UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Section des Sciences de l'Éducation

Sous la direction de Stéphane CLIVAZ et Jean-Luc DORIER

Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation *lesson study* en mathématiques

THESE
Présentée à la
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Éducation

par Valérie BATTEAU
de Saint-Brieuc (France)

Thèse No 708

Genève

Mai 2018

UNIVERSITE DE GENEVE
FACULTE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
SECTION DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

ANNEXES

Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation *lesson study* en mathématiques

Valérie Batteau

COMPOSITION DU JURY DE THESE

Stéphane Clivaz (Directeur de thèse), Haute École Pédagogique Vaud
Jean-Luc Dorier (Directeur de thèse), Université de Genève

Christine Mangiante, Université d'Artois, France
Takeshi Miyakawa, Joetsu University of Education, Japon
Éric Roditi, Université Sorbonne Paris Cité, France
Bernard Schneuwly, Université de Genève

Annexes

Partie 1 Documents relatifs aux leçons observées avant le dispositif LS 7

Annexe 1 Classe d'Anaïs : « Les 9 boules de cristal » 7
Annexe 2 Livre du maître
Annexe 3 Balises 9
Annexe 4 Analyse *a priori* 10

Annexe 5 « En pièces » 17
Annexe 6 Livre du maître : liste du matériel 18

Annexe 7 Classe d'Océane : « La face cachée » 19
Annexe 8 Balises 20
Annexe 9 Analyse *a priori* 21

Annexe 10 « Altitude 1111 » 26

Annexe 11 Classe de Valentine 27

Partie 2 Documents relatifs au cycle *a* sur la numération 28

Annexe 12 « Un drôle de jeu de l'oie... », 1ère leçon de recherche 28
Annexe 13 Livre du maître 29
Annexe 14 Analyse *a priori* 32
Annexe 15 Plan de leçon 37

Annexe 16 « Jeu de la toupie », 2ème leçon de recherche 38
Annexe 17 Plan de leçon 40

Partie 3 Documents relatifs au cycle *b* sur la géométrie 41

Annexe 18 « Aquarium » 41
Annexe 19 Commentaires généraux du livre du maître 42
Annexe 20 Livre du maître 44
Annexe 21 Balises 45

Annexe 22 « Dans l'aquarium » : activité modifiée par le GLS 46
Annexe 23 Fiche élève 48
Annexe 24 Fiches d'institutionnalisation 49
Annexe 25 Matériel à découper - chablons 51
Annexe 26 Plan de leçon 52
Annexe 27 Analyse *a priori* 54

Annexe 28 Production de Grégoire lors de la phase 1, annotée par Océane 61
Annexe 29 Production d'Elodie lors de la phase 1, annotée par Océane 62
Annexe 30 Production de Laure lors de la phase 1, annotée par Océane 63
Annexe 31 Analyse des productions des élèves après la phase 2 64

Annexe 32 « Une ombre au tableau » 65

Partie 4 Documents relatifs aux cycles c et *d* sur la résolution de problèmes 66

Annexe 33 Cycle *c* – « En promotion » 66
Annexe 34 Balises 67

Annexe 35 Cycle *c* – « Promotion » 68
Annexe 36 Analyse *a priori* 69
Annexe 37 Plan de leçon 72
Annexe 38 « Une autre promotion » 73

Annexe 39 Cycle *d* - « Les 99 carrés » 74
Annexe 40 Balises 75
Annexe 41 Analyse *a priori* 76

Partie 5 Documents relatifs aux leçons observées après le dispositif LS 79

Annexe 42 Classe d'Anaïs : « Main pleine » 79
Annexe 43 Balises 80
Annexe 44 Analyse *a priori* 81

Annexe 45 Classe d'Océane : « Plions » 84
Annexe 46 Balises 85
Annexe 47 Analyse *a priori* de « Plions » 86

Annexe 48 Classe de Valentine : « Les 9 boules de cristal » notes de préparation 88
Annexe 49 Productions d'élèves 89

Annexe 50 « Buffet de la gare » 90

Partie 6 Répartition des aides personnelles et collectives 91

Annexe 51 Pratiques d'Anaïs 92
Annexe 52 Pratiques d'Océane 93
Annexe 53 Pratiques de Valentine 95

Partie 7 Présentation des données 96

Annexe 54 Calendrier 96
Annexe 55 Tableau des nœuds utilisés dans le logiciel d'analyse 99
Annexe 56 Correspondance des degrés scolaires 102

Partie 8 Bibliographie des annexes 103

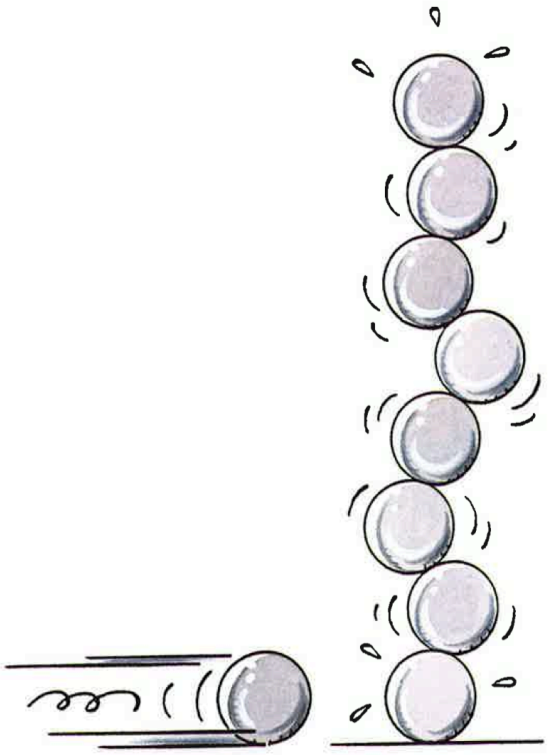
Partie 1 Documents relatifs aux leçons observées avant le dispositif LS

Annexe 1 Classe d'Anaïs : « Les 9 boules de cristal »

Activité observée dans les classes d'Anaïs avant le dispositif LS et de Valentine lors de la leçon après le dispositif LS.

Les 9 boules de cristal

Cherche tous les nombres que l'on peut représenter sur un boulier à 2 tiges en utilisant 9 boules au maximum.



45

(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998b, p. 45)

Annexe 2 Livre du maître

2 - C

Vanille - Fraise

Tâche
- Rechercher le nombre de boules nécessaires pour représenter certains nombres sur un boulier.

Nombre d'élèves
- 2

Matériel
- MC: 1 boulier

Consigne
- *"Commandez le nombre minimal de boules qu'il faudrait pour représenter sur un boulier n'importe quel nombre compris entre 1 et 45."*

Mise en œuvre
- L'enseignant s'assure que les élèves connaissent le fonctionnement du boulier à tiges. Sinon, il leur propose d'en découvrir le fonctionnement, par exemple à travers l'activité **"Le bon berger"**.

Déroulement
Validation
- L'enseignant remet le boulier en même temps que les boules commandées. Il n'intervient pas sur les commandes.

Mise en commun
- Les élèves confrontent les démarches utilisées pour respecter la contrainte du minimum de boules.

Prolongement
- **"Les 9 boules de cristal"** LE p. 45

(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998c, p. 106)

Annexe 3 Balises

Les manuels Balises[1] de mathématiques des niveaux 5-6H sont destinés à accompagner les enseignants (et futurs enseignants) dans la préparation des activités de mathématiques. Ce manuel fournit des informations didactiques et méthodologiques s'accompagnant de remarques d'ordre organisationnel et conceptuel.

3P Module 2C **Vanille - Fraise**
LM p 106

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique	→	Représenter un nombre sur un boulier.
Liens principaux PER	→	MSN 22 [1] [2] MSN 25 [A] [C] [D]
Priorité	→	faible [ ] [ ] [ ] forte
Gestion	→	Activité à 2
Planification dans l'année	→	Dès avril
Verticalité	→	**3P** Module 2B **En boules** LM p. 83, Balises p.49 **3P** Module 2C **Le bon berger** LM p. 96, Balises p.70 **4P** Module 2C **Vanille, fraise, chocolat** LM p. 108, Balises p. 86
Prolongement	→	**Les 9 boules de cristal** LE p. 45

Commentaires

La connaissance du boulier est nécessaire.
Toutes les activités citées sous **Verticalité** utilisent le boulier.
On peut proposer l'activité "Le bon berger", LM p. 96 pour préparer cette activité.

Prolongement : Les 9 boules de cristal LE p. 45

Un boulier avec 2 tiges, celle des dizaines et celle de unités, permet de représenter 55 nombres :

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	12	14	15	16	17	18	
20	21	22	23	24	25	26	27		
30	31	32	33	34	35	36			
40	41	42	43	44	45				
50	51	52	53	54					
60	61	62	63						
70	71	71							
80	81								
90									

(Maréchal & Gaggero, 2011a, p. 70)

[1] Ces commentaires ont été repris du site http://www.hep-bejune.ch/boutique/pratiques/balises-maths-4p consulté le 31 Mars 2015.

Annexe 4 Analyse *a priori*

Cette analyse *a priori* de l'activité « Les 9 boules de cristal » a été publiée en partie dans un article (Batteau, 2015).

Connaissances mathématiques en jeu

Dans le livre du maitre (Danalet et al., 1998b, p. 45), cette activité se situe dans le Module 2, champs C, « Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens » :

Établir le lien entre une collection organisée en unités, dizaines, centaines, milliers, ..., son écriture chiffrée et sa désignation orale. Notions : le système décimal. Compétences : utiliser différentes désignations d'un nombre, estimer, dénombrer et comparer de grandes collections, décomposer un nombre en milliers, centaines, dizaines, unités, extraire le nombre de dizaines ou de centaines d'un nombre. (p. 63)

Les élèves doivent représenter des nombres avec des boules qu'ils enfilent sur un boulier à deux tiges. L'utilisation du matériel est imposée pour représenter les nombres et dans le livre du maitre, il est précisé que les bouliers

> sont les modèles les plus proches de l'écriture habituelle d'un nombre dans un système de numération de position. Ils sont aussi très performants pour les opérations, mais ils exigent une compréhension parfaite de la valeur positionnelle des chiffres. Le rôle et l'importance du 0 sont ici matériellement illustrés : une tige vide de boule doit obligatoirement être caractérisée par une écriture correspondante. Exemples : Vanille-Fraise. (p. 61)

Les indications données ci-dessus sont issues du livre du maitre, en revanche l'enseignant a la charge de décoder explicitement les connaissances mathématiques en jeu dans l'activité, à savoir :

- l'aspect positionnel du système de numération
- la représentation de nombres sur un boulier
- le passage du nombre représenté sur un boulier à son écriture chiffrée

Cette activité fait travailler également la mise en œuvre d'une démarche de résolution : une procédure systématique de comptage pour trouver la liste exhaustive des solutions.

Stratégies

Une <u>première stratégie</u> possible se place dans le registre des écritures chiffrées (on considère ici les nombres de 0 à 99, étant entendu que les nombres de 0 à 9 seront considérés comme ayant un chiffre des dizaines nul, i.e. une tige du boulier vide). On cherche donc tous les nombres que l'on peut représenter de dizaine en dizaine : de 0 à 9, puis de 10 à 19, puis de 20

à 29, ..., jusqu'à de 90 à 99, avec la contrainte que la somme des chiffres des dizaines et des unités soit inférieure ou égale à 9.
Les solutions sont donc : 0; 1; 2; ... 9; 10; 11; ... 18; 20; 21; ... 27; 30; ... 36; ... 80; 81; 90.
$10 + 9 + 8 + 7 + \cdots + 1 = 55$. Il y a donc 55 solutions.

Une <u>deuxième stratégie</u> possible est d'utiliser un boulier à deux tiges pour mettre en œuvre cette même démarche de comptage. On enfile les boules une à une sur la tige des unités, on écrit le nombre représenté à chaque fois que l'on enfile une boule. Ensuite, on enlève toutes les boules et on recommence en mettant une boule sur la tige des dizaines et en enfilant une à une les huit boules restantes sur la tige des unités. Il faut recommencer cette marche à suivre jusqu'au moment où on enfile les neuf boules sur la tige des dizaines. On obtient ainsi les 55 solutions. Pour les trouver tous, il faut mettre en place une procédure systématique de comptage avec un boulier. Dans ce cas, on peut se poser la question de savoir si la représentation par le boulier est une aide et s'il n'est en fait pas plus simple de se poser directement la tâche dans le registre des écritures chiffrées.

Une <u>troisième stratégie</u> possible consiste à chercher tous les nombres que l'on peut représenter avec une boule, puis avec deux boules, ..., et enfin avec neuf boules sur un boulier, en reprenant la même marche à suivre que précédemment.

Nombre maximum de boules utilisées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Solutions	0	0 ; 1 ; 10	0 ; 1 ; 10 ; 2 ; 11 ; 20	0 ; 1 ; 10 ; 2 ; 11 ; 20 3 ; 12 ; 21 ; 30	0 ; ... 40	0 ; ... 50	0 ; ... 60	0 ; ... 70	0 ; ... 80	0 ; ... 90
Nombre de solutions	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Tableau 1 Tableau du nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

Avec zéro boule, il y a le nombre 0. Il y a donc 1 nombre possible.
Avec une boule au maximum, il y a le nombre formé avec zéro boule auquel on ajoute les nombres formés avec exactement une boule 1 ; 10. Il y a donc 3 solutions.
Avec deux boules au maximum, il y a les nombres formés avec une boule au maximum (0 ; 1 ; 10) auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement deux boules 2 ; 11 ; 20. Il y a donc 6 solutions.
Ainsi de suite, jusqu'à neuf boules, on trouve tous les nombres formés avec huit boules au maximum auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement neuf boules 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90. On trouve donc les 55 solutions. Pour mettre en œuvre cette stratégie, l'utilisation du boulier est pertinente.

Une quatrième stratégie est de se placer dans le registre des écritures chiffrées pour mettre en œuvre cette démarche de comptage. On cherche tous les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à 2, puis à 3,..., jusqu'à 9.

Les stratégies les plus pertinentes sont la troisième avec l'utilisation du boulier et la première dans le registre des écritures chiffrées.

Etude des variables didactiques

Une première variable didactique est le fait d'utiliser exactement neuf boules ou au maximum neuf boules. Laisser la possibilité d'utiliser au maximum neuf boules et non exactement neuf boules pour représenter des nombres représente une difficulté supplémentaire. En effet, si l'activité consiste à représenter tous les nombres possibles sur un boulier à deux tiges avec exactement neuf boules, celle-ci est beaucoup plus simple et s'apparente au dénombrement des décompositions additives en deux termes de neuf. Il n'y a que dix nombres possibles (9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90). Une procédure consiste à mettre toutes les boules sur la tige qui représente le chiffre des unités, de noter le nombre représenté, de passer une boule sur la tige qui représente le chiffre des dizaines, de noter le nombre représenté, ainsi de suite, en passant les boules une à une. L'utilisation du boulier dans cette procédure permet de représenter les nombres et aide à trouver la liste exhaustive de tous les nombres possibles. Dans l'activité, la variable didactique est d'utiliser au maximum neuf boules, cela implique de mettre en place une procédure systématique de comptage pour trouver tous les nombres solutions.

Une seconde variable didactique est le fait d'utiliser ou non un boulier. En effet, cela n'implique pas les mêmes représentations du nombre. Sur un boulier à deux tiges, nous pouvons représenter uniquement des nombres entiers à un ou deux chiffres. Le fait de disposer de neuf boules au maximum implique que le nombre de boules qui représente le chiffre des dizaines ajouté au nombre de boules qui représente le chiffre des unités est inférieur ou égale à neuf. La retranscription dans le registre sémiotique des écritures chiffrées consiste à rechercher les nombres entiers à un chiffre ou à deux chiffres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à neuf. Comme nous l'avons vu, certaines procédures sont pertinentes avec ou sans l'utilisation d'un boulier.

Une troisième variable didactique est le nombre de tiges à utiliser pour représenter des nombres sur un boulier.

Avec un boulier à une tige, le domaine numérique est restreint aux nombres de 0 à 9 en utilisant neuf boules au maximum. Tous les nombres possibles étant solutions, l'activité ne présente pas d'intérêt mathématique.

Avec un boulier à deux tiges, le domaine numérique est restreint aux nombres de 0 à 99. Les élèves ne pouvant utiliser que neuf boules au maximum, le domaine numérique est donc réduit de 0 à 90. Avec ce boulier, tous les nombres possibles ne sont pas solution, il faut exclure les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est supérieure ou égale à dix. Le nombre de solutions étant important (55 nombres), cela incite les élèves à mettre en place une procédure systématique de comptage que ce soit avec ou sans boulier.

Avec un boulier à trois tiges, le domaine numérique est restreint de 0 à 900 en utilisant neuf boules au maximum. Le nombre de solutions (220) étant important, les procédures consistant à rechercher toutes les solutions avec un boulier ou dans le registre des écritures chiffrées sont toujours possibles mais coûteuses en temps. La procédure optimale est une procédure utilisant des suites.

En comptant de centaines en centaines, on obtient les solutions dans le tableau ci-contre.

Intervalle	[0 ; 100[	[100 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 400[	[400 ; 500[
Solutions	0 ;... ; 90	100 ;... ; 108 ; 110 ;... ; 117 ;... ; 180	200 ;... ; 207 ; 210 ;... ; 216 ;... ; 270	300 ;... ; 306 ; 310 ;... ; 315 ;... ; 360	400 ;... ;405 ; 410 ;... ; 414 ;... ; 450
Nombre de solutions	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55 = t_{10}	9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 = t_9	8+7+6+5+4+3+2+1 = 36 = t_8	7+6+5+4+3+2+1 = 28 = t_7	6+5+4+3+2+1 = 21 = t_6
Intervalle	[500 ; 600[	[600 ; 700[	[700 ; 800[	[800 ; 900[	[900 ; 1000[
Solutions	500 ;... ; 504 ; 510 ;... ; 513 ;... ; 540	600 ;... ; 603 ;610 ;... ; 612 ; 620 ; 621 ; 630	700 ; 701 ; 702 ; 710 ; 711 ; 720	800 ; 801 ; 810	900
Nombre de solutions	5+4+3+2+1 = 15 = t_5	4+3+2+1 = 10 = t_4	3+2+1 = 6 = t_3	2+1 = 3 = t_2	1 = t_1

Tableau 2 Tableau du nombre de solutions par intervalle

De [0 ; 100[, on retrouve les solutions sur un boulier à deux tiges.

Les nombres de solutions correspondent aux dix premiers nombres triangulaires.

Le nombre triangulaire d'indice 1 est 1 ; le nombre triangulaire d'indice n est défini par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $t_n = 1 + 2 + \cdots + n$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour trouver le nombre total de solutions de [0 ; 1000[, on calcule la somme du nombre de solutions pour chaque intervalle, autrement dit $\sum_{i=1}^{10} t_i$. On définit alors la suite (u_n) par :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n correspond au nombre tétraédrique de rang n. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Donc de [0 ; 1000[, il y a $u_{10} = \frac{10(10+1)(10+2)}{6}$= 220 solutions.

Il y a donc 220 solutions sur un boulier à trois tiges en utilisant neuf boules au maximum.

Avec un boulier à quatre tiges et neuf boules au maximum, le domaine numérique est restreint de 0 à 9000. La procédure optimale est également une procédure utilisant des suites.

En comptant de centaines en centaines, on obtient le nombre de solutions dans le tableau ci-dessous.

Intervalle	[1000 ; 1100[	[1100 ; 1200[	[1200 ; 1300[
Nombre de solutions	9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 $= t_9$	8+7+6+5+4+3+2+1 = 36 $= t_8$	7+6+5+4+3+2+1 = 28 $= t_7$
Intervalle	[1300 ; 1400[	[1400 ; 1500[	[1500 ; 1600[
Nombre de solutions	6+5+4+3+2+1 = 21 $= t_6$	5+4+3+2+1 = 15 $= t_5$	4+3+2+1 = 10 $= t_4$
Intervalle	[1600 ; 1700[	[1700 ; 1800[	[1800 ; 2000[
Nombre de solutions	3+2+1 = 6 $= t_3$	2+1 = 3 $= t_2$	1 $= t_1$

Tableau 3 Tableau du nombre de solutions par intervalle

De [1000 ; 2000[, le nombre de solutions correspond à la somme des neuf premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire à $u_9 = \frac{9(9+1)(9+2)}{6}$= 165.

De manière analogue, de [2000 ; 3000[, le nombre de solutions correspond à la somme des huit premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire à $u_8 = \frac{8(8+1)(8+2)}{6} = 120$.

Ainsi de suite jusqu'à [9000 ; 10000[, où on trouve 1 seule solution (le nombre 9000).

Pour avoir le total de solutions de [0 ; 10000[, il faut donc calculer :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 + u_{10} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 = 715$$

Il y a donc 715 solutions sur un boulier à 4 tiges en utilisant 9 boules au maximum.

Nous voyons qu'à partir de trois tiges sur un boulier, il y a un saut informationnel car l'activité devient beaucoup trop complexe pour le niveau scolaire concerné et les procédures efficaces avec un boulier à deux tiges deviennent trop longues. « De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances » (Danalet et al., 1998c, p. 67). Dans notre cas, les nouvelles connaissances sont les calculs des nombres triangulaires, des nombres tétraédriques et de leurs sommes.

Une quatrième variable didactique est le nombre de boules que l'on peut utiliser au maximum sur un boulier à deux tiges.

Nombre maximum de boules utilisées	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de nombres solutions	64 $= 100 - t_8$	72 $= 100 - t_7$	79 $= 100 - t_6$	85 $= 100 - t_5$	90 $= 100 - t_4$	94 $= 100 - t_3$	97 $= 100 - t_2$	99 $= 100 - t_1$	100

Tableau 4 Tableau du nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

Le domaine numérique est restreint de 0 à 99 et le nombre maximum de boules que l'on peut utiliser est donc 18. Si on utilise de 0 à 9 boules au maximum, le nombre de solutions correspond à la suite des dix premiers nombres triangulaires t_1 à t_{10} (voir Tableau 3). Ce qui est intéressant de remarquer, c'est qu'à partir de 10 boules, nous ne retrouvons pas la suite des nombres triangulaires (Tableau 4) car notre système de numération est en base dix. La somme des chiffres des dizaines et des unités des nombres sur une même diagonale est constante (Tableau 5).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Tableau 5 Tableau de nombres de 0 à 99

Avec 18 boules au maximum, les 100 nombres possibles sont tous des solutions.

Avec 17 boules au maximum, la stratégie optimale est de passer au complémentaire, sachant que la somme des chiffres des dizaines et des unités est 18, il n'y a qu'un seul nombre qui n'est pas solution (99). Il y a donc 100-1= 99 solutions.

Avec 16 boules au maximum, il y a donc 100 – (1+2)= 97 solutions.

Avec 15 boules au maximum, il y a 100 – (1+2+3) = 94 solutions. Et ainsi de suite jusque 10 boules au maximum.

Cette analyse *a priori* présente que différentes stratégies sont envisageables avec ou sans utiliser de boulier, que les variables didactiques à disposition de l'enseignant (le fait d'utiliser exactement ou au maximum neuf boules, utiliser ou non un boulier, le nombre de tiges sur le boulier, le nombre de boules au maximum) impliquent des procédures et des connaissances mathématiques différentes, et donc différentes activités possibles pour les élèves.

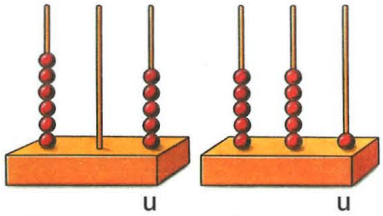
Annexe 5 « En pièces »

Classe d'Anaïs : activité proposée aux trois élèves de l'« atelier 3 » pendant la leçon avant le dispositif LS.

En pièces

Xavier et Denise jouent à "En boules" (LE) avec 11 boules.

Voici deux essais de Xavier et les réponses de Denise.

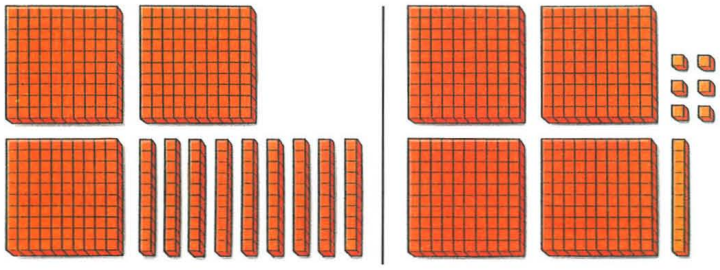


Trop grand *Trop petit*

Dessine la collection de Denise.

Pour la partie suivante, ils décident de remplacer les bouliers par des blocs base dix. Ils utilisent 11 pièces de leur choix.

Voici deux essais de Denise et les réponses de Xavier.



Trop petit *Trop grand*

Dessine la collection de Xavier.

21

(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998a, p. 21)

Annexe 6 Livre du maître : liste du matériel

Dans le matériel de classe prévu dans les Moyens d'Enseignement Romand, les bouliers sont des bouliers à 4 tiges.

Liste du matériel

Objet	Dénomination	Description	Dotation
Matériel enseignant	Livre du maître (LM)	276 pages A4	1 par enseignant
Matériel élève	Livre de l'élève (LE)	128 pages	1 par élève
	Fichier de l'élève (FE)	68 pages A4	1 par élève
	Formes prédécoupées élève	10 pages A4	1 par élève
Fichier de classe (FC)	Formes prédécoupées classe	14 pages A4	1 pour 8 élèves
	Plans de jeu	6 plans A3	1 pour 8 élèves
	Petit Fichier (PF)	64 fiches A5	1 par classe
Cartes	"Cartes numériques"	jeu de 153 cartes	1 jeu pour 8 élèves
	"Main pleine"	jeu de 64 cartes	1 jeu pour 8 élèves
Matériel de classe (MC)	Blocs base 10	1 dm^3, 20 plaques, 20 réglettes, 20 x 1 cm^3	1 boîte pour 8 élèves
	Multicubes	500 multicubes (8 couleurs)	1 boîte pour 12 élèves
	Dés à 6 faces et à 10 faces	1 sachet de 24 dés (12 de chaque sorte)	1 sachet pour 6 élèves
	Plaquettes	80 triangles, 40 carrés, 12 pentagones	1 boîte pour 12 élèves
	Boulier	boulier à 4 tiges et 40 boules	1 boulier pour 6 élèves
	Jetons	4 x 350 jetons (4 couleurs)	1 paquet par classe
	Papier	calque quadrillé 1 cm quadrillé 2 cm quadrillé 3 cm	100 feuilles par classe 300 feuilles par classe 100 feuilles par classe 100 feuilles par classe

Matériel

270

(Danalet et al., 1998c, p. 270)

Annexe 7 Classe d'Océane : « La face cachée »

Activité observée dans la classe d'Océane en 6H avant le dispositif LS.

La face cachée

Tâche

- Former, à l'aide de chiffres donnés, le nombre le plus proche d'un nombre-cible.

Déroulement

Validation

- Les élèves comparent les nombres par estimation ou par calcul de la différence.

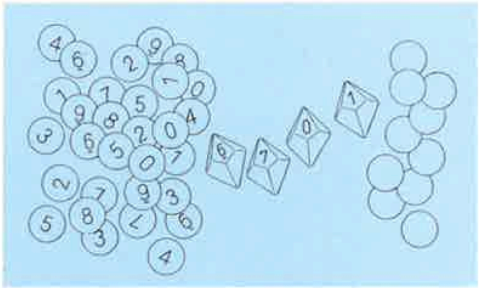
2 – B

La face cachée

Règles du jeu pour 4 joueurs

Matériel: 4 séries de 10 jetons (ou cartes) numérotés de 0 à 9,
4 dés à dix faces

Placer une série face cachée et 3 séries face visible.



- Un joueur lance les 4 dés et forme un nombre de 4 chiffres. Ce sera le nombre-cible.
- À tour de rôle, les joueurs choisissent 3 jetons face visible, à l'exception de ceux portant un chiffre indiqué par les dés.
- Ensuite, ils tirent au hasard encore un jeton face cachée.

Le but est de former avec ses 4 jetons le nombre le plus proche du nombre-cible.

