



Diffusion des Faisceaux Feuille Laser par une Particule Sphérique et Applications aux Ecoulements Diphasiques

Kuan Fang Ren

► To cite this version:

Kuan Fang Ren. Diffusion des Faisceaux Feuille Laser par une Particule Sphérique et Applications aux Ecoulements Diphasiques. Optique [physics.optics]. Université de Rouen, 1995. Français. NNT : . tel-01845373

HAL Id: tel-01845373

<https://hal.science/tel-01845373>

Submitted on 20 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

en vue de l'obtention du Doctorat (Nouveau Régime)

Discipline : Physique

Spécialité : Energétique

par

Kuan Fang REN

Diffusion des Faisceaux Feuille Laser par une Particule Sphérique

et

Applications aux Ecoulements Diphasiques

soutenue le 31 Mars 1995

Membres du jury:

Gérard Gouesbet: Professeur, INSA de Rouen

Gérard Gréhan: Chargé de Recherche au CNRS, URA CNRS 230

Bernard Pouligny: Directeur de Recherche au CNRS, Centre de Recherche
Paul Pascal, Bordeaux

Michel Trinité: Directeur de Recherche au CNRS, URA CNRS 230

Cameron Tropea: Professeur, LSTM-Erlangen, Allemagne

à ma mère

à ma femme et ma fille

à tous ceux qui partagent mes aspirations

Ce travail sous la direction du Dr. **Gérard GREHAN** a été effectué au *Laboratoire d'Energétique des Systèmes et Procédés*, URA CNRS n  230, INSA de Rouen, dirigé par **Gérard GOUESBET**.

Je tiens à exprimer tout particulièrement ma gratitude à M. **G. Gouesbet**, professeur à l'INSA de Rouen, pour son accueil au sein de son équipe, ses conseils avisés, l'ambiance amicale et la relecture minutieuse des publications qui sont nées de ce mémoire.

C'est avec une considération respectueuse que j'exprime à M. **G. Gréhan** ma plus profonde reconnaissance et mes sentiments amicaux pour l'intérêt constant qu'il a manifesté pour mes travaux, pour ses conseils toujours rayonnants et stimulants, pour le financement qu'il m'a assuré pour la réalisation de ce travail, pour ses démarches administratives et quotidiennes afin que je puisse me concentrer efficacement sur mon travail.

J'ai aussi bien apprécié l'ambiance du laboratoire. Ce confort est dû à l'ensemble des personnes du laboratoire: chercheurs, techniciens et secrétaires. Je tiens notamment à remercier de tout cœur:

Henri CAVALIER pour son aide quant à l'utilisation des ordinateurs.

Thierry GIRASOLE pour avoir consacré une partie de son temps à corriger le français de ce mémoire.

Lilia LETAIEF pour avoir relu et éclairci ce mémoire.

Christophe LETELLIER pour l'aide amicale qu'il m'a apportée au cours de cette thèse.

Jean-Noël LE TOULOUZAN pour son accueil lors de mon arrivé en France.

Fabrice ONOFRI pour sa contribution à l'analyse des signaux simulés.

ainsi que tous les membres du LESP pour leur contribution à l'atmosphère agréable du laboratoire.
Je remercie

Gérard GOUESBET,
Professeur à l'INSA de Rouen

Gérard GREHAN,
Chargé de Recherche au CNRS, URA CNRS 230

Bernard POULIGNY,
Directeur de Recherche au CNRS, Centre de Recherche Paul Pascal, Bordeaux

Michel TRINITE,
Directeur de Recherche au CNRS, URA CNRS 230

Cameron TROPEA,
Professeur, LSTM-Erlangen, Allemagne

d'avoir accepté de juger ce travail.

Contents

Liste des notations	v
Table des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Introduction Générale	1
0.1 Théorie de Lorenz-Mie Généralisée	4
0.2 Techniques de mesure	5
0.2.1 Anémométrie phase doppler	5
0.2.2 Système DCW	5
0.2.3 Technique PIV	6
0.2.4 Rapport de polarisation	6
0.3 Plan de la thèse	6
I Outils Théoriques	9
1 Relations de Symétrie des Coefficients g_n^m	13
1.1 Coefficients de forme du faisceau g_n^m	13
1.2 Relations de symétrie du champ incident	14
1.3 Recherche des relations de symétrie	15
1.3.1 Cas général	15
1.3.2 Cas particuliers	18
1.4 Applications des relations de symétrie	19
1.5 Conclusion	22
2 Faisceau Gaussien Circulaire	23
2.1 Modèle de Davis	23
2.2 Composantes du champ à différents ordres	25
3 Composantes Electromagnétiques du Faisceau Feuille Laser	27
3.1 Développement en onde plane	27
3.2 Composantes du champ dans un repère cartésien	29
3.3 Composantes du champ dans un repère sphérique	30
3.4 Approximations d'ordres plus élevées	31
3.5 Conclusion	33
4 Ordre d'Approximation des Expressions des Champs	35
4.1 Equation de Maxwell et ordre d'approximation	35
4.1.1 Système de coordonnées cartésiennes	35

4.1.2	Système de coordonnées sphériques	36
4.2	Discussion de la TLMG	37
4.3	Conclusion	42
II	Outils Numériques	43
5	Méthodes Intégrales	47
5.1	Equivalence théorique	47
5.1.1	Démonstration de l'équivalence	47
5.1.2	Formules des g_n^m et des g_n	50
5.2	Technique d'évaluation numérique	51
5.2.1	Composantes radiales du faisceau gaussien	51
5.2.2	Evaluation des g_n	53
5.2.3	Evaluation des g_n^m	57
5.3	Résultats numériques et discussion	57
5.4	Application au faisceau feuille laser	59
5.5	Limites de la méthode F1	61
5.6	Conclusion	63
6	Interprétation Localisée	65
6.1	Développement des champs en mode d'azimut	65
6.2	Interprétation localisée des coefficients g_n^m	68
6.2.1	Cas général	68
6.2.2	Cas particuliers	71
6.3	Validation de l'interprétation localisée	72
6.3.1	Relations de symétrie	73
6.3.2	Comparaisons numériques	74
6.4	Temps de Calcul	76
6.5	Conclusion	79
7	Interprétation Localisée Intégrale	81
7.1	Développement de la Méthode	81
7.2	Calcul des g_n^m du faisceau gaussien de l'ordre L^3	82
7.3	Calcul des g_n^m du faisceau feuille laser	83
7.4	Conclusion	84
III	Applications	87
8	Comportements des Champs Diffusés	91
8.1	Champ extérieur à la particule	91
8.1.1	Formules	91
8.1.2	Diagrammes de diffusion	92
8.2	Sections efficaces de la particule	96
8.2.1	Cas du faisceau gaussien	97
8.2.2	Cas du faisceau feuille laser	98
8.3	Conclusion	101
9	Evaluation d'un Système de Mesure Réel	103
9.1	Théorie de la diffusion de deux faisceaux	103
9.1.1	Description générale du problème	103
9.1.2	Puissance collectée	104

9.2	Principe du système DCW	105
9.3	Signaux simulés par la TLMG et discussion	107
9.4	Conclusion	110
10	Imagerie d'une Particule Eclairée par un Faisceau laser	111
10.1	Théorie d'imagerie d'une particule	111
10.2	Validation du modèle et du code	113
10.3	Images simulés par la TLMG	115
10.3.1	Faisceau incident parallèle à l'axe du système optique	115
10.3.2	Faisceau incident perpendiculaire à l'axe du système optique	117
10.4	Conclusion	118
	 Conclusion Générale	 129
I	Annexes	135
A	Evaluation de l'Intégrale du Champ	137
B	Expressions de $\Delta_r V$ et $\Delta_{\theta,\phi} V$	139
C	Démonstration d'une Inégalité des d_{2p+1} avec $j=1$	141
D	g_n d'Onde Plane	143
E	Listing du programme GNMF	145
F	Listing du Programme GNMSHF	149
	 Bibliographie	 153

Liste des notations

$\mathbf{A}$	potentiel vecteur	23, 23
A	notation	66
$\overline{A}$	notation	69
$\mathcal{A}$	termes multiplicatifs dans les expressions du champ incident	68
A_{lm}	coefficient de forme du faisceau utilisés dans la méthode F1	49
$A_x(p, q)$	amplitude complexe du spectre angulaire de l'onde plane	28
$A_y(p, q)$	amplitude complexe du spectre angulaire de l'onde plane	28
B	notation	66
$\overline{B}$	notation	69
B_{lm}	coefficient de forme du faisceau utilisés dans la méthode F1	50
C	notation	66
$\overline{C}$	notation	69
C_{ext}	section efficace d'extinction du diffuseur	20
C_n^m	facteur utilisé dans la méthode F2	38
$C_{n,B}^m$	facteur utilisé dans la méthode F1	14
C_n^{pw}	coefficient pour l'onde plane	22
$C_{pr,x}$	composante transversale de la section efficace de pression de radiation	20
$C_{pr,y}$	composante transversale de la section efficace de pression de radiation	20
$C_{pr,z}$	composante longitudinale de la section efficace de pression de radiation	20
C_{sca}	section efficace de diffusion du diffuseur	20
$\mathbf{E}$	champ électrique	14
E_0	amplitude du champ électrique au centre du faisceau	26, 14
E_r	composante radiale électrique du champ incident	14
$\mathcal{F}$	opérateur de l'approximation localisée	68
$\mathbf{H}$	champ magnétique	14
H_0	amplitude du champ magnétique au centre du faisceau	26, 14
H_r	composante radiale magnétique du champ incident	14
J_1	fonction de Bessel de premier ordre	114
L^-	ordre de description du champ à l'approximation $O(s^0)$	18, 25
L	ordre de description du champ à l'approximation $O(s)$	18, 25
L^2	ordre de description du champ à l'approximation $O(s^3)$	25
L^3	ordre de description du champ à l'approximation $O(s^5)$	18
$\overline{P}_s$	piédestal du signal	107
P_n	polynôme de Legendre	16
P_n^m	polynôme de Legendre associées	14, 16
Q	notation pour le faisceau gaussien	19, 24
Q_x	notation pour le faisceau feuille laser	29
Q_y	notation pour le faisceau feuille laser	29
$\overline{Q}_x$	notation pour le faisceau feuille laser	69
$\overline{Q}_y$	notation pour le faisceau feuille laser	69
R	rayon de courbure du front d'onde du faisceau gaussien	25
R_x	rayon de courbure du front d'onde du faisceau feuille laser dans la direction parallèle à la polarisation	30
R_y	rayon de courbure du front d'onde du faisceau feuille laser dans la direction perpendiculaire à la polarisation	30
U_{TE}	potentiel transversal électrique de Bromwich	37
U_{TM}	potentiel transversal magnétique de Bromwich	37
$\mathbf{V}$	fonction vecteur représentant le champ électrique $\mathbf{E}$ ou	

	le champ magnétique $\mathbf{H}$	36
V	visibilité du signal	107
Y_{lm}	fonction harmonique de surface sphérique	49
Z_n^m	coefficient de normalisation	69
a_i	rayon de l'image	116
a_n	coefficient d'amplitude de la Théorie de Lorenz-Mie	22
a_s	rayon de la surface sphérique utilisé par la méthode F1 pour calculer les coefficients de forme du faisceau	50
b_n	coefficient d'amplitude de la Théorie de Lorenz-Mie	22
f	focal de la lentille	112
f_a	fréquence anisotropique	107
f_d	fréquence Doppler	106
g_n	coefficient de la théorie de Lorenz-Mie généralisée pour un diffuseur axé	51, 51
g_n^m	coefficient de forme du faisceau $g_{n,TM}^m$ ou $g_{n,TE}^m$	13
$g_{n,TE}^m$	coefficient de forme du faisceau pour l'onde transversale électrique	11, 37
$g_{n,TE}^{m,o}$	forme intermédiaires des coefficients $g_{n,TE}^m$	68
$g_{n,TM}^m$	coefficient de forme du faisceau pour l'onde transversale magnétique	11, 50, 37
$g_{n,TM}^{m,o}$	forme intermédiaires des coefficients $g_{n,TM}^m$	68
k	nombre d'onde	24
l	longueur de divergence du faisceau gaussien	19, 23
l_x	longueur de divergence du faisceau feuille laser dans la direction parallèle à la polarisation	29
l_y	longueur de divergence du faisceau feuille laser dans la direction perpendiculaire à la polarisation	29
m	indice complexe de réfraction de la particule	92
n_0	indice de de réfraction de la lentille	112
r_b	rayon de l'ouverture	113
s	paramètre adimensionnel pour décrire l'approximation des description du faisceau feuille laser	24, 32
s	paramètre fondamental adimensionnel pour décrire l'approximation des description du faisceau gaussien	24
s_b	distance entre les centres au col de deux faisceaux	105
$\mathbf{u}$	vitesse de la particule	106
v	rapport des deux longueurs des axes au col du faisceau feuille laser	32
w	rayon local du faisceau gaussien	24
w_0	rayon au col du faisceau gaussien	19
w_x	longueur de l'axe elliptique local du faisceau feuille laser dans la direction parallèle à la polarisation	30
w_y	longueur de l'axe elliptique local du faisceau feuille laser dans la direction perpendiculaire à la polarisation	30
w_{0x}	longueur de l'axe elliptique au col du faisceau feuille laser dans la direction x	27
w_{0y}	longueur de l'axe elliptique au col du faisceau feuille laser dans la direction y	27
x_0	coordonnée du centre du col du faisceau dans le repère de la particule	13
y_0	coordonnée du centre du col du faisceau dans le repère de la particule	13
z_0	coordonnée du centre du col du faisceau dans le repère de la particule	13
z_{32}	distance entre l'ouverture et le plan image	111
z_{p0}	distance entre la particule et la lentille	116
DCW	Double Cylindric Wave – double-onde cylindrique	5
F1	méthode intégrale pour calculer les coefficients de forme	

	du faisceau développée par Barton et al	45
F2	méthode intégrale pour calculer les coefficients de forme du faisceau développée à Rouen	45
LDV	Laser Doppler Velocimetry	5
PDA	Phase Doppler Anemometry – anémométrie phase Doppler	5
PIV	Particle Image Velocimetry	6
TAE	Trajectory Ambiguity Effect – effet d’ambiguïté de trajectoire	5
TLM	théorie de Lorenz-Mie	3
TLMG	théorie de Lorenz-Mie généralisée	4
Δ_0	épaisseur de la lentille	112
$\Delta_{\theta,\phi}$	opérateur pour démontrer l’approximation de description du faisceau	38
Δ_r	opérateur pour démontrer l’approximation de description du faisceau	38
Φ_a	phase anisotropique	107
α	paramètre de la taille de la particule	117
γ	notation	114
ϵ_n	notation	83
ε	permittivité électrique	28
ζ	coordonnée cartésienne réduite pour le faisceau feuille laser	32
η	coordonnée cartésienne réduite pour le faisceau feuille laser	32
η	coordonnée cartésienne réduite pour le faisceau gaussien	26
λ	longueur d’onde	24
μ	perméabilité magnétique	28
ξ	coordonnée cartésienne réduite pour le faisceau feuille laser	32
ξ	coordonnée cartésienne réduite pour le faisceau gaussien	26
ξ_n	fonction de Ricatti-Bessel	22
π_n^m	fonction de Legendre généralisées	22
ρ_0	rayon de détecteur	104
ρ_n	paramètre de l’approximation localisée	69
τ_n^m	fonction de Legendre généralisées	22
ϕ_d	angle hors-axe	103
ψ_0	mode fondamental du faisceau gaussien	19, 24
ψ_0^{sh}	mode fondamental du faisceau feuille laser	29
ψ_0^{0sh}	notation pour le faisceau feuille laser	69
$\overline{\psi}_0^{0sh}$	notation pour le faisceau feuille laser	69
ψ_2	mode de l’ordre L^2 du faisceau	25
ψ_4	mode de l’ordre L^3 du faisceau	25
$\psi_n^{(j)}$	fonction sphériques de Bessel	14, 48
ψ_n	fonction de Ricatti-Bessel	48
ω	pulsation de l’onde sinusoïdale	23
ω_D	shift hétérodyne doppler de la pulsation	105

List of Figures

1.1	Géométrie de la TLMG	14
2.1	Géométrie du faisceau gaussien	24
3.1	Géométrie du faisceau feuille laser	28
3.2	Projection oblique du faisceau feuille laser	31
5.1	Géométrie du problème de diffusion	48
5.2	Fonction $t_n(x)$ pour différents n	54
5.3	Partie réelle du noyau de l'intégrale du g_1 , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 0,122; 1,22; 12,2$	55
5.4	Partie imaginaire du noyau d'intégrale du g_{10} , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 0,122; 1,22; 12,2$	55
5.5	Partie imaginaire du noyau d'intégrale du g_{10} , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 122$	56
5.6	Noyau d'intégration $F_n(x)$ de la méthode F2 pour différent n	56
5.7	$g_{n,TM}^1$ en fonction de la borne supérieure d'intégration sur kr , $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$	61
5.8	$g_{n,TM}^1$ en fonction de la borne supérieure d'intégration sur kr , $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$	62
6.1	Erreur relative entre les $g_{n,TM}^m$ calculés par la méthode intégrale et l'interprétation localisée, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$	75
6.2	g_n^1 calculé par l'interprétation localisée, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$	77
6.3	g_n^5 calculé par l'interprétation localisée, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 16,5 \mu\text{m}$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$	78
7.1	g_n^1 calculés par l'interprétation localisée intégrale, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$	85
7.2	g_n^5 calculés par l'interprétation localisée intégrale, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 16,5 \mu\text{m}$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$	85
8.1	Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 0^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau	92
8.2	Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 90^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau	93
8.3	Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 45^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau	93
8.4	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le petit axe au col du faisceau pour $x_0 < 0$	94
8.5	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le petit axe au col du faisceau pour $x_0 > 0$	94

8.6	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le grand axe au col du faisceau	95
8.7	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 3 \text{ mm}$ polarisé dans la direction du petit axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 0^\circ$, la particule se situant sur le petit axe au col	95
8.8	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 5 \mu\text{m}$ polarisé dans la direction du grand axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 90^\circ$, la particule se situant sur le petit axe au col	96
8.9	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 3 \text{ mm}$ polarisé dans la direction du petit axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 0^\circ$, la particule se situant sur l'axe du faisceau	96
8.10	Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 5 \mu\text{m}$ polarisé dans la direction du grand axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 90^\circ$, la particule se situant sur l'axe du faisceau	97
8.11	Pression de radiation longitudinale du faisceau gaussien à l'ordre L^3 en fonction de la position de la particule pour différents indices de réfraction: le rayon de la particule $a = 3,75 \mu\text{m}$, la longueur d'onde $\lambda = 0,3682 \mu\text{m}$, le rayon du col $w_0 = 1,8 \mu\text{m}$	98
8.12	Pression de radiation longitudinale du faisceau gaussien à l'ordre L^3 en fonction de la position de la particule pour différentes tailles de particule: l'indice de réfraction $m = 1,5$, la longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, le rayon du col $w_0 = 0,25 \mu\text{m}$	99
8.13	Section efficace d'extinction en fonction du rayon de la particule de l'indice de réfraction $m = 1,33$ éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien de rayon du col $w_0 = 10 \mu\text{m}$, ou un faisceau feuille laser des longueurs des axes au col $w_{0x} = 10 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 100 \mu\text{m}$, longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$	99
8.14	Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, parallèlement à la polarisation, un faisceau gaussien circulaire de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, de rayon du col $w_0 = 2 \mu\text{m}$	100
8.15	Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, perpendiculairement à la polarisation, un faisceau gaussien circulaire de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, de rayon du col $w_0 = 2 \mu\text{m}$	100
8.16	Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, parallèlement à la polarisation, un faisceau feuille laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$	101
8.17	Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse perpendiculairement à la polarisation, un faisceau feuille laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$	101
9.1	Géométrie du système de diffusion de la lumière de deux faisceaux	104
9.2	Géométrie du system DCW	106
9.3	Interfranges de deux faisceaux feuilles laser	106
9.4	Deux signaux simulés par la GLMT pour les angles hors-axe de 10° et 90°	107
9.5	Deux signaux simulés par la GLMT pour les particules de rayons de $0,5 \mu\text{m}$ et $20,0 \mu\text{m}$	108
9.6	Signaux simulés par trois différents méthodes pour l'angle hors-axe de 10°	108
9.7	Résultats expérimentaux et simulés de Naqwi et al	109
9.8	Rapport des fréquences f_a/f_d simulés par trois méthodes	109
10.1	Géométrie du système d'imagerie	112
10.2	Simulation de la diffraction de Fraunhofer: longueur d'onde $0,6328 \mu\text{m}$, rayon de l'ouverture 3 mm	114
10.3	Intensité sur l'axe optique: une onde plane de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ focalisée par une lentille de rayon de 3 mm et de 50 mm de focale	115

10.4	Résultats théoriques (ligne continue) et numériques (circle) de Schaub pour une goutte d'eau (indice de réfraction $m = 1,345 - 8.7 \times 10^{-9}i$) de rayon de $26,5 \mu\text{m}$ éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,337 \mu\text{m}$, de rayon au col de $1,5 \text{ mm}$ avec une ouverture de rayon de $1,5 \text{ mm}$ ou $2,5 \text{ mm}$	116
10.5	Résultats simulés par la TLMG pour le même cas que la figure précédente	119
10.6	Intensité dans le plan image d'un faisceau onde plane sans ou avec une particule: effet de l'intensité au centre de l'image	120
10.7	Positions de la particule étudiée, l'axe du faisceau incident confondu avec l'axe optique	120
10.8	Intensité dans l'image d'une goutte d'eau éclairée par une onde plane de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ se propageant le long de l'axe optique avec une ouverture de rayon de 3 mm : différentes positions de la particule	121
10.9	Intensité dans l'image d'une goutte d'eau éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$, de rayon au col $w_0 = 1,5 \text{ mm}$, d'axe confondu avec l'axe optique, avec une ouverture de rayon de 3 mm : différentes positions de la particule	122
10.10	Intensité dans l'image d'une goutte d'eau située sur l'axe optique dans le plan objet éclairée par un faisceau feuille laser de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$, des axes au col $w_{0x} = 10 \text{ mm}$, $w_{0y} = 1,5 \text{ mm}$, d'axe confondu avec l'axe optique: différents rayons de l'ouverture	123
10.11	Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par une onde plane	124
10.12	Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par un faisceau gaussien	124
10.13	Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par un faisceau feuille laser	125
10.14	Positions de la particule étudiées, l'axe du faisceau incident perpendiculaire à l'axe optique	125
10.15	Intensité dans l'image d'une goutte d'eau pour six différentes tailles, éclairée par un faisceau gaussien de rayon au col 3 mm , se propageant perpendiculairement à l'axe optique et polarisé dans la direction Z	126
10.16	Intensité dans l'image d'une particule de rayon de $15 \mu\text{m}$ située sur l'axe du faisceau, éclairée par un faisceau feuille laser des axes au col $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 3 \text{ mm}$ se propageant perpendiculairement à l'axe optique: effets de la polarisation	127
10.17	Répartition de l'intensité dans les images d'une particule de rayon de $15 \mu\text{m}$ située sur l'axe optique éclairée par un faisceau feuille laser de différentes polarisations et différentes positions	128

List of Tables

5.1	Points de valeur extrême x_{nj} de $t_n(x)$ [$t'_n(x_{nj}) = 0$]	54
5.2	Comparaison des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $w_0=10\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	57
5.3	Comparaison des coefficients $g_{n,TM}^m$ calculés par différentes méthodes, $w_0=10\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=5\ \mu\text{m}$, $y_0=z_0=0$	58
5.4	Temps de calcul des g_n en seconde, correspondant au tableau 5.2	58
5.5	Temps de calcul des $g_{n,TM}^m$ en seconde, correspondant au tableau 5.3	59
5.6	g_n de l'onde plane calculés par la méthode F1 $w_0=1000\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	59
5.7	$g_{n,TM}^m$ du faisceau gaussien calculés par la méthode F1, $w_0=10\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=5\ \mu\text{m}$, $y_0=z_0=0$	60
5.8	g_n du faisceau gaussien calculés par la méthode F2, $w_0=10\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $z_0=0$	60
5.9	Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^1$ calculés par les méthodes F1 et F2, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	60
5.10	Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^1$ calculés par les méthodes F1 et F2, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=5\ \mu\text{m}$	61
5.11	g_n du faisceau gaussien à l'ordre L^3 calculés par la méthode F1, $w_0=0,5\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	62
5.12	$g_{n,TM}^m$ du faisceau gaussien à l'ordre L^3 calculés par la méthode F1, $w_0=0,5\ \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $x_0=0,5\ \mu\text{m}$, $y_0=z_0=0$	63
6.1	Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	74
6.2	Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et de l'intégration F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=0$, $z_0=5\ \mu\text{m}$	75
6.3	Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et de l'intégration F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=5\ \mu\text{m}$	76
6.4	Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=3\ \text{mm}$, $w_{0y}=2\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=0$, $z_0=200\ \mu\text{m}$	77
6.5	Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=3\ \text{mm}$, $w_{0y}=2\ \mu\text{m}$, $x_0=0$, $y_0=16,5\ \mu\text{m}$, $z_0=200\ \mu\text{m}$	78
6.6	Comparaison du temps de calcul en seconde entre l'interprétation localisée et la méthode intégrale F1, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_{0x}=5\ \mu\text{m}$, $w_{0y}=10\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=5\ \mu\text{m}$	79
7.1	Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^m$ calculés par différentes méthodes, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_0=1\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0,5\ \mu\text{m}$	82
7.2	Comparaison des valeurs des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_0=1\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$	84
7.3	Comparaison des valeurs des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $\lambda=0,5145\ \mu\text{m}$, $w_0=1\ \mu\text{m}$, $x_0=y_0=0$, $z_0=5\ \mu\text{m}$	84
9.1	Fréquences mesurées à partir des signaux simulés par différentes méthodes	109

.

Part

Introduction Générale

Parmi les innombrables phénomènes de la nature, ceux reliés à la diffusion de la lumière sont au sein des plus fascinants. L'azur du ciel, l'embrassement d'un levant ou d'un couchant proviennent de la diffusion de la lumière solaire par les molécules et les particules de l'atmosphère terrestre. La clarté d'une journée sans soleil s'explique aussi par la diffusion de la lumière: bien que les nuages nous cachent le soleil, leurs gouttelettes ou leurs cristaux diffusent une partie importante de la lumière solaire. Ainsi, même sans soleil, le jour est bien différent de la nuit! Parmi eux, l'arc-en-ciel par temps de pluie occupe une place particulière.

L'explication théorique des phénomènes liés à la diffusion de la lumière par des particules sphériques commença au milieu du XIX^{ème} siècle [64] [103] [25]. L'analyse théorique rigoureuse de cette diffusion par une particule unique a été formulée à la fin du XIX^{ème} siècle et au début du XX^{ème} siècle par Lorenz [65], Mie [74] et Debye [28] (diffusion d'une onde plane par une particule sphérique, homogène, isotrope et non magnétique) désignée désormais par *théorie de Lorenz-Mie (TLM)*.

La lumière diffusée contient des informations sur les particules avec lesquelles elle interagit. Ceci ouvre de larges possibilités pour mesurer les propriétés des objets diffusants. Ainsi, parallèlement à l'explication des phénomènes naturels beaucoup d'efforts ont été dédiés à la métrologie optique. Celle-ci présente de nombreux avantages: mesures in-situ, petit volume de mesure, non-perturbation de l'objet lors de la mesure, suivi dans le temps des paramètres mesurés, ...

Le domaine d'application des métrologies basées sur la diffusion de la lumière est vaste. On peut notamment mentionner:

- *Combustion*: la lumière diffusée par les gouttelettes en combustion nous renseigne sur leurs tailles, vitesses, température, comportement, etc. [24] [31]. En les connaissant, nous pouvons améliorer la combustion de moteur d'automobile [29] et/ou de fusée ...
- *Mécanique de fluide*: par la mesure de la lumière diffusée par les particules ou par la photographie du speckle des particules dans le fluide, nous pouvons connaître sa vitesse, son vortex, ... même le mode de l'écoulement [33] [5].
- *Réaction chimique*: la connaissance de l'évolution du comportement chimique et de la concentration des particules (ou bulles) par mesure de la lumière diffusée nous permettent de juger de la vitesse de la réaction et de suivre son évolution ...
- *Environnement et météorologie*

En outre, depuis l'invention du laser, la métrologie optique a connu un formidable essor grâce aux caractéristiques de la lumière émise: grande pureté chromatique, très grande cohérence, faible divergence du faisceau et grande luminance. La théorie [106] [61] [19] [62] de la diffusion de la lumière et les techniques [18] [38] de mesure connectées ceux sont beaucoup développées. Cependant, la théorie s'est focalisée longtemps sur deux aspects extrêmes:

L'optique géométrique: elle n'est valide que pour des tailles des objets diffusants grandes devant la longueur d'onde du rayonnement incident, ainsi que pour des domaines angulaires de diffusion et d'indice de réfraction de l'objet restreints. Cependant, l'optique géométrique autorise la prise en compte, au moins partiellement, d'un éclairage non-uniforme sur la particule. De plus, grâce à ses avantages de calcul rapide et de compréhension directe elle est largement utilisé pour les analyses et calculs des problèmes optiques.

La théorie de Lorenz-Mie: elle décrit la diffusion d'une onde plane par la résolution des équations de Maxwell, le diffuseur est une sphère parfaite. Il n'y a pas de limite sur l'angle de diffusion et l'indice complexe de réfraction de la particule. Parce qu'elle est une théorie rigoureuse, elle est largement appliquée. Mais elle n'est valide que lorsque la dimension du faisceau d'éclairage est grande devant la taille de l'objet diffusant. En effet elle ne prend pas en compte l'éclairage non-uniforme du faisceau.

La réalité n'est pas toujours en accord avec les hypothèses précédentes et les faisceaux d'onde non-plane de différentes formes ont leurs avantages dans les techniques de diffusion de la lumière. Différentes techniques basées sur la diffusion de faisceaux finis ont été ainsi créées et appliquées à la mesure des propriétés de particules individuelles ou de nuage de particules. Puisque l'optique géométrique et la théorie de Lorenz-Mie ont chacune leurs limites et donc sont pas aptes pour traiter ces problèmes, une théorie rigoureuse pour traiter la diffusion de faisceaux finis par une particule sphérique – la **Théorie de Lorenz-Mie généralisée (TLMG)** – a été développée [47] et appliquée à l'analyse de différents techniques associés, comme le phase doppler [53] par exemple. Cette théorie et certaines de ces techniques sont maintenant décrites et discutées. Nous présenterons des techniques de mesure de particules individuelles, ainsi que des techniques de mesure de nuage de particules.

0.1 Théorie de Lorenz-Mie Généralisée

La théorie de Lorenz-Mie généralisée a été développée à l'URA CNRS 230 de Rouen depuis une dizaine d'années. Elle décrit l'interaction d'un faisceau quelconque avec une particule sphérique, homogène, isotrope et non-magnétique arbitrairement localisée dans ce faisceau. Elle donne accès à la description de la lumière diffusée à partir d'un faisceau d'extension finie sans limite sur la taille du diffuseur, la longueur d'onde incidente, l'indice complexe de réfraction de la particule, la domaine angulaire de la diffusion, la géométrie du faisceau incident. Cette théorie s'obtient par résolution des équations de Maxwell pour une sphère éclairée par un faisceau quelconque. La description du profil du faisceau incident sur le diffuseur est prise en compte par les séries de nouveaux coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ qui sont déterminés par les composantes radiales électrique et magnétique du champ incident dans le repère du diffuseur.

Les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ qui décrivent la forme du faisceau sont au cœur de la théorie. Nous connaissons quatre méthodes pour les calculer: intégration, série finie, interprétation localisée et expansion.

Méthode intégrale est rigoureuse et souple car il suffit de changer le noyau d'intégration lorsque le profil du faisceau incident est modifié. Bien qu'elle exige beaucoup de temps de calcul [66] [47] ses avantages de rigueur et de souplesse nous permettent de l'appliquer à un faisceau quelconque et d'évaluer des méthodes approximatives, interprétation localisée par exemple.

Méthode des séries finies est également rigoureuse mais pas aussi souple. Une modification de profil du faisceau incident nécessite de reprendre le travail analytique pour obtenir les séries finies correspondantes. Seules les expressions de ces séries finies pour un faisceau gaussien sont maintenant disponibles [44] [41].

Interprétation localisée est une méthode approximativement établie mais beaucoup plus rapide. Sa validité a été démontrée numériquement [43] [86] et théoriquement [63] [46] pour un faisceau gaussien. Mais la dérivation rigoureuse complète pour un faisceau quelconque est encore inconnue.

Méthode d'expansion a récemment été développée par Lock et Gouesbet [63] [46] pour un faisceau gaussien circulaire. Il repose sur le développement en série de Taylor des fonctions représentatives du champ incident. Les principaux résultats de ce travail sont:

- la définition de faisceau dit standart, c'est-à-dire répondant exactement aux équations de Maxwell.
- la démonstration rigoureuse de l'opérateur de localisation.

Ce travail ayant été effectué postérieurement à celui de cette thèse ces résultats ne sont pas inclus dans cet ouvrage.

Cependant, nous pouvons indiquer que la démonstration rigoureuse de l'opérateur de localisation amène à utiliser une distance de localisation de $\sqrt{(n-1)(n+2)} \frac{\lambda}{2\pi}$ au lieu de $(n+1/2) \frac{\lambda}{2\pi}$. Cette modification ne change pas les résultats de cette thèse, et au contraire, renforce les validations numériques de l'application de l'opérateur de localisation au faisceau feuille laser.

D'un point de vue pratique, l'application de la TLMG dépend fortement de la vitesse de calcul des coefficients g_n^m et de sa souplesse aux différents profils de faisceaux. La technique de calcul pour le faisceau gaussien est bien développée [43] [86] et maintenant peut être utilisée sans inconvénient même sur des micro-ordinateurs. Cependant, pour d'autres formes de faisceaux elle reste à développer. Les difficultés principales sont premièrement d'obtenir les descriptions mathématiques des faisceaux et puis de trouver des méthodes efficaces pour calculer les g_n^m .

0.2 Techniques de mesure

0.2.1 Anémométrie phase doppler

L'anémométrie phase doppler (PDA – Phase Doppler Anemometry) est une extension de la vélocimétrie doppler laser (LDV-Laser Doppler Velocimetry). C'est une des techniques les plus populaires de mesure de la taille de particule. Suivant le travail des pionniers Durst et Zaré [32], elle a été améliorée par Bachalo et Houser [11] [12], Saffman et al [98] et Bauckhage et al [17] puis développée commercialement par des entreprises: Aerometrics [6], Dantec [26] et Invent [60]. Elle est censée mesurer simultanément la taille, la vitesse et la concentration de particules dans un fluide. Cette technique est basée sur la mesure du décalage dans le temps de signaux LDV, normés par la période. Classiquement, la relation entre le signal et le diamètre de la particule est prédit soit par l'optique géométrique, soit par la théorie de Lorenz-Mie.

Pourtant, lorsque la taille de la particule n'est pas suffisamment petite devant les dimensions des faisceaux, ceux-ci ne peuvent pas être traités comme des ondes planes. Bachalo et Sankar [13] ont trouvé que les phases dépendent de la localisation de la particule dans les faisceaux, désigné comme effet d'ambiguïté de trajectoire (TAE – Trajectory Ambiguity Effect) ce qui limite le domaine d'application de la PDA [36]. Beaucoup d'efforts ont ainsi été faits pour analyser la TAE [36] [99] [52] [50] [51].

Evidemment, la TLM n'est pas apte à résoudre ce problème. L'optique géométrique est utilisable, mais c'est une théorie limitée, qui probablement manque de précision, surtout dans des angles critiques comme l'angle d'arc-en-ciel.

Par conséquent, la TLMG devient la seule théorie apte, et elle a été appliquée à analyser ce problème [53] [36] [50] [51]. En utilisant la TLMG Gréhan et al [53] montrent que pour une géométrie de diffusion avant, l'effet du gradient d'éclairement, dû à la trajectoire de la particule, sur la mesure phase doppler est important si la diamètre de la particule est plus grand que 1/5 du diamètre du volume de mesure et que pour une géométrie de diffusion arrière, l'effet est plus important encore.

D'après des analyses basées sur la TLMG certains remèdes sont proposées pour résoudre ce problème [37] [51].

0.2.2 Système DCW

Naqwi et al ont développé une géométrie double-onde cylindrique (**DCW** -Double Cylindrical Wave) [80] qui permet également de mesurer simultanément la taille et la vitesse [81] de la particule. Ici deux faisceaux feuille laser (ses rayons des deux axes au col sont de $2\mu\text{m}$ et $3000\mu\text{m}$) parallèles créent un système de franges en éventail où l'interfrange est fonction de la distance au col des faisceaux. Les différentes informations (vitesse, diamètre, indice de réfraction) sont toutes contenues dans la fréquence du signal diffusé [77] au lieu de la fréquence et du décalage temporel dans le système phase doppler "classique". Il est aussi possible avec ce système de "reconnaître" la matière constituant la particule (indice de réfraction) [78] [81]. Cette géométrie permet d'obtenir une dynamique très

importante sur le diamètre. De plus, puisque l'on ne mesure que des fréquences, le traitement des signaux est simplifié.

Bien que des essais systématiques aient démontrés les potentialités de cette approche, des désaccords inexpliqués subsistent entre résultats expérimentaux et simulations.

Cependant, dans les simulations les faisceaux incidents sont traités par l'optique géométrique ou par la théorie de Lorenz-Mie. L'utilisation d'une théorie plus rigoureuse devrait permettre de diagnostiquer l'origine de ces désaccords.

0.2.3 Technique PIV

La PIV (Particle Image Velocimetry) a essentiellement pour objet de mesurer simultanément des vecteurs d'écoulement en une section [2] de fluide par photographie des déplacements de petites particules. Les particules sont illuminées par une feuille laser mince et avec deux éclairs courts, consécutifs dans le temps (le temps entre les éclairs est fonction de la vitesse des particules) [4].

Elle trouve son origine il y a 15 ans dans les articles de Dudderar et Simpkins [30], Barker et Fourney [14], Grousson et Mallick [57] sur la vélocimétrie speckle laser pour la mécanique de fluide, et presque une décennie par les travaux de pionnier Meynart [73] [72]. Depuis l'introduction formelle de la PIV [82] [1], beaucoup de développements ont été accomplis, liés à la fois au progrès technologique et à la formulation théorique. La PIV a atteint un niveau où elle peut être appliquée sérieusement à des expériences de mécanique des fluides complexes pour obtenir des informations inaccessibles par d'autres moyens expérimentaux. Sans doute, la contribution la plus importante de la PIV est sa capacité d'effectuer des mesures de vecteurs vitesse en plusieurs points simultanément [3].

L'imagerie basée sur une théorie rigoureuse de la diffusion d'un faisceau feuille laser serait utile pour analyser plus précisément cette technique.

0.2.4 Rapport de polarisation

Massoli et al [71] ont démontré que la mesure d'une particule individuelle par le rapport de polarisation est précise lorsque elle traverse la région centrale d'un faisceau étendu. Par contre, différentes investigations expérimentales, dans des sprays d'eau atomisée, ont démontré que les diamètres moyens mesurés par le rapport de polarisation diffèrent de ceux obtenus par Phase Doppler [84] [83]. Après avoir examiné rigoureusement l'hypothèse concernant la distribution des gouttelettes, Ryan et al [97] conclurent que la cause du biais est inconnue et indiquent qu'il est nécessaire de réexaminer les hypothèses de base liées à la technique du rapport de polarisation. La TLMG pour le faisceau feuille laser a été récemment appliquée par Mroczkra et al [75] pour étudier ce problème en considérant la sensibilité du rapport de polarisation avec la position de la particule dans un faisceau finie. Ils trouvent que la mesure des diamètres de particules individuelles est de validité dubitative si la position de la particule est inconnue parce que la phénomène de diffusion dépend fortement de position de la particule. Leurs résultats montrent aussi que le désaccord entre les mesures par le rapport de polarisation et par le phase doppler peut être dû au processus d'échantillonnage.

0.3 Plan de la thèse

En résumé, la TLMG fournit un outil théorique puissant pour traiter les problèmes liés à la diffusion de faisceaux fins. Cette thèse vise à étendre la TLMG à la diffusion des faisceaux feuille laser par une particule sphérique, puis à des faisceaux lasers quelconques, ainsi qu'à améliorer le calcul des coefficients g_n^m . Des applications de la théorie liées à des techniques de mesure de particules basées sur l'utilisation de faisceaux feuille laser sont discutées.

Cette thèse peut être partagée en trois parties, centrées autour d'une problématique commune. Il s'agit de:

1. Outils théoriques;

2. Outils numériques;

3. Applications.

La première partie, **Outils théoriques**, se compose de quatre chapitres.

Le chapitre 1, *Relations de symétrie des coefficients g_n^m* , compile différentes relations de symétrie entre des coefficients g_n^m en partant de condition générale sur le faisceau incident. Aucune description du faisceau incident n'est nécessaire pour ce chapitre. Les conséquences des relations de symétrie entre les coefficients g_n^m sur les quantités physiques mesurables (sections efficaces d'extinction, d'absorption, de diffusion, sections de pression de radiation, champs diffusés, fonction de phase, ...) y sont également discutées.

Le chapitre 2, *Faisceau gaussien circulaire (TEM₀₀)*, compile les principaux résultats, obtenus par ailleurs, concernant la description du faisceau gaussien circulaire.

Dans le chapitre 3, *Composantes électromagnétiques du faisceau feuille laser*, partant des équations de Maxwell, les lois de description d'un faisceau feuille laser sont obtenues par deux approches différentes.

Dans le chapitre 4, *Ordre d'approximations dans la description d'un faisceau feuille laser*, les approximations introduites dans les lois de description d'un faisceau feuille laser sont discutées, vis-à-vis des équations de Maxwell pour un système de coordonnées cartésienne ou sphérique, puis l'importance de ces erreurs introduites dans la théorie de Lorenz-Mie Généralisée sont approfondies.

La deuxième partie, **Outils numériques**, est dédiée au calcul des coefficients de forme du faisceau, les g_n^m , au cœur de la TLMG. Elle se compose de trois chapitres:

Le chapitre 5, *Méthode intégrale*, est dédié à la méthode intégrale de calcul des coefficients g_n^m . L'équivalence de deux approches intégrales: intégration doubles (sur θ et ϕ) dénotées F1, principalement utilisées par Barton et al, intégration triple (sur r, θ , et ϕ) dénotées F2, principalement développées à Rouen, est démontrées. Leurs avantages et limitations sont étudiés en détails.

Le chapitre 6, *Interprétation localisée*, est dédié à l'application des opérateurs dit de localisation au faisceau feuille laser pour obtenir les expressions des coefficients g_n^m en séries infinies. La validité et la stratégie numérique sont aussi discutées.

Le chapitre 7, *Interprétation localisée intégrale*, introduit une approche, qui combine les avantages de la méthode intégrale et de l'interprétation localisée, toute en n'en ayant pas les inconvénients. La validité de cette approche pour des faisceaux feuille laser très excentriques $\frac{w_{0x}}{w_{0y}} = 1500$, pour de grande valeur de l'indice n et pour des descriptions de faisceau à l'ordre L^3 y est montrée.

La troisième partie, **Applications**, se compose de 3 chapitres:

Le chapitre 8, *Comportements des champs diffusés*, discute les champs diffusés à partir d'un faisceau feuille laser par une particule sphérique, la physique du phénomène y est approfondie. Les sections efficaces d'extinction, de diffusion et d'absorption, et les sections de pressions de radiation du faisceau feuille laser sont discutées et comparées avec celles du faisceau gaussien. Le phénomène de la pression de radiation longitudinal négative pour un faisceau hyperfocalisé y est aussi examinée.

Le chapitre 9, *Système DCW* correspond à la simulation d'un interféromètre à deux feuilles laser. Cette configuration a été choisie car c'est à notre connaissance l'unique configuration disponible dans la littérature où des valeurs quantitatives sur la diffusion de feuille laser, par des particules sphériques sont disponibles.

Le chapitre 10, *Image d'une particule éclairée par un faisceau laser*, décrit la formation de l'image d'une particule sphérique, arbitrairement localisée dans un faisceau laser. La lentille de l'optique d'imagerie y est décrite comme une pupille de phase. Il s'agit du phénomène de base des systèmes de visualisation et/ou de mesure de carte de vitesse de type PIV. Cette étape est la clef de la réalisation de carte taille, associées aux carte vitesse.

Les publications [86] [56] [91] [87] [89] [88] [92] [85] [90] [45] [93] nées de cette thèse sont regroupées dans un volume adjoint.

Part I

Outils Théoriques

Introduction

L'étude théorique de la diffusion d'un faisceau laser par une particule nécessite premièrement une description théorique de ce faisceau. Cette partie a donc pour objet de fournir des outils théoriques pour décrire le faisceau étudié.

Les relations de symétrie du champ incident induisent des relations de symétrie pour les champs diffusés. Celles-ci sont utiles pour simplifier le calcul des coefficients g_n^m et pour analyser et vérifier la cohérence des résultats numériques et des quantités physiques mesurables obtenues.

D'autre part, le faisceau incident est décrit dans la TLMG par des potentiels scalaires de Bromwich avec deux séries infinies des coefficients $g_{n,TM}^m$ pour l'onde transversale magnétique et $g_{n,TE}^m$ pour l'onde transversale électrique ($n \geq 1, -n \leq m \leq n$, entiers). Ils comprennent tous les renseignements sur le faisceau.

Le premier chapitre est donc dédié à étudier différentes relations de symétrie entre les coefficients g_n^m , en partant de conditions générales sur le faisceau incident. Aucune description du faisceau n'est nécessaire dans ce chapitre.

A partir de deuxième chapitre, on vise à chercher des descriptions mathématiques du faisceau à étudier – le faisceau feuille laser. Ce travail est partagé en trois étapes:

Nous rappelons dans **le deuxième chapitre** le modèle du faisceau gaussien circulaire précédemment utilisé lors du développement de la théorie de Lorenz-Mie généralisée. Ce modèle nous servira de base pour décrire le faisceau feuille laser lors de l'extension de la théorie. Dans ce même chapitre, nous fournissons aussi la description du faisceau gaussien à l'ordre L^3 ayant des symétries entre les champs électrique et magnétique.

Le troisième chapitre présente la détermination des expressions du champ du faisceau feuille laser, à l'ordre le plus bas, par deux approches différentes: le développement spectral angulaire et la méthode du champ scalaire (l'approche de Davis). La description du faisceau à des ordres plus élevés est aussi discutée.

L'ordre d'approximation introduite dans les lois de description du faisceau est discuté dans **le quatrième chapitre**, vis-à-vis des équations de Maxwell, pour les systèmes de coordonnées cartésien et sphérique, puis l'importance de ces erreurs introduites dans la TLMG est approfondie.

Chapter 1

Relations de Symétrie des Coefficients

g_n^m

Les coefficients g_n^m de forme du faisceau sont au cœur de la TLMG. Bien comprendre leur caractéristiques nous aide à la fois pour les calculer efficacement et pour analyser le problème de diffusion. Par exemple, pour les champs qui possèdent une symétrie, on peut obtenir toutes les expressions des g_n^m ($g_{n,TM}^m, g_{n,TM}^{-m}, g_{n,TE}^m$ and $g_{n,TE}^{-m}$) à partir de l'une d'entre elles.

Nombre de champs électromagnétiques possèdent des relations de symétrie. Les relations de symétrie des coefficients g_n^m sont liées étroitement aux symétries du faisceau.

Dans ce chapitre nous présentons une méthode pour obtenir de telles relations dans un cadre général, puis appliquons cette méthode à un faisceau qui possèdent des symétries que les faisceaux gaussiens (jusqu'à l'ordre L^3) et le faisceau feuille laser possèdent. Ces relations de symétrie nous permettent de vérifier et de simplifier les expressions du calcul des g_n^m . De plus, elles permettent de prédire certaines propriétés concernant: pressions de radiation, sections efficaces d'extinction, d'absorption, et de diffusion, intensités des champs diffusés, phases entre les composantes diffusées perpendiculaires et parallèles, etc..

Ce chapitre est composé de cinq sections: la première présente la définition des coefficients de forme du faisceau g_n^m . Dans la deuxième section, nous définissons le champ électromagnétique à étudier. La troisième est dédiée à la recherche des relations de symétrie entre les coefficients g_n^m . Nous discuterons les applications de ces relations de symétrie dans la quatrième. La dernière section est une conclusion.

Le système de coordonnées du problème de diffusion est défini dans la figure 1.1. Le centre du faisceau se situe en O_G , l'origine du repère cartésien $(O_G; u, v, w)$. Le faisceau se propage dans la direction $O_G w$. Le diffuseur est localisé à l'origine du repère cartésien $(O_P; x, y, z)$ dont les axes sont parallèles à ceux du repère $(O_G; u, v, w)$. Un autre repère sphérique $(O_P; r, \theta, \varphi)$ lié au $(O_P; x, y, z)$ est aussi utilisé. Les coordonnées de l'origine du repère $(O_G; u, v, w)$ dans le repère du diffuseur $(O_P; x, y, z)$ sont (x_0, y_0, z_0) .

1.1 Coefficients de forme du faisceau g_n^m

Les coefficients g_n^m de la TLMG prennent en compte l'éclairage non-uniforme et non-symétrique sur la particule. Les deux séries des coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ sont définies par [47] [67]:

$$\begin{aligned}
 g_{n,TM}^m &= \frac{(2n+1)i^{n+1}}{2\pi^2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \\
 &\quad \times \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)}(kr) \int_0^{2\pi} \exp(-im\phi) \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi d(kr) \\
 g_{n,TE}^m &= \frac{(2n+1)i^{n+1}}{2\pi^2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

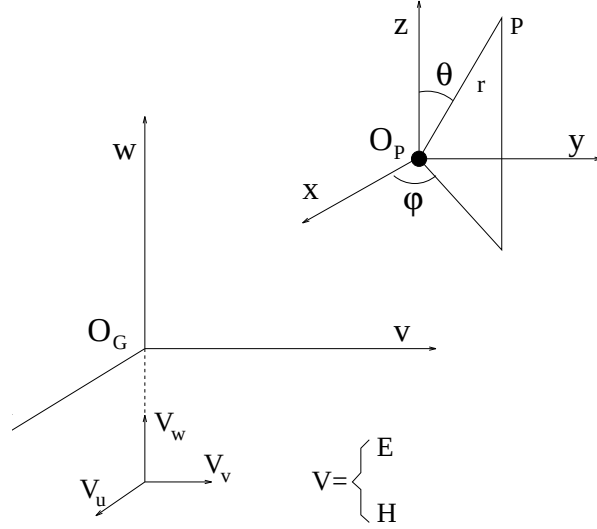


Figure 1.1: Géométrie de la TLMG

$$\times \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)}(kr) \int_0^{2\pi} \exp(-im\phi) \int_0^\pi \frac{H_r(r, \theta, \phi)}{H_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi d(kr) \quad (1.2)$$

où les $\psi_n^{(1)}(kr)$ sont les fonctions sphériques de Bessel, les $P_n^m(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre associées, E_r et H_r sont les composantes radiales électrique et magnétique du champ incident dans le repère sphérique $(O_P; r, \theta, \phi)$, E_0 et H_0 sont les amplitudes des champs électrique et magnétique au centre du faisceau. Puisque les coefficients sont déterminés par les valeurs relatives du champ nous pouvons poser $E_0 = H_0 = 1$ sans perte de la généralité.

Alternativement, nous pouvons obtenir ces coefficients par une intégration double sur les coordonnées (θ, ϕ) (formule (10) de Réf. [67]):

$$g_{n, TM}^m = C_{n, B}^{|m|} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_r P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \exp(-im\phi) d\phi d\theta \quad (1.3)$$

$$g_{n, TE}^m = C_{n, B}^{|m|} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H_r P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \exp(-im\phi) d\phi d\theta \quad (1.4)$$

où

$$C_{n, B}^{|m|} = \frac{i^{n+1}}{4\pi} \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} \frac{kr}{\psi_n^{(1)}(kr)} \quad (1.5)$$

L'équivalence entre ces deux formes, pour un champ parfaitement décrit, sera démontrée dans le chapitre 5. Nous mentionnons simplement que la dépendance en r de (1.3) et (1.4) est uniquement apparente et peut être levée par l'intégration sur r . Chaque forme a ses avantages et désavantages pour l'évaluation numérique. Théoriquement, elles sont équivalentes si l'on admet que la description du faisceau répond parfaitement aux équations de Maxwell. La discussion dans ce chapitre concerne seulement le calcul formel si bien que la différence est sans importance.

1.2 Relations de symétrie du champ incident

Les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{H}$ considérés sont décrits dans un repère $(O_G; u, v, w)$ par ses composantes cartésiennes E_u, E_v, E_w, H_u, H_v et H_w , qui ont les relations de symétrie suivantes:

$$E_u(u, v, w) = +E_u(u, -v, w) = +E_u(-u, v, w) = +E_u^*(u, v, -w) \quad (1.6)$$

$$E_v(u, v, w) = -E_v(u, -v, w) = -E_v(-u, v, w) = +E_v^*(u, v, -w) \quad (1.7)$$

$$E_w(u, v, w) = +E_w(u, -v, w) = -E_w(-u, v, w) = -E_w^*(u, v, -w) \quad (1.8)$$

$$H_u(u, v, w) = -H_u(u, -v, w) = -H_u(-u, v, w) = +H_u^*(u, v, -w) \quad (1.9)$$

$$H_v(u, v, w) = +H_v(u, -v, w) = +H_v(-u, v, w) = +H_v^*(u, v, -w) \quad (1.10)$$

$$H_w(u, v, w) = -H_w(u, -v, w) = +H_w(-u, v, w) = -H_w^*(u, v, -w) \quad (1.11)$$

C'est à dire que E_u, H_v sont des fonctions paires de u et v , E_v, H_u sont des fonctions impaires de u et v , E_w est une fonction paire de v , impaire de u , H_w est une fonction paire de u , impaire de v .

Les champs électromagnétiques du faisceau gaussien circulaire et du faisceau gaussien elliptique (faisceau feuille laser) satisfont les relations de symétrie ci-dessus (1.6)-(1.11).

Comme nous l'avons vu, les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ sont déterminés par les composantes radiales des champs électrique et magnétique E_r et H_r . Par deux changements de repère du système de $(O_G; u, v, w)$ à $(O_P; x, y, z)$, puis de $(O_P; x, y, z)$ à $(O_P; r, \theta, \phi)$, nous obtenons les composantes radiales du champ électrique et magnétique E_r et H_r qui sont suffisantes pour notre discussion:

$$\begin{aligned} E_r = & \sin \theta \cos \phi E_u(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ & + \sin \theta \sin \phi E_v(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ & + \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} H_r = & \sin \theta \cos \phi H_u(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ & + \sin \theta \sin \phi H_v(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ & + \cos \theta H_w(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Donc, en général, les coefficients de forme du faisceau g_n^m dépendent explicitement de x_0, y_0 et z_0 .

