



HAL
open science

Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques

Patrick Gibel

► **To cite this version:**

Patrick Gibel. Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2018. tel-01919188

HAL Id: tel-01919188

<https://hal.science/tel-01919188v1>

Submitted on 12 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Patrick GIBEL

Maître de conférences à l'ESPE d'Aquitaine-Université de Bordeaux

Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel
d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques

Note de synthèse pour une habilitation à diriger les recherches
soutenue le 28 mars 2018
à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Devant le jury :

Isabelle Bloch, Professeur émérite, Université de Bordeaux

Viviane Durand-Guerrier, Professeur, Université de Montpellier, Rapporteur

Brigitte Grugeon-Allys, Professeur, l'Université Paris Est Créteil, Rapporteur

Jacques Giacomoni, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Caroline Lajoie, Professeur, Université du Québec à Montréal, Rapporteur

Fabrice Vandebrouck, Professeur, Université Paris-Diderot

Résumé : Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, les raisonnements occupent une place centrale compte tenu des multiples fonctions qu'ils recouvrent : décider de l'utilisation d'une connaissance, conjecturer, contrôler, communiquer, argumenter, prouver, démontrer. Pour permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder à ces différentes fonctions et de les maîtriser, il est nécessaire que les enseignants leur fassent vivre des dispositifs et des ingénieries didactiques spécifiques afin de produire des raisonnements en réponse aux situations proposées.

Nous montrons l'adéquation et la pertinence des cadres théoriques mobilisés, la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Peirce, pour élaborer un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Nous justifions que trois axes sont nécessaires en vue d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations comportant une dimension recherche. Le premier axe est attaché à la fonction du raisonnement en lien avec le niveau de milieu correspondant, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis ; le deuxième est celui des signes et des représentations observables reposant sur l'analyse sémiotique de C.S. Peirce ; le troisième est lié à l'usage et de l'évolution du répertoire de représentation.

Ce modèle permet d'étudier *a priori* et *a posteriori* les effets de différentes ingénieries et dispositifs didactiques, mis en œuvre dans l'enseignement primaire, secondaire et supérieur, sur le développement de la capacité des élèves et des étudiants à concevoir et à faire usage de raisonnements, dans des conditions qui le justifient. Les situations d'enseignement-apprentissage analysées ciblent plusieurs objectifs : d'une part permettre aux élèves et aux étudiants de donner du sens à une connaissance ou à un concept mathématique, en combinant les dimensions sémantique et syntaxique, d'autre part leur faire prendre conscience des enjeux de la pratique du raisonnement, en percevant leurs différentes fonctions et leurs potentialités.

Ce modèle présente également l'intérêt de nous renseigner sur la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants en situation d'apprentissage ou d'évaluation.

Nous souhaitons rendre compte de la validité, de la pertinence et de l'adéquation de ce modèle, et interroger ses limites, pour conduire des recherches en didactique dans différents domaines des mathématiques et à des niveaux d'enseignement différents.

Title: Development and uses of a model of reasoning processes' analysis in mathematics classroom

Keywords: Reasoning processes, proof, mathematics, inference, semiotics, theory of didactical situations.

Elaboration et usages
d'un modèle multidimensionnel
d'analyse des raisonnements en classe
de mathématiques

SOMMAIRE DE LA NOTE DE SYNTHÈSE

INTRODUCTION	7
CHAPITRE 1 Modélisation en Théorie des Situations Didactiques des raisonnements en classe de mathématiques.....	13
CHAPITRE II Présentation et fonctions du modèle d'analyse des raisonnements.....	35
CHAPITRE III Utilisation du modèle en situation de validation à l'école primaire	57
CHAPITRE IV Effets de l'utilisation du modèle pour l'étude des raisonnements en géométrie à la transition école-collège	79
CHAPITRE V Application du modèle à l'étude d'une situation de validation en Analyse dans l'enseignement secondaire	101
CHAPITRE VI Utilisations du modèle dans l'enseignement supérieur : apports et perspectives	123
CONCLUSION	139
REFERENCES	143

INTRODUCTION

Les raisonnements jouent un rôle déterminant dans l'enseignement et plus généralement dans l'éducation aux sciences. Ils permettent notamment aux élèves, par l'élaboration, l'usage ou l'analyse de raisonnements, de prendre conscience du champ d'utilisation des connaissances et des savoirs dont ils disposent et de développer leur esprit critique à propos d'un énoncé ou d'une argumentation dont ils doivent examiner la validité ou la pertinence.

Depuis le début de nos recherches en didactique des mathématiques, nous¹ avons accordé une place centrale à l'étude des raisonnements en classe de mathématiques en prenant en compte le travail des élèves et celui du professeur. Initialement nous avons réalisé des recherches dans l'enseignement primaire, puis nous avons jugé indispensable de prolonger cette réflexion au niveau de l'enseignement secondaire puis supérieur – notamment dans le cadre de l'encadrement d'une thèse (Lalaude-Labayle, 2016) sur l'enseignement de l'Algèbre linéaire en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles.

L'apprentissage des raisonnements est essentiel pour la compréhension des mathématiques. Les défauts de cet apprentissage apparaissent à différents niveaux dans les recherches en didactique des mathématiques : lors des observations de classes, dans l'analyse de productions mais également dans le constat de l'échec de certains étudiants dans l'enseignement supérieur.

La difficulté de compréhension des objets mathématiques doit être prise en compte lors de la conception des séquences d'enseignement ; d'où la nécessité de dispositifs spécifiques pour aborder et mettre en œuvre ces objets dans des situations qui requièrent leur usage. L'appropriation du formalisme, par la connaissance de règles ou plus généralement d'énoncés, ne suffit pas : la compréhension d'un objet mathématique nécessite de « coupler »

¹ J'emploierai dans cette note de synthèse le « nous » académique.

la dimension sémantique et la dimension syntaxique par l'utilisation de cet objet en situation. Ces dimensions sont introduites par des situations de recherche mathématique, donnant lieu dans un premier temps à différentes formes de raisonnements, plus ou moins élaborées, dont la formalisation ne satisfait pas nécessairement aux critères d'une preuve mathématique.

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les raisonnements occupent une place centrale compte tenu des multiples fonctions qu'ils recouvrent : décider de l'utilisation d'une connaissance, conjecturer, contrôler, communiquer, expliquer, préciser, opposer, argumenter, débattre, prouver et démontrer. Permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder à leurs différentes fonctions est envisageable à condition que les enseignants leur fassent vivre des dispositifs didactiques qui, de façon « naturelle » et nécessaire, conduisent leurs élèves ou leurs étudiants à élaborer des raisonnements en réponse aux situations proposées.

Les travaux de recherche présentés dans le cadre de cette note de synthèse visent principalement à étudier les effets de différentes ingénieries et dispositifs didactiques, mis en œuvre dans l'enseignement primaire, secondaire et supérieur, sur le développement de la capacité des élèves et des étudiants à concevoir et à faire usage de raisonnements, dans des conditions qui le justifient.

Ces situations d'enseignement-apprentissage ciblent plusieurs objectifs : d'une part permettre aux élèves et aux étudiants de donner du sens à une connaissance ou à un concept mathématique, en accédant aux raisons de savoir, par la confrontation à des situations d'action, de formulation, de décision ou de validation, d'autre part leur faire prendre conscience des enjeux de la pratique du raisonnement, en percevant leurs différentes fonctions et leurs potentialités.

Ainsi il s'agit d'élaborer et d'analyser des situations didactiques ou à dimension didactique définies par Bloch (1999) et Mercier (1995) permettant de favoriser la pratique du raisonnement, plus précisément de développer la capacité des élèves à élaborer et à utiliser leur(s) raisonnement(s) dans des situations mathématiques pertinentes.

Les questions de recherche que nous avons formulées sont :

Comment élaborer ce type d'ingénierie ou de dispositif didactique ? Quelles conditions doivent remplir ce type de situations ? Comment les enseignants prennent-ils en compte les raisonnements des élèves produits par confrontation à une situation didactique ou à dimension didactique ?

Nous souhaitons effectuer une analyse précise des raisonnements, valides ou erronés, produits par l'élève au cours des situations didactiques et adidactiques qui structurent le déroulement de la séquence de classe. Ceci nous conduit à formuler une question d'ordre méthodologique :

Quelle méthodologie convient-il d'adopter pour conduire cette recherche en didactique des mathématiques ? Comment élaborer un modèle d'analyse qui permette d'étudier à la fois la dimension sémantique et la dimension syntaxique des raisonnements, donnant ainsi accès à différents aspects des objets mathématiques en jeu ?

Nous souhaitons étudier les raisonnements par la mise en œuvre d'un modèle multidimensionnel qui ne se limite ni à l'analyse des signes considérés en tant qu'éléments du registre de représentation sémiotique Duval (1996), ni à l'analyse de leurs fonctions, mais qui offre la possibilité de les étudier conjointement. Plutôt que de nous focaliser sur l'un ou l'autre de ces aspects, nous justifions que trois axes sont nécessaires pour analyser les raisonnements.

Nous désirons déterminer la validité, la pertinence et l'adéquation de ce modèle et interroger également ses limites pour conduire des recherches en didactique des mathématiques dans des contextes variés et à des niveaux d'enseignement différents.

Dans le chapitre I, nous expliciterons les raisons pour lesquelles les deux cadres théoriques mobilisés, la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Pierce, constituent un outillage théorique adéquat afin d'identifier et de caractériser les raisonnements selon leur nature et leur(s) fonction(s), en lien avec les conditions de leurs productions.

Dans le deuxième chapitre nous décrirons et justifierons précisément les trois axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements. Le premier axe est lié au milieu de la situation correspondant, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis. Le deuxième est l'analyse des fonctions du raisonnement. Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables, reposant sur l'analyse sémiotique de C.S. Pierce ; il est lié à l'analyse du répertoire de représentation² du point de vue de son usage et de son actualisation. Concernant ce dernier axe, lors du déroulement d'une séquence de classe, nous analyserons l'évolution du répertoire de représentation de la classe en lien avec l'objectif de la séquence. Nous expliciterons les fonctions prédictive et explicative de notre modèle et

² Nous définirons précisément ce terme dans le chapitre I, section I.3

nous présenterons la méthodologie utilisée pour conduire nos analyses *a priori* et *a posteriori* en ciblant plus particulièrement les raisonnements valides et erronés élaborés, par les élèves et l'enseignant, durant les différentes phases de la séquence.

Au cours du troisième chapitre, nous analyserons l'usage du modèle pour étudier les raisonnements élaborés principalement par les élèves de CM2 (âgés de 10-11 ans) au cours d'une séquence de classe dont l'élément central est une situation de validation. Cette situation vise à amener les élèves à débattre de la validité des méthodes permettant de gagner au jeu « Le nombre le plus grand ». Cette étude permettra non seulement de mettre en lumière les raisonnements mis en œuvre au cours de chacune des phases de la séquence en identifiant leurs différentes fonctions, mais encore de rendre compte de la possibilité des élèves de progresser dans la pratique du raisonnement.

Le chapitre IV donne à voir les éléments essentiels qui structurent l'analyse clinique d'une séquence dans le domaine de l'apprentissage de la géométrie au cycle 3. L'ingénierie étudiée a pour principal objectif de préparer les élèves à passer progressivement d'une géométrie instrumentée à une géométrie hypothético-déductive. Cette dernière repose sur la justification des assertions en lien avec les propriétés des figures géométriques. La méthodologie vise à analyser les raisonnements élaborés par les élèves en situation de reproduction de figures dans l'espace sensible (més-espace). Elle repose sur une analyse sémiotique s'appuyant principalement sur l'étude des signes langagiers et infralangagiers. Sa mise en œuvre nécessite de prendre appui sur des éléments visuels mettant en évidence la dimension infralangagière des raisonnements des élèves.

Le cinquième chapitre dévoile l'intérêt du modèle pour analyser la nature et la fonction des raisonnements produits par les élèves et l'enseignant au cours d'une séquence d'Analyse, dans le second degré. L'ingénierie étudiée a pour finalité de permettre aux élèves de se familiariser avec le concept de « limite » d'une suite numérique. Cette étude montre qu'à ce niveau d'enseignement, la situation permet aux élèves d'accéder à des raisonnements qui traduisent leur appréhension des objets mathématiques à travers un usage adéquat des outils de validation, et donc du répertoire de l'Analyse.

Dans le dernier chapitre nous commencerons par rendre compte d'une recherche, portant sur l'enseignement de l'Algèbre linéaire, réalisée dans le cadre du doctorat de Lalaude-Labayle (2016). Les expérimentations ont été effectuées en en deuxième année de Classes

Préparatoires aux Grandes Ecoles (C.P.G.E), dans le contexte des interrogations orales³. Nous expliciterons l'adaptation du modèle à ce contexte ainsi que la méthodologie mise en œuvre, ensuite nous formulerons les principaux résultats de l'étude (Lalaude-Labayle, 2016). Pour finir nous exposerons également les orientations que nous souhaitons donner à ces recherches dans le cadre de la mise en œuvre du projet D.E.M.I.P.S⁴ visant à analyser et à essayer de répondre aux difficultés majeures rencontrées par les étudiants de Licence de Mathématiques.

Les publications 1,2,3,4,6,7 et 8 sont jointes à la note de synthèse. Elles ont servi de points d'appuis à la rédaction de cet écrit.

Publication n°1

BROUSSEAU, G., GIBEL, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 13-58, Springer.

Publication n°2

BLOCH, I., GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31-2, 191-228, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Publication n°3

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, 9-2, 51-72, Presses Universitaires de Rennes.

Publication n°4

GIBEL, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39, IREM de Strasbourg.

Publication n°5

En amont et en aval des ingénieries didactiques, ouvrage coordonné par MARGOLINAS, C., ABOUD-BLANCHARD, M., BUENO-RAVEL, L., DOUEK, N., FLÜCKIGER, A.,

³ Plus communément appelées « colles »

⁴ Didactique et Epistémologie des Mathématiques, en lien avec la Physique et l'Informatique dans le Supérieur.

GIBEL, P., VANDEBROUCK, F. & WOZNIAK, F. Publié en 2011, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Publication n°6

GIBEL, P., BLANQUART-HENRY, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des Sciences de l'Education*, 43(1), 37-84.

Publication n°7

GIBEL, P., ENNASSEF, M. (2012), Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 87-116, IREM de Strasbourg.

Publication n° 8

BLOCH, I., GIBEL, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. Two examples: parametric curves and differential equation. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 43-53). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Chapitre I. Modélisation en Théorie des Situations

Didactiques des raisonnements

en classe de mathématiques

I.1 Introduction

Le terme raisonnement a plusieurs acceptions: « D'un côté il désigne les activités ou démarches qui consistent à raisonner. De l'autre, il désigne les produits ou les résultats de ces activités. » (Blanché, 1973). Dans notre étude des différentes formes de raisonnements, élaborés au cours d'une séquence en classe de mathématiques, cette distinction est essentielle. En effet, en didactique des mathématiques, les conditions dans lesquelles l'élève⁵ est conduit à élaborer un raisonnement doivent être prises en compte dans l'analyse des raisonnements produits.

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, le raisonnement produit est généré par le raisonnement activité ; de même il est adéquat de modéliser le raisonnement activité, en Théorie des Situations Didactiques, comme résultant du fonctionnement des connaissances du sujet, confronté à une situation mathématique. Pour étudier les raisonnements en classe de mathématiques, nous tiendrons compte d'une part des conditions dans lesquelles ils ont été élaborés et d'autre part des raisons pour lesquelles ils ont été produits. Nous proposerons dans la première partie de cet écrit une modélisation de l'activité raisonnement, en lien avec le fonctionnement du « répertoire didactique⁶ » de l'élève qui en est l'auteur.

Notre étude se limite au cadre de la didactique des mathématiques, dans le sens où nous nous intéresserons essentiellement aux connaissances et aux savoirs mobilisés ou susceptibles d'être mobilisés par les acteurs de la relation didactique, élèves et enseignant, dans le but d'étudier les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, apparaissant en

⁵ Dans les deux premiers chapitres de cette note de synthèse le terme « élève » désignera non seulement un élève de l'enseignement primaire ou secondaire mais encore un étudiant de l'enseignement supérieur

⁶ Ce terme « répertoire didactique » sera défini dans la section I.2

situation didactique ; nous prendrons soin de définir précisément les conditions dans lesquelles les raisonnements ont été produits.

Par ailleurs le raisonnement produit est ce qui permet d'établir, dans des conditions particulières, des démonstrations correspondant à des raisonnements « officiels » c'est-à-dire officiellement reconnus par la communauté des mathématiciens comme raisonnements mathématiques.

Lorsqu'on souhaite étudier les raisonnements en classe de mathématiques, la première question est : Pourquoi l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques ne peut-elle pas se limiter à l'étude des raisonnements logiques et mathématiques formels « stricto sensu » ?

Dans cette première partie, nous commencerons par définir en didactique des mathématiques ce que nous entendons par « raisonnement », en précisant les caractères qui permettent d'identifier les différentes formes de raisonnements produits en regard de leurs fonctions en classe de mathématiques.

L'enseignement du raisonnement a pu se concevoir précédemment comme l'exposé et la reproduction de démonstration(s)⁷, cependant pour la majorité des enseignants⁸ le plus souvent c'est la production « naturelle » de raisonnements qui est recherchée, principalement par la confrontation de l'élève à l'activité de résolution de problèmes.

De plus, pour éviter le phénomène de conditionnement, les professeurs ont fréquemment recours à des situations plus « ouvertes ». Dans le cadre de cette note de synthèse, nous nous intéresserons plus particulièrement aux situations adidactiques et aux situations à dimension adidactique (Bloch, 1999 ; Mercier, 1995), c'est-à-dire comportant une dimension recherche. Cependant leur mise en œuvre présente, pour les différents acteurs⁹ de la relation didactique, un certain nombre d'inconvénients et de difficultés : l'élève¹⁰, confronté à ce type de situation,

⁷ Cette « reproduction » de démonstration peut se justifier dans certains contextes, notamment lors des interrogations orales en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, mais c'est le plus souvent la compréhension et la restitution des étapes du raisonnement et de leur articulation qui est visée.

⁸ Les professeurs de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur

⁹ Les élèves ou les étudiants et le professeur

¹⁰ Ou l'étudiant

est soumis à de nombreuses incertitudes, il est donc amené à prendre de multiples décisions ; l'enseignant, quant à lui, doit d'une part analyser et gérer les décisions des élèves, interpréter les différentes formes de raisonnements produits et d'autre part évaluer la réalité de leurs acquis, du point de vue des connaissances et des savoirs mobilisés.

I.2 Identification et caractérisations des raisonnements

Notre étude s'inscrit dans une recherche visant à déterminer les principaux caractères de la situation ainsi que leurs rapports avec les différentes formes de raisonnements apparaissant dans le déroulement d'une séquence dont la situation centrale est à dimension adidactique. Ces raisonnements se traduisent par des éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques, qui sont habituellement interprétés comme des signes appartenant à un registre de représentation, ou comme des éléments d'une phase de preuve ou de démonstration. Par conséquent en classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons choisi comme définition initiale, celle proposée par Oléron :

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but » (Oléron, 1977, p.10).

Dans le cadre de notre étude en didactique des mathématiques, pour que nous puissions affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement, dont certains éléments sont parfois en partie implicites, il a été nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ». C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer pour mettre en place une méthodologie visant à identifier précisément les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, que les acteurs, enseignant et élèves, mettent en œuvre lors du déroulement d'une séquence de classe.

➤ Identification des raisonnements en classe de mathématiques

Une précédente recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs lors de la mise en œuvre de situations problèmes en classe ordinaire (Brousseau & Gibel, 2005), nous a permis d'établir que souvent en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction

de leur utilité pour le déroulement¹¹ de la séquence, que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves et l'enseignant, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Ce dernier doit adopter une méthodologie particulière que nous allons nous attacher à caractériser. Le chercheur doit assez fréquemment montrer que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur. Pour cela il est nécessaire de montrer que le « supposé raisonnement » vérifie les quatre conditions énoncées ci-dessous.

La première d'entre elles est liée au fait que le « supposé raisonnement » pourrait être explicité par le sujet ou, au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement, est connue de la classe, autrement dit qu'elle appartient au « répertoire didactique » de la classe. La deuxième condition est le caractère « utile » du raisonnement, dans le sens où il réduit une incertitude car une autre connaissance aurait pu être mobilisée par le sujet.

La troisième condition traduit le fait que le supposé raisonnement est motivé par un avantage qu'il procure au sujet. Il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui paraît favorable.

La quatrième et dernière condition peut se formuler ainsi : Le raisonnement est motivé par des raisons « objectives », qui lui sont propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à une raison distincte des précédentes à savoir l'idonéité c'est-à-dire la conformité aux attentes du professeur.

En conclusion, le chercheur doit donc établir que la production du raisonnement, prêté au sujet, est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond (ou tente de répondre) à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

➤ La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de situation

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau & Gibel, 2005), parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement - le moins possibles - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas

¹¹ Le déroulement de la séquence tel qu'il a été envisagé par l'enseignant conformément aux objectifs qu'il s'est fixé.

quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » en Théorie des Situations Didactiques.

« La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. » (Brousseau & Gibel, 2005)

Ce point de vue est différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables¹² sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La Théorie des Situations Didactiques a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

De nombreux enseignants ont coutume de faire dévolution aux élèves de situations de recherche, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Ils justifient le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leurs connaissances et leurs savoirs, d'éprouver leur(s) procédure(s) mais aussi de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

En effet ces situations se caractérisent ainsi :

1. L'élève dispose du « répertoire didactique¹³ » nécessaire pour concevoir les stratégies de base.
2. Les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du « répertoire didactique » de la classe.
3. L'élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème.
4. L'élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non.
5. L'élève peut faire plusieurs tentatives.

¹² Présentant pour l'enseignant une utilité compte-tenu de son projet d'enseignement

¹³ Nous définirons précisément ce concept dans la partie I.2

Ces conditions apparaissent comme nécessaires à l'élaboration d'une ingénierie didactique permettant de favoriser chez l'élève ou chez l'étudiant la pratique du raisonnement.

➤ *Les fonctions didactiques des raisonnements en situation de résolution de problème*

Dans (Brousseau et Gibel, 2005), nous avons proposé une classification des raisonnements selon la nature du problème dévolu aux élèves.

Le raisonnement comme solution d'un problème de mathématiques classique

Un professeur propose à ses élèves le texte d'un problème classique. Ce texte présente en général une situation dite « objective », parce que l'élève est censé la prendre comme telle, même si elle est imaginaire. Le problème appelle des solutions et/ou des démonstrations dont la validité est supposée ne pas dépendre des circonstances didactiques. La solution « standard », telle que l'enseignant peut la produire et l'attend de l'élève, se présente sous forme d'une suite d'inférences (incluant des calculs) correctement articulées c'est-à-dire conformément aux règles de la logique. Elle est souvent appelée par le professeur la *solution* ou « le » raisonnement mathématique associé au problème. A chacune des inférences qui la composent sont associées¹⁴ des justifications logiques et mathématiques standards : elles s'imposent à l'élève, au professeur et à l'observateur, quelles que soient les situations.

Le raisonnement de l'élève dans la résolution d'un problème classique

Le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. Il agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives.

« Donc l'observateur tout comme le professeur, doit interpréter ce que les élèves ont produit dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou ergonomiques à propos du bien-fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard. » (Brousseau et Gibel, 2005)

¹⁴ si cela s'avère nécessaire pour la compréhension

Comme nous l'indiquons dans Brousseau et Gibel (ibidem), on peut distinguer plusieurs cas suivant les possibilités effectives qui s'offrent à l'enseignant de justifier auprès de ses élèves la mise en œuvre de la solution standard et de discréditer les solutions erronées.

Dans le premier cas le professeur peut effectivement *justifier* la construction de la solution du problème par la mise en œuvre des connaissances acquises par les élèves (enseignées et supposées acquises¹⁵) et par la considération des informations contenues dans la situation objective.

Dans le deuxième cas, il lui faut faire appel à un raisonnement original, mais logiquement réductible aux données et aux connaissances des élèves comme le cas précédent. Il a fait, volontairement ou non, un pari (gagné avec certains, perdus avec d'autres) sur leurs capacités heuristiques.

Dans le troisième cas, la solution fait appel à des conditions qui ne figuraient pas dans les connaissances acquises et qui n'étaient pas logiquement déductibles des données. Ce cas ne se produit guère dans les problèmes classiques mais il peut survenir dans des situations « ouvertes ». La solution standard n'est pas constructible par les élèves seuls et le professeur doit à un moment ou à un autre intervenir pour la faire apparaître. De plus, le professeur ne peut pas la faire produire comme une conséquence « raisonnée » de l'articulation des données du problème basé sur les connaissances (supposées) des élèves. Dans (Brousseau et Gibel, 2015) nous analysons le déroulement d'une séquence basée sur la résolution d'un problème arithmétique d'optimisation qui illustre parfaitement ce troisième cas.

Dans les deux premiers cas, les conditions de la « situation objective » suffisent à expliquer et justifier chacune des productions, le projet correspondant peut alors être communiqué à l'ensemble des élèves. Le raisonnement est produit par l'élève comme une action « raisonnée » à partir des conditions qui définissent la situation objective à laquelle il est confronté¹⁶. Le raisonnement apparaît comme une « *raison de savoir* » : les raisonnements produits permettent de justifier la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons « internes » au savoir.

¹⁵ Ce qui nous amènera à définir ultérieurement dans cet écrit la notion de *répertoire didactique* de la classe.

¹⁶ Le sujet (e) par l'usage de la règle R justifie que dans les conditions A, la conclusion ou la décision B s'impose à lui pour satisfaire la situation S.

Dans le troisième, l'élève ne peut « admettre » la solution que sur la foi de l'autorité du professeur et en tout cas il ne peut pas y avoir d'apprentissage en situation autonome.

➤ Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences, plus précisément par une suite finie d'inférences (associées aux différents pas de raisonnement i.e. aux différentes étapes du raisonnement) dont l'articulation est en adéquation avec les règles de la logique mathématique. Mais cette caractérisation doit nécessairement être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante :

Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- ✓ A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- ✓ B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- ✓ R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut :

- Identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant.
- Relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent *a priori* de celui des protagonistes. De plus cette dernière attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation

convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes. Cette relation peut être hypothétique ou formelle.

- Identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté.

- S'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

➤ Classification des raisonnements d'après leur fonction et le type de situation associée

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, autrement dit par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, communiquer, expliquer, prouver. Elles sont différenciées, en Théorie des Situations Didactiques, par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux mais différents. Pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Dans la deuxième partie de cet écrit, nous expliciterons et illustrerons cette notion de « situations emboîtées », dont la définition repose sur le concept de schéma de la structuration du milieu créé initialement créé par Brousseau et très fréquemment utilisé dans le cadre des recherches en Théorie des Situations Didactiques. Les raisonnements qui apparaissent dans les situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la théorie didactique des situations mathématiques (Brousseau,1998).

Dans les situations adidactiques ou à dimension adidactiques (Bloch, 1998), (Mercier, 1995), le raisonnement est produit par des élèves, dans des circonstances qui le demandent et le permettent, sans intervention, sans appui, ni recours à l'enseignant dans le cas de situation adidactique ou avec des interventions minimales, de préférence dans le cas de situation à dimension adidactique :

- soit comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'interroger la situation en vue d'organiser une solution,

- soit comme un moyen de concevoir et de décrire une organisation du travail, d'établir leurs décisions dans les situations d'action telles que définies par Brousseau (Brousseau, 1998),
- soit comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une situation de formulation (Brousseau, 1998),
- soit comme un moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité lors d'une situation de validation,
- soit comme un moyen de contrôler la validité ou la pertinence d'un résultat.

Dans les situations didactiques, le raisonnement de l'élève s'adresse principalement à l'enseignant :

- soit pour montrer, satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur, formellement il est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée (récitation, citation, etc.) plus précisément en partie indépendamment de la situation à laquelle l'élève a été confronté.
- soit pour justifier une action ou pour produire une réponse,
- soit pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur. Il peut être exigé par l'enseignant pour justifier la validité d'une déclaration quelle que soit la nature de cette justification : validité logique, validité mathématique, validité sémantique, pertinence, adéquation, économie.

Dans certains cas, il peut également s'apparenter formellement à une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors à une citation.

Les professeurs ont donc parfois recours à l'usage de *raisons didactiques*, en établissant artificiellement entre certaines connaissances des liens sans véritables rapports avec leur signification scientifique. Pour cela les enseignants utilisent fréquemment des arguments qui peuvent être : des répétitions, des moyens mnémotechniques, des métaphores, des métonymies, des analogies... que nous désignons plus largement par des « moyens rhétoriques didactiques ».

« Ces moyens didactiques qui sont assimilés à des *raisons didactiques*, ne sont justifiables par aucun raisonnement logique, et sont évidemment sans rapport avec les *raisons de savoir*. Néanmoins elles constituent assez souvent un objet d'enseignement et peuvent être considérées, par l'enseignant et par l'observateur, comme des causes d'apprentissage. Elles accompagnent toute une culture didactique dont le professeur et l'élève ont besoin. » (Brousseau et Gibel, 2005)

Dans ce cas le raisonnement exprimé par le professeur est

- soit un objet d'enseignement donné à voir en phase d'institutionnalisation ou en référence, mais sans lien avec les conditions qui définissent la situation objective (sous réserve qu'il y ait réellement une situation objective) ;
- soit un moyen d'étayage, utilisable pour l'apprentissage et la rétention de l'énoncé qui est l'objet de l'enseignement (assimilable à un moyen mnémotechnique « légitime ») ;
- soit un argument de rhétorique didactique, c'est-à-dire un moyen destiné à faciliter l'appréhension d'un énoncé par l'élève.

D'un autre côté, le raisonnement peut être produit par l'enseignant dans son action didactique, pour soutenir, provoquer ou justifier un apprentissage, comme moyen didactique de convaincre des élèves s'apparentant ainsi à un moyen rhétorique, et bien sûr comme moyen d'enseignement.

➤ Les différents modes de raisonnement

La logique "générale" s'appuie sur la tradition des syllogismes c'est-à-dire sur des raisonnements « formalisables" par des règles. En logique on s'accorde à considérer trois "moyens" de construction de raisonnements :

- Raisonnement par déduction ;
- Raisonnement par induction ;
- Raisonnement par abduction.

Elles se présentent schématiquement ainsi, en s'appuyant sur les notations classiques de la logique (\rightarrow pour l'implication) :

Déduction	Abduction	Induction
a	b	a
$a \rightarrow b$	$a \rightarrow b$	b
b	a	$a \rightarrow b$

La règle de **déduction** se lit ainsi :

- si *a* est vrai,
- et si "*si a est vrai alors b est vrai*" est vrai,
- alors *b* est vrai.

La règle d'**abduction** se lit ainsi :

- si *b* est vrai,
- et si "*si a est vrai alors b est vrai*" est vrai,

- alors a est vrai.

La règle d'**induction** se lit ainsi :

- si a est vrai,
- et si b est vrai,
- alors "*si a est vrai alors b est vrai*" est vrai.

Le processus de construction d'un raisonnement simple consiste à appliquer au moins l'une de ces trois règles sur une théorie initiale ; c'est donc un moyen d'y ajouter de nouvelles propositions.

Un raisonnement est dit *déductif* s'il ne s'appuie que sur la règle de déduction ; il est dit *hypothétique* s'il s'appuie sur au moins l'une des règles d'abduction ou d'induction.

Seule la déduction conserve la cohérence d'une théorie : si la théorie initiale est cohérente, alors toute théorie qui en est une conséquence déductive reste cohérente.

Dans la plupart des systèmes du calcul des propositions, on trouve les règles suivantes :

modus ponens	modus tollens
a	$\neg b$
$a \rightarrow b$	$a \rightarrow b$
b	$\neg a$

Le modus tollens est considéré en général comme une règle dérivée.

Comme l'indique Blanché

« On trouve un exemple, présenté sous la forme d'un syllogisme exhaustif, chez Pierce, qui répartit les raisonnements élémentaires en trois classes : déduction, induction, abduction. Dans cette forme élémentaire et exemplaire de de déduction qu'est le syllogisme, et plus précisément celui de la première figure, on voit qu'un tel syllogisme raisonne à partir d'une règle (majeure) et de la subsomption d'un cas (mineure) pour obtenir (conclusion) le résultat de cette règle. » (Blanché, 1973)

Considérons à présent un exemple de déduction :

Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs

Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac.

Résultat : Ces haricots sont blancs.

Dans l'induction, on aboutit à la règle en partant d'un cas et d'un résultat :

Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac

Résultats : Ces haricots sont blancs

Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs.

Enfin dans l'abduction, que Pierce appelle aussi « hypothèse », on aboutit au cas en partant de la règle et d'un résultat :

Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs

Résultat : Ces haricots sont blancs.

Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac.

Cette catégorisation des modes de raisonnements joue un rôle important lors de l'analyse des raisonnements produits par les étudiants dans l'enseignement supérieur. Nous justifierons et nous illustrerons son intérêt dans le dernier chapitre de cette note de synthèse.

I.3 Modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet en Théorie des Situations Didactiques

➤ Définition de la notion de répertoire didactique

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appelons le répertoire didactique de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue.

