



HAL
open science

Sur la structure tangente d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le domaine complexe.

Yohann Genzmer

► **To cite this version:**

Yohann Genzmer. Sur la structure tangente d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le domaine complexe.. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier (Toulouse 3), 2014. tel-01823868

HAL Id: tel-01823868

<https://hal.science/tel-01823868>

Submitted on 25 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches.

Université de Toulouse
Spécialité MATHÉMATIQUES

Yohann Genzmer

**Sur la structure tangente
d'une équation différentielle
du premier ordre
dans le champ complexe.**

Soutenu le 26 septembre 2014
devant la commission

Frank Loray, rapporteur
Jorge Vitório Pereira, rapporteur
Adam Parusinski, rapporteur
Emmanuel Paul, directeur
Mark Spivakovski, examinateur



Université
de Toulouse



INSTITUT
de MATHÉMATIQUES
de TOULOUSE

INSTITUT DE
MATHÉMATIQUES
DE TOULOUSE

www.math.univ-toulouse.fr

À mon père,
parvenu à la peinture.

Remerciements.

Je voudrais d'abord saluer ici, Emmanuel Paul, collaborateur et ami. Mon intuition statistique - pauvre - me fait dire qu'il n'est pas fréquent que deux mathématiciens partagent très précisément presque tous leurs centres d'intérêt. Alors, si l'on demande en plus que leurs bureaux se jouxent, cela tient de l'offense au hasard. C'est un grand plaisir pour moi qu'il ait accepté de superviser mon habilitation.

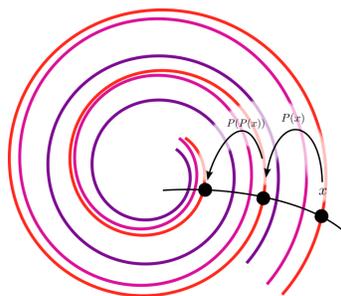
Je souhaiterais aussi remercier chaleureusement Frank Loray, Adam Parusinski, Jorge Vitório Pereira et Mark Spivakovsky d'avoir accepté d'être dans mon jury et pour les trois premiers d'entre eux, de m'avoir fait l'amitié de rapporter sur ce travail.

Enfin, je voudrais redire à Johanna, Ayel et Zélie que je ne fais des maths et des feuilletages que pour elles.

Introduction.

On ne comprend jamais, on s'habitue.
John von Neumann

La structure transverse d'un feuilletage est une notion aussi riche que polysémique. C'est un avatar parmi les plus sophistiqués de ce qu'Henri Poincaré appelait *l'application premier retour*. Désormais, par de multiples incarnations, elle embrasse, entre autres, les notions de monodromie, d'holonomie et d'applications de Dulac et effleure celle de groupe de Galois et d'espace des feuilles. Cette structure a été extensivement étudiée. Faire un historique de la notion un tant soit peu complet et pertinent représente un travail à part entière et, sans aucun doute, non négligeable. Il n'en est donc pas question ici. La littérature abordant cette notion est vaste puisque, outre celle qui traite des feuilletages eux-mêmes, on pourrait y ajouter presque tous les travaux en dynamique discrète se trouvant, via un procédé de suspension, apporter immédiatement des informations intéressantes sur les feuilletages et la structure de leurs espaces des feuilles.



Application *premier retour*.

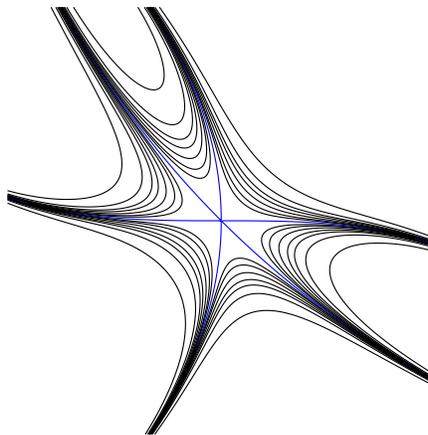
Citons pour illustrer notre propos quelques noms attachés à l'étude de la structure transverse : Poincaré, Reeb, Lie, Haefliger, Thom, Anorld, Dulac, Godbillon, Painlevé, et plus récemment Ecalle, Ramis, Martinet, Il'yashenko, Loray, Moussu, Cerveau, Mattei... Cette liste très incomplète et un peu artificielle n'a pour objectif que d'illustrer l'implication dans la description de la structure transverse de tous ceux qui se sont intéressés, même de loin, aux feuilletages.

La structure transverse est devenue une notion commune à laquelle nous nous sommes habitués. Le contraste avec le maigre volume des travaux se rapportant à la structure *tangente* des feuilletages est frappant. Ce n'est pas tant, évidemment, la qualité de ceux-ci qui surprend que leur rareté. De même que les notions de structures transverses employées sont multiples et souvent *ad-hoc*, la définition de la structure tangente mûrit au même rythme que les résultats qui s'y rapportent. A la rigueur, on pourrait faire reposer les différentes définitions possibles sur l'idée suivante : la structure tangente est *ce qui reste* lorsque la structure transverse est fixée.

Dans ce mémoire, j'ai essayé de définir la problématique des modules tangents dans un contexte qui m'occupe depuis mes travaux de thèses, en l'occurrence, celui d'un germe de feuilletage holomorphe à singularité isolée dans le plan complexe, c'est-à-dire, une 1-forme différentielle holomorphe

$$\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

où a et b sont des séries entières convergentes de deux variables sans diviseur commun. Comme nous le verrons, ces singularités concentrent l'essentiel de la richesse du problème.



Trace réelle d'un feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Les courbes intégrales de cette forme différentielle qu'on appelle *les feuilles* du feuilletage se répartissent en deux catégories : celles qui vont jusqu'à la singularité en y adhérant de façon analytique et les autres. Le caractère exceptionnel des premières leur a valu un nom : ce sont les *séparatrices* de la singularité. Il est amusant de noter que, si cette appellation et la figure ci-dessus le suggèrent, les séparatrices ne séparent, de fait, rien du tout.

Dans ce qui suit, je parlerai simplement de *feuilletages*. Sauf mention explicite du contraire lors d'incursions dans le monde global, on pourra toujours imaginer que *feuilletage* signifie pour moi, germe de singularité du plan complexe.

Travaux présentés.

MÉMOIRE DE THÈSE DE TRUONG HONG MINH DONT J'AI CO-DIRIGÉ LA THÈSE AVEC E. PAUL.

- ▶ *Formes normales de singularités de feuilletages et invariants de glissement.*
Mémoire de thèse, Truong Hong Minh, soutenue le 04 Octobre 2013 co-direction avec E. Paul

TRAVAUX PRODUITS DEPUIS LA THÈSE DE DOCTORAT.

- ▶ *Classification and moduli space of dicritical singularities*
(with G. Calsamiglia) en préparation
- ▶ *Classification of absolutely dicritical foliation of cusp type.*
Publicaciones Matemáticas (Barcelone) 2012
- ▶ *Existence of a non-algebraic singularities of differential equation.*
(with L. Teysier) J. Differential Equation. 248 2010 n°5 1256–1267
- ▶ *Moduli spaces for topologically quasi-homogeneous functions.*
(with E. Paul) soumis
- ▶ *Normal forms of foliations and curves defined by a function with generic tangent cone.*
(with E. Paul) Mosc. Math. J. 11 (2011) n°1 41-73
- ▶ *Rigidity of dicritical foliation in \mathbb{C}^2 .*
Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. 19, Art. ID rnm072, 14 pp. 32S65

TRAVAUX ISSUS DE MON MÉMOIRE DE THÈSE DE DOCTORAT.

- ▶ *Construction of foliations with prescribed separatrix.*
Ergodic Theory and Dynamical System. 28, 2008 no. 3 817-842
- ▶ *Analytical and formal classification of quasi-homogeneous foliations.*
J. Differential Equation, vol. 245 2008 no.6

TABLE DES MATIÈRES

1. Retour sur la structure transverse.	13
2. Déploiement d'un feuilletage.	15
2.1. Le nombre de modules tangents.	15
2.2. Déploiement et relation de Schlesinger.	24
2.3. Structure complexe des feuilles.	27
3. Partie réduite d'un feuilletage.	29
4. Le problème de Zariski.	33
4.1. Les feuilletages topologiquement quasi-homogènes.	33
4.2. Les champs logarithmiques.	37
5. les feuilletages dicritiques.	39
5.1. Les feuilletages \mathcal{M} -simples.	39
5.2. Lieu de tangence et modules tangents.	41
5.3. Les feuilletages absolument dicritiques.	42
5.4. Invariants de glissement.	44
6. Algébrisation.	47
6.1. Les fonctions méromorphes.	48
6.2. La conjecture de Bogomolov.	49
Références	51

1. Retour sur la structure transverse.

Examinons la définition de la structure transverse la plus communément utilisée dans un contexte *a priori* simple. Un feuilletage holomorphe régulier \mathcal{F} de codimension n sur une variété complexe X admet un recouvrement *trivialisant*, c'est-à-dire, une famille couvrante de submersions

$$\{\pi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I} \quad X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

à valeurs dans \mathbb{C}^n dont les fibres sont des sous-variétés plongées lisses localement invariantes. Lorsque deux des ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ présentent une intersection non triviale, on peut factoriser l'une des fibrations via l'autre dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & & \\ \downarrow \pi_i & \searrow \pi_j & \\ \pi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \pi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \end{array}$$

que l'on peut visualiser dans le dessin suivant

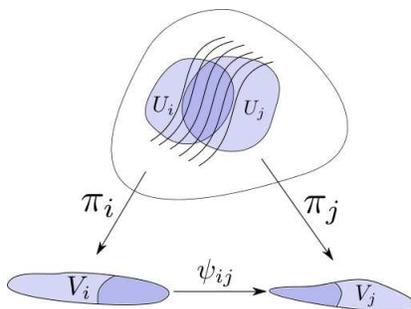


FIGURE 1.1. Construction de la structure transverse d'un feuilletage.

La réunion disjointe des ouverts $\{V_i\}_{i \in I}$ constitue une variété qui supporte un pseudo-groupe engendré par la collection des applications factorisantes ψ_{ij} . C'est ce pseudo-groupe que l'on a pris l'habitude d'appeler

structure transverse. Lorsque le feuilletage est singulier, la structure transverse de celui-ci est généralement définie comme étant celle du feuilletage régulier induit sur le complémentaire de son lieu singulier. Nous verrons, par la suite, que cette façon de procéder est parfois quelque peu insatisfaisante mais signalons d'ores et déjà, que ce prolongement de la notion de structure transverse aux feuilletages singuliers ne saurait distinguer certains feuilletages donnés par les niveaux de fonctions ayant même classe de fibres critiques.

Pour comparer les structures transverses de deux feuilletages donnés, nous disposons d'une équivalence de pseudo-groupes introduite par Haefliger [30] et qui n'est pas la première à laquelle on songe : il serait aisé de désigner comme équivalents deux pseudo-groupes présentant des variétés supports isomorphes par un morphisme conjuguant les deux pseudo-groupes. Mais pour notre usage, cette approche est de loin trop restrictive : il suffirait d'adjoindre artificiellement à la structure transverse initiale une submersion supplémentaire pour obtenir une structure transverse non équivalente, là où, visiblement, rien n'a bougé. Pour assouplir la comparaison des structures transverses, il faut, suivant Haefliger, autoriser certaines chirurgies induites par le pseudo-groupe : si X est une variété et G un pseudo-groupe sur X , on considère un recouvrement dénombrable de $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ et la variété X' réunion disjointe des ouverts U_i que l'on munit du pseudo-groupe engendré par les collections $C_{i,j}$ d'éléments de G qui ont leur source dans U_i et leur but dans U_j . Deux pseudo-groupes sont alors dits *équivalents* lorsque par chirurgies sur chacun d'eux, on peut obtenir deux nouveaux pseudo-groupes conjugués au sens fort. Ici, le gain de souplesse vient de ce que l'on remplace une conjugaison globale par une famille de conjugaisons définies localement conjuguant les *traces* locales des pseudo-groupes sans requérir que ces conjugaisons se recollent. L'objet *de pensée* restant invariant dans ces chirurgies est l'espace des orbites du pseudo-groupe - le quotient de la variété par l'action du pseudo-groupe - qu'il faut toujours considérer avec circonspection car, en général, il ne supporte aucune structure assez fine pour nos besoins. Néanmoins, on peut garder à l'esprit que deux feuilletages ont même structure transverse lorsque leurs espaces d'orbites, c'est-à-dire, leurs espaces des feuilles sont *équivalents*.

Formellement, on pourrait concevoir la définition de l'espace des modules tangents d'un feuilletage de la façon suivante : étant donnée une variété X d'une classe quelconque, l'espace des feuilletages sur cette variété se laisse quotienter par la relation d'équivalence identifiant les structures transverses au sens d'Haefliger. Le problème des modules tangents revient à dire quelque chose d'intéressant sur le quotient d'une classe d'équivalence donnée par la relation de conjugaison des feuilletages. En toute généralité, l'objet obtenu, susceptible d'être *énorme*, n'admet aucune structure.

Par exemple, dans la classe analytique complexe, une fonction f méromorphe sur une courbe C de genre g produit un feuilletage en courbes complexes construit en compactifiant le quotient d'un ouvert du produit $C \times \mathbb{C}^*$ par la relation

$$(x, z) \in C \times \mathbb{C}^* \sim (x, f(x) \cdot z).$$

Le feuilletage \mathcal{F} ainsi formé est une fibration elliptique singulière dont la structure transverse de la partie régulière est *triviale* et ne dépend que peu de f car elle est donnée par la submersion globale

$$(x, z) \in \mathcal{F} \rightarrow x \in C$$

tandis que la structure tangente, qui est ici incarnée par la structure complexe des fibres elliptiques, est entièrement déterminée par la fonction méromorphe f . Ce qui laisse un choix relativement vaste, même si dans l'exemple, l'interprétation géométrique des modules tangents ne fait aucun doute.

2. Déploiement d'un feuilletage.

2.1. **Le nombre de modules tangents.** L'un des points de départ de mon travail est un théorème dû à Jean-François Mattei qui remonte à l'année 1991 [32]. Je voudrais motiver et présenter ce résultat en détail puisqu'il porte en germe l'essentiel de mes préoccupations et est à l'origine de certaines propriétés qui restent, à ce jour, mystérieuses pour moi. Ce résultat concerne la notion de *déploiement* qui est un puissant outil dans l'analyse des modules tangents d'un feuilletage. La capacité qu'offre les déploiements vis-à-vis de la description des modules tangents s'explique heuristiquement de la façon suivante : deux singularités du plan complexe admettent des structures transverses équivalentes au sens de Haefliger si et seulement si elles sont reliées par un déploiement, par ailleurs *équisingulier* et, si leurs classes analytiques viennent à différer, c'est par leurs modules tangents qui varient le long de ce déploiement. Cette propriété doit être légèrement relativisée, car elle requiert un certain nombre d'hypothèses parfois techniques mais qui laissent les singularités à structures transverses très riches donc rigides, comme celles à structures transverses très pauvres admettant une intégrale première holomorphe, satisfaire cette équivalence. Dès lors, il reste une classe intermédiaire de structures transverses pour laquelle on ne sait pas énoncer une telle équivalence et à laquelle il faut probablement attacher une notion enrichie de structure transverse. Néanmoins, pour une large famille de singularités, on peut garder à l'esprit qu'en les déployant, on déformera à volonté les modules tangents sans jamais toucher la structure transverse : les déploiements constituent à ce titre un outil idéal pour aborder le problème de la description géométrique des modules tangents.

