



**HAL**  
open science

## Optimisation d'échangeurs à films ruisselants

Nicolas Cellier

► **To cite this version:**

Nicolas Cellier. Optimisation d'échangeurs à films ruisselants. Thermique [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAA003 . tel-01822445v2

**HAL Id: tel-01822445**

**<https://hal.science/tel-01822445v2>**

Submitted on 15 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : Doctorat Sciences Pour l'Ingénieur

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Nicolas CELLIER**

Thèse dirigée par **Christian RUYER-QUIL**, USMB, et  
codirigée par **Philippe BANDELIER**

préparée au sein du **Laboratoire d'Optimisation de  
la Conception et Ingénierie de l'Environnement**  
dans l'**École Doctorale SISEO - Sciences et Ingénierie des  
Systèmes de l'Environnement et des Organisations**

### **Optimisation d'échangeurs à films ruisselants**

### **Optimization of falling film exchangers**

Thèse soutenue publiquement le **12 avril 2018**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur Christian RUYER-QUIL**

Professeur, Université de Savoie Mont-Blanc, Directeur de thèse

**Madame Catherine COLIN**

Professeur, Toulouse INP - ENSEEIHT, Présidente du jury

**Monsieur François GALLAIRE**

Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Rapporteur

**Monsieur Michel GRADECK**

Professeur, Université de Lorraine, Rapporteur

**Madame Nadia CANEY**

Maître de conférence, Université Grenoble Alpes, Co-directeur de thèse

**Monsieur Philippe BANDELIER**

Ingénieur de Recherche, CEA/DRT/LITEN/L2ST, Co-encadrant de thèse

**Monsieur Georg DIETZE**

Chargé de Recherche, CNRS, Examineur

**Monsieur Benoit STUTZ**

Professeur, Université Savoie Mont-Blanc, Examineur



# Table des matières

Table des matières	2
Résumé	6
1 Les films ruisselants	9
1.1 Motivation industrielle . . . . .	11
1.2 Hydrodynamique des films ruisselants . . . . .	14
1.2.1 Film ruisselant sur surface plane . . . . .	15
1.2.1.1 Stabilité des films ruisselants isothermes . . .	16
1.2.1.2 Approches de modélisation . . . . .	20
1.2.1.3 Systèmes dynamiques et études perturbatives	21
1.2.1.4 Modèles réduits . . . . .	24
1.2.2 Support corrugué . . . . .	29
1.2.2.1 Coordonnées curviligne, équation de courbure	29
1.2.2.2 Hypothèse de faible pente et développement en coordonnées cartésiennes . . . . .	30
1.2.2.3 Transformation de Prandtl . . . . .	31
1.2.2.4 État de l'art, écoulements sur support à géo- métrie variable . . . . .	31
1.3 Phénomènes de transfert . . . . .	37
1.3.1 En l'absence d'ondes . . . . .	37
1.3.2 Prise en compte des instabilités hydrodynamiques . . .	38
1.3.2.1 Influence de l'hydrodynamique sur le trans- port de chaleur . . . . .	38
1.3.2.2 Influence du gradient de température sur l'hy- drodynamique : l'effet Marangoni . . . . .	39
1.3.3 Couplage entre topographie et transfert de chaleur . .	40

2	Résolution numérique des équations d'ondes	43
2.1	La résolution des équations aux dérivées partielles . . . . .	44
2.1.1	Discrétisation spatiale . . . . .	45
2.1.2	Approximation du terme temporel . . . . .	47
2.1.2.1	Schéma d'Euler . . . . .	47
2.1.2.2	Méthodes de Runge-Kutta et Rosenbrock-Wanner	49
2.1.2.3	Contrôle du pas de temps . . . . .	52
2.1.3	Problèmes convectifs raides . . . . .	53
2.2	Écriture d'un solveur dédié au prototypage . . . . .	57
2.2.1	Accélération du code de calcul . . . . .	60
2.2.1.1	Optimisation par calcul symbolique . . . . .	61
2.2.1.2	Optimisation du graphe algorithmique . . . . .	61
2.2.2	Calcul de la matrice jacobienne . . . . .	62
2.2.2.1	Approximation numérique . . . . .	64
2.2.2.2	Différentiation automatique . . . . .	65
2.2.2.3	Calcul symbolique . . . . .	65
2.2.3	Historique de développement . . . . .	66
2.2.4	Structure du logiciel . . . . .	67
2.2.4.1	Cœur . . . . .	68
2.2.4.2	Extension . . . . .	73
2.2.5	Gestion des problèmes d'advection raides . . . . .	73
2.2.6	Validation du solveur . . . . .	74
2.2.7	Triflow aujourd'hui . . . . .	76
2.2.7.1	Exemples . . . . .	77
2.2.7.2	Documentation . . . . .	79
2.2.7.3	Tests unitaires . . . . .	80
2.2.8	L'avenir de Triflow . . . . .	81
2.3	Problèmes numériques propres aux équations d'ondes . . . . .	82
2.3.1	Initialisation du film précurseur . . . . .	82
2.3.2	Condition limite d'écoulement libre . . . . .	83
3	Modèle laminaire non-isotherme	87
3.1	Développements mathématiques . . . . .	89
3.1.1	Mise à l'échelle . . . . .	90
3.1.1.1	Film de Nusselt . . . . .	90

3.1.2	Équations primitives . . . . .	91
3.1.3	Équation de type couche limite . . . . .	93
3.1.4	Transformation de Prandtl . . . . .	96
3.1.5	Développements en gradients . . . . .	98
3.1.6	Modèles intégraux . . . . .	99
3.1.6.1	Hydrodynamique . . . . .	99
3.1.6.2	Thermique . . . . .	104
3.2	Validation des modèles . . . . .	114
3.2.1	Validation du modèle hydrodynamique . . . . .	114
3.2.2	Validation face au modèle thermique complet . . . . .	115
4	Support plat . . . . .	129
4.1	Intensification des transferts par conduction et convection . . . . .	130
4.1.1	Écoulement sur support incliné . . . . .	131
4.1.2	Écoulement sur support vertical . . . . .	138
4.1.2.1	Validation & analyse globale . . . . .	138
4.1.2.2	Le phénomène de transfert en détail . . . . .	141
4.2	Influence de la fréquence de forçage . . . . .	143
4.2.1	Analyse temporelle . . . . .	143
4.2.2	Analyse fréquentielle . . . . .	147
4.2.3	Détection d'ondes . . . . .	154
5	Perspectives . . . . .	159
5.1	Impact des ondulations sur l'hydrodynamique . . . . .	160
5.1.1	État de l'art . . . . .	160
5.1.2	Validation du modèle avec topographie . . . . .	163
5.1.3	Expériences numériques . . . . .	164
5.2	Simulations 3D, effet Marangoni et démouillage . . . . .	167
5.3	Étude de sensibilité, optimisation . . . . .	168
5.3.1	Étude de sensibilité . . . . .	168
5.3.2	Optimisation . . . . .	170
5.4	Prise en compte de la turbulence . . . . .	175
6	Conclusion . . . . .	177
A	Nomenclature . . . . .	181

TABLE DES MATIÈRES	5
Table des figures	183
Bibliographie	189

## Résumé

On considère le transfert de chaleur au travers d'un film liquide de faible épaisseur s'écoulant par gravité le long d'un plan incliné, l'objectif étant de comprendre les mécanismes d'intensification des transferts par l'hydrodynamique du film et d'optimiser la géométrie d'un échangeur.

Un modèle simplifié fondé sur une méthode intégrale aux résidus pondérés appliquée aux équations de Navier-Stokes et de Fourier a été développé. Un outil de résolution de système d'équations aux dérivées partielles utilisant la méthode des lignes a été écrit. Celui-ci utilise les différences finies pour discrétiser les dérivées spatiales et un schéma Runge Kutta implicite d'ordre élevé couplé à un contrôleur de pas de temps afin de garantir une résolution stable et performante des modèles.

Ce modèle simplifié nous a permis de mettre en avant les liens entre l'hydrodynamique (et en particulier la recirculation ayant lieu au sein de la crête des ondes propagatives) et l'intensification des phénomènes de transferts, lien confirmé par résolution des équations primitives du problème. En effet, une étude paramétrique de l'intensification des transferts sur un élément représentatif d'une plaque d'échangeur par une excitation monochromatique en entrée d'écoulement a été menée. Elle montre le lien entre la présence de recirculation au sein des ondes propagatives et accroissement des transferts.

Le modèle a été étendu afin de prendre en compte un fond à géométrie variable. Des travaux préliminaires sur l'effet d'un fond ondulé sur les transferts indiquent qu'une faible inclinaison soit nécessaire pour qu'un effet notable soit observé.

## Abstract

We consider the heat transfer across a thin liquid film flowing by gravity along an tilted plane. This work aims at the identification of the mechanisms of heat transfer intensification and the optimization of the geometry of a plate exchanger.

A simplified model based on weighted residual integral method applied to Navier Stokes and Fourier equations has been developed. A tool for solving system of partial derivative equations using the method of line has also been written. Spatial discretization is dealt with finite differences. A high order implicit Runge Kutta scheme with an adaptative time stepping, allows a stable and efficient resolution.

This simplified model allowed us to link the fluid's dynamics (and especially the presence of recirculations under traveling wave crests, also called roll waves) with transfer intensification. This link has been confirmed solving the primitive equations. Indeed, a parametric study of the transfer intensification on a signature/representative element of an exchanger plate by a monochromatic frequency has been conducted showing that transfer intensification is related to the onset of roll waves.

The effect of a variable wall geometry has been included to the model. Preliminary work points out the need for a low inclination to yield a significant effect on transfer intensification.

## Remerciements

Un grand merci à toutes les personnes que j'ai eu la joie de croiser, et avec qui j'ai eu l'occasion de travailler durant cette période. Bien entendu, Christian qui m'a fait confiance durant ces (un peu plus de) trois ans, qui m'aura guidé dans les aspects qui m'étaient le plus difficile à appréhender, et m'apporter son support durant toute cette période. Mais aussi à Nadia et Philippe : même si les travaux expérimentaux à Grenoble n'ont pas pu aller au bout, leur connaissance de la physique sous-jacents le système étudié et leur recul m'ont été d'une aide précieuse.

De même, toute l'équipe du LOCIE, permanents, équipe technique et administrative, doctorants et autres précaires de la recherche pour leur bonne humeur, leurs discussions animées et leur générosité. Plus particulièrement, merci Benoît, Jean-François, Nolwenn, Lauren, Yanniss, Sarah, Jeanne, Cédric, Thomas, Téo... et j'en oublie sûrement ; pour les sorties en montagnes, les levages de coude, l'oxygénation du cerveau lorsque celui-ci était en pleine saturation. Une thèse est un travail de longue haleine pendant lequel il est difficile de constamment garder le moral au beau fixe. Mais grâce à eux, ce sont essentiellement de beaux souvenirs qui resteront gravés dans ma mémoire. Merci aux amis de Compiègne, de Paris, et du reste de la France et du monde. Pour m'accueillir lorsque je veux m'enfuir des montagnes, pour venir me voir lorsqu'ils ont eu envie de se mettre au vert. Un grand merci à Rozenn et Jeanne, dont la présence et les discussions sont autant de phares dans les périodes de doute et de difficulté.

Merci également à Sylvain et Mickel qui m'ont servis de guide et confortés dans mon envie de faire de la recherche. Merci à Khashayar Saleh qui a su détecter mes affinités avec la modélisation physique et m'a fait entrer dans ce monde. Merci à l'équipe Aaqius qui m'ont donné un aperçu du monde de la recherche et développement.

Il ne faut pas les oublier : un grand merci pour mes parents qui, sans me pousser dans une voie particulière, m'ont toujours soutenus et donnés les moyens de suivre mes envie et d'atteindre mes objectifs. Ils le diraient mieux eux même : ils ne sont pas fiers de ce que j'ai réalisé. Ils sont juste heureux pour moi. Et je les aime pour ça, et pour tout ce qu'ils sont.

Et enfin, merci Audrey. Pour tous les moments passés ensemble, les discussions et les projets d'avenir.

Et aussi... merci aux oubliés.





# Chapitre 1

## Les films ruisselants

“Les vagues ne naissent pas quand elles déferlent sur la plage. Elles roulent longtemps en mer avant de se casser sur un repli de sable.”

— Geneviève Dormann

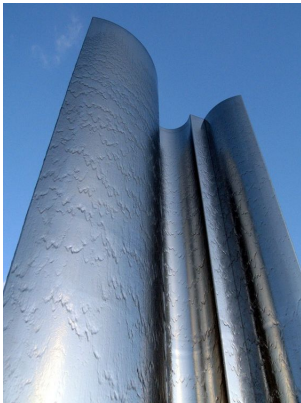
---

1.1	Motivation industrielle . . . . .	11
1.2	Hydrodynamique des films ruisselants . . . . .	14
1.2.1	Film ruisselant sur surface plane . . . . .	15
1.2.2	Support corrugué . . . . .	29
1.3	Phénomènes de transfert . . . . .	37
1.3.1	En l’absence d’ondes . . . . .	37
1.3.2	Prise en compte des instabilités hydrodynamiques	38
1.3.3	Couplage entre topographie et transfert de chaleur	40

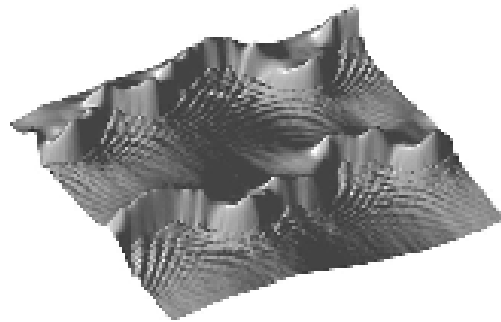
---

Les films ruisselants apparaissent naturellement lorsqu'un fluide est en écoulement d'épaisseur faible sur un support incliné. L'hydrodynamique de ces films a été étudié à de nombreuses reprises depuis les travaux fondateurs de Nusselt (1916), PL Kapitza et Kapitza (1948). Considérant un film ruisselant le long d'une plaque plane inclinée, il est possible d'observer sous certaines conditions des instabilités hydrodynamiques : des trains d'ondes interfaciales se déplacent le long de l'écoulement.

C'est une instabilité hydrodynamique du nom éponyme d'instabilité de Kapitza, au même titre que les instabilités de Rayleigh-Plateau, Rayleigh-Bénard (dans les cellules convectives de Bénard) ou Kelvin-Helmholtz.



(a) Films ruisselants sur une fontaine.



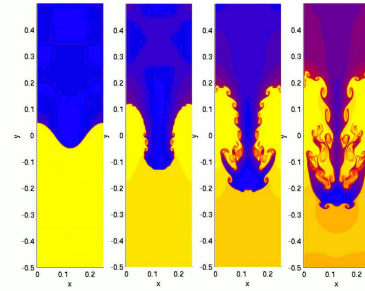
(b) Visualisation 3D d'un film ruisselant instable (Kofman, Mergui et Ruyer-Quil, 2017).

Figure 1.1 – Film ruisselants

Les motivations quant à l'étude de ces écoulements instables sont multiples. Les écoulements instables et les transitions de régimes de stabilité sont des champs d'études actifs, et représentent souvent la part la moins connue des écoulements hydrodynamiques. La transition vers la turbulence, les systèmes dynamiques chaotiques, les écoulements de gaz interstellaires ne sont que quelques exemples de systèmes étudiés activement. Les instabilités sont souvent liées à des phénomènes non-linéaires, et de nombreux outils mathématiques ont été développés afin d'accroître nos connaissances sur le sujet. De plus, ces écoulements se rencontrent dans de très nombreux champs d'études et permettent d'expliquer certains phénomènes naturels et industriels



(a) Ces nuages présentent la forme caractéristique d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Le cisaillement dû à une différence de vitesse entre deux fluides mène à une déstabilisation d'interface (Foster et Zinkova, 2006).



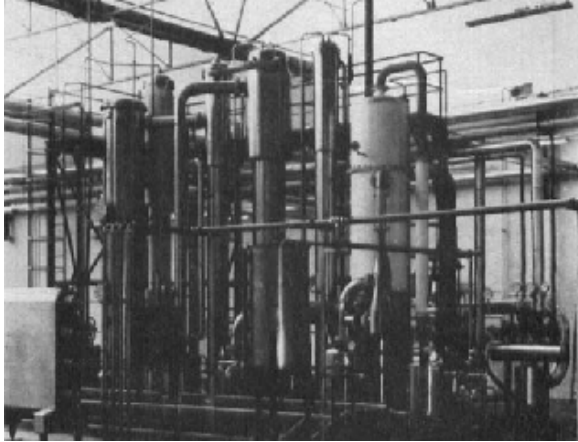
(b) Simulation 2D d'un "doigt" d'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le fluide bleu est plus dense que le fluide jaune. La situation est instable et le fluide dense "plonge" (S. Li et Li, 2006).

Figure 1.2 – Différentes instabilités hydrodynamiques

## 1.1 Motivation industrielle

Ces films font l'objet d'un effort de recherche soutenu depuis les années 60 du fait de leurs applications industrielles. Les équipements industriels dits à couches minces font partie des équipements standards (Najder, 1964 ; Wiegand, 2007), et conduisent à de bonnes performances. Ils se retrouvent lors des opérations d'évaporation / condensation, d'absorption / désorption liquide / gaz ou d'échangeurs de chaleur. Les domaines d'application sont divers : concentration du lait par évaporation en agro-alimentaire, dessalement, stockage d'énergie saisonnier pour le bâtiment, systèmes de climatisations compacts...

Toutefois, les études hydrodynamiques de ces équipements sont souvent réduites au minimum, et les raisons expliquant leurs performances sont encore mal comprises. Les approximations présentées par P.L. Kapitza et Kapitza (1949) ne permettent pas d'expliquer correctement les transports (de matière comme de masse) dès lors que le régime hydrodynamique se complexifie, comme montré dans le travail de revue de Seban et Faghri (1978). La première hypothèse faite est que lorsque les trains d'ondes se développent, l'épaisseur moyenne du film diminue (Leenaerts, 1988). Toutefois, les travaux de Seban (Seban et Faghri, 1978) montrent que cette explication est insuffisante lorsque les instabilités mènent à une hydrodynamique plus complexe.



(a) Les évaporateurs à films ruisselants (et particulièrement à tubes verticaux) sont beaucoup utilisés dans l'industrie depuis des décennies : ici un évaporateur à film ruisselant trois effets pour concentrer du jus de fruit (4600 kg de vapeur d'eau par heure). (extrait de Wiegand, 2007, manuscrit datant de 1971.)



(b) Les équipements récents comprennent des systèmes frigorifiques performants. Ici le fluide frigorigène passe à l'intérieur des plaques alors que le liquide à refroidir ruisselle à l'extérieur de celles-ci (<http://www.omegathermoproducts.nl/>).

Figure 1.3 – Équipements industriels utilisant les films ruisselants, d'hier à aujourd'hui.

Les travaux industriels concernant le lien entre l'hydrodynamique et les intensifications de transfert sont peu nombreux, ou ne sont pas sortis de la sphère industrielle (Han et Fletcher, 1985). Des études existent sur les films ruisselants sur des tubes horizontaux ; ce sont des géométries standardisées dans les évaporateurs à films ruisselants. Celles-ci tentent de lier les conditions d'écoulement, les caractéristiques du fluide et les intensifications de transferts des échangeurs (W. Li, Wu, Luo, Yao et Xu, 2011 ; Yang et Shen, 2008). Les travaux de Ribatski et Jacobi (2005) font une revue étendue des travaux sur les films ruisselants sur tubes horizontaux. Il en ressort un grand nombre de corrélations expérimentales entre le nombre de Nusselt (qui est un indicateur de l'intensification de transfert), le nombre de Reynolds (qui est le ratio des forces inertielles et visqueuses au sein de l'écoulement), les caractéristiques du fluide (viscosités, grandeurs thermiques) et éléments géométriques (diamètres et formes des tubes, présence de discontinuités). Ces corrélations sont strictement bornées par les conditions expérimentales de leurs études. D'un autre

côté, les modèles analytiques qui existent ne prennent pas en compte les phénomènes hydrodynamiques complexes comme la présence d'ondes interfaciales, les effets de cisaillement ou les variations des caractéristiques du fluide avec la température (par exemple les effets thermocapillaires dits effets Marangoni). Les efforts de dimensionnement se focalisent sur les situations diminuant drastiquement les performances des échanges : mauvaise distribution du fluide, assèchement et démouillage du support d'écoulement, engorgement...

Les études de films ruisselants sur tubes ou sur plaques présentent les mêmes défauts : il est entendu que les phénomènes hydrodynamiques complexes œuvrent dans le sens d'une intensification de transfert (que ce soit de masse ou d'énergie), mais le coût des résolutions numériques des équations complètes couplées du système sont prohibitifs. Les études à motivations industrielles se concentrent essentiellement sur la mise en place de modèles empiriques et des lois polynomiales entre intensification de transfert et conditions d'écoulement (Gonda et al., 2014 ; Alhousseini, Tuzla et Chen, 1998 ; Seban et Faghri, 1978 ; Chun et Seban, 1971). Un travail de revue effectué par Killion et Garimella (2001) sur les modèles d'absorption sur films ruisselants nous présente un nombre important de modèles supposant un écoulement au sein d'un film plat, qu'il soit laminaire ou turbulent. Toutefois, les films ruisselants verticaux présentent naturellement des vagues à leur surface comme montré par Miller (1998), que ce soit des vagues dites "capillaires", régulières et de faibles amplitudes ou "inertiels" (Brauner, 1989). Ces ondes dont la hauteur peut dépasser plusieurs fois l'épaisseur moyenne présentent un front raide et une zone de recirculation du fluide au sein de la vague comme le montre la figure 1.9. Ces dernières peuvent se comporter comme des solitons<sup>1</sup> visqueux dans un milieu actif, tirant de l'énergie des grandes longueurs d'ondes par l'instabilité. Celle-ci se retrouvera transportée vers les petites longueurs d'ondes où elle sera dissipée par la tension de surface. Le terme de soliton est ici abusif car ces ondes ne conservent pas leur identité en traversant le milieu et peuvent s'apparier pour former des structures complexes, là où un soliton en traverse un autre et en ressort avec la même forme. On préférera les termes d'onde propagative et d'onde solitaire.

---

<sup>1</sup>Un soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans son milieu. Dans les phénomènes hydrodynamiques naturels, on retrouve le mascaret ou les dévastateurs tsunamis.

Il est donc admis que les instabilités hydrodynamiques des films ruisselants jouent un rôle majeur dans l'intensification des phénomènes de transfert. Des études ont été faites, et l'hydrodynamique des films ruisselants est mieux comprise, et sera présentée dans la section 1.2 ci-dessous. Il manque toutefois une compréhension plus fine des interactions entre hydrodynamique et transport de chaleur ou de matière, peu prises en compte dans les corrélations industrielles.

## 1.2 Hydrodynamique des films ruisselants

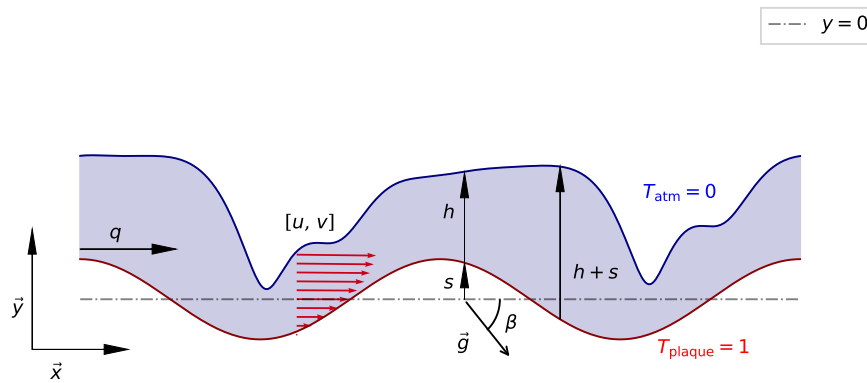


Figure 1.4 – Schéma représentatif d'un film ruisselant sur une paroi ondulée chauffée.

Les coordonnées sont fixées de façon à avoir le vecteur unitaire  $\vec{x}$  dans le sens de l'écoulement et le vecteur  $\vec{y}$  normal à la hauteur moyenne du support d'écoulement.

Le système étudié est un film ruisselant d'épaisseur  $h$  sur une plaque ondulée (ou plane) inclinée selon un angle  $\beta$  vis à vis du plan horizontal plaque située en  $y = s(x, t)$ . La plaque est à une température  $T_{y=s} = T_{\text{plaque}}$ . Le film s'écoule suivant un champ de vitesse dont les composantes en  $x$  et  $y$  sont respectivement  $u$  et  $v$ . Le film est en contact avec une atmosphère à température  $T_{\text{atm}}$ . Cette atmosphère est considérée comme passive d'un point de vue hydrodynamique et n'exerce aucun cisaillement sur le film.

La solution de base de notre système correspond à un film uniforme de

hauteur  $\bar{h}_N$  ruisselant à un débit moyen  $\bar{q}_N$  le long d'une plaque inclinée plane.

Les inconnues de notre système sont  $h$ , le champ de vitesse  $[u, v]$  et la température  $T$ . On introduit également  $q = \int_s^{h+s} u \, dy$  le débit local,  $\theta = T|_{y=h}$  la température de l'interface,  $\phi = h \partial_y T|_{y=s}$  qui représente le flux pariétal et a la dimension d'une température.

Les grandeurs physiques sont la masse volumique  $\rho$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ), la viscosité cinématique  $\nu$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ), la diffusivité thermique de l'atmosphère  $\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ), la conductivité thermique du film  $\lambda$  ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) et sa capacité calorifique  $c_p$  ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). On définit la tension de surface par  $\sigma = \sigma_\infty - \gamma(T_s - T_\infty)$ , avec  $T_s$  la température de l'interface,  $T_\infty$  la température de l'atmosphère et  $\gamma$  le coefficient thermo-capillaire : la variation de la tension de surface avec la température est considérée linéaire.  $\alpha$  est le taux de transfert thermique convectif ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ) entre la surface du film et l'atmosphère.

### 1.2.1 Film ruisselant sur surface plane

Les instabilités hydrodynamiques proviennent d'un déséquilibre local des forces s'appliquant sur le film (Smith, 1966) :

1. la gravité et la pression hydrostatique jouant un rôle stabilisateur (réaction négative)
2. les forces inertielles déstabilisant le film (réaction positive)
3. la tension de surface s'opposant à la déformation de l'interface (réaction négative)

C'est l'inertie du film qui provoque l'instabilité du film. Les autres phénomènes tendent à s'opposer à la déstabilisation du film. Toutefois, si la plaque est verticale, la gravité et la pression hydrostatique ne peuvent faire office de réaction négative, et il n'existe pas de domaine de stabilité dans l'espace des paramètres.

L'instabilité apparaît lorsque le nombre de Reynolds du fluide atteint une valeur critique  $\text{Re}_c = \frac{5}{4} \cot \beta$  (Benjamin, 1961). Lorsque le film est vertical, on a bien  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Re}_c \rightarrow 0$  : il n'existe pas de valeurs du Reynolds pour lequel le film est stable.



En dessous du seuil, la hauteur du film reste uniforme. L'interface est parallèle au support. Le film dissipe les perturbations, imposées ou non. Si l'on impose en entrée de l'écoulement une perturbation périodique sur la hauteur, le film va s'aplanir au fur et à mesure de son écoulement jusque retrouver une hauteur constante. Ce film stable est appelé film de Nusselt. Le profil de vitesse est parabolique (c'est un demi Poiseuille).

Lorsque l'on dépasse le Reynolds critique, le film se comporte comme un amplificateur. Une perturbation de faible amplitude suffit à déstabiliser l'interface et générer une onde allant en s'amplifiant le long de l'écoulement jusqu'à atteindre une amplitude maximale pour laquelle un nouvel équilibre existe. Un tel objet est appelé onde propagative ou onde solitaire (travelling wave en anglais). Si la perturbation est périodique, un train d'onde est généré. À une certaine distance de l'alimentation en fluide, l'amplitude des ondes se stabilise et les vagues sont dites saturées (voir figure 1.5). On observe nettement une zone ( $x > 1500$ ) pour laquelle l'instabilité primaire se développe et mène à un train d'onde saturé. Plus loin, des instabilités secondaires détruisent le train d'onde (simulation pour un film d'eau ruisselant sur plaque verticale avec  $\mathbf{Re} = 15$ ). La simulation utilise un modèle aux résidus pondérés d'ordre 2 simplifié tel que décrit dans le chapitre dédié à la mise en place du modèle laminaire.

Liu, Paul et Gollub (1993) ont réalisés une des études expérimentales de référence des écoulements hydrodynamiques de film ruisselant.

### 1.2.1.1 Stabilité des films ruisselants isothermes

#### ⓘ Remarque

Les notions de stabilité linéaire et de stabilité d'un point fixe ne sont pas équivalentes. Elles correspondent si l'on s'intéresse à la stabilité temporelle du film et que l'on explore tous les rayons  $x/t = c$  du plan  $(x, t)$ . Pour la suite, la notion de stabilité du point fixe correspondra à une restriction de l'étude de la stabilité linéaire du film ruisselant pour différentes célérité  $c$  des ondes propagatives.

Le film de Nusselt décrit précédemment correspond à la solution triviale des équations de Navier & Stokes d'un film ruisselant pour lequel l'épaisseur

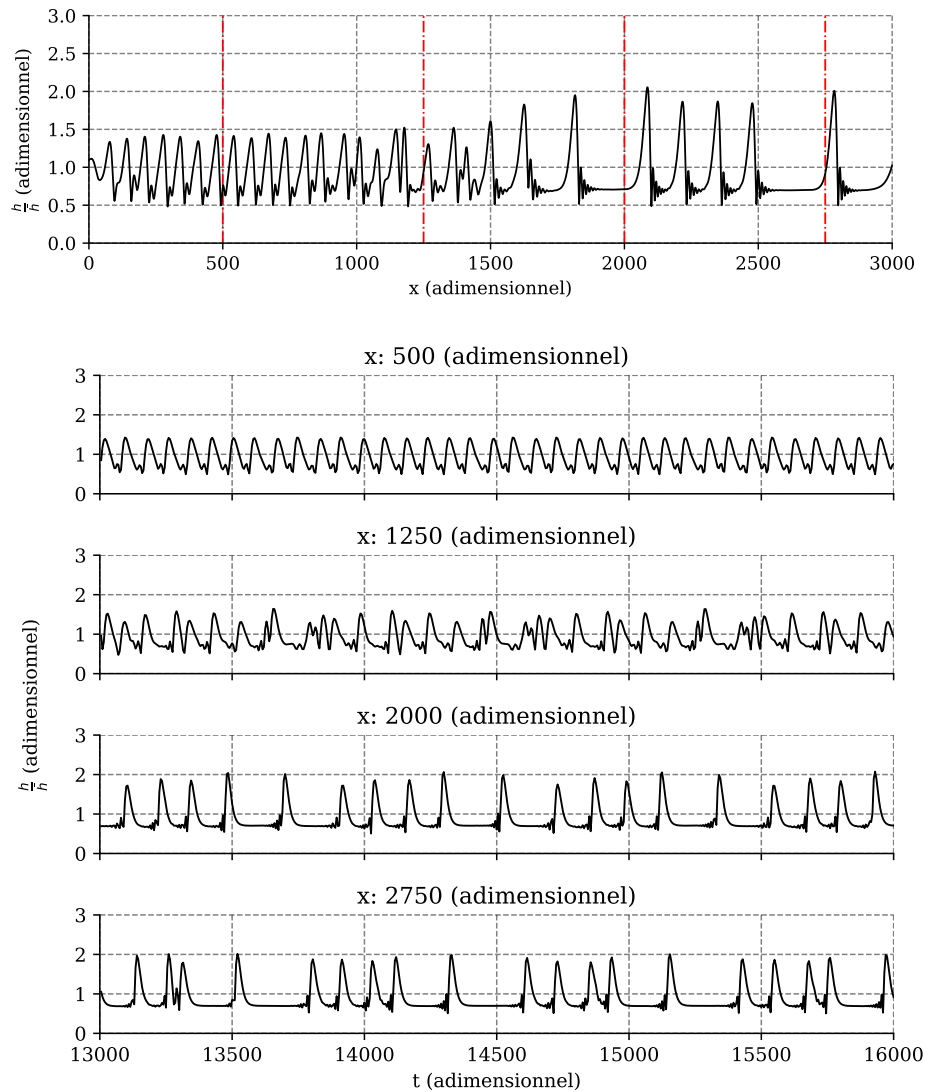


Figure 1.5 – Développement des instabilités le long d'un film vertical avec forçage périodique en entrée (modèle de Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000), simulation réalisée avec le logiciel Triflow (voir chapitre 2)).

du film est uniforme. C'est un résultat important servant de base pour la mise à l'échelle du problème.

Avant la zone d'instabilité ( $\mathbf{Re} < \mathbf{Re}_c$ ), la solution de Nusselt est un foyer attractif. Pour n'importe quelle petite perturbation, le film va tendre vers cette solution. Dans l'espace des phases représentant la hauteur du film en un point et ses dérivées successives, une perturbation ponctuelle va orbiter vers le point  $[\bar{h}, 0, 0]$  correspondant à une hauteur constante en espace et en temps.

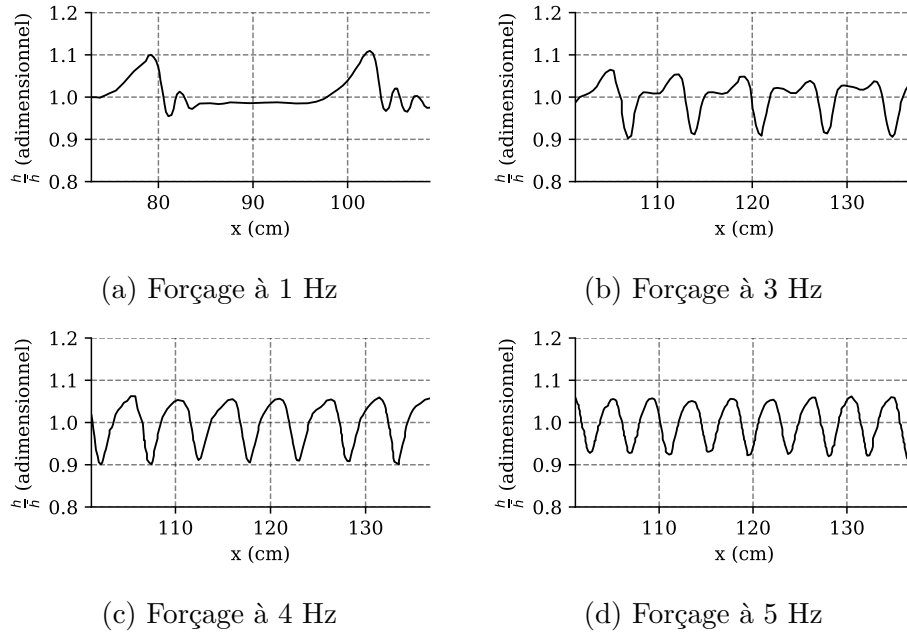


Figure 1.6 – Mélange d’eau glycolé (viscosité  $\nu \approx 5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , tension de surface  $\gamma \approx 70 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , masse volumique  $\rho \approx 1130 \text{ kg/m}^3$ ) en écoulement sur une plaque plane inclinée  $4,6^\circ$ .  $Re = 23$ . Données extraites de la publication de Liu, Paul et Gollub (1993).

Lorsque le seuil d’instabilité est atteint, ce point fixe ne va pas bouger, mais il deviendra un foyer répulsif dans au moins une direction. L’instabilité arrive au travers d’une bifurcation de Hopf. On parle de point selle spiralant. Ce point reste solution de l’équation différentielle, le système va orbiter à proximité, comme illustré dans la figure 1.7b.

Physiquement, toute perturbation même minime du système mènera à une solution orbitant autour du point fixe correspondant au film de Nusselt. La figure 1.7b présente le portrait de phase d’une onde propagative dans son référentiel. Il est obtenu en traçant la hauteur de ses dérivées successives.

L’onde propagative est également un objet important pour l’étude des films ruisselants. Si l’on considère un domaine périodique et une transformation galiléenne nous ramenant à l’étude de l’onde dans son propre référentiel, il est possible de trouver des solutions stationnaires à notre problème. Cela revient à “suivre” une onde se propageant le long d’une plaque de longueur infinie (voir figure 1.8).

Dans le cas d’une onde solitaire, les simulations et les expériences (voir les travaux de Brauner (1989), Yoshimura, Nosoko et Nagata (1996), Miyara

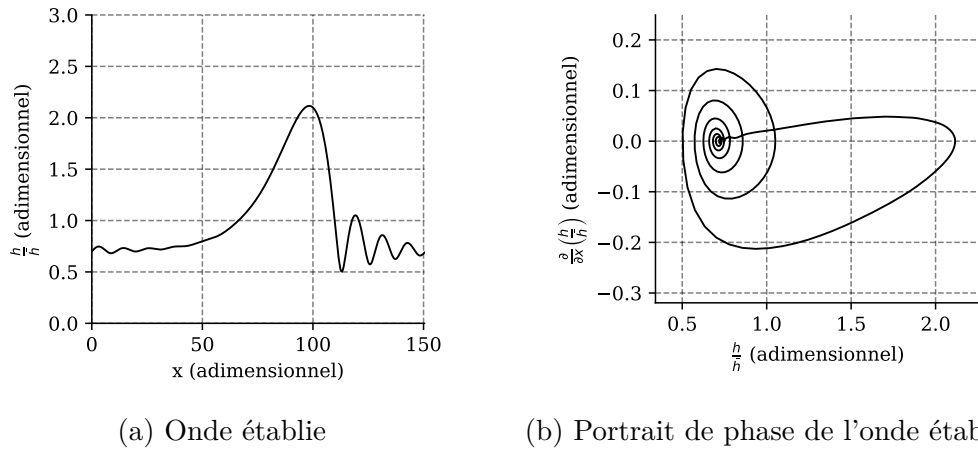


Figure 1.7 – Simulation d'une onde solitaire dans une boîte périodique,  $L/\bar{h} = 50$ ,  $Re = 20$ ,  $We = 30$ , film vertical. La simulation utilise un modèle aux résidus pondérés d'ordre 2 simplifié tel que décrit dans le chapitre 3.