1.3 Recherche des relations de symétrie

1.3.1 Cas général

A partir des définitions des $g_{n,TM}^m$ (équation (1.3)) on obtient:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) &= C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi E_u(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ &+ \sin \theta \sin \phi E_v(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ &+ \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0)] \exp(-im\phi) d\phi d\theta \end{aligned} \quad (1.14)$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) &= C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi E_u(r \sin \theta \cos \phi + x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ &+ \sin \theta \sin \phi E_v(r \sin \theta \cos \phi + x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ &+ \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi + x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta - z_0)] \exp(im\phi) d\phi d\theta \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par un changement de la variable d'intégration: $\phi' = \pi - \phi$, et en utilisant les relations (1.6)-(1.8), nous obtenons:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) &= C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_{-\pi}^\pi [-\sin \theta \cos \phi' E_u(-r \sin \theta \cos \phi' + x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0) \\ &+ \sin \theta \sin \phi' E_v(-r \sin \theta \cos \phi' + x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \theta E_w(-r \sin \theta \cos \phi' + x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0)] \\
& \times \exp(im\pi - im\phi') d\phi' d\theta \\
& = (-1)^{m-1} C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi' E_u(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& + \sin \theta \sin \phi' E_v(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& + \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, r \sin \theta \sin \phi' - y_0, r \cos \theta - z_0)] \exp(-im\phi') d\phi' d\theta
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$g_{n,TM}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) \tag{1.17}$$

Pour obtenir la relation de symétrie en y_0 , considérons:

$$\begin{aligned}
& g_{n,TM}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \\
& = C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi E_u(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi + y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& + \sin \theta \sin \phi E_v(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi + y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& + \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi + y_0, r \cos \theta - z_0)] \exp(im\phi) d\phi d\theta
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Par un changement de la variable d'intégration: $\phi' = 2\pi - \phi$, et en utilisant les relations (1.6)-(1.8), nous obtenons:

$$\begin{aligned}
& g_{n,TM}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \\
& = C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi' E_u(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, -r \sin \theta \sin \phi' + y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& - \sin \theta \sin \phi' E_v(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, -r \sin \theta \sin \phi' + y_0, r \cos \theta - z_0) \\
& + \cos \theta E_w(r \sin \theta \cos \phi' - x_0, -r \sin \theta \sin \phi' + y_0, r \cos \theta - z_0)] \\
& \times \exp(2im\pi - im\phi') d\phi' d\theta
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$g_{n,TM}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) = g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) \tag{1.20}$$

L'obtention de la relation de symétrie en z_0 est un peu différente de ci-dessus. Pour cela, on considère le conjugué de $g_{n,TM}^m$ et utilise le changement de la variable d'intégration $\theta = \pi - \theta'$. A partir de l'équation (1.14), on obtient:

$$\begin{aligned}
& g_{n,TM}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) \\
& = C_{n,B}^{|m|*} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} [\sin \theta \cos \phi E_u^*(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta + z_0) \\
& + \sin \theta \sin \phi E_v^*(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta + z_0) \\
& + \cos \theta E_w^*(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, r \cos \theta + z_0)] \exp(-im\phi) d\phi d\theta
\end{aligned} \tag{1.21}$$

D'autre part, à partir de la définition des polynômes de Legendre associées P_n^m [108]:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \tag{1.22}$$

et de la relation de symétrie des polynômes de Legendre [108]:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{1.23}$$

nous obtenons:

$$P_n^m(-\cos \theta) = (-1)^{n+m} P_n^m(\cos \theta) \quad (1.24)$$

En remplaçant par $\theta' = \pi - \theta$ et en utilisant les relations (1.6)-(1.8), (1.5) et (1.24), la relation (1.21) devient:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) &= C_{n,B}^{|m|*} \int_0^\pi P_n^{|m|}(-\cos \theta') \sin \theta' \int_0^{2\pi} [\sin \theta' \cos \phi E_u^*(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, -r \cos \theta' + z_0) \\ &+ \sin \theta' \sin \phi E_v^*(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, -r \cos \theta' + z_0) \\ &- \cos \theta' E_w^*(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, -r \cos \theta' + z_0)] \exp(-im\phi) d\phi d\theta' \\ &= (-1)^{n+1+n+|m|} C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \\ &\quad \int_0^{2\pi} [\sin \theta' \cos \phi E_u(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, r \cos \theta' - z_0) \\ &+ \sin \theta' \sin \phi E_v(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, r \cos \theta' - z_0) \\ &+ \cos \theta' E_w(r \sin \theta' \cos \phi - x_0, r \sin \theta' \sin \phi - y_0, r \cos \theta' - z_0)] \exp(-im\phi) d\phi d\theta' \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$g_{n,TM}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) \quad (1.26)$$

La procédure pour l'onde TE est identique que celle pour l'onde TM. En résumé, nous avons pour l'onde TM:

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) \quad (1.27)$$

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = g_{n,TM}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \quad (1.28)$$

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) \quad (1.29)$$

pour l'onde TE:

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^m g_{n,TE}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) \quad (1.30)$$

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = -g_{n,TE}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \quad (1.31)$$

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TE}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) \quad (1.32)$$

Jusqu'à maintenant, nous avons obtenus toutes les relations de symétrie entre les coefficients g_n^m avec m positif et négatif. Quant aux relations entre $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$, il nous faut des relations de symétrie entre les composantes électriques et magnétiques qui sont étroitement liées à la forme du faisceau. On suppose qu'il existe les relations suivantes entre elles.

$$E_u = F(u, v, w, \Omega_x, \Omega_y) \quad (1.33)$$

$$E_v = G(u, v, w, \Omega_x, \Omega_y) \quad (1.34)$$

$$E_w = K(u, v, w, \Omega_x, \Omega_y) \quad (1.35)$$

$$H_u = G(v, u, w, \Omega_y, \Omega_x) \quad (1.36)$$

$$H_v = F(v, u, w, \Omega_y, \Omega_x) \quad (1.37)$$

$$H_w = K(v, u, w, \Omega_y, \Omega_x) \quad (1.38)$$

où F , G et K sont des fonctions quelconques, Ω_x et Ω_y sont des paramètres constants liés à la dissymétrie du faisceau. Par exemple, pour le faisceau feuille laser $\Omega_x = (w_{0x}, l_x)$, $\Omega_y = (w_{0y}, l_y)$ (pour les définitions des w_{0x} , w_{0y} , l_x et l_y voir le chapitre 3) et pour le faisceau gaussien, le champ est circulairement symétrique: $\Omega_x = \Omega_y = w_0$. Les expressions des $g_{n,TM}^m$ sont donc écrites comme:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{-m}(x_0, y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) &= C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} \{ \sin \theta \cos \phi F(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \\ &+ \sin \theta \sin \phi G(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \\ &+ \cos \theta K(r \sin \theta \cos \phi - x_0, r \sin \theta \sin \phi - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \} \exp(im\phi) d\phi d\theta \end{aligned} \quad (1.39)$$

Par le changement de variable: $\phi' = \pi/2 - \phi$, et en utilisant les relations (1.33)-(1.38), nous obtenons:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{-m}(x_0, y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) &= C_{n,B}^{|m|} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \\ &\int_0^{2\pi} \{ \sin \theta \sin \phi' F(r \sin \theta \sin \phi' - x_0, r \sin \theta \cos \phi' - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \\ &+ \sin \theta \cos \phi' G(r \sin \theta \sin \phi' - x_0, r \sin \theta \cos \phi' - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \\ &+ \cos \theta K(r \sin \theta \sin \phi' - x_0, r \sin \theta \cos \phi' - y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) \} \exp\left(\frac{im\pi}{2} - im\phi'\right) d\phi' d\theta \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$g_{n,TM}^{-m}(x_0, y_0, z_0, \Omega_x, \Omega_y) = i^m g_{n,TE}^m(y_0, x_0, z_0, \Omega_y, \Omega_x) \quad (1.41)$$

La relation (1.41) peut être aussi obtenue à partir des $g_{n,TE}^m$.

Les relations (1.27)-(1.32) et (1.41) nous permettent d'obtenir toutes les expressions des g_n^m : $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TM}^{-m}$, $g_{n,TE}^m$ et $g_{n,TE}^{-m}$ à partir d'une seule d'entre elles. De plus, ces relations indiquent aussi que les valeurs absolues des g_n^m sont toutes identiques pour m positif et négatif, et pour les coordonnées (x_0, y_0, z_0) positives et négatives. Cependant, la relation entre $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ est liée à la symétrie circulaire. Pour les faisceaux circulairement symétriques les valeurs absolues sont toujours identiques. Mais pour d'autres on a la relation:

$$|g_{n,TM}^m(x_0, y_0, \Omega_x, \Omega_y)| = |g_{n,TE}^m(y_0, x_0, \Omega_y, \Omega_x)|$$

1.3.2 Cas particuliers

Lorsque le diffuseur se déplace sur l'axe du faisceau $x_0 = y_0 = 0$ ou sur les plans $x_0 = z_0 = 0$ ou $y_0 = z_0 = 0$, les relations de symétrie sont plus particulières. Celles-ci sont particulièrement importantes pour les calculs de pression de radiation [91].

Sur l'axe du faisceau: $x_0 = y_0 = 0$

C'est le cas le plus simple et il a été exhaustivement étudié pour le faisceau gaussien à l'ordre L^- et L (voir [55] [44] par exemple) où seuls les coefficients $g_n^{\pm 1}$ sont différents de zéro. Cela est vrai pour le faisceau gaussien jusqu'à l'ordre L^3 . En fait, à partir des composantes cartésiennes du champ électromagnétique du faisceau gaussien à l'ordre L^3 (voir le chapitre 2 ou la référence [15]), par deux changement de repère du système de $(O_G; u, v, w)$ à $(O_P; x, y, z)$, puis de $(O_P; x, y, z)$ à $(O_P; r, \theta, \phi)$, nous obtenons les composantes radiales du champ électrique:

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \psi_0 \sin \theta \cos \phi \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \\ &\times \left(1 - 2sQ \cos \theta \frac{r}{w_0}\right) \left[1 - s^2 Q^2 \sin^2 \theta \frac{r^2}{w_0^2} \left(3 - iQ \sin^2 \theta \frac{r^2}{w_0^2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$+ s^4 Q^4 \sin^4 \theta \frac{r^4}{w_0^4} \left(10 - 5iQ \sin^2 \theta \frac{r^2}{w_0^2} - Q^2 \sin^4 \theta \frac{r^4}{2w_0^4} \right) \Big] \quad (1.42)$$

où :

$$\psi_0 = iQ \exp \left(-iQ \sin^2 \theta \frac{r^2}{w_0^2} \right)$$

$$Q = \frac{1}{i + \frac{2}{l}(r \cos \theta - z_0)}$$

$$l = kw_0^2$$

où w_0 est le rayon au col du faisceau gaussien. En introduisant (1.42) dans (1.3), nous pouvons démontrer aisément que dans ce cas seuls les coefficients $g_n^{\pm 1}$ sont différents de zéro, même lorsque les expressions du champ sont beaucoup plus complexes que celles du faisceau gaussien au premier ordre L .

Pour un champ plus général dont les composantes cartésiennes conservent les relations (1.6)-(1.11), on déduit directement des relations (1.27), (1.28), (1.30), (1.31) que tous les coefficients g_n^m avec m pairs sont nuls.

$$g_{n,TM}^{2m}(0, 0, z_0) = g_{n,TE}^{2m}(0, 0, z_0) = 0 \quad (1.43)$$

Sur le plan: $x_0 = z_0 = 0$ ou $y_0 = z_0 = 0$

Lorsque $x_0 = z_0 = 0$, en utilisant les relations (1.27), (1.29), (1.30) et (1.32), nous obtenons:

$$g_{n,TM}^m = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{-m} = g_{n,TM}^{m*} \quad (1.44)$$

$$g_{n,TE}^m = (-1)^m g_{n,TE}^{-m} = -g_{n,TE}^{m*} \quad (1.45)$$

C'est à dire que dans ce cas, les $g_{n,TM}^m$ sont toujours réels purs et les $g_{n,TE}^m$ sont toujours imaginaires purs.

Lorsque $y_0 = z_0 = 0$, en utilisant les relations (1.28), (1.29), (1.31) et (1.32) et en appliquant la même procédure, on trouve que pour m pair les $g_{n,TM}^m$ sont imaginaires et les $g_{n,TE}^m$ réels, pour m impair les $g_{n,TM}^m$ sont réels et les $g_{n,TE}^m$ imaginaires:

$$g_{n,TM}^m = g_{n,TM}^{-m} = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{m*} \quad (1.46)$$

$$g_{n,TE}^m = -g_{n,TE}^{-m} = (-1)^m g_{n,TE}^{m*} \quad (1.47)$$

1.4 Applications des relations de symétrie

Les relations de symétrie que nous avons obtenues dans la section précédente sont valables non seulement pour le faisceau gaussien et le faisceau feuille laser mais pour tous les faisceaux qui possèdent les symétries identiques à celles discutées dans ce chapitre. Pour ces champs nous pouvons utiliser directement les relations de symétrie des g_n^m que nous avons obtenu.

Pour d'autres formes de champs on peut aussi utiliser la méthode que nous proposons pour obtenir des relations de symétrie.

D'autre part, les relations de symétrie des coefficients g_n^m sont utiles non seulement pour vérifier et simplifier le calcul des coefficients mais aussi pour étudier les caractéristiques des valeurs physiques connectées.

Pour le champ qui possède la symétrie discutée dans ce chapitre, à partir de l'expression des $g_{n,TM}^m$ avec m positif, on peut aisément obtenir les trois autres: $g_{n,TM}^{-m}$, $g_{n,TE}^m$ et $g_{n,TE}^{-m}$ en utilisant les relations de symétrie (1.27)-(1.32) et (1.41) entre elles (voir le chapitre 6).

Nous allons dans cette section appliquer les relations de symétrie obtenues à l'analyse des sections efficaces, des pressions de radiations, et des champs électromagnétiques diffusés.

Les sections efficaces d'extinction et de diffusion s'expriment par:

$$C_{ext} = \frac{\lambda^2}{\pi} Re \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} (a_n |g_{n,TM}^m|^2 + b_n |g_{n,TE}^m|^2) \quad (1.48)$$

$$C_{sca} = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} (|a_n|^2 |g_{n,TM}^m|^2 + |b_n|^2 |g_{n,TE}^m|^2) \quad (1.49)$$

En utilisant les relations (1.27)-(1.32), on trouve que C_{ext} et C_{sca} sont symétriques en x_0 , y_0 et z_0 :

$$C_{ext}(x_0, y_0, z_0) = C_{ext}(-x_0, y_0, z_0) = C_{ext}(x_0, -y_0, z_0) = C_{ext}(x_0, y_0, -z_0) \quad (1.50)$$

$$C_{sca}(x_0, y_0, z_0) = C_{sca}(-x_0, y_0, z_0) = C_{sca}(x_0, -y_0, z_0) = C_{sca}(x_0, y_0, -z_0) \quad (1.51)$$

Elles sont symétriques le long de la direction de propagation z_0 .

Lorsque la particule est arbitrairement localisée dans un faisceau quelconque, les pressions de radiation longitudinale $C_{pr,z}$ et transversales $C_{pr,x}$, $C_{pr,y}$ exercées sur la particule peuvent être calculées par [91]:

$$\begin{aligned} C_{pr,z} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Re \left\{ \frac{1}{n+1} (A_n g_{n,TM}^0 g_{n+1,TM}^{0*} + B_n g_{n,TE}^0 g_{n+1,TE}^{0*}) \right. \\ & + \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \left(A_n g_{n,TM}^m g_{n+1,TM}^{m*} + A_n g_{n,TM}^{-m} g_{n+1,TM}^{-m*} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + B_n g_{n,TE}^m g_{n+1,TE}^{m*} + B_n g_{n,TE}^{-m} g_{n+1,TE}^{-m*} \right) \right. \\ & \left. \left. + m \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} C_n \left(g_{n,TM}^m g_{n,TE}^{m*} - g_{n,TM}^{-m} g_{n,TE}^{-m*} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$C_{pr,x} = Re(C) \quad C_{pr,y} = Im(C) \quad (1.53)$$

où

$$\begin{aligned} C = & \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(2n+2)!}{(n+1)^2} F_n^{n+1} + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{(n+1)^2} \left[F_n^{m+1} - \frac{n+m+1}{n-m+1} F_n^m \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2n+1}{n^2} \left(C_n g_{n,TM}^{m-1} g_{n,TE}^{m*} - C_n g_{n,TM}^{-m} g_{n+1,TE}^{-m+1*} + C_n^* g_{n,TE}^{m-1} g_{n,TM}^{m*} - C_n^* g_{n,TE}^{-m} g_{n,TM}^{-m+1*} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

avec

$$F_n^m = A_n g_{n,TM}^{m-1} g_{n+1,TM}^{m*} + B_n g_{n,TE}^{m-1} g_{n+1,TE}^{m*} + A_n^* g_{n+1,TM}^{-m} g_{n,TM}^{-m+1*} + B_n^* g_{n+1,TE}^{-m} g_{n,TE}^{-m+1*} \quad (1.55)$$

$$A_n = a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^* \quad (1.56)$$

$$B_n = b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^* \quad (1.57)$$

$$C_n = -i(a_n + b_{n+1}^* - 2a_n b_{n+1}^*) \quad (1.58)$$

En utilisant les relations (1.27), (1.28), (1.30) et (1.31), on trouve les relations de symétrie des $C_{pr,z}$, $C_{pr,x}$ et $C_{pr,y}$ suivantes:

$$C_{pr,x}(x_0, y_0) = -C_{pr,x}(-x_0, y_0) = +C_{pr,x}(x_0, -y_0) \quad (1.59)$$

$$C_{pr,y}(x_0, y_0) = +C_{pr,y}(-x_0, y_0) = -C_{pr,y}(x_0, -y_0) \quad (1.60)$$

$$C_{pr,z}(x_0, y_0) = +C_{pr,z}(-x_0, y_0) = +C_{pr,z}(x_0, -y_0) \quad (1.61)$$

Contrairement aux sections efficaces d'extinction et de diffusion, les pressions de radiation ne sont pas symétriques en z_0 .

Lorsque la particule se déplace parallèlement ($y_0=0$) ou perpendiculairement ($x_0=0$) à la direction de polarisation, les formules (1.52)-(1.54) peuvent être simplifiées:

$$C_{pr,z} = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{1}{n+1} (A_n g_{n,TM}^0 g_{n+1,TM}^{0*} + B_n g_{n,TE}^0 g_{n+1,TE}^{0*}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} (A_n g_{n,TM}^m g_{n+1,TM}^{m*} + B_n g_{n,TE}^m g_{n+1,TE}^{m*}) \right. \right. \\ \left. \left. + p \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} C_n g_{n,TM}^m g_{n+1,TE}^{m*} \right] \right\} \quad (1.62)$$

$$C_{pr,x} = \begin{cases} 0 & x_0 = 0 \\ \text{Re}(C) & y_0 = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

$$C_{pr,y} = \begin{cases} \text{Im}(C) & x_0 = 0 \\ 0 & y_0 = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

où

$$C = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(2n+2)!}{(n+1)^2} (A_n g_{n,TM}^n g_{n+1,TM}^{n+1*} + B_n g_{n,TE}^n g_{n+1,TE}^{n+1*}) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \frac{1}{(n+1)^2} \left[(A_n^* g_{n+1,TM}^{m-1} g_{n,TM}^{m*} + B_n^* g_{n+1,TE}^{m-1} g_{n,TE}^{m*}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2} (A_n g_{n,TM}^{m-1} g_{n+1,TM}^{m*} + B_n g_{n,TE}^{m-1} g_{n+1,TE}^{m*}) \right] \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{n^2} (C_n g_{n,TM}^{m-1} g_{n,TE}^{m*} + C_n^* g_{n,TE}^{m-1} g_{n+1,TM}^{m*}) \right\} \quad (1.65)$$

Il faut noter que les relations (1.52), (1.54), (1.62)-(1.65) sont identiques à celles que nous avons publiées dans la référence [91], Mais toutes les relations données dans cette section sont vraies pour tous les champs qui possèdent les symétries (1.6)-(1.11) et (1.33)-(1.38). Le faisceau gaussien et le faisceau feuille laser sont des cas particuliers de cette discussion générale.

De la même manière, on peut obtenir les relations de symétrie pour les champs diffusés. Dans la TLMG, les composantes du champ électromagnétique diffusé prennent les formes [47]:

$$E_r^s = -kE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} a_n g_{n,TM}^m \left[\xi_n''(kr) + \xi_n(kr) \right] P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (1.66)$$

$$E_{\theta}^s = -\frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} \left[a_n g_{n,TM}^m \xi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + m b_n g_{n,TE}^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (1.67)$$

$$E_{\phi}^s = -\frac{iE_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} \left[m a_n g_{n,TM}^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + b_n g_{n,TE}^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (1.68)$$

$$H_r^s = -kH_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} b_n g_{n,TE}^m \left[\xi_n''(kr) + \xi_n(kr) \right] P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (1.69)$$

$$H_{\theta}^s = \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} \left[m a_n g_{n,TM}^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + b_n g_{n,TE}^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (1.70)$$

$$H_{\phi}^s = \frac{iH_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} C_n^{pw} \left[a_n g_{n,TM}^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + m b_n g_{n,TE}^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (1.71)$$

où :

$$C_n^{pw} = \frac{(-i)^{n+1}}{k} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (1.72)$$

a_n, b_n sont les coefficients de la Théorie de Lorenz-Mie, les fonctions de Ricatti-Bessel $\xi_n(kr)$ et ses dérivés $\xi'_n(kr), \xi''_n(kr)$ dépendent seulement de kr , et les polynômes de Legendre associées $P_n^{|m|}(\cos \theta)$, les fonctions de Legendre généralisées $\tau_n^{|m|}(\cos \theta), \pi_n^{|m|}(\cos \theta)$ dépendent seulement de $\cos \theta$.

En utilisant les relations (1.27), (1.28), (1.30) et (1.31), nous obtenons les relations de symétrie suivantes:

$$E_r^s(x_0, y_0, \phi) = -E_r^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = +E_r^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.73)$$

$$E_\theta^s(x_0, y_0, \phi) = -E_\theta^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = +E_\theta^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.74)$$

$$E_\phi^s(x_0, y_0, \phi) = +E_\phi^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = -E_\phi^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.75)$$

$$H_r^s(x_0, y_0, \phi) = +H_r^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = -H_r^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.76)$$

$$H_\theta^s(x_0, y_0, \phi) = +H_\theta^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = -H_\theta^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.77)$$

$$H_\phi^s(x_0, y_0, \phi) = -H_\phi^s(-x_0, y_0, \pi - \phi) = +H_\phi^s(x_0, -y_0, -\phi) \quad (1.78)$$

Pour les champs diffusés également, il n'existe pas de symétrie en z_0 .

1.5 Conclusion

Les relations de symétrie des g_n^m induites par les symétries du faisceau incident ont été démontrées. Ces relations nous permettent d'obtenir les expressions des trois autres coefficients de forme du faisceau à partir de l'une d'entre elles et peuvent être utilisées pour vérifier ou simplifier le calcul. De plus ces relations de symétrie induisent des relations de symétrie sur les quantités physiques telles que les sections efficaces de diffusion et d'extinction, les pressions de radiation transversale et longitudinale, les composantes du champ diffusé, etc. . Ces symétries ont été calculées et discutées.

La méthode utilisée peut être appliquée à des faisceaux possédant d'autres symétries.

Chapter 2

Faisceau Gaussien Circulaire

Le faisceau gaussien, mode TM_{00} , a été beaucoup étudié et largement utilisé. Il a été abordé par des méthodes et sous des angles divers par plusieurs auteurs. Mentionnons particulièrement ici le travail du LESP [47] [91] [48] [66] qui a développé une théorie de Lorenz-Mie généralisée appliquée au faisceau gaussien, établi un formalisme et écrit des codes efficaces pour prévoir toutes les propriétés pertinentes: les pressions de radiation, les sections efficaces, les distributions angulaires du champ électromagnétique diffusé, les phases et la polarisation. Dans ce formalisme, l'éclairage non-uniforme sur le diffuseur est pris en compte par deux séries de coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$, des codes efficaces sont aussi développés pour les calculer [41][43] [86]. Nous rappelons dans cette section le modèle de Davis [27], par analogie avec lequel, et à l'aide de la proposition de Carter [23] nous obtiendrons les descriptions du champ de faisceau feuille laser dans le chapitre suivant.

2.1 Modèle de Davis

Puisque la divergence du champ magnétique est nulle dans des milieux où il n'y a pas de charges électriques, ce champ peut être défini par la rotation d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1)$$

supposant que la perméabilité magnétique μ est constante. Le champ électrique s'écrit donc:

$$\mathbf{E} = -i\omega \left[\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right] \quad (2.2)$$

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ obéit d'après la condition de Lorentz à l'équation d'onde homogène:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (2.3)$$

On considère une onde se propageant dans la direction Oz du repère $(O; x, y, z)$ (Figure 2.1) et on suppose que le champ est polarisé selon le plan Oxz et transverse. Nous avons donc: $A = A_x, A_y = A_z = 0$ et

$$A_x = \frac{iE_0}{\omega} \psi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (2.4)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique au centre du faisceau et ω la pulsation de l'onde sinusoïdale.

ψ est un champ à variation lente. La dépendance au temps, non explicitée dans les relations précédentes, est sinusoïdale de la forme $e^{i\omega t}$.

Soit $2w_0$ la diamètre du col du faisceau gaussien ($\frac{1}{e}$ en amplitude) et l la longueur de divergence du faisceau définie par

$$l = kw_0^2 \quad (2.5)$$

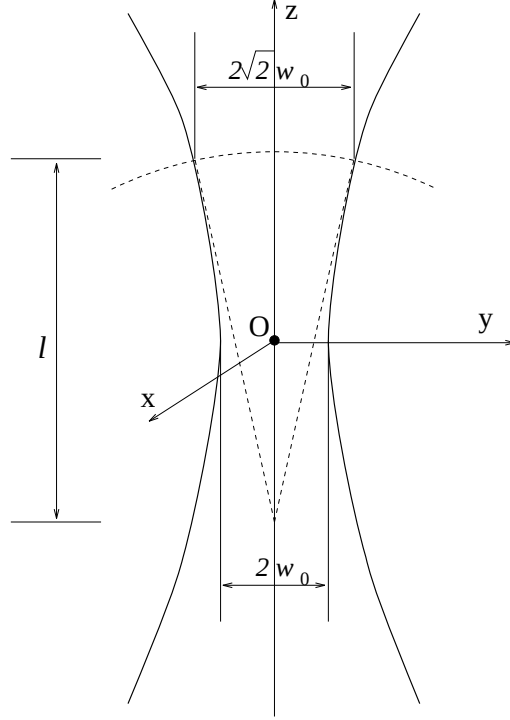


Figure 2.1: Géométrie du faisceau gaussien

C'est la longueur typique dans la direction de propagation, double de la distance au col pour laquelle le faisceau est élargi dans un rapport $\sqrt{2}$ (figure 2.1), $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.

Introduisons aussi un paramètre fondamental adimensionnel s donné par

$$s = \frac{w_0}{l} = \frac{1}{kw_0} \quad (2.6)$$

Ce paramètre est habituellement beaucoup plus petit que 1. Par exemple, pour $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ et pour un col d'une largeur de $50 \mu\text{m}$, nous avons $s \sim 10^{-3}$.

Alors, d'après Davis, nous pouvons écrire:

$$\psi = \psi_0 + s^2\psi_2 + s^4\psi_4 + \dots \quad (2.7)$$

La fonction d'ordre le plus bas ψ_0 est le mode fondamental, donnée par:

$$\psi_0 = iQ \exp\left(-iQ \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \quad (2.8)$$

où Q est défini par:

$$Q = \frac{1}{i + \frac{2z}{l}} \quad (2.9)$$

Soit encore pour Q :

$$iQ = \frac{w_0^2}{w^2} + \frac{il}{2R} \quad (2.10)$$

où $2w$ est la diamètre du faisceau à z :

$$w = w_0 \left(1 + \frac{4z^2}{l^2}\right)^{1/2} \quad (2.11)$$

et R le rayon de courbure du front d'onde qui coupe l'axe en z :

$$R = z \left(1 + \frac{l^2}{4z^2} \right) \quad (2.12)$$

Les fonctions d'ordre plus élevé ψ_2 et ψ_4 sont données par [27] [15]:

$$\psi_2 = (2iQ + i\rho^4 Q^3) \psi_0 \quad (2.13)$$

$$\psi_4 = (-6Q^2 - 3\rho^4 Q^4 - 2i\rho^6 Q^5 - 0.5\rho^8 Q^6) \psi_0 \quad (2.14)$$

Les champs électrique et magnétique obtenus de telle manière sont symétriques à l'ordre L , mais pas pour les champs de l'ordre plus élevés. Barton [15] a proposé d'introduire un potentiel vecteur $\mathbf{A}'$ à partir du champ électrique. Puisque dans le milieu où il n'y a pas de courant libre, la divergence du champ électrique est nulle, nous pouvons définir ce champ par la rotation d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}' \quad (2.15)$$

Le champ magnétique s'obtient donc:

$$\mathbf{H} = ik \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[\mathbf{A}' + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}') \right] \quad (2.16)$$

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}'$ obéit la même équation que $\mathbf{A}$. Pour le champ électrique polarisé selon le plan $O - xz$ et traverse, nous avons $A'_x = A'_z = 0, A'_y = -\frac{iE_0}{k} \psi e^{-ikz}$

Le champ obtenu des potentiels vecteurs $(\mathbf{A} + \mathbf{A}')/2$ est symétrique pour tous les ordres.

2.2 Composantes du champ à différents ordres

Les composantes cartésiennes du champ électromagnétique à l'ordre L^- ($\epsilon_L = 0$) ou à l'ordre L ($\epsilon_L = 1$) s'écrivent:

$$E_x(x, y, z) = E_0 \psi_0 \exp(-ikz) \quad (2.17)$$

$$E_y(x, y, z) = 0 \quad (2.18)$$

$$E_z(x, y, z) = -\epsilon_L \frac{2Qx}{l} E_x \quad (2.19)$$

$$H_x(x, y, z) = 0 \quad (2.20)$$

$$H_y(x, y, z) = H_0 \psi_0 \exp(-ikz) \quad (2.21)$$

$$H_z(x, y, z) = -\epsilon_L \frac{2Qy}{l} H_y \quad (2.22)$$

Les composantes électromagnétiques jusqu'à l'ordre L^3 sont données par [15]:

$$E_x = E_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ 1 + s^2(-\rho^2 Q^2 + i\rho^4 Q^3 - 2Q^2 \xi^2) + s^4[+2\rho^4 Q^4 - 3i\rho^6 Q^5 - 0.5\rho^8 Q^6 + (8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5) \xi^2] \} \quad (2.23)$$

$$E_y = E_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ s^2(-2Q^2 \xi \eta) + s^4[(8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5) \xi \eta] \} \quad (2.24)$$

$$E_z = E_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ s(-2Q \xi) + s^3[(+6\rho^2 Q^3 - 2i\rho^4 Q^4) \xi] + s^5[(-20\rho^4 Q^5 + 10i\rho^6 Q^6 + \rho^8 Q^7) \xi] \} \quad (2.25)$$

$$H_x = H_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ s^2(-2Q^2 \xi \eta) + s^4[(8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5) \xi \eta] \} \quad (2.26)$$

$$H_y = H_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ 1 + s^2(-\rho^2 Q^2 + i\rho^4 Q^3 - 2Q^2 \eta^2) + s^4[+2\rho^4 Q^4 - 3i\rho^6 Q^5 - 0.5\rho^8 Q^6 + (8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5) \eta^2] \} \quad (2.27)$$

$$H_z = H_0 \psi_0 \exp(-ikz) \{ s(-2Q \eta) + s^3[(+6\rho^2 Q^3 - 2i\rho^4 Q^4) \eta] + s^5[(-20\rho^4 Q^5 + 10i\rho^6 Q^6 + \rho^8 Q^7) \eta] \} \quad (2.28)$$

où:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \xi = \frac{x}{w_0} \quad \eta = \frac{y}{w_0}$$

E_0 et H_0 sont respectivement les amplitudes des champs électrique et magnétique au centre du faisceau.

Ces descriptions permet de traiter le faisceau gaussien très focalisé avec la TLMG. Le calcul des g_n^m correspondants est plus compliqué que pour le faisceau gaussien à l'ordre L . Nous le discuterons dans le chapitre 7. Les pressions de radiation exercées par un faisceau gaussien hyperfocalisé seront traitées dans le chapitre 8 où des pressions de radiation longitudinales inverse à la direction de propagation du faisceau seront obtenues.

Chapter 3

Composantes Electromagnétiques du Faisceau Feuille Laser

Ce chapitre vise à obtenir les composantes électromagnétiques du champ d'un faisceau feuille laser dans un repère cartésien à partir du champ électrique dans le plan $z = 0$ en utilisant le développement spectral et le potentiel scalaire (méthode de Davis), puis nous les exprimons dans un repère sphérique.

Un faisceau feuille laser est défini comme un faisceau gaussien avec une section elliptique. Le faisceau choisi dans ce chapitre est un faisceau feuille laser se propageant dans un milieu isotrope, linéaire et non-absorbant caractérisé par une permittivité ε et une perméabilité μ réelles.

Nous précisons tout de suite la géométrie utilisée dans ce chapitre: le faisceau est centré sur l'axe Oz du repère cartésien $(O; x, y, z)$ (figure 3.1), se propage dans le sens des z positifs. Il est polarisé avec le vecteur électrique $\mathbf{E}$ parallèle à Ox dans le plan $z = 0$. w_{0x} et w_{0y} sont les longueurs des deux axes elliptiques au col du faisceau, respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction de la polarisation. Un repère sphérique associé $(O; r, \theta, \phi)$ est aussi utilisé pour décrire les champs en composantes sphériques qui sont particulièrement importantes dans la TLMG.

3.1 Développement en onde plane

On suppose que l'amplitude du champ électrique E_x obéit à une distribution gaussienne dans le plan $z = 0$ avec deux variables non-corrélées correspondant aux coordonnées x et y dont les variances ne sont pas égales. Les composantes x et y du champ s'écrivent:

$$E_x(x, y, 0) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{w_{0x}^2} - \frac{y^2}{w_{0y}^2}\right) \quad (3.1)$$

$$E_y(x, y, 0) = 0 \quad (3.2)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique au centre du faisceau, $2w_{0x}$ et $2w_{0y}$ sont les longueurs des axes au col elliptique du faisceau respectivement dans les directions x et y .

Suivant les propositions de Stratton [104] et Carter [23], nous pouvons exprimer le champ dans l'espace comme un spectre angulaire d'onde plane. Les composantes cartésiennes des champs électrique et magnétique sont données par [23]¹:

$$E_x(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_x(p, q) e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.3)$$

$$E_y(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_y(p, q) e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.4)$$

$$E_z(x, y, z) = - \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p}{m} A_x(p, q) + \frac{q}{m} A_y(p, q) \right] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.5)$$

¹le facteur dépendant du temps $e^{i\omega t}$ a été pris ici différent de celui de Carter $e^{-i\omega t}$

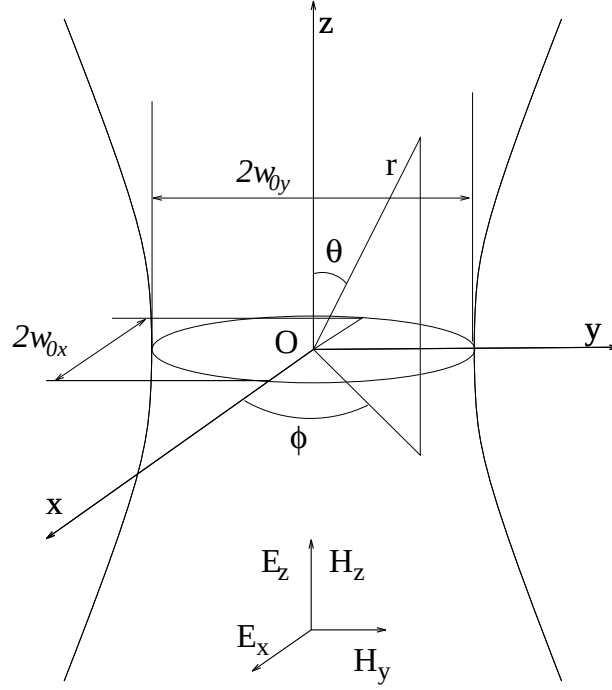


Figure 3.1: Géométrie du faisceau feuille laser

$$H_x(x, y, z) = -\frac{1}{Z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{pq}{m} A_x(p, q) + \frac{1-p^2}{m} A_y(p, q) \right] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.6)$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{1}{Z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1-q^2}{m} A_x(p, q) + \frac{pq}{m} A_y(p, q) \right] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.7)$$

$$H_z(x, y, z) = -\frac{1}{Z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} [q A_x(p, q) - p A_y(p, q)] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (3.8)$$

où $Z_0 = (\frac{\mu}{\varepsilon})^{1/2} = \frac{E_0}{H_0}$, ε étant la permittivité électrique, et μ la perméabilité magnétique. m est défini par

$$m = (1 - p^2 - q^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

Les amplitudes complexes de l'onde plane $A_x(p, q)$ et $A_y(p, q)$ se déterminent à partir des composantes électriques dans le plan $z = 0$:

$$A_x(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y, 0) e^{ik(px+qy)} dx dy \quad (3.10)$$

$$A_y(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y, 0) e^{ik(px+qy)} dx dy \quad (3.11)$$

En introduisant respectivement les équations (3.1) et (3.2) dans (3.10) et (3.11), nous obtenons pour notre faisceau:

$$\begin{aligned} A_x(p, q) &= \frac{1}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp \left(-\frac{x^2}{w_{0x}^2} - \frac{y^2}{w_{0y}^2} \right) e^{ik(px+qy)} dx dy \\ &= \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \exp \left[-\frac{k^2}{4} (w_{0x}^2 p^2 + w_{0y}^2 q^2) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$A_y(p, q) = 0 \quad (3.13)$$

Alors, nous pouvons chercher les expressions approximatives des composantes du champ en supposant que les longueurs des deux axes au col du faisceau sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde, c'est à dire:

$$kw_{0x} \gg 1 \quad kw_{0y} \gg 1 \quad (3.14)$$

Dans ce cas, on peut utiliser l'approximation para-axial pour simplifier l'évaluation des intégrales doubles dans les équations (3.3)-(3.8). Cette approximation a été introduite par Goubau pour analyser le faisceau gaussien circulaire [35].

3.2 Composantes du champ dans un repère cartésien

En introduisant les équations (3.12) et (3.13) dans (3.3) - (3.8) et en utilisant l'approximation para-axial, nous pouvons effectuer les intégrations (3.3)-(3.8) approximativement pour kw_{0x} et kw_{0y} suffisamment grands et obtenir les composantes du champ (Annexe A):

$$E_x(x, y, z) = E_0 \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \quad (3.15)$$

$$E_y(x, y, z) = 0 \quad (3.16)$$

$$E_z(x, y, z) = -\frac{2Q_x x}{l_x} E_x \quad (3.17)$$

$$H_x(x, y, z) = 0 \quad (3.18)$$

$$H_y(x, y, z) = H_0 \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \quad (3.19)$$

$$H_z(x, y, z) = -\frac{2Q_y y}{l_y} H_y \quad (3.20)$$

où ψ_0^{sh} est le champ scalaire défini par:

$$\psi_0^{sh} = i\sqrt{Q_x Q_y} \exp\left(-iQ_x \frac{x^2}{w_{0x}^2} - iQ_y \frac{y^2}{w_{0y}^2}\right) \quad (3.21)$$

Les fonctions complexes Q_x et Q_y , en fonction de z , modifient l'amplitude et la phase du champ et sont données par:

$$Q_x = \frac{1}{i + \frac{2z}{l_x}} \quad Q_y = \frac{1}{i + \frac{2z}{l_y}} \quad (3.22)$$

où:

$$l_x = kw_{0x}^2 \quad l_y = kw_{0y}^2 \quad (3.23)$$

Le champ scalaire ψ_0^{sh} ainsi que les composantes du champ électromagnétique (équations (3.15)-(3.20)) sont identiques à celles bien connues du faisceau gaussien circulaire [40] lorsque w_{0x} est égal à w_{0y} . C'est à dire que la description du faisceau feuille laser présentée ici est une généralisation du faisceau gaussien circulaire à partir de laquelle la description du faisceau gaussien peut être obtenue comme un cas particulier.

En outre, comme pour le faisceau gaussien nous pouvons définir les longueurs des axes elliptique du faisceau feuille laser à une côte z , appelés *les axes locaux*: (figure 3.2)

$$w_x = w_{0x} \left(1 + \frac{4z^2}{l_x^2} \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

$$w_y = w_{0y} \left(1 + \frac{4z^2}{l_y^2} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

et les rayons de courbure du front d'onde qui coupe l'axe en z :

$$R_x = z \left(1 + \frac{l_x^2}{4z^2} \right) \quad (3.26)$$

$$R_y = z \left(1 + \frac{l_y^2}{4z^2} \right) \quad (3.27)$$

En opposition avec le faisceau gaussien, les divergences du faisceau feuille laser dans les directions x et y sont différentes (figure 3.2). Au plus petit axe au col du faisceau correspond la divergence la plus importante.

Pour mieux comprendre la structure du faisceau feuille laser, on présente quelques détails sur l'évolution des longueurs des axes elliptiques locaux du faisceau et les courbures du front d'onde.

Les longueurs des axes locaux du faisceau s'élargissent au fur et à mesure que z s'accroît. Cet élargissement est plus rapide dans la direction correspondant au plus petit axe au col. Quand $|z| = \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y}$ les deux axes locaux du faisceau sont égaux. Lorsque $|z| > \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y}$, l'axe local correspondant au plus petit axe au col du faisceau devient le plus grand.

Quant aux rayons de courbure du front d'onde dans les deux directions, ils ne peuvent être jamais égaux pour le faisceau feuille laser (excepté à l'infini).

Au point où les longueurs des deux axes locaux du faisceau sont égales, les deux rayons de courbure du front d'onde sont respectivement:

$$R_x = \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y} \left(1 + \frac{w_{0y}^2}{w_{0x}^2} \right) = \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) \quad (3.28)$$

$$R_y = \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y} \left(1 + \frac{w_{0x}^2}{w_{0y}^2} \right) = \frac{1}{2}kw_{0x}w_{0y} (1 + v^2) \quad (3.29)$$

Pour un rapport des longueurs des deux axes au col du faisceau $\frac{w_{0x}}{w_{0y}} = v$, le rapport des rayons de courbure est:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{1}{v^2} \quad (3.30)$$

Ainsi, un faisceau feuille laser se caractérise par une grande inhomogénéité de ces caractéristiques locales.

3.3 Composantes du champ dans un repère sphérique

Les expressions des composantes du champ dans un repère sphérique sont d'une importance particulière dans la théorie de Lorenz-Mie généralisée pour la description de la diffusion par une particule sphérique. Particulièrement, les expressions des composantes radiales E_r et H_r à partir desquelles les coefficients de forme du faisceau g_n^m sont déterminés. Ce paragraphe est dédié à établir ces expressions.

Les équations (3.15)-(3.20) deviennent dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

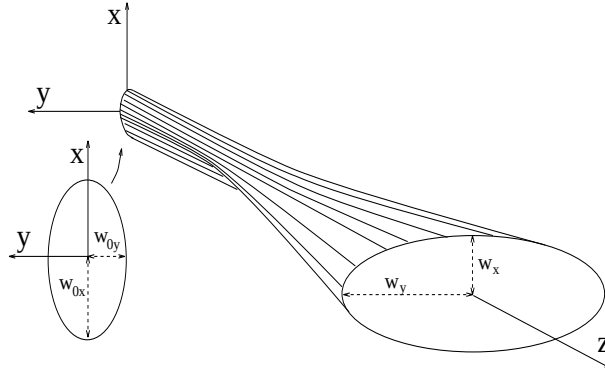


Figure 3.2: Projection oblique du faisceau feuille laser

$$E_r(r, \theta, \phi) = E_0 \psi_0^{sh} \cos \phi \sin \theta \left(1 - \frac{2Q_x}{l_x} r \cos \theta \right) \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.31)$$

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = E_0 \psi_0^{sh} \cos \phi \left(\cos \theta + \frac{2Q_x}{l_x} r \sin^2 \theta \right) \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.32)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = -E_0 \psi_0^{sh} \sin \phi \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.33)$$

$$H_r(r, \theta, \phi) = H_0 \psi_0^{sh} \sin \phi \sin \theta \left(1 - \frac{2Q_y}{l_y} r \cos \theta \right) \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.34)$$

$$H_\theta(r, \theta, \phi) = H_0 \psi_0^{sh} \sin \phi \left(\cos \theta + \frac{2Q_y}{l_y} r \sin^2 \theta \right) \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.35)$$

$$H_\phi(r, \theta, \phi) = H_0 \psi_0^{sh} \cos \phi \exp(-ikr \cos \theta) \quad (3.36)$$

où

$$\psi_0^{sh} = i\sqrt{Q_x Q_y} \exp \left[-ir^2 \sin^2 \theta \left(\frac{Q_x}{w_{0x}^2} \cos^2 \phi + \frac{Q_y}{w_{0y}^2} \sin^2 \phi \right) \right] \quad (3.37)$$

Ici encore, le cas du faisceau gaussien peut être obtenue en posant $w_{0x} = w_{0y}$.

3.4 Approximations d'ordres plus élevées

Nous avons obtenu les expressions des composantes du champ électromagnétique dans la section précédente par un développement spectral angulaire en onde plane, en utilisant l'approximation de Goubau. A cause des difficultés d'intégration, seule l'approximation à l'ordre le plus bas a été prise en compte. Dans cette section, nous allons aborder le même problème avec une méthode différente – la méthode de Davis [27] et essayer d'obtenir pour des expression des composantes d'ordre plus élevé.

De manière similaire à celle que Davis a proposé pour un faisceau gaussien [27], en introduisant l'équation (2.4) dans (2.3), on obtient:

$$\nabla^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (3.38)$$

Supposons que $w_{0x} \leq w_{0y}$ et introduisons des coordonnées réduites ξ , η et ζ qui permettent de traiter un problème où les dérivés partielles $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$ sont du même ordre de grandeur:

$$\xi = \frac{x}{w_{0x}} \quad \eta = \frac{y}{w_{0y}} \quad \zeta = \frac{z}{l_x} \quad (3.39)$$

L'équation (3.38) se réduit alors à:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi - 2i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (3.40)$$

où s et v sont les paramètres adimensionnels:

$$s = \frac{w_{0x}}{l_x} = \frac{1}{kw_{0x}} \quad v = \frac{w_{0x}}{w_{0y}} \quad (3.41)$$

Dans le cas où $w_{0x} \geq w_{0y}$, s et v se définissent par w_{0y}/l_y et w_{0y}/w_{0x} respectivement. Ils sont seulement définis pour faciliter les discussions suivantes.

Lorsque les longueurs des axes au col du faisceau sont grandes devant la longueur d'onde, le paramètre adimensionnel s est plus petit que 1, et l'équation (3.40) contient seulement des termes d'ordres $O(s^0)$ et $O(s^2)$. Nous pouvons chercher, comme pour le faisceau gaussien [27], la solution de l'équation (3.40) sous la forme:

$$\psi = \psi_0^{sh} + s^2 \psi_2^{sh} + s^4 \psi_4^{sh} + \dots \quad (3.42)$$

En introduisant l'équation (3.42) dans (3.40) on trouve que la fonction d'ordre le plus bas ψ_0^{sh} obéit à:

$$\frac{\partial^2 \psi_0^{sh}}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi_0^{sh}}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial \psi_0^{sh}}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.43)$$

Par ailleurs, les fonctions ψ_2^{sh} et ψ_4^{sh} obéissent à:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \psi_2^{sh} = -\frac{\partial^2 \psi_0^{sh}}{\partial \zeta^2} \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \psi_4^{sh} = -\frac{\partial^2 \psi_2^{sh}}{\partial \zeta^2} \quad (3.45)$$

Théoriquement, nous pouvons résoudre les équations (3.44), (3.45) ou (3.40) pour ψ_2^{sh} , ψ_4^{sh} , ψ_6^{sh} , $\dots$ et puis déterminer les composantes électriques à partir des équations (2.2), (2.4) et (3.42):

$$E_x = E_0 \left[\psi_0^{sh} + s^2 \left(\psi_2^{sh} + \frac{\partial^2 \psi_0^{sh}}{\partial \xi^2} \right) + \dots \right] \exp(-ikz) \quad (3.46)$$

$$E_y = E_0 \left[v s^2 \frac{\psi_0^{sh}}{\xi \eta} + v s^4 \frac{\partial^2 \psi_2^{sh}}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \right] \exp(-ikz) \quad (3.47)$$

$$E_z = E_0 \left[-is \frac{\partial \psi_0^{sh}}{\partial \xi} - is^3 \left(\frac{\partial \psi_2^{sh}}{\partial \xi} + i \frac{\partial^2 \psi_0^{sh}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) + \dots \right] \exp(-ikz) \quad (3.48)$$

Ainsi, les composantes transverses de $\mathbf{E}$ comprennent seulement les puissances paires de s et E_z ne comprend que les puissances impaires de s .

Par analogie avec le faisceau gaussien circulaire, nous trouvons que la fonction donnée par l'équation (3.21) est celle d'ordre le plus bas (donc nous utilisons la même notation). En introduisant la fonction ψ_0^{sh} dans l'équation (3.43), on vérifie celle-ci exactement. C'est à dire que les composantes des champs électromagnétiques obtenues par ψ_0^{sh} sont les même que celles données par les équations (3.15)-(3.20).

En outre, il est possible d'obtenir des composantes du champ à l'ordre $O(s^2)$ à partir de (3.44). Généralement, la formulation de Davis permet d'obtenir l'approximation à n'importe quel ordre

$O(s^{2n})$. Mais ce travail n'est pas facile. Dans le cas où la longueur d'un axe au col est beaucoup plus petit que celle de l'autre, par exemple, $w_{0x} \ll w_{0y}$, nous pouvons obtenir ψ_2^{sh} .

Nous considérons une onde sphérique divergente se propageant à partir de l'origine. Une telle onde a un facteur exponentiel:

$$\exp[-ik(z^2 + x^2 + y^2)^{1/2}]$$

Le long de l'axe z , elle peut être développée avec l'approximation para-axiale pour une onde sphérique:

$$\exp \left\{ -ik \left[z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z^3} + \dots \right] \right\}$$

En utilisant les paramètres adimensionnels, nous pouvons développer celle-ci sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left[1 + is^2 \frac{l_x^3}{8z^3} \xi^4 + iv^2 s^2 \frac{l_y^3}{8z^3} \eta^4 + 2ivs^2 \left(\frac{l_x}{2z} \frac{l_y}{2z} \right)^{\frac{3}{2}} \xi^2 \eta^2 + \dots \right] \\ & \times \exp \left(-ikz - i \frac{l_x}{2z} \xi^2 - i \frac{l_y}{2z} \eta^2 \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pour $z \gg l_x$ et $z \gg l_y$ on a $Q_x \rightarrow \frac{l_x}{2z}$ et $Q_y \rightarrow \frac{l_y}{2z}$. Ce raisonnement nous suggère que ψ_2^{sh} peut être écrit comme:

$$\psi_2^{sh} = \{C_{sh} + iQ_x^3 \xi^4 + iv^2 Q_y^3 \eta^4 + 2iv(Q_x Q_y)^{3/2} \xi^2 \eta^2\} \psi_0^{sh} \quad (3.50)$$

où C_{sh} dépend seulement de Q_x et Q_y et peut être déterminé par introduction de cette fonction dans équation (3.44). Mais c'est encore une équation partielle qui n'est pas facile à résoudre. Dans le cas $w_{0x} \ll w_{0y}$, le problème se simplifie. Pour obtenir C_{sh} , nous introduisons ψ_0^{sh} (équation (3.21)) et ψ_2^{sh} (équation (3.50)) dans (3.44) et obtenons;

$$C_{sh} = \frac{3i}{4} Q_x$$

Donc, on a:

$$\psi_2^{sh} = i \left(\frac{3}{4} Q_x + Q_x^3 \xi^4 \right) \psi_0^{sh} \quad (3.51)$$

Le cas $w_{0x} \gg w_{0y}$ est identique.

Cependant, dans les chapitres suivants nous nous concentrerons seulement sur des expressions de l'ordre le plus bas.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les expressions des composantes des champs électrique et magnétique pour un faisceau feuille laser à l'ordre le plus bas sont obtenues par deux approches: le développement en spectre angulaire d'onde plane et la formulation de Davis. C'est un travail de base pour appliquer la TLMG à ce type de faisceau. La description à des ordres plus élevés est aussi discutée. Le chapitre prochain sera consacré à la discussion de l'approximation induite par ces descriptions.

Chapter 4

Ordre d'Approximation des Expressions des Champs

Les expressions du champ électromagnétique d'une feuille laser ont été obtenues par deux différentes méthodes dans le chapitre précédent. Cependant, toutes les deux sont approximatives. Nous allons dans ce chapitre discuter exhaustivement l'ordre de l'approximation de ces expressions: approximation par rapport aux équations de Maxwell et erreurs introduites dans la théorie de Lorenz-Mie généralisée.

La géométrie utilisée pour ce chapitre est la même que pour le chapitre précédent.

4.1 Equation de Maxwell et ordre d'approximation

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les expressions des composantes (3.15)-(3.20) ou (3.31)-(3.36) sont approximatives. Nous avons aussi démontré que le potentiel vecteur est de l'ordre $O(s^2)$. Dans cette section nous évaluons directement, avec les équations de Maxwell, les erreurs introduites par cette approximation.

Les équations de Maxwell pour l'onde se propageant dans un milieu homogène, isotrope, non-absorbant avec une dépendance du temps sinusoïdal $e^{i\omega t}$ s'écrivent:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\mu\omega \mathbf{H} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\varepsilon\omega \mathbf{E} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.4)$$

Chacune des relations (4.1)-(4.4) sera examinée dans les systèmes des coordonnées cartésiennes et sphériques.

4.1.1 Système de coordonnées cartésiennes

D'après l'équation (3.18) $H_x = 0$, en utilisant la relation (4.1) et les composantes du champ électrique E_x, E_y et E_z , (équations (3.15)-(3.17)), on obtient:

$$H_x^* = \frac{E_0}{i\mu\omega} \frac{2Q_{xx}}{l_x} \frac{\partial \psi_0^{sh}}{\partial y} \exp(-ikz) \quad (4.5)$$

où H_x^* désigne la composante obtenue à partir des équations de Maxwell correspondante à H_x . Cette convention d'écriture est aussi valide pour les autres composantes. En effectuant la dérivé partielle nous trouvons:

$$(H_x^* - H_x) = -4s^2 v Q_x Q_y \xi \eta H_0 \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \quad (4.6)$$

Cette expression tend vers zéro lorsque s tend vers zéro. L'erreur relative correspondante peut s'écrire:

$$(H_x^* - H_x)/H_y = -4s^2 v Q_x Q_y \xi \eta \quad (4.7)$$

Dans la région du faisceau ($|x| < w_x, |y| < w_y$, avec w_x et w_y définis par (3.24) et (3.25)), $|\xi Q_x|, |\eta Q_y|$ et $|Q_x|, |Q_y|$ sont tous plus petits que l'unité ou de l'ordre de l'unité. De plus nous avons $v = w_{0x}/w_{0y} \leq 1$ (voir (3.41) et commentaire après l'équation). Par conséquent, la plus grande quantité de $(H_x^* - H_x)/H_y$ est:

$$(H_x^* - H_x)/H_y \sim O(s^2) \quad (4.8)$$

Similairement, en comparant H_y donnée par (3.19) à celui obtenu de l'équation (4.1) à partir des composantes électriques (3.15)-(3.17) on trouve.

$$(H_y^* - H_y)/H_y = s^2 [Q_x(i + 2Q_x \xi^2) - v^2 Q_y(i + 2Q_y \eta^2)] \sim O(s^2) \quad (4.9)$$

De la même façon, nous pouvons examiner la relation pour H_z et trouver que H_z donnée par (3.20) est en parfait accord avec celui obtenu de l'équation de Maxwell (4.1). Il n'y a pas d'erreur pour cette composante. La discussion de la relation (4.3) est similaire et conduit à des résultats similaires.

On discute ensuite la relation (4.2). En utilisant les composantes E_j ($j = x, y, z$) des équations (3.15)-(3.17), on trouve que la divergence approximative de $\mathbf{E}$ est en ordre $O(s^2)$:

$$\frac{w_{0x} \nabla \cdot \mathbf{E}}{E_x} = 2s^2 Q_x \xi (3Q_x + v^2 Q_y - 2iQ_x^2 \xi^2 - 2iv^2 Q_y^2 \eta^2) \sim O(s^2) \quad (4.10)$$

La relation (4.4) peut être discuté similairement. C'est à dire que les erreurs relatives dans les équations de divergence (4.2), (4.4) sont d'ordre $O(s^2)$.

4.1.2 Système de coordonnées sphériques

Nous allons maintenant examiner les équations (3.15)-(3.20) ou (3.31)-(3.36) dans un système de coordonnées sphériques. Le relationnel et la divergence d'une fonction vecteur $\mathbf{V}$ dans un repère sphérique sont:

$$(\nabla \times \mathbf{V})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (4.11)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \quad (4.12)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V})_\phi = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \quad (4.14)$$

De manière similaire à celle du paragraphe précédent et d'après l'équation (4.1) nous obtenons:

$$H_r^* = -\frac{E_0}{i\mu\omega} (\nabla \times \mathbf{E})_r \quad (4.15)$$

En introduisant les équations (3.31)-(3.33) dans (4.15) et en utilisant la relation (4.11), il vient:

$$\begin{aligned} (H_r^* - H_r) = & -H_0 \psi_0^{sh} \sin \phi \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) s^2 \left[4Q_x Q_y \frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{w_{0y}^2} \right. \\ & \left. - 2r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{Q_x^2}{w_{0x}^2} \cos^2 \phi - \frac{Q_y^2}{w_{0y}^2} v^2 \sin^2 \phi \right) - i(Q_x - v^2 Q_y) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

En utilisant de plus les variables adimensionnelles et en considérant la différence relative (rapport des (4.16) et (3.34)) on obtient:

$$\frac{(H_r^* - H_r)}{H_r} = s^2 \frac{iQ_x - iv^2Q_y + 2Q_x^2\xi^2 - 2v^2Q_y^2\eta^2 - 4Q_xQ_yv^2\xi^2}{1 - 2\zeta v^2Q_y} \sim O(s^2) \quad (4.17)$$

De même, en introduisant les composantes électromagnétiques (3.31) et (3.33) dans (4.12) d'une part, et utilisant l'équation (3.35) d'autre part, nous obtenons:

$$\begin{aligned} (H_\theta^* - H_\theta) &= H_0 \psi_0^{sh} \sin \phi \cos \theta \exp(-ikr \cos \theta) \\ &\times s^2 \left[2r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{Q_x^2}{w_{0x}^2} \cos^2 \phi - \frac{Q_y^2}{w_{0y}^2} v^2 \sin^2 \phi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2Q_xQ_y}{w_{0y}^2} \cos^2 \phi \right) + i(Q_x - v^2Q_y) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'amplitude de la différence relative de H_θ est:

$$\frac{(H_\theta^* - H_\theta)}{H_\theta} = s^2 \frac{iQ_x - iv^2Q_y + 2Q_x^2\xi^2 - 2v^2Q_y^2\eta^2 - 4Q_xQ_yv^2\xi^2}{1 + 2Q_y s^2 (v^2\xi^2 + \eta^2)/\zeta} \sim O(s^2) \quad (4.19)$$

De la même façon, en introduisant les équations (3.31)-(3.36) dans (4.13), puis dans (4.1) et en comparant avec l'équation (3.36), on trouve que l'erreur relative de H_ϕ est à ordre $O(s^2)$.

Nous pouvons examiner les relations (4.2)-(4.4) en effectuant un travail similaire, et conclure que dans la région du faisceau les expressions obtenues vérifient parfaitement les équations de Maxwell à l'ordre $O(s^2)$ dans le système des coordonnées sphériques.

4.2 Discussion de la TLMG

Bien qu'elle soit nécessaire, la discussion précédente n'est pas complète pour la TLMG. Dans cette section nous allons discuter plus explicitement les erreurs introduite par l'approximation dans la TLMG, c'est à dire dans le système des coordonnées sphériques par comparaison avec le formalisme de Bromwich avec lequel la théorie est développée.

Les composantes d'un champ électromagnétique peuvent s'exprimer par deux potentiels scalaires de Bromwich: U_{TM} potentiel transversal magnétique et U_{TE} potentiel transversal électrique. Ceux-ci peuvent généralement être développés en fonctions orthogonales avec deux séries de coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$:

$$U_{TM} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{n,TM}^m r \psi_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.20)$$

$$U_{TE} = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{n,TE}^m r \psi_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.21)$$

où $\psi_n^{(1)}$ est une fonction de Bessel sphérique, $P_n^{|m|}(\cos \theta)$ est un polynôme de Legendre associé et C_n^{pw} le coefficient pour l'onde plane.