Un défaut important de la théorie des déploiements est le manque critique d'exemples explicites qui sont généralement d'un apport essentiel dans la formulation de conjecture et le test d'hypothèses. Le problème est si dramatique que je pense pouvoir affirmer sans doute significatif que ce manuscrit explorera l'ensemble des exemples connus à ce jour. Par suite, j'ai eu dans mon travail le souci constant de la recherche de tels exemples et j'essaierai d'expliquer tout au long de ces lignes les phénomènes qui rendent compte de la difficulté d'en construire.

Venons-en à la définition de déploiement.

En toute généralité, le déploiement d'un feuilletage \mathcal{F} sur une variété X est un feuilletage \mathbb{F} sur une variété \mathbb{X} de même codimension que celle de \mathcal{F} - c'est l'hypothèse essentielle - où \mathbb{X} est une déformation de X au-dessus

de \mathbb{B} au sens de Kodaira-Spencer incarnée dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{p} & \xrightarrow{i_p} & \mathbb{B} \end{array}$$

tel que le diagramme induit pour les variétés feuilletées commute également

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{i} & \mathbb{F} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{p} & \xrightarrow{i_p} & \mathbb{B} \end{array} .$$

On demande par ailleurs que π soit une submersion et que ses fibres soient transverses aux feuilles de \mathbb{F} en dehors de son lieu singulier. A titre personnel, voici l'image qui me vient à l'esprit lorsque je conçois le déploiement d'une singularité de feuilletage du plan.

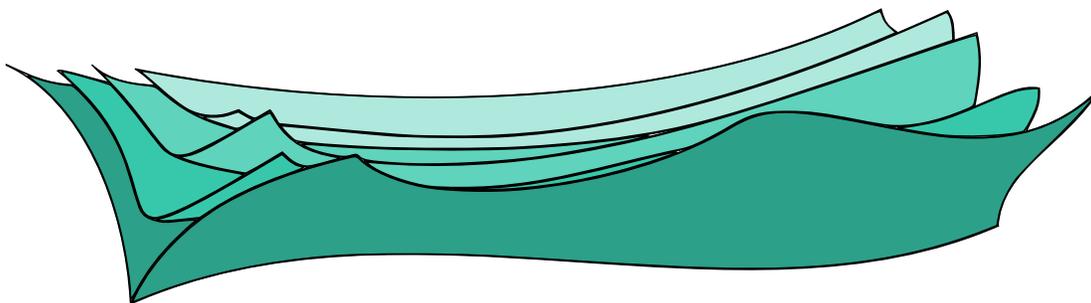


FIGURE 2.1. Déploiement d'une singularité cuspidale.

Naturellement, la variété $X_q = \pi^{-1}(q)$ au-dessus d'un point q de \mathbb{B} , est feuilletée par un feuilletage \mathcal{F}_q obtenu en intersectant les feuilles de \mathbb{F} et la fibre X_q . Les feuilletages \mathcal{F}_q admettent une structure transverse commune puisque c'est aussi celle de \mathbb{F} et l'on retrouve l'invariance de la structure transverse le long d'un déploiement. En fait, pendant longtemps, on pensait que la notion de déploiement était si restrictive qu'il se pouvait bien que la *plupart* des feuilletages n'admettent pas de déploiements non analytiquement triviaux. Un théorème classique de Il'yashenko [25] affirme, par exemple, qu'un feuilletage générique en courbe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ n'admet aucun déploiement non trivial. Le critère de généricité requis ici impose aux singularités du feuilletage d'être en particulier non dégénérées, ce qui signifie que la partie linéaire de toute 1-forme holomorphe définissant le feuilletage localement est non nulle. Pour le point de vue local que j'adopte dans mon travail, cette dernière hypothèse laisse une marge bien étroite pour le type de singularités admises. Or, il se trouve que le résultat de Jean-François Mattei que j'énoncerai bientôt implique que, pourvu que sa multiplicité soit plus grande que trois, une singularité se laisse toujours déployer.

De même que les déformations au sens de Kodaira-Spencer sont localement \mathcal{C}^∞ -triviales, les déploiements *équisinguliers* de feuilletages sont des produits dans la classe \mathcal{C}^∞ : pour tout point q dans la base \mathbb{B} , il existe

un voisinage V de q et une application fibrée ϕ de classe \mathcal{C}^∞ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}|_{\pi^{-1}(V)} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}_q \times V \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_2 & \\ (V, q) & & \end{array}$$

La propriété d'équisingularité évoquée est délicate et relativement technique à énoncer. Mais on peut raisonnablement la comprendre comme une transversalité *forte* entre les feuilles de \mathbb{F} et la fibration, c'est-à-dire, une transversalité qui reste valable même après modification birationnelle centrée sur le lieu singulier de \mathbb{F} . On peut se convaincre de la nécessité de ce raffinement avec l'exemple suivant : sur un petit polydisque de \mathbb{C}^3 centré en $(0, 0, 0)$, la 1-forme différentielle holomorphe

$$\mathbb{F} : x^3 d \left(x + \frac{y^2}{x^2} + z \right)$$

définit un déploiement du feuilletage donné par

$$\mathcal{F} : x^3 d \left(x + \frac{y^2}{x^2} \right)$$

pour la fibration $(x, y, z) \mapsto z$. Les feuilles de \mathbb{F} sont transverses aux fibres de la fibration précédente en dehors de son lieu singulier qui est la courbe $\{x = 0, y = 0\}$ et sans spécification supplémentaire de la condition de transversalité, le feuilletage \mathbb{F} serait un produit dans la classe \mathcal{C}^∞ , ce qui n'est pas le cas. Or, après la modification définie par

$$(2.1) \quad (x, y, z) \mapsto (xy, xy^2, z)$$

qui correspond à une suite de deux éclatements de germes de courbes lisses, le feuilletage relevé est régulier et tangent à la fibration le long d'une courbe, ce qui est contraire à l'hypothèse de transversalité forte. Ici, en se contentant d'observer \mathbb{F} et pas ses modifications, on passe à côté du défaut de transversalité qui est caché dans le lieu singulier.

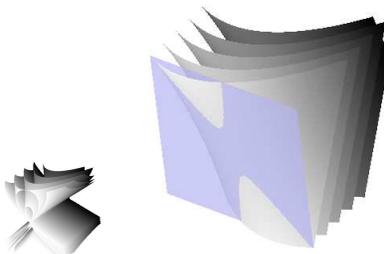


FIGURE 2.2. Le feuilletage $x^3 d \left(x + \frac{y^2}{x^2} + z \right)$ et sa transformation $d(x(x+y) + z)$ par la modification 2.1

Lorsque la base du déploiement \mathbb{B} est un germe de voisinage d'un point régulier dans une variété, c'est-à-dire, lorsque \mathbb{B} est isomorphe à un certain $(\mathbb{C}^p, 0)$, on parle alors de *germes de déploiements* à p paramètres. Je

peux désormais énoncer le résultat de Mattei

Théorème 1. [32] *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage à l'origine de \mathbb{C}^2 à singularité isolée. Alors il existe un déploiement équisingulier de \mathcal{F} de base $(\mathbb{C}^{\delta(\mathcal{F})}, 0)$ semi-universel pour les déploiements équisinguliers de \mathcal{F} . De plus, on dispose de la relation suivante*

$$\delta(\mathcal{F}) = \sum_{\substack{p \text{ singulier} \\ \text{infiniment voisin de } 0}} \frac{(\nu_p(\mathcal{F}) - 1)(\nu_p(\mathcal{F}) - 2)}{2}$$

où $\nu_p(\mathcal{F})$ est la multiplicité du feuilletage \mathcal{F} au point p infiniment voisin de 0.

Dans la mesure où les déploiements déforment un feuilletage dans la direction de ses modules tangents, le résultat précédent produit un algorithme très simple pour compter le nombre de ces modules : il suffit d'éclater la singularité de \mathcal{F} un nombre de fois suffisant pour que ce processus ne produise plus de singularité de multiplicité plus grande que 3. On peut se contenter, par exemple, de procéder d'après Seidenberg [44] à la désingularisation de \mathcal{F} . En particulier, le théorème 2.1 montre que toute singularité de multiplicité au moins trois présente des déploiements non triviaux.

La semi-universalité signifie que tout déploiement équisingulier se factorise via le déploiement semi-universel et que la partie linéaire de cette factorisation est unique¹. De manière plus précise, si \mathbb{F}_u désigne un déploiement équisingulier semi-universel de \mathcal{F} de base $(\mathbb{C}^{\delta(\mathcal{F})}, 0)$ et \mathbb{F} un déploiement équisingulier de base $(\mathbb{C}^q, 0)$ alors il existe une conjugaison fibrée Φ et une application de factorisation $\Lambda : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\delta(\mathcal{F})}, 0)$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{F}_u \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_u \\ (\mathbb{C}^q, 0) & \xrightarrow{\Lambda} & (\mathbb{C}^{\delta(\mathcal{F})}, 0) \end{array}$$

et la partie linéaire de Λ est unique.

Un des axes principaux de mon travail consiste à déterminer Λ en fonction des données du problème, autrement dit, à trouver une façon de décrire l'application factorisante Λ lorsqu'un déploiement semi-universel est donné. Ce qui revient plus ou moins à répondre au problème suivant :

Problème clé. Interpréter *géométriquement* les modules tangents d'un feuilletage.

Pour spécifier un peu la problématique ci-dessus, je vais détailler quelques exemples.

2.1.1. n germes de courbes lisses transverses invariantes.

1. Quand bien même l'unicité de la factorisation complète semble ne pas faire de doute, elle n'est pas formellement établie à l'heure actuelle.

Quatre courbes. Un germe de feuilletage à l'origine de \mathbb{C}^2 qui admet quatre germes de courbes invariantes lisses et transverses est défini par une 1-forme s'écrivant dans certaines coordonnées locales de la façon suivante [33]

$$(2.2) \quad d(xy(y+x)(y+ax)) + h(x,y)(xdy - ydx),$$

dite *forme normale de Takens*, où h est un certain germe de fonction analytique et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Lorsque h est la fonction nulle, le feuilletage admet une intégrale première et sa structure transverse est *triviale*. En choisissant pour h des germes arbitraires de $\mathbb{C}\{x, y\}$, la structure transverse varie tandis que l'ensemble des séparatrices reste constant, en l'occurrence égal à l'ensemble $xy(y+x)(y+ax) = 0$.

Seul le point singulier lui-même contribue dans la formule du théorème 2.1 et de ce fait, il n'y a qu'un seul module tangent. Un déploiement semi-universel s'écrit alors

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Omega &= d(xy(y+x)(y+zx)) + H(x,y,z)(xdy - ydx) + C(x,y,z) dz \\ H(x,y,0) &= h(x,y) \end{aligned}$$

où la condition d'intégrabilité $\Omega \wedge d\Omega = 0$ imposée à la 1-forme conduit à un équation aux dérivées partielles portant sur H et C qui est pratiquement impossible à résoudre explicitement. Si le feuilletage admet une intégrale première, ce qui correspond au cas $h = 0$, on trouve alors $H = C = 0$ et le déploiement semi-universel, qui admet lui-même une intégrale première, consiste simplement à *faire tourner* l'une des droites invariantes. Dans cet exemple, l'interprétation géométrique du module tangent ne fait aucun doute mais ne laisse aucune perspective de généralisation : le module tangent est le birapport des quatre directions respectives ∞ , 1 , 0 et z des quatre droites invariantes.

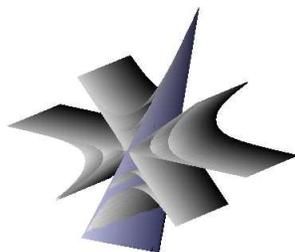


FIGURE 2.3. Le déploiement universel de quatres droites et sa droite *tournante*.

On peut, en outre, choisir h polynomial dans 2.2 et le feuilletage s'étend alors sur tout le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 en un feuilletage algébrique. Même si la structure de l'équation aux dérivées partielles $\Omega \wedge d\Omega = 0$ semble l'indiquer, on ignore actuellement si ce feuilletage, désormais algébrique, se déploie algébriquement, c'est-à-dire, s'il existe Ω polynomiale déployant 2.2 lorsque h est un polynôme. Ainsi, on dispose de l'amusante alternative suivante :

- ▶ soit il est impossible de déployer algébriquement 2.2 et dès lors, la règle pourrait être un résultat qui s'énoncerait en disant : *pourvu que sa structure transverse soit assez riche, un germe de feuilletage algébrique ne se déploie jamais algébriquement*, résultat qui suit indubitablement la direction des résultats de Il'yashenko [25].
- ▶ soit la condition d'intégrabilité admet des solutions algébriques, auquel cas, le feuilletage Ω se prolongeant sur \mathbb{CP}^3 est susceptible de produire un contre-exemple à la conjecture de Brunella, Cerveau et Lins-Neto [9]. En effet, si la fonction h est bien choisie, on peut supposer que la structure transverse de Ω n'est

pas projective. Par ailleurs, non seulement le paramètre α est un invariant analytique local de la courbe $xy(y+x)(y+\alpha x) = 0$ mais, en plus, c'est un invariant birationnel de cette même courbe vue comme une courbe algébrique du plan projectif, ce qui empêcherait Ω , défini sur $\mathbb{C}P^3$, d'être le tiré-en-arrière d'un feuilletage défini sur $\mathbb{C}P^2$ et fournirait, dans le même temps, un contre-exemple à la conjecture mentionnée qui affirme qu'en codimension un, un feuilletage sur une variété compacte admet une structure transverse projective ou bien est le tiré-en-arrière par une application rationnelle d'un feuilletage sur une surface.

Dans tous les cas, 2.3 doit fournir des contre-exemples *locaux* à la conjecture de Brunella, Cerveau et Lins-Neto.

Cinq, six courbes et plus. De façon générale, les feuilletages admettant n germes de courbes lisses et transverses deux à deux ont été étudiés pour une structure transverse générique dans [47] et en présence d'une intégrale première dans [16]. A titre d'exemple, lorsque le feuilletage admet une intégrale première et six droites invariantes, nous montrons avec Emmanuel Paul qu'il admet une forme normale s'écrivant

$$(2.4) \quad f = x^{n_0} y^{n_\infty} (y+x)^{n_1} (y+a_1x)^{n_2} (y+a_2x+a_{21}x^2)^{n_3} (y+a_3x+a_{31}x^2+a_{32}x^3)^{n_4}$$

dépendant de six paramètres. Cette famille de formes normales constitue, par ailleurs, un déploiement semi-universel lorsqu'on la regarde comme un feuilletage de codimension un sur $(\mathbb{C}^2, 0) \times P$, où P est l'espace des six paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ et α_{32} . Il est à noter que, curieusement, ce résultat n'admet pas de preuve utilisant une induction sur le nombre de droites : il est en général impossible de normaliser la $n^{\text{ième}}$ courbe lisse en préservant les formes normalisées des précédentes ; il faut normaliser les n courbes lisses *en même temps*.

Ces formes normales nous ont permis de décrire explicitement l'espace des modules de la fonction, du feuilletage et de la courbe induite par la donnée d'une fonction ayant n courbes lisses et transverses deux à deux pour niveau critique. Ci-après sont les différentes dimensions des espaces de modules mentionnés.

n	dimension de l'espace des modules		
	de la fonction f	du feuilletage df	de la courbe $f = 0$
4	1	1	1
5	3	2	2
6	6	5	4
7	10	9	6

L'interprétation géométrique des paramètres α_1, α_2 et α_3 est facile : ce sont des birapports décrivant les positions relatives des points dans le cône tangent du niveau 0 de la fonction 2.4. Il serait tentant d'interpréter similairement le coefficient α_{21} en disant qu'il s'agit de l'indice de contact entre la courbe $y + \alpha_1x$ et $y + \alpha_1x + \alpha_{21}x^2$ ou semblablement de la position du relevé de la courbe $y + \alpha_1x + \alpha_{21}x^2 = 0$ après deux éclatements mais cette interprétation est erronée.

