$$

Cette équation ne perturbe pas l'homogénéité des calculs. En effet,  $R$  est une matrice normée et la somme des  $\alpha$  est égale à 1.

### 3.3.5.3. Les conditions anti-cycliques

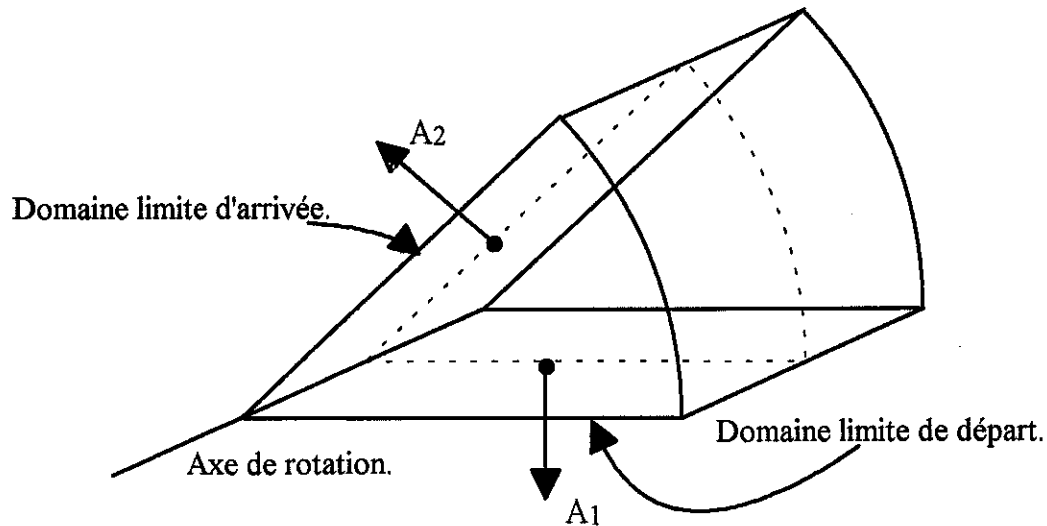


Figure 37 : Conditions limites anti-cycliques en 3D.

Posons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{Bmatrix} = -[R] \begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Les maillages des deux plans anti-cycliques sont dans la plupart des cas différents. Il est peu probable que la position du noeud 2 corresponde effectivement à un noeud du maillage du plan d'arrivée. Pour cette raison, nous posons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{Bmatrix} = \sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.37)$$

Finalement en combinant les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} = -[R]^{-1} \sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.38)$$

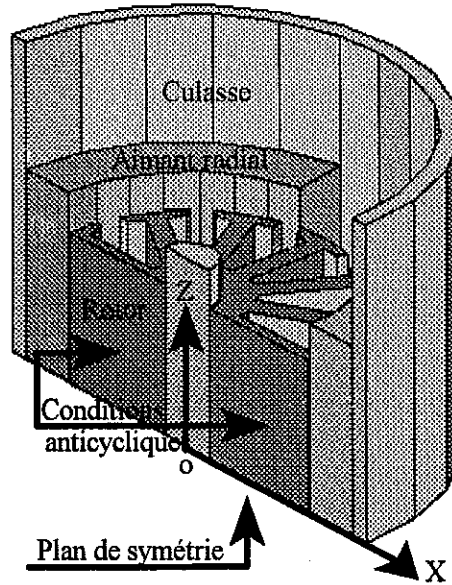


Figure 38 : Conditions limites anti-cycliques en 3D.  $\theta = 180^\circ$  autour de l'axe Z

Prenons comme exemple pratique un moteur à courant continu (Fig.38) possédant deux pôles où  $\theta$  représente l'angle entre les plans de départ et d'arrivée que nous désirons simuler. Considérons que la géométrie a pour axe Z. La connexion se réalisera sur le plan de départ XoZ et le plan d'arrivée XoZ tourné de  $180^\circ = \pi/p$  où p est le nombre de paires de pôles. Dans ce cas R devient :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et donc } -[\mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ces conditions cycliques ou anti-cycliques permettent de gagner un facteur  $(2p)$  dans la taille du problème à résoudre par rapport au modèle complet. Ceci entraîne que le temps de calcul du problème sera  $(2p)^2$  plus faible si nous prenons comme hypothèse que la taille intervient au carré sur le temps de résolution.

#### 3.3.5.4. Les conditions périodiques ou anti-périodiques

Ces conditions sont les duales des précédentes dans un plan cartésien et non plus par rapport à un axe. Ces conditions ne sont pas utilisables dans le cas des machines tournantes mais peuvent être utilisées dans le cas de structures répétitives. La connexion consiste à établir de manière similaire aux conditions cycliques les équations reliant un maillage à l'autre.

La condition périodique est simulée par l'équation :

$$\begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} = \sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.40)$$

et de même, la condition anti-périodique est simulée par l'équation :

$$\begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} = -\sum_i \alpha_i \begin{Bmatrix} A_x^a \\ A_y^a \\ A_z^a \end{Bmatrix}_i \quad (3.41)$$

### 3.3.5.5. Libération de la composante normale

La libération de la composante normale consiste à assurer seulement le long d'une interface la continuité de  $A_{t1}$  et  $A_{t2}$  (Fig.39). Cette libération permet de résoudre le problème de la formulation en potentiel vecteur explicité au chapitre 1.

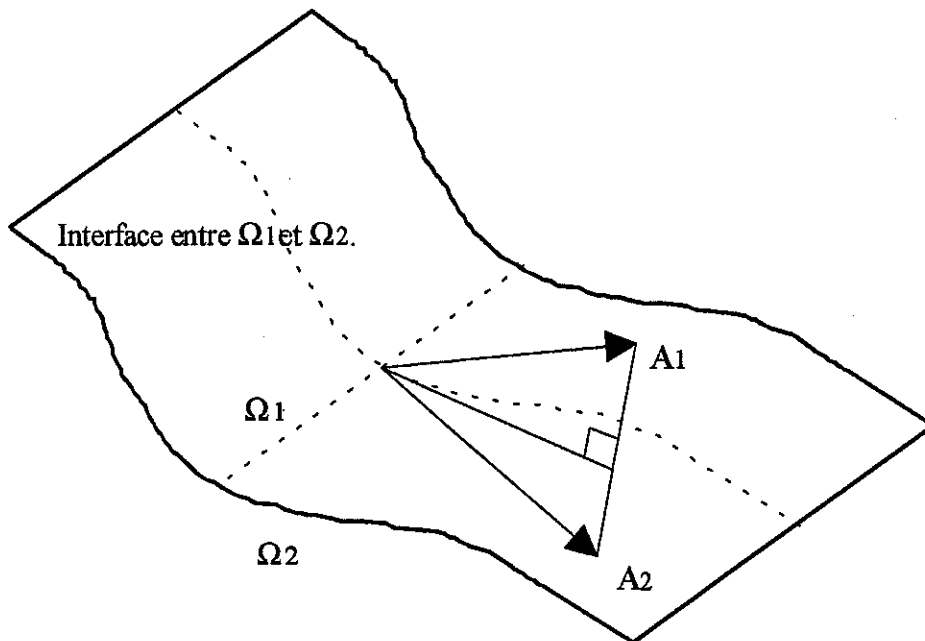


Figure 39 : Libération de la composante  $A_n$  sur l'interface entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Posons :

$$\begin{Bmatrix} A_{t1}^1 \\ A_{t2}^1 \\ A_n^1 \end{Bmatrix} = [R^1] \begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \\ A_z^1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} A_{t1}^2 \\ A_{t2}^2 \\ A_n^2 \end{Bmatrix} = [R^2] \begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

- où  $R^1, R^2$  : Les matrices de rotation respective du domaine 1 et 2.  
 Dans notre cas :  $R^1 = -R^2 = R$  car les normales sont orientés extérieurement au domaine.
- $A_{t1}^1, A_{t2}^1$  : Les composantes tangentielles de  $A$  du coté  $\Omega_1$ .  
 $A_n^1$  : La composante normale de  $A$  du coté  $\Omega_1$ .  
 $A_{t1}^2, A_{t2}^2$  : Les composantes tangentielles de  $A$  du coté  $\Omega_2$ .  
 $A_n^2$  : La composante normale de  $A$  du coté  $\Omega_2$ .

Comme nous voulons libérer la composante normale, nous posons :

$$[R_{xy}] \begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{13}^1 \\ r_{23}^1 \end{Bmatrix} A_z^1 = [R_{xy}] \begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{13}^2 \\ r_{23}^2 \end{Bmatrix} A_z^2 \quad (3.43)$$

Où l'une des huit autres combinaisons possibles utilisant  $R_{xy}$ ,  $R_{xz}$  et  $R_{yz}$ .

Ce qui nous amène pour  $R_{xy}$  :

$$\begin{Bmatrix} A_x^1 \\ A_y^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \end{Bmatrix} + [R_{xy}]^{-1} \begin{Bmatrix} r_{13}^2 \\ r_{23}^2 \end{Bmatrix} A_z^2 - [R_{xy}]^{-1} \begin{Bmatrix} r_{13}^1 \\ r_{23}^1 \end{Bmatrix} A_z^1 \quad (3.44)$$

Toujours pour des raisons numériques, nous choisirons les équations issues de la matrice  $R_{xy}$ , ou  $R_{xz}$ , ou  $R_{yz}$  dont le déterminant est le plus grand.

Là encore, nous obtenons une expression du type de (3.16)

### 3.3.5.6. Synthèse

Toutes les conditions décrites précédemment utilisent le type d'équation suivante :

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i + u_0 \quad (3.45)$$

- Où  $u$  : Composante d'une variable d'état, dans notre cas, une composante du potentiel vecteur magnétique  $A$ .  
 $\beta_i$  : Coefficients.  
 $u_i$  : Composantes de variable d'état, dans notre cas, une composante du potentiel vecteur magnétique  $A$ , le type de variable pouvant être multiple.  
 $u_0$  : Constante.



Les combinaisons linéaires permettent comme nous venons de le voir aussi bien la modélisation du mouvement, que la simulation de conditions limites ou d'interfaces spéciales.

Les combinaisons linéaires sont multi variables. Si nous prenons comme variable d'état la tension sur le noeud d'un circuit  $V$ , nous pouvons décrire facilement une source de tension par  $V_1 = V_2 + U$  où  $U$  est une tension constante.

## CONCLUSION

Ce chapitre a permis de passer en revue les différentes solutions envisageables pour modéliser un mouvement circulaire.

Les méthodes utilisant les intégrales de frontières ou assimilées ne sont pas utilisables en 3D du fait de la taille mémoire nécessaire pour les mettre en oeuvre.

Les méthodes de remaillage permettent le mouvement en 3D mais elles ne sont pas totalement satisfaisantes. Le remaillage total est simple à mettre en oeuvre si nous disposons de la description de la géométrie mais donne des résultats numériquement bruités. Le remaillage local nécessite pour être pleinement fiable un puissant mailleur et pour cette raison il n'est pas totalement utilisable dans le logiciel MV3DYN.

Les méthodes utilisant les interfaces de connexion sont les plus exploitables en 3D. Au multiplicateur de Lagrange, nous préférons les méthodes de connexion par interpolation ou extrapolation nodales. En effet, leurs utilisations en 3D sont aisées et de plus, l'extension de ces méthodes permet de traiter toutes les conditions limites du problème.

La généralisation des méthodes de connexion nodales nous permet, en effet, de simuler de manière simple et cohérente, les conditions limites tangentes, normales, cycliques, périodiques et la libération de la normale d'une variable d'état. Ces exemples ne sont certainement pas les seules utilisations possibles des combinaisons linéaires.

Il nous reste à créer un outil informatique permettant de prendre en compte les combinaisons linéaires. La création et l'utilisation de cet outil seront décrites dans le chapitre 4 décrivant le logiciel MV3DYN.



**CHAPITRE 4.**  
**LE LOGICIEL MV3DYN**



## INTRODUCTION

De nos jours, les logiciels à élaborer sont de plus en plus complexes. Ces logiciels doivent avoir une structure claire, évolutive qui demande un minimum de programmation pour inclure de nouvelles fonctionnalités. Chacune des fonctions implantées se doit d'être la plus indépendante des autres du point de vue de la programmation et pensée dans un ensemble susceptible d'évoluer. Ces codes de calcul doivent aussi être performants en terme de vitesse et d'utilisation de la place mémoire. Ceux-ci sont, de plus, développés par des groupes de programmeurs.

De ces constatations, nous tirons les règles de programmations suivantes. Une bonne structuration ainsi qu'une grande cohérence sont nécessaires à la bonne réalisation et à l'évolution du projet. Cette structuration doit se réaliser à tous les niveaux du code afin de permettre un suivi efficace de la programmation. La cohérence se réalise à travers la définition de structure de données et de cadre de programmation stricte. En cas d'erreur, aussi bien de la part du programmeur (cas non prévues) que de l'utilisateur (erreurs de données), le logiciel doit être en mesure d'expliquer au mieux la cause de l'erreur et fournir une arborescence des appels amenant à celle-ci. Ceci permet d'avoir un suivi de programmation et une qualité du logiciel optimaux ainsi qu'un dépannage plus aisé.

MV3DYN est développé par deux personnes, l'une s'occupant de la programmation du couplage circuit et l'autre de la simulation du mouvement. Chacune programme de façon coordonnée les routines d'intérêt général. Le développement se fait en FORTRAN 77 standard afin d'autoriser la portabilité du logiciel sur n'importe quel système informatique. Le FORTRAN est un langage de programmation adapté à l'analyse numérique donc aux problèmes éléments finis.

La programmation se fait de manière modulaire. Chaque module est indépendant et autonome. Le logiciel est réalisé par l'assemblage de ces modules liés par une base de données. La base de données contient toutes les entités nécessaires à la marche du logiciel.

Le langage utilisé, le FORTRAN, ne permettant pas la gestion de la mémoire de façon dynamique, il a été nécessaire de créer un module simulant la mémoire dynamique. Ce type de traitement est nécessaire pour permettre une économie maximale de la mémoire.

La gestion dynamique de la mémoire sert à la gestion de la base de données à laquelle chaque module est rattaché. Deux grands ensembles de modules sont réalisés. Le premier ensemble est appelé une seule fois et permet de préparer les calculs. Le deuxième s'occupe du calcul proprement dit et est appelé N fois, N étant le nombre de pas de temps nécessaires pour simuler le problème.

Dans la mesure du possible, nous séparerons, dans chaque module et ensemble, les méthodes classiques, des nouveautés issues du 3D, du pas à pas dans le temps, du mouvement et du couplage circuit.