« La prise « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'INSTITUTIONNALISATION. »

« L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action –on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence- que sur la formulation. Il y a des formulations que l'on va conserver (« ça se dit comme ça », « celles-là valent la peine d'être retenues »). Et pour les preuves, de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. » (Brousseau, 1988)

« L'institutionnalisation peut consister en une adjonction au répertoire mais aussi en un retrait d'une croyance commune reconnue soudain comme fausse. Les connaissances du répertoire fonctionnent avec un jeu de statuts plus complexe, suivant leur usage. » (Brousseau, glossaire de didactique¹⁷)

¹⁷ Glossaire sur le site www.Guy-Brousseau.com mis à jour en 2010

Le répertoire didactique de la classe ne se limite pas à l'ensemble des connaissances et des savoirs, c'est aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances, de nouvelles formules.

Le répertoire didactique de la classe doit être élaboré de manière à permettre à l'élève d'organiser la collection des formules dont il dispose. Ainsi il permet à l'élève de faire l'inventaire de l'ensemble des formules, en lui offrant ainsi la possibilité de retrouver des tâches, des actions, des méthodes, des formulations et des justifications. Sa fonction est d'en faciliter l'usage en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, c'est-à-dire lorsque les conditions didactiques le rendent nécessaires, une action, une suite d'actions, une formulation ou une justification, parfois déjà rencontrée, déjà apprise c'est-à-dire ayant donc fait l'objet d'une institutionnalisation.

➤ Utilisation du répertoire didactique du sujet dans la production de décisions

Le répertoire didactique d'un élève, autrement dit le répertoire utilisé par un élève lorsqu'il est confronté à une situation, peut bien évidemment différer du répertoire didactique de la classe. Comme Comiti, Grenier et Margolinas (1995) nous considérons que le répertoire didactique d'un élève peut être différent du répertoire didactique de la classe ; ceci est d'autant plus flagrant lorsqu'il y a dédoublement de situation.

Considérons une situation et l'ensemble des moyens de résolution que le sujet est susceptible d'utiliser compte-tenu du répertoire didactique de la classe ; dans cet ensemble on peut distinguer deux catégories de moyens :

- Un moyen direct c'est-à-dire la connaissance elle-même qui permet de résoudre directement la situation.

- Des moyens indirects qui correspondent à l'établissement de cette connaissance par le sujet.

La connaissance résulte alors du fonctionnement du système organisateur.

Nous distinguons trois niveaux dans le répertoire didactique :

- le système produit i.e. le registre des formules ;
 - le système organisateur utilisé afin de générer de nouvelles connaissances ou de réactiver des connaissances anciennes.
 - le répertoire de décision qui est assimilable à un répertoire de savoirs en relation avec un ensemble de situations. Ce répertoire de décision commande le répertoire d'action de l'élève.
- Nous préciserons, par la présentation d'une modélisation, le lien entre répertoire de décision et répertoire d'action dans la section suivante (I.4).

I.4 L'analyse sémiotique de Pierce et la notion de répertoire de représentation

➤ L'analyse sémiotique

Dans la première partie de cet écrit nous avons mis en évidence que les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 1996). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part le niveau de milieu correspondant autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval :

« Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. » (Duval, 2006, p. 49)

De plus l'auteur met en lumière cette nécessité inhérente aux pratiques mathématiques en ce qui concerne les signes : les possibilités de transformation des représentations.

« Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'Algèbre, avec l'Analyse. Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. » (Duval, 2006, p. 57)

Ce qui va nous intéresser, lors de l'analyse des séquences que nous détaillerons par la suite, c'est effectivement la transformation de la représentation des objets tant du point de vue des signes utilisés que du point de vue de leur(s) statut(s) dans la relation didactique. La sémiotique de Pierce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet elle nous permettra d'étudier précisément l'évolution et les transformations des signes, utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.

Comme l'indique Front (2015)

« Ces outils¹⁸ doivent nous permettre de saisir un objet dans une dynamique d'évolution et de constater d'éventuels changements de « nature », c'est-à-dire un passage (ou non) d'un statut d'objet de l'expérience à un statut d'argument pour la définition d'objets mathématiques » (Front, 2015)

Nicole Everaert-Desmedt formule, de façon claire et concise, trois caractéristiques de la sémiotique de Peirce en montrant que cette dernière est à la fois générale, triadique et pragmatique. C'est une théorie générale car elle permet d'envisager à la fois la vie émotionnelle, pratique et intellectuelle et intègre toutes les composantes de la sémiotique ; de plus elle permet une généralisation du concept de signe. Elle est caractérisée comme étant triadique i.e. reposant sur trois catégories philosophiques : la priméité, la secondéité et la tiercéité.

Selon Peirce, trois catégories sont en effet nécessaires pour rendre compte de l'expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l'ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des icônes. La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l'expérience, du fait, de l'action-réaction, les signes en sont des indices. La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de symbole-argument.

Dans notre usage de la sémiotique Peircienne nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans la séquence « Le nombre le plus grand » étudiée au chapitre III, un calcul arithmétique rédigé sous la forme d'une opération posée ou d'un calcul « en ligne » peut être assimilé à une icône. Cette dernière traduit et manifeste une action du sujet confronté à la situation de jeu ; un indice est de l'ordre d'une proposition, par exemple la formulation d'une méthode générale, même si celle-ci est incomplète ; un symbole-argument est de l'ordre d'une preuve mathématique qu'il s'agisse d'une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.

Comme le souligne Everaert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons à présent définir la notion de « répertoire de représentation ».

¹⁸ Front fait ici référence aux outils de la sémiotique peircienne et leurs développements didactiques en référence aux travaux de Muller (2004) et de Bloch et Gibel (2011).

➤ Le répertoire de représentation

Le répertoire de représentation, de la classe et de chaque élève, est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer¹⁹ les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première et au milieu de la situation pour la seconde :

- La composante liée au répertoire antérieur c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures ;
- Une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

Nous allons à présent nous centrer sur l'utilisation du répertoire de représentation

I.5 Utilisation du répertoire de représentation du sujet dans la production de décisions

Rappelons que selon Brun (1994) les représentations sont "l'interface entre connaissances et situation", ce qui est en adéquation avec la notion de répertoire de représentation tel que nous l'avons précédemment défini.

De plus il précise (ibid.)

« Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit les éléments nouveaux à ce fonctionnement, ce sont les représentations de type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc

¹⁹ Nommer les objets au sens de « désigner » les objets. Nous verrons au chapitre IV que dans le cadre de l'enseignement de la géométrie les éléments infralangagiers doivent nécessairement être pris en compte dans le répertoire de représentation.

un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.

Dans le processus de formation des connaissances en situation, la représentation est instrumentale et consiste à désigner les objets, à réfléchir les buts et les moyens, à planifier, à répondre aux problèmes de communication et de validation qui peuvent se poser en situation. » (Brun, 1994, p. 74)

Il nous importe alors de nous demander si les représentations sont différenciées, relativement aux connaissances, ou amalgamées ; notre but est aussi d'éclairer la façon dont elles se constituent en répertoires – répertoire initial, puis répertoire final à l'issue de la situation. Une façon de répondre à cette question est de s'appuyer sur la définition²⁰ de répertoire didactique en distinguant deux types d'objets : d'une part la collection de formules que nous appelons registre de formules, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et de l'utiliser que nous désignons par système organisateur. Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des formules déjà rencontrées dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation.

Une composante essentielle de l'usage des raisonnements en situation concerne les décisions que prend l'élève ou qu'il est susceptible de prendre lorsqu'il est en situation d'apprentissage. Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations (Gibel, *ibidem* ; Conne, 1992), celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions.

Il convient alors de distinguer

- 1- Les connaissances mobilisables ou disponibles, ainsi que les nomme Robert (1998) : ce sont les moyens de résoudre la situation que l'actant est susceptible de mobiliser pour produire le résultat attendu. Ces moyens sont déduits du répertoire didactique de la classe et contribuent à l'élaboration de l'analyse a priori de la situation, d'où leur nom.
- 2- Les connaissances effectives de l'actant : elles se manifestent, se traduisent par les actions effectives du sujet confronté à la situation (ce que Robert (*ibidem*) appelle des adaptations).

²⁰ Comme nous l'avons précédemment formulée dans I.3

Le répertoire de représentation, tel que nous l'avons défini précédemment, réfère à la capacité du sujet à utiliser son système organisateur pour répondre à une situation afin de :

- 1) Percevoir et s'appropriier les relations entre les différents objets qui définissent le milieu objectif (l'élève doit se représenter la situation objective).
- 2) Faire le lien entre la situation dévolue et les situations rencontrées précédemment.
- 3) Décider des formules qu'il convient de mobiliser, de réactiver ou de combiner afin d'agir sur la situation. Les actions du sujet résultent alors du fonctionnement du système générateur de son répertoire de représentation.

Dans la relation didactique, le statut de raisonnement attribué à une production dépend de l'état de connaissances du sujet qui en est l'auteur. Tout raisonnement, étudié d'un point de vue didactique, est basé sur une pratique sociale de référence qui indique quel répertoire le sujet a le droit d'utiliser. L'établissement d'un résultat, quelle que soit sa nature, peut relever pour certains sujets de l'utilisation directe d'un savoir de leur répertoire didactique et cependant, nécessiter pour d'autres sujets l'élaboration d'un raisonnement basé sur une combinaison de savoirs, une confrontation d'énoncés ou de représentations et respectant certaines contraintes. Cependant dans l'hypothèse où le savoir convoqué appartient au répertoire didactique de la classe, l'enseignant ne reconnaîtra pas l'établissement du résultat comme résultant d'un raisonnement. En effet la production du raisonnement n'apparaît pas, dans ce cas, comme une performance « originale », puisque les élèves sont censés être en mesure de l'utiliser. De même si l'élève produit à la demande explicite de l'enseignant un raisonnement, déjà formulé précédemment à de multiples reprises, l'enseignant ne lui accordera pas le statut de raisonnement, il aura le statut de justification idoine.

Par conséquent l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques, nécessite pour le chercheur la prise en compte des conditions, qui définissent la situation, dans lesquelles le supposé raisonnement est produit mais également du répertoire didactique de la classe dont les élèves sont censés disposer.

Les ingénieries didactiques étudiées, dans le cadre de cette note de synthèse, reposent sur la dévolution aux élèves d'une situation de nature adidactique ou à dimension adidactique. Leurs résolutions nécessitent, l'usage de leur répertoire de représentation. En effet les élèves ou les étudiants, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou

erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves ou les étudiants à modifier leur répertoire de représentation.

Le schéma ci-après permet de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique de l'élève confronté à une situation adidactique (situation d'action) ou à dimension adidactique.

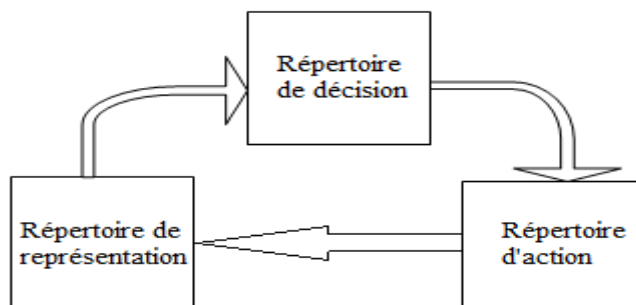


Figure I.1

Modélisation du fonctionnement du répertoire didactique
de l'élève en situation d'apprentissage (Gibel & Ennassef, 2012)

Le schéma ci-dessus a été initialement élaboré dans un contexte particulier d'analyse des raisonnements (Gibel et Ennassef, 2012). Dans le cadre de l'élaboration de cette note de synthèse, en tenant compte des résultats des recherches que nous avons produits dans des contextes d'enseignement variés et à des niveaux d'enseignement différents, ce schéma nous apparaît adéquat pour modéliser plus généralement le fonctionnement des connaissances du sujet confronté à une situation d'action.

I.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons défini précisément les notions de répertoire didactique de la classe et de répertoire didactique de l'élève afin de proposer une modélisation du fonctionnement des connaissances de l'élève en situation didactique. En effet l'identification d'un raisonnement produit en classe de mathématiques nécessite pour le chercheur la prise en compte des conditions, qui définissent la situation dans laquelle le « supposé raisonnement » a été produit, mais également du répertoire didactique dont les élèves sont censés disposés pour le²¹ produire.

²¹ « le » désigne ici le raisonnement

Comme indiqué dans (Brousseau et Gibel, 2005), pour que le chercheur puisse montrer que tel raisonnement dont il ne perçoit qu'une partie ou des signes²² est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur, il est nécessaire que le chercheur adopte une méthodologie particulière. Ce dernier doit établir que la production d'un raisonnement prêté au sujet²³ est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond (ou tente de répondre) à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec le répertoire didactique dont il dispose.

Comme nous l'avons indiqué au cours du chapitre, l'analyse précise des signes, produits en situation, nécessite l'utilisation des concepts de la sémiotique de C.S. Pierce ; la reconnaissance et l'interprétation des signes, du point de vue de leur nature et de leur(s) fonction(s), doit nécessairement s'effectuer au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'élève. De façon synthétique, le répertoire de représentation d'un élève est la composante sémiotique de son répertoire didactique, autrement dit ce sont les signes langagiers et infra-langagiers²⁴ qui donnent à voir la manière dont l'élève utilise son répertoire didactique lorsqu'il est confronté à une situation.

Considérons une situation et l'ensemble des moyens de résolution que le sujet est susceptible d'utiliser compte-tenu du répertoire didactique de la classe. Dans cet ensemble on peut distinguer deux catégories de moyens : un moyen direct c'est-à-dire la connaissance elle-même qui permet de résoudre directement la situation, et des moyens indirects qui correspondent à l'établissement de cette connaissance par le sujet. Dans ce cas de figure, la connaissance résulte alors du fonctionnement du système organisateur. Dans certains cas²⁵ nous pourrions être en mesure de repérer, dans l'analyse de corpus, différents niveaux de production de formules et de connaissances : celui qui relève d'une utilisation directe du

²² Assimilables à de icônes, des indices ou des arguments en référence à la sémiotique de Pierce

²³ Le sujet désigne l'élève ou l'enseignant

²⁴ Cette dimension « infra-langagière » a été introduite initialement par Berthelot et Salin (1992), nous en avons fait usage lorsque nous avons été amené à utiliser le modèle dans le cadre de l'étude des raisonnements en géométrie, nous préciserons cela dans le chapitre IV.

²⁵ En référence aux chapitres II, IV, V et VI au cours desquels nous présenterons les principaux résultats obtenus pas la mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements.

registre des formules, ou celui qui résulte du fonctionnement du système organisateur (appel à des connaissances antérieures, confrontation entre énoncés pour produire un énoncé nouveau, confrontation de représentations, recours au milieu objectif comme ressource de généralisation, etc...).

Nous avons jugé nécessaire de décrire précisément les deux composantes du répertoire de représentation. La première est liée au répertoire antérieur (c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures), la seconde apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

Comme indiqué précédemment les fonctions du raisonnement jouent un rôle déterminant dans l'analyse de ces derniers, elles sont étroitement liées aux conditions de sa production. Un raisonnement n'est pas, de par sa nature même, une décision ou une preuve : mais dans le milieu de la situation où il intervient, il occupe l'une ou l'autre fonction. Lorsque l'élève produit un raisonnement, l'étude précise des conditions de sa production sera ainsi facilitée par l'identification de la situation associée.

Dans ce premier chapitre, nous avons proposé une classification des fonctions des raisonnements en regard des situations didactiques et adidactiques. En fin de chapitre nous avons également proposé un schéma théorique du fonctionnement des connaissances de l'élève, confronté à une situation adidactique (action), en vue de modéliser le fonctionnement de son répertoire didactique en situation d'action.

Chapitre II. Présentation et fonctions du modèle d'analyse des raisonnements

II.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter notre modèle d'analyse des raisonnements en explicitant les axes d'analyse que nous avons privilégiés afin d'étudier les différentes formes de raisonnements, résultant de la mise en œuvre d'une ingénierie²⁶ ou d'un dispositif didactique en classe de mathématiques.

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté une modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet étroitement liée à la mise en œuvre de son répertoire didactique. En effet l'identification d'un raisonnement produit en classe de mathématiques nécessite pour le chercheur la prise en compte du répertoire didactique dont les élèves sont censés disposés mais également des conditions, qui définissent la situation dans laquelle le « supposé raisonnement » a été produit.

Dans la première partie de ce chapitre nous justifierons qu'en Théorie des Situations Didactiques, l'identification des conditions de production d'un raisonnement est rendue possible par la mise en œuvre du schéma de la structuration du milieu. En effet à un moment donné du déroulement d'une leçon, comme l'indique Margolinas (1994) et Brousseau et Gibel (2005) on peut identifier un grand nombre de situations plus ou moins emboîtées ; le schéma de la structuration du milieu nous permet de caractériser chacune d'elles. Il donne ainsi la possibilité de décrire chacune des situations emboîtées, nous pouvons ainsi expliciter les conditions dans lesquelles un raisonnement est susceptible d'être produit²⁷. De plus, comme indiqué précédemment les fonctions du raisonnement jouent un rôle déterminant dans l'analyse de ces derniers, elles sont étroitement liées aux conditions de sa production.

²⁶ incluant une situation adidactique ou à dimension adidactique.

²⁷ ou dans lesquelles un raisonnement a été produit.

Ce modèle d'analyse des raisonnements a été élaboré initialement en vue d'étudier une séquence dont l'élément central est une situation de validation, relevant du domaine de l'Analyse en classe de Première scientifique (Bloch et Gibel, 2011). Cette étude, menée dans l'enseignement secondaire, nous a conduit à utiliser la sémiotique de C.S. Pierce, décrite dans le chapitre 1, en vue d'étudier précisément la nature et la fonction des signes apparaissant dans la relation didactique. L'analyse sémiotique permet de rendre compte des connaissances et des savoirs mobilisés au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'élève par confrontation au(x) milieu(x). Cette dimension joue un rôle déterminant dans l'analyse des raisonnements. De plus nous avons mis en lumière, dans le chapitre 1, l'importance accordée à l'évolution²⁸ des signes (Duval, 2006) au cours d'une leçon, nous justifierons ainsi l'intérêt de cette dimension.

Pour finir, nous expliciterons la validité et l'intérêt du modèle en mettant en évidence ses différentes fonctions du point de vue de la recherche en didactique, plus précisément du point de vue des questions formulées dans l'introduction.

II.2 La Théorie des Situations Didactiques comme fondement de notre modèle

➤ L'analyse des raisonnements en situation de validation

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen (1967), comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette dernière met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle

« contribue à donner de l'activité mathématique une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent » (Durand-Guerrier, 2007, p. 23)

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves. Il insiste sur le fait qu'il n'est pas possible, lors de l'analyse fine des dialogues en situation de validation, de séparer le travail sur les objets, qui

²⁸ Et à la transformation

constituent le milieu, du travail sur les énoncés produits par les élèves. Afin d'intégrer cette dimension sémantique, Barrier fait le choix d'analyser les interactions entre élèves en utilisant la sémantique de Hintikka et Sandu (1997) permettant ainsi de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique des raisonnements.

Bartolini-Bussi (2009) pose un certain nombre de critères et de modalités qui lui paraissent conditionner l'entrée des élèves dans le processus souhaité²⁹ :

- la situation ne doit pas mener trop rapidement à la production de conjecture : les élèves doivent avoir un délai de réflexion et de recherche non ciblée afin de définir l'objet adéquat de la conjecture et de la preuve;

- la situation doit permettre de cibler la procédure de recherche sur la façon générique d'obtenir le résultat, et non sur le résultat directement, ainsi que le remarque aussi Pedemonte (2007) : ainsi il peut exister, dit cette auteure, une continuité structurelle entre la production de la conjecture et la construction de la preuve;

- le fait de guider trop la recherche peut amener des dérives dans le travail des élèves, celui-ci se focalisant sur le fait de remplir correctement les supports fournis, par exemple.

Nous ne pouvons qu'être frappés par la concordance entre ces déclarations et les principes de la Théorie des Situations Didactiques, que nous allons rappeler brièvement ci-dessous. Ainsi la recherche non ciblée, évoquée par Bartolini-Bussi au début de l'expérimentation prévue, peut-elle correspondre au milieu objectif, qui est un milieu d'essais-erreurs; une situation adaptée à un savoir va effectivement conduire à faire construire un modèle local du savoir, ce qui signifie que le milieu de référence contient une grande partie des éléments de discussion et de confrontation à ce savoir; pour ce qui est du dernier point ci-dessus, il peut être vu comme un argument d'adidacticité.

Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique, a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière offre la possibilité d'analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de prendre en compte la dimension sémantique des raisonnements.

➤ Catégorisation des raisonnements selon les niveaux de milieux

²⁹ Il s'agit du processus de preuve.

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Il est nécessaire de distinguer dans l'analyse didactique d'une leçon : la situation proprement mathématique (la situation objective), de la situation d'action du sujet (situation à laquelle est confrontée l'élève), de la situation d'apprentissage autonome (sur quoi elle porte, en terme d'enjeux didactiques) et de la situation didactique (manière dont l'enseignant conduit la leçon : ses interventions, les arguments qu'il utilise).

Les professeurs pensent qu'il est important de provoquer des apprentissages dans des situations d'action autonomes plutôt que de les obtenir de façon formelle pour ensuite les associer artificiellement à des descriptions de circonstances d'utilisation. Ils essaient ainsi de simuler les processus « naturels » de production et d'usage des connaissances.

Mais nous savons que la méthode constructiviste radicale présente elle aussi des insuffisances, radicales. Théoriquement il n'y a aucune possibilité qu'une connaissance développée en situation autonome ait les mêmes propriétés qu'un savoir culturel. Son apprentissage doit être complété par des activités didactiques spécifiques.

Le modèle de structuration du milieu utilisé, lors de l'élaboration du modèle, est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1998), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau résume les niveaux de milieux – de M+3 à M-3. Les niveaux de milieux de M-1 à M-3 correspondent à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique. En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler *milieu heuristique*) et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M+3:M-Construction		P+3:P-Noosphérien	S+3: Situation noosphérique
M+2: M-Projet		P+3:P-Constructeur	S+2: Situation de construction
M+1:M-Didactique	E+1:E-Réflexif	P1: P-Projeteur	S+1: Situation de projet
M0:M-Apprentissage	E0: Elève	P0: Professeur	S0: Situation didactique
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	S-1: Situation d'apprentissage
➤ M-2: M-Objectif	E-2: E-Agissant	P-2 : P Dévolueur observateur	S-2: Situation de référence
➤ M-3: M-Matériel	E-3: E-Objectif		S-3: Situation objective

Tableau II.1 Tableau de la structuration du milieu (Bloch, 2006)

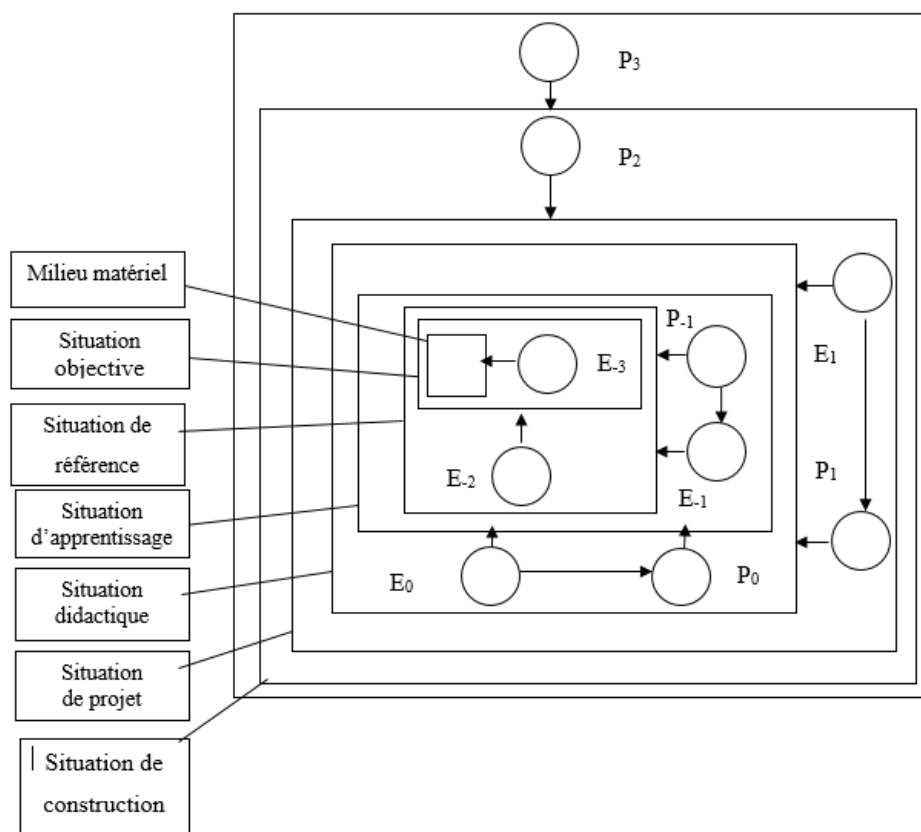


Schéma de la structuration du milieu

Figure II.1

Schéma de la structuration du milieu. Les situation « emboîtées »

Ce modèle, associé au schéma de la structuration du milieu, permet ainsi de

- représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Il faut remarquer que pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique.

En ce qui concerne l'analyse des fonctions didactiques du raisonnement et de ses éléments, la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation.

La modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet par l'usage de son répertoire didactique conduit à spécifier les conditions de son utilisation en définissant trois composantes du répertoire didactique : le répertoire d'action, le répertoire de formulation et le répertoire de validation.

Nous allons à présent énoncer les principes fondamentaux du schéma :

- L'objet et les moyens d'une activité sont différents.
- Une action porte sur un objet ; elle est déterminée par un *répertoire d'actions* du sujet et par une situation, elle-même étant définie par des conditions et un but à atteindre.
- Une formulation conduit à représenter les objets, les actions et les conditions de la situation d'action dans l'optique où cette dernière sert d'objet à la communication à l'aide du *répertoire* didactique dans lequel il y a des objets, des actions, des procédures et des déclarations.

Ce schéma devrait nous permettre de distinguer une action et une modification de cette action dans la mesure où elle peut être justifiée par le sujet, en effet elles vont apparaître sur le schéma à des niveaux différents.

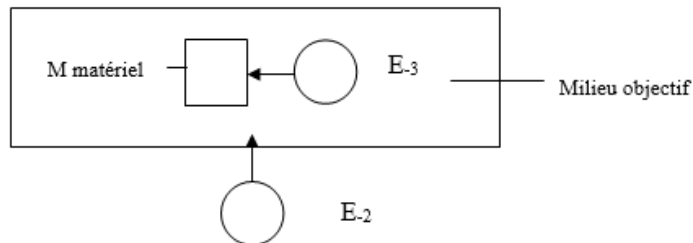
Nous distinguerons la performance de l'élève qu'il s'agisse d'une action, d'un message ou d'un énoncé, du *répertoire didactique* à l'aide duquel elle est produite.

Ce qui était considéré comme un moyen au niveau N est alors considéré comme un objet au niveau N+1 : la structure du schéma transforme en objet ce qui était le moyen au niveau précédent.

➤ **Le sujet agissant et le milieu objectif**

E-3 désigne l'élève objectif et E-2, l'élève agissant.

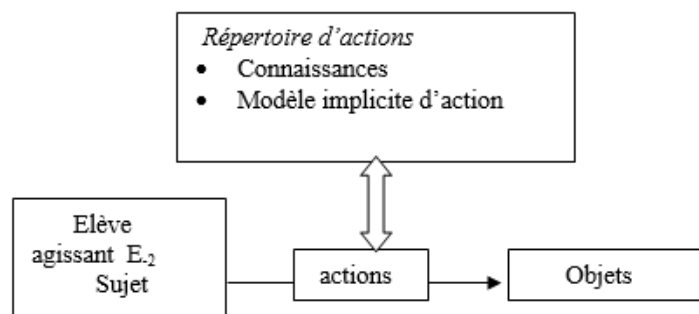
(M-3, E-3) définissent le milieu objectif pour E-2



Sujet agissant et milieu objectif

Figure II.2 Sujet agissant et milieu objectif

Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le *répertoire* didactique dont dispose l'élève



Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif

Figure II.3

Le schéma suivant modélise l'action du sujet agissant sur le milieu objectif.

Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a choix s'il y a plusieurs possibilités effectives.

On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux-mêmes.

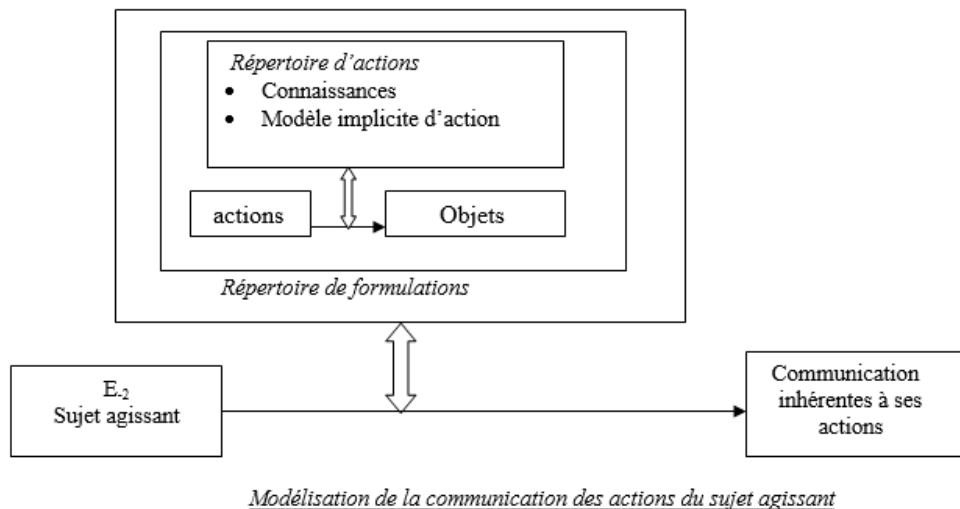


Figure II.4

Comme indiqué dans (Gibel, 2008, p.23) une communication inhérente aux actions des élèves vise à amener les élèves à prendre position relativement aux différentes procédures proposées. Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères :

- la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue.
- l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
- la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
- la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;
- la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu.

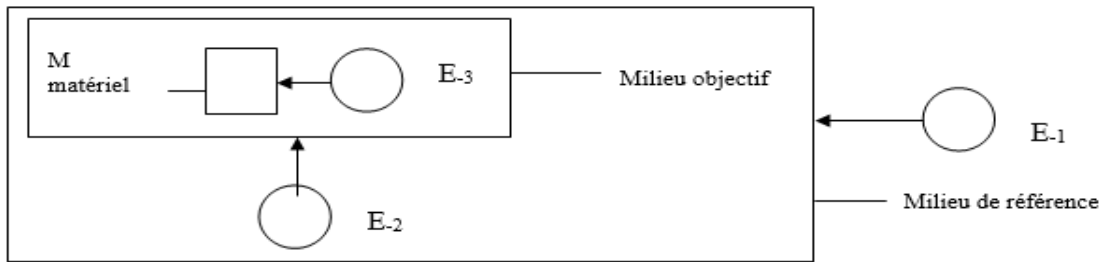
➤ **Le sujet apprenant et le milieu de référence**

Niveau (M-1) : Le sujet apprenant et le milieu de référence.

E₃ désigne l'élève objectif , E₂ l'élève agissant ;

(M₃, E₃) définit le milieu objectif ;

(M₂, E₂) constitue le milieu de référence pour le sujet apprenant E₁.



Le sujet apprenant et le milieu de référence

Figure II.5

La situation vise à permettre au sujet apprenant, E-1, d'analyser sa suite de décisions. Pour lui, les conditions font partie de son objet d'étude. Il a un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs. Il va prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions de son travail. Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un « deuxième » niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets. Elle est déterminante en ce qui concerne le rapport du sujet à la situation.

Nous allons à présent modéliser les différentes formes d'actions du sujet apprenant, en proposant le schéma suivant :

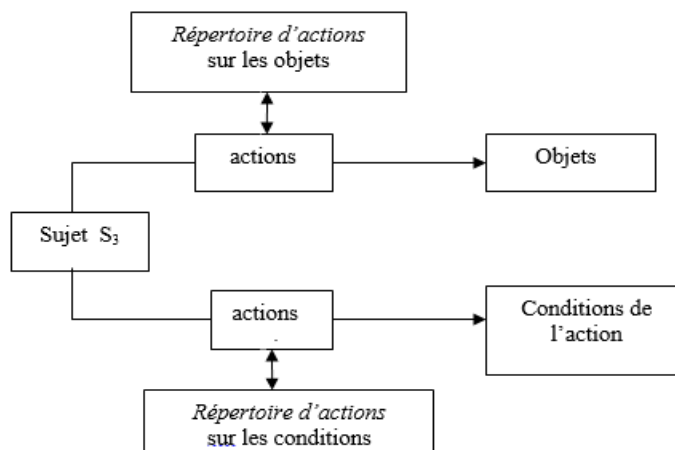


Figure II.6

Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer : d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, autrement dit l'élève est conduit à envisager une modification des conditions dans lesquelles

il va utiliser les objets. Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en terme de conditions.