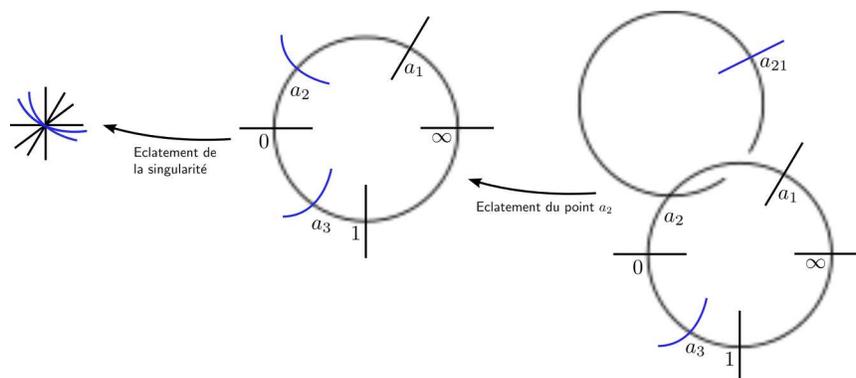


FIGURE 2.4. Interprétation géométrique du troisième module de déploiement de 5 droites.

En effet, le déploiement paramétré par $\epsilon \in (\mathbb{C}, 0)$ et défini par

$$f_\epsilon = (1 + \epsilon x) x^{n_0} y^{n_\infty} (y + x)^{n_1} (y + a_1 x)^{n_2} (y + a_2 x + a_{21} x^2)^{n_3} (y + a_3 x + a_{31} x^2 + a_{32} x^3)^{n_4}$$

n'est pas analytiquement trivial et pourtant la courbe de niveau 0 est indépendante de ϵ . En d'autres termes, l'interprétation géométrique de a_{21} n'est pas à chercher dans les séparatrices. Par semi-universalité de la famille 2.4, il existe des fonctions de ϵ telles que

$$f_\epsilon \sim a_n a x^{n_0} y^{n_\infty} (y + x)^{n_1} (y + a_1 x)^{n_2} (y + a_2 x + a_{21}(\epsilon) x^2)^{n_3} (y + a_3 x + a_{31}(\epsilon) x^2 + a_{32}(\epsilon) x^3)^{n_4}.$$

Exprimer les fonctions $a_{21}(\epsilon)$, $a_{31}(\epsilon)$ et $a_{32}(\epsilon)$ en fonction de ϵ est un petit sous-problème du problème clé pour lequel je n'ai pourtant pas de réponse. Je peux néanmoins donner un autre exemple analogue mais presque trivial où j'ai une réponse complète. Considérant le cas de cinq droites de déploiement semi-universel à trois paramètres

$$(2.5) \quad x^{n_0} y^{n_\infty} (y + x)^{n_1} (y + a_1 x)^{n_2} (y + a_2 x + a_{21} x^2)^{n_3},$$

le déploiement paramétré par $\epsilon \in (\mathbb{C}, 0)$

$$f_\epsilon = (1 + \epsilon) x^{n_0} y^{n_\infty} (y + x)^{n_1} (y + a_1 x)^{n_2} (y + a_2 x + a_{21} x^2)^{n_3}$$

est analytiquement non trivial. En faisant agir \mathbb{C}^* par homothétie, il vient

$$f_\epsilon(\lambda x, \lambda y) = (1 + \epsilon) \lambda^N x^{n_0} y^{n_\infty} (y + x)^{n_1} (y + a_1 x)^{n_2} (y + a_2 x + \lambda a_{21} x^2)^{n_3}$$

où $N = n_0 + n_\infty + n_1 + n_2 + n_3$. Ainsi, la factorisation via le déploiement semi-universel 2.5 consiste à poser

$$a_{21}(\epsilon) = a_{21} \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^{\frac{1}{N}}$$

où l'on choisit la détermination de la puissance $\frac{1}{N}$ telle que $a_{21}(0) = a_{21}$.

2.1.2. *Le double cusp.* Le double-cusp est un feuilletage donné par la 1-forme holomorphe

$$d\left((x^2 + y^3)(y^2 + x^3)\right).$$

C'est le feuilletage non topologiquement quasi-homogène le plus simple.



FIGURE 2.5. $\text{Cusp}_2 : d\left((x^2 + y^3)(y^2 + x^3)\right)$.

L'ensemble des points infiniment voisins de la singularité qui contribuent à la dimension du théorème 2.1 est réduit à la singularité elle-même. En effet après éclatement, les points singuliers qui apparaissent dans les relevés de Cusp_2 sont de multiplicité au plus 2, ce qui n'affecte pas la formule. Ainsi, la dimension de la base du déploiement semi-universel est à nouveau 1. Comme $x^2y(x^2 + y^3)$ n'appartient pas à l'idéal jacobien de la fonction définissant Cusp_2 , un critère classique [10] assure que la déformation - et donc le déploiement - défini par la 1-forme de $(\mathbb{C}^3, 0)$

$$d\left((x^2 + y^3)(y^2 + x^3 + zx^2y)\right)$$

est non trivial et ainsi semi-universel. Déjà ici, l'interprétation géométrique du paramètre z n'est pas claire. Une approche séduisante qui a porté ses fruits en analyse complexe serait de calculer ce module comme une intégrale le long de certains cycles contenus dans les feuilles : c'est d'autant plus tentant dans cet exemple car, suivant N. A'Campo [1], le double-cusp présente un unique *grand cycle évanescent* au sens où, d'une part, grand, il ne se localise dans aucune homologie locale au-dessus d'une des composantes du cusp, et d'autre part, évanescent, il passe transversalement de feuilles en feuilles jusqu'à la singularité.

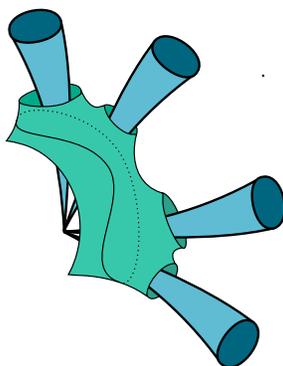


FIGURE 2.6. Le grand cycle de N. A'Campo.

Emmanuel Paul a, par la suite, montré dans [39] que ce cycle persistait dans un contexte plus général d'un *double-cusp luvillien* donné par une 1-forme logarithmique du type

$$(x^2 + y^3)(y^2 + x^3) \left(\alpha \frac{d(x^2 + y^3)}{(x^2 + y^3)} + \beta \frac{d(x^3 + y^2)}{(x^3 + y^2)} \right)$$

où α et β sont des nombres complexes génériques. Néanmoins, il est assez clair qu'une perturbation générique du double-cusp laissant néanmoins invariantes les séparatrices, verrait disparaître le grand cycle de N . A'Campo. Nous reviendrons par la suite sur cette possible interprétation dans un contexte radicalement différent.

Pour finir, mentionnons que si l'on perturbe la forme Cusp_2 en préservant les séparatrices, on peut encore construire un déploiement semi-universel mais le résultat de cette construction est parfaitement non explicite [36].

2.1.3. *La strate à μ -constant en dimension deux.* De façon tout à fait générale, lorsque le feuilletage est donné par les niveaux d'une fonction à singularité isolée

$$\mathcal{F} : df = 0,$$

le déploiement équisingulier semi-universel de \mathcal{F} s'obtient de la façon suivante. Procédant d'une construction classique de la théorie des singularités, la déformation universelle de f s'écrit

$$F(x, y, t_1, \dots, t_\mu) = f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i f_i$$

où la famille des fonctions f_i est une base du quotient de $\mathbb{C}\{x, y\}$ par l'idéal jacobien de f . Suivant les résultats de Wahl [48] et Mattei [32], la strate à μ -constant est lisse et étant donnée une paramétrisation de celle-ci

$$\Lambda : (\mathbb{C}^{\delta(df)}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^\mu, 0)$$

la restriction de la déformation F au-dessus de l'image de Λ définie par la 1-forme à $\delta(df) + 2$ variables,

$$dF \left(x, y, \Lambda \left(t_1, \dots, t_{\delta(df)} \right) \right)$$

est un déploiement universel de df , la différentielle d s'entendant donc ici sur toutes les variables x, y et $t_1, \dots, t_{\delta(df)}$.

L'exemple précédent s'adapte aux singularités admettant une intégrale première louvillienne, c'est-à-dire, s'écrivant

$$\mathcal{F} : f_1 \cdots f_p \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \right)$$

où la fonction $f = f_1 \cdots f_p$ est à singularité isolée et les paramètres λ_i sont des nombres complexes. Un déploiement équisingulier, disons à un paramètre ϵ , de la fonction f admet une écriture de la forme $f_\epsilon = f_{1,\epsilon} \cdots f_{p,\epsilon}$ pour $\epsilon \in (\mathbb{C}, 0)$. Le déploiement défini par

$$\mathbb{F} : f_{1,\epsilon} \cdots f_{p,\epsilon} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_{i,\epsilon}}{f_{i,\epsilon}} \right)$$

est alors un déploiement équisingulier de \mathcal{F} .

J'aurai l'occasion de revenir sur ce constat mais j'insiste déjà sur le fait, qu'à ma connaissance, et avant des résultats que j'ai obtenus avec G. Calsamiglia [8] récemment, les exemples présentés ci-dessus étaient les

seuls exemples existants de déploiements équisinguliers non-triviaux. L'équation d'intégrabilité $\Omega \wedge d\Omega = 0$, si complexe, n'est évidemment pas étrangère à cette sécheresse.

2.2. Déploiement et relation de Schlesinger. La théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre a connu un certain engouement quand les équations de Painlevé sont apparues parmi les relations dites de Schlesinger, paramétrant en cela les déformations isomonodromiques de certaines équations différentielles fuchsienues. Cette propriété est la trace d'une propriété plus générale qui veut que l'espace des paramètres d'une déformation de feuilletage soit lui-même feuilleté par des sous-variétés le long desquelles la structure transverse du feuilletage déformé reste invariante. La preuve de l'existence de ce feuilletage de Schlesinger repose sur une définition *ad hoc* de la notion de déformation de feuilletage où la déformation d'une variété feuilletée est celle de son atlas feuilleté reprenant en cela, mais en les feuilletant, les idées de Kodaira et Spencer [27]. Une fois cette définition bien posée, le reste en découle naturellement, suggérant là la marque d'un phénomène d'intégrabilité plus vaste. Comme à ma connaissance l'existence de ce feuilletage de Schlesinger dans un contexte bien posé n'apparaît nulle part dans la littérature, je me propose d'esquisser ici une idée de la preuve de l'existence de ce feuilletage.

Considérons la définition suivante de déformation de feuilletages.

Définition. Soit \mathcal{M} une variété différentielle réelle de dimension $2n$ munie d'une submersion $\pi : \mathcal{M} \rightarrow B^m$ où B est une variété analytique complexe de dimension complexe m . Soit S une sous-variété plongée de \mathcal{M} génériquement transverse à π . On suppose qu'il existe un recouvrement localement fini de $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I_1} U_i$ tel que $\mathcal{M} \setminus S$ soit la réunion $\bigcup_{i \in I_2} U_i$ et un système de cartes sur \mathcal{M} qui commutent à la projection

$$Z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^p \times B^m$$

où $p = n - m$ tel que

- ▶ le système $\{Z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^p \times B^m\}_{i \in I_1}$ confère à \mathcal{M} une structure de variété analytique complexe qui fait de π une submersion holomorphe.
- ▶ le système $\{Z_i : U_i \cap \pi^{-1}(\tau) \rightarrow \mathbb{C}^p \times \{\tau\}\}_{i \in I_2}$ confère à la sous-variété holomorphe $\pi^{-1}(\tau) \setminus S$ une structure de variété complexe feuilletée de codimension k , ce qui signifie que le changement de carte $Z_i \circ Z_j^{-1}$ est de la forme suivante : si $x = (x_1, \dots, x_p)$ alors

$$Z_i \circ Z_j^{-1}(x, \tau) = (\phi_1(x_1, \dots, x_k, \tau), \dots, \phi_k(x_1, \dots, x_k, \tau), \phi_{k+1}(x, \tau), \dots, \phi_p(x, \tau), \tau)$$

la propriété essentielle étant que les k premières coordonnées $\{\phi_i\}_{i=1 \dots k}$ ne dépendent que des k premières composantes de x .

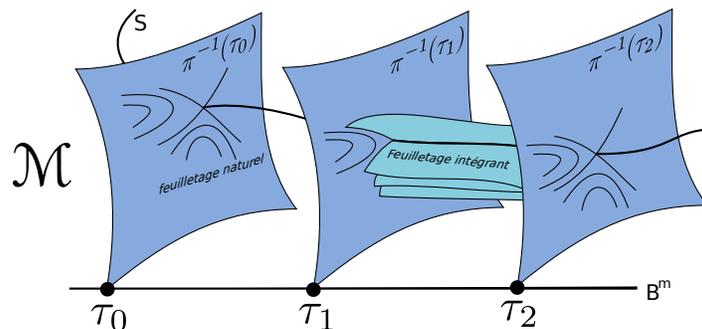


FIGURE 2.7. Déformation d'un feuilletage.

La variété $\pi^{-1}(\tau)$ est une sous-variété lisse de dimension p qui est feuilletée par un feuilletage singulier de codimension k dont le lieu singulier est contenu dans $\pi^{-1}(\tau) \cap S$. Par ailleurs, la variété \mathcal{M} est elle-même feuilletée par un feuilletage singulier de même dimension que les feuilletages obtenus sur chaque fibre $\pi^{-1}(\tau)$. C'est le feuilletage dit *naturel* de \mathcal{M} . Si les fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_k peuvent être rendues indépendantes de τ , alors \mathcal{M} est feuilleté par un feuilletage de codimension k dont les feuilles sont des sous-variétés invariantes pour le feuilletage naturel de \mathcal{M} . La déformation est dite *complètement intégrable* s'il existe précisément un feuilletage de codimension k sur \mathcal{M} dont les feuilles sont des sous-variétés invariantes pour le feuilletage naturel de \mathcal{M} . Le résultat évoqué précédemment stipule qu'il existe un feuilletage \mathcal{F} éventuellement singulier sur B^m telle que la déformation \mathcal{M} est complètement intégrable en restriction à toute feuille de \mathcal{F} . De plus, ce feuilletage est maximal au sens où toute sous-variété de B^m le long de laquelle la déformation est complètement intégrable est invariante. La preuve consiste simplement à montrer que la distribution des champs de vecteurs sur B^m dont les courbes intégrales sont le support de déformations complètement intégrables est involutive. Pour cela, introduisons quelques définitions.

Soit X un germe de champ de vecteur sur \mathcal{M} au point p . Au voisinage de p , il existe un système de k 1-formes différentielles régulières holomorphes $\omega_1, \dots, \omega_k$ telles qu'avec les formes $\pi^* d\tau_i$, elles définissent le feuilletage naturel de \mathcal{M} . On dit que X est un champ basique si et seulement si pour tout i

$$L_X \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \pi^* d\tau_1 \wedge \dots \wedge \pi^* d\tau_m = 0.$$

et on note \mathcal{B} le faisceau sur \mathcal{M} des champs basiques. Le faisceau \mathcal{X} des champs tangents au feuilletage naturel en est un sous-faisceau $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$. Par ailleurs, X est un germe au point p de champ basique *projetable* si et seulement s'il existe un germe de champ X_* sur B^m au voisinage de $\pi(p)$ tel que pour x dans le voisinage de p , on ait la relation

$$D\pi(x)(X) = X_* \circ \pi(x).$$

Les champs *basiques verticaux* sont ceux qui sont projetables et de projection nulle - $X_* = 0$. On note \mathcal{B}_π le faisceau des champs basiques projetables et \mathcal{B}_0 le faisceau des champs basiques verticaux.