Les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ sont évalués à partir des composantes radiales des champs E_r et H_r respectivement et peuvent être calculés par les intégrales suivantes:

$$g_{n,TM}^m = C_n^m \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)} \int_0^{2\pi} \exp(-im\phi) \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (4.22)$$

$$g_{n,TE}^m = C_n^m \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)} \int_0^{2\pi} \exp(-im\phi) \int_0^\pi \frac{H_r(r, \theta, \phi)}{H_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (4.23)$$

où C_n^m est un coefficient défini par:

$$C_n^m = \frac{i^{n+1}(2n+1)(n-|m|)!}{2\pi^2(n+|m|)!} \quad (4.24)$$

Lorsque les potentiels scalaires de Bromwich sont déterminés, nous pouvons obtenir les autres composantes du champ:

$$E_r^* = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)U_{TM} \quad (4.25)$$

$$E_\theta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \theta} - \frac{i\mu\omega}{r \sin \theta} \frac{\partial U_{TE}}{\partial \phi} \quad (4.26)$$

$$E_\phi^* = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \phi} + \frac{i\mu\omega}{r} \frac{\partial U_{TE}}{\partial \theta} \quad (4.27)$$

$$H_r^* = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)U_{TE} \quad (4.28)$$

$$H_\theta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial \theta} + \frac{i\varepsilon\omega}{r \sin \theta} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \phi} \quad (4.29)$$

$$H_\phi^* = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial \phi} - \frac{i\varepsilon\omega}{r} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \theta} \quad (4.30)$$

Le problème maintenant est de démontrer que les composantes du champ obtenues par les équations (4.25)-(4.30) sont en accord avec celles données par les équations (3.31)-(3.36). Idéalement, il faut:

$$E_i^* = E_i, \quad H_i^* = H_i \quad i = r, \theta, \phi \quad (4.31)$$

Pour les composantes E_r et H_r l'accord est parfait puisque les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ dans le formalisme de Bromwich se déterminent à partir de E_r et H_r , et des équations (4.20), (4.21), (4.25) et (4.28) si bien que nous avons:

$$E_r = E_r^*, \quad H_r = H_r^* \quad (4.32)$$

Cependant, pour les autres composantes on ne peut pas exiger des relations similaires puisque les composantes données par les équations (3.31)-(3.36) ne vérifient pas exactement les équations de Maxwell. Donc, dans cette section nous allons établir les différences relatives pour chaque composante et démontrer que les erreurs relatives sont de l'ordre de $O(s^2)$.

Posons $V_i(r, \theta, \phi)$ pour la différence de la composante du champ:

$$V_i(r, \theta, \phi) = rV_i^* - rV_i \quad V = E, H; \quad i = \theta, \phi \quad (4.33)$$

et appliquons à V_i deux opérateurs:

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \quad (4.34)$$

$$\Delta_{\theta,\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) \quad (4.35)$$

En utilisant les relations (4.20), (4.21), (4.25)-(4.30) et la fonction de Legendre nous obtenons (Annexe B):

$$\Delta_r(rE_\theta^* - rE_\theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) \right] - \frac{i\mu\omega}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - k^2 rE_\theta \quad (4.36)$$

$$\Delta_r(rE_\phi^* - rE_\phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) \right] + i\mu\omega \frac{\partial H_r}{\partial \theta} - k^2 rE_\phi \quad (4.37)$$

$$\Delta_{\theta,\phi}(rE_\theta^* - rE_\theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right] (r^2 E_r) + \frac{i\mu\omega}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 H_r) - \Delta_{\theta,\phi}(rE_\theta) \quad (4.38)$$

$$\Delta_{\theta,\phi}(rE_\phi^* - rE_\phi) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} (r^2 E_r) - i\mu\omega \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right] (r^2 H_r) - \Delta_{\theta,\phi}(rE_\phi) \quad (4.39)$$

Nous pouvons obtenir pour les composantes H_θ et H_ϕ des relations similaires. Ensuite nous démontrerons que les dérivées des différences des composantes du champ sont d'ordre $O(s^2)$.

En introduisant les équations (3.31), (3.32) et (3.34) dans (4.36) et en utilisant les variables adimensionnelles ξ, η et ζ nous obtenons à l'aide du logiciel de calcul formel MAPLE:

$$\begin{aligned} \Delta_r(rE_\theta^* - rE_\theta) &= E_0 k \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) s^2 \left[3\zeta(Q_x^2 - v^4 Q_y^2) \right. \\ &\quad - 4\zeta(Q_x^4 \xi^4 - v^4 Q_y^4 \eta^4) - 8\zeta Q_x Q_y \eta^2 (Q_x^2 \xi^2 + v^2 Q_y^2 \eta^2) \\ &\quad - 12i\zeta v^2 Q_y^2 \eta^2 (Q_x - v^2 Q_y) - 12i\zeta Q_x^2 (Q_x \xi^2 + Q_y \eta^2) \\ &\quad + (8Q_y \eta^2 i - 1)(Q_x - v^2 Q_y) + (4Q_x^2 \xi^2 + 8Q_x Q_y \eta^2 \\ &\quad - 4v^2 Q_y^2 \eta^2 + 8iQ_x)(Q_x \xi^2 + Q_y \eta^2) - 2iQ_x Q_y (v^2 \xi^2 + \eta^2) \left. \right] \\ &= E_0 k \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) (a_0 + a_1 \zeta) s^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

où a_0 et a_1 sont en ordre $O(s^0)$. D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned} \Delta_r(rE_\theta) &= E_0 k \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{w_{0y}^2 \zeta}{r^2 s^2} \left[(v^2 \xi^2 + \eta^2) \right. \\ &\quad - 2i\zeta v^2 - 4\zeta v^2 (Q_x \xi^2 + Q_y \eta^2) + 4\zeta^2 v^2 (Q_x^2 \xi^2 + v^2 Q_y^2 \eta^2) \\ &\quad + 2iv^2 \zeta^2 (Q_x + v^2 Q_y) + s^2 f_2(Q_x, Q_y, v, \xi, \eta, \zeta) + s^4 f_4(Q_x, Q_y, v, \xi, \eta, \zeta) \left. \right] \\ &\simeq E_0 k \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{w_{0y}^2 \zeta}{r^2 s^2} (b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

où b_0 et b_1 sont en ordre $O(s^0)$ et f_2 et f_4 correspondent aux termes en l'ordre $O(s^2)$ et $O(s^4)$. Puisque

$$r^2 = w_{0x}^2 (\xi^2 + v^{-2} \eta^2 + s^{-2} \zeta^2) \quad (4.42)$$

On obtient:

$$\frac{\Delta_r(rE_\theta^* - rE_\theta)}{\Delta_r(rE_\theta)} \simeq v^2 \frac{s^2 \xi^2 + s^2 v^{-2} \eta^2 + \zeta^2}{\zeta} \frac{a_0 + a_1 \zeta}{b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2} s^2 \quad (4.43)$$

Donc, si ζ n'est pas trop petit, l'ordre de la différence relative est $O(s^2)$. Si ζ est beaucoup plus petit que s nous devons considérer le deuxième terme dans (4.41). Nous pouvons obtenir la même conclusion, mais elle est trop longue à montrer ici. Par conséquent, nous concluons que dans tous les cas (ζ petit ou grand) la différence relative $\Delta_r(rE_\theta^* - rE_\theta)$ par rapport à $\Delta_r(rE_\theta)$ est d'ordre $O(s^2)$

$$\frac{\Delta_r(rE_\theta^* - rE_\theta)}{\Delta_r(rE_\theta)} = O(s^2) \quad (4.44)$$

En effectuant le même travail pour la composante E_ϕ que pour E_θ nous pouvons trouver des expressions très longues pour $\Delta_r(rE_\phi^* - rE_\phi)$ et $\Delta_r(rE_\phi)$ qui sont de la forme:

$$\Delta_r(rE_\phi^* - rE_\phi) = E_0 \sin \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{1}{s^2 r} O(s^2) \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_r(rE_\phi) &= E_0 \sin \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{1}{s^2 r} [O(s^0) + O(s^2)] \\
&\simeq E_0 \sin \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{1}{s^2 r} O(s^0)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Par conséquent, on obtient l'ordre de la différence relative de l'équation (4.45) par rapport à (4.46):

$$\frac{E_0 \sin \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) O(s^0)}{E_0 \sin \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) O(s^{-2})} = O(s^2) \tag{4.47}$$

En évaluant l'équation (4.35) à l'aide du logiciel MAPLE, nous obtenons une expression encore plus longue qui a la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta,\phi}(rE_\theta^* - rE_\theta) &= E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{\zeta^2}{ks^2} \\
&\times \{ 2\zeta Q_x [2(Q_x^2 \xi^2 + v^2 Q_y^2 \eta^2)(2Q_x \xi^2 + 2Q_y \eta^2 + 5i) \\
&+ i(3Q_x + v^2 Q_y)(2Q_x \xi^2 + 2Q_y \eta^2 + 3i)] + (Q_x - v^2 Q_y)(1 - 8iQ_y \eta^2) \\
&- (Q_x \xi^2 + Q_y \eta^2)(4Q_x^2 \xi^2 - 4v^2 Q_y^2 \eta^2 + 8iQ_x + 8\eta^2 Q_x Q_y) \\
&+ 2iQ_x Q_y(\xi^2 v^2 + \eta^2) + O(s^2) + O(s^4) \} \\
&\simeq E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{1}{s^2 k} O(s^0)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

D'autre part, en appliquant l'opérateur $\Delta_{\theta,\phi}$ à (rE_θ) , il vient:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta,\phi}(rE_\theta) &= E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{\zeta}{ks^4 v^2} \\
&\times \{ 4\zeta v^2 (Q_x \xi^2 + Q_y \eta^2 + i) - (v^2 \xi^2 + \eta^2) \\
&- \zeta^2 v^2 [4(Q_x^2 \xi^2 + v^2 Q_y^2 \eta^2) + 2i(3Q_x + v^2 Q_y)] \\
&+ O(s^2) + O(s^4) + O(s^6) \} \\
&= E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) \frac{1}{s^4 k} O(s^0)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

L'ordre de la différence relative de l'équation (4.48) par rapport à (4.49) est:

$$\frac{E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) O(s^0) s^4 k}{E_0 \cos \phi \psi_0^{sh} \exp(-ikz) O(s^0) s^2 k} = O(s^2) \tag{4.50}$$

A partir de (4.39) on trouve similairement que la différence relative de $\Delta_{\theta,\phi}(rE_\phi^* - rE_\phi)$ par rapport à $\Delta_{\theta,\phi}(rE_\phi)$ est de l'ordre $O(s^2)$. Avec la même procédure pour les composantes magnétiques nous obtenons des résultats similaires, c'est à dire, la différence relative est encore d'ordre $O(s^2)$. Nous pouvons conclure que chaque dérivée des différences des composantes électromagnétiques V_i^* et V_i est d'ordre $O(s^2)$ en comparant avec la dérivée de la composante correspondant V_i . Donc, les différences du champ $V_i(r, \theta, \phi)$ de (4.33) obéissent à l'ordre $O(s^2)$ d'erreur relative aux équations différentielles suivantes:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V(r, \theta, \phi) = 0 \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial^2 V(r, \theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} - 2V(r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) V(r, \theta, \phi) = 0 \tag{4.52}$$

La résolution générale de l'équation (4.51) a une forme:

$$V(r, \theta, \phi) = C(\theta, \phi) \cos(kr) + S(\theta, \phi) \sin(kr) \quad (4.53)$$

introduite dans l'équation (4.52) cela donne:

$$\frac{\partial^2 X(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial X(\theta, \phi)}{\partial \theta} - 2X(\theta, \phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) X(\theta, \phi) = 0 \quad (4.54)$$

où $X(\theta, \phi)$ désigne soit $C(\theta, \phi)$ soit $S(\theta, \phi)$. Naturellement, nous supposons:

$$X(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (4.55)$$

En considérant que $\Phi(\phi)$ est une fonction périodique de période de 2π , c'est à dire, $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$. L'équation (4.54) est équivalente aux deux équations différentielles suivantes:

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} - q^2 \right) \Phi(\phi) = 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} - 2\Theta(\theta) + \frac{1 + q^2}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) = 0 \quad (4.57)$$

La résolution de l'équation (4.56) est

$$\Phi(\phi) = a_q e^{iq\phi} + b_q e^{-iq\phi} \quad (4.58)$$

où q est entier. La résolution de l'équation (4.57) peut s'exprimer comme un développement polynômial:

$$\Theta(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p} \cos^{2p} \theta + \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p+1} \cos^{2p+1} \theta \quad (4.59)$$

En introduisant l'équation (4.59) dans (4.57), on montre que les coefficients c_{2p} satisfont la relation suivante:

$$2(p+1)(2p+1)c_{2p+2} - (j+4p+8p^2)c_{2p} + 2p(2p-1)c_{2p-2} = 0 \quad (4.60)$$

$$c_2 = \frac{j}{2} c_0 \quad c_4 = \frac{j(12+j)-4}{24} c_0 \quad (4.61)$$

où $j = 1 + q^2$. Posons $c_{2p} = c_0 d_{2p}$ si bien que d_{2p} obéit à une même relation que c_{2p} de laquelle nous déduisons:

$$\begin{aligned} d_{2p+2} - d_{2p} &= \frac{1}{4p^2 + 6p + 2} [d_{2p}(4p^2 - 2p - 2 + j) - d_{2p-2}(4p^2 - 2p)] \\ &= \frac{1}{4p^2 + 6p + 2} [(4p^2 - 2p)(d_{2p} - d_{2p-2}) + (j-2)d_{2p}] \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pour l'entier $j = 1 + q^2 > 1$, nous avons $d_4 \geq d_2$ (tiré de (4.61)), et donc $d_6 \geq d_4$ (tiré de (4.62)), en général:

$$d_{2p+2} \geq d_{2p} > 0 \quad (4.63)$$

Pour le cas particulier $j = 1$ nous pouvons démontrer que:

$$d_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \quad (4.64)$$

où !! designe une double factorielle ($n!! = n(n-2)(n-4) \dots$).

De manière similaire, on obtient les coefficients c_{2p+1} obéissant à la relation suivante:

$$2(p+1)(2p+3)c_{2p+3} - (j+4+12p+8p^2)c_{2p+1} + 2p(2p+1)c_{2p-1} = 0 \quad (4.65)$$

$$c_3 = \frac{4+j}{6}c_1 \quad c_5 = \frac{(4+j)(24+j)-36}{120}c_1 \quad (4.66)$$

Posons aussi $c_{2p+1} = c_1 d_{2p+1}$, si bien que d_{2p+1} obéit à la même relation que c_{2p+1} donnée par l'équation (4.65), de laquelle on déduit:

$$\begin{aligned} d_{2p+3} - d_{2p+1} &= \frac{1}{4p^2 + 10p + 6} [d_{2p+1}(4p^2 + 2p - 2 + j) - d_{2p-1}(4p^2 + 2p)] \\ &= \frac{1}{4p^2 + 10p + 6} [(4p^2 + 2p)(d_{2p+1} - d_{2p-1}) + (j-2)d_{2p+1}] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Pour l'entier $j = 1 + q^2 > 1$, nous avons $d_5 \geq d_3$ (tiré de (4.66)), donc $d_5 \geq d_3$ (tiré de (4.67)), en général:

$$d_{2p+3} \geq d_{2p+1} > 0 \quad (4.68)$$

Pour le cas particulier $j = 1$ nous pouvons démontrer (Annexe C):

$$d_{2p+1} > \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \quad (4.69)$$

Par conséquent, la resolution de l'équation (4.57) peut s'écrire comme:

$$\Theta(\theta) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p} \cos^{2p} \theta + c_1 \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p+1} \cos^{2p+1} \theta \quad (4.70)$$

Maintenant nous examinons les cas particuliers $\theta=0, \pi$. Considérons les relations (4.63), (4.64), (4.68) et (4.69). La discussion pour différents cas ($c_0, c_1 > 0$; $c_0, c_1 < 0$; $c_0 < 0, c_1 > 0, \dots$), en considérant que $V(r, \theta, \phi)$ (donc $\Theta(\theta)$) est fini lorsque $\theta=0, \pi$, nous conduit à la conclusion que les seules conditions acceptables sont:

$$c_0 = c_1 = 0 \quad (4.71)$$

desquelles nous obtenons finalement:

$$V(r, \theta, \phi) = 0 \quad (4.72)$$

C'est à dire que les relations:

$$E_i = E_i^* \quad H_i = H_i^* \quad i = \theta, \phi \quad (4.73)$$

sont bien défini à l'ordre de l'approximation (erreurs relatives $O(s^2)$).

4.3 Conclusion

L'ordre d'approximation introduit dans la description du faisceau feuille laser à l'ordre le plus bas est exhaustivement discuté vis-à-vis des équations de Maxwell dans les repères cartésien et sphérique, et du point de vue de la TLMG. On conclut que les erreurs relatives sont à l'ordre $O(s^2)$ dans la région du faisceau, c'est-à-dire que lorsque le point d'observation est dans l'ellipse définie par les deux axes locaux du faisceau w_x et w_y . Donc, la description à l'ordre le plus bas fournit une expression du champ assez précise pour la TLMG. Pour des situations exotiques, une description à des ordres plus élevés peut être considérée. La formulation dans ce chapitre est une généralisation du travail du LESP concernant la description du faisceau gaussien. Celle-ci peut être retrouvée comme un cas particulier lorsque $w_{0x} = w_{0y}$.

Part II

Outils Numériques

Introduction

Par rapport à la théorie de Lorenz-Mie classique, la TLMG introduit deux nouvelles séries de coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$, pour prendre en compte l'éclairage non-uniforme sur la particule. L'intérêt de la TLMG dépend fortement de notre capacité à en tirer des prévisions numériques: la vitesse de calcul et la souplesse d'adaptation aux différents profils de faisceaux, permettant d'orienter ou d'interpréter plus efficacement les travaux expérimentaux.

Trois méthodes ont été développées et largement utilisées pour calculer ces coefficients dans le cas du faisceau gaussien circulaire faisant intervenir: l'intégration [47] [67] [16], les séries finies [41] [44] et l'interprétation localisée [42] [43] [86]. Une quatrième, l'expansion, vient d'être exploitée par Gouesbet et Lock [63] [46].

La méthode intégrale est rigoureuse et souple car il suffit de changer le noyau de l'intégration lorsque le profil du faisceau incident est modifié. Elle peut être facilement appliquée au faisceau feuille laser ou à d'autres faisceaux et peut être utilisée pour évaluer des méthodes approximatives. Ainsi, il est essentiel de bien établir cette méthode.

Une méthode d'intégration triple (pour g_n^m) ou double (pour g_n), dénotée F2, a été développée à Rouen [47] [66] [44]. Elle exige beaucoup de temps de calcul. Même pour le faisceau gaussien, elle pose beaucoup de difficultés numériques. Maheu [66], dans sa thèse, utilise cette méthode pour calculer les g_n^m et indique: *La difficulté numérique évoquée plus haut provient des fonctions de Ricatti-Bessel dans les intégrales exprimant les coefficients qui sont 'dépositaires' des caractéristiques du faisceau gaussien. Le caractère fortement oscillatoire des fonction de Ricatti-Bessel rend délicate leur intégration numérique et impose le choix de techniques de calcul élaborées et longues et par conséquent onéreuses.*

A titre d'exemple, le calcul d'un seul des nombreux coefficients g_n^m peut nécessiter un temps de calcul CPU de l'ordre d'une à deux heures sur des ordinateurs IBM 3090, dans le cas particulier où la particule est localisée sur l'axe du faisceau.

Bien qu'elle soit onéreuse, ses avantages de rigueur et de souplesse nous permettent de l'appliquer facilement à d'autres faisceaux, et d'évaluer des méthodes approximatives, l'interprétation localisée, par exemple. Mais il est vraiment nécessaire d'améliorer la technique de calcul numérique.

D'autre part, Barton et al [16] [101] ont étudié un problème similaire, avec le potentiel de Hertz: diffusion d'un faisceau gaussien par une particule sphérique avec les fonctions harmonique sphérique Y_n^m , et ont proposé une méthode intégrale double ou simple, dénotée F1, pour l'évaluation des coefficients A_{lm} et B_{lm} . Cette formulation est théoriquement identique que celle de Rouen et les coefficients A_{lm} et B_{lm} sont équivalents aux $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$. Par ailleurs, Cette méthode d'évaluer les coefficients A_{lm} et B_{lm} est plus rapide car elle nécessite une intégration de moins. Barton et al ont indiqué qu'il suffit de connaître les composantes radiales électrique et magnétique $E_r(r, \theta, \varphi)$ et $H_r(r, \theta, \varphi)$ sur *n'importe quelle surface sphérique*. En fait, si on prend une valeur du rayon de la surface sphérique a_s quelconque, on ne peut pas obtenir de résultats corrects même pour un faisceau gaussien peu focalisé. Nous le démontrons dans le chapitre 5 en choisissant une bonne valeur du rayon de la surface sphérique. Avec cette méthode de double intégrale nous pourrions calculer facilement et rapidement les coefficients g_n^m pour quelques formes de faisceaux. Par exemple, pour le faisceau feuille laser, lorsque la particule est localisée arbitrairement dans ce faisceau, il suffit de quelques secondes pour ce calcul de l'un des coefficients g_n^m .

Cependant, cette méthode ne peut pas être utilisée aveuglément pour un faisceau quelconque. Sa précision dépend fortement du choix du rayon de la surface sphérique et de la qualité de description du faisceau. Par exemple, pour le faisceau gaussien peu focalisé avec une description de l'ordre L^- ou très focalisé avec une description de l'ordre L^3 , on ne peut pas obtenir des valeurs stables des g_n^m pour n'importe quel rayon de la surface sphérique. Par contre, la méthode F2 est stable et rigoureuse.

La méthode des séries finies est aussi théoriquement rigoureuse, mais elle manque de souplesse. Une modification du profil du faisceau nécessite de reprendre le travail analytique pour obtenir les séries finies correspondantes. Seules les expressions des séries finies pour le faisceau gaussien sont maintenant disponibles. En outre, au moins pour le faisceau gaussien, lorsque n est grand, on a aussi des difficultés numériques. Nous ne la traitons pas dans cette thèse sauf pour le faisceau gaussien à l'ordre L^3 et la particule située sur l'axe.

L'interprétation localisée est une méthode approximativement établie, dont la dérivation rigoureuse pour le faisceau gaussien circulaire vient juste d'être obtenue. Nous avons précédemment démontré numériquement que sa précision est parfaite au moins pour le faisceau gaussien et le faisceau feuille laser. Grâce à sa rapidité elle a été bien développée [43] [86] et largement utilisée dans le cas du faisceau gaussien circulaire [37].

Cependant, puisqu'elle n'est pas rigoureusement établie pour un faisceau quelconque, sa validité doit être numériquement démontrée, en comparant avec les résultats rigoureusement obtenus, lorsqu'elle est appliquée à une nouvelle forme de faisceau.

La validité de l'application au faisceau feuille laser sera démontrée dans les chapitres 6 et 7 en comparant avec les résultats obtenus par la méthode intégrale.

La méthode d'expansion vient d'être exploitée par Gouesbet et Lock [63] [46], avec laquelle ils ont démontré rigoureusement la validité de l'interprétation localisée pour le faisceau gaussien circulaire. Mais, une dérivation rigoureuse complète pour un faisceau quelconque est encore inconnue.

Cette partie est dédiée à la technique numérique de calcul des coefficients g_n^m , notamment la méthode intégrale et l'interprétation localisée, à partir des composantes radiales des champs électrique E_r et magnétique H_r . Elle se compose de trois chapitres:

Chapitre 5: Méthodes intégrales

Dans ce chapitre les avantages et limitations des deux méthodes intégrales F1 et F2 sont étudiés. La technique numérique pour améliorer la méthode F1 est discutée en détail.

Chapitre 6: Interprétation localisée

On applique des opérateurs, dits de localisation, au faisceau feuille laser pour obtenir les expressions des coefficients g_n^m en séries infinies à partir des composantes radiales du champ obtenues au chapitre 3.

Comme toujours, la stratégie de programmation joue un rôle très important pour l'évaluation numérique. Dans ce chapitre des techniques d'accélération des calculs et d'amélioration de la précision sont discutés. On trouve que l'erreur relative par rapport aux résultats d'intégration est de l'ordre $0.1 * m\%$, où m est l'indice des coefficients g_n^m .

Chapitre 7: l'interprétation localisée-intégrale

Ce chapitre vise à développer une méthode mixte *interprétation-localisée-intégrale* qui combine les avantages des deux méthodes précédentes et rend l'interprétation localisée aussi souple que la méthode intégrale au profil du faisceau, tout en conservant la rapidité de calcul. Cette méthode résout aussi le problème de l'instabilité de l'interprétation localisée pour les faisceaux feuille laser très excentrique et l'indice n très élevé.

Chapter 5

Méthodes Intégrales

Dans ce chapitre nous comparons deux méthodes intégrales pour calculer les coefficients g_n et g_n^m : la méthode dite F1 (développée par Barton et al) utilise les intégrations doubles pour calculer les g_n^m et simples pour calculer les g_n ; et celle dite F2 (développée à Rouen) utilise les intégrations triples pour calculer les g_n^m et doubles pour calculer les g_n .

Après avoir démontré leur équivalence, les expressions des coefficients g_n et g_n^m utilisées par les méthodes F1 et F2 sont fournies dans la section 5.1. La section 5.2 est dédiée à la description des difficultés numériques et à la technique d'évaluation liées au calcul des g_n et g_n^m par ces méthodes. Pour simplifier la discussion, les faisceaux gaussiens sont considérés dans cette section. Les composantes radiales électriques et magnétiques de tels faisceaux jusqu'à l'ordre L^3 y sont fournies. Dans la section 5.3 on compare des résultats numériques et le temps de calcul obtenus par les méthodes F1 et F2, par les séries finies et par l'interprétation localisée pour le faisceau gaussien circulaire. La section 5.4 vise à appliquer les méthodes intégrales F1 et F2 au calcul des g_n^m du faisceau feuille laser (faisceau gaussien elliptique). On discute les limitations de la méthode F1 dans la section 5.5. La dernière section est une conclusion.

Le système de coordonnées du problème de diffusion est rappelé sur la figure 5.1. Le centre du faisceau se situe au point O_G , l'origine du repère $(O_G; u, v, w)$. Le faisceau se propage dans la direction $O_G w$. Le champ électrique est polarisé parallèlement au plan $O_G u w$. Pour traiter la diffusion du faisceau laser par une particule située en un point quelconque, on choisit deux autres systèmes de coordonnées, l'un cartésien $(O_P; x, y, z)$ et l'autre sphérique $(O_P; r, \theta, \varphi)$ dont les centres ne sont pas confondus avec celui du col du faisceau, mais avec celui de la particule. Les axes du système de coordonnées $(O_G; x, y, z)$ sont parallèles à ceux du système $(O_G; u, v, w)$. Toutes les expressions dans le chapitre 2 restent valables en remplaçant x, y, z par u, v, w . Les coordonnées de O_G dans le repère $(O_P; x, y, z)$ sont (x_0, y_0, z_0) .

5.1 Equivalence théorique

5.1.1 Démonstration de l'équivalence

L'équivalence entre le potentiel scalaire de Bromwich et le potentiel vecteur de Hertz a été traitée dans des travaux d'électromagnétisme (voir par exemple le livre de Broglie [20]). Premièrement, notons que l'équation (24), Réf. [39] ou l'équation (7), Réf. [67] et celle de l'équation (15), Réf. [16] sont identiques. Ainsi, nous concentrons nos efforts sur la relation entre les coefficients de forme du faisceau $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TE}^m$ pour la méthode F2 et A_{lm} , B_{lm} pour la méthode F1.

A partir de l'équation (7) dans la référence [67], nous obtenons:

$$E_r(r, \theta, \phi) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{TM}(n, m, j) \frac{n(n+1)}{r} \psi_n^{(j)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (5.1)$$

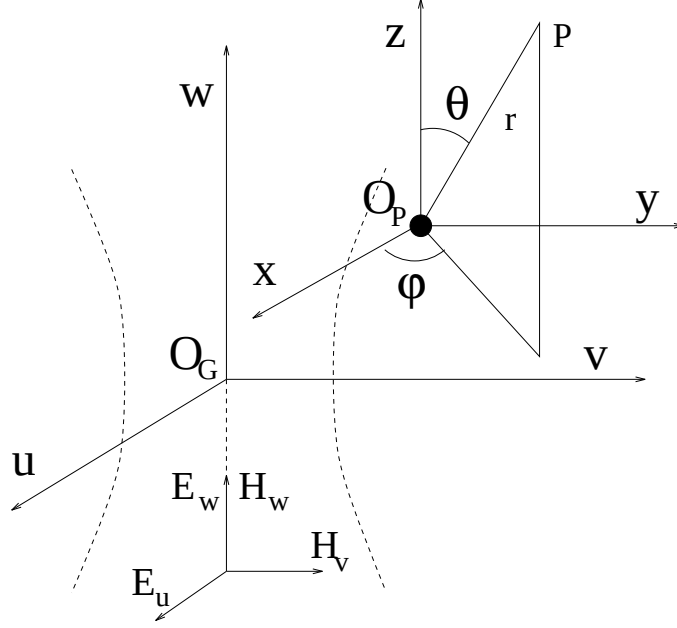


Figure 5.1: Géométrie du problème de diffusion

où

$$C_n^{pw} = \frac{1}{k} (-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (5.2)$$

est le coefficient pour l'onde plane. Les $\psi_n^{(j)}$ sont les fonctions de Bessel sphériques.

Pour la description du faisceau incident, j est fixé à 1. Nous pouvons alors utiliser la relation entre la fonction de Bessel sphérique et la fonction de Ricatti-Bessel [47] suivante:

$$\psi_n^{(1)}(kr) = \frac{\psi_n(kr)}{kr} \quad (5.3)$$

et obtenons:

$$E_r(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{E_0}{k^2 r^2} (-i)^{n+1} (2n+1) g_{n,TM}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (5.4)$$

Celle-ci peut être considérée comme une composante radiale du champ électrique sur une surface sphérique de rayon donné $r = a_s$.

Afin de supprimer les sommations dans l'équation (5.4), et d'obtenir les $g_{n,TM}^m$ en fonction de $E_r(r, \theta, \phi)$, nous multiplions (5.4) par $\exp(-im'\phi)$, l'intégrons sur ϕ de 0 à 2π , et appliquons la relation d'orthogonalisation:

$$\int_0^{2\pi} \exp(im\phi) \exp(-im'\phi) d\phi = \begin{cases} 2\pi & m = m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases} \quad (5.5)$$

et obtenons:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} E_r(r, \theta, \phi) \exp(-im'\phi) d\phi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi E_0}{k^2 r^2} (-i)^{n+1} (2n+1) g_{n,TM}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

En suite, en appliquant l'opérateur $\int_0^\pi \cdot P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ et la relation d'orthogonalisation [47]:

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl} \quad (5.7)$$

où δ_{nl} est défini par:

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & n = l \\ 0 & n \neq l \end{cases}$$

on déduit:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi}{k^2 r^2} (-i)^{n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} g_{n, TM}^m \psi_n(kr) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Par conséquent, on obtient:

$$\begin{aligned} g_{n, TM}^m &= \frac{k^2 r^2 i^{n+1}}{4\pi \psi_n(kr)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ceci est similaire à la formule (10), Réf. [67].

Pour comparer avec les résultats de Barton, nous considérons les coefficients A_{lm} de Barton (équation (32), Réf. [16]):

$$A_{lm} = \frac{r^2}{l(l+1)\psi_l(kr)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r(r, \theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.10)$$

où la fonction harmonique de surface sphérique $Y_{lm}(\theta, \phi)$ est définie par (équation (2), p.244, Réf. [108]):

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (5.11)$$

Puisque P_l^m est une fonction réelle, l'équation (5.10) devient:

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \frac{r^2}{l(l+1)\psi_l(kr)} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r(r, \theta, \phi) P_l^m(\cos \theta) \exp(-im\phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5.12)$$

En comparant les équations (5.12) et (5.9) nous obtenons pour $m \geq 0$:

$$g_{n, TM}^m = \frac{k^2 n(n+1)}{E_0 (-i)^{n+1}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{4\pi(2n+1)(n+m)!}} A_{nm} \quad (m \geq 0) \quad (5.13)$$

Pour $m \leq 0$, on utilise la relation (8) p.235 dans la référence [108]:

$$P_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) \quad (5.14)$$

L'équation (5.12) devient:

$$A_{lm} = \frac{(-1)^m r^2}{l(l+1)\psi_l(kr)} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r(r, \theta, \phi) P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.15)$$

Donc, on obtient:

$$g_{n,TM}^m = \frac{k^2 n(n+1)}{E_0 i^{n-1} (-1)^{n+m}} \sqrt{\frac{(n+m)!}{4\pi(2n+1)(n-m)!}} A_{nm} \quad (m \leq 0) \quad (5.16)$$

Pour l'onde TE on peut obtenir les relations similaires à celles pour l'onde TM, en remplaçant E , TM et A_{lm} par H , TE et B_{lm} respectivement.

On conclut donc que les coefficients $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TE}^m$ de Rouen sont équivalents aux coefficients A_{lm} , B_{lm} de Barton. Mais leurs valeurs ne sont pas identiques. Les avantages d'utiliser les $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TE}^m$ sont nombreux. D'abord, ils dépendent que des intensités relatives du champ. Dans le cas de l'onde plane, ils sont tous constants, et les g_n sont égaux à 1. La formulation de la théorie de Lorenz-Mie classique peut ainsi être facilement retrouvée, comme un cas particulier de la TLMG. Les valeurs des g_n , différents du 1, nous renseignent la forme et la focalisation du faisceau.

5.1.2 Formules des g_n^m et des g_n

Puisque les $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TE}^m$ et A_{lm} , B_{lm} sont équivalents, et qu'il existe des relations entre eux, nous pouvons comparer les coefficients g_n^m obtenus par différentes méthodes d'intégration. Deux expressions des coefficients g_n^m , basées sur ces deux méthodes, sont obtenues.

Pour la méthode F1, la composante électrique radiale dans l'équation (5.9) est considérée comme un champ sur une surface sphérique de rayon $r=\text{constant}=a_s$. Mais il faut remarquer que cette surface sphérique ne concerne pas la particule de diffuseur, et donc on utilise une notation différente (dans la référence [16] la même notation est utilisée). On discutera dans la section suivante la technique de choix de ce rayon pour améliorer les résultats numériques. On obtient donc:

$$g_{n,TM}^m = \frac{i^{n+1} k a_s}{4\pi \psi_n^{(1)}(k a_s)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_r(a_s, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.17)$$

où $\psi_n(k a_s)/k a_s$ a été remplacé par $\psi_n^{(1)}(k a_s)$ (équation 5.3).

Il est aussi possible de rendre (5.17) indépendant du rayon de la sphère car les coefficients g_n^m n'en dépendent pas. A partir de l'équation (5.4) en appliquant les opérateurs:

$$\int_0^{2\pi} \cdot \exp(-im'\phi) d\phi$$

$$\int_0^\pi \cdot P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\infty \cdot r \psi_n^{(1)}(kr) d(kr)$$

et prenant en compte (5.5), (5.7) et la relation d'intégration sur les fonctions de Bessel sphériques:

$$\int_0^\infty \left[\psi_n^{(1)}(kr) \right]^2 d(kr) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \quad (5.18)$$

il vient:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^m &= \frac{2n+1}{2\pi^2(-i)^{n+1}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \\ &\times \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)}(kr) \int_0^{2\pi} \exp(-im\phi) \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi d(kr) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Et nous retrouvons la relation donnée par Maheu [67]

La formule pour l'onde TE est similaire. On peut l'obtenir en remplaçant simplement TM et E par TE et H respectivement.

Dans des cas particuliers, les formules de $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ peuvent être encore simplifiées. Par exemple, lorsque la particule est situées sur l'axe du faisceau gaussien, la composante électrique a une forme comme:

$$E_r(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta) \cos \phi \quad (5.20)$$

Nous trouvons que seuls $g_{n,TM}^1$ et $g_{n,TM}^{-1}$ sont non-nuls et obtenons:

$$g_{n,TM}^1 = g_{n,TM}^{-1} = \frac{1}{2} g_n \quad (5.21)$$

$$g_{n,TE}^1 = -g_{n,TE}^{-1} = -\frac{i}{2} g_n \quad (5.22)$$

Par conséquent, on obtient deux formules simplifiées:

$$g_n = \frac{i^{n+1} k a_s}{2n(n+1) \psi_n^{(1)}(k a_s)} \int_0^\pi \frac{E_r(a_s, \theta)}{E_0} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.23)$$

$$g_n = \frac{(2n+1) i^{n+1}}{\pi n(n+1)} \int_0^\infty kr \psi_n^{(1)}(kr) \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta)}{E_0} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta d(kr) \quad (5.24)$$

Dans la section suivante, nous discuterons la technique d'évaluation numérique en utilisant les formules (5.17), (5.19), (5.23) et 5.24).

5.2 Technique d'évaluation numérique

Puisque les coefficients g_n^m et g_n décrivent le faisceau incident ils sont déterminés par la forme du faisceau incident. Ils ne doivent pas dépendre du rayon de la sphère a_s même si celui-ci apparaît dans les formules des g_n^m et g_n (équations (5.17) et (5.23)). Cette flexibilité nous autorise à choisir le rayon de la sphère permettant de faire le calcul le plus efficace. Dans ce but, on considère le faisceau gaussien et discute la technique d'évaluation des g_n en détail. Le calcul des g_n^m est similaire.

5.2.1 Composantes radiales du faisceau gaussien

A l'ordre L ou l'ordre L^- , les composantes radiales électrique et magnétique se lissent comme [41]:

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \phi) &= E_0 \psi_0 \left[\cos \phi \sin \theta \left(1 - \frac{2Q}{l} \varepsilon_L r \cos \theta \right) + \frac{2Q}{l} \varepsilon_L x_0 \cos \theta \right] \\ &\times \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$H_r(r, \theta, \phi) = H_0 \psi_0 \left[\sin \phi \sin \theta \left(1 - \frac{2Q}{l} \varepsilon_L r \cos \theta \right) + \frac{2Q}{l} \varepsilon_L y_0 \cos \theta \right] \times \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \quad (5.26)$$

où

$$\psi_0 = iQ \exp \left(-iQ \frac{r^2 \sin^2 \theta}{w_0^2} \right) \exp \left(-iQ \frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2} \right) \times \exp \left[\frac{2iQ}{w_0^2} r \sin \theta (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi) \right] \quad (5.27)$$

$$Q = \frac{1}{i + \frac{2}{l}(r \cos \theta - z_0)} \quad (5.28)$$

et ε_L correspond à la description de l'approximation à l'ordre L ($\varepsilon_L = 1$) ou à l'ordre L^- ($\varepsilon_L = 0$).

De plus, si la particule se situe sur l'axe du faisceau, (5.25) devient en considérant l'équation (5.20):

$$E_r(r, \theta) = E_0 \psi_0 \sin \theta \left(1 - \frac{2Q}{l} \varepsilon_L r \cos \theta \right) \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \quad (5.29)$$

où

$$\psi_0 = iQ \exp(-iQ \frac{r^2 \sin^2 \theta}{w_0^2}) \quad (5.30)$$

De plus, si le faisceau incident est une onde plane, on a:

$$E_r(r, \theta) = E_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \quad (5.31)$$

$H_r(r, \theta, \phi)$ est similaire à E_r où $\cos \phi, \sin \phi$ sont remplacés par $\sin \phi, \cos \phi$ et x_0, y_0 par y_0, x_0 , respectivement.

Si on considère les approximations jusqu'à l'ordre L^3 , on peut obtenir les composantes radiales électrique et magnétique dans le repère de la particule à partir des expressions des composantes cartésiennes du champ dans le repère du faisceau (équations (2.23)-(2.28), chapitre 2). Par deux changements de repère: de $(O_G; u, v, w)$ à $(O_P; x, y, z)$, puis de $(O_P; x, y, z)$ à $(O_P; r, \theta, \phi)$, on obtient:

$$\begin{aligned} E_r = & E_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \sin \theta \\ & \times \left\{ \cos \phi + s^2 \left[-\rho^2 Q^2 (1 - i\rho^2 Q) \cos \phi - 2Q^2 \xi (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi) \right] \right. \\ & + s^4 \left[\rho^4 Q^4 (2 - 3i\rho^2 Q - 0,5\rho^4 Q^2) \cos \phi \right. \\ & + \rho^2 Q^4 (8 - 2i\rho^2 Q) \xi (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi) \left. \right] \left. \right\} \\ & + E_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \xi \cos \theta \\ & \times \left\{ s(-2Q) + s^3 \rho^2 Q^3 (6 - 2i\rho^2 Q) \right. \\ & + s^5 \rho^4 Q^5 (-20 + 10i\rho^2 Q + \rho^4 Q^2) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} H_r = & H_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \sin \theta \\ & \times \left\{ \sin \phi + s^2 \left[-\rho^2 Q^2 (1 - i\rho^2 Q) \sin \phi - 2Q^2 \eta (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi) \right] \right. \\ & + s^4 \left[\rho^4 Q^4 (2 - 3i\rho^2 Q - 0,5\rho^4 Q^2) \sin \phi \right. \\ & + \rho^2 Q^4 (8 - 2i\rho^2 Q) \eta (\eta \sin \phi + \xi \cos \phi) \left. \right] \left. \right\} \\ & + H_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \eta \cos \theta \\ & \times \left\{ s(-2Q) + s^3 \rho^2 Q^3 (6 - 2i\rho^2 Q) \right. \\ & + s^5 \rho^4 Q^5 (-20 + 10i\rho^2 Q + \rho^4 Q^2) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

où

$$\xi = \frac{r}{w_0} \cos \phi \sin \theta - \frac{x_0}{w_0} \quad \eta = \frac{r}{w_0} \sin \phi \sin \theta - \frac{y_0}{w_0} \quad (5.34)$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (5.35)$$

Lorsque la particule est sur l'axe du faisceau, $x_0 = y_0 = 0$, les équations (5.32) et (5.33) se simplifient:

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \sin \theta \cos \phi \\ &\times \left(1 - \frac{2Q}{l} r \cos \theta\right) \left[1 - s^2 \frac{Q^2}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta \left(3 - \frac{iQ}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta\right)\right. \\ &\left.+ s^4 \frac{Q^4}{w_0^4} r^4 \sin^4 \theta \left(10 - 5 \frac{iQ}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{Q^2}{2w_0^4} r^4 \sin^4 \theta\right)\right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \psi_0 \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \sin \theta \sin \phi \\ &\times \left(1 - \frac{2Q}{l} r \cos \theta\right) \left[1 - s^2 \frac{Q^2}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta \left(3 - \frac{iQ}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta\right)\right. \\ &\left.+ s^4 \frac{Q^4}{w_0^4} r^4 \sin^4 \theta \left(10 - 5 \frac{iQ}{w_0^2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{Q^2}{2w_0^4} r^4 \sin^4 \theta\right)\right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.2.2 Evaluation des g_n

Pour simplifier la discussion, on considère premièrement le cas du faisceau gaussien circulaire à l'ordre L avec une particule située au centre du faisceau.

Avec les notations:

$$t_n(x) = \frac{2n(n+1)\psi_n^{(1)}(x)}{x} \quad (5.38)$$

et:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{E_r(a_s, \theta)}{E_0} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.39)$$

où $x = ka_s = \frac{2\pi}{\lambda} a_s$, l'équation (5.23) peut être réécrite comme:

$$g_n = \frac{i^{n+1}}{t_n(x)} I_n \quad (5.40)$$

L'instabilité numérique peut apparaître si le rayon de la sphère a_s n'est pas bien choisi. Afin d'obtenir les g_n avec la plus grande précision possible, la valeur x doit être choisie pour que l'intégrale I_n soit la plus précise possible.

D'abord, dans les expressions du champ du faisceau gaussien, il y a un facteur:

$$\exp\left(-iQ \frac{a_s^2 \sin^2 \theta}{w_0^2} - ika_s \cos \theta\right) \quad (5.41)$$

Si le rayon de la sphère d'intégration a_s est trop grand, le noyau de l'intégrale oscille fortement, ce qui rend l'intégration difficile.

Au contraire, si nous choisissons le rayon trop petit, le facteur $t_n(x)$ devant l'intégrale sera trop petit. En effet, d'après la définition de la fonction de Bessel (formule (7), Réf. [108]), on a:

$$t_n(x) \cong \frac{2^{n+1}n(n+1)!x^{n-1}}{(2n+1)!} \quad x \ll n \quad (5.42)$$

$t_n(x)$ est d'autant plus petit que x est petit. Par exemple:

$$\begin{aligned} t_{10}(0,01) &\sim 10^{-25}, & t_{30}(0,01) &\sim 10^{-96}, & t_{30}(1) &\sim 10^{-38} \\ t_{50}(0,01) &\sim 10^{-174}, & t_{50}(1) &\sim 10^{-76}, & t_{50}(10) &\sim 10^{-27} \end{aligned}$$

Donc le coefficient devant l'intégrale (5.23) devient trop grand. Puisque les g_n sont typiquement compris entre 1 et 10^{-5} (pour $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$ et $1 < n < 200$, par exemple), la valeur de l'intégrale I_n doit être entre l'intervalle de 10^{-25} à 10^{-180} pour les exemples donnés précédemment.

Notons encore que le noyau d'intégrale:

$$f_n(\theta) = \frac{E_r(a_s, \theta)}{E_0} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta \quad (5.43)$$

est de l'ordre 1. Il est numériquement absurde d'obtenir une intégrale I_n valant 10^{-25} à 10^{-180} avec un tel noyau sur un ordinateur de précision finie (normalement 16 chiffres en double précision).

Pour obtenir une bonne estimation numérique des g_n , il faut choisir le rayon de la sphère a_s qui permet d'obtenir la valeur de l'intégrale I_n la plus grande possible.

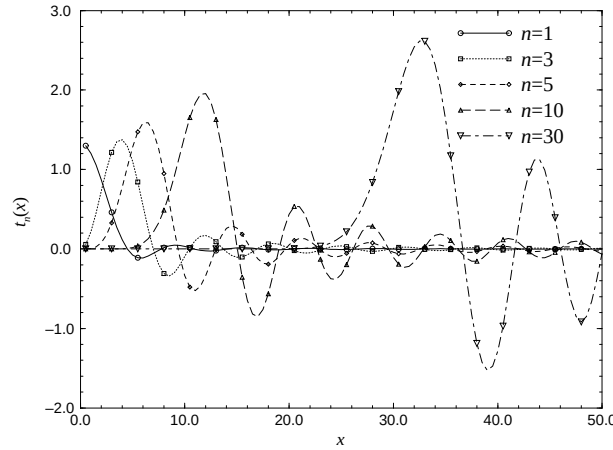


Figure 5.2: Fonction $t_n(x)$ pour différents n

Table 5.1: Points de valeur extrême x_{nj} de $t_n(x)$ [$t'_n(x_{nj}) = 0$]

n	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
1	0	5,763459197	9,095011330	12,32294097	15,51460301
2	2,501132620	7,136008792	10,51460106	13,77167799	16,98305524
3	3,864699778	8,444922020	11,88174663	15,17543305	18,41207683
5	6,265767845	10,95061072	14,51084693	17,88578677	21,18064080
10	11,79205138	16,88214579	20,73147676	24,31041053	27,75995902
20	22,35662501	28,15176083	32,47042249	36,40317235	40,13673640
30	32,72344620	39,07939301	43,77248496	47,99851339	51,97567705
50	53,23995820	60,47455461	65,76021301	70,46157575	74,84228316

La figure 5.2 montre l'évolution de $t_n(x)$ en fonction de x pour différents n , le tableau 5.1 présente ses points de valeurs extrêmes x_{nj} (j -ième valeur extrême de la fonction $t_n(x)$ de l'ordre n). On

trouve que $t_n(x)$ a un maximum pour les valeurs x un peu plus grandes que n et puis oscille. Il est donc recommandé de prendre un rayon de la sphère d'intégration tel que $x = ka_s \cong n$. On peut certainement prendre d'autres valeurs de x correspondant à autre point extrême ou près d'eux. Ce choix n'influence pas beaucoup la précision des résultats. Mais nous devons faire attention à ne pas prendre x trop près d'un zéro de $t_n(x)$ et ne pas choisir x trop petit ou trop grand par rapport à n .

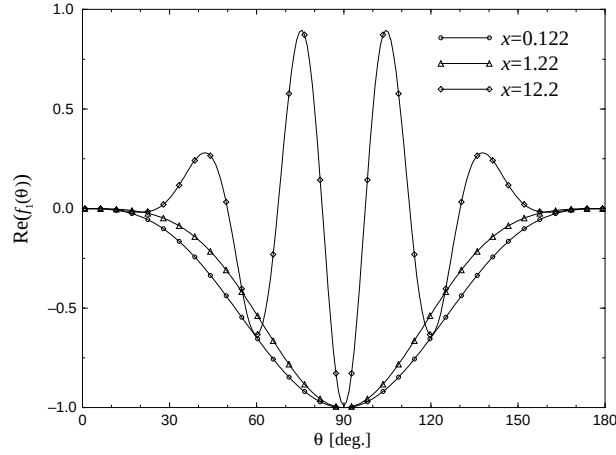


Figure 5.3: Partie réelle du noyau de l'intégrale du g_1 , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 0,122; 1,22; 12,2$

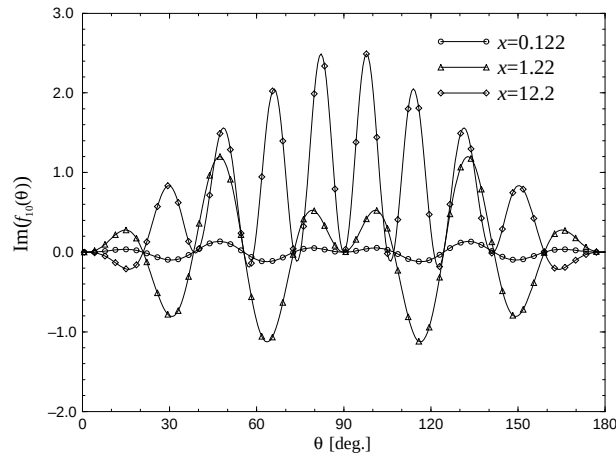


Figure 5.4: Partie imaginaire du noyau d'intégrale du g_{10} , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 0,122; 1,22; 12,2$

Les figures 5.3 à 5.5 représentent l'évaluation du noyau de l'intégrale en fonction de θ pour différents n et a_s . La figure 5.3 présente la partie réelle du noyau de l'intégrale du g_1 . On trouve que plus x s'approche du maximum de $t_n(x)$ (pour $n = 1$, le maximum correspond à $x = 0$), plus grand sera le résultat de l'intégration. Mais si x est trop grand le noyau de l'intégrale oscille fortement (voir la courbe pour $x = 12,2$). Pour $n = 1$, la partie imaginaire du noyau de l'intégrale est impaire en x , il ne contribue pas à l'intégration du g_1 . La figure 5.4 montre la partie imaginaire du noyau de l'intégrale du g_{10} . L'avantage de choisir $x \cong n$ est montré plus clairement: si $x = 12,2 \cong n$ le noyau de l'intégrale est positif en presque tous ses points. Il est certain que le résultat de l'intégration est plus précis qu'en $x \cong 1,22$ ou $x = 0,122$. Mais si on prend le rayon a_s trop grand, les difficultés d'intégration apparaissent également: le noyau de l'intégrale oscille très fortement dans ce cas (figure 5.5).

Donc, il vaut mieux de prendre le rayon de la sphère a_s correspondant au premier maximum de fonction $t_n(x)$ si bien que on peut obtenir l'intégrale la plus grande possible et avec un noyau

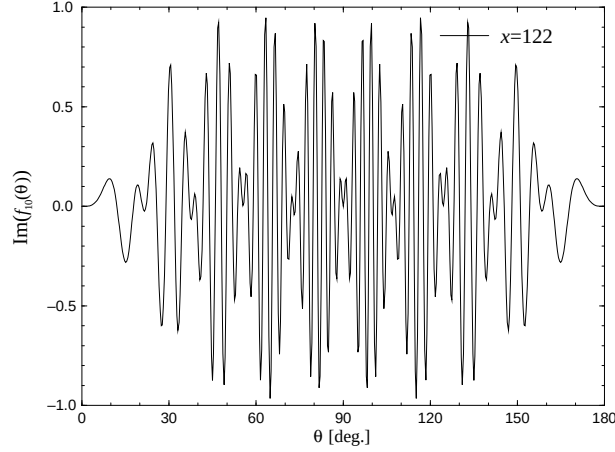


Figure 5.5: Partie imaginaire du noyau d'intégrale du g_{10} , $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_L = 1$, $x = 2\pi a_s/\lambda = 122$

d'intégrale le moins oscillant. Le premier maximum se situe en $x \cong n + 1/2$. Nous pouvons dans la pratique prendre simplement $x = n + 1/2$ pour calculer les g_n .

La méthode F2 utilise une intégration double pour calculer les g_n (équation (5.24)). L'intégration sur θ est la même que dans la méthode F1. Cependant, l'intégration supplémentaire sur r est comprise entre 0 et l'infini. Dans le paragraphe précédent on a déjà démontré que l'intégrale (5.39) est la plus grande lorsque $x \cong n$ et donc contribue le plus à l'intégrale sur r .

La figure 5.6 montre le noyau d'intégrale en fonction $x = kr$ utilisée pour calculer les g_n par la méthode F2:

$$F_n(x) = \frac{(2n+1)i^{n+1}}{\pi n(n+1)} x \psi_n^{(1)}(x) \int_0^\pi \frac{E_r(x, \theta)}{E_0} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.44)$$

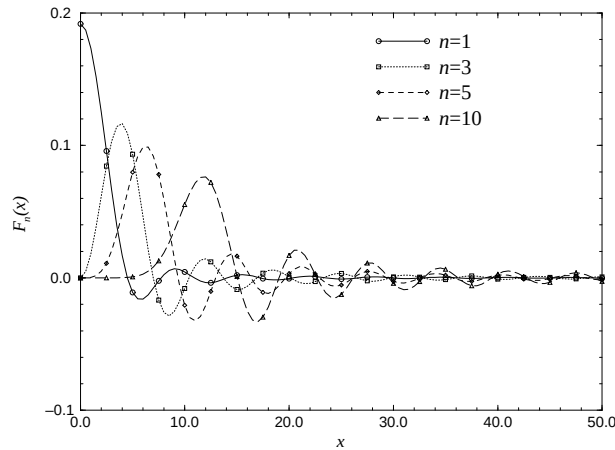


Figure 5.6: Noyau d'intégration $F_n(x)$ de la méthode F2 pour différent n

Pour $n = 1$, l'intégration entre $x = 0$ et $x = 10$ contribue le plus au g_n . Lorsque $n = 10$, la contribution de l'intégration entre $x = 0$ et $x = 6$ est très faible. D'une part cela montre que c'est dans la région $x \sim n$ que le noyau de l'intégrale contribue le plus à l'intégration. Ainsi, parce que la méthode F2 tient compte de toutes les valeurs de r , elle est plus stable. D'autre part, ceci explique aussi pourquoi on peut prendre différentes bornes inférieures et supérieures d'intégration pour différents g_n [68] (voir aussi la section suivante).

La discussion pour le cas $z_0 \neq 0$ est similaire.

5.2.3 Evaluation des g_n^m

Pour le calcul des coefficients g_n^m on a le même problème que pour les g_n . Nous pouvons donc prendre le même rayon de la sphère a_s pour la méthode F1 et le même intervalle d'intégration pour la méthode F2 comme discutés dans le dernier paragraphe.

5.3 Résultats numériques et discussion

Dans cette section, nous comparons les valeurs numériques des coefficients g_n et g_n^m calculés par quatre méthodes différentes:

1. **Méthode F2:** Equation (5.24) programme GNF2 pour g_n et formule (5.19) programme GNMF2 pour g_n^m ;
2. **Méthode F1:** Equation (5.23) programme GNF1 pour g_n et formule (5.17) programme GNMF1 pour g_n^m ;
3. **Série finie:** programme GNSF pour g_n et programme GNMSF pour g_n^m [41];
4. **Interprétation localisée:** programme GNLA pour g_n et programme GNMF pour g_n^m [86].

Nous comparons le temps de calcul, discutons les avantages et limitations de chaque méthode. Tous les programmes sont en FORTRAN réalisés sur une Sun station 4/60 (Sparcstation). La méthode de Gauss-Legendre est utilisée pour l'intégration dans ces programmes.

Considérons un faisceau à l'ordre L de longueur d'onde $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$ et un rayon du col du faisceau $w_0 = 10 \mu\text{m}$.

Table 5.2: Comparaison des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $w_0=10 \mu\text{m}$, $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$

méthodes programmes	interpr. local. GNLA	série finie GNSF	intégration		
			F1	F2	
			GNF1 $ka_s=n+1/2$	GNF2 $kr=0\sim 200$ $kr=0\sim 20000$	
$n=1$	0,9999	1,0000	1,0000	0,9952	1,0000
$n=5$	0,9980	0,9981	0,9981	0,9806	0,9978
$n=10$	0,9926	0,9928	0,9928	0,9597	0,9921
$n=15$	0,9840	0,9842	0,9842	0,9355	0,9837
$n=50$	0,8428	0,8429	0,8429	0,7062	0,8416

Dans le tableau 5.2 on choisit $x_0 = y_0 = 0$ (g_n) avec $z_0 = 0$. Pour la méthode F1 le nombre de points d'intégration est de 100. Pour la méthode F2 l'intégration sur kr est entre 0 et 200 pour laquelle le nombre de points d'intégration est alors égal à 500; ou entre 0 et 20000, cette intégration est alors réalisée sur plusieurs intervalles, puis sommée. Le nombre de points d'intégration pour θ est de 100 pour $n = 1$, de 200 pour $n = 5$, de 300 pour $n = 10$ et 15. Les programmes GNLA et GNSF calculent tous les g_n pour n plus petit que ceux indiqués dans ce tableau.

Dans le tableau 5.3 on calcule les g_n^m , les coordonnées de la particule sont $x_0 = 5 \mu\text{m}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, dans ce cas l'intégration deviennent double ou triple. Le nombre de point d'intégration sur ϕ est 100, sur θ et kr le même nombre de point que pour le tableau 5.2 est utilisé.

Les tableaux 5.4 et 5.5 présentent le temps de calcul correspondant aux tableaux 5.2 et 5.3.