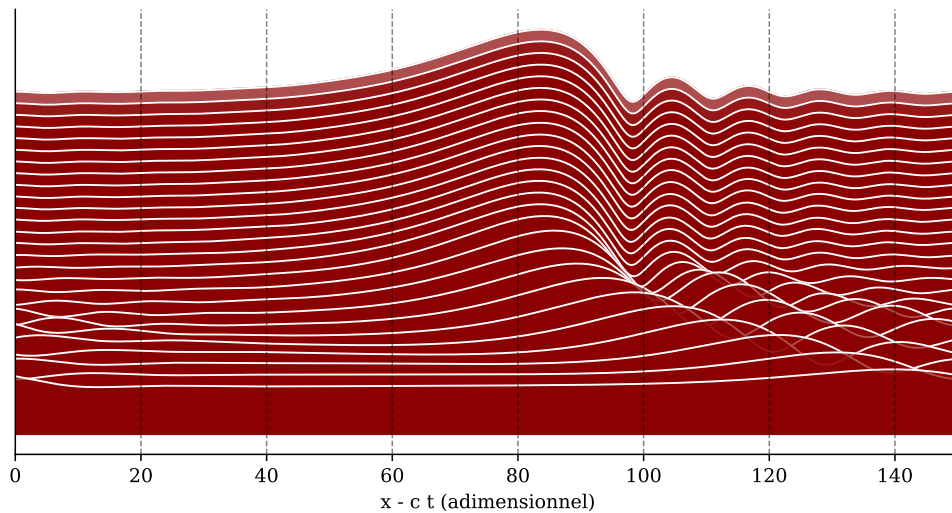


Figure 1.8 – Simulation de la croissance d'une onde solitaire dans son propre référentiel. La simulation utilise un modèle aux résidus pondérés d'ordre 2 simplifié tel que décrit dans le chapitre 3.

(1999)) permettent d'observer nettement un phénomène de recirculation au niveau de la crête de l'onde principale. la figure 1.9 présente les lignes de courant tracées dans le référentiel de l'onde. Ce phénomène de recirculation joue probablement un rôle important dans le transfert de masse et de chaleur en diminuant la résistance de transfert à la crête de l'onde.

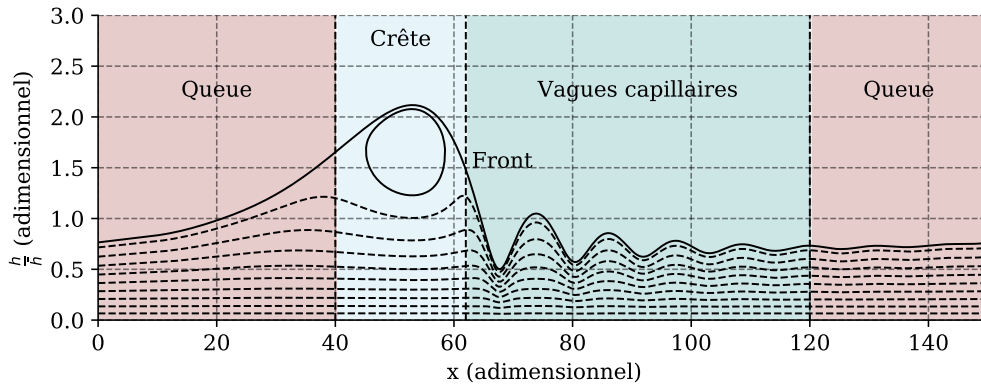


Figure 1.9 – Onde établie et les différents domaines d’intérêt. Les lignes de courant sont calculées à partir du référentiel de l’onde solitaire. Pour obtenir une onde propagative stationnaire, il est nécessaire de travailler un sein du référentiel de l’onde via la transformation  $x = -c \cdot t$  avec  $c$  la célérité de l’onde : on “suit” l’onde en écoulement. On observe trois parties distinctes : d’abord la queue de l’onde avec une amplitude qui croit doucement. La crête de l’onde en second lieu, au sein de laquelle peut s’effectuer une recirculation du liquide. Suit le front, et enfin une série de vagues capillaires dont les dimensions, amplitude comme longueur d’ondes sont réduites comparé à l’onde principale.

### 1.2.1.2 Approches de modélisation

Les équations étudiées sont les équations de Navier-Stokes.

Il est bien entendu possible de les résoudre intégralement via des méthodes numériques directes adaptées à un système polyphasique, indispensable pour repérer l’interface liquide/gaz<sup>2</sup>. Si ces méthodes sont les plus rigoureuses, elles sont également très coûteuses en temps de calcul, et réservées à un domaine d’étude restreint.

Elles permettent entre autres choses de décrire correctement les champs de température et de vitesse sans faire d’hypothèse à priori, et nous permettrons de valider les modèles asymptotiques.

<sup>2</sup>Dans ces méthodes, on retrouve les méthodes à maillages mobiles où chaque domaine (phase) est associé à un maillage différent, et les méthodes à maillage noyé tels que les méthodes “Volume of Fluid” (VoF) ou Level-Set. Dans le premier cas, on associe à chaque cellule la fraction volumique des différentes phases, dans le second on introduit une grandeur supplémentaire permettant de suivre l’interface.

## 1.2.1.3 Systèmes dynamiques et études perturbatives

Un système dynamique est un système d'équations différentielles ordinaires autonomes écrit sous la forme

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = F(\mathbf{U}(t), \lambda_0, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N)$$

Avec  $\mathbf{U} = [u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t)]$  le vecteur des variables dépendantes,  $t$  la variable indépendante (usuellement le temps) et les  $\lambda_i$  les paramètres du système.  $F(\mathbf{U})$  est une fonction linéaire ou non linéaire représentant la variation des variables dépendantes au cours du temps.

On appelle système dynamique continu un système dont l'évolution temporelle des grandeurs est modélisé par un système d'équations différentielles, en opposition aux systèmes dynamiques discrets.

Les outils d'analyse des systèmes dynamiques nous offrent une terminologie plus précise pour caractériser notre instabilité hydrodynamique.

Le film de Nusselt (film plat) est une solution évidente et triviale de notre système physique. Une telle solution est appelée solution de base, et sert de point de départ pour l'analyse du système stationnaire : c'est un point fixe du système.

Une étude par perturbation du système autour du point fixe va nous permettre d'analyser la stabilité linéaire du système. En étudiant le taux de croissance d'une perturbation de faible amplitude écrite sous forme d'une série de Fourier, il est possible de prédire si elles vont être absorbées ou amplifiées par le système, ou si elles vont rester de même amplitude (on parle de courbe de stabilité neutre). Ces informations sont précieuses, car elles permettent de cartographier les zones d'instabilités linéaires du système en fonction de ces paramètres, et donc de prédire les conditions favorables à un système stable ou instable.

À noter que cette méthode s'accompagne d'une limite forte : le système étant linéarisé, l'analyse se limite aux perturbations de faible amplitude et les effets non linéaires ne sont pas pris en compte.

Il est possible de résoudre un système dynamique de cette nature par continuation. Il s'agira d'utiliser un point fixe stable comme point de départ de l'analyse et de faire varier les paramètres physiques du problème afin de détecter une éventuelle bifurcation. Une bifurcation correspond à un changement

qualitatif dans la structure d'un système suite à une petite évolution d'un paramètre. Les algorithmes de continuation numérique permettent de détecter lorsqu'un tel événement apparaît suite à la variation d'une grandeur physique, et de quel type est la bifurcation. L'alternative étant de calculer les valeurs de  $F(U, \lambda_i)$  pour tous les paramètres afin d'en trouver les points fixes. Cette alternative plus onéreuse en temps de calcul et n'est pas envisageable pour un système dynamique de grande taille ou pour un nombre important de paramètres.

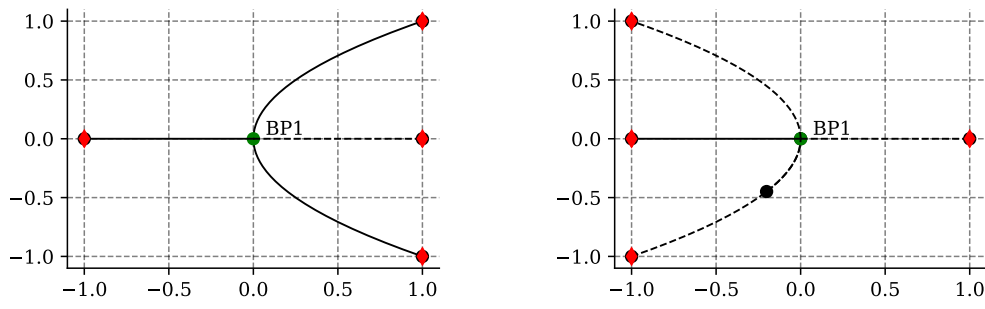
### ⊕ Plus en détail

Il est possible de voir l'analyse par continuation comme l'exploration d'un territoire abstrait (une topologie mathématique) en en suivant les frontières plutôt qu'en le criblant complètement. Une bifurcation correspond alors à un croisement.

Les plus communes sont :

- les bifurcations “nœud-col” (voir figure 1.11a).
- les bifurcations “fourches” (voir figure 1.10).
- les bifurcations de Hopf, pour lequel l'état d'équilibre est un état oscillant.

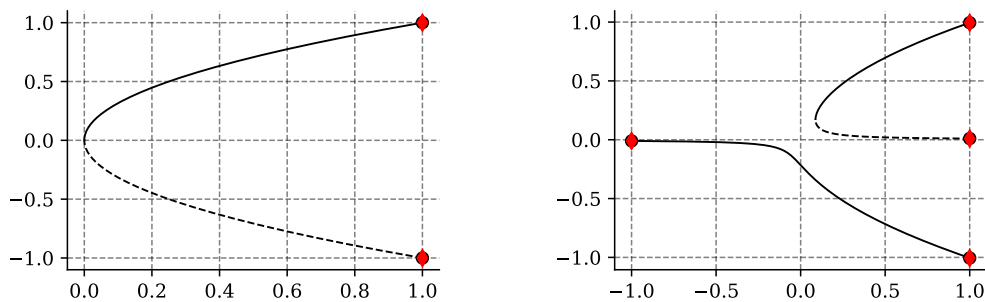
Dans le cas de la bifurcation fourche et celle de Hopf, on distingue deux comportements différents : une bifurcation supercritique et sous-critique. Lors d'une bifurcation supercritique, la transition se fait de façon continue et régulière. Pour une bifurcation sous-critique, le système va passer de l'état stable à instable brusquement, avec une petite variation du paramètre de contrôle. La bifurcation fourche (fig 1.10a) dégénère en présence d'une imperfection (fig 1.11b) en faisant apparaître deux branches dont une bifurcation nœud-col. Ces deux branches ne sont plus liées.



(a) Bifurcation fourche supercritique. Pour  $a < 0$ , il n'existe qu'un seul point fixe, stable. Pour  $a > 0$ , il existe un point fixe instable ( $y = 0$ ), et deux branches stables (le système est dit bistable). Pour une condition initiale donnée, en faisant varier le paramètre  $a$  de -1 à 1, le système va se mettre à l'équilibre  $y_{eq} = 0$  pour  $a < 0$ , puis sur une des deux branches stables (selon la condition initiale) pour  $a > 0$ .

(b) Bifurcation fourche sous-critique. Pour  $a < 0$ , il existe un point fixe et deux branches instables. Pour  $a > 0$ , le système ne possède qu'un point fixe instable, le système n'admet pas de solution stable. Pour une condition initiale donnée, en faisant varier le paramètre  $a$  de -1 à 1, le système va se mettre à l'équilibre  $y_{eq} = 0$  pour  $a < 0$ . Une fois passé  $a = 0$  ou  $y_0 > y_{crit}(a)$ , le système diverge brusquement.

Figure 1.10 – Bifurcation fourche d'équation  $y' = ay - by^3$ . En traits pleins les courbes d'équilibres stables, en pointillé les courbes instables. Les étiquettes BP correspondent aux points de bifurcation, variations qualitatives de comportement de l'équation différentielle.



(a) Bifurcation de type “nœud-col”.

(b) Bifurcation “fourche” dégénérée.

Figure 1.11 – L'ajout d'une imperfection brise la symétrie du système et fait apparaître une branche stable continue et une bifurcation “nœud-col”.



## 1.2.1.4 Modèles réduits

## Théorie “onde longue” et modèles de Benney :

Une autre approche consiste à se servir des caractéristiques du système pour faire des développements asymptotiques et réduire la complexité du système. C’est une méthode inspirée de la méthode de la couche limite et utilisée depuis longtemps dans le cas des films ruisselants (Benney, 1966 ; Lin, 1967). En prenant en compte les dimensions caractéristiques du système, il est possible d’ordonner les termes mathématiques des équations de Navier-Stokes afin de ne garder que les contributions pertinentes.

Dans le cas des films ruisselants, considérant  $L$  la longueur caractéristique du phénomène à observer, et  $h_N$  l’épaisseur du film de Nusselt, il est possible de faire apparaître un petit paramètre  $\varepsilon = \frac{h_N}{L}$ . Dans le cas des films d’eau ruisselants verticaux,  $L \approx 10 \times 10^{-2} \text{ m}$  alors que  $h_N \approx 10 \times 10^{-4} \text{ m}$ . Ce rapport mesure l’importance relative des gradients opérant à travers le film et ceux le long de l’écoulement. En estimant la dépendance des différents termes envers ce paramètre et en effectuant un développement en série, il est alors possible de grandement réduire la complexité des équations à résoudre. Notons tout de même que contrairement à la longueur de la couche limite définie dans la théorie éponyme,  $L$  n’est pas définie a priori. Certains auteurs considèrent que cette grandeur correspond aux longueurs d’ondes des vaguelettes du film. La question de l’interprétation physique du paramètre  $\varepsilon$  n’est pas simple. En effet, les ondes propagatives ne sont pas localisés dans l’espace spectral. Il n’est pas possible de faire correspondre longueur d’onde et intensité de la pente locale de l’interface. Même dans les cas d’un train d’onde saturé très régulier apparaîtront une longueur d’onde principale et un nombre important d’harmoniques, très dispersées dans le domaine fréquentiel. Cela n’empêche pas toutefois de faire un développement asymptotique : ce paramètre peut être vu comme un outil mathématique nous aidant à ordonner les termes des équations.

De ce fait, les variations en temps et dans le sens de l’écoulement sont lentes comparées aux variations à travers le film. Le paramètre  $\varepsilon$  est donc introduit dans les équations par les transformations suivantes :

$$(\partial_t, \partial_x) \rightarrow \varepsilon (\partial_t, \partial_x) \quad (1.1)$$

L'équation de continuité nous impose

$$v \rightarrow \varepsilon v \quad (1.2)$$

Benney (1966) a développé une approche dite “onde longue” qui mène à une simple équation d'évolution pour  $h$ , la longueur du film. Il s'agira d'exprimer chaque variable comme une série en puissance de  $\varepsilon$ .

Une fois les variables remplacées par leur développement de Taylor, les équations de Navier-Stokes sont tronquées au 1er ordre, ce qui mène à un système d'équations différentielles simplifié qu'il est possible de résoudre analytiquement. L'ordre principal mène à l'équation d'évolution :

$$\partial_t h + \overbrace{h^2 \partial_x h}^{\text{advection}} + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0 \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) pilote le mouvement de l'interface, c'est à dire la cinématique du film liquide. C'est un cas particulier des équations dites cinématique de la forme (Whitham et Fowler, 1975) :

$$\partial_t h + \partial_x \Phi(h) = 0 \quad (1.4)$$

Dans le développement en ondes longues, le champ de vitesse est uniquement fonction de de l'épaisseur  $h$  et de ses gradients. La coordonnée normale  $y$  disparaît, la dimension du problème est donc moindre. Cela permet, dans le cadre de l'asymptotique, d'avoir un problème très simple à résoudre et qui nous apporte un certain nombre d'informations dont le seuil de stabilité principale.

Toutefois, cette équation ressemble à l'équation de Burgers avec un coefficient convectif non linéaire et sans terme de diffusion. Il n'existe aucune force dissipative ou dispersive, ce qui mène au développement de fortes discontinuités. Les gradients dans le sens de l'écoulement augmentant fortement, les hypothèses du développement asymptotique ne sont plus respectées. Il manque des termes capables de lisser les solutions, des termes dispersifs ou de tension de surface. Il est donc nécessaire de poursuivre le développement en série afin de les prendre en compte.

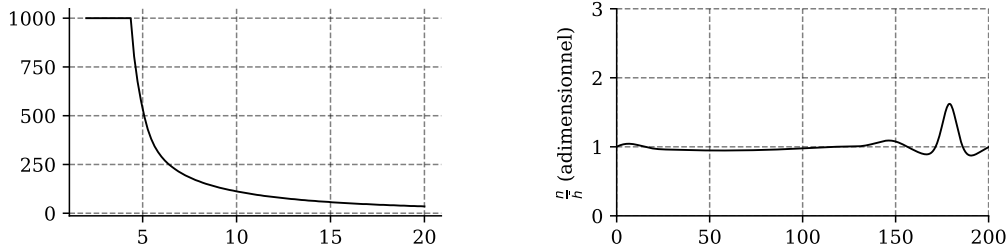
En réinjectant les variables tronquées à l'ordre principal dans les équations et en menant le développement jusqu'à l'ordre 1, puis deux, nous obtenons les modèles de Benney d'ordre 1 et deux (voir équations 1.3 et 1.5 respectivement).

On remarque que contrairement au modèle développé à l'ordre principal, on retrouve cette fois-ci des contributions dissipatives et des termes de tension de surface. Les termes de tensions de surfaces sont exprimés en  $\varepsilon^3$ , et apparaissent pourtant dans les développements en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . En abaissant artificiellement l'ordre du nombre de Weber, on introduit ces termes aux ordres inférieurs afin de prendre en compte un phénomène physique que l'on sait jouer un rôle important dans le modèle. Un principe de moindre dégénérescence a été appliqué : au premier ordre, on a pris en compte tous les phénomènes physiques (l'inertie du fluide, la gravité, la tension de surface) tout en ignorant les corrections d'ordre supérieur à un. Ainsi, on prend en compte tous les phénomènes physiques sans alourdir le modèle. Les corrections sont ajoutées au fur et à mesure que nous décidons d'augmenter l'ordre du développement.

$$\begin{aligned}
& \partial_t h + h^2 \partial_x h + \partial_x \left( \varepsilon \left[ \frac{2}{5} \text{Re} h^6 \partial_x h - \text{Ct} \frac{h^3}{3} \partial_x h + \varepsilon^2 \text{We} \frac{h^3}{3} \partial_{xxx} h \right] \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \left[ \overbrace{\frac{7}{3} h^3 (\partial_x h)^2 + h^4 \partial_{xx} h}^{\text{viscosité élongationnelle}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \overbrace{\left\{ \frac{127}{35} \text{Re}^2 h^9 - \frac{8}{5} \text{Ct} \text{Re} h^6 \right\} (\partial_x h)^2}^{\text{correctifs des termes inertiels}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \overbrace{\left\{ \frac{4}{7} \text{Re}^2 h^{10} - \frac{10}{21} \text{Ct} \text{Re} h^7 \right\} \partial_{xx} h}^{\text{correctifs des termes de tension de surface}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \text{Re} \varepsilon^2 \text{We} \left( \frac{10}{21} h^7 \partial_{xxxx} h + \frac{12}{5} h^6 (\partial_{xx} h)^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + 4h^6 \partial_x h \partial_{xxx} h + \frac{24}{5} h^5 (\partial_x h)^2 \partial_{xx} h \right) \right] \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Ce modèle est limité à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité. En effet, dès que le  $\text{Re}$  devient trop important, les simulations numériques “explorent” (voir figure 1.12). Les équipements industriels fonctionnent avec des débits plus élevés et dépassent amplement cette valeur, et d'autres méthodes plus adaptées ont été développées afin de contourner cette limitation. La formation de solutions singulières en un temps fini peut être évitée en régularisant les termes de l'équation de Benney comme montré par les travaux de Ooshida (1999). Toutefois, cela ne permet pas d'obtenir des accords quantita-

tifs avec les travaux expérimentaux ou les modélisations numériques directes. Les amplitudes et vitesses des ondes solitaires sont sous-estimées, et c'est la conséquence d'un asservissement à la hauteur du film de toutes les variables propres à l'écoulement. Il est nécessaire de rajouter des degrés de liberté au modèle si l'on veut obtenir des résultats plus réalistes.



(a) Temps avant que le nombre d'itérations nécessaires par pas de temps dépasse une valeur critique (ici  $n_{\text{iter}_{\text{crit}}} = 200$  pour un solveur de Rosenbrock Wan-ner implicite d'ordre 6 et  $\Delta t = 1$ ) en fonction du Reynolds.

(b) Hauteur du film à la dernière itération pour  $\text{Re} = 8$ . On observe un fort gradient vers  $x \approx 180$  que le solveur ne peut plus gérer malgré un pas de temps adaptatif et une méthode implicite d'ordre élevé.

Figure 1.12 – Simulation numérique d'un film ruisselant avec modèle de Benney d'ordre 1. (film vertical, eau à 20°C).

### Méthodes intégrales :

Les modèles partent d'une version modifiée des équations de Navier-Stokes dans laquelle la dépendance à la pression a été éliminée en intégrant l'équation du moment à travers le film et en prenant en compte les conditions limites. Les équations sont ensuite tronquées à l'ordre qui nous intéresse.

De nombreuses approches ont été mises en œuvre suivant une approche intégrale (P.L. Kapitza et Kapitza, 1949 ; Shkadov, 1970 ; C. Ruyer-Quil et Manneville, 1998 ; Y. Trifonov, 1999 ; Christian Ruyer-Quil et Manneville, 2000 ; Yu Ya Trifonov, 2007 ; Scholle et al., 2008 ; Häcker et Uecker, 2009 ; S. J. D. D'Alessio, Pascal, Jasmine et Ogden, 2010).

Le principe derrière cette famille de méthodes est de projeter le champ de vitesse sur une série de fonctions tests choisies avec soin.

$$u(x, y, t) = \sum_{j=0}^{j_{\text{max}}} a_j(x, t) f_j[\bar{y}] \quad (1.6)$$

avec les  $a_j(x, t)$  les amplitudes associées à nos fonctions tests,  $\bar{y} \in [0, 1]$  la coordonnée  $y$  réduite, est définie par

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{y}{h} & \text{dans le cas avec support plan} \\ \bar{y} = \frac{y-s}{h} & \text{autrement} \end{cases}$$

Le choix des fonctions tests est crucial et devra être compatible avec les conditions limites et avec le développement asymptotique : pour un développement à l'ordre principal, il faudra retrouver un profil parabolique similaire à celui observé pour un film plat.

Dans un second temps, l'équation du moment 1.7 sera affectée d'une fonction de pondération  $w_i(\bar{y})$ , puis intégrée sur l'épaisseur du film. Nous obtenons alors un certain nombre de résidus.

$$\begin{aligned} 3\varepsilon \text{Re} \left[ \partial_t u + \partial_x (u)^2 + \partial_y (uv) \right] = \\ 1 + \partial_{yy} u - \varepsilon C t \partial_x h + \varepsilon^2 \left[ 2\partial_{xx} u + \partial_x (\partial_y v|_h) \right] + \varepsilon^3 \text{We} \partial_{xxx} h \end{aligned} \quad (1.7)$$

Les éléments critiques sont :

1. le choix des fonctions tests  $f_i(\bar{y})$
2. le choix des fonctions de pondération  $w_i(\bar{y})$

Le choix des fonctions tests est conditionné par la cohérence avec le développement asymptotique. Le champ de vitesse est parabolique pour un film plat, et les corrections apportées au profil de vitesse  $u$  ont une forme polynomiale en  $y$  dans la théorie "onde longue". Il s'agira de choisir les fonctions tests en fonction de ces conditions.

Les différentes méthodes aux résidus pondérés présentent différents choix pour les fonctions de pondération. Les méthodes les plus utilisées sont la méthode de Galerkin, la méthode par collocation et la méthode par sous-domaine. L'ensemble de ces méthodes sont équivalentes entre elles à condition de prendre un nombre suffisant de fonctions tests, mais la méthode Galerkin est la plus efficace et demande un nombre minimal de fonctions tests ainsi que très peu d'opérations algébriques.

Modèles WRIBL (Weighted Residual Integrated Boundary Layer) :

Ces modèles sont d'ordre 1 et 2 et possèdent deux à quatre équations d'évolution (C. Ruyer-Quil et Manneville, 1998 ; Christian Ruyer-Quil et Manneville, 2000). Les variables restantes après intégration sont la hauteur  $h$ , le débit local  $q$ , et pour le modèle complet à l'ordre 2, deux variables de correction du champ de vitesse (habituellement appelées  $s_1$  et  $s_2$ ).

### 1.2.2 Support corrugué

Si l'hydrodynamique des films ruisselants sur fond plat est relativement bien connue, les premières études sur fond corrugué datent des travaux de Wang (1981). L'étude porte sur des supports avec des topographies sinusoïdales et un développement en ondes longues selon les coordonnées cartésiennes sur des écoulements tridimensionnels. Il a mis en avant que contrairement aux déformations de la surface survenant sur une plaque plane et à relativement haut nombre de Reynolds, les déformations provoquées par la présence des topographies peuvent s'observer quelle que soit la vitesse du fluide et sont totalement stables et déterministes. Lorsque le  $Re$  augmente, les corrugations du support peuvent au contraire interagir avec l'instabilité inertielle et avoir un effet déstabilisant.

Les équipements industriels sont rarement équipés de supports d'écoulement plats : ceux-ci sont souvent rainurés ou présentent des géométries périodiques afin de limiter les effets de démouillage. Il est donc nécessaire de développer les modèles en prenant en compte les géométries de hauteur variables. De plus, la présence de corrugations ou d'obstacles ponctuels sont une piste de contrôle passif des instabilités hydrodynamiques. En dimensionnant correctement les supports d'écoulement, il pourrait être possible de retarder ou de forcer l'apparition des ondes.

#### 1.2.2.1 Coordonnées curviligne, équation de courbure

La façon la plus rigoureuse de prendre en compte une forme complexe pour le support d'écoulement dans le cas des modèles intégrés est de changer de coordonnées pour l'intégration des équations. Il faut donc travailler en coordonnées curvilignes et faire apparaître la courbure du fond dans les équations

moyennées. Il s'agit de travailler non plus selon le repère orthonormé  $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$  mais dans un repère mobile appelé repère de Darboux composé de la normale à la surface et de deux vecteurs tangents orthonormés.

Il est nécessaire de choisir de façon arbitraire un des vecteurs tangents dans le cas d'un repère de Darboux en trois dimensions. Dans le cas du déplacement d'un solide sur une surface, c'est le vecteur vitesse du solide qui est pris. Dans le cas d'un fluide, il faut choisir une courbe de référence. Il peut être possible de se baser sur les lignes de courant de la solution stationnaire, ou considérer que le repère évolue avec le temps. Dans le cas d'un repère de Darboux sur une courbe, le repère est "unique" et composé de la normale et de la tangente à la courbe. Il est possible de se représenter le repère de Darboux en deux dimensions comme le cas particulier du repère en 3 dimensions dans lequel le plan de coupe et la projection de la courbe paramétrique que suit le repère se confondent.

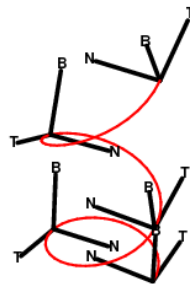


Figure 1.13 – Illustration d'un repère mobile de Darboux le long d'une courbe 3D. On observe les trois composantes unitaires du repère : le vecteur tangent à la courbe, et deux vecteurs normaux. Dans le cas d'une courbe sur une surface, un premier vecteur normal est choisi perpendiculaire à la surface et le troisième vecteur orthogonal aux deux premiers ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frenet-Serret\\_moving\\_frame1.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frenet-Serret_moving_frame1.png)).

#### 1.2.2.2 Hypothèse de faible pente et développement en coordonnées cartésiennes

Si l'on considère que la pente est faible, il est possible de travailler directement en coordonnées cartésiennes. Dans ce cas, on considère que la courbure est assez faible pour que la normale de la courbe reste proche du vecteur  $\vec{y}$ .

Dans ce cas, l'intégration se fera comme précédemment mais avec pour bornes  $[s, s + h]$  au lieu de  $[0, h]$ . Le modèle n'est plus rigoureusement valable lorsque la courbure locale augmente, mais les travaux de Tseluiko, Blyth et Papageorgiou (2013) semblent montrer qu'un modèle simple (un modèle type Benney) avec une prise en compte de la topographie en coordonnées cartésiennes est capable de prendre en compte des géométries avec une pente locale pouvant être assez importante (géométries rainurée par exemple). Toutefois, la nature du modèle ne permet pas de considérer des Reynolds importants. L'étude des bifurcations permet de retrouver des résultats expérimentaux décrits plus bas, tirés des travaux de A. Wierschem, Scholle et Aksel (2003), ainsi que la capacité qu'a la topographie à déstabiliser le film sous certaines conditions.

### 1.2.2.3 Transformation de Prandtl

Une manière élégante de prendre en compte la topographie dans nos équations est d'utiliser la transformation de Prandtl (Prandtl, 1938) (voir figure 1.14). Cette transformation est utilisée couramment dans les modèles type couches limites pour ne pas avoir à se préoccuper de la géométrie lors de l'intégration des équations à travers le film. Les changements de variable sont les suivants :

$$y_{Pr} = y - s \quad v_{Pr} = v + u \partial_x s \quad (1.8)$$

Si elle facilite le développement des modèles avec une géométrie au fond, cette transformation ne permet pas de s'affranchir de l'hypothèse de faible pente. Le développement détaillé ainsi que les raisons qui nous obligent à conserver cette hypothèse sont détaillées chapitre 3.

### 1.2.2.4 État de l'art, écoulements sur support à géométrie variable

Moins fournie que pour des écoulements sur fond plat (cylindrique ou plan), l'étude des films ruisselants sur support corrugué s'est étoffée ces dernières années. Les études peuvent se regrouper grossièrement entre travaux expérimentaux, simulations numériques directes et modèles asymptotiques. Chaque catégorie d'étude nous apporte des informations complémentaires. Le manque d'études est d'autant plus dommageable que les équipements industriels ont un design qui s'éloigne souvent des géométries planes, pour des raisons de



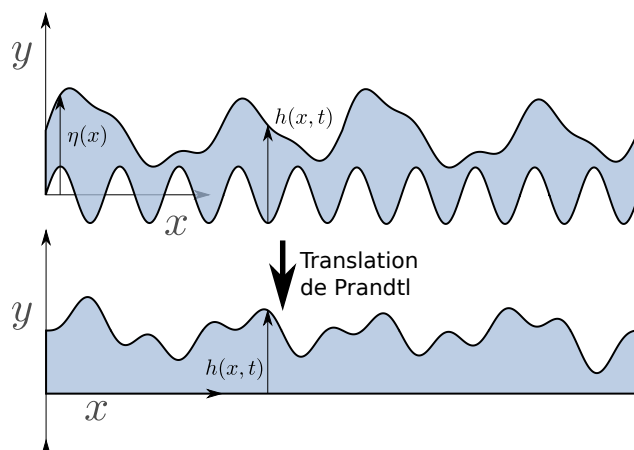


Figure 1.14 – Transformation de Prandtl (aussi appelé translation de Prandtl).

compacité, de mouillage du fluide ou d’efficacité global des échanges (Focke et Knibbe, 1986 ; Rocha, Bravo et Fair, 1993).

Parmi les premiers travaux expérimentaux, il est possible de citer l’étude de Bontozoglou (2000), bien que des travaux théoriques aient été conduits avant cela, pour des Reynolds faible (Wang, 1981 ; Pozrikidis, 1988 ; Shetty et Cerro, 1993), suivant des développements de type onde-longue ou intégrales. Ces travaux sont limités aux écoulements stationnaires, l’équivalent du film de Nusselt pour les géométries planes. En effet, la solution de base dite “solution de Nusselt” n’a pas d’équivalent analytique trivial pour des géométries plus complexes. Dans une étude de stabilité des films ruisselants sur une géométrie rainurée dans le sens transverse à l’écoulement, les valeurs du  $\mathbf{Re}_c$  semblent légèrement plus élevées que pour une géométrie plane (Bontozoglou, 2000), à inclinaison équivalente. De plus, la solution de base semble influencer la dynamique des ondes le long de l’écoulement, et peut imposer une longueur d’onde préférentielle pour des Reynolds modérés par un phénomène de résonance.

La présence d’une géométrie courbée accroît significativement le nombre de phénomènes hydrodynamiques observables, comme montré par Andreas Wierschem et Aksel (2004). L’étude porte sur une topographie sinusoidale dans le sens de l’écoulement avec des valeurs de pente raisonnables (la longueur d’onde  $\lambda \approx 300 \text{ mm}$  et l’amplitude  $A \approx 15 \text{ mm}$ ). Aux trains d’ondes saturés, ondes solitaires et appariements d’ondes se rajoutent ressauts hydrauliques (figure 1.15a), rouleaux de surface pour des inclinaisons de plaque faibles (figure 1.15b). Des ondes stationnaires apparaissent pour des inclinaisons plus éle-

vées dues à un phénomène de résonance entre le film et la topographie (figure 1.15c).

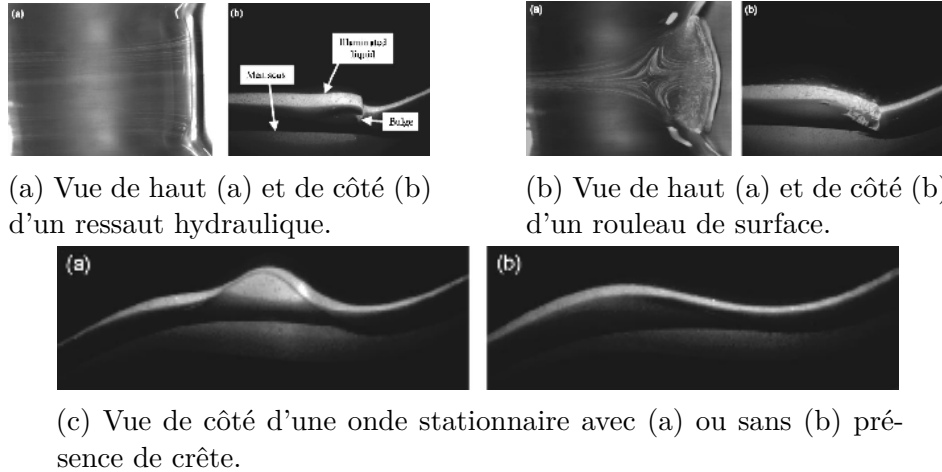


Figure 1.15 – Différents événements hydrodynamiques occurrents en présence d'une topographie sinusoïdale. Les images sont extraites des travaux de Andreas Wierschem et Aksel (2004)

Des travaux théoriques du même auteur (A. Wierschem et al., 2003) montrent que les corrugations peuvent avoir un effet stabilisateur sur le film (qui peut rester stable au-delà du Reynolds critique). Elles peuvent aussi le déstabiliser localement, là où un film sur support plat resterait stable, contrairement à ce que les travaux de Bontozoglou (2000) semblaient indiquer.

Un autre phénomène mis en avant par A. Wierschem et al. (2003) est la présence d'une recirculation au creux des corrugations, indépendamment du nombre de Reynolds (voir figure 1.16).

A. Wierschem et Aksel (2004) ont procédé à une étude de la stabilité d'un film ruisselant en développant un modèle aux perturbations en séparant les contributions moyennées et oscillantes (méthode inspirée des décompositions RANS), ce qui leur ont permis d'exprimer une valeur de  $Re_c$  locale.

$$Re_{cr} \approx \frac{5}{4} \left( \cot(\alpha - \Omega) + \frac{1}{Bo} k^2 F_0^5 \right) \Big|_{X_0} \quad (1.9)$$

Avec  $Bo$  le nombre de Bond (défini comme  $\frac{\Delta \rho g \bar{h}_N^2}{\sigma}$ ),  $F_0 = \left( \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \Omega)} \right)$ ,  $\alpha$  l'angle que fait le support avec l'horizontal,  $\alpha - \Omega$  l'inclinaison locale du support,  $k$  le nombre d'onde.