Définition 1. Soit X un germe de champ de vecteur de l'espace des paramètres à B^m

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_i}.$$

A la façon de Kodaira et Spencer, on définit la dérivée de \mathcal{M} dans la direction X comme la classe du 1-cocycle à valeur dans \mathcal{B}_0

$$(X \cdot \mathcal{M})_{ij} = (DZ_i)^{-1} \left(\sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^m \lambda_l(\tau) \frac{\partial Z_{ij}^k}{\partial \tau_l} \circ Z_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

On obtient une application bien définie car la classe de cohomologie de $X \cdot \mathcal{M}$ dans $H^1(\mathcal{B}_0)$ ne dépend pas des cartes Z_i . Cette application sera notée

$$\left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \right] : \mathcal{X}_B \rightarrow H^1(\mathcal{B}_0).$$

On peut aussi envisager la construction de cette application de la façon suivante : comme la déformation est localement triviale au voisinage de chaque point régulier du feuilletage, il existe un recouvrement \mathcal{U}_i de $\mathcal{M} \setminus S$

et une famille de champs basiques X_i définie sur U_i telle que

$$D\pi X_i = X \circ \pi.$$

On vérifie alors que

$$(2.6) \quad \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \right] (X) = [X_i - X_j] \in H^1(\mathcal{B}_0).$$

Le faisceau quotient $\mathcal{T} = \mathcal{B}_0/\mathcal{X}$ appelé faisceau *des champs transverses verticaux*, n'admet pas en général de section globale car l'existence de celle-ci implique l'existence d'un facteur intégrant pour le feuilletage, ce qui est une propriété non générique. Dès lors, si $H^0(\mathcal{T}) = 0$ alors la flèche naturelle $H^1(\mathcal{X}) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_0)$ est injective. et on dispose de la proposition suivante qui caractérise les déformations complètement intégrables parmi les déformations.

Théorème. *Soit \mathcal{M} une déformation de feuilletage. Soit X un champ de vecteur régulier dans l'espace des paramètres. On suppose que $[X \cdot \mathcal{M}]$ est dans l'image de l'application $H^1(\mathcal{X}) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_0)$. Alors la déformation \mathcal{M} en restriction à toute courbe invariante de X est complètement intégrable. De plus la distribution induite par l'image de $H^1(\mathcal{X})$ dans $H^1(\mathcal{B}_0)$ est involutive.*

Démonstration. D'après l'hypothèse et l'écriture 2.6 du cocycle $\left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \right] (X)$, il existe un 0-cocycle de champ basiques verticaux $\{\tilde{X}_i\}$ et un 1-cocycle de champs tangents T_{ij} tels que

$$X_i - X_j = \tilde{X}_i - \tilde{X}_j + T_{ij}.$$

La famille $\{X_i - \tilde{X}_i\}$ constitue une section globale du faisceau quotient $\mathcal{B}_\pi/\mathcal{X}$. Ainsi on dispose d'une famille de champs basiques projetable Y_i se projetant sur X telle que $Y_i - Y_j$ est tangent vertical. Sur chaque ouvert U_i , la déformation est triviale donc on peut redresser localement le feuilletage naturel. Par ailleurs on peut suivre les courbes intégrales de Y_i qui se projettent donc sur celles de X dans B^m . Ces courbes intégrales sont transverses au fibre de π et nous indiquent une façon de recoller les feuilles du feuilletage naturel pour obtenir des feuilles *épaissies*. On obtient alors, sur chaque ouvert U_i , un feuilletage de la bonne codimension qui intègre la déformation locale. Comme $Y_i - Y_j$ est tangent vertical, les petits feuilletages locaux de bonne codimension ainsi construits se recollent en un feuilletage global. Ainsi la déformation est bien complètement intégrable. Pour prouver l'involutive, on remarque que le faisceau $\mathcal{B}_\pi/\mathcal{X}$ est stable par crochet de Lie. En effet une section de ce faisceau est une famille de sections locales de \mathcal{B}_π , $\{X_i\}$ telle que $X_i - X_j \in \mathcal{X}$. Ecrivons

$$\begin{aligned} X_i &= X_j + T_{ij} \\ X'_i &= X'_j + T'_{ij} \end{aligned}$$

On a alors la relation

$$(2.7) \quad [X_i, X'_i] - [X_j, X'_j] = [X_j, T_{ij}] - [X'_j, T_{ij}] + [T_{ij}, T'_{ij}]$$

Or il se trouve que l'inclusion clé suivante $[\mathcal{B}_\pi, \mathcal{X}] \subset \mathcal{X}$ est satisfaite : en effet, les sections de \mathcal{B}_π et \mathcal{X} s'écrivent respectivement en coordonnées locales

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^k a_i(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^n a_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^m b_l(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau_l} \\ Y &= \sum_{i=k+1}^n c_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

alors le crochet de Lie entre X et Y s'écrit

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i=k+1}^n X \cdot c_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^k Y \cdot a_i(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^n Y \cdot a_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^m Y \cdot b_l(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau_l} \\ &= \sum_{i=k+1}^n (X \cdot c_i(x, \tau) - Y \cdot a_i(x, \tau)) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

qui est bien un champ tangent. Donc l'expression 2.7 constitue un champ tangent au feuilletage naturel. Par ailleurs, si X_i et X'_i sont basiques projetables alors ils s'écrivent

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{i=1}^k a_i(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^n a_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^m b_l(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_l} \\ X'_i &= \sum_{i=1}^k a'_i(x_1, \dots, x_k, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^n a'_i(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^m b'_l(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_l} \end{aligned}$$

et donc leur crochet de Lie

$$[X_i, X'_i] = (\dots) + \sum_{l=1}^m \sum \left(b_j \frac{\partial b'_l}{\partial \tau_j} - b'_j \frac{\partial b_l}{\partial \tau_j} \right) \frac{\partial}{\partial \tau_l}$$

est un champ projectable. L'involutivité de la distribution découle alors de ce que l'application tangente $D\pi$ commute au crochet de Lie. \square

Il semble malheureusement très compliqué de décrire, un tant soit peu, ces feuilletages de Schlesinger. Avec Gabriel Calsamiglia, nous avons essayé de construire des exemples en déformant une classe très particulière de feuilletages : les feuilletages *dicritiques*. Comme ce travail nous a menés assez loin de ce que nous imaginions initialement, je l'évoquerai mais dans une section ultérieure.

2.3. Structure complexe des feuilles. Une approche un peu différente pour traiter des déploiements consiste à faire de prime abord la remarque suivante : puisque les déploiements sont des déformations triviales dans la classe \mathcal{C}^∞ , ce qui change le long d'un déploiement, c'est la structure complexe des feuilles. On peut donc envisager de construire un déploiement en se fixant une variation de structure presque complexe intégrable dépendant d'un paramètre transverse au feuilletage. Cette stratégie a été développée par J.-F. Mattei et M. Nicolau dans [35] pour construire un espace de paramètres à la Kuranishi pour les feuilletages de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Je

n'ai pas personnellement développé ce point de vue et donc je me contenterai de simplement le signaler. Une chose, tout de même : il peut arriver que, pour une structure transverse, assez riche l'holonomie d'une feuille accumule des cycles périodiques à la singularité. En un certain sens, le *genre* des feuilles est alors infini. Ce qui fait, que prise isolément, chaque feuille a un espace de structures complexes de dimension infinie alors que le nombre de modules tangents est fini. Il va de soi que la condition d'intégrabilité rigidifie quelque peu les choses mais comprendre de quelle façon est une question ouverte. Formulons le problème de façon plus précise : un déploiement équisingulier \mathbb{F} avec, disons, un paramètre ϵ est, en particulier, une déformation topologiquement triviale. Considérons une feuille L_0 de $\mathbb{F}|_{\epsilon=0}$. Le long du déploiement, on peut suivre la déformation de la feuille L_0 en suivant la feuille de \mathbb{F} qui contient L_0 . Comme la déformation est topologiquement triviale, on obtient une petite courbe paramétrée par ϵ à valeurs dans l'espace des modules de la surface de Riemann L_0 . En général, cet espace de modules est de dimension infinie car L_0 a un nombre infini de cycles. Ainsi, les courbes que l'on obtient dans cet espace de module par la construction précédente sont nécessairement contenues dans une sous-variété de dimension finie. Le problème consiste à comprendre cette sous-variété.

3. Partie réduite d'un feuilletage.

Dans le théorème de Mattei[32], une chose m'a toujours frappé : l'extrême simplicité de la formule donnant la dimension de l'espace des modules tangents ne dépendant que peu des caractéristiques de la singularité. C'est une formule particulièrement robuste : en dehors de résultats classiques comme le théorème de Camacho-Sad [5] sur l'existence de séparatrices, je ne connais que peu de résultats aussi fins qui ne font appel à aucune hypothèse particulière sur le type de singularités envisagées. Il est remarquable, en effet, que cette dimension ne dépende même pas de la structure transverse de la singularité.

Si \mathcal{F} est une singularité de type *courbe généralisée*, c'est-à-dire, si tous les points singuliers réduits infiniment voisins ont deux valeurs propres non nulles, alors toute fonction f à singularité isolée dont les zéros sont les séparatrices de \mathcal{F} admet une réduction des singularités coïncidant avec celle de \mathcal{F} [33]. Dans cette coïncidence, les singularités infiniment voisines de \mathcal{F} et f ont des multiplicités qui coïncident également. Ainsi, on obtient l'égalité suivante

$$\delta(\mathcal{F}) = \delta(df),$$

où $\{f = 0\} = \text{Sep}(\mathcal{F})$. Avec Emmanuel Paul, nous avons alors essayé de comprendre si l'égalité ci-dessus était fortuite ou bien la trace d'une correspondance plus forte. A ce titre, le tableau idéal que nous entrevoyons est le suivant : fixons une fois pour toute une fonction $f_0 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ à singularité isolée et considérons $\text{Fol}(f_0)$ l'ensemble des feuilletages admettant la courbe $f_0 = 0$ comme ensemble de séparatrices. Pour simplifier l'exposé de ce qui va suivre, contentons nous de considérer dans $\text{Fol}(f_0)$ des feuilletages dont tous les points singuliers réduits infiniment voisins sont hyperboliques ou résonnants linéarisables. Le quotient

$$\text{Fol}(f_0) / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence analytique admet une partition naturelle pour la relation d'équivalence identifiant les structures transverses. Le théorème de Jean-François Mattei affirme que la dimension des classes d'équivalences ne dépend que de f_0 . Avec E. Paul, nous pensons que chacune de ces classes pourrait être isomorphes entre elles par un isomorphisme plus ou moins canonique. Je vais décrire plus précisément cette idée dans un cas que nous avons extensivement étudié : les fonctions quasi-homogènes en dimension deux.

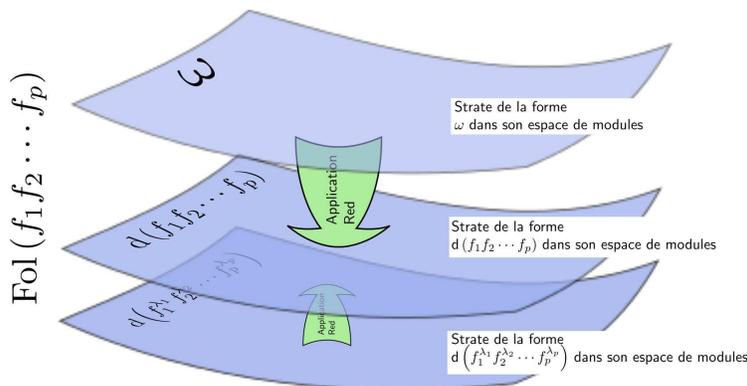


FIGURE 3.1. Stratification de l'espace des modules par la structure transverse et application Red.

Rappelons qu'une fonction $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est dite quasi-homogène si elle peut s'écrire dans une certaine coordonnée analytique locale sous la forme d'un polynôme quasi-homogène

$$f(x, y) = \sum_{ik+jl=d} a_{ij} x^i y^j, \quad k \wedge l = 1$$

Une des - nombreuses - propriétés qui caractérisent la quasi-homogénéité se trouve être utile pour notre propos :

pour tout germe de fonction u non nulle à l'origine, les feuilletages df et d(uf) sont conjugués.

Dès lors, on procède de la sorte : l'espace \mathcal{M}_{qh} des feuilletages quasi-homogènes de type courbes généralisées quotienté par la relation d'équivalence analytique s'envoie surjectivement sur \mathcal{M}_{red} l'espace des feuilletages quasi-homogènes avec intégrale première réduite quotienté par la relation d'équivalence analytique, l'application en question étant définie par

$$\text{Red} : \begin{cases} \mathcal{M}_{\text{qh}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{red}} \\ [\mathcal{F}] \mapsto [df] \end{cases}$$

où f est une équation réduite quelconque des séparatrices de \mathcal{F} . Puisque deux équations réduites d'une même courbe sont égales modulo la multiplication par une unité, cette construction est cohérente en vertu de la remarque précédente. Les résultats que je décris dans [12, 14] peuvent se réinterpréter en affirmant que l'application Red réalise un isomorphisme entre \mathcal{M}_{red} et chaque strate de l'espace \mathcal{M}_{qh} stratifié par la structure transverse. Par ailleurs, cette application mérite le nom de *partie réduite d'un feuilletage* puisqu'elle correspond pour les feuilletages quasi-homogènes avec intégrale première louvillienne à « retirer les puissances »

$$\text{Red} \left(\left[f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p [\lambda_i] \frac{df_i}{f_i} \right] \right) = \left[f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \square \frac{df_i}{f_i} \right]$$

à la façon dont on retire les puissances d'une fonction dont on veut obtenir la partie réduite.

Que se passe-t-il lorsque que l'on quitte la classe quasi-homogène ? Comment y définir l'application partie réduite ? Le problème est délicat car il n'existe aucune façon de sélectionner a priori une *meilleure* équation des séparatrices de \mathcal{F} . On peut faire un petit pas dans la résolution de cette question en essayant de définir infinitésimalement l'application Red au voisinage d'un feuilletage quasi-homogène dans sa strate, ce qui revient

en quelque sorte, à définir l'application tangente

$$D_{[\mathcal{F}]} \text{Red}$$

L'interprétation cohomologique des déploiements infinitésimaux introduite dans [32] permet une telle construction. Dans une réduction des singularités de \mathcal{F} qui est une suite de processus d'éclatements centrés en des points singuliers des relevés successifs de \mathcal{F} ,

$$E_{\mathcal{F}} : (\widetilde{\mathbb{C}^2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

on considère le faisceau $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ de base le diviseur exceptionnel $E_{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ dont la fibre en un point est le module des germes en ce point de champs tangents à $E_{\mathcal{F}}^* \mathcal{F}$. L'espace des déploiements infinitésimaux s'identifie au \mathbb{C} -espace de dimension finie $\delta(\mathcal{F})$

$$H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}})$$

la cohomologie s'entendant ici au sens de Čech [19]. Cet espace de cohomologie doit se comprendre comme jouant le rôle de l'espace tangent algébrique à une hypothétique structure de variété sur l'espace des modules globaux. Le faisceau $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{X}_{\text{Sep}(\mathcal{F})}$ des champs tangents aux séparatrices de $E_{\mathcal{F}}^* \mathcal{F}$ et l'inclusion $\mathcal{X}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{X}_{\text{Sep}(\mathcal{F})}$ induit un morphisme en cohomologie

$$(3.1) \quad H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\text{Sep}(\mathcal{F})})$$

qui se trouve être un isomorphisme si et seulement si \mathcal{F} est un feuilletage quasi-homogène. Pour deux feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 quasi-homogènes ayant pour séparatrices quasi-homogènes $\{f_0 = 0\}$, on obtient en inversant la flèche 3.1 un isomorphisme canonique

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_0}) & \xrightarrow{\sim} & H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_1}) \\ & \searrow \sim & \swarrow \sim \\ & H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\{f_0=0\}}) & \end{array}$$

où $\text{Sep}(\mathcal{F}_0) = \text{Sep}(\mathcal{F}_1) = \{f_0 = 0\}$ qui se trouverait naturellement être l'application tangente de l'isomorphisme recherché entre les strates de \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 dans $\text{Fol}(f_0)/\sim$. Si \mathcal{F}_1 est le feuilletage donné par df_0 , on obtient une description de l'application $D_{[\mathcal{F}]} \text{Red}$.