La comparaison des tableaux 5.2 et 5.3, des tableaux 5.4 et 5.5 montre que:

- L'accord entre les quatre méthodes est très satisfaisant, surtout entre les séries finies et la méthode F1.

Table 5.3: Comparaison des coefficients $g_{n,TM}^m$ calculés par différentes méthodes, $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 5 \mu\text{m}$, $y_0 = z_0 = 0$

méthodes	interprétation localisée	série finie
programmes	GNMF	GNMSF
$n=1$ $m=0$	(0; 6,376 10^{-3})	(0; 6,377 10^{-3})
$m=1$	(3,894 10^{-1} ; 0)	(3,894 10^{-1} ; 0)
$n=5$ $m=0$	(0; 9,549 10^{-2})	(0; 9,552 10^{-2})
$m=1$	(3,889 10^{-1} ; 0)	(3,889 10^{-1} ; 0)
$m=2$	(0; -1,592 10^{-3})	(0; -1,592 10^{-3})
$m=5$	(4,550 10^{-12} ; 0)	(4,559 10^{-12} ; 0)
$n=10$ $m=0$	(0; 3,485 10^{-1})	(0; 3,486 10^{-1})
$m=1$	(3,876 10^{-1} ; 0)	(3,876 10^{-1} ; 0)
$m=5$	(4,527 10^{-12} ; 0)	(4,536 10^{-12} ; 0)
méthodes	intégration	
	F1 ($ka_s = n + 1/2$)	F2
programmes	GNMF1	GNMF2
$n=1$ $m=0$	(2,2 10^{-18} ; 6,377 10^{-3})	-
$m=1$	(3,894 10^{-1} ; 4,3 10^{-17})	(3,875 10^{-1} ; 4,2 10^{-18})
$n=5$ $m=0$	(7,9 10^{-18} ; 9,552 10^{-2})	-
$m=1$	(3,889 10^{-1} ; 4,8 10^{-17})	-
$m=2$	(4,7 10^{-18} ; -1,592 10^{-3})	-
$m=5$	(4,559 10^{-12} ; 2,4 10^{-20})	-
$n=10$ $m=0$	(5,9 10^{-17} ; 3,486 10^{-1})	-
$m=1$	(3,876 10^{-1} ; 9,3 10^{-17})	(3,747 10^{-1} ; -2,3 10^{-17})
$m=5$	(4,536 10^{-12} ; 2,0 10^{-21})	-

Table 5.4: Temps de calcul des g_n en seconde, correspondant au tableau 5.2

méthodes	interpr. local.	série finie	intégration	
			F1	F2
programmes	GNLA	GNSF	GNMF1	GNMF2
$n=1$	-	-	0,1	23,4
$n=5$	0,0	0,0	0,1	33,5
$n=10$	0,0	0,0	0,1	65,6
$n=15$	0,0	0,0	0,1	81,7
$n=50$	0,0	0,0	0,2	-

- Pour obtenir les résultats plus précis avec la méthode F2, l'intervalle d'intégration sur kr doit être agrandi.
- Les méthodes de l'interprétation localisée et des séries finies sont beaucoup plus rapides que celles d'intégration, et l'interprétation localisée est la plus rapide.
- La méthode F1 est beaucoup plus rapide que la F2.

Les tableaux 5.6 et 5.7 présentent les résultats numériques des g_n pour l'onde plane et $g_{n,TM}^m$ du faisceau gaussien calculés par la méthode F1 pour différents a_s . Ils démontrent que les coefficients g_n et $g_{n,TM}^m$ ne dépendent presque pas du rayon de sphère choisi puisque ils sont déterminés par la forme du faisceau incident. En outre, lorsque le faisceau incident est une onde plane, l'indépendance des g_n ou des g_n^m par rapport au choix du rayon de la sphère a_s peut être démontrée analytiquement à partir

Table 5.5: Temps de calcul des $g_{n,TM}^m$ en seconde, correspondant au tableau 5.3

méthodes	interpr.. local.	série finie	intégration	
			F1	F2
programmes	GNMF	GNMSF	GNMF1	GNMF2
$n=1$ $m=0$			2,7	-
$m=1$			3,0	3131,3
$n=5$ $m=0$			3,0	-
$m=1$	0,1	0,1	3,1	-
$m=2$			3,1	-
$m=5$			3,0	-
$n=10$ $m=0$			6,7	-
$m=1$	0,3	0,5	7,1	6487,4
$m=5$			6,7	-

Table 5.6: g_n de l'onde plane calculés par la méthode F1 $w_0=1000\text{m}$, $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$, $x_0=y_0=z_0=0$

rayon a_s de de la sphère(μm)	nombre de point d'intégration	n	g_n
0,01	20	1~ 5	1,000000000
0,10	50	1~ 10	1,000000000
1,00	100	1~ 25	1,000000000
10,00	500	1~ 150	1,000000000

des équation (5.17), (5.23) et (5.24) (voir annexe D), et retrouvée numériquement par les programmes GNF1 et GNMF1.

De ces deux tableaux, on déduit que on peut choisir le rayon a_s dans un large domaine pour le calcul des coefficients, particulièrement pour g_n . Cependant, il faut noter que les résultats des g_n^m ne sont pas très bons lorsqu'on prend un trop grand rayon a_s pour $n = 1, m = 0$, ou une trop petite valeur de a_s pour $m = n = 5$ (tableau 5.7).

Pour la méthode F2 l'intégration supplémentaire doit être comprise théoriquement entre 0 et l'infini. Nous avons montré que seule l'intégration dans une certaine région de kr (dépend de n) est importante pour g_n^m [69][70]. Le tableau 5.8 donne la valeur des g_n en fonction de la borne supérieure d'intégration kr_{max} , pour différents n . La valeur des g_n tend vers une limite lorsque kr_{max} s'accroît et on peut obtenir les g_n très précis. Mais ceci devient très onéreux. De plus, on peut démontrer que lorsque la description du faisceau n'est pas exacte, cette méthode d'intégration diverge également à cause des termes en s d'ordre élevé [63] [46]. C'est pourquoi seules quelques valeurs des g_n et g_n^m sont indiquées dans les tableaux 5.2 et 5.3, et uniquement sur des intervalles d'intégration 0~200 et 0~20000.

5.4 Application au faisceau feuille laser

La technique discutée dans la section précédente peut être utilisée pour traiter non seulement le faisceau gaussien mais aussi d'autres faisceaux. Dans cette section nous allons l'appliquer au faisceau feuille laser.

Le faisceau feuille laser peut être obtenu en focalisant un faisceau gaussien par une lentille cylindrique. C'est un outil puissant pour la mesure de taille de particules, comme dans la technique phase doppler, le système de double-onde cylindrique [77] [78] et PIV [1][3]. Les expressions des champs électromagnétiques de ce faisceau ont été données dans le chapitre 3. On compare dans cette section

Table 5.7: $g_{n,TM}^m$ du faisceau gaussien calculés par la méthode F1, $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 5 \mu\text{m}$, $y_0 = z_0 = 0$

n	m	rayon $a_s (\mu\text{m})$	ka_s	nombre de point d'int.	g_n^m
1	0	0,01	0,122	10	(1,2 10 ⁻¹⁷ , 6,377232 10 ⁻³)
		0,1	1,22	20	(-3,2 10 ⁻¹⁸ , 6,377694 10 ⁻³)
		1	12,2	50	(-1,6 10 ⁻¹⁶ , 6,375159 10 ⁻³)
		10	122	500	(3,9 10 ⁻¹³ , 6,304760 10 ⁻³)
1	1	0,01	0,122	10	(3,894004 10 ⁻¹ , 4,1 10 ⁻¹⁷)
		0,1	1,22	20	(3,894004 10 ⁻¹ , -2,8 10 ⁻¹⁹)
		1	12,2	50	(3,894004 10 ⁻¹ , 6,4 10 ⁻¹⁶)
		10	122	500	(3,894007 10 ⁻¹ , -1,3 10 ⁻¹³)
5	0	0,01	0,122	20	(-6,3 10 ⁻¹¹ , 9,551631 10 ⁻²)
		0,1	1,22	30	(-7,7 10 ⁻¹⁵ , 9,551648 10 ⁻²)
		1	12,2	50	(-9,7 10 ⁻¹⁷ , 9,554546 10 ⁻²)
		10	122	500	(2,7 10 ⁻¹⁵ , 9,547369 10 ⁻²)
5	2	0,01	0,122	20	(8,7 10 ⁻¹³ , -1,592170 10 ⁻³)
		0,1	1,22	30	(-3,1 10 ⁻¹⁶ , -1,592170 10 ⁻³)
		1	12,2	50	(-1,5 10 ⁻¹⁸ , -1,592167 10 ⁻³)
		10	122	500	(-4,5 10 ⁻¹⁷ , -1,592173 10 ⁻³)
5	5	0,01	0,122	50	(3,995991 10 ⁻¹² , 5,2 10 ⁻¹³)
		0,1	1,22	30	(4,558905 10 ⁻¹² , -4,2 10 ⁻¹⁷)
		1	12,2	50	(4,559155 10 ⁻¹² , -1,4 10 ⁻¹⁹)
		10	122	500	(4,559236 10 ⁻¹² , 6,9 10 ⁻¹⁹)

Table 5.8: g_n du faisceau gaussien calculés par la méthode F2, $w_0 = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$

borne supér. de l'intégration sur kr	g_1	g_5	g_{10}	g_{15}	g_{50}
100	0,9904	0,9630	0,9263	0,8871	0,5591
200	0,9952	0,9806	0,9597	0,9355	0,7063
500	0,9981	0,9911	0,9795	0,9648	0,7886
1000	0,9990	0,9946	0,9861	0,9745	0,8158
2000	0,9995	0,9964	0,9895	0,9793	0,8294
5000	0,9998	0,9974	0,9915	0,9822	0,8375
10000	0,9999	0,9978	0,9921	0,9832	0,8402
20000	1,0000	0,9980	0,9925	0,9837	0,8416

les coefficients g_n^m du faisceau feuille laser calculés par les méthodes F1 et F2.

Table 5.9: Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^1$ calculés par les méthodes F1 et F2, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

n	méthode F2	méthode F1
1	0,499761	0,500000
5	0,496085	0,496956
10	0,486732	0,488365
20	0,453544	0,456525
50	0,284632	0,289283

Table 5.10: Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^1$ calculés par les méthodes F1 et F2, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$

n	méthode F2		méthode F1	
1	-0,026451	-0,140836i	-0,026467	-0,140903i
5	-0,026901	-0,141334i	-0,026948	-0,141582i
10	-0,028208	-0,142997i	-0,028303	-0,143476i
20	-0,033078	-0,149238i	-0,033295	-0,150217i
50	-0,057008	-0,172470i	-0,057939	-0,175287i

Les tableaux 5.9 et 5.10 présentent les résultats numériques des $g_{n,TM}^1$ pour $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ et $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$. La borne de l'intégration sur kr pour la méthode F1 est de 0 à 2000. L'accord entre les deux méthodes est très bon. La différence s'accroît lorsque l'indice n augmente parce que la contribution de l'intégration sur kr grand devient de plus en plus importante au fur et à la mesure que n s'accroît comme nous l'avons vu dans le tableau 5.8 pour le faisceau gaussien.

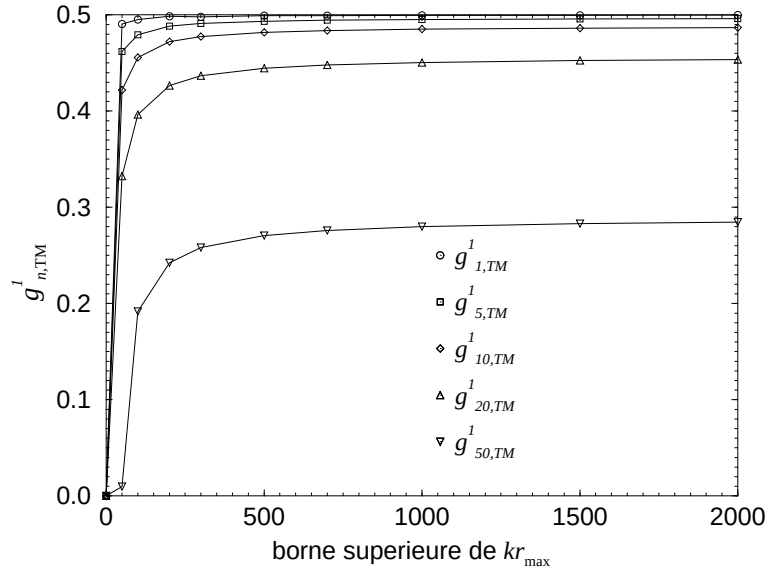


Figure 5.7: $g_{n,TM}^1$ en fonction de la borne supérieure d'intégration sur kr , $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Les figures 5.7 et 5.8 présentent les $g_{n,TM}^m$ en fonction de la borne supérieure de l'intégration sur kr pour les même cas que dans les tableaux 5.9 et 5.10. Les lignes continues correspondent aux parties réelles et les lignes discontinues correspondent aux parties imaginaires. Ils montrent clairement que les coefficients g_n^m tendent vers une limite lorsque la borne supérieure de l'intégration kr_{max} augmente. Les résultats des deux méthode concordent lorsque la borne supérieure sur kr est prise suffisamment grande.

5.5 Limites de la méthode F1

Dans les deux sections précédentes, nous avons discuté le calcul des g_n^m par la méthode F1 et démontré que celle-ci est beaucoup plus rapide que F2 et aussi précise que ce soit pour le faisceau gaussien ou le faisceau feuille laser peu focalisé, c'est-à-dire dont les longueurs des axes au col ne sont pas trop petites par rapport à la longueur d'onde.

Nous avons pu constater que la précision de la méthode F1 dépend du choix du rayon de la sphère

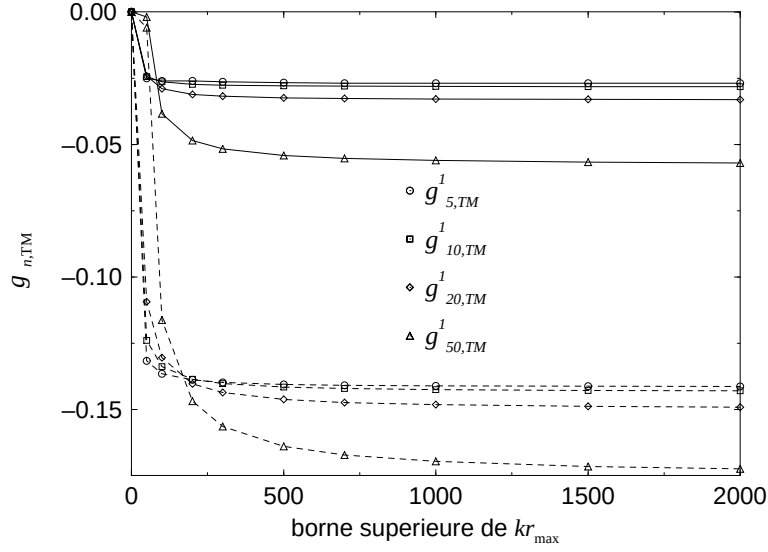


Figure 5.8: $g_{n,TM}^1$ en fonction de la borne supérieure d'intégration sur kr , $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$

a_s : il peut être pris dans un domaine très large pour certains faisceaux (onde plane, faisceaux gaussien et feuille laser peu focalisés), mais pas pour un faisceau quelconque. En effet, la précision de la méthode F1 dépend aussi de la qualité de description du faisceau.

Dans les sections 5.3 et 5.4, les g_n et g_n^m sont calculés en utilisant les descriptions des faisceaux à l'ordre L et on obtient les bons résultats. Mais, si les g_n et g_n^m sont calculés en utilisant la description du faisceau à l'ordre L^- , les résultats seraient faux pour les mêmes faisceaux, car ils dépendent fortement du choix du rayon de la sphère. Par ailleurs, la méthode F2 permet obtenir des bons résultats.

Afin d'appliquer la méthode F1 au calcul des coefficients g_n et g_n^m pour un faisceau focalisé, une description du faisceau à des ordres plus élevés doit être utilisée.

Table 5.11: g_n du faisceau gaussien à l'ordre L^3 calculés par la méthode F1, $w_0 = 0,5 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

n	ka_s	g_n	n	ka_s	g_n
1	0,10	1,000000	5	0,50	0,454433
	1,50	1,000000		5,50	0,454389
	10,00	1,001898		50,00	0,452151
10	1,00	$0,508922 \cdot 10^{-1}$	20	10,00	$0,162482 \cdot 10^{-4}$
	10,50	$0,509612 \cdot 10^{-1}$		20,00	$0,174679 \cdot 10^{-4}$
	20,00	$0,508682 \cdot 10^{-1}$		20,50	$0,175903 \cdot 10^{-4}$
	20,73	$0,509938 \cdot 10^{-1}$		22,36	$0,180783 \cdot 10^{-4}$
	27,76	$0,511322 \cdot 10^{-1}$		40,14	$0,440919 \cdot 10^{-4}$
30	30,00	$0,378848 \cdot 10^{-7}$	50	50,00	$0,846352 \cdot 10^{-8}$
	30,50	$0,448119 \cdot 10^{-7}$		50,50	$0,504169 \cdot 10^{-8}$
	32,00	$0,712659 \cdot 10^{-7}$		52,00	$-0,105614 \cdot 10^{-7}$
	32,72	$0,697969 \cdot 10^{-7}$		53,24	$-0,855302 \cdot 10^{-8}$
	39,08	$0,238769 \cdot 10^{-6}$		60,47	$-0,113776 \cdot 10^{-6}$

En introduisant les expressions des composantes radiales du champ électrique (5.32) et (5.36), respectivement, dans (5.17) et (5.23) nous pouvons calculer les coefficients $g_{n,TM}^m$ et g_n pour le faisceau gaussien à l'ordre L^3 par la méthode F1. Les tableaux 5.11 et 5.12 présentent les résultats numériques des g_n et $g_{n,TM}^m$ pour un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,5145 \mu\text{m}$, de rayon au col du

Table 5.12: $g_{n,TM}^m$ du faisceau gaussien à l'ordre L^3 calculés par la méthode F1, $w_0 = 0,5 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 0,5 \mu\text{m}$, $y_0 = z_0 = 0$

n	ka_s	g_n^1	n	ka_s	g_n^1
1	0,10	0,194534,	5	0,50	0,213161
	1,50	0,194531,		5,50	0,213183
	10,00	0,194165,		50,00	0,214340
10	1,00	$0,993556 \cdot 10^{-1}$	20	10,00	$0,700054 \cdot 10^{-3}$
	10,50	$0,993656 \cdot 10^{-1}$		20,00	$0,696886 \cdot 10^{-3}$
	20,00	$0,993611 \cdot 10^{-1}$		20,50	$0,696549 \cdot 10^{-3}$
	20,73	$0,993057 \cdot 10^{-1}$		22,36	$0,694957 \cdot 10^{-3}$
	27,76	$0,991957 \cdot 10^{-1}$		40,14	$0,727783 \cdot 10^{-3}$
30	30,00	$0,153165 \cdot 10^{-6}$	50	50,00	$-0,392146 \cdot 10^{-8}$
	30,50	$0,162442 \cdot 10^{-6}$		50,50	$-0,498452 \cdot 10^{-8}$
	32,00	$0,162851 \cdot 10^{-6}$		52,00	$-0,745115 \cdot 10^{-9}$
	32,72	$0,147027 \cdot 10^{-6}$		53,24	$0,660843 \cdot 10^{-8}$
	39,08	$0,238728 \cdot 10^{-6}$		60,47	$-0,324699 \cdot 10^{-7}$

faisceau $w_0 = 0,5 \mu\text{m}$, pour une particule située sur l'axe, ou hors axe. Lorsque n est petit, g_n et g_n^m sont stables dans un large domaine de ka_s . Cependant, pour grand n , les coefficients g_n et g_n^m sont instables. Par exemple, g_{30} , g_{50} et g_{50}^1 sont très sensibles à la valeur de ka_s même si on choisit ka_s correspondant au maximum de $t_n(ka_s)$. Cette instabilité n'est pas d'origine numérique: lorsque l'on change le nombre de points d'intégration, les résultats ne changent pas. Le calcul des g_n et g_n^m en utilisant la description à l'ordre L pour le même faisceau donne des résultats complètement instables. Il apparaît que les coefficients g_n^m calculés par la méthode F1 sont précis à l'ordre de la description du champ si la valeur a_s est bien choisi.

Notre étude théorique de l'origine de cette sensibilité à la description du faisceau vient être proposé par Gouesbet et Lock [63] [46], qui montrent que pour un faisceau hyperfocalisé, l'ordre de description (L^k) doit atteindre des valeurs très importantes ($k > 100$) pour obtenir une description réaliste.

Schaub et al[101] ont aussi appliqué cette méthode pour le calcul des coefficients équivalents du faisceau gaussien à l'ordre L^3 , pour le cas sur l'axe et ils affirment que le temps CPU de calcul est diminué par un facteur 0~1500 par rapport à leur ancienne méthode, cependant, il n'y a pas de résultats numériques publiés pour comparer.

5.6 Conclusion

Après avoir démontré l'équivalence entre les approches de Rouen et Barton pour les évaluations des $g_{n,TM}^m$, $g_{n,TE}^m$, A_{lm} et B_{lm} , l'étude des avantages et limitations des deux schéma numériques d'intégration est entreprise.

Le calcul des coefficients g_n ou g_n^m par la méthode de Barton avec simple ou double intégration est la plus rapide tandis que la celle de Rouen est la plus stable. La méthode de Barton est plus sensible à la qualité de la description du faisceau, et du rayon a_s de la surface sphérique utilisé dont le meilleur choix est $ka_s = n + 1/2$. La méthode de Rouen est stable et peut être utilisée pour traiter un faisceau de forme quelconque.

Cependant, dans le cas de faisceau hyperfocalisé ($2w_0 \sim \lambda$), les deux approches deviennent impuissantes à cause de la pauvreté de la description du faisceau utilisée.

Chapter 6

Interprétation Localisée

L'interprétation localisée (appelée aussi *approximation localisée*) fournit un moyen rapide d'évaluation des deux séries des coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ pratiquement sans perte de précision. Pour le faisceau gaussien, la formulation et un code numérique ont été développés [43] [86] et appliqués à l'analyse dans divers domaines: la lévitation optique [58], la technique phase doppler [53] [54] par exemple.

L'interprétation localisée est développée dans ce chapitre pour calculer les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ du faisceau feuille laser (faisceau gaussien focalisé par une lentille cylindrique). Les résultats numériques montrent que les erreurs relatives dépendent de l'indice m en $0,1 * m\%$, par rapport aux résultats de l'intégration (une méthode exacte mais plus gourmande en temps du calcul). Lorsque les deux axes du faisceau feuille laser sont égaux, les expressions des $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ du faisceau gaussien sont retrouvées.

Ce chapitre se compose de 5 sections: Dans la section 6.1, les expressions du champ du faisceau feuille laser sont développées en mode d'azimut d'onde. Dans la section 6.2 l'interprétation localisée est appliquée pour obtenir les formules des coefficients g_n^m . Les cas particuliers d'une particule sur l'axe du faisceau feuille laser et d'un faisceau Gaussien ($w_{0x}=w_{0y}$) sont alors discutés. Les résultats numériques sont comparés avec ceux de la méthode intégrale dans la section 6.3. La section 6.4 est consacrée à la stratégie d'accélérer le calcul. Même si la sommation devient triple pour un faisceau feuille laser au lieu d'une sommation simple pour faisceau gaussien circulaire, on peut encore gagner trois ou quatre ordre de grandeur en temps de calcul en cherchant un algorithme efficace par rapport la méthode intégrale. La dernière section est une conclusion. Le listing commenté du programme de calcul associé est fourni en annexe.

6.1 Développement des champs en mode d'azimut

Les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ sont déterminés à partir des composantes radiales des champs E_r et H_r respectivement. Pour chercher l'expression de ces coefficients, nous travaillons directement à partir des expressions du champ électrique et magnétique développées dans le chapitre 3 (les équations (3.15)-(3.20)).

Par deux changements de repère du système du faisceau ($O_G; u, v, w$) au système de la particule ($O_P; x, y, z$), puis au ($O_P; r, \theta, \phi$), nous obtenons:

$$E_r(r, \theta, \phi) = E_0 \psi_0^{sh} \left[\cos \phi \sin \theta - \frac{2Q_x}{l_x} \cos \theta (r \cos \phi \sin \theta - x_0) \right] \times \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \quad (6.1)$$

$$H_r(r, \theta, \phi) = H_0 \psi_0^{sh} \left[\sin \phi \sin \theta - \frac{2Q_y}{l_y} \cos \theta (r \sin \phi \sin \theta - y_0) \right]$$

$$\times \exp(-ikr \cos \theta + ikz_0) \quad (6.2)$$

où

$$\psi_0^{sh} = \sqrt{-Q_x Q_y} \exp \left[-\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} (r \cos \phi \sin \theta - x_0)^2 - \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} (r \sin \phi \sin \theta - y_0)^2 \right] \quad (6.3)$$

$$Q_x = \frac{1}{i + \frac{2}{l_x}(r \cos \theta - z_0)} \quad Q_y = \frac{1}{i + \frac{2}{l_y}(r \cos \theta - z_0)} \quad (6.4)$$

$$l_x = kw_{0x}^2 \quad l_y = kw_{0y}^2 \quad (6.5)$$

La TLMG est développée à partir des potentiels de Bromwich. Pour permettre l'identification avec celle-ci et appliquer l'interprétation localisée, il faut réaliser un développement de Fourier des composantes E_r et H_r selon les exponentielles imaginaires de ϕ , c'est à dire en mode d'azimut m :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} E_r^m(r, \theta) \\ H_r^m(r, \theta) \end{pmatrix} \exp(im\phi) \quad (6.6)$$

On trouvera ci-après une méthode possible.

En dehors des fonctions explicites de ϕ , ψ_0^{sh} est le seul terme dépendant de ϕ dans les relations précédentes. On peut le réécrire à partir de (6.3):

$$\begin{aligned} \psi_0^{sh} = \sqrt{-Q_x Q_y} \exp & \left[-r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} \cos^2 \phi + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} \sin^2 \phi \right) \right. \\ & \left. + 2r \sin \theta \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} x_0 \cos \phi + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} y_0 \sin \phi \right) - \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} x_0^2 + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} y_0^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

En utilisant les relations:

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \quad \cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad (6.8)$$

l'équation (6.7) peut être réécrite comme:

$$\psi_0^{sh} = \psi_0^{0sh} \exp \left[A(e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) + B e^{i\phi} + C e^{-i\phi} \right] \quad (6.9)$$

où:

$$\psi_0^{0sh} = \sqrt{-Q_x Q_y} \exp \left[-\left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} x_0^2 + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} y_0^2 \right) - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} \right) \right] \quad (6.10)$$

$$A = -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{4} \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} - \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} \right) \quad (6.11)$$

$$B = r \sin \theta \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} x_0 + \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} y_0 \right) \quad (6.12)$$

$$C = r \sin \theta \left(\frac{iQ_x}{w_{0x}^2} x_0 - \frac{iQ_y}{w_{0y}^2} y_0 \right) \quad (6.13)$$

Puis, on développe les quatre termes exponentiels de l'équation (6.9): $\exp[Ae^{2i\phi}]$, $\exp[Ae^{-2i\phi}]$, $\exp[Be^{i\phi}]$, et $\exp[Ce^{-i\phi}]$ en série de Taylor, en fonction de $Ae^{2i\phi}$, $Ae^{-2i\phi}$, $Be^{i\phi}$ et $Ce^{-i\phi}$ et obtient:

$$\psi_0^{sh} = \psi_0^{0sh} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp[i\phi(2p - 2q + t - j)] \quad (6.14)$$

Dans les cas particuliers où l'origine du système de coordonnées O_P est centrée sur l'axe du faisceau ($x_0 = y_0 = 0$), ou pour un faisceau gaussien circulaire ($w_{0x} = w_{0y}$), l'expression (6.14) se simplifie (voir la section 2).

En réinjectant le développement (6.14) dans les expressions des composantes radiales (6.1) et (6.2), on obtient les développements des E_r et H_r :

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \phi) = & \frac{1}{2} E_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) \psi_0^{0sh} \left(1 - \frac{2Q_x}{l_x} r \cos \theta \right) \exp(ikz_0) \\ & \times \left[\sum_{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_+ \phi) + \sum_{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_- \phi) \right] \\ & + E_0 \cos \theta \exp(-ikr \cos \theta) \exp(ikz_0) \\ & \times x_0 \psi_0^{0sh} \frac{2Q_x}{l_x} \sum_{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_0 \phi) \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta, \phi) = & \frac{1}{2i} H_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) \psi_0^{0sh} \left(1 - \frac{2Q_y}{l_y} r \cos \theta \right) \exp(ikz_0) \\ & \times \left[\sum_{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_+ \phi) - \sum_{pqr s} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_- \phi) \right] \\ & + H_0 \cos \theta \exp(-ikr \cos \theta) \exp(ikz_0) \\ & \times y_0 \psi_0^{0sh} \frac{2Q_y}{l_y} \sum_{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \exp(ip_0 \phi) \end{aligned} \quad (6.16)$$

avec les notations abrégées:

$$\sum_{pqtj} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \quad (6.17)$$

$$p_+ = 2p - 2q + t - j + 1 = p_0 + 1 \quad (6.18)$$

$$p_- = 2p - 2q + t - j - 1 = p_0 - 1 \quad (6.19)$$

La comparaison des équations (6.15), (6.16) et (6.6) nous conduit alors à:

$$\begin{aligned} E_r^m = & \{E_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta)\} \exp(ikz_0) \psi_0^{0sh} \\ & \times \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2Q_x}{l_x} r \cos \theta \right) \left(\sum_{p_+=m} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} + \sum_{p_-=m} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \right) \right. \\ & \left. + x_0 \frac{2Q_x}{l_x} \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \sum_{p_0=m} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p!q!t!j!} \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$H_r^m = \{H_0 \sin \theta \exp(-ikz \cos \theta)\} \exp(ikz_0) \psi_0^{0sh}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{2i} \left[\left(1 - \frac{2Q_y}{l_y} r \cos \theta \right) \left(\sum_{p_+=m}^{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p! q! t! j!} - \sum_{p_-=m}^{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p! q! t! j!} \right) \right. \\
& \left. + y_0 \frac{2Q_y}{l_y} \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \sum_{p_0=m}^{pqtj} \frac{A^{p+q} B^t C^j}{p! q! t! j!} \right] \quad (6.21)
\end{aligned}$$

où la sommation $\sum_c^{pqtj}$ indique une sommation restreinte à la condition c.

6.2 Interprétation localisée des coefficients g_n^m

6.2.1 Cas général

Selon Gouesbet et al [42] [43] et Gréhan et al [55], la procédure de l'interprétation localisée contient deux étapes:

1. Application de l'opérateur de localisation aux équations (6.20) et (6.21) pour obtenir des expressions intermédiaires des g_n^m : $g_{n, TM}^{m,o}$ et $g_{n, TE}^{m,o}$;
2. Normalisation de ces expressions pour obtenir les expressions finales.

Afin de faciliter le suivi de notre démarche nous rappelons les points principaux de cette démarche et puis les appliquons au faisceau feuille laser.

Premièrement, si le faisceau incident est une onde plane, les termes entre les accolades des équations (6.20) et (6.21) sont les seules qui apparaissent. Les termes multiplicatifs (appelés $\mathcal{A}$) prennent en compte la spécificité du faisceau feuille laser. Nous pouvons en déduire que les coefficients g_n^m doivent être exprimés à partir des termes $\mathcal{A}$:

$$g_n^m = \mathcal{F}(\mathcal{A}) \quad (6.22)$$

où $\mathcal{F}$ est un opérateur sur $\mathcal{A}$ qui produit les g_n^m . Les coefficients étant constants, l'opérateur $\mathcal{F}$ doit remplir trois conditions:

1. éliminer de $\mathcal{A}$ la variable $r \cos \theta$;
2. éliminer de $\mathcal{A}$ la variable $r \sin \theta$;
3. introduire un indice n .

Nous reprenons la démarche de Gréhan et al [55] et Gouesbet et al [42][43]. Pour éliminer les variables $r \cos \theta$ nous spécifions $r \cos \theta = 0$ puisque c'est le seul cas particulier. Pour enlever les variables $r \sin \theta$ nous comptons sur le principe de localisation de van de Hulst[106]. Selon ce principe le terme d'ordre n correspond à un rayon passant à la distance $(n + 1/2)(\lambda/2\pi)$, λ étant la longueur d'onde, et le terme d'ordre n étant le terme de la série de Lorenz-Mie qui est associée aux coefficients g_n^m . Alors, nous remplaçons la distance $r \sin \theta$ de l'axe z par $(n + 1/2)(\lambda/2\pi)$. Cette opération permet d'éliminer le terme $r \sin \theta$, et d'introduire l'indice n exigé.

En résumé, nous supposons que l'effet de l'opérateur $\mathcal{F}$ est:

- remplacer $r \cos \theta$ par 0;
- remplacer $r \sin \theta$ par $(n + 1/2)(\lambda/2\pi)$.

Par conséquent, nous obtenons la forme intermédiaires des coefficients g_n^m par l'interprétation localisée:

$$g_{n,TM}^{m,o} = \frac{1}{2} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \left(\sum_{p+=m}^{pqtj} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^t \bar{C}^j}{p!q!t!j!} + \sum_{p-=m}^{pqtj} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^t \bar{C}^j}{p!q!t!j!} \right) \quad (6.23)$$

$$g_{n,TE}^{m,o} = \frac{1}{2i} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \left(\sum_{p+=m}^{pqtj} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^t \bar{C}^j}{p!q!t!j!} - \sum_{p-=m}^{pqtj} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^t \bar{C}^j}{p!q!t!j!} \right) \quad (6.24)$$

où $\bar{\psi}_0^{0sh}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont identiques respectivement aux termes ψ_0^{0sh} , A , B et C définis dans les équations (6.10)-(6.13), sauf que l'on substitue $r \cos \theta$ par 0 et $r \sin \theta$ par:

$$\rho_n = \frac{(n+1/2)}{k} \quad (6.25)$$

C'est à dire:

$$\bar{\psi}_0^{0sh} = \sqrt{-\bar{Q}_x \bar{Q}_y} \exp \left[- \left(\frac{i\bar{Q}_x}{w_{0x}^2} x_0^2 + \frac{i\bar{Q}_y}{w_{0y}^2} y_0^2 \right) - \frac{\rho_n^2}{2} \left(\frac{i\bar{Q}_x}{w_{0x}^2} + \frac{i\bar{Q}_y}{w_{0y}^2} \right) \right] \quad (6.26)$$

$$\bar{A} = -\frac{\rho_n^2}{4} \left(\frac{i\bar{Q}_x}{w_{0x}^2} - \frac{i\bar{Q}_y}{w_{0y}^2} \right) \quad (6.27)$$

$$\bar{B} = \rho_n \left(\frac{i\bar{Q}_x}{w_{0x}^2} x_0 + \frac{\bar{Q}_y}{w_{0y}^2} y_0 \right) \quad (6.28)$$

$$\bar{C} = \rho_n \left(\frac{i\bar{Q}_x}{w_{0x}^2} x_0 - \frac{\bar{Q}_y}{w_{0y}^2} y_0 \right) \quad (6.29)$$

où $\bar{Q}_x$ et $\bar{Q}_y$ sont définis par:

$$\bar{Q}_x = \frac{1}{i - \frac{2}{l_x} z_0} \quad \bar{Q}_y = \frac{1}{i - \frac{2}{l_y} z_0} \quad (6.30)$$

Deuxièmement, les expressions obtenues sont normalisées en multipliant par Z_n^m [43]:

$$\begin{pmatrix} g_{n,TM}^m \\ g_{n,TE}^m \end{pmatrix} = Z_n^m \begin{pmatrix} g_{n,TM}^{m,o} \\ g_{n,TE}^{m,o} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

où

$$Z_n^0 = \frac{2n(n+1)}{2n+1} i \quad (6.32)$$

$$Z_n^m = \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1} \quad m \neq 0 \quad (6.33)$$

Finalement, en introduisant les équations (6.23) et (6.24) dans (6.31), en effectuant les conditions à la sommation et en considérant que les indices de sommations doivent être non-négatifs, nous obtenons:

Pour l'onde TM et $m=0$:

$$g_{n,TM}^0 = Z_n^0 \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \times \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+1)!} (\bar{C}^{2q-2p+1} + \bar{B}^{2q-2p+1}) \quad (6.34)$$

où $[x]$ indique la partie entier de x .

De même, on obtient pour $m > 0$:

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^m &= Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \\
&\times \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(m+j-1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^{2q-2p+j+m-1} \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+m-1)!} \right. \\
&\left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(m+j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^{2q-2p+j+m+1} \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+m+1)!} \right] \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Pour $m < 0$:

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{-|m|} &= Z_n^{|m|} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \\
&\times \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(|m|+j-1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^{2q-2p+j+|m|-1}}{p!q!j!(2q-2p+j+|m|-1)!} \right. \\
&\left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(|m|+j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^{2q-2p+j+|m|+1}}{p!q!j!(2q-2p+j+|m|+1)!} \right] \quad (6.36)
\end{aligned}$$

Pour l'onde TE et $m = 0$:

$$\begin{aligned}
g_{n,TE}^0 &= Z_n^0 \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \\
&\times \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+1)!} (\bar{C}^{2q-2p+1} - \bar{B}^{2q-2p+1}) \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$m > 0$:

$$\begin{aligned}
g_{n,TE}^m &= Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \\
&\times \frac{1}{2i} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(m+j-1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^{2q-2p+j+m-1} \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+m-1)!} \right. \\
&\left. - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(m+j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^{2q-2p+j+m+1} \bar{C}^j}{p!q!j!(2q-2p+j+m+1)!} \right] \quad (6.38)
\end{aligned}$$

$m < 0$:

$$\begin{aligned}
g_{n,TE}^{-|m|} &= -Z_n^{|m|} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \\
&\times \frac{1}{2i} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(|m|+j-1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^{2q-2p+j+|m|-1}}{p!q!j!(2q-2p+j+|m|-1)!} \right. \\
&\left. - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{q+[(|m|+j+1)/2]} \frac{\bar{A}^{p+q} \bar{B}^j \bar{C}^{2q-2p+j+|m|+1}}{p!q!j!(2q-2p+j+|m|+1)!} \right] \quad (6.39)
\end{aligned}$$

On peut facilement trouver les relations suivantes entre les g_n^m avec m positif et m négatif:

$$g_{n,TM}^{-m}(|m|, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = g_{n,TM}^m(|m|, \bar{A}, \bar{C}, \bar{B}) \quad (6.40)$$

$$g_{n,TE}^{-m}(|m|, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = -g_{n,TE}^m(|m|, \bar{A}, \bar{C}, \bar{B}) \quad (6.41)$$

Celles-ci peuvent être utilisées pour accélérer le calcul des g_n^m .

6.2.2 Cas particuliers

Lorsque la particule se situe sur l'axe ou lorsque les deux axes du faisceau sont égaux les formules (6.34)-(6.39) peuvent être simplifiées.

Sur l'axe du faisceau feuille laser

Lorsque la particule est située sur l'axe du faisceau feuille laser, c'est à dire $x_0=y_0=0$, les sommations triples deviennent des sommations simples puisque dans ce cas les termes $\bar{B}^k$ et $\bar{C}^k$ sont nuls sauf pour $k=0$. Les expressions des g_n^m peuvent être obtenues directement des équations (6.34)-(6.39) en mettant $\bar{B}^k$ et $\bar{C}^k$ à zéro pour tous les termes $k \neq 0$. Il est aussi possible de les obtenir séparément avec la même procédure que précédemment.

En développant les composantes radiales E_r et H_r des équations (6.1) et (6.2) en mode d'azimut avec $x_0 = y_0 = 0$, puis en leur appliquant l'interprétation localisée pour obtenir la forme intermédiaire des g_n^m , et en les multipliant par le facteur de normalisation, nous obtenons:

$$g_{n,TM}^m = Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{1}{2} \left(\sum_{p_+=m}^{pq} \frac{\bar{A}^{p+q}}{p!q!} + \sum_{p_-=m}^{pq} \frac{\bar{A}^{p+q}}{p!q!} \right) \quad (6.42)$$

$$g_{n,TE}^m = Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{1}{2i} \left(\sum_{p_+=m}^{pq} \frac{\bar{A}^{p+q}}{p!q!} - \sum_{p_-=m}^{pq} \frac{\bar{A}^{p+q}}{p!q!} \right) \quad (6.43)$$

où les notations $\sum_{p_+=m}^{pq}$ et $\sum_{p_-=m}^{pq}$ indiquent les sommations restreintes aux conditions $p_+ = 2p - 2q + 1 = m$ et $p_- = 2p - 2q - 1 = m$. Ces conditions ne peuvent jamais être vérifiées pour m pair si bien que tous les g_n^m avec m pair doivent être nuls. Ce résultat peut aussi être obtenu à partir des relations de symétrie des g_n^m (voir le chapitre 1 ou Réf. [94]). Alors pour m impaire en posant $m = 2j + 1$, les équations (6.42) et (6.43) pour $m > 0$ deviennent:

$$g_{n,TM}^{2j+1} = Z_n^{2j+1} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{\bar{A}^j}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\bar{A}^{2p}}{p!(p+j)!} \left(1 + \frac{\bar{A}}{p+j+1} \right) \quad (6.44)$$

$$g_{n,TE}^{2j+1} = Z_n^{2j+1} \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{\bar{A}^j}{2i} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\bar{A}^{2p}}{p!(p+j)!} \left(1 - \frac{\bar{A}}{p+j+1} \right) \quad (6.45)$$

pour $m < 0$, on peut aussi obtenir facilement les relations de symétrie à partir des équations (6.40) et (6.41):

$$g_{n,TM}^{-m} = g_{n,TM}^m \quad (6.46)$$

$$g_{n,TE}^{-m} = -g_{n,TE}^m \quad (6.47)$$

Ces relations sont aussi valables pour les coefficients g_n^m obtenus avec des méthodes rigoureuses. Ainsi, contrairement au cas sur l'axe du faisceau gaussien où tous les coefficients g_n^m sont nuls sauf si $|m|=1$, ici les coefficients non-nuls s'étendent à tout les indices m impaires.

Faisceau gaussien

Le faisceau gaussien est un cas particulier du faisceau feuille laser où les deux axes du faisceau sont égaux. Dans ce cas ($\bar{A} = 0$), les sommations triples deviennent des sommations simples. On peut facilement obtenir les formules directement à partir des équations (6.34)-(6.39) en notant que seuls les termes $p = 0$ et $q = 0$ sont différents de 0. Pour $m = 0$:

$$g_{n,TM}^0 = Z_n^0 \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{\bar{C} + \bar{B}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{B}^j \bar{C}^j}{j!(j+1)!} \quad (6.48)$$

$$g_{n,TE}^0 = Z_n^0 \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{C - \bar{B}}{2i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{B}^j \bar{C}^j}{j!(j+1)!} \quad (6.49)$$

Pour $m > 0$:

$$g_{n,TM}^m = Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{B}^{j+m-1} \bar{C}^j}{j!(j+m-1)!} \left(1 + \frac{\bar{B}^2}{(j+m)(j+m+1)} \right) \quad (6.50)$$

$$g_{n,TE}^m = Z_n^m \exp(ikz_0) \bar{\psi}_0^{0sh} \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{B}^{j+m-1} \bar{C}^j}{j!(j+m-1)!} \left(1 - \frac{\bar{B}^2}{(j+m)(j+m+1)} \right) \quad (6.51)$$

où $\bar{B}$ et $\bar{C}$ se simplifient:

$$\bar{B} = \rho_n \frac{iQ}{w_0^2} (x_0 - iy_0) \quad (6.52)$$

$$\bar{C} = \rho_n \frac{iQ}{w_0^2} (x_0 + iy_0) \quad (6.53)$$

Pour $m < 0$, les relations (6.40) et (6.41) sont vraies. Il n'est pas nécessaire de réécrire $g_{n,TM}^{-m}$ et $g_{n,TE}^{-m}$.

Nous pouvons facilement montrer que les relations (6.48)-(6.51) sont identiques que celles de la référence [86] sauf que des paramètres différents sont utilisées.

Le cas encore particulier du diffuseur sur l'axe du faisceau gaussien amène pour les coefficients des expressions encore plus simples:

$$g_n = iQ \exp(ikz_0) \exp \left[-iQ \left(\frac{\rho_n}{w_0} \right)^2 \right] \quad (6.54)$$

$$g_{n,TM}^1 = g_{n,TM}^{-1} = g_n/2 \quad (6.55)$$

$$g_{n,TE}^1 = -g_{n,TE}^{-1} = -ig_n/2 \quad (6.56)$$

6.3 Validation de l'interprétation localisée

Comme nous l'avons dit ci-dessus, la procédure de l'interprétation localisée n'est pas rigoureuse [43], il nous faut en vérifier la validité.

Nous rappelons premièrement que la validité de l'interprétation localisée pour le faisceau gaussien circulaire a été vérifiée numériquement [43] [86] et expérimentalement [58]. Pour le faisceau feuille laser, la validation consiste en deux aspects:

- vérification des relation de symétrie entre les coefficients;
- comparaison entre des résultats numériques de l'interprétation localisée et de la méthode intégrale.

6.3.1 Relations de symétrie

Les relations de symétrie entre les coefficients g_n^m ont été établies rigoureusement dans le chapitre 1 pour un champ électromagnétique plus général, par la définition des coefficients à partir de la symétrie du champ. Nous avons pour le faisceau feuille laser:

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) \quad (6.57)$$

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = g_{n,TM}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \quad (6.58)$$

$$g_{n,TM}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TM}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) \quad (6.59)$$

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^m g_{n,TE}^{-m}(-x_0, y_0, z_0) \quad (6.60)$$

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = -g_{n,TE}^{-m}(x_0, -y_0, z_0) \quad (6.61)$$

$$g_{n,TE}^m(x_0, y_0, z_0) = (-1)^{m-1} g_{n,TE}^{-m*}(x_0, y_0, -z_0) \quad (6.62)$$

$$g_{n,TM}^{-m}(x_0, y_0, z_0, w_{0x}, w_{0y}) = i^m g_{n,TE}^m(y_0, x_0, z_0, w_{0y}, w_{0x}) \quad (6.63)$$

Après examen des expressions des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée dans la section précédente, nous trouvons qu'elles respectent les mêmes relations de symétrie comme il se doit. Par exemple, des définitions (6.12) et (6.13), nous déduisons:

$$\overline{B}(-x_0, y_0) = -\overline{C}(x_0, y_0) \quad (6.64)$$

$$\overline{B}(x_0, -y_0) = \overline{C}(x_0, y_0) \quad (6.65)$$

En introduisant ces relations dans (6.34)-(6.41), nous trouvons que toutes les expressions des g_n^m obtenues satisfont les relations de symétrie (6.57), (6.58), (6.60) et (6.61). Pour les relations (6.59) et (6.62), on utilise les relations suivantes:

$$\overline{Q}_x(-z_0) = -\overline{Q}_x^*(z_0) \quad (6.66)$$

$$\overline{Q}_y(-z_0) = -\overline{Q}_y^*(z_0) \quad (6.67)$$

$$\overline{A}(-z_0) = \overline{A}^*(z_0) \quad (6.68)$$

$$\overline{B}(-z_0) = \overline{C}^*(z_0) \quad (6.69)$$

$$\overline{C}(-z_0) = \overline{B}^*(z_0) \quad (6.70)$$

et pour la relation (6.63), on utilise:

$$\overline{A}(x_0, y_0, z_0, w_{0x}, w_{0y}) = -\overline{A}(y_0, x_0, z_0, w_{0y}, w_{0x}) \quad (6.71)$$

$$\overline{B}(x_0, y_0, z_0, w_{0x}, w_{0y}) = -i\overline{C}(y_0, x_0, z_0, w_{0y}, w_{0x}) \quad (6.72)$$

$$\overline{C}(x_0, y_0, z_0, w_{0x}, w_{0y}) = i\overline{B}(y_0, x_0, z_0, w_{0y}, w_{0x}) \quad (6.73)$$

On conclut que toutes les expressions obtenues dans ce chapitre vérifient les relations de symétrie rigoureusement obtenues.

De plus, dans le cas où l'origine du repère O_P se situe sur l'axe du faisceau, on peut montrer facilement, à partir des relations (6.57)-(6.58) et (6.60)-(6.61) que tous les g_n^m avec m pairs sont nuls. Celà est aussi vrai pour l'interprétation localisée.

Les résultats numériques des g_n^m vérifient aussi toutes les relations de symétrie.

6.3.2 Comparaisons numériques

Un grand nombre de comparaisons ont été effectuées entre les résultats numériques de l'approximation localisée et les évaluation de la méthode F1, pour un grand nombre de cas différents: position du centre de diffuseur O_P , axes au col du faisceau et longueur d'onde; par lesquels nous pouvons conclure que l'interprétation localisée du faisceau feuille laser est vraiment très précise dans un large domaine. Les tableaux 6.1-6.3 présentent des résultats typiques où la longueur d'onde est $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, correspondant à la ligne verte du laser Ar-Ion, les axes au col du faisceau sont $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$.

Table 6.1: Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

méthodes		interprétation localisée		intégration F1	
n	m	$g_{n,TM}^m$	$g_{n,TE}^m$	$g_{n,TM}^m$	$g_{n,TE}^m$
1	1	0,499755	-0,499868 <i>i</i>	0,500000	-0,500000 <i>i</i>
2	1	0,499319	-0,499633 <i>i</i>	0,499564	-0,499765 <i>i</i>
3	1	0,498667	-0,499282 <i>i</i>	0,498911	-0,499413 <i>i</i>
3	3	0,250852 10^{-4}	-0,251006 10^{-4} <i>i</i>	0,251444 10^{-4}	-0,251444 10^{-4} <i>i</i>
4	1	0,497799	-0,498814 <i>i</i>	0,498041	-0,498945 <i>i</i>
4	3	0,250465 10^{-4}	-0,250720 10^{-4} <i>i</i>	0,251056 10^{-4}	-0,251158 10^{-4} <i>i</i>
5	1	0,496715	-0,498229 <i>i</i>	0,496956	-0,498359 <i>i</i>
5	3	0,249983 10^{-4}	-0,250363 10^{-4} <i>i</i>	0,250572 10^{-4}	-0,250800 10^{-4} <i>i</i>
5	5	0,628727 10^{-9}	-0,629365 10^{-9} <i>i</i>	0,632239 10^{-9}	-0,632241 10^{-9} <i>i</i>
10	1	0,488138	-0,493581 <i>i</i>	0,488365	-0,493707 <i>i</i>
10	5	0,619526 10^{-9}	-0,621820 10^{-9} <i>i</i>	0,622965 10^{-9}	-0,624645 10^{-9} <i>i</i>
20	1	0,456347	-0,476047 <i>i</i>	0,456525	-0,476157 <i>i</i>
20	5	0,585173 10^{-9}	-0,593476 10^{-9} <i>i</i>	0,588336 10^{-9}	-0,596111 10^{-9} <i>i</i>

Le tableau 6.1 montre les résultats pour le cas le plus simple: la diffuseur se situe au centre du faisceau $x_0=y_0=z_0=0$. D'après les relations symétrie (6.40) et (6.41), tous les $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ sont réels purs ou imaginaires purs dans ce cas. La structure de l'interprétation localisée respecte rigoureusement ces relations. La méthode intégrale, d'autre part, engendre des composantes parasites, c'est à dire, une contribution imaginaire au $g_{n,TM}^m$ et une contribution réelle au $g_{n,TE}^m$, qui sont typiquement 13 ordre d'amplitude de grandeur plus petit que la composante connectée. Ceux-ci sont vraiment négligeables. Seules les valeurs avec m positif y sont données. Celles avec m négatif peuvent être obtenus facilement à partir des Rel. (6.46) et (6.47). De plus nous remarquons que tous les g_n^m avec m pair sont nuls. L'accord entre les résultats de l'interprétation localisée et de l'évaluation intégrale est parfait. La différence augmente lorsque l'indice m s'accroît. A partir d'un grand nombre de comparaison on trouve que cette différence relative est de l'ordre de $0,1 * m\%$. Cependant, les contribution de g_n^m avec m grand décroissent très rapidement lorsque m augmente. Il est aussi nécessaire de remarquer que la méthode intégrale n'est pas sans limite de précision. De plus, l'intégration par les méthodes F1 ou F2 ne fourni pas des résultats strictement identiques.

Dans le tableau 6.2 nous considerons encore le cas d'une particule sur l'axe mais en dehors du plan du col du faisceau ($x_0 = y_0 = 0, z_0 = 5 \mu\text{m}$). Dans ce cas les relations de symétrie (6.46) et (6.47) pour m positif et négatif sont encore valables et les g_n^m avec m pair sont nuls, mais les coefficients de forme du faisceau sont maintenant complexes. On trouve que l'accord est parfait.

Table 6.2: Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et de l'intégration F1, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 5 \mu\text{m}$

méthodes		interprétation localisée		intégration F1	
n	m	$g_{n,TM}^m$		$g_{n,TM}^m$	
1	1	-0,109238;	-0,487524	-0,109299;	-0,487762
2	1	-0,109129;	-0,487103	-0,109190;	-0,487340
3	1	-0,108967;	-0,486472	-0,109028;	-0,486707
3	3	-0,647493 10^{-5} ;	-0,242130 10^{-4}	-0,649190 10^{-5} ;	-0,242697 10^{-4}
4	1	-0,108752;	-0,485631	-0,108812;	-0,485866
4	3	-0,646386 10^{-5} ;	-0,241760 10^{-4}	-0,648079 10^{-5} ;	-0,242326 10^{-4}
5	1	-0,108483;	-0,484583	-0,108542;	-0,484816
5	3	-0,645006 10^{-5} ;	-0,241299 10^{-4}	-0,646692 10^{-5} ;	-0,241862 10^{-4}
5	5	-0,186821 10^{-9} ;	-0,599396 10^{-9}	-0,187961 10^{-9} ;	-0,602711 10^{-9}
10	1	-0,106356;	-0,476280	-0,106412;	-0,476500
10	5	-0,183837 10^{-9} ;	-0,590710 10^{-9}	-0,184951 10^{-9} ;	-0,593957 10^{-9}
20	1	-0,985157 10^{-1} ;	-0,445495	-0,985582 10^{-1} ;	-0,445668
20	5	-0,172733 10^{-9} ;	-0,558270 10^{-9}	-0,173750 10^{-9} ;	-0,561259 10^{-9}

Le tableau 6.3 montre les résultats numériques des coefficients $g_{n,TE}^m$ pour la position: $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$. C'est le cas le plus général. L'accord est encore satisfaisant.

La figure 6.1 présente l'évaluation de l'erreur relative $\frac{|g_{n,loc}^m - g_{n,int}^m|}{g_{n,int}^m}$ en fonction de n pour différent m . Les lignes continues avec les symboles remplis correspondent à la partie réelle des coefficients $g_{n,TM}^m$ tandis que les lignes discontinues avec les symboles vides correspondent à la partie imaginaire. On trouve que la différence relative augmente selon l'indice m , et les erreurs maximales sont un peu près de $0,1 * m\%$.

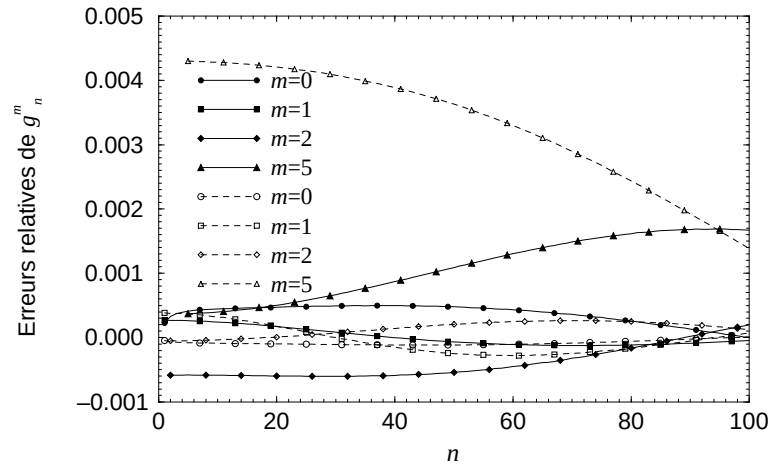


Figure 6.1: Erreur relative entre les $g_{n,TM}^m$ calculés par la méthode intégrale et l'interprétation localisée, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$

En fin, on montre la validité de l'interprétation localisée pour un cas où l'ellipticité du faisceau est très grande ($w_{0x}/w_{0y} = 1500$) et la particule est localisée très loin (100 fois du petit axe du faisceau) du col du faisceau feuille laser. C'est le cas utilisée dans le système DCW pour mesurer la taille, la vitesse et le matière de la particule par la fréquence du champ diffusé (voir le chapitre 9).