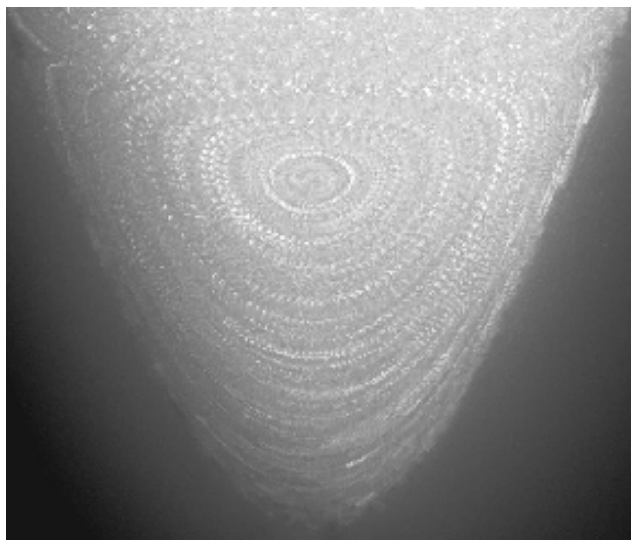


Figure 1.16 – Présence de recirculation au creux d’une corrugation, tiré des travaux de A. Wierschem, Scholle et Aksel (2003). Corrugation, longueur d’onde : 20 mm, amplitude : 9 mm, angle : 45°. Film d’épaisseur 5.3 mm.

Cette valeur dépasse le  $Re_c$  des films plats dans de nombreuses géométries de supports, les ondulations de la plaque jouant alors un effet stabilisant sur le film. Ces études ayant été faites sur les valeurs moyennées et non sur les fluctuations du film, ces conclusions ne valent que pour les instabilités longues vis-à-vis de la hauteur du film. Ainsi les expériences montrent que des déformations d’interface de petite longueur d’onde peuvent être provoquées par les corrugations. Confirmant les observations expérimentales, la géométrie de plaque peut dans un même temps limiter les perturbations de grande longueur d’onde et favoriser les instabilités de petite longueur d’onde.

Yu Ya Trifonov (2007) a complété sa précédente étude par une analyse de stabilité de son modèle via le théorème de Floquet. Celui-ci a démontré que pour certains paramètres géométriques et pour des nombre de Reynolds modérés, le support joue un rôle stabilisateur menant à une résorption des perturbations. A contrario, sous certaines conditions, il a démontré la non-existence d’une solution où la surface aurait la même forme que le fond corrugué. Dans ce cas, il n’existe pas de solution stable où le film serait d’épaisseur constante. A. Wierschem, Bontozoglou, Heining, Uecker et Aksel (2008) utilisent le ratio entre l’amplitude des corrugations et l’épaisseur du film comme base d’un développement de Taylor. Comme il n’y a pas d’hypothèse sur l’épaisseur du film vs la longueur caractéristique des instabilités observées, il est alors possible de

travailler sur des films fins comme épais, à condition de respecter  $a/h \ll 1$ , avec  $a$  l'amplitude des corrugation et  $h$  l'épaisseur moyenne du film. En exprimant l'hydrodynamique grâce à une fonction de courant et en réécrivant le résultat comme une équation aux perturbations, une équation de type Orr-Sommerfield est obtenue, décrivant l'évolution de perturbations infinitésimales dans un écoulement parallèle visqueux.

Un schéma aux différences finies centrées permet alors d'obtenir des résultats numériques. En parallèle, des hypothèses de simplification sur le profil de vitesse permettent d'obtenir une solution analytique de l'équation d'Orr-Sommerfield. Dans les deux cas, on observe un phénomène de résonance caractéristique, avec une amplitude relative des perturbations de la surface libre atteignant un maximum pour un  $Re$  donné, celui-ci dépendant à la fois d'un paramètre nommé  $P_{hc} = \cot \alpha + Bo^{-1}$  prenant en compte les forces gravitaires et capillaires et l'épaisseur du film. Häcker et Uecker (2009) ont quant à eux travaillé sur un modèle de type WRIBI et sur des coordonnées curvilignes. Leur travail a mis en avant la présence d'un  $Re_c$  supérieur aux écoulements sur support plat. Au lieu d'étudier le modèle aux perturbations par le théorème de Floquet, une approche numérique a été utilisée : les perturbations ont été introduites dans le système numérique afin d'observer la croissance ou la décroissance des instabilités. Pour un système fixé (propriété du fluide et géométrie de plaque), une étude paramétrique du  $Re$  permet d'obtenir la valeur du  $Re_c$  pour différentes amplitudes de topographie.

Heining, Bontozoglou, Aksel et Wierschem (2009) ont étudié plus spécifiquement les effets de résonance entre la surface libre et la géométrie du support. L'étude est basée sur les équations de Navier-Stokes résolues par un schéma numérique de type éléments finis. Une approche analytique, en utilisant la méthode de la couche limite pour simplifier les équations de Navier-Stokes est également utilisée. En ordonnant les termes selon leur importance via un développement asymptotique d'ordre 1 et 2, ils ont déterminé les solutions stationnaires correspondant aux ondes propagatives. Leur travail met en évidence un système résonnant bistable dès lors que l'amplitude des corrugations est suffisante lorsque les effets de non-linéarités deviennent importants (pour un  $Re$  suffisamment élevé). Tseluiko et al. (2013) ont utilisé un modèle de type "ondes longues" d'ordre 2 et réalisé une étude du domaine et de la nature des instabilités des solutions stationnaires périodiques par méthode de

Floquet. Pour des longueurs d'ondes assez faibles du fond, les corrugations ont un effet stabilisateur, à condition que leur amplitude soit au-delà d'une valeur seuil dépendant des caractéristiques de l'écoulement, ce qui est cohérent avec les travaux précédents (A. Wierschem et al., 2003). Toutefois, pour des longueurs d'onde du support suffisamment longues, on observe l'effet inverse, c'est-à-dire une déstabilisation du film lorsque l'amplitude du fond dépasse une valeur critique, ce qui rejoint les conclusions de Yu Ya Trifonov (2007). Le modèle utilisé (basé sur un développement des équations de Benney) n'est pas capable de représenter les écoulements de  $\mathbf{Re}$  importants. Il est nécessaire d'appliquer les mêmes démarches sur des modèles plus robustes.

Un travail plus formel a été réalisé par Boutounet et Chupin (2008), qui ont développé une série de modèles type Saint-Venant en travaillant sur des coordonnées curvilignes, en limitant au maximum les hypothèses sur la physique du système. L'étude présente un développement formel, et valide mathématiquement une famille complète de développements de modèles basés sur la méthode intégrale.

Dans les travaux de P.-K. Nguyen et Bontozoglou (2011), des simulations aux éléments finis sur les équations complètes de Navier-Stokes en 2D ont été réalisées. L'objectif est de fournir des résultats numériques d'ondes propagatives stationnaires pour des forces inertielles et capillaires variées. L'étude distingue deux régimes, séparés par une valeur du Reynolds particulière,  $\mathbf{Re}_{res}$ , où un phénomène de résonance apparaît entre la topographie et les vagues gravitaires/capillaires. Le nombre de Bond inverse ( $\mathbf{Bo}^{-1}$ ) indique si le régime est gravitaire ou capillaire. Comme attendu, le régime capillaire présente une faible déformation de la surface libre à faible  $\mathbf{Re}$ , une forte amplitude lors de la résonance et une forte déformation de l'interface aux fortes valeurs de  $\mathbf{Re}$ . Le régime gravitaire montre une faible déformation de l'interface et une résonance plus faible : la force de gravité "écrase" les vagues et réduit l'interaction du fluide avec la topographie là où la capillarité tend à en renforcer le couplage. Plus la pente de la topographie est abrupte, plus la séparation entre régime capillaire et gravitaire se fait rapidement.

Y. Trifonov (1999) a quant à lui travaillé en parallèle sur les équations de Navier-Stokes complètes avec une résolution numérique via des méthodes pseudo-spectrales (en utilisant des polynômes de Chebychev). Il a utilisé une approche intégrale et considéré un profil de vitesse en demi-poiseuille comme

équation de fermeture. Dans les deux cas, les équations sont formulées en coordonnées cartésiennes et non curvilignes, limitant les utilisations des modèles simplifiés aux corrugations de faible pente.

Roberts et Li (1999) ont également travaillé en coordonnées curvilignes en mettant en place un repère mobile de Darboux. La matrice de changement de variables associée permet d'exprimer les équations de Navier-Stokes dans le nouveau repère. Les modèles sont tirés de l'approche dite des "variétés centrales".

### 1.3 Phénomènes de transfert

Les unités industrielles (évaporateurs / condenseurs, unités de sorption, échangeurs de chaleur) utilisant les films ruisselants ont pour objectif d'accroître au maximum un transfert (de masse ou de chaleur) à travers le fluide. Il semble important de comprendre ces phénomènes de transfert et leurs interactions avec l'hydrodynamique. Pourtant, la majorité des études industrielles sur les transferts à travers les films ruisselants font une hypothèse drastique : l'hydrodynamique des films est négligé ou prise en compte par des lois de comportements macroscopiques déterminées empiriquement (Killion et Garimella, 2001).

#### 1.3.1 En l'absence d'ondes

La plupart des modèles utilisés dans un cadre industriel sont proches des équations de Nusselt : le film est considéré plat et les ondes absentes. Il existe des modèles considérant un écoulement de fluide laminaire avec un profil type demi-Poiseuille et d'autres un écoulement turbulent avec un profil type sous-couche limite parabolique faisant place à un profil de vitesse uniforme lorsque  $h > h_c$ ,  $h_c$  étant l'épaisseur de couche limite, valables pour des nombres de Reynolds plus élevés ( $Re > 1600$ ).

Les modèles laminaires diffèrent essentiellement par les différentes conditions limites utilisées : support d'écoulement isotherme / imperméable, présence d'une résistance au transfert à l'interface ou température fixe, variation des propriétés thermiques du fluide avec la température etc. Le plus commun reste le cas de l'évaporateur : dans ce cas, la résistance au transfert est située

uniquement au sein du fluide. C'est également le cas pour le transfert de masse lorsque la phase gazeuse est un gaz pur.

Les modèles turbulents quand à eux ne prennent pas en compte directement la complexité de l'hydrodynamique liée à un tel régime d'écoulement. La surface du film est supposée lisse alors que les observations expérimentales (Miller, 1998) montrent la présence d'un nombre important d'ondes en surface du film. L'influence des mouvements tourbillonnaires complexes du fluide est pris en compte au travers de lois de comportement expérimentales liant débit local et propriétés du fluide. Pour plus de détail, Killion et Garimella (2001) présente une revue des modèles prenant comme hypothèse un film dont la surface serait plane, autant en laminaire (section 4.1) qu'en turbulent (section 4.3).

Toutefois, de nombreux équipements fonctionnent dans un régime d'écoulement pour lequel des ondes propagatives peuvent se développer. En particulier, il n'est pas possible d'obtenir un film ruisselant lisse lorsque le support d'écoulement est vertical (P.L. Kapitza et Kapitza, 1949 ; Benjamin, 1961). Ce résultat est d'autant plus important que l'influence de ces ondes sur les transferts thermiques ne sont pas négligeables (Gonda et al., 2014 ; Serifi, Malamataris et Bontozoglou, 2004).

### 1.3.2 Prise en compte des instabilités hydrodynamiques

L'interaction entre hydrodynamique et transfert thermique ou de masse est à double sens :

- l'hydrodynamique influe sur le transport de chaleur à travers le film.
- Le gradient de température influe sur l'écoulement du film. Dans le cas des systèmes à film, ces écarts sont raisonnables ( $< 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

#### 1.3.2.1 Influence de l'hydrodynamique sur le transport de chaleur

Parmi les effets suspectés de participer à l'intensification du transfert thermique, il y a en premier lieu l'affinement du film avec l'apparition des instabilités. En réduisant l'épaisseur du film, la résistance au transfert par simple diffusion diminue.

La recirculation de fluide au sein de la crête de l'onde décrite plus haut participe également à un transfert plus efficace, en amenant le fluide chaud à proximité de la plaque plus rapidement à l'interface.

Toutefois ces explications se fondent sur l'analyse d'une onde solitaire établie. Elles ne prennent pas en compte la complexité d'un film ruisselant sur une plaque où les ondes peuvent s'apparier et se déstabiliser et où le régime hydrodynamique n'est établi qu'après une certaine distance.

Serifi et al. (2004) ont étudié les effets des transferts de chaleur à travers un film ruisselant en résolvant les équations de Navier-Stokes couplées à celle de la chaleur par un schéma de type éléments finis. Le support d'écoulement est plat et le débit d'entrée est modulé à une fréquence fixe. Le domaine de résolution est légèrement trop court pour voir le train d'ondes saturées pour les fréquences d'excitation les plus faibles. Une comparaison a été faite entre le flux de chaleur à travers un film de Nusselt et un film développant un train de vagues solitaires. L'intensification du transfert ( $\frac{q}{q_0}$ , avec  $q$  le transfert à travers le film et  $q_0$  le transfert à travers un film de Nusselt) oscille spatialement autour d'une valeur légèrement supérieure à 1 (avec un maximum à  $\approx 1.18$  pour  $Pe \approx 50$ ), avec une amélioration des transferts due aux effets convectifs pour un certain nombre de Peclet.

Un grand nombre d'études récentes concernent l'étude par simulations numériques directes des systèmes industriels d'absorption ou de transfert de chaleur. Toutefois, elles sont limitées à une portion réduite des supports : une unique corrugation (ou une unique onde propagative pour les écoulements sur géométrie plane) avec des conditions de bord périodiques. Il manque les outils pour effectuer des simulations à l'échelle de la plaque complète et obtenir des informations sur les phénomènes thermiques durant l'établissement du régime (Haroun, Legendre et Raynal, 2010 ; Haroun, Raynal et Legendre, 2012 ; Y.Y. Y Trifonov, 2014 ; P.-k. Nguyen et al., 2012).

### 1.3.2.2 Influence du gradient de température sur l'hydrodynamique : l'effet Marangoni

Lorsque le film n'est pas à température constante, un certain nombre de propriétés du fluide vont varier localement. Ainsi, la tension de surface, la masse volumique, la conductivité, la viscosité vont varier dans l'espace et le temps.



Ces variations vont elles-même impacter le profil de vitesse de l'écoulement. Il existe donc un couplage fort entre le transfert de chaleur et l'hydrodynamique.

Dans la plupart des études, seule la tension de surface est considérée comme fonction de la température. Les autres grandeurs sont estimées invariantes afin de faciliter les calculs.

La variation de la tension de surface sous l'effet d'un gradient de température ou de concentration de tensio-actifs amène un nouveau type d'instabilité, appelé instabilité Marangoni. Le fluide aura tendance à se déplacer vers les zones ayant la tension de surface la plus élevée. Celle-ci diminuant avec l'augmentation de la température (pour la plupart des fluides), le fluide aura tendance à se déplacer vers les zones froides. Dans le cas d'un support chaud et d'une atmosphère froide, plus la couche de fluide est importante, plus la surface sera froide.

Une zone froide attirera le fluide, ce qui en augmentera son épaisseur et diminuera d'autant plus sa température. C'est une rétroaction positive qui vient s'ajouter aux instabilités inertielles et qui creuse d'autant plus les zones de faible épaisseur du film. Cela peut mener à la formation de zone d'assèchement là où le fluide chaud se sera déplacé vers les zones froides. L'angle de contact entre fluide et support d'écoulement évoluant avec la température, les problèmes de démouillages empirent en présence d'un gradient de température.

Bien que de nombreuses propriétés des fluides soient fonctions de la température (dans différents ordres de grandeurs), seule la variation de tension de surface est usuellement prise en compte. Les travaux de Pascal, Gonputh et D'Alessio, 2013 ; S J D D'Alessio et al., 2014 considèrent sur la variation de toutes les propriétés du fluide en fonction de la température et pas seulement la tension de surface, sur un support plan. Une analyse de stabilité a été conduite dans le but d'extraire un seuil prenant en compte d'une variation linéaire de ces propriétés.

### 1.3.3 Couplage entre topographie et transfert de chaleur

S. J. D. D'Alessio et al. (2010) ont travaillé sur une variante du modèle de type couche limite du second ordre se basant sur le même modèle couplé à l'équation de la chaleur, dans le cas d'un support corrugué. C'est la première étude

prenant en compte un film non-isotherme en écoulement sur une géométrie complexe. Tout comme une hypothèse de fermeture est faite sur le champ de vitesse, approché par une forme polynomiale, la température est prise en compte sous la forme d'un profil linéaire sur l'épaisseur du fluide. Une piste d'amélioration est la prise en compte d'un profil de température plus complexe. Seul la tension de surface est fonction de la température.

Ogden, D'Alessio et Pascal (2011) ont amélioré le modèle de S. J. D. D'Alessio et al. (2010) afin de prendre en compte une porosité du support, et en ont fait une analyse de stabilité. Le profil de température est toujours considéré linéaire entre le fond et l'interface. Le modèle a été comparé avec une résolution des équations de Navier-Stokes par DNS.

Luo et Pozrikidis, 2007 ont quant à eux exprimé la géométrie du support via une série de Fourier, rendant possible l'étude de topographies complexes en 3D. Ils ont également étudié l'effet de tensioactifs sur l'écoulement du fluide.

## Conclusion

Les précédents travaux nous éclairent un peu plus sur l'état de la connaissance scientifique concernant les interactions entre films ruisselants et les transferts thermiques. Il reste toutefois un certain nombre d'axes de recherche sur lesquels nous avons décidé de nous concentrer.

Notre problème physique concerne un film de faible épaisseur (de l'ordre du millimètre ou moins) qui ruisselle sur des plaques de plusieurs dizaines de centimètres. De plus, comme les instabilités se développent en onde longue, il est nécessaire de simuler de grandes échelles de temps autant que d'espace, rendant la résolution longue et coûteuse.

Les études numériques actuelles utilisent souvent des géométries périodiques afin de limiter les coûts de calcul des simulations numériques directes. Une étude statistique des régimes ondulatoires est hors de portée de ces méthodes. Une étude plus exhaustive quant aux géométries de plaques de type étude de sensibilité ou optimisation nécessiterait la mise en place d'autres types de modèles, ce qui permettrait de concevoir des équipements plus efficaces.

L'objectif de l'étude est d'expliquer l'intensification des transferts observés à l'échelle d'une plaque d'un échangeur, et d'apporter des informations sur

l'influence de la forme du support d'écoulement sur cette intensification. En effet, travailler sur la géométrie de la plaque pourrait mener à un contrôle passif de l'intensification des transferts.

Pour cela, un effort conséquent a été fait quant à la mise en place d'un modèle permettant de prendre en compte à la fois l'hydrodynamique des films ruisselants et les phénomènes de transferts qui ont lieu en son sein. En utilisant les développements de type résidus pondérés, nous visons la mise en place d'un modèle simplifié basé sur les équations d'écoulements à surface libre et les équations de la chaleur. En évitant la résolution des équations complètes nous devrions pouvoir simuler en temps long des films ruisselants sur une plaque de géométrie complexe. Il sera ainsi possible de répondre à une série de questions sur les phénomènes de transfert au sein de ces films.

La suite de l'étude suivra alors le déroulement suivant. Les outils numériques permettant la résolution des modèles d'écoulement de films ruisselants seront d'abord présentés : un logiciel nommé Triflow a été développé dans ce but, logiciel intégrant des méthodes numériques précises et performantes. L'accent sera ensuite mis sur le développement d'un modèle couplé hydrodynamique / thermique en une dimension ainsi que sa validation vis-à-vis des simulations plus complexes (et plus coûteuses). Une fois munis de ces différents outils, il nous sera possible d'explorer les conditions propices à l'intensification du transfert thermique, sur un support plat en premier lieu puis sur un support de forme variable. Un dernier chapitre présentera les différents travaux en court et les perspectives de cette étude.

# Chapitre 2

## Résolution numérique des équations d'ondes

“Informatique : Alliance d’une science inexacte et d’une activité humaine faillible.”

— Luc Fayard

---

2.1	La résolution des équations aux dérivées partielles . . . .	44
2.1.1	Discrétisation spatiale . . . . .	45
2.1.2	Approximation du terme temporel . . . . .	47
2.1.3	Problèmes convectifs raides . . . . .	53
2.2	Écriture d’un solveur dédié au prototypage . . . . .	57
2.2.1	Accélération du code de calcul . . . . .	60
2.2.2	Calcul de la matrice jacobienne . . . . .	62
2.2.3	Historique de développement . . . . .	66
2.2.4	Structure du logiciel . . . . .	67
2.2.5	Gestion des problèmes d’advection raides . . . .	73
2.2.6	Validation du solveur . . . . .	74
2.2.7	Triflow aujourd’hui . . . . .	76
2.2.8	L’avenir de Triflow . . . . .	81
2.3	Problèmes numériques propres aux équations d’ondes . .	82
2.3.1	Initialisation du film précurseur . . . . .	82
2.3.2	Condition limite d’écoulement libre . . . . .	83

---

Les efforts de modélisation du monde sont fortement liés à l'évolution des techniques mathématiques puis informatiques. Dans le domaine de la physique, les travaux de Newton et Leibniz sur le calcul différentiel et intégral et sur la notion d'infiniment petit ont changé en profondeur la façon que nous avons de représenter le réel. Ce serait une erreur de négliger l'impact qu'ont les outils et les techniques sur le développement des théories scientifiques. La technique n'est pas au service de la science. Ces deux notions sont intriquées. De nouvelles techniques apparaissent face à de nouveaux défis scientifiques et de nouvelles techniques permettent une compréhension affinée du monde qui nous entoure et le développement de nouvelles théories.

Ce chapitre a pour objectif de fournir au lecteur les clés de compréhension des outils utilisés dans le cadre de notre étude. Un effort conséquent a été fourni dans le développement d'un nouvel outil de résolution des équations différentielles partielles qui sont au cœur de nos problématiques. Le chapitre est structuré autour de deux axes principaux : dans un premier temps les notions sous-jacente à la résolution de tels systèmes seront rappelées afin de donner un cadre théorique au lecteur. Dans un second temps, le logiciel Triflow, développé dans le cadre des travaux de thèse, sera présenté. L'accent sera mis sur sa structure interne et sur sa validation face à des problèmes "types" considérés comme particulièrement difficiles à résoudre. Une fois assurés de la robustesse de cet outil, nous pourrons nous engager dans les efforts de modélisation de notre système physique.

## 2.1 La résolution des équations aux dérivées partielles

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles que nous avons à résoudre, tels les équations de Saint Venant ou de Benney (cf. section 1.2.1.4, chapitre 1) s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U, \partial_x U, \partial_{xx} U, \dots) \quad (2.1)$$

avec  $U$  le vecteur des inconnus (ou variables dépendantes) et  $F(U, \dots)$  un vecteur fonction des dérivées en espace de  $U$ . La résolution de tels systèmes est cruciale dans de nombreux domaines, de la physique quantique à l'économie en passant bien entendu par la mécanique des fluides. Les systèmes les plus simples peuvent se résoudre de façon analytique, mais l'utilisation

d'outils numériques est nécessaire pour la manipulation de cas plus complexes. La résolution d'équations différentielles partielles par calcul numérique s'est développé avec l'augmentation de la puissance des unités de calcul et de la diminution de leurs coûts.

Nous avons décidé d'utiliser la méthode des lignes (Schiesser, 2012). Celle-ci consiste en un traitement en deux temps :

1. La discrétisation des dérivées spatiales afin d'obtenir un système dynamique de la forme

$$\partial_t U_i = F(U_0, U_1, \dots, U_i, \dots, U_n) \quad (2.2)$$

2. L'utilisation d'un algorithme de résolution d'équations différentielles ordinaires.

Cela permet d'avoir accès aux nombreux algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaire (Approximation d'Euler explicite ou implicite, Crank-Nickolson, Runge-Kutta, BDF, Rosenbrock-Wanner...). En contrepartie, il sera plus difficile d'utiliser des stratégies de discrétisation complexes où la discrétisation spatiale est différente d'un pas de temps à l'autre.

Remarque :

Afin d'alléger les notations, nous considérerons que les formes discrétisées des variables et des fonctions pourront s'écrire sous la forme

$$U(t = n \Delta t, x = i \Delta x) = U_i^{(n)}$$

### 2.1.1 Discrétisation spatiale

Il existe de nombreuses méthodes permettant de discrétiser les dérivées spatiales de nos équations. Parmi les plus connues, la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis, les méthodes pseudo-spectrales et les différentes méthodes de calcul des dérivées par interpolation.

Ces méthodes présentent chacune des avantages et des inconvénients. En particulier, une des premières approches à avoir été mise en place est la méthode des différences finies. Fondée sur les développements limités, elle est

facile d'accès. Elle montre toutefois vite ses limites pour des résolutions de systèmes à deux dimensions et plus, en particulier pour des géométries complexes. En effet, elle nécessite un maillage en "grille" régulière et une géométrie simple (rectangle en 2D, pavé en 3D). Les travaux de Fornberg (1988) nous offrent la possibilité d'un maillage irrégulier, mais toujours sur une géométrie simple.

Des méthodes plus sophistiquées ont vu le jour : les volumes finis qui se fondent sur la conservation de flux des grandeurs entre les volumes du maillage. C'est une méthode qui est conservative par nature et naturellement adaptée aux différentes lois de conservation. De ce fait, elle est particulièrement prisée par les physiciens. Elle emploie la forme dite forte des équations à résoudre, au contraire des éléments finis qui se fondent sur la forme variationnelle des équations à résoudre. Dans les faits, l'équation (par exemple l'équation de la chaleur) est multipliée par une fonction de pondération et intégrée sur le domaine. Par intégration par partie, il est possible à la fois d'abaisser l'ordre du problème à résoudre et de faire apparaître naturellement les conditions de bords dans l'équation. Ces trois méthodes (différences finies, volumes finis et éléments finis) représentent une approximation locale des dérivées spatiales. Le système d'équation obtenu montre que les inconnues discrètes dépendent essentiellement de leurs voisins. C'est pourquoi ces méthodes mènent usuellement à des systèmes matriciels creux.

Ces trois méthodes et leurs dérivées peuvent s'opposer aux méthodes d'approximation globales comme les méthodes pseudo spectrales. Dans ce cas, on passe par une projection des inconnues sur une famille de fonctions de base, comme des polynômes trigonométriques (pour des systèmes périodiques) ou des polynômes de Chebychev. Dans ce cas, la convergence de l'approximation est bien plus rapide que pour les méthodes locales (la convergence est exponentielle), aux dépens de la densité du système d'équation.

Les ondes étant transportées dans le sens de l'écoulement il sera nécessaire d'avoir un maillage resserré dans tout le domaine. On perd dans ce cas une partie de l'avantage fourni par les méthodes pseudo-spectrales. Nous avons donc préféré une discrétisation par différence finie.

Pour la discrétisation des modèles 2D avec une composante en  $y$  (coordonnée normale au film), le choix est moins évident. Il est possible de considérer des schémas hybrides avec une discrétisation en différences finies dans une di-

mension et pseudo-spectrale dans l'autre, ou travailler uniquement en pseudo-spectral. Par souci de simplicité, nous avons préféré éviter un schéma hybride. De cette façon, les matrices obtenues après discrétisation spatiale seront fortement creuses, et il sera possible de tirer parti des algorithmes modernes de factorisation tel SuperLU (Demmel, Eisenstat, Gilbert, Li et Liu, 1999) ou UMFPack (Davis, 2004).

## 2.1.2 Approximation du terme temporel

### 2.1.2.1 Schéma d'Euler

Reprenons l'équation d'un système dynamique autonome dont les dérivées en espaces ont été approchées par une méthode adaptée :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = F(U_0, U_1, \dots, U_i, \dots, U_n) \quad (2.3)$$

Il faut à présent discrétiser le terme temporel. La méthode la plus simple est la méthode d'Euler. Considérons le développement limité de  $U(t)$  au point  $t + \Delta t$ . On obtient alors

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta t \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = F(U(t)) \quad (2.5)$$

En opérant le même développement pour mais au point  $t + \Delta t$ , on obtient

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \frac{U(t) - U(t - \Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = F(U(t + \Delta t)) \quad (2.6)$$

Ce qui donne, en ajoutant  $\Delta t$  à l'ensemble :

$$\frac{\partial U(t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = F(U(t + \Delta t)) \quad (2.7)$$

Ces deux schémas (Euler explicite et Euler implicite) présentent chacun leurs avantages et leurs inconvénients. Le schéma explicite est extrêmement simple à mettre en place : on trouve immédiatement

$$U^{(n+1)} = \Delta t F^{(n)} + U^{(n)} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.8)$$



Aucune opération matricielle n'est nécessaires, juste des additions et des multiplications termes à termes. De fait, cette méthode est très simple à paralléliser. Mais les schémas explicites sont dépendants d'une valeur de  $\Delta t_{\text{critique}}$  en dessous duquel le schéma est instable.

Le schéma Euler implicite est lui plus difficile à mettre en place mais est inconditionnellement stable pour les problèmes linéaires.

$$U^{(n+1)} = \Delta t F^{(n+1)} + U^{(n)} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.9)$$

Nous n'avons pas accès à  $F^{(n+1)}$ , mais il est possible de linéariser cette valeur, et d'écrire

$$F^{(n+1)} = F^{(n)} + J^{(n)} \left( U^{(n+1)} - U^{(n)} \right) \quad (2.10)$$

avec

$$J^{(n)} = \frac{\partial(F_0, \dots, F_n)}{\partial(U_0, \dots, U_n)} \quad (2.11)$$

la matrice des dérivées partielles du premier ordre de  $F^n$ .

De cette façon, il est possible de calculer  $F^{(n+1)}$  en fonction des grandeurs connues au temps  $t^{(n)}$ . Le schéma Euler implicite s'écrit alors

$$U^{(n+1)} = \Delta t \left( F^{(n)} + J^{(n)} \left( U^{(n+1)} - U^{(n)} \right) \right) + U^{(n)} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.12)$$

$$\left( \mathbf{I} - \Delta t J^{(n)} \right) U^{(n+1)} = \Delta t \left( F^{(n)} - J^{(n)} U^{(n)} \right) + U^{(n)} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.13)$$

Nous avons donc un système linéaire du type  $A x = B$  qu'il faudra résoudre de façon directe ou itérative. Le schéma Euler implicite nécessite donc

- des opérations algébriques supplémentaires
- le calcul de la matrice jacobienne associée
- la résolution d'un système linéaire

Ces deux derniers points peuvent être des opérations numériques très lourdes.

Il est également possible de généraliser ces méthodes en écrivant

$$\frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} = \theta F^{(n+1)} + (1 - \theta)F^{(n)} \quad (2.14)$$

Et l'on retrouve le schéma explicite pour  $\theta = 0$ , le schéma implicite pour  $\theta = 1$ , ainsi que le schéma dit de Crank Nickolson pour  $\theta = \frac{1}{2}$ . Ce dernier est particulièrement populaire en mécanique des fluides car il est d'un ordre de précision supérieur aux deux premiers.

### 2.1.2.2 Méthodes de Runge-Kutta et Rosenbrock-Wanner

Il est possible de mettre en place des schémas plus complexes en calculant des points intermédiaires. C'est le cas des méthodes Runge-Kutta. De même que pour les méthodes d'Euler, il en existe des variantes implicites et explicites. Ce sont des méthodes itératives qui fonctionnent sur un principe de prédiction-correction. Une première solution est calculée et est utilisée pour en calculer une seconde, plus précise, etc. La variante la plus utilisée est la méthode Runge-Kutta 4(5) qui est connue pour donner de bons résultats tout en étant une méthode explicite. À noter qu'une méthode Runge-Kutta explicite d'ordre 1 est équivalente à un schéma Euler explicite.

Mais les méthodes Runge-Kutta peuvent être également implicites afin de résoudre des problèmes raides. Le problème étant qu'il est alors nécessaire de résoudre autant de systèmes linéaires qu'il y a d'étapes dans la méthode, ce qui rend ces résolutions très coûteuses. Il existe toutefois des variantes implicites beaucoup plus économes : les schémas de Rosenbrock-Wanner. Dans ce cas, les coefficients sont choisis de façon à ce que les parties gauches des systèmes  $Ax = B$  soient identiques. Ainsi, il n'est nécessaire de ne faire qu'une seule fois le calcul de la matrice Jacobienne associée et une seule factorisation LU de la matrice  $A$ . Il est alors possible d'accroître la précision de la résolution avec un surcoût minime.

#### ⊕ Plus en détail

— Développées dans les années 1900, les méthodes Runge-Kutta existent en de nombreuses variantes. Elles peuvent être explicites autant qu'im-

plicités et s'écrivent sous la forme :

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (2.15)$$

Avec

$$k_i = F(t_n + c_i, y_n + \Delta t \sum_{j=1}^s A_{ij} k_j) \quad i = 1, \dots, s \quad (2.16)$$

Avec  $s$  l'ordre de la méthode. On peut définir une méthode Runge-Kutta par sa matrice de Butcher.

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_i & a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_j & \dots & b_{1s} \end{array} = \frac{c}{b} \left| \begin{array}{c} A \\ b \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Avec  $A$  la matrice de Runge-Kutta,  $b$  et  $c$  respectivement les poids et les nœuds de la méthode. Les méthodes explicites correspondent à une matrice  $A$  triangulaire inférieure, et les termes  $k_{i+1}$  peuvent se calculer à partir du terme précédent. Pour les méthodes implicites, la matrice de Runge-Kutta est quelconque et il est alors nécessaire de résoudre l'ensemble système couplé de taille  $ms$ ,  $m$  étant la taille du vecteur des solutions  $U$ . Pour des systèmes de taille conséquente (tels que les systèmes provenant de la discrétisation de systèmes d'équations différentielles partielles), la résolution de telles matrices demande un temps de calcul considérable. Il existe toutefois différentes sous-variantes des méthodes Runge Kutta implicites (IRK) permettant une résolution beaucoup moins coûteuse sans sacrifier les avantages d'un schéma implicite, parmi lesquels les méthodes SDIRK / ESDIRK et les méthodes Rosenbrock-Wanner (méthodes ROW).

Il est possible de décrire les schémas d'Euler explicite et implicite en termes de matrices de Butcher :

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad (2.18)$$

explicite implicite (2.19)

Les méthodes Runge-Kutta implicites sont coûteuses comparées aux méthodes linéaires “multi-step” implicites. Toutefois ces dernières ne peuvent pas dépasser l’ordre 2 en restant A-stable<sup>a</sup>. Les méthodes IRK peuvent rester A-stable pour n’importe quel ordre.

De plus, en couplant un schéma RK d’ordre  $p$  à un schéma d’ordre  $p - 1$  il est possible de calculer avec un surcoût minime une estimation de l’erreur du schéma.

$$U^{*(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i^* k_i \qquad (2.20)$$

Les termes  $k_i$  sont les mêmes que pour la méthode d’ordre supérieur, le surcoût correspond uniquement à des opérations d’additions et de multiplications terme à terme. Il est alors possible d’estimer l’erreur par :

$$e^{(n+1)} = U^{(n+1)} - U^{*(n+1)} \qquad (2.21)$$

Cette erreur peut être utilisée dans le calcul d’un pas de temps adaptatif (voir section 2.1.2.3).

---

<sup>a</sup>Une méthode A-stable présente une stabilité absolue, et sera particulièrement adaptée à la résolution de problèmes raides. Les méthodes ERK ne peuvent pas être A-stable et ne sont pas adaptées à ce genre de problème.

Les méthodes Rosenbrock-Wanner sont une sous-variante des méthodes Runge-Kutta implicites diagonales (DIRK). La forme de leur matrice de Butcher est particulière, et comme l’indique le nom de ces méthodes les termes diagonaux de ces variantes sont égaux. De cette façon, le système à résoudre peut s’écrire sous la forme :

$$k_i - \Delta t \gamma J k_i = U^{(n)} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} F(k_j) \quad i = 1, \dots, s$$

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \sum_{i=1}^s b_i F(k_i)$$

Avec les termes  $b_i$ ,  $A_{i,j}$  les coefficients de la matrice de Butcher et  $\gamma$  le terme diagonal de la matrice  $A$ . Dans ce cas, chaque étape nécessite la résolution d'un système de type  $M k_i = B_i$ , la matrice  $M = I - \Delta t \gamma J$  étant identique pour l'ensemble des étapes. Ces méthodes ne nécessitent qu'une seule évaluation et factorisation de la matrice Jacobienne par pas de temps, et autant de résolutions de systèmes linéaires que d'étapes de la méthode. Les méthodes et les coefficients utilisées pour la résolution de nos systèmes sont celles présentées dans les travaux de Rang (2015).

### 2.1.2.3 Contrôle du pas de temps

Il est important d'assurer l'adéquation du pas de temps avec la physique du système. Un pas de temps trop grand mène à des problèmes d'instabilités sans compter une précision médiocre des résultats. Un pas de temps trop petit et le temps de résolution devient rédhibitoire. Un premier indice passe par la condition de Courant–Friedrichs–Lewy. Cette condition indique que la vitesse numérique devra être supérieure à la vitesse physique du système : si l'information physique se déplace d'une distance dépassant une maille durant un pas de temps, l'erreur numérique grandit et/ou le schéma devient instable.

Une autre façon de s'assurer de la cohérence du pas de temps est de mettre en place une stratégie de pas de temps adaptatif fondée sur un calcul d'erreur. Les schémas Runge–Kutta permettent de calculer très simplement une approximation de l'erreur commise. Pour les autres schémas, il va être nécessaire de mettre en place un estimateur de l'erreur.

La stratégie choisie a été de calculer  $U_k(t + k\Delta t)$  en une étape et  $U(t + k\Delta t)$  en  $k$  étapes. La différence entre ces deux résultats nous donne accès à une indication de l'erreur. Le surcoût correspond au calcul de  $U_k(t + k\Delta t)$ .

Il est possible d'évaluer un pas de temps optimal à partir de cette erreur, voir de recommencer l'étape si elle dépasse une certaine tolérance.

## 2.1.3 Problèmes convectifs raides

Les problèmes convectifs raides sont difficiles à résoudre numériquement, même s'ils sont communs dans le domaine de la mécanique des fluides et de la thermique. Il est donc nécessaire de se munir d'outils permettant leur résolution.