Avec Emmanuel Paul, nous avons construit une base *canonique* de l'espace en cohomologie $H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}})$ lorsque \mathcal{F} est un feuilletage quasi-homogène. Notre étudiant commun, Huong Trong Minh a, durant sa thèse [46] et entre autres choses, vérifié que dans ces bases l'isomorphisme 3.2 n'était autre que la fonction Id. Je reviendrai dans une section à venir sur ces différents travaux mais, appuyé par leurs contenus, je peux d'ores et déjà conjecturer le résultat suivant

Conjecture 2. Si $f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}$ est topologiquement quasi-homogène - c'est-à-dire, topologiquement conjugué à une fonction quasi-homogène -, les fonctions étant f_i irréductibles, alors on a l'équivalence suivante

$$f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p} \sim g_1^{n_1} \cdots g_p^{n_p} \iff f_1 \cdots f_p \sim g_1 \cdots g_p$$

la relation \sim s'entendant comme la conjugaison des feuilletages induits par ces fonctions.

Si cette conjecture peut sembler anecdotique, elle fournirait néanmoins une description directe de l'application partie réduite pour la classe des feuilletages topologiquement quasi-homogènes admettant une intégrale première.

Construire une application de réduction pour les feuilletages aurait une conséquence immédiate quant à la description de leurs modules tangents : en effet, elle permettrait de *descendre* le problème d'une telle description depuis des structures transverses très riches vers des structures transverses de fonctions pour lesquelles nous disposons de tout l'arsenal de la théorie classique des singularités. Le schéma serait le suivant : étant donné un déploiement semi-universel \mathbb{F}_U de \mathcal{F} et \mathbb{F} un déploiement quelconque, le déploiement $\text{Red}(\mathbb{F}_U)$ est un déploiement semi-universel de $\text{Red}(\mathcal{F})$ et l'application Λ qui factorise $\text{Red}(\mathbb{F})$ dans $\text{Red}(\mathbb{F}_U)$ est aussi celle qui factorise \mathbb{F} dans \mathbb{F}_U . Resterait alors à décrire l'application Λ dans le seul contexte des feuilletages donnés par une fonction.

4. Le problème de Zariski.

Les séparatrices d'un feuilletage sont les courbes analytiques invariantes d'une singularité. Partant, leurs propres modules analytiques constituent une certaine fraction des modules tangents du feuilletage qu'elles supportent. Je suis donc naturellement enclin à étudier les modules de germes de courbes du plan complexe, ce qui est l'objet du problème de Zariski.

4.1. **Les feuilletages topologiquement quasi-homogènes.** Le *problème de Zariski* est un ancien problème posé par O. Zariski dans [50, 51]. Longtemps laissé en suspens, il a connu ces dernières années des progrès considérables. L'énoncé ouvert en est celui-ci : soit un germe S de courbe complexe dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ et $E(S)$ la classe d'équisingularité de S , autrement-dit, l'ensemble des germes de courbes complexes topologiquement équivalent à S pour une conjugaison définie dans l'espace ambiant.

Problème. Décrire de la façon la plus précise possible, l'espace des modules de S , c'est-à-dire, le quotient $E(S)/\sim$ de la classe d'équisingularité de S par la relation d'équivalence analytique.

Dans ses notes [51], Zariski montre que l'espace des modules de S est en général un espace topologique non séparé mais qui présente néanmoins une stratification telle que chaque strate est une variété analytique régulière, l'une d'entre elle, dite *générique*, étant dense. Depuis quelques résultats parcellaires avaient été obtenus en ce qui concerne la dimension deux, mais c'est surtout des extensions de faits généraux aux plus grandes dimensions qui étaient devenus l'objet standard d'études. Citons néanmoins les travaux de Briançon, Granger et Maisonobe [3], qui déterminent la dimension générique de l'espace des modules pour les courbes

$$x^a + y^b = 0$$

ce que Zariski avait déjà fait dans ses notes pour des cas particuliers de couple (a, b) et Granger de façon indépendante lorsque $a = b$ [20].

Récemment, A. Hefez et M. E. Fernandez [21, 22, 23] ont réalisé entièrement le programme de Zariski pour une courbe irréductible. Ils décrivent un algorithme qui répond à peu près à toutes les questions que l'on peut se poser sur le sujet : quelles sont les dimensions de chaque strate dans leur espace de modules ? Quelle est la forme normale de Puiseux d'une courbe donnée ? Deux courbes équisingulières sont-elles analytiquement équivalentes ? Leur travail repose essentiellement sur l'étude du module des différentielles d'une courbe qui avait été introduit par Zariski. Lorsque que l'on quitte le cadre des courbes irréductibles, il semble que la taille

combinatoire du problème s'envole et à l'heure actuelle, leur approche ne semble pas se laisser généraliser facilement.

Dans [14] en amplifiant des résultats de Lins-Neto et Seguy [43, 28], j'ai montré que l'espace des modules d'un feuilletage de type courbe généralisée s'envoie surjectivement sur l'espace des modules de ses séparatrices

$$(4.1) \quad \text{Mod}(\mathcal{F}) \rightarrow E(\text{Sep}(\mathcal{F})) / \sim.$$

J'ai alors suggéré qu'il serait *a priori* plus facile d'étudier d'abord l'espace des modules d'un feuilletage dont la structure est plus simple puis la flèche 4.1 que de s'attacher à décrire directement l'espace des modules d'une courbe. Parmi d'autres motivations, cette suggestion a abouti à une collaboration [16] toujours active avec Emmanuel Paul qui nous a permis de concrétiser au bout de deux ans cette idée pour les courbes et feuilletages quasi-homogènes :

Théorème 2. [17] Soit k et l deux entiers premiers entre eux et $\mathcal{F}_{k,l,(n_1, \dots, n_p)}$ le feuilletage donné par la fonction quasi-homogène

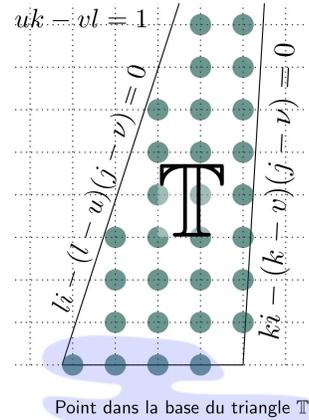
$$(y^k + \omega_1 x^l)^{n_1} \cdots (y^k + \omega_p x^l)^{n_p}$$

où $\omega_l = e^{\frac{2i\pi}{p}l}$. Son espace de module marqué est isomorphe au produit suivant

$$\text{Mod}^\bullet(\mathcal{F}_{k,l,(n_1, \dots, n_p)}) \simeq \Delta \times \mathbb{C}^{\mathbb{T}} / \mathbb{C}^*$$

où \mathbb{T} est l'ensemble des points à coordonnées entières du plan contenu strictement dans le triangle bordé par les droites

$$\begin{cases} j = 0 \\ ki - (k-v)(j-v_0) = 0 \\ li - (l-u)(j-v_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ou } v_0 = klp - k - l,$$



les nombres u et v étant définis par la relation de Bézout

$$uk - vl = 1 \quad 0 \leq v < k \quad 0 \leq u < l.$$

L'ensemble Δ est le complémentaire de la diagonale

$$\Delta = \left\{ (a_1, \dots, a_d) \in (\mathbb{C}^*)^d \mid a_i \neq a_j \right\}$$

où d est le nombre de points entiers dans la base du triangle \mathbb{T} . L'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ est une action de type projective à poids

$$\lambda \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{T}} = (\lambda^{d_i} a_i).$$

où les entiers d_i sont construits récursivement.

Par ailleurs, $\text{Mod}^\bullet(\mathcal{F}_{k,l,(n_1,\dots,n_p)})$ admet un feuilletage algébrique \mathcal{C} complètement intégrable dont l'espace des feuilles est l'espace de module des séparatrices et l'application passage au quotient celle définie en 4.1. Enfin, il existe un algorithme pour calculer la dimension générique des feuilles du feuilletage \mathcal{C} .

Notons que l'existence d'un feuilletage algébrique complètement intégrable sur $\text{Mod}^\bullet(\mathcal{F}_{k,l,(n_1,\dots,n_p)})$ est une conséquence d'un résultat classique de Rosenlicht [37] sur la complète intégrabilité des actions de groupes algébriques sur les variétés algébriques.

Pour des raisons techniques, ce résultat porte sur les espaces de modules marqués où l'on attache aux composantes irréductibles des séparatrices une numérotation que l'on veut préserver dans la relation d'équivalence analytique. L'espace des modules classiques est le quotient par l'action d'un groupe fini de l'espace des modules marqués : le groupe des *grandes symétries*.

A titre d'exemple, la paramétrisation de l'espace des modules $\text{Mod}^\bullet(\mathcal{F}_{3,5,(n_1,n_2,n_3,n_4)})$ que le résultat ci-dessus produit est donnée dans le tableau 1. La dimension de cet espace de modules est 78.²

Le calcul de la dimension générique de \mathcal{C} repose sur une description presque explicite d'une distribution de champs de vecteurs engendrant \mathcal{C} . Nous avons montré que le fibré tangent de l'espace des modules s'identifie au fibré

$$(4.2) \quad H^1(E_{\mathcal{F}_a}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_a}) \rightarrow [\mathcal{F}_a] \in \text{Mod}^\bullet(\mathcal{F}_{k,l,(n_1,\dots,n_p)}), \quad a \in \Delta \times \mathbb{C}^{\mathbb{T}}/\mathbb{C}^*$$

où $\{\mathcal{F}_a\}_{a \in \Delta \times \mathbb{C}^{\mathbb{T}}/\mathbb{C}^*}$ est une famille de feuilletages paramétrée par la variété $\Delta \times \mathbb{C}^{\mathbb{T}}/\mathbb{C}^*$ construite explicitement dans [17] et constituant une paramétrisation de l'espace des modules marqués. Maintenant, la remarque qui fonde notre stratégie est double :

- d'abord, la distribution \mathcal{C} est engendrée par le sous-fibré de 4.2 obtenu comme noyau de l'application induite en cohomologie par l'inclusion $\mathcal{X}_{\mathcal{F}_a} \subset \mathcal{X}_{\text{Sep}(\mathcal{F}_a)}$

$$(4.3) \quad H^1(E_{\mathcal{F}_a}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_a}) \rightarrow H^1(E_{\mathcal{F}_a}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\text{Sep}(\mathcal{F}_a)}).$$

- par ailleurs le feuilletage \mathcal{F}_a , vu dans une réduction des ses singularités, admet un recouvrement *quasi-homogène* au sens où chaque ouvert de ce recouvrement présente un champ de vecteur \tilde{R} satisfaisant l'équation $\tilde{R} \cdot f_a = f_a$, f_a étant une intégrale première globale de \mathcal{F}_a . Les différences deux à deux de ces symétries locales constituent un 1-cocycle dont la classe de cohomologie est appelée *la symétrie radiale* $R_a \in H^1(E_{\mathcal{F}_a}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_a})$ de \mathcal{F}_a . Le sous-fibré noyau de 4.3 est engendré, pour la structure naturelle de $\mathbb{C}\{x, y\}$ -module, par la section R_a

$$\mathcal{C} = \langle x^i y^j R_a \rangle_{i,j \in \mathbb{N}}$$

2. Cet exemple n'est pas choisi au hasard. C'est le premier exemple où la calcul de la dimension générique de \mathcal{C} présente une particularité - que je ne détaillerai pas - certes technique mais qui, pour être surmontée, a demandé E. Paul et moi-même beaucoup de travail. Au passage, la dimension de l'espace des modules des séparatrices de $\mathcal{F}_{3,5,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$ est 35.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_a : & d\left((y^3 + x^5 + a_{1,16}x^2y^2 + a_{1,19}x^3y^2)^{n_1} \times \right. \\
 & \left(y^3 + a_{2,15}x^5 + a_{2,16}x^2y^2 + a_{2,17}x^4y + a_{2,18}x^6 + a_{2,19}x^3y^2 + a_{2,20}x^5y \right. \\
 & \quad + a_{2,21}x^7 + a_{2,22}x^4y^2 + a_{2,23}x^6y + a_{2,24}x^8 + a_{2,25}x^5y^2 + a_{2,26}x^7y \\
 & \quad \left. + a_{2,28}x^6y^2 + a_{2,29}x^8y + a_{2,31}x^7y^2 + a_{2,34}x^8y^2 \right)^{n_2} \times \\
 & \left(y^3 + a_{3,15}x^5 + a_{3,16}x^2y^2 + a_{3,17}x^4y + a_{3,18}x^6 + a_{3,19}x^3y^2 + a_{3,20}x^5y \right. \\
 & \quad + a_{3,21}x^7 + a_{3,22}x^4y^2 + a_{3,23}x^6y + a_{3,24}x^8 + a_{3,25}x^5y^2 + a_{3,26}x^7y \\
 & \quad + a_{3,27}x^9 + a_{3,28}x^6y^2 + a_{3,29}x^8y + a_{3,30}x^{10} + a_{3,31}x^7y^2 + a_{3,32}x^9y \\
 & \quad + a_{3,33}x^{11} + a_{3,34}x^8y^2 + a_{3,35}x^{10}y + a_{3,36}x^{12} + a_{3,37}x^8y^2 + a_{3,38}x^{11}y \\
 & \quad + a_{3,39}x^{13} + a_{3,40}x^9y^2 + a_{3,41}x^{12}y + a_{3,43}x^{10}y^2 + a_{3,44}x^{13}y + a_{3,46}x^{12}y^2 \\
 & \quad \left. + a_{3,49}x^{13}y^2 \right)^{n_3} \times \\
 & \left. \left(y^3 + a_{4,15}x^5 + a_{4,17}x^4y + a_{4,18}x^6 + a_{4,20}x^5y + a_{4,21}x^7 + a_{4,23}x^6y \right. \right. \\
 & \quad + a_{4,24}x^8 + a_{4,26}x^7y + a_{4,27}x^9 + a_{4,29}x^8y + a_{4,30}x^{10} + a_{4,32}x^9y \\
 & \quad + a_{4,33}x^{11} + a_{4,35}x^{10}y + a_{4,36}x^{12} + a_{4,38}x^{11}y + a_{4,39}x^{13} + a_{4,41}x^{12}y \\
 & \quad + a_{4,42}x^{14} + a_{4,44}x^{13}y + a_{4,45}x^{15} + a_{4,47}x^{14}y + a_{4,48}x^{16} + a_{4,50}x^{15}y \\
 & \quad \left. \left. + a_{4,51}x^{17} + a_{4,53}x^{16}y + a_{4,54}x^{18} + a_{4,56}x^{17}y + a_{4,59}x^{18}y \right)^{n_4} \right).
 \end{aligned}$$

TABLE 1. Formes normales pour $\mathcal{F}_{3,5,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$

Reste à *compter* combien de champs contient la famille maximale libre extraite de la famille ci-dessus pour connaître la dimension générique : c'est une procédure combinatoire qui repose sur une filtration de l'espace $H^1(E_{\mathcal{F}_a}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}_a})$ induite par une valuation vérifiant

$$v(x^i y^j \mathbb{R}_a) = ik + jl.$$

En appliquant nos techniques et pour ce qui concerne strictement le problème de Zariski, nous n'avons fait que retrouver des résultats déjà connus à quelques exceptions près. Notre apport concerne plutôt la théorie des singularités et, éventuellement, une nouvelle façon d'aborder le problème de Zariski comme produit de nos résultats. Néanmoins, nous espérons que cette approche permettra *a minima* de déterminer un algorithme calculant la dimension générique de l'espace des modules de Zariski dans le cas général et, il me semble que ce sera probablement tout ce que l'on pourra tirer de cette attaque *très analytique* du problème de Zariski.