Les tableaux 6.4 et 6.5 présentent les valeurs des $g_{n,TM}^m$ ou des $g_{n,TE}^m$ d'un faisceau de longueur d'onde de $0,5145 \mu\text{m}$, des axes au col $w_{0x}=3000 \mu\text{m}$, $w_{0y}=2 \mu\text{m}$ par l'interprétation et l'intégration lorsque la particule se située $200 \mu\text{m}$ loin du plan au col dans la direction de propagation, sur l'axe

Table 6.3: Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et de l'intégration F1, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$

méthodes		interprétation localisée	intégration F1
n	m	$g_{n,TE}^m$	$g_{n,TE}^m$
1	0	+0,230400 10^{-2} ; -0,452374 10^{-3}	+0,230383 10^{-2} ; -0,452295 10^{-3}
1	1	-0,140921; +0,264505 10^{-1}	-0,140903; +0,264670 10^{-1}
1	-1	+0,140911; -0,264926 10^{-1}	+0,140903; -0,264670 10^{-1}
5	1	-0,141139; +0,262454 10^{-1}	-0,141122; +0,262618 10^{-1}
5	-1	+0,141009; -0,268105 10^{-1}	+0,141001; -0,267853 10^{-1}
5	2	+0,108264 10^{-2} ; +0,217375 10^{-2}	+0,108301 10^{-2} ; +0,217460 10^{-2}
5	-2	+0,673582 10^{-4} ; -0,239952 10^{-2}	+0,673821 10^{-4} ; -0,240044 10^{-2}
5	4	-0,400366 10^{-7} ; +0,454843 10^{-7}	-0,401683 10^{-7} ; +0,454916 10^{-7}
5	-4	-0,510353 10^{-7} ; -0,196643 10^{-7}	-0,511295 10^{-7} ; -0,196058 10^{-7}
5	5	+0,425106 10^{-9} ; -0,204877 10^{-9}	+0,426677 10^{-9} ; -0,205138 10^{-9}
5	-5	-0,446457 10^{-9} ; +0,427408 10^{-10}	-0,447826 10^{-9} ; +0,433106 10^{-10}
10	1	-0,141752; +0,256624 10^{-1}	-0,141736; +0,256784 10^{-1}
10	-1	+0,141279; -0,277101 10^{-1}	+0,141273; -0,276860 10^{-1}
10	5	+0,420974 10^{-9} ; -0,204180 10^{-9}	+0,422526 10^{-9} ; -0,204445 10^{-9}
10	-5	-0,442849 10^{-9} ; +0,412471 10^{-10}	-0,444206 10^{-9} ; +0,418057 10^{-10}
10	10	-0,205617 10^{-21} ; -0,391720 10^{-21}	-0,207145 10^{-21} ; -0,398242 10^{-21}
10	-10	+0,100946 10^{-21} ; +0,387793 10^{-21}	+0,104027 10^{-21} ; +0,392910 10^{-21}
20	1	-0,143970; +0,234460 10^{-1}	-0,143960; +0,234604 10^{-1}
20	-1	+0,142207; -0,310743 10^{-1}	+0,142205; -0,310545 10^{-1}
20	5	+0,405293 10^{-9} ; -0,201418 10^{-9}	+0,406773 10^{-9} ; -0,201696 10^{-9}
20	-5	-0,429088 10^{-9} ; +0,356605 10^{-10}	-0,430398 10^{-9} ; +0,361760 10^{-10}
20	10	-0,201322 10^{-21} ; -0,373941 10^{-21}	-0,202854 10^{-21} ; -0,380110 10^{-21}
20	-10	+0,926027 10^{-22} ; +0,373801 10^{-21}	+0,954700 10^{-22} ; +0,378688 10^{-21}

du faisceau ou au bord local ($1/e$ en amplitude) du faisceau ($w_y = 16.5 \mu\text{m}$).

Dans le tableau 6.4 les g_n^m avec m pair ne sont pas compris puisqu'ils sont tous nuls d'après les relations de symétrie. Le tableau 6.5 présente l'évaluation des $g_{n,TE}^m$ lorsque la particule est située au bord local du faisceau ($y_0 = w_{0y} = 16.5 \mu\text{m}$). On trouve que les g_n^m décroissent très vite lors de croisement de m . L'accord entre les valeurs obtenues par interprétation localisée et celles obtenues par l'intégration F1 est encore parfait même pour les très petits g_n^m .

Cependant, à cause de difficultés numériques, les valeurs des g_n^m ne sont pas stables lorsque n est très grand. Les figures 6.2 et 6.3 montrent l'évolution des g_n^1 et g_n^5 en fonction de n pour $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 0,2 \text{ mm}$ et $x_0 = 0, y_0 = 16.5 \mu\text{m}$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$ respectivement. On remarque que lorsque $n > 400$ les g_n^m ne sont pas calculables.

Nous développerons dans le prochain chapitre une méthode interprétation localisée intégral qui est stable, et presque sans perte de rapidité de calcul.

6.4 Temps de Calcul

L'avantage de l'interprétation localisée consiste en un calcul beaucoup plus rapide que dans toutes les autres techniques sans perte de précision considérable. Le temps de calcul a été discuté largement pour le faisceau gaussien et on trouve que l'interprétation localisée est généralement plus rapide d'un ou deux ordre de grandeur en temps de calcul que l'approche série finie [43]. Par un travail sur les algorithmes de calcul encore deux ou plus ordre de grandeur en temps de calcul peuvent être gagné [86].

A la différence du faisceau gaussien où les coefficients g_n^m sont exprimés par une sommation simple, les formules des coefficients pour le faisceau feuille laser sont des sommations triples. Ce-là crée une situation moins favorable. Cependant, en cherchant un algorithme efficace, employant, par exemple,

Table 6.4: Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x}=3 \text{ mm}$, $w_{0y}=2 \mu\text{m}$, $x_0=y_0=0$, $z_0=200 \mu\text{m}$

méthodes		interprétation localisée	intégration F1
n	m	$g_{n,TM}^m$	$g_{n,TM}^m$
1	1	-0,133005; -0,112313	-0,133020; -0,112300
5	1	-0,132823; -0,112481	-0,132838; -0,112468
5	3	0,649390 10^{-5} ; -0,599961 10^{-5}	0,648909 10^{-5} ; -0,600631 10^{-5}
5	5	0,131224 10^{-9} ; 0,182232 10^{-9}	0,131728 10^{-9} ; 0,181955 10^{-9}
10	1	-0,132302; -0,112958	-0,132317; -0,112945
10	9	-0,176092 10^{-19} ; -0,449221 10^{-19}	-0,179948 10^{-19} ; -0,448221 10^{-19}
20	1	-0,130250; -0,114763	-0,130266; -0,114752
20	9	-0,162820 10^{-19} ; -0,452403 10^{-19}	-0,166692 10^{-19} ; -0,451554 10^{-19}
50	1	-0,115060; -0,125149	-0,115079; -0,125151
50	9	-0,712939 10^{-20} ; -0,462795 10^{-19}	-0,751176 10^{-20} ; -0,462975 10^{-19}
100	1	-0,584132 10^{-1} ; -0,132992	-0,584002 10^{-1} ; -0,133015
100	9	0,205401 10^{-19} ; -0,357755 10^{-19}	0,203571 10^{-19} ; -0,360449 10^{-19}
200	1	-0,135020 10^{-1} ; -0,673984 10^{-1}	-0,134924 10^{-1} ; -0,674246 10^{-1}
200	9	0,172754 10^{-20} ; 0,144718 10^{-19}	0,173481 10^{-20} ; 0,145589 10^{-19}
350	1	-0,603982 10^{-2} ; -0,387707 10^{-1}	-0,604601 10^{-2} ; -0,387695 10^{-1}
350	9	-0,130399 10^{-21} ; -0,889651 10^{-22}	-0,130717 10^{-21} ; -0,891871 10^{-22}

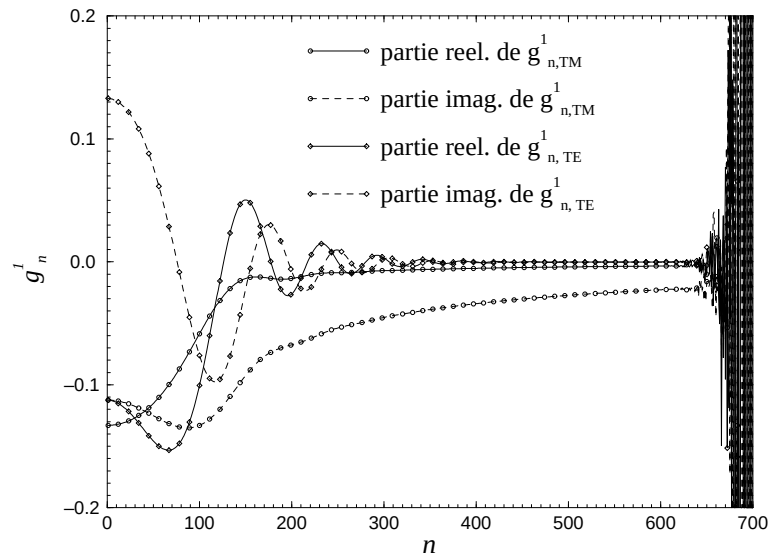


Figure 6.2: g_n^1 calculé par l'interprétation localisée, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$

les symétries fortes parmi $g_{n,TM}^m, g_{n,TE}^m, g_{n,TM}^{-m}$ et $g_{n,TE}^{-m}$, calculant les termes $\frac{A^p B^q}{p!q!}$ et $\frac{A^p C^q}{p!q!}$ avant les boucles de sommation, nous pouvons encore obtenir une accélération du calcul d'un ou deux ordre de magnitude par rapport au programme naïf écrit directement d'après les formules (6.34)-(6.39).

Le tableau 6.6 compare le temps de calcul de l'interprétation localisée et la méthode F1 pour un faisceau feuille laser de longueur d'onde de $0,5145 \mu\text{m}$, des axes au col $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$ et une particule située à $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$. Le temps de calcul correspond aux calculs par la méthode intégrale F1 pour les $g_{n,TE}^m$ avec m positif seulement, et par l'interprétation localisée pour tous les g_n^m : $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$, m positifs et négatifs. Le nombre de points d'intégration sur θ est 100 pour $n \leq 50$, 300 pour $50 < n \leq 100$, celui sur ϕ est 100 pour $n \leq 50$, 200 pour $50 < n \leq 100$. Nous trouvons que le temps de calcul dépend fortement du nombre des termes de sommation pour

Table 6.5: Comparaison des valeurs des g_n^m obtenues par l'interprétation localisée et l'intégration F1, $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x}=3 \text{ mm}$, $w_{0y}=2 \mu\text{m}$, $x_0=0, y_0=16,5 \mu\text{m}$, $z_0=200 \mu\text{m}$

méthodes		interprétation localisée	intégration F1
n	m	$g_{n,TE}^m$	$g_{n,TE}^m$
1	0	$0,959001 \cdot 10^{-2}; -0,419592 \cdot 10^{-2}$	$0,962421 \cdot 10^{-2}; -0,420846 \cdot 10^{-2}$
1	1	$-0,324586 \cdot 10^{-1}; -0,547846 \cdot 10^{-1}$	$-0,325821 \cdot 10^{-1}; -0,551217 \cdot 10^{-1}$
5	0	$0,140434; -0,616911 \cdot 10^{-1}$	$0,141110; -0,619348 \cdot 10^{-1}$
5	1	$-0,309427 \cdot 10^{-1}; -0,506375 \cdot 10^{-1}$	$-0,310554 \cdot 10^{-1}; -0,509495 \cdot 10^{-1}$
5	3	$0,179190 \cdot 10^{-4}; 0,490751 \cdot 10^{-4}$	$-0,180981 \cdot 10^{-4}; -0,494934 \cdot 10^{-4}$
5	5	$-0,296047 \cdot 10^{-8}; -0,687411 \cdot 10^{-8}$	$-0,302193 \cdot 10^{-8}; -0,695210 \cdot 10^{-8}$
10	0	$0,480178; -0,213717$	$0,482559; -0,214531$
10	1	$-0,268602 \cdot 10^{-1}; -0,393733 \cdot 10^{-1}$	$-0,269435 \cdot 10^{-1}; -0,396131 \cdot 10^{-1}$
10	10	$0,243372 \cdot 10^{-19}; -0,887124 \cdot 10^{-19}$	$0,235525 \cdot 10^{-19}; -0,913730 \cdot 10^{-19}$
20	0	$0,137246 \cdot 10^1; -0,659564$	$0,137862 \cdot 10^1; -0,661244$
20	1	$-0,140544 \cdot 10^{-1}; -0,328396 \cdot 10^{-2}$	$-0,406369 \cdot 10^{-1}; -0,329929 \cdot 10^{-2}$
20	10	$0,262373 \cdot 10^{-19}; -0,814817 \cdot 10^{-19}$	$0,256549 \cdot 10^{-19}; -0,839740 \cdot 10^{-19}$
50	0	$-0,984323; -0,138789 \cdot 10^1$	$-0,995323; -0,139069 \cdot 10^1$
50	1	$0,185948 \cdot 10^{-1}; 0,477719 \cdot 10^{-1}$	$0,185624 \cdot 10^{-1}; 0,478300 \cdot 10^{-1}$
50	10	$0,294510 \cdot 10^{-19}; -0,422029 \cdot 10^{-19}$	$0,296945 \cdot 10^{-19}; -0,436204 \cdot 10^{-19}$
100	0	$-0,750389; 0,533376 \cdot 10^1$	$-0,757388; 0,534530 \cdot 10^1$
100	1	$0,699731 \cdot 10^{-2}; -0,444149 \cdot 10^{-1}$	$0,683628 \cdot 10^{-2}; -0,444027 \cdot 10^{-1}$
100	10	$0,635342 \cdot 10^{-20}; 0,245547 \cdot 10^{-21}$	$0,648030 \cdot 10^{-20}; 0,256467 \cdot 10^{-21}$
200	0	$0,131199 \cdot 10^2; -0,839747 \cdot 10^1$	$0,131135 \cdot 10^2; -0,841296 \cdot 10^1$
200	1	$-0,577468 \cdot 10^{-1}; 0,428808 \cdot 10^{-1}$	$-0,577429 \cdot 10^{-1}; 0,428302 \cdot 10^{-1}$
200	10	$-0,995168 \cdot 10^{-23}; -0,120368 \cdot 10^{-22}$	$-0,987681 \cdot 10^{-23}; -0,121082 \cdot 10^{-22}$
350	0	$0,401792 \cdot 10^1; 0,159384 \cdot 10^1$	$0,398977 \cdot 10^1; 0,151970 \cdot 10^1$
350	1	$0,263232 \cdot 10^{-3}; -0,655960 \cdot 10^{-2}$	$0,331528 \cdot 10^{-3}; -0,633914 \cdot 10^{-2}$
350	10	$0,137942 \cdot 10^{-24}; 0,114787 \cdot 10^{-24}$	$0,139214 \cdot 10^{-24}; -0,115198 \cdot 10^{-24}$

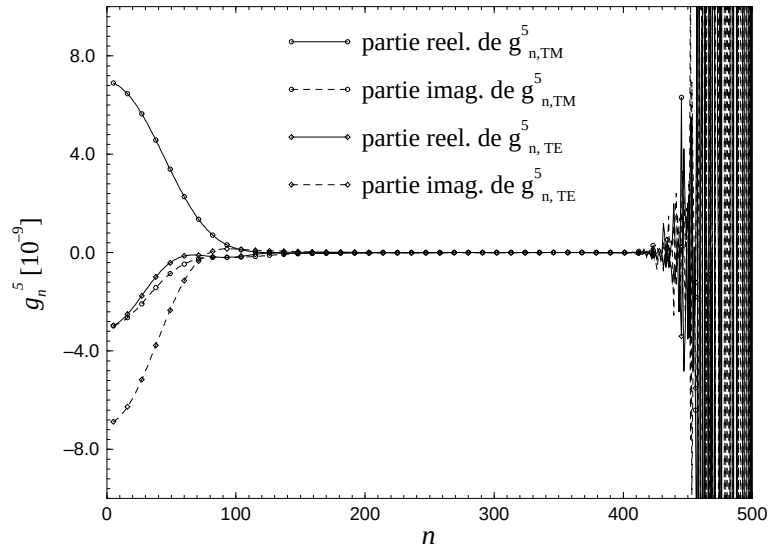


Figure 6.3: g_n^5 calculé par l'interprétation localisée, $w_{0x} = 3 \text{ mm}$, $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $x_0 = 0, y_0 = 16,5 \mu\text{m}$, $z_0 = 0,2 \text{ mm}$

l'interprétation localisée et du nombre de points d'intégration pour la méthode intégrale. De toute façon, l'interprétation localisée est beaucoup plus rapide que la méthode intégrale.

Table 6.6: Comparaison du temps de calcul en seconde entre l'interprétation localisée et la méthode intégrale F1, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 10 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5 \mu\text{m}$

méthodes		approx. local. améliorée	approx. local naïf	méthode int. F1
n_{max}	m_{max}			
5	5	0,0	0,2	21,0
10	10	0,0	1,0	71,4
20	10	0,2	3,0	207,0
50	10	0,5	10,6	723,5
100	10	1,5	29,0	11648,6
500	10	23,4	3392,1	-

6.5 Conclusion

Les séries définissant les coefficients g_n^m du faisceau feuille laser, basées sur l'approximation localisée, ont été développées. La validité de la méthode a été démontrée par les relations de symétrie, et par les résultats numériques en comparant avec la méthode intégrale. Le pourcentage d'erreur entre les résultats numérique de ces deux méthodes dépend de l'indice m et peut être exprimée par $0,1 * m$. Cette méthode nous permet de calculer très efficacement les coefficients du faisceau feuille laser presque sans perte de précision, et donc élargit les applications de la TLMG à ce type de faisceau. Cependant, lorsque l'indice n est très grand ($n > 400$), l'instabilité numérique apparaît. La méthode développée dans le chapitre suivant résoudra ce problème.

Chapter 7

Interprétation Localisée Intégrale

Dans les chapitres précédents, nous avons développé deux méthodes pour calculer les coefficients g_n^m de forme du faisceau feuille laser. La méthode intégrale est souple mais très onéreuse, l'interprétation localisée est, par contre, rapide mais elle manque de souplesse. De plus, le problème d'instabilité apparaît lorsque l'indice n est très grand. Dans ce chapitre nous allons combiner les avantages des deux méthodes pour développer une méthode à la fois rapide et souple, et de plus stable même pour de très grand n .

7.1 Développement de la Méthode

Pour obtenir les expressions des coefficients de forme du faisceau $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ à partir des composantes radiales du champ électromagnétique, l'interprétation localisée comprend 4 étapes:

1. Développer les composantes radiales des champs électriques et magnétiques $E_r(r, \theta, \phi)$ et $H_r(r, \theta, \phi)$ en mode d'azimut E_r^m et H_r^m respectivement (équation (6.6), chapitre 6);
2. Eliminer le terme de l'onde plane $E_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) \exp(im\phi)$, $H_0 \cos \theta \exp(-ikr \cos \theta) \exp(im\phi)$ dans E_r^m et H_r^m respectivement;
3. Appliquer l'opérateur de l'interprétation localisée aux expressions obtenues dans la deuxième étape, c'est-à-dire remplacer $r \sin \theta$ par $\rho_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\pi}$, et $r \cos \theta$ par zéro, pour obtenir les coefficients intermédiaire $g_n^{m,o}$;
4. Normaliser les $g_n^{m,o}$ obtenus dans la dernière étape en les multipliant par Z_n^m (équations (6.32) et (6.33) dans le chapitre précédent) et obtenir les expressions finales des coefficients g_n^m .

Jusqu'à maintenant, nous n'avons appliqué cette méthode qu'au faisceau gaussien et au faisceau feuille laser pour calculer les coefficients g_n^m . Nous pouvons aussi appliquer cette technique à un faisceau quelconque. (mais la validité est à vérifier).

Pour un faisceau quelconque, les composantes de mode d'azimut des champs radiaux E_r^m et H_r^m peuvent être obtenues par:

$$E_r^m = \frac{1}{2\pi} \exp(im\phi) \int_0^{2\pi} E_r(r, \theta, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (7.1)$$

$$H_r^m = \frac{1}{2\pi} \exp(im\phi) \int_0^{2\pi} H_r(r, \theta, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (7.2)$$

Pour certains faisceaux, cette intégration pourrait être réalisée analytiquement, par exemple pour le faisceau gaussien et le faisceau feuille laser à l'ordre L . Cependant, elle n'est pas toujours réalisable,

et les expressions analytiques ne sont pas toujours avantageuses. D'autre part la forme intégrale est souple, pour un faisceau différent, il suffit de changer le noyau d'intégrale. De plus, différents codes peuvent être utilisés pour améliorer l'intégration.

Quant à l'étape 3, il suffit de remplacer r par $\rho_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\pi}$, et θ par $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, on obtient les expressions des g_n^m :

$$g_{n,TM}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi E_0} \int_0^{2\pi} \bar{E}_r(r = \rho_n, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (7.3)$$

$$g_{n,TE}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} \bar{H}_r(r = \rho_n, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (7.4)$$

où $\bar{E}_r$ et $\bar{H}_r$ sont identiques à E_r et H_r respectivement, sauf que l'on a remplacé r par ρ_n et θ par $\pi/2$. Cette procédure nous permet d'introduire l'indice n et d'éliminer la variable θ dans E_r et H_r .

7.2 Calcul des g_n^m du faisceau gaussien de l'ordre L^3

Dans cette section, nous appliquons cette méthode au calcul des coefficients g_n^m du faisceau gaussien de l'ordre L^3 .

Les expressions des composantes radiales du champ sont données dans le chapitre 2 (équations (2.23) et (2.28)). Il est beaucoup plus difficile d'obtenir analytiquement les expressions des g_n^m pour le faisceau gaussien à l'ordre L^3 que pour celui à l'ordre L . Toutefois nous pouvons appliquer les formules (7.3) et (7.4) pour calculer tous les coefficients g_n^m pour une particule située arbitrairement dans le faisceau. C'est aussi rapide qu'avec les formules développées dans le chapitre précédent, même pour le faisceau gaussien à l'ordre L .

Le tableau 7.1 présente les résultats numériques pour le cas $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_0 = 1 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5 \mu\text{m}$. Les valeurs des g_n^m décroissent très rapidement lors de l'accroissement de l'indice m . L'accord entre les résultats calculés par ces deux méthodes est très satisfaisant, pour les coefficients g_n^m pas trop petits.

Table 7.1: Comparaison des valeurs des coefficients $g_{n,TM}^m$ calculés par différentes méthodes, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_0 = 1 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5 \mu\text{m}$

n	m	interpr. local. intégr.	intégration F1
1	0	(0,142575 10^{-1} ; 0,462098 10^{-1})	(0,148002 10^{-1} ; 0,476673 10^{-1})
1	1	(0,294466; -0,675677 10^{-1})	(0,297132; -0,671027 10^{-1})
5	0	(0,181435; 0,604687)	(0,187199; 0,620954)
5	1	(0,263098; -0,715839 10^{-1})	(0,264935; -0,718648 10^{-1})
5	5	(-0,916280 10^{-7} ; 0,540129 10^{-7})	(0,108205 10^{-6} ; 0,651323 10^{-7})
10	0	(0,411071; 0,149534 10^{+1})	(0,417063; 0,151725 10^{+1})
10	1	(0,189731; -0,704528 10^{-1})	(0,189987; -0,711338 10^{-1})
10	10	(-0,157495 10^{-18} ; -0,188324 10^{-17})	(-0,347003 10^{-17} ; 0,464010 10^{-18})

A partir des équations (7.3) et (7.4), nous pouvons aussi obtenir les expressions analytiques des coefficients g_n^m pour certains faisceaux. Par exemple, lorsque la particule se situe sur l'axe du faisceau gaussien, nous pouvons aisément obtenir les expressions des coefficients g_n à l'ordre L^3 :

$$g_n = i\bar{Q} \exp\left(-i\bar{Q} \frac{\rho_n^2}{w_0^2}\right) \exp(ikz_0) \\ \times \left\{ 1 - s^2 \bar{Q}^2 \frac{\rho_n^2}{w_0^2} \left(3 - i\bar{Q} \frac{\rho_n^2}{w_0^2} \right) \right\}$$

$$+ s^4 \bar{Q}^4 \frac{\rho_n^4}{w_0^4} \left(10 - 5i\bar{Q} \frac{\rho_n^2}{w_0^2} - 0,5\bar{Q}^2 \frac{\rho_n^4}{w_0^4} \right) \} \quad (7.5)$$

Les deux méthodes d'intégrale F1 et F2 ne sont pas très adaptées pour évaluer la validité des résultats de l'interprétation localisée. Nous avons donc développé les séries finies pour le faisceau gaussien de l'ordre L^3 :

$$\begin{aligned} g_{2p+1} = Z_0 \exp(ikz_0) \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{\Gamma(p+j+3/2)}{\Gamma(p+3/2)} (4T_0)^j \\ \times \{ 1 + 3j\epsilon_2 T_0 + j(j-1)(10\epsilon_4 T_0 + \epsilon_2) T_0 + 5j(j-1)(j-2)\epsilon_4 T_0^2 \\ + 0,5j(j-1)(j-2)(j-3)\epsilon_4 T_0^2 \} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} g_{2p+2} = Z_0 \exp(ikz_0) \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{\Gamma(p+j+5/2)}{\Gamma(p+5/2)} (4T_0)^j \\ \times \{ 1 + 2(1+\epsilon_1)T_0 + j[2+3\epsilon_2(1+6T_0)+6\epsilon_3 T_0] T_0 \\ + j(j-1)[\epsilon_2+2T_0(\epsilon_3+7\epsilon_2+5\epsilon_4+10T_0(\epsilon_5+5\epsilon_4))] T_0 \\ + j(j-1)(j-2)[5\epsilon_4+2\epsilon_2+10T_0(\epsilon_5+8\epsilon_4)] T_0^2 \\ + j(j-1)(j-2)(j-3)[0,5\epsilon_4+T_0\epsilon_5+17T_0\epsilon_4\epsilon] T_0^2 \\ + j(j-1)(j-2)(j-3)(j-4)\epsilon_4 T_0^3 \} \end{aligned} \quad (7.7)$$

où

$$Z_0 = \frac{1}{1 + \frac{2iz_0}{l}} \quad T_0 = -Z_0 s^2 \quad (7.8)$$

Si la description du champ est à l'ordre $O(s^N)$, ϵ_n est défini par:

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases} \quad (7.9)$$

Les coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$ avec $|m| = 1$ sont reliés aux g_n par les relations (5.21) et (5.22). Les g_n^m avec $|m| \neq 1$ sont tous nuls dans ce cas.

Les tableaux 7.2 et 7.3 présentent les coefficients g_n calculés par trois différents méthodes: l'interprétation localisée, les séries finies et la méthode F2 (kr de 0 à 50000). Les résultats calculés par interprétation localisée sont bons lorsque les coefficients g_n ne sont pas trop petits. Pour les coefficients plus faibles, les différences entre les résultats de l'interprétation localisée et ceux des séries finies sont aussi importants que les différences entre les résultats de celle-ci et ceux de la méthode d'intégration.

D'autre part, l'interprétation localisée est jusqu'à présent une seule méthode qui est applicable au problème de diffusion d'un faisceau hyperfocalisé où les séries finies sont aisément divergentes. Par exemple, dans le cas sur l'axe, $w_0 = 0,25 \mu\text{m}$, pour $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, elles convergent seulement lorsque $n < 5$, et pour $w_0 = 0,5 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, elles convergent lorsque $n < 10$.

7.3 Calcul des g_n^m du faisceau feuille laser

Nous avons obtenu dans le chapitre précédent les expressions analytiques des coefficients g_n^m en séries infinies de triple sommation à partir de l'interprétation localisée pour le faisceau feuille laser, et trouvé que les résultats ne sont pas stables lorsque l'indice n est très grand. Nous utilisons dans cette section directement les formules (7.3) et (7.4) pour évaluer ces coefficients.

Table 7.2: Comparaison des valeurs des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$, $w_0 = 1 \mu\text{m}$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

n	interpr. local. L	interpr. local. L^3	séries finies L^3	intégration L^3
1	0,985027	0,985324	0,100000	0,998387
3	0,921144	0,922627	0,934297	0,930765
5	0,816415	0,819535	0,826764	0,821412
10	0,477473	0,482901	0,480539	0,474370
15	0,199703	0,202775	0,199547	0,196988
20	0,597339 10^{-1}	0,599369 10^{-1}	0,594399 10^{-1}	0,595248 10^{-1}
30	0,195473 10^{-2}	0,168412 10^{-2}	0,199035 10^{-2}	0,220359 10^{-2}
50	0,374631 10^{-7}	0,117199 10^{-7}	-0,805318 10^{-7}	-0,337551 10^{-5}

Table 7.3: Comparaison des valeurs des coefficients g_n calculés par différentes méthodes, $\lambda=0,5145 \mu\text{m}$, $w_0=1 \mu\text{m}$, $x_0=y_0=0$ $z_0=5 \mu\text{m}$

n	interpr. local. L	interpr. local. L^3
1	(-0,590331; -0,489295)	(-0,590440; -0,489208)
3	(-0,551353; -0,488427)	(-0,551930; -0,488002)
5	(-0,485160; -0,483916)	(-0,486525; -0,483067)
10	(-0,248580; -0,430410)	(-0,252328; -0,478016)
15	(-0,028411; -0,293596)	(-0,032176; -0,295438)
20	(+0,068052; -0,126018)	(+0,067765; -0,129140)
30	(+0,015256; +0,010450)	(+0,016077; +0,011739)
50	(+0,000026; +0,000010)	(+0,000047; +0,000007)

n	séries finies L^3	intégration L^3
1	(-0,599322; -0,489315)	(-0,598739; -0,489789)
3	(-0,559666; -0,488977)	(-0,558246; -0,489984)
5	(-0,492298; -0,485248)	(-0,489787; -0,486666)
10	(-0,251399; -0,433190)	(-0,246516; -0,433568)
15	(-0,027684; -0,295229)	(-0,241034; -0,292407)
20	(+0,069058; -0,125581)	(+0,068360; -0,122531)
30	(+0,014888; +0,010329)	(+0,014592; +0,009064)
50	(+0,000021; -0,000027)	(+0,000012; -0,000017)

Les figures 7.1 et 7.2 présentent les résultats calculés par l'interprétation localisée intégrale avec les mêmes paramètres que sur les figures 6.2 et 6.3 dans le chapitre précédent. Il n'y a plus d'instabilité pour les très grands indices n . En comparant les résultats numériques avec l'interprétation localisée lorsqu'elle est valable, ou avec la méthode intégrale, nous concluons que l'accord est très satisfaisant et que dans tous les domaines étudiées l'interprétation localisée intégrale converge.

7.4 Conclusion

L'interprétation localisée intégrale combine les avantages de la méthode intégrale et de l'interprétation localisée. Cette méthode est aussi souple que les méthodes intégrales, pour différents faisceaux il suffit de changer le noyau d'intégrale pour calculer les coefficients g_n^m . Elle est presque aussi rapide que l'interprétation localisée. Sa validité a été démontrée pour le faisceau gaussien à l'ordre L^3 et le faisceau feuille laser peu focalisé.

Lorsque le faisceau est hyperfocalisé, elle perd de sa précision. Elle fournit cependant une possibilité d'analyser, au moins qualitativement, la diffusion d'un tel faisceau puisque dans ce cas toutes les autres méthodes que l'on connaît échouent: les séries finies sont aisément divergentes; la méthode F1 est instable et la méthode F2 est très onéreuse. La validité de cette méthode dans les cas du

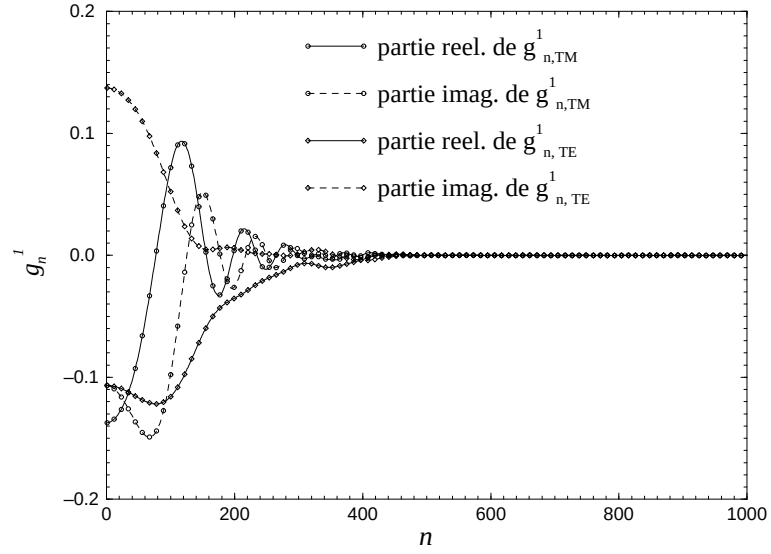


Figure 7.1: g_n^1 calculés par l'interprétation localisée intégrale, $w_{0x} = 3$ mm, $w_{0y} = 2$ μm , $\lambda = 0,5145$ μm , $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,2$ mm

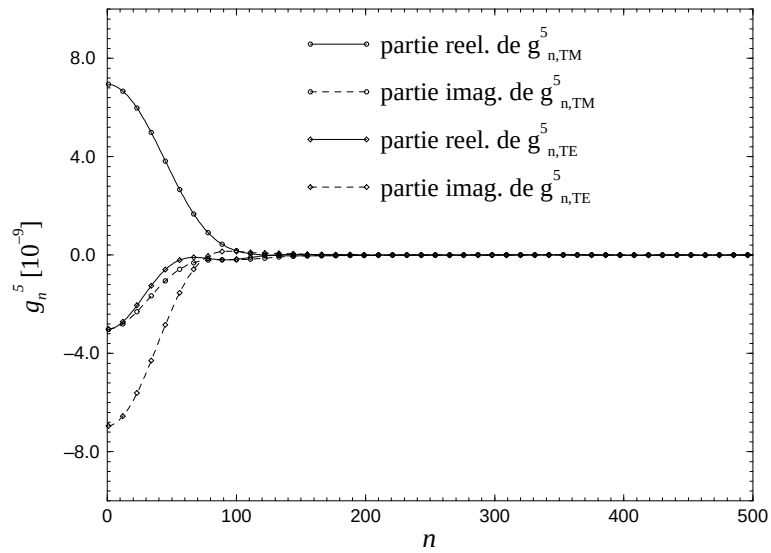


Figure 7.2: g_n^5 calculés par l'interprétation localisée intégrale, $w_{0x} = 3$ mm, $w_{0y} = 2$ μm , $\lambda = 0,5145$ μm , $x_0 = 0$, $y_0 = 16,5$ μm , $z_0 = 0,2$ mm

faisceau gaussien hyperlocalisée a été qualitativement démontrée en comparant la pression de radiation expérimentale [10] et celle prévue par la TLMG. Nous discuterons ce point dans la partie prochaine.

Part III

Applications

Introduction

La diffusion des faisceaux feuille laser par des particules sphériques trouve de plus en plus d'applications dans le domaine de la mesure des écoulements diphasiques. La particularité du faisceau feuille laser permet d'étendre le domaine des techniques de mesure optique, d'améliorer ou de simplifier les manipulations ou le traitement des signaux.

Cependant, jusqu'à ce jour, tous les analyses théoriques sur la diffusion des faisceaux feuille laser sont basées soit sur l'optique géométrique, soit sur la théorie de Lorenz-Mie classique qui ne sont pas rigoureuses.

Dans cette partie, la théorie développée rigoureusement dans les deux parties précédentes est appliquée à analyser des configurations de mesure basées sur la diffusion des faisceaux feuille laser: le système DCW (Dual-Cylindrique Wave – double onde cylindrique) et l'imagerie de particules. Les sections efficaces et les pressions de radiation pour les cas du faisceau feuille laser et du faisceau gaussien hyperfocalisé y sont aussi discutées. Cette partie se compose de trois chapitres:

Chapitre 8: Comportements des champs diffusés

Ce chapitre décrit sur les comportements des champs diffusés par une particule. Il fournit les connaissances des diagrammes de diffusion pour une particule éclairée par un faisceau feuille laser qui sont utiles pour interpréter les phénomènes observés dans les applications décrites dans les deux chapitres suivants. Les particularités de l'interaction particule/faisceau feuille laser sont soulignées et comparées avec l'interaction particule/faisceau gaussien. On présente aussi des évaluations de la pression de radiation d'un faisceau gaussien hyperfocalisé sur une particule.

Chapitre 9: Evaluation d'un système de mesure réel

Ce chapitre est dédié à l'évaluation d'une configuration réelle de mesure de particule avec les faisceaux feuille laser – le système DCW. Celui-ci utilise le système de franges non-uniforme créé par l'interférence de deux faisceaux feuille laser. Il permet de mesurer la taille, la vitesse et l'indice de réfraction de la particule à partir de la fréquence de la lumière diffusée. La comparaison des résultats simulés par l'optique géométrique, la théorie de Lorenz-Mie classique et TLMG avec les résultats expérimentaux montre que la TLMG est la seule à décrire tous les effets expérimentaux.

Chapitre 10: Imagerie d'une particule éclairée par un faisceau

Dans ce chapitre, une configuration d'imagerie d'une particule éclairée par un faisceau feuille laser est décrite. Les cas d'éclairage par une onde plane, un faisceau gaussien et un faisceau feuille laser sont comparés et discutés. La géométrie de ce chapitre peut être utilisée pour une particule localisée arbitrairement dans le faisceau. L'orientation du faisceau peut être en outre quelconque par rapport à l'axe du système optique.

Chapter 8

Comportements des Champs Diffusés

Le premier chapitre de cette partie est dédié à l'étude des comportements du champ diffusé à partir d'un faisceau feuille laser par une particule. Il sert de base pour interpréter les applications que nous décrirons dans les deux chapitres suivants.

La diffusion d'une onde plane par une particule sphérique (Théorie de Lorenz-Mie) a été largement étudiée. La question de la diffusion d'un faisceau gaussien par une particule sphérique a été aussi abordée par des méthodes et sous des angles divers par plusieurs auteurs, et peut maintenant être utilisée pour analyser différentes configurations de mesures de particules [52] [37].

Par contre, la diffusion du faisceau feuille laser est moins étudiée même s'il y a de plus en plus d'applications.

Ce chapitre se compose de deux sections:

La première section présente les diagrammes du champ diffusé loin de la particule. Le comportement du champ diffusé par un faisceau feuille laser est discuté, puis comparé avec ceux obtenus par une onde plane et un faisceau gaussien. L'importance de la position de la particule et de la polarisation du faisceau est étudiée.

Dans la deuxième section, les sections efficaces de la particule éclairée par un faisceau gaussien ou par un faisceau feuille laser sont discutées. L'accent est mis sur la pression de radiation d'un faisceau gaussien hyperfocalisé et sur la comparaison des section efficaces de la particule éclairée par un faisceau feuille laser avec celles du faisceau gaussien circulaire et de l'onde plane.

8.1 Champ extérieur à la particule

8.1.1 Formules

Les expressions du champ diffusé par la particule sont données dans le premier chapitre. Lorsque le point d'observation est loin de la particule, ces équations se simplifient:

$$E_{\theta}^s = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n g_{n,TM}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + i b_n g_{n,TE}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (8.1)$$

$$E_{\phi}^s = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[m a_n g_{n,TM}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + i b_n g_{n,TE}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\phi) \quad (8.2)$$

$$H_{\phi}^s = \frac{H_0}{E_0} E_{\theta}^s \quad (8.3)$$

$$H_{\theta}^s = -\frac{H_0}{E_0} E_{\phi}^s \quad (8.4)$$

$$E_r^s = H_r^s = 0 \quad (8.5)$$

Le champ diffusé est un champ transverse. Les calculs dans la section 8.1.2 et dans le chapitre suivant sont faits à partir des équations (8.1)-(8.5) tandis que les champs diffusés pour l'imagerie dans le chapitre 10 sont calculés avec les formules du champ proche – les équations (1.66)-(1.71) dans le premier chapitre.

8.1.2 Diagrammes de diffusion

Sur les figures 8.1-8.3 sont représentés les diagrammes de diffusion d'une particule sphérique de verre (indice de réfraction $m=1,55$) de $12,5 \mu\text{m}$ de rayon éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien circulaire de rayon au col du faisceau $w_0 = 5 \mu\text{m}$, un faisceau feuille laser de grand axe au col parallèle à la direction de polarisation $w_{0x} = 50 \mu\text{m}$ et de petit axe au col $w_{0y} = 5 \mu\text{m}$, ou un faisceau feuille laser de grand axe au col perpendiculaire à la direction de polarisation $w_{0y} = 50 \mu\text{m}$ et de petit axe $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$. La longueur d'onde du faisceau incident est $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$.

La figure 8.1 est le diagramme de diffusion mesuré dans le plan défini par la direction de propagation du faisceau et la direction de polarisation ($\phi = 0^\circ$) tandis que la figure 8.2 correspond à $\phi = 90^\circ$ et la figure 8.3 à $\phi = 45^\circ$. Sur la figure 8.3, seule la composante I_ϕ est représentée.

En comparant les trois figures précédentes on trouve que la lumière diffusée par une particule éclairée par un faisceau feuille laser correspond aux propriétés de la lumière diffusée par une onde plane dans la direction du grand axe et à celles d'un faisceau gaussien dans la direction du petit axe lorsque le rayon au col du faisceau gaussien circulaire est égal au petit axe du faisceau feuille laser. Pour un angle d'observation $\phi = 45^\circ$, la réponse de la particule à un faisceau feuille laser est intermédiaire entre celles de l'onde plane et du faisceau gaussien.

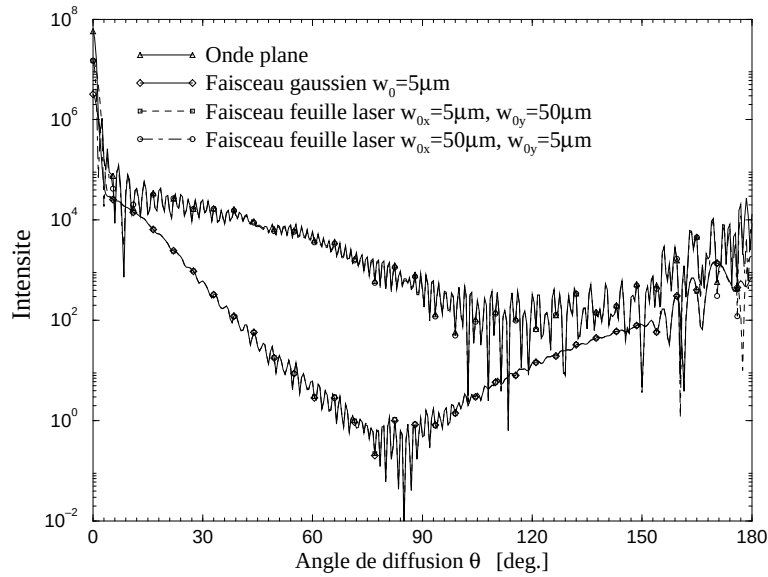


Figure 8.1: Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 0^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau

Les figures 8.4-8.6 présentent les diagrammes calculés pour une particule de verre de rayon de $5 \mu\text{m}$ lorsqu'elle traverse un faisceau feuille laser de $0,5145 \mu\text{m}$ de longueur d'onde et d'axes au col $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 50 \mu\text{m}$ dans le plan au col du faisceau. Seul x_0 change, y_0 et z_0 sont tous les deux nuls.

On trouve encore que les diagrammes sont très différents lorsqu'on observe dans le plan parallèle ou perpendiculaire à la direction du grand axe au col du faisceau en comparant les figures 8.4 et 8.5 avec la figure 8.6. Les diagrammes de diffusion pour $x_0 < 0$ et $x_0 > 0$ sont tracés sur la même figure lorsqu'on observe dans la direction du grand axe au col du faisceau (figure 8.6) puisque les deux cas sont symétriques. Les courbes sur la figure 8.6 révèlent une oscillation forte et une caractéristique

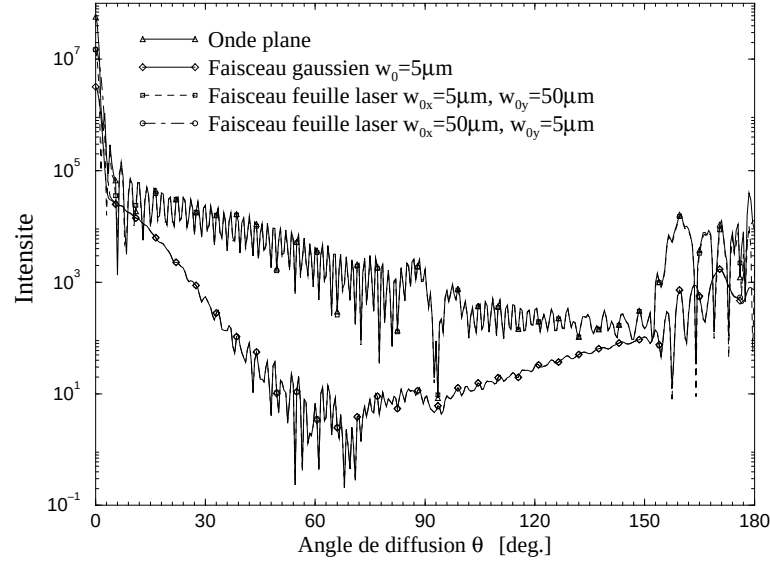


Figure 8.2: Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 90^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau

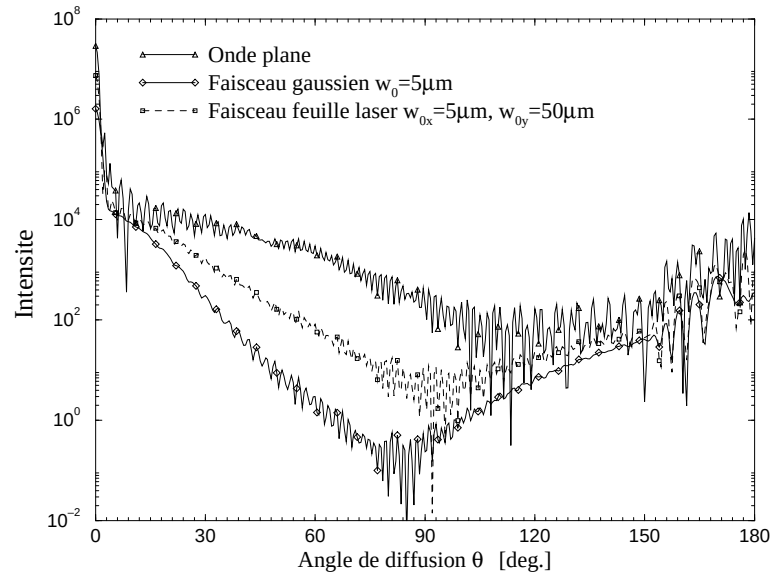


Figure 8.3: Diagrammes de diffusion de l'onde plane, du faisceau gaussien et du faisceau feuille laser pour $\phi = 45^\circ$, et pour la particule au centre du faisceau

proche de l'onde plane. Par contre, l'oscillation est faible sur les diagrammes de la figure 8.4. De plus, on déduit des figures 8.5-8.6 que la lumière diffusée est plus importante lorsque la particule reçoit le plus de lumière (centre de la particule proche de l'axe du faisceau) pour presque tous les angles. Par contre, sur la figure 8.4, la lumière diffusée est plus forte entre 20° et 100° lorsque la particule se situe hors de l'axe du faisceau, proche du détecteur ($x_0 < 0$). Ce n'est pas vrai lorsque la particule est localisée à l'autre côté, loin du détecteur ($x_0 > 0$). Cet effet est dû à la compétition entre les lumières réfléchiée et réfractée en terme d'optique géométrique.

Les figures 8.7 et 8.8 montrent l'importance de la polarisation pour une particule d'eau (indice de réfraction $m=1,333$) de rayon de $15 \mu\text{m}$ éclairée par un faisceau feuille laser de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ du grand axe au col de 3 mm et petit axe de $5 \mu\text{m}$ lorsque la particule est au centre du faisceau ou au bord de celui-ci. En première approximation, les comportements pour les deux

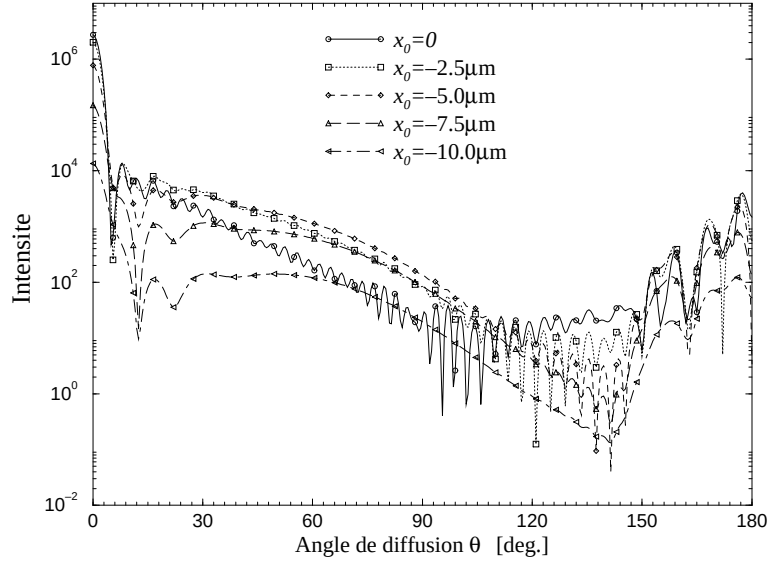


Figure 8.4: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le petit axe au col du faisceau pour $x_0 < 0$

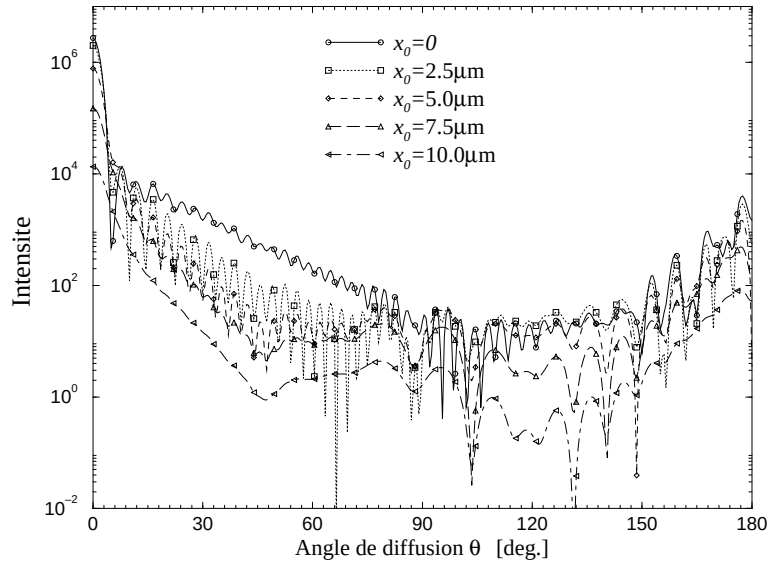


Figure 8.5: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le petit axe au col du faisceau pour $x_0 > 0$

polarisations se ressemblent. En comparant l'intensité de la particule au centre du faisceau, on trouve que lorsque la particule est plus proche de détecteur, l'intensité est plus forte de l'angle de 5° à 90° pour les deux polarisations, de 143° à 170° pour la polarisation dans la direction du petit axe au col et de 135° à 170° pour la polarisation dans la direction de grand axe au col, et que lorsque la particule est plus loin de détecteur, l'intensité est plus forte de l'angle de 30° à 155° pour les deux polarisations. Mais il faut noter que l'intensité pour la polarisation dans la direction du grand axe au col est un ou deux ordre plus forte que celle pour la polarisation dans la petite dimension de 60° à 120° lorsque la particule est plus loin de détecteur et de 140° à 150° lorsque la particule est plus proche du détecteur.

Les figures 8.9 et 8.10 sont présentées pour la même particule éclairée par les mêmes faisceaux que pour les figures 8.7 et 8.8 mais la particule se déplace sur l'axe du faisceau dans la direction de propagation 1 mm avant ou après le plan au col du faisceau. On trouve encore que les deux figures se

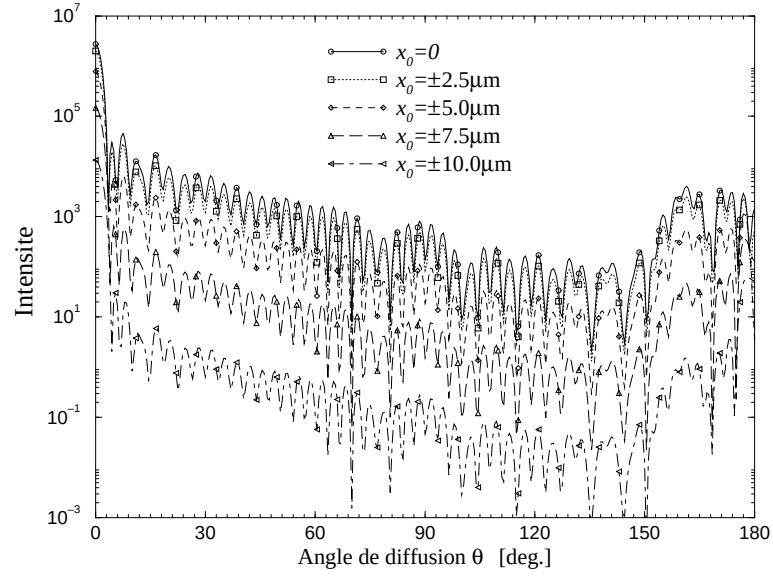


Figure 8.6: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser observés dans le plan contenant le grand axe au col du faisceau

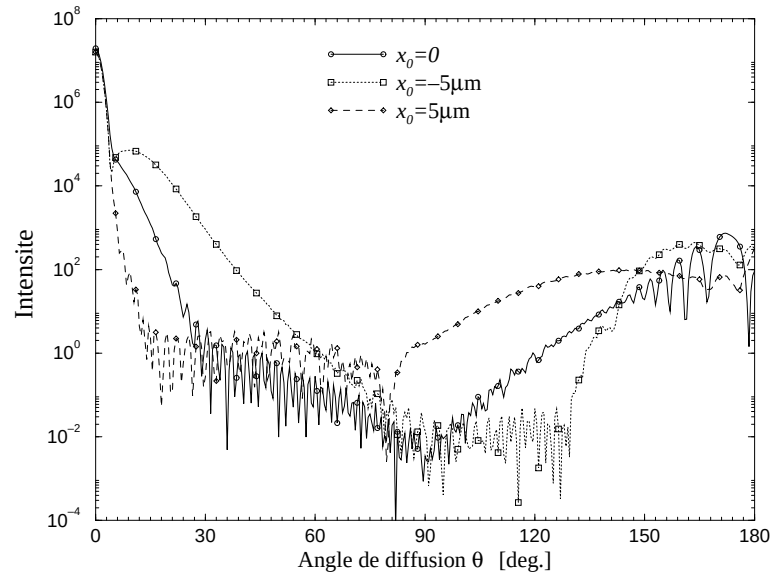


Figure 8.7: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 3 \text{ mm}$ polarisé dans la direction du petit axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 0^\circ$, la particule se situant sur le petit axe au col

ressemblent mais elles ne sont pas identiques. Premièrement on note que l'intensité oscille plus fort pour la diffusion avant avec une polarisation dans la direction du grand axe au col tandis qu'elle oscille plus fort pour la diffusion arrière avec une polarisation dans la direction du petit axe au col. Aussi, l'intensité de 130° à 145° , pour la polarisation dans la direction du grand axe au col est à peu près un ordre plus forte. De plus, les diagrammes pour la particule située avant et après le plan au col du faisceau ne sont pas identiques.

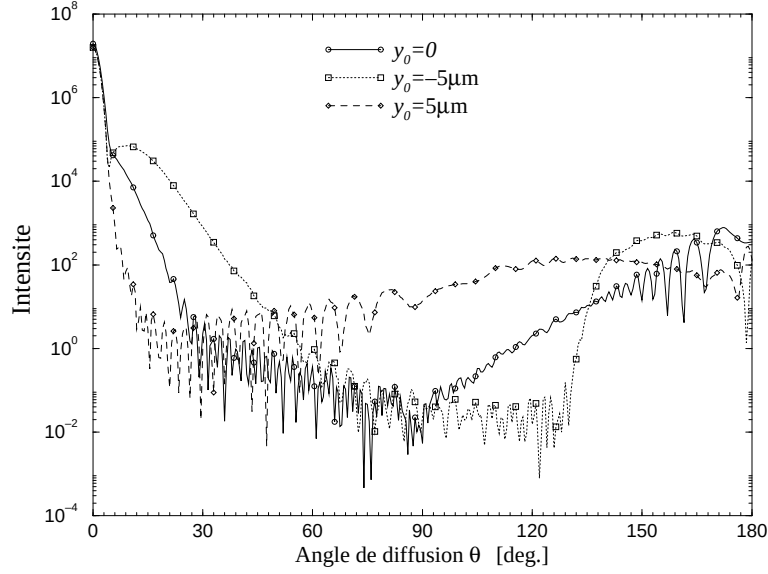


Figure 8.8: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 3$ mm, $w_{0y} = 5$ μ m polarisé dans la direction du grand axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 90^\circ$, la particule se situant sur le petit axe au col

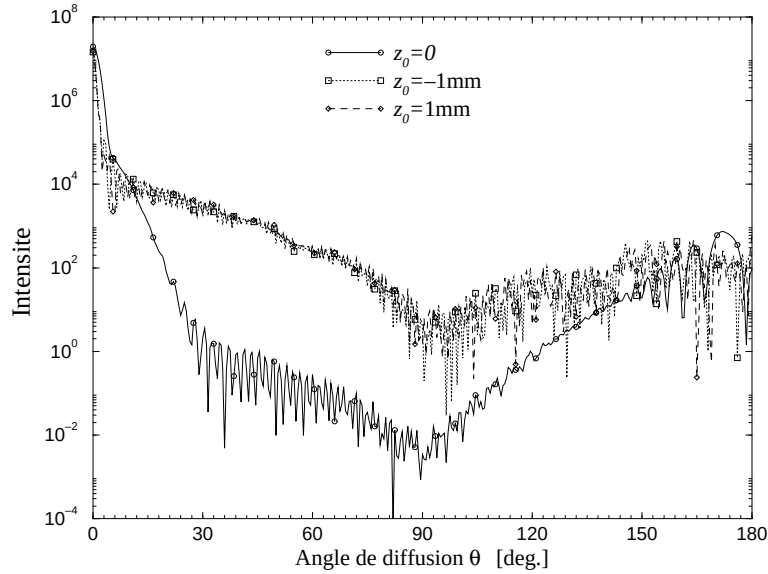


Figure 8.9: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 5$ μ m, $w_{0y} = 3$ mm polarisé dans la direction du petit axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 0^\circ$, la particule se situant sur l'axe du faisceau

8.2 Sections efficaces de la particule

Un demi-siècle après les études théoriques de Debye [28], Ashkin et al [7] ont utilisé expérimentalement la pression de radiation exercée par un faisceau laser sur une particule. Cette force peut être utilisée pour la lévitation de petites particules. En utilisant un ou plusieurs faisceaux focalisés, on peut obtenir un piégeage optique stable qui sert l'outil pour la micro-manipulation de cellules, de bactéries, etc. [7] [9] [8] [21]. Parallèlement à des études expérimentales, des efforts théoriques ont aussi faits pour prévoir la force de pression de radiation. Roosen et al ont développé un modèle pour calculer cette force exercée sur la particule illuminée par des faisceaux laser, basé sur l'optique géométrique [95] [96]. Une

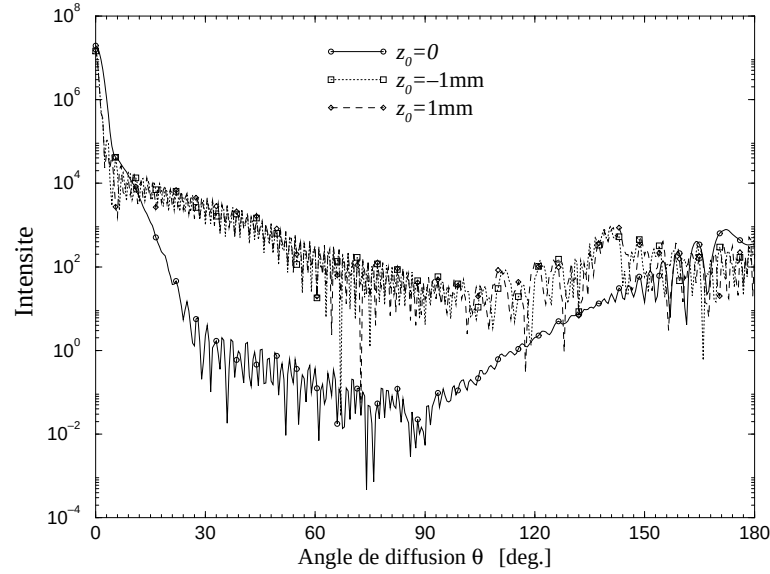


Figure 8.10: Diagrammes de diffusion du faisceau feuille laser $w_{0x} = 3$ mm, $w_{0y} = 5$ μ m polarisé dans la direction du grand axe au col, observés dans le plan contenant le petit axe du faisceau, $\phi = 90^\circ$, la particule se situant sur l'axe du faisceau

pression de radiation longitudinale négative à la direction de propagation du faisceau hyperfocalisé a été récemment mise en évidence expérimentalement [10] et qualitativement expliqué par des modèles basés sur l'optique géométrique [105].