## Remarque

Les différentes illustrations correspondent à la résolution d'un problème de type diffusion / advection.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.22)$$

Sauf si spécifié autrement dans les illustrations,  $k = 0$  et  $c = 1$  (le problème est alors purement convectif).

La condition initiale est une fonction discontinue définie comme

$$\begin{cases} u = 1 & \text{pour } 0.3 < x < 0.4 \\ u = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.23)$$

La résolution a une durée de  $t_f = 1.2$ , et le domaine est périodique de longueur  $L = 1$ . La solution est donc la fonction

$$\begin{cases} u_f = 1 & \text{pour } 0.5 < x < 0.6 \\ u_f = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.24)$$

La présence de termes diffusifs rend les résolutions plus aisées en “dissipant” les erreurs numériques. Dans le cas où les termes diffusifs sont insuffisants, il est possible d'en ajouter artificiellement pour faciliter la résolution au détriment de la validité de la solution.

Certains schémas numériques sont connus pour ajouter plus ou moins de diffusion numérique (comme le schéma Euler implicite). Il faut faire un compromis entre facilité de résolution (et ressource de calcul nécessaire), précision et stabilité de la méthode. Les méthodes implicites de faibles ordres tendent à injecter beaucoup de diffusion numérique. Cela les rend particulièrement stables, au détriment de la qualité de la solution.

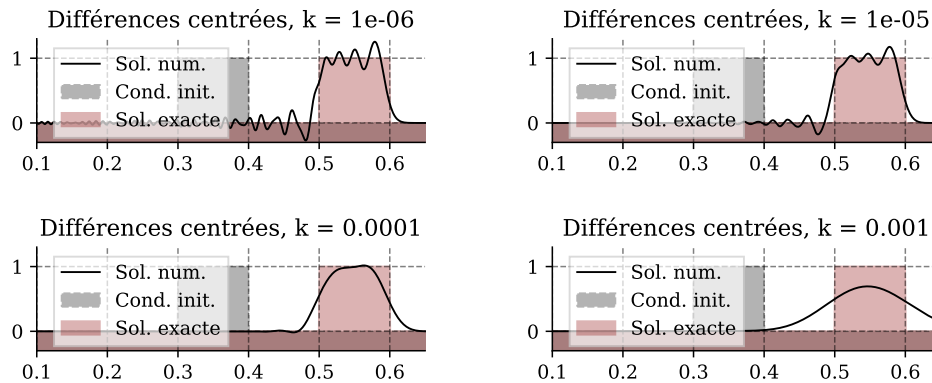


Figure 2.1 – Addition de diffusion au sein de l'équation. Plus on augmente le terme diffusif, plus on gomme les hautes fréquences. Pour des valeurs de diffusion trop élevé, on perd la forme de la solution.

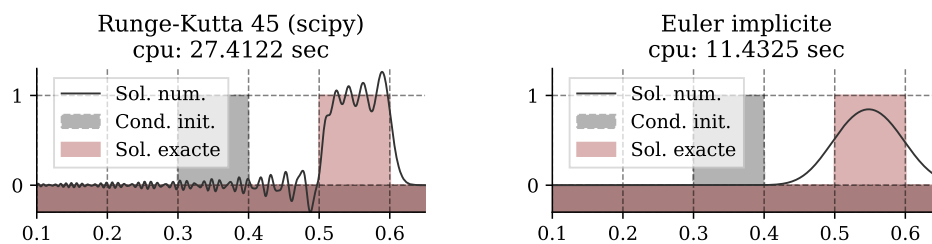


Figure 2.2 – Comparaison du schéma Euler implicite (très diffusif) avec un schéma Runge-Kutta 4/5 (explicite). On observe que le schéma Euler implicite se rapproche des solutions obtenues avec l'ajout de diffusion dans l'équation. Cet effet est d'autant plus important que le pas de temps est grand.

Une seconde solution est d'appliquer un filtre passe-bas numérique durant la résolution ou en post-traitement. De cette façon, les erreurs numériques (de hautes fréquences) sont éliminées. Il est intéressant de noter que c'est une solution assez proche de l'ajout de diffusion numérique. La résolution de l'équation de Poisson (purement diffusive) est d'ailleurs utilisée pour atténuer les gradients de couleurs d'une image avant de l'intégrer au sein d'une seconde image ("blending")<sup>1</sup>. D'autres parallèles existent : en effet, en retouche d'image, les filtres passe-haut tendent à faire ressortir la forme des objets mais amplifient la présence de bruit. Au contraire, les filtres passe-bas gommant le bruit tout en rendant les détails flous. De la même façon, il est possible d'appliquer un filtre passe bas par convolution d'une fenêtre hamming ou gaussienne

<sup>1</sup><http://eric-yuan.me/poisson-blending/>

sur les résultats d'une simulation afin de gommer les erreurs numériques. Ce filtre devra être assez sélectif pour impacter le moins possible la solution, au risque de perdre de l'information (amplitude maximale, position des points d'inflexion...).

### 🔍 Plus en détail

#### Filtres et convolution :

Une première idée pour lisser une série spatiale ou temporelle serait d'utiliser une moyenne glissante. Cela a pour effet d'adoucir les fluctuations locales tout en gardant les variations aux grandes longueurs d'ondes. C'est donc un filtre passe-bas. Malheureusement, ce n'est pas un très bon filtre.

Filtrer un signal peut se faire en convoluant le signal principal par une fenêtre. Le théorème de convolution indique que l'opération de convolution en domaine temporel (ou spatial) revient à une multiplication fréquentielle. La fenêtre "idéale" devra donc être nulle aux hautes fréquences et maximale pour les hautes fréquences.

Appliquer une moyenne glissante revient à convoluer notre entrée avec un signal rectangulaire. Son spectre de Fourier est bien maximal aux hautes fréquences, mais un certain nombre d'harmoniques apparaissent pour des fréquences plus faibles. Cela explique la piètre qualité des filtres basés sur un tel signal. L'utilisation d'un filtre gaussien ou de hamming est plus adapté : les spectres de Fourier correspondants décroissent de façon monotone vers une valeur nulle (voir figure 2.3).

Une troisième possibilité est d'utiliser un schéma spatial adapté pour ce genre de problèmes. Les schémas "upwind" sont biaisés de façon à s'adapter à la direction de la convection (Hirsch, 2007). On définit

$$a \partial_x u \approx a^+ u_x^- + a^- u_x^+ \quad (2.25)$$

avec, pour l'ordre 1 :



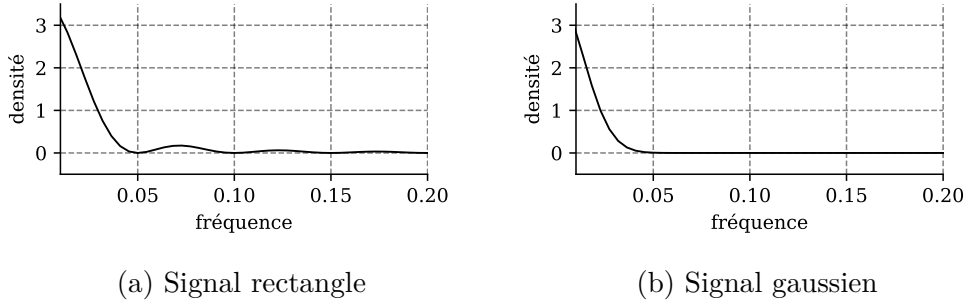


Figure 2.3 – Spectres de Fourier des fenêtres rectangulaire et gaussienne.

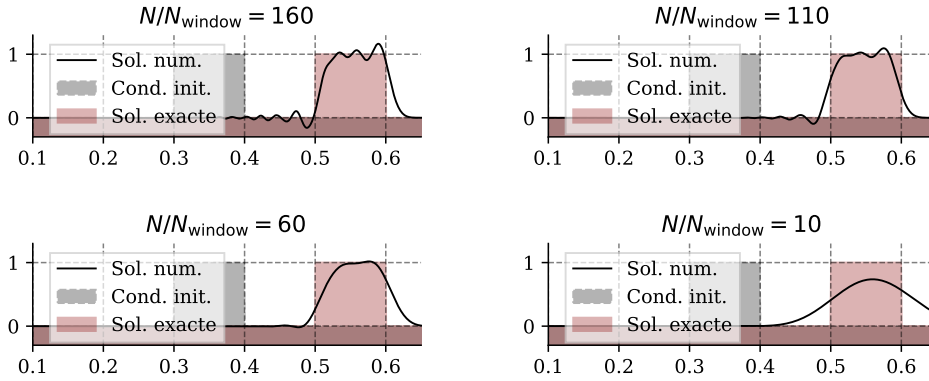


Figure 2.4 – Utilisation d'un filtre fondé sur la convolution de la solution par une fenêtre de Hamming. Plus la taille de fenêtre est grande, plus les hautes fréquences sont gommés. Une fenêtre trop grande mène à une solution proche de celle obtenu avec un schéma Euler implicite. On perd alors la forme globale de la solution.

$$a^+ = \max(a, 0) \qquad a^- = \min(a, 0) \qquad (2.26)$$

$$u_x^- = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \qquad u_x^+ = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \qquad (2.27)$$

C'est donc un schéma décentré dans le sens de l'écoulement. Les ordres supérieurs s'obtiennent via les schémas décentrés équivalents. Le schéma upwind du premier ordre est très diffusif. En augmentant l'ordre du schéma, il est possible d'avoir des résultats très proches des solutions théoriques.

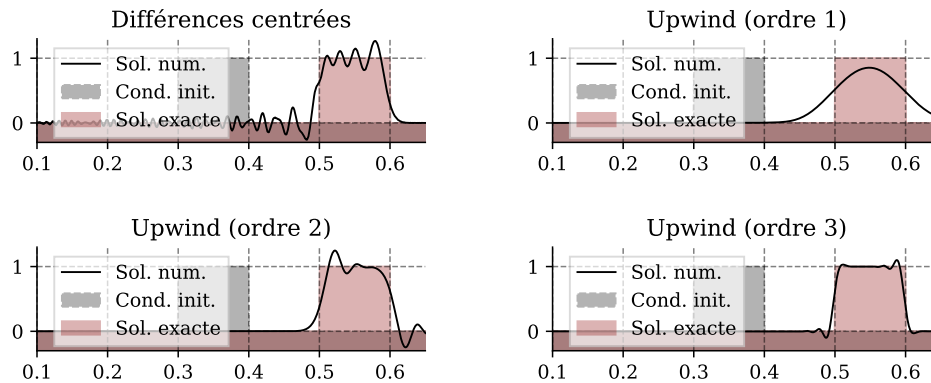


Figure 2.5 – Comparaison des différents schémas upwind avec un schéma centré d'ordre 2. Le schéma upwind d'ordre 1 est très diffusif, le schéma d'ordre 3 montre un très bon accord avec la solution exacte.

## Bilan

Pour nos résolutions numériques, il a été choisi d'utiliser la méthode des lignes avec une discrétisation différence finie centrée d'ordre 2, hormis pour les termes convectifs qui seront discrétisés avec un schéma upwind d'ordre 3, couplé avec un schéma temporel type Rosenbrock-Wanner modifié d'ordre 6 (schéma RODASPR2 Rang, 2015). L'utilisation de solveurs adaptés aux matrices creuses permettent d'augmenter le nombre de nœuds du système sans craindre une explosion des temps de calcul, et le schéma temporel d'ordre élevé avec un contrôleur de pas de temps adaptatif embarqué nous assure une résolution fiable.

## 2.2 Écriture d'un solveur dédié au prototypage

Les méthodes de résolution numérique ayant été choisies, en pratique les contraintes suivantes se posent :

- Une écriture facilitée des systèmes d'équations.
- Une résolution 1D (dans un premier temps).
- La possibilité d'utiliser des conditions de bord périodiques ou de Dirichlet.

- Un solveur capable de traiter les problèmes raides<sup>2</sup>, afin de pouvoir résoudre correctement les fronts d'ondes.
- Une résolution mono-processus pour le cœur du calcul, les systèmes 1D étant souvent trop petits pour tirer parti de la parallélisation.
- Un calcul distribué possible pour explorer facilement l'espace des paramètres.
- Une code de calcul performant.
- Un solveur temporel donnant la possibilité d'utiliser un pas de temps adaptatif.
- Un code modulaire permettant d'ajouter facilement de nouveaux solveurs temporels.

Après recherche, aucune librairie de résolution mêlant résolution en différences finies avec un schéma temporel adapté aux problèmes raides et permettant de tester facilement de nouveaux modèles n'a été trouvée. Les différences finies font parti des méthodes relativement simples à mettre en œuvre. Les logiciels utilisés passent par des méthodes type éléments ou volumes finis, ou alors les acteurs du domaine utilisent des codes "maisons" pour ce genre de résolution. Il a donc été décidé d'écrire un solveur dédié au prototypage d'équations d'ondes, qui soit assez souple pour pouvoir être réutilisé pour d'autres équations du même type. Celui-ci a été nommé Triflow (pour TRansient Instable FLOW) et permet à cette date l'écriture et la résolution de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles 1D par différences finies en utilisant la méthode des lignes présentée en amont du chapitre. Le code suivant illustre une résolution minimale : un simple problème d'advection-diffusion avec des conditions périodiques.

---

<sup>2</sup>Un problème raide est un problème présentant une différence d'échelle entre deux phénomènes dynamiques, avec des variables présentant une dynamique rapide mais qui tendent lentement vers une position d'équilibre. Par exemple, les mélanges réactionnels mènent souvent à des problèmes raides, avec une cinétique pouvant être très violente et dont l'équilibre peut être très long à atteindre. De façon plus impropre, on nomme problèmes raides des problèmes présentant des gradients importants, et donc difficiles à résoudre numériquement.

```

import numpy as np
import triflow as trf

model = trf.Model("k * dxxU - c * dxU", # l'équation différentielle
                 "U", # la variable à résoudre
                 ["k", "c"]) # les paramètres physiques

x = np.linspace(0, 1, 1000, endpoint=False)
U = np.cos(x * 2 * np.pi * 2)
initial_fields = model.fields_template(x=x, U=U)

simulation = trf.Simulation(model,
                           t=0, # temps initial
                           tmax=.5, # temps ciblé
                           fields=initial_fields, # conditions initiales
                           physical_parameters={"periodic": True,
                                                "k": 0,
                                                "c": 1}, # paramètres
                           dt=0.1) # step

for t, fields in simulation:
    print(f"t: {t:g}".ljust(10), end="\r")

```

Le logiciel permet également de travailler avec des systèmes couplés et avec des conditions de type Dirichlet ou Neumann. L'objectif à moyen terme sera d'étendre cette librairie pour permettre la résolution de problèmes avec un nombre arbitraire de dimensions.

Il est important de garder en mémoire les limitations intrinsèques aux méthodes utilisées. Les différences finies sont particulièrement inadaptées aux problèmes d'ingénieries nécessitant la prise en compte de géométries complexes. Bien qu'il soit possible d'intégrer des contraintes complexes par pénalisation ou un maillage adaptatif, il sera dans ces cas plus intéressant de se tourner vers les volumes finis ou les éléments finis. L'objectif ici est d'avoir un outil permettant le prototypage aisé de modèles qui seront appliqués sur des géométries simples. Il est adapté aux travaux effectués en laboratoire de mathématiques appliquées ou à l'apprentissage des méthodes de résolutions aux étudiants.

Toutefois, la façon dont le code est écrit permet sans problème de n'en utiliser qu'une partie. Il est possible d'écrire un module de discrétisation d'un système par volumes finis et d'utiliser la résolution temporelle intégrée à Tri-flow, réécrire de nouveaux schémas de résolution temporel. Sa souplesse en

fait un candidat plausible pour l'écriture d'une plate-forme de résolution de PDE puissante et versatile.

### 2.2.1 Accélération du code de calcul

Les étapes d'un code de calcul utilisant la méthode des lignes sont assez simples : approximation des dérivées spatiales, calcul de la jacobienne si schéma implicite, application d'un schéma temporel pour obtenir les solutions mises à jours pour le temps  $t + \Delta t$ . Pour une équation simple, il est possible d'écrire un tel code en quelques lignes. Ainsi, la résolution de l'équation d'advection convection par un schéma Euler explicite peut s'écrire :

```
import numpy as np

# On définit le terme de droite de l'équation
def F(t, u, k, c):
    # On approche les dérivées. Comme le domaine de périodique,
    # on utilise la fonction "roll" qui va effectuer
    # une translation de u.
    # np.roll(u, -1) => u[i + 1], np.roll(u, 1) => u[i - 1]
    dxu = (np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1)) / (2 * dx)
    dxxu = (np.roll(u, 1) - 2 * u + np.roll(u, -1)) / dx ** 2
    # On renvoie la valeur du terme de droite.
    return k * dxxu - c * dxu

# On discrétise le domaine [0, 1[ avec 100 points.
# On retourne également l'interval dx.
x, dx = np.linspace(0, 1, 100, retstep=True, endpoint=False)
# La condition initiale est une fonction cosinus de période 0,5
u = u_ini = np.cos(x * 2 * np.pi * 2)

# On choisit les paramètres de la résolution
t0 = 0
tmax = 0.1
dt = 1E-5
k = 5E-2
c = 1

# On met à jour les solutions jusqu'atteindre t = tmax
for t in np.arange(t0, tmax, dt):
    u = u + dt * F(t, u, k, c)
```

Le résultat du script est affiché figure 2.6.

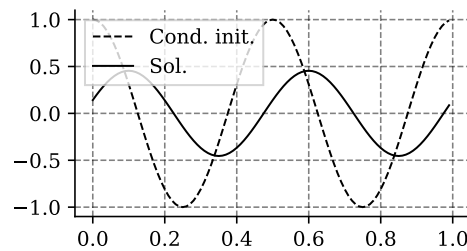


Figure 2.6 – Advection diffusion, schéma explicite

L'écriture d'un tel code est très rapide, mais cette approche “naïve” mène à des performances médiocres pour des équations plus complexes et des systèmes de taille conséquente. Il existe quelques pistes permettant d'optimiser ces calculs.

#### 2.2.1.1 Optimisation par calcul symbolique

L'approche précédente nécessite la discrétisation de chaque dérivée spatiale numériquement ce qui peut être coûteux pour des systèmes complexes. À la place, nous remplaçons chaque dérivée spatiale par son approximation discrète en amont. Ainsi, il est possible de regrouper les termes discrets et de limiter les opérations superflues.

#### 2.2.1.2 Optimisation du graphe algorithmique

L'utilisation de technologies impliquant des opérations symboliques ne s'arrête pas à la mise en place du système discret. Lors de l'évaluation d'un algorithme par un langage interprété, celui-ci va exécuter les instructions ligne à ligne. Il n'y a que peu d'optimisation possible dans ce cas, et l'avantage procuré par la souplesse et la facilité d'utilisation de ces langages est contrebalancé par leur lenteur d'exécution. Afin de garder le meilleur des deux mondes, il existe des outils capables d'opérer des optimisations à la volée, en compilant une partie du code à la première exécution (on parle alors de compilation JIT, “Just In Time”). Avec l'avènement des méta-modèles de type réseau de neurones, massivement utilisés en Machine-Learning, se sont développés des outils d'algorithmie symboliques. Les représentants les plus connues sont Torch, TensorFlow et Theano. Ces trois outils fonctionnent sur le même principe. Il

s'agira d'écrire un graphe algorithmique décrivant les différentes opérations au lieu de les exécuter directement. Les variables d'entrées ne sont pas définies par une valeur numérique fixe. A la place, elles contiennent des informations sur le type et les dimensions des données qu'elles sont censées représenter. Une fois le graphe écrit, il ne sera évalué qu'à la demande de l'utilisateur. Le sous-graphe nécessaire à l'obtention du résultat demandé est optimisé afin de limiter les opérations superflues. Une routine bas-niveau correspondante est automatiquement écrite et compilée (souvent en C). Ces opérations peuvent être longues, mais la routine obtenue est mise en cache et une seconde évaluation sera beaucoup plus rapide. La figure 2.7 montre un graphe algorithmique pour une simple opération d'addition de vecteurs, avant et après optimisation. Pour une opération pourtant simple, on gagne un facteur 2 sur le temps de calcul.

### 2.2.2 Calcul de la matrice jacobienne

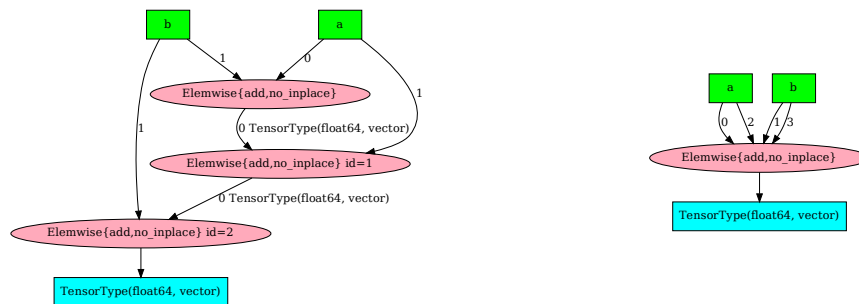
Le calcul de la matrice jacobienne  $J$  est nécessaire pour linéariser le terme  $F^{(n+1)}$ . C'est une étape nécessaire pour l'utilisation des schémas implicites. Cette étape est coûteuse : la matrice  $J$  est de dimension  $m \times m$ ,  $m$  étant la dimension du problème. Son stockage en mémoire peut être problématique. Un problème 1D consistant en 4 champs discrétisés sur 8000 points nécessitera environ 64 Go de mémoire. Il existe heureusement des méthodes de stockage de matrice sous format "creux". Seules les valeurs non nulles seront mises en mémoire. Dans le cas des systèmes obtenus par différence finies d'équations aux dérivées partielles, les matrices jacobiniennes sont très creuses, et ce qui ne pouvait pas tenir en RAM sous forme dense ne nécessitera que quelques Mo de stockage. À titre d'exemple, la matrice jacobienne provenant de la discrétisation différences finies d'un modèle d'advection-diffusion avec 1000 points de discrétisation ne possède que 0,3% de termes non nuls.

```

import theano as th
import theano.tensor as T

a = T.vector("a")
b = T.vector("b")
c = a + b
d = c + a + b

```



(a) Avant optimisation : il y a trois opérations algorithmiques. 1) addition de  $a$  et  $b$ . 2) addition du résultat précédent avec  $a$ . 3) addition du résultat précédent avec  $b$ .

(b) Après optimisation : les trois opérations ont été réunies en une. On additionne directement 2 fois  $a$  et 2 fois  $b$ . On limite ainsi le nombre d'opérations effectuées par la machine.

Figure 2.7 – Graphe algorithmique, addition vectorielles (Theano). Chaque les nœuds carrés correspondent aux entrées et aux sorties de l'algorithme. Les nœuds ovales aux opération algorithmique. Les trois opérations d'addition vectorielle ont été compressées en une unique opération.

### ⊕ Plus en détail

#### Format de stockage de matrices creuses :

L'objectif de tels objets est de permettre le stockage des termes non nuls d'une matrice. Cela peut se faire sous différents formats.

Le format le plus classique est le format COO (COOrdinate format). Dans ce cas, les données sont stockées sous la forme de trois vecteurs de même dimension contenant les entrées non nulles de la matrice, les lignes et les colonnes correspondantes. C'est le format idéal pour la construction de matrices creuses, mais il ne permet pas d'opé-



rer d'opérations algébriques directement. Il est nécessaire de convertir cette matrice selon un format plus adapté. Heureusement, cette opération de conversion est très peu coûteuse.

Les formats CSR et CSC (Compressed Sparse Row/Column) sont des formats peu souples au sens où un changement de la structure de la matrice sera très coûteux. Ce sont toutefois les formats les plus performants pour les opérations algébriques. Le format CSR (resp. CSC) est particulièrement efficace pour les opérations de sélection ligne à ligne (resp. colonne à colonne). Ce seront les formats que nous utiliserons de façon intensive durant nos calculs : il existe des solveurs spécialisés capables d'opérer des factorisations de type LU à coût moindre à condition que les matrices soient stockées sous forme creuse CSC.

D'autres formats existent (Dictionary Of Keys based, Block Sparse Row matrix, Sparse matrix with DIAGONAL storage...) avec chacun avantages et inconvénients. Le lecteur intéressé par plus de détails à ce propos pourra se référer à la documentation scipy correspondante<sup>a</sup>.

<sup>a</sup><https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.html>

### 2.2.2.1 Approximation numérique

La matrice jacobienne peut être calculée en approchant les termes  $\frac{\partial F}{\partial U}$  par différences finies. Ce calcul ne pose aucun problème quant à sa mise en place mais est coûteux pour de larges systèmes.

$$\frac{\partial F}{\partial U} \approx \frac{F(U + \epsilon) - F(U)}{\epsilon} \quad (2.28)$$

Il est nécessaire d'évaluer  $m$  fois le vecteur  $F$ , et le choix du paramètre  $\epsilon$  peut être problématique : une valeur trop faible pose soucis quant à la précision de l'approximation, une valeur trop élevée est problématique car elle mène à des erreurs d'arrondis. Il est possible de réduire les coûts de calculs de ces approximations en anticipant la structure de la Jacobienne et en évitant les calculs menant à des termes nuls.

### 2.2.2.2 Différentiation automatique

Plus récemment, une méthode appelée différenciation automatique ou différenciation algorithmique a été développée. Il s'agit de considérer une opération algorithmique comme une fonction composée d'opérations élémentaires (addition, multiplication, fonction par morceau...) dont les gradients peuvent être connus de façon exacte. Il est possible de revenir au gradient de l'opération algorithmique en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées. De cette façon, il est possible d'avoir accès au gradient d'un algorithme, sans approximation. Les bibliothèques fondées sur la mise en place d'un graphe algorithmique sont souvent accompagnées d'un outil de différenciation automatique. C'est le cas de Theano.

### 2.2.2.3 Calcul symbolique

La dernière méthode et également la plus efficace reste de fournir la forme exacte de la matrice Jacobienne afin de la calculer directement. Ainsi, pour un modèle purement convectif :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.29)$$

$$J_i = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial U_{i-1}} \left( \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial U_i} \left( \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial U_{i+1}} \left( \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \right) \end{array} \right] \quad (2.30)$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{-U_{i-1}}{2\Delta x}, & 0, & \frac{U_{i+1}}{2\Delta x} \end{array} \right] \quad (2.31)$$

En écrivant le système discret via une bibliothèque de calcul symbolique, il est possible de pré-calculer la forme exacte de la matrice jacobienne, et d'en déterminer à l'avance les termes non-nuls. C'est cette méthode qui sera préférée aux deux autres. L'approximation numérique par différence finie nous servira à valider notre implémentation du calcul symbolique de la matrice jacobienne.

### 2.2.3 Historique de développement

Le développement d'un logiciel cohérent est un travail de longue haleine qui a nécessité plusieurs itérations avant d'arriver à sa forme actuelle. La première version consistait en un simple code, très linéaire, de résolution d'un modèle unique selon une discrétisation différence finie centrée en espace et un schéma Euler explicite en temps. C'est l'approche la plus simple possible, mais aussi une des moins efficaces. Les dérivées spatiales étaient dérivées "à la main" et le code écrit intégralement en Python.

Une seconde étape consistait à s'appuyer sur les solveurs d'équations différentielles ordinaires disponibles dans la librairie `scipy`, donnant accès aux solveurs Runge Kutta explicites et à certains solveurs multi-étape (BDF, Adams...). Nous avons ainsi gagné en performance et surtout en fiabilité de résolution. Une amélioration supplémentaire a été l'implémentation des routines de dérivation spatiale en Fortran, l'interfaçage Fortran / C avec les codes Python se faisant sans réelles difficultés.

Ces deux premières tentatives ont permis d'appréhender plus simplement les résolutions d'équations aux dérivées partielles, et étaient globalement suffisantes pour les domaines périodiques avec hydrodynamique seule. Toutefois, l'introduction de la thermique a rendu cette approche bien moins intéressante. En effet, il est possible de voir apparaître de très forts gradients dans les variables représentant le champ de température, et les schémas explicites sont particulièrement peu adaptés à de tels problèmes. Il a été nécessaire de s'intéresser aux schémas implicites avec toutes les difficultés supplémentaires que cela implique.

Le calcul de la matrice jacobienne a été le premier obstacle à franchir. Son calcul n'est pas trivial, comme cela est montré dans la section 2.2.2. Si elle n'est pas convenablement effectuée et qu'elle ne prend pas en compte la structure même du schéma de discrétisation, son approximation numérique est coûteuse en temps de calcul. Elle est aussi gourmande en termes de mémoire. Il a été nécessaire de passer à l'utilisation de matrices creuses. Une première tentative se fondait sur une notion de mémoire de la structure de la jacobienne. Un calcul préalable de la matrice dense était effectué. La matrice obtenue était convertie en matrice creuse, et sa structure (les lignes et les colonnes non nulles) en était extraite. Cette structure était utilisée pour cibler les termes à calculer pour

les pas de temps suivants, jouant le rôle de “masque”. Ce fonctionnement a été abandonné : pour des domaines étendus, ce calcul préliminaire nécessitait plus de mémoire vive que disponible.

À ce moment, nous avons changé de paradigme de développement. Au lieu de calculer les dérivées spatiales une à une par des routines numériques, puis de calculer la jacobienne par une approximation numérique, le système est maintenant discrétisé par calcul symbolique. L'obtention d'un système discret symbolique permet également de calculer directement sa jacobienne et d'éliminer les termes nuls. Il est alors aisé de construire le vecteur  $F$  et la matrice creuse  $J$  directement. Les modèles étaient alors écrits sous forme symbolique discrète dans un fichier. Le système discret obtenu permettait d'écrire une routine Fortran qui était utilisée par le schéma numérique (un simple Euler implicite). Cette routine Fortran a été avantageusement remplacée par un binaire généré par la librairie Theano. Celle-ci permet d'optimiser le graphe algorithmique correspondant au calcul du vecteur  $F$  et la jacobienne  $J$  (voir section 2.2.1.2).

La dernière itération consistait en la “mise au propre” de ces étapes afin d'obtenir un solveur cohérent. Ainsi, différents éléments ont été ajoutés afin de rendre l'utilisation de l'outil plus souple et plus agréable. Ont été ajoutés un langage mathématique simplifié permettant une écriture plus facile des modèles, un contrôle des simulations, l'affichage temps réel des variables durant la résolution spatio-temporelle et une gestion de sauvegarde des solutions sur disque. Le code est écrit de façon à être modulaire, et permet donc de l'étendre facilement. Les fonctions publiques sont documentées et le code est validé par un panel de tests unitaires (voir sections 2.2.7.3 et 2.2.7.2).

## 2.2.4 Structure du logiciel

Le logiciel est divisé en deux grandes parties : le cœur et les extensions. La première partie est nécessaire à la résolution spatio-temporelle et la seconde ajoute certaines fonctionnalités facilitant l'utilisation du logiciel. Le cœur possède plusieurs composantes. Toutes sont nécessaires pour le fonctionnement du logiciel, mais elles sont écrites de façon à avoir un outil modulaire, facile à étendre et à modifier.

2.2.4.1 Cœur

Le “cœur” est la partie centrale de Triflow. Celui ci est composé des parties suivantes :

- Les modèles, qui permettent l'écriture et la discrétisation des systèmes d'équations différentielles partielles.
- Les compilateurs qui traduisent le modèle sous sa forme symbolique discrète en routines numériques permettant le calcul de  $F$  et de  $J$ .
- Les schémas temporels qui utilisent ces routines pour mettre à jour la solution du temps  $t$  au temps  $t + \Delta t$ .
- Les simulations qui offrent un contrôle sur la résolution temporelle du système.
- Les solutions qui fournissent un objet structuré contenant les variables à un temps donné.

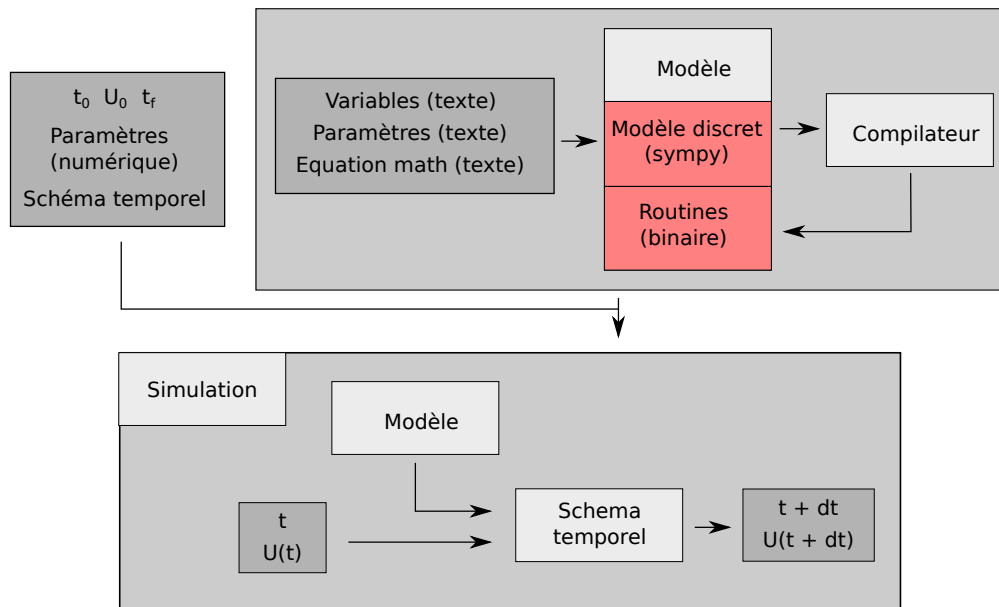


Figure 2.8 – Structure du cœur de Triflow.

### Modèle :

Le modèle prend comme entrée les équations sous forme mathématique. Il est construit autour de la librairie `sympy`<sup>3</sup>, un outil de calcul formel écrit en Python.

### Compilateurs :

La librairie `sympy` permet de convertir une équation mathématique en code source et de le compiler à la volée. Cet outil nous permet alors de générer une routine binaire qui sera utilisée pour calculer le vecteur  $F$  et la matrice  $J$ . Il est possible de générer une routine `numpy`<sup>4</sup> ou un graphe algorithmique `Theano`<sup>5</sup>. Cette dernière solution ajoute une dépendance non négligeable ainsi qu'un temps de compilation conséquent pour les modèles les plus complexes. En contrepartie, il permet de gagner entre 30% et 50% de vitesse d'exécution comparé au compilateur `numpy`.

Il est possible d'écrire un nouveau compilateur facilement. Ceux-ci ne sont rien de plus que des fonctions partant d'un système symbolique discret et renvoyant les routines  $F$  et  $J$ .

### Schémas temporels :

Les schémas temporels sont des fonctions permettant de mettre à jour les variables entre le temps  $t$  et le temps  $t + \Delta t$ . Elles sont écrites de façon à tirer profit de la structure creuse de la matrice jacobienne (pour les schémas implicites) et actuellement les schémas suivants sont disponibles :

- Euler explicite
- Euler implicite
- Tous les solveurs disponibles dans la librairie `scipy`. Attention, ceux-ci n'utilisent pas la jacobienne et elle sera donc estimée numériquement. Étant calculée sous forme dense, il est plus prudent d'éviter les schémas implicites au risque de saturer la mémoire vive.

---

<sup>3</sup><http://www.sympy.org>

<sup>4</sup><http://www.numpy.org/>

<sup>5</sup><http://deeplearning.net/software/theano/>

- Une classe générale représentant les schémas Rosenbrock-Wanner a été implémentée dans Triflow. Sont inclus :
  - ROS2 (ordre 2)
  - ROS3PRw (ordre 3)
  - ROW3PRL (ordre 4)
  - RODASPR (ordre 6)

Ceux-ci sont décrits dans les travaux de Rang (2015).

Certains schémas Rosenbrock-Wanner possèdent un contrôleur de pas de temps intégré. Pour les autres, une fonction d'aide permet d'intégrer un calcul d'erreur et un contrôle du pas de temps pour n'importe quel schéma temporel au prix d'un léger surcoût de temps de calcul. Ce contrôleur est décrit en amont dans ce chapitre (section 2.1.2.3).

```
import numpy as np
import triflow as trf

model = trf.Model("k * dxxU - c * dxU", "U", ["k", "c"])

x = np.linspace(0, 1, 100)
U = np.cos(x * 2 * np.pi * 1.5)
initial_fields = model.fields_template(x=x, U=U)

scheme = trf.schemes.RODASPR(model)

new_t, new_fields = scheme(t=0, fields=initial_fields, dt=.05,
                           pars={"periodic": True, "k": .2, "c": 1})
```

Simulation :

Cet objet n'est pas indispensable au solveur Triflow mais relie les différents composants et donne accès à un objet cohérent permettant de contrôler une simulation du début à la fin. Il prend en entrée :

- Un modèle Triflow.
- Les conditions initiales ( $t$ ,  $U$ ).

- Les paramètres physiques.
- Le pas de temps pour lequel la simulation va renvoyer les variables mises à jours.
- Le temps final de la simulation.
- Le schéma temporel (le schéma RODASPR par défaut).
- Les paramètres propres au schéma temporel.
- l'utilisation d'un contrôleur de pas de temps (actif par défaut).
- Un "hook", c'est à dire une fonction prenant en entrée l'état actuel du solveur ( $t$ ,  $U$  et les paramètres) et modifiant ces deux derniers de façon dynamique. Cette fonction sera appelée à chaque calcul de  $F$  et  $J$  et permet d'intégrer des conditions de bord et des relations non linéaires complémentaires en semi-implicite.

Cette simulation peut également se voir attacher un container persistant (donnant accès aux données de l'ensemble des pas de temps enregistrés sur le disque) ou un affichage temps réel (voir la section 2.2.4.2 pour plus de détails).