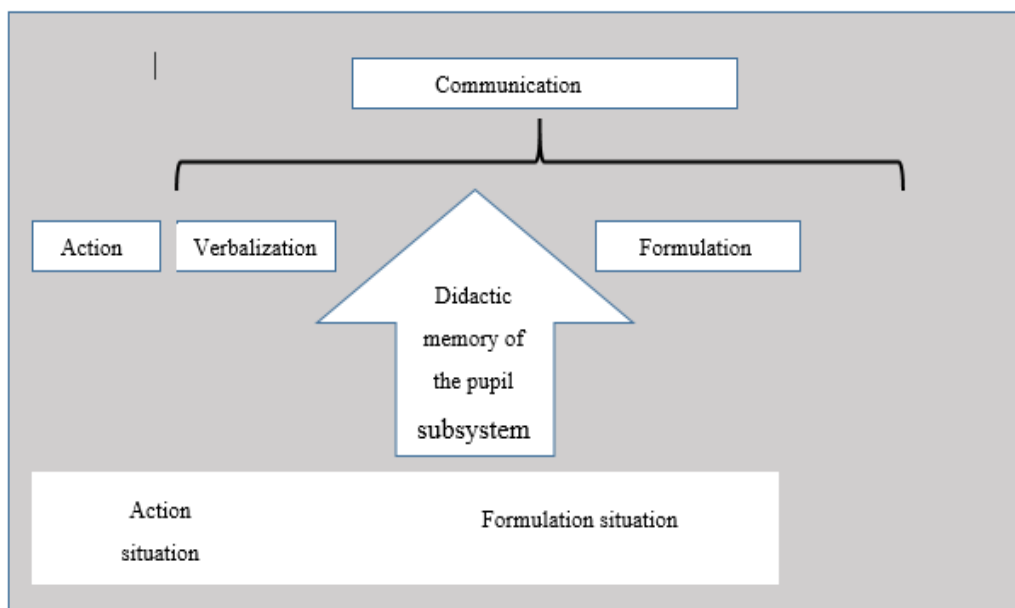


Figure II.7

« Bringing a past didactic event to the foreground and comparing it to the present calls upon memory. Such episodes are pupils-initiated and are hence referred to as the pupil's didactic memory. One of its functionalities is to create the conditions for moving from an action situation to a formulation situation.» (Flückiger, 2005)

Le schéma ci-dessus proposé par Flückiger (2005) précise le moment où l'élève fait fonctionner sa « mémoire didactique³⁰ », permettant ainsi la modification de l'usage de la connaissance mobilisée (en situation d'action et de verbalisation des actions), en vue d'une formulation³¹ de sa procédure. Cette modélisation est selon nous à rapprocher du fonctionnement du répertoire didactique (plus précisément du système organisateur) de l'élève, lorsque ce dernier procède à une confrontation d'énoncés ou de représentations, en vue de prendre en compte les conditions d'utilisation des objets dans la formulation d'un raisonnement.

³⁰ Il s'agit de la mémoire didactique du sous-système « élève » telle que définie par Flückiger (2005)

³¹ Qui est assimilable à une justification de sa procédure

➤ L'élève et la situation d'apprentissage

Niveau (M0) L'élève et la situation d'apprentissage

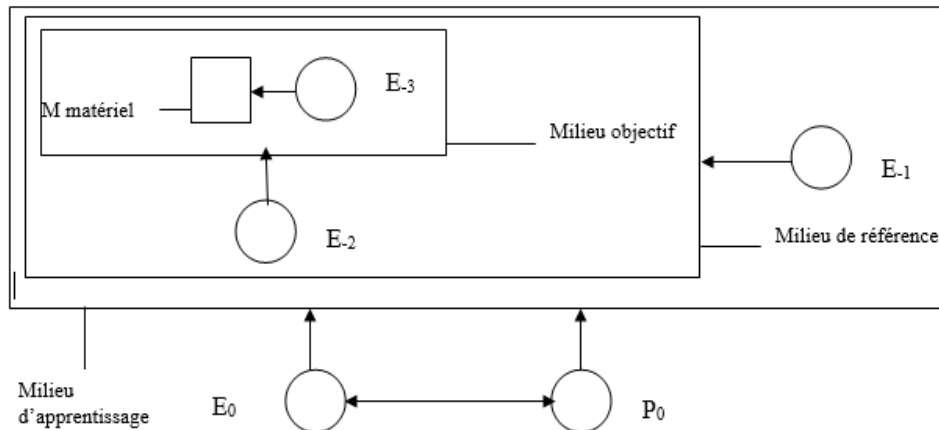


Figure II.8

Le niveau (M0) est celui des assertions. Au niveau précédent, (M-1), nous étions au niveau des relations mathématiques, la vérité était évidente, la relation était vraie ou fausse mais il n'y avait pas de jugement. Or dans la situation étudiée l'autre arrive avec une culture, avec des exigences qui ne sont pas celles de la situation. Par conséquent à ce niveau, l'action est remplacée par des déclarations sur des variables, il s'agit de déclarations sur les rapports aux connaissances.

➤ Raisonnements et milieux

D'après l'analyse didactique effectuée dans la section précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch et Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généralité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la *formulation* d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

« Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. » (Bloch, 1999, p. 4)

II.3 Les dimensions du modèle d'analyse des raisonnements

Nous allons à présent expliciter les éléments qui structurent le modèle en regard des niveaux de milieux. Compte-tenu des analyses didactiques effectuées précédemment, au cours du chapitre I et en début de chapitre II, nous avons été amenés à privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, et modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

- ✓ Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique³², les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent.
- ✓ Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- ✓ Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation. Ainsi nous pourrions analyser *a priori* les connaissances et les savoirs, valides ou erronées, susceptibles d'être produits et déterminer ceux que l'enseignant pourra institutionnaliser, en regard de chacun des niveaux de milieu.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en

³² ou à dimension adidactique

regard de leur(s) fonctions et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

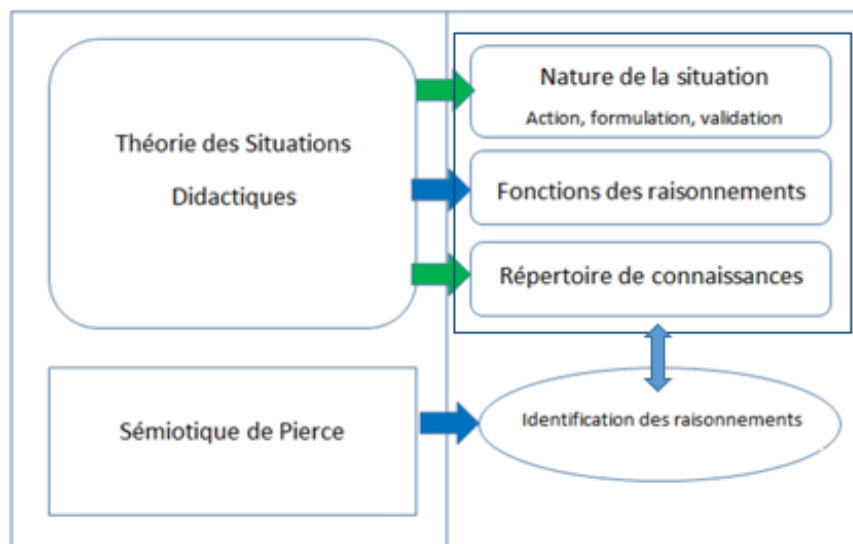


Schéma du modèle d'analyse des raisonnements

Figure II.9

Le schéma II.9 présenté ci-dessous permet d'illustrer les principaux axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements en lien avec les théories mobilisées : la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Pierce.

Le tableau II-10 présente de façon synthétique le modèle utilisé³³ ; il indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse a priori réalisée pour la situation prévue³⁴.

Nous avons codé en « SYNT » ou « SEM » les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra

³³ dans sa dimension prédictive

³⁴ La situation mathématique qui a contribué à l'élaboration du tableau II.2 est la situation du flocon de Von Koch que nous présenterons de façon détaillée au chapitre V.

ces essais peu opérants ; par ailleurs le travail syntaxique, une fois mis en forme, joue un indéniable rôle sémantique, que tous les mathématiciens (re)connaissent.

Durand-Guerrier (2010) définit précisément les dimensions sémantiques, syntaxiques et pragmatiques :

« semantics concerns the relation between signs and objects they refer to ; syntax concerns the rules of integration of signs in a given system, and pragmatics the relationship between subjects and signs (Morris, 1938 - Eco, 1971). » (Durand-Guerrier, 2010)

	Milieu M ₂	Milieu M ₁	Milieu M ₀
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Tableau II.2 – Le modèle milieux/répertoire/symboles (Bloch et Gibel, 2011)

Ce modèle nous permettra de caractériser précisément les formes et les fonctions des raisonnements qui sont susceptibles d'être produits, en situation, par les élèves et l'enseignant, ainsi ce modèle a une fonction prédictive. Nous effectuerons ensuite grâce à cet outil une analyse *a posteriori* très précise des raisonnements produits, en les analysant en regard de chacune des dimensions qui structurent le modèle.

Dans la section suivante nous allons nous attacher à préciser les différentes fonctions de ce modèle.

II.4 Les principales fonctions du modèle

II.4.1 La fonction prédictive du modèle

Le modèle a été construit de façon à mettre en lumière, à partir de l'analyse *a priori* de la situation réalisée dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique, en lien avec les différents niveaux de milieu correspondants. Ces derniers seront déterminés par la réalisation d'une analyse ascendante³⁵ détaillée, élaborée de façon à rendre visible les différentes situations emboîtées associées aux différents sujets confrontés aux milieux correspondants.

On en déduit que l'analyse *a priori* détaillée de la séquence et l'analyse des niveaux de milieux constituent des points d'appuis essentiels pour envisager plus précisément les formes de raisonnements que les élèves sont susceptibles de produire. En effet le chercheur pour pouvoir interpréter les différents observables, en lien avec chacune des situations, doit avoir préalablement envisagé précisément les formes de raisonnements. De plus l'observateur, en s'appuyant sur une analyse fine des niveaux de milieu, est en mesure de repérer dans la production des raisonnements des élèves un changement de niveau de milieu ; notamment le retour à une confrontation à la situation objective ou bien le passage de la situation didactique à la situation d'apprentissage. Il nous apparaît essentiel de repérer le raisonnement en lien avec sa fonction, le rôle qu'il joue est étroitement lié à la situation dans laquelle il a été produit. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le modèle d'analyse des raisonnements a pour le chercheur une fonction prédictive.

Dans la première ligne du tableau II.2, nous explicitons, selon le niveau de milieu où se situent les élèves, les différentes fonctions que recouvrent les raisonnements :

- ✓ au niveau « heuristique » M_2 (milieu objectif), les fonctions sont assimilables à des calculs exploratoires, des conjectures, des initiatives, des dessins,...
- ✓ au niveau M_1 , (milieu de référence), les fonctions des raisonnements peuvent être des déclarations de formules, des propriétés, et des début de justification) ;

³⁵ des niveaux de milieux

- ✓ nous étudierons aussi le niveau M_0 , en effet dans une situation à dimension adidactique, l'institutionnalisation n'est pas l'exclusivité du professeur, en effet celui-ci s'appuie fortement sur les productions des élèves.

La deuxième ligne du tableau met en relation les productions des élèves et la nature des signes associées. La dialectique signes/milieus est relativement prévisible : au niveau M_{-2} sont associées plutôt des productions de type heuristique, et au niveau M_{-1} des formules, des assertions générales, conjectures déjà formalisées et au niveau M_0 les signes sont majoritairement des arguments formels spécifiques.

La troisième ligne traduit l'actualisation du répertoire de représentation, en particulier l'abandon de procédures anciennes ou intuitives et l'adoption de preuve assimilables à des preuves mathématiques.

Dans l'hypothèse où le chercheur souhaite communiquer l'ingénierie à un enseignant, dans le but que ce dernier fasse vivre la séquence à ses élèves, le modèle³⁶ permet alors de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements valides ou erronés que les élèves pourraient produire, lors de chacune des phases. Cette connaissance des formes de raisonnements apparaît alors comme un élément particulièrement utile à l'enseignant pour effectuer une gestion didactique pertinente des différentes phases.

Le modèle offre donc la possibilité à l'enseignant de réfléchir préalablement aux formes et aux fonctions des raisonnements que ses élèves seront susceptibles de produire et ainsi de lui permettre d'envisager une gestion plus efficace, c'est-à-dire prenant en compte le plus fidèlement possible le projet initial de l'élève lors des phases de validation et d'institutionnalisation.

Il va aussi d'une certaine façon faciliter la tâche d'analyse didactique du chercheur confronté à l'analyse *a posteriori* de la séquence ; c'est ce que nous allons préciser dans le paragraphe suivant.

II.4.2 La fonction explicative du modèle

Nous avons également élaboré ce modèle afin d'analyser les observables qui traduisent la mise en œuvre effective des raisonnements des élèves, ainsi que leur(s) fonction(s) lors de chacune des phases de la séquence. Pour chacune des phases du déroulement de la séquence

³⁶ Mis en œuvre par le chercheur

étudiée, nous voulons grâce au modèle, identifier les situations correspondantes et ainsi déterminer le rôle que joue le raisonnement dans la situation correspondante.

➤ La méthodologie de l'analyse *a posteriori*

Nous allons tout d'abord présenter les principes du découpage de la séquence en épisodes

La méthode s'inspire d'une part de la sémiologie du cinéma³⁷, d'autre part de la Théorie des Situations Didactiques. En effet le déroulement d'une leçon peut être comparé à celui d'un film ou d'une pièce de théâtre, et analysé de façon similaire. Le séquençage d'une leçon consistera donc à y découper des segments temporels au cours desquels il sera possible de reconnaître une « situation », c'est-à-dire les éléments d'un certain jeu, qui modélisera et expliquera l'action des acteurs, relativement à une certaine connaissance.

Une séquence est un intervalle de temps déterminé par deux dates : (début et fin), entre lesquelles se déroule *entièrement et exactement*, une ou plusieurs étapes d'une situation didactique composite. Une situation didactique composite est un ensemble de situations didactiques auxquelles sont co-assujettis *effectivement et simultanément* les actants en présence. Elle se décompose en situations élémentaires telles que définies en Théorie des Situations Didactiques (comme jeux à un ou plusieurs joueurs avec un milieu.

Les situations composites sont des ensembles de situations élémentaires simultanées articulées par des relations de subordination : les décisions de la situation A sont soumises à des conditions de compatibilité avec une situation B : conformité à des règles, ou réalisation plus ou moins aléatoire de certaines conditions.... Par exemple une situation adidactique se déroule dans le cadre d'une situation didactique, une situation d'apprentissage s'appuie sur une situation d'action, etc.

Une « étape » d'une situation didactique est déterminée par l'intervalle entre deux actes, deux décisions successives qui modifient l'état du milieu auquel se réfèrent les différents participants, c'est-à-dire des décisions qui rapprochent ou éloignent la réalisation du projet représenté par la situation. Nous nommerons « épisode » ce qui correspond à une étape d'une situation didactique.

En didactique, l'objet qui nous intéresse principalement est ciblé : l'action qui fait l'objet principal de l'analyse est centrée sur une connaissance et sur ses répliques, celle que le

³⁷ Christian Metz : Essais sur la signification au cinéma (1968-1972), Langage et cinéma (1971), Le Signifiant imaginaire, coll. 10 L'Énonciation impersonnelle (1991). Et U. Eco, La Structure absente (La Struttura assente), (1968)

professeur veut enseigner, celle qu'il met en scène effectivement et celle que les élèves ou les étudiants donnent comme sens au déroulement.

Notre ambition n'est pas de rendre compte lors de l'analyse *a posteriori* de la totalité des événements didactiques qui se sont produits au cours de la séance, ni de montrer en détail comment on peut obtenir un tel compte rendu par des réductions sensibles mais assez respectueuses de la méthode et de la contingence. Nous allons nous centrer sur les raisonnements produits au cours de chacun des épisodes étudiés : les conditions de leur production (autrement dit l'identification au niveau de milieu), leurs fonctions en situation (en lien avec le niveau de milieu) et leurs effets sur l'avancement de la leçon du point de vue de l'actualisation du répertoire didactique. Cette étude des raisonnements repose sur une analyse sémiotique des signes émergents, en lien avec le répertoire de représentation mobilisé par l'élève.

➤ Les axes privilégiés lors de l'analyse *a posteriori*

Le modèle permet de déterminer si les enjeux didactiques de chacune des phases de la séquence sont en adéquation avec le projet de l'enseignant, mais également, de préciser en situation de validation, la nature et le rôle des arguments (raisonnements argumentatifs) produits par un ou plusieurs élèves ainsi que leurs effets sur le déroulement de la séquence notamment du point de vue de la conviction des élèves.

Du point de l'identification des connaissances et des savoirs, le modèle offre la possibilité d'identifier, le plus fidèlement possible, les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, que les élèves ont mobilisé afin de produire leur raisonnement par confrontation aux différents milieux. Il nous semble important de déterminer l'évolution du répertoire didactique de la classe, au fil la séquence, en repérant les savoirs pour lesquels l'enseignant a choisi d'enclencher un processus d'institutionnalisation.

De plus la fonction explicative du modèle est déterminante car ce dernier permet de percevoir, plus précisément de donner à voir les écarts existant entre le projet de séquence initial et la réalité du déroulement et ce de différents points de vue ayant une même visée : comprendre les raisons pour lesquelles certaines phases n'ont pas produit les effets attendus du point de vue des apprentissages et du point de vue des comportements et les raisons pour lesquelles les phases, plus précisément la confrontation des élèves aux situations emboîtées a permis (ou non) de favoriser la pratique du raisonnement et d'enrichir le répertoire didactique de la classe en permettant aux élèves d'accéder aux véritables raisons de savoir.

Cette analyse multidimensionnelle des raisonnements élaborée grâce au modèle permet d'éclairer le chercheur en ce qui concerne la reproductibilité de la situation didactique.

II.5 Conclusion

La Théorie des Situations Didactique a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de ce modèle. Elle nous a permis de caractériser les raisonnements en intégrant les conditions de leur élaboration grâce à l'identification des niveaux de milieu et nous a fourni un cadre et un outillage adéquats à la réalisation d'analyse *a priori* détaillée des situations. De plus, elle nous a amené à construire une caractérisation des fonctions des raisonnements en lien avec les situations³⁸ et a également contribué à définir la notion de répertoire de représentation³⁹. La sémiotique de C.S. Pierce a eu un rôle décisif lors de la construction du modèle. En effet elle a permis d'identifier certaines formes de raisonnement nécessitant une analyse très précise des signes ; de plus leur analyse permet de mettre en lumière l'évolution du répertoire de représentation lors du déroulement de la séquence ou du dispositif didactique⁴⁰.

Comme explicité dans le chapitre, cet outillage théorique nous a permis d'élaborer un modèle permettant d'analyser les raisonnements produits au cours d'une séquence intégrant une situation adidactique ou à dimension adidactique, selon trois axes distincts et complémentaires.

Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique⁴¹, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.

³⁸ Plus précisément les niveaux de milieux.

³⁹ à partir de la notion de répertoire didactique.

⁴⁰ Notamment lors des interrogations orales en C.P.E.G, classes préparatoires aux grandes écoles

⁴¹ ou à dimension adidactique

Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation.

L'originalité et l'intérêt du modèle d'analyse des raisonnements sont essentiellement dus au fait qu'il résulte de la combinaison de deux cadres théoriques complémentaires permettant ainsi de recouvrir une dimension d'analyse globale et une dimension d'analyse locale. L'analyse globale est liée à l'identification du niveau de milieu qui définit et traduit le statut logique des énoncés et permet de déterminer sa fonction, l'analyse locale repose sur une identification peircienne des signes donnant ainsi à voir l'usage et l'évolution du répertoire de représentation.

Dans ce chapitre, nous avons établi que le modèle peut être utilisé en vue d'assurer deux fonctions distinctes : une fonction prédictive et une fonction explicative.

Intéressons-nous tout d'abord à la fonction prédictive du modèle. Nous avons fait le choix de présenter le modèle sous une forme matricielle afin de mettre en évidence ses différentes dimensions. Ainsi pour chacun des niveaux de milieu nous avons indiqué : la forme et la fonction des raisonnements que les élèves sont susceptibles de produire, en relation avec les signes identifiés et l'actualisation du répertoire. Le modèle, utilisé dans sa fonction prédictive, doit être « précisé » par la production de l'analyse *a priori* de la séquence incluant l'analyse ascendante des niveaux de milieux. En effet l'analyse *a priori* de la séquence objet d'étude, couplée à l'analyse sémiotique de C.S. Pierce, permet de prévoir la forme et la fonction des raisonnements, valides et erronés, que les élèves peuvent mobiliser compte-tenu de leur répertoire.

Le modèle peut également être utilisé en vue d'effectuer une analyse *a posteriori* détaillée des raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant. Nous commencerons par décrire le déroulement effectif de la séquence, en explicitant ses différentes phases et ensuite, pour chacune d'elles, nous mettrons en œuvre une analyse *a posteriori* de différents épisodes selon les différents axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements. La sémiotique de C.S. Pierce nous permettra d'analyser très précisément les signes produits, du point de vue de leur nature et de leur(s) fonction(s) et d'identifier ceux qui traduisent la mise en œuvre d'un raisonnement. Ce modèle nous permettra d'étudier les raisonnements valides et erronés et notamment d'identifier pour ces derniers la nature et l'origine de l'erreur. De

plus ce modèle nous permettra de déterminer les effets de la séquence sur les apprentissages de différents points de vue : la pratique du raisonnement, l'usage et l'actualisation du répertoire didactique et la conviction des élèves.

Chapitre III. Utilisation du modèle en situation de validation à l'école primaire

III.1 Introduction

Dans ce troisième chapitre nous prendrons comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves et l'enseignant au cours d'une séquence "Le nombre le plus grand", proposée en cinquième année de l'école primaire au Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (C.O.R.E.M.). La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de Brousseau et de Glaeser. Le problème proposé par Glaeser est un problème ouvert. L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre-exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par Brousseau, est une situation à dimension adidactique : en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien de l'engagement des élèves dans le processus de preuve. La situation de validation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999) ; afin de pallier l'absence d'arguments produits par les élèves pour valider ou invalider une méthode permettant de gagner, l'enseignant sera amené à confronter les élèves à un nouveau jeu dans le but d'éprouver la validité de la méthode objet d'étude. Par conséquent l'analyse de cette séquence, à partir de notre modèle, devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? À quel(s) niveau(x) de milieu(x) réfèrent-ils ? Comment évolue, au cours de la séance, le répertoire didactique de la classe ?

Notre modèle d'analyse des raisonnements repose principalement sur l'identification des différents milieux correspondants aux différentes situations : situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Nous allons pour cela utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, de manière à expliciter les différentes situations « emboîtées » correspondant aux différents milieux (Brousseau & Gibel, 2005).

Nous souhaitons effectuer une analyse en théorie des situations de la complexité didactique des raisonnements produits ; pour cela nous allons utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, afin d'explicitier d'une part les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements, d'autre part les conditions qui définissent chacune des situations dans laquelle les élèves ont produit les raisonnements.

Comme indiqué dans (Gibel, 2008) l'utilisation de notre modèle devrait nous permettre :

1) d'approfondir l'analyse *a priori* de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

2) D'analyser *a posteriori* dans la séquence « Le nombre le plus grand »

- les raisonnements produits par les élèves en situation d'action,
- les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés,
- les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les élèves sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

L'analyse détaillée de cette séquence devrait également nous permettre d'apporter des éléments de réponse à la question :

Peut-on, en plaçant les élèves en situation didactique, enseigner ce qu'est « faire des mathématiques » au sens de :

1. Produire des conjectures en écrivant des énoncés, des « méthodes » permettant de gagner au jeu « Le nombre le plus grand » proposé par Glaeser.
2. Débattre de la validité des méthodes, plus précisément du domaine de validité des méthodes proposées par chacun des groupes.
3. Rechercher un contre-exemple à une méthode.
4. Elaborer et écrire un nouvel énoncé dont le domaine de validité est plus étendu.

III.2 Présentation et analyse *a priori* de la séquence « Le nombre le plus grand »

➤ Présentation et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a, b, c, d, e . Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires $\{+ ; - ; \times$

; :} appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant, il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

- Si la suite de nombres est donnée par l'enseignant alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calcul permettant de l'obtenir.
- Si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique

$$a \times b \times c \times d \times e$$

où a,b,c,d et e désignent cinq entiers naturels quelconques.

Or cette expression algébrique est valide, pour obtenir le nombre le plus grand, à partir d'un 5-uplet donné, seulement si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1. Le domaine de validité de cet algorithme « naturel » n'est pas immédiatement évident, il devrait conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques.

Il est à noter que la présence d'un ou plusieurs 0, dans la suite de nombre proposée, nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter ensuite le ou les entiers nul(s), ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode.

Examinons à présent les différents cas où la suite des cinq nombres contient un ou plusieurs 1 et explicitons pour chacun d'eux la formule permettant d'obtenir le nombre le plus grand.

Cas n°1 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement un 1 alors elle est de la forme 1,b,c,d,e

$$1 < b \leq c \leq d \leq e$$

Dans ce cas le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(b+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°2 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement deux 1 alors elle est de la forme 1,1,c,d,e

Avec

$$1 < c \leq d \leq e$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

Si $c=d=2$ alors le nombre le plus grand est obtenu par l'algorithme

$$(c+1) \times (d+1) \times e$$

Sinon le nombre le plus grand est donné par

$$(1+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°3 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement trois 1 alors elle est de la forme 1,1,1,d,e avec

$$1 < d \leq e$$

Le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times d \times e$$

Cas n°4: Supposons que la suite de nombres comporte exactement quatre 1 alors elle est de la forme 1,1,1,1,e avec

$$e > 1$$

Si $e=2$ le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times (e+1)$$

Si $e>2$ le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1+1) \times e$$

Cas n°5 Supposons que la suite soit formée de cinq 1

Le nombre le plus grand est obtenu par la formule

$$(1+1+1) \times (1+1)$$

La formulation d'une méthode généralisable est liée à l'usage des propriétés de la multiplication ; il convient donc de s'intéresser aux connaissances dont disposent les élèves en cinquième année de primaire. Pour ces élèves, l'associativité n'est pas acquise en ce qui concerne l'usage de cette propriété. La commutativité est admise implicitement par les élèves mais ces derniers ne peuvent pas faire référence à sa dénomination. Les élèves ont déjà mobilisé la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, lors de séances de calcul mental, sans en connaître la dénomination.

Analyse didactique et scénario de la séquence

L'un des objectifs de cette séquence est de permettre aux élèves de passer progressivement, au cours des différentes phases de la séquence, de raisonnements arithmétiques à l'élaboration et à l'étude d'énoncés généraux, que nous nommerons *méthode*, illustrant d'une certaine façon l'entrée dans l'Algèbre.

Ce qui est visé dans cette séquence, outre la mise en œuvre des propriétés des opérations, c'est principalement l'enseignement des règles du jeu de la preuve : il s'agit d'une leçon sur le vrai et le faux mais également sur la manière de l'établir. L'objectif principal de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre des méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand, quelle que soit la suite de nombres proposée.

Pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs, c'est-à-dire plusieurs jeux successifs sur des 5-uplets donnés par l'enseignant afin que les élèves élaborent des programmes de calcul. Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soient envisageable, c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être à dimension adidactique, il est nécessaire que : les méthodes étudiées aient été produites par les élèves, et donc qu'elles résultent d'un travail fondé sur l'écriture de méthode ; qu'elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et appartiennent ainsi au *répertoire didactique* de la classe, de sorte qu'elles soient utilisables par les élèves ; qu'ils parviennent à se les approprier, c'est-à-dire à faire le lien entre leurs formulations et leurs usages en situation de jeu ; qu'elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

III.3 Analyse des différentes formes et des différentes fonctions des raisonnements associés à chacun des niveaux du schéma

- L'objet de notre étude est d'une part de prévoir, pour chacun des niveaux du schéma à quelles conditions les différentes actions des élèves peuvent être assimilées ou non à une forme de raisonnement et d'autre part de déterminer en effectuant l'analyse a posteriori de la séquence « Le nombre le plus grand » les formes et les fonctions des raisonnements produits par les différents acteurs de la relation didactique.
- *Analyse ascendante des différents milieux*

La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

Quand le professeur prépare son cours, il organise la situation objective à savoir le milieu matériel et l'acteur objectif. L'acteur objectif, E₃ effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, pouvant être répertoriées et qui sont supposées connues puisqu'elles doivent lui être communiquées. Il s'agit donc d'algorithmes et de procédures précédemment institutionnalisés c'est-à-dire appartenant au *répertoire didactique* de la classe.

La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé par G. Glaeser. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du *répertoire didactique*, que les élèves vont devoir utiliser, relèvent principalement des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

La situation de référence : l'élève agissant et le milieu objectif

Les élèves doivent décider de la suite de calculs à effectuer afin de produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet proposé. Ils doivent choisir les opérations arithmétiques à appliquer aux nombres proposés en respectant la règle : chacun des nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les élèves doivent ensuite formuler le nombre obtenu et sa justification, autrement dit le programme de calcul associé. La validité du programme de calcul est examinée par les élèves, sous couvert de l'enseignant, du point de vue de la validité des calculs effectués et du point de vue du respect des règles du jeu.

La situation d'apprentissage : l'élève apprenant et le milieu de référence

L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. Les situations de formulation et

de validation sont étroitement liées ; en effet l'étude de la validité d'une méthode repose sur la capacité des élèves à construire un contre-exemple.

L'élève apprenant en situation de formulation d'une méthode

L'élève apprenant doit prendre en compte les objets, les règles, mais également les conditions dans lesquelles chacun des programmes de calcul ont été produits. L'élève considère maintenant ses actions sur les objets en regard des conditions nécessaires ou suffisantes à la réussite. Pour le dire autrement, il ne s'agit plus de jouer au jeu du « nombre le plus grand » pour gagner mais de savoir pourquoi et à quelles conditions on est sûr de gagner. Les élèves doivent relever le défi consistant à élaborer une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

La phase de formulation des méthodes vise à permettre aux élèves une prise de position sur l'action, et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions, afin qu'ils puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat. En situation de formulation, les élèves doivent écrire une méthode permettant d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

L'élève apprenant en situation de validation

Le domaine de validité d'une méthode est lié aux connaissances des conditions dans lesquelles son usage s'avère adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d'envisager l'usage de ce raisonnement dans des situations d'argumentation et de preuve. Les élèves vont devoir se positionner en tant que « proposant » ou « opposant » et débattre de la validité des méthodes proposées par les différents groupes.

L'élève en situation de validation, ayant le statut d'opposant ou de proposant, arrive avec une culture, des connaissances étroitement liées au répertoire didactique dont il dispose, et peut éventuellement, en situation de débat, formuler des exigences ou des interrogations qui ne sont pas nécessairement celles de la situation de preuve telle qu'elle a été conçue initialement par Brousseau.

La situation didactique : L'élève et la situation d'apprentissage

La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élève dans le but d'invalidier une méthode.

Les choix didactiques sur lesquels reposent l'ingénierie

L'enseignant après avoir explicité les règles du jeu, propose à ses élèves deux situations de jeu (3,8,7,5,4) et (7,3,5,2,8). Cependant lors de ces deux premiers jeux, l'enseignant va choisir des suites de nombres ne comportant ni de 1 ni de 0. Après ces situations de jeu, l'enseignant va demander aux élèves de produire une méthode générale permettant de gagner au jeu quelle que soit la suite de nombres proposée. Ayant dissimulé lors des deux premiers jeux la possibilité que les suites comportent des 1 et des 0, on peut s'interroger sur la capacité des élèves à envisager leur présence dans une suite de nombres.

Par ailleurs la situation de formulation des méthodes nécessite que les élèves rédigent des méthodes consistantes et explicites ; or c'est la première fois que les élèves sont amenés à produire un énoncé de ce type, par conséquent pour y parvenir l'enseignant devra interagir avec les auteurs pour les amener à préciser certaines formulations. Comme le souligne Bloch (1999) à propos des modalités de l'intervention de l'enseignant dans une situation à dimension adidactique

« On peut envisager qu'à un moment donné le professeur soit contraint, par l'activité des élèves, à faire un apport de connaissances et de savoirs : c'est donc que les élèves ont fait fonctionner des connaissances nécessitant un retour ou une mise au point. » (Bloch, 1999, p. 4)

La situation de formulation des méthodes est une situation à dimension adidactique, dont la gestion par l'enseignant devrait être délicate. En effet ce dernier aura pour mission de rester au plus près des propositions des élèves tout en rédigeant une méthode consistante. Il effectuera un moment d'institutionnalisation visant à reconnaître ces énoncés comme assimilables à des méthodes dont la validité reste à étudier.

L'enseignant fera ensuite dévolution de la situation de validation des méthodes. Il devra amener ses élèves à prendre position quant à la validité des méthodes formulées par chacun des groupes. L'enseignant aura à formuler les règles du jeu de la preuve. Nous nous intéressons ici plus précisément à la gestion de la situation de débat par l'enseignant. Ce dernier devrait, par ses interventions didactiques, être garant de la validité des arguments, avancés par les élèves, dans le but de produire une nouvelle méthode ou de rejeter une méthode.