121

Nombre d'élèves

- 4

Matériel

- LE p. 121
- MC: 4 dés à dix faces
- 4 séries de 10 cartes, jetons ou étiquettes portant chacune un des chiffres de 0 à 9

(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999c, p. 95)

Annexe 8 Balises

4P Module 2B **La face cachée**
LM p. 95 – LE p. 121

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique	→	Former des nombres en tenant compte de la position des chiffres dans le nombre. Comparer, ordonner, encadrer et intercaler des nombres.
Liens principaux PER	→	MSN 22 3 5 6
Priorité	→	faible forte
Gestion	→	Jeu à 4 joueurs
Planification dans l'année	→	Dès août
Verticalité	→	**2P** Module 2 **Au fil des nombres** LM p. 133-137 **3P** Module 2B **Cache-cache** LM p.81, Balises p. 47 **3P** Module 2B **Grand écart** LM p.84, Balises p. 50 **3P** Module 2B **Tiercé gagnant** LM p.88, Balises p 54. **4P** Module 2B : **Télésiège** LM p. 96 **4P** Module 2B **Intervalles** LM p. 94

Commentaires

Si l'on considère la verticalité des moyens d'enseignement, on peut dire que :

- **En 3 P,** les activités présentent des jeux avec **3 dés à 6 faces**. Les élèves doivent donc former des nombres de 3 chiffres dans lesquels n'apparaît pas le 0.
- **En 4P**, les activités proposent des jeux avec **3 dès à 10 faces** pour former des nombres. On voit donc apparaître le 0 dans la composition du nombre.

Dans le cadre de cette activité, on joue donc avec 4 dès à 10 faces de manière à créer des nombres de l'ordre de grandeur des milliers.
De plus on ajoute une règle qui consiste à créer des nombres proches du nombre cible sans utiliser les même chiffres.
Les règles du jeu sont donc un peu plus complexes mais l'enjeu est toujours le même.

Le CD-Rom *Maths interactives 1-4P* propose dans la partie 3P-4P plusieurs activités qui permettent à l'élève d'exercer cette compétence de manière autonome (auto-évaluation directe).

(Maréchal & Gaggero, 2011b, p. 68)

Annexe 9 Analyse *a priori*

Dans l'activité « La face cachée », les élèves jouent par groupe de quatre. Ils disposent de quatre dés à dix faces et de quatre séries de dix jetons numérotés de 0 à 9 : trois séries sont visibles et une série est cachée. Un joueur du groupe lance les quatre dés et forme un nombre composé des quatre chiffres, c'est le nombre-cible du groupe. À tour de rôle, les joueurs choisissent trois jetons face visible à l'exception des quatre chiffres indiqués par les dés. Il y a deux interprétations possibles, soit les joueurs tirent à tour de rôle un jeton, jusqu'à en avoir trois chacun, soit les joueurs tirent à tour de rôle trois jetons simultanément. Ensuite, ils tirent au hasard un jeton face cachée.

Le but du jeu est de former avec ses quatre jetons le nombre le plus proche du nombre-cible. Il y a deux interprétations possibles à ce jeu : soit les élèves choisissent les trois jetons, chiffre par chiffre pour pouvoir former le nombre le plus proche du nombre-cible, il faut dans ce cas choisir le chiffre du rang le plus élevé du nombre (les milliers), cette interprétation fait travailler principalement l'aspect positionnel de la numération. Soit les élèves forment le nombre le plus proche du nombre-cible, une fois que les quatre jetons ont été choisi. Le fait de pouvoir choisir trois jetons face visible et un jeton face cachée induit la première interprétation mais la formulation du but du jeu induit plutôt la deuxième interprétation. Les concepteurs du jeu rendent les deux interprétations possibles. La première favorise l'aspect positionnel de la numération, la deuxième favorise l'aspect calcul et la recherche de stratégies. L'analyse *a priori* tient compte de ces deux interprétations possibles du jeu et met en évidence que les changements de valeurs des variables didactiques privilégient la première ou la deuxième interprétation du jeu.

Connaissances mathématiques en jeu

Dans le livre du maître de 6H (Danalet et al., 1999c), cette activité se situe dans le Module 2 :

> Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens : donner du sens au nombre en l'utilisant comme outil efficace pour comparer, mémoriser, communiquer. Outils de numération : l'algorithme de construction du système décimal et les représentations des nombres naturels et de leur suite. Champ B : comparer les nombres. Notion : sériation numérique. Compétence : comparer et classer des nombres. (p. 75)

Dans cette activité, il faut « former, à l'aide de chiffres donnés le nombre le plus proche d'un nombre-cible » (p. 76). Cette activité « fait intervenir le calcul réfléchi pour déterminer les différentes approximations possibles » (p. 80). Les commentaires du livre du maître privilégient la deuxième interprétation du jeu.

Les indications données ci-dessus sont issues du livre du maitre, en revanche l'enseignant a la charge de décoder les connaissances mathématiques en jeu dans l'activité, à savoir :

- les aspects positionnel et décimal du système de numération
- l'estimation ou le calcul d'une différence de deux nombres
- la comparaison de nombres (pour déterminer quel est le nombre le plus proche du nombre donné)

Cette activité fait travailler également la mise en œuvre d'une démarche de résolution.

Stratégies

Dans cette activité, un joueur lance les quatre dés et forme un nombre-cible compris entre 0 et 9999. Puis, chaque joueur choisit trois jetons face visible (avec des chiffres différents de ceux du nombre-cible) et un jeton face cachée. Avec les chiffres indiqués sur les quatre jetons, chaque joueur doit former un nombre le plus proche possible du nombre-cible.

Cette tâche comporte trois phases :

- phase 0 : un joueur lance les quatre dés et forme un nombre-cible avec ces quatre chiffres
- phase 1 : tirer quatre jetons (avec une partie aléatoire pour le tirage du jeton face cachée)
- phase 2 : former un nombre à quatre chiffres pour qu'il soit le plus proche possible du nombre-cible

Une <u>première stratégie</u> consiste à déterminer le plus petit entier supérieur au nombre-cible et le plus grand entier inférieur au nombre-cible, ne comportant aucun chiffre du nombre-cible. Ensuite, il faut calculer (ou estimer) la différence entre ces deux entiers et le nombre-cible, l'entier qui a la plus petite différence est le nombre le plus proche du nombre-cible. Dès que l'on a déterminé le nombre le plus proche du nombre-cible, il faut tirer les trois jetons qui correspondent aux chiffres des milliers, centaines et dizaines, puis tirer un jeton face cachée. Avec ce jeton face cachée, s'il correspond au chiffre des milliers du nombre-cible, il faut déterminer à nouveau le nombre le plus proche. Sinon, il faut le placer au chiffre des unités du nombre ou au chiffre des milliers suivant les cas (si le nombre le plus proche est le plus grand entier inférieur au nombre-cible ou si le nombre le plus proche est le plus petit entier supérieur au nombre-cible).

Par exemple, avec le nombre-cible 4567, le plus grand entier inférieur au nombre-cible (avec des chiffres différents du nombre-cible) est 3999 et le plus petit entier supérieur est 8000. On

calcule (ou estime) les différences 4567-3999=568 et 8000-4567 > 3000. Donc le nombre le plus proche est 3999. Il faut donc choisir 3 (chiffre des milliers), 9 (chiffre des centaines), 9 (chiffre des dizaines). Ensuite, avec le jeton face cachée, soit on tire le chiffre des milliers du nombre-cible (4), dans ce cas, il faut déterminer à nouveau le nombre le plus proche. Soit on tire un chiffre différent du chiffre des milliers du nombre-cible, par exemple 5, il faut le placer au chiffre des unités du nombre, on obtient 3995.

Une deuxième stratégie consiste à déterminer le millier inférieur et le millier supérieur que l'on peut composer sans utiliser les chiffres du nombre-cible. Pour le millier inférieur, il faut ensuite choisir les deux chiffres des centaines et dizaines les plus grands possibles. Pour le millier supérieur, il faut ensuite choisir les deux chiffres des centaines et dizaines les plus petits possibles. Il faut estimer lequel de ces deux entiers est le plus proche du nombre-cible. Puis, il faut tirer les trois jetons face visible puis le quatrième jeton face cachée et déterminer le nombre le plus proche du nombre-cible.

Nombre-cible	4567	0123
Millier inférieur avec des chiffres différents de ceux du nombre-cible	3000	Il n'y en a pas
Millier supérieur au nombre-cible avec des chiffres différents de ceux du nombre-cible	8000	Il n'y en a pas
Choisir les deux chiffres des centaines et dizaines les plus grands possibles ou les plus petits possibles	Pour 3000 : Centaine : 9 Dizaine : 9 **399.** Pour 8000 : Centaine : 0 Dizaine : 0	
Choix des 3 jetons face visible	3-9-9	
Jeton face cachée	0-1-2-3-**4**-5-6-7-8-9	
Déterminer le nombre le plus proche du nombre-cible	3990-3991-3992-3993-**4399**-3995-...-3999	

Deuxième stratégie : quelques exemples de nombre-cibles

Cette deuxième stratégie est inopérante lorsque le nombre-cible comporte un 0.

Une troisième stratégie consiste à tirer trois jetons face visible au hasard (avec des chiffres différents du nombre-cible), puis le jeton face cachée, ensuite à déterminer tous les nombres à quatre chiffres, à estimer (ou calculer) les différences avec le nombre-cible et à choisir le nombre le plus proche.

Une quatrième stratégie consiste à prendre trois jetons face visible (avec des chiffres différents du nombre-cible) au hasard, puis le jeton face cachée. Ensuite avec les quatre jetons, il faut déterminer le nombre supérieur et inférieur les plus proches du nombre-cible,

estimer (ou calculer) les deux différences avec le nombre-cible et choisir le nombre qui a la plus petite différence avec le nombre-cible.

Nombre-cible	3556
4 jetons au hasard (3 jetons face visible différents des chiffres du nombre-cible)	Faces visibles : 4-9-2 Face cachée : 8
Le plus petit entier supérieur au nombre-cible avec les 4 jetons	4289
Le plus grand entier inférieur au nombre-cible avec les 4 jetons	2984
Calcule (ou estimation) des différences avec le nombre-cible	4289-3556 =733 et 3556-2984 =572
Nombre le plus proche du nombre-cible	2984

Quatrième stratégie : quelques exemples de nombre-cibles

Les deux premières stratégies correspondent à la première interprétation et les deux dernières à la seconde interprétation du jeu. Des quatre stratégies, la première est la plus pertinente.

Étude des variables didactiques

Une première variable didactique est le nombre de dés. Le nombre de dés réduit ou augmente le domaine numérique du nombre-cible. L'activité vise les mêmes connaissances mathématiques avec un niveau de difficulté croissant en fonction du nombre de dés.

Une deuxième variable didactique est les chiffres indiqués sur les jetons.
On peut restreindre l'ensemble des chiffres des jetons de 1 à 6 par exemple. La deuxième stratégie devient la plus pertinente.

Une troisième variable didactique est le nombre de jetons à choisir face cachée et face visible, et l'ordre par lequel on tire les jetons face visible et face cachée.
Cette variable didactique influe sur les deux interprétations possibles du jeu. Par exemple, si on tire quatre jetons face cachée, la quatrième stratégie devient la plus pertinente et les deux premières caduques. La deuxième interprétation du jeu est favorisée.
Si on commence par tirer le jeton face cachée, la première stratégie est la plus pertinente et la première interprétation du jeu est favorisée.
Dans l'activité, le tirage du jeton face cachée se réalise après les tirages des jetons face visible : la première stratégie devient la plus pertinente (phase 2 - phase 1 - phase 2). Les deux interprétations du jeu sont donc possibles.

Une quatrième variable didactique est le fait de déterminer le nombre-cible avant ou après avoir tiré les jetons.
Cette variable didactique influe également sur les deux interprétations possibles du jeu. Si on détermine le nombre-cible après avoir tiré les quatre jetons, la phase 1 est aléatoire, il n'y a

donc plus d'intérêt à disposer des jetons face visible et face cachée. L'activité se résume à la phase 2. Les deux premières stratégies deviennent caduques et la quatrième la plus pertinente. La première interprétation du jeu n'est pas possible.
Si on détermine le nombre-cible avant d'avoir tiré les quatre jetons (c'est le cas dans l'activité), la première stratégie est la plus pertinente et les deux interprétations du jeu sont possibles, en privilégiant la première.

Une cinquième variable didactique est le fait d'imposer ou non la contrainte suivante : interdire de tirer des jetons face visible avec les chiffres du nombre-cible.
Dans le cas où on n'impose pas cette contrainte, l'activité se réduit à choisir les jetons avec les chiffres qui correspondent aux milliers, centaines, dizaines. Puis, si le jeton face cachée correspond au chiffre des unités du nombre-cible, le nombre-cible est atteint. Sinon, le nombre le plus proche est déterminé aléatoirement (celui qui a tiré le chiffre des unités le plus proche du chiffre des unités du nombre-cible a gagné).
Enlever cette contrainte simplifie l'activité mathématique, néanmoins, les connaissances en jeu sont la compréhension du système de numération et en particulier l'aspect positionnel. En effet, il faut comprendre qu'il faut choisir les jetons qui correspondent aux chiffres des milliers, puis des centaines, puis des dizaines et laisser la part aléatoire pour le chiffre des unités. Sans cette contrainte, la première interprétation du jeu est privilégiée.

Une sixième variable didactique est la correspondance entre le nombre de séries de dix jetons face visible et le nombre de joueurs. Dans l'activité, il y a trois séries de dix jetons face visible et quatre joueurs, la première et la deuxième stratégie ne peuvent pas être mises en œuvre par les quatre joueurs simultanément. S'il y avait autant de joueurs que de séries face visibles, ce serait possible.

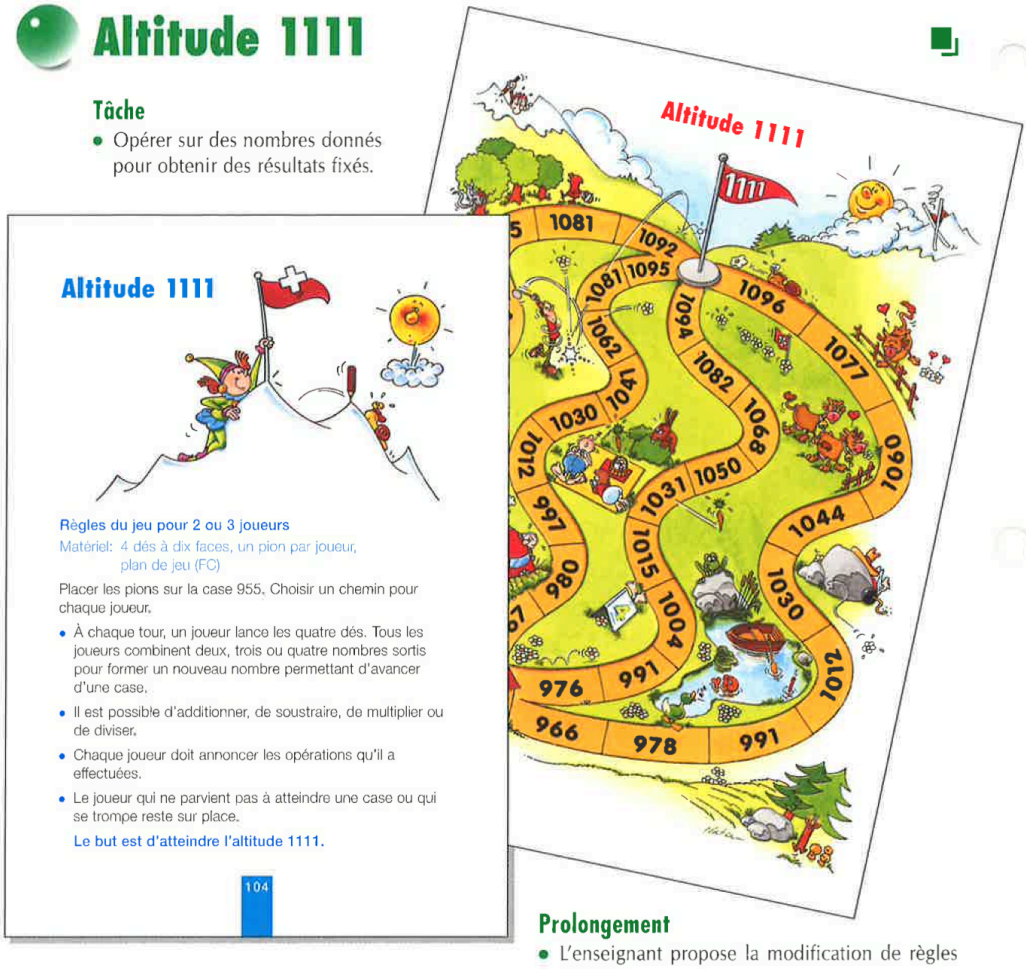
Annexe 10 « Altitude 1111 »

Lors de la leçon avant LS dans la classe d'Océane, nous avons observé également une autre activité « Altitude 1111 » qui a concerné une partie des élèves.

Altitude 1111

Tâche

- Opérer sur des nombres donnés pour obtenir des résultats fixés.



Prolongement

- L'enseignant propose la modification de règles suivante:
  "La case de départ est à 1111 et la case d'arrivée à 955."

Nombre d'élèves

- 2 ou 3

Matériel

- LE p. 104
- Plan de jeu
- MC: 4 dés à dix faces
- 1 pion par joueur

Mise en œuvre

- La calculatrice n'est pas à la disposition des élèves pendant la recherche. Elle peut jouer un rôle lors de la validation.

Variable

Consigne

- Lors de leurs opérations, les joueurs ont l'obligation de combiner les 4 nombres sortis (ou au minimum 3). Ainsi, certaines combinaisons évidentes (par exemple $3 \times 5 = 15$) ne seront plus jouables et il sera nécessaire de manipuler des suites d'opérations à chaque tour de jeu (par exemple $(3 \times 6) + 2 - 5 = 15$)

Quelques démarches

- Calculer l'écart entre les deux cases adjacentes avant de combiner les nombres
- Rechercher des résultats avec 2 dés, puis 3, puis 4
- Utiliser la multiplication pour s'approcher du nombre-écart, puis l'addition et la soustraction pour affiner
- Utiliser des résultats mémorisés
  - tables d'addition, de soustraction, de multiplication
- Écrire certaines opérations ou certains résultats utiles

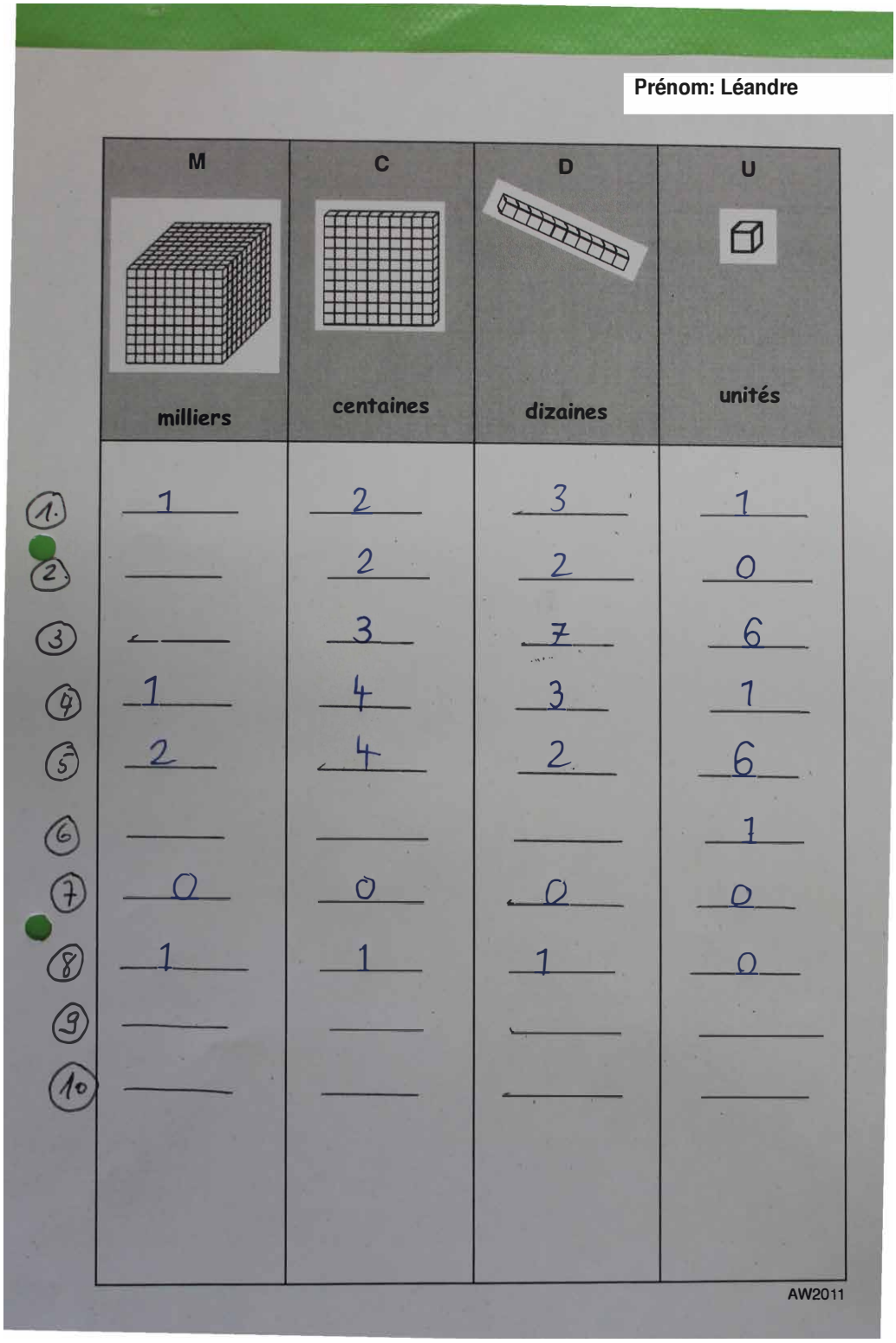
136

(Danalet et al., 1999c, p. 136)

Annexe 11 Classe de Valentine

Lors de la leçon avant le dispositif LS, Valentine a effectué une dictée de nombres que les élèves ont dû écrire dans le tableau de nombres ci-dessous.

Le tableau ci-dessous a été complété par un élève.



Prénom: Léandre

	M	C	D	U
	milliers	centaines	dizaines	unités
1.	1	2	3	1
2.		2	2	0
3		3	7	6
4	1	4	3	1
5	2	4	2	6
6				1
7	0	0	0	0
8	1	1	1	0
9				
10				

AW2011

Partie 2 Documents relatifs au cycle *a* sur la numération

Annexe 12 « Un drôle de jeu de l'oie... », 1ère leçon de recherche

Activité issue du manuel scolaire Cap Math, niveau CE2. Cette 1ère leçon de recherche a été observée dans la classe d'Anaïs.

Chercher Unités, dizaines, centaines

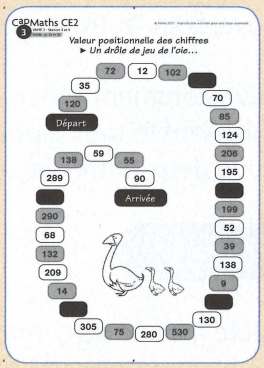
Un drôle de jeu de l'oie...

2 ou 3 joueurs et le banquier

Matériel

- une piste de jeu - un dé - un pion par joueur
- trois boîtes pour le banquier avec :

1 unité	1 dizaine	1 centaine
25 cartes	80 cartes	80 cartes



Au départ chaque joueur reçoit :
- 3 cartes « 1 centaine » - 3 cartes « 1 dizaine » - 3 cartes « 1 unité »

Le pion est placé sur la case « Départ ».

Jouer

Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.
Si le pion arrive sur :

- Le joueur doit donner au banquier exactement le nombre de points indiqué dans la case. Si le joueur n'a pas assez de points, il donne tout ce qu'il possède au banquier.
- Le banquier doit donner au joueur exactement le nombre de points indiqué dans la case.
- Le joueur passe son tour.

Le joueur suivant lance le dé.
Le jeu s'arrête quand un joueur atteint ou dépasse la case « Arrivée ».

Le gagnant est celui qui, à la fin du jeu, a le plus grand nombre de points avec toutes ses cartes. Vous devez toujours être d'accord sur ce que fait chaque joueur ou sur ce que fait le banquier.

1. Joue avec tes camarades. Arrêtez le jeu lorsque vous êtes bloqués. Écrivez pourquoi vous ne pouvez plus continuer.
2. Fais une ou deux autres parties complètes avec tes camarades.

16 • seize

(Charnay, Combier, Dussuc & Madier, 2007, p. 16)

Annexe 13 Livre du maître

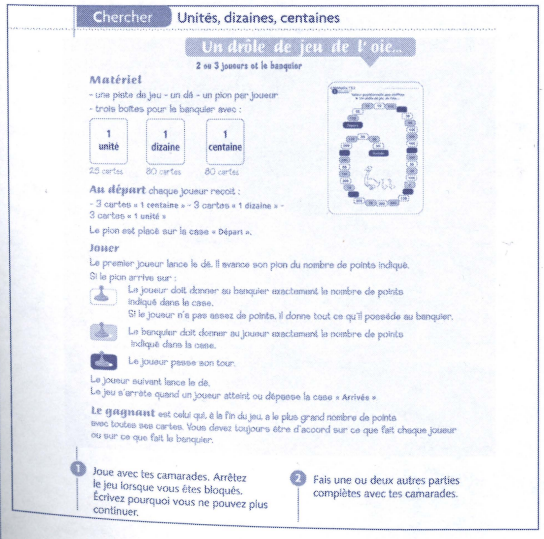
APPRENTISSAGE

Valeur positionnelle des chiffres, échanges ▶ Un drôle de jeu de l'oie (1)

– Comprendre la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture chiffrée d'un nombre.
– Pratiquer les échanges en utilisant les égalités entre 1 centaine et 10 dizaines et 1 dizaine et 10 unités.

Chercher manuel p. 16 questions 1 et 2

Ce jeu de l'oie est destiné à faire pratiquer les échanges entre unités, dizaines et centaines.



Chercher Unités, dizaines, centaines

Un drôle de jeu de l'oie...

2 ou 3 joueurs et le banquier

Matériel
- une piste de jeu - un dé - un pion par joueur
- trois boîtes pour le banquier avec :

1 unité	1 dizaine	1 centaine
25 cartes	80 cartes	80 cartes

Au départ chaque joueur reçoit :
- 3 cartes « 1 centaine » - 3 cartes « 1 dizaine » - 3 cartes « 1 unité »

Le pion est placé sur la case « Départ ».

Jouer
Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.
Si le pion arrive sur :
- Le joueur doit donner au banquier exactement le nombre de points indiqué dans la case. Si le joueur n'a pas assez de points, il donne tout ce qu'il possède au banquier.
- Le banquier doit donner au joueur exactement le nombre de points indiqué dans la case.
- Le joueur passe son tour.

Le joueur suivant lance le dé.
Le jeu s'arrête quand un joueur atteint ou dépasse la case « Arrivée ».

Le gagnant est celui qui, à la fin du jeu, a le plus grand nombre de points avec toutes ses cartes. Vous devez toujours être d'accord sur ce que fait chaque joueur ou sur ce que fait le banquier.

1. Joue avec tes camarades. Arrêtez le jeu lorsque vous êtes bloqués. Écrivez pourquoi vous ne pouvez plus continuer.
2. Fais une ou deux autres parties complètes avec tes camarades.

COLLECTIF / ORAL

1 Présentation du jeu

• Former des équipes de 2 ou 4 joueurs en leur adjoignant un banquier. Distribuer le matériel : les cartes pour le banquier, une piste par équipe et 3 cartes (*1 unité, 1 dizaine* et *1 centaine*) à chacun des joueurs de façon à ce qu'ils possèdent un avoir suffisant au cas où ils tomberaient plusieurs fois de suite sur des cases perdantes. Les cartes remises par le banquier aux joueurs peuvent être placées par les élèves sur une feuille A4 partagée en trois régions : une pour chaque type de cartes.

• Demander aux élèves de prendre connaissance de la **règle du jeu** dans le manuel :

➡ *Lisez attentivement la règle du jeu. Pour mieux la comprendre, vous pouvez commencer à jouer. Dans un moment, nous ferons ensemble un début de partie pour vérifier que vous avez tous bien compris ce jeu.*

• Provoquer un échange collectif pour éclaircir certains aspects de la règle du jeu soulevés par les élèves : l'action est déterminée par la couleur de la case, il faut donner ou recevoir exactement la valeur indiquée.

• Engager un début de partie collective avec un élève, sous le contrôle des autres élèves.

Ce jeu a pour but de faire fonctionner le décodage des écritures de nombres en centaines, dizaines et unités et d'obliger les élèves à pratiquer des échanges 1 dizaine → 10 unités et 1 centaine → 10 dizaines.

MdL Le texte présentant la règle du jeu est assez long. L'enjeu de compréhension pour pouvoir ensuite jouer et la lecture en petits groupes favorisent une « lecture vraie ». Il est important de laisser d'abord les groupes prendre seuls connaissance du texte avant une mise au point collective. A l'issue de la partie collective, tous les élèves devraient avoir compris la règle du jeu.

ÉQUIPES DE 3 OU 5

2 Première partie : blocage !

- Demander aux équipes de jouer une première partie. Rester disponible pour veiller au bon déroulement du jeu et renvoyer éventuellement à la lecture de la règle.
- Attendre que plusieurs équipes rencontrent une situation de blocage : impossibilité pour un joueur de donner exactement au meneur de jeu le nombre indiqué dans la case.
- Arrêter alors les jeux et provoquer une réflexion collective (voir phase suivante).