Parmi d'autres auteurs, G. Gréhan et Gouesbet [49] ont fourni pour la première fois des résultats quantitatifs de diagramme de diffusion d'une particule sphérique illuminée par un faisceau gaussien. Ces résultats ont été par la suite interprétés par la TLMG [58]. Les pressions de radiation sur une particule arbitrairement localisée dans un faisceau gaussien et les effets de résonances associés ont été aussi étudiés exhaustivement et systématiquement par Ren, Gréhan et Gouesbet [91]. Dans cette section, nous nous concentrons sur la pression de radiation d'un faisceau hyperfocalisé et sur la comparaison des sections efficaces obtenus entre un faisceau gaussien et un faisceau feuille laser.

8.2.1 Cas du faisceau gaussien

Ashkin et al ont démontré expérimentalement l'existence d'une pression de radiation longitudinale négative [10], due au gradient d'intensité de la lumière incidente. Tom et al ont étudié ce phénomène avec le modèle de Roosen, basé sur l'optique géométrique, et prédit qualitativement cette force négative [105]. Nous allons calculer la pression de radiation longitudinale exercée sur une particule localisée sur l'axe d'un faisceau gaussien hyperfocalisé en utilisant les théories développées pour ce faisceau à l'ordre L^3 . Les coefficients g_n sont calculés avec l'approximation localisée (équation (7.5)).

La figure 8.11 montre l'évaluation de la pression de radiation en fonction de la position de la particule (de rayon 3,75 μ m) éclairée par un faisceau gaussien de rayon au col 1,8 μ m, de longueur d'onde 0,3682 μ m ($s = 0,033$), pour différents indices de réfraction de la particule. C'est un cas correspondant à la figure 3 de la référence [105]. On trouve aussi une pression de radiation négative et les formes des courbes sont similaire (il faut noter que z sur la figure 8.11 est la coordonnée du centre du faisceau dans le repère de la particule d'après notre convention). Mais des différences quantitatives notables existent, ainsi, on trouve une pression de radiation négative (bien que de faible intensité) pour $m = 1,02$, mais pas sur la figure 3 de Tom [105]. On a démontré dans le chapitre 7 que le équation (7.5) est valide pour un faisceau avec $s = 0,08$ ($\lambda = 0,5$ μ m, $w_0 = 1$ μ m). Ces différences sont probablement due à l'approximation de l'optique géométrique.

La figure 8.12 présente l'évolution de la pression de radiation en fonction de position pour une

particule de différente taille dont l'indice de réfraction est $m = 1,5$, éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,5 \mu\text{m}$, de rayon au col $w_0 = 0,25 \mu\text{m}$. Elle montre que lorsque le rayon de la particule est plus grand que $1,39 \mu\text{m}$ ou plus petit que $0,060 \mu\text{m}$ on trouve des pressions de radiation négatives.

Cela montre que notre théorie peut être appliquée à un très large domaine: un faisceau très focalisé, une particule très petite avec un indice de réfraction complexe quelconque. Du fait que la TLMG dépend la qualité de description du faisceau, l'application au faisceau hyper-focalisé est encore à perfectionner. Le travail de Gouesbet et Lock sur le faisceau gaussien à l'ordre infini fournit des possibilité d'étudier ce problème plus précisément.

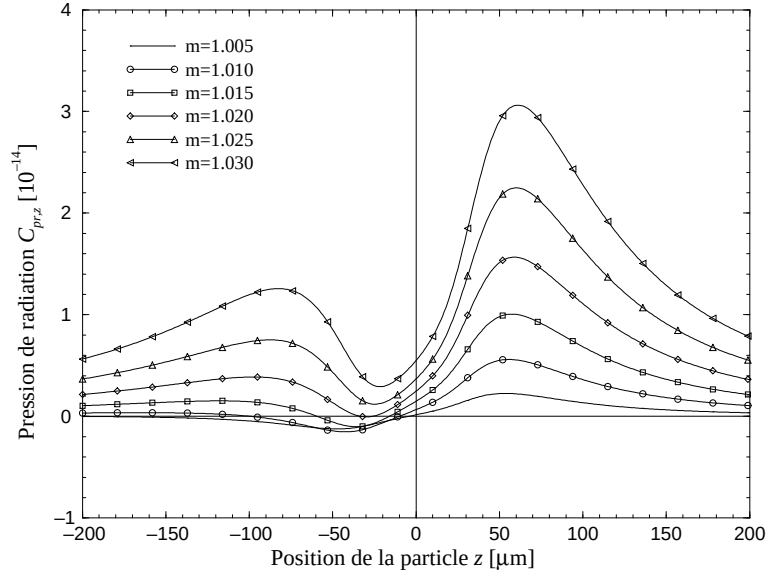


Figure 8.11: Pression de radiation longitudinale du faisceau gaussien à l'ordre L^3 en fonction de la position de la particule pour différents indices de réfraction: le rayon de la particule $a = 3,75 \mu\text{m}$, la longueur d'onde $\lambda = 0,3682 \mu\text{m}$, le rayon du col $w_0 = 1,8 \mu\text{m}$

8.2.2 Cas du faisceau feuille laser

Dans ce paragraphe on discute les sections efficaces et les pressions de radiation lorsqu'une particule est éclairée par un faisceau feuille laser en comparant avec celles du faisceau gaussien.

La figure 8.13 montre la section d'extinction en fonction du diamètre de la particule lorsqu'elle est éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien circulaire du rayon au col $w_0 = 10 \mu\text{m}$ ou un faisceau feuille laser des axes au col $w_{0x} = 10 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 100 \mu\text{m}$. La particule d'eau (indice de réfraction $m=1,33$) se situe au centre du faisceau. La longueur d'onde du faisceau incident est de $0,5 \mu\text{m}$. On trouve que la courbe correspondant au faisceau feuille laser est encore située entre celles de l'onde plane et du faisceau gaussien. Cela peut être appliqué pour étendre le domaine dynamique.

Les figures 8.14 - 8.17 sont présentées pour comparer les pressions de radiation longitudinales et les résonances associées d'un faisceau gaussien et d'un faisceau feuille laser, celles du faisceau gaussien ont été discutées exhaustivement dans notre article [91].

Dans les figures 8.14 et 8.15, on présente les pressions de radiation longitudinales pour trois particules ayant des rayons proches: $4,954 \mu\text{m}$, $4,977 \mu\text{m}$ et $5,0195 \mu\text{m}$, correspondant aux paramètres de particules de $\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda} = 29,365$, $29,50$ et $29,753$, notés ici A, B et C respectivement. L'indice de réfraction est $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$. Elles traversent un faisceau gaussien circulaire ($w_0 = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$) parallèlement ou perpendiculairement à la direction de polarisation. Ces particules possèdent une résonance électrique, pas de résonance ou une résonance magnétique. Les différences entre les trois particules sont très importantes. Notez la résonance de la particules A et C avec la

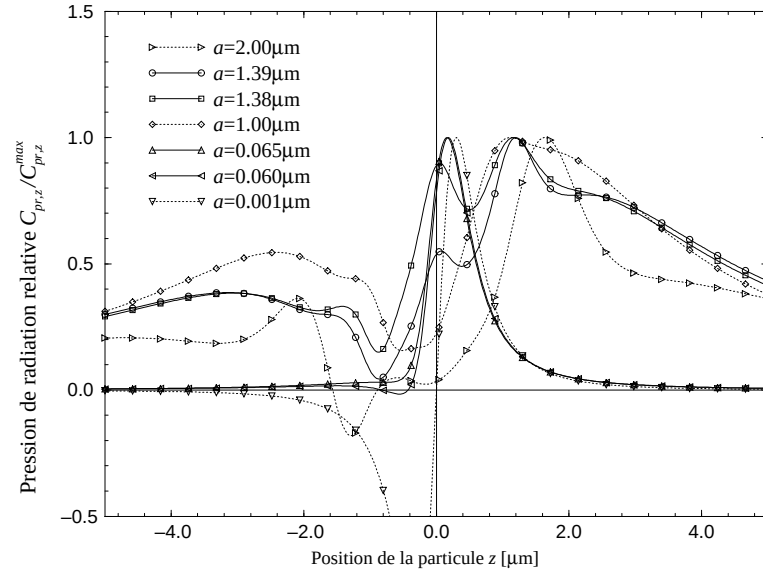


Figure 8.12: Pression de radiation longitudinale du faisceau gaussien à l'ordre L^3 en fonction de la position de la particule pour différentes tailles de particule: l'indice de réfraction $m = 1,5$, la longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, le rayon du col $w_0 = 0,25 \mu\text{m}$

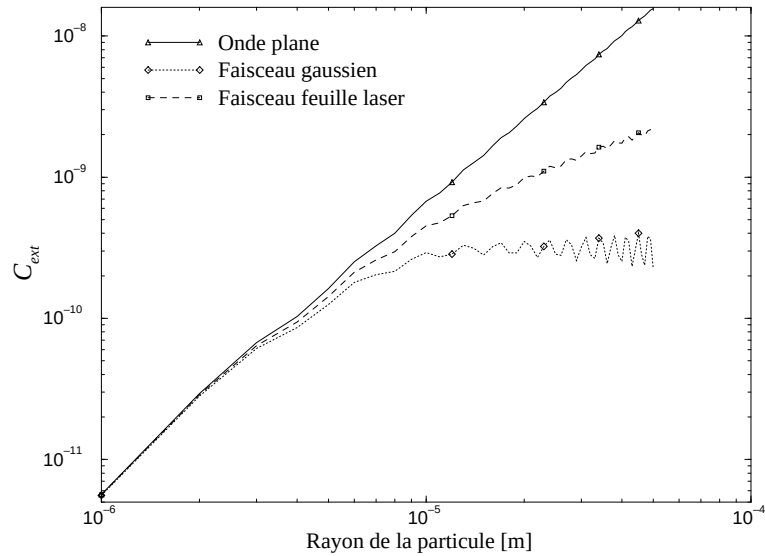


Figure 8.13: Section efficace d'extinction en fonction du rayon de la particule de l'indice de réfraction $m = 1,33$ éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien de rayon du col $w_0 = 10 \mu\text{m}$, ou un faisceau feuille laser des longueurs des axes au col $w_{0x} = 10 \mu\text{m}$, $w_{0y} = 100 \mu\text{m}$, longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

polarisation du faisceau.

Les figures 8.16 et 8.17 représentent les pressions de radiations pour les mêmes particules lorsqu'elles traversent un faisceau feuille laser, avec des axes au col $w_{0x} = 20 \mu\text{m}$ et $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$ ou $w_{0x} = 2 \mu\text{m}$ et $w_{0y} = 20 \mu\text{m}$, parallèlement ou perpendiculairement à la direction de polarisation respectivement.

Nous notons premièrement que la pression de radiation décroît monotonement lorsque la particule traverse le faisceau dans la direction du grand axe au col. Par contre, lorsqu'elle le traverse dans la direction du petit axe au col, la valeur de $C_{pr,z}$ atteint un maximum en $x_0 = 4,5 \mu\text{m}$ ou $y_0 = 4,5 \mu\text{m}$ sur les figures 8.16 et 8.17 respectivement. Cela correspondent aux points maximaux sur les figures 8.14 et 8.15. De plus, on trouve aussi que l'amplitude de la résonance pour le faisceau feuille laser est

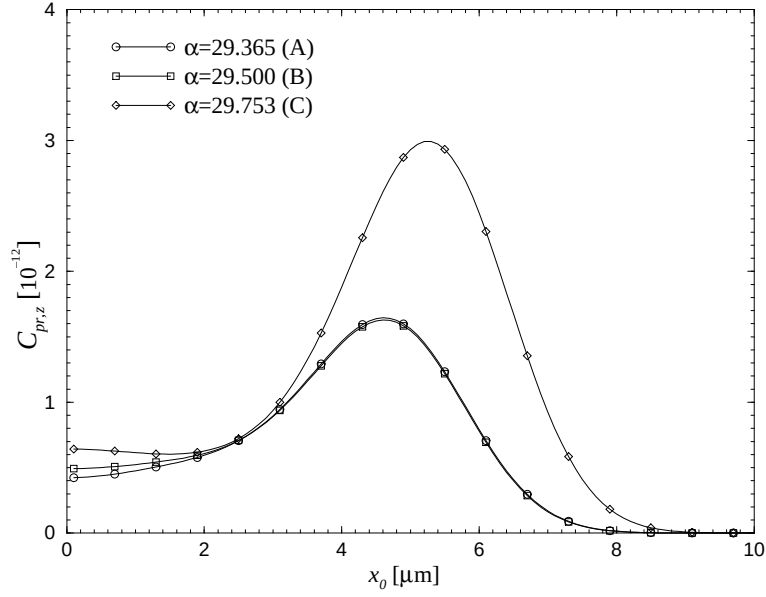


Figure 8.14: Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, parallèlement à la polarisation, un faisceau gaussien circulaire de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, de rayon du col $w_0 = 2 \mu\text{m}$

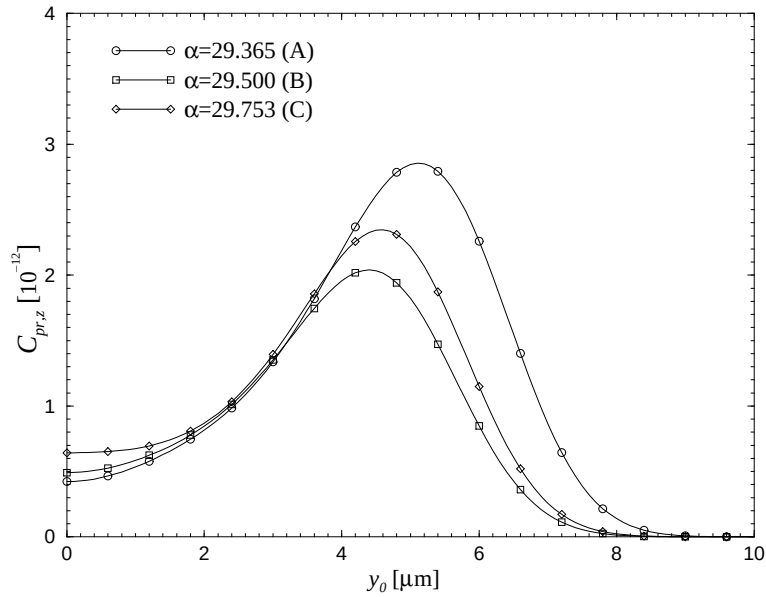


Figure 8.15: Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, perpendiculairement à la polarisation, un faisceau gaussien circulaire de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, de rayon du col $w_0 = 2 \mu\text{m}$

moins forte que pour le faisceau gaussien circulaire. Par exemple, le rapport de $C_{pr,z}$ à la résonance sur celui au centre du faisceau est d'environ 5 pour la particule A dans un faisceau gaussien (figure 8.15), mais seulement d'environ 2 pour le faisceau feuille laser (figure 8.17).

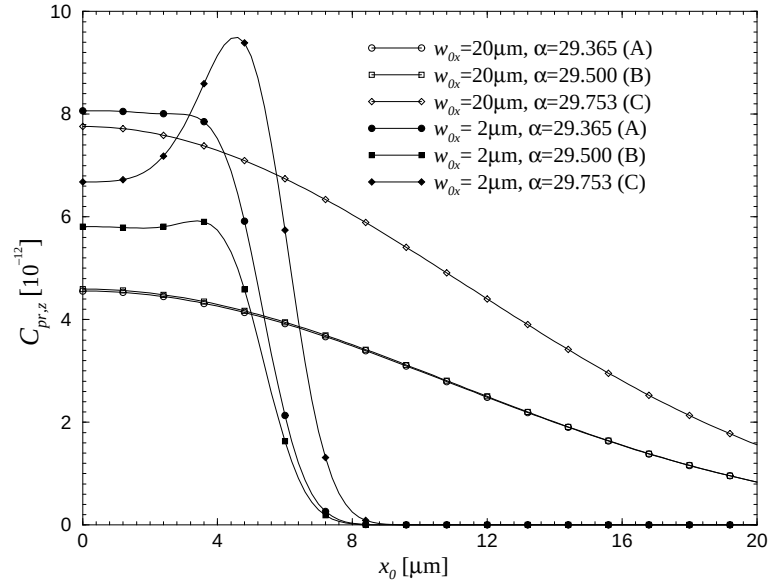


Figure 8.16: Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse, parallèlement à la polarisation, un faisceau feuille laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu m$

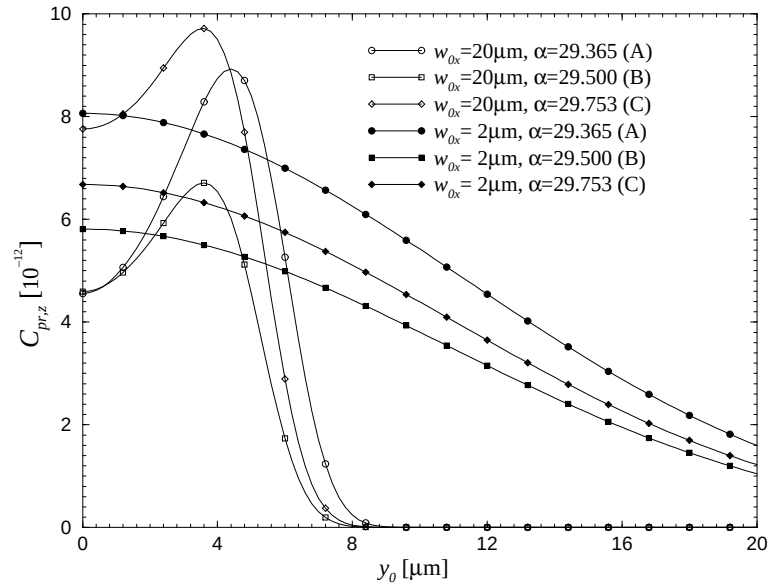


Figure 8.17: Pression de radiation longitudinale en fonction de la position de la particule d'indice $m = 1,33 - 5,0 \times 10^{-6}i$ qui traverse perpendiculairement à la polarisation, un faisceau feuille laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu m$

8.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a comparé les comportements du champ diffusé par une particule lorsqu'elle est éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien ou un faisceau feuille laser. On trouve que les comportements du faisceau feuille laser correspondent aux propriétés de l'onde plane dans la direction du grand axe, et à celles du faisceau gaussien dans la direction du petit axe lorsque le rayon du col du faisceau gaussien est égal au petit axe au col du faisceau feuille laser.

Les effets de la position de la particule et de la polarisation du faisceau ont été étudiés. Pour une

particule plus grosse que le petit axe du faisceau, lorsque la particule se situe sur l'axe du faisceau, la lumière diffusée est plus forte pour la particule hors plan du col que pour la particule dans le plan. La polarisation n'influence peu sur le diagramme de la diffusion sauf pour certains angles.

L'étude des *sections efficaces* d'extinction, de diffusion et de pression de radiation montre que les propriétés du faisceau feuille laser sont intermédiaire entre celles de l'onde plane et du faisceau gaussien, et que les amplitudes à la résonance pour un faisceau feuille laser sont moins fortes que pour un faisceau gaussien avec un rayon au col égal au petit axe au col du faisceau feuille laser. La pression de radiation longitudinale négative est aussi prévue pour un faisceau gaussien hyperfocalisé. Ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement.

Chapter 9

Evaluation d'un Système de Mesure Réel

Nous appliquons dans ce chapitre la théorie développée pour la diffusion du faisceau feuille laser à un système de mesure réel à deux faisceaux – le système DCW (Dual-cylindrical Wave) – développé à l'université d'Erlangen en Allemagne. Nous avons choisi ce système parce qu'il a été étudié par la théorie de Lorenz-Mie et l'optique géométrique, et les données expérimentales sont bien documentées.

Ce système est basé sur un volume de mesure mince composé de franges non-uniformes créé à partir de deux faisceaux feuilles laser. Il permet de mesurer la taille, la vitesse et l'indice de réfraction de la particule à partir des fréquences des signaux diffusés.

Après l'introduction de la théorie de la diffusion de la lumière de deux faisceaux (section 9.1) et la description du principe de ce système (section 9.2), nous présentons les signaux simulés par trois différentes méthodes: la théorie de Lorenz-Mie, l'optique géométrique et la TLMG en comparant avec les résultats expérimentaux (section 9.3). La TLMG retrouve quasiment les résultats expérimentaux, alors que les approches par l'optique géométrique ou la TLM faisaient apparaître un désaccord pouvant atteindre 20% pour de faibles angles de diffusion.

9.1 Théorie de la diffusion de deux faisceaux

9.1.1 Description générale du problème

On considère une particule éclairée par deux faisceaux se propageant dans le même plan. La géométrie est schématisée sur la figure 9.1. $(O; X, Y, Z)$ est le système de coordonnées principale. Deux repères cartésiens $(O_1; x_1, y_1, z_1)$ et $(O_2; x_2, y_2, z_2)$ sont choisis pour décrire les faisceaux incidents. Les axes O_1x_1 et O_2x_2 sont parallèles à OX , et les axes O_1y_1 , O_1z_1 , O_2y_2 et O_2z_2 sont dans le plan OYZ du système de coordonnées principale avec des angles θ_1 et θ_2 . Les axes de deux repères $(O_P; x_{p1}, y_{p1}, z_{p1})$ et $(O_P; x_{p2}, y_{p2}, z_{p2})$ attachés à la particule qui est à l'origine sont respectivement parallèles aux deux repères $(O_1; x_1, y_1, z_1)$ et $(O_2; x_2, y_2, z_2)$. Les faisceaux, dont les centres se situent sur l'axe OY en $y = s_1$ et $y = s_2$, se propagent dans les directions Oz_1 et Oz_2 respectivement et sont polarisés dans la direction OX . Les coordonnées des centres des faisceaux dans les repères de la particule sont:

$$\begin{cases} x_{0j} = -X_0 \\ y_{0j} = -(Y_0 - s_j) \cos \theta_j - Z_0 \sin \theta_j \\ z_{0j} = +(Y_0 - s_j) \sin \theta_j - Z_0 \cos \theta_j \end{cases} \quad (9.1)$$

où $j = 1, 2$ correspondent aux faisceau 1 ou faisceau 2, (X_0, Y_0, Z_0) sont les coordonnées de la particule dans le repère principal.

Le système de coordonnées de détecteurs $(O_l; x_l, y_l, z_l)$, dont l'origine est sur l'axe OZ en $Z = Z_l$, est obtenu par une rotation sur l'axe O_lY' d'un angle ϕ_d (angle hors-axe) et une rotation sur l'axe

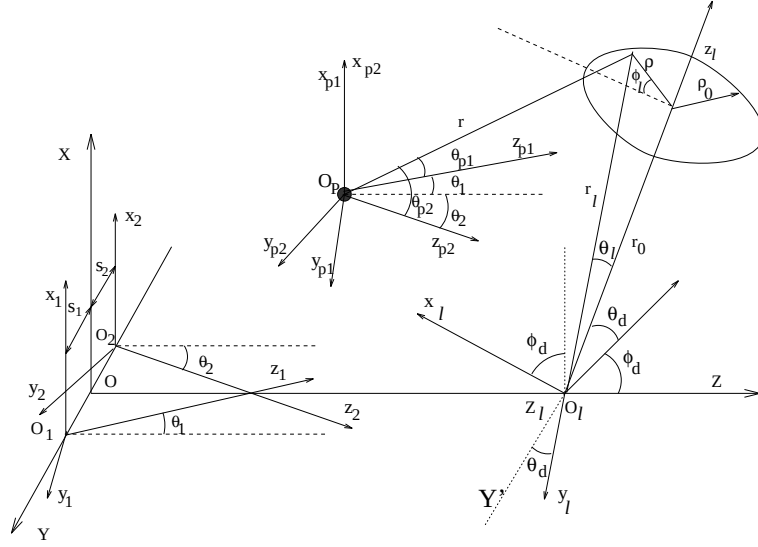


Figure 9.1: Géométrie du système de diffusion de la lumière de deux faisceaux

$O_l x_l$ d'un angle θ_d (angle d'élévation) où Y' est parallèle à Y et x_l parallèle à X avant les rotations. Un détecteur circulaire de rayon ρ_0 est situé sur l'axe $O_l z_l$ en $z_l = r_0$ avec une surface perpendiculaire à cet axe. Les coordonnées d'un point à la surface (r_0, ρ, ϕ_l) dans les repères de la particule peuvent être obtenus par:

$$\begin{pmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \\ z_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - X_0 \\ (y - Y_0) \cos \theta_j + (z - Z_0 + Z_l) \sin \theta_j \\ (y - Y_0) \sin \theta_j + (z - Z_0 + Z_l) \cos \theta_j \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_d & 0 & -\sin \phi_d \\ \sin \theta_d \sin \phi_d & \cos \theta_d & \sin \theta_d \cos \phi_d \\ \cos \theta_d \sin \phi_d & -\sin \theta_d & \cos \theta_d \cos \phi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi_l \\ \rho \sin \phi_l \\ r_0 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

9.1.2 Puissance collectée

Le champ diffusé de la particule éclairée par deux faisceaux est la superposition des vecteurs du champ diffusé de chaque faisceau:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{\theta 1} + \mathbf{E}_{\phi 1} + \mathbf{E}_{\theta 2} + \mathbf{E}_{\phi 2} \quad (9.4)$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{\theta 1} + \mathbf{H}_{\phi 1} + \mathbf{H}_{\theta 2} + \mathbf{H}_{\phi 2} \quad (9.5)$$

Le vecteur de Poynting est donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2Z_0} (G + H) \mathbf{r}_0 \\ &= \frac{1}{2Z_0} \{ |E_{\theta 1}|^2 + |E_{\phi 1}|^2 + |E_{\theta 2}|^2 + |E_{\phi 2}|^2 \\ &\quad + 2 \sin \alpha \operatorname{Re}(E_{\phi 1} E_{\theta 2}^* - E_{\theta 1} E_{\phi 2}^*) + 2 \cos \alpha \operatorname{Re}(E_{\theta 1} E_{\theta 2}^* + E_{\phi 1} E_{\phi 2}^*) \} \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

où $\mathbf{r}_0$ est un vecteur unité du centre de la particule au point d'observation, θ_j et ϕ_j sont les coordonnées sphériques du point d'observation dans les repères de la particule, $Z_0 = \frac{E_0}{H_0}$, et α est défini par:

$$\cos \alpha = \sin \phi_{p1} \sin \phi_{p2} + \cos \phi_{p1} \cos \phi_{p2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (9.7)$$

Par conséquent, on obtient la puissance collectée par le détecteur:

$$P_s = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \cos \beta I_s \rho d\rho d\phi \quad (9.8)$$

où l'intensité $I_s = |\mathbf{S}|$ et:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sin \theta_{p1} \cos \phi_{p1} \cos \theta_d \sin \phi_d \\ &+ \cos \theta_{p1} (\cos \theta_{p1} \cos \theta_d \cos \phi_d - \sin \theta_{p1} \sin \phi_{p1} \sin \theta_d) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Lorsque la particule est en mouvement avec une vitesse $\mathbf{u}$, I_s devient:

$$I_s = \frac{I_0}{k^2 r^2} [G + 2(H_r \cos \omega_D t - H_i \sin \omega_D t)] \quad (9.10)$$

avec

$$G = |\mathcal{S}_{2,1}|^2 + |\mathcal{S}_{1,1}|^2 + |\mathcal{S}_{2,2}|^2 + |\mathcal{S}_{1,2}|^2 \quad (9.11)$$

$$H_r = \cos \alpha (\mathcal{S}_{2,1} \mathcal{S}_{2,2}^* + \mathcal{S}_{1,1} \mathcal{S}_{1,2}^*) \quad (9.12)$$

$$H_i = \sin \alpha (\mathcal{S}_{1,1} \mathcal{S}_{2,2}^* - \mathcal{S}_{2,1} \mathcal{S}_{1,2}^*) \quad (9.13)$$

où le shift hétérodyne doppler de la pulsation est:

$$\omega_D = \frac{2\pi}{\lambda} [-u_y (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + u_z (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)] \quad (9.14)$$

et $\mathcal{S}_{1,j}, \mathcal{S}_{2,j}$ sont les amplitudes des champs diffusés respectivement du faisceau 1 et du faisceau 2 définis par:

$$E_{\theta j} = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr + i\omega t) \mathcal{S}_{2j} \quad H_{\theta j} = -\frac{H_0}{E_0} E_{\phi j} = -\frac{1}{Z_0} E_{\phi j} \quad (9.15)$$

$$E_{\phi j} = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr + i\omega t) \mathcal{S}_{1j} \quad H_{\phi j} = \frac{H_0}{E_0} E_{\theta j} = \frac{1}{Z_0} E_{\theta j} \quad (9.16)$$

Les expressions des $E_\theta, E_\phi, H_\theta$ et H_ϕ sont données dans le chapitre 8.

9.2 Principe du système DCW

Le système DCW est une variante de l'interferométrie phase doppler qui sert à mesurer la taille de la particule par l'écart de phase des signaux diffusés [32] [79] [78]. Le volume de mesure dans le système de phase doppler est réalisé par intersection de deux faisceaux gaussien circulaires dont les centres sont localisés au même endroit. Il en résulte un système de franges presque parallèles. Par contre, les faisceaux dans le système DCW sont remplacés par deux faisceaux feuilles laser (désigné par "cylindrical wave" – onde cylindrique – dans les références [79] [76]) dont les centres sont séparés par une distance s_b qui est souvent beaucoup plus grande que le petit axe au col du faisceau. Par conséquent, les franges ne sont plus parallèles, elles sont fonction de la distance par rapport aux centres des faisceaux dans la direction de propagation. Cette modification a été démontrée avoir les avantages de simplifier le traitement des signaux et d'éviter l'ambiguïté de 2π sur la phase, rencontrée dans la mesure du système de phase doppler. Une extension du système DCW a été aussi proposée pour reconnaître le nature de la particule [76].

La géométrie du système DCW est schématisé sur la figure 9.2. L'interférence des faisceaux feuilles laser engendre des franges en éventail (figure 9.3). La lumière diffusée par les particule en traversant

les frange est collectée par deux détecteurs: Le détecteur 1, situé verticalement au plan de frange, est utilisé pour mesurer le signal de référence, dont la fréquence (désigné par la fréquence doppler) est admise directement proportionnelle à la vitesse de la particule et indépendante de la taille de celle-ci. Le détecteur 2 est localisé dans le plan perpendiculaire au plan de franges avec un angle ϕ_d par rapport à la direction de propagation des faisceaux. Cet angle est équivalent à l'angle hors-axe en terme de technique phase doppler. La fréquence mesurée par le détecteur 2 dépend non seulement de la vitesse de la particule, mais aussi de l'angle hors-axe, de la taille et de la nature de la particule. Cette dépendance permet de mesurer la taille, la nature et la vitesse de la particule à partir de la fréquence. Les angles d'élévation de ces deux détecteurs sont tous les deux nuls, puisque ceux-ci sont dans le plan perpendiculaire au plan de franges et coupent ce plan symétriquement.

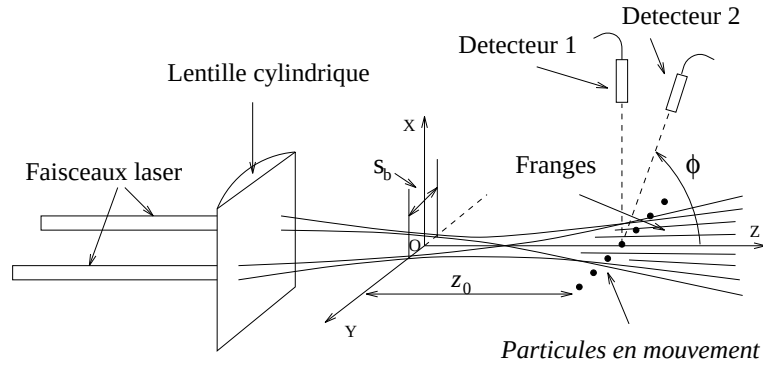


Figure 9.2: Géométrie du system DCW

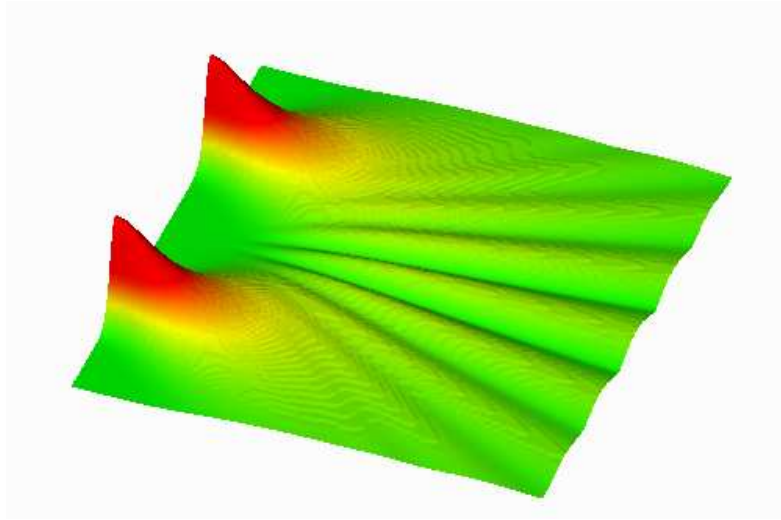


Figure 9.3: Interfranges de deux faisceaux feuilles laser

Lorsque la vitesse de la particule dans la direction z est nulle, la valeur caractéristique de la fréquence doppler mesurée par le détecteur 1, selon l'optique physique en traitant les deux faisceaux comme des ondes cylindriques idéales, est [77]:

$$f_d = \frac{s_b u}{\lambda z_0} \left[1 - \frac{s_b^2}{8z_0^2} + \dots \right] \quad (9.17)$$

où s_b est la distance entre les centres des deux faisceaux, u la vitesse de la particule dans la direction y , λ la longueur d'onde, z_0 la distance de la particule aux centres des faisceaux dans la direction de propagation.

La puissance de diffusion mesurée par le détecteur 2 peut s'exprimer avec la formule suivante:

$$P_s = \bar{P}_s(t) \{1 + V(t) \cos[2\pi f_d t + \Phi_a(t)]\} \quad (9.18)$$

où $\bar{P}_s$ et V présentent le piédestal, et la visibilité du signal respectivement. Le phase anisotropique Φ_a varie selon le temps. La fréquence du signal est donc:

$$f = f_d + f_a = f_d + \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_a}{dt} \quad (9.19)$$

où f_a est la fréquence anisotropique. Ces signaux peuvent être simulés par l'optique géométrie, la théorie de Lorenz-Mie et la TLMG.

9.3 Signaux simulés par la TLMG et discussion

Naqwi et al ont comparé leurs résultats expérimentaux et simulés par l'optique géométrique et la théorie de Lorenz-Mie pour le système DCW [78]. Ils ont trouvé que l'accord entre les résultats expérimentaux et théoriques est bon pour un angle hors-axe grand, mais que pour un angle hors-axe petit, l'écart était important. On applique dans cette section la TLMG pour simuler les signaux du système DCW et comparer avec les résultats de la simulation de l'optique géométrique et de la TLM.

On considère deux faisceaux feuilles laser se propageant parallèlement l'un à l'autre dans la direction z dont les centres sont localisés en $y_1 = -10 \mu\text{m}$ et $y_1 = 10 \mu\text{m}$ respectivement. Les deux axes au col des faisceaux sont tous les deux $w_{0x} = 3000 \mu\text{m}$ et $w_{0y} = 2 \mu\text{m}$. La particule se déplace dans le plan Oyz perpendiculairement à l'axe z avec une distance de $200 \mu\text{m}$ par rapport aux centres des faisceaux et une vitesse $u = 0.1\text{m/s}$.

La figure 9.4 montre les signaux simulés par la TLMG pour une goutte de verre d'indice de réfraction $m=1,55$, de rayon de $0,5 \mu\text{m}$, et mesurés pour différents angles hors-axe, tandis que la figure 9.5 montre les signaux simulés pour des particules de verre de différentes tailles et mesurés avec un angle hors-axe de 90° . On trouve que les fréquences des signaux mesurées pour les angles de 10° et 90° d'une part, et pour les particules de $0,5 \mu\text{m}$ et $20 \mu\text{m}$ de rayons d'autre part sont très différentes.

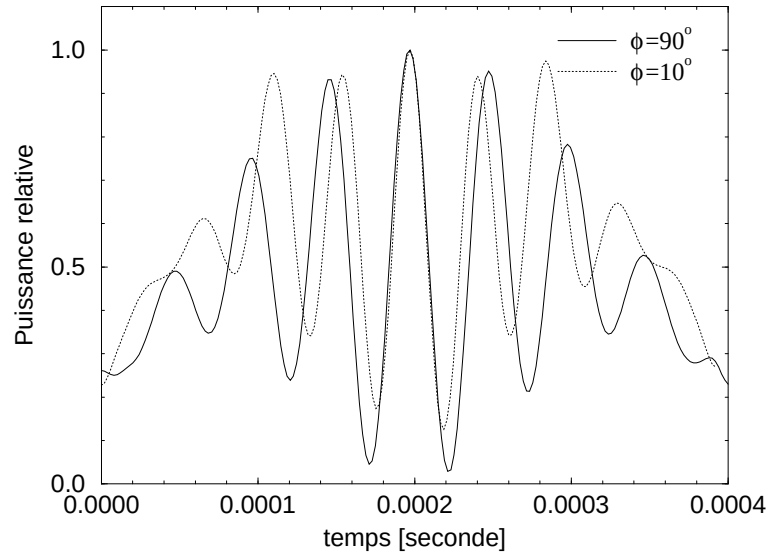


Figure 9.4: Deux signaux simulés par la GLMT pour les angles hors-axe de 10° et 90°

Les simulations pour différents angles hors-axe et différentes tailles de particules montrent que les résultats de l'optique géométrique, la TLM et la TLMG sont en accord pour les petites particules et les grands angles hors-axe. Mais pour les grosses particules et petits angles hors-axes l'écart entre la TLMG et la TLM ou l'optique géométrique est important. Sur la figure 9.6, on compare les signaux

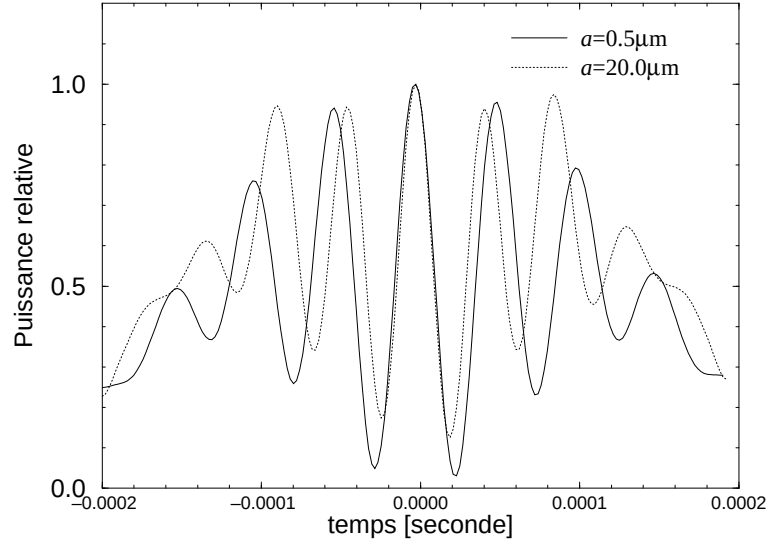


Figure 9.5: Deux signaux simulés par la GLMT pour les particules de rayons de $0,5 \mu\text{m}$ et $20,0 \mu\text{m}$

simulés par les trois méthodes pour une particule de rayon de $20 \mu\text{m}$ avec l'angle hors-axe de 10° , et on trouve que la fréquence du signal simulé par la TLMG est plus élevée que celles de la TLM et de l'optique géométrique. De plus, la forme des signaux et les amplitudes des franges sont aussi différentes, surtout au bord des signaux.

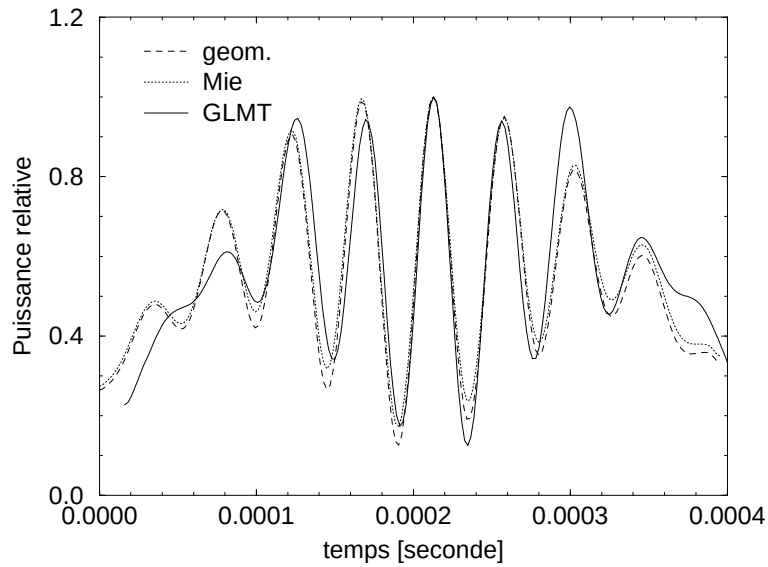


Figure 9.6: Signaux simulés par trois différents méthodes pour l'angle hors-axe de 10°

Dans le tableau 9.1, on compile les fréquences f mesurées à partir des signaux simulés et les rapports des fréquences anisotropiques sur celles de doppler mesurées pour l'angle hors-axe de 90° , qui sont un peu différentes des fréquences prévues par l'équation (9.17). Les fréquences sont les fréquences typiques obtenues par la transformé de Fourier à partir des signaux simulés. On trouve que les fréquences des signaux simulés par les trois différents méthodes sont presque identiques pour les petites particules ou les grands angles hors-axes. Tandis que pour les grosses particules et petits angles hors-axes, les fréquences mesurées à partir des signaux simulés par la TLMG sont plus élevées que celles prévues par la TLM ou l'optique géométrique.

Naqwi et al ont comparé les résultats expérimentaux et ceux simulés avec l'optique géométrique et

Table 9.1: Fréquences mesurées à partir des signaux simulés par différentes méthodes

diam.	méthods	fréquences f				f_a/f_d		
		10°	30°	80°	90°	10°	30°	80°
1 μm	géom.	19405	19394	19347	19271	0,0070	0,0064	0,0039
	Mie	19366	19420	19349	19274	0,0048	0,0076	0,0039
	GLMT	19346	19485	19379	19449	-0,0053	0,0019	-0,0036
10 μm	géom.	19914	19896	19423	19269	0,0335	0,0325	0,0080
	Mie	19527	19891	19420	19282	0,0127	0,0316	0,0072
	GLMT	19881	20000	19466	19555	0,0167	0,0228	-0,0046
20 μm	géom.	20741	20471	19511	19264	0,0767	0,0627	0,0128
	Mie	20664	20513	19505	19294	0,0710	0,0632	0,0109
	GLMT	21439	20240	19499	19413	0,1044	0,0426	0,0044
40 μm	géom.	21982	21461	19717	19297	0,1391	0,1121	0,0218
	Mie	21976	21467	19740	19350	0,1357	0,1094	0,0202
	GLMT	22753	21751	19680	19519	0,1657	0,1144	0,0082

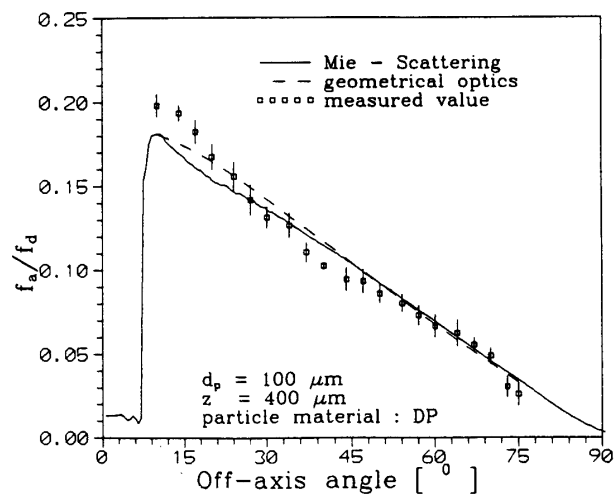
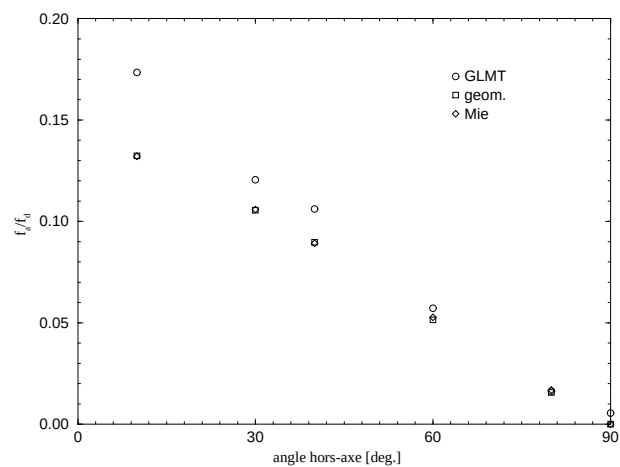


Figure 9.7: Résultats expérimentaux et simulés de Naqwi et al

Figure 9.8: Rapport des fréquences f_a/f_d simulés par trois méthodes

TLM. Ils trouvent que généralement les rapports f_a/f_d théoriques sont plus élevés que ceux mesurés expérimentalement. Dans la figure 9.7 sont reproduits leurs résultats [78] pour une particule de “diethyl phthalate” ($m = 1.5$), de rayon 50μ m avec $z_0 = 400\mu$ m. La figure 9.8 présente les rapports f_a/f_d pour une particule de rayon 20μ m donnés dans le tableau 9.1. On trouve que l'écart de f_a/f_d entre TLMG et l'optique géométrique ou TLM pour $\phi_d = 10^\circ$ est 20% qui correspond bien à l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux prévues par la TLM ou l'optique géométrique. Cela peut être expliqué par le fait que l'optique géométrique ne prend pas en compte l'effet de la diffraction, et que la TLM traite le faisceau comme une onde plane en négligeant l'éclairement non-uniforme sur la particule. Par contre, la TLMG est une théorie rigoureuse prenant en compte tous les effets de l'interaction entre le faisceau et la particule.

9.4 Conclusion

La théorie de la diffusion de deux faisceaux par une particule basée sur la TLMG est présentée et appliquée à évaluer le système double onde cylindrique DCW, un système de mesure réel utilisé pour mesurer la taille, la vitesse et la nature de la particule par la fréquence de la lumière diffusée.

Les résultats simulés montre que la TLMG est meilleure par rapport à la TLM et l'optique géométrie pour ce système. La TLMG retrouve quasiment les résultats expérimentaux, avec un écart de 20% entre ces résultats et ceux obtenus théoriquement par la LMT ou l'optique géométrie.

Chapter 10

Imagerie d'une Particule Eclairée par un Faisceau laser

Ce chapitre est relié à l'étude de l'imagerie d'une particule par un système optique.

Après avoir rappelé les bases théoriques de l'approche (section 10.1), le modèle et le code associé sont testés en trois étapes (section 10.2): 1. vérifier dans le cas de la diffraction de Fraunhofer; 2. comparer les résultats analytiques et simulés pour une onde plane focalisée par une lentille mince, 3. comparer les résultats simulés et expérimentaux de l'image d'une particule éclairée par un faisceau gaussien. Puis l'étude de l'image d'une goutte simulé pour un faisceau incident parallèle et perpendiculaire à l'axe optique par la TLMG est présentée (section 10.3).

L'étude du cas où la direction de propagation du faisceau est confondu avec l'axe optique du système d'imagerie est entreprise pour un faisceau onde plane, gaussien circulaire, et feuille laser (section 10.3.1).

Puis l'étude du cas où l'axe du faisceau d'éclairage diffère de l'axe optique du système d'imagerie est entreprise (section 10.3.2). Les résultats sont limités à une collection à 90° par rapport à l'axe de propagation du faisceau car cette géométrie correspond à nombreux dispositifs expérimentaux, dont la PIV (Particle Image velocimetry) est le modèle le plus élaboré. Cependant l'étude d'autre angle de collection revient à changer des paramètres d'entrée du code.

10.1 Théorie d'imagerie d'une particule

Le système considéré dans ce chapitre est schématisé sur la figure 10.1. Une particule est éclairée par un faisceau laser. La lumière diffusée est collectée par une lentille mince juste après une ouverture.

L'ouverture, la lentille et le plan image ont un même axe de l'axe OZ du repère principale ($O; X, Y, Z$). Par contre, l'orientation et la situation du faisceau peuvent être quelconque et la particule peut se situer arbitrairement dans le faisceau.

Le champ électrique dans le plan image (plan Z_3) peut être exprimé à partir du champ dans le plan Z_2 , situé à la distance z_{32} de celui-ci, d'après le principe de Huygens-Fresnel [34] pp54-55:

$$\mathbf{E}_3(x_3, y_3) = \frac{i}{\lambda} \iint_A \mathbf{E}_2(x_2, y_2) \frac{\exp(-ikr_{32})}{r_{32}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{32}) dx_2 dy_2 \quad (10.1)$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur unité perpendiculaire au plan Z_3 et la distance entre un point dans plan Z_2 et un point dans plan Z_3 est

$$r_{32} = \sqrt{z_{32}^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (10.2)$$

où $x_i, y_i (i = 2, 3)$ sont les coordonnées des points dans les plans correspondants. De plus, on admet que le champ électrique est identiquement nul en dehors de l'ouverture A .

Si la distance z_{32} entre l'ouverture et le plan image est bien plus grande que la plus grande dimension linéaire de l'ouverture, que dans le plan image, on ne s'intéresse qu'à une région finie située

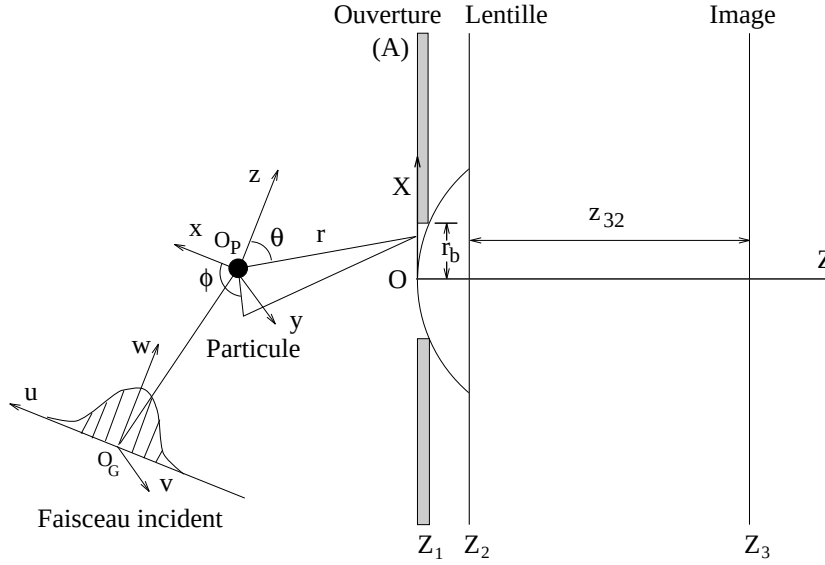


Figure 10.1: Géométrie du système d'imagerie

autour de l'axe Z et que la distance z_{32} est aussi bien plus grande que la plus grande dimension linéaire de cette région, le facteur d'obliquité est sensiblement égal à l'unité, soit:

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{32}) \simeq 1 \quad (10.3)$$

L'écart dû à cette approximation est inférieur à 5% si l'angle $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{32})$ n'exède pas 18° .

Pour obtenir la relation entre le champ juste après la lentille et celui incident sur le plan d'ouverture, on suppose que la lentille est diélectrique et qu'elle ne change que la phase du champ. L'approche la plus simple est probablement d'utiliser la transformation de la lentille mince comme celle présentée par Goodman [34] p76:

$$\mathbf{E}_2(r_2, \phi_2) = \mathbf{E}_1(r_1, \phi_1) \exp(-ikn_0\Delta_0) \exp\left(\frac{ikr_1^2}{2f}\right) \quad (10.4)$$

où Δ_0 est l'épaisseur de la lentille, n_0 l'indice de réfraction de la lentille et f sa focale. $r_i, \phi_i (i = 1, 2)$ sont les coordonnées des points dans les plans Z_1 et Z_2 . Dans cette expression, la lentille est supposée mince si bien que l'amplitude du champ dans le plan Z_2 est égal à celle dans le plan Z_1 , aucune perte d'énergie lumineuse par réflexion, réfraction et absorption n'est prise en compte si bien que l'on a $r_2 = r_1$ et équation (10.1) devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(x_3, y_3) &= \frac{i \exp(-ikn\Delta_0)}{\lambda} \\ &\times \int \int_A \mathbf{E}_1(x_1, y_1) \frac{\exp[-ik(r_{32} - r_1^2/2f)]}{r_{32}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{32}) dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Le champ électrique dans le plan Z_1 est composé du champ incident $\mathbf{E}_1^i$ et du champ diffusé [47]. Celui-ci est un champ quasi-sphérique et peut s'écrire comme:

$$\mathbf{E}_1^s = \mathbf{E}_{sph} \exp(-ikr) \quad (10.6)$$

où r est la distance entre la particule et le point dans le plan Z_1 . Par conséquent, l'intensité du champ dans le plan image peut être calculée par l'intégration suivante:

$$I_3 = \frac{1}{\lambda^2} \left| \int \int_A \left\{ \mathbf{g}_1(r_1, \phi_1) e^{if_1(r_1, \phi_1)} + \mathbf{g}_2(r_1, \phi_1) e^{if_2(r_1, \phi_1)} \right\} dr_1 d\phi_1 \right|^2 \quad (10.7)$$

où $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, f_1$ et f_2 sont toutes des fonctions à variation lente:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{r_1 \mathbf{E}_1^i}{r_{32}} \quad f_1 = -k \left(r_{32} - \frac{r_1^2}{2f} \right) \quad (10.8)$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{r_1 \mathbf{E}_{sph}}{r_{32}} \quad f_2 = -k \left(r_{32} + r_{10} - \frac{r_1^2}{2f} \right) \quad (10.9)$$

et

$$r_{10} = \sqrt{z_{p0}^2 + (r_1 \cos \phi_1 - x_{p0})^2 + (r_1 \sin \phi_1 - y_{p0})^2} \quad (10.10)$$

$$r_{32} = \sqrt{z_{32}^2 + r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\phi_1 - \phi_3)} \quad (10.11)$$

x_{p0}, y_{p0} et z_{p0} sont les coordonnées du centre de la particule O_P dans le repère principal.

Cette intégration est effectuée efficacement suivant l'approche introduite par Hopkins [59][102], pour chaque composante du champ.

Pour calculer les champs diffusés dans le plan Z_1 , deux repères complémentaires sont nécessaires:

Le système de la particule ($O_P; x, y, z$): il est obtenu à partir du repère principal par une translation de l'origine à (x_{p0}, y_{p0}, z_{p0}) , trois rotations, d'angle ϕ_b sur l'axe z , d'angle θ_b sur l'axe y' et d'angle ψ_b sur l'axe z'' où y' et z'' sont les axes provisoires des axes y et z après une et deux rotations respectivement.

Le système du faisceau ($O_G; u, v, w$): ses axes sont tous parallèles à ceux du système de la particule et son origine est localisé à (x_0, y_0, z_0) par rapport au repère $(O_P; x, y, z)$.

Les coordonnées d'un point dans plan Z_1 (plan d'ouverture ou juste avant la lentille) (x_1, y_1) , dans le repère de la particule, sont obtenus par les transformations suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 - x_{p0} \\ y_1 - y_{p0} \\ -z_{p0} \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

$$R(\phi_b, \theta_b, \psi_b) = \begin{pmatrix} \cos \phi_b \cos \theta_b \cos \psi_b - \sin \phi_b \sin \psi_b & \sin \phi_b \cos \theta_b \cos \psi_b + \cos \phi_b \sin \psi_b & -\sin \theta_b \cos \psi_b \\ -\cos \phi_b \cos \theta_b \sin \psi_b - \sin \phi_b \cos \psi_b & -\sin \phi_b \cos \theta_b \sin \psi_b + \cos \phi_b \cos \psi_b & \sin \theta_b \sin \psi_b \\ \cos \phi_b \sin \theta_b & \sin \phi_b \sin \theta_b & \cos \theta_b \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

En outre, les relations entre les coordonnées sphériques et cartésiennes:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

est aussi utiles.