L'enseignant va devoir intervenir pour reconnaître le statut de certaines assertions élaborées par des groupes d'élèves, par exemple pour identifier qu'un 5-uplet et une nouvelle méthode plus performante suffisent à invalider une précédente méthode. La gestion de classe, du point

de vue du respect des règles de la preuve, sera complexe car il est probable que certains élèves n'accepteront que difficilement le rejet d'une méthode. On imagine aisément la difficulté de l'élève à accepter que la production d'un contre-exemple suffit à invalider une méthode qui fournit, dans un très grand nombre de cas, le nombre le plus grand. De plus si les élèves ne sont pas en mesure de mettre en défaut une méthode, en élaborant un contre-exemple, l'enseignant devra nécessairement intervenir en proposant un nouveau jeu avec un 5-uplet adéquat, ainsi il agira dans le but de faire prendre conscience aux élèves de la non-validité des précédentes méthodes proposées pour générer le nombre le plus grand. En procédant ainsi l'enseignant contribuera à un enrichissement du milieu (M-1). Comme l'indique Bloch (1999), l'enseignant se substituera au milieu (M-1) défaillant, car « *pas suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement sur les rétroactions qu'il fournit pour engager le processus de formulation et de validation* ». (Bloch, 1999, p. 3)

Notre modèle d'analyse, que nous détaillerons dans le paragraphe suivant, devrait ainsi permettre d'identifier les formes, les fonctions et la nature des raisonnements associés au niveau de milieu correspondant.

III.4 Mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements

En prenant en compte, pour chaque niveau de milieu M_{-2} , M_{-1} , M_0 , les trois dimensions (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes : icône, indice, symbole-argument ; répertoire didactique), nous parvenons au tableau III.1. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, R1.2, R1.3, etc.) servent de référence lors de l'analyse du corpus : la progression des indices matriciels va en principe de pair avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

Le tableau III.1 ci-dessous précise pour chacun des niveaux de milieu M_{-2} , M_{-1} et M_0 les formes de raisonnement susceptibles d'être produites par les élèves en spécifiant leurs fonctions, les niveaux d'utilisation des signes et l'évolution du répertoire de représentation (en précisant l'usage et l'actualisation des connaissances et des savoirs).

	Milieu M_{-2}	Milieu M_{-1}	Milieu M_0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique - Comparaison de méthodes - Élaboration de contre-exemple	R1.3 SYNT - Explications, justifications visant à définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages.

Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,...)	R2.2 SYNT/SEM Symboles-arguments « locaux » ou génériques	R2.3 SYNT Symboles-arguments formels
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles.	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire	R3.3 SYNT Formulation de preuve(s)

Tableau III.1 – Les axes de l'analyse des raisonnements en fonction des niveaux de milieu

Comme indiqué dans le chapitre II, ce tableau explicite de façon synthétique le modèle d'analyse ; produit à partir de l'analyse *a priori* et de l'analyse ascendante des niveaux de milieu, il indique les signes et raisonnements susceptibles d'être produits dans chaque niveau de milieu. Nous avons codé en SYNT (syntaxiques) ou SEM (sémantiques) les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants.

En conclusion, nous classons donc les raisonnements en fonction des caractéristiques de la situation et des connaissances manifestées par les élèves dans la phase précédente, lesquelles attestent du niveau de milieu où ils se situent, et de la nature des signes produits.

✓ Exemple d'analyse des raisonnements d'une situation à partir du modèle

Nous allons analyser les raisonnements apparaissant dans plusieurs épisodes de la séquence (Gibel, 2015) en indiquant les différentes phases de la séance dont ils sont extraits. Le lecteur pourra se référer au déroulement de chaque séance (cf. Document n°3 joint⁴² dans la Partie IV) afin de percevoir le positionnement de l'épisode dans la séance correspondante. Le modèle d'analyse devrait nous permettre d'étudier les différentes formes de raisonnements en relation avec le niveau de milieu correspondant en spécifiant (a) leur(s) fonction(s), en

⁴² Gibel, P (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et Didactique*, 9(2), 51-72.

analysant (b) la nature des signes (langagiers et scripturaux), pour cela nous nous référerons (c) au répertoire didactique utilisé par les élèves afin d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés.

Episode 1 extrait de la phase 4 de la séance. Les élèves présentent le nombre le plus grand obtenu à partir de la suite 3-4-5-7-8 et justifient la validité de la procédure ayant permis de l'obtenir. L'enseignant interroge Myriam sur son résultat et sur la manière dont elle l'a obtenu.

(1.1)	M : (<i>en désignant Myriam</i>) : À toi.	
(1.2)	Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !	
(1.3)	E : Moi, aussi !	
(1.4)	E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.	
(1.5) 0.09.00	M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.	La maîtresse écrit au tableau 3360.
(1.6)	Myriam : 8 fois 7 , 56	L'enseignant écrit au tableau le programme de calcul au fur et à mesure que l'élève lui dicte $(8 \times 7) \times (5 \times 4) \times 3$ (1) (2) 56×20 (3) 1120 (4) 3360
(1.7)	M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.	
(1.8)	Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4 , ça fait 20	
(1.9)	M : Hum ! (<i>ton approbateur</i>)	
(1.10) 0.09.20	Myriam : Après j'ai additionné 56 et ...	
(1.11) 0.09.22	E : Additionné ?	
(1.12)	Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20.	
(1.13) 0.09.27	M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux-là !	
(1.14)	Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360	
(1.15) 0.09.40	M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.	

Tableau III.2

L'analyse détaillée de la phase 4, séance 1 (Gibel, 2004, p. 101) montre que les élèves ont produit des raisonnements en situation d'action. La diversité des programmes de calcul, élaborés par les élèves, illustre les choix auxquels les élèves ont été confrontés, tant du point de vue des opérations utilisées que du point de vue de l'ordre dans lequel ils les ont effectuées.

Les actions effectives des élèves sont reliées à des décisions de calculs (R1.1) en référence au tableau 2.

Identification du niveau de milieu correspondant : L'épisode ci-dessus relève de la situation de référence (S-2). Il est associé à la description d'un programme de calcul suite à la confrontation de l'élève agissant, Myriam, au milieu objectif (M-2).

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Dans cet épisode l'enseignant traduit la dénotation des calculs de Myriam par l'écriture d'un arbre de calculs, rédigé par paliers successifs de (1.6) à (1.14), comme schématisé ci-dessus. Chaque étape de la formulation de Myriam peut être considérée comme une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est examinée par les élèves. Myriam parvient ainsi à produire, par la dénotation de son programme de calcul, le résultat annoncé (3360). L'enseignant et l'ensemble des élèves de la classe valident le résultat proposé du point de vue de sa conformité aux règles du jeu mais aussi du point de vue de la validité des calculs. La présentation de son programme a pour fonction d'apporter la preuve de la validité de son résultat.

(b) Du point de vue de l'analyse sémiotique : Le programme de calcul rédigé par Myriam s'apparente à un indice (R2.1). En effet le modèle implicite d'action (M.I.A) qui sous-tend son programme de calcul est : le produit de deux nombres (strictement supérieur à 1) est supérieur à la somme de ces 2 nombres. L'analyse sémiotique nous conduit ici à analyser les observables du point de vue de leur nature et ainsi à identifier le M.I.A correspondant basé sur l'expérience, le fait observé donc assimilable à un indice.

La formulation produite par Myriam, sur sa feuille, est une suite de calculs rédigés linéairement sur le mode « machine » (mode opératoire).

$$7 \times 8 = 56 \quad 5 \times 4 = 20$$

$$56 \times 20 = 1120$$

$$1120 \times 3 = 3360$$

Les calculs rédigés par l'enseignant au tableau sont très éloignés du formalisme initialement utilisé par les élèves. L'enseignant essaie, par ce biais, d'introduire un formalisme basé sur l'utilisation des parenthèses pour rendre compte des étapes.

(c) Du point de vue de l'usage du répertoire didactique : Myriam s'est appuyée sur ses connaissances antérieures afin de décider d'utiliser exclusivement la multiplication ; ceci s'apparente à une conjecture ponctuelle (R3.1) pour produire le nombre le plus grand à partir

du 5-uplet. Cette élève a utilisé ses connaissances des tables de multiplication, la règle des zéros ainsi que l'algorithme de la multiplication pour effectuer les différentes opérations. Il traduit l'usage de connaissances anciennes (R3.1).

Présentation des méthodes produites à l'issue de la séance 1

L'enseignant, à l'issue de la séance 1, a noté au tableau les méthodes proposées par différents groupes d'élèves :

Méthode 1 (groupe d'Hélène) : Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.

Méthode 2 (groupe de David et Marc) : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.

La méthode suivante a été approuvée par plusieurs groupes à l'issue de la séance 1, l'enseignant a choisi de la nommer « Méthode d'Aline et les douze ».

Méthode 3 (Méthode d'Aline et les douze) : On multiplie tous les nombres entre eux.

Ces énoncés, élaborés par les différents groupes d'élèves, font l'objet d'une reconnaissance par l'enseignant et ils font désormais partie du répertoire didactique de la classe.

Episode 2 : Discussion sur la formulation d'une nouvelle méthode

Cet épisode est extrait de la séance 2, phase 2 (cf. Annexe 1). Les trois énoncés produits à l'issue de la séance 1 correspondent à des méthodes équivalentes à la Méthode 3. Des élèves s'interrogent sur la validité des méthodes proposées précédemment dans le cas où la suite de nombres comporte un 0 ou un 1.

(2.1)	Sylvie: Si tu multiplies 5 par 0 ça fait 0, si tu fais 5 plus 0 ça fait 5.
(2.2)	Anne : Eh 0 je ne crois pas qu'elle le mettrait dans les chiffres !
(2.3)	Sylvie : Et Aline, elle disait que quand on avait les numéros il fallait tous les multiplier. Et si on fait 1 fois 5, ça fait 5 et si tu fais 1 plus cinq ça fait 6.
(2.4)	Anne : Bon ça c'est ce que j'avais dit la dernière fois. Bon eh bien la méthode à Aline, ça ne marche pas !

Tableau III.3

Identification du (des) niveau(x) de milieu correspondant(s) : Cet épisode s'inscrit dans le cadre de la situation d'apprentissage, il met principalement en lumière la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence. L'élève apprenant, Sylvie, effectue une comparaison de deux méthodes dans un cas particulier où la suite, réduite à 2 nombres, comporte un zéro. On constate ici que Sylvie, pour comparer les deux méthodes, revient au niveau (M-2) en

effectuant les calculs arithmétiques correspondants (situation d'action). Ceci permet d'illustrer le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage.

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Son raisonnement vise à invalider la Méthode 3 - « Le nombre le plus grand est obtenu en effectuant le produit de tous les nombres » - institutionnalisée précédemment. Ce contre-exemple est refusé par Anne ; selon cette dernière, la présence d'un 0 dans la suite de nombres n'est pas envisageable. Le raisonnement produit ne remplit pas la fonction souhaitée par son auteure. Sylvie propose alors une suite, réduite à deux nombres et comportant un 1, elle apporte la preuve de la non validité de la méthode d'Aline par une comparaison des méthodes et emporte l'adhésion de l'ensemble des élèves du groupe d'Anne. Les propositions de Sylvie contribuent à l'enrichissement du milieu (M-1). La production par Sylvie d'une suite de nombres et d'une nouvelle procédure, non encore répertoriée, s'apparente à la production d'une conjecture ponctuelle étayée (R1.2).

(b) Du point de vue de la nature des signes : Son énoncé s'apparente à la production d'un symbole-argument, il s'agit d'un argument local (R2.2). L'élève fait ici référence à des suites restreintes (comportant seulement deux termes) particulières dans le sens où la première proposition de suite comporte un 0 et la deuxième proposition de suite comporte un 1. Cependant cette conjecture étayée pourrait jouer un rôle décisif dans l'avancée de la situation en effet l'enrichissement du milieu (M-1) permet à présent d'envisager l'élaboration d'une nouvelle méthode prenant en compte le cas particulier d'une suite comportant un 1.

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique : on constate la mise en œuvre implicite des propriétés « 0 est un élément absorbant » et l'utilisation de la propriété « 1 est élément neutre pour la multiplication » qui illustre l'utilisation de connaissances anciennes (R3.1).

Suite de l'épisode 2

(2.5)	Une élève : Qu'est-ce qu'on fait comme méthode ?
(2.6)	Anne: Il faut multiplier tous les nombres sauf quand il y a des 1, on les additionne.
(2.7)	Anne : Cédric tu fais la méthode d'Aline, toi aussi et nous on fait la méthode celle-là pour voir ceux qui ont la mieux.
(2.8)	Anne : Alors 5,8,1,2,6 allez 5,8,1,2,6...5,8,1,2,6 ; Alors vous deux vous faites la méthode d'Aline et toi tu fais ma méthode, il faut trouver le nombre le plus grand avec cette méthode.

(2.9)	M : Alors vous faites des essais.
(2.10)	Une élève : Oui on fait des essais.
(2.11)	Anne : Eux ils font la méthode d'Aline et nous ma méthode.

Tableau III.4

Identification du niveau de milieu correspondant : Cet épisode transcrit de (2.5) à (2.11) relève aussi de la situation d'apprentissage. Il illustre la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence. Cet épisode met en lumière la proposition d'un contre-exemple sous la forme de l'énonciation d'une nouvelle méthode et d'un 5-uplet (5,8,1,2,6). La formulation de cette nouvelle méthode (2.8) est en partie implicite puisque l'auteure, Anne, ne précise pas à quel nombre il faut ajouter le 1. Anne, en proposant une nouvelle méthode dans le cas où la suite comporte un 1, contribue à l'enrichissement du milieu (M-1). Sa proposition apparaît comme un prolongement de la proposition de Sylvie formulée précédemment en (2.5).

(a) Les fonctions des raisonnements : La suite produite par Anne est en adéquation avec son projet visant à mettre en défaut la méthode d'Aline : établir la preuve de la validité de sa méthode (R1.2) par l'expérimentation dans le cas particulier d'une suite de nombres comportant un 1.

L'épisode donne aussi à voir un raisonnement d'organisation des tâches ; il vise à définir une répartition des rôles au sein du groupe afin de confronter les résultats obtenus par les 2 méthodes. Il s'agit là très clairement d'une mise en projet dont la finalité est explicitée : établir par le calcul l'obtention, par la nouvelle méthode, d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode d'Aline.

L'épisode étudié illustre précisément la définition du raisonnement (Oléron, 1977, p. 10) énoncée dans la première partie de la note de synthèse. En effet cet épisode révèle une confrontation de méthodes, respectant des contraintes, et conduite en fonction d'un but qui n'est autre que l'écriture d'une nouvelle méthode dont la validité doit être prouvée dans un domaine plus étendu, celui des 5-uplets comportant un 1, que celui lié aux précédentes méthodes.

Suite de l'épisode 2

(2.12)	Anne : Tu as compris ? Tu additionnes le 1 au nombre le plus grand, au nombre le plus grand, ou à n'importe quel nombre mais tu l'additionnes avec un nombre.
(2.13)	Anne : On additionne le 1 avec n'importe quel nombre puis on multiplie tout.
(2.14)	Elève 2 : Moi je voulais le mettre en dernier pour l'additionner.

(2.15)	Anne : Ce n'est pas grave tu peux le faire mais je ne sais pas si ça fera pareil.(...) Non, non ça ne fera pas pareil.
(2.16)	Elève 2 : Mais si ça revient au même !

Tableau III.5

Identification du niveau de milieu : Cet épisode transcrit de (2.12) à (2.16) relève aussi de la situation d'apprentissage. Il rend compte de la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence.

(a) Fonction des raisonnements : Anne travaille à la formulation d'une méthode, sa réflexion vise à envisager différents programmes de calculs à partir de la suite qu'elle a proposée.

(b) Analyse du point de vue des signes : La formulation de la méthode d'Anne évolue et se précise lors des interactions avec les membres du groupe (2.6), (2.13) et (2.15) mettant en évidence la dialectique action/formulation. Anne (2.15) s'efforce d'envisager différents programmes de calculs et d'anticiper sur les résultats correspondants. Son raisonnement repose sur une disjonction de cas.

(c) Analyse du point de vue du répertoire didactique : Anne met en œuvre la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition afin d'anticiper les résultats obtenus par différentes méthodes de calculs (selon le nombre auquel elle ajoute 1).

Suite de l'épisode 2 : la discussion sur la suite 5,8,1,2,6

Identification du niveau de milieu correspondant : La suite de cet épisode relève aussi de la situation d'apprentissage reflétant la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

(a) Les fonctions des raisonnements : Dans cet épisode Anne a élaboré une preuve de nature sémantique (R1.2), en donnant à voir à ses collègues la pertinence de sa méthode appliquée à la suite choisie.

C'est pour les deux élèves en situation d'exécuter le calcul, en utilisant la méthode d'Aline, une confrontation au milieu matériel visant à permettre la comparaison du nombre obtenu par la méthode d'Aline à celui obtenu par la méthode d'Anne. Ceci contribue de nouveau à mettre en évidence le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage. Les actions des élèves calculateurs, mettant en œuvre la procédure d'Aline et les douze, relèvent ici précisément du calcul et non du raisonnement à proprement parler puisque le programme de calcul est mis en œuvre sans recours à des choix ou à des décisions personnelles. L'exposé des résultats obtenus par les deux méthodes, à partir de la suite choisie par Anne, conduit à mettre en défaut la méthode d'Aline. De plus on remarque que le nombre obtenu par la

méthode d'Anne est certes plus grand que le précédent mais ce n'est pas, dans l'absolu, le nombre le plus grand que l'on puisse obtenir à partir de cette suite.

(b) Nature des signes : Les calculs sont rédigés sur le mode « opératoire ». Le formalisme, basé sur l'usage des parenthèses et initialement introduit par l'enseignant, n'est pas réutilisé par les élèves du groupe d'Anne ni par les autres élèves de la classe. En effet la présentation formelle du calcul produite par l'enseignante n'a pas eu valeur d'institutionnalisation, car comme l'indique Comin (2000), l'institutionnalisation d'un objet suppose une genèse, un vocabulaire, un usage standard et une reconnaissance collective, or ces conditions n'ont pas été réunies lors de la séquence (épisode 1). Il s'agit d'une explicitation d'arguments locaux (R2.2).

A l'issue de cette phase, la maîtresse note alors au tableau les deux nouvelles méthodes élaborées par deux groupes d'élèves donnant lieu à un enrichissement des énoncés des méthodes :

Méthode 1 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) : *On multiplie les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus.*

Méthode 2 (Anne, Sylvie, Cédric et Séverine) : *On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après.*

Il est à noter que ces méthodes viennent enrichir le répertoire didactique de la classe, elles réunissent les conditions d'institutionnalisation définies par Comin (2000).

Episode 3 : Extrait de la séance 2, « débat relatif aux méthodes 1 et 2 ». La discussion entre les différents groupes porte précisément sur le nombre auquel il faut ajouter 1.

(3.1)	M : Une autre méthode ? Qui a écrit ça ? Il faut vous décider, vous ne savez pas trop. Vous avez une autre méthode ?
(3.2)	Elsa : Nous au début on avait fait la première (méthode 1).
(3.3)	M : Attends je n'entends pas ; j'entends quelques élèves qui parlent.
(3.4)	Elsa : Nous on avait fait la première méthode mais si on ajoute le 1 à la fin il y est qu'une fois, il y est qu'une fois ; mais si on le met au plus grand et qu'après on le multiplie, il va être répété plusieurs fois et ça agrandit le nombre.

Tableau III.6

Identification du niveau de milieu correspondant : Cet épisode relève aussi de la situation d'apprentissage, il rend compte de la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

(a) Les fonctions des raisonnements : Ce raisonnement, énoncé par Elsa en (3.4), est très pertinent du point de vue de sa nature et de sa fonction. En effet il est basé sur une disjonction

de cas permettant à Elsa de produire une conclusion valide remettant en cause la validité de la méthode du groupe de Jérémie, Aline, Mélanie et Sylvain. La formulation produite par Elsa est une preuve de nature syntaxique (R1.2), elle conduit à la mise en défaut de la méthode 1 (Jérémie, Aline, Mélanie, Sylvain).

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique : Elsa utilise ses connaissances de la distributivité de la multiplication sur l'addition pour anticiper le résultat d'un calcul générique.

Cette analyse fine des raisonnements, obtenue par la mise en œuvre du modèle, permet aussi une réflexion approfondie sur les effets de la leçon sur les apprentissages des élèves. Nous nous attacherons à développer cet aspect de l'analyse didactique dans le paragraphe qui suit.

III.5 Les effets de la leçon sur les apprentissages des élèves

➤ **Du point de vue de la pratique du raisonnement**

L'analyse du déroulement de la séquence, par la mise en œuvre du modèle, nous a permis de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements produits par les élèves en situation d'action, de formulation et de validation en déterminant explicitement leurs fonctions. L'analyse *a posteriori* montre que les raisonnements recouvrent des fonctions spécifiques en étroite relation avec les niveaux de milieux : prise de décision et élaboration de modèle implicite d'action en situation d'action (M-2), rédaction des méthodes en situation de formulation (M-1), organisation des tâches et émission de conjectures en situation de validation (M-1) ainsi que recherche et productions de contre-exemples visant à étudier le domaine de validité des méthodes.

Le tableau III.1 vise à expliciter les formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique selon les niveaux de milieux, et préfigure l'analyse des raisonnements selon les trois axes (fonctions des raisonnements, analyse sémiotique et identification et actualisation du répertoire didactique). Ce tableau résulte de l'analyse *a priori* de la séquence et prend appui plus précisément sur l'analyse des niveaux de milieux.

L'analyse *a posteriori* montre que les formes et les fonctions des raisonnements étudiés, selon les axes du modèle, sont en conformité avec les types raisonnements associés aux différents milieux (tableau III.1). Cependant au niveau didactique (M0), l'enseignant ne s'attache pas à l'élaboration de preuves formelles en lien avec un formalisme spécifique, comme c'est fréquemment le cas dans l'enseignement secondaire. Dans la situation étudiée, au niveau

(M0), l'enseignant s'efforce de faire en sorte que les élèves s'approprient et mettent en œuvre les règles du jeu de la preuve.

Cette situation est une situation particulièrement riche sur le plan didactique du point de vue de l'apprentissage de la pratique du raisonnement car les situations successives offrent à l'élève la possibilité de percevoir l'intérêt et la pertinence des raisonnements produits en situation d'action, de formulation et de validation.

➤ **Du point de vue de l'usage et de l'actualisation du répertoire didactique**

La richesse de notre modèle nous permet non seulement d'analyser les formes de raisonnement mais encore de mettre en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves en lien avec leur répertoire didactique. Les connaissances mobilisées sont étroitement liées à la mise en œuvre des propriétés de la multiplication (commutativité, distributivité sur l'addition, élément absorbant, élément neutre) telles que nous les avons mentionnées lors de l'analyse des épisodes et même si les élèves ne sont pas en mesure de les nommer, ils sont cependant tout à fait capables de les utiliser et d'en justifier la validité et la pertinence.

La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, utilisée à plusieurs reprises au cours des différents épisodes, joue un rôle déterminant lorsque les suites comportent un ou plusieurs « 1 ». En effet on observe que la confrontation des élèves à la situation de jeu, à plusieurs reprises, contribue très fortement à l'émission de conjecture, en lien avec l'usage de cette propriété, dont la validité est objet de débat et dont les preuves sont le plus souvent sémantiques mais aussi syntaxiques comme nous l'avons mis précédemment en évidence dans les analyses des épisodes.

L'écriture des méthodes nécessite une prise de recul par rapport aux programmes de calcul et la nécessité de relier les actions effectives aux formulations disponibles dans le répertoire didactique de la classe. Le rapport aux énoncés, du point de vue de l'énonciation et de la compréhension, joue un rôle déterminant dans l'apprentissage et plus globalement dans le rapport aux mathématiques. La diffusion de nouvelles méthodes, en tant qu'énoncé, dont la validité est débattue, est complexe et l'enseignant doit rester garant de la consistance des énoncés.

➤ **Du point de vue de la conviction des élèves en situation de validation**

La situation de validation est étroitement liée à la situation de formulation, puisque la discussion à propos de la pertinence des méthodes repose principalement sur la validité des

nouvelles méthodes formulées par les élèves. Cependant la vraie difficulté pour l'enseignant consiste à faire dévolution aux élèves des règles du jeu de la preuve. Pour que cette dernière soit réussie il faut que les élèves, d'une part acceptent leurs positions respectives de proposant et d'opposant, et d'autre part reconnaissent et acceptent le principe de mise en défaut de la validité d'une méthode par l'exhibition d'un contre-exemple. Certains élèves acceptent difficilement cette règle, ce qui nécessite l'intervention de l'enseignant, à plusieurs reprises, afin de maintenir et de réguler les interactions en situation de validation.

L'enseignant est conduit à proposer des situations de jeux lorsque les élèves ne parviennent pas à élaborer des contre-exemples. Ainsi ce « retour » à la situation objective, permet aux élèves d'envisager de nouvelles méthodes de calculs et par suite de nouvelles méthodes qui intègrent des cas particuliers, liés à la présence de deux ou plusieurs 1.

Le choix de rejeter, de « démolir » pour reprendre l'expression utilisée par l'enseignant, une méthode dont le domaine de validité est étendu, sous prétexte qu'il n'intègre pas certaines suites particulières, comportant plusieurs 1, est discutable du point de vue didactique (Durand-Guerrier, 2008) dans le sens où une alternative est effectivement envisageable. En effet il serait possible de compléter la méthode d'Aline en intégrant des cas particuliers comme nous le proposons lors de la présentation de la solution complète. Dans ce cas les raisonnements, produits par les élèves en situations d'opposant, pourraient avoir non seulement la fonction d'invalider une méthode mais ils pourraient également recouvrir une autre fonction, celle visant à explorer le domaine numérique sur lequel la méthode proposée est valide. Ainsi les raisonnements seraient perçus comme des ébauches permettant de construire une nouvelle méthode plus complète résultant d'un travail, de nature sémantique, sur les objets comme générateur d'énoncés, de méthodes et pas uniquement comme outil de réfutation.

III.6 Discussion autour du domaine de validité du modèle

Le modèle est adapté pour analyser des situations comportant une dimension de recherche, plus précisément lors de séquence comportant des situations à dimension didactique. En situation didactique, les raisonnements des élèves sont produits pour justifier une action, pour produire une réponse ou pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur ; formellement le raisonnement est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il

s'apparente alors d'une certaine façon à une citation. Dans ce cas précis l'utilisation du modèle ne se justifie pas.

Notre modèle offre la possibilité d'analyser *a posteriori* des séquences de classe comportant une dimension recherche ; il permet de déterminer d'une part la nature, la forme et le statut des raisonnements et d'autre part leurs fonctions en les reliant au niveau de milieu correspondant. Une particularité du modèle est qu'il permet de prendre en compte non seulement les raisonnements valides mais encore ceux qui sont incorrects ou incomplets.

Dans l'analyse de cette séquence, les observables (langagiers, scripturaux) relèvent d'un même registre numérique, basé principalement sur les opérations et leurs propriétés, d'où une analyse sémiotique moins prégnante que celle conduite lors de la précédente étude.

III.7 Conclusion

L'analyse de la séquence, réalisée à partir du modèle, a permis de mettre en évidence la production de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que : prendre des décisions afin de produire une réponse, justifier la validité d'un programme de calcul, élaborer une méthode générale lors de la situation de formulation, produire des conjectures, organiser les tâches au sein d'un groupe, argumenter, débattre de la validité des méthodes, de manière à formuler une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible. De plus elle a permis d'étudier la nature des raisonnements et de mettre en évidence la capacité des élèves de primaire à produire des raisonnements sous la forme de raisonnements par disjonction de cas.

Le modèle met en exergue la richesse des raisonnements produits en les reliant aux connaissances et aux savoirs antérieurs du répertoire didactique concernant les opérations élémentaires et les propriétés de la multiplication (commutativité, élément neutre et distributivité de la multiplication sur l'addition). Du point de vue des formulations, le modèle donne à voir l'évolution des énoncés en lien avec les différentes situations : on passe de la formulation de suites de calculs arithmétiques à la rédaction de méthodes générales, de nature algébrique, pour parvenir à la production d'arguments sémantiques et syntaxiques.

Cette évolution est observable en situation de formulation et en situation de validation. L'analyse sémiotique montre également le décalage effectif entre le formalisme introduit par l'enseignant et le répertoire didactique effectivement mobilisé par les élèves tout au long de

la séquence. Ceci conforte l'analyse *a priori* : la situation « finale » étant algébrique, il était difficile pour les élèves de ce niveau de parvenir à une formulation de cette nature.

L'intérêt du modèle est lié au fait qu'il permet l'étude du raisonnement produit, qu'il soit ou non valide, de différents points de vue : sa fonction en lien avec le niveau de milieu correspondant, sa nature et son statut d'un point de vue sémiotique mais également d'identifier l'usage et le niveau d'actualisation du répertoire didactique. Cette étude, selon les trois axes définis précédemment, permet de déterminer l'efficacité des situations du point de vue de la pratique du raisonnement mais aussi du point de vue de l'utilisation du répertoire de connaissances de l'élève. Cette étude très fine des raisonnements permet également d'envisager un aménagement de l'ingénierie dans le but de permettre aux élèves de concevoir les mathématiques, et plus précisément les situations de validation, comme un moyen d'étudier précisément le domaine de validité des énoncés.

IV. Effets de la mise en œuvre du modèle pour l'étude des raisonnements en géométrie à la transition école-collège

IV.1 Introduction

Dans ce quatrième chapitre nous allons nous prendre pour objet d'étude les situations d'enseignement visant à permettre aux élèves de fin d'école primaire (élèves âgés de 10 à 11 ans) l'apprentissage des propriétés géométriques des quadrilatères. Nous nous intéressons plus particulièrement aux situations d'enseignement de la géométrie qui favorisent chez l'élève l'utilisation et la formulation de connaissances spatiales et géométriques.

Au cycle 3⁴³, les enseignants rencontrent de nombreuses difficultés à faire vivre à leurs élèves des situations d'enseignement-apprentissage aménageant progressivement le passage d'une géométrie instrumentée, principalement axée sur l'utilisation des instruments usuels (règle, équerre, compas), à une géométrie déductive pour laquelle les assertions reposent sur les propriétés géométriques des figures.

Ce constat nous amène à formuler notre question initiale :

Comment élaborer une ingénierie didactique, reposant principalement sur la résolution de problèmes géométriques par les élèves de cycle 3, et qui accorde une place importante à la mise en œuvre et à la formulation de connaissances géométriques ?

Comme le démontrent les nombreuses recherches⁴⁴ menées par Berthelot et Salin (1992), Brousseau (2000), Gobert (2001), Combier et Pressiat (2003), Munier et Merle (2007), Bloch et Osel (2009), Laguerre (2014), Bloch et Pressiat (2009) la confrontation de l'apprenant à des actions effectives sur le milieu sensible joue un rôle déterminant du point de vue de la construction des concepts géométriques. Berthelot et Salin (1992), confortés par leurs

⁴³ Le cycle 3 est constitué des classes de CM1, CM2 et sixième.

⁴⁴ Les enjeux de chacune de ses recherches antérieures sont explicités dans (Gibel et Blanquart-Henry, 2017)

multiples expérimentations au cycle 3, préconisent d'introduire les concepts fondamentaux de la géométrie, en fin d'école primaire, comme outils pour résoudre des problèmes spatiaux effectifs. Leurs recherches nous ont, d'une certaine manière, servi de fil conducteur lors de l'élaboration de notre ingénierie.

Par ailleurs, pour des raisons formulées dans la section suivante, en référence à de nombreuses recherches antérieures, la confrontation de l'élève à des situations d'apprentissage dans l'espace environnant, par exemple la cour de récréation, permet le recours à des procédures de résolution qui privilégient les actions effectives sur les objets sensibles. Ces dernières reposent principalement sur l'utilisation des instruments à disposition des élèves et découlent de la mise en œuvre des propriétés géométriques.

L'analyse de ces situations, étudiées précisément du point de vue du fonctionnement des connaissances, nécessite d'utiliser d'un outillage théorique adéquat : la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). En effet cette théorie nous offre la possibilité d'analyser les connaissances et les savoirs, valides et erronés, mobilisés par les élèves en situation et nous conduit à étudier les conditions dans lesquelles ils ont été mobilisés lors des différentes phases de la séquence. Nous souhaitons présenter de façon détaillée l'ingénierie élaborée en justifiant, d'un point de vue didactique, les choix effectués qui reposent principalement sur des recherches antérieures.

La méthodologie de recherche que nous avons adoptée est décrite précisément dans (Gibel et Blanquart-Henry, 2017). Elle repose d'une part sur l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie basée sur la reproduction de figures géométriques dans la cour de récréation, d'autre part sur une étude spécifique des raisonnements qui sous-tendent les procédures des élèves en situation de reproduction des figures et ensuite lors de la verbalisation de leurs procédures. En effet pour identifier les propriétés géométriques utilisées par les élèves lors de la reproduction des figures dans l'espace de la cour de récréation, à l'aide de moyens inhabituels (tasseaux de bois, gabarit d'angles, ficelle, etc.), il est nécessaire de réaliser une étude précise des actions, et des procédures mobilisées en vue de déterminer les propriétés sous-jacentes. De même nous effectuerons une analyse détaillée des raisonnements produits lors des situations où les élèves communiqueront oralement leurs procédures.

Ainsi, dans cette étude nous nous sommes attachés à produire des éléments de réponse à la question :

La confrontation des élèves de CM1-CM2, âgés de 10-11 ans, à des situations d'apprentissage dont l'élément central est la reproduction de quadrilatères dans l'espace environnant permet-elle de favoriser la mobilisation et la formulation de connaissances spatiales et géométriques ?