COLLECTIF / ORAL

3 Comment se tirer d'affaire ?

- Demander aux élèves de lire la **question 1** et faire formuler la situation de blocage : il n'est plus possible de donner exactement au banquier le nombre indiqué dans la case... même si le joueur possède encore des cartes.
- Demander aux équipes de chercher des solutions possibles. Faire formuler les solutions proposées et les mettre en discussion.
- Au terme de cette discussion, on arrête le principe selon lequel il est possible, en cas de blocage, de faire des échanges avec le banquier (10 unités contre 1 dizaine et 10 dizaines contre 1 centaine). Si l'idée d'échanger n'intervient pas, la suggérer en demandant par exemple ce qu'on pourrait obtenir en échange d'une dizaine ou d'une centaine auprès du meneur de jeu.
- Écrire ces échanges possibles au tableau, sous la forme d'égalités :

  10 unités = 1 dizaine
  10 dizaines = 1 centaine

Le blocage qui apparaît dans cette première expérience constitue un moment important, puisqu'il va justifier le recours aux échanges. Celui-ci n'est pas nécessairement spontané : certains élèves peuvent proposer de modifier les règles du jeu, d'introduire un joker...

ÉQUIPES DE 3 OU 5

4 Reprise du jeu

- Demander aux équipes de lire la **question 2** et de reprendre le jeu, plusieurs fois éventuellement, en utilisant la possibilité de faire des échanges chaque fois qu'il y a blocage.
- Jouer le rôle d'arbitre en cas de litige ou si les règles ne sont pas respectées (ou encore demander à un élève « à l'aise » de jouer ce rôle).

APPRENTISSAGE

Valeur positionnelle des chiffres, échanges ▶ Un drôle de jeu de l'oie (2)

– Pratiquer les échanges en utilisant les égalités entre 1 centaine et 10 dizaines / 1 dizaine et 10 unités.

ÉQUIPES DE 3 OU 5 / ORAL

Chercher manuel p. 17 question 1

1 Reprise du jeu « Un drôle de jeu de l'oie »

- Former à nouveau des équipes de 2 ou 4 joueurs en y adjoignant un banquier dans chaque équipe.
- Distribuer le matériel : une piste par équipe, les cartes pour chaque joueur et les cartes pour le banquier. Demander aux élèves de relire si nécessaire la **règle du jeu** p. 16 du manuel.
- Rappeler collectivement, avec les élèves, les règles du jeu et les possibilités d'échanges (référence possible au dico-maths), puis demander aux équipes de jouer à nouveau une ou deux parties.

COLLECTIF / ORAL

2 Synthèse des acquis

- Faire une synthèse des acquis :

Pour donner 138 points, on peut donner :
1 centaine, 3 dizaines et 8 unités, mais aussi 13 dizaines et 8 unités…

Pour donner 530 points, on peut donner :
5 centaines et 3 dizaines, mais aussi 4 centaines et 13 dizaines…

- Écrire au tableau en renvoyant au dico-maths :

1 centaine = 10 dizaines
1 dizaine = 10 unités
1 centaine = 100 unités

- Engager un début de partie collective avec un élève, sous le contrôle des autres élèves, jusqu'à ce qu'apparaisse la nécessité de pratiquer au moins deux échanges.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement manuel p. 17 exercices 2 à 7

- Choisir les exercices proposés à chaque élève en fonction de ses besoins et de ses possibilités.
- Si nécessaire, pour les élèves en difficulté, fournir le matériel ; puis proposer à nouveau, dans des séances ultérieures, de jouer à « Un drôle de jeu de l'oie ».

Chercher Unités, dizaines, centaines

1. Rejoue une partie du *Drôle de jeu de l'oie* avec tes camarades.

Exercices DICO-MATHS p. 3 Valeur des chiffres

2. Chaque phrase est-elle vraie ou fausse ?
On peut échanger :
a. 3 dizaines contre 30 unités.
b. 20 dizaines contre 2 unités.
c. 7 centaines contre 70 dizaines.
d. 500 unités contre 5 centaines.
e. 80 dizaines contre 8 centaines.
f. 10 dizaines contre 100 unités.
g. 40 unités contre 4 dizaines.
h. 6 centaines contre 600 dizaines.

3. Complète.
On peut échanger :
a. 4 dizaines contre … unités.
b. 300 unités contre … dizaines.
c. 20 dizaines contre … centaines.
d. 30 dizaines contre … unités.
e. 5 centaines contre … dizaines.
f. 12 dizaines contre … unités.
g. 8 centaines contre … unités.
h. 120 unités contre … dizaines.
i. 6 centaines contre … dizaines.
j. 230 unités contre … dizaines.
k. 78 dizaines contre … unités.
l. 990 unités contre … dizaines.

4. Écris le nombre qui correspond à chaque étiquette.
a : 13 dizaines
b : 2 centaines 3 unités
c : 23 dizaines 7 unités

5. a. Quel est le plus petit nombre de 3 chiffres qui a 37 dizaines ?
b. Quel est le plus grand nombre de 3 chiffres qui a exactement 37 dizaines ?

6. Écris en lettres puis en chiffres tous les nombres qu'il est possible d'obtenir en utilisant deux de ces étiquettes.
4 centaines | 15 dizaines | 20 unités

7. Écris en lettres puis en chiffres tous les nombres qu'il est possible d'obtenir en utilisant deux de ces étiquettes.
2 centaines | 6 dizaines | 15 dizaines | 48 unités

Exercices 2 et 3 Il s'agit de contrôler la maîtrise des échanges entre centaines, dizaines et unités.

Exercice 4 Il est du même type que ceux traités dans les séances précédentes.

Exercice 5 Cet exercice est plus difficile et peut être réservé aux élèves plus rapides. L'utilisation des cartes peut permettre de « visualiser » les réponses.

Exercices 6 et 7 Ces exercices peuvent être proposés comme activités de recherche, leur traitement nécessitant une organisation (notamment l'exercice 7).

Réponse : **6.** 550 ; 420 ; 170. **7.** 260 ; 350 ; 248 ; 210 ; 108 ; 198.

36 UNITÉ 2

(Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007, pp. 33-36)

Annexe 14 Analyse *a priori*

Dans l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... », les élèves se mettent par groupe de deux ou trois joueurs avec un banquier. Les joueurs lancent le dé, avancent le pion sur le plateau de jeu et doivent donner ou recevoir du banquier la somme exacte de points indiqués sur la case en fonction de la couleur de la case. Au départ, chaque joueur possède trois cartes « 1 unité », trois cartes « 1 dizaine » et trois cartes « 1 centaine ». Le jeu s'arrête quand un joueur atteint ou dépasse la case d'arrivée. Le gagnant est celui qui a le plus de points. Très rapidement dans le jeu, les joueurs ne disposent plus suffisamment de cartes « 1 unité » ou de cartes « 1 dizaine » pour pouvoir donner la somme exacte au banquier. C'est le cas par exemple, si un joueur lance son dé et obtient 2. Il arrive sur la case 35 et ne dispose pas de cinq cartes « 1 unité » pour pouvoir donner exactement 35.

D'où la nécessité pour les élèves d'avoir recours aux échanges entre une dizaine et dix unités ou entre une centaine et dix dizaines, sachant que le jeu ne permet pas que le banquier rende la monnaie : un peu comme si on payait dans une caisse automatique qui demande l'appoint, avec un monnayeur pour faire des échanges de billet de dix contre dix pièces de un, ou de billets de cent contre dix billets de dix. Le banquier est donc la personne avec qui les joueurs doivent échanger leurs cartes « 1 dizaine » pour dix cartes « 1 unité » ou « 1 centaine » pour dix cartes « 1 dizaine ». Le banquier est aussi la personne à qui les joueurs doivent donner le nombre exact de points indiqués sur la case.

Connaissances mathématiques en jeu

Cette activité a pour objectif de travailler dans le système de numération l'aspect décimal principalement et non l'aspect positionnel.

Aspect décimal de la numération (ou relations entre unités)
10 unités d'un certain rang sont égales à une unité du rang supérieur
1 dizaine = 10 unités
1 centaine = 10 dizaines (donc 1 centaine = 100 unités)
1 millier = 10 centaines (donc 1 millier = 100 dizaines et 1 millier = 1000 unités)

Tableau 6 Aspect décimal de la numération (Tempier, 2010, p. 62)

Pour évoquer l'aspect décimal de la numération, on emploie souvent les termes de « groupements » et d' « échanges », ce qui permet de faire le lien avec les activités réalisées avec un matériel de numération (Tempier, 2010). Le matériel de numération officiel (Tableau

ci-dessous) à disposition des enseignants dans le canton de Vaud est constitué de blocs en base dix : petit cube pour l'unité, bâton pour la dizaine, plaque pour la centaine et gros cube pour le millier.

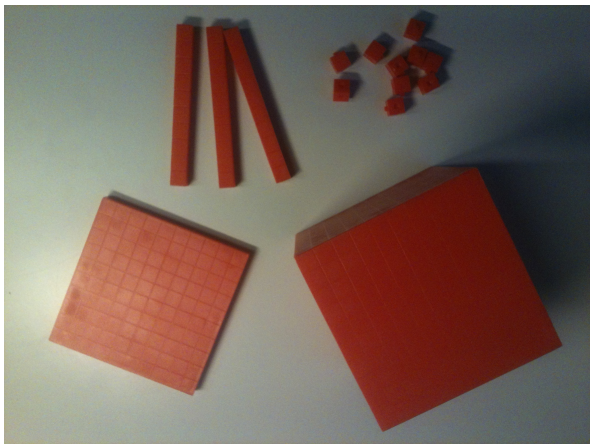


Tableau 7 Blocs en base dix. Matériel officiel mis à disposition des enseignants dans le canton de Vaud

Selon Tempier (2013), le matériel de numération est utilisé dans les tâches de dénombrement à l'école, notamment pour illustrer les unités des différents ordres.

> Avec ces ostensifs, les relations entre unités sont incarnées par des ostensifs gestuels de groupements ou d'échange de dix unités d'un certain ordre contre une unité de l'ordre immédiatement supérieur (avec la possibilité de revenir en arrière sur l'unité immédiatement inférieure par l'opération inverse). (p. 17)

Le matériel officiel (Tableau 7) permet de réaliser des échanges concrets entre dix petits cubes et un bâton d'une dizaine (qui est formé de dix petits cubes détachables), entre dix bâtons d'une dizaine et une plaque d'une centaine (sur laquelle figure cent petits cubes), entre dix plaques d'une centaine et un cube d'un millier. Ce matériel est dit proportionnel et pré-groupés (ou d'échanges).

Stratégies possibles

Le joueur a à sa disposition trois cartes « 1 unité », trois cartes « 1 dizaine » et trois cartes « 1 centaine » au début de la partie. Puis au cours de la partie, plusieurs cas se présentent :

- soit le joueur n'a pas suffisamment de points pour donner le nombre de points exact, il doit donner tout ce qu'il possède au banquier.
- soit le joueur a suffisamment de points pour donner le nombre de points exact, s'il dispose du nombre suffisant de cartes « 1 unité », « 1 dizaine », « 1 centaine », il doit décomposer le nombre de points indiqués sur la case en nombre d'unités, dizaines, centaines puis en nombre de cartes correspondantes qu'il doit donner au banquier. Sinon, il doit préalablement effectuer un échange d'une carte « 1 dizaine » avec 10

cartes « 1 unité » ou un échange d'une carte « 1 centaine » avec 10 cartes « 1 dizaine », ce qui constitue la procédure visée par l'activité.

- le joueur peut ne pas donner toute la somme au banquier.
- le joueur peut donner plus que la somme prévue et le banquier rend la monnaie.

Étude des variables didactiques

Une première variable didactique est le fait de donner exactement ou non le nombre de points indiqués sur la case. Dans l'activité, les joueurs et le banquier doivent donner exactement le nombre de points. Donner exactement le nombre de points sous-entend qu'il n'est pas autorisé de donner plus et de rendre la monnaie. Tout l'enjeu mathématique de l'activité se situe dans le fait de donner exactement le nombre de points.

En effet, dans le cas où les rendus de monnaie sont autorisés, par exemple, un joueur doit donner 145 au banquier et il lui donne 150 (une carte « 1 centaine » et cinq cartes « 1 dizaine »). Le banquier lui rend 5 (cinq cartes « 1 unité »). Le joueur a décomposé le nombre 150 en centaine et en dizaines. Pour rendre la monnaie, le banquier a pu effectuer la soustraction 150 – 145, ou a pu effectuer une addition à trou 145 + ... = 150. Ainsi le banquier peut utiliser le fait qu'une dizaine est égale à la somme de cinq unités et de cinq unités. Mais il peut aussi éventuellement sur-compter à voix haute, au fur et à mesure du rendu : « 151 » et il donne un point, « 152 » et il en donne un deuxième, etc. jusqu'à « 150 » en donnant le cinquième point. Lorsque le rendu de monnaie est autorisé, nous ne pouvons donc pas affirmer que les élèves travaillent la notion d'échange d'une dizaine contre dix unités. Ce choix de valeur de variable didactique est fondamental, en effet il amène une contrainte, certes un peu artificielle, qui vise à faire travailler l'aspect décimal de la numération, la connaissance visée. L'autre choix de valeur de cette variable didactique qui aurait permis de rendre la monnaie, aurait certes permis de travailler la décomposition et recomposition des nombres en unités, dizaines, centaines et les opérations, mais pas l'aspect décimal, avec l'échange une dizaine contre dix unités ou une centaine contre dix dizaines.

Une deuxième variable didactique est le nombre de cartes « 1 unité », « 1 dizaine », « 1 centaine » distribuées aux joueurs. Si on distribue dix cartes ou plus de chaque aux joueurs, ils auront moins d'échanges à réaliser pour donner les nombres de points indiqués. Le choix de distribuer trois cartes de chaque implique que les joueurs doivent réaliser des échanges afin de donner les nombres de points indiqués.

Une troisième variable didactique est le choix des écritures en chiffres ou en lettres des cartes du jeu. Dans l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... », les cartes sont marquées : « 1 unité », « 1 dizaine » ou « 1 centaine ». En effet, si les élèves se donnent des cartes en écritures chiffrées, ils sont incités à rendre la monnaie en faisant par exemple des soustractions et non à donner la somme juste en faisant des échanges entre cartes.

Une quatrième variable didactique est le nombre total de cartes « 1 unité » à disposition du banquier. Dans le matériel prévu par l'activité, le banquier a trois boîtes : vingt-cinq cartes « 1 unité », huitante cartes « 1 dizaine » et huitante cartes « 1 centaine ». L'échange d'une centaine contre cent unités est exclu par le matériel mis à disposition dans le jeu, ce qui rend impossible le cas où un joueur muni de cent cartes « 1 unité » pourrait donner le nombre exact de points sans devoir réaliser d'autres échanges le reste de la partie. Il y a donc moins de cartes « 1 unité » pour que les élèves soient amenés à effectuer des échanges.

Une cinquième variable didactique est la présence d'un banquier dans le jeu, ce qui incite à parler en argent et aussi à rendre la monnaie. Par rapport au banquier, la contrainte de devoir donner exactement le nombre de points est donc créée artificiellement dans le jeu. Pourquoi faut-il d'abord effectuer un échange de cartes pour ensuite donner le nombre exact de points à la même personne ? Pour atténuer l'effet artificiel de cette contrainte, on aurait pu imaginer qu'il y ait deux dispositifs différents (des personnes ou des objets : tirelires, réserves, monnayeur, et caisse automatique...) : un dispositif qui contraigne explicitement à donner exactement un nombre de points et un dans lequel on puisse effectuer les échanges, une dizaine contre dix unités, une centaine contre dix dizaines.

Analyse de l'activité et de son contexte

Selon Cap Maths, l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... » permet la mise en place d'un milieu adidactique dans le sens où l'élève peut envisager une procédure initiale (rendre la monnaie, faire cadeau, faire crédit...) qui n'est pas la procédure attendue (donner exactement le nombre de points et faire des échanges unités-dizaines-centaines). A priori, le milieu doit conduire à la situation de blocage, à partir de laquelle les élèves doivent utiliser la connaissance visée sans intervention extérieure.

L'activité mathématique permet les apprentissages visés seulement si certaines contraintes artificielles sont respectées. De plus, l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... » comporte un premier niveau du jeu avec le plateau, les jetons, les dés. Dans ce niveau, les élèves lancent

les dés, le but étant pour eux d'arriver en premier sur la case d'arrivée. Dans le second niveau du jeu, les élèves doivent s'échanger des cartes pour donner et recevoir le bon nombre de points indiqué sur les cases du plateau.
En outre, l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... » se réfère au jeu de l'oie, jeu plus ou moins connu par les élèves, dans lequel le but est d'arriver en premier sur la case d'arrivée, en lançant des dés. Dans l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... », le gagnant est celui qui a le plus de points avec toutes ses cartes mais pas nécessairement celui qui arrive en premier sur la case d'arrivée. Cette fausse ressemblance entre les deux jeux peut inciter les élèves à rester au premier niveau du jeu, c'est-à-dire à faire la course pour être en tête sans penser au nombre de points accumulés.

Pour les groupes composés de quatre élèves (trois joueurs et un banquier), il manque des cartes « 1 unité ». Quand le banquier a distribué trois cartes « 1 unité » au début de la partie à chaque joueur, il lui reste donc seize cartes « 1 unité » dans sa banque.
Si par exemple, un premier joueur tombe sur la case qui indique 35, le joueur doit effectuer un échange d'une carte « 1 dizaine » pour dix cartes « 1 unité ». Il reste onze cartes « 1 unité » dans la banque après que le joueur ait donné trente-cinq points au banquier. Ensuite, si un deuxième joueur tombe sur la case qui indique 72, le banquier doit lui donner 72 points. Il reste donc neuf cartes « 1 unité » dans la banque. Enfin, si un troisième joueur tombe sur la case qui indique 35, le banquier ne peut pas effectuer l'échange de carte « 1 dizaine » pour dix cartes « 1 unité ». Cet exemple montre qu'il y a un problème dans la conception du jeu pour les groupes de quatre élèves. Il faudrait donc mettre plus de cartes « 1 unité » dans la banque.

Annexe 15 Plan de leçon

Le GLS a rédigé un plan de leçon pour la 1ère leçon de recherche du cycle *a*, avec l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... ».

LSM, leçon de recherche du 21 novembre 2013
Plan de leçon

Groupes de 3 (2+1) ou 4 (3+1) (Plutôt des groupes de 3 ou de 4 à compléter selon le nombre d'élèves : à choisir par l'enseignante)

- Groupes déterminés à l'avance
- Répartition au hasard (mais un peu guidé par l'enseignante qui connaît ses élèves)
- Les rôles varient au cours des parties

Une consigne par élève (photocopies préparées par Stéphane)

- et lecture individuelle
- ou explication collective (selon habitudes de la classe)

Partie collective

- « Imaginons que
    - Premier coup du joueur A : 4 et on tombe sur 12
    - Premier coup du joueur B : 5 et on tombe sur 102 »

Les groupes jouent

Blocage (intervient très rapidement)

- Moment de réflexion pour ceux qui sont bloqués
- Moment collectif (mise en commun)
    - Clarification de la règle
    - Arriver aux échanges possibles
    - Si personne ne propose les échanges : demander ce qu'on obtiendrait en échange d'une dizaine, d'une centaine
    - Ecrire au tableau :

        10 unités = 1 dizaine
        10 dizaines = 1 centaine

Retour aux jeux

- En cas d'autres blocages : dans les groupes
- Vérifier la règle du gain : La partie s'arrête quand un joueur arrive, on compte alors les points

Un moment avant la fin de la leçon : on arrête tout le monde et on compte les points

Petit moment collectif sur ce qui s'est passé :

- Est-ce que vous avez appris quelque chose ?

On range…

Matériel

- 5 plateaux de jeux A3 (préparés par Stéphane, Valérie et Véronique)
- Feuilles A4 pour poser les cartes (idem)
- cartes pour 5 groupes (idem)
- Dés, pions (matériel de la classe)

Annexe 16 « Jeu de la toupie », 2ème leçon de recherche

Lors du cycle *a*, le GLS a amélioré l'activité « Un drôle de jeu de l'oie... » (Annexe 12) et a créé l'activité « Jeu de la toupie » qui a été enseigné dans la classe d'une autre enseignante (Edith).

Jeu de la toupie

Matériel : 1 plan de jeu, 1 dé, 1 pion par joueur,
1 sachet d'unités, 1 sachet de dizaines, 1 sachet de centaines

Au départ, chaque joueur prend
- 3 cartes «1 unité»
- 3 cartes «1 dizaine»
- 4 cartes «1 centaine»

Les pions sont sur la case départ.

Jouer

Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.

Si le pion arrive sur :

Le joueur doit donner au joueur suivant (à sa gauche) **exactement** le nombre de points indiqué dans la case.

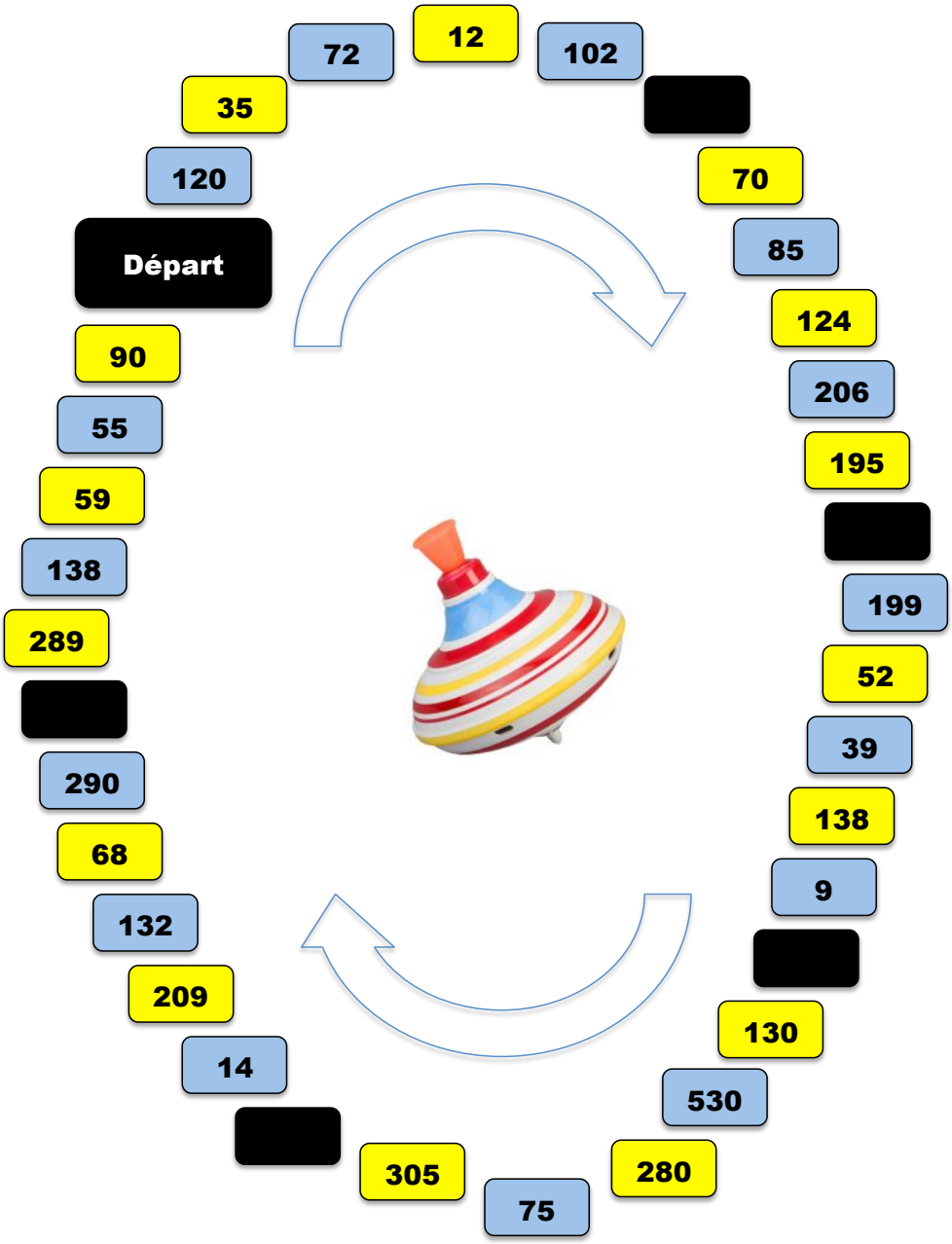
Le joueur doit donner au joueur précédent (à sa droite) **exactement** le nombre de points indiqué dans la case.

Le joueur ne donne rien.

Les cartes dans les sachets permettent de faire des échanges.

Le jeu s'arrête quand la maîtresse donne le signal.

Le gagnant est celui qui a le plus de points.



Le joueur doit donner au joueur suivant (à sa gauche) **exactement** le nombre de points indiqué dans la case.

Le joueur doit donner au joueur précédent (à sa droite) **exactement** le nombre de points indiqué dans la case.

Le joueur ne donne rien.

Annexe 17 Plan de leçon

Le GLS a rédigé un plan de leçon pour la 2ème leçon de recherche du cycle *a*, avec l'activité « Jeu de la toupie ».

LSM, leçon de recherche du 16 janvier 2014 (version 2)
Plan de leçon

Groupes de 3 ou 4 (Plutôt des groupes de 3, à compléter selon le nombre d'élèves : à choisir par l'enseignante)

- Répartition au hasard (mais un peu guidé par l'enseignante qui connaît ses élèves)

Une consigne par élève ou par groupe (nouvelle formulation des consignes)
Lecture des consignes

- lecture individuelle (5')
- ou explication collective (selon habitudes de la classe) et consignes individuelles distribuées après

Partie collective jouée effectivement

- « Imaginons que…
    - premier coup du joueur A : 4 et on tombe sur 12
    - premier coup du joueur B : 5 et on tombe sur 102 »

Les groupes jouent

Blocage (intervient très rapidement)

- Moment de réflexion pour ceux qui sont bloqués, l'enseignante intervient dans les groupes bloqués.
- Si de nombreux groupes bloqués : moment collectif (mise en commun)
    - Clarification de la règle (si nécessaire) : les « rendus de monnaie » sont interdits
    - Arriver aux échanges possibles
    - Si personne ne propose les échanges : demander ce qu'on obtiendrait en échange d'une dizaine, d'une centaine
    - Ecrire au tableau :

        10 unités = 1 dizaine
        10 dizaines = 1 centaine

Retour aux jeux

- En cas d'autres blocages : dans les groupes
- Selon le temps, l'enseignante arrête le jeu
- On compte les points

Petit moment collectif sur ce qui s'est passé :

- Est-ce que vous avez appris quelque chose ?

On range…

Article I. Matériel

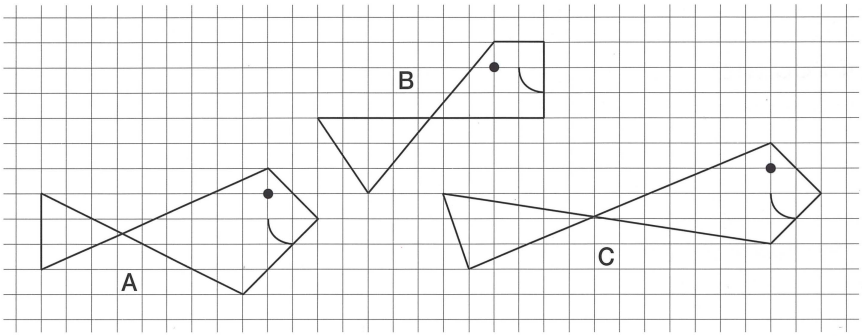
- 5 plateaux de jeux « toupie » A3 (préparés par Valérie et Stéphane, plastifiés par Emilie et Alexandra)
- Feuilles consignes (amenées par Valérie et Stéphane)
- Feuilles A4 pour poser les cartes (idem)
- Cartes pour 5 groupes (cartes reprises, unités à rajouter)
- Dés, pions (matériel de la classe)

Partie 3 Documents relatifs au cycle *b* sur la géométrie

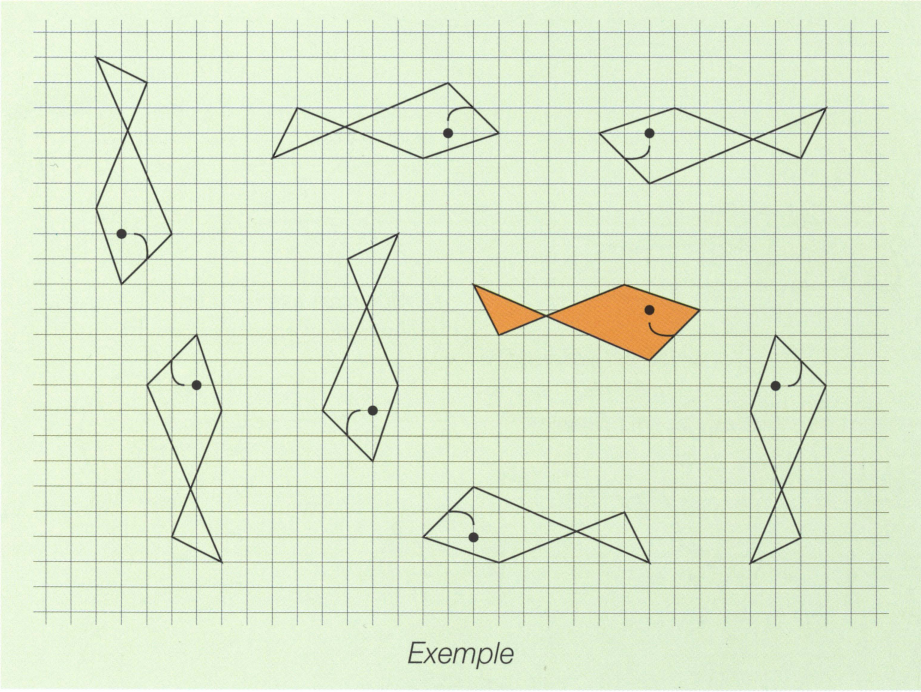
Annexe 18 « Aquarium »

Activité originale « Aquarium ».