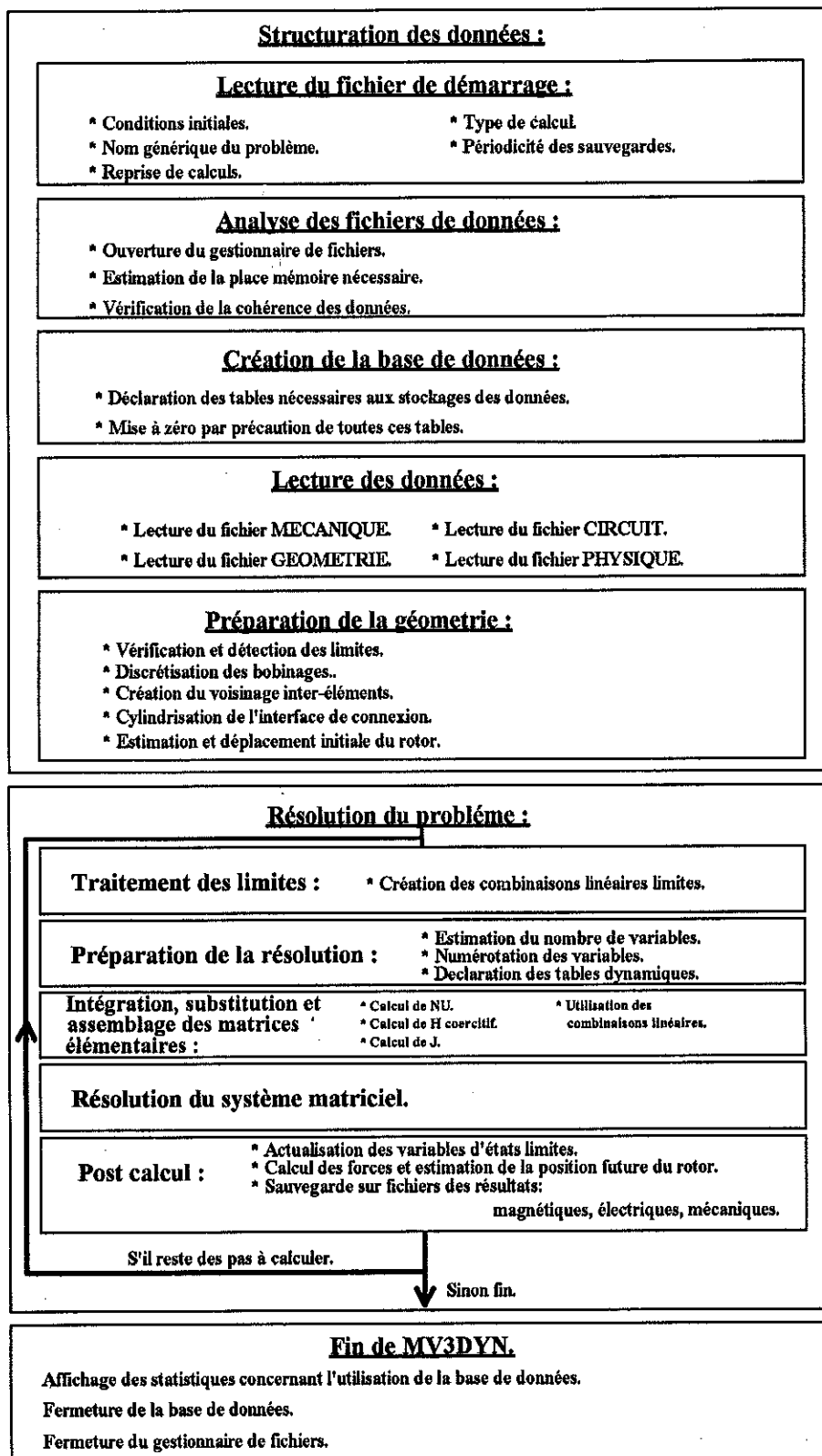


Figure 40 : Organigramme du logiciel MV3DYN.

## **4.1. LA STRUCTURATION DES DONNEES.**

Cet ensemble (Fig.40) se subdivise en cinq modules spécifiques. MV3DYN est un logiciel non interactif, ce qui implique que toutes les données se trouvent sur des fichiers de type conditions initiales, mécanique, physique, maillage et circuit. Les résultats sont eux aussi stockés sur fichiers.

### **4.1.1. Lecture des conditions initiales**

Ce module lit les conditions initiales permettant le démarrage du logiciel. Cette lecture se fait sur un fichier de démarrage nommé START.M3D. Celui-ci contient des informations susceptibles de varier à chaque démarrage du logiciel. Le nom du problème permet de définir le nom générique des fichiers de données et de résultats. La position initiale, la vitesse initiale et le couple initiale permettent d'estimer le mouvement de départ. Le pas de temps et le pas géométrique définissent la manière dont le logiciel passera d'un pas de calcul à l'autre.

Ces données standards sont complétées par des données plus spécifiques dédiées au pas à pas dans le temps et à la vérification de la bonne marche du logiciel. Des options définissent la précision du calcul, le nombre de fichiers résultats à garder ainsi que le nombre et la précision des messages fournis par le logiciel lors de son exécution.

Les messages fournis lors de l'exécution du logiciel sont de trois types. Le premier type, les messages standards explicitent la bonne marche du logiciel et possèdent chacun une priorité. L'utilisateur choisit donc le degré d'explication fourni par le logiciel en précisant un seuil de priorité.

Le second, les messages d'erreurs "utilisateur" indiquent que les erreurs viennent d'un problème dans les données (entièrement imputable à l'utilisateur).

Enfin le troisième, les messages d'erreurs "programmeur" indiquent les erreurs dues au logiciel (un bug!). Cette répartition des différents messages permet un dépannage rapide du logiciel.

### **4.1.2. Analyse des fichiers de données**

L'analyse des fichiers permet de déterminer le nombre d'entités présentes dans le problème à simuler ainsi qu'une estimation du nombre d'entités nécessaires pour le fonctionnement du logiciel. Le langage de programmation FORTRAN ne possède pas de gestion de mémoire dynamique. Cette estimation permet de calibrer la mémoire nécessaire au logiciel le plus finement possible.

Une première vérification quantitative de la cohérence des données est effectuée dans le même temps. Ainsi l'utilisateur est averti au plus tôt des éventuelles erreurs requérant son attention.



#### 4.1.3. Création de la base de données

La base de données utilisée dans MV3DYN est une base à taille fixe. La programmation d'une base dynamique se révèle ardue et n'apporte pas vraiment d'intérêt pour un code de calcul non interactif. La création de la base de données se fait à partir de l'estimation du nombre maximum possible d'entités.

Cette base permet la création d'attributs ou de listes d'attributs attachés à chaque entité ainsi que les liens d'entités à entités. Chaque entité ne peut être liée qu'avec des entités existantes enfin d'assurer la cohérence de la base et donc la fiabilité du logiciel. Dans le même ordre d'idées, la lecture, l'écriture, le remplacement ou la suppression d'entités, d'attributs ou de liens se fait par l'intermédiaire de routines spécifiques. Ce type de programmation, ressemblant à de la programmation objet, permet de rendre la base de données, qui est le fondement du logiciel, sûre et cohérente.

#### 4.1.4. La lecture des données

La lecture des fichiers de données permet le remplissage de la base. Chaque donnée est, dans la mesure du possible, analysée, vérifiée avant d'être incluse en base de données afin d'éviter toute erreur susceptible d'entraver la bonne marche de l'ensemble du logiciel et surtout d'éviter tous risques de faux résultats. La base peut en dernier recours, grâce à sa cohérence interne, rejeter la donnée.

La lecture porte sur quatre types de fichiers.

Le fichier géométrique au format UNIVERSEL/CAEDS (spécifique au logiciel CAEDS/IDEAS) contient le maillage du problème (noeuds, éléments), les unités utilisées ainsi que les repères permettant la définition des matériaux ou des bobinages. Ce fichier peut éventuellement contenir une description des entités sur laquelle les conditions limites s'appuient. Ce fichier est normalement au standard de certains modeleurs géométriques commerciaux. Il peut être créé ou lu par n'importe quel modeleur disposant d'une interface capable de générer des fichiers au format UNIVERSEL/CAEDS.

Le fichier mécanique est dédié au mouvement. Les propriétés cinématiques de la partie en rotation, l'inertie, les différents types de frottements et l'axe de rotation y sont définis. Ce fichier contient aussi la définition des parties mobiles ou fixes et des parties sur lesquelles le couple électromagnétique doit être calculé.

Le fichier physique regroupe, quant à lui, la définition des matériaux et de la formulation à utiliser dans chaque région (A ou AV) et le comportement magnétique et électrique des matériaux utilisés pour la simulation. La définition des bobinages est elle aussi incluse dans ce fichier. Chaque connexion avec les circuits électriques, le type de conditions limites à appliquer sur les régions surfaciques y sont également décrites.

Pour terminer, le fichier circuit contient la définition branche par branche du circuit de commande de la machine.

Tous ces fichiers sont nommés d'après le nom générique plus une extension rappelant l'utilisation du fichier, "nom\_pb.mec" pour la mécanique, "nom\_pb.phy" pour les propriétés physiques etc..

Tous ces fichiers sont a priori indépendants les uns des autres. Pour cette raison, nous attacherons une grande attention à vérifier la cohérence des données les unes par rapport aux autres. Par exemple, le même nombre de matériaux est exigé dans le fichier physique et dans le fichier de maillage. Les repères, permettant l'orientation des matériaux dans le fichier physique, doivent exister dans le fichier maillage.

#### **4.1.5. Analyse des données et addition de données pertinentes**

Ce module permet la génération de données supplémentaires et la réorganisation de celles-ci afin de permettre l'accélération du processus de résolution.

##### **4.1.5.1. Les conditions aux limites**

Les logiciels intégrés style FLUX3D, CAEDS permettent la définition de conditions sur les faces, lignes voire points de la géométrie. Malheureusement pour des raisons de compatibilité, MV3DYN ne lit pas ce type d'informations. Le logiciel ne manipulant que le maillage, la gestion des limites se fait soit sur les noeuds, soit sur les éléments surfaciques du maillage.

Deux possibilités s'offrent à nous pour résoudre ce problème de conditions limites. Si le logiciel, créateur du maillage, permet la définition des noeuds ou éléments surfaciques limites (de type tangent, normal, cyclique, mouvement) alors MV3DYN se contente de vérifier si ces entités appartiennent bien à un bord de la géométrie.

Sinon, le logiciel génère de façon automatique ses propres conditions limites en prenant comme hypothèse que tous les bords extérieurs possèdent une limite de type B tangent. Cette fonctionnalité permet de traiter la plupart des moteurs électriques ne possédant pas de conditions cycliques et de remédier aux insuffisances du dialogue entre les modeleurs et MV3DYN.

##### **4.1.5.2. Vérification de l'entrefer**

Le maillage fourni est pour des raisons pratiques le plus souvent continu. La modélisation du mouvement nécessite deux maillages distincts, l'un mobile et l'autre fixe. MV3DYN se charge de réaliser le découpage en deux maillages. Chaque noeud interface est dédoublé, ce dédoublement se reportant bien évidemment sur les éléments finis touchant l'interface.

L'entrefer se doit d'être parfaitement cylindrique afin que le mouvement soit possible sans modification du maillage. Pour arriver à ce résultat de façon simple, il suffit de chercher les rayons extrêmes des noeuds composant l'interface mobile/fixe. Cette opération permet de vérifier si la partie mobile est effectivement parfaitement cylindrique et permet de corriger d'éventuelles erreurs commises par les maillieurs.

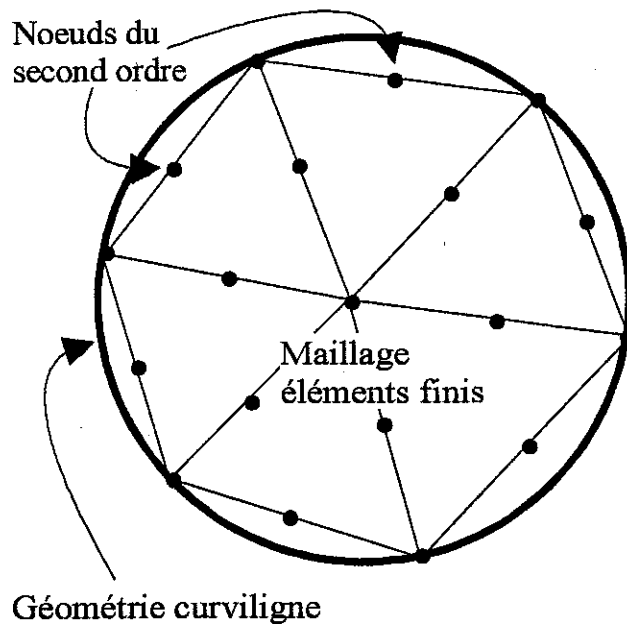


Figure 41 : Maillage non cylindrique sur une géométrie curviligne.

En effet, certains mailleurs positionnent les noeuds du deuxième ordre sur le milieu des arêtes des éléments finis et non sur la courbure de la géométrie (Fig.41). Le réajustement des noeuds du deuxième ordre, sur le rayon extrême détecté, est parfois nécessaire.

Ces deux procédures originales permettent d'utiliser MV3DYN malgré les insuffisances des mailleurs.

#### 4.1.5.3. Le voisinage

La création du voisinage entre les éléments finis volumiques permet d'accélérer la connexion des noeuds interfaces avec les éléments volumiques leur faisant face. Le voisinage permet de créer des ensembles d'éléments touchant les bords.

L'outil, que nous appellerons localisateur, utilise deux méthodes complémentaires pour détecter le plus rapidement possible qui est en face de qui (Fig.42).

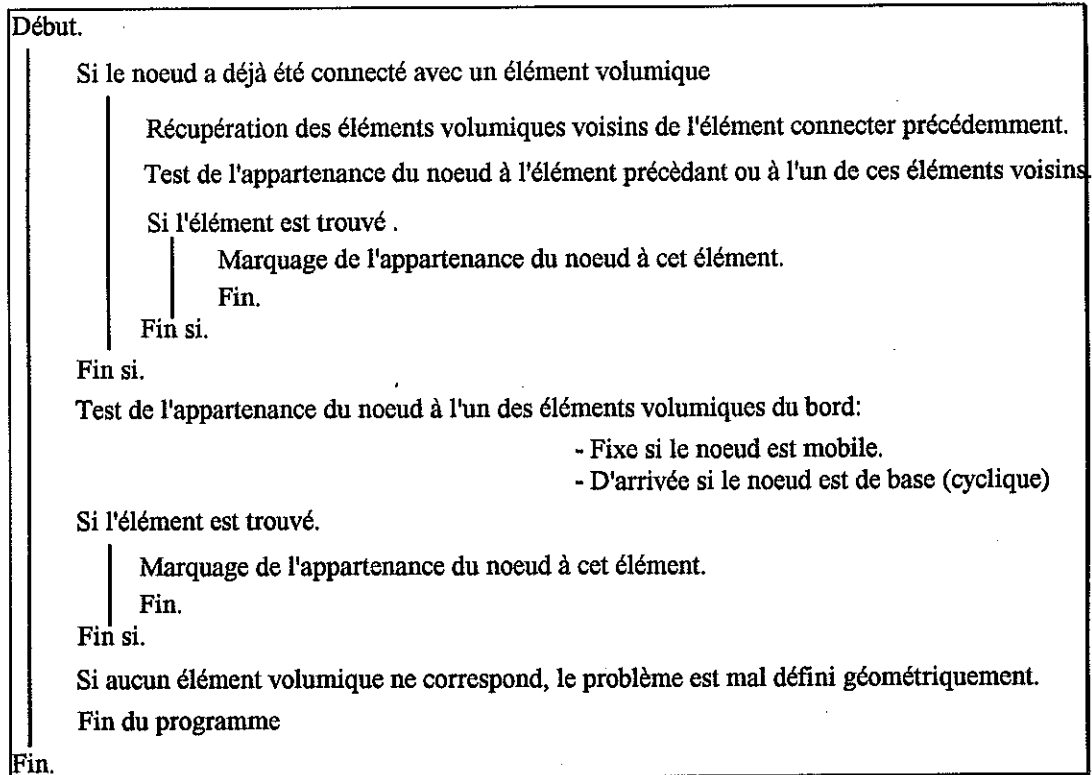


Figure 42 : Algorithme de localisation des éléments en vis à vis des noeuds à connecter.

Le voisinage permet une connexion la plus rapide possible des noeuds avec l'élément volumique en vis à vis. Cette nouvelle technique permet de connecter et de créer les combinaisons linéaires très rapidement. Il est à rappeler que ce type de connexion se réalise à chaque pas.

#### 4.1.5.4. Calcul des vecteurs normaux aux noeuds limites

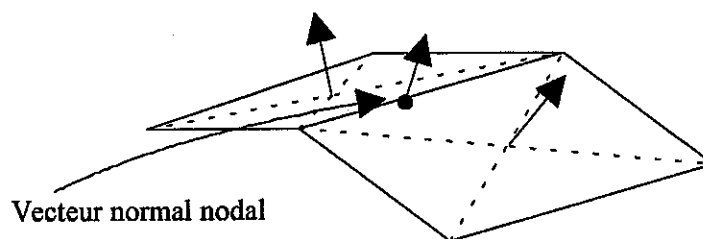


Figure 43 : Vecteur normal nodal.

Cette appellation de vecteurs normaux nodaux peut paraître erronée mais en fait le vecteur unitaire affecté à chaque noeud provient de la moyenne des vecteurs normaux des éléments surfaciques possédant ce noeud (Fig.43). Ce vecteur unitaire permet de calculer de manière rapide par la suite la combinaison linéaire limite à appliquer sur le noeud.

Le mouvement influence ces vecteurs normaux. A chaque rotation de géométrie, il est nécessaire de tourner ces vecteurs. Ces vecteurs ne servent qu'à faciliter la création des combinaisons linéaires.