Nous allons dans la section suivante définir les outils théoriques nécessaires à la réalisation de cette étude en justifiant leur adéquation. La présentation des concepts utilisés, inhérents aux différents cadres théoriques mobilisés, nous offrira également la possibilité de préciser notre question de recherche.

IV.2 la théorie des situations didactiques un cadre théorique adéquat pour l'analyse des situations d'apprentissage et l'étude des raisonnements

➤ Etude de l'articulation entre connaissances spatiales et connaissances géométriques

Il est nécessaire de distinguer l'espace sensible et l'espace géométrique. Le premier est défini comme un espace qui nous est accessible par le biais des sens, le second est le résultat de l'effort théorique appelé géométrie. Cette dernière est définie par Brousseau comme étant « l'ensemble des connaissances spécifiques nécessaires au contrôle de la consistance des énoncés sur l'espace ». (Brousseau, 2000)

Dans notre étude, nous souhaitons établir les raisons pour lesquelles la confrontation des élèves à des situations d'enseignement-apprentissage dans l'espace environnant privilégie l'émergence de raisonnements chez les élèves. Pour cela nous réaliserons l'analyse clinique d'une séance de classe en produisant une analyse détaillée des formes de raisonnement élaborés par les élèves au cours des différentes phases de la séquence.

Comme le soulignent Berthelot et Salin (2001) et Salin (2014), la confrontation de l'apprenant à des actions effectives sur le milieu sensible joue un rôle déterminant du point de vue de la construction des concepts géométriques, c'est ce que nous nous efforcerons d'explicitier dans le paragraphe suivant.

Comme l'indique Brousseau (2000), selon la nature de l'espace sensible avec lequel le sujet est en interaction, ce dernier développe des modèles conceptuels différents. Ces modèles définissent selon Brousseau trois types d'espaces : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace.

➤ Classification des démarches de modélisation

Berthelot et Salin (1992) introduisent le terme de « démarche de modélisation », car le passage de l'expérimentation à la théorisation en constitue le principe. Selon la nature du problème de géométrie, ils distinguent alors trois problématiques :

- Une problématique pratique dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques (en particulier des dessins) : la validation se fait dans l'espace sensible;
- Une problématique géométrique dans laquelle les objets ne sont plus des objets physiques : la validation se fait par un raisonnement qui s'appuie uniquement sur des connaissances géométriques;
- Une problématique de modélisation « spatio-géométrique⁴⁵ » dans laquelle on travaille sur des objets physiques : la validation se fait dans l'espace sensible, comme dans la problématique pratique, mais la démarche de résolution est totalement différente puisqu'elle s'appuie sur des propriétés géométriques.

Berthelot et Salin (1992) nomment spatio-géométriques la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique. Dans cette étude nous nous sommes attachés à étudier les différentes formes de connaissances spatio-géométriques mobilisées par les élèves.

Pressiat et Combiat (2003) indiquent que l'intérêt de ces situations de modélisation se justifie d'un point de vue didactique par « la recherche d'une solution reproductible dépassant le modèle immédiat ». Ils précisent que « cette solution doit être communicable à d'autres, en s'appuyant sur un modèle explicatif, dont la fonction doit pouvoir être éprouvée ».

Notre recherche relève du cadre de la problématique de modélisation. Son principal enjeu est l'étude d'une situation de modélisation conduisant à l'élaboration de procédures

⁴⁵ Egalemeut désignée par Berthelot et Salin « problématique de modélisation de la réalité spatiale par des connaissances géométriques »

reproductibles pouvant être communiquées aux autres élèves de la classe, en vue d'une part de développer l'émergence de la dialectique action-formulation, d'autre part de privilégier l'articulation entre géométrie instrumentée et géométrie déductive.

Un survey des recherches, inhérentes à l'enseignement de la géométrie dans le méso-espace, (Gibel et Blanquart-Henry, 2017), met en évidence que l'augmentation du recours aux connaissances de géométrie dans le méso-espace, en vue de permettre aux élèves de s'appropriier les concepts géométriques, semble faire consensus. Cependant comme l'indique Salin (2007) ce phénomène nécessite d'être davantage étudié pour en connaître l'origine. C'est ce que nous nous sommes efforcés de réaliser en élaborant une méthodologie spécifique reposant sur la mise en œuvre de notre modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011).

Notre étude porte sur la reproduction de figures planes dans le méso-espace, elle se distingue des autres recherches par l'absence de mesure⁴⁶ et par le fait que les élèves auront à reproduire le contour de la figure et pas seulement ses sommets. La démarche est aussi différente de celle proposée dans la recherche de Barrier, Mathé et Vitorri (2012) car la procédure de construction n'est pas imposée.

L'analyse des travaux antérieurs nous a permis alors de préciser la formulation de notre problématique (Gibel et Blanquart-Henry, 2017) :

Quelle ingénierie didactique convient-il d'élaborer dans la cadre d'une problématique de modélisation afin de favoriser chez les élèves de fin de primaire (âgés de 10-11 ans) l'usage raisonné puis la formulation des propriétés géométriques mobilisées lors de la reproduction de figures dans le méso-espace ?

➤ Présentation d'éléments d'ordre méthodologique en lien avec le modèle

Nous souhaitons à présent présenter la méthodologie mise en œuvre pour étudier précisément les connaissances spatiales et géométriques mobilisées par les élèves lors de la reproduction

⁴⁶ Les élèves vont devoir mettre en œuvre des procédures visant à conserver la mémoire de longueurs et d'angles en ayant recours à des « moyens » inhabituels (tasseau de bois, ficelle, gabarit d'angle, etc.) afin de reproduire, par le tracé, des segments de même longueurs et des angles de même mesure que ceux de la figure modèle proposée. Le recours à des mesurages effectifs (de longueurs et d'angles) n'est pas ici envisageable compte-tenu des moyens mis à disposition des élèves.

de quadrilatère dans le méso-espace, puis lorsqu'ils sont conduits à verbaliser et à justifier leur(s) procédure(s).

La situation de reproduction de figures géométriques dans le méso-espace est assimilable à une situation d'action. En effet les élèves vont prendre des informations sur la figure à reproduire en mobilisant et en articulant différentes procédures (pliages, mesure des côtés, mesure des angles, etc.) à l'aide des moyens non conventionnels à disposition (tasseaux de bois, ficelle, gabarit d'angle, etc.). Ils vont ensuite à l'aide de ces mêmes artefacts s'efforcer de reproduire, sur une parcelle distante, la figure modèle par la mise en œuvre d'une procédure originale. Les élèves pourront contrôler la validité de leur procédure, au fur et à mesure de la construction, en s'assurant de la validité des tracés par comparaison des mesures des longueurs et des angles entre la figure modèle et le tracé réalisé. Compte-tenu de la variété des procédures susceptibles d'être mobilisées, liées à l'usage de moyens non conventionnels dans l'espace sensible (méso-espace), l'analyse didactique des procédures nécessitera une analyse approfondie des raisonnements qui les sous-tendent.

Lors de la phase de formulation des procédures, les élèves devront expliciter leur démarche en justifiant l'adéquation de leurs actions dans le méso-espace. Pour cela, ils devront se référer aux connaissances spatiales et géométriques qui justifient la validité de leur procédure.

Par conséquent notre étude devra prendre en compte leurs actions effectives sur le milieu, mais aussi les connaissances et les savoirs énoncés par les élèves en situation de formulation. Pour réaliser cette analyse didactique, nous étudierons les différentes formes de raisonnements produits par les élèves en spécifiant leurs différentes fonctions, en lien avec les conditions de leurs productions.

Notre étude repose principalement sur l'étude détaillée des différentes formes de raisonnements qui sous-tendent les procédures formulées par les élèves. Par la mise en œuvre de cette méthodologie nous souhaitons apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

En quoi les activités de reproduction des quadrilatères dans le méso-espace peuvent-elles être efficaces pour générer une grande variété de raisonnements reposant principalement sur les propriétés géométriques des quadrilatères ?

En quoi l'étude détaillée des raisonnements qui sous-tendent les procédures mises en œuvre et formulées par les élèves permet-elle d'identifier précisément les propriétés géométriques sous-jacentes mobilisées par les élèves ?

IV.3 La méthodologie mise en œuvre

L'étude a été menée dans une classe à double niveau correspondant aux cours moyens première et deuxième année (élèves de 9-11 ans). L'enseignant s'est porté volontaire pour l'expérimentation, il n'a pas de formation particulière dans le domaine des mathématiques. On peut par conséquent considérer que la situation se déroule dans une classe « ordinaire ».

➤ Instrumentation

Afin de déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage dans le méso-espace favorise l'élaboration de raisonnements pertinents à partir de connaissances spatio-géométriques, nous avons procédé à l'étude clinique d'une séance de classe au cours de laquelle les élèves ont été mis en présence d'une situation adidactique dans le méso-espace.

➤ La séance objet d'étude

Ainsi la situation retenue est une situation de reproduction de losanges de dimensions variées découpés dans un papier résistant et souple. (tableau IV.1)

Losange	1	2	3	4	5	6
Mesure des côtés (en cm)	68	68	75	68	75	68
Mesure des angles aigus (en degré)	60	70	70	60	70	70

Tableau IV.1 Caractéristiques des losanges

La séance est structurée en trois temps : après une phase de dévolution de l'activité, les élèves sont mis en situation d'action pendant une vingtaine de minutes. Enfin ils sont regroupés pour valider leurs productions et formuler leurs procédures.

La consigne donnée aux élèves est : « Le travail que vous allez réaliser va se dérouler sous le préau. Vous allez travailler par groupes. Chaque groupe aura une figure géométrique qui sera collée sur le mur du préau. Il devra la reproduire sur le sol du préau le plus précisément possible. Vous aurez réussi si l'écart entre la figure modèle et la figure reproduite n'excède pas 1 cm. Chaque groupe devra tracer la figure dans la parcelle qui lui est réservée. Les figures à reproduire peuvent être détachées du mur mais ne doivent pas quitter l'espace initial délimité par des bancs.

Les instruments et outils mis à votre disposition sont : ficelle, ciseaux, un tasseau de bois de 2 m par groupe, équerres en carton, feutres, craies de différentes couleurs et brosses pour effacer.

Lors de la phase de formulation, à tour de rôle, chaque groupe présentera sa procédure à l'ensemble de la classe et au professeur. »

➤ Les données recueillies avant la mise en œuvre

Les données recueillies ont été explicitées dans (Gibel et Blanquart-Henry, 2017). Dans le cadre de cette expérimentation, nous avons collecté pour chacun des niveaux la progression et un cahier d'élève avec les évaluations correspondantes ainsi que les affichages temporaires ou permanents utilisés par l'enseignant.

➤ Déroulement envisagé

Après avoir rencontré l'enseignant, nous lui avons présenté la situation de reproduction de losanges dans le méso-espace. Il a choisi d'intégrer cette séance dans sa progression, fin mai. Les quadrilatères ayant été étudiés, par le biais d'activités proposées dans le micro-espace, en milieu d'année scolaire et la symétrie axiale juste avant.

Nous avons fourni à l'enseignant le matériel nécessaire à la mise en œuvre de la séquence, puis il a préparé seul son projet de séance. De notre côté nous avons effectué une analyse *a priori* de la situation en tenant compte du répertoire didactique de la classe. Cette analyse *a priori* que nous présentons dans le paragraphe suivant comporte les réponses attendues, les procédures envisagées puis présente une analyse didactique de la séance.

➤ Analyse a priori de la situation

L'analyse a priori détaillée de cette séquence a été publiée dans le cadre de l'article (Gibel et Blanquart-Henry, 2017).

Sur le plan mathématique, la réponse attendue est la vérification de la nature de la figure modèle puis l'organisation des prises d'informations et des tracés pour aboutir à la réalisation de la figure demandée, conformément au contrat didactique. Cette phase doit être suivie de la formulation des étapes de construction avec l'explicitation et la justification des procédures utilisées. Pour chacune de ces parties nous allons détailler les procédures attendues, construites à partir du répertoire didactique de la classe.

Pour comparer ou reporter des longueurs les élèves pourront utiliser la ficelle, le tasseau ou plier la figure. En particulier pour vérifier la nature de la figure, les élèves pourront s'assurer de l'égalité de longueur des côtés du quadrilatère à l'aide de la ficelle, du tasseau ou d'un double pliage. S'ils éprouvent la nécessité de reporter un angle, les équerres en carton pourront servir à la fabrication d'un gabarit d'angle. La détermination du milieu des diagonales pourra se faire par pliage de la figure modèle, tracé de ses diagonales ou utilisation

de la ficelle pliée en deux. En ce qui concerne l'organisation du tracé, nous classerons les procédures envisageables en trois classes suivant les propriétés de la figure mobilisées. Le premier type de procédure utilise en acte les propriétés des diagonales d'un losange. Sont successivement tracés, une diagonale et son milieu, la deuxième diagonale perpendiculaire à la première et de même milieu, puis les côtés du losange.


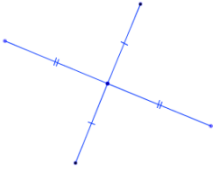
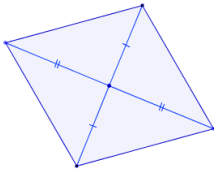
Etape 1	Etape 2	Etape 3
		

Tableau IV.2 procédure 1 (Gibel et Blanquart-Henry, 2017)

La seconde procédure se base sur la décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base puis le report de longueurs et/ou d'un angle. Après le tracé d'une diagonale, un triangle est construit en utilisant la ficelle pour reporter les longueurs, ou un gabarit d'angle pour reporter un angle. Dans le cas d'un losange dont les angles aigus ont pour mesure 60° , le losange pourra être décomposé en deux triangles équilatéraux ayant un côté commun.


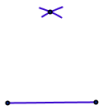
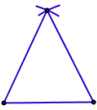
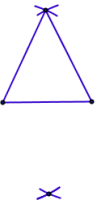
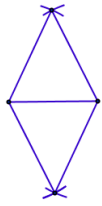

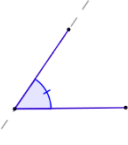
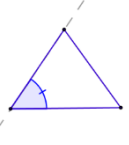
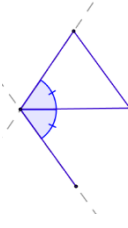
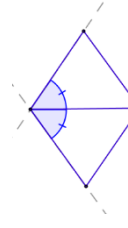
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
Procédure 2				
				
Procédure 2-bis				
				

Tableau IV.3 procédures 2 et 2bis (Gibel et Blanquart-Henry, 2017)

Enfin, dans la troisième procédure le losange est décomposé en quatre triangles rectangles.

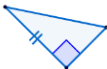
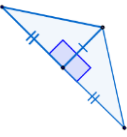
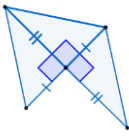
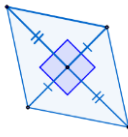
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4
			

Tableau IV.4 Procédure 3 (Gibel et(Blanquart- Henry, 2017)

Les procédures envisagées étant explicitées, nous allons maintenant procéder à une analyse didactique de la séance. Après avoir précisé le type de situation auquel correspond chaque phase, nous listerons les variables didactiques puis expliciterons le scénario élaboré avant d’aborder les difficultés prévues et les aides envisagés pour finir par la validation des productions.

Les élèves sont confrontés initialement à une situation d’action permettant différents niveaux de rétroaction, puis lors de la mise en commun à une situation de communication visant à formuler la démarche de réalisation.

Les principales variables didactiques explicitées dans (Gibel et Blanquart-Henry, 2017) sont : les dimensions des losanges à reproduire (longueur des côtés et mesure des angles), les outils mis à disposition des élèves et en particulier le rapport entre la longueur des tasseaux et la longueur des diagonales ainsi que le type de gabarit d’angle droit fourni (équerre cassée, feuille de papier à plier...), la nature du support qui permet ou non d’avoir recours à une procédure de pliage. La présence ou non d’une trace de pli initiale pour représenter un axe de symétrie sur les figures à reproduire peut aussi influencer sur les procédures produites. Dans nos expérimentations nous avons fait le choix d’une matière qui permet d’effectuer des pliages et d’en conserver la trace.

Dans le déroulement envisagé les élèves travaillent en groupes hétérogènes, de 3 à 4 élèves comportant des élèves des deux niveaux. La dévolution de l’activité se déroule en classe. Le maître donne la consigne, la fait reformuler et présente le matériel qui n’est pas familier en le nommant (les tasseaux). Il précise la composition des groupes qui est affichée au tableau. Puis les élèves sont répartis par groupes sous le préau pour une mise en situation d’action. Chaque groupe prend connaissance de la figure à reproduire et de l’espace attribué à cet effet. Les instruments et outils sont mis à disposition de tous les élèves. Après reformulation de la consigne, les groupes sont mis en activité pour une durée de 20 minutes. Suit la phase de mise en commun et validation. Dans cette phase, chaque groupe présente son tracé à

l'ensemble de la classe et explicite sa démarche en précisant les étapes de construction et les outils utilisés. Le groupe valide ensuite sa production en superposant la figure modèle à son tracé. Si l'écart entre la figure modèle et le tracé réalisé est inférieur à 1 cm alors la production est déclarée valide par l'ensemble de la classe. La séance se termine par une institutionnalisation. De retour dans la classe, une synthèse est faite des différentes procédures utilisées et du rôle de chaque outil.

Les difficultés majeures, auxquelles les élèves sont susceptibles d'être confrontés sont : l'usage des outils, le maniement des tasseaux, la gestion des repères sur le tasseau (oubli de l'origine, confusion entre les différentes marques inscrites sur le tasseau), le manque de précision dans le report des longueurs, en particulier lors de l'usage de la ficelle.

Enfin, les connaissances acquises dans le micro-espace ne seront peut-être pas transférées dans ce nouvel espace.

➤ Déroulement effectif

Immédiatement après la séance, en recoupant nos observations avec les enregistrements effectués par les deux caméras pendant la phase d'action, nous avons recensé les procédures mises en œuvre par chaque groupe ainsi que le matériel utilisé.

Nous avons ensuite analysé les films enregistrés pendant la phase de formulation. Nous avons complété la transcription des dialogues par la description des gestes porteurs d'une signification en lien avec les mathématiques, les « gestes mathématiques » (Petitfour, 2015). Pour finir nous avons choisi de compléter les transcriptions par des images, extraites des vidéos, illustrant les gestes mathématiques les plus significatifs.

➤ Méthode d'analyse des données

Nous allons dans ce paragraphe formuler les spécificités du répertoire de représentation dans le domaine de la géométrie en vue de préciser sa définition.

Le répertoire de représentation, défini précisément dans le premier chapitre de cette note, peut être assimilé à la dimension sémiotique du répertoire didactique. Cette dimension sémiotique joue un rôle déterminant afin d'étudier la mise en œuvre et l'évolution des connaissances spatio-géométriques de l'élève en situation d'enseignement/apprentissage. Ces éléments, d'ordre sémiotiques, permettent au chercheur de rendre compte des comportements, des démarches, des décisions et des actions effectives des élèves confrontés à des situations didactiques. Autrement dit, ces éléments reflètent les connaissances des élèves mobilisés en situation d'apprentissage.

D'après Berthelot et Salin (1992, p. 41) les représentations symboliques de l'espace, éléments du répertoire de représentation, relèvent de trois catégories. En premier lieu, ces représentations peuvent être langagières ; elles se traduisent sous la forme d'un énoncé écrit ou oral. Parmi elles, on distingue les formulations qui relèvent du langage spatial et celles qui sont issues du langage géométrique spécifique. Les représentations infra-langagières constituent la deuxième catégorie ; elles sont liées à l'utilisation d'une gestuelle « permettant de communiquer des informations spatiales en simulant corporellement des mouvements. » (Berthelot et Salin, *ibidem*). Pour finir les représentations spatiales offrent la possibilité d'une mise en correspondance *analogique* avec le milieu de référence comme les dessins, les schémas, les croquis, les pliages par exemple pour produire un gabarit d'angle.

➤ Les raisonnements attendus selon les niveaux de milieu

Le tableau II.1, présenté au chapitre 2 de cette note, résume les niveaux de milieux du milieu didactique au milieu matériel – correspondants à la situation expérimentale. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition de différentes formes de raisonnement dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique. En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

Dans le chapitre II, nous avons émis l'hypothèse que plusieurs étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour justifier la validité des méthodes et établir le caractère de nécessité des propriétés utilisées plus ou moins implicitement. En situation d'apprentissage, les interventions de l'enseignant sont destinées à maintenir le caractère adidactique de la situation.

Pour analyser les raisonnements produits par les élèves lors de la séance étudiée, nous nous appuyerons sur l'analyse *a priori* réalisée précédemment ainsi que sur le déroulement prévu. Ce dernier est basé initialement sur la confrontation des élèves au milieu heuristique (situation d'action) et ensuite, lors de la phase de mise en commun, sur la formulation et la justification des procédures mises en œuvre (milieu de référence). Il s'agit là d'une confrontation au milieu de référence. Nous nous attacherons tout particulièrement à analyser les raisonnements produits dans le milieu objectif et le milieu de référence, pour mettre en évidence les formes et les fonctions des raisonnements élaborés par les élèves.

Nous analyserons, pour chaque niveau de milieu, d'une part les fonctions des raisonnements, d'autre part les connaissances et les savoirs mobilisés en identifiant les répertoires correspondants.

L'analyse détaillée de différents épisodes sera facilitée par l'utilisation du tableau IV-5 ci-dessous permettant ainsi d'anticiper sur la forme, la nature et la fonction des raisonnements.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	<p>R1.1 SEM</p> <ul style="list-style-type: none"> - intuition - conjectures ponctuelles - prise d'informations - identification de caractéristiques (propriétés des milieux, symétrie(s), angles droits, égalité de longueurs, égalité de mesures d'angles) - décision du choix d'instruments pour reproduire et construire (des objets géométriques non matérialisés initialement : angles, diagonales) - procédés de construction - interprétation des rétro-actions 	<p>R1.2 SEM/SYNT</p> <ul style="list-style-type: none"> - formulation d'une caractéristique et sa validation par une preuve pragmatique. - Explicitation de l'organisation des tâches (raisonnement d'organisation) - Justifications explicites ou en partie implicites des tracés en lien avec les propriétés et les caractéristiques de la figure. -Formulation et interprétation des niveaux de rétro-actions 	<p>R1.3 SYNT</p> <ul style="list-style-type: none"> - Explications, justifications visant à définir les propriétés mathématiques qui sous-tendent et justifient le raisonnement pour une classe de forme
Niveaux d'utilisation des signes	<p>R2.1 SEM</p> <p>Icônes ou indices dépendants du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,...)</p> <p>Infralangagier</p>	<p>R2.2 SEM/SYNT</p> <p>Indices de la mise en œuvre de propriétés.</p> <p>Symboles-arguments « locaux » ou génériques.</p>	<p>R2.3 SYNT</p> <p>Symboles-arguments formels</p>

Usage et actualisation du répertoire didactique	<p>R3.1 SYNT/SEM</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique 	<p>R3.2 SEM/SYNT</p> <p>Procédures conduisant à un enrichissement du répertoire</p> <p>Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire.</p>	<p>R3.3 SYNT</p> <p>Institutionnalisation de procédures</p> <p>Formulation de preuves syntaxiques.</p>
---	--	---	--

Tableau IV.5 Modèle milieux/répertoires/symboles (Gibel et Blanquart-Henry, 2017)

IV.4 Les principaux résultats

➤ Analyse des procédures

Dans (Gibel et Blanquart-Henry, 2017), nous avons analysé précisément, pour chaque groupe, la démarche utilisée lors de la phase de reproduction des quadrilatères. Dans ce même article, nous rendons compte de façon détaillée, des instruments utilisés, des informations prises en situation d'action, des raisonnements et des décisions observées ainsi que des connaissances et savoirs mobilisés lors de la confrontation au milieu heuristique (milieu objectif).

L'analyse globale met en évidence la richesse des procédures mises en œuvre conformément à l'analyse *a priori*. L'ensemble des reproductions effectuées reposent sur des raisonnements adéquats basés sur les propriétés géométriques (valides) ; seule l'une des productions, celle du groupe 5, ne satisfait pas au contrat didactique, en présentant un écart de plus de 1 cm entre la figure modèle et la figure reproduite. Cet écart est dû à une erreur de mesurage dont l'origine est liée à une difficulté de manipulation des tasseaux lors de la prise d'information sur les mesures initiales de la petite demi-diagonale.

L'analyse rend compte de la richesse des raisonnements produits et met en évidence la variété des connaissances et des savoirs mobilisés en situation d'action. Nous proposons une analyse détaillée basée d'une part sur les transcriptions des échanges, d'autre part sur l'analyse de photos extraites de la vidéo pour tenir compte de la dimension infra-langagière. Dans le cadre de cette note de synthèse, nous présenterons ce travail d'analyse uniquement pour le groupe 6 et pour certains épisodes dont la nature des démarches, des procédures et des formulations nous paraît particulièrement représentative des travaux des différents groupes.

La procédure du groupe 6 telle qu'analysée ci-dessous est à rapprocher de la procédure n°1 envisagée et décrite dans l'analyse *a priori* et dont les étapes sont basées sur la construction des diagonales.

➤ Analyse de certains épisodes relatifs à la formulation de la procédure du groupe 6
 Dans la figure construite au sol par le groupe 6 (figure n°5, en référence au tableau IV.1) les sommets sont nommés ABCD et les diagonales sont tracées. Les élèves ont écrit *losange* à côté de la figure. Le procédé de construction est correct et la figure sera validée, mais l'angle de prise de vue fait que, sur la photographie, l'image est déformée par rapport à la réalité.

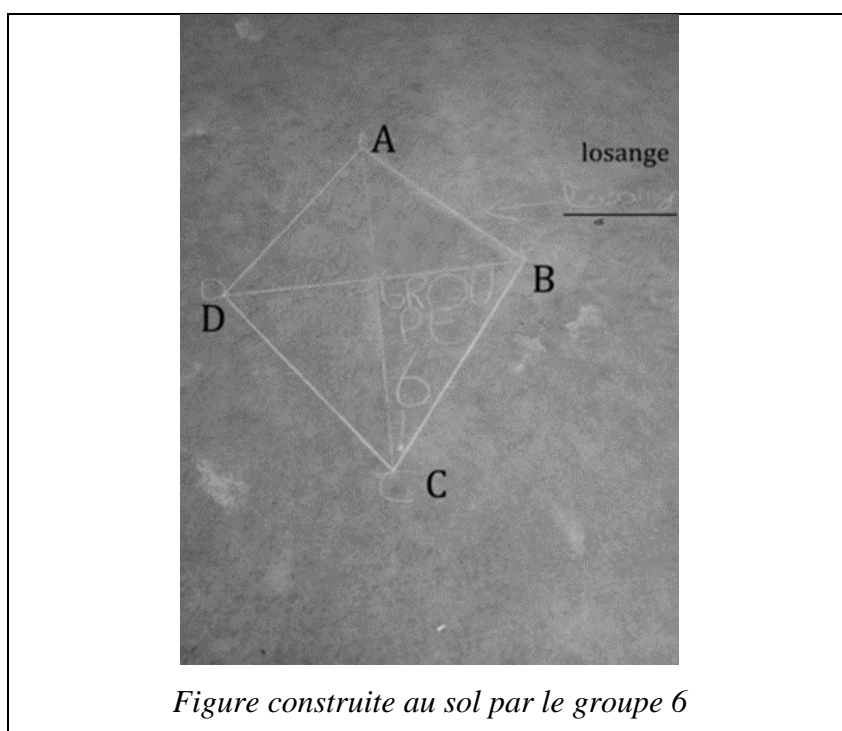


Figure construite au sol par le groupe 6

Figure IV.1 Tracé au sol de la figure réalisée

La présentation de son travail par le groupe 6 peut se décomposer en plusieurs épisodes. Nous les analyserons successivement, à l'aide du modèle d'analyse des raisonnements, comme présenté dans (Gibel et Blanquart, 2017).

L'épisode 1 est retranscrit ci-dessous.

	Texte	Commentaire
	P désigne le professeur; G et J des élèves.	
6.1	P : Vous pouvez nous expliquer un peu comment vous avez fait pour construire cette figure ?	

6.2.a	J : Ben on a déjà commencé par mesurer, une droite, sur la feuille.	<i>L'élève est debout, il montre le modèle au loin.</i>
6.2.b	On a fait une, une marque et après on savait que tous les autres côtés étaient de la même longueur.	<i>Montre la figure au sol, fait un geste de la main pour désigner les différents côtés.</i>
6.3	P: tu marques, tu montres avec ton doigt, s'il te plaît, ce que tu, ce que tu as mesuré.	
6.4.a	J : Ben le côté [AB]	<i>Se met à genou et montre le côté de A à B puis de B à A.</i>
6.4.b	Après on savait que tous les autres faisaient la même longueur.	<i>Fais un geste circulaire pour désigner les autres côtés.</i>

Tableau IV.6

Nous allons à présent effectuer l'analyse de cet épisode.

À la demande de l'enseignant, les élèves explicitent leur démarche. Un élève, que nous nommerons Julien désignée par la lettre (J), prend la parole.

Du point de vue des raisonnements produits, les élèves, confrontés au milieu objectif ont émis implicitement une conjecture : la figure à reproduire est un losange, ses quatre côtés ont même mesure. Afin d'éprouver la validité de leur conjecture, ils procèdent à une comparaison des mesures des segments.

Du point de vue du raisonnement, les élèves ayant établi l'égalité des mesures ont conclu que la figure à reproduire est un losange. Le fait qu'ils aient écrit le terme « losange » tend à confirmer la validité de notre analyse.




Du point de vue de l'analyse des signes, les élèves ont mesuré un côté de la figure modèle à l'aide du tasseau. Ils ont fait coïncider une extrémité du tasseau avec un sommet de la figure et porté une marque à la craie, sur le tasseau, correspondant à l'extrémité du segment. Ils ont ensuite reporté le segment tracé sur chaque côté de la figure modèle, comme en témoigne le mouvement circulaire, effectué par Julien.

Concernant les connaissances mobilisées, les élèves ont utilisé une propriété du répertoire didactique de la classe : la caractérisation du losange par l'égalité des mesures de ses côtés.

L'épisode ci-dessous s'inscrit dans la continuité de l'épisode précédents. Il est à noter que l'enseignant a demandé aux élèves d'aller chercher leur figure modèle ainsi que les

instruments qu'ils ont utilisés en vue d'illustrer leurs explications et de faciliter la compréhension de la procédure mise en œuvre.

L'enseignant leur demande alors de reprendre la formulation de leur procédure.

	Texte	Commentaire	
6.6 1 min 34s	P : Qui veut commencer là. A expliquer là, à part Jacques ? Gabriel, tu veux commencer ? Vas-y ? Par quoi vous avez commencé alors ?	<i>Jacques pose le modèle à côté de la reproduction.</i>	
6.7.a.	G : Et ben on a commencé à mesurer heu cette diagonale.	<i>Montre, sur la figure modèle, la diagonale (petite diagonale) initialement matérialisée par le pli.</i>	
6.7.b	P : Oui		
6.7.c	G : après, on a... mis un point.	<i>L'élève désigne le centre du losange sur la figure modèle.</i>	
6.8	P : le milieu, alors, comment tu l'as trouvé le milieu ?		
6.9	G : Et ben ...on a fait heu... on a mesuré la diagonale heu ...	<i>Montre la grande diagonale.</i>	
6.10	P : Vous avez pris un tasseau.	<i>Jacques va chercher un tasseau.</i>	
6.11	G : Oui.	<i>Jacques et Gabriel placent le tasseau le long de la grande diagonale du modèle.</i>	
6.12.a	P : Vous l'avez placé sur sur les ? sur quoi ? sur les ?	<i>Les élèves déplacent le tasseau pour faire coïncider une extrémité du tasseau avec un sommet du modèle.</i>	
6.12.b	P : Sur les sommets.		
6.12.c	G : sur les sommets.		
6.12.d	P : D'accord.		
6.12.e 2 min 15s	J : Ben, et après on a vu où était l'intersection.	<i>Jacques montre l'intersection du pli et du tasseau qui matérialise l'intersection des deux diagonales.</i>	
6.12.f	P : D'accord		

6.12.g	J : pour les deux... les deux diagonales.	
6.12.h	On a mis un point et on a mis aussi, [...] on a mis un point à sur heu ...sur le tasseau.	Ceci traduit le repérage et le tracé du centre du losange.

Tableau IV.7

Explicitons l'analyse de l'épisode précédent.

Du point de vue des raisonnements, l'élève Gabriel formule des explications visant à justifier les moyens mis en œuvre afin de reporter sur le tasseau respectivement la mesure de la grande diagonale, la mesure de la petite diagonale et les mesures des demi-diagonales. On se situe ici au niveau du milieu objectif car il s'agit simplement d'une dénotation des actions.

L'analyse sémiotique s'appuie sur les photos proposées ci-dessus, elle permet à partir des signes (matérialisation du pli correspondant à la grande diagonale sur la figure modèle, désignation des marques sur le tasseau correspondant respectivement aux mesures de la grande diagonale, de la petite diagonale et des demi-diagonales) d'étayer le discours de l'élève, corroborant ainsi les étapes de la procédure utilisée.

Nous présentons ci-dessous le quatrième et dernier épisode étudié.