Aquarium



Choisis un poisson modèle (A, B ou C) et dessine-le plusieurs fois sur du papier quadrillé. Comme dans l'exemple, chaque poisson doit être placé dans une position différente.



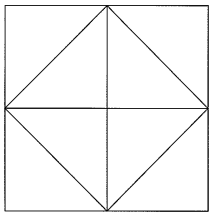
6

(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999b, p. 6)

Annexe 19 Commentaires généraux du livre du maître

Les termes ou le vocabulaire spécifiques de la géométrie

Si un élève demande à un camarade de reproduire exactement la figure suivante sans pouvoir l'observer, il doit lui envoyer un message qui utilise un vocabulaire précis.



Il peut désigner le carré extérieur, de 4 cm de côté, puis le carré dont les sommets dont les quatre milieux des côtés du premier carré, et, finalement, les diagonales du deuxième carré.

Il peut aussi parler de quatre carrés juxtaposés, de 2 cm de côté, constituant un grand carré, et, pour chacun de ces quatre carrés, de la diagonale qui ne passe pas par le centre du grand carré.

L'important, dans ces deux descriptions, n'est pas l'ordre dans lequel la construction est perçue et transmise, c'est la rigueur permettant l'unicité de l'interprétation.

Les descriptions précédentes utilisent les mots "carré", "sommet", "milieu", "côté", "diagonale", mais avant que ces mots ne deviennent des outils, il y a un long travail d'élaboration, car la terminologie ne s'apprend pas indépendamment de la conception des notions qu'elle recouvre. En parlant de "carré de 2 cm de côté" dans son message, l'enfant sait qu'il décrit un polygone à 4 angles droits et à 4 côtés, mesurant chacun 2 cm.

Mais, si le concept "carré" a déjà acquis un statut d'outil dans cette situation de communication, il ne faudrait pas croire que cet outil possède toutes les propriétés du carré ou qu'il ne lui en attribue pas d'autres. Il est même vraisemblable qu'en disant "carré", l'enfant imagine une figure avec les côtés parallèles à ceux de la feuille (car la plupart des carrés qu'il a vus étaient dans cette position particulière); il n'est pas certain non plus que l'élève de quatrième année soit convaincu que la distance entre deux milieux de deux côtés opposés est la mesure du côté du carré, etc.

Il faudra revenir à la figure "carré" dans d'autres contextes pour faire émerger d'autres propriétés ou pour renoncer à certaines caractéristiques provisoires. Par exemple lorsque le carré doit être construit sur feuille blanche et avec ses côtés non parallèles au bord de la feuille ou de grandes dimensions, sur un terrain sans repères perpendiculaires.

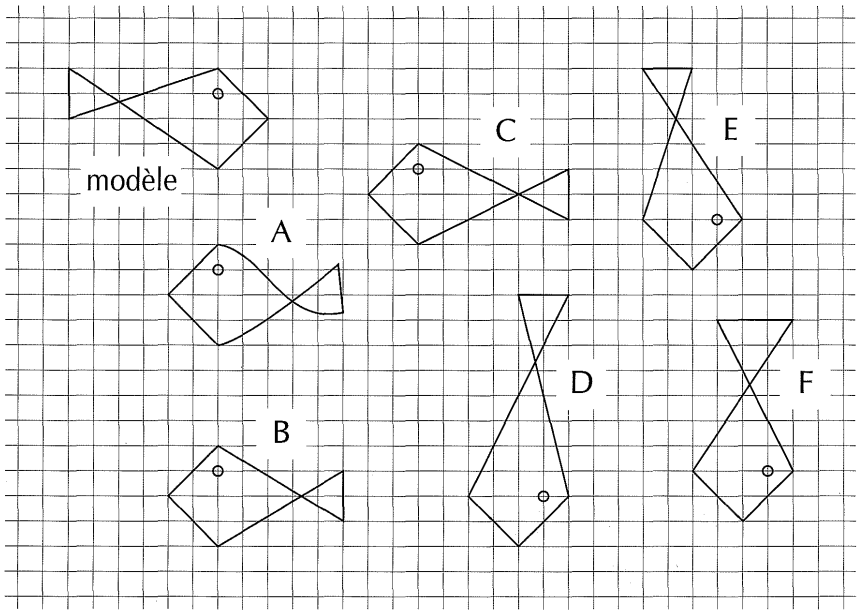
Les outils d'élaboration de figures géométriques

À de nombreuses reprises, on demande à l'enfant de dessiner, de reproduire, de représenter des figures géométriques. Il dispose évidemment d'instruments comme la règle, l'équerre, voire le compas, le papier calque, des quadrillages, les ciseaux, ... Mais ces instruments ne sont efficaces que si on sait à quoi ils servent. L'enfant a besoin d'autres outils, abstraits, comme la notion de droite, celle de parallélisme, celles de perpendicularité, d'angle, d'équidistance, de symétrie, de translation, de rotation, ..., qui sont utilisés en coordination avec l'usage des instruments de dessin géométrique.

Par exemple, dans le problème[1] suivant, un modèle de poisson et les têtes d'autres poissons sont donnés; la tâche est de compléter les dessins des autres "membres de la famille". L'énoncé précise que "... ils se ressemblent tous, ils sont de même forme" et demande encore aux élèves de faire "des dessins les plus précis possibles".

Le problème a été posé à des groupes d'élèves de 3e à 6e année d'école primaire. Voici quelques exemples de réponses approximatives, pour les deux types de poissons isométriques à construire, qui sont l'image du modèle par une rotation (position D, E, F) et par une "symétrie glissée" (position A, B, C):

[1] *5e Rallye mathématique transalpin, finale, mai 1997*



Tous les dessins sont des "poissons" et ressemblent en effet au modèle, mais on remarque de nombreuses imprécisions qui témoignent de l'insuffisance des outils utilisés:

- sommets qui ne sont pas sur des points du quadrillage (A) (le déplacement utilisé, qui devrait être une isométrie, ne conserve ni la forme, ni les distances);
- non-respect des lignes droites (A) (comme les élèves n'ont pas perçu que les "côtés" de l'image "poisson" sont des segments de droite, ils n'utilisent pas la règle comme outil);
- non-respect de la "longueur" du poisson (A, B, D) ou de la "largeur" de la queue (A, F) (l'isométrie n'est que partielle pour B, D, F);
- axe de symétrie imaginaire (B, C) (c'est l'outil symétrie qui n'est pas efficace ici, comme dans le cas suivant, E);
- interversion de la position de la queue par rapport à la tête (E).

Les groupes avaient la possibilité de découper le poisson modèle ou de le reproduire par transparence. Ceux qui l'ont fait n'ont pas obtenu de constructions précises, car ils ne respectaient plus l'emplacement des sommets sur les intersections du quadrillage en raison de la petite taille des figures.

L'analyse de ce problème a montré que, en troisième année, la moitié des groupes arrivent à des constructions parfaitement correctes. En quatrième année, les trois quarts des solutions sont correctes. En 5e et 6e années, il n'y a pratiquement plus d'erreurs sur ces transformations. La quatrième année est donc une année clé où les outils de construction de figures se mettent en place avec efficacité.

(Danalet et al., 1999c, pp. 238-239)

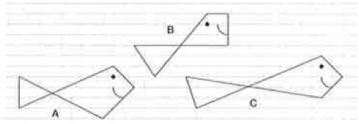
Annexe 20 Livre du maître

Aquarium

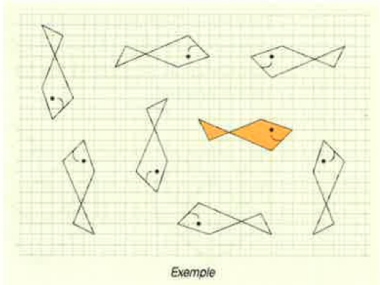
Tâche

- Dans un réseau quadrillé, reproduire un dessin en lui faisant subir des rotations, des translations ou des symétries.

Aquarium



Choisis un poisson modèle (A, B ou C) et dessine-le plusieurs fois sur du papier quadrillé. Comme dans l'exemple, chaque poisson doit être placé dans une position différente.



Exemple

8

Nombre d'élèves

- 1

Matériel

- LE p. 6

Mise en commun

- Les élèves comparent leurs résultats et confrontent les méthodes de reproduction utilisées.

Prolongement

- L'enseignant propose la consigne suivante: *"Invente un dessin simple et reproduis-le dans toutes les positions possibles."*
- **"Une ombre au tableau"** FE p. 59

Quelques démarches

- Copier le poisson sur un papier calque
- Faire pivoter le LE pour obtenir une rotation
- Observer le LE par transparence pour obtenir une symétrie
- Reproduire chaque segment du poisson en comptant le nombre de carrés qui en séparent les extrémités

6 – B

256

(Danalet et al., 1999c, p. 256)

Annexe 21 Balises

4P Module 6B **Aquarium**
LM p. 256 LE p. 6

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique	→	Se représenter une figure dans différentes positions. Respecter la conservation des mesures pour dessiner une figure par translation, symétrie axiale ou rotation.
Liens principaux PER	→	MSN 21 1 2 4 5 6 MSN 24 4 MSN 25 B G
Priorité	→	faible ☐ ☐ ☐ forte
Gestion	→	Individuel
Planification dans l'année	→	Dès janvier
Verticalité	→	**3P** Module 6B **Les copines de Caroline** LM p. 232, Balises p. 173 **3P** Module 6B **En avion** FE p. 19, Balises p. 174 **5P** Thème 7 Isométries **F1** FE p.47
Prolongement	→	**Une ombre au tableau** FE p. 59

Commentaires

En **3P**, les élèves ont déjà vécu diverses situations leur permettant de reconnaître des invariants dans les transformations géométriques.
Ils ont déjà été sensibilisés, au travers d'activités telles que Tétrabolos, à :

- imaginer une figure dans une autre position;
- reconnaître des figues dont l'une est l'image de l'autre par une symétrie, une rotation ou une translation;
- reconstituer des figures qui conservent leurs caractéristiques lors de transformations dans le plan;
- se repérer par rapport à des « points » ou des parties de figure déjà posés;
- s'orienter, se fixer des points de repère pour compléter des figures.

En **4P**, les objectifs visés par une telle activité :

- reproduire précisément une forme géométrique quelconque à partir d'un modèle;
- manipuler le poisson, le retourner etc.;
- trouver des moyens adéquats pour dessiner le poisson correctement dans différentes positions;
- utiliser le matériel mis à disposition pour faire subir au poisson choisi diverses transformations. (Règle, équerre, compas, papier calque, quadrillage, ciseaux etc.).

Lors de la mise en commun, on veillera à utiliser le nouveau vocabulaire relatif aux propriétés des figures géométriques ainsi qu'aux différentes transformations subies : rotation, symétrie, translation.

Information mathématique
On appelle "figure quelconque" une figure non régulière, sans axe de symétrie ni angle droit ou particularités qui permettraient sa reproduction complète à partir d'un ou 2 éléments seulement.
Par exemple : faire subir une symétrie axiale à un rectangle, un hexagone régulier ou même une figure telle que le W ne demande pas les même compétences que, appliquer une symétrie axiale à une figure non régulière.

L'enseignant trouvera toutes les définitions se rapportant à cette thématique dans l'**Aide-mémoire** des moyens Mathématiques 7-8-9, Editions LEP 2006.

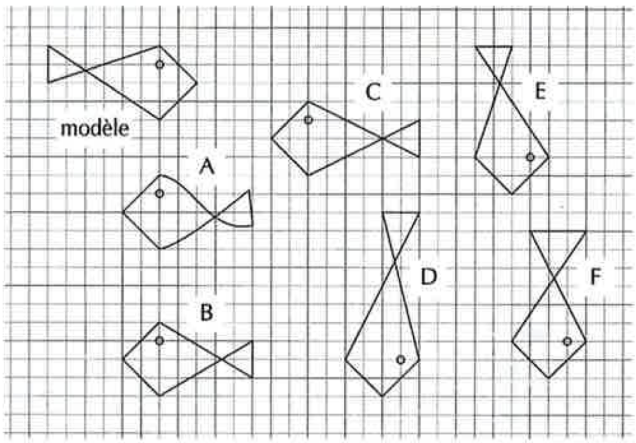
Difficultés potentielles auxquelles les élèves peuvent être confrontés :

- Sans l'aide d'un papier transparent il est difficile par simple observation de reproduire le poisson correctement, surtout si l'on ne compte pas les carrés ou que l'on n'observe pas correctement les pentes des segments. Le papier transparent peut, dans tous les cas, permettre la validation.

- Il est plus facile de reproduire un poisson par symétrie axiale d'axe vertical ou par translation que par d'autres isométries.

- La taille du quadrillage utilisée peut engendrer des difficultés.

- Différents éléments ont été observés en classe : voir *Commentaires didactiques* dans le livre du maître : **LM pp. 238-239**.

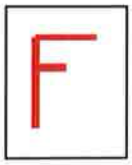


Prolongement : Une ombre au tableau FE p. 59

Activité difficile qui nécessite la compétence à analyser et comparer des figures dans le cas d'une déformation géométrique.
A réserver aux élèves avancés.

Plutôt que ce prolongement, il serait judicieux de prévoir une relance ou consolidation du genre :

- Donner un exercice semblable à faire, mais avec une forme géométrique différente.
  - ☝ On peut en particulier proposer la lettre F avec un graphisme irrégulier : Ceci permet de bien observer les différents segments et leurs images sans rencontrer le problème des obliques à reporter vu que la figure ne possède que des angles droits.



- Demander aux élèves d'inventer un dessin simple et de le reproduire dans de nombreuses positions.

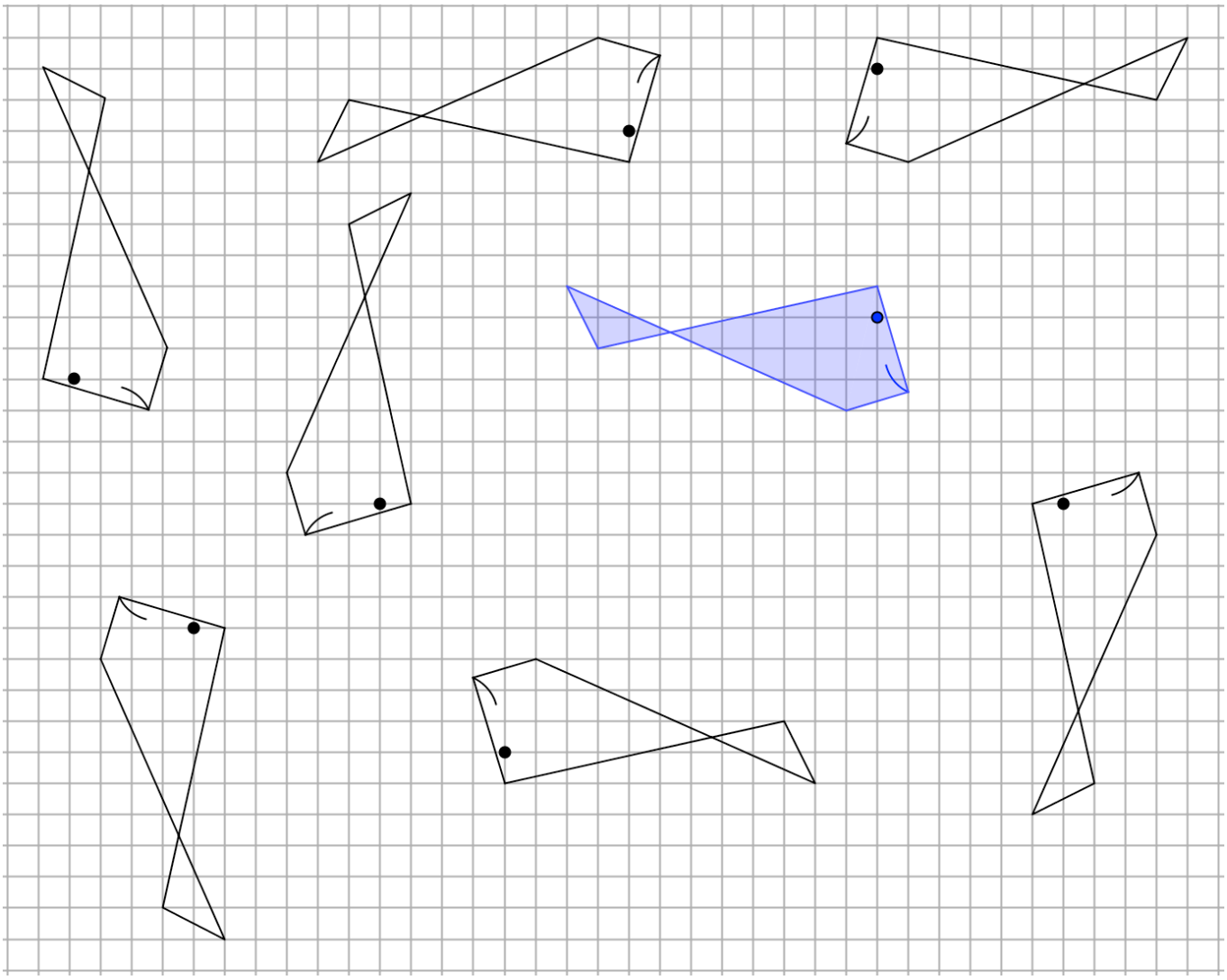
(Maréchal & Gaggero, 2011b, pp. 236-237)

Annexe 22 « Dans l'aquarium » : activité modifiée par le GLS

À partir de l'activité « Aquarium », le GLS a créé l'activité « Dans l'aquarium » ci-dessous. Le GLS a prévu de projeter cet exemple lors de la leçon de recherche.

Dans l'aquarium

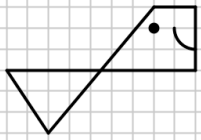
Exemple :



Annexe 23 Fiche élève

Dans l'aquarium

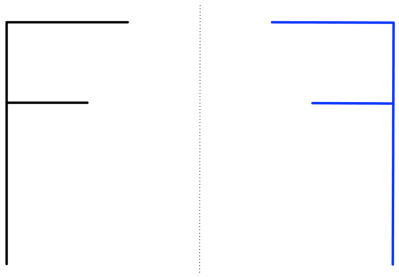
Dessine le poisson plusieurs fois dans le quadrillage.
Comme dans l'exemple au rétroprojecteur, chaque poisson doit être dans une position différente.

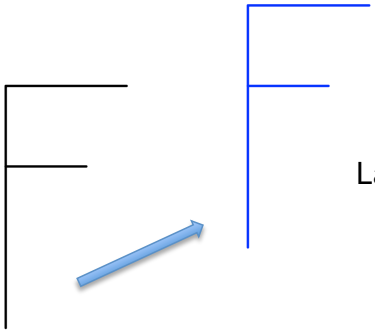


Annexe 24 Fiches d'institutionnalisation

Isométries

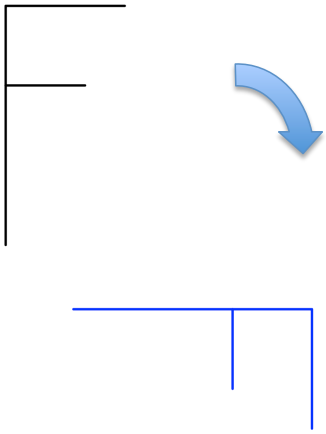
La symétrie





La translation

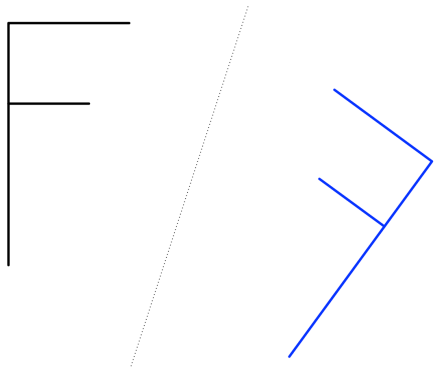
La rotation



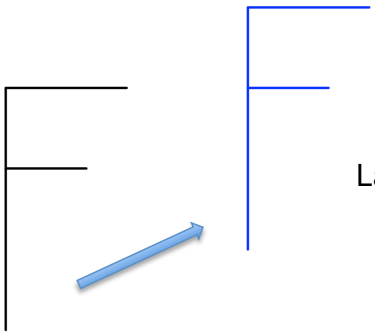
Les mesures sont conservées
Les figures sont superposables

Isométries

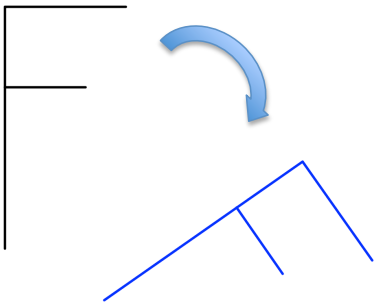
La symétrie



La translation

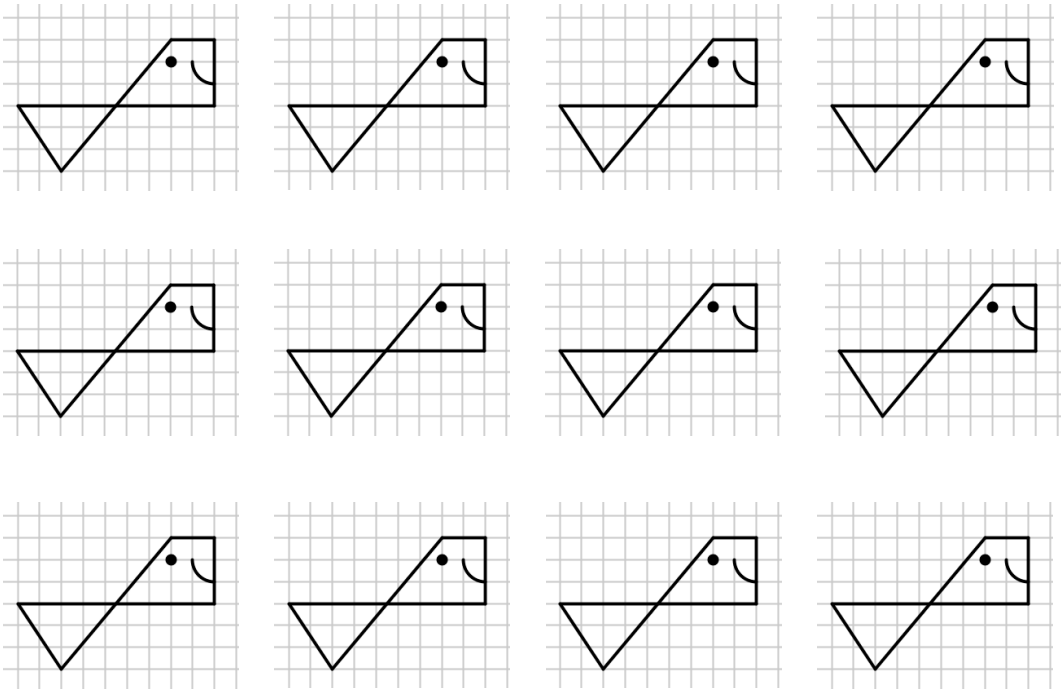


La rotation



Les mesures sont conservées
Les figures sont superposables

Annexe 25 Matériel à découper - chablons



Annexe 26 Plan de leçon

LSM, leçon de recherche du 8 mai 2014
Plan de leçon

La leçon est mise en œuvre en deux temps (environ 45' à chaque fois)

1) les élèves produisent des transformations de nature différente
2) mise en commun et catégorisation des différents types de transformations isométriques.

Phase1

Consigne

Dessine le poisson plusieurs fois dans le quadrillage. Comme dans l'exemple au rétroprojecteur, chaque poisson doit être dans une position différente.

Olga fait deviner l'objectif d'apprentissage de la leçon aux élèves. Pour leur faire deviner qu'ils vont travailler aujourd'hui sur les poissons (et non sur les maths !!!). Brouillage.

Avec la consigne, l'enseignant projette l'exemple au rétro (voir « transparent »).
L'exemple reste projeté durant toute la leçon.
Olga a oublié et l'a remis après quelques minutes. Olga parle de « modèle » et demande aux élèves de vérifier s'ils ont fait pareil que sur le modèle. Est-ce que vous avez tracé tous les poissons comme sur le modèle ? Est-ce qu'ils y sont tous ?

Dévolution de la tâche :

Pendant que les élèves dessinent des poissons issus de diverses transformations géométriques, l'enseignant :

- **observe**
  - comment ils s'y prennent
  - quelles transformations sont mises en œuvre
  - quelles difficultés les élèves rencontrent
  - quels types de collaborations sont mises en œuvre
  - quels sont les obstacles (si ça bloque et pourquoi)

L'enseignante trace un exemple de poisson au tableau noir et demande aux élèves comment tracer un poisson. Mise en commun des procédures de construction de poisson des élèves.
L'enseignante fait lire la consigne et explique puis propose en début d'activité des relances à toute la classe (chablon, calque…). A vérifier.
Problème du statut de la règle : un élève qui a décalqué à main levée les poissons dans des positions différentes.
Le calque a eu 3 fonctions pour les élèves :

- *vérifier que le poisson est superposable avec le poisson modèle (rouge) (3 élèves observés)*
- *décalquer avec le calque pour tracer des poissons (environ une dizaine d'élèves avec ou sans règle et à la fenêtre).*
- *donner l'orientation de la transformation pour tracer un nouveau poisson*

- **Relance** les élèves si nécessaire (le but est d'avoir plusieurs poissons issus d'isométries différentes)
  - éventuellement autoriser certains élèves à aller voir ce qu'ont fait d'autres élèves
  - questionner l'élève, faire avec lui des gestes
  - proposer un chablon (prédécoupé)

Phase2

La mise en commun ayant lieu le lendemain de la phase de production de transformations, l'enseignante laisse un moment aux élèves pour reprendre leur fiche et éventuellement la compléter

Mise en commun :

- L'enseignant projette un transparent de la grille et du poisson de départ (fiche élève). Elle a à sa disposition un chablon (papier) pour faciliter la reproduction de poissons.
- Les productions effectuées par les élèves la veille sont photocopiées (transparents) par l'enseignant.
- Le but est d'amener les élèves à faire un classement des différentes transformations géométriques proposées.

Consigne : On va classer vos poissons : comment ?

- Placer un poisson-chablon selon les consignes des élèves, le dessiner.
- Faire en sorte d'avoir au moins deux exemples de chaque isométrie pour permettre le classement.
- Demander aux élèves de classer les poissons, nommer les transformations.

Institutionnalisation :

Sur un support collectif (le tableau noir), avec l'exemple du F, l'enseignante écrit et dessine un exemple pour chaque type de transformation. Les éléments suivants font l'objet d'une institutionnalisation :

- Symétrie (au tableau, axe vertical et sur la fiche d'instit, axe oblique)
- Rotation (au tableau, rotation de 90° et sur la fiche d'instit, 55°)
- Translation
- Les mesures sont conservées / les figures sont superposables

Une fiche individuelle reprenant ce qui est exposé au TN sera distribuée ultérieurement.