Il est également possible d'y attacher une ou plusieurs sondes, c'est à dire des fonctions permettant de calculer à chaque pas de temps des grandeurs auxiliaires (flux, nombre d'itération internes, temps d'exécution...). Celles-ci peuvent être affichées (pour les données 0D/1D) et sont enregistrées sur disque si un container est attaché à la simulation. Le code ci-dessous présente une résolution complète et la figure 2.9 les graphes spatio-temporels correspondants.

```
import numpy as np
import triflow as trf

model = trf.Model("k * dxxU - c * dxU", "U", ["k", "c"])

x = np.linspace(0, 1, 100)
U = np.cos(x * 2 * np.pi * 1.5)
initial_fields = model.fields_template(x=x, U=U)

def dirichlet_bdc(t, fields, pars):
    # On fixe les première et dernière valeur de U
```



```

fields.U[0] = 1
fields.U[-1] = -1
return fields, pars

simulation = trf.Simulation(model, t=0, tmax=.1,
                           fields=initial_fields.copy(),
                           hook=dirichlet_bdc,
                           physical_parameters={"periodic": False,
                                                "k": .2,
                                                "c": 1},
                           dt=0.001)

# Calcul du flux
simulation.add_probe("flux", ("t", "x"),
                    lambda simul: np.gradient(simul.fields.U))
simulation.attach_container("/tmp/triflow")
for t, fields in simulation:
    print(f"t: {t:g}".ljust(10), end="\r")

Dimensions:      (t: 6, x: 1000)
Coordinates:
  * x            (x) float64 0.0 0.001 0.002 0.003 0.004 ...
  * t            (t) float64 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
Data variables:
  U              (t, x) float64 1.0 0.9999 0.9997 0.9993 ...
  flux           (t, x) float64 -7.896e-05 -0.0001579 ...

```

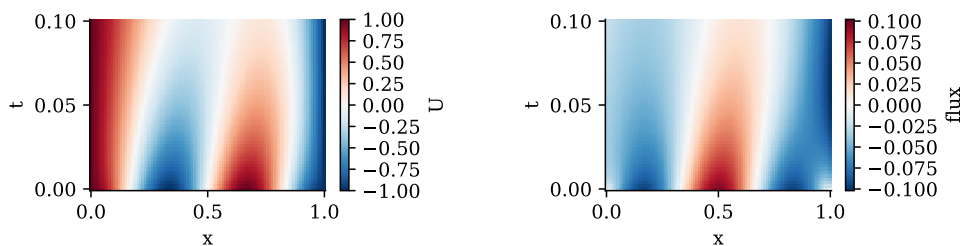


Figure 2.9 – Graphes spatio-temporels de l'équation d'advection-diffusion.

Solution :

Les variables et les sondes sont stockées via une classe dérivée des Dataset xarray. Ceux-ci permettent le stockage de variables associées à une série de

coordonnées. Cette classe modifiée donne aussi accès à des méthodes permettant de convertir les valeurs ordonnées des variables en un vecteur plat  $[u_0, u_1, u_2] \rightarrow U$ . Cela permet d'avoir accès dans un même temps à la forme structurée des données permettant leur affichage et leur manipulation et à la forme plate nécessaire aux schémas temporels.

#### 2.2.4.2 Extension

Les extensions sont les éléments qui, s'ils ne sont pas indispensables à la résolution d'un système, facilitent l'utilisation de Triflow.

#### Affichages :

Des affichages temps réels sont intégrés à Triflow. Ceux-ci permettent l'affichage des variables ou des sondes de dimensions 0 (une valeur par pas de temps) ou de dimension 1 (une série de donnée 1D mises à jours à chaque pas de temps). Ces affichages utilisent une librairie d'affichage dynamique (bokeh<sup>6</sup>) et peuvent être utilisés lorsque Triflow est utilisé dans un notebook Jupyter<sup>7</sup>.

#### Containers persistants :

Les Dataset xarray<sup>8</sup> utilisés pour stocker les variables et les sondes Triflow peuvent s'écrire facilement sur disque via les formats netCDF. En plus des données spatio-temporelles, les attributs de la simulation sont également sauvegardés (paramètres physiques, hook, temps de calcul, conditions de bord périodiques ou non). L'objectif est d'avoir un support d'enregistrement fiable facilitant le post-traitement.

### 2.2.5 Gestion des problèmes d'advection raides

Les trois solutions présentées plus haut (section 2.1.3) peuvent être utilisées avec Triflow. La diffusion artificielle doit être intégrée lors de l'écriture du modèle. Le filtre numérique peut être intégré via le hook ou en modifiant

---

<sup>6</sup><https://bokeh.pydata.org>

<sup>7</sup><http://jupyter.org/>

<sup>8</sup><http://xarray.pydata.org>

les solutions après chaque pas de temps, et les schémas upwind peuvent être intégrés directement dans les modèles Triflow :

```
adv_model_ord1 = trf.Model("-upwind(c, U, 1)", "U", "c")
adv_model_ord2 = trf.Model("-upwind(c, U, 2)", "U", "c")
adv_model_ord3 = trf.Model("-upwind(c, U, 3)", "U", "c")
```

Les figures de la section 2.1.3 ont toutes été générées par Triflow.

## 2.2.6 Validation du solveur

Afin de valider le solveur, deux cas types ont été choisis. Les données de référence ont été extraites du livre de LeVeque (2002).

Les deux cas de validations sont fondés sur les équations de Saint-Venant 1D. Le premier cas est une simple vague (initialisé à partir d'une impulsion gaussienne), le second cas est la rupture de barrage. Les données ont été numérisées, ce qui peut expliquer une légère distorsion due au positionnement des axes.

Les équations de Saint-Venant utilisées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x h = 0 \\ \partial_t h + h \partial_x u + u \partial_x h = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Ces équations sont écrites sous forme non conservatives, notre solveur ne tirant pas avantage de la structure du système. Ce système est connu pour générer de fortes discontinuités. En effet, il manque un terme permettant de relaxer le gradient comme un terme diffusif ou dispersif. Afin de contrebalancer les effets néfastes de ces discontinuités, un filtre fondé sur une fenêtre de Hamming a été utilisé à chaque pas de temps. De cette façon nous éliminons les erreurs numériques dues à la présence potentielle d'un choc hydraulique.

Les accords sont bons hormis les problèmes de distorsions mentionnés plus haut. La pente est de facto légèrement adoucie mais nous retrouvons la même solution qu'avec un schéma volume finis à priori bien plus adapté à ce genre de problème. La résolution du cas de la rupture de barrage est un problème difficile à résoudre. L'accord que nous obtenons est une bonne indication de la fiabilité de notre solveur. Nous allons pouvoir nous en servir dans le cadre de nos équations d'ondes.

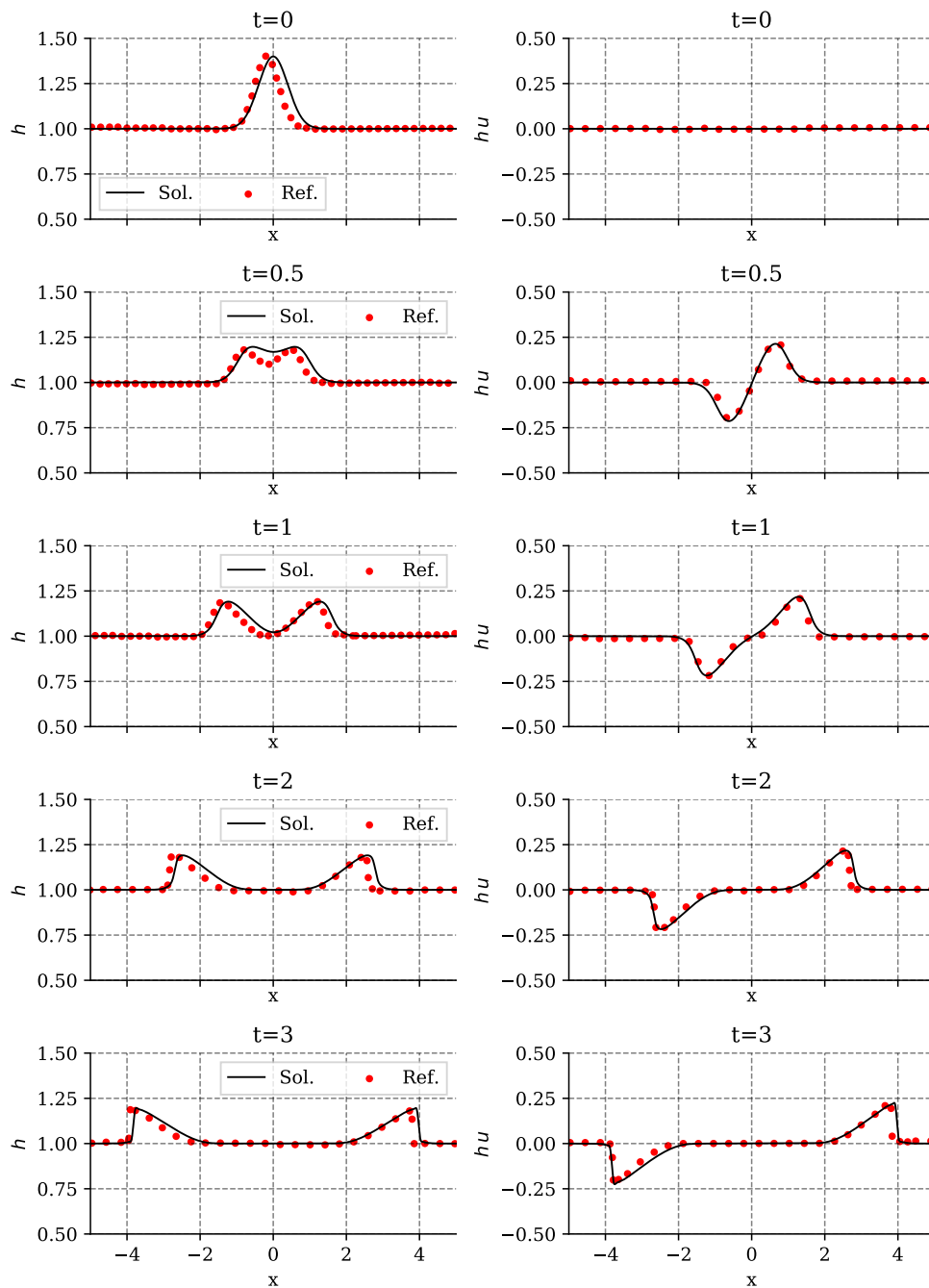


Figure 2.10 – Validation du solveur, cas n°1

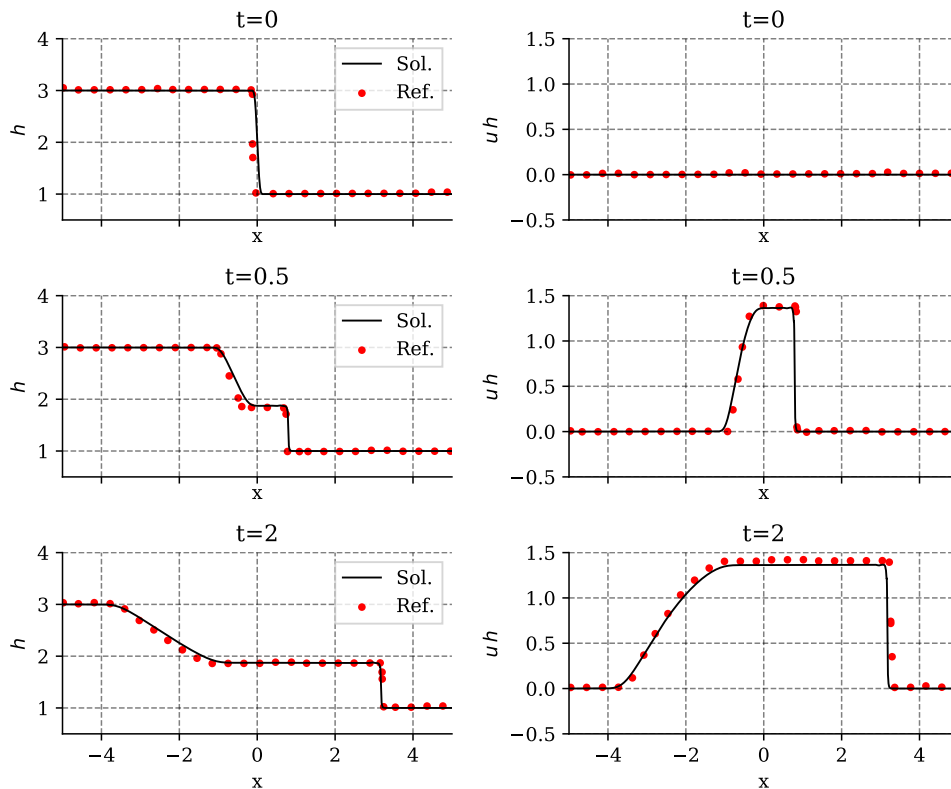


Figure 2.11 – Validation du solveur, cas n°2

En effet, celles-ci possèdent des caractéristiques communes avec les équations utilisées pour ces validations avec l'addition de termes diffusifs et dispersifs. Ces termes additionnels tendent à gommer les discontinuités. La résolution numérique en est facilitée.

### 2.2.7 Triflow aujourd'hui

Le logiciel, son code source et sa documentation sont disponible dans un dépôt github :

Code source <https://github.com/locie/triflow>

Documentation <https://locie.github.io/triflow/>

À noter que ce logiciel est à proprement parler une librairie Python, et que la version stable est installable via le gestionnaire de paquet pip.

De plus, la version utilisée pour les simulations de ce mémoire est la version dite de développement (<https://github.com/locie/triflow/tree/dev>) possédant une petite avance sur la branche stable du logiciel.

Il n'est pas prévu de fournir à Triflow une interface graphique complète. Il est toutefois très bien intégré aux notebook Jupyter permettant de travailler de façon interactive.

En plus de la documentation proprement dite, Triflow est accompagné d'une série d'exemples complets pour différents problèmes physiques et d'un ensemble de tests unitaires.

Un des objectifs sera de publier cet outil afin de le diffuser dans le milieu académique. Il permet, contrairement à de nombreux codes permettant la résolution d'équations aux dérivées partielles, d'écrire et de tester très rapidement différents modèles.

Cette dernière itération a nécessité une année de développement une fois les détails techniques fixés, comprenant l'écriture de la documentation et des tests.

### 2.2.7.1 Exemples

Triflow a été utilisé pour résoudre avec succès diverses équations.

- Équations d'advection-diffusion
- Équations de réaction-diffusion
- Transfert de chaleur à travers d'un échangeur tubulaire contre-courant
- Dimensionnement d'un réacteur piston non-isotherme
- Équation d'onde
- Équation d'étalement de goutte
- Équations de Saint-Venant 1D et 2D
- Équations de Burgers
- Équation de Kuramoto-Sivashinsky

Ainsi, il est possible de résoudre l'équation Burgers-Korteweg-de-Vries

$$\partial_t u + u \partial_x u = a \partial_{xx} u + b \partial_{xxx} u \quad (2.33)$$

En suivant un nombre assez réduit d'étapes.

Tout d'abord, il est nécessaire d'importer les librairies

```
import numpy as np
from triflow import Model, Simulation
```

Il s'agira ensuite de décrire les conditions initiales. Nous allons considérer un signal triangle légèrement lissé afin de limiter les erreurs numériques (voir figure 2.12).

```
x = np.linspace(-2, 6, 1000)
n = 20
U = np.log(1 + np.cosh(n)**2/np.cosh(n*x)**2) / (2*n)

initial_fields = model.fields_template(x=x, U=U)
initial_fields.U.plot()
```

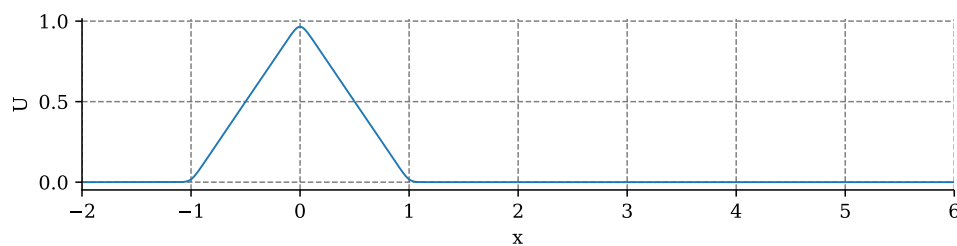


Figure 2.12 – Condition initiale pour l'équation de Burgers-KdV

Nous fixons ensuite les paramètres, et nous spécifions que le domaine n'est pas périodique. Par défaut, le domaine est étendu d'autant de points que nécessaire pour la discrétisation en dupliquant  $U_0$  (resp.  $U_N$ ) à gauche (resp. à droite). Des conditions plus complexes peuvent être intégrées via une fonction qui sera appelée à chaque calcul du vecteur  $F$  et de la matrice  $J$ .

```
parameters = dict(a=2E-4, b=1E-4, periodic=False)
```

Il est alors possible d'initialiser la simulation, et d'attacher un container. Celui-ci aura deux rôles : 1) attacher les solutions de l'ensemble des pas de temps à la simulation et 2) les enregistrer sur disque.

```
simulation = Simulation(model, t=t, fields=initial_fields,
                        physical_parameters=parameters,
                        dt=.01, tmax=10, tol=5E-1)
simulation.attach_container()
```

La tolérance doit être testée en fonction des problèmes selon que l'on veuille assurer une précision maximale ou une résolution rapide. La valeur par défaut (1E-2) est très conservative afin de garantir une bonne précision.

Enfin, il est possible de lancer la simulation puis d'afficher le graphe spatio-temporel (voir figure 2.13).

```
for i, (t, fields) in enumerate(simulation):
    print(f"t: {t:g}".ljust(10), end="\r")
simulation.container.U.plot(cmap="viridis")
```

Cet exemple est tiré du tutoriel<sup>9</sup> du projet Dedalus<sup>10</sup>, une librairie Python de résolution d'équations aux dérivées partielles par méthodes pseudo-spectrales.

### 2.2.7.2 Documentation

La documentation est disponible à l'adresse <https://locie.github.io/triflow/>. Celle-ci donne des informations à la fois pour les utilisateurs du logiciel (installation, exemples, fonctionnement global et détaillé des différentes parties du solveur). Cette documentation ne comprend pas d'introduction à Python. Le lecteur intéressé par une telle introduction pourra se tourner vers les différentes documentations disponibles en ligne. En cas de bugs ou de comportements non souhaités, il est possible d'ouvrir un ticket sur le dépôt<sup>11</sup>.

<sup>9</sup>[http://nbviewer.jupyter.org/urls/bitbucket.org/dedalus-project/dedalus/raw/tip/docs/notebooks/dedalus\\_tutorial\\_problems\\_solvers.ipynb](http://nbviewer.jupyter.org/urls/bitbucket.org/dedalus-project/dedalus/raw/tip/docs/notebooks/dedalus_tutorial_problems_solvers.ipynb)

<sup>10</sup><http://dedalus-project.org/>

<sup>11</sup><https://github.com/locie/triflow/issues>



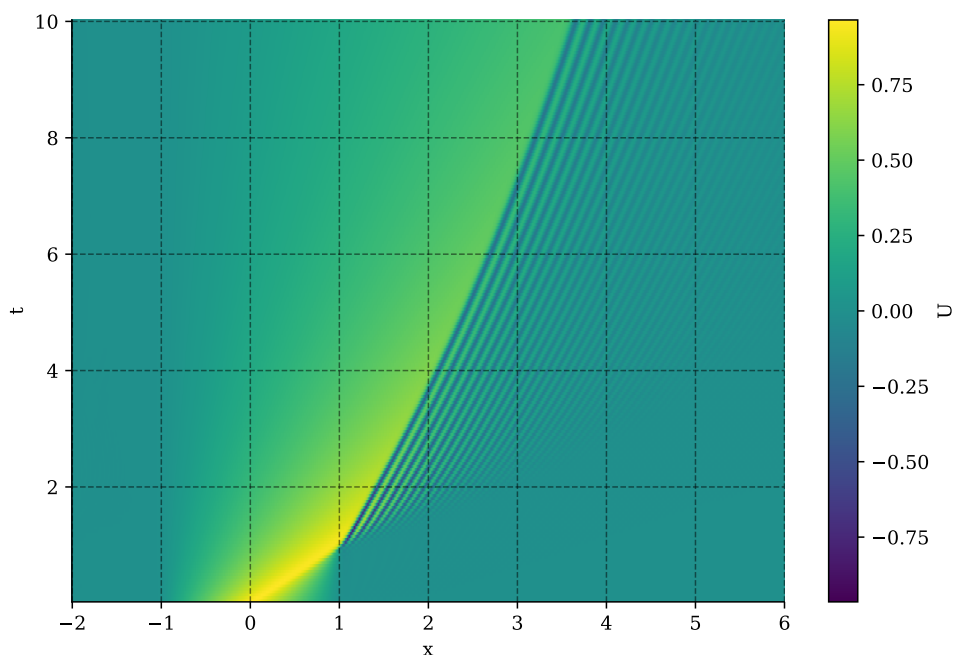


Figure 2.13 – Graphe spatio-temporel d’un choc dispersif modélisé par l’équation de Burgers-KdV.

Une documentation complémentaire est également disponible pour les contributeurs potentiels, fournissant des informations complémentaires quant au fonctionnement interne, à l’esprit sous-jacent les choix de programmation et des indications quant au style de programmation. Les développeurs intéressés sont libres de proposer des modifications via le dépôt<sup>12</sup>.

### 2.2.7.3 Tests unitaires

Afin de garantir une stabilité de l’interface avec l’utilisateur, l’ensemble du code est testé avant de figer une version. De cette façon, il est possible de limiter au maximum les problèmes de compatibilité et de s’assurer que l’API (Application programming interface, pour interface de programmation) se comporte selon nos attentes. En plus de l’utilisation de tests unitaires de ce genre, des tests complémentaires permettent de s’assurer que le solveur se comporte correctement. Ainsi, nous vérifions des cas physiques simples afin d’éviter de “casser” accidentellement le solveur.

<sup>12</sup><https://github.com/locie/triflow/pulls>

Toutefois, c'est un travail minutieux et l'utilisation de tels tests ne garantit pas un fonctionnement sans heurts. Un travail continu de correction permettra d'éliminer les erreurs résiduelles.

### 2.2.8 L'avenir de Triflow

L'objectif est de consolider ce logiciel durant les prochaines années afin d'en faire un outil adapté aux problématiques de recherche.

La priorité sera la prise en compte de dimensions supplémentaires, en particulier permettre les résolutions 2D. Un concept a déjà été développé et devra être généralisé.

L'augmentation du nombre de dimensions risque d'augmenter les temps de calcul au-delà du raisonnable. Il sera sans doute nécessaire d'aller plus loin dans l'accélération des calculs. Actuellement, la factorisation LU, le calcul du vecteur  $F$  et de la jacobienne  $J$  sont automatiquement parallélisés lorsque le système est suffisamment gros. Toutefois, les performances seront certainement sub-optimales, et il faudra sans doute ré-écrire une partie des routines de calcul pour une résolution en multi-cpu. La démocratisation des calculs sur gpu est une autre piste : des solveurs explicites haute performance existent, ce qui permettrait d'atteindre des résolutions performantes sur des domaines étendus.

La méthode ADI (Alternating Direction Implicit) est souvent appréciée dans la résolution 2D en différences finies : c'est un schéma implicite à deux pas. A chaque demi pas de temps, une seule des dimensions est mise à jour. De cette façon, il est nécessaire de résoudre deux systèmes de taille  $M$  au lieu d'un système de taille  $M^2$ . Cette méthode pourrait être implémentée sans trop de difficulté. Toutefois, l'utilisation de matrices creuses et d'algorithmes adaptés (voir section 2.2.2) rendra certainement cette méthode peu intéressante. En effet, la complexité algorithmique de la résolution de nos systèmes dépend directement de la structure de la matrice. Résoudre un système de taille  $M^2$  sera alors aussi complexe que de résoudre deux systèmes de taille  $M$ .

La discrétisation par différences finies n'est pas adaptée à la mise en place d'un maillage adaptatif, malgré les possibilités offertes par le maillage irrégulier de Fornberg. Une piste prometteuse est l'utilisation d'un pas de temps adaptatif dépendant de chaque variable et de sa position (Savcenko, Hund-

sdorfer et Verwer, 2007). L'idée est d'utiliser l'erreur locale plutôt que globale pour calculer un pas de temps dépendant de chaque variable discrète. Les variables sont mis à jours avec un pas de temps large. Les variables dont l'erreur dépasse la tolérance sont recalculées avec un pas de temps raffiné. La valeur intermédiaire des autres variables est obtenue par interpolation. De cette façon, la performance est liée aux erreurs locales et non pas limitée par l'erreur la plus importante.

Il sera aussi nécessaire de mieux intégrer les conditions aux limites. Actuellement, seules les conditions périodiques et de flux nul sont parfaitement intégrées. Les autres conditions sont intégrées comme une contrainte numérique, en imposant certaines valeurs aux inconnues avant le calcul du vecteur  $F$  et de la matrice  $J$ . Dans une prochaine version, des conditions limites arbitraires pourront être ajoutées aux différentes frontières du domaine.

D'autres ajouts peuvent être envisagés : module de résolution stationnaire et de résolution de problèmes aux valeurs propres, module de calcul par continuation, extension aux méthodes volume finis... tout en gardant une fondation solide et modulaire. Ce logiciel peut servir de base pour l'écriture de nombreux solveurs fondés sur la méthode des lignes.

## 2.3 Problèmes numériques propres aux équations d'ondes

Durant notre étude, nous avons rencontré certains problèmes spécifiques aux équations d'ondes. En particulier, pour les simulations en domaine "ouvert", deux éléments ont été problématiques.

### 2.3.1 Initialisation du film précurseur

La solution de Nusselt (un film "lisse") est une solution non observée dans le cas d'un écoulement vertical. Lorsque l'on prend cette solution comme condition initiale d'un écoulement ouvert, l'épaisseur de la première onde propagative peut atteindre des valeurs importantes. Cela mène à l'apparition de forts gradients, ralentissant fortement le solveur.

Afin de faciliter cette initialisation, nous utilisons un ressaut hydraulique comme condition initiale. De cette façon, les premières ondes viennent se "bri-

ser” sur ce ressaut. Le domaine se remplit d’ondes le temps que le ressaut et les premières ondes non physiques traversent la longueur de la plaque (voir figure 2.14).

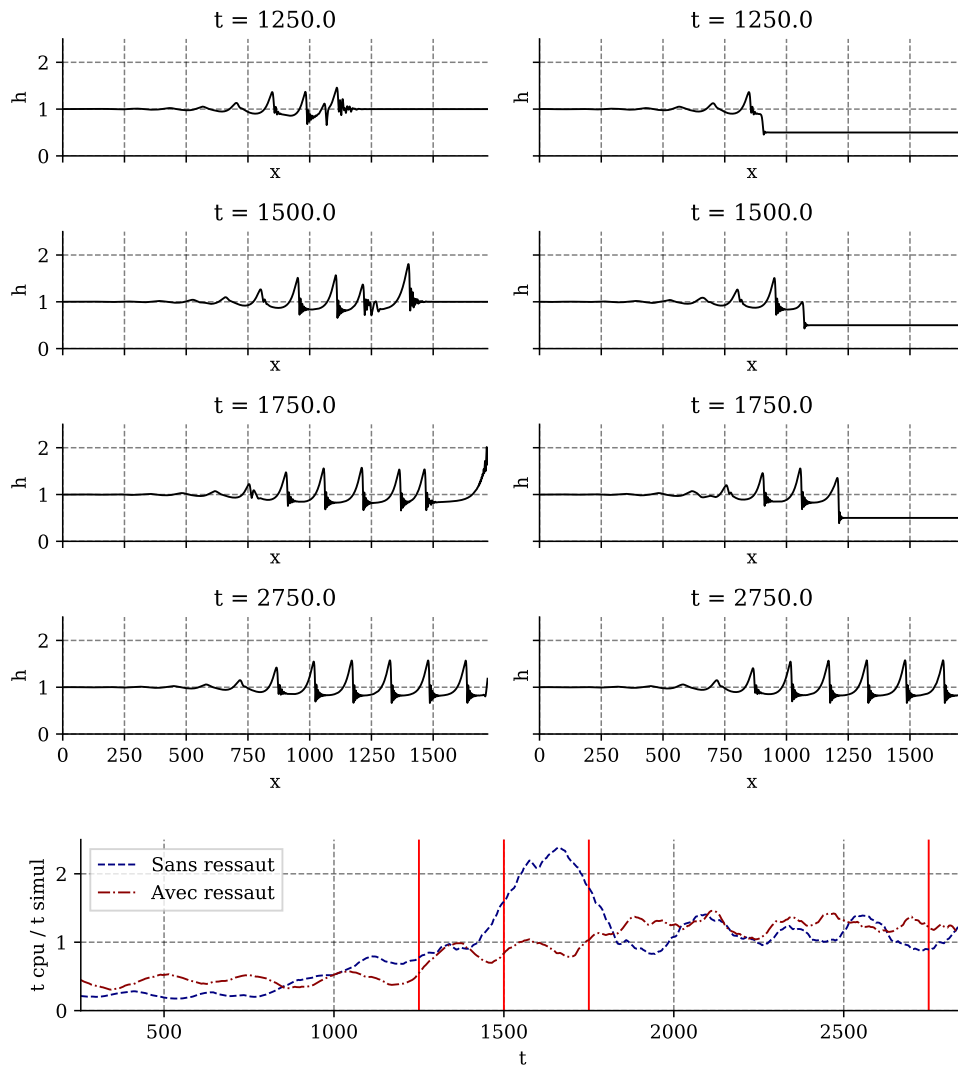


Figure 2.14 – A gauche une simulation sans ressaut hydraulique, à droite avec ressaut. En bas le temps cpu par pas de temps est indiqué pour les deux cas. Sans ressaut, la première onde croît et impacte la performance du solveur jusqu’à sa sortie du domaine. Le ressaut absorbe les premières ondes.

### 2.3.2 Condition limite d’écoulement libre

Un autre problème est l’évacuation des ondes en bout de domaine. Plusieurs solutions sont présentées dans la littérature, mais le problème n’est pas trivial.

Il n'existe pas de conditions simples pour représenter un écoulement de sortie libre pour des problèmes de type surface libre. Les solutions les plus adaptées consistent à filtrer les ondes qui arrivent à la frontière afin de laisser passer les ondes voyageant dans le sens de l'écoulement tout en empêchant les ondes de remonter le domaine. La mise en place de tels filtres est loin d'être évidente. Une solution plus simple est la mise en place d'une zone tampon dans laquelle les ondes seront progressivement atténuées avant d'être évacuées.

À noter que notre problème étant fortement convectif, un "mauvais" traitement des conditions en sortie ne pourra affecter la solution que dans une zone restreinte du domaine. Il s'agira alors de choisir la méthode qui limite au maximum cette "zone morte" tout en limitant au maximum la chute de performance du solveur dû aux perturbations dans cette zone. Dans les cas les plus dramatiques ces perturbations peuvent bloquer la simulation.

La solution choisie se rapproche d'une zone tampon. Dans nos équations, l'influence de la pression hydrostatique est pilotée par un nombre adimensionnel,  $Ct$ , le nombre d'inclinaison. Celui-ci est égal à 0 pour un film vertical, et tend vers l'infini pour un film horizontal. Au lieu d'utiliser un nombre d'inclinaison constant, nous utilisons un nombre d'inclinaisons dépendant de la coordonnée  $x$ . Celui-ci va augmenter en fin de domaine suivant une sigmoïde (voir figure 2.15) ce qui va "écraser" les ondes en fin de domaine et permettre de les évacuer en limitant les perturbations. Nous perdons donc un bout du domaine ( $\approx 10\%$ ) mais la résolution est plus stable et plus fluide.

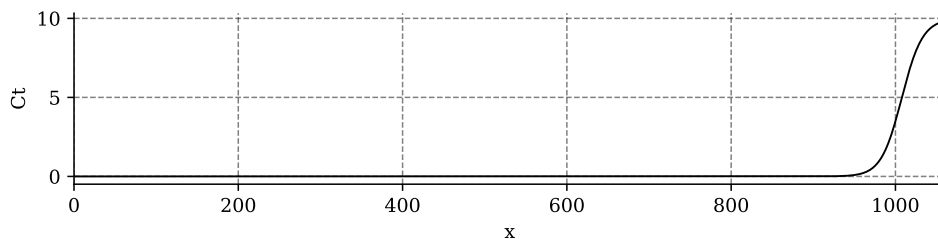


Figure 2.15 – Nombre d'inclinaison variable le long de l'écoulement

Les travaux de Paz, Storti et Garelli (2011) nous indiquent une piste permettant la mise en place d'une meilleure condition limite de sortie de canal, spécifique à notre système.

En effet, si l'on considère un système tronqué aux termes hyperboliques,

par exemple

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = A(q/h) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \dots \quad (2.34)$$

où  $h$  est l'épaisseur du film et  $q$  le débit local.

Le calcul des valeurs propres  $ck_{\pm}$  nous donne accès aux vitesses de propagations des ondes. En imposant en fin de domaine

$$\begin{cases} \partial_t h = -\partial_x q \\ \partial_t q = ck_+ \partial_x q \end{cases} \quad (2.35)$$

La première équation est la conservation de la masse.

Nous obtenons une frontière absorbante les ondes sans provoquer de retour d'écoulement. A noter que toutes les simulations effectuées dans cette étude ne profitent pas de cette condition limite, ayant été mis en place vers la fin de l'étude.

## Conclusion

Afin de résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrés durant notre étude, un outil fondé sur la méthode des lignes a été développé. Celui-ci permet une résolution efficace et robuste des EDP en 1D. Les dérivées spatiales sont approchées par différences finies et la jacobienne du système est obtenue analytiquement par un outil de calcul symbolique. Après discrétisation, le problème se réduit à un problème aux valeurs initiales qui est résolu via un schéma implicite d'ordre élevé couplé à un pas de temps adaptatif.

Cet outil a été validé vis à vis de cas considérés comme difficiles à résoudre (problème de rupture de barrage), et est adapté aux problèmes que nous allons devoir résoudre dans la suite de cette étude.



# Chapitre 3

## Modèle laminaire non-isotherme

“Tous les modèles sont faux, certains sont utiles”

— G. Box

---

3.1	Développements mathématiques . . . . .	89
3.1.1	Mise à l'échelle . . . . .	90
3.1.2	Équations primitives . . . . .	91
3.1.3	Équation de type couche limite . . . . .	93
3.1.4	Transformation de Prandtl . . . . .	96
3.1.5	Développements en gradients . . . . .	98
3.1.6	Modèles intégraux . . . . .	99
3.2	Validation des modèles . . . . .	114
3.2.1	Validation du modèle hydrodynamique . . . . .	114
3.2.2	Validation face au modèle thermique complet . .	115

---



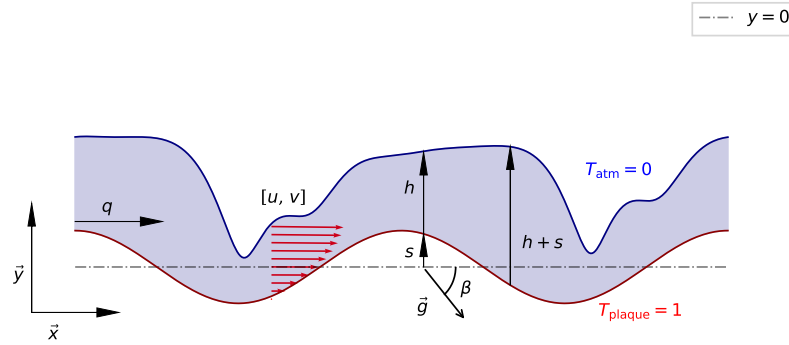
Nous avons pour objectif une étude des mécanismes d'intensification des transferts au sein des films ruisselants. Nous avons vu dans le chapitre 1 que les outils de simulations numériques directes présentaient de fortes limitations dû à leurs coûts prohibitifs dès lors que les domaines à modéliser font une certaine taille. Nous avons également vu qu'une approche asymptotique était possible, l'ensemble de la dynamique du film, l'ensemble des variables étant alors asservies à l'épaisseur du film  $h$ . Bien que cette approche nous apporte des informations importantes, en particulier quant au seuil d'instabilité primaire, elle est incapable de représenter correctement l'écoulement dès lors que nous nous éloignons un tant soit peu de nos hypothèses. Dans les faits, ces modèles (dit de Benney) sont inutilisables pour un nombre de Reynolds dépassant l'unité.

L'objectif de ce chapitre est donc de développer des modèles qui, tout en étant asymptotiquement cohérents avec les modèles de Benney (pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), soient capable de modéliser des écoulements lorsque nous nous éloignons de l'hypothèse onde longue. De cette façon, il est possible de proposer un modèle capable de modéliser un écoulement pour des Reynolds modérés tout en conservant les propriétés tels que le seuil de stabilité primaire.

Nous allons donc procéder de manière suivante : nous allons d'abord faire un court rappel du système physique suivi d'un paragraphe sur l'adimensionnalisation choisie. Suivront les deux parties principales. La première traite du développement du modèle hydrodynamique couplé à la thermique et contient une comparaison entre notre modèle et les modèles asymptotiques d'ordres équivalents. La seconde de la validation de ce modèle vis-à-vis de simulations numériques directes tirées de la littérature. En complément, un modèle utilisant l'équation de Fourier est utilisé pour valider notre modèle pour de nombreux paramètres physiques.