<i>Présentation de l'épisode 4</i>		
	Texte	Commentaire
6.14.a	J : Et heu ... après on s'est aidé, on s'est aidé de l'équerre. Là on s'est aidé de l'équerre et	<i>Positionne l'équerre en carton, le long de la petite diagonale, à l'intersection des diagonales.</i>
6.14.b	Et on avait vu qu'il y avait un coin alors on a fait notre droite qu'on avait pas terminée	<i>Longe du doigt (de la main droite) un côté de l'angle droit de l'équerre.</i> 
6.14.c	Et après avec les marques qu'il y avait sur le tasseau on a pu continuer	<i>Effectue un geste de la main (gauche) dans le prolongement.</i>
6.14.d	De l'autre côté aussi	<i>Désigne la deuxième moitié de la grande diagonale.</i> 
6.14.e	Et après on a relié tous les sommets.	<i>Montre d'un geste circulaire le contour du losange tracé au sol.</i>

Tableau IV.8

Procédons à présent à l'étude de l'épisode précédent.

Du point de vue des raisonnements, l'élève met en évidence, par le recours au gabarit d'angle droit et par le report de la mesure de la demi-diagonale (associée à la grande diagonale) à

partir du milieu de la petite diagonale, sa capacité à mettre en œuvre la propriété caractéristique des diagonales d'un losange pour reproduire la figure modèle, sans cependant formuler explicitement la propriété utilisée. On se situe ici au niveau du milieu de référence car l'élève réfère à la nécessaire utilisation de l'équerre pour tracer un segment perpendiculaire à la petite diagonale et passant par le milieu, il justifie son action par le recours à un outil adéquat.

Du point de vue de l'analyse sémiotique, le fait qu'un élève soit allé chercher la figure-modèle, le tasseau et le gabarit d'angle droit, permet d'éclairer chacune des étapes de la construction et de mettre en évidence les difficultés rencontrées comme celle inhérente aux tracés des deux demi-diagonales associées à la grande diagonale.

Du point de vue des connaissances mobilisées, les élèves en formulant et en illustrant les étapes de leurs constructions ont donné à voir, par leurs décisions et leurs actions effectives, leur capacité à mettre en œuvre la propriété caractéristique des diagonales du losange.

Pour conclure, l'analyse de cette phase de formulation, par la mise en œuvre du modèle, met en lumière la démarche des groupes afin de réaliser cette tâche de reproduction d'une figure modèle dans le méso-espace. À chaque étape de construction, la prise d'information sur la figure modèle a nécessité différentes manipulations et une instrumentalisation des moyens mis à disposition (pliage, report de longueurs). Les élèves se sont ensuite interrogés quant à la construction effective de la figure, ils ont été conduits à effectuer des choix quant aux outils et à leur(s) usage(s).

De l'analyse de cet épisode, il ressort que la formulation des étapes de construction conduit les élèves à mettre en lumière de différentes manières (infra langagières, énoncés implicites ou semi-implicites) les propriétés géométriques sur lesquelles repose la construction réalisée. Au-delà de l'utilisation raisonnée des outils, l'analyse réalisée met en évidence des éléments particulièrement riches de la dialectique action-formulation (passage du milieu objectif au milieu de référence et réciproquement) et permet de rendre compte de la variété et de l'adéquation des propriétés géométriques mobilisées.

En offrant aux élèves la possibilité de se confronter à ce type de situation, qui entre dans le cadre de la problématique de modélisation, l'enseignant peut ainsi faciliter le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive.

IV.5 Conclusion

L'étude clinique de la séquence, permet d'établir la spécificité et la richesse, du point de vue des apprentissages spatiaux et géométriques, des activités de reproduction de figures géométriques dans le méso-espace. Notre étude contribue à illustrer, dans le cas de l'activité de reproduction de figure, la déclaration de Bloch et Salin (2004), qui indique que « dans le micro-espace, les tâches de tracé - droites, cercles- sont effectuées avec des instruments qui prennent en charge le travail et le contrôle sans que l'élève ait à investir des connaissances pour effectuer ou vérifier ; dans le méso-espace, dans la cour de récréation par exemple, le tracé d'une droite, d'un angle droit ou d'un cercle nécessite la mise en œuvre de connaissances géométriques ; de plus les bords de la feuille étant absents, les repères visuels qu'ils constituent ne peuvent plus jouer leur rôle à l'insu de l'élève ou du professeur. » (Bloch & Salin, 2004). Notre étude détaillée (Gibel et Blanquart-Henry, 2017) tend à établir que dans le cas des activités de reproduction de figures, pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie diffère dans chacun de ces espaces.

A travers l'analyse clinique d'une situation de reproduction de figures planes dans le méso-espace, mise en œuvre dans une classe de fin de primaire, nous avons cherché à déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations d'apprentissage adidactiques dans le méso-espace favorise l'élaboration de raisonnements variés et la construction de concepts géométriques. L'étude détaillée des raisonnements élaborés lors des phases d'action et de formulation a été rendue possible par la mise en œuvre de notre modèle d'analyse des raisonnements. Ce dernier a largement contribué à réaliser une étude approfondie des différentes formes de raisonnements, en privilégiant les trois dimensions de l'analyse : la fonction des raisonnements, la situation associée en lien avec le niveau de milieu correspondant et l'identification des connaissances en jeu, nécessitant dans certains cas le recours à une analyse sémiotique.

Nous avons ainsi montré que la construction d'un répertoire de connaissances et de savoirs dans le domaine spatio-géométrique requiert de faire vivre aux élèves des situations dans le méso-espace associant la prise de décisions, l'utilisation des instruments et la manipulation de figure (rotation, translation, pliage). Cependant il est nécessaire que la situation autorise des modes de contrôle des productions afin que l'élève puisse obtenir, suite à ses actions, des rétroactions significatives lui permettant de mesurer l'écart entre sa

réalisation et l'attendu. Celles-ci lui permettent alors de prendre conscience de la validité ou de la non validité de son raisonnement et éventuellement d'envisager la mise en œuvre d'une nouvelle procédure.

Nous avons mis en évidence que les phases d'action puis de formulation⁴⁷ des procédures contribuent à générer une dialectique action-formulation propice à une explicitation des connaissances et des savoirs géométriques qui sous-tendent les raisonnements des élèves. Cette dialectique peut constituer pour l'enseignant un support privilégié pour envisager un enrichissement du répertoire didactique de la classe. Les élèves, en formulant des justifications basées sur les propriétés des figures et en explicitant leurs procédures, dont le domaine de validité ne se limite pas à la figure-modèle (reproduite), sont ainsi conduits à s'« éloigner » du milieu (sensible) et conduits à formuler un raisonnement de nature géométrique. En effet comme l'indique Combier et Pressiat « c'est en demandant aux élèves de trouver une justification des techniques qui soit indépendante du milieu matériel que nous comptons faire émerger le besoin de géométrie théorique. » Combier et Pressiat (2003)

Les caractères de nécessité, du point de vue des propriétés qui justifient la validité de la procédure, et de généralité, du point de vue du domaine de validité de la procédure, jouent un rôle déterminant dans le processus d'entrée dans la géométrie hypothético-déductive.

La situation analysée offre ainsi la possibilité aux élèves de passer progressivement d'une géométrie instrumentée à une géométrie hypothético-déductive.

⁴⁷ La « formulation » diffère d'une simple verbalisation des actions, en effet elle repose sur des justifications de nature géométrique et intègre une prise en compte des conditions des actions qui ont été réalisées, comme décrit au chapitre 2 p.44.

Chapitre V. Application du modèle à une situation de validation dans le domaine de l'Analyse au secondaire

V.1. Introduction

La situation du flocon de Von Koch a été initialement proposée dans une publication de l'IREM de Poitiers (Gaud, Guichard, Parpay, Sicre et Chrétien 1996) comme étant adéquate pour une première introduction de la notion de limite. Dans sa thèse, Bloch (2000) a étudié sa mise en œuvre dans des classes de Première⁴⁸ scientifique. Les extraits présentés dans ce chapitre proviennent de ce corpus.⁴⁹

Cette situation a fait précédemment l'objet d'un travail de recherche visant à effectuer une analyse dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Bloch, 2000), (Bloch, 2006) en vue d'étudier plus précisément la dévolution des critères de définition d'une limite ainsi que les objets fonctionnels et le système de preuve de l'Analyse (S.P.A.). Cette situation a également fait l'objet en 2017 d'une publication⁵⁰.

Nous présentons dans ce chapitre une analyse complémentaire, détaillée dans Bloch et Gibel (2011), qui porte plus spécifiquement sur les formes et les fonctions des raisonnements utilisés par les élèves et par l'enseignant.

Cette situation revêt une importance particulière car elle nous a servi de « base » pour élaborer notre modèle d'analyse des raisonnements. Elle a joué un rôle déterminant dans sa

⁴⁸ Compte-tenu des programmes actuels cette séquence pourrait être proposée à des élèves de Terminale scientifique.

⁴⁹ L'intégralité du script des séances figure sur le site TEL, au lien suivant : http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf

⁵⁰ *Limites de suites réelles et fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.* Commission Inter-IREM Université. Bloch I., Bridoux S., Durand-Guerrier V., Grenier D., Frétygné P., Mac Aleese J., Madec G., Menini, C., Rogalski M., Sénéchaud P., Vandebrouck F.

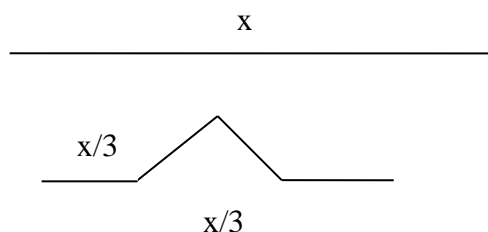
construction, en effet la présence de nombreux signes produits par les élèves et par l'enseignant, au cours des différentes phases de la séquence, nous a naturellement conduit à mettre en œuvre des moyens d'analyse sémiotique pour caractériser leur nature et leur fonction en vue de déterminer ceux qui étaient identifiables à des raisonnements.

Le tableau II.2 « Milieux/répertoires/symboles », présenté au chapitre 2, résulte de l'analyse *a priori* présentée dans ce chapitre en section V.2 et permet d'envisager une étude spécifique des raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant au cours de la séquence.

Nous présenterons de façon détaillée l'analyse de différents épisodes dans la section V.3 résultant de la mise en œuvre du modèle. Ces épisodes sont intéressants car ils donnent à voir le fonctionnement des connaissances des élèves en spécifiant le rôle du système organisateur.

V.2. La situation : enjeux, milieux, analyse a priori

La figure initiale est un triangle équilatéral que l'on transforme en coupant chaque segment en trois et en enlevant la partie centrale, que l'on remplace par deux segments de même longueur (à l'extérieur pour le flocon, à l'intérieur pour l'anti-flocon, cf. IREM de Poitiers,



1995).

Figure V.1. – Schéma de construction du flocon de Von Koch

Il résulte de la construction que le périmètre de la figure est multiplié à chaque étape par $4/3$.

La formule que l'on obtient pour le périmètre de la n -ième construction F_n donc :

$$P_n = P_0 \times (4/3)^n .$$

Pour l'aire de la figure F_n , compte tenu du fait qu'à chaque étape on ajoute 4^{n-1} triangles, chacun d'aire $1/9$ de l'aire des triangles précédents, on obtient finalement, après avoir sommé la série géométrique correspondante : $A_n = A_0 + A_0 [1 - (4/3)^n]$.

Cette situation est une situation à dimension adidactique confrontant les élèves à un objet fractal obtenu comme résultat du processus à l'infini, et dont on cherche à déterminer le périmètre et l'aire. Ces mesures ne peuvent s'obtenir qu'à l'issue d'une recherche de limite. L'enjeu de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée intuitive de ce processus de

calcul « à l'infini » ; cependant, ils ne pourront accéder seuls aux arguments mathématiques justifiant la limite. Le professeur devra donc intervenir pour donner des éléments de justification acceptables à ce moment-là par la classe. L'ensemble du travail se déroule sur trois séances de deux heures, sur un temps total d'une semaine et demie. Le travail en groupes permet l'homogénéisation des procédures et la diffusion des stratégies dans la classe.

Le but de la situation est de faire calculer, par les élèves, le périmètre et l'aire du flocon : comme il s'agit d'un fractal, c'est-à-dire d'une figure imaginaire obtenue à l'issue d'un processus infini, nous faisons l'hypothèse que la situation va confronter les élèves à l'idée de limite ; de plus, nous tablons sur le fait que les élèves percevront la nécessité de critères pour distinguer les différentes sortes de limites, car le flocon a un périmètre infini et une aire finie. La situation prévoit l'introduction de la notion de limite à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à un objet géométrique : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans un milieu matériel qui permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural pour la dévolution du problème. Les éléments d'argumentation devront cependant être fournis en partie par le professeur dans un épisode didactique, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite, infinie ou non. En ce sens il s'agit d'une situation à *dimension adidactique* (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

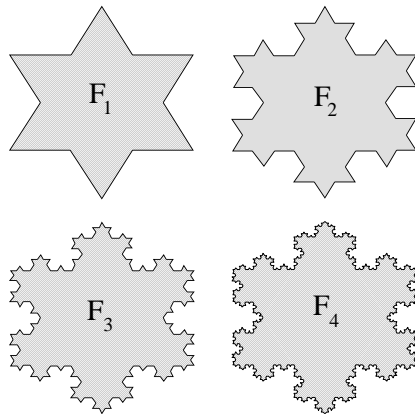


Figure V.2. – Etapes F1 à F4 du flocon de Von Koch

S₃ La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

Le milieu matériel est donc constitué par les figures F_0 , F_1 , F_2 , F_3 et F_4 , qui ont été construites chez eux par les élèves. L'enseignant a tracé la figure initiale F_0 , qui est un triangle équilatéral, et leur a communiqué, sous la forme du schéma (Figure V.1), la règle de transformation pour obtenir la figure F_{n+1} à partir de la figure F_n .

S₂ La situation de référence : Sujet agissant et milieu objectif

Le milieu objectif est constitué de l'ensemble des figures F_n (n quelconque) résultant de la construction des générations successives de figures par la mise en œuvre de la règle décrite précédemment. Ces figures fonctionnent alors comme un indice – au sens peircien – de la figure ‘finale’ F_∞ (F ‘infinie’) ; cet indice est un appui fort pour la dévolution du problème. En effet, cette représentation permet de visualiser (d'imaginer) le flocon final et d'anticiper la tâche de calculer son périmètre et son aire.

Les actions du sujet agissant sur le milieu objectif ont pour objet :

- d'une part de calculer le périmètre et l'aire des cinq premières figures que les élèves ont construites F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 ;
- d'autre part de déterminer, en fonction de n quelconque, les expressions algébriques du périmètre P_n et de l'aire A_n de la figure géométrique F_n . Ces expressions algébriques vont alors prendre le statut *d'argument* au niveau du milieu objectif, indiquant que le problème a une solution puisqu'un algorithme permet d'y accéder.

S₋₁ La situation d'apprentissage : Elève apprenant et milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des conjectures sur les limites des suites (A_n) et (P_n) . L'élève va produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve ou de réfutation de ces conjectures. Ils visent à apporter la preuve de la validité ou de la non-validité de la conjecture. Ils pourront vraisemblablement être de différentes natures :

- sémantiques : dans ce cas les élèves ont recours à une expérimentation numérique, et étudient, en calcul instrumenté, le comportement des suites (A_n) et (P_n) lorsque n devient ‘grand’.
- syntaxiques : les élèves ont recours au calcul algébrique afin d'étudier le comportement des suites (A_n) et (P_n) lorsque n devient ‘grand’. Ils commencent à élaborer un répertoire de décisions de limites (fonctionnement du système organisateur).

Lorsque les élèves auront recours au calcul instrumenté, il est probable que l'enseignante devra faire un apport de connaissances, sur le mode de la validation de l'Analyse. Pour cela elle devra effectuer le lien entre les résultats obtenus par le calcul instrumenté et les propriétés mathématiques des suites telles qu'elles peuvent et doivent être utilisées afin de produire une preuve ou une démonstration de la conjecture. Elle sera donc amenée à intervenir pour relancer la situation à un niveau où la question de la limite doit recevoir une réponse argumentée. De ce point de vue, cette intervention didactique permet de dévoluer la question

théorique de ce qu'est une limite, et nous pouvons considérer qu'elle relance une phase adidactique.

Nous avons identifié quelques questions et éléments de validation qui pourront être mis dans le milieu :

- si P_n dépasse la capacité de la calculatrice 'vers le haut', peut-il également dépasser n'importe quel nombre, et donc peut-on en déduire que : $\forall M > 0, \exists n_0 > 0 / \forall n > n_0, P_n > M$
- si les élèves observent, lors de l'expérimentation numérique instrumentée, que A_n se stabilise lorsque n grandit peut-on en déduire que l'aire devient constante? Sinon, le milieu matériel permet-il d'infirmer cette conjecture, et comment interpréter ce phénomène?

S_0 : la situation didactique

Le jeu relatif à l'étude de la limite de la suite (P_n) consiste à formuler une conjecture sur un nombre N , par exemple de la forme 10^p , qui puisse être dépassé par (P_n) , en formulant une condition sur n .

La recherche de la limite de la suite (A_n) est plus complexe : en effet les connaissances des élèves à ce stade ne leur permettent pas de raisonner directement sur une limite éventuelle de la suite (A_n) . Il faut d'abord que les élèves déterminent le terme général de cette suite et identifient ce qui dépend de n , $(4/9)^n$. Ceci nécessite qu'ils soient capables de mettre en évidence ce terme dans l'écriture algébrique de la suite (A_n) , ce que la situation ne garantit pas ; si ces connaissances sont défaillantes le professeur devra intervenir pour que l'ensemble des élèves disposent d'une formulation de la suite (A_n) dont le comportement, lorsque n tend vers l'infini, puisse être objet d'étude.

Les variables didactiques

La première figure F_0 est un triangle équilatéral de côté 18 cm : ainsi elle tient dans une feuille de papier millimétré format A4. Il en résulte que l'aire de F_0 (ainsi que de toutes les figures F_n et de F_∞) est un nombre irrationnel, ce qui est une valeur de variable didactique importante : si la valeur de l'aire avait été entière, les élèves auraient pu inférer cette valeur par un effet de contrat didactique. Ainsi par exemple si l'on trouvait 3,9999998 les élèves auraient pu être tentés de dire que cela donnait un résultat de 'presque 4'. Une valeur irrationnelle, ne pouvant se prêter à cette induction, est un levier pour une procédure argumentative de recherche de la limite.

Par ailleurs, le flocon offre un cas exceptionnel de figure de périmètre infini et d'aire finie : ces valeurs de variables didactiques sont décisives, car elles permettent de justifier que l'on ait besoin de critères pour discriminer les comportements respectifs des deux suites.

Le déroulement de la séquence

La séquence étudiée comporte trois séances en classe. Nous résumons la première et explicitons, pour les deux dernières, les différentes phases du déroulement en indiquant leur(s) fonction(s). Nous concentrerons ensuite nos analyses sur les phases correspondant au milieu de référence.⁵¹

Séance 1 : Elle correspond aux calculs sur les figures construites, et à l'établissement des formules algébriques du périmètre et de l'aire de F_n . Afin de dévoluer le problème et d'aider aux calculs, les élèves ont reçu le schéma (voir 3.1) explicitant la transformation faite lorsque l'on passe de n à $n+1$, avec ce commentaire :

"Chaque segment de longueur x se transforme en 4 nouveaux segments de longueur $x/3$."

Séance 2 : elle conduit à une exploration des valeurs prises par le périmètre et l'aire des figures F_n à l'aide de calculs instrumentés, dans le milieu objectif. On y trouve d'abord un rappel des formulations algébriques de A_n et P_n ; l'énoncé du problème. « Que deviennent A_n et P_n lorsqu'on itère le processus de construction de F_n indéfiniment? » qui conduit à la dévolution de la situation. Viennent ensuite les énoncés des premières conjectures relatives aux limites des suites (A_n) et (P_n) , les conclusions relatives aux calculs instrumentés de P_n et A_n ; un débat relatif à la croissance de la suite (A_n) et des énoncés de conjectures sur les suites (A_n) et (P_n) . Lors d'une phase didactique la professeure procède à l'explicitation des moyens disponibles pour valider les conjectures. Une situation de décision conduit alors au calcul sur des exemples génériques (Balacheff 1987) puis cas général.

Séance 3 Travail sur la suite (A_n) : établissement de sa limite. On met au point de la formule algébrique définitive, sur laquelle vont porter les calculs et conjectures.

La professeure fait ensuite le lien entre les méthodes utilisées pour l'établissement de la limite de la suite (P_n) et celle que l'on peut envisager pour l'étude de la suite (A_n) . Il y a identification

⁵¹ ⁵ L'intégralité du script des séances figure sur le site TEL, au lien suivant : http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf

de $(4/9)^n$ comme terme significatif de la suite, et du fait que la suite de terme général $(4/9)^n$ est décroissante, puis dévolution de la traduction syntaxique de la propriété : " $(4/9)^n$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ ". Il y a un recours au système organisateur, sollicité afin de faire une transposition du cas : « suite tendant vers l'infini » au cas : « suite tendant vers zéro ». De ce fait, la professeure sollicite un passage du sémantique au syntaxique.

Dans la formulation de la démarche à suivre pour trouver la limite de $(4/9)^n$, en s'inspirant de ce qui a été fait pour P_n , on observe un travail syntaxique pour prouver que l'on peut rendre $(4/9)^n$ plus petit que 10^{-p} . Le « sémantique » vient ensuite comme une connaissance de niveau II justifiant le calcul syntaxique. Enfin il s'agit de conclure sur la limite de $(4/9)^n$ puis de faire un retour rapide sur la limite de (A_n) , en utilisant implicitement l'algèbre des limites.

Les situations didactiques et adidactiques

L'enseignante attend des élèves qu'ils se posent la question de ce que deviennent l'aire et le périmètre de la suite des (F_n) . Les différents groupes produisent des raisonnements appuyés sur les ostensifs à leur disposition : figures, calculs... et les échangent entre eux. Remarquons que, dans les trois occurrences de fonctionnement de cette situation, les classes de procédures se sont révélées remarquablement stables (critère de reproductibilité).

L'enseignante vise un maintien de l'adidacticité de la situation et demande aux élèves de produire des raisonnements étayés. Les élèves doivent passer ainsi d'une phase de formulation, non argumentée, qui s'apparente à une conjecture, à une phase de décision qui s'appuie sur une justification mathématique de la validité ou de la non-validité d'une conjecture. Balacheff la définit ainsi :

« Dans le cas de séquences didactiques décrites par Gras (1983) (...), les élèves sont invités à anticiper, à prédire, ce que sera l'image d'une figure donnée. On se trouve alors dans ce que nous appellerons une situation de décision, elle demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite.

Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'information) peuvent être mises en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Eventuellement, en tant que mathématicien, nous reconnaitrons une organisation qui est de l'ordre de la démonstration, mais ici elle est dans le cas du fonctionnement du sujet un outil et non un objet. » (Balacheff, 1987, p.153)

Remarquons que cette fonction est mobilisée soit à l'initiative des élèves pour se convaincre, soit à l'initiative de l'enseignante : on l'observe par exemple lorsque l'enseignante a pour objectif de faire expliciter aux élèves les critères de validité sur les limites. Nous avons, à chaque fois que nécessaire, pointé les propositions vraies qui sont produites sans nécessairement avoir le statut d'une démonstration finalisée et mise en forme. Remarquons que les situations (à dimension) adidactiques sont riches en épisodes de ce type ; c'est aussi ce qui fait leur intérêt épistémologique, ainsi que le souligne très fortement Legrand (1997) pour les situations de débat scientifique. Elles mettent les élèves en situation de validation sur différentes configurations et avec des statuts variés, et leur permettent donc d'explorer de nombreuses facettes de l'activité de preuve.

V.3 Les raisonnements dans la situation du flocon

Dans ce paragraphe, nous analysons plusieurs épisodes de la séquence proposée selon les trois axes qui définissent notre modèle, ceci afin de mettre en évidence et d'explicitier les différents raisonnements produits par les élèves, et les régulations du professeur. Ces analyses ont été publiées dans (Bloch et Gibel, 2011). Elles permettent de mettre en lumière l'utilisation du modèle et de rendre compte de la pertinence des analyses didactiques produites.

Ces épisodes sont extraits des séances 2 et 3. Nous faisons référence aux numéros des interactions tels qu'ils y apparaissent. Pour faciliter le repérage du lecteur, nous retranscrivons certains passages, et effectuons une numérotation interne de l'interaction : (1), (2) ...

Séance 2 – Episode 1

Dans l'extrait suivant, l'enseignante commence par effectuer un rappel des formulations de A_n et P_n , obtenues lors de la séance précédente :

001 P : (1) Alors aujourd'hui, on va continuer en trois étapes ; d'abord, je vais faire un rappel, où on était arrivé hier sur le calcul de P_n et A_n : je vais rappeler la question qu'on s'était posée, puis, (2) vous allez essayer de répondre à cette question. (3) On fera un débat là-dessus.

Nature et fonction – Milieux :

M-2 : dévolution

(1) Présentation de la finalité de chacune des phases de la séance.

(2) Évocation de la mise en projet : appel à une prise de position.

(3) Évocation du projet de débat et du dispositif associé.

Signes et répertoire : L'enseignante explicite l'organisation de la séance afin de communiquer le projet de débat. Elle insiste sur une condition nécessaire à ce débat : chaque élève devra prendre position par rapport à la question objet d'étude.

001 P. : (1) Je rappelle où on en était pour P_n et A_n .

(2) Je vous demande de noter le débat, de noter les questions qu'on s'est posées, parce que ce qui va être important aujourd'hui comme souvent en mathématiques c'est les questions qu'on se pose.

(3) Pour P_n pas de difficulté, on était arrivé à : $P_n = P_0 (4/3)^n$

(4) Pour l'aire : on avait mis en facteur

$$A_n = A_0 + 3A_0 \left[\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^n} \right]$$

Pour bien me repérer dans cette somme, j'appelle les termes u_1, u_2, \dots, u_n ; ça va être

une suite géométrique mais c'est pratique de leur donner des noms pour ensuite bien écrire la raison et calculer.

(5) Tout le monde avait trouvé la raison...

Nature et fonction – Milieux :

(1) Lien avec la séance précédente

(2) Formulation de la spécificité du contrat didactique.

(3) Institutionnalisation de la formulation algébrique de P_n

(4) Formulation provisoire des termes afin de faciliter la poursuite du calcul.

(6) Interrogation portant sur la valeur de la raison de la suite géométrique (u_n), pour fédérer le groupe.

Signes et répertoire : L'enseignante souhaite insister sur l'importance à accorder aux formulations des questions objets d'étude. Elle souligne la nécessité de produire une formulation consistante de chacune des questions étudiées.

Explicitation de l'enjeu didactique et de connaissances d'ordre II : les questions en mathématiques et la dénotation (Sackur et al. 2005)

002 Es : 4/9

Nature et fonction – Milieux :

M-2 : La réponse de l'élève est idoine.

Signes et répertoire : La raison de la suite est désormais un élément du répertoire didactique de la classe.

003 P : (1) alors maintenant, j'applique la formule qui dit que le crochet ça va donc être égal à : premier terme, voilà, $1/9$, ensuite multiplié par 1 moins $4/9$ exposant n c'est le nombre de termes, puisqu'ils vont de 1 à n . Et sur 1 moins $4/9$; on avait dit $1 - 4/9 = 5/9$

Diviser par $5/9$ c'est multiplier par $9/5$ donc voilà :

$$A_0 + 3A_0 \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right]$$

Voilà ; les 9 se simplifient. On l'avait laissé comme ça.

Nature et fonction – Milieux :

M0 de la phase précédente / M-2 de la nouvelle situation (travail sur la suite A_n)

(1) Dénotation des calculs visant une formulation algébrique réduite de A_n .

L'enseignante formule et justifie les étapes du calcul, et elle institutionnalise l'expression algébrique simplifiée de la suite (A_n).

Signes et répertoire : La production de ces écritures algébriques est un enjeu majeur de la situation de référence et celles-ci appartiennent désormais au répertoire didactique de la classe. La justification des étapes du calcul doit favoriser les usages des énoncés en tant qu'éléments du système organisateur. La formule de (A_n) est alors un argument algébrique : R3.2 ou R3.3, un argument symbolique spécifique de l'Analyse sur lequel des hypothèses vont pouvoir être faites.

004 P : (1) Alors maintenant la question qu'on se pose : que deviennent P_n et A_n quand on a itéré le procédé "jusqu'à l'infini". (La question est écrite au tableau ; les élèves notent).

Nature et fonction – Milieux :

M-2 : Dévolution de la question relative aux comportements des suites (A_n) et (P_n) lorsque n tend vers l'infini.

(1) Formulation et écriture au tableau par l'E de la question mise à l'étude.

Signes et répertoire : La formulation "*itéré le procédé jusqu'à l'infini*" correspond ici à un *indice* de limite : R2.1

La formulation 'jusqu'à l'infini' peut introduire un effet de contrat didactique, et aurait pu être remplacée par 'indéfiniment'.

Séance 2 – Episode 2 - résumé

Cet épisode met en lumière l'explicitation du contrat didactique destiné à favoriser l'ouverture sur des registres différents. La professeure demande aux élèves de se positionner sur les moyens disponibles pour répondre à la question. Des élèves proposent de « donner des valeurs à n » (phase heuristique, niveau R21).

Séance 2 – Episode 3

Il s'agit d'une régulation introduisant le questionnement sur le domaine numérique de l'étude : pour quelles valeurs de n va-t-on pouvoir tester les calculs ? Remarquons qu'à ce niveau d'études (classe de Première S, et premier contact avec la notion de limite) il n'y a rien d'évident, pour les élèves, à ce que la formulation $n \rightarrow +\infty$ se traduise par : il peut être intéressant de calculer pour des 'grandes' valeurs de n (cf. aussi Bloch, Chiocca, Job & Schneider 2007).

016 P : (1) les valeurs qu'on prend, elles vont être en rapport avec la question qu'on se pose. (2) C'est quoi la question ?

Nature et fonction :

(1) Recentrage sur le projet de M-2, plus précisément sur la question objet d'étude ; demande de formulation du lien existant entre la question étudiée et le domaine numérique en adéquation

(2) Reformulation

Milieux, signes et répertoire : Cette régulation est nécessaire au maintien de l'adidacticité de la situation d'apprentissage.

Appel à des signes au moins indiciaires relatifs à la question à résoudre.

017 Flora : qu'est-ce que ça fait quand n est grand.

018 Jérôme : on va prendre des grandes valeurs alors...

Nature et fonction – Milieux :

M-2 : Reformulation, de la question et prise de position (décision) sur des valeurs "grandes".

Signes et répertoire : La reformulation de Flora ramène à une étude dans un intervalle dont les bornes sont ‘grandes’. Les élèves ne spécifient pas l’ordre de grandeur. R2.1 est cependant atteint.

Séance 2 – Episode 4

Cet épisode s’inscrit dans le débat sur la croissance de la suite (A_n) .

111 Frédéric : Si on prend la figure du fractal, on peut le mettre dans un hexagone, donc son aire, elle ne dépassera jamais celle de l’hexagone : on peut donner une limite ; en fait c’est borné.

112 Es : Pourquoi ça dépassera pas? (Exclamations) sur ta figure ça dépassera pas, mais pourquoi ça a une limite ? Voilà ! Donne-nous tes hypothèses! Quelle est l’origine de ton fondement? (rires)

Nature et fonction – Milieux :

M-2 : Raisonnement visant à établir que la suite (A_n) est bornée car la suite de figures (F_n) serait incluse dans l’hexagone (inscrit dans le cercle de rayon $6\sqrt{3}$ cm) : R1.1

La suite de figures est (selon sa déclaration) contenue dans l’hexagone.

Signes et répertoire : Frédéric se réfère au milieu objectif, constitué par la suite de figures (F_n) fonctionnant de façon iconique pour produire une conjecture basée sur une intuition géométrique, sans la moindre preuve. On peut noter la polysémie du terme ‘limite’ dans cet échange : limite comme ‘borne’ ou limite mathématique ; et la sémantique fournie par l’argument (non justifié) des aires.

Séance 2 – Episode 5

Cet épisode se réfère au débat sur la limite de la suite (A_n) .

121 Yaëlle : l’aire elle va toujours augmenter, jusqu’à l’infini elle prendra des valeurs, mais qui n’arriveront jamais à l’aire de l’hexagone, voilà.

Nature et fonction – Milieux :

Début de l’entrée dans M-1 : Raisonnement correspondant à la formulation d’une conjecture. Yaëlle distingue le rang de la suite, n , et la valeur de la suite (A_n) . La valeur de la suite (A_n) étant majorée par la valeur de l’aire de l’hexagone et ceci quel que soit le rang n .

Signes et répertoire : Raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : R1.2, R2.2

122 Sandra : oui voilà!

123 Yaëlle : ça rajoutera des décimales; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais.

Nature et fonction – Milieux :M-1

Raisonnement en relation avec le comportement de la suite (A_n) : R1.2

Yaëlle exprime que la suite (A_n) sera croissante mais que les valeurs ajoutées seront de plus en plus petites et que la suite tendra vers l'aire de l'hexagone.

Les nombres évoqués font désormais partie du milieu de référence, au lieu de rester cantonnés au milieu objectif.