Fin de la leçon :

- Après la phase d'institutionnalisation, l'enseignante invite les élèves à retourner vers leurs productions individuelles et à identifier "lesquels est-ce que j'avais fait?"
- L'enseignante dispose d'un chablon déjà découpé (avec l'œil est la bouche marqué de l'autre côté ?) pour chaque élève qui ne l'aurait pas construit durant la première partie de la leçon.
- L'enseignante passe de table en table

Matériel

- Fiche élève avec le poisson de départ déjà dessiné
- Des fiches poisson à disposition
    - pour découpage (sur demande ou alors proposé si élève perdu)
    - prédécoupé pour la phase de validation (une couleur d'un côté, une couleur de l'autre.)
- Papier calque
- Papier
- Ciseaux
- Règles
- Crayons
- Fiche institutionnalisation
- Transparent consigne

Annexe 27 Analyse *a priori*

Connaissances mathématiques en jeu

Cette tâche vise à travailler les connaissances géométriques :

- la reconnaissance des isométries (symétrie axiale, translation et rotation). Les élèves doivent reconnaître l'isométrie qui permet de transformer la figure initiale en chacune des figures qu'ils ont produites.
- les propriétés des isométries (les mesures sont conservées par isométrie, la figure initiale est superposable avec les figures images par isométrie)

Les connaissances géométriques ci-dessous sont travaillées dans cette tâche mais ne sont pas l'objectif principal :

- la reproduction de figures isométriques dans un quadrillage
- le repérage dans un quadrillage

Nous considérons les isométries du plan, définies comme des transformations du plan qui conservent les mesures. Il y a deux types d'isométries :

- les déplacements (appelés aussi isométries directes ou positives) sont les rotations, les translations et l'identité. Ce sont les isométries qui conservent les angles orientés.
- les anti-déplacements (appelés aussi isométries indirectes ou négatives) sont les symétries axiales et les symétries glissées[2]. Ce sont les isométries qui ne conservent pas les angles orientés.

Dans le plan, il n'existe que ces cinq isométries, toute figure isométrique à la figure initiale (produites par l'élève) est bien l'image par l'une des cinq isométries de la figure initiale. Par ailleurs, la symétrie glissée n'est pas étudiée à ce niveau scolaire.

La composée de deux isométries est une isométrie.

Soit f et g des isométries du plan tels que

$f: \wp \longrightarrow \wp$ $\qquad$ $g: \wp \longrightarrow \wp$

$A \longmapsto A'$ $\qquad$ $A \longmapsto A''$

$B \longmapsto B'$ $\qquad$ $B \longmapsto B''$

tel que $AB = A'B'$ $\qquad$ tel que $AB = A''B''$

$(gof)(A)(gof)(B) = g\big(f(A)\big)g\big(f(B)\big) = g(A')g(B') = A'B' = AB$

[2] Définition : on appelle symétrie glissée la transformation du plan qui est la composée d'une symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ (qui est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$).
Théorème : toute symétrie glissée se décompose de manière unique d'une symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ (qui est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$).

Donc gof est une isométrie du plan.

Dans le Plan d'Études Romand[3], un des objectifs d'apprentissage est de poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace dont l'un des champs porte sur les transformations géométriques. Les éléments travaillés dans l'activité « Dans l'aquarium » sont :

- l'observation des principales propriétés (variants et invariants) des isométries (… en effectuant des isométries et en décrivant des déplacements à l'aide d'isométries)
- le repérage des axes de symétrie d'une figure plane (... en dégageant des propriétés géométriques des figures planes et en les classant)
- la reproduction d'une figure plane par translation ou par symétrie axiale au moyen de matériel *(papier-calque, papier à réseau, ciseaux, miroir, ...)* (… en effectuant des isométries et en décrivant des déplacements à l'aide d'isométries)

Nous allons étudier différentes stratégies possibles pour reproduire la figure dans des positions différentes sur le quadrillage, puis des stratégies pour reconnaître et classer les isométries.

Stratégies possibles

Pour reproduire la figure dans des positions différentes, une <u>première stratégie</u> consiste à utiliser du papier calque. Cette stratégie implique de décalquer la figure (c'est-à-dire de tracer la figure par transparence), puis, de retourner le papier calque en le positionnant de sorte à ce que les sommets du polygone soient placés sur des noeuds.

Différentes façons d'utiliser le papier calque peuvent être envisagées :

- on peut décalquer uniquement les sommets du polygone
- on peut repasser sur l'envers du papier calque à main levée ou en utilisant une règle
- on peut utiliser le papier calque pour visualiser une nouvelle position de la figure sur la feuille
- on peut décalquer la figure puis découper le contour et s'en servir ensuite comme un chablon[4].

[3] Site du PER : http://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_21/, consulté le 31 Mars 2015.

[4] Un « chablon » désigne un mouvement d'horlogerie prêt à être assemblé (sens 1) et un pochoir (terme suisse - sens 2). Ici, nous l'utilisons plutôt au sens 2, mais plus précisément, nous désignons par « chablon » une forme découpée sur une feuille, qui permet d'en tracer le contour et de la superposer avec la figure à reproduire ; à la différence d'un pochoir qui désigne une plaque évidée selon une forme, un dessin précis, ou un patron utilisé pour imprimer un motif.

Une deuxième stratégie consiste à utiliser un chablon (qui correspond à la forme du poisson), déplacer et/ou retourner le chablon, le positionner sur le quadrillage et tracer le contour du chablon. On peut aussi déplacer le chablon, repérer un ou plusieurs sommets du polygone puis compléter la figure.

Une troisième stratégie consiste à plier la fiche de l'élève et à reproduire par transparence (ou avec un compas) en repérant des points.

Une quatrième stratégie consiste à « compter les carreaux » des côtés du polygone, puis placer un sommet du polygone à un autre emplacement du quadrillage et reproduire la même figure avec les mêmes longueurs en comptant les carreaux.
Le polygone a trois côtés parmi les cinq sur des lignes horizontales ou verticales du quadrillage et tous ses sommets sont sur des nœuds du quadrillage. Le polygone à reproduire est de petite taille : les longueurs de ses côtés sont comprises entre 2 et 9 carreaux.
La stratégie qui consiste à « compter les carreaux » est possible en partant d'un des sommets du polygone.
Cette stratégie peut reposer :

- Soit sur un repérage absolu « un point de référence, ainsi que deux directions ou plusieurs points de référence, forment un système de repères pour tous les lieux ou trajets que l'on a à repérer. La position peut être alors déterminée par un ou plusieurs nombres » (ERMEL, p. 552). Ce type de repérage se rapproche d'un système de coordonnées dans un repère.
- soit sur un repérage relatif en repérant les points les uns par rapport aux autres : en partant d'un des sommets du polygone et en effectuant des déplacements successifs pour placer les autres sommets.

Deux grands types de méthodes peuvent être distingués pour copier un polygone à l'aide d'un quadrillage : repérer les points indépendamment les uns des autres (repérage absolu) ou bien partir d'un point et repérer les autres par des déplacements pour parcourir le polygone (repérage relatif) (Roditi, 2010, 2014).
Lorsqu'on trace l'image de la figure par déplacement (translation ou rotation), on peut mettre en œuvre cette stratégie de « compter les carreaux » reposant sur un repérage absolu ou relatif.

Lorsqu'on trace l'image de la figure par symétrie axiale (avec un axe vertical ou horizontal sur les lignes du quadrillage), on peut utiliser la stratégie de « compter les carreaux » de deux manières :

- en utilisant la propriété de la symétrie axiale : un point A et son image A' sont à égale distance de l'axe de symétrie, autrement dit, l'axe de symétrie est la médiatrice du segment [AA']. Dans ce cas, on compte les carreaux de la plus petite distance entre chaque sommet du polygone et l'axe, puis on recompte le même nombre de carreaux de l'autre côté de l'axe par symétrie.
- on peut aussi utiliser cette propriété de la symétrie axiale pour un seul sommet du polygone, puis compléter le polygone image en « comptant les carreaux » mais en utilisant un repérage relatif (par déplacements successifs à partir d'un sommet pour placer les autres sommets).

Lorsqu'on trace l'image par symétrie glissée de la figure initiale, la stratégie de « compter les carreaux » repose sur un repérage relatif et présente la difficulté du changement d'orientation de la figure.
Cette stratégie n'implique pas l'utilisation de matériel (chablon, papier calque) hormis une règle pour tracer les côtés du polygone.

Une <u>cinquième stratégie</u> consiste à mesurer les longueurs des côtés du polygone avec une règle graduée, puis reproduire la figure avec les mêmes longueurs (avec un compas et une règle graduée). Mais, le fait que la figure soit dans un quadrillage rend cette stratégie caduque.

Les stratégies pour reconnaître l'isométrie qui permet de transformer la figure initiale en chaque figure produite par les élèves peuvent s'appuyer sur l'utilisation du matériel :

- une figure est l'image de la figure initiale par anti-déplacement lorsqu'avec un chablon ou un papier calque, on le dispose sur la figure initiale, puis on le retourne et on peut le superposer à la figure image.
- une figure est l'image de la figure initiale par déplacement lorsqu'avec un chablon ou un papier calque, on le dispose sur la figure initiale, puis sans le retourner, on le fait pivoter (rotation) ou on le fait glisser de façon rectiligne (translation), et on peut le superposer à la figure image.

Sans utiliser de matériel, une stratégie de reconnaissance des isométries peut reposer sur l'identification de critères communs à chaque isométrie (reposant sur les propriétés des isométries). Les anti-déplacements ne conservent pas l'orientation de la figure (que l'on

identifie par l'œil et la bouche du poisson), on peut donc déduire qu'il y a eu une symétrie axiale (ou symétrie glissée). Parmi les déplacements qui conservent l'orientation de la figure, on peut distinguer les translations qui conservent la position de la figure et les rotations qui modifient la position de la figure.

Le matériel (calque et chablon) peut servir à :

- tracer l'image par isométrie de la figure initiale
- vérifier que les figures ont la même forme et les mêmes dimensions
- vérifier que les figures ont été placées dans des positions différentes
- visualiser une isométrie à effectuer pour produire une figure dans une position nouvelle
- reconnaître l'isométrie, puis classer les figures produites en fonction de l'isométrie dont elles sont issues.

Nous allons étudier les variables didactiques de l'activité afin de mettre en évidence les liens entre l'utilisation du matériel et les procédures, ainsi que les notions mathématiques.

Variables didactiques

La <u>première variable didactique</u> est le fait de mettre un quadrillage ou non sur la fiche de l'élève.

Avec le quadrillage, on peut compter les carreaux, reproduire la figure initiale à partir d'un nouveau nœud du quadrillage par déplacement. On peut tracer un axe de symétrie sur le quadrillage, puis tracer le symétrique de la figure initiale en comptant les carreaux sur le quadrillage. De plus, le quadrillage renforce le fait de réaliser certains cas particuliers d'isométrie : des symétries d'axe horizontal ou vertical, des rotations de quart de tour, de demi-tour, de trois-quarts de tour.

Reproduire des figures sans quadrillage implique d'autres stratégies : il faut reproduire les mêmes mesures que la figure initiale, les stratégies possibles sont de décalquer, d'utiliser un chablon, d'utiliser une règle et un compas.

La <u>deuxième variable didactique</u> est la nature de la figure initiale. Dans l'activité, la figure initiale est un pentagone croisé sans axe de symétrie, sans centre de symétrie, en forme de poisson avec un œil et une bouche, le pentagone est orienté. Tous les sommets du pentagone sont sur des nœuds du quadrillage, mais tous les côtés du polygone ne sont pas sur les lignes du quadrillage. Choisir un pentagone sans axe de symétrie (ni centre de symétrie) implique de

pouvoir différencier les déplacements et anti-déplacements selon la conservation ou non de l'orientation. La taille de la figure (les longueurs des côtés compris entre 2 et 9 carreaux), le fait que le pentagone croisé corresponde à une forme connue des élèves (forme de poisson), le fait que les sommets du pentagone soient sur des nœuds, le fait que les côtés soient sur les lignes du quadrillage sont des éléments qui facilitent la reproduction de la figure par les élèves.

La troisième variable didactique est le matériel mis à disposition.
Mettre à disposition du papier calque permet à l'élève de décalquer la figure initiale, puis, après avoir retourné le papier calque, l'élève trace une image de la figure. La transformation qui permet de passer de la figure initiale à son image peut être une symétrie axiale ou une symétrie glissée. Le fait de retourner le papier calque implique qu'il y a eu un anti-déplacement (donc une symétrie axiale ou une isométrie composée d'une symétrie axiale et d'un déplacement) et donc met en évidence les propriétés de changement d'orientation de la figure et de la conservation des mesures.
Mettre à disposition un chablon permet à l'élève de mettre en œuvre différentes stratégies : l'élève positionne le chablon sur la figure initiale, puis, il déplace ou retourne le chablon, le repositionne sur le quadrillage afin que les sommets du polygone correspondent aux nœuds du quadrillage. Ensuite, soit l'élève trace le contour du chablon à main levée ou à la règle, soit l'élève positionne uniquement les sommets du polygone à partir du chablon, puis complète l'image de la figure initiale à la règle.
Le chablon peut servir lors de la phase 1 de la leçon à produire des images de la figure initiale, mais également lors de la phase 2, à reconnaître et catégoriser les différentes isométries :

- l'élève déplace le chablon : il effectue une translation.
- l'élève déplace le chablon en le faisant pivoter autour d'un point : il effectue une rotation par rapport à un point.
- l'élève retourne le chablon selon un axe de symétrie : il effectue une symétrie axiale.
- l'élève retourne et déplace le chablon : il effectue la composée d'une symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$ avec une translation de vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathcal{D}$), il effectue une symétrie glissée.
- l'élève retourne et pivote le chablon : il effectue la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation, on peut démontrer qu'il s'agit là encore d'une symétrie glissée.

- l'élève peut reconnaître l'isométrie en identifiant le mouvement effectué par le chablon de la figure initiale à son image.
- le chablon permet à l'élève de vérifier en acte la propriété de conservation des mesures par isométrie.

La quatrième variable est la possibilité de plier ou non la fiche élève. Le fait de plier la feuille permet de tracer des figures images de la figure initiale par symétrie axiale.

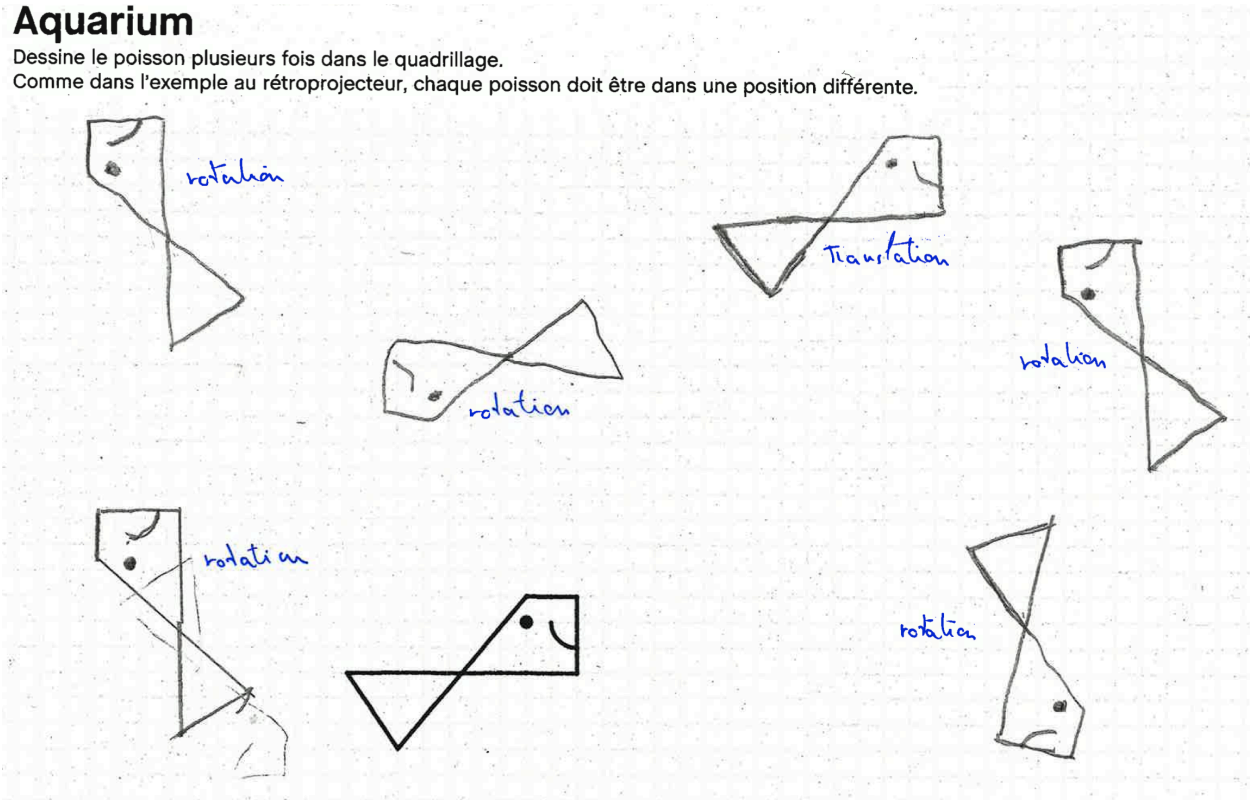
La cinquième variable est la taille du quadrillage. Un quadrillage avec des mailles de 5 millimètres de côté facilite la reproduction des figures et induit la stratégie qui repose sur l'utilisation du quadrillage et qui permet de « compter les carreaux », de reproduire la figure en se repérant sur le quadrillage. Un quadrillage avec des mailles de 1 millimètre de côté (appelé du papier millimétré) induit la stratégie de mesurer les côtés de la figure avec une règle graduée. De plus, la stratégie qui consiste à déplacer un chablon ou un papier calque puis à le positionner sur le quadrillage de sorte à ce que chaque sommet du polygone soit placé sur un nœud du quadrillage est facilitée avec des mailles dont les côtés sont de 5 millimètres et plus.

La sixième variable didactique est le fait de donner ou non un exemple d'une figure initiale avec d'autres figures isométriques dans des positions différentes disposées sur un quadrillage. Dans l'activité « Dans l'aquarium », on donne un exemple qui peut amener les élèves à essayer de recopier l'exemple, en reproduisant le même nombre de poissons, en reproduisant les poissons dans les mêmes positions ou en reproduisant des poissons issus des mêmes isométries. Dans l'exemple, les poissons sont issus uniquement de symétries glissées et de rotations.

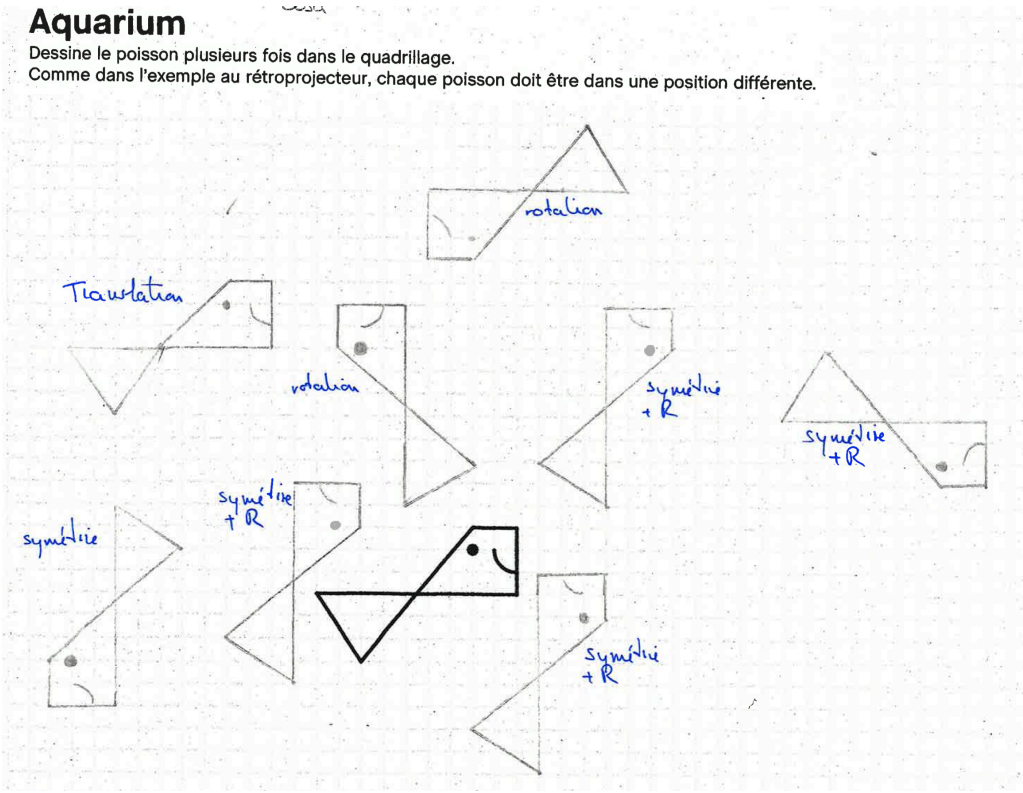
Annexe 28 Production de Grégoire lors de la phase 1, annotée par Océane

La phase 1 de la leçon de recherche a eu lieu le 7 mai 2014 dans la classe d'Océane. Entre la phase 1 et la phase 2 de la leçon, l'enseignante a analysé et annoté les productions des élèves dans l'objectif de préparer la mise en commun de la phase 2 qui a eu lieu le 8 mai 2014.

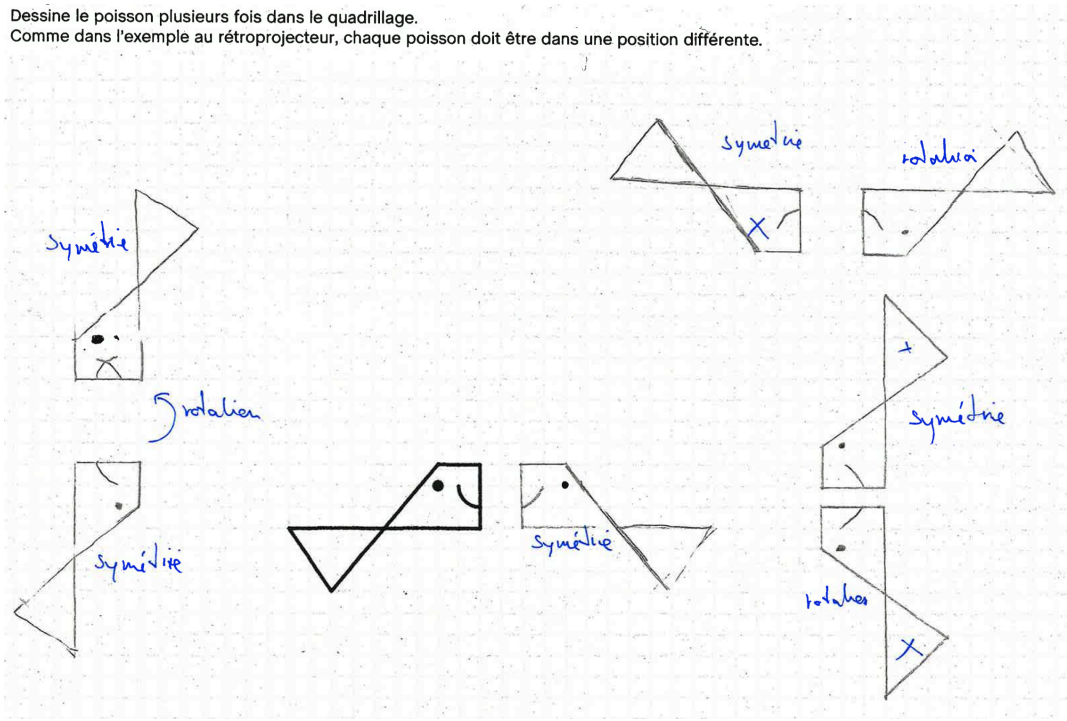
Océane a photocopié les productions des élèves qu'elle a annotées en bleu (ci-dessous). Les trois annexes 28, 29 et 30 sont les productions des trois élèves qu'elle a choisies pour réaliser la mise en commun.



Annexe 29 Production d'Elodie lors de la phase 1, annotée par Océane



Annexe 30 Production de Laure lors de la phase 1, annotée par Océane



Annexe 31 Analyse des productions des élèves après la phase 2

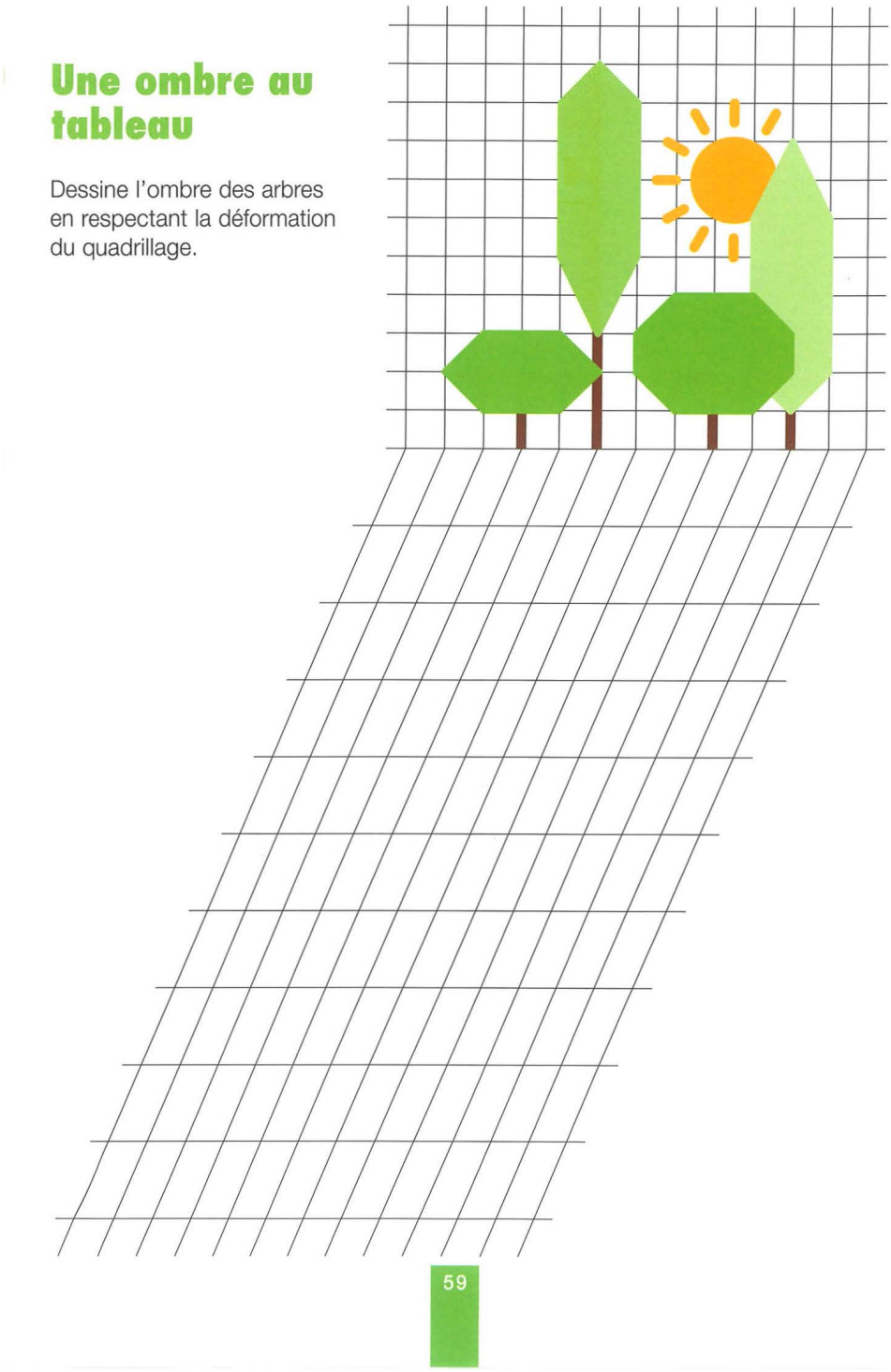
Une analyse des productions des élèves de la classe après la phase 2 a montré que :

- 11 élèves sur 18 confondent l'isométrie et la figure image
- 10 élèves sur 18 confondent une symétrie/rotation/translation et une symétrie glissée
- 5 élèves sur 18 n'ont su ni reconnaître, ni nommer une isométrie sur leur fiche dont 3 élèves qui n'ont rien écrit
- 3 élèves sur 18 ont mis que le poisson initial est l'image par une isométrie (autre que l'identité) du poisson initial

Parmi les élèves qui ont produit des images par symétrie, 6 élèves sur 10 ont su identifier et nommer correctement au moins une symétrie. Parmi les élèves qui ont produit des images par translation, 3 élèves sur 5 ont su identifier et nommer correctement au moins une translation. Parmi les élèves qui ont produit des images par rotation, 10 élèves sur 16 ont su identifier et nommer correctement au moins une rotation. Parmi les 18 élèves, une seule élève n'a produit des images que par des symétries glissées et 5 élèves ont produit des images par symétrie/translation/rotation et par symétrie glissée.

Annexe 32 « Une ombre au tableau »

L'activité « Une ombre au tableau » figure comme prolongement d'« Aquarium » dans le livre du maître (voir Annexe 20). Cette activité a été discutée à plusieurs reprises lors des séances du cycle *b*.



(Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999a, p. 59)

Partie 4 Documents relatifs aux cycles c et *d* sur la résolution de problèmes

Annexe 33 Cycle *c* – « En promotion »

En promotion

Tâche
- Comparer 3 situations de proportionnalité.

En promotion

Dans quel emballage le ballon est-il le moins cher?
Justifie ta réponse.

31

Nombre d'élèves
- 2

Matériel
- LE p. 31

Mise en commun
- Les élèves comparent leurs solutions et confrontent leurs démarches.

Variable
Nombre
- L'activité peut être menée avec trois sortes d'emballages supplémentaires:
  - 10 pièces pour 6 fr.
  - 15 pièces pour 8 fr.
  - 20 pièces pour 12 fr.

Ainsi, les élèves devront affronter une situation contrariant les habitudes où le plus grand emballage n'est pas le plus économique.

Quelques démarches
- Rechercher un multiple commun
  - "Combien coûtent 12 ou 24 ballons dans chaque cas?"
- Comparer les emballages un à un
  - "Quel est le plus avantageux entre celui à 7 fr. et celui à 3 fr.?; quel est le plus avantageux entre celui à 7 fr. et celui à 4 fr.?"
- Rechercher le prix d'un ballon de chaque emballage, puis comparer
  - par division, par multiplication lacunaire, par addition, ...

4 - A

171

(Danalet et al., 1999c, p. 171)

Annexe 34 Balises

4P Module 4A **En promotion**
LM p. 171 – LE p. 31

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique → Reconnaître et résoudre des situations de proportionnalité.
Mettre au point différentes stratégies pour résoudre des problèmes de proportionnalité.

Liens principaux PER → MSN 23 [1] [3] [4]
MSN 25 [D]

Priorité → faible [ ] [ ] [ ] forte

Gestion → Activité à 2 (évent. individuelle)
Planification dans l'année → Dès février

Verticalité →
3P Module 4A **Pain quotidien** LM p. 173, Balises p. 126
4P Module 4A **Carrousel** LM p. 169
4P Module 4B **Dites-le avec des fleurs** LM p. 182
5P Thème 9 **Applications**
6P Thème 7 **Applications**

Commentaires

Etant donné que la résolution par la recherche du prix d'un ballon n'est pas possible dans l'état actuel des connaissances des élèves, il va falloir trouver d'autres stratégies pour contourner l'obstacle.
Mais quelque soit la démarche, il faudra utiliser les propriétés de la proportionnalité.

Solution

Une démarche possible :

Se rendre compte que l'on peut comparer les prix en calculant les prix d'une quantité commune (emballages de 12 ballons).

	Premier emballage	**Deuxième emballage**	**Troisième emballage**
Prix pour 1 emballage	12 b. pour 7 Fr.	6 b. pour 4 Fr.	4 b. pour 3 Fr.
Prix pour 12 ballons	12 b. pour 7 Fr.	12 b. pour 8 Fr.	12 b. pour 9 Fr.

Une autre démarche passe par la comparaison des prix en comparant les prix par ballon.
L'inconvénient de cette démarche est qu'elle fait appel à un algorithme et à des notions que les élèves de 4P ne connaissent pas.

	Premier emballage	**Deuxième emballage**	**Troisième emballage**
Prix pour 1 emballage	12 b. pour 7 Fr.	6 b. pour 4 Fr.	4 b. pour 3 Fr.
Prix pour 1 ballon	7 : 12 = 0,58 Fr.	4 : 6 = 0,66… Fr.	3 : 4 = 0,75 Fr.

(Maréchal & Gaggero, 2011b, p. 132)

Annexe 35 Cycle *c* – « Promotion »

Le GLS a réalisé l'activité « Promotion » à partir d'« En promotion » (Annexe 33).

Promotion

Je veux acheter beaucoup de ballons pour mon anniversaire.
Quel type d'emballage est le plus avantageux?

Justifie ta réponse.

Annexe 36 Analyse *a priori*

L'activité « Promotion » propose trois situations de proportionnalité qu'il faut comparer. Dans la première situation de proportionnalité, chaque emballage contient 12 ballons et coûte 7 Francs. Dans la seconde, chaque emballage contient 6 ballons et coûte 4 Francs. Dans la troisième, chaque emballage contient 4 ballons et coûte 3 Francs. L'énoncé est le suivant : « Je veux acheter beaucoup de ballons pour mon anniversaire. Quel type d'emballage est le plus avantageux ? Justifie ta réponse ».

Le GLS a modifié l'activité « En promotion » issue des MER sur certains éléments :

- La consigne a été modifiée car la question posée dans l'activité initiale (dans quel emballage le ballon est -il le moins cher ?) induit une procédure qui est de calculer le prix unitaire d'un ballon dans chaque type d'emballage. Or cette procédure est non accessible à des élèves de ce niveau.
- « Le terme « PRÉFÉRÉ » a été supprimé sur le dessin parce qu'il est potentiellement porteur de malentendus.
- Le prix des 12 ballons a été modifié de 7 Frs à 10 Frs pour « éviter la possible résolution par approximation ou l'idée reçue que le paquet qui contient le plus de ballons est automatiquement le moins cher.
- La police de caractère des prix et du nombre de ballon a été uniformisée pour éviter d'attirer l'attention des élèves sur le prix qui était écrit en gras »[5].

Connaissances mathématiques en jeu

Dans le livre du maître de 6H (p. 187), l'activité « En promotion » se situe dans le Module 4 « Des problèmes pour connaître la multiplication » et dans le champ A « Des problèmes multiplicatifs et divisifs ». L'activité « Promotion » de même que celle originale « En promotion » sont des problèmes « classiques » de proportionnalité où l'élève peut rechercher le facteur ou procéder de proche en proche à l'aide d'un tableau (p. 153).

Les connaissances mathématiques en jeu sont :

- la proportionnalité
- la résolution de problème

[5] Citation reprise du plan de leçon final, disponible à cette adresse : http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/plan-lecon-6h-Promotion-v06-labo-3ls-2015-hep-vaud.pdf, consulté le 22 septembre 2017

- la multiplication, les multiples communs : un nombre commun de ballons qui permettent de comparer les prix des trois types d'emballage pour comparer les prix

Stratégies

Une première stratégie consiste à calculer le prix d'un ballon dans les trois situations de proportionnalité. Ce qui revient à calculer $10 \div 12$, $4 \div 6$ et $3 \div 4$. Au niveau 6H, cette stratégie n'est pas accessible car le domaine numérique étudié se restreint aux nombres entiers et l'algorithme de la division décimale n'est pas étudié à ce degré.

Une deuxième stratégie consiste à comparer le prix de n ballons dans les trois situations. Pour déterminer n, il faut calculer un multiple commun de 12, 6 et 4, c'est-à-dire un multiple de 12.

	1ère situation	2ème situation	3ème situation
Prix de 1 emballage en Francs	12 ballons pour 10 Fr	6 ballons pour 4 Fr	4 ballons pour 3 Fr
Prix de 12 ballons en Francs	10	$4\times2 = 8$	$3\times3 = 9$

Pour compléter ce tableau, il a été nécessaire d'effectuer des calculs intermédiaires. Dans la 2ème situation, $12 \div 6 = 2$, puis $4\times2 = 8$. Dans la 3ème situation, $12 \div 4 = 3$, puis $3\times3 = 9$. La 2ème situation propose le prix le moins élevé pour 12 ballons et donc le 2ème type d'emballage est le plus avantageux.

Une troisième stratégie consiste à comparer le nombre de ballons que l'on obtient avec m Francs dans les trois situations. Pour déterminer m, il faut calculer le plus petit multiple commun de 10, 4 et 3, c'est-à-dire 60. m peut être égale à 60 ou à un multiple de 60.

	1ère situation	2ème situation	3ème situation
Prix de 1 emballage en Francs	12 ballons pour 10 Fr	6 ballons pour 4 Fr	4 ballons pour 3 Fr
Pour 60 Francs, on obtient ... ballons	$12\times6 = 72$ ballons	$6\times15 = 90$ ballons	$4\times20 = 80$ ballons

Pour compléter ce tableau, il a été nécessaire d'effectuer également des calculs intermédiaires. Dans la 1ère situation, $60 \div 10 = 6$, puis $12\times6 = 72$. Dans la 2ème situation, $60 \div 4 = 15$, puis $15\times6 = 90$. Dans la 3ème situation, $60 \div 3 = 20$, puis $4\times20 = 80$.

Cette stratégie illustre que dans la 2ème situation, avec 60 Francs, on peut avoir le plus grand nombre de ballons et donc le deuxième type d'emballage est le plus avantageux.

Une quatrième stratégie consiste à comparer les types d'emballage deux à deux.

Entre la 1ère et la 2ème situation :

Dans la 1ère situation 12 ballons coûtent 10 Fr donc 6 ballons coûtent 5 Fr. Et 6 ballons coûtent 4 Fr dans la 2ème, le 2ème type d'emballage est le plus avantageux entre les deux premiers.

Entre la 2ème et la 3ème situation :

Dans la 2ème situation, 6 ballons coûtent 4 Fr, donc 24 ballons coûtent $4\times4 = 16$ Fr.

Dans la 3ème situation, 4 ballons coûtent 3 Fr, donc 24 ballons coûtent $3\times6 = 18$ Fr. Le 2ème type d'emballage est le plus avantageux entre le 2ème et le 3ème.

Ainsi, le 2ème type d'emballage est le plus avantageux des trois.

Étude des variables didactiques

La première variable didactique est les valeurs numériques des trois situations de proportionnalité. Les valeurs 12-10, 6-4 et 4-3 écartent la première stratégie qui n'est pas accessible pour des élèves de ce degré. La deuxième stratégie est la stratégie optimale.

La deuxième variable est la formulation de la question. Dans l'activité originale, la question est « Dans quel emballage le ballon est-il le moins cher ? ». Cette question induit la première stratégie. La formulation de la question dans « Promotion » n'induit pas la première stratégie, mais plutôt une stratégie de comparaison.

La troisième variable didactique est le fait de donner ou non un nombre de ballons à acheter, puis de demander quel emballage est le plus avantageux.

Si le nombre de ballons à acheter est indiqué, cela simplifie l'activité et la deuxième stratégie est optimale. Sinon, il faut calculer un multiple commun de 12, 6 et 4 puis comparer les prix obtenus avec ce même nombre de ballons. La deuxième stratégie est optimale.

Annexe 37 Plan de leçon

Les élèves sont à leur place habituelle.
Plan de la classe à fournir pas l'enseignante (en version papier à Valérie).

Plan de la leçon	**Remarques, matériel, timing**
Distribution énoncé. Indiquer qu'il s'agit d'un travail individuel	Énoncé sur feuille A4
Travail individuel	5-10' selon la perception de l'enseignante. Laisser les élèves chercher mais sans qu'ils se découragent, sans non plus qu'ils fassent n'importe quel calcul pendant trop longtemps. A ce stade, il n'y a pas d'aide apportée, sauf sur le mots *avantageux*, en disant : la sorte d'emballage qui coute le moins cher pour acheter beaucoup de ballons.

En collectif
• On cherche quoi ?
• Discussion éventuelle à deux
• Faire émerger
  ○ il faut un élément commun pour pouvoir comparer
  ○ il faut avoir le même nombre de ballons pour comparer
  ○ Proposition éventuelle : 24 ballons
	Selon les réponses des élèves, l'enseignante estime si un moment de discussion par deux est nécessaire pour savoir ce qui est cherché.
	
	Si un tel moment à lieu, il y a ensuite un moment collectif pour faire émerger les points liés à la comparaison.
	
	L'enseignante estime s'il est nécessaire de proposer la recherche pour 24 ballons à tous ou si elle le propose comme aide individuelle

En individuel • Résolution du problème (pour 24 ballons)	
En collectif • Pointer le fait que le problème demande de comparer • Qu'une comparaison demande des points communs • Quel serait le paquet le moins cher pour acheter 36 ballons ?	Pour 36 ballons : laisser éventuellement les élèves réfléchir quelques instants individuellement avant de mettre en commun leurs solutions.
Individuel : Pour les élèves qui ont encore des difficultés ou plus vite si nécessaire : • Faire les sachets (avec des jetons).	Sachets et jetons (en grand nombre)
Individuel : Pour les élèves qui peuvent aller plus loin : • Problème avec 10 ballons pour 6.- , 15 ballons pour 8.- , 20 ballons pour 12.-	Énoncé à distribuer sur feuille A5

Matériel

- Enoncé *Promotion* et *Une autre promotion*
- Sachets plastique et jetons

Observation

- Chaque observateur se focalise sur deux élèves.
- Les observations se concentrent sur les procédures des élèves, leurs difficultés, leurs réussites, et sur les effets des interventions (en individuel ou en collectif) de l'enseignante.

Annexe 38 « Une autre promotion »

Le GLS a prévu l'activité « Une autre promotion » comme prolongement de l'activité « Promotion » pour la leçon de recherche.

Une autre promotion

Une autre sorte de ballons est proposée dans les emballages suivants :

- 10 ballons pour 6.-
- 15 ballons pour 8.-
- 20 ballons pour 12.-

Parmi ces trois types d'emballage, lequel est le plus avantageux ?

Annexe 39 Cycle *d* - « Les 99 carrés »

Le GLS a choisi l'activité « Les 99 carrés » pour les deux leçons de recherche du cycle *d*.

Les 99 carrés

Tâche

- Chercher la somme de nombreux termes égaux.

Les 99 carrés

Pour former cette suite de 3 carrés, il a fallu 10 allumettes.
Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 99 carrés?

52

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 52

Mise en œuvre

- La calculatrice n'est pas à la disposition des élèves pendant la recherche. Elle peut jouer un rôle lors de la validation.

Mise en commun

- Les élèves comparent leurs solutions et confrontent leurs démarches.

Prolongement

- L'enseignant propose les énoncés suivants:
  "Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 427 carrés?"
  "Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 136 de ces nouveaux carrés?"

Quelques démarches

Concernant la résolution du problème

- Dessiner des carrés et dénombrer les allumettes
- Inscrire sous forme de liste:
  1 carré ⟶ 4 allumettes,
  2 carrés ⟶ 7 allumettes, ...
- Représenter la situation par une opération
  - (98 × 3) + 4
  - (99 × 3) + 1

Concernant les opérations

- Utiliser un algorithme de multiplication
- Utiliser un tableau de correspondance, par exemple:
  3 carrés ⟶ 9 + 1 allumettes
  30 carrés ⟶ 90 + 1 allumettes
  90 carrés ⟶ 270 + 1 allumettes

4 - B

187

(Danalet et al., 1999c, p. 187)

Annexe 40 Balises

4P Module 4B **Les 99 carrés**
LM p 187 – LE p 52

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique : → Reconnaître, établir des suites numériques et exprimer leur loi de formation.
Travailler avec des suites non proportionnelles.

Liens principaux PER → MSN 23 [1] [3] [4] [6]
MSN 25 [A] [B] [F]

Priorité → faible [ ] [ ] [ ] forte

Gestion → Activité à 2
Planification dans l'année : → dès février

Verticalité → **4P** Module 4B **Recherche carrée** LM p.192 (dès avril)
→ **5P** Thème 9 Applications **Ex3 Des escaliers** LE p. 88
5P Thème 9 Applications **Ribambelle** LE p. 87
Prolongement → Voir **LM**

Commentaires

On fera remarquer que le nombre d'allumettes ne double pas quand le nombre de carrés double (non proportionnalité de la situation).
On rencontre ici une situation qui permet de montrer l'utilité d'organiser les données dans un tableau de correspondance.

Présentation horizontale :

Nombre de carrés	1	2	3	4	5	6		99
Nombre d'allumettes	4	7	10	13	16	19		298

Présentation verticale :

Nombre de carrés	Nombre d'allumettes
1	4
2	7
3	10
99	298

Nombre de carrés	Nombre d'allumettes
1	(1x3) + 1 = 4
2	(2x3) +1 = 7
3	(3x3) + 1 = 10
99	(99x3) + 1 = 298

Solution experte

y = 3x + 1 si x= 99 alors y = 3*99 + 1 = 297 + 1 = 298

Prolongement

a) Pour une suite de 427 carrés, on a besoin de 1282 allumettes.
b) Pour 136 "nouveaux carrés" → y= 6x + 2 donc on a besoin de 816 allumettes.

(Maréchal & Gaggero, 2011b, p. 158)

Annexe 41 Analyse *a priori*

Connaissances mathématiques en jeu

Dans le livre du maitre de 6H (Danalet et al., 1999c, p. 187), l'activité « Les 99 carrés » se situe dans le Module 4 : « Des problèmes pour connaître la multiplication » et dans le champ B « Apprendre à calculer ». Cette tâche consiste à « chercher la somme de nombreux termes égaux ».

Dans l'énoncé, il y a une suite de 3 carrés formés avec 10 allumettes. L'activité consiste à déterminer le nombre d'allumettes pour former une suite de 99 carrés.

Les connaissances mathématiques travaillées sont :

- la résolution de problème
- la reconnaissance et l'établissement de suite numérique

La suite numérique est : pour tout entier n non nul, $u_n = 3n + 1$. Il s'agit de calculer le 99ème terme de cette suite ($u_{99} = 3x99+1=298$) pour répondre à l'activité demandée.

Plusieurs représentations de cette suite sont possibles pour répondre à la tâche. Il faut d'abord identifier que n correspond au nombre de carrés et u_n au nombre d'allumettes.

En notant $u_n = 1 + 3n = 1 + 3 + 3 + ... + 3$ (avec n termes 3), on compte 1 allumette à laquelle on ajoute 3 allumettes pour chaque carré supplémentaire.

En notant $u_n = 4 + 3 (n – 1) = 4 + 3 + 3 + ... + 3$ (avec n – 1 termes 3), on peut représenter u_n comme un carré de 4 allumettes auquel on ajoute 3 allumettes pour chaque carré supplémentaire.

En notant $u_n = 4n – (n – 1)$, on compte 4 allumettes par carré, puis on soustrait les n – 1 allumettes verticales comptées en double.

En notant $u_n = n + n + (n + 1)$, on additionne n allumettes horizontales du « haut » du carré, n allumettes horizontales du « bas » du carré et (n + 1) allumettes verticales.

Stratégies

Une <u>première stratégie</u> consiste à réaliser les 99 carrés et compter le nombre d'allumettes utilisées. Une variante de cette stratégie consiste à représenter les 99 carrés plutôt qu'à les réaliser. Ces deux stratégies reposent sur des stratégies de comptage jusqu'à 99 carrés. Elles sont difficilement réalisables car elles sont coûteuses en temps pour la réalisation et le comptage. Pour représenter les 99 carrés en taille réelle, il est nécessaire d'utiliser 17 feuilles A4 disposées les unes à côté des autres horizontalement.

Une deuxième stratégie consiste à réaliser 1 carré et à compter le nombre d'allumettes utilisées, de même avec 2 carrés, 3 carrés, 4 carrés, 5 carrés..., puis à chercher une relation entre le nombre de carrés et le nombre d'allumettes. Une variante de cette stratégie consiste à représenter plutôt qu'à réaliser les carrés. Ces stratégies reposent sur le comptage du nombre d'allumettes pour quelques carrés puis sur une généralisation dans laquelle il faut calculer le 99ème terme de la suite numérique.

Une troisième stratégie consiste à chercher une relation entre le nombre de carrés et le nombre d'allumettes. Cette stratégie s'effectue sans réalisation, sans représentation et sans comptage des allumettes. Il s'agit de la stratégie visée par l'activité. Dans cette stratégie, on peut effectuer un tableau à deux colonnes dans lequel on fait correspondre le nombre de carrés (n) au nombre d'allumettes (un).

Étude des variables didactiques

La première variable didactique est le nombre de carrés. Dans l'activité, la valeur 99 de la variable est choisie pour rendre coûteuses en temps les stratégies de comptage et rendre optimale la troisième stratégie. La valeur 4 de la variable rendrait la première stratégie optimale.

La deuxième variable est le choix du polygone, ici le carré.
Avec une suite de triangles équilatéraux, nous aurions la suite numérique :
pour tout entier n, $u_n = 3 + 2\,(n - 1) = 2n + 1$
Avec une suite de pentagones réguliers, nous aurions la suite numérique :
pour tout entier n, $u_n = 4n + 1$
Avec une suite de polygones réguliers à p côtés, nous aurions la suite numérique :
pour tout entier n, $u_n = (p - 1)\,n + 1$
Le choix du polygone régulier modifie la suite numérique en jeu dans l'activité.

La troisième variable didactique est le matériel utilisé pour former les quadrilatères. Avec des allumettes de même longueur, les quadrilatères formés sont des carrés ou des losanges. Avec des allumettes de deux longueurs différentes, les quadrilatères formés sont des cerfs-volants ou des rectangles. Cette variable ne modifie pas la suite numérique en jeu dans l'activité ($u_n = 3n + 1$) mais elle complexifie les stratégies une et deux qui reposent sur de la réalisation, de la représentation et sur du comptage et rend optimale la troisième stratégie.

La quatrième variable didactique est le choix de réaliser des suites composées d'une succession de polygones réguliers.

Si on réalise une suite constituée de la succession d'un carré et d'un triangle équilatéral avec des allumettes toutes de même longueur, nous aurions la suite numérique :

pour tout entier n, $u_{n+2} = u_n + 5$ avec $u_1 = 4$ et $u_2 = 6$

Si on réalise une suite constituée de la succession d'un pentagone régulier, d'un carré et d'un triangle équilatéral avec des allumettes toutes de même longueur, nous aurions la suite numérique :

pour tout entier n, $u_{n+3} = u_n + 4 + 3 + 2$ avec $u_1 = 5$, $u_2 = 8$ et $u_3 = 10$

Si on réalise une suite constituée de la succession d'un polygone régulier à p côtés (pour p entier supérieur ou égal à 5), d'un polygone régulier à (p – 1) côtés..., un polygone régulier à 3 côtés avec des allumettes toutes de même longueur, nous aurions la suite numérique : pour tout entier n, $u_{n+p-2} = u_n + (p-1) + \cdots + 4 + 3 + 2$

avec $u_1 = p$, $u_2 = 2p - 2$, $u_3 = 3p - (2 + 3)$,...

jusque $u_{p-2} = (p-2)p - (2 + 3 + \cdots + p - 3)$

La reconnaissance des suites numériques en jeu devient plus complexe car elles sont définies avec plusieurs termes initiaux et les termes sont définis en fonction de leurs prédécesseurs. Cette variable complexifie la stratégie 3. Quant aux stratégies une et deux, elles sont réalisables dans la mesure où il faut déterminer un terme de la suite « pas trop grand ».

La cinquième variable didactique est l'agencement des carrés. Ici, les carrés sont disposés côte à côte sur une seule et même ligne.

Si l'agencement consiste à disposer les carrés les uns en dessous des autres, 3 par rangée, nous aurions la suite numérique pour tout entier n, $v_n = 10 + 7 (n - 1) = 7n + 3$ où n correspond à une rangée de 3 carrés et v_n le nombre d'allumettes par rangée.

Il faut calculer ici le 33ème terme (v_{33}=234) pour répondre à la tâche.

Partie 5 Documents relatifs aux leçons observées après le dispositif LS

Annexe 42 Classe d'Anaïs : « Main pleine »

Main pleine

Tâche

- Reconnaître des écritures mathématiques équivalentes.

Mise en œuvre

- Chaque couleur de cartes permet à 3 ou 4 élèves de jouer. L'enseignant tient compte de la structure plus complexe des cartes bleues.

Variable

Règles du jeu

- Aux élèves qui éprouvent des difficultés à identifier les produits et les écritures correspondantes, l'enseignant propose les modifications suivantes:
  - diminution du nombre de séries de cartes: pour 2 ou 3 joueurs, 12 cartes de la même couleur (3 séries équivalentes)
  - diminution du nombre de cartes en main: pour 3 ou 4 joueurs, 12 cartes (4 séries de 3 cartes)

Prolongement

- **"Cousines"** LE p. 92
- **"Coup de sac!"** FE p.14

Main pleine

Règles du jeu pour 3 ou 4 joueurs

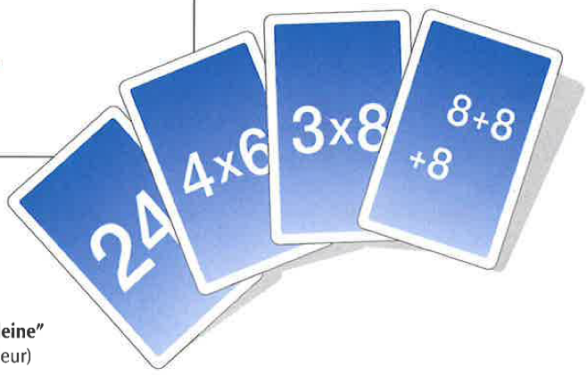
Matériel: 16 cartes d'une même couleur, jetons

Distribuer les cartes et 5 jetons par joueur.

- Le joueur qui commence la partie donne une carte de son choix à son voisin de gauche qui fait de même, et ainsi de suite.
- Quand un joueur possède 4 cartes correspondant au même nombre, il annonce "Main pleine" et montre ses cartes.
- S'il a raison, les autres joueurs lui donnent un jeton et la partie est finie.
- S'il a tort, il donne un jeton à chaque joueur et la partie continue.

Le but est d'avoir le plus de jetons après plusieurs parties.

102



Nombre d'élèves

- 3 ou 4

Matériel

- LE p. 102
- MC: 16 cartes "**Main pleine**" (une seule couleur)
  5 jetons par joueur

4 – B

185

(Danalet et al., 1998c, p. 185)

Annexe 43 Balises

3P Module 4B **Main pleine**
LM p. 185 LE p. 102

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique	→	Exercer la multiplication. Reconnaître différentes écritures d'un même nombre.
Liens principaux PER	→	MSN 22 2 5 6
Priorité	→	faible forte
Gestion	→	Jeu à 3 ou 4
Planification dans l'année	→	Dès janvier
Verticalité	→	**4P** Module 4A **Vente d'insignes** LM p. 180 LE p. 86, Balises p. 146
Prolongement	→	**Cousines** LE p. 92 **Coup de sac** FE p. 14

Commentaires

Cette activité est un jeu de type "jeu des familles".
Elle permet d'entraîner naturellement les différentes manières de décomposer des nombres (multiplicative, additive, etc.).

Prolongement : Cousines LE p. 92

Cette activité est un jeu de type "Memory".

Prolongement : Coup de sac FE p. 14

Activité individuelle qui permet de réviser le répertoire multiplicatif.
Caroline et Laurent ont gagné !

(Maréchal & Gaggero, 2011a, p. 136)

Annexe 44 Analyse *a priori*

Connaissances mathématiques en jeu– règles du jeu– matériel

Dans le livre du maître de 5H (p. 185), l'activité « Main pleine » se situe dans le Module 4 : « Des problèmes pour connaître la multiplication » et dans le champ B « Apprendre à calculer ». Cette tâche consiste à « reconnaître des écritures mathématiques équivalentes ».

Les connaissances mathématiques travaillées sont :

- la multiplication vue comme une addition itérée
- les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication (utilisées dans les écritures multiplicatives des cartes bleues)

Dans les commentaires du livre du maître de 5H, il est précisé que l'activité « Main pleine » est une occasion « de faire des multiplications [...] et d'assimiler peu à peu les propriétés de ces opérations » (p. 158).

Les élèves jouent par 3 ou 4 joueurs avec un jeu de 16 cartes d'une couleur (4 séries de 4 cartes donnant le même résultat). Les nombres des cartes jaunes sont 14 ;15 ;18 ;20 (tables de 2 ;3 ;4). Les quatre séries de cartes jaunes sont :

- 14 ; 2x7 ; 7 + 7 ; 2+2+2+2+2+2+2
- 15 ; 3x5 ; 5+5+5 ; 3+3+3+3+3
- 18 ; 6x3 ; 6+6+6 ; 3+3+3+3+3+3
- 20 ; 4x5 ; 5+5+5+5 ; 4+4+4+4+4

Les nombres des cartes bleues sont 12 ;16 ;24 ;36 (tables de 2 ; 4 ; 6), ce sont les seules à proposer des égalités d'écritures multiplicatives en utilisant l'associativité et la commutativité de la multiplication (8x2=4x4 ;4x3=6x2 ;4x6=3x8 ;6x6=9x4). Les nombres des cartes rouges sont 21 ;28 ;32 ;40 (tables de 3 ; 4 ; 5). Les nombres des cartes vertes sont 30 ;35 ;42 ;48 (tables de 5 ;6). Les cartes rouges, jaunes et vertes font travailler les différentes écritures de la multiplication vues comme une addition itérée (par exemple 15= 3x5=5+5+5=3+3+3+3+3).

Chaque joueur a 5 jetons et 4 ou 5 cartes au début de la partie. À chaque tour, chaque joueur donne une carte à son voisin de gauche. Le but est d'associer 4 cartes correspondant au même nombre. Quand un joueur y parvient, il dit main pleine, montre ses cartes. S'il a raison, les autres joueurs lui donnent un jeton et s'il a tort il donne un jeton à chaque joueur. Le gagnant du jeu est celui qui a le plus de jetons.