Lorsque que j'ai essayé et essaye encore d'étendre le cheminement décrit ci-dessus à une classe quelconque de singularités, je suis confronté à une difficulté que je trouve intrigante et que je voudrais brièvement évoquer ici. Une technique désormais standard pour étudier les singularités de feuilletages consiste à *dévisser* sa structure le long de sa désingularisation : par exemple, l'espace de cohomologie $H^1(E_{\mathcal{F}}^{-1}(0), \mathcal{X}_{\mathcal{F}})$ d'une singularité désingularisée après deux éclatements ponctuels apparaît comme facteur central d'une suite exacte canonique induite par la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$(4.4) \quad 0 \rightarrow H^1(D_1, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(D_1 \cup D_2, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(D_2, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}) \rightarrow 0$$

où $D_1 \cup D_2 = E_{\mathcal{F}}^{-1}(0)$.

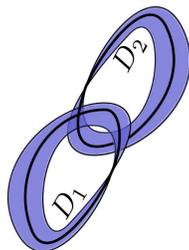


FIGURE 4.1. Décomposition du diviseur exceptionnel et recouvrement de Mayer-Vietoris.

La suite 4.4 est naturellement scindée comme suite exacte d'espaces vectoriels complexes de dimension finie mais j'ai observé que, pour les structures naturelles de $\mathbb{C}\{x, y\}$ -modules, si elle reste exacte, elle n'est en revanche plus scindée à cause de la nilpotence des opérateurs de la structure multiplicative de $\mathbb{C}\{x, y\}$ -module $x \cdot$ et $y \cdot$. Ce constat empêche de *pousser* les filtrations naturelles des termes extrémaux de cette suite vers le terme central : le processus de comptage, auquel j'ai fait référence comme étape finale du calcul de la dimension générique de l'espace des modules, achoppe ici. J'ignore si cet écueil est rédhibitoire. Quoi qu'il en soit, nous développons actuellement une approche très différente que je décris ci-après.

4.2. Les champs logarithmiques. Lorsque S parcourt sa classe d'équisingularité, la dimension générique de l'espace des modules de S s'identifie à la dimension minimale atteinte par l'espace vectoriel complexe

$$(4.5) \quad H^1(E_S^{-1}(0), \mathcal{X}_S)$$

où E_S désigne la réduction des singularités de S . C'est bien la dimension minimale de cet espace qu'il faut atteindre car lorsque S parcourt sa classe d'équisingularité les sauts dans la dimension de $H^1(E_S^{-1}(0), \mathcal{X}_S)$ correspondent à des changements de strate qui, en dehors de la strate générique, sont généralement contenus dans le lieu singulier de l'espace des modules. Or 4.5 est l'espace tangent algébrique au point S de l'espace des modules $E(S)/\sim$ dont la dimension tend à augmenter le long des singularités. En particulier, si S est topologiquement quasi-homogène, la dimension maximale est atteinte pour la classe exactement quasi-homogène qui, dans son espace de modules, correspond au point *le plus singulier et le moins générique*.

Le problème est ici double : calculer la dimension de cet espace, d'une part, mais surtout, caractériser l'appartenance de S à la composante générique de son espace de modules.

Dans [41], Saito introduit en toute généralité la théorie *des champs de vecteurs logarithmiques* : S désignant une hypersurface d'un domaine de \mathbb{C}^n , la cohomologie du module \mathcal{X}_S des champs tangents à S , dits dès lors logarithmiques, contient beaucoup d'informations quant à la topologie du complémentaire de l'hypersurface. Il se trouve qu'en dimension deux, ce module est libre et de rang deux : c'est un phénomène particulier à la dimension deux, conséquence d'un lemme d'algèbre commutative qui m'a été communiqué par Jacques Sauloy. Je ne résiste pas au plaisir de le reproduire ici :

Lemme. *Tout module réflexif sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre.*

En appliquant ce lemme à l'anneau $\mathbb{C}[x, y]$ localisé en $(0, 0)$ et le critère de Saito [41] sur les bases du module des champs logarithmiques, je montre, par exemple, que si le cône tangent de S est réduit à un point alors il existe une base $\{X_1, X_2\}$ de \mathcal{X}_S telle que

$$(4.6) \quad \nu_0(X_1) + \nu_0(X_2) = \nu_0(S)$$

où ν_0 désigne la valuation standard à l'origine de \mathbb{C}^2 . Lorsqu'un tel couple existe, la paire de valuation obtenue est unique et constitue un nouvel invariant analytique qui n'est pas, au demeurant un invariant topologique, comme le montre l'exemple $y^6 + x^7 = 0$ détaillé ci-dessous. Conjecturellement, c'est un invariant de la strate à laquelle appartient la courbe dans son espace de module.

L'égalité 4.6 assure qu'après éclatement ponctuel de l'origine $E : (\widetilde{\mathbb{C}^2}, E^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, les relevés E^*X_1 et E^*X_2 constituent encore une base du module des champs tangents au relevé E^*S en chaque point de D . Il est alors facile de montrer que

$$(4.7) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^1(E^{-1}(0), \mathcal{X}_S) = \frac{(\nu_0(X_1) - 1)(\nu_0(X_1) - 2)}{2} + \frac{(\nu_0(X_2) - 1)(\nu_0(X_2) - 2)}{2}.$$

Sous la contrainte 4.6, cette dimension est minimale pour les valeurs médianes

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \nu_0(X_1) = \nu_0(X_2) &= \frac{\nu_0(S)}{2} && \text{si } \nu_0(S) \text{ est pair} \\ \nu_0(X_1) = \nu_0(X_2) + 1 &= \frac{\nu_0(S) + 1}{2} && \text{si } \nu_0(S) \text{ est impair} \end{aligned}$$

et j'estime raisonnable la conjecture suivante

Conjecture. *Si S est irréductible et dans la composante générique de son espace de module alors il existe une base du module des champs logarithmiques satisfaisant 4.6 et 4.8.*

On obtient alors, pour les courbes irréductibles, un algorithme très simple calculant la dimension générique de l'espace des modules en dévissant le groupe $H^1(E_S^{-1}(0), \mathcal{X}_S)$ le long du processus de réduction et en ajoutant à chaque étape la contribution donnée par la formule 4.7.

Exemple 3. L'espace de module de la courbe irréductible quasi-homogène $y^6 + x^7 = 0$ est complètement décrit dans [51]. Sa composante générique est de dimension 2. Pour la courbe quasi-homogène elle-même, on obtient une base très simple du module des champs logarithmiques en choisissant

$$\left\{ 6x \frac{\partial}{\partial x} + 7y \frac{\partial}{\partial y}, 6y^5 \frac{\partial}{\partial x} - 7x^6 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

le premier étant le champ quasi-radial et le second le dual de la 1-forme $d(y^6 + x^7)$. Le couple de valuation est ici $(1, 5)$ et on est donc loin de la valeur médiane 4.8. Néanmoins, un peu d'exploration informatique avec MAPLE montre que la perturbation

$$y^6 + x^7 + x^5y^2 + x^4y^3 + x^5y^3 + x^4y^4 + x^5y^4$$

admet une base de son module des champs logarithmiques où chaque champ est de valuation $3 = \frac{6}{2}$, ce qui lorsque l'on évalue la dimension via la formule précédente est conforme aux résultats de Zariski.

5. les feuilletages dicritiques.

5.1. **Les feuilletages \mathcal{M} -simples.** Avec Gabriel Calsamiglia, nous avons essayé de construire des feuilletages de Schlesinger pour une classe très particulière de feuilletages : les feuilletages dicritiques. Ce sont ceux qui présentent une infinité de courbes analytiques invariantes adhérant analytiquement à la singularité, le prototype en étant les feuilletages admettant une intégrale première méromorphe. Ils ont été tout spécialement étudiés car, entre autres, ils présentent des propriétés de rigidité intéressantes [13, 38]. Pour une famille de feuilletages dicritiques parmi les plus simples dits \mathcal{M} -simples, introduite par M. Klughertz [26] et pour laquelle elle a obtenu des formes normales topologiques, Calsamiglia m'a proposé d'essayer de décrire le feuilletage de Schlesinger à partir d'une famille de formes normales formelles qu'il avait construites en suivant un algorithme similaire à [47]. Tâchons d'être un peu plus spécifique. Un feuilletage \mathcal{F} dicritique \mathcal{M} -simple est régulier après un simple éclatement ponctuel. Les feuilles du feuilletage relevé sont transverses au diviseur exceptionnel à l'exception d'un nombre fini d'entre elles en des points que l'on appelle les points de *tangence* du feuilletage. Au voisinage de ces points, chaque feuille a une intersection multiple avec le diviseur exceptionnel et il existe un germe de biholomorphisme périodique dont les orbites sont ces ensembles d'intersections : ces germes sont appelés les applications *périodiques* du feuilletage et toutes ensemble, elles constituent sa structure transverse. La relative simplicité de la structure transverse de ces feuilletages est une des raisons qui nous ont amenés à les étudier.

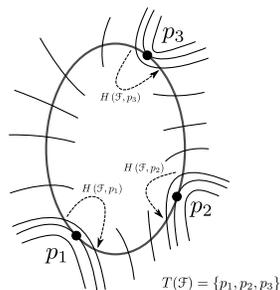


FIGURE 5.1. Feuilletage \mathcal{M} -simple avec trois points de tangence et ses applications périodiques.

Lorsque, à titre d'exemple, l'ensemble de tangence ne contient qu'un point de multiplicité 2, nous montrons dans [8] que le feuilletage est analytiquement équivalent à celui donné par la 1-forme

$$(5.1) \quad (y^2 + a(x) + yb(x)) (xdy - ydx) + x^4 dx$$

où a et b sont des séries convergentes de la variable x . D'après le théorème de Mattei 2.1, ce feuilletage n'a qu'un seul module tangent. Le lieu de tangence avec le champ radial $x\partial_x + y\partial_y$ est réduit à la droite $\{x = 0\}$ comptée cinq fois qui est, aussi, invariante. Avec Gabriel Calsamiglia, nous pensions que la position relative de ce lieu de tangence vis à vis du point de tangence pouvait constituer le module tangent. Notre démarche consista à considérer une déformation de paramètre ζ s'écrivant

$$\left(y^2 + a(x, \zeta) + yb(x, \zeta)\right) (xdy - ydx) + x^4d(x + \zeta y)$$

et à déterminer des relations différentielles sur $a(x, \zeta)$ et $b(x, \zeta)$ de façon à assurer que cette famille soit un déploiement : ce qui revient, en quelque sorte, à écrire des relations de Schlesinger dans un espace de dimension infinie. Malgré tous nos efforts et toutes nos explorations informatiques, nous ne sommes pas parvenus à résoudre précisément ce problème mais - un peu par hasard avouons-le -, nous sommes tombés sur un déploiement semi-universel de la 1-forme différentielle 5.1.

Théorème ([8]). *Un déploiement semi-universel de 5.1 s'écrit*

$$(5.2) \quad \left(3y^2 + x \sum_{i=1}^{\infty} (x + \zeta y)^i (a_i x + b_i y)\right) (xdy - ydx) + x^4d(x + \zeta y)$$

où $a(x) = \sum a_i x^{i+2}$ et $b(x) = \sum b_i x^{i+1}$.

En particulier, en tant que 1-forme des trois variables x , y et ζ , cette forme est intégrable. Il s'agit là du premier exemple de déploiement non-trivial pour une singularité ne présentant aucune propriété d'intégrabilité de quelque espèce que ce soit : il est en effet possible de montrer, en invoquant les travaux de Perez-Marco [40], qu'en choisissant bien les fonctions a et b , on peut s'assurer de l'absence d'une intégrale première même louvernienne. Or, tous les exemples que j'ai égrainés dans la première partie de ce manuscrit présentaient ce type d'intégrale première.

En fait, l'intégrabilité de la 1-forme 5.2 vient de ce qu'elle est le pull-back par l'application rationnelle

$$(5.3) \quad (x, y) \mapsto \left(1 + \zeta \frac{y}{x}\right) (x, y)$$

de la 1-forme obtenue en faisant $\zeta = 0$, qui, en tant que 1-forme holomorphe en dimension deux complexe, est intégrable sans condition. Cette idée s'inspire d'un résultat de rigidité des 0-voisinages de courbes rationnelles dans les surfaces dû à Savelev [42] et de ce qu'en font Loray [29] et Casale [7]. L'interprétation géométrique de l'application 5.3 est la figure 5.2.

Il s'agit, pour le dire succinctement, de contracter une fois la feuille qui porte le lieu de tangence avec le champ radial et d'éclater dans le même temps, un autre point paramétré par la variable ζ . Lorsque $\zeta \neq 0$, le lieu de tangence avec le champ radial devient une réunion de deux droites distinctes $x(x + \zeta y) = 0$ et le paramètre ζ variant, cette déformation est un déploiement semi-universel. Dans [8], nous avons généralisé ces considérations à une famille particulière de feuilletages \mathcal{M} -simples que nous avons appelés *feuilletages \mathcal{M} -simples homogènes*. Ce sont ceux admettant un feuilletage analytiquement équivalent au champ radial avec lequel le lieu de tangence est laissé invariant. Dans cette classe, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 3. *La classe topologique et la structure transverse d'un feuilletage \mathcal{M} -simple homogène caractérisent sa classe birationnelle.*