#### 4.1.5.5. La discrétisation des bobines

Chaque bobine est simulée par des éléments linéiques. Ces éléments sont créés par intersection de la géométrie de la bobine avec chaque élément volumique. De même que les vecteurs normaux, il est indispensable de tourner les éléments linéiques des bobines rotoriques à chaque déplacement rotorique.

En conclusion, le premier ensemble de module crée un environnement propice à un calcul en pas à pas dans le temps. Il est à noter que le temps d'exécution de cet ensemble importe peu car il n'est exécuté qu'une fois. Nous avons néanmoins constaté dans nos tests que cet ensemble consomme de 0.5 à 2 fois plus de temps d'unité centrale que la résolution d'un pas de temps.

## 4.2. LA RESOLUTION EN PAS A PAS DANS LE TEMPS

Cette résolution (Fig.40) est inspirée du solveur de FLUX3D pour ce qui concerne la partie résolution des systèmes linéaires. Pour des raisons de compatibilité avec MV3DYN, nous avons essayé de garder au maximum la structure des routines de FLUX3D car celles-ci sont testées, validées et fiables. Les modifications du solveur existant se sont faites dans des endroits localisés. Ceci permet de garder la structure modulaire du solveur ainsi que ses qualités. Nous nous contentons d'implanter la gestion des combinaisons linéaires qui permet de modéliser aussi bien le mouvement que les conditions limites et d'implanter le traitement des circuits électriques.

Il est à noter que les conditions limites peuvent être géométriques dans les éléments finis ou électriques dans les circuits. Le traitement se réalise de toute façon de la même manière. Nous substituons simplement des combinaisons linéaires dans un système d'équations sans a priori sur les significations de celles-ci magnétiques ou électriques.

### 4.2.1. La création des combinaisons linéaires

Ce module permet de définir les combinaisons à appliquer sur les composantes des variables des noeuds magnétiques ou électriques limites.

Du point de vue géométrique, le calcul précédant des vecteurs normaux nodaux permet de créer des combinaisons modélisant les conditions de tangentes ou/et normales et libération de composante normale rapidement. L'outil de localisation permet quant à lui de déterminer les combinaisons sur la connexion des parties mobiles ou/et la connexion des parties cycliques.

De même les limites du circuit amènent la génération de combinaisons.

Nous remarquons qu'une composante de variable peut être fonction de composante elles-mêmes fonctions d'autres. Le nombre de niveaux d'imbrications possibles étant fonction du nombre de conditions limites ou/et de connexions à traiter. Une phase d'évaluation des combinaisons permet de les développer et de s'assurer que la composante

d'une variable n'est pas fonction d'elle-même. Cette phase assure que la composante de la variable sur laquelle porte la combinaison est exclusivement fonction de composante de variable à calculer. Ainsi, il n'est pas nécessaire de gérer des routines à caractères récursifs non supportées par le langage de programmation qu'est le FORTRAN 77 standard.

#### **4.2.2. Création de la structure de stockage de la matrice et du vecteur principaux**

Le système à résoudre est de la forme  $[M].[A]=[S]$  où M représente la matrice éléments finis du problème, A les inconnues (Potentiel vecteur, tension, courant) et S le vecteur source. La méthode de stockage retenue pour le système matricielle sera de type morse. Seul les termes non nuls de la matrice sont stockés en mémoire. Cette méthode, très économique en mémoire, nécessite une estimation préliminaire des termes non nuls. Toujours dans un souci d'économie, chaque composante des variables sera numérotée afin de conditionner au mieux le système matriciel et donc de réduire les temps de résolution.

Cette phase d'estimation standard doit prendre en compte les substitutions issues des combinaisons linéaires. Cette phase terminée, la déclaration des tables contenant la matrice et le vecteur du système s'effectue.

#### **4.2.3. Intégration et assemblage des éléments**

L'intégration consiste à déterminer la sous-matrice et le sous-vecteur de l'élément d'après son matériau, son induction, son courant, sa tension, sa taille et sa formulation. Cette intégration est effectuée de manière standard aussi bien pour les éléments finis que pour les éléments circuits. La gestion des combinaisons n'intervient pas à ce stade.

L'assemblage consiste à introduire la sous-matrice et le sous-vecteur dans le système principal. Celui-ci s'effectue aussi de façon standard sauf que les lignes et colonnes modélisant les limites ne sont pas assemblées. Cette tâche est dévolue maintenant aux combinaisons linéaires.

Avant d'assembler la sous-matrice et le sous-vecteur correspondant à chaque élément, nous substituons les termes portant des combinaisons. Cette substitution se fait en théorie par la multiplication matricielle suivante  $[Mef] = [CBLs]^T.[Me].[CBLs]$  où CBLs représente la matrice des combinaisons linéaires, Me la sous-matrice élémentaire et Mef la sous-matrice finale prête à être assemblée. Cette méthode présente néanmoins l'inconvénient de consommer un temps de calcul qui croit avec le carré de la taille des matrices.

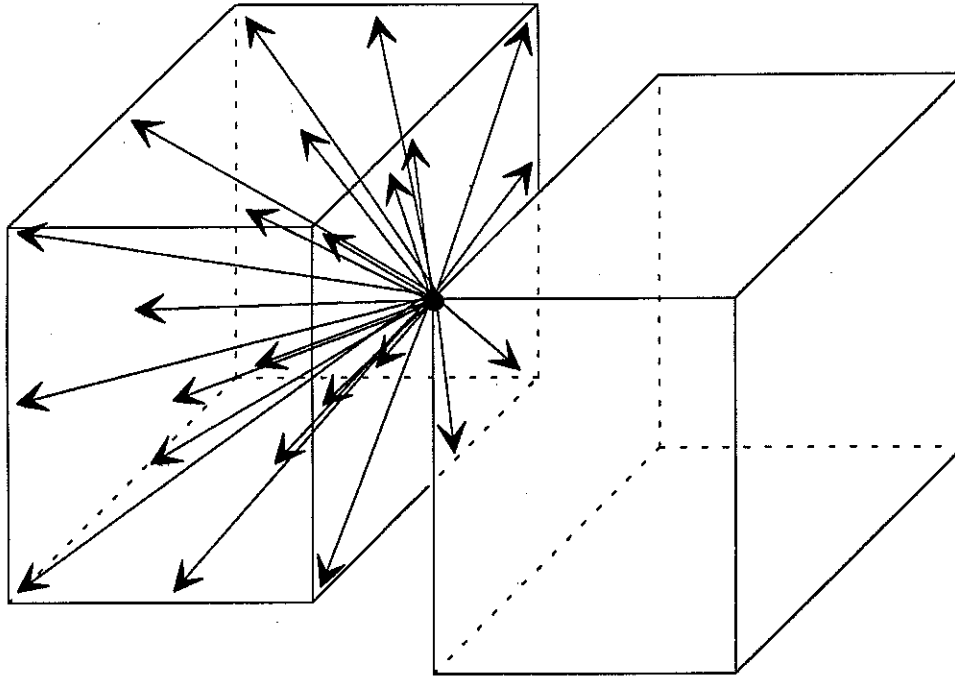


Figure 44 : Connexion d'un noeud d'un élément hexaédrique avec un hexaèdre.

Cet exemple (Fig.44) permet de fixer les idées. La connexion d'un noeud avec un élément fini de type hexaèdre du second ordre complet génère trois combinaisons possédant 27 termes (une combinaison pour chaque composante en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ ). Si l'élément contenant ce noeud est lui aussi un hexaèdre, la sous-matrice élémentaire possède  $(27 * 3)^2 = 81^2 = 6561$  termes. Le nombre de noeuds connectables de cet élément sera de 9 (une facette complète connectée). La matrice substituée aura  $((18 + 9 * 27) * 3)^2 = 783^2 = 613089$  termes. Ceci est partiellement faux puisque les combinaisons s'appuient partiellement sur les mêmes noeuds.

La multiplication matricielle demande  $2 * n^2 * m$  opérations de multiplications et d'additions pour des matrices  $[n * n][n * m]$ . Les opérations matricielles demandent  $81^2 * 783 + 783^2 * 81 = 134\,972\,892$  multiplications et autant d'additions sans compter la transposition initiale de la matrice [CBLs]. Il est ainsi beaucoup plus rapide de substituer seulement les lignes et les colonnes concernées par une combinaison. Ces opérations demandent  $9 * 3 * (81 * 27 + 783 * 27) = 629\,856$  opérations soit un rapport de 90 entre les deux types de substitutions. Le temps de calcul étant précieux, il est parfois utile de réfléchir sur les implications informatiques de la théorie. Le code de calcul est certes moins élégant mais il est beaucoup plus performant en terme de vitesse qu'une multiplication matricielle.

#### 4.2.4. La résolution

La résolution du système matriciel se fait grâce à une méthode indirecte connue sous le nom de ICCG (Incomplete Choleski Conjugate Gradient) utilisée sur des matrices symétriques définies positives.

#### 4.2.5. Le post-calcul

La résolution fournit la solution de vecteur  $[A]$  des inconnues. Ce vecteur permet d'actualiser les valeurs en base de données. Dans le même temps les variables portant des combinaisons seront elles aussi actualisées.

##### 4.2.5.1. Le calcul du couple électromagnétique

Le couple est calculé par la méthode des travaux virtuels [Coulomb 82-83-84]. Cette méthode est utilisable seulement sur un maillage homogène, continu et indéformable. Pour cette raison, l'interface, sur laquelle le couple est calculé, ne peut être identique à l'interface de connexion permettant le mouvement. Cette limitation n'est pas une contrainte dans le cas des machines tournantes. Le couple se calcule sur l'interface rotor/entrefer et le mouvement est pris en compte sur l'interface entrefer/culasse.

##### 4.2.5.2. Les fichiers de résultats

Pour s'adapter au mieux aux exigences de l'utilisateur mais surtout pour sauvegarder juste ce qui est utile, deux méthodes de stockage sur fichiers sont prévues.

La première méthode permet la sauvegarde totale des résultats à chaque pas. L'ensemble des inconnues calculées pendant le pas est écrit sur fichier. Toute l'information sur le moteur se trouve dans des fichiers. Ce type de stockage très volumineux ne peut, pour des raisons évidentes de place sur disque informatique, se faire pour chaque pas. L'utilisateur décide sciemment de la périodicité de cette sauvegarde. D'autre part pour des raisons d'ergonomie, le logiciel peut redémarrer à partir d'un pas. Ceci permet soit la gestion souple du logiciel soit la reprise du calcul avec un minimum de perte de temps après une défaillance informatique. Pour pouvoir réaliser le redémarrage, la règle de sauvegarde suivante est appliquée. Le premier pas et le pas en cours sont sauvegardés ainsi que tous les fichiers correspondant à la périodicité fournie par l'utilisateur.

Cette première méthode d'utilisation standard est complétée par une méthode plus dédiée à l'exploitation. Cette deuxième méthode de stockage est entièrement pilotée par l'utilisateur. Ce type de stockage permet le suivi, à chaque pas dans le temps, des variables sur les entités choisies par l'utilisateur. Pour réaliser ce suivi, l'utilisateur inscrit les numéros des entités dans des fichiers d'exploitation.

Par exemple, cette méthode permet le suivi du courant dans une branche du circuit ou de la tension aux bornes d'une bobine voire le potentiel vecteur en un noeud quelconque de la géométrie. La notion de noeuds géométriques n'étant pas d'une utilisation souple, il est possible de suivre dans le temps l'évolution de  $B$  sur les coordonnées d'un point fournies explicitement par l'utilisateur. En effet, il peut être intéressant de suivre la variation de  $B$  sur la pointe d'un pôle ou dans l'entrefer. Cela permet, dans un cas, de visualiser la saturation du pôle et dans l'autre cas de vérifier la forme de l'induction en fonction du temps.

Ces fichiers temporels sont exploitables par des logiciels de type "tableur" de manière simple et rapide.



Il est à remarquer que les grandeurs, telles que le temps, la position du rotor, la vitesse, le couple, sont conservées de manière permanente dans un fichier mouvement "nom\_pb.mvt".

#### 4.2.5.3. Estimation de la position future

Une méthode de correction prédiction est utilisée pour estimer au mieux la nouvelle position de la partie mobile. Le couplage cinématique se faisant de façon faible, il est nécessaire d'estimer à chaque pas de temps la position future du rotor et de vérifier à posteriori si la position actuelle est valable.

Nous prendrons comme hypothèse que le couple varie linéairement entre deux pas de calcul. Le prochain pas est déterminé par le respect de deux contraintes. L'angle de rotation entre deux pas ne doit pas excéder un angle maximum fixé par l'utilisateur, typiquement 1 ou 2 degrés par pas. Le temps entre deux pas ne doit lui aussi pas excéder un temps maximum afin de prendre en compte les exigences temporelles du circuit électrique.

$$\Delta\theta = \frac{1}{J} \int_{\Delta t} \int_{\Delta t} \Gamma_e(t) - \Gamma_f(t) dt \quad (4.1)$$

- où
- $\Delta t$  : Incrément de temps  $\leq \Delta t_{\max}$
  - $\Delta\theta$  : Incrément de position  $\leq \Delta\theta_{\max}$
  - $\Gamma_e$  : Couple électrique variation linéaire.
  - $\Gamma_f$  : Couple de frottement.
  - $J$  : Inertie de la partie en mouvement.

La position et la vitesse estimées sont vérifiées à chaque fin de résolution. Deux cas peuvent apparaître. Si les estimations étaient suffisamment bonnes (erreur de position < 5%) alors nous corrigeons légèrement le déplacement. Sinon, il est souhaitable de réestimer la position et de refaire le calcul du pas. Cette dernière solution n'est dans un premier temps pas envisagée. Nous estimons que les constantes mécaniques sont assez grandes vis à vis des temps maximums fournis par l'utilisateur. Finalement, la bonne marche du couplage cinématique dépend essentiellement de l'utilisateur.

#### 4.2.5.4. Rebouclage après positionnement de la partie mobile

Chaque noeud de la partie mobile est positionné d'après la nouvelle position estimée ainsi que les vecteurs normaux nodaux et les éléments linéiques composant les bobines mobiles. Le calcul du pas suivant peut commencer.

#### 4.2.5.5. Remarques

Notre souci principal est le temps de calcul nécessaire à une résolution du problème complet. Pour accroître la rapidité du processus, les valeurs des variables au temps n-1 sont prises comme valeurs initiales du pas n. Ceci permet d'accroître de façon notable la vitesse de résolution (2 à 3 fois plus rapide).

Dans le même esprit, il est possible de sauvegarder sur fichier tous les termes matriciels invariants dans le temps tels que ceux qui modélisent les régions fixes à matériaux

linéaires. Cette solution, a priori intéressante, n'est pas concluante dans la pratique. La vitesse de calcul des processeurs actuels est telle, que la lecture d'un fichier de plusieurs dizaines de Moctets est plus lente que le recalcul des termes matriciels invariants dans le temps. Cette constatation sera de plus en plus vraie à chaque nouvel accroissement des performances des processeurs si la vitesse d'accès aux supports de stockage ne change pas. Ce stockage ne peut se faire en mémoire vive. Ceci nécessiterait une augmentation considérable de la mémoire disponible (au moins 50%) sur les systèmes informatiques.

Le logiciel génère, avant son arrêt, un descriptif de l'utilisation de la base de données et de la mémoire dynamique. Ces informations permettent à l'utilisateur averti de déterminer si le logiciel utilise convenablement les ressources qui lui sont allouées. L'utilisateur spécialiste peut de cette manière calibrer le logiciel pour chaque problème à traiter et pour chaque système informatique.

#### 4.2.5.6. MV3DYN en quelques chiffres.

Ce logiciel écrit en FORTRAN 77 comporte 949 routines qui représentent un total de 108 151 lignes de codes. Une routine comporte en moyenne 70 lignes de codes et 30 lignes de commentaires.

## CONCLUSION

Nous avons créé un logiciel capable de modéliser les moteurs électriques quelles que soient leurs alimentations et leurs rotations avec le matériel informatique à notre disposition. Ce logiciel est conçu pour utiliser au mieux le temps processeur et la mémoire du système informatique.

Ces préoccupations d'ordre informatique seront toujours présentes pour la modélisation en trois dimensions tant que les processeurs n'auront pas gagné au moins un coefficient 100 en rapidité et que la mémoire disponible ne se comptera pas en Goctets.