## 3.1 Développements mathématiques

☀ Rappel



Les coordonnées sont fixées de façon à avoir le vecteur unitaire  $\vec{x}$  dans le sens de l'écoulement et le vecteur  $\vec{y}$  normal à la hauteur moyenne du support d'écoulement.

Le système étudié est un film ruisselant d'épaisseur  $h$  sur une plaque ondulée (ou plane) inclinée selon un angle  $\beta$  vis à vis du plan horizontal plaque située en  $y = s(x, t)$ . La plaque est à une température constante  $T_{y=s} = T_{\text{plaque}}$ . Le film s'écoule suivant un champ de vitesse dont les composantes en  $x$  et  $y$  sont respectivement  $u$  et  $v$ . Le film est en contact avec une atmosphère à température  $T_{\text{atm}}$ . Cette atmosphère est considérée comme passive d'un point de vue hydrodynamique et n'exerce aucun cisaillement sur le film.

La solution de base de notre système correspond à un film uniforme de hauteur  $\bar{h}_N$  ruisselant à un débit moyen  $\bar{q}_N$  le long d'une plaque inclinée plane.

Les inconnues de notre système sont  $h$ , le champ de vitesse  $[u, v]$  et la température  $T$ . On introduit également  $q = \int_s^h u \, dy$  le débit local,  $\theta = T|_{y=h}$  la température de l'interface,  $\phi = h \partial_y T|_{y=s}$  qui représente le flux pariétal (bien qu'ayant la même dimension que  $\theta$  qui représente une température).

Les grandeurs physiques sont la masse volumique  $\rho$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ), la viscosité cinématique  $\nu$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ), la diffusivité thermique de l'atmosphère

$\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ), la conductivité thermique du film  $\lambda$  ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) et sa capacité calorifique  $c_p$  ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). On définit la tension de surface par  $\sigma = \sigma_\infty - \gamma (T_s - T_\infty)$ , avec  $T_s$  la température de l'interface et  $T_\infty$  la température de l'atmosphère : la variation de la tension de surface avec la température est considéré linéaire.  $\alpha$  est le coefficient de transfert thermique convectif ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ) entre la surface du film et l'atmosphère.

### 3.1.1 Mise à l'échelle

#### 3.1.1.1 Film de Nusselt

Le film de Nusselt correspond à la solution de base pour lequel le film est parallèle à un support d'écoulement plan. On a dans ce cas  $h = \bar{h}_N$  avec  $\bar{h}_N$  l'épaisseur du film de Nusselt équivalent. Dans ce cas, les équation de Navier-Stokes ont une solution triviale

$$\begin{cases} u(y) = g \frac{\sin \beta}{2\nu} \\ v(y) = 0 \\ p(y) = p_{atm} + \rho g \cos \beta (\bar{h}_N - y) \\ T(y) = T_w - \frac{\alpha(T_{plaque} - T_{atm})}{\lambda + \alpha \bar{h}_N} y \end{cases} \quad (3.1)$$

Cette solution s'appelle solution de Nusselt, et cette solution sera utilisée pour adimensionnaliser notre système. Dans ce but, nous introduisons deux échelles visco-gravitaires, une pour la longueur et une pour le temps :

$$l_v = \left( \frac{\nu^2}{g \sin \beta} \right)^{1/3} \quad t_v = \left( \frac{\nu}{(g \sin \beta)^2} \right)^{1/3}$$

Ces échelles proviennent de l'équilibre entre la viscosité et l'accélération gravitaire. Ce sont ces grandeurs qui fixent l'épaisseur du film de Nusselt.

Il est également nécessaire d'introduire les grandeurs de Nusselt suivantes, la vitesse moyenne du film de Nusselt et le débit volumétrique.

$$\begin{aligned} \bar{u}_N &= \frac{g \sin \beta \bar{h}_N^2}{3\nu} \\ \bar{q}_N &= \int_0^{\bar{h}_N} u(y) dy = \frac{g \sin \beta \bar{h}_N^3}{3\nu} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les nombres adimensionnels utilisés sont :  $Ct = \cot \beta$  le nombre d'inclinaison.  $\mathbf{Re} = \frac{g \sin \beta \bar{h}_N^3}{3\nu^2}$  le nombre de Reynolds qui représente le ratio entre forces inertielles et visqueuses (à noter que le  $\mathbf{Re}$  est défini vis-à-vis de la vitesse moyenne. Certains auteurs utilisent la vitesse à l'interface, ce qui mène à une définition différente).  $\mathbf{We} = \frac{\Gamma}{h_N^2}$  (avec  $h_N = \bar{h}_N/l_v$ ) le nombre de Weber, rapport entre inertie du fluide et tension de surface.  $\mathbf{Pe} = \mathbf{Pr} \mathbf{Re}$  le nombre de Peclet le ratio entre temps caractéristiques des transferts convectif et diffusif.  $\mathbf{B} = \frac{\alpha \bar{h}_N}{\lambda}$  le nombre de Biot de surface propre au film. Le nombre de Biot fait le ratio entre le transfert thermique à l'intérieur d'un corps et à sa surface. La température à la paroi étant fixée (équivalent à  $\mathbf{Bi} \rightarrow \infty$ ), seul le nombre de Biot à l'interface sera défini.

Il est alors également nécessaire de définir les nombres suivants :  $\mathbf{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$  le nombre de Prandtl.  $\mathbf{Bi} = \frac{\alpha l_v}{\lambda}$  le nombre de Biot de surface. Contrairement au  $\mathbf{B}$ , celui-ci dépend de l'angle d'inclinaison de la plaque.  $\Gamma = \frac{\sigma_\infty l_v}{\rho \nu^2}$  le nombre de Kapitza qui compare tension de surface et force inertielle.  $\mathbf{Ma} = \Gamma \frac{\gamma \Delta T}{\sigma_\infty}$  le nombre de Marangoni qui représente le rapport entre force de surface induite par un gradient de température ou de concentration et force visqueuse.

On introduira également la coordonnée normale réduite  $\bar{y} = \frac{y}{h}$ , comprise entre 0 et 1 là où la coordonnée  $y$  est comprise entre 0 et  $h$ .

### 3.1.2 Équations primitives

Les équations primitives sont les équations de Navier-Stokes 2D (équation de continuité et conservation du moment à travers le film et le long de l'écoulement) couplées à l'équation fondamentale de la chaleur. Ces équations sont adimensionnalisées (adimensionnalisation de Nusselt) et la solution de Nusselt (correspondant à un film plat) est utilisée pour réduire les dimensions du système.

La mise à l'échelle décrite plus haut borne la température :  $T \in [0, 1]$  au lieu de  $\tilde{T} \in [T_{\text{atm}}, T_{\text{plaque}}]$ .

- L'équation de continuité

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.3)$$

- La conservation du moment (cas incompressible 2D)

$$3\text{Re} (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u) = -\partial_x p + \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + 1 \quad (3.4)$$

$$3\text{Re} (\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v) = -\partial_y p + \partial_{xx} v + \partial_{yy} v - Ct \quad (3.5)$$

- L'équation de la chaleur

$$3\text{Pe} (\partial_t T + u\partial_x T + v\partial_y T) = \partial_{xx} T + \partial_{yy} T \quad (3.6)$$

Les conditions limites hydrodynamiques correspondent à une condition de non-glissement sur le support ( $y = s$ ) et une atmosphère passive vis à vis de l'interface ( $y = (h + s)$ ).

Pour la thermique, le support est maintenu à une température fixe et une condition de refroidissement de Newton est utilisée au niveau de l'interface. Cette condition prend en compte la perte de chaleur du film vers l'atmosphère. Un nombre de Biot élevé correspond au transfert maximal à travers le film et à une température d'interface proche de celle de l'atmosphère. Pour un film ruisselant en condition d'ébullition et pour une phase vapeur pure sans incondensables, on tend vers  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ , pour lequel la température de l'interface est à l'équilibre avec la température de l'atmosphère. Un nombre de Biot plus faible représente une résistance thermique plus importante due à une sous-couche thermique plus épaisse côté atmosphère. Avec  $\text{Bi} = 0$ , le flux thermique est nul (condition dite adiabatique).

- sur le support ( $y = s$ ) :

- Condition de non-glissement

$$u = 0 \quad (3.7a)$$

$$v = 0 \quad (3.7b)$$

- Température fixe

$$T = 1 \quad (3.8)$$

- à l'interface ( $y = h + s$ ) :

– Contrainte libre, composante normale

$$p = \frac{2}{n^2} \left[ (\partial_x h)^2 \partial_x u - \partial_x h (\partial_y u + \partial_x v) + \partial_y v \right] - \frac{\text{We}}{n^3} \partial_{xx} h \quad (3.9)$$

– Contrainte libre, composante tangentielle

$$0 = \frac{1}{n} \left[ 2\partial_x h (\partial_y v - \partial_x u) + \left( 1 - (\partial_x h)^2 \right) (\partial_y u + \partial_x v) \right] \quad (3.10)$$

Avec  $n$  la normale à l'interface  $n = -\frac{\partial_x h}{1+(\partial_x h)^2}$

– Condition de Robin (loi de refroidissement de Newton ou perte de chaleur convective) :

$$\partial_y T = \partial_x h \partial_x T - BT \sqrt{1 + (\partial_x h)^2} \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Équation de type couche limite

Malgré une première série d'hypothèses simplifiant le problème physique (incompressibilité du fluide et réduction du système à deux dimensions), les équations (3.4) à (3.11) restent un système d'équations différentielles complexe et numériquement difficile à résoudre.

Une des caractéristiques de notre système est que la couche de fluide est fine comparée aux dimensions caractéristiques de l'écoulement. L'épaisseur caractéristique du film est faible comparée à la longueur des plaques. Il est possible de se servir de ce ratio pour ordonner les termes mathématiques du système d'équations et de le simplifier. Pour cela, un petit paramètre  $\varepsilon$  est introduit :

$$\varepsilon = \frac{h}{\lambda} \ll 1 \quad (3.12)$$

$\lambda$  est égale à la longueur caractéristique des phénomènes que l'on cherche à observer dans le sens de l'écoulement. Il est introduit via les transformations suivantes :

$$(\partial_t, \partial_x) \rightarrow \varepsilon (\partial_t, \partial_x) \quad (\partial_{tt}, \partial_{xx}) \rightarrow \varepsilon^2 (\partial_{tt}, \partial_{xx}) \quad (3.13)$$

Remarque :

Dans l'approximation des équations couches limites, la grandeur caractéristique  $\lambda$  est définie et serait dans notre cas égale à la longueur de la plaque.

Mais les objets que l'on cherche à observer (les différentes ondes) n'ont pas de longueurs définies à priori : nous n'y avons accès qu'après avoir fait tourner les simulations ou grâce aux précédents travaux expérimentaux. Il est donc impossible d'attribuer une valeur numérique définie au paramètre  $\varepsilon$  qui peut être vu comme un outil mathématique permettant d'ordonner les différents termes de nos équations et d'effectuer un développement asymptotique.

Les étapes qui suivent sont un rappel du développement des équations couches limites tel que présenté dans les travaux de Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000).

Dans un premier temps, le paramètre  $\varepsilon$  est introduit dans l'équation de la continuité 3.3 par la transformation 3.13 :

$$\varepsilon \partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.14)$$

Ce qui impose que  $v$  soit d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  pour que tous les termes de l'équation de continuité soient du même ordre. La série de transformations 3.13 devient alors

$$(\partial_t, \partial_x) \rightarrow \varepsilon (\partial_t, \partial_x) \quad (\partial_{tt}, \partial_{xx}) \rightarrow \varepsilon^2 (\partial_{tt}, \partial_{xx}) \quad v \rightarrow \varepsilon v \quad (3.15)$$

Appliquant ces transformations aux équations 3.4 à 3.6, on obtient

$$3\varepsilon \text{Re} (\partial_t u + u \partial_x u v \partial_y u) = -\varepsilon \partial_x p + \varepsilon^2 \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + 1 \quad (3.16)$$

$$3\varepsilon^2 \text{Re} (\partial_t v + u \partial_x v v \partial_y v) = -\partial_y p + \varepsilon \partial_{yy} v - Ct + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.17)$$

$$3\varepsilon \text{Pe} (\partial_t T + u \partial_x T + v \partial_y T) = \varepsilon^2 \partial_{xx} T + \partial_{yy} T \quad (3.18)$$

dans lequel les termes en  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  et plus ont été négligés. Notons que les termes inertiels de l'équation (3.17) ont été négligés : en effet, la pression étant intégrée puis réinjectée dans l'équation (3.16) à travers le terme  $\partial_x p$ , il est possible de diminuer l'ordre de l'équation (3.17). Cette simplification est importante, car en éliminant ces termes inertiels, on introduit une différence de structure entre les équations (3.16) et (3.17) et une séparation d'échelle entre les directions  $x$  et  $y$ .

En appliquant la même démarche, on obtient pour les conditions limites :

- pour  $y = s$

$$u = v = 0 \quad (3.19a)$$

$$T = 1 \quad (3.19b)$$

- pour  $y = (h + s)$

$$v = \partial_t h \quad (3.20a)$$

$$p = 2\varepsilon(\partial_y v - \partial_x h \partial_y u) - \varepsilon^2 \text{We} \partial_{xx} h \quad (3.20b)$$

$$\partial_y u = \varepsilon^2 (4\partial_x h \partial_x u - \partial_x v) \quad (3.20c)$$

L'équation (3.20c) montre que  $\partial_y u|_{y=(h+s)}$  est d'ordre  $\varepsilon^2$ , ce qui permet de simplifier l'équation (3.20b). Celle-ci devient

$$p = 2\varepsilon \partial_y v - \varepsilon^2 \text{We} \partial_{xx} h + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.21)$$

Le terme  $\varepsilon^2 \text{We}$  est considéré d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ , ce qui explique que ce terme soit présent. Cela permet de préserver l'effet du terme de tension de surface qui joue un rôle majeur pour la modélisation des films ruisselants.

L'équation 3.17 est intégrée entre les bornes  $[y, (h + s)]$ , ce qui mène à, après prise en compte des conditions limites :

$$p = Ct((h + s) - y) - \varepsilon^2 \text{We} \partial_{xx} h + \varepsilon(\partial_y v + \partial_y v|_{y=(h+s)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.22)$$

On obtient donc un système d'équation au premier ordre formé de :

$$\begin{aligned} 3\varepsilon \text{Re} (\partial_t u + v \partial_y u + u \partial_x u) \\ = 1 + \partial_{yy} u - Ct \partial_x (h + s) + \text{We} \partial_{xxx} (h + s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

et de l'équation de continuité (3.3) ainsi que des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{en } y = 0 \\ \partial_y u = 0 & \text{en } y = s + h \end{cases} \quad (3.24)$$



Et un système d'équation au second ordre formé de :

$$\begin{aligned}
 & 3\varepsilon\text{Re} (\partial_t u + v\partial_y u + u\partial_x u) \\
 & + \varepsilon^2 \left( \partial_{xy} v - \partial_{xy} v|_{(h+s)} + \partial_x h \partial_{yy} v|_{(h+s)} - \partial_{xx} u \right) \\
 & = 1 + \partial_{yy} u - Ct \partial_x h + \varepsilon^3 \text{We} \partial_{xxx} h + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

et des équations (3.3) et (3.20a).

Les deux systèmes obtenus sont appelés équations de couche limite (C.L.) pour le problème posé de part leur similitude avec les équations de Prandtl pour la C.L. classique.

### 3.1.4 Transformation de Prandtl

Il reste à appliquer une transformation de Prandtl afin de pouvoir travailler sur un domaine qui sera indépendant de la géométrie du fond. Cette transformation a été rapidement décrite dans le chapitre 1. Pour rappel, pour travailler plus aisément sur un fond à géométrie variable nous nous ramenons d'abord au cas d'un fond fixe grâce à la transformation de Prandtl (Prandtl, 1938).

$$y_{Pr} = y - s \tag{3.26}$$

$$v_{Pr} = v + u \partial_x s \tag{3.27}$$

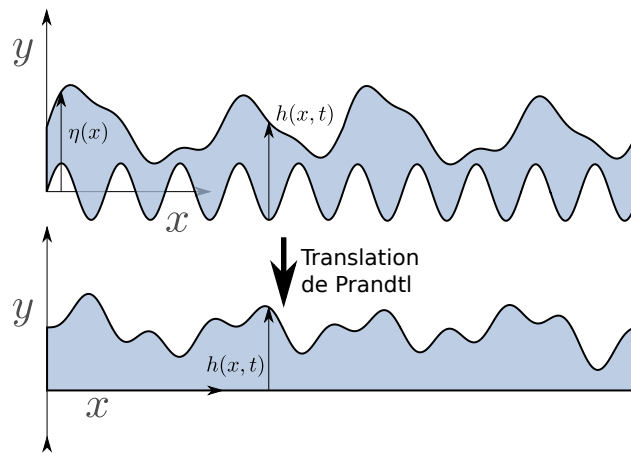


Figure 3.1 – Transformation de Prandtl (ou translation de Prandtl)

Prandtl (1938) a démontré l'équivalence des équations de la couche limite sous cette translation, permettant de prendre en compte la géométrie du support d'écoulement directement au sein des équations sans avoir à changer le domaine de résolution.

$$y_{Pr} \in [0, h] \quad y \in [s, h + s] \quad (3.28)$$

Notons que l'équation de C.L. au premier ordre est invariante par la transformée de Prandtl. Ce n'est pas le cas au second ordre :

$$\begin{aligned} & 3\varepsilon \text{Re}(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) \\ &= 1 + \partial_{yy} u - \varepsilon C t \partial_x (h + s) \\ & \quad + \varepsilon^3 \text{We} \partial_{xxx} (h + s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned} & 3\varepsilon \text{Re}(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) \\ &= 1 + \partial_{yy} u - \varepsilon C t \partial_x (h + s) \\ & \quad + \varepsilon^3 \text{We} \partial_{xxx} (h + s) \\ & \quad + \varepsilon^2 \left[ \frac{31q \partial_x h^2}{4h^2} + \partial_x h \left( \frac{5q \partial_x s}{4h^2} - \frac{33\partial_x q}{4h} \right) \right. \\ & \quad \quad - \frac{15\partial_x q \partial_x s}{4h} - \frac{5q \partial_x s^2}{h^2} - \frac{33q \partial_{xx} h}{8h} \\ & \quad \quad \left. + \frac{13\partial_{xx} q}{4} - \frac{15q \partial_{xx} s}{8h} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.29b)$$

L'équation de la continuité est elle, invariante :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.30)$$

Cette série d'équations, appelées équations de couche limite d'ordres un et deux peut être résolue telles quelles par des méthodes adaptées. Elles peuvent aussi servir de base aux développements menant aux équations de Benney et aux développements de modèles intégraux (Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000)). Les premiers nous serviront de référence : nous cherchons dans le cas des modèles intégraux à être asymptotiquement consistant avec ceux-ci.

### 3.1.5 Développements en gradients

L'idée derrière les développements asymptotiques est de considérer que les variables dépendantes  $(u, v, p, T)$  peuvent s'écrire comme une série en  $\varepsilon$ , avec un terme principal et différentes corrections dont l'ordre en  $\varepsilon$  va en diminuant.

On a alors

$$\begin{cases} u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon u^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon v^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon T^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{cases} \quad (3.31)$$

en intégrant ce développement dans les équations de couche limite et en se restreignant aux termes  $\mathcal{O}(1)$ , il est possible de résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} 1 + \partial_{yy} u_0 = 0 \\ Ct + \partial_y p_0 = 0 \\ \partial_x u_0 + \partial_y v_0 = 0 \\ \partial_{yy} T_0 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Ce qui combiné aux conditions limites donne :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(2yh - y^2) \\ v_0 = -\frac{1}{2}y^2 \partial_x h \\ p_0 = Ct(h - y) - We \partial_{xx}(h + s) \\ T_0 = \frac{1 - By + Bh}{1 + Bh} \end{cases} \quad (3.33)$$

En injectant cette solution dans la condition cinématique, on obtient une équation d'évolution des films ruisselants à l'ordre principal.

$$\partial_t h + h^2 \partial_x h = 0 \quad (3.34)$$

Il est alors possible de réinjecter la solution pour l'ordre principal dans le système d'équations couche limite afin de résoudre le système à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$

puis  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Il n'y a pas de difficultés particulières dans cette résolution, et les équations d'évolutions pour  $h$  peuvent s'écrire sous la forme

$$\partial_t h + \partial_x \sum \varepsilon^i q^{(i)} = 0 \quad (3.35)$$

Les valeurs de  $q^{(i)}$  sont décrites dans la table 3.1.

Ces équations d'évolutions sont utiles pour valider les modèles intégraux mais ne sont pas adaptées à une résolution de système dont le nombre de Reynolds dépasse l'unité. Les simulations tendent à diverger rapidement et ce indépendamment de la méthode de résolution numérique. L'ensemble des champs sont asservis à l'épaisseur du film  $h$ , ce qui est valide uniquement dans le cas asymptotique. Il est nécessaire d'aborder le problème sous un autre angle pour étendre les résolutions à des nombre de Reynolds plus importants, tout en gardant le lien avec le développement en gradient afin de conserver les propriétés asymptotiques du problème.

### 3.1.6 Modèles intégraux

#### 3.1.6.1 Hydrodynamique

En particulier, nous allons nous intéresser à la méthode intégrale aux résidus pondérés. Cette méthode est couramment utilisée depuis les travaux de Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000) et permet une modélisation des films ruisselants pour des  $\mathbf{Re}$  plus élevés, allant jusqu'à  $\mathbf{Re} \approx 50$ <sup>1</sup>. Cela s'explique entre autre par un nombre de degrés de liberté plus important que pour les modèles de Benney : on introduit le débit local  $q = \int_0^h u dy$  comme une inconnue du système d'équations différentielles.

Ce développement nécessite des hypothèses de fermeture. Dans notre cas, on va faire une hypothèse sur la forme du champs de vitesse. On va considérer que le champ de vitesse sera proche de celui du film de Nusselt. Ce sera une fonction parabolique, auquel se rajouteront des corrections aux ordres plus élevés. Cela garantit que les conditions limites sont respectées à l'ordre principal.

---

<sup>1</sup>Atteindre des valeurs plus élevées nécessite le traitement de la transition à la turbulence, et une modélisation plus complexes. Des travaux sont en cours en ce sens, et seront décrits dans le chapitre 5

$$q^{(0)} = \frac{h^3}{3} \quad (3.36a)$$

$$q^{(1)} = h^6 \operatorname{Re} \left( \frac{2\partial_x h}{5} + \frac{5\partial_x s}{16} \right) - \frac{1}{3} Ct h^3 (\partial_x h + \partial_x s) \\ + \frac{1}{3} h^3 \operatorname{We} (\partial_{xxx} h + \partial_{xxx} s) \quad (3.36b)$$

$$q^{(2)} = \operatorname{Re} \left[ - Ct \left( \frac{1}{40} h^6 (64\partial_x h^2 + 73\partial_x h \partial_x s + 25\partial_x s^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{105} h^7 (50\partial_{xx} h + 29\partial_{xx} s) \right) \right. \\ \left. + \operatorname{We} \left( h^6 \left( 4\partial_x h \partial_{xxx} h + 2\partial_x h \partial_{xxx} s + \frac{41\partial_x s \partial_{xxx} h}{40} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5\partial_x s \partial_{xxx} s}{8} + \frac{6}{5} \partial_{xx} h (2\partial_{xx} h + \partial_{xx} s) \right) \right. \\ \left. + \frac{6}{5} \partial_x h h^5 (\partial_x h (4\partial_{xx} h + \partial_{xx} s) + \partial_x s \partial_{xx} h) \right. \\ \left. + \frac{1}{105} h^7 (50\partial_{xxx} h + 29\partial_{xxx} s) \right] \\ + \operatorname{Re}^2 \left[ \frac{h^9 (16256\partial_x h^2 + 18093\partial_x h \partial_x s + 5208\partial_x s^2)}{4480} \right. \\ \left. + h^{10} \left( \frac{4\partial_{xx} h}{7} + \frac{2759\partial_{xx} s}{8960} \right) \right] \\ + \frac{1}{3} h^3 (7\partial_x h^2 - \partial_x h \partial_x s - 2\partial_x s^2) + h^4 \left( \partial_{xx} h - \frac{\partial_{xx} s}{2} \right) \quad (3.36c)$$

Table 3.1 – Valeurs de  $q^{(i)}$

Si on effectue une décomposition asymptotique

$$u = \tilde{u}_0(q, h) + \varepsilon \tilde{u}_1(q, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.37)$$

Le terme  $\tilde{u}_0$  doit être compatible avec le développement en gradient (3.33) pour l'asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On a alors

$$\tilde{u}_0(q_0, h) = u_0 \quad (3.38)$$

On choisit

$$\tilde{u}_0 = \frac{3q}{h} \left( \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right) \quad (3.39)$$

Ce terme est compatible avec le développement en gradient. Le débit local  $q$  est défini par

$$q = \int_0^h u \, dy \quad (3.40)$$

Cette relation étant valable pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la condition suivante doit être vérifiée :

$$\int_0^h \tilde{u}_1 \, dy = 0 \quad (3.41)$$

La composante normale du champ de vitesse  $v$  s'obtient en remplaçant  $u$  dans l'équation de la continuité. On obtient alors :

$$v = \varepsilon - \frac{3\partial_x h q y^3}{2h^4} + \frac{3\partial_x h q y^2}{h^3} + \frac{\partial_x q y^3}{2h^3} - \frac{3\partial_x q y^2}{2h^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.42)$$

La méthode est appelée méthode aux résidus pondérés car l'équation de conservation du moment en  $x$  sera pondérée par une fonction  $w(\bar{y})$  (pour rappel,  $\bar{y} = \frac{y}{h}$ ), puis intégrée à travers l'épaisseur du film.

$$R_i = \int_0^h w_i \mathcal{E} \, dy \quad (3.43)$$

On cherche  $w(\bar{y})$  de façon à simplifier les manipulations algébriques tout en conservant la consistance avec le développement en gradient.

On obtient au premier ordre un unique résidu obtenu à partir de la conservation de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned}
R_0^{(1)} = \int_0^h w_0(\bar{y}) [\varepsilon(Ct(\partial_x h + \partial_x s) \\
+ 3\text{Re}(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) \\
- \text{We}(\partial_{xxx} h + \partial_{xxx} s)) - \partial_{yy} u - 1] dy
\end{aligned} \quad (3.44)$$

Le seul terme pour lequel la contribution  $\tilde{u}_1$  apparaît est le terme  $\partial_{yy} u$ . En intégrant celui-ci deux fois par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^h w_0(\bar{y}) \partial_{yy} u dy &= - \int_0^h \frac{1}{h} w_0'(\bar{y}) \partial_y u dy + [w_0(\bar{y}) \partial_y u]_0^h \\
&= \int_0^h \frac{1}{h^2} w_0''(\bar{y}) u dy + [w_0(\bar{y}) \partial_y u]_0^h - [w_0'(\bar{y}) u]_0^h
\end{aligned} \quad (3.45)$$

Ce qui permet d'ajouter des conditions sur  $w_0$  permettant d'éliminer la contribution des corrections  $\tilde{u}_1$  : pour cela, il est nécessaire de remplir les conditions

$$\begin{cases} w_0(\bar{y} = 0) = 0 \\ w_0'(\bar{y} = 1) = 0 \\ \int_0^h w_0''(\bar{y}) \tilde{u}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

La dernière condition est vérifiée via la relation de jauge (3.41) si  $w_0'' = \text{constante}$ . Nous nous limiterons donc à un polynôme d'ordre 2. Combiné aux deux premières conditions, on obtient la fonction de pondération suivante :

$$w_0(\bar{y}) = \bar{y} - \frac{1}{2} \bar{y}^2 \quad (3.47)$$

En annulant le résidu  $R_0$  et en utilisant l'équation de continuité on obtient les équations d'évolutions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t h &= -\partial_x q \\ 3\varepsilon \text{Re} \partial_t q &= \frac{5h}{6} - \frac{5q}{2h^2} \\ &+ \varepsilon \left[ \frac{3}{7} \text{Re} (9\partial_x h \frac{q}{h} - 17\partial_x q) \frac{q}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{6} Ct \partial_x (h + s) h \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{6} \text{We} \partial_{xxx} (h + s) h \right] \end{aligned} \right. \quad (3.48)$$

Ordre deux :

Le modèle d'ordre deux complet s'obtient en rajoutant des correctifs au champ de vitesse et en augmentant l'ordre de l'équation de conservation du moment en  $x$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter des équations d'évolutions pour les termes correctifs du champ de vitesse en ajoutant des résidus. Il est possible de simplifier grandement le système en faisant l'hypothèse que ces corrections sont d'ordres supérieurs à l'ordre 2. Avec cette hypothèse, les termes correctifs n'apparaissent pas dans le calcul du résidu ce qui permet d'obtenir le modèle d'ordre deux simplifié. Une des conséquences de cette hypothèse est que les termes inertiels du second ordre ne sont pas pris en compte par ce modèle. Cela peut être problématique pour les nombre de Reynolds élevés pour lesquels des effets tri-dimensionnels apparaissent (Kalliadasis, Ruyer-Quil, Scheid et Velarde, 2012).

Le résidu à l'ordre deux est donc :

$$\begin{aligned}
 R_0^{(2)} = \int_0^h w_0(\bar{y}) [ & \varepsilon(Ct(\partial_x h + \partial_x s) + 3\text{Re}(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) \\
 & - \text{We}(\partial_{xxx} h + \partial_{xxx} s)) \\
 & + \varepsilon^2(\partial_x h (\partial_x s \partial_{yy} u|_h + \partial_{yy} v|_h) \\
 & + \partial_x s \partial_{xy} u|_h + \partial_{xx} s \partial_y u|_h + \partial_{xy} v|_h) \\
 & - \partial_{yy} u - 1] dy
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

On obtient alors le système d'équations différentielles partielles représen-



tant l'évolution de l'épaisseur du film et du débit local d'ordre deux suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h = -\partial_x q \\ 3\varepsilon \text{Re} \partial_t q = \frac{5h}{6} - \frac{5q}{2h^2} \\ \quad + \varepsilon \left[ \frac{3}{7} \text{Re} (9\partial_x h \frac{q}{h} - 17\partial_x q) \frac{q}{h} \right. \\ \quad \quad \left. - \frac{5}{6} \text{Ct} \partial_x (h+s) h \right. \\ \quad \quad \left. + \frac{5}{6} \text{We} \partial_{xxx} (h+s) h \right] \\ \quad + \varepsilon^2 \left[ \partial_x h^2 \left( -\frac{15qs^2}{h^4} + \frac{15qs}{2h^3} + \frac{4q}{h^2} \right) \right. \\ \quad \quad + \partial_x h \left( \partial_x q \left( \frac{15s^2}{2h^3} - \frac{5s}{2h^2} - \frac{9}{2h} \right) + \frac{15\partial_x s q s}{h^3} - \frac{5\partial_x s q}{h^2} \right) \\ \quad \quad - \frac{5s\partial_x q \partial_x s}{h^2} - \frac{15\partial_x s^2 q}{2h^2} + \partial_{xx} h \left( \frac{15qs^2}{4h^3} - \frac{5qs}{2h^2} - \frac{6q}{h} \right) \\ \quad \quad \left. + \partial_{xx} q \left( \frac{9}{2} - \frac{5s^2}{4h^2} \right) + \partial_{xx} s \left( -\frac{5qs}{2h^2} - \frac{15q}{4h} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Les coefficients obtenus pour  $s = 0$  sont bien les mêmes que ceux trouvés par Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000). Comme précisé dans la section 3.1.4, l'équation CL est invariante au premier ordre. L'effet de la géométrie du fond n'a donc d'effet que sur les termes du second ordre en tant que termes diffusifs supplémentaires.

### 3.1.6.2 Thermique

La même méthode est appliquée pour la modélisation de la thermique. Le point de départ sera l'équation de la chaleur tronquée à  $\varepsilon$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  puis  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Ordre un, modèle à une équation :

Pour rappel, l'équation de la chaleur tronquée à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  :

$$3\varepsilon \text{Pe} (\partial_t T + u \partial_x T + v \partial_y T) - \partial_{yy} T = 0 \quad (3.51)$$

Le champ de température à l'ordre principal est linéaire, entre la température de la plaque ( $T = 1$ ) et la température d'équilibre de l'interface  $\theta$ , fonction du nombre de Biot. De façon similaire à l'hypothèse faite sur le champs de

vitesse pour l'hydrodynamique, nous allons considérer que le champ de température reste linéaire même en présence d'ondes. Le modèle étant d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , on effectue une décomposition asymptotique :

$$T = \tilde{T}_0(h, \theta) + \varepsilon \tilde{T}_1(h, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.52)$$

Il est nécessaire que le champ de température soit compatible avec le développement de la température. Sont rappelées ci dessous les grandeurs dérivées associées  $\theta = T(y = h)$  et  $\phi = h \partial_y T$  :

$$\begin{cases} T_0 = 1 - \frac{By}{Bh+1} \\ \theta_0 = \frac{1}{1+Bh} \\ \phi_0 = \frac{\theta_0-1}{h} = -\frac{Bh}{Bh+1} \end{cases} \quad (3.53)$$

On choisit alors

$$\tilde{T}_0 = \frac{y(\theta - 1)}{h} \quad (3.54)$$

Qui est bien compatible avec le développement en gradient. Il est également nécessaire de vérifier

$$T(y = h) = \theta \quad (3.55)$$

et ce dès l'ordre principal. Cette condition est bien vérifiée par l'équation (3.54), ce qui ajoute une condition de jauge supplémentaire :

$$\tilde{T}_1(y = h) = 0 \quad (3.56)$$

Le résidu à annuler s'écrit :

$$R_\theta^{(1)} = \int_0^h w_{\theta_0} (3\varepsilon \text{Pe}(\partial_t T + u \partial_x T + v \partial_y T) - \partial_{yy} T) dy = 0 \quad (3.57)$$

La stratégie quant au choix de la fonction de pondération  $w_{\theta_0}$  est la même que pour l'hydrodynamique : on cherche à éliminer la contribution de la correction du champ de température  $\tilde{T}_1$  dans le résidu. Celle-ci ne peut intervenir qu'à travers le terme  $\partial_{yy} T$ . En l'intégrant par partie deux fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^h w_{\theta_0}(\bar{y}) \partial_{yy} T dy &= - \int_0^h \frac{1}{h} w'_{\theta_0}(\bar{y}) \partial_y T dy + [w_{\theta_0}(\bar{y}) \partial_y T]_0^h \\
&= \int_0^h \frac{1}{h^2} w''_{\theta_0}(\bar{y}) T dy + [w_{\theta_0}(\bar{y}) \partial_y T]_0^h - [w'_{\theta_0}(\bar{y}) T]_0^h
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Afin d'éliminer les contributions  $\tilde{T}_1$ , il est nécessaire d'ajouter aux conditions limites (3.8), (3.11) et à la jauge (3.56) les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} w''_{\theta_0}(\bar{y}) = 0 \\ w'_{\theta_0}(\bar{y} = 1) = 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

On fixe alors

$$w_{\theta_0} = \frac{y}{h} \tag{3.60}$$

qui vérifie bien les conditions précédentes.

L'annulation du résidu permet d'obtenir une équation d'évolution pour  $\theta$  (Ruyer-Quil, Scheid, Kalliadasis, Velarde et Zeytounian, 2005) :

$$3\partial_t \theta \text{Pe}\varepsilon = \frac{3}{h^2} - \frac{3\theta(Bh + 1)}{h^2} + \text{Pe}\varepsilon \left( \frac{3(7\partial_x q - 54\partial_x \theta q)}{40h} - \frac{21\partial_x q \theta}{40h} \right) \tag{3.61}$$

Toutefois, cette équation d'évolution n'est pas suffisante pour décrire le champ de température pour un film ruisselant. Chhay, Dutykh, Gisclon et Ruyer-Quil (2017) ont montré que ce modèle à un seul degré de liberté n'est pas capable de décrire l'évolution du champ de température au sein de la crête. En effet, lorsque le nombre de Peclet devient élevé, ce modèle conduit à des valeurs irréalistes de  $\theta$  hors de l'intervalle  $[0, 1]$ . Comme on le verra à la section 3.2.2, le champ de température s'éloigne fortement de  $\tilde{T}_0(h, \theta)$  qui est seulement linéaire. Il est alors nécessaire de poursuivre le développement du modèle à l'ordre deux en ajoutant un degré de liberté supplémentaire.

## Ordre deux, modèle à deux équations

Nous allons introduire une seconde variable pour représenter le champ de température,  $\phi$ . Cette variable représente le flux pariétal, bien qu'ayant la

dimension d'une température.

$$\phi = h \partial_y T|_0 \quad (3.62)$$

Le choix des variables  $\theta$  et  $\phi$  est dicté par l'objectif de représenter le mieux possible les flux de chaleur à la paroi et à la surface. La complexité du champ de température à haut nombre de Peclet rend impossible de représenter correctement  $T$  avec seulement deux degrés de liberté. L'objectif est donc d'obtenir une modélisation permettant de représenter à un faible coût les transferts au sein du film.