Le jeu présente un intérêt mathématique à la fin lorsqu'un élève dit main pleine et dévoile ses cartes. À ce moment, les élèves du groupe doivent vérifier si les 4 cartes de la série donnent le

même résultat. L'intérêt mathématique se situe au niveau de la validation de la série des 4 cartes par les élèves du groupe. Le jeu peut ne pas présenter d'intérêt mathématique si un élève n'effectue pas les calculs indiqués sur les cartes et donnent aléatoirement ses cartes à son voisin ou si la validation de la série n'est pas réalisée par les élèves du groupe.

Stratégies

Nous décomposons l'activité en deux étapes : la première consiste à associer les différentes écritures multiplicatives ou additives sans nécessairement trouver le résultat, puis la seconde étape consiste à trouver le résultat (produit ou somme).

Pour la première étape, les stratégies possibles consistent :

- à utiliser la définition de la multiplication comme addition itérée et les propriétés de la multiplication. Par exemple, 3x5, 3 fois 5 est égale à 5 + 5 + 5 par définition et en utilisant la commutativité de la multiplication 3x5 = 5x3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3
- à identifier les facteurs du produit qui doivent être les mêmes nombres que les termes des sommes. Par exemple, associer 2x7 ; 7 + 7 ; 2+2+2+2+2+2+2 car ces trois cartes ne comportent que les nombres 2 et 7.

Pour la deuxième étape, les stratégies possibles consistent :

- à effectuer les calculs en les posant ou en calcul réfléchi
- à faire appel au répertoire mémorisé de la multiplication
- à chercher les produits sur les livrets.

Pour la première étape, la stratégie optimale consiste à utiliser la définition de la multiplication comme addition itérée et les propriétés de la multiplication. Pour la deuxième étape, la stratégie optimale est de faire appel au répertoire mémorisé de la multiplication.

Variables didactiques

La première variable didactique est le nombre de cartes par série. Dans le jeu, il y a 4 cartes par série. Dans les jeux jaunes, vertes, rouges, chaque série contient : le nombre entier, une multiplication, les deux écritures additives associées à la multiplication.

Dans le jeu bleu, chaque série contient : le nombre entier, deux écritures multiplicatives, une écriture additive.

Plus il y a de cartes par série, plus l'activité est complexe et plus on peut proposer des écritures différentes qui peuvent travailler les propriétés de la multiplication.

La deuxième variable didactique est le nombre de séries par jeu de cartes. Il y a 4 séries par jeu de cartes. Plus il y a de séries par jeu de cartes, plus l'activité est complexe.

La troisième variable didactique est le domaine numérique. Dans le jeu, les nombres sont des entiers inférieurs à 50 et multiples de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Les nombres entiers pourraient être supérieur à 100 et être multiples de 10, 11, 12, 13, 14 ou 15.

La quatrième variable didactique est les écritures mathématiques inscrites sur les cartes. On peut choisir des écritures mathématiques qui font travailler les différentes écritures de la multiplication vues comme une addition itérée, la commutativité de la multiplication, la commutativité et l'associativité de la multiplication.
Les cartes bleues font travailler les différentes écritures de la multiplication vues comme une addition itérée, la commutativité et l'associativité de la multiplication.
Les cartes jaunes, rouges et vertes font travailler les différentes écritures de la multiplication vues comme une addition itérée.

Annexe 45 Classe d'Océane : « Plions »

I - B

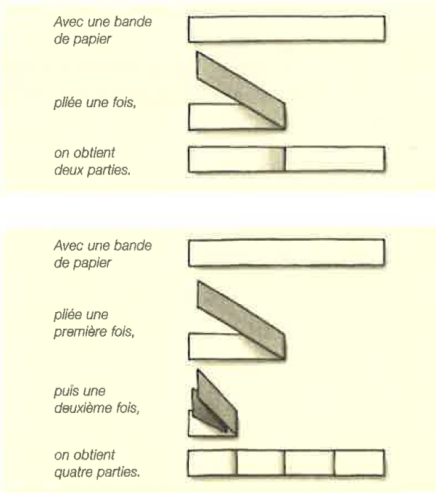
Plions

Tâche

- Passer de la manipulation à la représentation afin de prévoir le résultat d'une suite d'actions.

Plions

Combien de parties obtient-on avec une bande de papier pliée comme dans ces exemples, mais dix fois?



51

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 51

Déroulement

Relance

- Aux élèves qui éprouvent trop de difficultés à entrer dans l'activité, l'enseignant propose des bandes de papier d'environ 70 cm. Ils pourront ainsi les plier aisément quatre ou cinq fois avant d'abandonner la manipulation au profit d'une méthode de recherche.

Mise en commun

- Les élèves comparent leurs solutions et débattent de leur validité.
- Pour éviter qu'ils ne s'entendent sur une solution fausse, ils valident par pliage les premiers résultats.
- Ils confrontent leurs démarches.

Prolongement

- L'enseignant propose la consigne suivante: *"Combien y aurait-il de plis si l'on pliait la bande 10 fois en tout?"*

Quelques démarches

- Manipuler spontanément une bande de papier et observer les résultats
- Utiliser un mode de représentation
  - Liste de nombres, tableau, dessin, ...
- Appliquer une procédure de calcul

(Danalet et al., 1998c, p. 96)

Annexe 46 Balises

3P Module 1B **Plions**
LM p. 52 – LE p. 51

En un clin d'œil

Objectif, intention pédagogique → Trouver une stratégie permettant de se passer de la manipulation pour dénombrer des parties en relation avec le nombre de pliures. Représenter une relation numérique sous forme de tableau.

Liens principaux PER → MSN 23 [1] [2]
MSN 25 [A] [B] [D] [E] [F]

Priorité → faible [ ] [■] [ ] forte

Gestion → Activité à 2, individuel possible.
Planification dans l'année → Dès avril

Verticalité → **5P** Thème 12 **Puissances**, ex 21 **Pliage** p. 119

Information mathématique

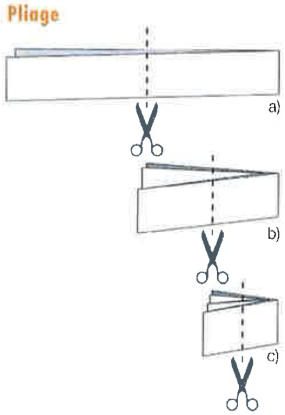
Il s'agit d'une fonction de type : $y = 2^x$
Tableau de valeurs :

Nb de plis	0	1	2	3	4	5	6	...	10	x
Nb de parties	1	2	4	8	16	32	64	...	1024	$y = 2^x$

5P Pliage
Remarque : On retrouve un exercice semblable en 5P avec bien sûr des exigences sur le plan de la recherche de formule. Le thème 12 introduit la notion de puissance.
Attention !!! Dans cet exercice, étant donné que l'on coupe, on obtient un nombre de parties différent :

Consigne :

21. Pliage



Plie une fois une bande de papier puis coupe-la comme te l'indique le dessin a).

Note le nombre de morceaux que tu obtiens.

Plie deux fois une autre bande puis coupe-la comme te l'indique le dessin b).

Note le nombre de morceaux que tu obtiens.

Continue en pliant trois fois (dessin c), quatre fois, cinq fois, ... puis en coupant de la même manière d'autres bandes.

Combien de morceaux obtiens-tu à chaque fois?

Solution à discuter en 5P :
Tableau de valeurs :

*Nb de **coupes***	0	1	2	3	4	5	6	...	10	x
Nb de parties	1	3	5	9	17	33	65	...	1025	$y = 2^x + 1$

Il s'agit d'une fonction de type : $y = 2^x + 1$

(Maréchal & Gaggero, 2011a, p. 31)

Annexe 47 Analyse *a priori* de « Plions »

Connaissances mathématiques en jeu

Dans le livre du maitre de 5H, cette tâche se situe dans le Module 1 : « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement » et dans le champ B « Apprendre à développer des stratégies de recherche ». Cette tâche consiste à « passer de la manipulation à la représentation afin de prévoir le résultat d'une suite d'actions » (Livre du maître, p. 33).

Dans les Moyens d'Enseignement Romand, cette tâche est prévue pour travailler la résolution de problème. D'autres connaissances mathématiques sont utilisées dans l'activité mais ne constituent pas ce qui est visé en termes d'apprentissage, à savoir : le calcul du double d'un nombre en multipliant par deux ou en additionnant deux fois le même nombre.

Stratégies

La <u>première stratégie</u> est une stratégie de manipulation dans laquelle il faut plier la bande et compter le nombre de parties. Cette première stratégie devient difficilement réalisable à partir de 6 plis. « Dans « Plions », après avoir effectué sans peine 4 ou 5 plis, les élèves devront changer de démarche et utiliser un mode de représentation pour continuer la recherche » (Livre du maître, p. 35).

La <u>deuxième stratégie</u> consiste à associer à un nombre de plis le nombre de parties par exemple dans un tableau comme ci-dessous.

Lorsqu'on plie une fois la bande, elle comporte 2 parties. On complète la première ligne du tableau. Puis, pour passer d'une case à celle d'en-dessous dans la colonne du nombre de parties, on peut multiplier par deux, c'est-à-dire calculer le double du nombre.

Nombre de plis	Nombre de parties
1	2
2	$2\times2 = 4$
3	$2\times4 =8$
4	$2\times8 = 16$
...	...

La <u>troisième stratégie</u> consiste à compléter ce même tableau en additionnant deux fois le nombre pour passer d'une case à celle d'en-dessous.

Nombre de plis	Nombre de parties
1	2
2	$2 + 2 = 4$
3	$4 + 4 = 8$
4	$8 + 8 = 16$
...	...

La <u>quatrième stratégie</u> consiste à compléter ce même tableau en multipliant par 2 avec autant de facteur 2 qu'il y a de nombre de plis.

Nombre de plis	Nombre de parties
1	2
2	$2\times2=4$
3	$2\times2\times2=8$
4	$2\times2\times2\times2=16$
...	...
x	2^x

La fonction puissance de deux est en jeu : $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mais hors de portée d'élèves de 5H.

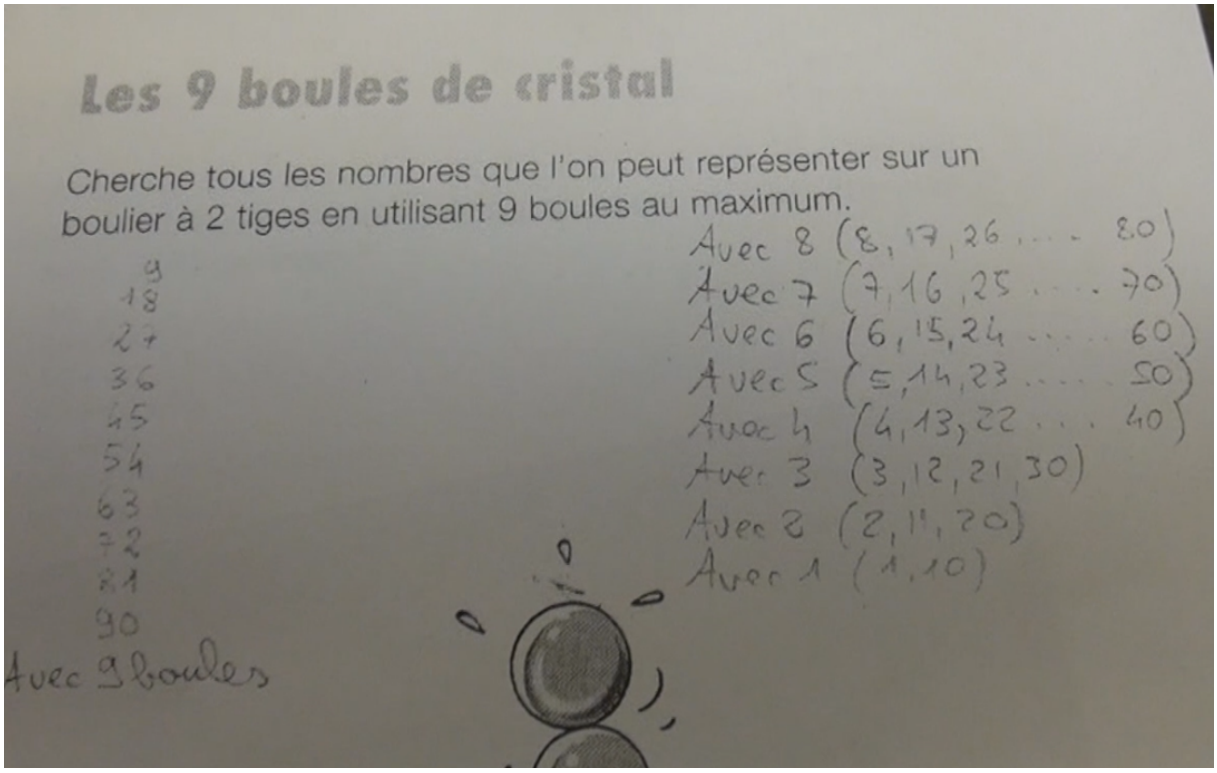
$$x \longrightarrow 2^x$$

Variables didactiques

La <u>première variable didactique</u> est la longueur de la bande.
Dans l'activité, il n'est pas précisé la taille de la bande. Une relance suggère d'utiliser des bandes de 70 centimètres pour permettre aux élèves de mettre en œuvre la première stratégie.
La première stratégie est aisément réalisable jusqu'à 4 plis avec une bande d'une longueur de feuille A4 et jusqu'à 5 plis avec une bande d'une longueur de 70 centimètres et après il faut mettre en œuvre une autre stratégie.

La <u>deuxième variable didactique</u> est le nombre de parties que l'on demande de trouver en pliant 10 fois la bande. Si on demande de plier, 4 ou 5 fois la bande, la première stratégie est optimale. Si on demande de trouver le nombre de parties pour plus de 6 plis, les deuxième, troisième et quatrième stratégies sont plus efficaces et la première n'est plus réalisable.

Annexe 48 Classe de Valentine : « Les 9 boules de cristal » notes de préparation



Les 9 boules de cristal

Cherche tous les nombres que l'on peut représenter sur un boulier à 2 tiges en utilisant 9 boules au maximum.

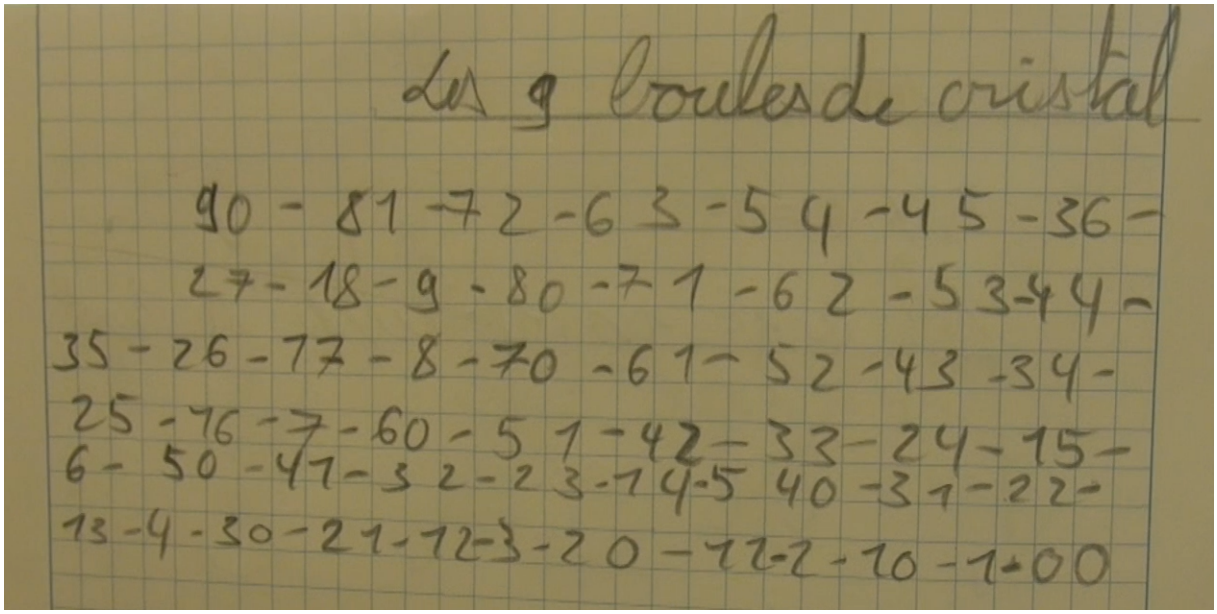
9
18
27
36
45
54
63
72
81
90

Avec 9 boules

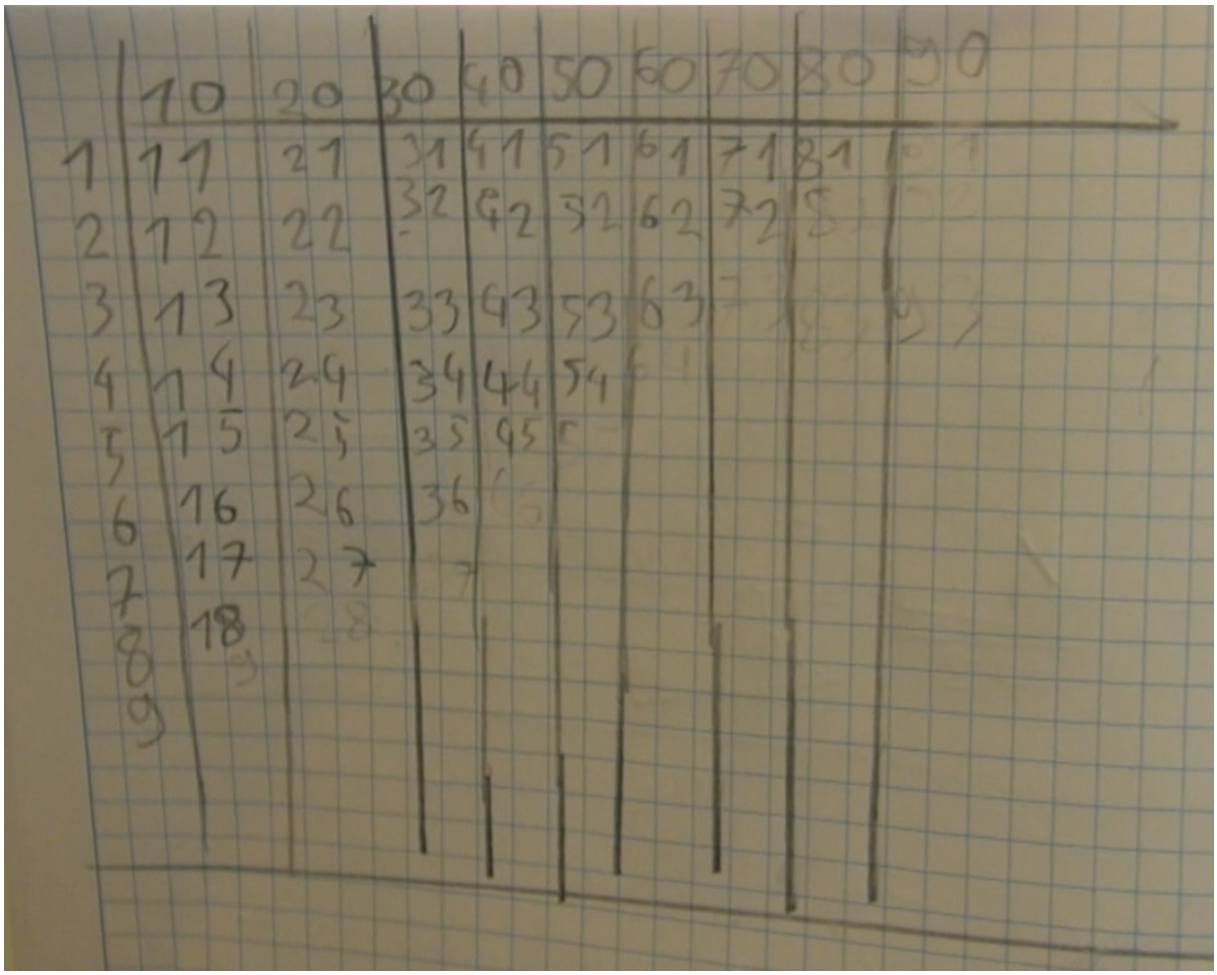
Avec 8 (8, 17, 26 .... 80)
Avec 7 (7, 16, 25 .... 70)
Avec 6 (6, 15, 24 .... 60)
Avec 5 (5, 14, 23 .... 50)
Avec 4 (4, 13, 22 .... 40)
Avec 3 (3, 12, 21, 30)
Avec 2 (2, 11, 20)
Avec 1 (1, 10)

Annexe 49 Productions d'élèves

Production de Jonathan

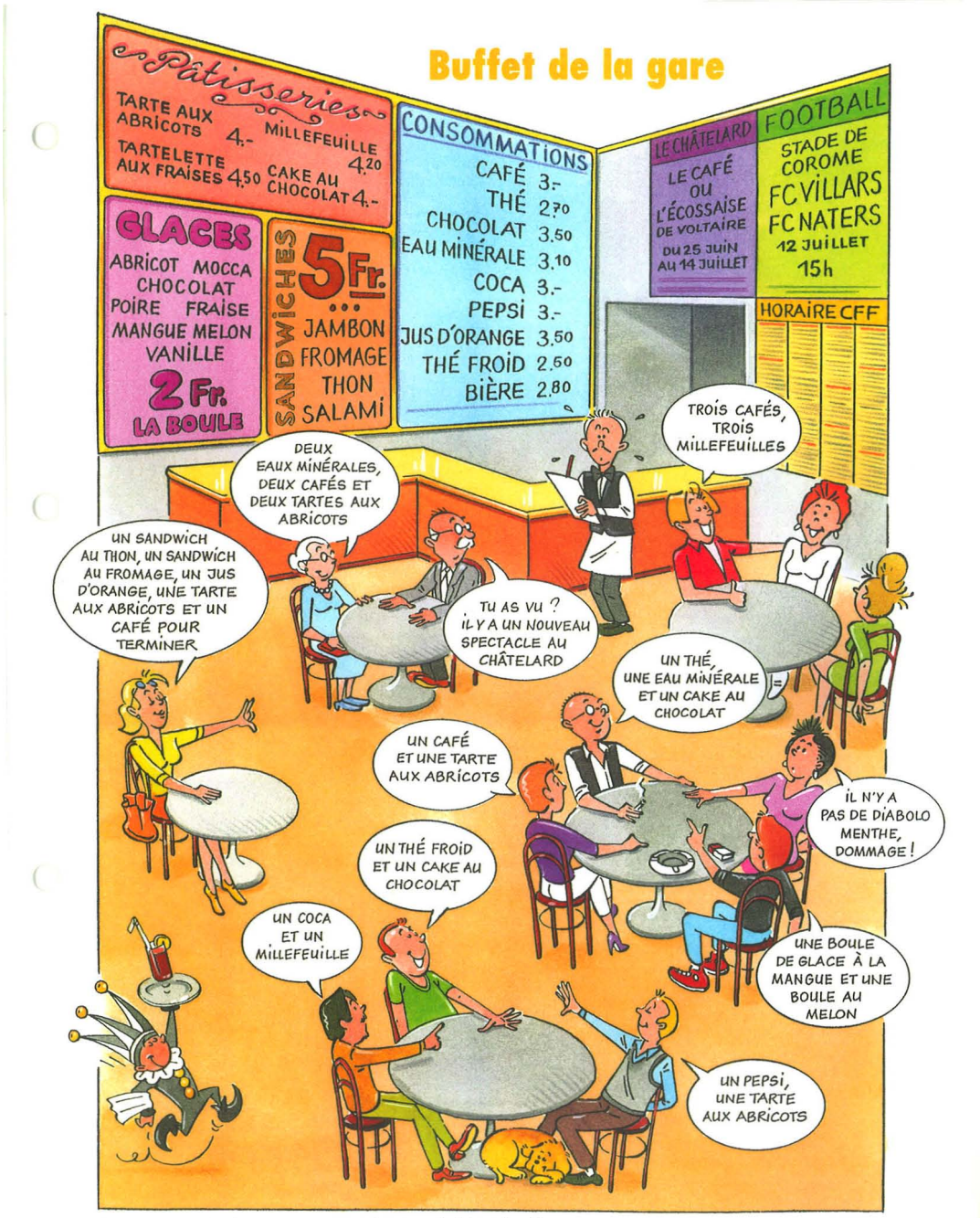


Production de Sylvain



Annexe 50 « Buffet de la gare »

Lors de la leçon après LS, nous avons observé pendant les six premières minutes une mise en commun des procédures des élèves pour l'activité « Buffet de la gare ».



A quelle table le garçon encaissera-t-il le plus?

7

(Danalet et al., 1998a, p. 7)

Partie 6 Répartition des aides personnelles et collectives

Dans cette partie 6, nous présentons pour chaque enseignante les répartitions des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments des leçons. Nous proposons un tableau pour chaque leçon observée.

Nous rappelons ici la signification des codages concernant les aides :

- Aides collectives sans réduction des exigences mathématiques : AIDC0
- Aides collectives avec réduction des exigences mathématiques : AIDC1
- Aides personnelles sans réduction des exigences mathématiques : AIDP0
- Aides personnelles avec réduction des exigences mathématiques : AIDP1

et concernant les différents moments d'une leçon :

- Moment de prescription de la tâche : PRESC
- Moment de recherche des élèves : REC
- Mise en commun : MEC
- Synthèse : SYN
- Institutionnalisation : INSN

Nous nous référons à cette partie 6 dans le corps de la thèse pour les choix de l'enseignante par rapport à l'accompagnement de l'activité des élèves (9.1.2.2 pour Anaïs, 10.1.2.2 pour Océane et 11.1.2.2 pour Valentine).