10.2 Validation du modèle et du code

Dans cette section, le modèle d'imagerie et le code associé sont testés dans les cas de la diffraction de Fraunhofer, d'une onde plane focalisée par une lentille mince, et de l'image d'une particule éclairée par un faisceau gaussien.

D'abord, selon la diffraction de Fraunhofer, lorsqu'une onde plane heurte une ouverture circulaire de rayon r_b , l'intensité dans un plan loin de l'ouverture est:

$$I = I_0 \left| \frac{kr_b^2}{R} \frac{J_1(kr_b \sin \theta')}{kr_b \sin \theta'} \right|^2 \quad (10.15)$$

où $J_1(x)$ est la fonction de Bessel de premier ordre, R est la distance entre l'ouverture et le point d'observation, θ' est l'angle d'observation. Approximativement notre système correspond à $kr_b \sin \theta' \sim \frac{kr_b r_3}{z_{32}}$. L'équation (10.15) peut être aussi obtenu à partir de l'équation (10.7) dans la limite $f \rightarrow \infty$ et z_{32} très grand.

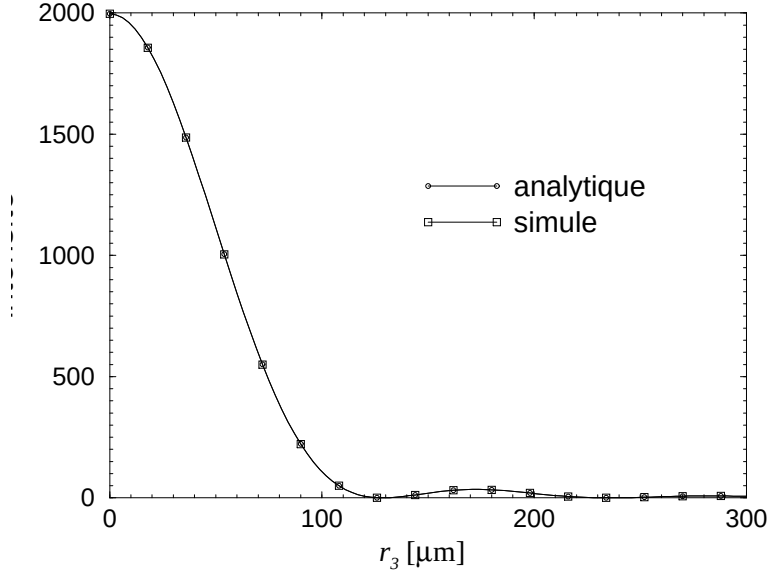


Figure 10.2: Simulation de la diffraction de Fraunhofer: longueur d'onde $0,6328 \mu\text{m}$, rayon de l'ouverture 3 mm

La figure 10.2 montre les résultats calculés analytiquement par l'équation (10.15) et simulés par notre code d'imagerie dans le cas d'une longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ et d'un rayon de l'ouverture de 3 mm. Pour cette simulation, aucune particule ne présente, la focale de la lentille et la distance d'observation sont de 1 m. On trouve que l'accord est parfait.

D'autre part, lorsqu'une l'onde plane est focalisée par une lentille de focale de f , l'intensité sur l'axe optique peut être obtenue analytiquement à partir de l'équation (10.7):

$$I_{axe} = \left(\frac{k}{2\gamma z_{32}} \right)^2 |1 - \exp(i\gamma r_b^2)|^2 \quad (10.16)$$

où $\gamma = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_{32}} - \frac{1}{f} \right)$.

La figure 10.3 montre l'intensité sur l'axe pour différentes zones de z_{32} calculée par l'équation (10.16) et par notre code d'imagerie lorsqu'une onde plane de longueur d'onde $0,6328 \mu\text{m}$ focalisée par une lentille mince de rayon 3 mm, et de focale 50 mm.

L'intensité oscille au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'ouverture, et elle est naturellement beaucoup plus forte au point focal. L'accord est encore parfait. Notons que pour la suite, nous observons les images dans le plan $z_{32}=159 \text{ mm}$ (étoile au maximum) ou $z_{32}=160,8 \text{ mm}$ (étoile au minimum).

Des images d'une particule située sur l'axe du système optique et éclairée par un faisceau gaussien circulaire d'axe de propagation confondu avec la direction de l'axe optique ont été simulés théoriquement et comparés à des résultats expérimentaux par Schaub et al [100]. Dans la figure 10.4 sont reproduits leurs résultats théoriques et expérimentaux pour une goutte d'eau (indice de réfraction $m = 1,345 - 8,7 \times 10^{-9}i$) de rayon $26,5 \mu\text{m}$, éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde

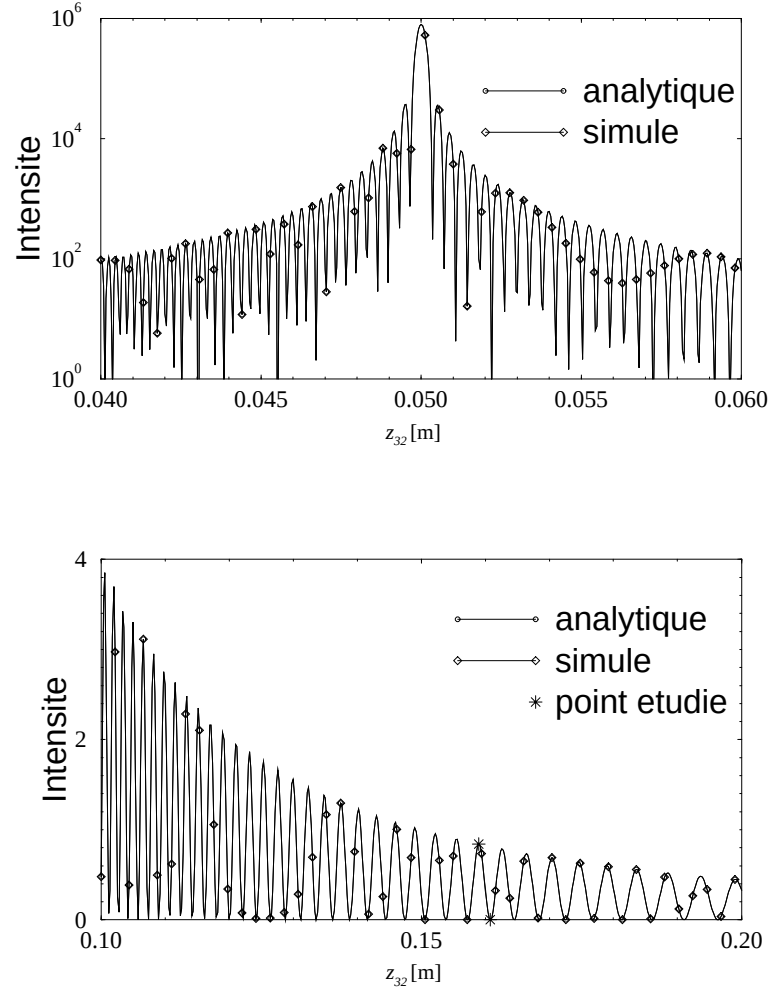


Figure 10.3: Intensité sur l'axe optique: une onde plane de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ focalisée par une lentille de rayon de 3 mm et de 50 mm de focale

$0,337 \mu\text{m}$, de rayon au col 1,5 mm avec une ouverture de rayon de 1,5 mm ou 2,5 mm. Le plan objet et le plan image se trouvent 52.5265 mm avant et 1.0395 m après la lentille respectivement.

Le même cas est simulé avec notre code d'imagerie et les résultats sont présentés sur la figure 10.5. En comparant les deux figures on trouve que l'accord entre les résultats expérimentaux et les notres est bon, surtout au bord des images ($x_3/a_i \leq 1$, a_i étant le rayon de l'image optique géométrique).

10.3 Images simulés par la TLMG

Dans cette section, nous présentons des images simulés par la TLMG pour une particule éclairée par un faisceau feuille laser se propageant parallèlement et perpendiculairement à l'axe optique en comparant avec des cas d'éclairement par une onde plane et un faisceau gaussien. L'importance de la position de la particule (située hors axe du système optique, en défaut de mise au point), de la taille d'ouverture et de la polarisation du faisceau sont étudiés.

10.3.1 Faisceau incident parallèle à l'axe du système optique

Lorsqu'un faisceau se propage parallèlement à l'axe du système optique la lentille collecte non seulement le champ diffusé mais aussi le champ incident. L'image de la particule est une zone de moindre intensité.

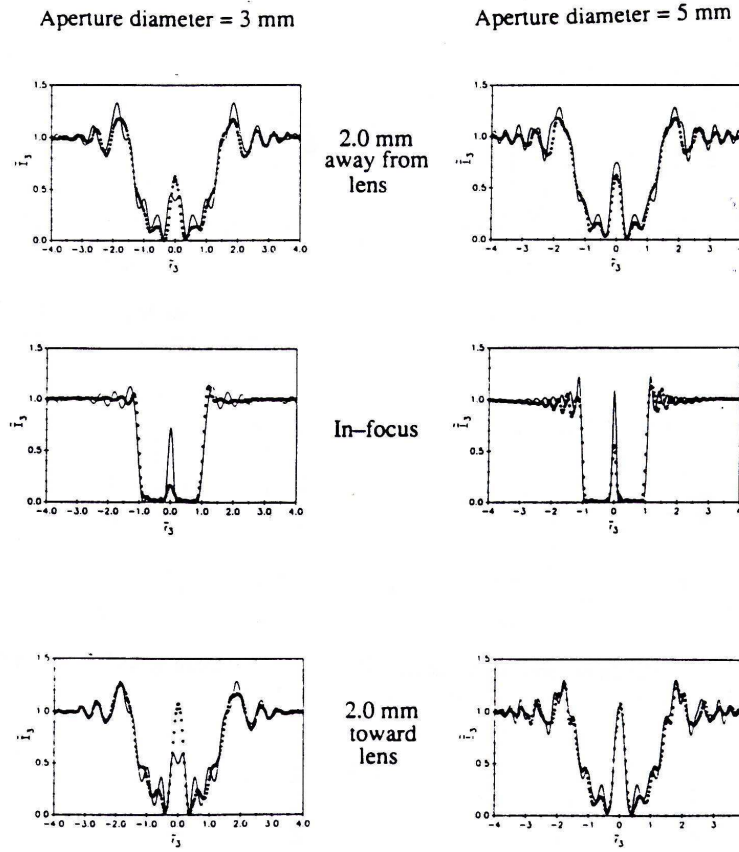


Figure 10.4: Résultats théoriques (ligne continue) et numériques (circle) de Schaub pour une goutte d'eau (indice de réfraction $m = 1,345 - 8.7 \times 10^{-9}i$) de rayon de $26,5 \mu\text{m}$ éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,337 \mu\text{m}$, de rayon au col de $1,5 \text{ mm}$ avec une ouverture de rayon de $1,5 \text{ mm}$ ou $2,5 \text{ mm}$

On considère un système optique avec une lentille de focale 50 mm . Une particule d'eau (indice de réfraction $m=1,333$), de rayon de $25 \mu\text{m}$ est éclairée par un faisceau de longueur d'onde $0,6328 \mu\text{m}$. La distance z_{32} et le rayon a_i de l'image de la particule au sens de l'optique géométrique sont définies par les relations suivantes:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z_{p0}} + \frac{1}{z_{32}} \quad (10.17)$$

$$\frac{a_i}{z_{32}} = \frac{a}{z_{p0}} \quad (10.18)$$

où a est le rayon de la particule, a_i le rayon de l'image, z_{p0} la distance entre la particule et la lentille.

Lorsqu'une particule se situe $72,936 \text{ mm}$ avant l'ouverture, son image est située 159 mm après la lentille et est $2,18$ fois plus grande que la particule. Lorsqu'une particule se situe $72,563 \text{ mm}$ avant l'ouverture, son image est située $160,8 \text{ mm}$ après la lentille et est $2,22$ fois plus grande que la particule.

La figure 10.6 montre l'importance de la position du plan image. Le faisceau incident est une onde plane. Le rayon de l'ouverture est de 3 mm . Les figures a-b et c-d correspondent respectivement aux cas sans particule et avec une particule situé sur l'axe optique et dans le plan objet correspondant aux plans images dans lesquels l'intensité sur l'axe est au maximum ou au minimum (voir la figure 10.3). On trouve que même pour l'objet et l'image juste situés aux points conjugués, le petit déplacement de la particule ($0,075 \text{ mm}$) change évidemment la répartition de l'intensité dans l'image.

Les figures 10.8-10.9 présentent l'image d'une particule de $25\ \mu\text{m}$ de rayon située à six différents points (figure 10.7) éclairée par une onde plane ou un faisceau gaussien dont le centre se situe sur l'axe optique et dans le plan objet, 72.936 mm avant l'ouverture. Le plan image se trouve 159 mm après l'ouverture.

La série de figures 10.8 montre les répartitions de l'intensité sur le plan image pour une particule illuminée par une onde plane. Lorsque la particule est dans le plan objet, les figures a-c montrent les effets liés au fait qu'elle soit excentrée par rapport à l'axe du faisceau. On trouve que les images sont sensible à la position de la particule, bien que le maximum, au centre de l'image, ne bouge pas. De plus, ce maximum est de forte intensité, il correspond à la focalisation de l'onde incidente (voir section 10.2). Les figures d-f montrent les effets liés au défaut de mise au point lorsque la particule est avant ou après le plan objet.

La série de figures 10.9 correspond au même cas que la figure 10.8 mais la particule est éclairée par un faisceau gaussien circulaire de rayon au col 1,5 mm. En comparant avec les résultats de l'onde plane, on trouve que l'intensité de l'image est moins oscillante et que le maximum au centre de l'image est moins fort. Cela peut être expliqué par le fait que dans le cas de l'onde plane, il y a beaucoup de lumière non-diffusée illuminant l'ouverture, donc l'oscillation de l'intensité correspond bien au le cas de l'onde plane sans particule (figure 10.6 b). Par contre, dans le cas du faisceau gaussien, le rapport des lumières diffusée sur la lumière non-diffusée est plus important.

La figure 10.10 présente l'importance de la taille de l'ouverture. Une particule de $25\ \mu\text{m}$ est éclairée par un faisceau feuille laser (gaussien elliptique) de $w_{0x} = 10\ \text{mm}$, $w_{0y} = 1,5\ \text{mm}$, dont le centre est situé sur l'axe optique et dans le plan objet, 72.936 mm avant l'ouverture. Le plan image se trouve 159 mm après l'ouverture.

D'abord, en comparant les figures 10.10-b avec 10.8-b et les figures 10.10-e avec 10.9-b, on trouve que le comportement de l'image dans la direction du grand axe au col correspond à celui de l'onde plane et que le comportement de l'image dans la direction du petit axe au col correspond à celui du faisceau gaussien.

Les figures 10.10 a-c montre que les oscillations aux bords des figures et le maximum au centre de l'image dépendent de la taille de l'ouverture. Plus l'ouverture est grande, plus l'intensité oscille. De plus, on trouve que la pente de l'intensité au bord de l'image ($x_3/a \sim 2,18$ ou $x_3/a_i \sim 1$) est plus élevée lorsque l'ouverture est plus grande.

Les figures 10.11-10.13 montrent les répartitions de l'intensité dans les images de la particule située au centre du faisceau lorsqu'elle est éclairée par une onde plane, un faisceau gaussien et un faisceau feuille laser correspondants aux figures 10.8-10.10.

10.3.2 Faisceau incident perpendiculaire à l'axe du système optique

Dans cette section on considère l'image d'une particule éclairée par un faisceau dont le centre est situé 72,936 mm, avant la lentille de rayon 3 mm, se propageant perpendiculairement à l'axe optique. Le plan image se situe 159 mm après la lentille.

Lorsque le champ diffusé est collecté perpendiculairement à la direction de propagation du faisceau, les images de la particule sont déterminés par les comportements du champ diffusé par la particule et par la position de l'ouverture par rapport à la particule.

Les images des particules de différentes tailles éclairées par un faisceau gaussien de rayon au col du faisceau 3 mm sont décrites sur la figure 10.15.

Le nombre de lobes du champ diffusé dépend du paramètre $\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda}$ d'après la théorie de Lorenz-Mie classique. Pour une petite particule, la lumière diffusée illuminant l'ouverture vient principalement d'un seul lobe si bien que dans le plan image il n'y a qu'un maximum (figures a-b). Lorsque la particule est plus grosse, plus leurs lobes illuminent l'ouverture, l'image a plus de maximums (figures c-d). Quand la particule est très grosse, le nombre du maximum est réduit à deux en raison de l'interférence entre la lumière qui vient de différents lobes (figures e-f). La lentille effectue une transformé de Fourier [107].

De plus, il faut noter que les maximums dépendent aussi de la position relative de la particule, du

faisceau et de l'ouverture.

L'importance de la polarisation du faisceau est montrée sur les figures 10.16 et 10.17 pour différentes positions de la particule (figure 10.14). Un faisceau feuille laser, dont le centre se situe au plan objet sur l'axe optique, se propage dans la direction X avec le grand axe au col de 3 mm dans la direction Y et le petit axe au col de $5\ \mu\text{m}$ dans la direction Z . Les images de gauche sont pour la polarisation électrique dans la direction Z et les images de droite pour la polarisation électrique dans la direction Y .

La figure 10.16 montre les résultats simulés pour une particule de rayon de $15\ \mu\text{m}$ située sur l'axe du faisceau dans trois différentes positions: 1 mm du centre du faisceau dans la direction de propagation (point C , figures a, d), au centre du faisceau (point O_G , figures b, e) et 1 mm du centre du faisceau dans la direction inverse de la propagation (point D figures c, f). Pour cette simulation, la particule est sur l'axe optique et le faisceau se bouge. On trouve que dans ce cas l'image est sensible à la position de la particule dans le faisceau. Aussi, la polarisation du faisceau joue un rôle très important. Lorsque la polarisation est dans la direction du grand axe au col, les comportements de l'image ne changent pas beaucoup pour différentes positions de la particule. Tandis que la polarisation est dans la direction du petit axe au col, les comportements de l'image changent beaucoup. On trouve aussi que l'intensité dans l'image est de trois ordre plus importante lorsque la particule se situe à 1 mm du centre du faisceau que lorsque la particule se situe au centre du faisceau (voir les figures 8.9 et 8.10).

Sur la figure 10.17, la particule de $15\ \mu\text{m}$ se situe sur l'axe optique, au bord du faisceau du côté le plus éloigné (point A , figures en haut), au centre du faisceau (point O_G , figures au milieu) et au bord du faisceau de côté plus proche (point B , figures en bas). L'effet de la polarisation du faisceau est aussi important. Lorsque la particule se situe au bord du faisceau du côté le plus éloigné, l'image a un seul maximum qui est très fort. Dans les autres cas, l'image a plusieurs maximums mais beaucoup moins forts. Cela peut être expliqué en utilisant les diagrammes des comportements du champ diffusé: les figures 8.7 et 8.8 dans le chapitre 8.

10.4 Conclusion

L'événement de base de l'imagerie de milieux diphasiques a été étudié.

Dans ce modèle d'imagerie d'une particule éclairée par un faisceau laser, la position de la particule et l'orientation du faisceau incident peuvent être arbitraires, l'optique de collection a été simulé en utilisant une lentille mince parfaite. Cette approche peut être utilisée aussi pour calculer des systèmes optiques épais, le parcours des rayons jusqu'au plan Z_2 peut alors être calculé par "ray tracing", puis la même approche est utilisée pour calculer l'intensité dans le plan image Z_3 .

Deux cas où la direction de propagation du faisceau incident est confondue avec l'axe optique et perpendiculaire à l'axe optique sont étudiés. Lorsque la direction de propagation du faisceau incident est confondue avec l'axe optique et la particule est éclairée par un faisceau feuille laser, la répartition de l'intensité sur la plan image dans la direction de grande dimension du faisceau est similaire à celle obtenue lorsque la particule est éclairée par une onde plane, et la répartition de l'intensité sur le plan image dans la direction de petite dimension du faisceau est similaire à celle obtenue lorsque la particule est éclairée par un faisceau gaussien. Lorsque la direction de propagation du faisceau incident est perpendiculaire à l'axe optique, la position de la particule dans le faisceau, la polarisation du faisceau et la taille de la particule jouent un rôle très important pour les comportements de l'image. Lorsque la particule est située au bord du faisceau du côté plus éloigné de la lentille et que la particule est grosse par rapport à la dimension du faisceau, l'intensité dans le plan image est beaucoup plus forte (jusqu'à trois ordre) que lorsque la particule est située au centre ou sur le bord plus proche de la lentille. Cet effet est dû à la nature de la lumière collectée réfléchie ou réfractée à travers la particule.

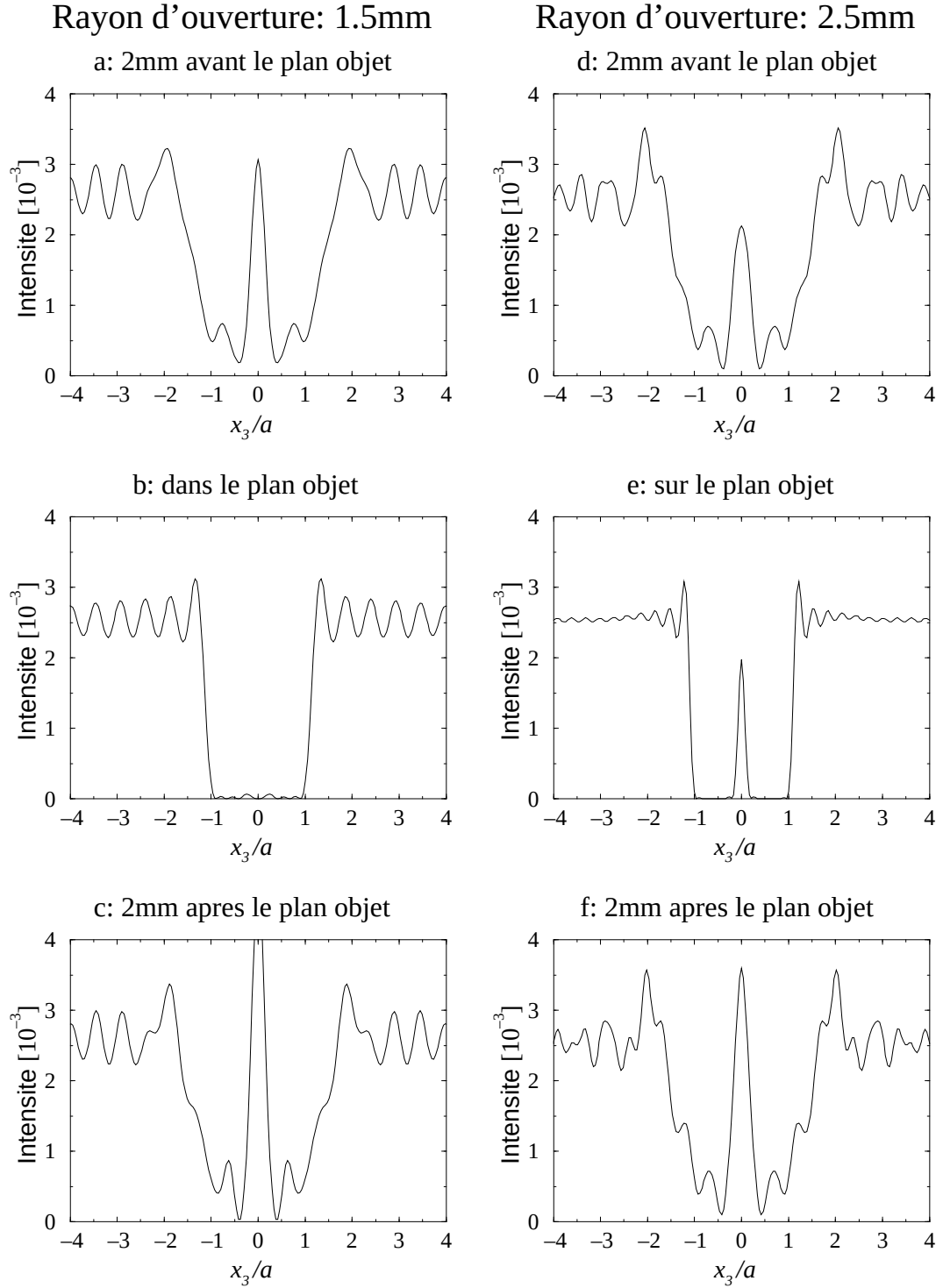


Figure 10.5: Résultats simulés par la TLMG pour le même cas que la figure précédente

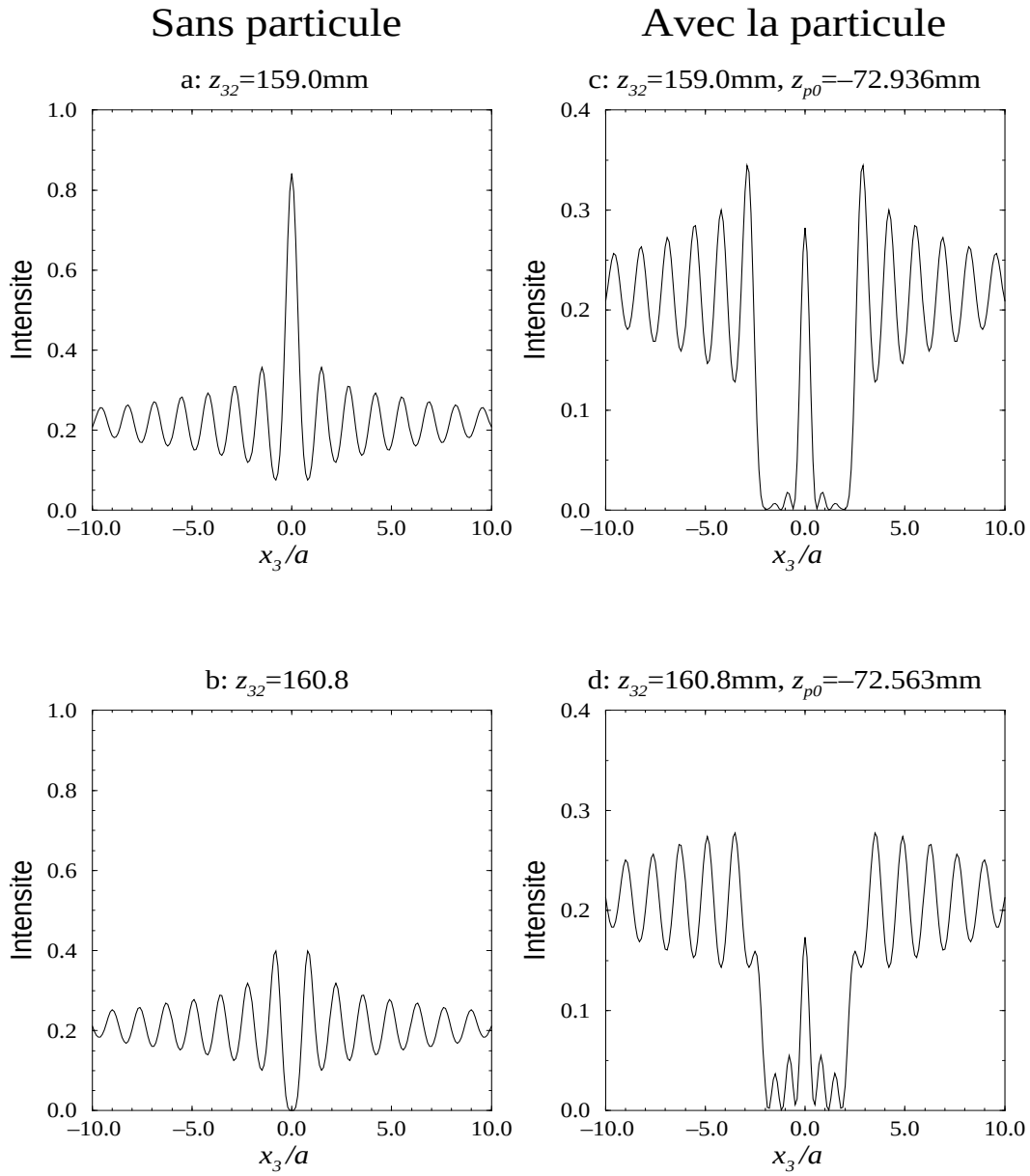


Figure 10.6: Intensité dans le plan image d'un faisceau onde plane sans ou avec une particule: effet de l'intensité au centre de l'image

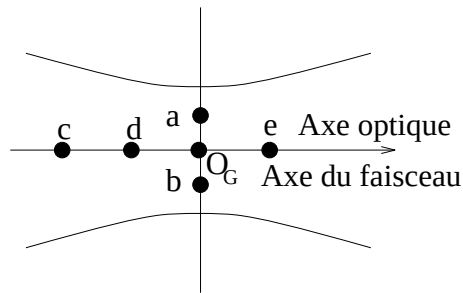


Figure 10.7: Positions de la particule étudiée, l'axe du faisceau incident confondu avec l'axe optique

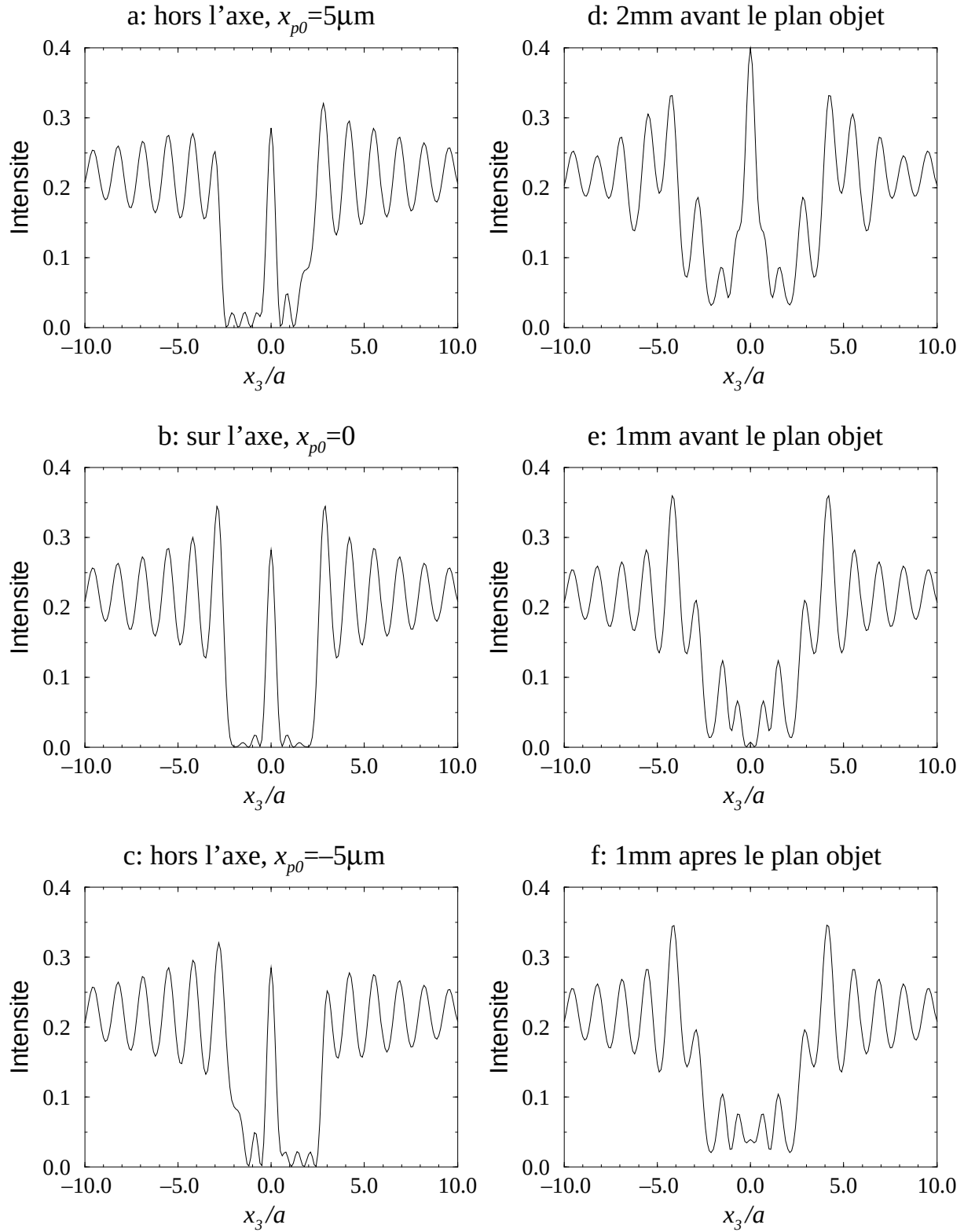


Figure 10.8: Intensité dans l'image d'une goutte d'eau éclairée par une onde plane de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$ se propageant le long de l'axe optique avec une ouverture de rayon de 3 mm: différentes positions de la particule

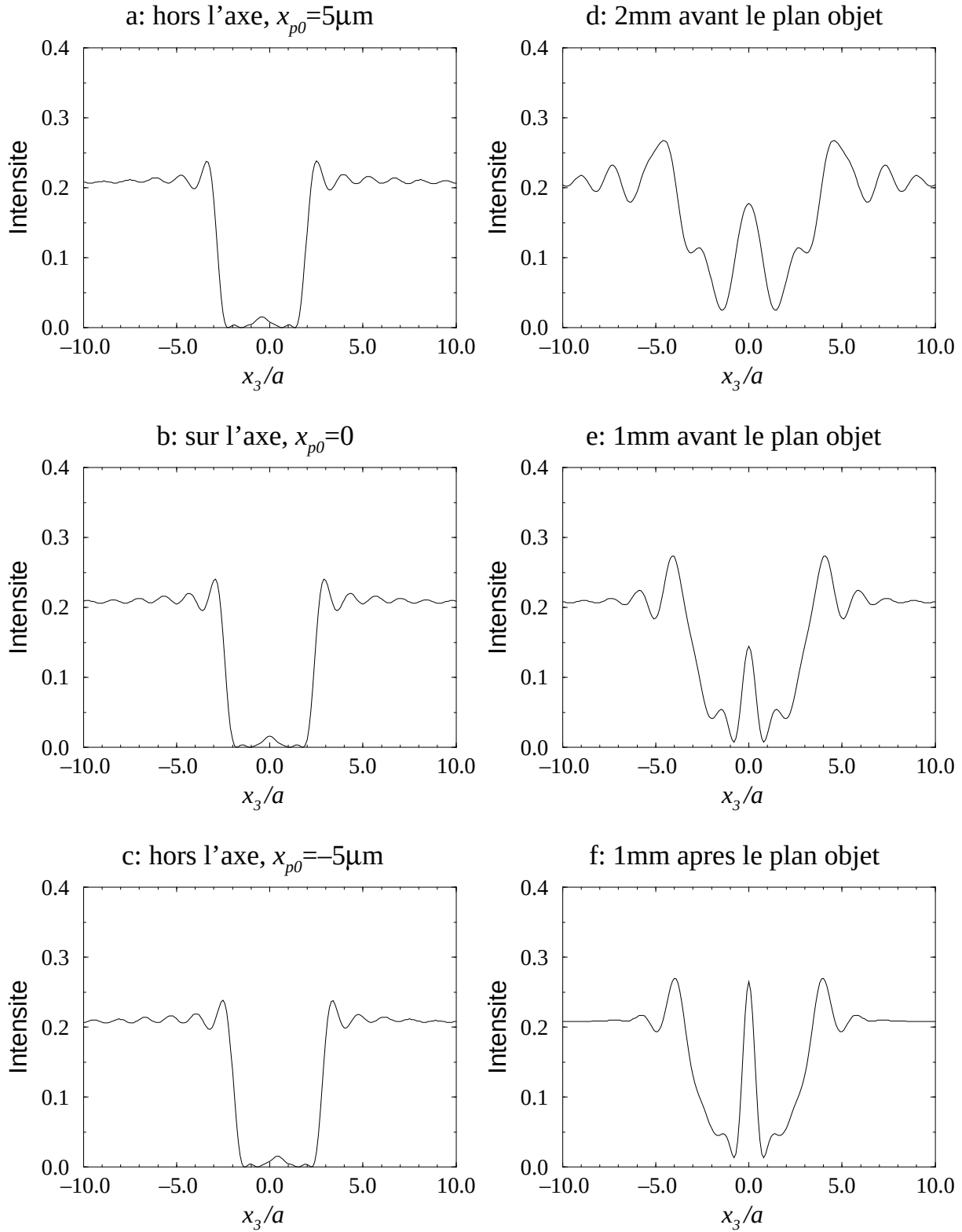


Figure 10.9: Intensité dans l'image d'une goutte d'eau éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$, de rayon au col $w_0 = 1,5 \text{ mm}$, d'axe confondu avec l'axe optique, avec une ouverture de rayon de 3 mm : différentes positions de la particule

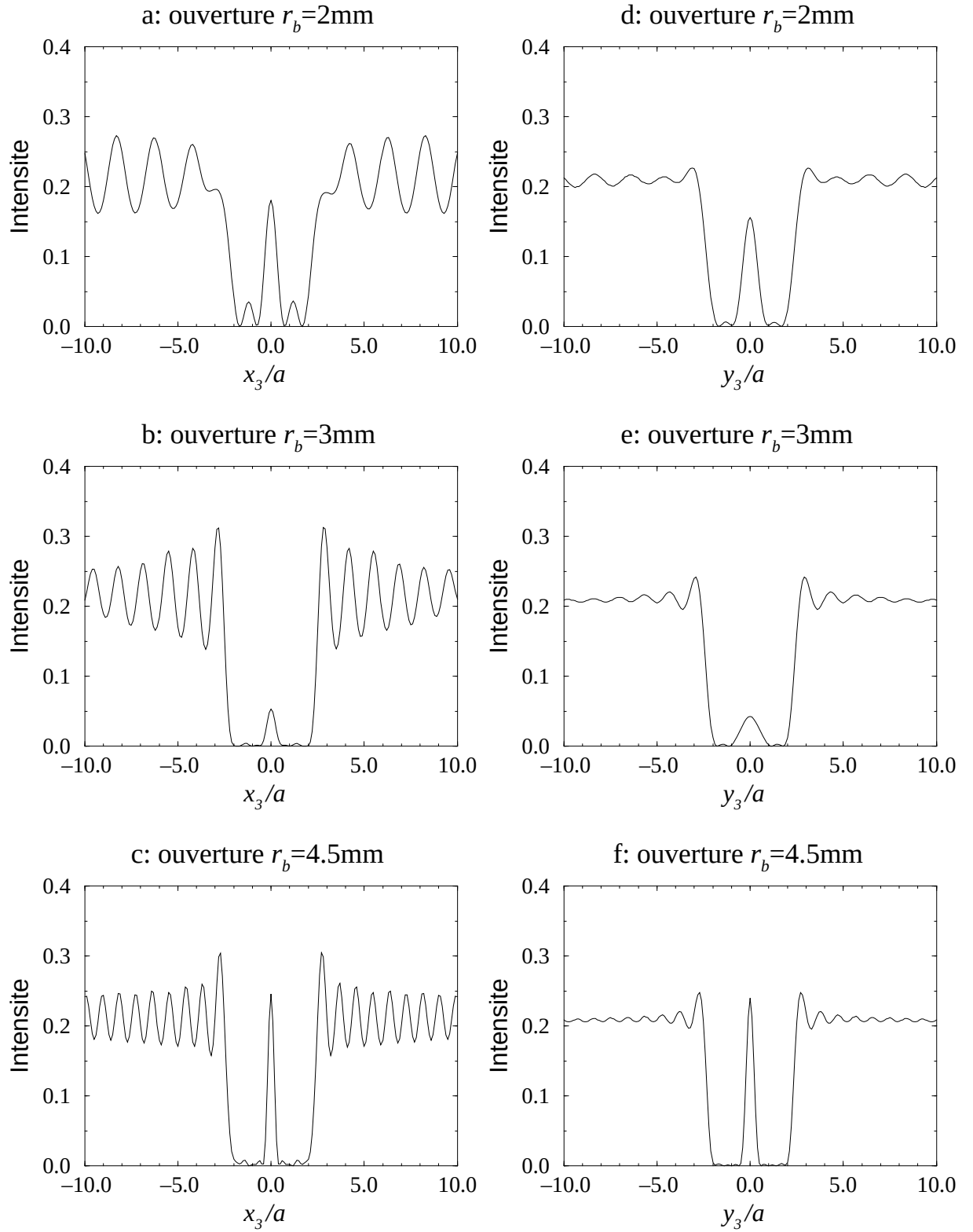


Figure 10.10: Intensité dans l'image d'une goutte d'eau située sur l'axe optique dans le plan objet éclairée par un faisceau feuille laser de longueur d'onde de $0,6328 \mu\text{m}$, des axes au col $w_{0x} = 10 \text{ mm}$, $w_{0y} = 1,5 \text{ mm}$, d'axe confondu avec l'axe optique: différents rayons de l'ouverture

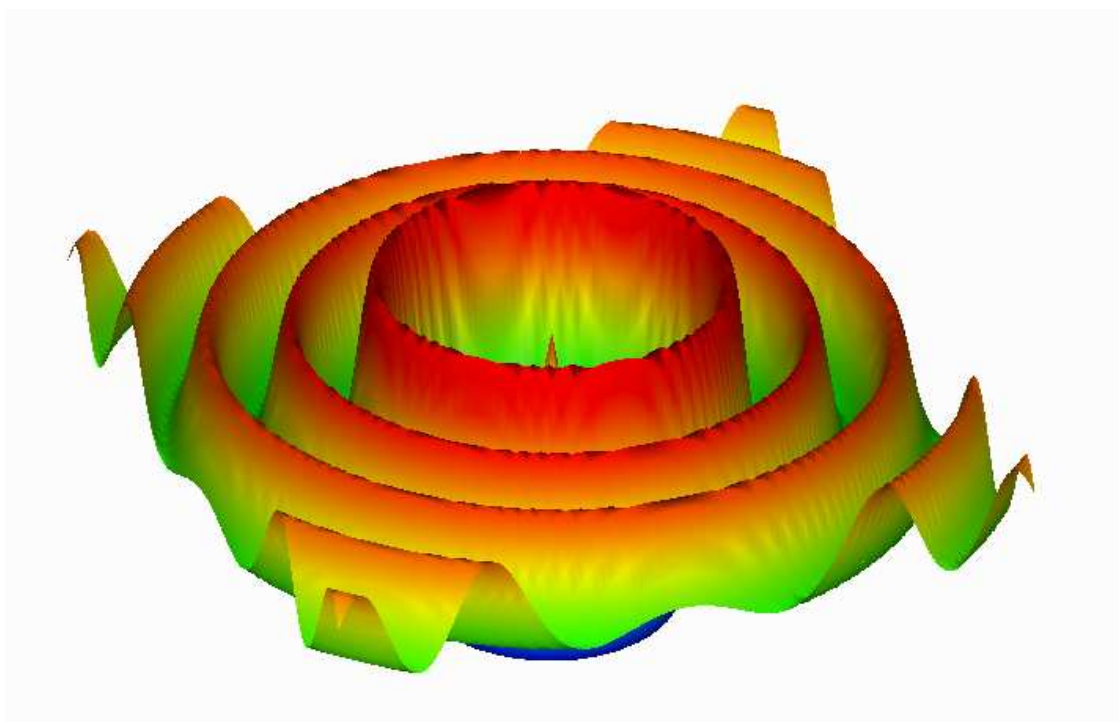


Figure 10.11: Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par une onde plane

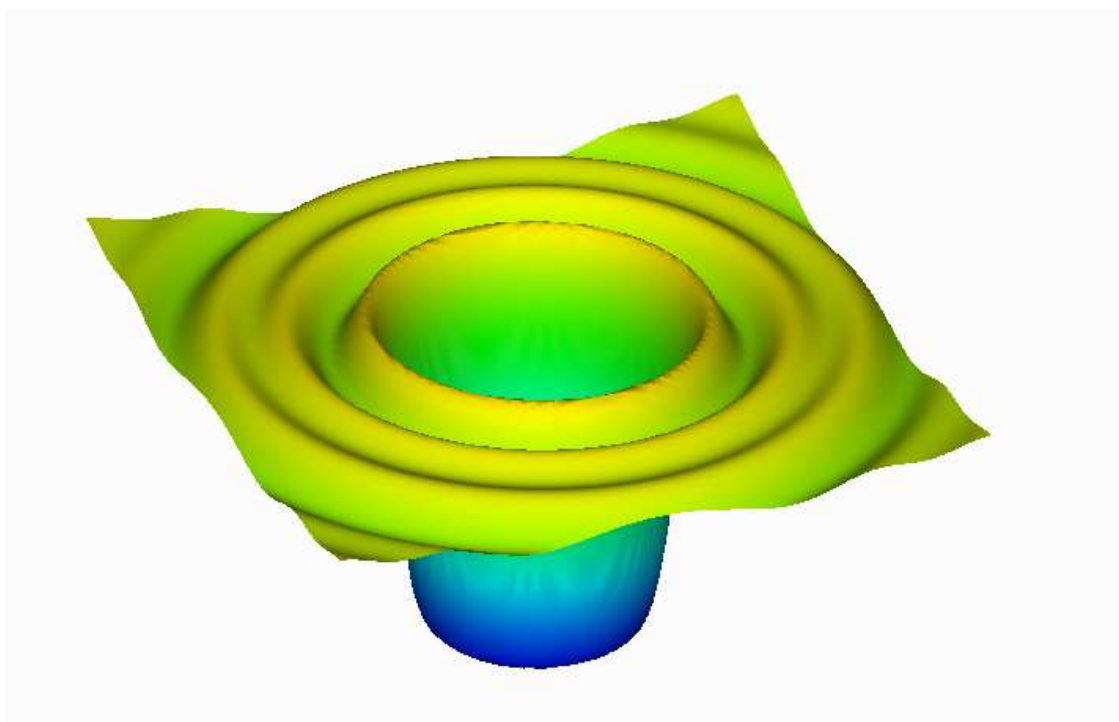


Figure 10.12: Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par un faisceau gaussien

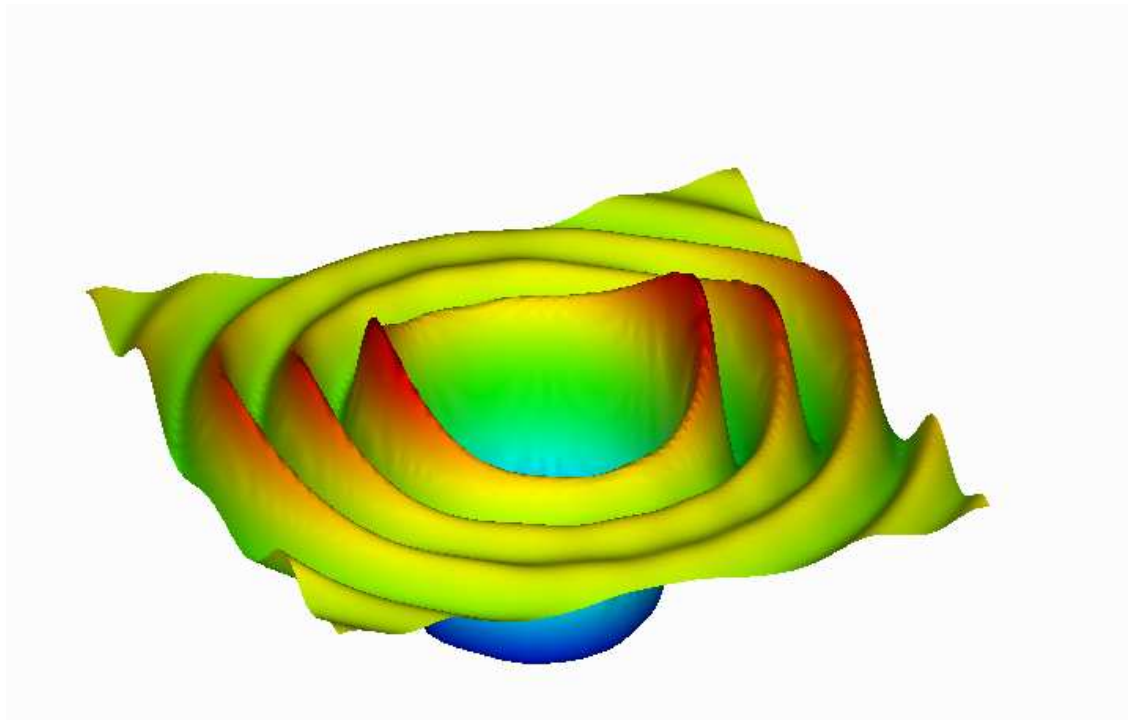


Figure 10.13: Répartition de l'intensité dans le plan image d'une particule éclairée par un faisceau feuille laser

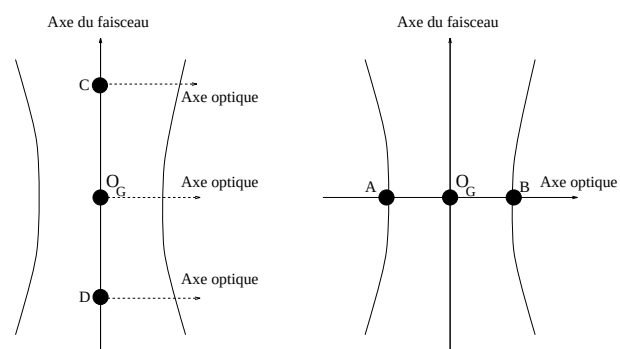


Figure 10.14: Positions de la particule étudiées, l'axe du faisceau incident perpendiculaire à l'axe optique

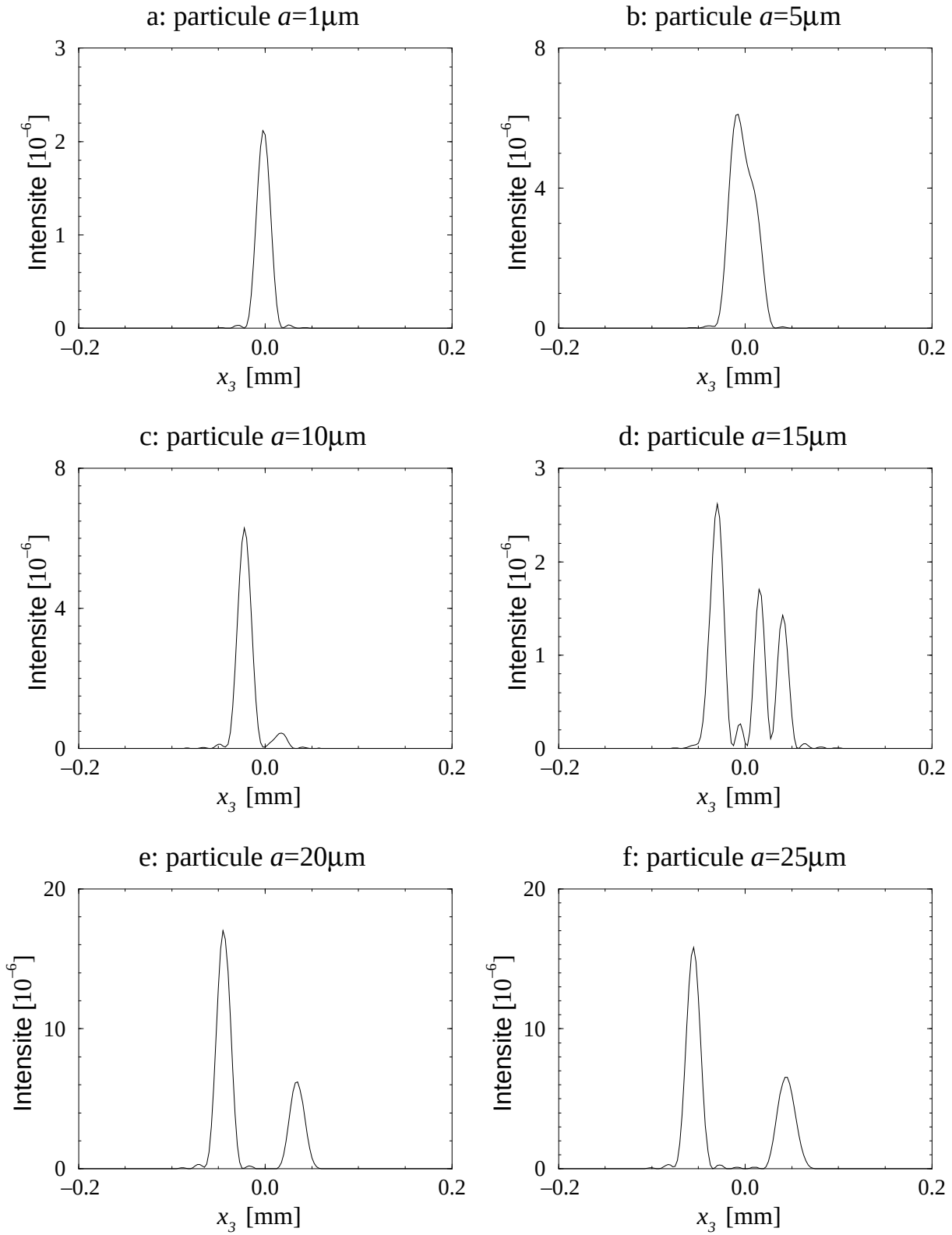


Figure 10.15: Intensité dans l'image d'une goutte d'eau pour six différentes tailles, éclairée par un faisceau gaussien de rayon au col 3 mm, se propageant perpendiculairement à l'axe optique et polarisé dans la direction Z

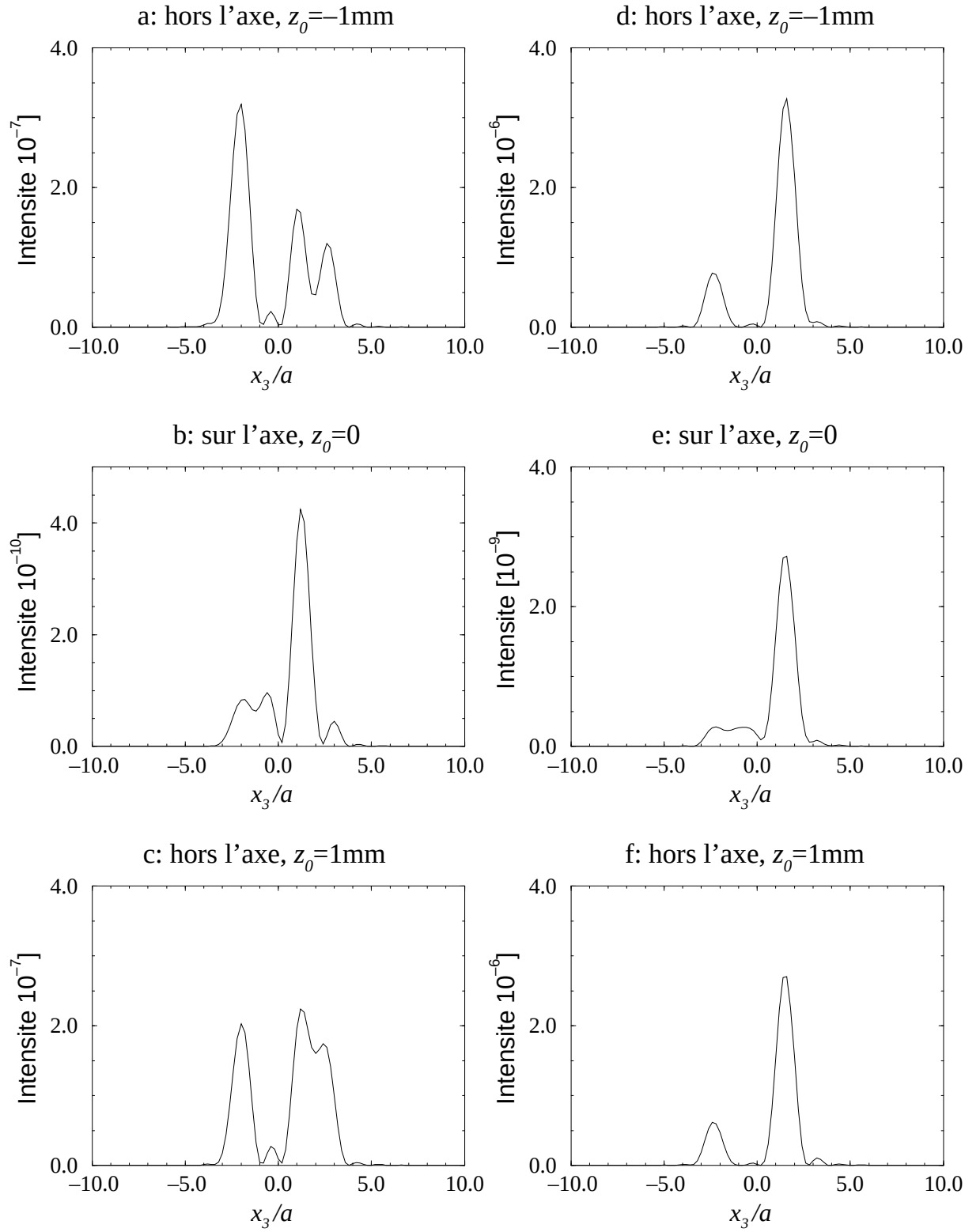


Figure 10.16: Intensité dans l'image d'une particule de rayon de $15\text{ }\mu\text{m}$ située sur l'axe du faisceau, éclairée par un faisceau feuille laser des axes au col $w_{0x} = 5\text{ }\mu\text{m}$, $w_{0y} = 3\text{ mm}$ se propageant perpendiculairement à l'axe optique: effets de la polarisation

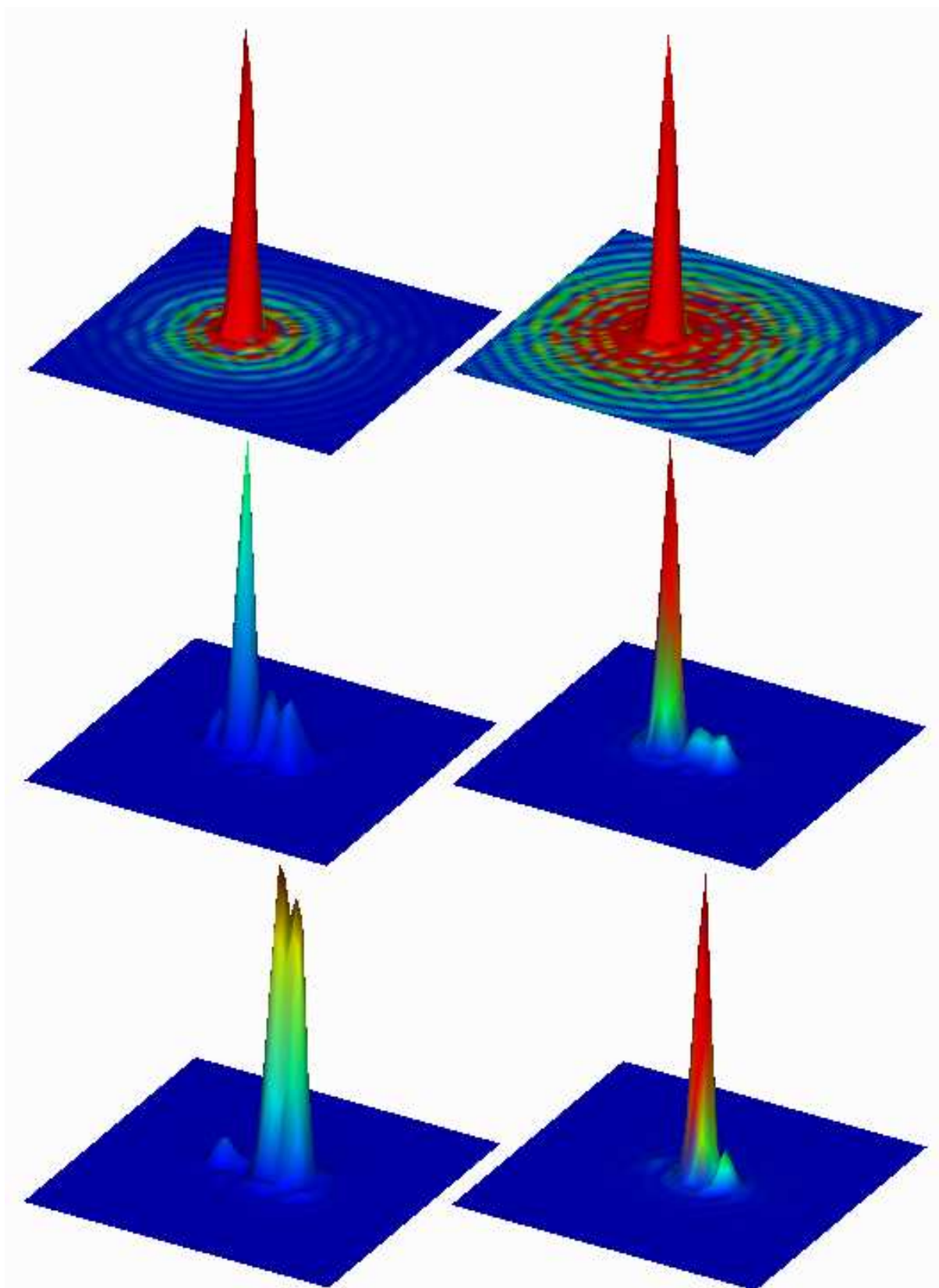


Figure 10.17: Répartition de l'intensité dans les images d'une particule de rayon de $15\ \mu\text{m}$ située sur l'axe optique éclairée par un faisceau feuille laser de différentes polarisations et différentes positions

Part

Conclusion Générale

Le travail présenté dans cette thèse concerne **l'extension de la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée à la diffusion des faisceaux feuille laser par des particules sphériques et les applications aux écoulements diphasiques.**

Un faisceau feuille laser est défini comme un faisceau gaussien avec une section elliptique des deux axes au col w_{0x} et w_{0y} , et est donc un faisceau circulairement dissymétrique. Il trouve de plus en plus d'applications dans des techniques de mesure pour élargir le domaine mesurable ou pour simplifier le traitement des signaux. En changeant les longueurs des deux axes au col w_{0x} et w_{0y} , de formes très différents de faisceau peuvent être obtenus. Par exemple, lorsque $w_{0x} = w_{0y}$, un faisceau gaussien circulaire est retrouvé. En posant $w_{0x} \gg w_{0y}$ on obtient quasiment un faisceau cylindrique.