En écrivant l'équation de Fourier à la surface libre et à la paroi et en gardant les termes dominants dans la limite  $\text{Pe} \gg 1$ , on peut montrer simplement que le transport de  $\theta$  et de  $\phi$  est donné par

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{\phi}{h} \right) = \mathcal{O}(1/\text{Pe}) \\ \partial_t \theta + u|_h \partial_x \theta = \mathcal{O}(1/\text{Pe}) \end{cases} \quad (3.63)$$

On cherche donc un système d'équations cohérent avec le développement longues ondes et également avec (3.63). Ceci peut se faire de la façon suivante :

$$T = \tilde{T}_0(h, \theta, \phi) + \varepsilon \tilde{T}_1(h, \theta, \phi) \quad (3.64)$$

Soit

$$\tilde{T}_0 = T_0(h) + v_\theta(\theta - \theta_0(h)) + v_\phi(\phi - \phi_0(h)) \quad (3.65)$$

Où les fonctions tests  $v_\theta$  et  $v_\phi$  restent à définir de manière appropriée et

$$\begin{cases} \theta_0(h) = \frac{1}{1+Bh} \\ \phi_0(h) = \frac{\theta_0 - 1}{h} = -\frac{B}{Bh+1} \end{cases} \quad (3.66)$$

Nous devons alors résoudre deux équations aux résidus pondérées fondées sur l'équation de la chaleur à l'ordre 2, intégrées à travers l'épaisseur du film.

$$\begin{aligned} R_i = \int_0^h w_i \left[ 3\text{Pe}\varepsilon(\partial_t T + \partial_x T u + \partial_y T v) - \partial_{yy} T \right. \\ \left. + \varepsilon^2(-\partial_{xx} T + 2\partial_x s \partial_{xy} T + \partial_{xx} s \partial_y T - \partial_x s^2 \partial_{yy} T) \right] dy \end{aligned} \quad (3.67)$$

Avec  $i = \theta$  ou  $\phi$ .

Dans la formulation adoptée, les fonctions tests et de pondération sont ajustées de manière à assurer la compatibilité avec le développement en gradient et également la validité à grand nombre de Peclet.

Il est nécessaire de fixer les fonctions de pondérations et les fonctions tests.

Le champ de température doit respecter les conditions limites et la condition  $T|_h = \theta$  et  $h \partial_y T|_s = \phi$ , et donc

$$\begin{cases} v_\theta(\bar{y} = 0) & = 0 \\ v_\theta(\bar{y} = 1) & = 1 \\ v'_\theta(\bar{y} = 0) & = 0 \\ v_\phi(\bar{y} = 0) & = 0 \\ v_\phi(\bar{y} = 1) & = 0 \\ v'_\phi(\bar{y} = 0) & = 1 \end{cases} \quad (3.68)$$

Nous allons rajouter des conditions d'orthogonalités afin de simplifier l'écriture des équations et de séparer les dérivées temporelles en  $\theta$  et  $\phi$  dans chacun des résidus. Ces conditions se lisent

$$\int_0^1 w_i \cdot v_j d\bar{y} = \delta_{ij} \quad (3.69)$$

Avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

Ajoutons deux dernières conditions afin d'assurer que les termes convectifs en  $\theta$  et  $\phi$  soient cohérents avec le développement en gradient lorsque le nombre de Peclet devient grand :

$$\begin{cases} \int_0^h w_\theta \frac{DT_0}{Dt} dy = \int_0^h w_\theta v_\theta (\partial_t \theta + u_0|_h \partial_x \theta) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \int_0^h w_\phi \frac{DT_0}{Dt} dy = \int_0^h w_\phi v_\phi (h \partial_t \frac{\phi}{h}) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.70)$$

avec  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \partial_x$  la dérivée particulaire.

Nous allons considérer des fonctions polynomiales pour les fonctions de pondérations et les fonctions tests. L'équation (3.58) indique que les dérivées secondes des fonctions tests doivent s'annuler pour éliminer la contribution du

terme  $\tilde{T}_1$ . Nous allons donc nous limiter à des polynômes d'ordre 1.

$$w_\theta = a_{w_\theta} + b_{w_\theta} \bar{y} \quad (3.71a)$$

$$w_\phi = a_{w_\phi} + b_{w_\phi} \bar{y} \quad (3.71b)$$

Nous avons 12 équations, et 4 coefficients pour les fonctions de pondérations. Nous allons ajouter 9 variables, en écrivant

$$v_\theta = a_{v_\theta} + b_{v_\theta} \bar{y} + c_{v_\theta} \bar{y}^2 + d_{v_\theta} \bar{y}^3 \quad (3.72a)$$

$$v_\phi = a_{v_\phi} + b_{v_\phi} \bar{y} + c_{v_\phi} \bar{y}^2 + d_{v_\phi} \bar{y}^3 + e_{v_\phi} \bar{y}^4 \quad (3.72b)$$

La dernière variable introduit un degré de liberté supplémentaire que nous allons fixer afin de garantir un comportement correct des termes de relaxations du modèle. En appliquant les conditions (3.68, 3.69, 3.70), nous obtenons les coefficients suivants, en laissant  $c_{v_\phi}$  libre :

$$\begin{cases} a_{v_\theta} = 0 \\ b_{v_\theta} = 0 \\ c_{v_\theta} = 1 + \text{Bh}(3 + 2c_{v_\phi}) \\ d_{v_\theta} = -\text{Bh}(3 + 2c_{v_\phi}) \end{cases} \quad \begin{cases} a_{v_\phi} = 0 \\ b_{v_\phi} = 1 \\ d_{v_\phi} = -1 - c_{v_\phi} \end{cases} \quad (3.73)$$

L'intégration des résidus nous donne un système de deux équations qui peuvent s'écrire sous la forme

$$3\varepsilon \text{Pe} \begin{pmatrix} \partial_t \theta + u|_{y=h} \partial_x \theta \\ \partial_t (\phi/h) \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} C_{\theta,\theta} & C_{\phi,\theta} \\ C_{\theta,\phi} & C_{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta - \theta_0 \\ \phi - \phi_0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.74)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{\theta,\theta} &= -\frac{12(\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 7) + 5(c_{v_\phi} + 3))}{\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 3c_{v_\phi} + 13} \\ C_{\phi,\theta} &= \frac{24(\text{Bh}(\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 5(c_{v_\phi} + 2)) + 10)}{\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 3c_{v_\phi} + 13} \\ C_{\theta,\phi} &= \frac{12(3c_{v_\phi} + 8)}{\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 3c_{v_\phi} + 13} \\ C_{\phi,\phi} &= -\frac{36(\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 5)}{\text{Bh}(2c_{v_\phi} + 3) + 3c_{v_\phi} + 13} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{\theta,\theta} & C_{\phi,\theta} \\ C_{\theta,\phi} & C_{\phi,\phi} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

correspond aux transferts de chaleur à l'interface et à la paroi. Cette matrice doit admettre des valeurs propres négatives pour garantir la relaxation de  $\theta$  et  $\phi$  vers les valeurs  $\theta_0$  et  $\phi_0$  correspondant à un transfert purement conductif au travers du film. De plus, si  $\text{Bi} h \rightarrow \infty$ , les vecteurs propres sont colinéaires sauf dans le cas où  $c_{v\phi} = -\frac{3}{2}$ . Dans ce cas, la relaxation vers  $(\theta_0, \phi_0)$  n'est plus garantie. La seule valeur possible est donc  $c_{v\phi} = -\frac{3}{2}$  et les valeurs propres de  $C$  sont

$$\frac{6}{17} \left( \pm \sqrt{64\text{B}^2 h(x, z, t)^2 + 40\text{B}h(x, z, t) + 1345 - 8\text{B}h(x, z, t) - 45} \right) \quad (3.77)$$

Quelques essais montrent que cela ne suffit pas pour garantir une température bornée entre 0 et 1. En effet, dans les limites  $\text{B}h \rightarrow \infty$  et pour des  $\text{Pe}$  élevés, la température à la surface peut aller en deçà de la température de l'atmosphère malgré une condition initiale à l'équilibre thermique : les simulations donnent des résultats aberrants. Toutefois  $\text{Bi} \theta$  reste d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et le flux de chaleur à la surface libre reste borné. Il est possible de forcer une relaxation correcte en imposant un coefficient devant la matrice de relaxation afin de forcer ces termes à augmenter quand  $\theta$  tend vers  $\theta_0$ . On écrit alors

$$3\varepsilon \text{Pe} \frac{\text{D}}{\text{D}t} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} - A \begin{bmatrix} C_{\theta,\theta} & C_{\phi,\theta} \\ C_{\theta,\phi} & C_{\phi,\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta - \theta_0 \\ \phi - \phi_0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.78)$$

Le paramètre de relaxation  $A$  doit être choisi de façon à éviter que la solution devienne non-physique (en sortant des bornes  $[0, 1]$ ). En première approche,  $A$  a été défini comme suit.

$$A = \left( \frac{(1 - \theta_0) \theta_0}{(1 - \theta) \theta} \right)^n \quad (3.79)$$

Cela impose deux valeurs singulières en  $\theta = 0$  et  $\theta = 1$ . La valeur de  $n$  règle la raideur aux abords de ces limites : une valeur élevée permet d'impacter la solution aussi peu que possible au prix d'une variation brusque de la relaxation du système.

Toutefois, la présence des singularités rend le système trop instable pour  $\theta \approx 0$ , et une forme plus complexe a été choisie.

En combinant deux sigmoïdes avec un point d'inflexion en 0 et un autre en 1, il est possible d'augmenter la relaxation de façon contrôlée sans atteindre de singularité. On choisira  $A$  comme

$$A = (D - 1) (2 + [\tanh 10^{n_1}(\theta - 1) - \tanh 10^{n_0}\theta]) + 1 \quad (3.80)$$

Les paramètres  $n_i$  représentant la raideur des sigmoïdes en  $\theta = i$  et  $D$  son amplitude au point central des sigmoïdes (pour  $\theta = 0$  et  $\theta = 1$ ).  $n$  doit être choisi selon les paramètres du problème : il faut que la pente soit aussi faible que possible (pour éviter une variation trop brusque du paramètre de relaxation) tout en impactant aussi peu que possible la solution. Il faut également que  $A(\theta_0) = 1$  afin de garantir la compatibilité avec l'asymptotique.  $n_0$  sera choisi de tel façon à ce que :

$$n \text{ telque } \operatorname{argmin}_{\theta} \left( \frac{\partial^2 A(\theta, n)}{\partial n^2} \right) = \frac{1}{2}\theta_0 \quad (3.81)$$

La solution analytique pour cette condition est complexe à extraire, et la minimisation se fera numériquement (voir figure 3.2 pour un exemple).

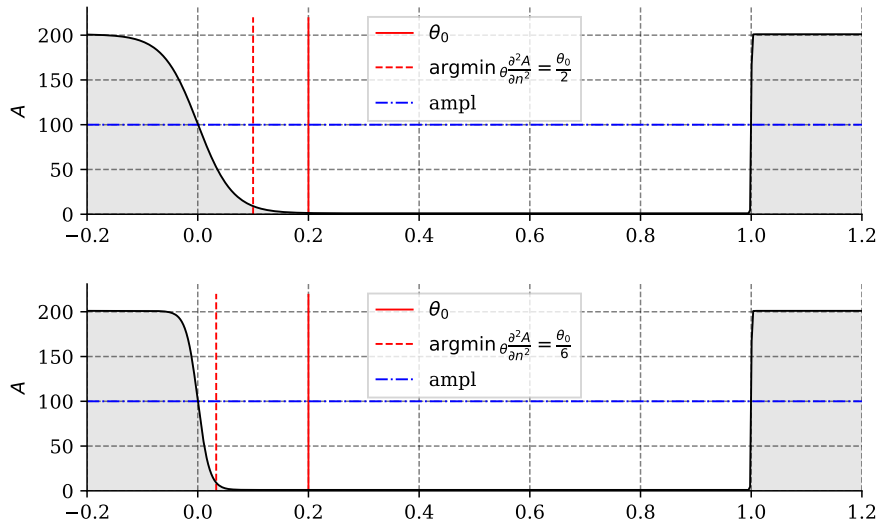


Figure 3.2 – Coefficient de relaxation  $A$  dont le coefficient de raideur  $n$  a été choisi de façon optimale et d'aligner le premier point d'inflexion sur une fraction de  $\theta_0$  (ici  $\theta_0/2$  et  $\theta_0/6$ ). L'augmentation a lieu uniquement pour  $\theta < \theta_0$  de façon à éviter d'impacter le reste de la solution.



On obtient, une fois les deux résidus annulés et les coefficients des fonctions tests et de pondérations intégrés :

$$\begin{aligned}
\overbrace{3\varepsilon\text{Pe} \left( \partial_t \theta + \frac{3\partial_x \theta q}{2h} \right)}^{\text{transport}} &= \overbrace{\frac{A}{h^2} (C_{\theta\theta} (\theta - \theta_0) + C_{\theta\phi} (\phi - \phi_0))}^{\text{relaxation}} \\
&+ \overbrace{\varepsilon^2 \left[ \frac{28\partial_x h + 24\partial_x s}{17h} \partial_x \theta + \frac{21\partial_x h + 45\partial_x s}{17h} \partial_x \phi \right.}^{\text{diffusion}} \\
&\quad + \left( K_\theta - \frac{2\theta}{h} + \frac{21\phi}{34h} \right) \partial_{xx} h + \left( M_\theta + \frac{45\phi}{34h} - \frac{36\theta}{17h} \right) \partial_{xx} s \\
&\quad + \left( J_\theta + J_{\theta,\theta} \theta + \frac{21\phi}{17h^2} \right) \partial_x h^2 + \left( L_\theta + L_{\theta,\theta} \theta + \frac{45\phi}{17h^2} \right) \partial_x h \partial_x s \\
&\quad \left. + \left( \frac{180}{17h^2} + N_{\theta,\theta} \theta + \frac{84\phi}{17h^2} \right) \partial_x s^2 + \partial_{xx} \theta \right]
\end{aligned} \tag{3.82a}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{3\varepsilon\text{Pe} \left( \partial_t \phi + \frac{\phi}{h} \partial_x q \right)}^{\text{transport}} &= \overbrace{\frac{A}{h^2} (C_{\phi\theta} (\theta - \theta_0) + C_{\phi\phi} (\phi - \phi_0))}^{\text{relaxation}} \\
&+ \overbrace{\varepsilon^2 \left[ -\frac{120\partial_x h + 200\partial_x s}{17h} \partial_x \theta - \frac{22\partial_x h + 120\partial_x s}{17h} \partial_x \phi \right.}^{\text{diffusion}} \\
&\quad + \left( K_\phi - \frac{11\phi}{17h} \right) \partial_{xx} h + \left( M_\phi - \frac{40\theta}{17h} - \frac{60\phi}{17h} \right) \partial_{xx} s \\
&\quad + \left( J_\phi + J_{\phi,\theta} \theta - \frac{56\phi}{17h^2} \right) \partial_x h^2 + \left( L_\phi + L_{\phi,\theta} \theta - \frac{120\phi}{17h^2} \right) \partial_x h \partial_x s \\
&\quad \left. + \left( N_{\phi,\theta} \theta - \frac{360\phi}{17h^2} - \frac{480}{17h^2} \right) \partial_x s^2 + \partial_{xx} \phi \right]
\end{aligned} \tag{3.82b}$$

Les coefficients de la matrice de relaxation et des termes diffusifs sont récapitulés ci dessous (tables 3.2 et 3.3) :

Le modèle obtenu est consistant à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  pour les termes convectifs et à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  pour les termes diffusifs.

---


$$\begin{aligned}
 J_\theta &= \frac{Bh(81Bh(Bh+3)+250)+90}{17h^2(Bh+1)^3} & J_{\theta,\theta} &= -\frac{6(8Bh+15)}{17h^2} \\
 K_\theta &= \frac{3Bh(19Bh+41)+68}{34h(Bh+1)^2} & L_{\theta,\theta} &= -\frac{48(2Bh+5)}{17h^2} \\
 L_\theta &= \frac{15(15Bh(Bh+2)+16)}{17h^2(Bh+1)^2} & L_{\theta,\theta} &= -\frac{48(2Bh+5)}{17h^2} \\
 M_\theta &= \frac{57Bh+72}{34Bh^2+34h} & N_{\theta,\theta} &= -\frac{12(4Bh+15)}{17h^2}
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 J_\phi &= -\frac{6(6Bh+5)(Bh(6Bh+13)+8)}{17h^2(Bh+1)^3} & J_{\phi,\theta} &= \frac{60(Bh+4)}{17h^2} \\
 K_\phi &= \frac{3B(3Bh+2)}{17(Bh+1)^2} & L_\phi &= -\frac{40(15Bh(Bh+2)+16)}{17h^2(Bh+1)^2} \\
 L_{\phi,\theta} &= \frac{40(3Bh+16)}{17h^2} & M_\phi &= \frac{20}{17} \left( \frac{B}{Bh+1} + \frac{2}{h} \right) \\
 N_{\phi,\theta} &= \frac{60(Bh+8)}{17h^2}
 \end{aligned}$$


---

Table 3.2 – Coefficients du modèle, termes diffusifs

$$\begin{aligned}
 C_{\theta\theta} &= -\frac{12(8Bh+15)}{17} & C_{\theta\phi} &= \frac{84}{17} \\
 C_{\phi\theta} &= \frac{120(Bh+4)}{17} & C_{\phi\phi} &= -\frac{360}{17}
 \end{aligned}$$

Table 3.3 – Coefficients de la matrice de relaxation

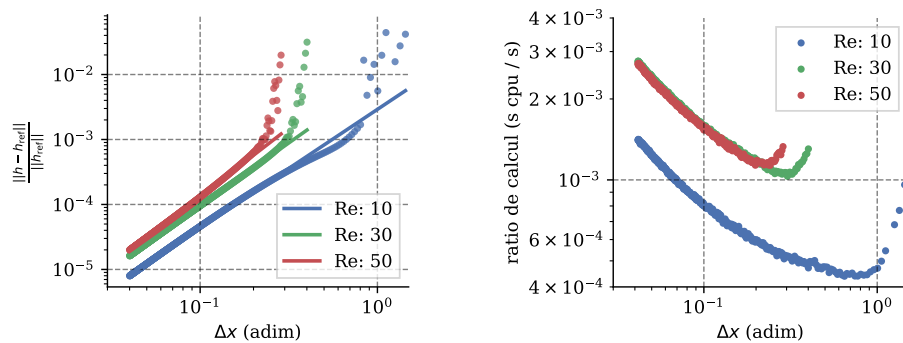
## 3.2 Validation des modèles

Nous allons dans un premier temps conduire une campagne de validation du modèle. Tout d'abord, une comparaison du modèle hydrodynamique avec les expériences, avec et sans topographie, puis une validation du modèle thermique asymptotique vis-à-vis de la solution de l'équation de Fourier.

### 3.2.1 Validation du modèle hydrodynamique

Convergence en maillage :

Dans un premier temps, une étude de convergence en maillage a été faite pour des simulations avec des conditions de bords périodiques, différents Reynolds et nombres d'inclinaisons (voir figure 3.3). Le calcul d'erreur est fait en fonction d'une valeur de référence (pour lequel le pas en espace est le plus petit et donc l'erreur présumée la plus faible) avec la norme  $L_2$ . On observe une décroissance dont l'ordre est proche de 1.5, alors que l'on s'attendrait à un ordre de 2 dû au schéma de discrétisation employé. Cela s'explique par la nature fortement non linéaire du modèle hydrodynamique. Ces graphes nous serviront de guide pour choisir la taille des mailles pour les simulations suivantes.



(a) Erreur sur  $h$  pour différentes valeurs de Re pour un film d'eau ruisselant à la verticale.

(b) Ratio entre temps CPU et temps effectif de simulation : un ratio de 1 indique qu'il a fallu une seconde de temps cpu pour calculer un pas de temps de 1.

Figure 3.3 – Convergence en maillage, hydrodynamique.

La validation expérimentale sur fond plat est faite avec les résultats des simulations numériques directes faites par Malamataris, Vlachogiannis et Bontozoglou (2002), elles même basées sur les expériences de Liu et Gollub (1994).

Ces expériences mettent en œuvre une plaque de 200 cm de long pour 50 cm de large. Le fluide utilisé est un mélange d'eau/glycérol de fraction massique 0,54. Les expérimentateurs se sont assurés que les variations de température ne dépassent pas 0,4°C lors d'une expérience afin de limiter les variations des propriétés du fluide. Les propriétés physiques choisies pour reproduire cette expérience sont : viscosité cinématique  $\nu \approx 6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , tension de surface  $\gamma \approx 72 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , masse volumique  $\rho \approx 1140 \text{ kg/m}^3$ . Ces valeurs ont été légèrement ajustées de façon à être cohérentes avec les nombres adimensionnels utilisés par Malamataris et al. (2002) et la description du fluide donnée par Liu et Gollub (1994). Dans notre système d'adimensionnalisation, on retrouve  $We = 35.3$ .

L'expérience consiste en un film ruisselant sur ladite plaque inclinée à  $6.4^\circ$  ( $Ct = 8.92$ ) alimenté par le fluide décrit précédemment dont le nombre de Reynolds  $Re = \frac{h_0 u_h}{\nu} = 19.33$ . Le forçage en entrée se fait à une fréquence de 1.5 Hz. L'amplitude du forçage n'est pas spécifiée, elle sera estimée afin d'être assez proche des résultats de Malamataris et al. (2002). On choisira

$$h(x = 0) = A \sin(2\pi t f) \quad (3.83)$$

$$q(x = 0) = h^3/3 \quad (3.84)$$

avec  $A = 0.002$ . Dans cette dernière équation,  $t$  est en secondes alors que  $h$  et  $q$  sont adimensionnés.

Les résultats des deux simulations sont très proches (voir figure 3.4) : on retrouve la bonne période. L'amplitude de saturation est légèrement sous-estimée, mais reste proche.

### 3.2.2 Validation face au modèle thermique complet

Un second modèle basé sur les équations de Fourier 2D (3.6) et sur le modèle Saint Venant du second ordre (3.50) pour l'hydrodynamique a été utilisé afin de valider la partie thermique.

Ce modèle est écrit de façon à être défini sur un domaine

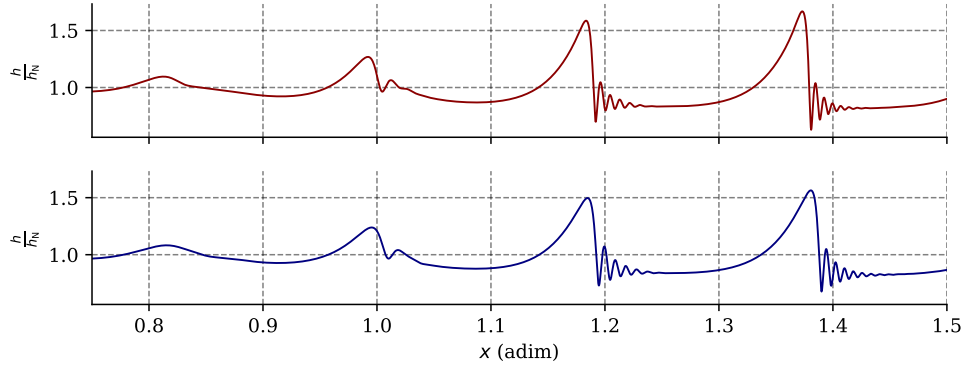


Figure 3.4 – En haut, un instantané de la simulation numérique directe faite par Malamataris, Vlachogiannis et Bontozoglou (2002), en bas la simulation faite avec notre modèle d'ordre 2 simplifié.

$$\begin{cases} x \in [0, L] \\ \bar{y} \in [0, 1] \end{cases}$$

Ainsi, le domaine est rectangulaire et reste fixe durant la simulation, ce qui évite de mettre en place une stratégie de remaillage. Le prix à payer est une équation d'évolution plus complexe.

L'équation de départ

$$3Pe (\partial_t T + u \partial_x T + v \partial_y T) = \partial_{xx} T + \partial_{yy} T \quad (3.85)$$

Devient alors

$$\begin{aligned} 3Pe \left( \partial_t T + u \left( \partial_x T - \frac{\partial_x h \partial_{\bar{y}} T \bar{y}}{h} \right) + \bar{y} \frac{\partial_x q \partial_{\bar{y}} T}{h} + v \frac{\partial_{\bar{y}} T}{h} \right) &= \partial_{xx} T + \frac{\partial_{\bar{y}\bar{y}} T}{h^2} \\ + \bar{y} \left( \frac{2 \partial_x h^2 \partial_{\bar{y}} T}{h^2} - \frac{\partial_x h \left( \partial_{x\bar{y}} T - \bar{y} \frac{\partial_x h \partial_{\bar{y}\bar{y}} T}{h} \right)}{h} - \frac{\partial_x h \partial_{x\bar{y}} T}{h} - \frac{\partial_{xx} h \partial_{\bar{y}} T}{h} \right) & \end{aligned} \quad (3.86)$$

Et la condition limite convective à l'interface

$$\partial_y T = \partial_x h \partial_x T - BT \sqrt{1 + (\partial_x h)^2} \quad (3.87)$$

devient

$$\partial_{\bar{y}}T = \frac{2h\partial_x h \partial_x T - Bh(\partial_x h^2 + 2)T}{2(\partial_x h^2 + 1)} \quad \text{en } \bar{y} = 1 \quad (3.88)$$

Afin de résoudre ces équations couplées au système (3.50), un solveur a été écrit inspiré de la librairie Triflow développé pour les modèles 1D. Le système est analysé et interprété par un logiciel de calcul formel. À partir de là, les dérivées spatiales sont substituées par leurs approximations discrètes pour une coordonnée  $(x, y)$  donnée. Le système ainsi obtenu ne dépend alors que des variables évaluées en cette coordonnée : il se réduit à un système dynamique de taille  $N_x(2 + Ny)$ . À noter que ce système est à priori autonome, ne dépendant pas explicitement de la variable  $t$ . L'exception notable est la condition limite en entrée du fluide, lorsqu'une dépendance au temps est introduite par un forçage périodique. Il est alors possible de dériver chaque élément du système en fonction des variables voisines afin d'obtenir une forme locale de la jacobienne du système.

À la fin de ces étapes, nous avons les formes symboliques des dérivées temporelles au point  $(i, j)$  et la jacobienne associée. Ces formes symboliques sont traduites en graphe algorithmique afin d'être optimisées et compilées, permettant une exécution performante. De plus, la jacobienne n'est pas évaluée dans son ensemble. Seuls les termes non-nuls sont calculés et le résultat est stocké sous forme d'une matrice creuse.

Cette méthodologie mixant calcul symbolique et numérique est beaucoup plus performante que si la Jacobienne avait été approchée numériquement par différences finies. De plus, la taille des systèmes provenant de la discrétisation de ce genre d'équations rend obligatoire l'utilisation de matrices creuses, au risque de saturer la mémoire vive du poste de calcul. Pour nos simulations, le stockage dense de la jacobienne dépasserait les 100Go de mémoire.

Comme précisé dans le chapitre 2 dédié aux considérations numériques, l'utilisation de matrices creuses permet aussi d'accélérer certaines opérations algébriques et donne accès à des algorithmes spécialisés dans la résolution de systèmes linéaires dont les membres sont creux. La méthode aux différences finies nécessite un grand nombre de points de discrétisation pour être assez précise, en particulier comparée aux méthodes type pseudo-spectrales. Cette difficulté n'en est pas une, considérant la structure intrinsèquement creuse du

système dynamique obtenu.

### Maillage irrégulier et méthode de Fornberg :

Pour les cas de haut  $Pe$  combiné à un  $Bi$  important, une couche limite thermique se développe au niveau de l'interface. La résolution en différences finies de cette sous-couche thermique nécessite un maillage de grande résolution, le nombre de mailles étant proportionnel au  $Pe$ . Pour des valeurs de  $Pe$  élevées, le temps de calcul peut devenir prohibitif.

Bien que les différences finies ne soient pas la méthode la plus adaptée à un maillage complexe, Fornberg (1988) a proposé une méthode permettant de calculer les coefficients des différences finies par interpolation sur polynômes de Lagrange plutôt que par un développement des séries de Taylor. Dans les faits, cela donne accès à une discrétisation pour un espacement arbitraire des points du maillage. Cela n'est pas particulièrement intéressant pour la discrétisation en  $x$  : la nature convective du problème mène à un déplacement de la position des gradients à chaque pas de temps. Mais pour la discrétisation du champ de température à travers le film, il peut être intéressant d'avoir un maillage irrégulier avec une concentration des points au niveau de l'interface.

Ce maillage a été choisi de façon à ce que l'espacement en  $y$  suive une répartition en sigmoïde. De cette façon, il est possible de choisir une taille de maille inférieure (pour la sous-couche thermique) et une taille supérieure (pour la zone à faible gradient).

On définit alors

$$\Delta y(y) = \frac{1}{\left| \frac{1}{1+e^{-\lambda\gamma-b}} \right|} \quad \gamma \in [-1, 1] \quad (3.89)$$

La pente au point d'inflexion se contrôle avec le paramètre  $\lambda$  tandis que sa position se contrôle avec le paramètre  $b$ . La figure 3.5 montre la différence entre le maillage défini en (3.89) et un maillage régulier.

De même que pour le maillage en  $x$ , une étude de convergence a été faite en augmentant petit à petit le nombre de points en  $y$  pour différents  $Bi$  et  $Pe$ . Ces résultats sont disponibles figure 3.6. Les erreurs sont globalement plus faibles pour de faibles valeurs de  $Pe$  et  $Bi$ . Dans le premier cas, cela s'explique par une physique plus simple et en particulier l'absence de couche

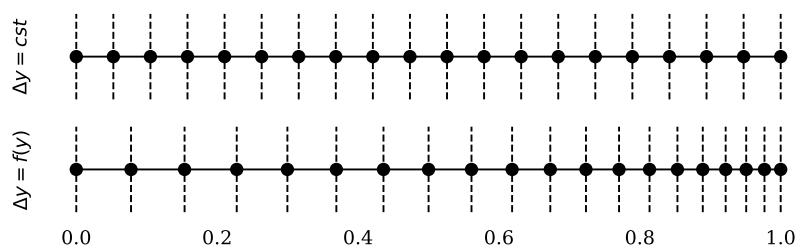


Figure 3.5 – Les deux approches étudiées pour le maillage à travers le film ruisselant. La figure haute présente le maillage régulier, la figure basse un maillage suivant une répartition en sigmoïde des points sur l'épaisseur. De cette façon, le maillage est plus fin à l'interface, là où se développe la sous-couche thermique.

limite thermique pour de faibles valeurs de  $Pe$ . Dans le second cas, un faible  $Bi$  mène à un champ de température presque homogène (et très proche de la température de la paroi). On remarque que le type de maillage (régulier ou avec une répartition en sigmoïde) n'influe que très peu sur la convergence en maillage des simulations. La convergence étant quasi identique entre les deux maillages, nous nous cantonnerons à un maillage régulier.

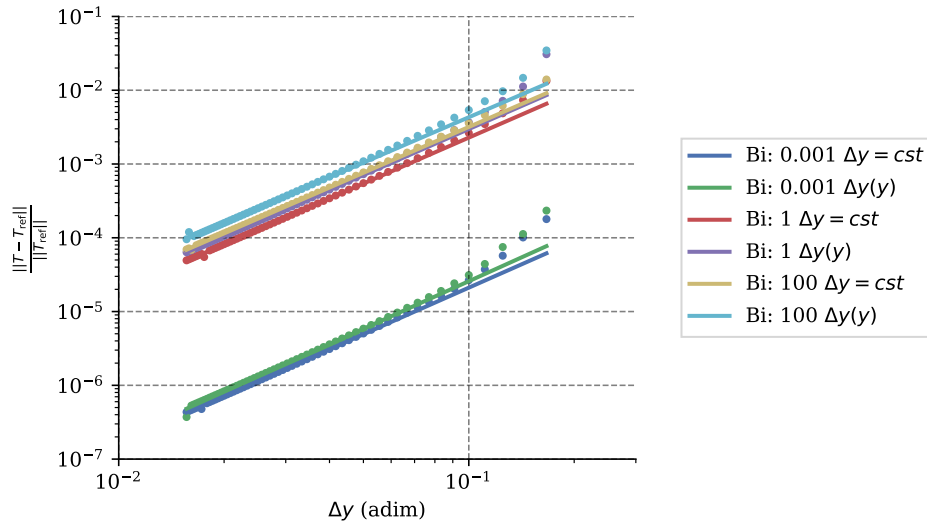
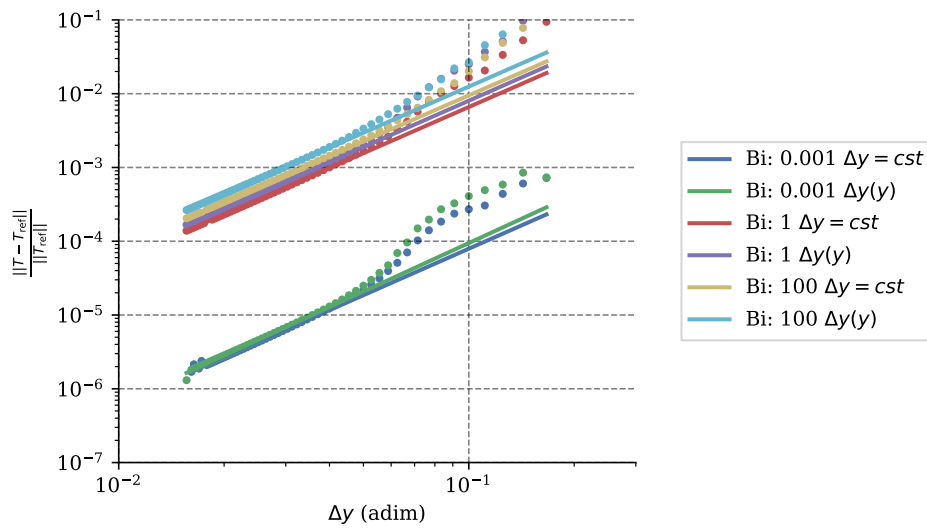
Chhay et al. (2017) ont utilisé une méthode pseudo-spectrale pour modéliser les échanges thermiques au sein du film ruisselant. Afin de valider notre modèle, nous avons comparé leurs résultats aux nôtres.

Les solutions présentées dans les travaux de Chhay et al. (2017) ont été mis à côté des solutions obtenues par notre modèle (figure 3.7). On observe un bon accord : même phénomènes de recirculation, température de même ordre de grandeur. À noter que la forme des ondes ne sont pas les mêmes entre les deux solutions : les modèles hydrodynamiques ne sont pas identiques et ne génèrent pas les mêmes ondes solitaires.

Notre modèle 2D semble se comporter correctement, et est même plus riche que le modèle pseudo-spectral : bien que cette méthode de discrétisation soit connue pour permettre une diminution exponentielle des erreurs, les simulations présentées utilisent 10 points de collocations là où les simulations en différences finies permettent d'utiliser une cinquantaine ou une centaine de points pour les  $Pe$  élevés, et être ainsi certain de représenter correctement la couche limite thermique au niveau de l'interface.

Maintenant que notre modèle complet est validé, nous avons simulé un certain nombre d'ondes propagatives avec la même hydrodynamique (de l'eau



(a)  $Pe = 200$ (b)  $Pe = 2000$ Figure 3.6 – Convergence de l'erreur sur le nombre de point du maillage suivant  $y$ .

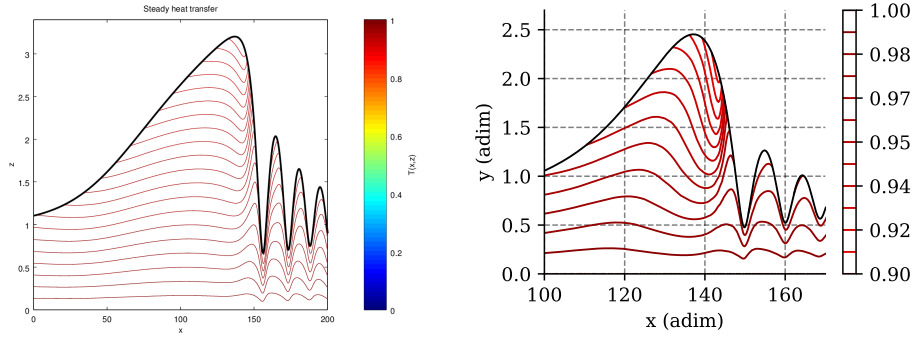
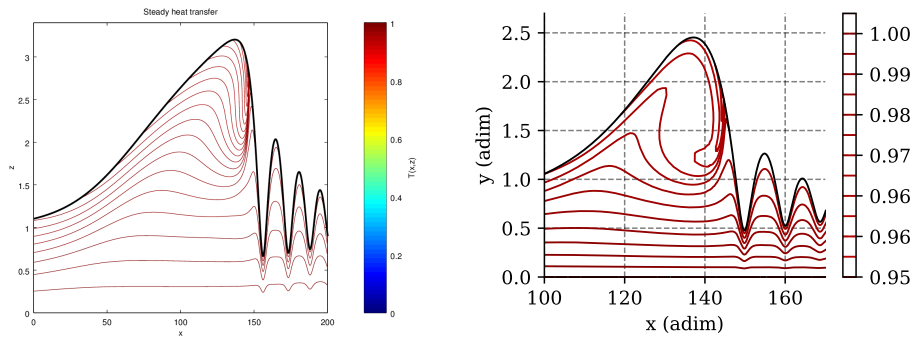
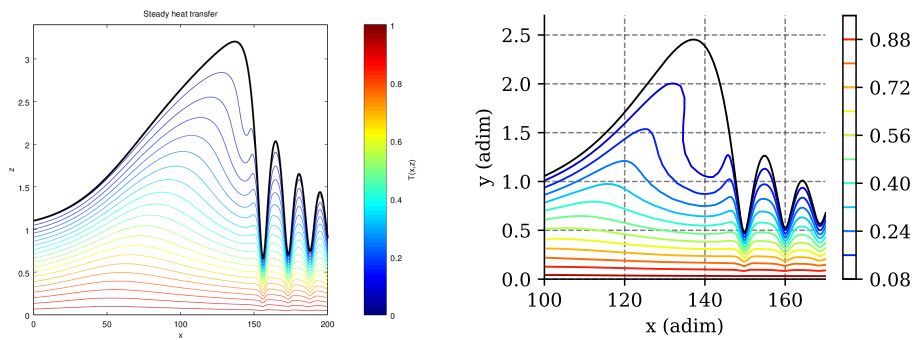
(a)  $Bi = 0.01, Pr = 1$ (b)  $Bi = 0.01, Pr = 30$ (c)  $Bi = 10, Pr = 7$ 

Figure 3.7 – Comparaison entre des simulations utilisant une méthode pseudo-spectrales (Chhay, Dutykh, Gisclon et Ruyer-Quil, 2017, à gauche) et différences finies pour résoudre l'équation de Fourier (à droite).

coulant sur une plaque plane verticale,  $\text{Re} = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $\text{Ka} = 3360$ ) et un échantillonnage conséquent de  $\text{Pe}$  et  $\text{Bi}$ . Ceux-ci ont été choisis de façon à maximiser la quantité d'information obtenue. Pour cela, un l'échantillonnage a été effectué avec une méthode type Hypercube Latin (McKay, Beckman et Conover, 1979). Nous avons utilisé une distribution log-normale afin d'explorer une gamme de valeur homogènes dans une échelle log-log. Les facteurs de forme de ces distributions (en  $\text{Pe}$  et  $\text{Bi}$ ) ont été obtenus par minimisation de l'écart entre la médiane et un échantillon type ( $\text{Pr} = 7$ ,  $\text{Bi} = 1$ ). L'échantillonnage des 5600 simulations est présenté figure 3.8.