La programmation modulaire du logiciel nous a permis de travailler efficacement à deux. La base de donnée assure la liaison entre tous les modules.

L'implémentation de la gestion des combinaisons linéaires se fait judicieusement et dans des zones précises du logiciel de manière indépendante. Ces propriétés permettent de modifier les variables à traiter ou les formulations sans modifier la gestion des combinaisons linéaires.

Le chapitre suivant permet de valider ce logiciel sur des cas réels ou d'école afin de déterminer ses qualités, ses défauts et ses limites.

## **CHAPITRE 5.**

### **VALIDATIONS DU LOGICIEL MV3DYN**



## INTRODUCTION

Ce chapitre décrit la validation du logiciel MV3DYN. Nous comparerons les résultats magnétiques, électriques, cinématique avec ceux obtenus par d'autres logiciels 2D et 3D. Nous analyserons aussi différentes formulations.

Les trois premières parties de la validation se feront sans le couplage circuit. En effet, MV3DYN possède deux versions différentes permettant l'une, la modélisation par tabulation des courants injectés (pas de couplage circuit), l'autre, le couplage avec les équations de circuit.

Dans un premier temps, nous validerons le choix de la connexion par interpolation ou extrapolation nodale par rapport aux techniques classiques de remaillage total ou partiel. Nous nous attacherons aussi à vérifier si la méthode de connexion est valide quelle que soit la formulation magnétique retenue.

Cette première série de validations se réalisera sur un coupleur magnétique (cas simple) qui a la propriété de posséder une géométrie et des caractéristiques de fonctionnements simples.

Dans un deuxième temps, nous validerons la prise en compte du mouvement par notre logiciel par rapport à un logiciel, lui aussi 3D, fiable et validé FLUX3D/LEG. Cette validation se fera sur une machine à réluctance variable.

Dans une troisième partie, nous utiliserons les conditions cycliques (quart de moteur). Cette modélisation sera comparée avec la modélisation obtenue de manière classique avec un demi-moteur à courant continu.

Dans une dernière partie, nous introduirons le couplage circuit afin de modéliser le plus finement possible le fonctionnement réel d'une machine à courant continu. Nous comparerons les résultats obtenus avec les résultats fournis par le logiciel MV2DYN. Ce logiciel permet de simuler magnétiquement avec le mouvement les moteurs électriques en 2D. Ce logiciel a été validé par les sociétés VALEO et MOULINEX. Ces comparaisons permettront de comparer les courbes de couples et de courants dans le moteur à courant continu.

Nous considérons qu'il est nécessaire de valider le logiciel par rapport à d'autre, avant de passer à la validation par rapport à des mesures en grandeur nature. En effet, les données fournies par les logiciels permettent de valider rapidement et aisément le logiciel MV3DYN. Les mesures réelles sont par contre entachées d'erreurs difficilement maîtrisables dans le cas des moteurs 3D et surtout difficilement reproductibles (Influence de la température, de l'usure balai-lame, etc.). Ces mesures demandent donc beaucoup de temps et de précision.

Ce temps, qui malheureusement, nous a manqué pour faire ces mesures et aussi pour faire les calculs correspondants (quelques semaines de calcul). Nous prendrons comme hypothèse que les logiciels, utilisés pour la validation, ont été validés par comparaisons avec des mesures réelles. Si MV3DYN donne des résultats proches de ces logiciels, nous pourrons en déduire que notre logiciel est presque validé.

## 5.1. LE COUPLEUR MAGNETIQUE

La validation se fera dans un premier temps sur un cas d'école. La version utilisée du logiciel est la version que nous appellerons statique. Cette version n'est pas couplée avec le circuit électrique.

Le coupleur magnétique se compose de deux ensembles d'aimants, l'un mobile et l'autre fixe, fermés par une culasse (Fig.45). Cette disposition permet de valider la partie logiciel traitant du mouvement. Le modèle ne comprend, en effet, pas de courant et l'inertie sera considérée comme infinie pour permettre une rotation constante à vitesse définie quel que soit le couple.

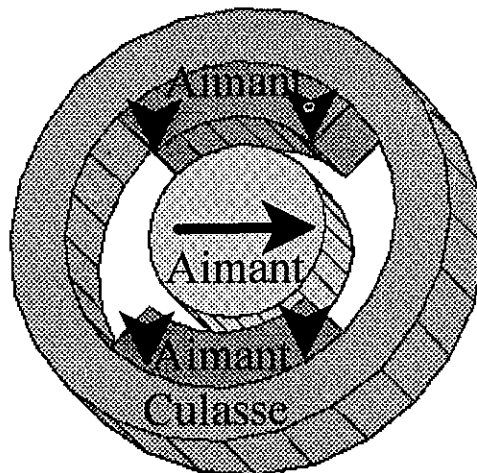


Figure 45 : Géométrie du coupleur magnétique.

Nous obtenons en schématisant un aimant tournant dans un champ constant. La forme analytique du couple résultant est sinusoïdale. L'allure, fournie par les différentes techniques de modélisation du mouvement, sera comparée avec la forme analytique. Ce coupleur est testé avec trois techniques ainsi qu'avec deux formulations magnétiques différentes. La comparaison des tests se fait sur le couple calculé sur le rotor pour un angle de rotation variant de 0 à 90°.

La première technique consiste à utiliser un remaillage local de l'entrefer. Celle-ci est utilisable du fait que la géométrie est simple (moteur de type extrusive 2D). Nous avons programmé un module supplémentaire dans MV3DYN pour remailler l'entrefer à chaque pas.

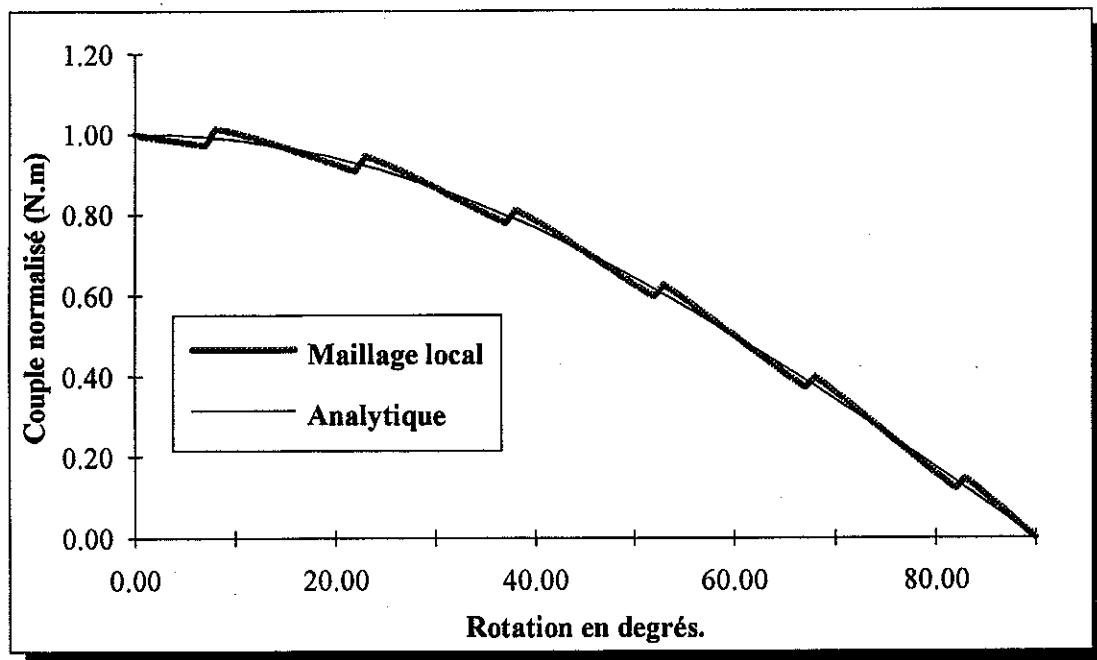


Figure 46 : Comparaison du couple entre remaillage local et analytique.

Cette technique amène, comme nous le voyons sur le graphique (Fig.46), une discontinuité du couple tous les 15 degrés qui se traduit par une erreur d'environ 5% par rapport à la sinusoïde de référence.

Le couplage cinématique, que nous avons choisis, étant assuré de façon faible, il s'ensuit que l'estimation de la position et de la vitesse seront erronées.

En conclusion, le remaillage, que nous avons développé, nécessite une géométrie simple et fournit de médiocres résultats en pas à pas dans le temps.



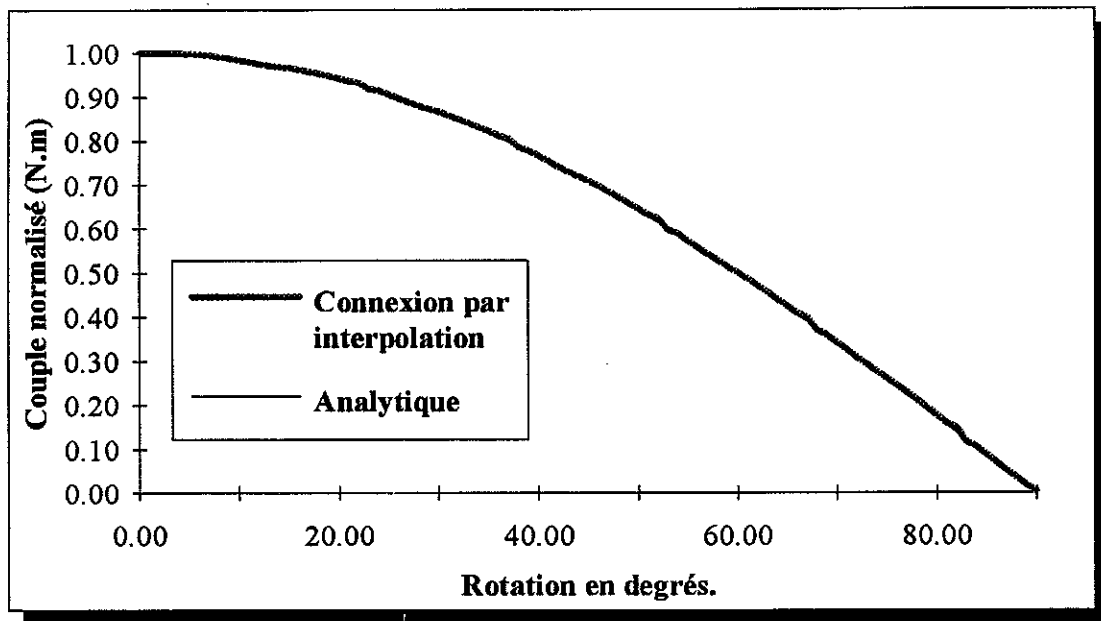


Figure 47 : Comparaison du couple entre interpolation nodale et analytique.

La deuxième technique est celle utilisée dans MV3DYN de façon standard car elle est rapide et peu gourmande en mémoire. Elle consiste à réaliser une connexion par interpolation nodale en potentiel vecteur magnétique A. La forte discontinuité détectée précédemment a disparu (Fig.47), ce qui est bien le but recherché, néanmoins il subsiste une légère perturbation (Fig. 48) en lieu et place de la discontinuité précédente.

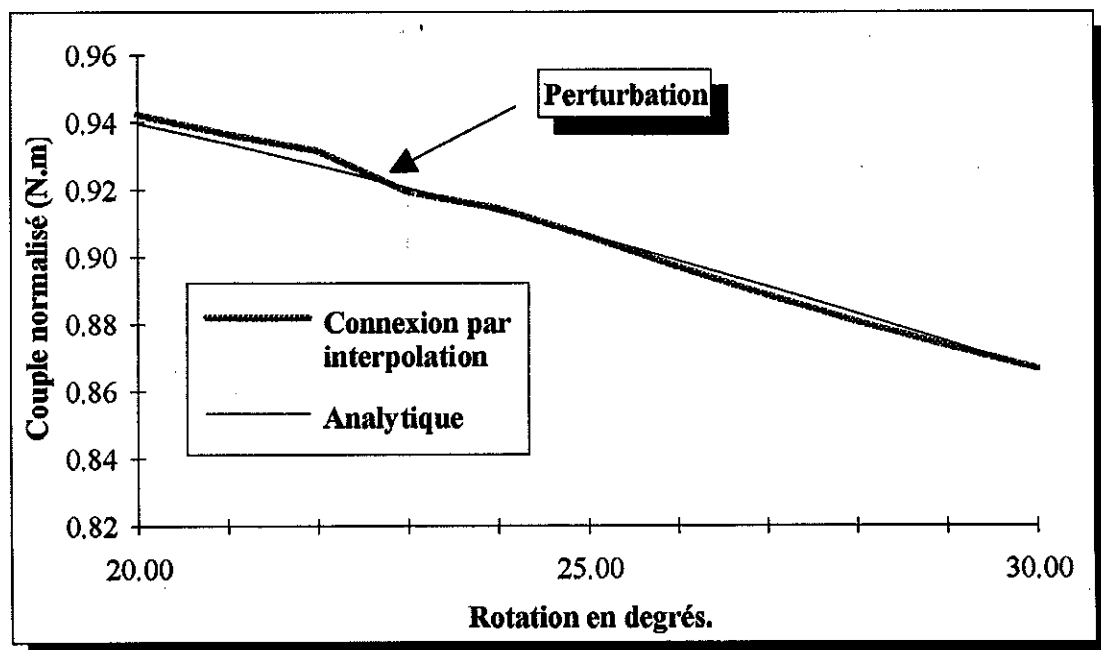


Figure 48 : Zoom sur une des perturbations.

Cette technique, nous le savons, assure une continuité en moyenne mais elle donne déjà de meilleurs résultats que la méthode de remaillage classique. Nous savons que localement nous commettons une erreur mais celle-ci est a priori moindre que l'erreur commise par la déformation du maillage à chaque pas.

La troisième technique utilise pour modéliser le mouvement la connexion par extrapolation nodale en potentiel vecteur magnétique  $A$ .

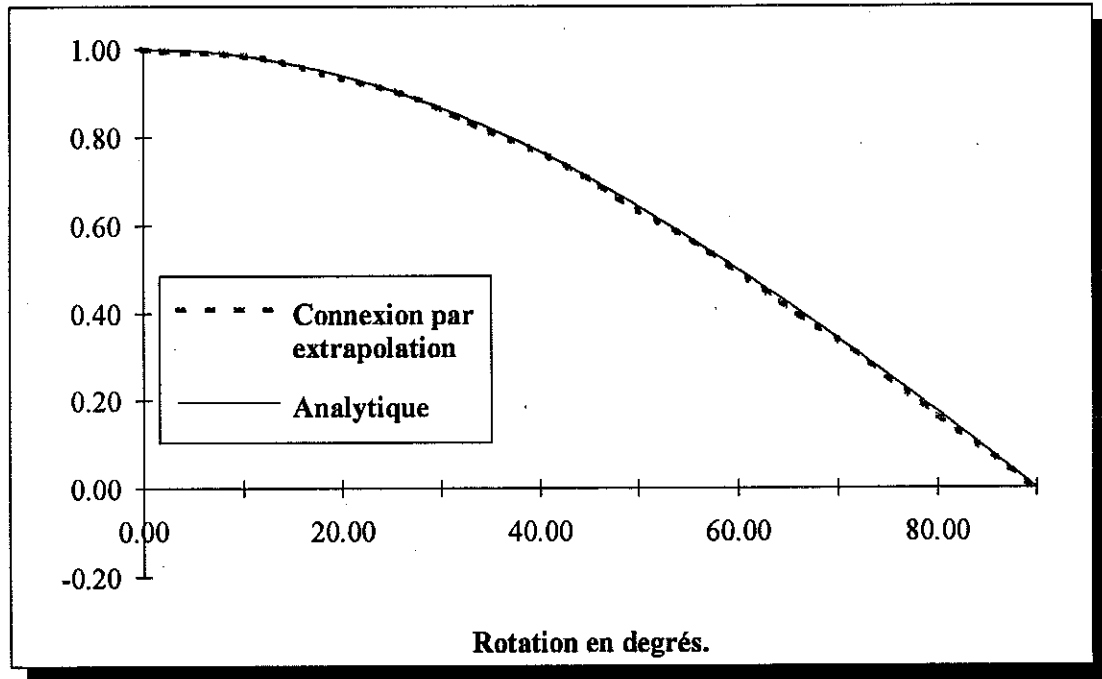


Figure 49 : Comparaison du couple entre l'extrapolation nodale et analytique.