Signes et répertoire : Son raisonnement repose sur sa représentation des nombres décimaux. Elle utilise son répertoire de représentation des nombres décimaux et les résultats du calcul instrumenté. Ceci lui permet de concevoir l'évolution de la suite (A_n) comme la modification des rangs successifs associés à la partie décimale de A_n . Il y a enrichissement du système organisateur : R3.2

Les nombres sont utilisés comme des arguments sur la façon d'approcher la limite : il s'agit d'*arguments topologiques* : R2.2

124 P : (1) c'est intéressant ce qu'elle dit Yaëlle, ça veut dire qu'on fait la distinction entre ce qui se passe pour n et ce qui se passe pour les valeurs de la suite.

(2) Et peut-être il se passe pas la même chose pour P_n et pour A_n . Parce que tout ce que j'entends, ça laisserait penser que le périmètre et l'aire ils augmentent forcément en même temps.

Nature et fonction – Milieux :

Renforcement de M-1

(1) L'enseignante institutionnalise la déclaration de Yaëlle après l'avoir reformulée en utilisant le vocabulaire adéquat : elle distingue le *rang* de la suite de la *valeur* du terme correspondant. Elle établit le comportement de la suite (A_n) telle que Yaëlle l'a décrit : le rang de la suite devient infini alors que la valeur de la suite croissante demeure finie.

Signes et répertoire : L'enseignante se saisit de la déclaration idoine de Yaëlle, qui repose sur des arguments sémantiques pour décrire le raisonnement syntaxique relatif au comportement asymptotique de la suite (A_n) .

L'enseignante a la volonté de modifier le système organisateur des élèves relatif aux nombres décimaux (Bloch, & al. 2007) : niveau R2.3

Séance 3 – Episode 1

En début de séance 3, l'enseignante rappelle les résultats obtenus à l'issue de la séance 2 : les élèves ont étudié, par le recours au calcul algébrique, le comportement de la suite (P_n) . Ils ont, dans un premier temps, effectué des calculs correspondant à des exemples génériques du type $P_n > 10^p$, puis ils ont établi le calcul algébrique dans le cas général. L'enseignante

institutionnalise le résultat obtenu la veille : P_n dépasse 10^p , en prenant :

$$n > \frac{p - \log 54}{\log \frac{4}{3}}$$

puis elle indique :

C'est ça la définition, c'est la preuve, qu'on peut donner, qu'une suite tend vers plus l'infini, c'est qu'on arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre, aussi grand qu'on veut.

Elle note la formule : $\lim P$

Nature et fonction – Milieux :

M0 Institutionnalisation d'une définition contextualisée de limite infinie de suite.

Signes et répertoire : Tous niveaux R1.3 (preuve 'algébrique'), R2.3 (arguments pouvant être réinvestis), R3.3 (éléments théoriques relatifs à la limite : définition donnée en langage formel et en langue naturelle)

Les élèves notent alors la formule et ce commentaire :

P_n non borné ; étant donné 10^p , p aussi grand qu'on veut : 'arbitrairement grand', P_n dépasse 10^p à condition que n soit assez grand.

Séance 3 – Episode 2

La professeure dévolue la recherche de la limite de A_n :

004 P : Voilà. On trouve $A_n = \frac{8}{5}A_0 - \frac{3}{5}A_0 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Pour P_n on a dit qu'il avait une limite infinie. Alors les questions qu'on s'était posées : est-ce que A_n est bornée ; est-ce que A_n « tend vers un nombre » ? A quoi est-ce que ça se verrait - étant donné qu'on a su le faire pour P_n qui tendait vers l'infini. Là vous

cherchez, chaque groupe met sur un papier : voilà ce qu'on pense et voilà comment on ferait pour le prouver. Ensuite on en discutera.

Nature et fonction – Milieux :

M-1 : Dévolution de l'analyse du comportement asymptotique de la suite (A_n) et demande de preuve des résultats avancés.

Signes et répertoire : La dévolution de la recherche de la limite de (A_n) repose clairement sur un appel de l'enseignante à utiliser cette institutionnalisation et à réinvestir la démarche utilisée pour la recherche de la limite de (P_n)

Les élèves commencent alors à se focaliser sur le terme $(4/9)^n$. Ce travail sur $(4/9)^n$ est ensuite repris et approfondi.

027 Florence : il faut regarder pour

Nature et fonction – Milieux :

M-1 Première identification du terme $(4/9)^n$ comme l'argument déterminant pour le comportement de la suite (A_n) . Les élèves anticipent la limite de ce terme comme devant être nulle. Il faut remarquer que le lien entre le milieu objectif des triangles qu'on ajoute, et le milieu de recherche de preuve, a été fait très tôt par Yaëlle (ci-dessus).

Signes et répertoire : Certains élèves sont déjà dans des jeux d'intérieur (syntaxiques) sur le calcul ultérieur de la limite de (A_n) : R2.3. Il s'ensuit, pour d'autres, un retour au milieu objectif numérique afin de montrer, grâce à la calculatrice, que $(4/9)^n$ devient 'petit'. (interactions 18 à 25)

Séance 3 – Episode 4

040 Sandra (va au tableau) : par exemple $(4/9)^n < 10^{-99}$

041 P Pourquoi ? Alors voilà, on a dit qu'on essayait de montrer que $(4/9)^n$ avait pour limite zéro, on va le rendre plus petit qu'un nombre très petit, par exemple que 10^{-99} .

042 Sandra : et on a trouvé n , et $n > 282$.

043 P : A ton avis Sandra, est-ce que ça ressemble à une des conditions qu'on avait trouvée pour le périmètre ?

044 Sandra : Oui, n augmente.

Nature et fonction – Milieux :

Calcul générique (au sens de Balacheff) qui va pouvoir ensuite être généralisé. C'est une première étape dans la démarche d'établissement de la preuve.

Signes et répertoire : Le réinvestissement du système organisateur s'effectue bien : les élèves distinguent le rang de la suite et la valeur de la suite.

L'intervention de Sandra est clairement de nature sémantique mais propose une conjecture étayée R1.2 ; elle renvoie à la logique de la recherche de limite : lorsqu'on essaie de rendre $(4/9)^n$ 'petit' on doit trouver que la variable augmente. Ici $n > 282$ est un indice de ce que le calcul 'se déroule bien' dans la logique de l'infini : R2.3

Séance 3 – Episode 5

047 Karine : Nous on a fait avec 10^{-p}

048 P : Ah oui, très bien. Le groupe de Karine, elles ont mis : $(4/9)^n < 10^{-p}$ où p est un entier positif bien sûr.

049 Laurent : Ca fait $n > -p/\log(4/9)$

050 Sylvain : Je comprends pas pourquoi on change le signe ($<$ devient $>$ dans la division).

051 Caroline : Mais $\log 4/9$ est négatif !

Nature et fonction (047) à (051) Milieux :

M0 Raisonnement R1.3. Formalisation de la preuve dans la théorie mathématique et généralisation.

L'intervention de Caroline sur le signe de $\log 4/9$ est également syntaxique, contrairement à l'intervention Nature et fonction (047) à (051) Milieux on précédente (n augmente) : elle explique la logique du calcul, qui, faisant diviser par un négatif, impose de trouver une condition du type : « n plus grand que... »

Signes et répertoire : Le recours au calcul générique n'est pas apparu comme nécessaire dans ce groupe. Les élèves ont transposé la preuve de la limite de (P_n) dans le cas nouveau qui est posé. La formule établie pour (P_n) se couple au système organisateur et le système obtenu permet de faire fonctionner directement une ébauche du système de preuve de l'analyse : R2.3 et R3.3

052 P : oui, Caroline, très bien, $\log 4/9 < 0$, voilà pourquoi ça change le sens de l'inégalité. Autrement dit est-ce qu'on est arrivé à une condition du même type que celle du périmètre ?

On est arrivé à prouver qu'on peut rendre $(4/9)^n$ aussi petit qu'on veut, plus petit que n'importe quel nombre de la forme 10^{-p} ; ça veut dire quoi, là ?

053 Laurent : ça veut dire que ça se rapproche de zéro.

Nature et fonction – Milieux :

M0 : Synthèse de la signification du calcul relativement à la question de départ sur la limite de $(4/9)^n$.

Raisonnement sur l'adéquation du calcul à la question posée.

Signes et répertoire : La professeure renforce la dimension sémantique en reprenant l'argument de Caroline et en insistant sur le fait que cela conduit à une condition 'du même type que celle du périmètre' pour n .

Les élèves montrent, par leurs réactions, qu'ils relient bien ce calcul à la nature de la limite :

R2.2

La conclusion de la séance est une synthèse qui utilise implicitement l'algèbre des limites pour conclure sur la limite de (A_n) .

Bilan de la situation du flocon

Durant ces séances, les élèves sont passés du milieu objectif heuristique (figures des premières étapes de la construction utilisée comme des signes iconiques) à un milieu de référence, les signes associés suivant eux aussi une progression ainsi que le répertoire de représentation, conformément aux axes du tableau. Les premiers calculs, peu assurés, sur des icônes du flocon, ont établi que la recherche de la limite d'une suite impliquait de considérer de 'grandes' valeurs de la variable (indice de limite), ce qui a été fait en calcul instrumenté ; puis, un milieu de référence a été construit, qui conduisait à comparer le terme général de la suite à des puissances de dix (début de preuve formelle de l'Analyse, symboles de limites). Pour le calcul de l'aire, l'identification du terme variable est une première étape indiciaire (« C'est la limite de $(4/9)^n$ qui détermine le comportement de la suite »), puis le même critère formel de comparaison aux puissances de dix, négatives cette fois-ci, conduit au résultat moyennant une utilisation implicite de l'algèbre des limites. Ce faisant, le répertoire des élèves a inclus des éléments formels plus complexes que les signes algébriques (assertions de type 'pour tout p on peut trouver n tel que') qui sont des *arguments* de calcul analytique. Il a inclus aussi des représentations figuratives de ce que peut être une suite de limite infinie ou finie, ce qui est d'un intérêt incontestable pour leur apprentissage de l'Analyse : les

symboles formels ne sont supérieurs aux icônes que lorsque l'on a appris à se passer de ces dernières.

V.4 Le modèle et la structure des raisonnements analysés

La situation du flocon permet d'aborder la notion de limite sans que cette notion ne soit introduite auparavant par ostension. En ce sens elle est bien porteuse d'une dimension adidactique significative (malgré ses moments didactiques inévitables), de sorte qu'elle puisse ensuite prendre une place dans le système organisateur du répertoire de représentation des élèves.

Remarquons que la dévolution de la recherche des limites de l'aire et du périmètre du flocon s'effectue par paliers, et qu'à chaque palier correspondent des étapes de calcul, des étapes sémiotiques, et des étapes de raisonnements. Ainsi, au départ l'aire et le périmètre sont calculés d'abord en calcul posé, puis en calcul instrumenté ; lors de la prise de conscience de la limitation de ce dernier, on passe à des conjectures sur des formules algébriques. Les formulations correspondantes passent de « on prend n grand », à des résultats de calcul instrumenté où « n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut », même si l'on est limité par la calculatrice ; et P_n dépasse 10^{99} . Le calcul de A_n 'bloquant' plus rapidement, le calcul algébrique prendra la suite ; mais on aura pu voir les nombres figurant dans la phase de conjectures prendre successivement le statut *d'indice* du comportement des suites, puis d'argument (*symbole*) de ce que ce comportement doit être modélisé par des règles spécifiques. Dans ces étapes nous pouvons reconnaître le fonctionnement du système organisateur. La structure ainsi mise en évidence peut se déduire du tableau du II.2 ; elle peut aussi se schématiser de la façon suivante :

1.M-2 : Calculs et moyens heuristiques (icônes ou indices)

2.M-1 : Enrichissement des énoncés, arguments génériques (indices), conjectures, passage au syntaxique

3.Décisions étayées, ostensifs organisés, arguments symboliques.

En termes de milieux et variables didactiques, nous avons repéré l'importance, non seulement de la présence conjointe d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite tendant vers une limite finie, mais de la recherche d'une formule de *suite* géométrique et de *série* géométrique. Une série permet en effet de garder la mémoire du terme précédent dans l'ajout des petits triangles, ce qui autorise la visualisation de l'évolution de la figure. Le travail est alors ancré dans les

constructions de départ du milieu objectif et permet les allers-retours dans les milieux, allers-retours signalés dans (Bloch 1999).

Dans cette situation, les élèves ont la possibilité de travailler dans des registres différents, qui supportent chacun des procédures complémentaires et susceptibles d'offrir des liens logiques au raisonnement.

Comme nous l'avons indiqué dans (Bloch et Gibel, 2011), les élèves peuvent ainsi mettre en œuvre des contrôles de compatibilité des différentes conjectures et preuves produites.

« La disponibilité des registres est suffisante pour que les jeux entre le syntaxique et la sémantique soient présents : les jeux d'extérieur (les recours à des argumentations d'ordre sémantique) se basent sur des connaissances des registres numérique, graphique, géométrique, connaissances étroitement liées au répertoire de représentation des élèves. De façon prévisible, les jeux d'intérieur (le calcul syntaxique) relèvent ici, quant à eux, quasi exclusivement du registre algébrique. En effet le registre des preuves de l'Analyse ne peut être disponible à ce moment d'introduction. On peut seulement observer que la structure syntaxique du raisonnement relatif à (P_n) est reprise, en l'adaptant, par certains élèves lors de la recherche de la limite de (A_n) . » (Bloch et Gibel, 2011)

Par ailleurs, l'analyse de la situation donne à voir le fonctionnement du système organisateur au sein des différents groupes : en effet, les élèves utilisent manifestement des connaissances antérieures (formules de la somme de n termes d'une suite géométrique, conception des décimaux et de la suite des décimales, idée de ce que peut être une fonction de variable n , transposition des raisonnements établis pour (P_n) afin d'étudier (A_n) et sont capables de les organiser et de les utiliser à des fins de décision et de déduction, intégrant ainsi la dimension de généralisation que nous avons mentionnée au chapitre II. Les connaissances mobilisées dans la situation sont manifestement elles-mêmes remises en jeu dans le système organisateur. Dans la séance 2, trois comportements possibles de suites sont possibles et sont évoqués par certains élèves : suite croissante bornée ou non (la suite (P_n) est à un moment supposée bornée par la moitié des élèves), suite croissante bornée (ce qui les déstabilise car le comportement est peu visible sur la calculatrice) ou suite décroissante minorée (évoquée dans la discussion sur l'aire et le périmètre).

V.4 Conclusion

Le modèle nous a permis d'analyser les raisonnements comme étant des réactivations mais aussi des confrontations de connaissances, le tout se traduisant en situation par des énoncés

et des représentations⁵². Pour cela nous nous sommes appuyés à la fois sur la notion de milieu, de répertoire de représentation, et de niveau sémiotique. Ce que nous avons mis en évidence, c'est la progression des énoncés, conjectures, décisions, signes associés, et l'intégration, dans le système organisateur, d'éléments syntaxiques caractéristiques de l'Analyse.

La dimension adidactique apparaît comme nécessaire à la production autonome de raisonnements des élèves. Les milieux offrent aux élèves la possibilité de débattre de la validité des conjectures en référant aux éléments, notamment syntaxiques, qui sont introduits au fur et à mesure du développement de la situation. Notons qu'un milieu de référence, porteur de la nécessité mathématique, contient obligatoirement des éléments syntaxiques, même si ces derniers peuvent se placer dans différents registres. Cette dimension syntaxique repose ici, bien entendu, sur la théorie mathématique sous-jacente (l'Analyse), enseignée plus tard.

Nous avons pu voir également que les situations de décision proposées (demander aux élèves de se positionner sur la conjecture mise en débat) ont permis d'engendrer une grande richesse de raisonnements, ces derniers référant à des niveaux de milieux différents, suivant le répertoire de représentation des élèves impliqués. Mais indépendamment du niveau de départ, le travail des groupes prouve que la majorité des élèves réussit à utiliser les arguments sur lesquels repose la preuve formelle.

Ce modèle nécessite une analyse *a priori* rigoureuse de la situation étudiée intégrant une analyse des différents niveaux de milieux et une définition concomitante des signes attendus comme significatifs de la résolution de cette situation.

« La dimension sémiotique apparaît essentielle : dans une situation où les milieux sont moins bien définis, notamment, le repérage du statut des signes utilisés est un indicateur précieux de l'identification des niveaux où se situent les élèves et des raisonnements. Ici nous pouvons voir que l'entrée dans la preuve de la nature de la limite s'accompagne de la production beaucoup plus serrée d'arguments, alors que les phases heuristiques sont caractérisées par la présence d'actions et de signes indiciels nombreux et variés. La variété est d'ailleurs ce qui caractérise les signes iconiques ou indiciels, et ce qui fait leur richesse pour l'entrée dans les raisonnements. Nous avons noté aussi que les actions, à différents niveaux de milieux, s'avèrent souvent décisives dans la constitution du répertoire de représentation. » (Bloch et Gibel, 2011)

⁵² Ce qui justifie d'autant plus notre choix de prendre comme définition initiale de « raisonnement », proposée par Oléron, énoncée dans l'introduction du chapitre I.

Certes, la complexité de l'étude des signes et raisonnements, produits dans les situations didactiques, ne permet pas toujours de les décrypter afin d'élucider leur fonction ; et surtout, cela ne peut être fait qu'a posteriori – il s'agit d'une analyse de ce qui a été produit dans la réalisation effective. Néanmoins cela éclaire la situation, notamment du point de vue de sa reproductibilité.

Le modèle ne vise pas à hiérarchiser les raisonnements, et de ce point de vue on peut penser ne pas avoir progressé, puisqu'un signe ne pourra être pointé comme icône, indice ou argument que par sa fonction et le moment de sa survenue dans la situation. Cependant cet inconvénient a son pendant positif : le modèle permet de prendre en compte toutes les productions dans le raisonnement, sans se limiter au formel. De plus, la relativité des signes nous amène à conjecturer que le modèle peut être utilisé à tous niveaux de l'enseignement des mathématiques et dans tout type de situation.

Chapitre VI. Utilisations du modèle dans l'enseignement supérieur : apports et perspectives

VI.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons tout d'abord présenter certains résultats extraits d'une recherche conduite dans le cadre d'un doctorat – celui de Marc Lalaude-Labayle soutenu en 2016 - dans le domaine de l'enseignement de l'Algèbre linéaire en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (C.P.G.E). Nous commencerons par présenter le contexte des Classes Préparatoires, puis nous nous centrerons sur un dispositif d'évaluation particulier : les interrogations orales. Les raisonnements, valides ou erronés occupent une place centrale dans ce type de dispositif et leur analyse, par la mise en œuvre du modèle, devrait nous permettre de déterminer leur forme, leur nature, leur(s) fonction(s) et d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés. Cependant pour mettre en œuvre le modèle il convient de l'adapter aux spécificités de l'enseignement de l'Algèbre linéaire. Nous présenterons les modifications majeures apportées au modèle par Lalaude-Labayle (ibidem) afin d'éprouver son adéquation et sa pertinence pour l'étude des raisonnements. Nous expliciterons également certains résultats inhérents à la comparaison de deux dispositifs d'interrogation orale mis en œuvre en C.P.G.E.

Nous terminerons ce chapitre en présentant succinctement les perspectives de recherches, inhérentes à l'enseignement de l'Analyse à l'Université, en Licence, dans le cadre d'un projet développé au sein d'un groupe de recherche.

VI.2 Les interrogations orales dans le contexte des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles

➤ Le contexte des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles

Les élèves des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (C.P.G.E.) sont sélectionnés par l'équipe pédagogique de l'établissement après étude de leurs dossiers. Les Classes Préparatoires proposent une formation sur deux ans, ce qui correspond aux deux premières années de la Licence à l'Université.

L'un des principaux objectifs des C.P.G.E. est de préparer les étudiants aux concours permettant d'intégrer une Grande Ecole scientifique, économique, commerciale ou littéraire.

➤ Les interrogations orales « classiques » en C.P.G.E.

Cette dénomination interrogation orale « classique » a été initialement introduite par Farah (2015) dans le cadre de sa thèse. Le dispositif didactique est le suivant : des groupes de trois étudiants sont constitués par l'enseignant ; chacun d'eux constitue « un groupe de colle⁵³ ». Ces groupes demeurent inchangés tout au long de l'année et quelles que soient les disciplines évaluées. Dans Farah (2015) et Lalaude-Labayle (ibidem), ce dispositif d'interrogation orale est détaillé pour chacune des sections de classes préparatoires.

Comme l'indique Lalaude-Labayle (ibidem), il n'y a pas de textes officiels qui régissent ce type d'interrogation orale, cependant il y a une « tradition » qui donne lieu à un déroulement « classique » dont nous allons présenter les grandes lignes. Les trois étudiants, constituant un groupe de colle, passent simultanément au tableau ; ce dernier est partagé en trois parties, sur chacune d'elles l'étudiant inscrit son nom ainsi que l'énoncé initial qui lui est dicté par l'enseignant. Chaque partie du tableau devient ainsi un espace sur lequel chaque étudiant peut noter ses essais, l'enseignant est ainsi informé de la démarche de l'étudiant car ce dernier ne peut effacer le tableau sans l'autorisation du colleur⁵⁴. Ce dernier, après avoir laissé un temps d'autonomie à chaque étudiant, intervient suivant l'avancée des travaux de chacun. Ses interventions comme l'indique Farah (2015), remplissent des fonctions spécifiques

« (ses interventions) visent à interroger les étudiants, les aider en signalant les erreurs à corriger ou en donnant des directives/astuces afin de faire avancer le travail et/ou poser d'autres questions. » (Farah, 2015, p.430).

⁵³ « Colle » est la dénomination usuelle de l'interrogation orale en C.P.G.E

⁵⁴ Ce terme désigne l'enseignant ou l'enseignant-chercheur qui fait passer la « colle ».

Comme le précise Lalaude-Labayle (ibidem), les énoncés proposés lors de ces interrogations orales sont formulés par l'enseignant dans le « programme de colle ». Ce dernier comprend « des définitions, des théorèmes, quelques démonstrations essentielles, quelques types de raisonnement (récurrence, par contraposée, analyse-synthèse...) ou exercices classiques » (Lalaude-Labayle, 2016, p. 251).

Le premier énoncé proposé à l'étudiant, est le plus souvent une question de cours qui s'apparente à une restitution de savoirs. L'enseignant adapte ensuite les énoncés suivants en fonction de la rapidité et de la rigueur inhérente à la résolution du premier énoncé, mais également selon les difficultés rencontrées par l'étudiant.

L'énoncé (ou les énoncés) suivant(s) sont assimilables à des problèmes dont la résolution nécessite la mise en œuvre d'un raisonnement « original », autrement dit n'appartenant pas au répertoire didactique de l'étudiant. Par conséquent dans cette deuxième partie de l'interrogation orale, la pratique du raisonnement constitue l'élément central du dispositif d'évaluation.

Dans le cadre de ses expérimentations Lalaude-Labayle (ibidem) s'est attaché à justifier de la pertinence des situations mathématiques étudiées. Elles ont été choisies afin de permettre explicitement ou implicitement un jeu de cadres en lien éventuellement avec un jeu de transformations et d'évolution(s) de registres sémiotiques. L'énoncé doit également permettre une dévolution de la situation objective, sans qu'il y ait intervention de l'enseignant, permettant à l'étudiant de se confronter aux milieux adidactiques. Lalaude-Labayle indique « Les raisonnements mathématiquement justes ou faux produits dans ces milieux pourront alors lui être attribués : ils constitueront les observables sur lesquels appuyer nos analyses » (Lalaude-Labayle, ibidem).

➤ Le dispositif « expérimental » de colle

Dans la Classe Préparatoire aux Ecoles de commerce, désignée par CPEC2⁵⁵, les colleurs ont accepté la proposition de Lalaude-Labayle visant à mettre en œuvre un protocole expérimental d'interrogation orale. Ce dernier a ainsi été adopté par l'ensemble des interrogateurs. Ces derniers fournissent aux étudiants, une semaine avant l'interrogation orale, une liste de trois énoncés (de situations mathématiques). Ces derniers sont de

⁵⁵ Plus précisément en deuxième année de CPEC Classe Préparatoire aux Ecoles de Commerce

difficultés variées et comprennent chacun de trois à cinq questions, ils sont extraits d'épreuves orales ou écrites de concours. Durant la semaine précédant l'interrogation, les étudiants travaillent et rédigent ensemble une solution à chacune des situations mathématiques proposées. Lors de la première partie de la colle, chacun des trois étudiants se voit attribué un des trois énoncés que le groupe a préparés. Cette présentation de la solution par chaque étudiant dure environ 35 minutes, s'en suit alors une deuxième partie correspondant à une interrogation orale traditionnelle durant laquelle l'étudiant s'efforce de résoudre « en direct » au tableau une situation mathématique qu'il découvre.

La recherche menée par Lalaude-Labayle a porté sur l'évaluation des connaissances et des savoirs ainsi que sur les formes et les fonctions des raisonnements mobilisés par les étudiants en situation d'interrogation orale au cours de dispositifs « classiques » et « expérimentaux ». Le modèle d'analyse des raisonnements a constitué l'élément central de la méthodologie, cependant il s'est avéré nécessaire de l'enrichir afin de l'adapter aux spécificités de l'enseignement de l'Algèbre linéaire en C.P.G.E. et Lalaude-Labayle a choisi de conduire des analyses sémiotiques (sémiose, diagramme sémantique) pour approfondir l'étude.

VI.3 Les questions de recherche dans le domaine de la pratique du raisonnement en Algèbre linéaire lors des interrogations orales

Nous reprenons dans ce paragraphe les principales questions, spécifiques à l'étude des raisonnements produits par les étudiants et l'enseignant en situation d'interrogation orale, auxquelles Lalaude-Labayle (2016) a souhaité apporter des éléments de réponse. Dans le cadre sa thèse, il a mis en œuvre une méthodologie reposant principalement sur la mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements, complétée par des analyses sémiotiques peirciennes.

Les questions sont les suivantes :

Sous quelles formes apparaissent les raisonnements produits par les étudiants au cours des différentes phases d'une situation d'interrogation orale en C.P.G.E ?

Le modèle d'analyse des raisonnements permet-il de les analyser précisément ?

Quelles fonctions recouvrent les raisonnements produits par les élèves en situation ? Sont-elles en adéquation avec le projet initial de l'enseignant explicité et étudié en Théorie des Situations Didactiques par l'analyse a priori produite par le chercheur ?

Comment les raisonnements produits par les étudiants en situation d'action et de formulation sont-ils effectivement utilisés en situation de preuve ?

L'étude des raisonnements, par la mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements, vise aussi à apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

A quels moments les étudiants rencontrent-ils des difficultés ? Comment les aider à en prendre conscience, à les identifier et à les dépasser ?

Au travers de la mise en situation réelle, quels sont les savoirs et les connaissances mobilisés ?

VI.4 Adaptation du modèle à l'analyse des raisonnements en Algèbre linéaire lors des interrogations orales

- Description des niveaux de milieu associés aux différentes phases des interrogations orales

Comme nous l'avons explicité dans le chapitre II, le modèle d'analyse des raisonnements s'appuie sur l'identification des différents niveaux de milieux. Aussi est-il nécessaire de spécifier le schéma de la structuration du milieu dans le contexte des situations d'interrogation orales.

Pour une meilleure prise en compte du milieu du professeur et de celui de l'étudiant aux niveaux sur-didactiques, en tenant compte des travaux de Castela (2004), Lalaude-Labayle (2016) propose, s'appuyant sur les précédents travaux de Bloch (1998) et Margolinas (1998) le tableau de structuration du milieu suivant :

M ₊₃ : M-Construction		P ₊₃ : P-Noosphérien	S ₊₃ : Situation Noosphérienne
M ₊₂ : M-Projet	E ₊₂ : Étudiant-autonome	P ₊₂ : P-Constructeur	S ₊₂ : Situation de Construction
M ₊₁ : M-Didactique	E ₊₁ : Etudiant-Réflexif ou Étudiant -localement autonome	P ₊₁ : P-Projeteur	S ₊₁ : Situation de Projet
M ₀ : M-Apprentissage (institutionnalisation)	E ₀ : Étudiant	P ₀ : Professeur	S ₀ :Situation Didactique
M ₋₁ : M-Référence (formulation et validation)	E ₋₁ : Etudiant-Apprenant Formulateur/Valideur	P ₋₁ : P-Régulateur	S ₋₁ : Situation d'apprentissage

M ₋₂ : M-Objectif, Heuristique (action)	E ₋₂ : Étudiant- Agissant	P ₋₂ : P-Dévolueur / Observateur	S ₋₂ : Situation de reference
M ₋₃ M matériel	E ₋₃ : Etudiant- Objectif		S ₋₃ : Situation Objective

Tableau VI.1 Structuration du milieu (Lalaude-Labayle, 2016, p.117)

Les niveaux de milieux de M₋₃ à M₋₁ sont dits niveaux adidactiques, le niveau de milieu M₀ est dit niveau didactique et les niveaux de milieux M₊₁ à M₊₃ sont qualifiés de niveau surdidactiques. À l'aide de ce modèle, décrit précisément dans la partie II (Figure II.1), nous mettons en évidence la dynamique des « emboîtements » des situations, en lien avec celle de l'évolution du répertoire de représentation.

Comme indiqué dans la partie II, ce modèle permet ainsi de représenter des déroulements effectifs de leçons, concevoir des situations effectivement réalisables, rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique et étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Au cours de ses travaux de recherche, Lalaude-Labayle a souhaité analyser les raisonnements produits par les étudiants. Conformément à l'élaboration du modèle décrite dans la deuxième partie de cette note de synthèse, nous allons les caractériser par leurs fonctions didactiques, dont la combinatoire s'articule autour des trois types de situations : l'action, la formulation et la validation. L'utilisation du schéma de la structuration du milieu va permettre d'explicitier d'une part les formes et fonctions des raisonnements produits, et d'autre part, les conditions qui caractérisent chacune des situations au cours de laquelle les étudiants ont produit ces raisonnements. L'utilisation de ce modèle, conformément à ce que nous avons indiqué au chapitre III⁵⁶, devrait nous permettre :

1. D'approfondir l'analyse *a priori* du déroulement de la séance de colle, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

⁵⁶ A partir des travaux publiés dans Gibel (2008)

2. D'analyser *a posteriori* dans chacune des séances expérimentées :

- ✓ les raisonnements produits par les étudiants en situation(s) ;
- ✓ les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés ;
- ✓ les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les étudiants sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

3. D'analyser *a posteriori* dans chacune de nos séquences expérimentées :

- ✓ les raisonnements produits par les étudiants en situation(s) ;
- ✓ les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés ;
- ✓ les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les étudiants sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

Nous présentons succinctement l'analyse ascendante en termes de niveaux de milieu produite par Lalaude-Labayle (2016) en prenant appui sur Gibel (2008). Nous suivons ici la « lecture » ascendante du schéma de structuration du milieu effectuée d'après les travaux de Margolinas (2008).

L'étudiant objectif et le milieu matériel

L'enseignant, lorsqu'il prépare son interrogation orale, organise la situation objective S_3 constituée du milieu matériel M_3 et de l'étudiant objectif E_3 . Pour organiser cette séquence, l'enseignant est soumis à diverses contraintes que Lalaude-Labayle (ibidem) précise dans la partie expérimentale de sa thèse. L'acteur objectif agit en lien avec le milieu matériel : il effectue des actions que l'on peut identifier et répertorier. Ces actions sont « listées » en tenant compte du répertoire didactique de la classe.

L'étudiant agissant et le milieu objectif

Le couple (M_3 ; E_3) constitue le milieu objectif, M_2 , pour l'étudiant agissant E_2 en situation de référence S_2 . En mobilisant son répertoire didactique, dont la partie observable⁵⁷ est le répertoire de représentation, l'étudiant agit : il effectue une action (ou des actions) sur les objets auxquels il est confronté.

Lors des interrogations orales, les étudiants sont amenés à faire des choix, à prendre des décisions afin d'élaborer leur(s) procédure(s) de résolution : on observe, dans les productions

⁵⁷ donnée à voir lors des analyses *a posteriori*

analysées (Lalaude-Labayle, ibidem), différentes formes de raisonnements, résultant notamment de choix de cadres différents. A ce niveau les premiers observables sont produits⁵⁸ par l'étudiant E₂, en vue d'une appropriation de la situation objective.

L'étudiant apprenant et le milieu de référence

A ce niveau, les situations de formulation et de validation sont étroitement liées et la situation vise à permettre au sujet apprenant E₁, d'analyser sa suite de décisions. Ainsi, l'étudiant apprenant E₁ produit deux types d'actions (schéma II.6 proposé au chapitre II) : une action sur les objets et une action sur les conditions de l'action, qui peut l'amener à modifier les conditions de son action et de son utilisation des objets. Ces conditions, qui constituent un objet d'étude de la part de l'étudiant apprenant E₁ sont régies par le répertoire de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs.