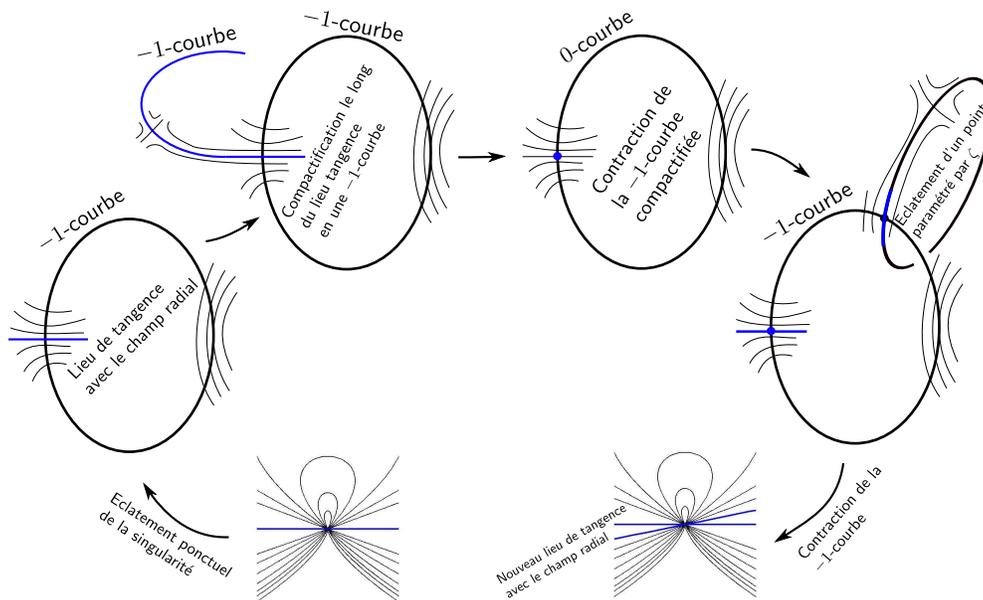


FIGURE 5.2. Construction du déploiement 5.2

5.2. **Lieu de tangence et modules tangents.** Dans la classe topologique du feuilletage \mathcal{M} -simple donné par la 1-forme

$$(5.4) \quad x^5 d \left(\frac{y^4}{x^4} + x \right),$$

j'ai identifié une construction manquant certes de naturel mais qui incarne les modules de Mattei dans un objet *algébrique*. Si l'on considère un champ topologiquement radial, c'est-à-dire, topologiquement équivalent au champ radial $x\partial_x + y\partial_y$, et un feuilletage \mathcal{F} dans la classe topologique de 5.4, leur lieu de tangence est génériquement constitué de six courbes lisses transverses. Exceptionnellement, ces six courbes sont invariantes pour l'un des feuilletages et, dès lors, le sont aussi pour l'autre. En considérant les six-uplets de points dans le diviseur exceptionnel de l'éclatement de l'origine qui apparaissent comme cône tangent du lieu de tangence invariant entre \mathcal{F} et un champ topologiquement radial, on obtient une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}\mathbb{P}^6$ donnée par les équations

$$(5.5) \quad \begin{cases} \sigma_1 = A \\ \sigma_2 = B \\ \sigma_3^2 = \frac{7}{3}\sigma_6 + C\sigma_5 + D\sigma_4 + E\sigma_3 + F \end{cases}$$

où les fonctions σ_i sont les fonctions symétriques standard des points du cône tangent, A, B, C, D, E et F sont des paramètres qui ne dépendent que de \mathcal{F} . Dans la mesure où la restriction au diviseur exceptionnel du relevé dans l'éclatement d'une conjugaison analytique au voisinage du point éclaté est une application de Möbius, le groupe des transformations de Möbius agit sur l'espace des sous-variétés définies par 5.5. En fait, la classe analytique de cette variété modulo l'action de ce groupe caractérise la classe analytique du feuilletage \mathcal{F} dans son espace de module. Par ailleurs, la famille 5.5 est une famille de variétés algébriques à six paramètres et le groupe de Möbius est un groupe de dimension trois, ce qui laisse un espace de dimension trois pour espace quotient, dimension qui coïncide avec le nombre de modules tangents de \mathcal{F} . De cette façon, on a associé une classe de quadriques de $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$ au feuilletage \mathcal{F} laquelle mesure strictement ses modules tangents.

5.3. **Les feuilletages absolument dicritiques.** Lors d'un petit workshop à Barcelone en 2010, Dominique Cerveau a attiré mon attention sur certaines singularités très particulières, dites *absolument dicritiques*, qui se trouvent être totalement régulières après un nombre fini d'éclatements de points.

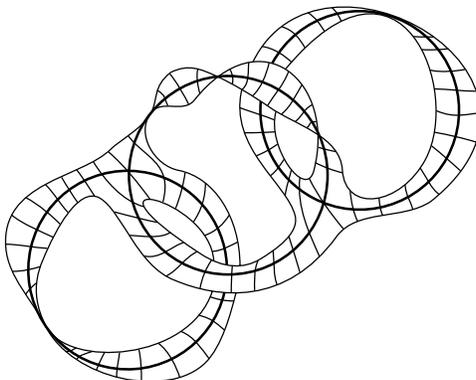


FIGURE 5.3. Un feuilletage absolument dicritique après les éclatements associés.

Après la singularité radiale $x dy - y dx$, l'exemple le plus simple est le feuilletage admettant l'intégrale première méromorphe

$$(5.6) \quad \text{Abs}_{\text{Cusp}} : \frac{x^2 + y^3}{xy} = \text{cst},$$

puisqu'après seulement deux éclatements ponctuels, le feuilletage obtenu est complètement régulier et partout transverse au diviseur exceptionnel. La structure de l'éclatement sous-jacent à tout feuilletage absolument dicritique ne souffre aucune restriction car N. Corral et F. Cano [6] ont montré que tout processus d'éclatement aussi compliqué soit-il était le support d'un feuilletage absolument dicritique.

Le feuilletage Abs_{Cusp} est particulièrement intéressant pour qui veut comprendre les modules tangents pour les raisons suivantes :

- ▶ Ses feuilles ont une topologie triviale : ce sont des disques épointés ou doublement épointés pour les feuilles qui rencontrent le diviseur exceptionnel en deux points.
- ▶ Sa structure transverse est très facile à décrire. L'espace des feuilles est un chapelet de deux sphères recollées en l'un de leurs pôles par un petit germe de difféomorphisme σ .
- ▶ Son espace de modules tangents est de dimension 1.

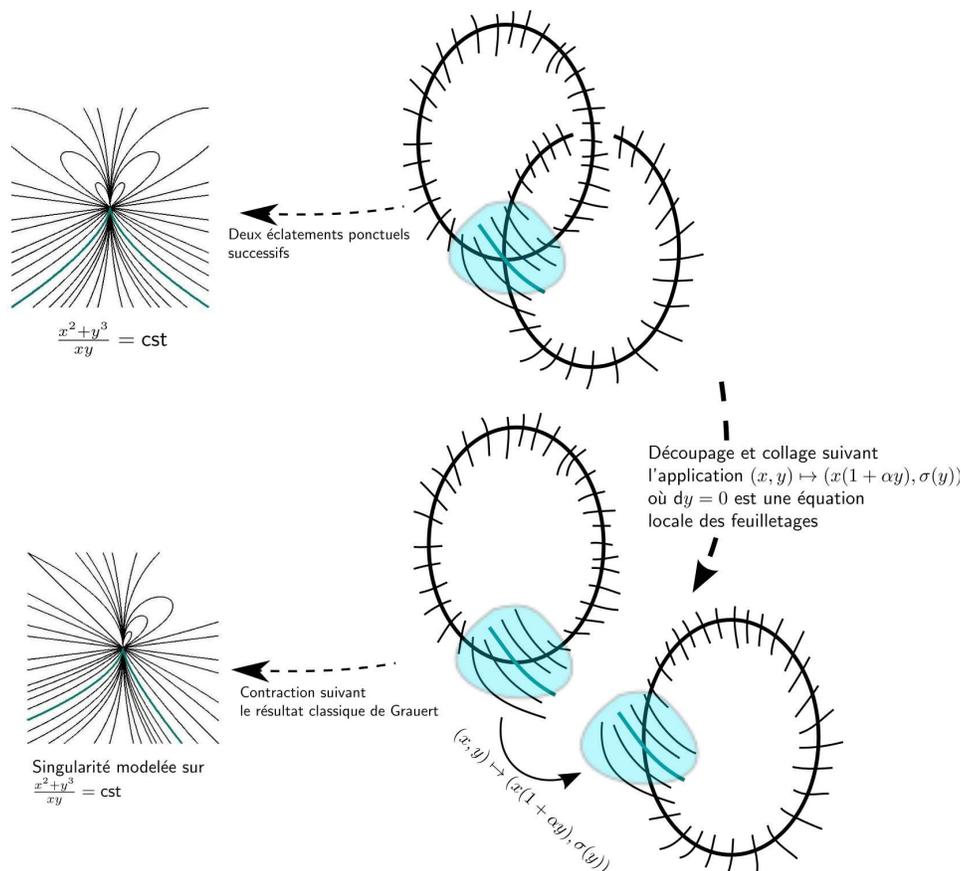
Dans [15], j'ai abouti à une description pratiquement complète de la situation et de la structure de l'espace des modules de 5.6. Ici, l'ensemble des classes d'équivalences analytiques de feuilletage dans la classe topologique de Abs_{Cusp} sont décrites comme obtenues par chirurgie de Abs_{Cusp} au voisinage du point singulier du diviseur exceptionnel. L'idée a consisté à décrire le plus petit groupe mis en jeu dans la chirurgie permettant d'accéder à toute les classes d'équivalences analytiques. Il s'agit d'un produit semi-direct

$$\mathbb{C} \times \text{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

dans lequel le premier facteur s'interprète comme le module tangent α et le second comme la structure transverse σ , la structure du produit s'écrivant

$$(\alpha, \sigma) \circ (\beta, \gamma) = (\alpha + \beta \gamma'(0), \sigma \circ \gamma).$$

Théorème ([15]). *Tout feuilletage topologiquement équivalent à Abs_{Cusp} est analytiquement équivalent au collage obtenu de la façon décrite ci-dessous*



pour un certain couple $(\alpha, \sigma) \in \mathbb{C} \triangleleft Diff(\mathbb{C}, 0)$

En faisant varier le paramètre α dans (\mathbb{C}, α_0) , on obtient, pour tout α_0 un déploiement semi-universel du feuilletage obtenu pour le collage codé par (α_0, σ) .

Parmi d'autres conséquences, ce résultat implique que le seul feuilletage topologiquement équivalent à Abs_{Cusp} et transversalement projectif est Abs_{Cusp} lui-même.

Dans cette classe de feuilletages, j'entrevois une possible interprétation du module tangent même si je ne sais pas encore l'énoncer formellement. Lorsque la structure transverse σ est fixée, l'action du collage introduit dans le théorème précédent s'écrit le long d'une feuille

$$x \mapsto x(1 + \alpha y).$$

A y fixé, c'est-à-dire le long d'une feuille, c'est une homothétie dont le rapport dépend de α . En d'autres termes, on peut considérer que le long du déploiement la feuille locale se dilate et que c'est sa *taille* qui mesure le module tangent. En considérant, dans le processus d'éclatement, un chemin réel dans la feuille qui relie les deux points d'intersection avec les composantes irréductibles du diviseur - pour les feuilles concernées - on obtient un cycle *asymptotique* non trivial dans la feuille dont la longueur caractérise la taille de la feuille évoquée précédemment. Ce cycle se pousse de feuilles en feuilles jusqu'à la singularité où il s'évanouit. Je pense que

nous devrions pouvoir évaluer le paramètre α dans la forme normale de collage pour une donnée de feuilletage topologiquement équivalent à Abs_{CUSP} en intégrant une forme différentielle non relativement exacte le long de ce cycle évanescent.

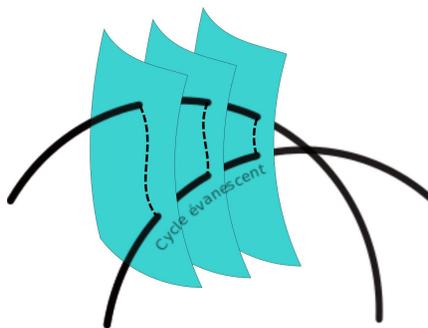


FIGURE 5.4. Cycle évanescent d'un feuilletage absolument dicritique.

De façon plus générale, la cohomologie relative des feuilletages absolument dicritiques n'est pas mystérieuse : ainsi, une forme différentielle holomorphe η relativement fermée est relativement exacte si et seulement si son intégrale le long des cycles évanescents apparaissant à chaque coin du diviseur exceptionnel est nulle. En effet, pour construire une primitive relative au voisinage de la partie régulière de chaque composante irréductible du diviseur exceptionnel, il suffit d'intégrer η sur des chemins réels tangents au feuilletage ayant une de leurs extrémités dans le diviseur. Comme la feuille est un disque époiné, cette intégrale est indépendante du chemin choisi et la primitive est bien définie. Par ailleurs, la famille de primitives ainsi construite se recolle en une primitive relative globale en vertu de l'hypothèse de l'annulation de l'intégrale de η le long des cycles évanescents.

5.4. Invariants de glissement. L'étude des feuilletages absolument dicritiques, outre qu'elle constitue une porte d'entrée confortable vers l'étude des modules tangents, s'est trouvée *a posteriori* motivée par les résultats de Huong Trong Minh, étudiant que j'ai co-encadré avec E. Paul. Dans sa thèse, Minh a utilisé les feuilletages absolument dicritiques comme une sorte de coordonnée globale génériquement transverse. Considérant deux feuilletages supportés par le même arbre de réduction, il a mesuré le défaut de recollement de conjugaisons locales au voisinage des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel, conjugaisons construites par la méthode Mattei-Moussu [34] ayant fait l'hypothèse préalable que les holonomies projectives des feuilletages au-dessus de chaque composante sont conjuguées. Il a incarné ce défaut dans un invariant dit *de glissement* que l'on construit pour une singularité réduite comme sur la figure 5.5

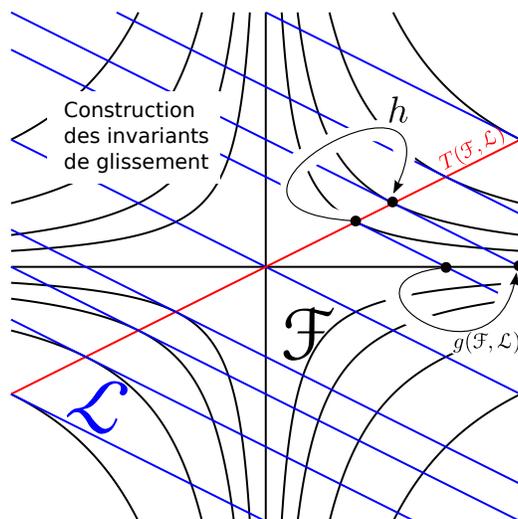


FIGURE 5.5. Construction des invariants de glissement pour une singularité réduite.

Etant donnée une singularité réduite \mathcal{F} et une fibration génériquement transverse \mathcal{L} , l'holonomie de \mathcal{F} peut être calculée sur le lieu de tangence $T(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ puis projetée via la fibration \mathcal{L} comme un germe de biholomorphisme $g(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ de l'axe $x = 0$ invariant. L'intérêt de ce germe réside dans le résultat suivant : un germe de biholomorphisme de l'axe $x = 0$ peut-être prolongé en un germe d'automorphisme de la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ si et seulement s'il appartient au commutant de $g(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ [46]. En utilisant un feuilletage absolument dicritique \mathcal{L} comme fibration génériquement transverse à un feuilletage \mathcal{F} dans une résolution de ses singularités, Minh adjoint au couple $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ la liste de ses invariants de glissement calculés à chaque point singulier du diviseur exceptionnel. Associée aux holonomies projectives, cette liste constitue un invariant complet de la classification analytique résolvant ainsi le problème de Thom pour les singularités de feuilletages.

Ces invariants sont nouveaux et mériteraient une étude approfondie : comment varient-ils le long d'un déploiement et quel lien tissent-ils avec les modules tangents sont autant de questions naturelles que ces invariants soulèvent.

6. Algébrisation.

L'algébrisation est un problème périphérique à celui de la description des modules tangents mais qui, via par exemple les considérations de la section 2.1.1, se trouve naturellement mêlé à mon travail. D'une certaine façon, pour celui qui avance avec un point de vue essentiellement local, c'est une question latente qui irrigue un peu chacune de ses occupations. En toute généralité, on la formulerait ainsi

Quels sont les objets analytiques locaux qui sont la trace d'objets analytiques globaux quitte à les considérer dans une bonne coordonnée locale ?

Dans certaines situations, c'est un problème vide : par exemple, il est bien connu que tout germe de fonction analytique de $(\mathbb{C}^n, 0)$ ayant une singularité isolée est analytiquement équivalent à une fonction polynomiale. Ce résultat permet, en particulier, d'étendre aux fonctions analytiques des constructions très fines [24] adaptées au cas algébrique. A ma connaissance, si la singularité n'est pas isolée, la question est encore ouverte. Néanmoins, G. Rond, A. Parusinski et M. Bilski ont annoncé l'algébrisation continue de germes plus généraux que ceux cités ici : ils montrent que, dans une situation englobant les fonctions à singularité non isolées, tout germe est homéomorphe à une fonction polynomiale.