Comme nous le voyons (Fig.49), le couple est parfaitement continu bien que n'étant pas parfaitement sinusoïdal. Ceci peut s'expliquer de façon simple, l'entrefer doit avoir deux bords parfaitement cylindriques pour que le couple soit sinusoïdal. Ce n'est pas le cas ici, le mailleur utilisé ne permettant pas le positionnement des noeuds du rotor sur un cylindre (Fig.50). Seuls les noeuds de l'interface sont positionnés sur un cylindre.

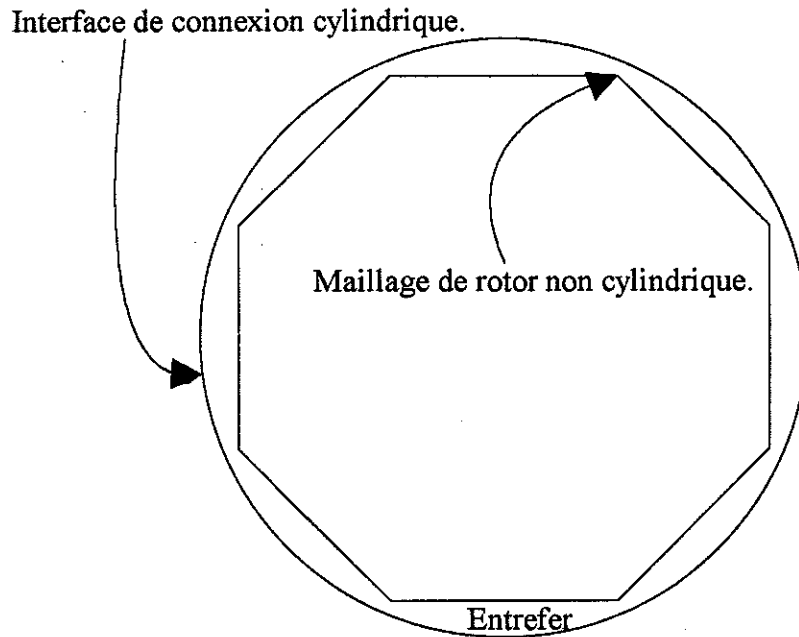


Figure 50 : Entrefeer partiellement cylindrique.

Il s'ensuit que l'entrefeer est légèrement non-cylindrique. L'ondulation du couple reflète en fait l'ondulation du maillage.

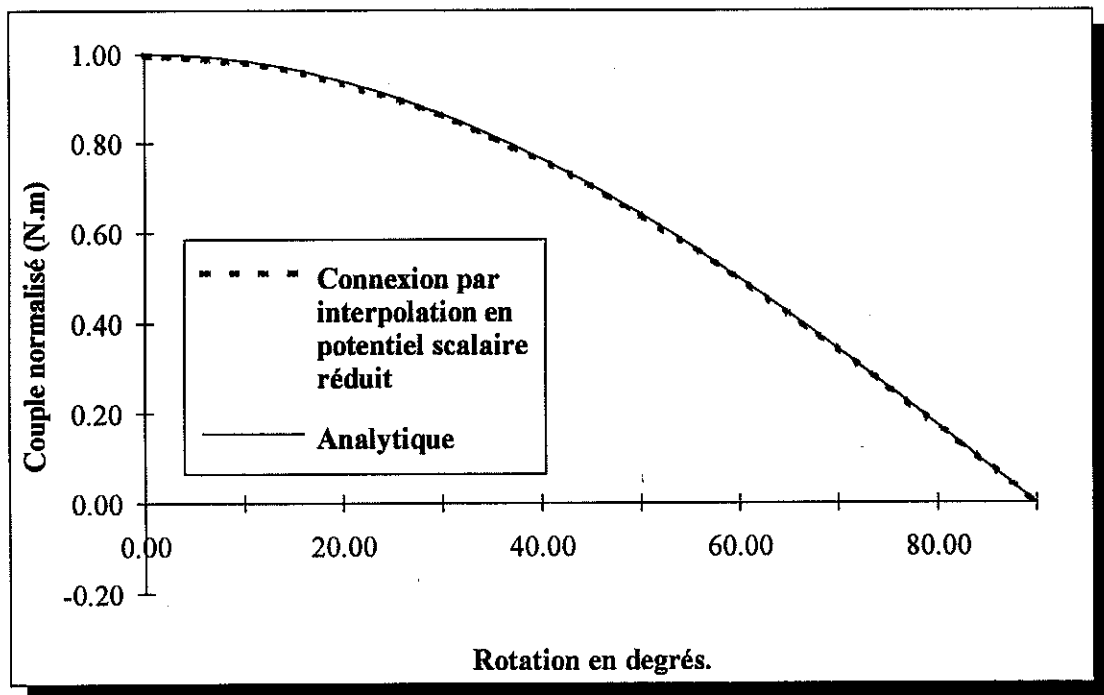


Figure 51 : Comparaison du couple entre l'interpolation nodale en potentiel scalaire réduit et analytique.

La dernière technique (Fig.51) reprend la deuxième technique (interpolation nodale) mais utilise une formulation en potentiel scalaire réduit  $\phi_r$  ( $\mathbf{H} = -\text{grad } \phi_r + \mathbf{H}_s$ ). Cette

modélisation permet de vérifier que la connexion est valable pour une autre formulation que le potentiel vecteur magnétique  $A$  usuellement employée.

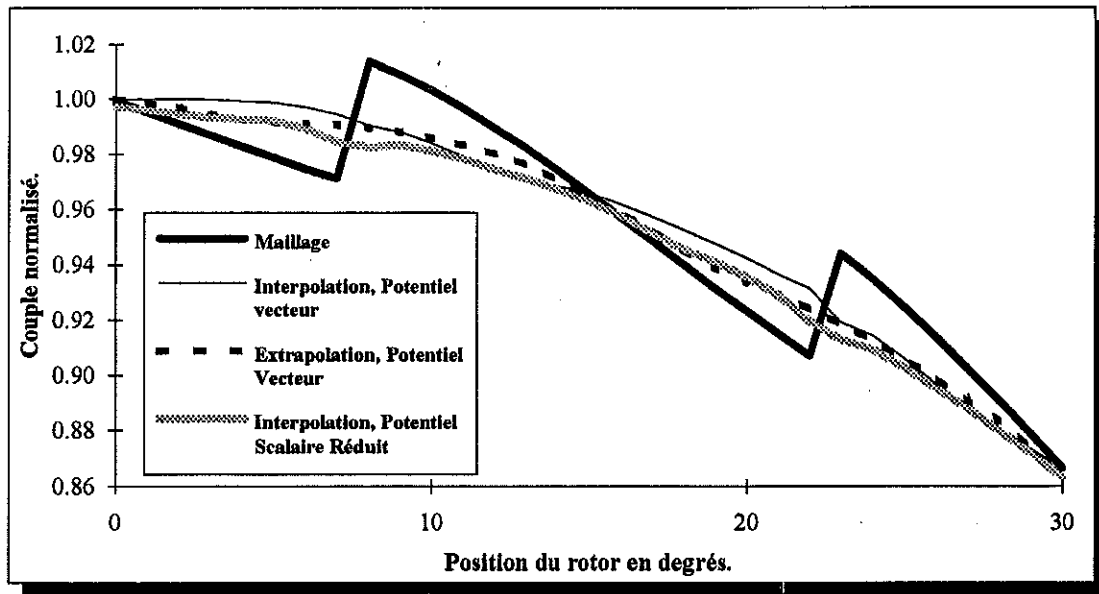


Figure 52 : Comparaison de 4 techniques de simulation du mouvement.

Ce problème simple nous a permis de valider la prise en compte du mouvement ainsi que d'analyser ses insuffisances. Il est important de réaliser maintenant une étude sur des cas réels qui permettront de valider aussi quantitativement que qualitativement la méthode de connexion de maillage.

Nous rappelons que chaque méthode nécessite une adaptation du logiciel MV3DYN. La modélisation par remaillage a nécessité la création d'un maillage spécifique dans le logiciel avec toutes les contraintes que cela suppose. Les tests utilisant l'interpolation ou l'extrapolation nodale ne nécessitent quant à eux que la programmation du calcul des combinaisons linéaires appropriées. Le test en potentiel scalaire réduit nécessite, quant à lui, la programmation d'une formulation supplémentaire.

## 5.2. LE MOTEUR A RELUCTANCE VARIABLE

Pour valider le logiciel module par module, nous n'utiliserons pas le couplage circuit. Nous calculons le couple obtenu à chaque position du rotor avec une alimentation constante. Le couple de référence est calculé par le logiciel validé FLUX3D. Ce logiciel ne gérant pas le mouvement, celui-ci est simulé par un remaillage complet de la géométrie à chaque position rotorique. Il s'ensuit que les erreurs numériques sont très différentes d'une position à l'autre.

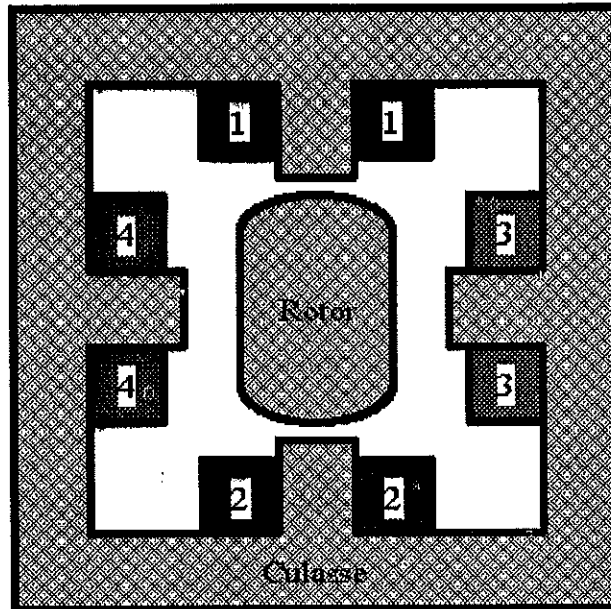


Figure 53 : Moteur à réluctance variable 2D (Schéma de principe).

Pour des raisons de confidentialité nous ne présenterons que le schéma de principe de ce moteur (Fig.53). Ce moteur est normalement alimenté par un circuit qui commute le courant d'un bobinage à l'autre pour assurer le mouvement. Dans notre essai, les bobines 1 et 2 sont alimentées en courant continu. La modélisation se fait de 0 à 180° par pas de 1°.

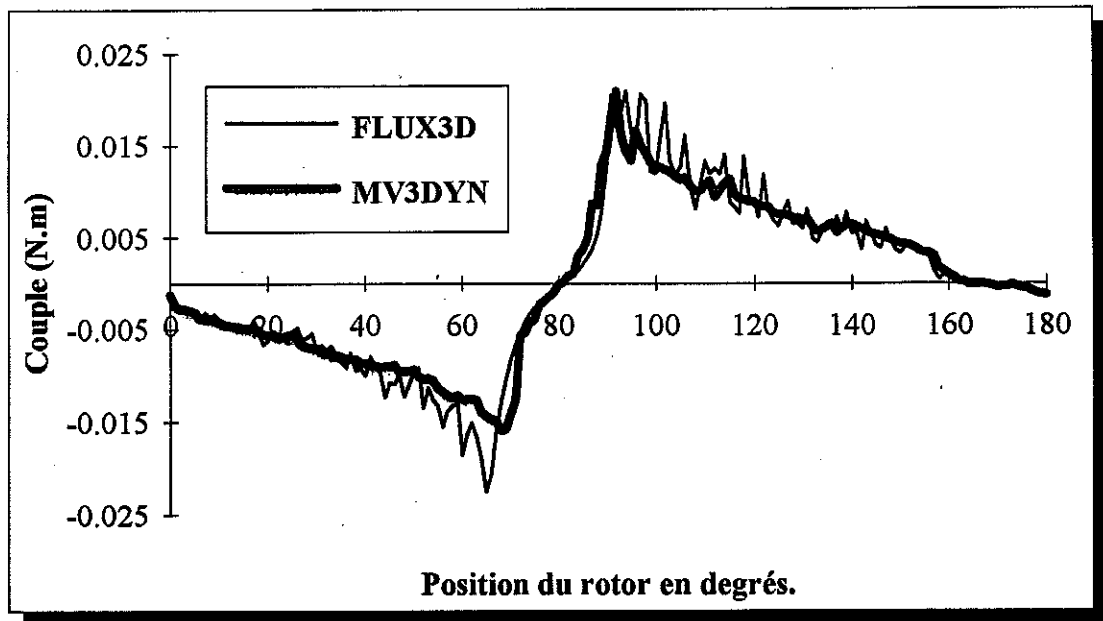


Figure 54 : Comparaison du couple obtenu par MV3DYN et FLUX3D.

La comparaison (Fig.54) entre les deux logiciels permet de valider MV3DYN. Le couple obtenu est correct et de plus les erreurs de calculs sont homogènes, ce qui assure une variation continue du couple en fonction du mouvement. Cela est normal car l'alimentation électrique est continue et la géométrie du moteur varie elle-aussi de façon continue. Nous pouvons en déduire que la version statique (sans couplage circuit) de MV3DYN fonctionne de manière satisfaisante.

### 5.3. LE MOTEUR A COURANT CONTINU

La validation statique étant effectuée, nous allons maintenant valider les conditions cycliques.

Ce moteur possédant deux pôles, sa modélisation peut se faire sur un quart de moteur. Ce moteur est alimenté par un courant continu. La version du logiciel utilisée ne possédant **pas de couplage circuit**, nous ne prendrons pas en compte les commutations balais-lames. Le rotor génère ainsi un champ tournant. Le couple obtenu possédera une composante fondamentale sinusoïdale (comme pour le coupleur magnétique) superposée avec le couple des encoches.

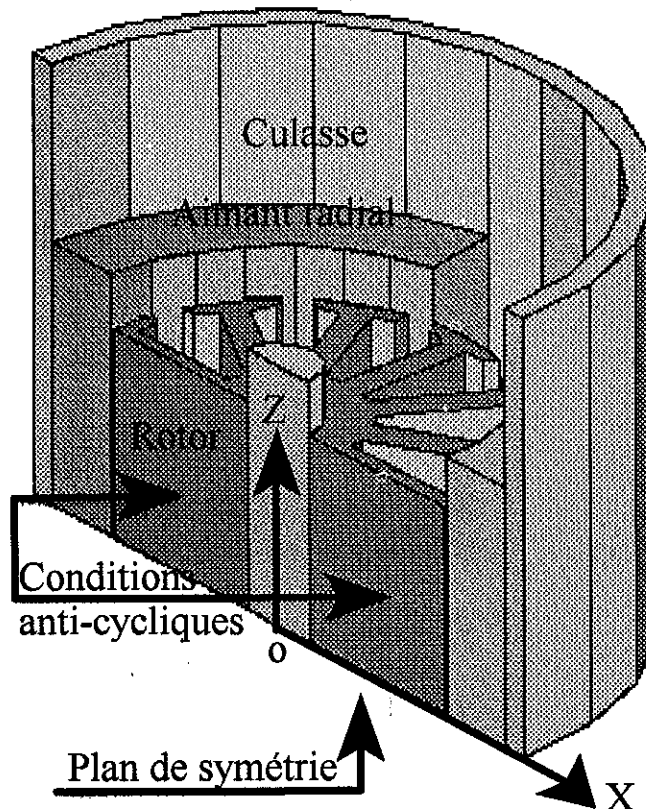


Figure 55 : Quart de moteur à courant continu. Bobinage rotorique non représenté.

La comparaison se fera entre un demi-moteur à courant continu maillé moyennement et un quart de moteur utilisant les conditions anti-cycliques (Fig.55). Le maillage de chaque moteur comporte le même nombre d'éléments finis ( $\approx 3500$ ). Cela implique que le quart de moteur est maillé deux fois plus finement. Le calcul du couple se fait de la position 0 à  $100^\circ$  par pas de  $1^\circ$ . L'effort de calcul est similaire pour les deux moteurs (Nombre de noeuds identiques  $\Rightarrow$  systèmes matriciels de tailles comparables).