L'étudiant et le milieu d'apprentissage

Le couple (M₋₁; E₋₁) constitue le milieu d'apprentissage M₀ pour l'étudiant E₀ en situation didactique S₀. Dans la situation didactique S₀,

« le professeur P₀ exige de l'étudiant E₀ qu'ayant pris conscience du domaine de validité de son raisonnement produit au niveau précédent, il entre dans une situation de preuve. Après avoir procédé à la dévolution de la situation de validation des formulations produites, la situation de preuve dans le cas d'une interrogation orale, est également dévolue à l'étudiant. On peut alors se demander si l'étudiant, en prenant conscience du domaine de validité des raisonnements produits, peut s'en servir pour produire une preuve. » (Lalaude-Labayle, 2016)

A quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuves ? Nous voyons qu'à ce niveau d'enseignement et dans ce cadre de l'interrogation orale, il y a une forte porosité entre la situation de validation en lien avec milieu de référence M₋₁ et celle de preuve, institutionnalisée dans le secondaire par l'enseignant, en lien avec le milieu d'apprentissage M₀. C'est ici qu'émerge la question relative à l'institutionnalisation formulée par Lalaude-Labayle (2016) : *Qu'institutionnalise l'enseignant à l'issue d'une interrogation orale ?*

L'étudiant réflexif (ou localement autonome) et le milieu didactique

⁵⁸ Lalaude-Labayle (2016) précise que lors de l'interrogation orale l'étudiant ne peut effacer le tableau sans l'accord préalable de l'enseignant, aussi est-il possible à ce dernier d'accéder aux « essais » qui traduisent les premières tentatives d'appropriation des objets et des règles qui définissent la situation objective.

Nous sommes positionnés au premier niveau surdidactique qui, bien que faisant partie des niveaux de milieux correspondant à une situation expérimentale, n'est que rarement étudié dans les publications. Des travaux de Castela (2011) portent sur les positions de l'étudiant au niveau surdidactique, qu'elle définit ainsi

« Le niveau surdidactique se définit par la clôture de la relation didactique, étudiants et professeur ne coopèrent plus et en conséquence par une évolution topogénétique : à partir de S_1 , l'étudiant prend la responsabilité de son étude. » (Castela, 2011, p. 62)

Effectivement, dans l'enseignement supérieur, et en C.P.G.E. en particulier, l'évaluation par concours semble motiver cette prise de responsabilité des étudiants : la résolution d'un problème ne constitue pas une fin en soi, mais un matériau sur lequel l'étudiant réfléchit et s'appuie pour aborder de nouveaux problèmes.

« Ici, le couple $(M_0; E_0)$ constitue le milieu didactique M_1 pour l'étudiant E_1 en situation de projet S_1 . À ce niveau, l'étudiant E_1 réfléchit à ses actions, formulations, validations et preuves sur la situation. Il enrichit éventuellement son répertoire didactique et son système organisateur en lien avec l'enseignant P_1 dans un rôle de projeteur ascendant. » (Lalaude-Labayle, 2016)

Nous allons dans la section suivante expliciter les modifications apportées au modèle d'analyse des raisonnements en vue de l'adapter au domaine de l'Algèbre linéaire.

➤ Une nécessité : enrichir le modèle pour l'adapter à l'enseignement de l'Algèbre linéaire dans le supérieur

Dans le domaine de l'Algèbre linéaire, les étudiants sont confrontés, lors des interrogations orales, à des situations dont la résolution nécessite de convoquer des modes de raisonnement qui peuvent être de différentes natures : inductive, déductive ou abductive. En conséquence, Lalaude-Labayle (2016) a jugé pertinent d'enrichir le modèle en ajoutant une nouvelle dimension d'analyse : la « forme » de raisonnement. Il a indiqué les « formes » de raisonnements susceptibles d'être produits selon chaque niveau de milieu (dans les cellules R.4.1, R.4.2 et R.4.3).

Dans le cadre de son écrit de recherche, il réaffirme et illustre l'importance de la notion de registres sémiotiques, en lien avec les possibilités qui s'offrent à l'étudiant et à l'enseignant de transformer des représentations mathématiques en vue de faciliter l'accès au sens (Duval, 1996). La décision de réécriture d'un énoncé, liée à un changement de registre, apparaît ici comme une fonction du raisonnement, inhérente au milieu objectif, d'où la proposition de

Lalaude-Labayle d'ajouter un élément dans la cellule R.1.1 : « décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique) ».

De même la décision de choisir un cadre de travail spécifique est une fonction importante du raisonnement associée au milieu objectif. En effet

« Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. » (Duval, 1992, p. 135)

Ce qui conduit tout naturellement à l'ajout d'un nouvel élément dans la cellule R.1.1 : « décision d'un cadre de travail ».

L'analyse des signes produits en Algèbre linéaire s'avère particulièrement complexe et nécessite une analyse très « fine » des signes utilisés, d'où la proposition de Lalaude-Labayle de (re)nommer⁵⁹ le second axe « niveau d'utilisation des signes ».

Concernant la dimension « Usage et actualisation du répertoire didactique », afin d'intégrer les travaux de Castéla (2011) à propos de la notion d'heuristique, la cellule R.3.1 associée au niveau M-2 a été complétée en y ajoutant l'enrichissement au niveau heuristique comme « savoirs pratiques » ou « patterns ».

Ces adaptations apportées au modèle initial contribuent à son enrichissement et à son adaptation en vue d'un usage dans l'enseignement supérieur, inhérent à l'enseignement de l'Algèbre linéaire. On note cependant que la « structure » initiale du modèle, plus précisément les trois axes de l'analyse, demeure inchangée et constitue le socle de notre modèle d'analyse des raisonnements. Le tableau VI.2 ci-dessous constitue le modèle d'analyse des raisonnements « complété », formulé par Lalaude-Labayle (ibidem).

⁵⁹ La dénomination initiale étant « niveau d'utilisation des symboles ».

	Milieu M ₂	Milieu M ₁	Milieu M ₀
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM. <ul style="list-style-type: none"> • Décision d'un cadre de travail (DOO) • Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique) • Decision de calcul • Moyen heuristique • Exhibition d'un exemple, d'un contre-exemple • Recherche de motif (pattern) 	R1.2 SYNT./SEM. <ul style="list-style-type: none"> • Calculs génériques • Formulation de conjectures étayées • Décision sur un objet mathématique 	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : <ul style="list-style-type: none"> • Organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » • Formulation et certification de validations, de preuves • formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM. Icônes ou indices dépendants du contexte (schémas, intuitions ...)	R2.2 SYNT./SEM. <ul style="list-style-type: none"> • arguments locaux • arguments génériques • arguments opératoires 	R2.3 SYNT. Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SEM. <ul style="list-style-type: none"> • Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes • enrichissement au niveau heuristique (savoirs pratiques, patterns) 	R3.2 SYNT. /SEM. Enrichissement au niveau argumentaire <ul style="list-style-type: none"> • des énoncés • du système organisateur (nouveaux objets ou paradigmes) 	R3.3 SYNT. <ul style="list-style-type: none"> • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 Formes : <ul style="list-style-type: none"> • déductif • inductif • abductif 	R.4.2 Formes : <ul style="list-style-type: none"> • déductif • inductif 	R.4.3 Forme(s) : <ul style="list-style-type: none"> • déductif

Tableau VI.2 Modèle d'analyse des raisonnements « complété » (Lalaude-Labayle, (2016, p.179)

➤ Le rôle des raisonnements diagrammatiques

Pierce définit la notion de raisonnement diagrammatique, comme un raisonnement reposant principalement sur l'utilisation d'un diagramme au lieu de moyens linguistiques ou algébriques. Pierce définit le diagramme de la façon suivante :

« A Diagram is a representamen which is predominantly an icon of relations and is aided to be so by conventions. Indices are also more or less used. It should be carried out upon a perfectly consistent system of representation, one founded upon a simple and easily intelligible basic idea.» (Pierce, 1904, EP 2:203)

Lalaude-Labayle (2016) choisit de se référer à Hofmann (2007) pour illustrer la schématisation du raisonnement diagrammatique. Le diagramme présente les différentes possibilités d'élaborer une preuve mathématique en envisageant différentes étapes⁶⁰, ces dernières étant « associées » au représentations pivots. Le raisonnement diagrammatique est un outil pertinent, mobilisé par Lalaude-Labayle (ibidem), donnant à voir les différentes formes de raisonnements conduisant à l'élaboration d'une preuve.

VI.5 Les principaux résultats de l'étude des raisonnements produits lors des dispositifs d'interrogations orales en C.P.G.E.

La mise en œuvre du modèle en vue d'étudier les différentes formes de raisonnements⁶¹, tant du point de vue prédictif que du point de vue explicatif, donne des résultats précis et étayés en regard des questions de recherche formulées précédemment. Les analyses didactiques, effectuées par la mise en œuvre du modèle, rendent compte de sa pertinence, en effet il offre la possibilité d'étudier les différents aspects du raisonnement : syntaxique, sémantique et pragmatique (Durand-Guerrier, 2004 ; Gardes, 2013).

Les analyses produites par Lalaude-Labayle montrent que les raisonnements des étudiants en situation d'interrogation orale « classique » sont pour la majorité de nature syntaxique, corroborant ainsi les résultats de Kouki (2006) et Kouki et Ghedansi (2012). Lalaude-Labayle conjecture que l'obstacle du formalisme, lié à l'axiomatique des structures et l'exigence de rigueur, limite l'accès des étudiants à un point de vue sémantique des objets et des raisonnements entre ces objets.

Par ailleurs le modèle a permis de mettre en lumière, qu'au cours des interrogations orales « classiques », les interventions de l'enseignant, visant à permettre à l'étudiant un « retour » au milieu objectif, n'ont que très rarement permis aux étudiants d'enrichir leurs points de vue sémantiques ; en effet ces derniers n'ont pas été en mesure de réexaminer leurs décisions afin d'envisager de nouvelles actions sur le milieu objectif. Les analyses didactiques, produites à

⁶⁰ Associées sur le diagramme aux différents « parcours ».

⁶¹ susceptibles d'être produits ou produits par les étudiants ou par l'enseignant

l'aide du modèle d'analyse des raisonnements, ont mis en évidence que l'« instabilité »⁶² des milieux adidactiques n'offraient pas suffisamment aux étudiants la possibilité d'accéder aux objets mathématiques, d'un point de vue sémantique. Nous faisons l'hypothèse que l'accès aux objets mathématiques, d'un point de vue sémantique nécessiterait un enrichissement et une stabilisation du milieu objectif. La disponibilité des registres n'est pas suffisante pour que les jeux entre le sémantique et le syntaxique soient possibles pour une majorité d'étudiants.

Dans le contexte du dispositif « expérimental » de colle, les analyses didactiques produites, à partir du modèle mettent en évidence la variété et la richesse des raisonnements produits par les étudiants. Ces derniers sont en mesure d'organiser leurs décisions et leurs actions, puis de formuler et de valider, en mobilisant des justifications adéquates, le raisonnement qui sous-tend leur procédure. De plus Lalaude-Labayle (ibidem) met en lumière, lors de ces analyses *a posteriori*, la production par les étudiants de raisonnements assurant une fonction rarement observée dans le dispositif « classique » d'interrogation orale : la fonction de contrôle.

L'utilisation du modèle, dans le contexte « expérimental », rend compte de la dynamique intrinsèque au schéma ; « cette dynamique, forcée parfois par l'enseignant en interrogation orale classique, est ici entièrement prise en charge par l'étudiant. » (Lalaude-Labayle, ibidem).

VI.6 Les perspectives de recherche inhérente à l'enseignement de l'Analyse à l'Université

Le modèle d'analyse des raisonnements a été utilisé dans le cadre de l'enseignement de l'Algèbre linéaire en C.P.E.G., nous avons souhaité le mettre en œuvre dans le cadre d'une recherche en cours qui s'inscrit dans un projet, impulsé par Viviane Durand-Guerrier, intitulé D.E.M.I.P.S.⁶³, associé à un Groupe de Recherche.

⁶² L'« instabilité » est principalement liée au fait que les étudiants disposent d'un temps très limité pour s'approprier la situation objective, autrement dit pour agir sur le milieu objectif et percevoir les différentes relations entre les objets mathématiques qui définissent le milieu objectif.

⁶³ Didactique et Epistémologie des Mathématiques et liens avec l'Informatique et la Physique dans le Supérieur.

« Une des missions de ce groupe de recherche est de favoriser la diffusion des résultats de la recherche auprès des acteurs concernés afin de pouvoir répondre de manière coordonnée et structurée aux demandes émanant de la communauté mathématique, notamment : analyse de phénomènes didactiques, développement de ressources (ingénieries didactique, propositions curriculaires), expertises sur les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques en lien avec les autres disciplines. Localement, les chercheurs peuvent pour cela s'appuyer sur les IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) présents dans la plupart des académies et qui sont depuis 40 ans le lieu naturel de l'interface entre Chercheurs en Didactique des Mathématiques et Praticiens, tant du secondaire que du supérieur. Au niveau national, les chercheurs peuvent s'appuyer sur le réseau national des IREM qui comporte une commission Inter IREM-Université à laquelle participent plusieurs des chercheurs engagés. » (Présentation du projet⁶⁴ DEMIPS)

Ce projet s'étend sur les années universitaires 2016-2017, 2017-2018 et 2018-2019. Il s'inscrit « localement » dans le cadre d'une recherche collaborative avec des enseignants de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

L'enjeu du projet est d'élaborer conjointement avec les enseignants de licence de mathématiques des ingénieries didactiques, prenant en compte les obstacles et les difficultés spécifiques rencontrés par les étudiants, dans le cadre de l'enseignement de l'Analyse, plus particulièrement dans le domaine des équations différentielles.

La première étape de cette recherche est l'observation des pratiques enseignantes et des principaux choix didactiques qui les sous-tendent. Les séances de travaux dirigés et les cours d'Analyse de première, deuxième année et troisième année de Licence de mathématiques à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, constituent un terrain d'observation privilégié afin d'étudier la nature et l'origine des principales difficultés rencontrées par les étudiants.

Un de nos objectifs est de contribuer à une réflexion, dans le cadre de la lutte contre l'échec en licence, visant à mettre dans une perspective de réussite les étudiants en difficulté dans le domaine de l'Analyse. Notre ambition est d'élaborer avec les enseignants des classes de L1, L2 et L3 scientifiques, des situations d'enseignement/apprentissage consistantes, issues pour certaines d'entre d'ingénieries élaborées précédemment, afin de permettre l'acquisition de connaissances et de savoirs signifiants pour les étudiants dans le domaine des équations différentielles, et plus généralement de l'Analyse.

L'approche que nous privilégions prend appui sur la modélisation des problèmes issus d'autres disciplines (comme la mécanique, l'astronomie, les sciences physiques, la chimie, la

⁶⁴ Rédigé par Viviane Durand Guerrier, responsable du projet.

biologie, les sciences économiques). Cette approche permet de donner du sens aux notions mathématiques sous-jacentes (dérivée, différentielle, taux, etc.) et permet de faire le lien entre les problèmes réels et les modèles mathématiques correspondants. Par ailleurs, nous préconisons la résolution des équations différentielles par la méthode qualitative. Celle-ci mobilise l'étude d'un nombre important de notions d'analyse, lesquelles posent par ailleurs de grandes difficultés aux étudiants (tangente, dérivée, fonction, ...), et permet de mieux se focaliser sur l'interprétation des solutions – localement ou globalement ; ces notions interviennent dans une grande classe d'équations différentielles, le plus souvent non linéaires, et dont on ne connaît pas nécessairement une solution générale.

La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998) est un cadre théorique permettant l'élaboration d'ingénieries spécifiques en lien avec des connaissances et des savoirs clairement identifiés. La notion de milieu d'apprentissage est au cœur de la théorie des situations didactiques, c'est la construction de milieux adaptés qui permettra de mettre au point des situations d'enseignement/apprentissage adaptées.

Nous souhaitons mettre en œuvre le modèle d'analyse des raisonnements tel que présenté précédemment en vue d'éprouver l'adéquation et la pertinence des ingénieries élaborée conjointement avec les enseignants-chercheurs du département mathématiques de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. Le modèle sera donc utilisé dans ses fonctions prédictives et explicatives.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette note de synthèse, nous avons explicité la structure de notre modèle d'analyse et nous avons mis en évidence sa pertinence, en tant qu'élément central de différentes méthodologies, pour étudier précisément les formes et les fonctions des raisonnements élaborés par les élèves et les enseignants dans différents dispositifs didactiques (séquence ordinaire, ingénieries didactiques, évaluations, interrogations orales). Les méthodologies construites, inhérentes aux recherches présentées, ont contribué à apporter des réponses étayées et argumentées à des questions de recherche en didactique des mathématiques, dans différents domaines (l'Arithmétique et la Géométrie dans l'enseignement élémentaire, l'Analyse dans le secondaire ainsi que l'Algèbre dans l'enseignement supérieur).

Dans les recherches présentées dans les chapitres III, IV, V et VI, les raisonnements produits par les élèves ou les étudiants apparaissent comme des indicateurs de la compréhension d'une notion ou d'un concept mathématique mobilisé(e) en situation. En utilisant le modèle dans des recherches relevant de différents domaines mathématiques et à des niveaux d'enseignements variés, nous avons souhaité éprouver sa pertinence. Il en résulte qu'il permet de rendre compte des formes de raisonnements valides ou erronés, de leur(s) fonction(s) en situation, mais aussi de leur intérêt didactique du point de vue de l'enrichissement du répertoire de représentation de l'élève.

Ce modèle a une fonction prédictive : il permet d'interroger la validité et la pertinence d'ingénieries et de dispositifs didactiques. En effet, il offre la possibilité de déterminer, en amont de leur expérimentation, la nature et les fonction(s) des raisonnements susceptibles d'être produits par les élèves (ou les étudiants). Il permet ainsi de déterminer l'adéquation de l'ingénierie ou du dispositif envisagé(e) à la construction des apprentissages visés.

Ce modèle recouvre également une fonction explicative : il est adéquat pour étudier les effets d'ingénieries et de dispositifs didactiques, répertoriés et reproductibles, sur la compréhension et l'utilisation des concepts et des notions mathématiques

La Théorie des Situations Didactique a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de ce modèle. Elle nous a permis de caractériser les raisonnements en intégrant les conditions de leur élaboration grâce à l'identification des niveaux de milieux et nous a fourni un cadre et un outillage adéquats à la réalisation d'analyse *a priori* détaillée des situations. De plus, elle nous a amené à construire une caractérisation des fonctions des raisonnements en lien avec les situations et elle a également contribué à définir la notion de répertoire de représentation⁶⁵.

La sémiotique de C.S. Peirce a eu un rôle décisif lors de la construction du modèle. En effet elle a permis d'identifier certaines formes de raisonnement nécessitant une analyse très précise des signes ; de plus leur analyse permet de mettre en lumière l'évolution du répertoire de représentation lors du déroulement de la séquence ou du dispositif didactique⁶⁶.

L'originalité et l'intérêt du modèle d'analyse des raisonnements sont essentiellement dus au fait qu'il résulte de la combinaison de ces cadres théoriques permettant ainsi de recouvrir une dimension d'analyse globale et une dimension d'analyse locale. L'analyse globale est liée à l'identification du niveau de milieu qui définit et traduit le statut logique des énoncés en regard de leurs fonctions, l'analyse locale repose sur une identification peircienne des signes donnant ainsi à voir l'usage et l'évolution du répertoire de représentation.

La dimension sémiotique est essentielle dans le modèle ; cependant l'analyse sémiotique apparaît plus riche, plus détaillée et plus opérationnelle dans les séquences conduites dans le secondaire et dans le supérieur, si l'on se réfère à l'analyse des raisonnements produits dans la situation du flocon de Von Koch et à l'analyse des solutions produites par les étudiants de C.P.G.E. (Lalaude-Labayle, 2016). Ceci s'explique par la variété des registres convoqués (algébrique, graphique, etc.), la multiplicité des cadres (numériques, géométriques, etc.) et également par la variété des signes associés en lien avec le formalisme mathématique. Il met l'accent sur l'importance des raisonnements du point de vue des connaissances et des savoirs mobilisés, car il permet d'effectuer un lien entre le répertoire de représentation, prenant appui sur une analyse sémiotique, et le répertoire didactique de la classe.

⁶⁵ A partir de la notion de répertoire didactique.

⁶⁶ Notamment lors des interrogations orales en C.P.G.E, classes préparatoires aux grandes écoles

Nous avons ainsi essayé de mettre en évidence la robustesse de notre modèle pour analyser les formes de raisonnements, en situation à dimension adidactique, en illustrant son utilisation à différents niveaux d'enseignement : primaire, secondaire et supérieur.

La présentation détaillée de l'usage de notre modèle dans plusieurs domaines mathématiques et à des niveaux d'enseignement différents a également mis en évidence la nécessité de l'adapter au domaine mathématique, tout en conservant sa structure initiale. Nous avons ainsi procédé à l'enrichissement du modèle au cours des différentes expérimentations réalisées.

Notamment dans le domaine de la géométrie où il est apparu nécessaire de préciser la notion de répertoire de représentation ; pour cela nous avons pris en compte la classification des représentations de Berthelot et Salin (1992). Ces derniers accordent une place importante aux représentations infra-langagières lors de l'étude des situations d'enseignement-apprentissage dans le méso-espace. Afin de prendre en compte ce type de représentation dans l'analyse peircienne, nous avons intégré, dans le script, des éléments visuels rendant compte de la gestuelle des élèves, lorsque cette dernière jouait un rôle déterminant dans l'analyse des procédures et des comportements des élèves.

Dans l'enseignement supérieur et plus précisément dans le domaine de l'enseignement de l'Algèbre linéaire, les étudiants sont confrontés, dans le contexte des interrogations orales⁶⁷, à des situations dont la résolution nécessite de convoquer des modes de raisonnement qui peuvent être de nature inductive, déductive ou abductive. En conséquence, il nous est apparu nécessaire de préciser notre modèle d'analyse des raisonnements, en ajoutant une nouvelle dimension : la modalité de raisonnement.

Nous avons pu expérimenter et éprouver la pertinence de notre modèle d'analyse des raisonnements dans la conduite de nombreuses recherches et l'enrichir progressivement, au fil des expérimentations, en vue de l'adapter au domaine mathématique étudié. Ayant bénéficié d'une formation et d'un parcours très diversifié, tant du point de vue des domaines de recherche que des enseignements prodigués, s'appuyant tour à tour sur les mathématiques et la didactique des mathématiques, nous avons ainsi eu l'opportunité d'analyser les objets mathématiques, leurs usages et leurs enseignements, du primaire à l'Université.

Par ailleurs le modèle nous a permis d'étudier, dans différents domaines des mathématiques (Arithmétique, Géométrie, Analyse, Algèbre), les nombreuses difficultés auxquelles sont

⁶⁷ En C.P.G.E, Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles

confrontés les élèves dans l'enseignement primaire et secondaire, ainsi que les étudiants à en Classes Préparatoires et à l'entrée à l'Université. Il apparaît comme un outil adéquat pour analyser précisément l'origine des erreurs des élèves et des étudiants.

Dans le cadre d'un contexte d'enseignement d'évolution des programmes et des pratiques, les TICE⁶⁸ apparaissent comme des outils incontournables dans l'enseignement secondaire et supérieur. D'un point de vue didactique, elles offrent la possibilité de faciliter les changements de cadres et ainsi d'éclairer différemment un même objet mathématique (Gibel, 2017). L'utilisation du modèle, par sa dimension sémiotique, permet d'envisager l'élaboration de séquences et de dispositifs intégrant des changements de cadres (et d'éventuels changement de registres) pour une compréhension approfondie des concepts mathématiques par le biais d'un usage raisonné en situation. Il nous semble nécessaire de combiner deux dimensions du raisonnement : la dimension sémantique et la dimension syntaxique qui apparaissent indissociables afin de permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder au sens des objets mathématiques.

Concernant les projets de recherche en cours, un de nos objectifs est de contribuer à une réflexion, dans le cadre de la lutte contre l'échec en licence, visant à mettre dans une perspective de réussite les étudiants en difficulté dans le domaine de l'Analyse. Notre ambition est d'élaborer avec les enseignants des classes de L1, L2 et L3 scientifiques, des situations d'enseignement/apprentissage consistantes, issues pour certaines d'entre elles d'ingénieries élaborées précédemment, afin de permettre l'acquisition de connaissances et de savoirs signifiants pour les étudiants dans le domaine des équations différentielles, et plus généralement de l'Analyse. Le modèle d'analyse des raisonnements pourra ainsi nous permettre d'évaluer en amont la pertinence et l'adéquation des situations envisagées.

⁶⁸ Technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement.

Références

- Arzarello, F., Paola, D., Sabena, C. (2009). Proving in early calculus. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, pp.35–40). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Balacheff, N. (2002), Cadre, registre et conception, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 58..
- Barallobres, G. (2007). Introduction à l’algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *For the learning of mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 27(1) 39–44.
- Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et didactique*, 2, 35-58.
- Barrier, T., Mathé, A. C., De Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique: quels enseignements. *Petit x*, 90, 5-33.
- Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, pp.53–58). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Berthelot, R., Salin, M.-H. (1992). *L’enseignement de l’espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire*. Thèse de l’Université Bordeaux 1.
- Berthelot, R., Salin, M.-H. (2001). L’enseignement de la géométrie au début collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, 56, 5-34.
- Bessot, A. (2013). L’ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In Margolinas et al. (eds) *L’ingénierie didactique*, Actes de la 15ème Ecole d’Eté de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Blanché, R. (1973). *Le raisonnement*. Presses Universitaires de France.

- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
- Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/Université*. Thèse de l'Université Bordeaux I, Bordeaux.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, (52), 3–28
- Bloch, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M. H., Clanché P., Sarrazy B. (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.143-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. *Les sciences de l'Education, Pour l'ère nouvelle*, Numéro spécial 41(1) (Coordonné par M. Bailleul), 91-114.
- Bloch, I., Bridoux, S., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Frégné, P., Mac Aleese, J., Madec, G., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P., Vandebrouck, F. (2017). *Limites de suites réelles et fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. Commission Inter-IREM Université.
- Bloch, I., Chiocca, C.-M., Job P., Schneider M. (2007). Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la XIIIe Ecole d'Eté, (Cédérom)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bloch I., Pressiat A. (2009) 'L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances', *Nouvelles Perspectives en Didactique des Mathématiques*, 51-73, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Bloch, I., Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
- Bloch, I., Gibel, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. Two examples: parametric curves and differential equation.

In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 43-53). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Bloch, I., Osel, C. (2009). *L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'une progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations*. Actes du XXXVIème Colloque de la Commission Permanente des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques pour l'enseignement élémentaire. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Toulouse, France.

Bloch, I., Pressiat, A. (2009). L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances. *Nouvelles Perspectives en Didactique des Mathématiques*, 51-73. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch, I., Salin, M.-H. (2004). Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. Actes du XXXème Colloque de la commission permanente des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques pour l'enseignement élémentaire. Institut de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques Marseille, France.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-128

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ*, 14-24.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Espace et géométrie. Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymnon.

Brousseau, G., Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Maths-école*, 141, 2-15

Brun, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, (pp. 67-83). Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Castela, C. (2004). Institutions influencing Mathematics students' private work: a factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics*, 57, 33-63.
- Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. Le travail personnel au coeur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.
- Comber, G., Pressiat, A. (2003). *Apprentissages géométriques au début du Collège*, Institut National de la Recherche Pédagogique, *Actes du colloque inter-Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques 1er cycle de Montpellier, Quelles géométries au collège ? "Geste physique, geste virtuel, geste mental"*, IREM de Montpellier.
- Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux 1, Bordeaux.
- Conne, F. (1992). Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3), 221–270.
- Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom)*. Bordeaux : IUFM d'Aquitaine.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM mathematical education*, 40, 373-384.
- Durand-Guerrier, V. (2010). Semantic perspective in mathematics education. A model theoretic point of view. ICME 11, Mexico 2008.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang S.A., Bern.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
- Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de C.S. Peirce*. Liège : Pierre Mardaga.

- Farah, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.
- Flückiger, A. (2005). Macro-situation and numerical knowledge building: the role of pupils didactic memory in classrooms interactions. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
- Flückiger, A., Gibel, P. (2013). Etude transpositive de savoirs mathématiques et didactiques : les cas du numérique et du géométrique en Suisse Romande in B. Dauney, Y. Reuter, A. Thepault (Eds), *Les contenus d'enseignement. Approches comparatistes*, Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq.
- Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas de pavages archimédiens du plan*. Thèse de l'Université Lyon 1, Lyon.
- Gardes, M. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*, Thèse de doctorat, Université de Lyon
- Gibel, P. (1997). Etude d'une Modélisation Mathématique en Didactique des Mathématiques, *séminaire de la IX^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, M. Bailleul Ed.
- Gibel, P. (1998). Etude numérique des oscillations des systèmes semi-linéaires 3x3, *Mathematical Modelling and Numérical Analysis*, 32-7, 789-815, EDP Sciences.
- Gibel, P. (1999). Analyse didactique d'une séquence de classe destinée à développer certaines pratiques du raisonnement des élèves. *Actes du séminaire de la X^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques éd. Tome 2, 54-71.
- Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*. Thèse de l'Université Bordeaux 2, Bordeaux.
- Gibel, P. (2006). Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In N. Bednarz & C. Mary (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom)*. Sherbrooke : Éditions du CRP.
- Gibel P. (2007). Analysis of the Teacher's Arguments used in the Didactical Management of a Problem Solving Situation. Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5, University of Cyprus.

- Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39
- Gibel, P. (2009). Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation adidactique. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal.
- Gibel, P. (2013). Presentation and setting up of a model of analysis for levels of proof in mathematics lessons in primary school. Proceedings of Eighth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 8, Turkey.
- Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et Didactique*, 9-2, 51-72, Presses Universitaires de Rennes.
- Gibel, P. (2017). Analyse clinique d'une situation d'apprentissage visant la sensibilisation au concept de limite par les élèves de Première Scientifique. Communication présentée au CID6, Actes du sixième Colloque International de Didactique, Université de pédagogie, Hô Chi Minh ville, Vietnam.
- Gibel, P., Blanquart-Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des Sciences de l'Education*, 43(1), 37-84.
- Gibel, P., Ennassef, M. (2012). Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 87-116.
- Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de la géométrie à l'école élémentaire*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques, Enseignement*

de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives, Hors-série, 137-162. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Healy, L. (2000) Connections between the empirical and the theoretical? Some considerations of students' interactions with examples in the proving process. In Paolo Boero, G., Harel, C., Maher, M. Miyazaki (organisers) *Proof and Proving in Mathematics Education: ICME 9 TSG 12*. Tokyo/Makuhari, Japan.

Henry, S. (2014). *Analyse didactique d'une situation de communication en géométrie plane*. Mémoire de master (non diffusé) soutenu à l'Université de Bordeaux.

Hersant, M. (2010), *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Éducation, Université de Nantes.

Hintikka, J., Sandu, J. (1997). Game-Theoretical Semantics. In Van Benthem J., Ter Meulen A. (Eds.) *Handbook of Logic and Language* ,(pp.361–410). Amsterdam : Elsevier.

Hoffmann Michael H.G. (2007). Seeing Problems, Seeing Solutions. Abduction and Diagrammatic Reasoning in a Theory of Scientific Discovery. In Olga Pombo and Alexander Gerner, *Abduction and the Process of Scientific Discovery* , Lisboa, 213 – 36;

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Kouki, R. (2006). Équations et inéquations au secondaire Entre syntaxe et sémantique, *Petit x*, 71, 7-28.

Kouki, R., Ghedamsi, I. (2012). Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire., In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012* , 435–444.

Laguerre, E. (2014) Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherches en Didactique des Mathématiques* ,34(2), 133-165.

Lajoie, C., Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et Francophonie*, 42 (2), 7-23.

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

- Larue, C. (2015). *L'enseignement des mathématiques en anglais langue seconde. Etude didactique de l'articulation des apprentissages linguistiques et mathématiques, à travers l'expérimentation de situations intégrées de type CLIL*. Thèse de l'Université de Bordeaux.
- Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221–279.
- Lin, F.-L., Hsieh F.-J., Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.) (2009). *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (2 vols.). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University. En ligne : <http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8>.
- Lorenzen, P. (1967). *Métamathématiques*. Paris : Gauthier-Villars.
- Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1998). Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*
- Margolinas, C. et al. (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Marty, R. (1990). *L'algèbre des signes*. Amsterdam : John Benjamins.
- Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations didactiques. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(3) 7–52.
- Moreira M. (1993). *Le traitement de la vérité mathématique à l'école*. Thèse de l'Université Bordeaux 1, Bordeaux.
- Munier, V., Merle, H. (2007). Une approche interdisciplinaire Mathématique-Physique du concept d'angle à l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 349-388.
- Muller A. (2004), Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. In Situation éducative et significations, Christiane Moro et René Rickenmann (Eds), De Boeck Supérieur.

- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Orus Baguena, P. (1992). *Place de la logique spontanée des élèves dans le contrat didactique. Rôle possible d'un enseignement en analyse typologique dans la scolarité*. Thèse de l'Université Bordeaux 1, Bordeaux.
- Orus Baguena, P., Greslard D. (1994). Rôle de l'interaction sociale et de la situation didactique dans la gestion du raisonnement naturel dans la relation didactique. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (Eds.) *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp.268–275). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latino-Americana de Matematica Educativa Numero especial 2006* 23–43: www.clame.org.mx/relime.htm
- Pedemonte, B. (2007). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des mathématiques*.
- Pierce, C.S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud).
- Petitfour, E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6^{ème}* (Thèse de doctorat) Université Paris. Diderot, Paris.
- Pierce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.)*. Paris : Seuil.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2) 139–190.
- Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(2–3), 239–285.
- Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.P., Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), 57–90.
- Tiercelin C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce*. Nîmes : Jacqueline Chambon.
- Salin, M.-H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 498, 647-670.

Salin, M.-H. (2014). Que peut-nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème spatio-géométrique? *Math-école*, 222, 2-7.

Vandebrouck, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants. Histoire et perspectives sur les mathématiques*. Université Denis Diderot.