Des méthodes développées et des résultats obtenus dans cette thèse peuvent s'appliquer directement ou généralisés pour étudier la diffusion d'autres faisceaux.

L'étude théorique de la diffusion d'un faisceau laser par une particule nécessite premièrement une **description mathématique du faisceau**. Dans la TLMG, les expressions du champ incident sont développées en potentiels scalaires de Bromwich avec deux séries infinies des coefficients $g_{n,TM}^m$ et $g_{n,TE}^m$. Ceux-ci prennent en compte la description du faisceau. L'intérêt de la TLMG dépende fortement de notre capacité à en tirer des prévisions numériques: la vitesse de calcul et la souplesse d'adaptation aux différents faisceaux, permettant d'orienter ou d'interpréter plus efficacement les travaux expérimentaux.

D'autre part, la symétrie du champ incident induit la symétrie du champ diffusé. Les relations de symétrie nous aident d'analyser les phénomènes de la diffusion. Les coefficients g_n^m sont liés étroitement aux propriétés du champ incident. Bien connaître les relations de symétrie du champ diffusé et des g_n^m permet aussi d'interpréter et vérifier la cohérence des résultats numériques et des valeurs physiques mesurables, et d'améliorer ou d'accélérer le calcul des coefficients g_n^m .

Cette thèse est donc tout d'abord consacrée à la recherche des *relations de symétrie des coefficients* g_n^m et celles du champ diffusé, en partant de conditions générales. Ces relations de symétrie obtenues peuvent être appliquées directement aux champ incident qui possède la même symétrie explicite. Les relations entre les coefficients g_n^m permettent d'obtenir les expressions des quatre coefficients $g_{n,TM}^m, g_{n,TM}^{-m}, g_{n,TE}^m$ et $g_{n,TE}^{-m}$ à partir de l'une d'entre elles. La méthode proposée peut aussi être appliquée à étudier les champs possédant d'autres symétries.

La *description mathématique du faisceau feuille laser* est obtenue par deux méthodes différentes: le développement en spectre d'onde plane et le modèle de Davis. L'approximation due à la description est discutée exhaustivement dans différents angles: en partant de potentiel scalaire, vis-à-vis des équations de Maxwell pour les systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques, et du point de vue de la TLMG. On a démontré que l'approximation de la description fondamentale du champ du faisceau feuille laser est à l'ordre $O(s^2)$ lorsque le point observé est dans la région du faisceau, c'est-à-dire, lorsque ce point est situé dans l'ellipse définie par les deux axes locaux w_x et w_y du faisceau. L'approche de la discussion pour la TLMG peut être appliquée à d'autres faisceaux.

Les coefficients g_n^m sont au cœur de la TLMG. Deux méthodes de **calcul numérique des g_n^m** : la méthode intégrale et l'interprétation localisée, sont exhaustivement discutées et soigneusement étendues au faisceau feuille laser. Une nouvelle méthode – l'interprétation localisée intégrale – est développée qui combine les avantages de souplesse de la méthode intégrale et de rapidité de l'interprétation localisée.

La *méthode intégrale* est souple et théoriquement rigoureuse. Elle peut être facilement appliquée aux faisceaux quelconques. Deux méthodes intégrales sont étudiées.

La méthode F1, qui utilise une intégration double pour calculer les g_n^m et simple pour calculer les g_n , est relativement rapide. Mais sa précision dépend du choix du rayon de la surface sphérique a_s utilisé et la qualité de description du faisceau. Le meilleur choix de ce rayon est $ka_s = n + 1/2$, où n est l'indice des g_n^m . La précision des g_n^m calculés est à l'ordre de la description du faisceau.

La méthode F2, qui utilise une intégration triple pour calculer les g_n^m et double pour calculer les

g_n , est stable, mais onéreuse, car elle nécessite une intégration de plus sur kr de zéro à l'infini par rapport à la méthode F1. On a montré que c'est l'intervalle environnant de $kr \sim n$ qui contribue le plus à l'intégration. Et donc différents intervalles peuvent être pris pour l'intégration sur kr , d'après la précision envisagée.

L'interprétation localisée est étendue avec succès au faisceau feuille laser. Même si la sommation devient triple pour un faisceau feuille laser au lieu d'une sommation simple pour un faisceau gaussien circulaire, on peut encore gagner trois ou quatre ordre de grandeur du temps de calcul par rapport à la méthode intégrale, en cherchant un algorithme efficace. Sa validité est démontrée en comparant avec les résultats numériques de la méthode intégrale. Les erreurs relatives des g_n^m calculés dépendent de l'indice m en $0.1 \cdot m\%$ par rapport aux résultats de la méthode intégrale. Mais lorsque l'indice n est très grand, une instabilité numérique apparaît.

La méthode de l'interprétation localisée intégrale s'applique directement l'interprétation localisée aux composantes radiales du champ incident, donnant une forme intégrale simple pour calculer les coefficients g_n^m . Cette méthode conserve les avantages de souplesse de la méthode intégrale et de rapidité de l'interprétation localisée. De plus, elle n'a plus de problème d'instabilité numérique même pour un très grand indice n .

Après ces deux étapes de travail de base: la description du faisceau et le calcul numérique des coefficients g_n^m , quelques aspects d'applications aux écoulements diphasiques ont été étudiées.

Les comportements du champ diffusé fournissent une connaissance de base pour interpréter les phénomènes de la diffusion dans les applications. Les diagrammes de la diffusion d'un faisceau feuille laser par une particule sphérique sont étudiés en comparant avec ceux d'une onde plane et d'un faisceau gaussien circulaire. On trouve que les champs diffusés du faisceau feuille laser contiennent les propriétés de l'onde plane dans la direction de la grande dimension du faisceau feuille laser, et celles du faisceau gaussien dans la direction de la petite dimension. La position de la particule dans le faisceau et la polarisation du faisceau jouent un rôle important pour le comportement du champ diffusé, surtout pour une particule grosse par rapport à la dimension du faisceau.

L'étude des sections efficaces d'extinction, de diffusion et de pression de radiation montre que les propriétés du faisceau feuille laser sont situées au milieu de l'onde plane et du faisceau gaussien, et que les amplitudes de la résonance pour un faisceau feuille laser est moins forte que pour un faisceau gaussien avec un rayon au col égal au petit axe au col du faisceau feuille laser. La pression de radiation longitudinale négative est aussi prévue pour un faisceau gaussien hyperfocalisé. Ce phénomène a été mise en évidence expérimentalement.

La théorie de la diffusion de deux faisceaux est présentée et appliquée pour évaluer un système de mesure réel DCW, le système double onde cylindrique. Celui-ci est une variante de la technique phase Doppler qui permet de mesurer la taille, la vitesse et la nature de la particule à partir de la fréquence du champ diffusé, et évite l'ambiguïté de 2π de phase rencontrée dans la mesure du système phase Doppler. Ce système a été étudié expérimentalement et théoriquement avec la TLM et l'optique géométrique. La TLMG retrouve quasiment les résultats expérimentaux.

Un modèle d'imagerie d'une particule éclairée par un faisceau laser est développé. La position de la particule et l'orientation du faisceau incident peuvent être arbitraires. L'optique de collection a été simulé en utilisant une lentille mince parfaite. Cette approche peut être aussi appliquée pour un système optique épais, en calculant le parcours des rayons par "ray tracing".

Les cas où la direction de propagation du faisceau incident est confondue avec l'axe optique et perpendiculaire à l'axe optique sont exhaustivement étudiés pour une l'onde plane, un faisceau gaussien et un faisceau feuille laser. Les effets de la position de la particule et de la polarisation du faisceau sont aussi discutés. Lorsque la direction de propagation du faisceau incident est confondue avec l'axe optique et que la particule est éclairée par un faisceau feuille laser, la répartition de l'intensité sur le plan image dans la direction de grande dimension du faisceau est similaire à celle de la particule éclairée par une onde plane, la répartition de l'intensité sur le plan image dans la direction de petite dimension du faisceau est similaire à celle de la particule éclairée par un faisceau gaussien de même dimension. Lorsque la direction de propagation du faisceau incident est perpendiculaire à l'axe optique, la position

de la particule dans le faisceau, la polarisation du faisceau et la taille de la particule jouent un rôle très important pour le comportement de l'image. Lorsque la particule est située au bord du faisceau plus loin de la lentille et que la particule est grosse par rapport à la dimension du faisceau, l'intensité dans l'image est beaucoup plus forte (jusqu'à trois ordre) que lorsque la particule est située au centre ou au bord plus proche de la lentille.

En résumé, la TLMG est étendue avec succès au faisceau feuille laser. Cette extension élargit, d'une part, le domaine applicable de la TLMG à ce faisceau. D'autre part, ce travail fournit des moyens et des résultats qui peuvent être appliqués directement ou généralisés à d'autres faisceaux.

La base de la théorie de Lorenz-Mie généralisée a été bien fondée pour la diffusion d'un faisceau fini par une particule sphérique et homogène. Cette théorie pour un faisceau gaussien a aussi été bien développée et appliquée à analyser le système phase Doppler et la lévitation optique. Grâce au développement de la vitesse de calcul d'ordinateur et à l'amélioration de l'algorithme de la TLMG, la restriction de temps de calcul devient de moins en moins importante. Toutefois, cette théorie est en train d'être perfectionnée et étendue.

La difficulté d'appliquer la TLMG à une nouvelle forme de faisceau est premièrement d'obtenir la description mathématique de ce faisceau dans l'espace. C'est souvent un travail difficile ou très compliqué du point de vue pratique. L'interprétation localisée intégrale ouvre une possibilité de calculer les coefficients g_n^m directement à partir du champ dans un plan, ce champ peut être donné par une expression analytique ou par des résultats expérimentaux. La dérivation rigoureuse de l'interprétation localisée pour un faisceau quelconque est donc envisagée. Elle fait cette théorie plus souple à appliquer à un faisceau quelconque. Toutefois, cette approximation peut être validée par la comparaison du champ donné et du champ reconstruit.

L'extension de la TLMG pour une particule sphérique concentrique et pour un cylindre infini est en cours.

Part I

Annexes

Appendix A

Evaluation de l'Intégrale du Champ

Les intégrales obtenues par introduction des expressions (3.12) et (3.13) dans les équations (3.3)-(3.8) peuvent être évaluées asymptotiquement par la méthode proposée par Goubau [35] [23] lorsque kw_{0x} et kw_{0y} sont suffisamment grands.

Si, par exemple, en introduisant l'équation (3.12) dans (3.3), nous obtenons:

$$E_x(x, y, z) = \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2}{4}(w_{0x}^2 p^2 + w_{0y}^2 q^2)\right] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \quad (\text{A.1})$$

Si kw_{0x} et kw_{0y} sont beaucoup plus grands que l'unité (relation (3.14)), le noyau d'intégration gaussien de l'équation (A.1) est petit en dehors du domaine où $p^2 + q^2 \ll 1$.

Suivant l'exemple de Goubau pour le faisceau gaussien circulaire, nous pouvons négliger la contribution à l'intégrale en dehors de ce domaine. Par substitution de l'expression

$$m = (1 - p^2 - q^2)^{1/2} = 1 - \frac{p^2 + q^2}{2} + O[(p^2 + q^2)^2] \quad (\text{A.2})$$

dans Eq. (A.1), il vient

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) = & \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{k^2}{4}(w_{0x}^2 p^2 + w_{0y}^2 q^2) \right. \\ & \left. - ik \left(px + qy + z - z \frac{p^2 + q^2}{2} \right) \right] dp dq \end{aligned}$$

On regroupe les termes situés dans l'exponentielle:

$$\begin{aligned} & -\frac{k^2}{4}(w_{0x}^2 p^2 + w_{0y}^2 q^2) - ik \left(px + qy + z - z \frac{p^2 + q^2}{2} \right) \\ = & -\frac{k^2 w_{0x}^2}{4} p^2 - ikxp - ikz \frac{p^2}{2} - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4} q^2 - ik yq - ikz \frac{q^2}{2} - ikz \\ = & -\frac{k^2 w_{0x}^2}{4i} \left(i - \frac{2z}{kw_{0x}^2} \right) p^2 - ikxp - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4i} \left(i - \frac{2z}{kw_{0y}^2} \right) q^2 - ik yq - ikz \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de Q_x , Q_y , l_x et l_y par (3.22) et (3.23) on obtient:

$$\begin{aligned} & -\frac{k^2 w_{0x}^2}{4i Q_x} p^2 - ikxp - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4i Q_y} q^2 - ik yq - ikz \\ = & -i Q_x \frac{x^2}{w_{0x}^2} - i Q_y \frac{y^2}{w_{0y}^2} - ikz - \frac{k^2 w_{0x}^2}{4i Q_x} \left(p - \frac{2Q_x x}{kw_{0x}^2} \right)^2 - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4i Q_y} \left(p - \frac{2Q_y y}{kw_{0y}^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 E_x(x, y, z) &= \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \exp\left(-iQ_x \frac{x^2}{w_{0x}^2} - iQ_y \frac{y^2}{w_{0y}^2}\right) \exp(-ikz) \\
 &\quad \times \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 w_{0x}^2}{4iQ_x} \left(p - \frac{2Q_x x}{kw_{0x}^2}\right)^2 - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4iQ_y} \left(p - \frac{2Q_y y}{kw_{0y}^2}\right)^2\right] dp dq
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

L'intégrale dans l'équation (A.3) est une transformée de Fourier[22], aisément évalué pour obtenir l'équation (3.15).

$E_y(x, y, z)$ est évidemment égal à zéro car $A_y(p, q) = 0$ pour le champ polarisé dans la direction x .

Pour $E_z(x, y, z)$, en introduisant les équations (3.12) et (3.13) dans l'équation (3.5), en prenant les ordres quadratiques de p et q , pour les termes situés dans l'exponentielle, mais seulement les termes du premier ordre ailleurs, et en utilisant une procédure similaire à celle utilisée pour $E_x(x, y, z)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 E_z(x, y, z) &= \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{m} \exp\left[-\frac{k^2}{4}(w_{0x}^2 p^2 + w_{0y}^2 q^2)\right] e^{-ik(px+qy+mz)} dp dq \\
 &= \frac{\pi E_0 w_{0x} w_{0y}}{\lambda^2} \exp\left(-iQ_x \frac{x^2}{w_{0x}^2} - iQ_y \frac{y^2}{w_{0y}^2}\right) \exp(-ikz) \\
 &\quad \times \int \int_{-\infty}^{\infty} p \exp\left[-\frac{k^2 w_{0x}^2}{4iQ_x} \left(p - \frac{2Q_x x}{kw_{0x}^2}\right)^2 - \frac{k^2 w_{0y}^2}{4iQ_y} \left(p - \frac{2Q_y y}{kw_{0y}^2}\right)^2\right] dp dq
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

En utilisant encore les tables de formules intégrales, nous obtenons l'équation (3.17). De la même façon, nous pouvons obtenir les équations (3.18)-(3.20).

Appendix B

Expressions de $\Delta_r V$ et $\Delta_{\theta,\phi} V$

Les relations différentielles des différences entre la composante exprimée par le formalisme de Bromwich (équations (4.25)-(4.30)) et la composante approximative (équations (3.31)-(3.36)) sont données dans la section 4.2. Cette annexe est dédiée à présenter la procédure en détail.

En fait, les équations (4.36) et (4.37) peuvent être obtenues facilement en utilisant les équations (4.25)-(4.30) et la relation pour $\psi_n^{(1)}(kr)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right] \left(r \psi_n^{(1)}(kr) \right) = \frac{n(n+1)}{r} \psi_n^{(1)}(kr) \quad (\text{B.1})$$

Mais les relations (4.38) et (4.39) sont plus difficiles à obtenir.

Pour la composante TE de E_θ , nous appliquons l'opérateur $\Delta_{\theta,\phi}$ (équation (4.35)) sur le deuxième terme de l'équation (4.26), utilisons l'équation (4.21) et obtenons:

$$\begin{aligned} & \Delta_{\theta,\phi}(r E_{\theta,TE}^*) \\ &= -i\mu\omega H_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{n,TE}^m r \psi_n^{(1)}(kr) \Delta_{\theta,\phi} \left[\frac{P_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} \exp(im\phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En réalisant l'opérateur, on trouve:

$$\begin{aligned} & \Delta_{\theta,\phi} \left[\frac{P_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} \exp(im\phi) \right] \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En considérons l'équation de Legendre:

$$\frac{d^2 P_n^m(\cos \theta)}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0 \quad (\text{B.4})$$

et en utilisant les relations (4.28) et (B.1), les expressions dessus peut être réécrite comme:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) \right] (r E_{\theta,TE}^*) = \frac{i\mu\omega}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 H_r) \quad (\text{B.5})$$

Pour la composante TM de E_θ , des relations (4.26) et (4.20), il vient

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) \right] (r E_{\theta,TM}^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta \partial}{\sin \theta \partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Big] U_{TM} \quad (\text{B.6})$$

Notons que l'opérateur entre crochets [] contient uniquement des différentielles par rapport à θ et affecte seulement la fonction de Legendre P_n^m dans U_{TM} . Des équations (B.4), (B.1) et (4.25) il vient:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cos \theta \partial}{\sin \theta \partial \theta} - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) \right] (r E_{\theta, TM}^*) \\ &= -E_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{n, TM}^m r \psi_n^{(1)}(kr) n(n+1) \right. \\ & \quad \times \left. \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right) r^2 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{pw} g_{n, TM}^m \right. \\ & \quad \times \left. \frac{n(n+1)}{r} \psi_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right) (r^2 E_r) \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

En combinant les équations (B.5) et (B.7), nous obtenons finalement l'équation (4.38). L'équation (4.39) peut être obtenue similairement .

Appendix C

Démonstration d'une Inégalité des d_{2p+1} avec $j=1$

A partir de l'équation (4.67) ou (4.65), on a pour $j = 1$ la relation de récurrence de d_{2p+1}

$$d_{2p+3} = \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} [d_{2p+1}(8p^2 + 12p + 5) - d_{2p-1}(2p)(2p+1)] \quad (C.1)$$

Ainsi, nous obtenons de celle-ci:

$$d_3 = \frac{5}{6} \quad d_5 = \frac{89}{120} \quad d_7 = \frac{381}{560} \quad (C.2)$$

Pour la démonstration de la relation (4.68), soit:

$$d'_{2p+1} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \quad (C.3)$$

et

$$d''_{2p+1} = d_{2p+1} - d'_{2p+1} \quad (C.4)$$

Il est facile de démontrer que d'_{2p+1} et d''_{2p+1} obéissent la même relation de recurrence que d_{2p+1} (Rel. (C.1)) et

$$d''_3 = \frac{1}{6} \quad d''_5 = \frac{4}{25} \quad d''_7 = \frac{25}{112} \quad (C.5)$$

On a alors:

$$d''_5 > \frac{4}{5} d''_3 > 0 \quad (C.6)$$

et plus généralement on suppose:

$$d''_{2p+1} > \frac{2p}{2p+1} d''_{2p-1} > 0 \quad (C.7)$$

Nous pouvons démontrer d'après (C.1) et (C.5) que

$$\begin{aligned} d''_{2p+3} &> \frac{d''_{2p+1}}{(2p+2)(2p+3)} \left[(8p^2 + 12p + 5) - (2p)(2p+1) \frac{2p+1}{2p} \right] \\ &= \frac{2p+2}{2p+3} d''_{2p+1} > 0 \end{aligned} \quad (C.8)$$

Donc, la relation (C.7) est vraie pour tout p .

Finalement, on trouve à partir de (C.7), (C.4) et (C.3) que

$$d_{2p+1} > d'_{2p+1} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \quad (C.9)$$

C'est la relation (4.69).

Appendix D

g_n d'Onde Plane

Dans cette annexe nous démontrons analytiquement que les coefficients g_n de l'onde plane prévus par la méthode F2 sont indépendants du rayon de la surface sphérique a_s , et égaux identiquement à 1. Par substitution de l'équation (5.31) dans (5.23) et en prenant $z_0=0$ pour l'onde plane, on obtient:

$$g_n = \frac{ka_s}{2n(n+1)i^{n-1}(-1)^n\psi_n^{(1)}(ka_s)} \int_0^\pi P_n^1(\cos\theta) \sin^2\theta \exp(-ika_s \cos\theta) d\theta \quad (D.1)$$

En utilisant les relations de recurrence de P_n^1 , P_n et la formule de superposition (formules (3) p.239 et (15) p.399, Réf. [108]):

$$(2n+1) \sin\theta P_n^1(\cos\theta) = n(n+1)[P_{n+1}(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)] \quad (D.2)$$

$$e^{iy \cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \psi_n^{(1)}(y) P_n(\cos\theta) \quad (D.3)$$

et la formule (5.7), nous obtenons l'intégrale de l'équation (D.1) en notant $x = \cos\theta$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] e^{-ika_s x} dx \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) (-i)^m \psi_m^{(1)} \int_{-1}^1 [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] P_m(x) dx \\ &= -\frac{2n(n+1)}{2n+1} (-i)^{n-1} (\psi_{n+1}^{(1)} + \psi_{n-1}^{(1)}) \end{aligned} \quad (D.4)$$

En introduisant la relation de récurrence (formule (7) p.377 dans Réf. [108]):

$$\psi_{n+1}^{(1)} + \psi_{n-1}^{(1)} = \frac{2n+1}{x} \psi_n^{(1)}$$

dans l'équation (D.4), nous obtenons finalement:

$$g_n = \frac{ka_s}{2n(n+1)i^{n-1}(-1)^n\psi_n^{(1)}(ka_s)} \frac{2n(n+1)i^{n-1}(-1)^n\psi_n^{(1)}(ka_s)}{ka_s} = 1$$

Appendix E

Listing du programme GNMF

```
*****
*                               SUBROUTINE GNMF                               *
*                               =====                               *
*                               *                                           *
*   Ce programme calcule les coefficients g(n,m) du faisceau *
*   gaussien, par l'approximation localisee, en se basant sur *
*   les formules introduites dans le rapport interne:         *
*                               *                                           *
*   Calcul des Coefficients g(n,m) par l'approximation *
*   localisee: Nouvelle formulation.                            *
*                               *                                           *
*   Programme par:   Kuan Fang REN                                *
*                               *                                           *
*                               Decembre 1991                       *
*                               *                                           *
*-----*
*
*   Cette subroutine n'appelle pas d'autre soubroutine ou
*   fonction.
*
*   parametres:
*       x0ad, y0ad, z0ad : real*8, coordonnees adimensionnelle
*                               du centre du col faisceau Gauss sien
*                               vue du centre de la particule.
*       nfing : integer, maximum n de g(n,m) a calculer
*       s      : real*8, parametre du faisceau Gaussien,
*               s=w0/l=1/kw0
*               w0 est le rayon au col du faisceau Gaussien
*               k est le nombre d'onde.
*       esp    : real*8, control du precission de g(n,m).
*               Le programme se termine lorsque le terme a
*               rajouter dans la somme est inferieur a esp.
*   resultats :
*       gtm    : complex*16, g(n,m) pour l'onde TM.
*       gte    : complex*16, g(n,m) pour l'onde TE.
*
*****
```

subroutine gnmf(nfing,s,x0ad,y0ad,z0ad,esj)

```

implicit character*2 (a-z)
integer nfing,n,j,m,mm
real*8      s,x0ad,y0ad,z0ad,en,ej,em,r1,esj
complex*16  zi,a,b,c,d,am,bm,iqronw0,iqw2,xyn,xyp,iqbar
complex*16  gtm(1000,-10:10),gte(1000,-10:10)
complex*16  htm(-10:10),hte(-10:10),ht0
common      /g/gtm,gte

zi=cplx(0.0d+00,1.0d+00)
xyn=dcplx(x0ad,-y0ad)
xyp=dcplx(x0ad,y0ad)
iqbar=1.0d+00/(1.0d+00+2.0d+00*zi*z0ad)
do 10 n=1,nfing
  en=dble(n)
  iqronw0=iqbar*(en+0.5d+00)*s
  iqw2=iqronw0*iqronw0

* -----calculer htm(m) et hte(m)-----

* **** m=0 : formule (14) dans ce rapport ****

* .... j=0 ....

      ht0=iqronw0

* .... calculer les htm(0) et hte(0) ....

      a=iqronw0
      j=0

* ==== boucle j ===

20      j=j+1
      ej=dble(j*(j+1))
      a=a*iqw2*xyn*xyp/ej
      ht0=ht0+a
      if (cdabs(a).gt.esj) goto 20

      htm(0)=ht0*2.0d+00*x0ad
      hte(0)=ht0*2.0d+00*zi*y0ad

* *** m>0 et m<0 : formule (15) et (16) dans ce rapport ***

* ... donner les valeurs debutants aux htm(m) et hte(m) ...

      a=cplx(1.d+00,0.d+00)
      b=cplx(1.d+00,0.d+00)
      c=cplx(1.d+00,0.d+00)
      mm=min(n,10)
      do 25 m=1,mm
        em=dble(m)
        htm(m)=a*b

```

```

    hte(m)=htm(m)
    htm(-m)=a*c
    hte(-m)=-htm(-m)
    a=a*iqronw0
    b=b*xyn/em
    c=c*xyp/em
25    continue

*      .... calculer les htm(m) et hte(m) ....

    am=iqronw0
    bm=iqronw0
    d=iqw2*xyn*xyp

    do 30 m=1,mm

*      ==== calcule htm(m) et hte(m) pour j=1 ====

    am=am*iqronw0*xyn/dbble(m)
    htm(m)=htm(m)+am*(xyp+xyn/dbble(m+1))
    hte(m)=hte(m)+am*(xyp-xyn/dbble(m+1))
    bm=bm*iqronw0*xyp/dbble(m)
    htm(-m)=htm(-m)+bm*(xyp/dbble(m+1)+xyn)
    hte(-m)=hte(-m)+bm*(xyp/dbble(m+1)-xyn)
    a=am
    b=bm
    j=m

*      ==== boucle j ====

40    j=j+1
    c=d/dbble((j)*(j-m))
    a=a*c
    htm(m)=htm(m)+a*(xyp/dbble(j-m+1)+xyn/dbble(j+1))
    hte(m)=hte(m)+a*(xyp/dbble(j-m+1)-xyn/dbble(j+1))
    b=b*c
    htm(-m)=htm(-m)+b*(xyp/dbble(j+1)+xyn/dbble(j-m+1))
    hte(-m)=hte(-m)+b*(xyp/dbble(j+1)-xyn/dbble(j-m+1))
    if (cdabs(a).gt.esj.or.cdabs(b).gt.esj) goto 40

30    continue

*      ----- calculer gtm(n,m) et gte(n,m) -----

    r1=2.0d+00/(2.0d+00*en+1.0d+00)

    a=zi*z0ad/s/s-iqbar*(x0ad*x0ad+y0ad*y0ad)
    a=0.5d+00*iqbar*cdexp(a-iqronw0*iqronw0/iqbar)

    gtm(n,0)=r1*en*(en+1.0d+00)*a*htm(0)*zi
    gte(n,0)=r1*en*(en+1.0d+00)*a*hte(0)
    c=a

```

```
do 50 m=1,mm
  gtm(n,m)=c*htm(m)
  gte(n,m)=c*hte(m)*(-zi)
  gtm(n,-m)=c*htm(-m)
  gte(n,-m)=c*hte(-m)*(-zi)

  c=c*r1*(-zi)
50  continue
10  continue
    return
    end
```

Appendix F

Listing du Programme GNMSHF

```
*****
*                               SUBROUTINE GNMSHF                               *
*                               =====                               *
*                               *                                           *
*   Ce programme calcule les coefficients g(n,m) du faisceau *
*   feuille laser, par l'approximation localisee. *
*                               *                                           *
*   realise par:   Kuan Fang REN *
*                               *                                           *
*                               Decembre 1992 *
*                               *                                           *
* ----- *
*   Cette subroutine n'appelle pas d'autre soubroutine ou *
*   fonction. *
*   *
*   parametres: *
*   x0,y0,z0: real*8, coordonnees du centre du faisceau, *
*   vue du centre de la particule. *
*   w0x, w0y: real*8, longueurs des axes au col du faisceau *
*   dans les directions x et y respectivement. *
*   wl      : real*8, longueur d'onde du faisceau incident. *
*   nmax    : integer, maximum n de g(n,m) a calculer *
*   esp     : real*8, control du precission de g(n,m). *
*   Le programme se termine lorsque le terme a *
*   rajouter dans la somme est inferieur a esp. *
*   resultats : *
*   gtm     : complex*16, g(n,m) pour l'onde TM. *
*   gte     : complex*16, g(n,m) pour l'onde TE. *
*   *
*****
*
*   subroutine gnms1(wx,wy,wl,x0,y0,z0,nmax,esp)
*   implicit character*2 (a-z)
*   integer      n,m,i,i2,ij2,j,p,q
*   integer      minq,maxq,nmax,mmax,maxa,maxbc
*   real*8       pi,k,esp,wx,wy,wl,x0,y0,z0,rou
*   complex*16   zi,gtm(1000,-10:10),gte(1000,-10:10),t0,ri
*   complex*16   aa,a,b,c,a0,b0,c0,iqx,iqy,iqwx,iqwy
```

```

complex*16 af(0:400),bf(0:400),cf(0:400)
complex*16 abf(0:1000),acf(0:1000)
complex*16 fbm(0:100),fcm(0:100),ffbm,ffcm,ffbm0,ffcm0
common      /g/gtm,gte

if (nmax.gt.1000) stop "in gnms: 'n' too large"
pi=dacos(-1.0d+00)
zi=(0.0d+00,1.0d+00)
k=2*pi/wl
iqx=1/(1+2.0*zi*z0/k/wx/wx)
iqy=1/(1+2.0*zi*z0/k/wy/wy)
iqwx=iqx/wx/wx
iqwy=iqy/wy/wy
t0=0.5*cdsqrt(iqx*iqy)*cdexp(zi*k*z0-iqwx*x0*x0-
&      iqwy*y0*y0)
a0=-0.25*(iqwx-iqwy)
b0=iqwx*x0-zi*iqwy*y0
c0=iqwx*x0+zi*iqwy*y0

af(0)=1.0d+0
bf(0)=1.0d+0
cf(0)=1.0d+0
do 11 i=1,400
11  af(i)=0
    bf(i)=0
    cf(i)=0

do 200 n=1,nmax
mmax=min(10,n)
rou=(n+0.5)/k
aa=t0*cdexp(-0.5*(iqwx+iqwy)*rou*rou)
a=a0*rou*rou
b=b0*rou
c=c0*rou
1000 format(1x,'n=',i3,3x,'a=',2d22.16/9x,'b=',2d22.16
&      /9x,'c='2d22.16)

do 1 i=1,400
af(i)=af(i-1)*a/i
if (cdabs(af(i)).le.esp) goto 2
1  continue
stop "in gnms: dimension of 'af' not sufficient !"
2  maxa=i
do 3 i=1,400
bf(i)=bf(i-1)*b/i
cf(i)=cf(i-1)*c/i
if (cdabs(bf(i))+cdabs(cf(i)).le.esp) goto 4
3  continue
stop "in gnms: dimension of 'bf' or
&      'cf' not sufficient !"
4  maxbc=i

```

```

abf(0)=1.0d+00
abf(1)=b
acf(0)=1.0d+00
acf(1)=c
do 6 i=1,maxa+(maxbc+mmax)/2+1
i2=2*i
abf(i2)=0.0d+00
abf(i2+1)=0.0d+00
acf(i2)=0.0d+00
acf(i2+1)=0.0d+00
minq=max(0,i-maxbc/2)
maxq=min(maxa,i)
do 5 j=minq, maxq
ij2=2*(i-j)
abf(i2)=abf(i2)+af(j)*bf(ij2)
abf(i2+1)=abf(i2+1)+af(j)*bf(ij2+1)
acf(i2)=acf(i2)+af(j)*cf(ij2)
acf(i2+1)=acf(i2+1)+af(j)*cf(ij2+1)
5      continue
51     format(1x,3i3,4e17.9)
6      continue

do 30 i=0,mmax+1
ffbm=0.0d0
ffcm=0.0d0
do 20 j=0, maxbc
ffbm0=0.0d0
ffcm0=0.0d0
do 10 p=0, maxa
q=2*p+j+i
ffbm0=ffbm0+af(p)*abf(q)
ffcm0=ffcm0+af(p)*acf(q)
10     continue
ffbm=ffbm+cf(j)*ffbm0
ffcm=ffcm+bf(j)*ffcm0
20     continue
fbm(i)=ffbm
fcm(i)=ffcm
1030    format(1x,i3,4d14.6)
30     continue

ri=2*n*(n+1)/dble(2*n+1.0)*aa
gtm(n, 0)=zi*ri*(fcm(1)+fbm(1))
gte(n, 0)=ri*(fcm(1)-fbm(1))

ri=aa
do 50 m=1,mmax
gtm(n, m)= ri*(fbm(m-1)+fbm(m+1))
gte(n, m)=-zi*ri*(fbm(m-1)-fbm(m+1))
gtm(n,-m)= ri*(fcm(m-1)+fcm(m+1))
gte(n,-m)= zi*ri*(fcm(m-1)-fcm(m+1))
ri=ri*(-2*zi/(2*n+1))

```



```
50      continue
200      continue
201      format(1x,2i4,2(3x,a4,d13.6,d14.6))
      return
      end
```

Bibliography

- [1] R. J. Adrian. Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow: Speckle velocimetry versus particle image velocimetry. *Appl. Opt.*, 23(11):1690–1691, 1984.
- [2] R. J. Adrian. Multi-point optical measurements of simultaneous vectors in a steady flow – a review. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 7(2):127–145, 1986.
- [3] R. J. Adrian. The role of particle image velocimetry in fluid mechanics. In *Optical Methods and Data Processing in Heat and Fluid Flow*, pages 1–6, London, April 1992.
- [4] R. J. Adrian. *Statistical Properties of Particle Image Velocimetry Measurements in Turbulent Flow*, pages 115–129. Ladoan-Instituto Superior Técnico, Libon, Portugal, juillet 1986.
- [5] R. J. Adrian and et al. Proceedings of 6th and 7th intern. symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics, July 1992, 1994.
- [6] Aerometrics. Aerometrics Inc., P.O. Box 308, Mountain View, CA 94042, U.S.A.
- [7] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 24:156–159, 1970.
- [8] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria. *Science (Wash. D. C.)*, 235:1517–1520, 1987.
- [9] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Internal cell manipulation using infrared laser traps. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 86:7914–7918, 1989.
- [10] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, 11(5):288–290, 1986.
- [11] W. D. Bachalo. Method for measuring size and velocity of spheres by dual-beam light-scatter interferometry. *Appl. Opt.*, 19:363–369, 1980.
- [12] W. D. Bachalo and M. J. Houser. Phase/doppler spray analyzer for simultaneous measurements of drop size and velocity distributions. *Optical Eng.*, 23(5):583–590, Sept/Oct 1984.
- [13] W. D. Bachalo and S. V. Sankar. Analysis of the light scattering interferometry for spheres larger than the light wavelength. In *Proceed. of the 4th Int. Symp. on Appl. of Laser Anemometry to Fluid Mechanics*, Lisbon, 1988.
- [14] D. B. Barker and M. E. Fourney. Measuring fluid velocities with speckle patterns. *Opt. Letters*, 1(4):135–137, 1977.
- [15] J. P. Barton and D. R. Alexander. Fifth-order corrected electromagnetic field components for a fundamental Gaussian beam. *J. Appl. Phys.*, 66(7):2800–2802, October 1989.
- [16] J. P. Barton, D. R. Alexander, and S. A. Schaub. Internal and near-surface electromagnetic fields for a spherical particle irradiated by a focused laser beam. *J. Appl. Phys.*, 64(4):1632–1639, April 1988.

- [17] K. Bauckhage, H. H. Floegel, U. Fritsching, and R. Hiller. The phase-doppler-difference-method, a new-laser-doppler technique for simultaneous size and velocity measurements part 1, 2. *Part. Part. Syst. Charact.*, 5:16–22, 66–71, 1988.
- [18] L. P. Bayvel and A. R. Jones. *Electromagnetic Scattering and its Applications*. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1981.
- [19] C. F. Bohren and D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [20] Louis de Broglie. *Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [21] T. N. Buican, M. J. Smyth, H. A. Crissman, G. C. Salzmänn, C. C. Steward, and J. C. Martin. Automated single-cell manipulation and sorting by light trapping. *Appl. Opt.*, 26:5311–5316, 1987.
- [22] G. A. Campbell and R. M. Foster. *Fourier Integrals for Practical Applications*. Van Nostrand, New York, 1948.
- [23] W. H. Carter. Electromagnetic field of a Gaussian beam with an elliptical cross section. *J. Opt. Soc. Am.*, 62(10):1195–1201, Oct. 1972.
- [24] N. Chigier. *Combustion Measurements*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1991.
- [25] D. D. Clebsh, A. Cooke and M. Kerker. Ueber die reflexion an einer Kugelfläche. *J. für Math.*, 61:195–262, 1863.
- [26] Dantec. Medical and Scientific Equipment, Tonsbakken 16-1918, Skovlunde, Demark.
- [27] L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams. *Phys. Rev. A*, 19:1177–1179, 1979.
- [28] P. Debye. Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material. *Ann. der Phys*, 30:57–136, 1909.
- [29] J. B. Dementhon. *L'injection Essence dans un Moteur à Etincelle: Mesures Granulométriques par la Méthode des Phase Doppler et Phénomènes de Pulvérisation*. PhD thesis, Université de Rouen, France, janvier, 1992.
- [30] T. D. Dudderar and P. G. Simpkins. Laser speckle photography in a fluid medium. *Nature*, 270:45–47, 1977.
- [31] D. F. G. Durão, M. V. Heitor, J. W. Whitelaw, and P. O. Witze. *Combusting flow diagnostics*. Kluwer academic publishers, NATO ASI series (Advanced science institutes series), Dordrecht, 1992.
- [32] F. Durst and M. Zaré. Laser doppler measurements in two-phase flow. In *Proc. LDV Symposium*, pages 403–429, Copenhagen, 1975.
- [33] R. J. Goldstein. *Fluid Mechanics Measurements*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1983.
- [34] J. M. Goodman. *Introduction à l'Optique de Fourier et à l'Holographie*. Masson & CIE, 1972. Traduite par C. Durou et J. P. Pérez d'Original: *Introduction to Fourier Optics*, McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- [35] G. Goubau and F. Schwing. On the guided propagation of electromagnetic wave beams. *IRE Trans*, AP9:248–256, 1961.

- [36] G. Gouesbet. Quasi-elastic light scattering and applications to optical sizing. In *Combustion Flow Diagnostics*, pages 291–304. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [37] G. Gouesbet. Generalized Lorenz-Mie theory and applications. In *3rd Int. Congr. on Optical Particle Sizing*, pages 393–405, Yokohama, Japan, August 1993.
- [38] G. Gouesbet and G. Gréhan. *Optical Particle Sizing: Theory and Practice*. Plenum Press, New York, 1988.
- [39] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. Sur la généralisation de la théorie de Lorenz-Mie. *J. Optics (Paris)*, 13(2):97–103, 1982.
- [40] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. The order of approximation in a theory of the scattering of a Gaussian beam by a Mie scatter center. *J. Optics (Paris)*, 16(5):239–247, 1985.
- [41] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. Expressions to compute the coefficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory using finite series. *J. Optics (Paris)*, 19(1):35–48, 1988.
- [42] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. On the generalized Lorenz-Mie theory: first attempt to design a localized approximation to the computation of the coefficients g_n^m . *J. Optics (Paris)*, 20(1):31–43, 1989.
- [43] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. Localized interpretation to compute all the coefficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(6):998–1007, 1990.
- [44] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. Computation of the g_n coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory using three different methods. *Appl. Opt.*, 27(23):4874–4883, Dec. 1988.
- [45] G. Gouesbet, C. Letallier, K. F. Ren, and G. Gréhan. Discussion of two quadrature methods to evaluate beam shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. to be published in *Appl. Opt.*, 1995.
- [46] G. Gouesbet and J. A. Lock. A rigorous justification of the localized approximation to the beam shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory II: off-axis beams. *Proposed to J. O. S. A. A*, 1993.
- [47] G. Gouesbet, B. Maheu, and G. Gréhan. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 5(9):1427–1443, 1988.
- [48] G. Gréhan. *Théorie de Lorenz-Mie et Applications à la Granulométrie Optique*. PhD thesis, Thèse d'état, Université de Rouen, France, 1985.
- [49] G. Gréhan and G. Gouesbet. Optical levitation of a single particle to study the quasi-elastic scattering of light. *Appl. Opt.*, 19(15):2485–2487, 1980.
- [50] G. Gréhan, G. Gouesbet, A. Naqwi, and F. Durst. Particle trajectory effects in phase Doppler systems: computations and experiments. *Part. Part. Syst. Charact.*, 10:332–338, 1993.
- [51] G. Gréhan, G. Gouesbet, A. Naqwi, and F. Durst. Trajectory ambiguities in phase Doppler systems: study of a near-forward and near-backward geometry. to be published in *Part. Part. Syst. Charact.*, 1994.
- [52] G. Gréhan, G. Gouesbet, A. Naqwi, and F. Durst. Trajectory ambiguities in phase Doppler systems: use of polarizers and additional detectors to suppress the effect. In *6th Int. Symp. on Laser Techniques to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, July 1992. published also in *Part. Part. System. Charact.*

- [53] G. Gréhan, G. Gouesbet, A. A. Naqwi, and F. Durst. Evaluation of a phase doppler system using generalized Lorenz-Mie theory. In *Int. Conf. on Multiphase Flows'91, Tsukuba, Japan*, pages 291–296, 1991.
- [54] G. Gréhan, G. Gouesbet, A. A. Naqwi, and F. Durst. On elimination of the trajectory effects in phase doppler systems. In *5 th European Symposium Particle Characterization (PARTEC 92), Nurnberg*, pages 309–318, 24-26 March 1992.
- [55] G. Gréhan, B. Maheu, and G. Gouesbet. Scattering of laser beams by Mie scatter centers: numerical results using a localized approximation. *Applied Optics*, 25(19):3539–3548, 1986.
- [56] G. Gréhan, K. F. Ren, G. Gouesbet, A. Naqwi, and F. Durst. Evaluation of a particle sizing technique based on laser sheet. In *Proceedins of 3rd International Congress on Optical Particle Sizing*, pages 127–133, Yokohama, Japon, August 1993. published in *Part. Part. Syst. Charact.*, 1994.
- [57] R. Grousson and S. Mallick. Study of flow patterns in a fluid by scattered laser light. *Appl. Opt.*, 16(9):2334–2336, 1977.
- [58] F. Guilloteau, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Optical levitation experiments to assess the validity of the generalized Lorenz-Mie theory. *Applied Optics*, 31(15):2942–2951, 1992.
- [59] H. H. Hopkins. The numerical evaluation of the frequency response of optical systems. *Proc. Phys. Soc. B*, 70:1002–5, 1957.
- [60] InventGmbH. InventGmbH, Am Weichselgarten 21, D-8520 Erlangen, F. R. Germany.
- [61] M. Kerker. *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*. Academic Press, New York, 1969.
- [62] M. Kerker. *Selected Papers on Light Scattering*, volume I, II of *Milestone Series*. SPIE vol. 951, Washington, 1988.
- [63] J. A. Lock and G. Gouesbet. A rigorous justification of the localized approximation to the beam shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory I: on-axis beams. *Proposed to J. O. S. A. A*, 10, 1993.
- [64] N. A. Logan. Survey of some early studies of the scattering of plane waves by a sphere. In *Proceedings of the IEEE*, pages 773–785, August 1965. see also in *Selected papers of Light Scattering*, Part I of SPIE Milestone Series, SPIE Volume 951, ed. by Kerker (1988).
- [65] L. Lorenz. Lysbevaegelsen i og uden for en haf plane lysbølger belyst kulge. *Vidensk. Selsk. Skrifter*, 6:1–62, 1890. traduction française: “Sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente” dans *Oeuvres scientifiques de L. Lorenz*, vol. 1 pp405-529, revues et annotées par H. Valentiner, Librairie. Lehmann 1896, Reprinted, New York: Johnson 1964.
- [66] B. Maheu. *Généralisation de la Théorie de Lorenz-Mie et Applications*. PhD thesis, Université de Rouen, France, 1988.
- [67] B. Maheu, G. Gouesbet, and G. Gréhan. A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile. *J. Optics (Paris)*, 19(2):59–67, 1988.
- [68] B. Maheu, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Diffusion de la lumière par une sphère dans le cas d’un faisceau d’extension finie-1. théorie de Lorenz-Mie généralisée: coefficients g_n et leur calcul numérique. *J. Aerosol Sci.*, 19(1):47–53, 1988.

- [69] B. Maheu, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Ray location in Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 70(4):259–262, March 1989.
- [70] B. Maheu, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Laser beam scattering by individual spherical particle: Numerical results and application to optical sizing. In G. Gouesbet and G. Gréhan, editors, *Optical Particle Sizing: Theory and Practice*, pages 77–88, Rouen, France, May 1987. Plenum Press.
- [71] P. Massoli, F. Beretta, and R. D’Alessio. Single particle size, velocity and optical characteristics by the polarization properties of scattered light. *Appl. Opt.*, 28(6):1200–1205, 1989.
- [72] R. Meynart. Instantaneous velocity field measurements in unsteady gas flow by speckle velocimetry. *Appl. Opt.*, 22(4):535–540, 1983.
- [73] R. Meynart. Speckle velocimetry study of vortex pairing in a low-re unexcited jet. *Phys. Fluids*, 26(8):2074–2079, 1983.
- [74] G. Mie. Beiträge zur optik Trüber medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. der Phys*, 25:377–452, 1908.
- [75] J. Mroczka, K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Particle sizing by polarization ration: On the use of laser sheet. In *First Int. Confer. on Modelling in Measurement Processes*, pages 58–65, Wroclaw, Poland, June 1993.
- [76] A. A. Naqwi, F. Durst, and X-Z Liu. Two optical methods for simultaneous measurement of particle size, velocity, and refractive index. *Appl. Opt.*, 30:4949–4959, 1991.
- [77] A. A. Naqwi, X-Z Liu, and F. Durst. Dual-cylindrical wave method for particle sizing. *Part. Part. Syst. Charact*, 7:45–53, 1990.
- [78] A. A. Naqwi, X-Z Liu, and F. Durst. Evaluation of the dual-cylindrical wave laser technique for sizing of liquid droplets. *Part. Part. Syst. Charact*, 9:44–51, 1992.
- [79] A. A. Naqwi, W. C. Reynolds, and L. W. Carr. Dual-cylindrical wave laser doppler method for measurement of wall shear stress. In Mishina Adrian, Durão and Whitelaw, editors, *Laser Anemometry in Fluid Mechanics-II*, pages 105–122. LADOAN-Instituto Superior Tecnico, Lisbon, 1986.
- [80] A. A. Naqwi, W. C. Reynolds, and L. W. Carr. Dual-cylindrical wave laser-doppler method for measurinement of wall shear stress. In *Laser Anemometry in Fluid Mechanics -II*, pages 105–122. Ladoan-Instituto Superrior Técnico, Lisbon, Portugal, Juillet 1984.
- [81] A. A. Naqwi, M. Zieme, X. Liu, S. Hohmann, and F. Durst. Droplet and particle sizing using the dual cylindrical wave and the planar phase doppler optical systems combined with a transputer based signal processor. In *Proceedings of 6th Intern. Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, pages 15.3.1–15.3.6, Lisbon, juillet 1992.
- [82] C. J. D. Picking and N. A. Halliwell. Speckle photography in fluid flow: Signal recovery with two-step processing. *Appl. Opt.*, 23(8):112–1129, 1984.
- [83] C. Presser, A. K. Gupta, R. A. Dobbins, and H. G. Semerjian. Influence of size distribution on droplet mean diameter obtained by ensemble light scattering. In *Liquid particle size measurement techniques*, volume 2, pages 83–111, 1990.
- [84] C. Presser, A. K. Gupta, H. G. Semerjian, and R. J. Santoro. Application of laser diagnostic techniques for the examination of liquid fuel spray structure. *Chem. Eng. Comm.*, 90:75–102, 1990.

- [85] K. F. Ren, G. Gouesbet, G. Gréhan, and Y. P. Wang. Generalized Lorenz-Mie theory and its applications in optical particle sizing. *Chinese J. Radio Science*, 9(2):7–12, 1994. in chinese.
- [86] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Localized approximation of generalized Lorenz-Mie theory: fast algorithm for computations of beam shape coefficients g_n^m . *Part. Part. Syst. Charact.*, 9:144–150, 1992.
- [87] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Laser sheet scattering by spherical particles. *Part. Part. Syst. Charact.*, 10:146–151, 1993.
- [88] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Electromagnetic field expression of laser sheet and its order of approximation. *J. Opt. (Paris)*, 25(4):165–176, 1994.
- [89] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Evaluation of laser beam shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory by using a localized approximation. *J. Opt. Sci. Am. A*, 11(7):2072–2079, 1994.
- [90] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Laser imaging of small particles by using the Lorenz-Mie theory. In X. J. Chen, T. K. Chen, and F. D. Zhou, editors, *Multiphase flow and heat transfer*, volume 1, pages 787–794, Xi'an (China), 1994. Xi'an Jiaotong University Press (Xi'an, China), Begell, Inc. (New York, USA).
- [91] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Radiation pressure forces exerted on a particle arbitrarily located in a Gaussian beam by using the generalized Lorenz-Mie theory, and associated resonance effects. *Opt. Commun.*, 108:343–354, 1994.
- [92] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Symmetry relations in generalized Lorenz-Mie theory. *J. Opt. Sci. Am. A*, 11(6):1812–1817, 1994.
- [93] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. On prediction of reverse radiation pressure by generalized Lorenz-Mie theory. to be published in *Appl. Opt.*, 1995.
- [94] K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Relations de symétrie des coefficients g_n^m de théorie de Lorenz-Mie généralisée. Technical report, Rapport interne du LESP, INSA de Rouen, Mt-St-Aignan, France, fév. 1992.
- [95] G. Roosen. A theoretical and experimental study of the stable equilibrium positions of spheres levitated by two horizontal laser beams. *Optics Commun.*, 21(1):189–194, 1977.
- [96] G. Roosen, B. F. St. Louvent, and S. Slansky. Etude de la pression de radiation exercée sur une sphère creuse transparente par un faisceau cylindrique. *Optics Commun.*, 24(1):116–120, 1978.
- [97] C. H. Ryan, A. Pal, W. Lee, and R. J. Santoro. Droplet distribution effects on planar laser imaging of sprays. Personal communication.
- [98] M. Saffman, P. Buchhave, and H. Tanger. Simultaneous measurements of size, concentration and velocity of spherical particles by a laser doppler method. In R. J. Adrian, D. F. G. Durão, F. Durst, H. Mishina, and J. H. Whitelaw, editors, *Laser Anemometry to Fluid Mechanics-II*, pages 85–103. LADOAN-Instituto Superior Técnico, Lisbon, 1984.
- [99] S. V. Sankar, A. Inenaga, and W. D. Bachalo. Trajectory dependent scattering in phase doppler interferometry: minimizing and eliminating sizing error. In *6th Int. Symp. on Appl. of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, pages 12–2, Lisbon, Portugal, July 1992.
- [100] S. A. Schaub, D. R. Alexander, and J. P. Barton. Theoretical model of laser imaging of small aerosols: application to aerosol sizing. *Appl. Opt.*, 30(33):4777–4784, 1991.

- [101] S. A. Schaub, J. P. Barton, and D. R. Alexander. Simplified scattering coefficient expressions for spherical particle located on the propagation axis of a fifth-order Gaussian beam. *J. Phys. Lett.*, 55(26):2709–2711, December 1989.
- [102] J. J. Stamnes. *Wave in Focal Regions*. Adam Hilger, 1986.
- [103] G. G. Stokes. On the dynamical theory of diffraction. *Camb. Phil. Trans.*, 2:1–34, 1849. Reprinted in *Mathematical and Physical Papers* ed. by G. G. Stokes vol. 2 pp241-328 Cambridge, England: University Press 1881-1904.
- [104] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.
- [105] C. B. S. Tom, H. Gerlo, G. G. Bart, and G. Jan. Experimental and theoretical investigations on the validity of geometrical optics model for calculating the stability of optical traps. *Cytometry*, 12:479–485, 1991.
- [106] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Wiley, New York, 1957.
- [107] H. C. van de Hulst and R. T. Wang. Glare points. *Appl. Opt.*, 30(33):4755–4763, 1991.
- [108] Z. X. Wang and D. R. Guo. *Special Functions*. World Scientific, Singapore, 1989.

Une feuille laser, définie comme un faisceau gaussien de section elliptique, est de plus en plus utilisée dans les applications des techniques de mesure pour élargir le domaine mesurable ou pour simplifier le traitement des signaux.

Cette thèse concerne l'extension de la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée (TLMG) à la diffusion des faisceaux feuille laser par une particule sphérique et ses applications aux écoulements diphasiques.

Une description mathématique du faisceau feuille laser est dérivée avec deux méthodes différentes.

L'intérêt de la TLMG dépend fortement de notre capacité de calcul des coefficients g_n^m décrivant la forme du faisceau. L'utilisation de l'interprétation localisée dans le calcul des g_n^m des faisceaux gaussiens est étendue aux faisceaux feuille laser. Deux méthodes d'intégration et une interprétation-localisée-intégrale pour le calcul des coefficients sont étudiées.

L'outil théorique développé est alors appliqué à la discussion de la pression de radiation exercée sur une particule. La théorie de la diffusion de deux faisceaux est présentée et appliquée à l'évaluation d'un système de mesure réel. De plus, un modèle d'imagerie basé sur la TLMT est développé pour un objet localisé arbitrairement dans un faisceau (orienté ou polarisé arbitrairement). L'objet peut être une particule homogène ou concentrique, un trou ou une fente annulaire.

Mots clés

- Diffusion de la lumière
- Théorie de Lorenz-Mie Généralisée
- Faisceau laser
- Granulométrie optique
- Imagerie d'une particule
- Pression de radiation
- Ecoulement diphasique