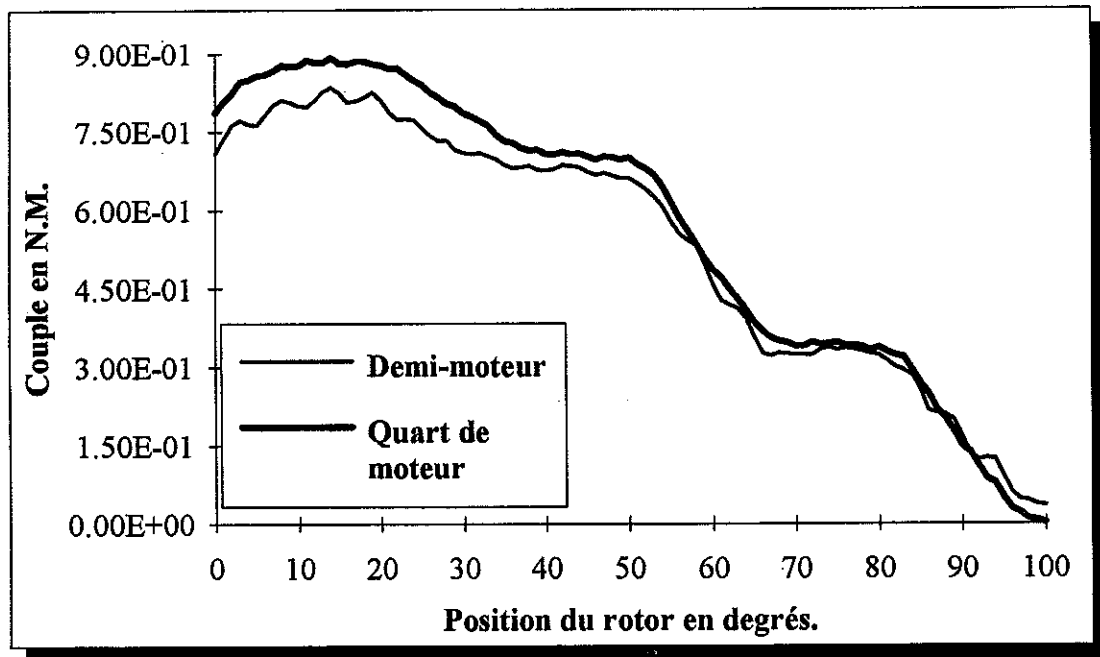


Figure 56 : Comparaison du couple sur un quart et un demi-moteur.

Ces résultats (Fig.56) permettent de mesurer l'intérêt de l'utilisation des conditions cycliques. Nous remarquons que la finesse du maillage influe fortement sur la valeur du couple (environ 10%).

Afin de réaliser l'étude complète du moteur à courant continu, nous utiliserons le couplage circuit du logiciel MV3DYN. Les circuits électriques modéliseront l'ensemble balais-lames du moteur. Nous simulerons le contact balai-lame par une résistance constante. Si le balai touche la lame alors la résistance est minimale sinon le circuit est considéré comme ouvert.

Afin d'avoir les meilleurs résultats possibles nous utiliserons au maximum les capacités offertes par le logiciel et par les moyens informatiques mis à notre disposition.

- Nous modéliserons un quart de moteur car nous simulons un moteur à courant continu alimenté de façon équilibrée.

- Nous maillerons finement ce moteur afin de nous approcher au plus près d'un maillage optimal.

- La station de travail utilisé nous permet de mailler la géométrie avec 25 000 noeuds (100 000 noeuds pour une géométrie complète).

- L'utilisation de matériaux non-linéaires dans la culasse et dans le rotor permet d'approcher au mieux les conditions réelles d'utilisations.

- Nous calculerons 90 pas de 1° afin de simuler 3 périodes. La première période contenant un transitoire numérique comme nous le verrons. La troisième période confirmant que la deuxième ne possède plus de transitoire.



Ces différentes contraintes nous amènent à des temps de calcul par pas de 1 heure en temps d'unité centrale. Le temps de calcul total est de 4 jours en temps d'unité centrale mais de 2 semaines en temps réelles car l'ordinateur dépasse légèrement la mémoire vive qui lui est allouée (phénomènes de pagination => rendement chutant à 10%).

La station de travail, que nous utilisons, est une H.P. Apollo Série 700. Le processeur est un 750 PA-RISC Workstation avec 128 Moctets de RAM. Les performances de ce type d'ordinateur sont de l'ordre de 76 Mips, 72.2 SPECmarks et 22 Mflops.

Nous comparons le couple et les courants avec le logiciel industriel MV2DYN. Ce logiciel simule les moteurs électriques en 2D par la méthode des éléments finis nodaux avec un couplage cinématique et électrique. La prise en compte du mouvement se faisant par l'intermédiaire d'un macro élément, ce qui assure que les erreurs sur les valeurs globales sont homogènes en fonction du mouvement (Voir chapitre 3). Ce logiciel prend en compte les effets 3D en surestimant légèrement les aimantations. Ce logiciel a été validé et fiabilisé par les industriels VALEO et MOULINEX.

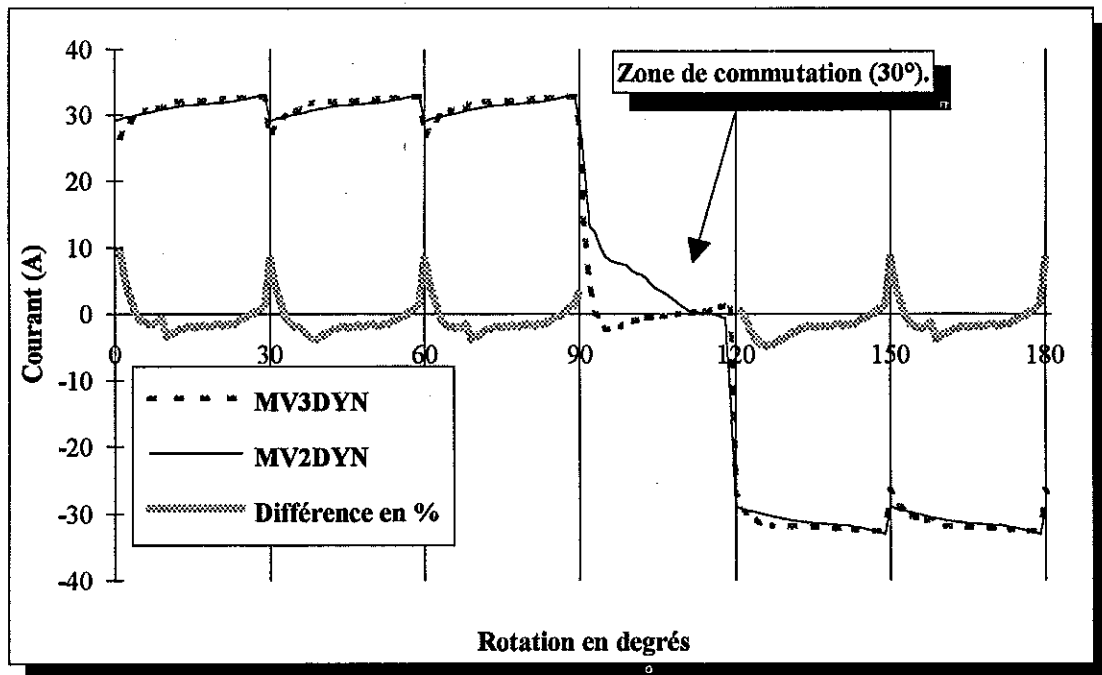


Figure 57 : Comparaison du courant dans une bobine du rotor.

Au vue de ces résultats (Fig.57), nous pouvons dire que le couplage circuit fonctionne. Les différences entre les deux courbes se localisent essentiellement sur les instants de commutation. MV2DYN utilise une résistance variable alors que nous utilisons une résistance constante. Les écarts extrêmes peuvent atteindre 10% mais en moyenne la différence entre les deux courbes est inférieure à 4%.

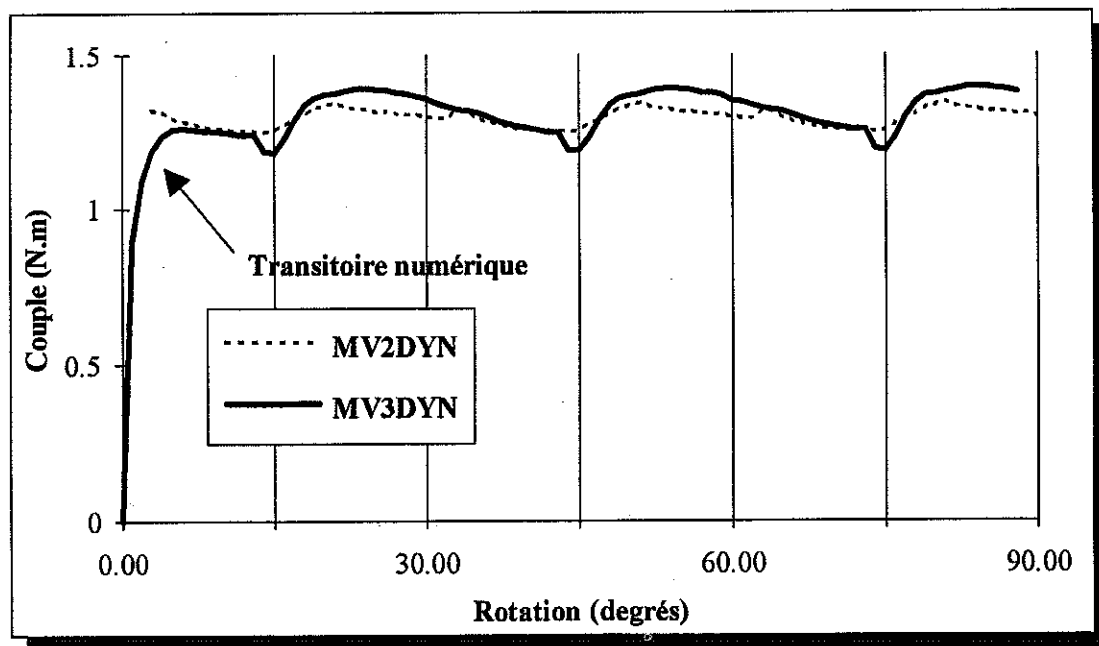


Figure 58 : Comparaison du couple.

Sur ces courbes (Fig.58), nous remarquons la présence d'un transitoire numérique. Ce phénomène sera explicité en détail un peu plus loin. Nous noterons que ce transitoire nécessite 15 heures de temps d'unité centrale (15 pas).

Comme pour les courants, la différence la plus grande entre les courbes se produit lors des commutations. Ce résultat est cohérent si nous considérons que le couple est proportionnel au courant. Ce qui implique que les erreurs sur les courants entraînent des erreurs sur le couple. A part les problèmes de commutations nous pouvons dire que le couple 2D est en accord avec le couple 3D. De même, le couple est bien périodique de période 30 degrés.

### 5.3.1. Les transitoires numériques.

Ces transitoires sont gênants car ils consomment beaucoup de temps d'unité centrale et fournissent par définition des résultats faux donc inutilisables. Ce temps d'unité centrale est donc gaspillé.

Ces transitoires se produisent quand nous nous trouvons dans la situation où l'état magnétique ou électrique ne peut correspondre à la réalité. Typiquement, cette situation se produit quand nous modélisons un moteur tournant à vitesse constante. Le premier pas de calcul s'exécute classiquement avec des conditions initiales nulles magnétiquement et électriquement. Ceci est impossible pratiquement, en effet, un moteur qui tourne possède un état magnétique et électrique différents de zéro. S'il est à vide, il se comporte en génératrice.

Afin de réduire au minimum ces transitoires, nous proposons deux méthodes :

- La première solution consiste à partir de conditions initiales non nulles. Le calcul peut préalablement être exécuter en 2D pour trouver une évaluation des courants circulant dans le moteur. Ces courants seront ensuite injectés en tant que valeurs initiales dans la

simulation 3D. Cette méthode impose de modéliser le moteur en 2D et 3D ce qui peut se révéler fastidieux. Cette solution ne sera pas validée.

- Une deuxième solution consiste à dégrader le maillage. Nous prendrons comme hypothèse de départ que le maillage utilisé ne comporte que des éléments finis de second ordre (paraboliques). Nous pouvons commencer à calculer le moteur en dégradant ces éléments finis du deuxième ordre en premier ordre. Le résultat sera évidemment moins précis mais il permettra de pratiquement supprimer les transitoires numériques. En fait, nous nous retrouvons avec deux transitoires. Le transitoire classique issu des conditions initiales et le transitoire issu du passage éléments finis du premier ordre au deuxième ordre. De plus cette méthode est facilement implantable dans un logiciel bien structuré. Il suffit, que lors de la lecture en basse de données de l'élément fini, un indicateur précise s'il faut récupérer l'élément sous forme premier ordre ou sous forme second ordre. L'utilisateur se contente de préciser le nombre de pas à exécuter en basse précision (élément du premier ordre).

Cette deuxième méthode permet de franchir très rapidement le transitoire numérique.

En effet,            un tétraèdre passera de 10 noeuds à 4.  
                         un prisme de 15 à 6 noeuds.  
                         un hexaèdre de 20 à 8 noeuds.

Soit une division par 2.5 du nombre de noeuds à traiter avec de plus une largeur de bande pour le système matriciel qui est fortement diminuée. Une estimation pessimiste donne un temps de calcul, par pas, 10 fois plus rapide. Nous passons ainsi de 15 heures de calcul pour un transitoire à 1h30. Ce qui est franchement plus raisonnable.

La validité de cette méthode repose principalement sur la différence subsistant entre le calcul premier et 2eme ordre. Si le décalage est trop important, nous retombons dans un transitoire numérique prenant beaucoup de temps d'unité centrale.

Nous allons maintenant valider cette méthode sur un quart de moteur à courant continu.

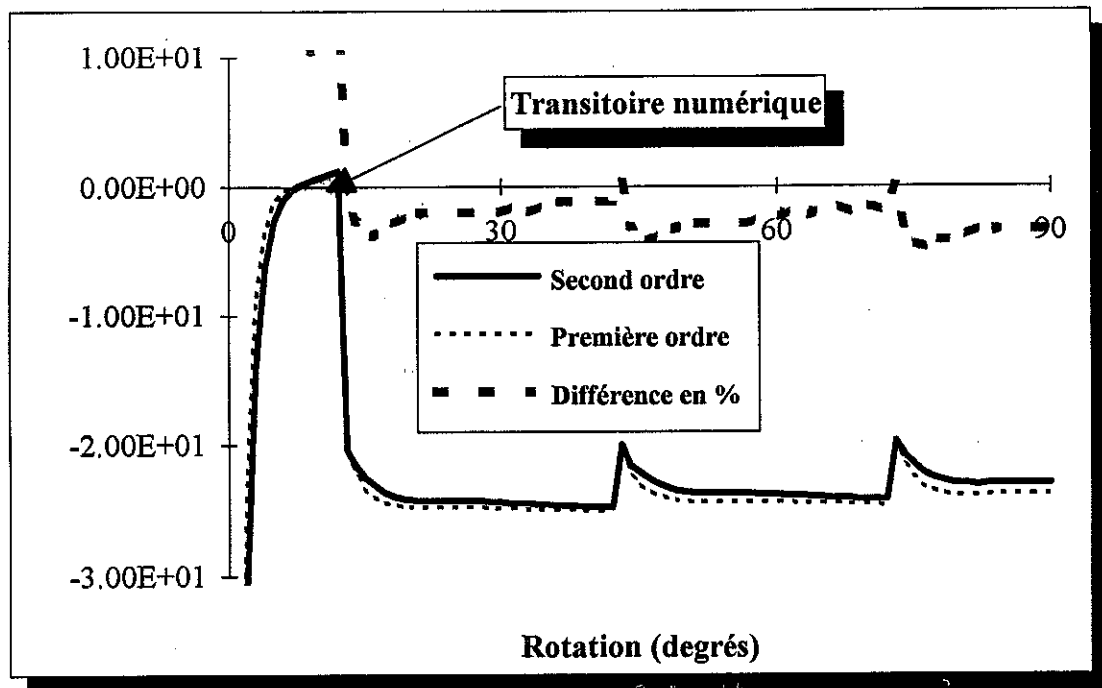


Figure 59 : Comparaison du courant dans la première bobine du rotor suivant l'ordre des éléments finis.