Dans le contexte des singularités de feuilletages, le problème n'est pas vide. En 2010 dans [18], L. Teysier et moi-même avons concrétisé une stratégie proposée dans [31] par J. Martinet et J.-P. Ramis et montré, pour la première fois, l'existence d'un germe de singularité *non-algébrisable*, ce qui signifie, non donné par un germe de 1-forme différentielle polynomiale quelque soit la coordonnée analytique locale dans laquelle on le regarde. Notre stratégie a consisté à munir le groupe $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ d'une topologie normée faisant de cet espace *un espace de Baire analytique*, c'est-à-dire, un espace qu'il est impossible de recouvrir par une quantité dénombrable de sous-variétés analytiques, en un sens que nous avons introduit, suivant des idées anciennes d'analyse dans les espaces de dimension infinie. La preuve de l'existence d'une singularité non-algébrisable repose alors sur ce que, pour une certaine classe \mathcal{E} de singularités dites *selle-noeud*, Martinet et Ramis ont montré l'existence d'un classifiant, dit désormais *invariant de Martinet-Ramis*, pour la classification analytique. Ce classifiant étant précisément un germe de biholomorphisme à une variable, il en découle une application

$$(6.1) \quad \mathcal{E} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

dont nous avons pu montrer l'analyticité pour les structures d'espaces normés que j'évoquais. Si toutes les classes d'équivalences analytiques de \mathcal{E} pouvaient être représentées par un germe polynomial, on obtiendrait un recouvrement dénombrable en sous variétés analytiques de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ en considérant les images de $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$

- ensemble des germes représentables par un germe de 1-forme polynomiale de degré inférieur à n - par l'application 6.1.

Depuis, cette stratégie a été adaptée avec succès par G. Calsamiglia [4] pour montrer l'existence de germes non-algébriables pour d'autres classes de singularités avec la même approche : si l'espace des modules de la classe étudiée contient un espace fonctionnel modelé sur $\mathbb{C}\{x\}$, il ne saurait être de Baire analytique.

La construction d'un exemple explicite est une question complètement ouverte et les techniques avancées ci-dessus, constitutivement non constructive, sont incapables d'en produire. Au contraire de la dimension supérieure où égale à trois où suivant [49], la fonction

$$f(x, y, z) = xy(y + zx)(y + e^z x)$$

est non-algébriable car dans le cas contraire l'écriture de l'invariant birapport des quatre droites, où z est vu comme un paramètre, fournirait une relation algébrique entre les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto e^z$, ce qui ne peut exister.

6.1. Les fonctions méromorphes. La classe des fonctions méromorphes ne laisse pas la technique développée ci-dessus s'adapter : en effet, l'espace des modules d'une fonction méromorphe est *trop petit* et l'argument de Baire ne fonctionne pas. Aussi, je propose la conjecture suivante

Conjecture. *Un germe de singularité du plan complexe admettant une intégrale première méromorphe est algébrisable.*

Il y a une approche tout à fait standard pour essayer de montrer cette conjecture et je voudrais ici brièvement expliquer pourquoi elle se heurte à une difficulté vraisemblablement insurmontable en l'état. Pour ce faire, considérons un germe de fonction méromorphe

$$\frac{f}{g}$$

avec f et g dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ premier entre eux et une déformation à un paramètre $t \in (\mathbb{C}, 0)$ s'écrivant

$$(6.2) \quad \frac{f + tf_n}{g + tg_n}$$

où f_n et g_n sont des germes s'annulant à l'ordre n en 0. S'il s'avérait, comme c'est le cas pour une construction analogue pour les germes de fonctions holomorphes que, pour n assez grand, la déformation 6.2 soit topologiquement triviale, alors on devrait pouvoir montrer qu'il s'agit en fait d'un déploiement équisingulier très tangent au déploiement trivial et donc analytiquement trivial. Ainsi, l'algébrisation des fonctions méromorphes serait réalisée par la déformation

$$(6.3) \quad t \rightarrow \frac{f - t(f - \text{Jet}_n f)}{g - t(g - \text{Jet}_n g)} \quad n \gg 1$$

qui relie $\frac{f}{g}$ à la fraction rationnelle $\frac{\text{Jet}_n f}{\text{Jet}_n g}$. L'ennui, c'est que la déformation 6.2 n'est pas, en général, topologiquement triviale, l'obstruction se concentrant sur les feuilles multiples de $\frac{f}{g}$. Par exemple, la déformation

$$\frac{x^2 + ty^n}{y}$$

n'est topologiquement triviale pour aucune valeur de n car la fibre multiple régulière $x^2 = 0$ se change avec $t \neq 0$ en une courbe irréductible singulière $x^2 + ty^n = 0$. Je ne désespère pas de montrer la conjecture ci-dessus par cette approche en choisissant une déformation reliant $\frac{f}{g}$ à une fraction rationnelle qui tienne compte de la multiplicité de certaines fibres et, donc, préserve cette multiplicité. A ce titre, le travail de G. Rond, A. Parusinski et M. Bilski m'intéresse particulièrement puisqu'il m'a toujours semblé que résoudre le problème pour les singularités non-isolées devait avoir pour conséquence plus ou moins directe la résolution du problème pour les fonctions méromorphes - les obstacles se concentrant, comme je l'ai dit, sur les fibres non isolées.

Sous certaines hypothèses assez restrictives, l'algébrisation des fonctions méromorphes et même multiformes est connue : dans [10], Cerveau et Mattei montrent en particulier que tout germe multiforme en dimension deux de la forme

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$$

possède la propriété de détermination finie lorsque le lieu singulier de la forme différentielle définie par

$$(6.4) \quad f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d(f_i)}{f_i}$$

est réduit à 0 : en fait, ils parviennent, dans cette situation, à faire fonctionner la stratégie 6.3. Si les λ_i sont des entiers relatifs, ce lieu singulier est la réunion des fibres multiples de la fonction méromorphe considérée, comme dans l'exemple suivant

$$f = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

où les fibres multiples sont celles au-dessus de 2 et -2 et où 6.4 s'écrit

$$(x - y)(x + y)(x dy - y dx)$$

dont le lieu singulier est la réunion de ces deux fibres.

6.2. La conjecture de Bogomolov. La question de l'algébrisation des feuilletages holomorphes s'est révélée directement attachée à la conjecture de Bogomolov [2] dont l'énoncé est le suivant. Une variété algébrique feuilletée par un feuilletage éventuellement singulier étant donnée, toute sous-variété réelle de dimension paire partout transverse au feuilletage est automatiquement munie d'une structure de variété complexe compacte dans laquelle les cartes sont les applications locales trivialisantes du feuilletage au voisinage de chaque point de la sous-variété. Bogomolov affirme que toute variété complexe compacte peut être obtenue de cette manière.

Demailly, Lempert et Shiffmann ont montré dans [11] qu'un résultat d'approximation algébrique des feuilletages impliquerait la conjecture de Bogomolov. Celui-ci s'énonce formellement de la façon suivante : un feuilletage régulier sur un ouvert de \mathbb{C}^n est conjugué sur tout l'ouvert à un feuilletage pouvant être approché - au sens de la convergence uniforme sur les compacts - par des feuilletages Nash-algébrique, c'est-à-dire, par des feuilletages dont les graphes, en tant qu'applications dans la grassmannienne, sont contenus dans des sous-variétés algébriques. Ce qui est demandé ici est donc moins fort que l'algébrisation elle-même et je pense raisonnable de finir sur la conjecture suivante mentionnée aussi sous une forme plus forte par L. Teysier [45]

Conjecture 4. *Tout feuilletage holomorphe régulier sur un ouvert simplement connexe et relativement compact de \mathbb{C}^n est conjugué à une limite uniforme sur les compacts de feuilletages algébriques.*

Références

- [1] N. A'CAMPO : Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes. *Invent. Math.*, 20:147–169, 1973. ISSN 0020-9910.
- [2] F. A. BOGOMOLOV : Complex manifold and algebraic foliation. *Prépublication*.
- [3] J. BRIANÇON, M. GRANGER et Ph. MAISONOBE : Le nombre de modules du germe de courbe plane $x^a + y^b = 0$. *Math. Ann.*, 279(3):535–551, 1988. ISSN 0025-5831.
- [4] G CALSAMIGLIA : Non-algebrizable dicritical singularities. *Prépublication*, 2012.
- [5] C. CAMACHO et P. SAD : Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982. ISSN 0003-486X.
- [6] F. CANO et N. CORRAL : Absolutely dicritical foliations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):1926–1934, 2011. ISSN 1073-7928.
- [7] Guy CASALE : Simple meromorphic functions are algebraic. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 44(2):309–319, 2013. ISSN 1678-7544.
- [8] G. CASAMIGLIA et Y. GENZMER : Moduli spaces of dicritical foliations. *Prépublication*, 2013.
- [9] D. CERVEAU et A. LINS NETO : A structural theorem for codimension-one foliations on \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, with an application to degree-three foliations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 12(1):1–41, 2013. ISSN 0391-173X.
- [10] D. CERVEAU et J.-F. MATTEI : *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982.
- [11] Jean-Pierre DEMAILLY, László LEMPert et Bernard SHIFFMAN : Algebraic approximations of holomorphic maps from Stein domains to projective manifolds. *Duke Math. J.*, 76(2):333–363, 1994. ISSN 0012-7094.
- [12] Y. GENZMER : Un problème de Riemann-Hilbert local non-linéaire pour les germes de feuilletages holomorphes singuliers en dimension deux. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(1):45–48, 2007. ISSN 1631-073X.
- [13] Y. GENZMER : Rigidity for dicritical germ of foliation in \mathbb{C}^2 . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):Art. ID rnm072, 14, 2007. ISSN 1073-7928.
- [14] Y. GENZMER : Construction of foliations with prescribed separatrix. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(3):817–842, 2008. ISSN 0143-3857.
- [15] Y. GENZMER : Classification of absolutely dicritical foliations of cusp type. *Publ. Mat.*, 57(2):333–357, 2013. ISSN 0214-1493.
- [16] Y. GENZMER et E. PAUL : Normal forms of foliations and curves defined by a function with a generic tangent cone. *Mosc. Math. J.*, 11(1):41–72, 181, 2011. ISSN 1609-3321.

- [17] Y. GENZMER et E. PAUL : Moduli spaces for topologically quasi-homogeneous functions. *Prépublication*, 2013.
- [18] Y. GENZMER et L. TEYSSIER : Existence of non-algebraic singularities of differential equation. *J. Differential Equations*, 248(5):1256–1267, 2010. ISSN 0022-0396.
- [19] R. GODEMENT : Théorie des faisceaux. *Hermann, Paris*, 1973.
- [20] J.-M. GRANGER : Sur un espace de modules de germe de courbe plane. *Bull. Sci. Math. (2)*, 103(1):3–16, 1979. ISSN 0007-4497.
- [21] A. HEFEZ et M. E. HERNANDES : Analytic classification of plane branches up to multiplicity 4. *J. Symbolic Comput.*, 44(6):626–634, 2009. ISSN 0747-7171.
- [22] A. HEFEZ et M. E. HERNANDES : The analytic classification of plane branches. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(2):289–298, 2011. ISSN 0024-6093.
- [23] A. HEFEZ et M. E. HERNANDES : Algorithms for the implementation of the analytic classification of plane branches. *J. Symbolic Comput.*, 50:308–313, 2013. ISSN 0747-7171.
- [24] C. HERTLING : *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, volume 151 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ISBN 0-521-81296-8.
- [25] Yu. S. IL'YASHENKO : Topology of phase portraits of analytic differential equations on a complex projective plane. *Trudy Sem. Petrovsk.*, (4):83–136, 1978. ISSN 0321-2971.
- [26] M. KLUGHERTZ : Existence d'une intégrale première méromorphe pour des germes de feuilletages à feuilles fermées du plan complexe. *Topology*, 31(2):255–269, 1992. ISSN 0040-9383.
- [27] K. KODAIRA : *Complex manifolds and deformation of complex structures*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english édition, 2005. ISBN 3-540-22614-1. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao.
- [28] A. LINS NETO : Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *J. Differential Geom.*, 26(1):1–31, 1987. ISSN 0022-040X.
- [29] F. LORAY : A preparation theorem for codimension-one foliations. *Ann. of Math. (2)*, 163(2):709–722, 2006. ISSN 0003-486X.
- [30] F. LORAY : *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*. Prépublication édition, 2006.
- [31] J. MARTINET et J.-P. RAMIS : Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (55):63–164, 1982. ISSN 0073-8301.
- [32] J.-F. MATTEI : Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. *Invent. Math.*, 103(2):297–325, 1991. ISSN 0020-9910.
- [33] J.-F. MATTEI : Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux. *Astérisque*, (261):xix, 253–276, 2000. ISSN 0303-1179. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [34] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU : Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4):469–523, 1980. ISSN 0012-9593.
- [35] J.-F. MATTEI et M. NICOLAU : Equisingular unfoldings of foliations by curves. *Astérisque*, (222):6, 285–302, 1994. ISSN 0303-1179. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [36] J.-F. MATTEI et E. SALEM : Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of $(\mathbb{C}^2, 0)$. *Math. Res. Lett.*, 4(1):131–141, 1997. ISSN 1073-2780.
- [37] R. MAXWELL : Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78:401–443, 1956. ISSN 0002-9327.
- [38] L. ORTIZ-BOBADILLA, E. ROSALES-GONZÁLEZ et S. M. VORONIN : Rigidity theorems for generic holomorphic germs of dicritic foliations and vector fields in $(\mathbb{C}^2, 0)$. *Mosc. Math. J.*, 5(1):171–206, 2005. ISSN 1609-3321.

- [39] E. PAUL : Cycles évanescents d'une fonction de Liouville de type $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(1):31–63, 1995. ISSN 0373-0956.
- [40] R. PÉREZ MARCO : Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnol'd. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(5):565–644, 1993. ISSN 0012-9593.
- [41] K. SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):265–291, 1980. ISSN 0040-8980.
- [42] V. I. SAVEL'EV : Zero-type imbedding of a sphere into complex surfaces. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (4):28–32, 85, 1982. ISSN 0201-7385.
- [43] M. SEGUY : *Cobordismes et reliabilités équisinbulières de singularités marquées de feuilletages holomorphes en dimension deux*. Thèse de doctorat, Toulouse, 2003.
- [44] A. SEIDENBERG : Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$. *Amer. J. Math.*, 90:248–269, 1968. ISSN 0196-6324.
- [45] L. TEYSSIER : Propriétés analytiques de l'espace des séries entières convergentes et dynamiques holomorphes locales. *Habilitation à diriger des recherches*, 2013.
- [46] M. TRUONG HONG : Formes normales de singularités et invariants de glissement. *Thèse*, 2013.
- [47] S. M. VORONIN, L. ORTIS-BOBADILLA et È. ROSALES-GONSALES : Thom's problem for the orbital analytic classification of degenerate singular points of holomorphic vector fields on the plane. *Dokl. Akad. Nauk*, 434(4):443–446, 2010. ISSN 0869-5652.
- [48] J. M. WAHL : Equisingular deformations of plane algebroid curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 193:143–170, 1974. ISSN 0002-9947.
- [49] Hassler WHITNEY : Local properties of analytic varieties. *In Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, pages 205–244. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965.
- [50] O. ZARISKI : On the Topology of Algebroid Singularities. *Amer. J. Math.*, 54(3):453–465, 1932.
- [51] O. ZARISKI : *Le problème des modules pour les branches planes*. Hermann, Paris, second édition, 1986. ISBN 2-7056-6036-4. Course given at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, October–November 1973, With an appendix by Bernard Teissier.