Annexe 51 Pratiques d'Anaïs

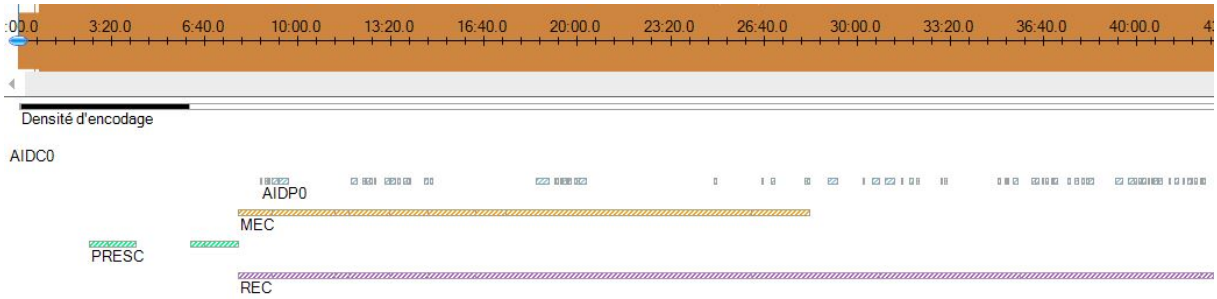


Tableau 8 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon avant LS

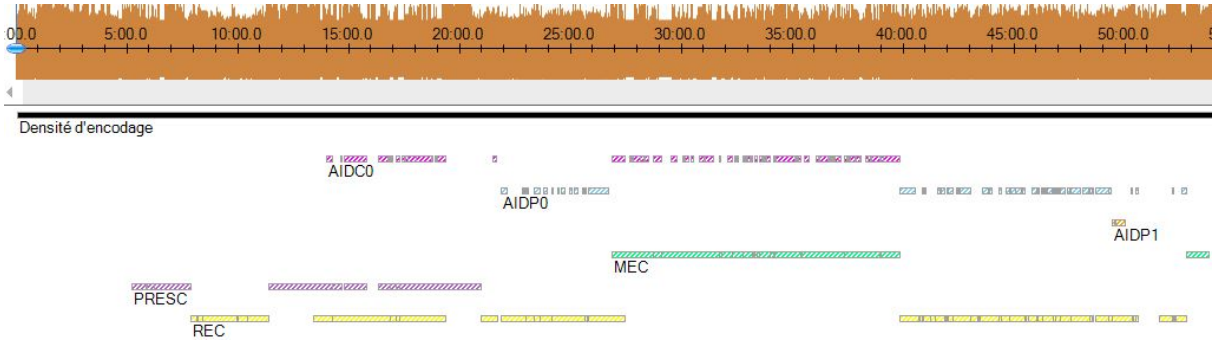


Tableau 9 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon de recherche du cycle *a*

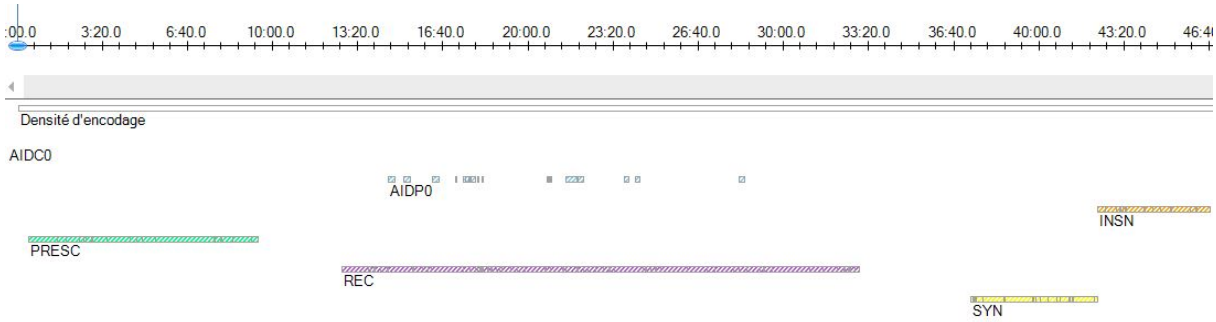


Tableau 10 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon après LS

Annexe 52 Pratiques d'Océane

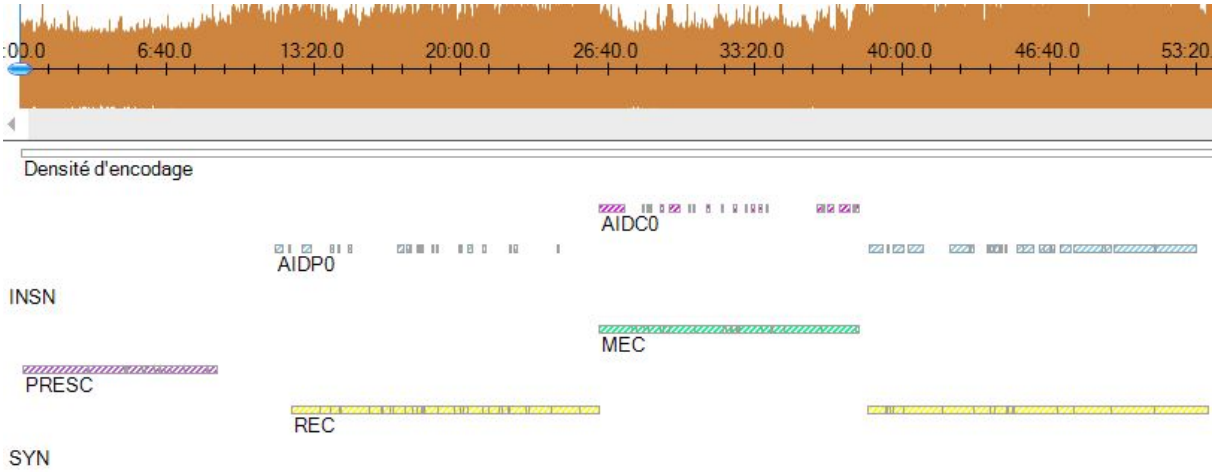


Tableau 11 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon avant LS

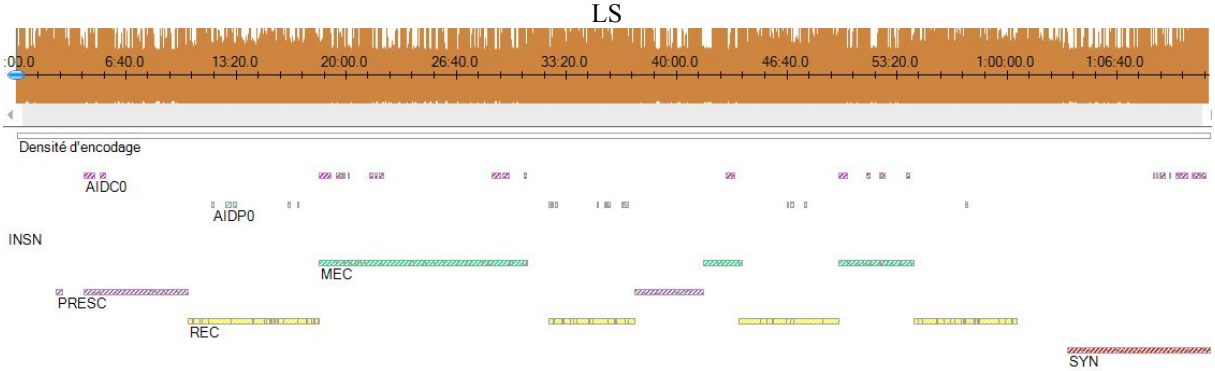


Tableau 12 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon du cycle *a*

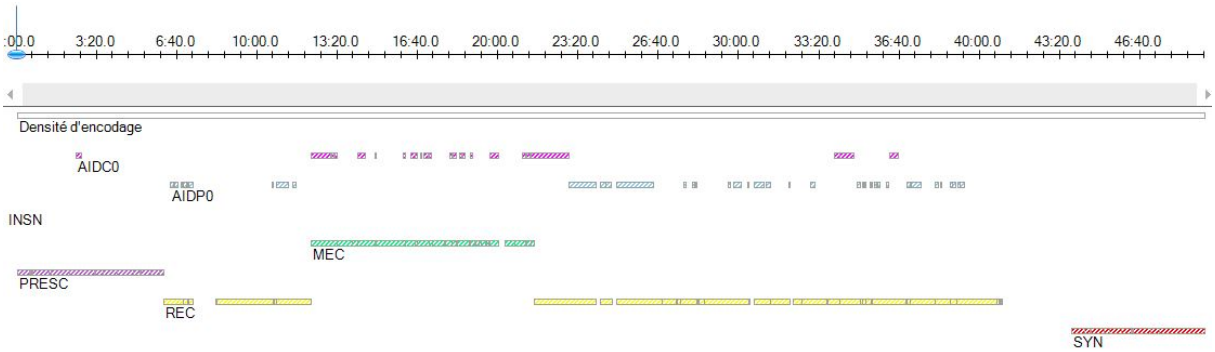


Tableau 13 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon de recherche du cycle *b* phase 1

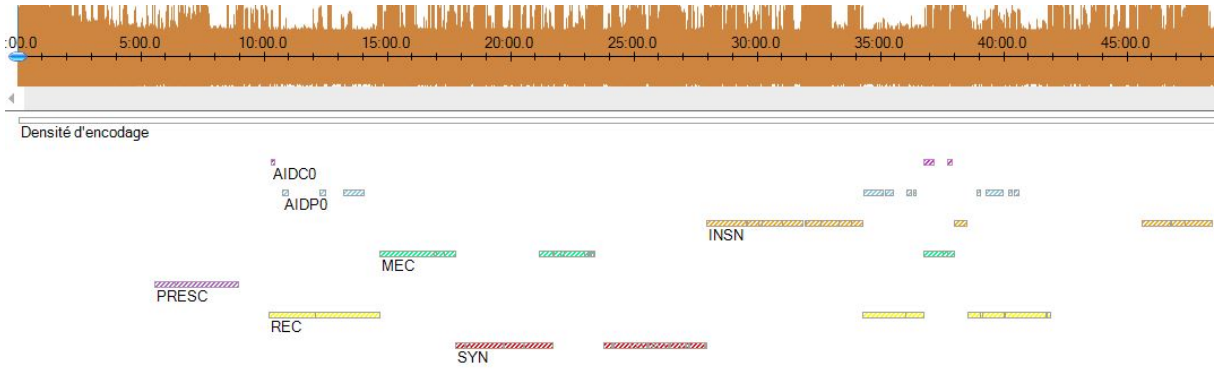


Tableau 14 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon de recherche du cycle *b* phase 2

Tableau 15 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon après LS

Annexe 53 Pratiques de Valentine

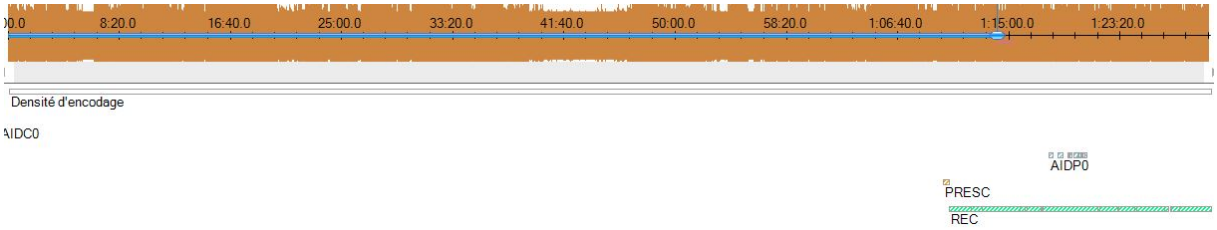


Tableau 16 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon avant LS

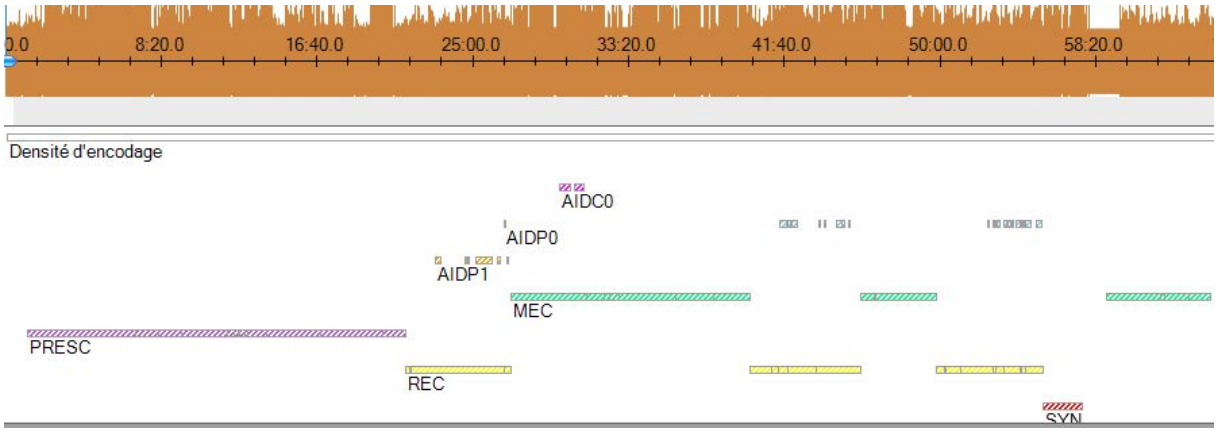


Tableau 17 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon du cycle *a*

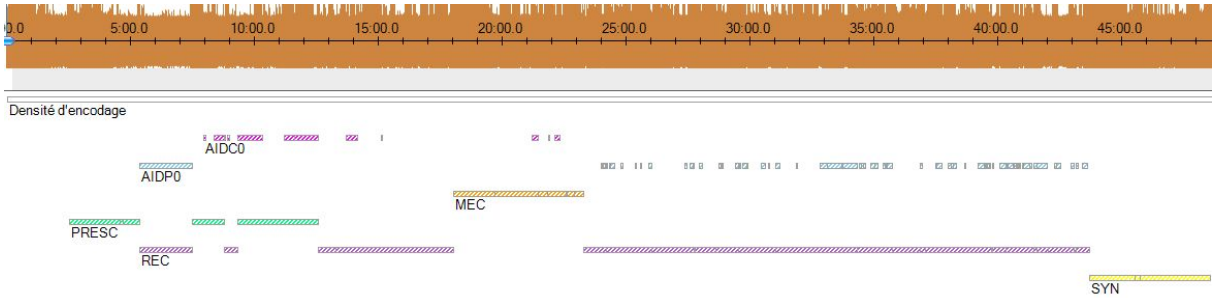


Tableau 18 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon de recherche du cycle *c*

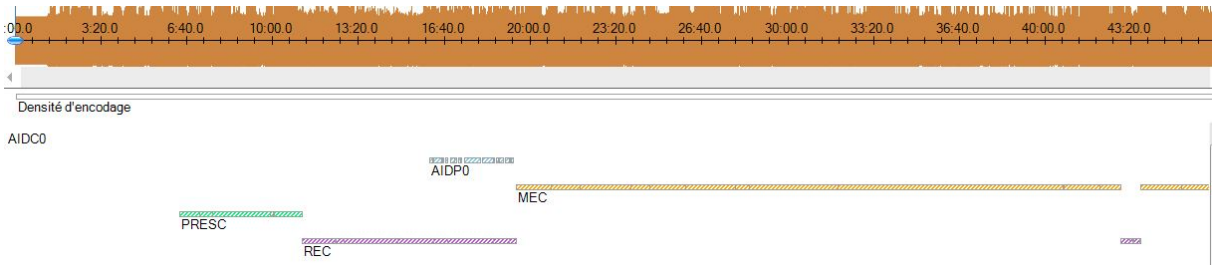


Tableau 19 Répartition des aides personnelles et collectives en fonction des différents moments de la leçon après LS

Partie 7 Présentation des données

Annexe 54 Calendrier

Nous avons réalisé un calendrier des leçons observées avant et après le dispositif LS, des leçons observées pendant le dispositif LS (leçon de recherche et hors dispositif). Nous avons précisé qui enseignait la leçon, le niveau de la classe, l'activité choisie et le sujet mathématique. Pour chaque séance collective, nous avons précisé les objectifs de formation.

	Date	Leçons observées avant le dispositif
Anaïs	10.10.13	Activité de numération : « Les 9 boules de cristal » (5H)
Océane	08.10.13	Activités de numération : « La face cachée » et « Altitude 1111 » (6H)
Valentine	01.11.13	Activité de numération : dictée de nombres (5H)

Séance collective	Date	Objectifs du Cycle *a*
1	12.09.13	Présentation du dispositif aux enseignants Identifier les sujets d'enseignement qui leur posent des difficultés d'enseignement, des difficultés pour les élèves
2	26.09.13	L'aspect décimal du système de numération : travail sur les erreurs des élèves et identification des difficultés des élèves (étape 1)
3	10.10.13	Choisir et travailler sur des tâches qui font travailler l'aspect décimal de la numération (étape 1)
4	07.11.13	Planification de la leçon de recherche n° 1 (étape 2)
Anaïs	21.11.13	Leçon de recherche n°1 (étape 3), 5H, « Un drôle de jeu de l'oie... »
5	21.11.13	Analyses de la leçon de recherche n°1 (étape 4)
6	05.12.13	Replanification de la leçon de recherche n°2 (étape 2)
Edith	16.01.14	Leçon de recherche n°2 (étape 3), « Jeu de la toupie »
7	16.01.14	Analyses de la leçon de recherche n°2 par l'un des deux facilitateurs (étape 4)

	Date	Leçons observées hors du dispositif
Océane	02.12.14	Activité "Un drôle de jeu de l'oie..." (6H)
Valentine	02.12.14	Activité "Un drôle de jeu de l'oie..." (5H)

Séance collective	Date	Objectifs du Cycle *b*
8	30.01.14	Travail sur les difficultés ressenties à propos des transformations géométriques (Anne seule) (étape 1)
9	13.02.14	Panorama de l'enseignement de la géométrie (Stéphane seul facilitateur et beaucoup d'absents parmi les enseignants du GLS) (étape 1)
10	06.03.14	Choix de l'activité « Aquarium » et analyse de l'activité (étape 2)
11	20.03.14	Préparation de la leçon de recherche – principalement de la phase 1 (étape 2)
12	03.04.14	Préparation de la leçon de recherche – principalement de la phase 2 (étape 2)
Océane	07.05.14	Leçon de recherche : phase 1 (7 Mai 2014) sans observateurs (hormis Anne et Valérie) (étape 3), 6H, « Dans l'aquarium »
Océane	08.05.14	Leçon de recherche : phase 2 (8 Mai 2014) avec tous les membres du GLS observateurs (étape 3), 6H, « Dans l'aquarium »
13	08.05.14	Débriefing (étape 4) qui a lieu immédiatement après la phase 2 de la leçon de recherche
14 et 15	12.06.14 et 19.06.14	Retour sur des éléments de la leçon de recherche Travail sur le plan de leçon final (étape 4)
16	26.06.14	Discussion sur la première version du plan de leçon final « Dans l'aquarium » (étape 4) Bilan de l'année

Séance collective	Date	Objectifs du Cycle *c*
17	04.09.14	Travail sur la résolution de problème (préciser le sujet, difficultés pour les élèves, pour les enseignants, exemples de problèmes dans les Moyens d'Enseignement Romands) (étape 1)
18	25.09.14	Travail sur la résolution de problème ((Coppé & Houdement, 2002, 2009), problème "les crêpes", sur les aides) (étape 1)
19	30.10.14	Travail sur la résolution de problème ((Julo, 2002) et (Euromath CM1, 2006, pp. 16-17;68-69;97-98), sur les aides) (étape 1)
20	13.11.14	Travail sur la résolution de problème (construire des problèmes isomorphes, aides proposées dans l'article de Julo, construire la leçon) (étape 1)
21	27.11.14	Préparation et rédaction du plan de leçon (étape 2)
Vanessa	11.12.14	Leçon de recherche (étape 3)
22	11.12.14	Débriefing de la leçon de recherche (étape 4)
23	08.01.15	Bilan de la leçon de recherche et suite du cycle (étape 4 et étape 1)
24	22.01.15	Travail sur le problème « Promotion », sur les aides (étape 2)
Valentine	12.02.15	Leçon de recherche (étape 3) « Promotion », 6H
25	12.02.15	Débriefing de la leçon de recherche (étape 4)

Séance collective	Date	Objectifs du Cycle *d*
26	05.03.15	Travail sur le plan de leçon « Promotion » (étape 4), choix de l'activité « Les 99 carrés » pour le cycle *d* (étape 1)
27	26.03.15	Analyse du problème "Les 99 carrés" et préparation de la leçon de recherche dont l'objectif est d'observer les difficultés et les procédures des élèves (étape 2)
Edith	23.04.15	Leçon de recherche (étape 3), « Les 99 carrés »
28	23.04.15	Débriefing de la leçon de recherche (étape 4)
29	07.05.15	Travail sur les interventions relevées lors de la leçon de recherche (étape 4) Préparation de la leçon de recherche suivante (modifications de l'activité, consigne, aides, relances, matériel) (étape 1 & 2)
30	21.05.15	Préparation de la leçon de recherche suivante (modifications de l'activité, consigne, aides, relances, matériel) (étape 1 & 2)
Caroline	04.06.15	Leçon de recherche (étape 3), « Les 99 carrés »
31	04.06.15	Débriefing de la leçon de recherche (étape 4)
32	18.06.15	Bilan de l'année
33	17.09.15	Travail sur le plan de leçon final « Les 99 carrés »
34	29.10.15	Travail sur les deux plans de leçon finaux « Promotion » et « Les 99 carrés » Finalisation de l'article pour la revue professionnelle Suite des dispositifs de LS

	Date	Leçons observées après le dispositif
Anaïs	23.05.16	Activité sur la multiplication : « Main pleine » (5H)
Océane	28.04.16	Résolution de problème « Plions » (5H)
Valentine	15.06.16	Activité sur la numération : « Les 9 boules de cristal » (5H)

Annexe 55 Tableau des nœuds utilisés dans le logiciel d'analyse

Nous utilisons le logiciel Nvivo pour transcrire les enregistrements-vidéos et pour coder les données à l'aide d'indicateurs, appelé des nœuds.

Nous avons repris des indicateurs issus des travaux de Charles-Pézard, Butlen, Masselot (2012) pour analyser les pratiques et les catégoriser en i-genre et niveau de développement. Les indicateurs retenus sont ceux qui peuvent s'appliquer à notre contexte : c'est-à-dire d'enseignants expérimentés, dans des établissements scolaires « ordinaires », un dispositif de LS où certains choix sont effectués par le GLS.

Pour coder une leçon, nous avons codé le temps de travail (TRA) qui commence lorsque l'enseignante indique le début de la leçon aux élèves et qui termine lorsque l'enseignante l'indique également aux élèves. Nous avons choisi le temps de travail et non le temps de vidéo car nous avons filmé l'entrée des élèves dans la classe, leur installation et le rangement du matériel, des changements d'activité. Ainsi, ce temps de vidéo ne correspond pas à du travail autour d'une activité mathématique. Tous les tableaux dans les analyses des pratiques sont en pourcentage par rapport à ce temps de travail.

Ensuite, pour coder chaque leçon, nous avons commencé par coder qui parle, puis les formes de travail des élèves, puis les grands moments de l'activité (PRESC, REC, MEC, SYN, INSN). Ensuite, nous avons codé pour chacun de ces moments les nœuds qui nous intéressaient pour notre recherche, c'est pourquoi nous avons des lignes « autre » qui ne correspondent à aucun de ces indicateurs.

Catégorie de nœud	Descriptif	Nœuds
Forme de travail des élèves **TRA**	- en groupe - en individuel - en collectif - en atelier	TRAGPE TRAIND TRACOL TRAATEL
Interaction enseignant-élèves **Ens-él**	- aides personnelles apportées aux élèves avec ou sans réduction des exigences mathématiques - aides collectives apportées aux élèves avec ou sans réduction des exigences mathématiques - temps de parole accordé aux élèves : toutes les interventions des élèves - rappels à l'ordre de l'enseignante aux élèves (pour rétablir le calme, pour rétablir une posture de travail des élèves)	AIDP1- AIDP0 AIDC1- AIDC0 PAR RAP
Indicateurs relatifs à la mise en acte de la situation **MOMENT**		
Moment de la prescription de la tâche **PRESC**	- passation de la consigne - négociation de la tâche : avec ou sans réduction des exigences mathématiques - enrôlement des élèves : le levier utilisé pour l'enrôlement relève ou non du savoir utilisé	PAS NEG1-NEG0 ENR1-ENR0
Moment de la recherche de la solution **REC**	- présence ou absence d'un moment de recherche - avec ou sans lecture en acte de l'activité des élèves - avec lecture en acte de l'activité des élèves et des procédures des élèves	REC1-REC0 RECP1-RECP0 RECP2
Moment de la mise en commun des productions des élèves **MEC**	- présence ou absence d'un moment de mise en commun - avec ou sans validation des procédures - avec ou sans explicitation des procédures	MEC1-MEC0 MECV1-MECV0 MECE1-MECE0
Moment de synthèse des procédures des élèves **SYN**	- présence ou absence d'un moment de synthèse - prise en compte ou non des procédures des élèves pendant la synthèse - hiérarchisation ou non des procédures des élèves - synthèse contextualisée ou non	SYN1-SYN0 SYNP1-SYNP0 SYNH1-SYNH0 SYNC1-SYNC0
Moment d'institutionnalisation **INST**	- présence ou absence d'un moment d'institutionnalisation - dépersonnalisation et décontextualisation ou non du savoir - réorganisation ou non du savoir rencontré avec ancrage de l'ancien dans le nouveau savoir	INSN1-INSN0 INSND1-INSND0 INSNR1-INSNR0

Tableau 20 : Nœuds utilisés pour coder les données

Ci-dessous, nous donnons le tableau des différents nœuds utilisés pour le codage des données.

Le nœud *Type de données* sert à catégoriser les données.

Le nœud *Enseignant* sert à rattacher à un enseignant toutes les données se rapportant à lui, toutes ses interventions lors des leçons observées et lors des séances collectives.

Le nœud *A propos de* sert à rattacher les interventions des enseignants lors des séances collectives à chacune des leçons de recherche ou des leçons hors dispositif.

Catégorie de nœud	Descriptif	Nœuds
Type de données	- avant de commencer le dispositif de LS - leçon de recherche pendant le dispositif - leçon travaillée lors du dispositif mais enseignée sans observateurs (hors dispositif) - séance collective pendant le dispositif - après le dispositif de LS - tous les mails envoyés entre les membres du GLS	Avant LS Leçon de recherche Leçon pendant LS Séance collective pendant LS Après LS mail
Enseignant	- Anaïs, Édith, Vanessa, Marius, Valentine, Océane	
Facilitateur	- Anne, Stéphane	
A propos de	- à propos de quelle leçon et de quel enseignant se réfère un propos lors des séances collectives	LSMa20131121-Anaïs LSMa20140116-Édith LSMa-hors-dispo-Marius LSMa-hors-dispo-Océane LSMa-hors-dispo-Vanessa LSMa-hors-dispo-Valentine Et ainsi de suite pour chaque cycle (cycle a : LSMa, cycle b : LSMb).

Tableau 21 : Nœuds utilisés dans Nvivo pour coder les données

Annexe 56 Correspondance des degrés scolaires[6]

<table>
<tr><th>MER</th><th></th><th>Année scolaire</th><th>Age</th><th colspan="3">France</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>3-4</td><td>Petite section</td><td rowspan="2">Cycle 1</td><td rowspan="3">Maternelle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CIN</td><td rowspan="4">Primaire Cycle 1</td><td>1H</td><td>4-5</td><td>Moyenne section</td></tr>
<tr><td>2H</td><td>5-6</td><td>Grande section</td></tr>
<tr><td>1P[7]</td><td>3H</td><td>6-7</td><td>CP</td><td rowspan="3">Cycle 2</td><td rowspan="6">Ecole élémentaire</td></tr>
<tr><td>2P</td><td>4H</td><td>7-8</td><td>CE1</td></tr>
<tr><td>3P</td><td rowspan="5">Primaire Cycle 2</td><td>5H</td><td>8-9</td><td>CE2</td></tr>
<tr><td>4P</td><td>6H</td><td>9-10</td><td>CM1</td><td rowspan="3">Cycle 3</td></tr>
<tr><td>5P</td><td>7H</td><td>10-11</td><td>CM2</td></tr>
<tr><td>6P</td><td>8H</td><td>11-12</td><td>6ème</td><td rowspan="4">Collège</td></tr>
<tr><td>9 è</td><td rowspan="3">Secondaire 1 Cycle 3</td><td>9H</td><td>12-13</td><td>5ème</td><td rowspan="3">Cycle 4</td></tr>
<tr><td>10 è</td><td>10H</td><td>13-14</td><td>4ème</td></tr>
<tr><td>11è</td><td>11H</td><td>14-15</td><td>3ème</td></tr>
</table>

6 Source : http://www.education.gouv.fr/pid24/les-niveaux-et-les-etablissements-d-enseignement.html, consulté le 12 Octobre 2017.

7 Les Moyens d'Enseignement Romand ont conservé les anciennes nomenclatures des degrés scolaires pour les cycles 1 et 2, d'où le décalage entre les degrés scolaires et les intitulés des MER. Les nouveaux MER des cycles 1 et 2 sont actuellement en cours de rédaction.

Partie 8 Bibliographie des annexes

Batteau, V. (2015). Une analyse a priori de la tâche: "Les 9 boules de cristal". *Revue de Mathématiques pour l'école, 223*, 8-13. Consulté le 13 juin 2018 dans http://www.revue-mathematiques.ch/files/1314/6288/8783/ME223_Batteau.pdf

Charles-Pézard, M., Butlen, D. & Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble: La pensée sauvage.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, M.-P. & Madier, D. (2007). *Cap Maths CE2. Manuel de l'élève*: Hatier.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, M.-P., Madier, D. & Madier, P. (2007). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant*. Paris: Hatier.

Coppé, S. & Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N, 69*, 53-62.

Coppé, S. & Houdement, C. (2009). *Résolution de problèmes a l'école primaire française: perspectives curriculaire et didactique.* Paper presented at the Colloque de la COPIRELEM. Consulté le 30 septembre 2015 dans https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959613

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998a). *COROME Mathématiques. Fichier de l'élève 3P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998b). *COROME Mathématiques. Livre de l'élève 3P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998c). *COROME Mathématiques. Livre du maître 3P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999a). *COROME Mathématiques. Fichier de l'élève 4P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999b). *COROME Mathématiques. Livre de l'élève 4P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999c). *COROME Mathématiques. Livre du maître 4P*. Neuchâtel, Switzerland: Commission romande des moyens d'enseignement.

ERMEL. (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes : cycle 3*. Paris: Hatier.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N, 69*, 31-54. Consulté le 14 juin 2018 dans http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/69/69n4.pdf

Maréchal, A. & Gaggero, A. (2011a). *BALISES MATHS 3P*. Bejune: HEP Bejune.

Maréchal, A. & Gaggero, A. (2011b). *BALISES MATHS 4P*. Bejune: HEP Bejune.

Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B. & Vergnes, D. (2006). *Euromaths, CM1*. Paris: Hatier.

Roditi, E. (2010). *Les pratiques enseignantes en mathematiques d'un professeur d'ecole et leur evolution en dix annees d'exercice*. Paper presented at the Congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF), Université de Genève.

Roditi, E. (2014). L'évolution de la pratique enseignante de Benoît en mathématiques. Entre rupture et continuité. In l'Harmattan (Ed.), *Enseigner à l'école primaire. Dix ans avec un professeur des écoles* (pp. 25-68). Paris: Savoir et formation.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2 *Grand N, n° 86*, 59-90. Consulté le 14 juin 2018 dans http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=86

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* (Doctorat), Paris Diderot (Paris 7), Paris.