Sur ces courbes (Fig.59), nous remarquons que le transitoire numérique dure une quinzaine de degrés. Mais, il est important de remarquer que la différence entre les courants calculés à partir d'éléments finis du premier et second ordre est inférieure à 5 % une fois le régime permanent établi. La stratégie, à adopter, lors de la simulation de ce type de moteur, consiste à exécuter les 20 premiers degrés en basse précision (éléments du premier ordre) et ensuite d'enchaîner les pas suivant en haute précision (éléments du second ordre). Cette stratégie permet l'économie d'environ 1 jours de temps d'unité centrale.

Nous remarquerons que les éléments finis du premier ordre, dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur magnétique, surestiment le courant. Ceci s'explique parfaitement si nous considérons que ce maillage dégradé sous-estime le flux dans les bobines donc par la même occasion la force contre-électromotrice qui crée de se fait un courant trop important.

Nous pouvons d'ailleurs nous poser la question suivante :

Est-il bien utile de modéliser le moteur en élément du second pendant une semaine si nous pouvons obtenir un résultat à 5% en une dizaine heures ?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de comparer les couples obtenus par les deux modélisations.

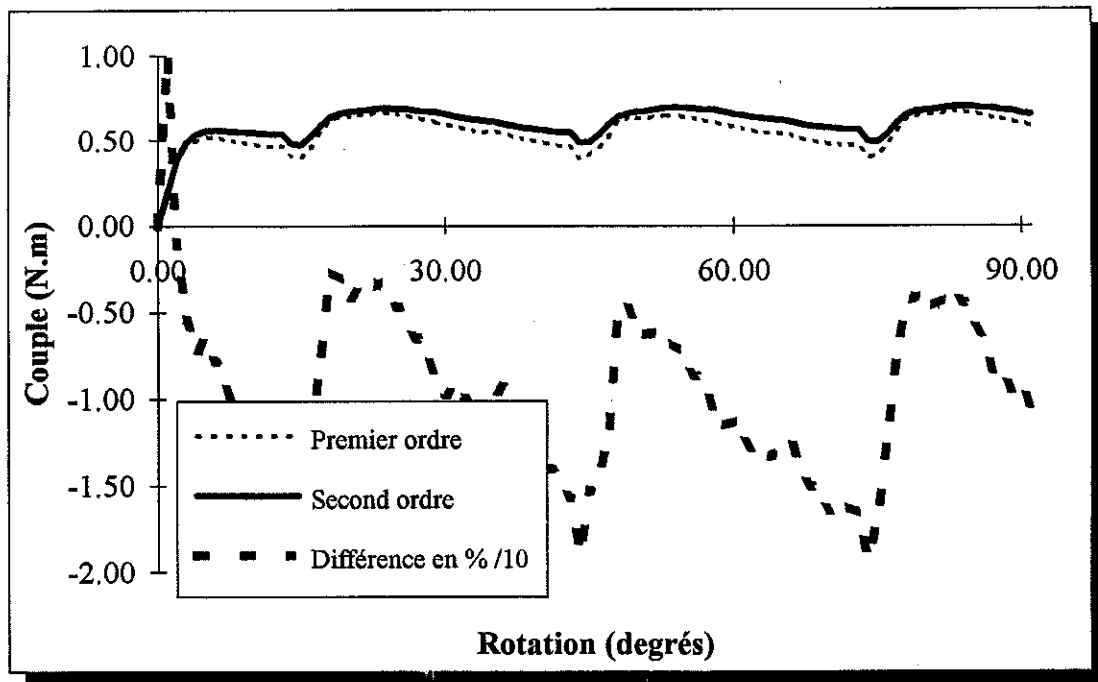


Figure 60 : Comparaison du couple suivant l'ordre des éléments finis.

Nous remarquons immédiatement que les erreurs sur le couple (Fig.60) sont plus importantes entre 5 et 20%. Pour le calcul du couple, il est donc inacceptable de se contenter éléments finis du premier ordre.

Remarque : Le calcul du couple par les travaux virtuels ne donne sans doute pas le meilleur résultat dans ce cas. Des méthodes utilisant le tenseur de Maxwell sont sans doute plus indiquées dans les cas des éléments finis du premier ordre. Il n'est pas exclu, non plus, que des techniques de lissage de l'induction dans l'entrefer ne permettent pas d'améliorer le calcul du couple.

Il est à remarquer que les courants pilotent l'état magnétique du moteur et non l'inverse. Le transitoire numérique entre le premier et le second ordre est donc très faible puisque les courants sont comparables.

Cette stratégie, qui permet de réduire les temps de calcul des transitoires numériques, nous a été encore une fois imposée par les limitations des moyens informatiques à notre disposition.

En conclusion, cette stratégie est parfaitement utilisable sur un moteur à courant continu. Sur ce type de moteur, une partie du flux est créée par des aimants. L'erreur commise sur le flux ne pénalise pas trop la valeur des courants. L'expérience nous apprend que cette stratégie est un peu moins avantageuse pour modéliser les moteurs à réluctance variable et les moteurs universels. En effet, sur ces derniers les courants créent et imposent seuls le flux dans le moteur. Le flux étant sous-estimé par les éléments du premier ordre, il s'ensuit que les courants seront fortement surestimés. Le transitoire numérique permettant de passer du premier au second ordre est alors beaucoup moins rapide. Le gain de temps est néanmoins encore intéressant.

### 5.3.2. Visualisation du champ en 3D en fonction du mouvement.

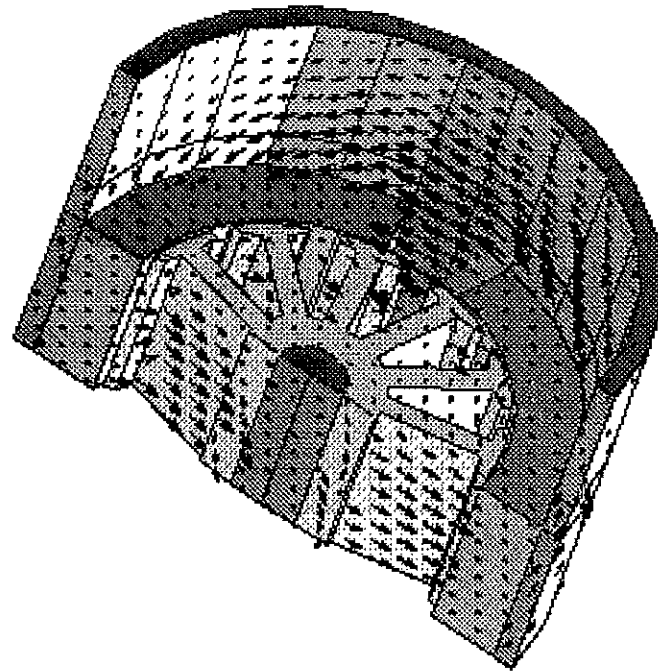


Figure 61 : Flèche de **B**. Angle de rotation  $0^\circ$ .

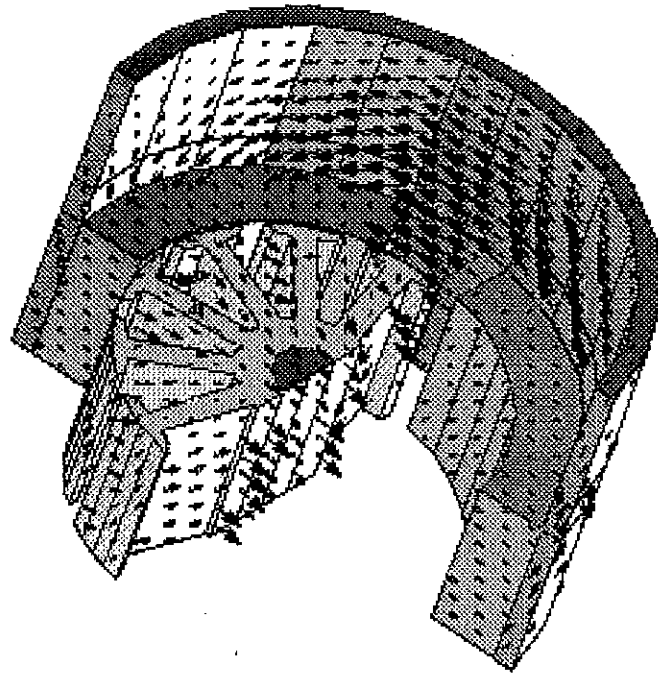


Figure 62 : Flèche de **B**. Angle de rotation  $90^\circ$ .

Ces figures (Fig.61 et 62) nous permettent de visualiser le parcours de l'induction magnétique dans un moteur à courant continu. La taille des flèches est fonction de l'intensité de l'induction.

Nous remarquons que le flux magnétique a tendance à remonter dans la culasse. Dans la zone haute du moteur, le flux, issu des aimants, se referme principalement dans la culasse. Il ne passe pas dans le rotor et donc, ne crée pas de couple. Une étude fine de ce phénomène permettrait de déterminer la taille de la culasse vraiment nécessaire sans perte de performance.

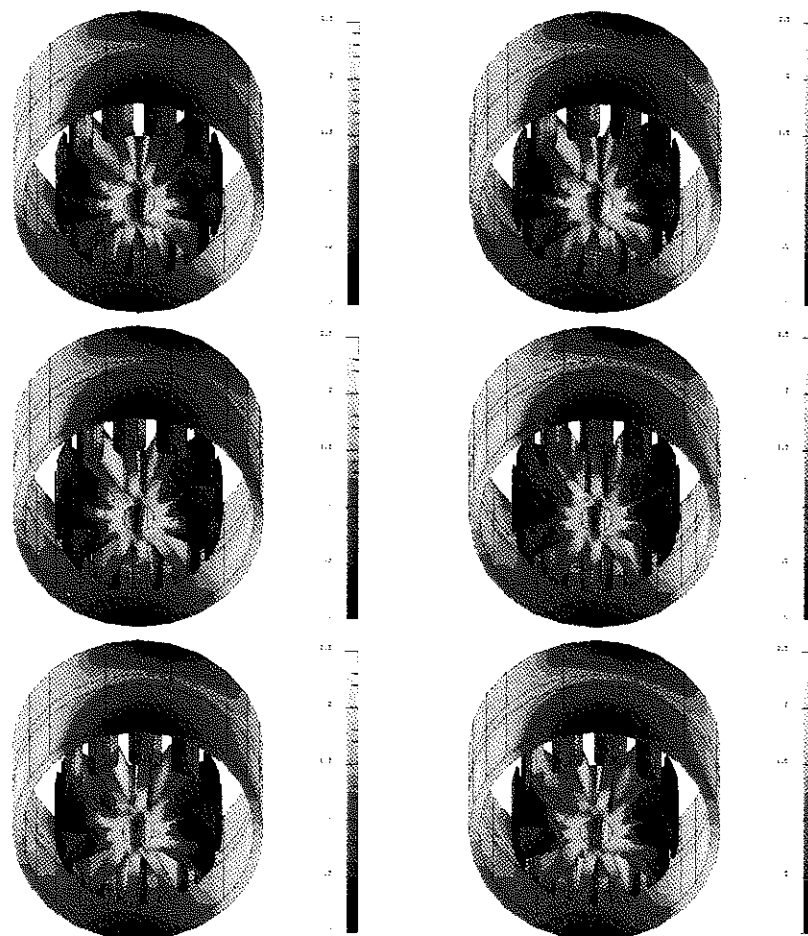


Figure 63 : Visualisation des isovaleurs de  $B$  de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  (Aimants et bobinages non représentés).

Ces figures (Fig.63) montrent que l'induction magnétique varie de 1.5 à 2 Tesla dans le haut du moteur alors qu'elle est seulement de l'ordre du Tesla dans la partie active du moteur. Le flux, créé par les aimants radiaux, est pratiquement totalement court-circuité dans la culasse.

Les concepteurs de machines peuvent donc à partir de ces cartes de champ visualiser précisément les zones de saturation, de déperdition du flux des machines. L'étape suivante consistera à inventer des parades, si nécessaire, et à les valider.

Remarque : Ces différentes visualisations ont été réalisées avec le module d'exploitation du logiciel FLUX3D. Ce logiciel a été modifié afin de pouvoir lire des fichiers de type UNIVERSEL/CAEDS, de pouvoir prendre en compte le mouvement rotorique et surtout de pouvoir exploiter sur des maillages discontinus (au niveau de l'interface de connexion).

## CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de démontrer la validité du logiciel. La méthode de connexion par interpolation ou extrapolation pour simuler le mouvement est valable et de plus utilisable pour d'autre formulation que le potentiel vecteur magnétique  $A$  notamment le potentiel scalaire réduit  $\phi_r$ .

Le moteur à réluctance variable alimenté par un courant continu, nous a permis de valider la modélisation du mouvement ainsi que le calcul du couple.

L'étude complète du moteur à courant continu (avec et sans couplage circuit) a permis de valider toutes les parties du logiciel (couplage circuit, couplage cinématique et prise en compte de conditions cycliques).

Une stratégie originale permet de réduire au minimum les transitoires numériques indésirables.

En conclusion, le logiciel donne des résultats similaires à des logiciels 2D ou 3D testés et validés.

Nous pouvons considérer que MV3DYN est valide au moins sur les exemples traités (moteurs à caractéristiques principalement 2D).





## **CONCLUSION GENERALE**



Nous avons réalisé un logiciel capable de modéliser électromagnétiquement les moteurs électriques en trois dimensions avec un couplage cinématique et un couplage circuit.

Après avoir recherché des méthodes pour modéliser le mouvement issu du 2D, nous avons créé une nouvelle méthode de connexion utilisant soit l'interpolation nodale soit l'extrapolation nodale. Cette méthode permet la modélisation du mouvement en 3D de façon efficace et rapide en ne dégradant pas les résultats.

La modélisation 3D demande beaucoup de moyens informatiques (1994). Pour cela, nous avons développé une méthodologie permettant leurs utilisations avec un rendement maximal. Des économies sont réalisées soit en créant des maillages spécifiques aux machines tournantes soit en utilisant des conditions limites.

Le traitement unifié des méthodes de connexion et des conditions limites permet d'utiliser les mêmes algorithmes pour modéliser aussi bien :

- le mouvement,
- que les conditions cycliques,
- que des conditions limites de normalité ou de tangence,
- que les conditions limites électriques,
- que la libération de la composante normale.

La validation du logiciel sur un cas d'école et sur des moteurs réels est tout à fait satisfaisant. Nous avons réalisé un logiciel capable de modéliser des moteurs 3D mais nous ne pouvons, pour des raisons purement informatique, valider ce logiciel en vraie grandeur. En effet le maillage spécifique ne marche que sur des moteurs possédant des parties extrusives. Nous ne pouvons pas modéliser valablement un moteur à griffes par exemple (Maillage trop important => super-ordinateur) ni des encoches inclinées (Pas de plan de symétrie => géométrie complète => super-ordinateur).

Les temps de calculs, encore prohibitifs, ne permettent pas de réaliser des simulations exploitables. Malgré l'effort consenti, dans le but d'économiser le temps et la mémoire, le logiciel nécessite un système informatique puissant. Les validations se font sur des modèles simplifiés. Le maillage n'est alors pas optimal, les matériaux généralement linéaires et les éléments finis du premier ordre. Cela permet de gagner du temps mais se paie par des résultats encore approximatifs. ( 10 à 20 %)

Ce logiciel, pour être parfaitement opérationnel, demande encore une validation typiquement 3D, aussi bien du point de vue des mesures que des calculs. Le couplage cinématique (démarrage, saut de couple résistant, etc.) n'a pas été validé. Avec les moyens informatiques à notre disposition (1994), nous pouvons estimer que les temps de calculs nécessaires sont de l'ordre du mois dans le cas d'un démarrage.

Le logiciel, ayant une vocation industrielle, il sera nécessaire d'accroître sa convivialité. L'intégration dans un système de CAO sera l'objectif à atteindre.

Pour conclure, nous avons le sentiment que dans un avenir relativement proche, les contraintes informatiques vont s'atténuer et que MV3DYN permettra alors de simuler valablement des moteurs typiquement 3D.



## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

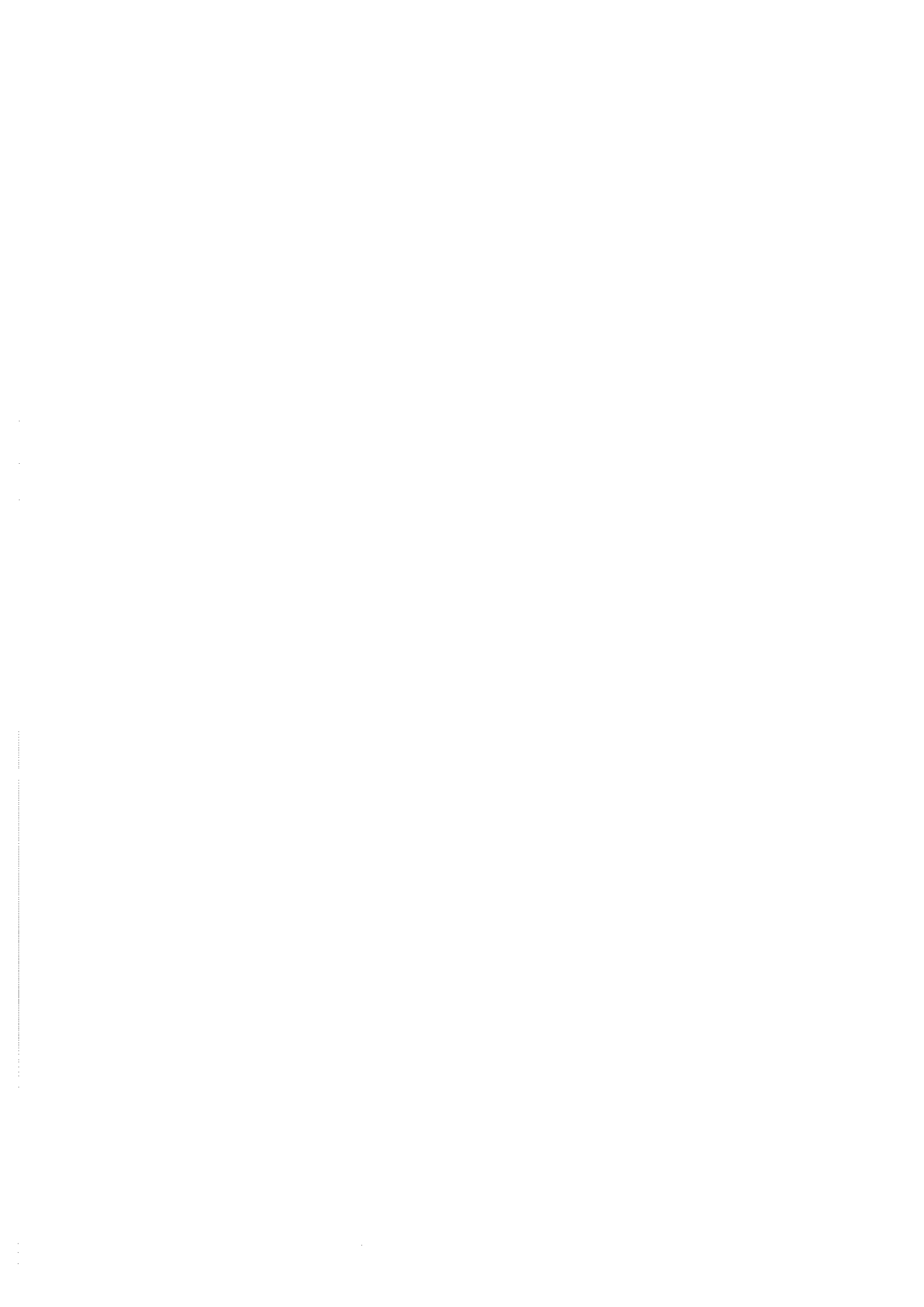


- [Abdel-Razek 82] **A.A. Abdel-Razek J.L. Coulomb M. Feliachi J.C. Sabonnadière** "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines" *IEEE Trans Mag* Vol 18 n°2 mar 1982 p.655-659
- [Albanese 88] **R. Albanese G. Rubinacci** "Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements" *IEE Proceedings* Vol 135 Pt.A n°7 sep 1988 p. 457-462
- [Bardi 90] **I. Bardi O. Biro, K. Preis** "Finite element scheme for 3D cavities without spurious modes" *Workshop T.E.A.M. Oxford 90 Proceedings* 23-25 April 1990 p.255-265
- [Biro 89] **O. Biro K.Preis** "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents" *IEEE Trans Mag* Vol 25 n°4 juil. 1989 p. 3145-3159
- [Biro 91] **O. Biro K.Preis I. Bardi C. Magele W. Renhart K.R. Richter G. Vrisk** "Numerical analysis of 3D magnetostatic fields" *IEEE Trans Mag* Vol 27 n°5 sep. 1991 p. 3798-3803
- [Bouillault 86] **F. Bouillault A. Razek** "Utilisation d'une formulation mixte (éléments finis-intégrale de frontière ) pour modéliser les systèmes électromagnétiques" *Revue Physique Appliquée* T.21 octobre 1986 p. 595-601
- [Bouillault 88] **F. Bouillault A. Razek** "Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems" *IEEE Trans Mag* Vol 24 n°1 jan. 1988 p. 259-261
- [Coulomb 81] **J.L. Coulomb** "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthodes des éléments finis." *Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Institut National de Polytechnique de Grenoble* 1981
- [Coulomb 82] **J.L. Coulomb G. Meunier J.C. Sabonnadière** " An original stationary method using local jacobian derivative for direct finite element computation of electromagnetic force,torque and stiffness" *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 26 1982 p. 337-339
- [Coulomb 83] **J.L. Coulomb** "A methodology for the determination of global electromenical quantities from finite analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness" (Invited Paper COMPUMAG Conf. Genova.) *IEEE Transactions on Magnetism* Vol. 19, n°6, pp 2514-2519, Nov 1983.



- [Coulomb 84] **J.L. Coulomb G. Meunier** "Finite element implantation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation" IEEE Trans MAG Vol 20 n°5 sep 1984 p.1894-1896
- [Coulomb 85] **J.L. Coulomb Y. Du Terrail G. Meunier** "FLUX3D : A finite element package for magnetic computation" (COMPUMAG Conference.) IEEE Transactions on Magnetics Vol. 21, n°6, pp 2499-2502, Nov 1985.
- [Coulomb 88] **J.L. Coulomb J.C. Sabonnadière** "Calcul des champs électromagnétiques" Techniques de l'ingénieur 1988.
- [Davat 85] **B. Davat Z. Ren M. Lajoie-Mazenc** "The movement in field modeling" IEEE Trans Mag Vol 21 n°6 nov 1985 p.2296-2298
- [Dreher 94] **T. Dreher** "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : Calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du couplage circuit." Thèse oct 94
- [Gournay 80] **A. Gournay** "Etude théorique et expérimentale de la déformation d'un champ électromagnétique provoquée par une pièce conductrice en mouvement. Application à la mesure de la vitesse sans contact." Thèse de Docteur ès-Sciences physiques Université de Lille I, 1980.
- [Guérin 90] **C. Guérin** "Etude de formulations magnétodynamiques 3D." D.E.A de Génie électrique, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble Sep. 1990
- [Hoole 85] **S.R.H. Hoole** "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery" IEEE Trans Mag Vol 21 n°6 nov 1985 p.2292-2295
- [Konrad 85] **A. Konrad** "A direct three dimensional finite element vector field for the resolution of electromagnetic fields in cavities." IEEE Transactions on Magnetics Vol. 21, pp 2276-2279, 1985.
- [Kotiuga 87] **P.R. Kotiuga** "On making cuts for magnetic scalar potentials in multiply connected regions" J. of Applied Physics 61(8), pp 3916-3918, 1987
- [Leonard 89] **P.J. Leonard D. Rodger** "A new method for cutting the magnetic scalar potential in multiply connected eddy current problems" IEEE Transactions on Magnetics Vol. 25, n°5, September 1989.

- [Maréchal 91] **Y. Maréchal** "Modelisation des phenomenes magnetostatiques avec terme de transport. Application aux ralentisseurs electromagnetiques." Thèse Fev. 1991 INPG
- [Maréchal 92] **Y. Maréchal G. Meunier J.L. Coulomb H. Magnin** "A general purpose tool for restoring inter-element continuity". IEEE Transactions on Magnetics Vol. 28, n°2, pp 1728-1731, March 1992.
- [Oden 72] **J.T. Oden** "Finite elements of non linear continua" Mc Graw Hill New York 1972
- [Perrin-Bit 94] **R. Perrin-Bit** "A Three Dimensional Finite Element Mesh Connection for Problems Involving Movement." CEFC 1994
- [Perrin-Bit 94] **R. Perrin-Bit** "Connexion de maillages éléments finis en trois dimensions appliquée à la modélisation électromagnétique des moteurs électriques." FIRELEC 1994
- [Rodger 90] **D. Rodger H.C Lai P.J. Leonard** "Coupled elements for problems involving movement." IEEE Trans Mag Vol 26 n°2 mars 1990 p. 548-550
- [Sabonnadière 87] **J.C. Sabonnadière J.L. Coulomb** "Eléments finis et CAO" Hermès Publishing 1987
- [Salon 89] **S.J. Salon R. Palma C.C. Hwang** "Dynamic modeling of an induction motor connected to an adjustable speed drive" IEEE Trans MAG Vol 25 n°4 jul 1989 p.3061-3063
- [Touzot 84] **G. Touzot, G. Dhatt** "Une présentation de la méthode des éléments finis" Deuxième édition Collection université de Compiègne 1984
- [Vassent 90] **E. Vassent G. Meunier A. Foggia J.C. Sabonnadière** "Simulation of induction machine operation using a step by step finite element method" Journal of Applied physics Vol 67 n°9 p.5809-5812 may 90
- [Vassent 90] **E. Vassent G. Meunier A. Foggia J.C. Sabonnadière** "Simulation of induction machine operation with a step by step finite elements method coupled with mechanical equation" 3° Colloque international sur la modélisation et la simulation des machines électriques et des convertisseurs statiques NANCY 19-21 sep 90
- [Vassent 90] **E.Vassent G.Meunier A.Foggia** "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements method coupled with the circuits equations" IEEE International conference of CEFC Toronto 21-25 oct 90
- [Zienkiewicz 89] **O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor** "The finite element methods" Fourth edition Vol. 1 editions Mac Graw-Hill. 1989.



## **BIBLIOGRAPHIE**



- [Kameari 90] **A. Kameari** "Calculation of transient 3D eddy current using edge-elements" IEEE Trans Mag Vol 26 n°2 march 1990 p. 466-469
- [Barton 87] **M.L. Barton Z.J. Cendes** "New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation" J. Appl. Phys. 61(8) 15 April 1987 p. 3919-3921
- [Bossavit 88] **A. Bossavit** "A rationale for "edge-elements" in 3D fields computations" IEEE Trans Mag Vol 24 n°1 jan 1988 p. 74-79
- [Brebbia 80] **C.A Brebbia** "Boundary elements method" CML Publications 1980
- [Brunotte 91] **X. Brunotte** "Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces. Application à la modélisation des aimantations des navires." Thèse Dec 91 INPG
- [Coulomb 81] **J.L Coulomb** "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis" Thèse d'état 1981 INPG
- [De la Morinais 90] **G. De la Morinais G. Meunier C. Kieny** "Calcul des courants de Foucault en 3D par une formulation utilisant le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique" Revue Physique Appliquée T.25 n°7 juillet 1990 p. 593-603
- [De la Morinais 90] **G. De la Morinais** "Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en 3D" Thèse 1990
- [Kanayama 90] **H. Kanayama H. Motoyama K. Endo F. Kikuchi** "Three-dimensional magnetostatic analysis using NEDELEC's elements" IEEE Trans Mag Vol 26 n°2 march 1990 p. 682-685
- [Lai 91] **H.C. Lai D. Rodger P.J. Leonard** "Coupling meshes in 3D problems involving movements" University of Bath UK 1991
- [Lombard 92] **P. Lombard** "Couplage des équations électriques et magnétiques." Thèse Sep. 1992 INPG
- [Maréchal 90] **Y. Maréchal G. Meunier** "Computation of 2D and 3D eddy currents in moving conductors of electromagnetic retarders." IEEE Trans Mag Vol 26 n°5 sep 1990
- [Piriou 91] **F. Piriou A. Razek** "Modèle non-linéaire 3D magnétostatique - équations de circuit" SEE 20 et 21 mars 1991 p. 65-70

- [Piriou 91]** F. Piriou A. Razek "Modèle tridimensionnel pour coupler les équations magnétiques et électriques dans le cas magnétostatique" J. Phys. III 1 1991 p. 415-428
- [Ren 88]** Z. Ren F. Bouillault A. Razek J.C. Verite "Comparison of different boundary integral formulations when coupled with finite elements in 3D" IEE Proceedings Vol 135 Pt.A n°8 nov 1988 p. 501-507
- [Ren 90]** Z. Ren F. Bouillault A. Razek "A new hybrid model using electric field computation for 3D eddy current problems" IEEE Trans Mag Vol 26 n°2 mar 1990 p. 470-473
- [Ren 90]** Z. Ren F. Bouillault A. Razek " Calculation of 3D eddy current problems by an hybrid T- $\Omega$  method" IEEE Trans Mag Vol 26 n°2 mars 1990 p. 478-481
- [Sabonnadière 87]** J.C. Sabonnadière J.L. Coulomb "Eléments finis et CAO" Hermès Publishing 1987
- [Vassent 89]** E. Vassent G. Meunier J.C. Sabonnadière "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements" IEEE Trans MAG Vol 25 n°4 jul 1989 p.3064-3066
- [Vassent 90]** E. Vassent "Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis" Thèse nov 90 INPG

## Résumé de thèse

### **Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels: Calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement.**

Un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis nodaux a été développé. Ce logiciel permet de simuler, en trois dimensions, les machines électriques tournantes.

Les phénomènes magnétiques sont calculés par une formulation en potentiel vecteur magnétique  $A$ . Pour modéliser les moteurs électriques quel que soit leur fonctionnement, nous utilisons une résolution en régime transitoire avec couplage de l'équation générale de la mécanique. Une méthode de prise en compte du mouvement et plus généralement des limites a été étudiée et utilisée dans le logiciel.

Des conditions aux limites de type champ tangentiel, champ normal, symétrie et périodicité (cyclique, anti-cyclique) ont été implémentées.

Des maillages tridimensionnels spécifiques aux machines tournantes ont été construits afin de remédier au manque de puissance des systèmes informatiques actuels (1994). Afin de réduire les temps de résolution, inhérents à la méthode de résolution en pas à pas dans le temps tridimensionnel, nous avons pris soin d'optimiser le logiciel dans sa structure général et dans chacune de ses routines de calcul.

Le logiciel a été validé sur l'étude d'un moteur à courant continu ainsi que sur un moteur à réluctance variable.

#### **Mots-clé:**

Modélisation tridimensionnelle	Régime transitoire
Logiciel industriel	Electromagnétisme
Machines tournantes	Couplage cinématique
Déplacement rotorique	Formulation 3D potentiel vecteur magnétique
Éléments finis nodaux	

#### **Abstract**

### **Three Dimensional Finite Element Modelling of Electric Rotating Machines: Calculation of Magnetic Quantities with Movement.**

A calculation code, using nodal finite elements, has been developed. This software allows the simulation of electric rotating machines in three dimensions.

Magnetic quantities are computed with a 3-D formulation using the vector potential  $A$  as unknowns. For modelling an electric motor whatever these functions, we use a step by step process. Rotor movement, through the electric machine, is implemented by coupling with the general equation of the mechanic. One method of modelling displacement and more generally boundaries has been studied and used in the software.

Tangent, normal field, symmetric and periodic (cyclic, anti cyclic) types of boundaries have been implemented.

Specific three dimensional meshes for rotating machines have been elaborated so as to permit modelling in spite of lack of an up to date powerful computer system (1994). Moreover to reduce solving time, inherent in a step by step process, we have taken care to optimise the software in its general structure and in each calculation subroutine.

The software has been validated with a DC motor study as well as an induction motor.

#### **Key-words:**

Modelling in 3-D	Step by step process
Industrial software	Electromagnetic
Rotating machines	Cinematic coupling
Nodal finite elements	3-D magnetic potential vector formulation