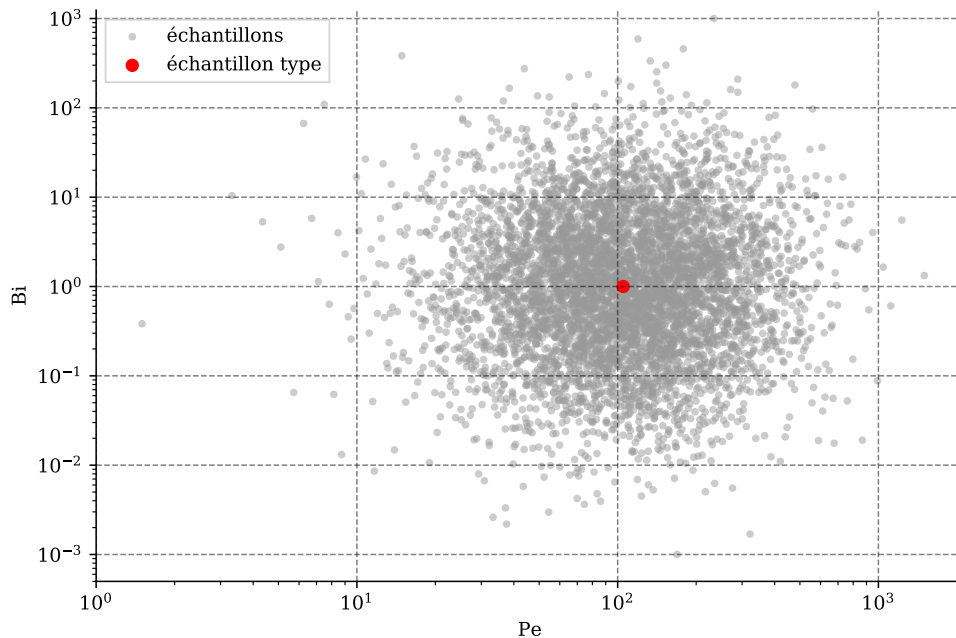


Figure 3.8 – Échantillons de validation. Les paramètres fixes sont  $\text{Ka} = 3360$ ,  $\text{Re} = 15$ ,  $Ct = 0$ .

L'erreur relative (norme  $\mathcal{L}_2$ ) a été calculée entre les simulations du modèle Fourier complet

- Les simulations avec coefficient de relaxation  $A = cst = 1$ .
- Les simulations avec coefficient de relaxation tel que décrit plus haut.

Nous avons aligné le premier point d'inflexion de la fonction de relaxation avec  $\theta_0/6$ . Nous obtenons donc les erreurs sur  $\theta$ ,  $\phi_h$  et  $\phi_p$ ,  $\phi_p$  étant représentatif du flux pariétal et  $\phi_h$  du flux surfacique (voir figure 3.9). On observe que

notre modification du coefficient de relaxation apporte un gain appréciable quant à la validité de notre modèle. En particulier pour les erreurs sur  $\theta$ , le domaine où l'erreur est sous les 10% est bien plus important même pour des  $\text{Bi}$  importants. Ce résultat était attendu, c'est dans ces domaines où nous observons des températures incohérentes ( $T < T_{atm}$ ). L'erreur reste raisonnable dans l'ensemble du domaine, exception faite des très grands  $\text{Pe}$ . On observe également que l'erreur est bien plus faible sur le flux surfacique que sur le flux pariétal dans le cas où  $A = f(\theta)$ . Ce résultat n'est pas surprenant : en améliorant la précision sur la température de l'interface, on rend plus précis la représentation du flux à l'interface.

Nous avons également vérifié l'égalité entre flux entrant et flux sortant pour les deux fonctions de relaxation. Le domaine étant périodique et l'onde propagative établie, nous devrions avoir

$$\langle \Phi|_{y=h} \rangle = \langle \Phi|_{y=0} \rangle \quad (3.90)$$

Avec  $\Phi$  le flux de chaleur transféré défini comme

$$\Phi = \vec{n} \nabla T \quad (3.91)$$

Mais nous risquons de perdre cette propriété à travers les simplifications nécessaires à la mise en place de notre modèle. En calculant l'erreur relative sur ce bilan de flux, nous avons un indicateur supplémentaire de la qualité du modèle.

$$\frac{2 \|\langle \Phi|_{y=h} \rangle - \langle \Phi|_{y=0} \rangle\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\langle \Phi|_{y=h} \rangle + \langle \Phi|_{y=0} \rangle\|_{\mathcal{L}_2}} \quad (3.92)$$

La figure 3.10 nous montre que forcer la relaxation pour des valeurs de  $\theta$  approchant 0 permet un meilleur comportement vis à vis de cet indicateur.

Les figures 3.12 et 3.13 montrent les résultats de deux simulations, une pour laquelle l'erreur est faible ( $\text{Pe} = 105$ ,  $\text{Bi} = 10$ ), l'autre pour laquelle l'erreur est plus élevée ( $\text{Pe} = 210$ ,  $\text{Bi} = 0.01$ ). On observe l'impact important de la fonction de relaxation sur la température à l'interface et sur les flux. Nous avons du mal à représenter correctement le choc thermique (un peu avant  $x = 150$ ) pour lequel la température à l'interface varie brusquement (voir figure 3.11 pour la représentation du champ de température solution de l'équation de Fourier). Cette variation s'explique par la présence d'une recirculation de fluide dans

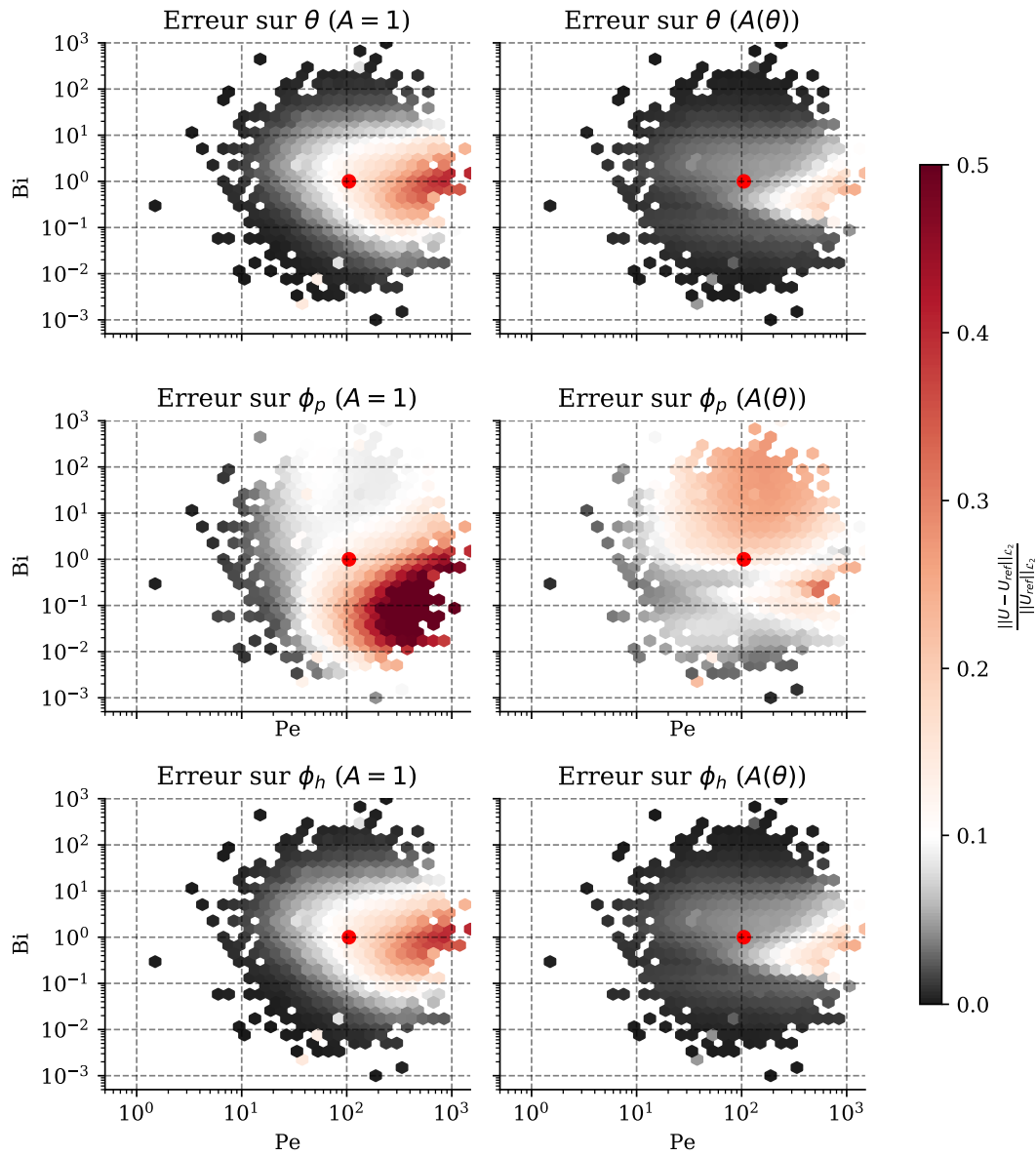


Figure 3.9 – Erreurs relatives sur  $v\theta$  et  $\phi$ , avec ou sans coefficient de relaxation modifié. L'échelle de couleur est centrée sur une erreur de 10% : les zones en gris sont inférieures à cette erreur.

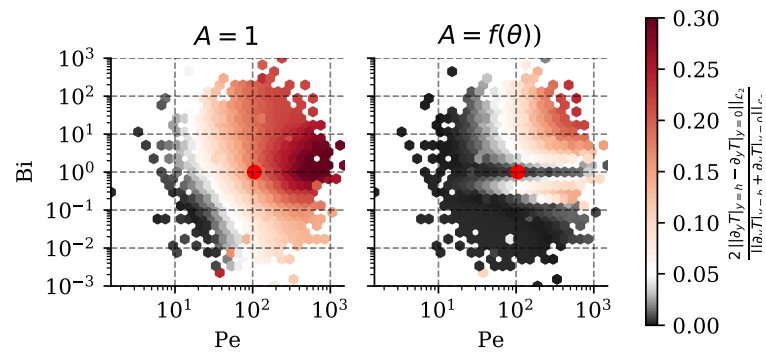


Figure 3.10 – Erreur sur le bilan des flux entrant (au niveau de la paroi) et sortant (à l’interface).

la crête. Au point de stagnation de cette recirculation se rencontre le fluide froid entraîné par le tourbillon de la crête et le fluide chaud situé en aval du front. Le profil de température se complexifie en ce point et notre modèle n’est pas assez riche pour représenter cette situation de façon complètement satisfaisante. Les accords sont toutefois assez bons pour faire de l’exploration ou de l’optimisation à condition de consolider les résultats avec le modèle Fourier complet dans les domaines d’intérêts.

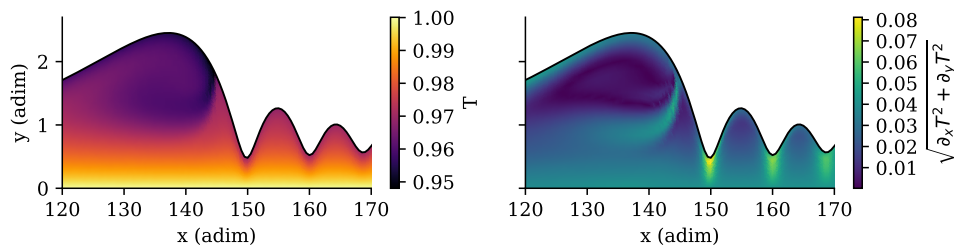


Figure 3.11 – Champ de température et magnitude du flux de chaleur à travers un liquide de film ruisselant sur plaque plane,  $Pr = 30$ ,  $Bi = 0.01$  et  $Re = 22.5$ .

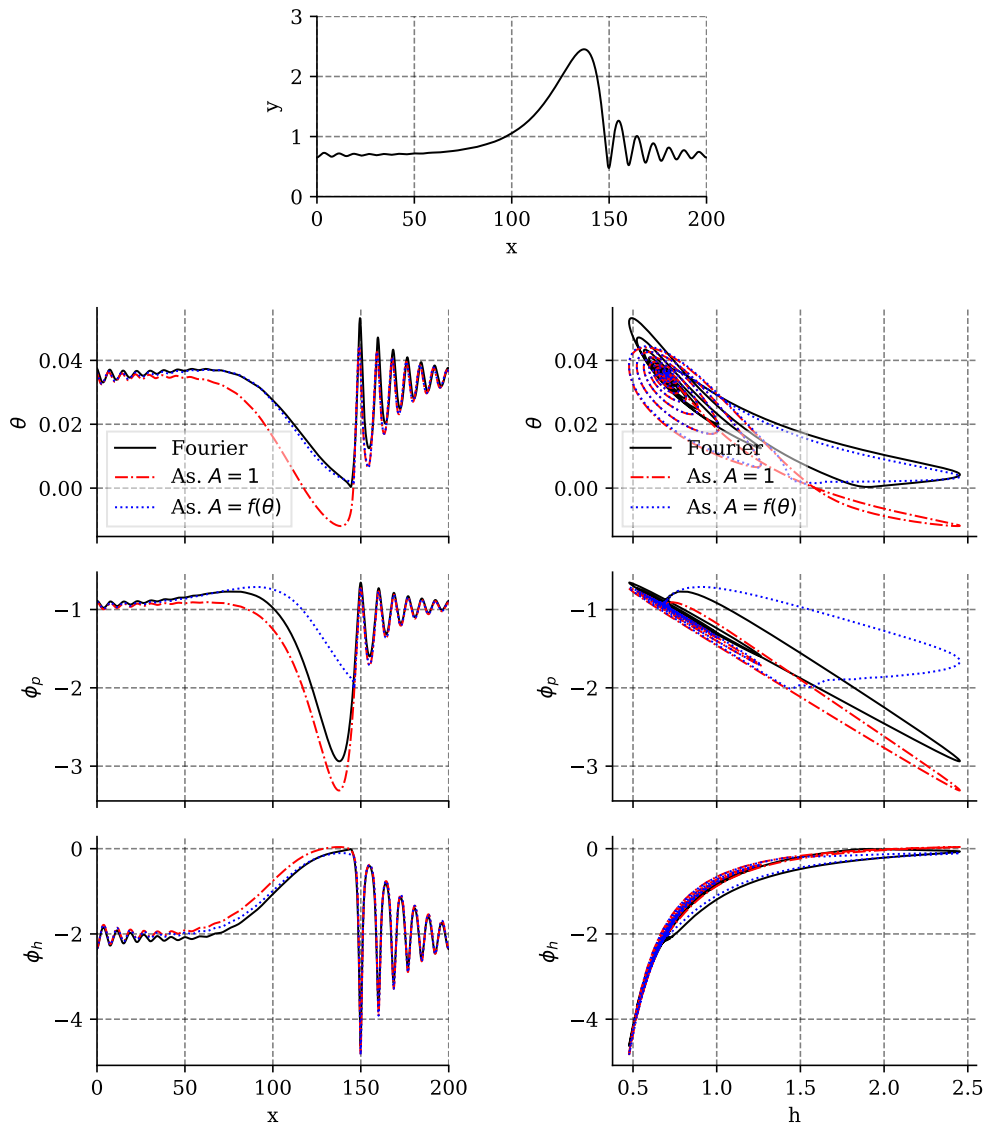


Figure 3.12 – Liquide ruisselant sur plaque plane verticale,  $Re = 15$ ,  $Pr = 7$ ,  $Bi = 10$

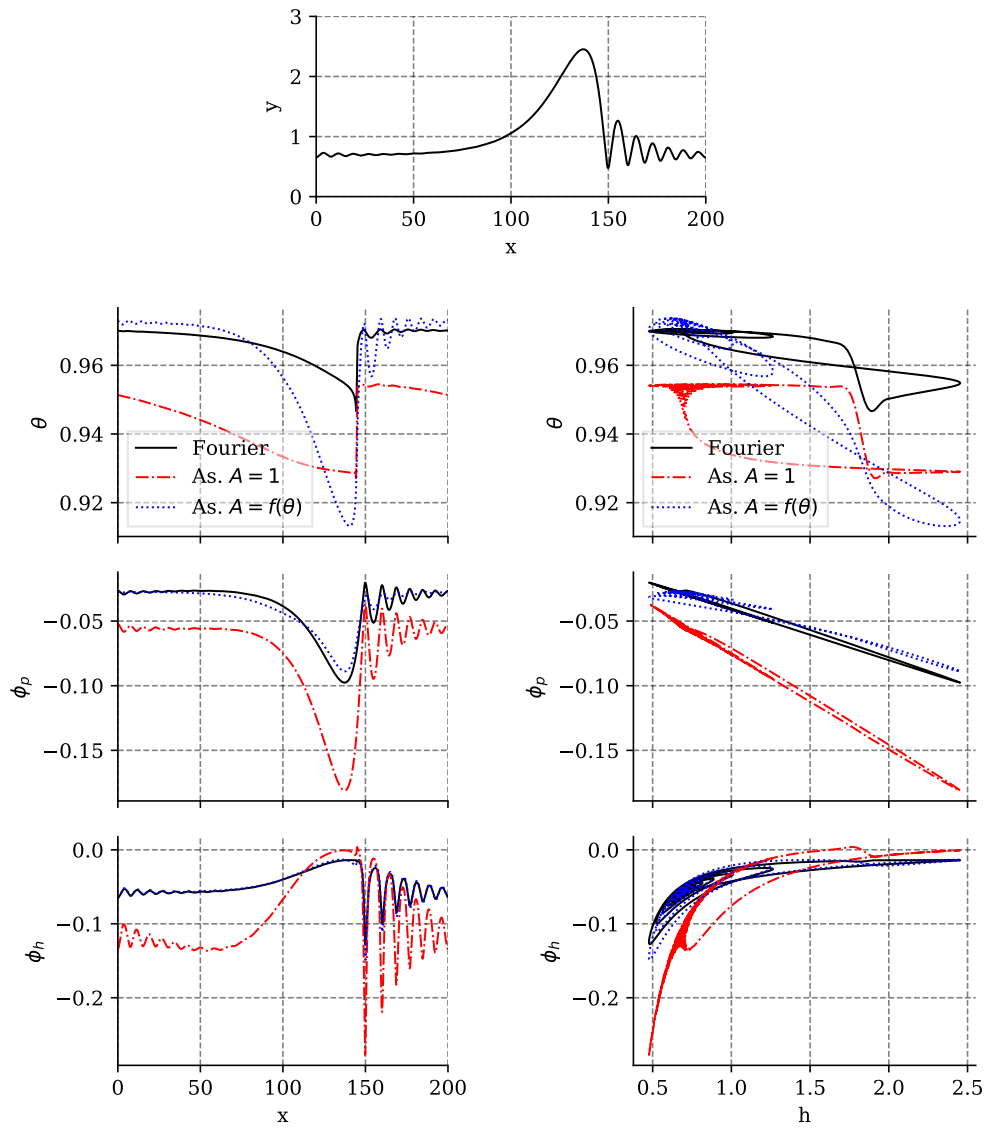


Figure 3.13 – Liquide ruisselant sur plaque plane verticale,  $Re = 15$ ,  $Pr = 30$ ,  $Bi = 0.01$



## En résumé

Nous avons développé un modèle asymptotique fondé sur la méthode aux résidus pondérés intégrés à travers le film ruisselant. Ce modèle se base sur 4 variables, 2 pour l'hydrodynamique (la hauteur du film et le débit local), 2 pour le champ de température (la température à l'interface et le flux pariétal). Nous appellerons ce modèle "modèle  $\theta - \phi$ ". La partie hydrodynamique est calquée sur des développements connus et validés (C. Ruyer-Quil et Manneville, 2002). Un modèle numérique complémentaire fondé sur la résolution en différences finies des équation de Fourier 2D a été écrit pour valider notre modèle. Celui ci a été comparé avec succès aux simulations effectuées par Chhay et al. (2017). Un nombre important d'échantillons ont été générés dans l'espace des paramètres  $Pr$   $Bi$  pour lesquels le modèle  $\theta - \phi$  a été comparé au modèle Fourier 2D. Notre modèle asymptotique possède un défaut majeur : la température minimale va en deçà de la température de l'atmosphère pour certains paramètres (nombre de Peclet élevé et nombre de Biot faible). La relaxation peut être forcée lorsque  $\theta$  tend vers cette température limite afin de revenir à un comportement cohérent. Les résultats sont alors en accord avec le modèle Fourier 2D, mais notre modèle est alors strictement borné et ne permet pas de simuler un système où le fluide entrerait à une température supérieure à celle de la plaque ou inférieure à celle de l'atmosphère. La contrepartie de ces limitations et d'une représentation plus pauvre du champ de température est une accélération du temps de calcul d'un à deux ordres de grandeur vis à vis du modèle Fourier 2D.

Il est maintenant possible d'utiliser ce modèle asymptotique pour explorer efficacement les interactions entre la dynamique des ondes et l'intensification du transfert thermique au sein des films ruisselants.

# Chapitre 4

## Support plat

“Le grand danger de l’ordinateur, c’est sa gigantesque productivité. Plus il accumule les données, plus la part consacrée à la réflexion doit être grande.”

— Emmanuel Le Roy-Ladurie (1929-)

---

4.1	Intensification des transferts par conduction et convection	130
4.1.1	Écoulement sur support incliné . . . . .	131
4.1.2	Écoulement sur support vertical . . . . .	138
4.2	Influence de la fréquence de forçage . . . . .	143
4.2.1	Analyse temporelle . . . . .	143
4.2.2	Analyse fréquentielle . . . . .	147
4.2.3	Détection d’ondes . . . . .	154

---

Les chapitres précédents présentent les outils spécifiques développés pour notre étude, les modèles mathématiques utilisés, ainsi que leurs validations. Nous sommes maintenant relativement confiants quant à leurs capacités à représenter les phénomènes qui nous intéressent et leurs limites. Le modèle hydrodynamique que nous utilisons est fiable pour des nombres de Reynolds inférieurs à 50. Pour passer outre cette limite, il sera nécessaire de prendre en compte la transition entre régime laminaire et régime turbulent. Les travaux s'axant sur cette problématique étant en cours, nous nous limiterons à des nombres de Reynolds modérés. De plus, notre modèle nécessite un coefficient de relaxation modifié (voir section 3.1.6.2) forçant la température à rester entre les bornes  $[T_{\text{plaque}}, T_{\text{atm}}]$ , les termes permettant de borner le champ de température ayant été éliminés. Il en résulte une relaxation forcée dont le comportement numérique n'est pas optimal et pouvant mener à un problème très raide lorsque  $\theta \approx 0$ . Nous pouvons nous attendre à des désaccords plus ou moins importants lorsque la situation s'éloignera un peu trop du cas à l'équilibre, pour lesquels notre représentation du champ de température par deux variables s'avérera insuffisante.

Nous avons vu section 3.2.2 que notre modèle se comportait correctement pour une large plage de paramètres pour une onde propagative établie et stationnaire dans son référentiel. Des validations dans un cas plus complexe (simulation non stationnaire sur un large domaine ouvert) seront effectuées dans ce chapitre.

Ces limitations prises en compte, nous allons explorer plus en détails les interactions entre hydrodynamique et thermique au sein des films ruisselants.

## 4.1 Intensification des transferts par conduction et convection

Le transfert de chaleur à travers un film ruisselant s'effectue par l'action conjointe de la conduction et de la convection. Dans le cas du film de Nusselt, le mode convectif ne joue aucun rôle dans le transfert thermique : la composante normale du champ de vitesse est nulle. Le flux ne dépend alors que de l'épaisseur du film, de la résistance au transfert de l'atmosphère et des propriétés du fluide étudié. Il est possible de calculer sa valeur à l'interface et à

la paroi comme étant :

$$\Phi_h = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} \quad (4.1)$$

$$\Phi_s = -\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=s} \quad (4.2)$$

Nous utiliserons en particulier les flux de chaleur réduits définis comme :

$$\tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_N} \quad (4.3)$$

Avec  $\Phi_N$  le flux de chaleur transféré à travers un film plat dans les mêmes conditions thermiques. De fait, chaque simulation est doublée afin d'obtenir les flux thermiques du film plat équivalent.

De plus, nous définissons le Nusselt local et global comme :

$$\text{Nu}_{\text{local}} = \frac{1}{T} \frac{\int_{t_0}^{t_{\text{max}}} \Phi_s(x, t) dt}{\Phi_{sN}(x)} \quad (4.4)$$

$$\text{Nu}_{\text{global}} = \frac{1}{L T} \int_0^L \frac{\int_{t_0}^{t_{\text{max}}} \Phi_s(x, t) dt}{\Phi_{sN}(x)} dx \quad (4.5)$$

Qui indique l'intensification locale et globale du transfert thermique par les effets d'advection dus à la présence d'ondes propagatives.

#### 4.1.1 Écoulement sur support incliné

Les travaux de Malamataris et al. (2002) présentent des simulations DNS correspondantes aux expériences de Liu et Gollub (1994). Pour rappel, le fluide est un mélange eau-glycol à 54% en masse et celui-ci s'écoule sur une plaque inclinée à  $6,4^\circ$ . Les nombres adimensionnels correspondant à l'expérience sont :  $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$  et  $We = 5.3$ . Le couplage thermique a été pris en compte en résolvant les équations de Fourier. La plaque est maintenue à une température fixe  $T_{\text{plaque}} > T_{\text{atm}}$ . Leurs simulations présentent le cas où la température de plaque est à température atmosphérique  $T_{\text{atm}}$  jusqu'à une position  $x_0$  puis est fixée à une température  $T_{\text{plaque}}$ . Le film subit un forçage en entrée dont l'amplitude est suffisante pour que le train d'onde soit saturé à la position  $x_0$ .

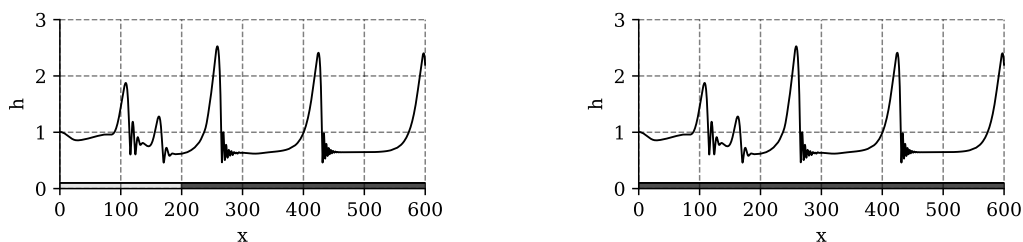
Le nombre de Biot de surface est fixé ( $\mathbf{B} = 10$ ) et le nombre de Peclet varie entre 1 et 1000. L'intensification de transfert est calculée en comparant le flux transféré à la paroi sur la longueur d'une onde propagative avec le flux transféré à travers un film de Nusselt. Cela donne accès à l'intensification du transfert thermique par l'effet des ondes. À noter que cette intensification n'est pas uniquement due à la convection : en présence d'ondes propagatives complètement développées, l'épaisseur moyenne du film s'amincit, ce qui augmente également les transferts par conduction à travers le film. On observe une intensification nulle pour de faibles nombres de Peclet, qui augmente de façon monotone jusqu'à une valeur de 20% pour  $\text{Pe} = 500$ . Elle diminue pour des Peclet élevés et est nulle voire légèrement négative pour  $\text{Pe} > 1000$ . Malheureusement, cette étude n'apporte que peu de détails sur les raisons et les mécanismes sous-jacents à ce comportement. Nous avons donc décidé de reproduire ces résultats avec le modèle  $\theta - \phi$  pour cribler correctement le domaine  $\text{Pe} \in [1 - 1500]$ , puis en résolvant l'équation de Fourier pour un échantillonnage plus réduit.

Les conditions limites à la paroi et à l'interface sont intégrées au modèle  $\theta - \phi$ . Il est donc impossible de reproduire exactement ces simulations. Nous allons effectuer la simulation avec un fluide à la température du film de Nusselt à l'équilibre thermique en entrée avec une amplitude de forçage suffisamment importante pour que le train d'ondes soit établi le plus proche possible de l'entrée du fluide. La figure 4.1 schématise les différences entre les deux simulations.

Pour le cas n°1, le fluide entre à une température homogène  $T(x = 0) = T_{\text{atm}}$ , dans le cas n°2, le fluide entre à une température suivant un profil linéaire  $T(x = 0) = 1 - y$ .

Ces simulations ont deux objectifs. Tout d'abord tenter de reproduire les résultats des travaux Malamataris et al. (2002) avec le modèle hybride (modèle intégral pour l'hydrodynamique couplé à l'équation de Fourier pour la thermique) afin de mieux comprendre le phénomène d'intensification (cas n°1). En particulier, la diminution d'intensification des transferts pour de hauts nombres de Peclet semble contre-intuitive et mérite une étude détaillée.

Dans un second temps, nous voulons comparer le modèle intégral avec l'équation de Fourier pour vérifier le bon comportement du modèle  $\theta - \phi$  et comparer les temps de calculs entre les deux modèles (cas n°2).



(a) Cas n°1 : le support est à température atmosphérique  $T_{atm}$  jusqu'à une distance  $x_{chauffe}$ , après quoi elle augmente pour atteindre très rapidement une température  $T_{plaque}$ .

(b) Cas n°2 : le support est à température  $T_{plaque} > T_{atm}$ .

Figure 4.1 – Représentation de la différence entre les simulations réalisées par Malamataris, Vlachogiannis et Bontozoglou (2002) et celle réalisée dans le cadre de cette étude.

Il nous est actuellement impossible de simuler le cas n°1 avec le modèle intégral, d'où la seconde série de simulations adaptées aux contraintes de ce modèle.

Pour des nombres de Peclet faibles, l'intensification de transfert devrait être faible : en effet, le champ de vitesse ne devrait avoir d'influence que pour des valeurs élevées du Peclet. Pour des valeurs plus faibles, la conduction thermique domine et le transfert devrait être proche de celui trouvé pour le film de Nusselt, à un détail près : la présence d'ondes tend à amincir le film ruisselant, ce qui devrait améliorer légèrement les transferts. Au contraire, pour des nombres de Peclet élevés, les phénomènes de transports prennent de l'importance et peuvent mener à des améliorations significatives des transferts.

La figure 4.2 montre que l'intensification de transfert, nulle à l'entrée du fluide, augmente de long de l'écoulement du fluide pour atteindre un plateau. Le nombre de Peclet semble avoir deux effets différents : la valeur atteinte à l'équilibre augmente avec le  $Pe$ . Dans un même temps, la distance pour laquelle le plateau est atteint augmente également. À une distance fixée, le flux échangé à la paroi ira en augmentant jusqu'à ce que la longueur d'établissement dépasse le point d'observation (comme visible sur la figure 4.3a). Nous avons tracé le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Peclet, et ce à différentes distances (voir figure 4.3b).

Il est important de noter que le Nusselt local présenté ici est légèrement

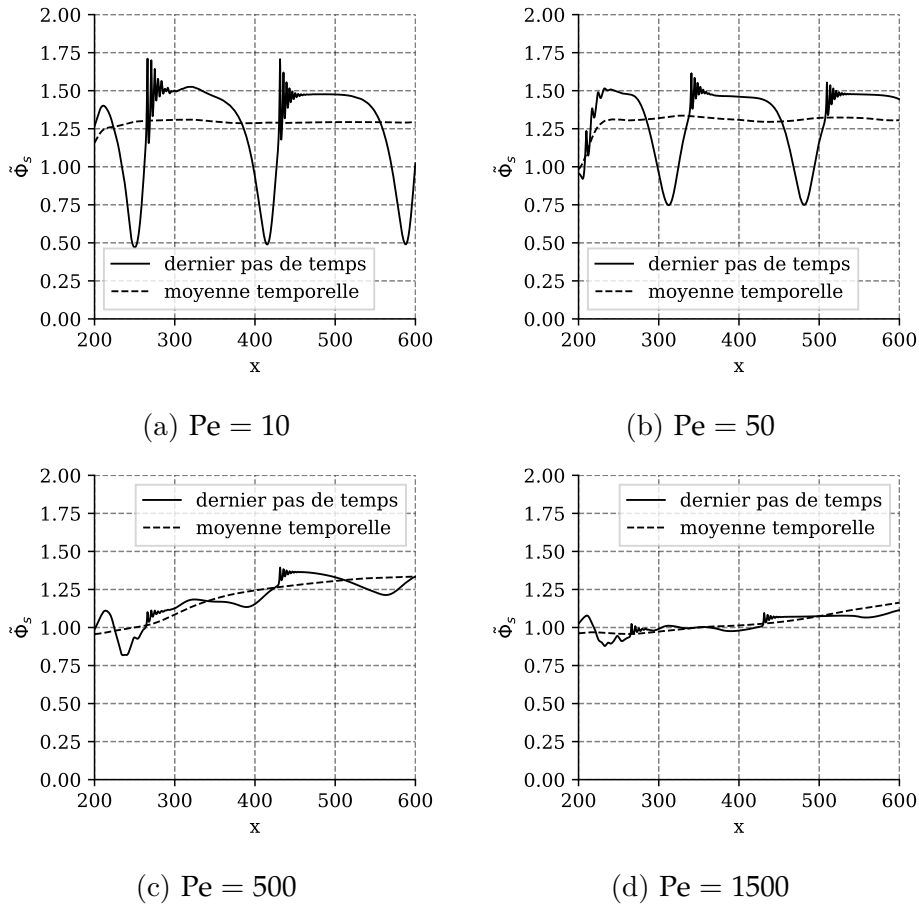
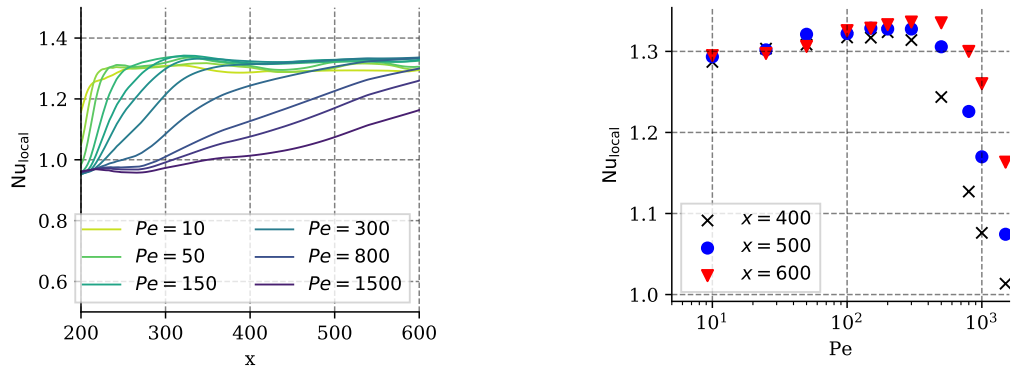


Figure 4.2 – Flux pariétal réduit, instantané et moyenne temporelle pour différents nombres de Peclet ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$  et  $B = 10$ ).

différent de la grandeur utilisée dans la publication de Malamataris et al. (2002), qui est obtenue en divisant le flux pariétal par le flux du film de Nusselt à l'équilibre thermique. Cette grandeur ne nous semblait pas pertinente : comme indiqué sur la figure 4.4, une distance non négligeable peut être nécessaire avant d'atteindre cet équilibre thermique pour des nombres de Peclet importants.

Ce résultat apporte une information qui nous semble importante : à toutes autres caractéristiques constantes, l'augmentation du nombre de Reynolds (et donc du nombre de Peclet) peut dégrader les performances des équipements utilisant les films ruisselants, à moins d'utiliser des plaques ou des tubes assez longs pour rendre cet effet négligeable sur le transfert global.

Le cas n°2 nous permet de valider que le modèle intégral se comporte correctement pour un écoulement instationnaire. La figure 4.5 présente la densité



(a) Nombre de Nusselt local en fonction de la distance pour différents nombres de Peclet.

(b) Nombre de Nusselt local en fonction du Peclet, à différentes distances.

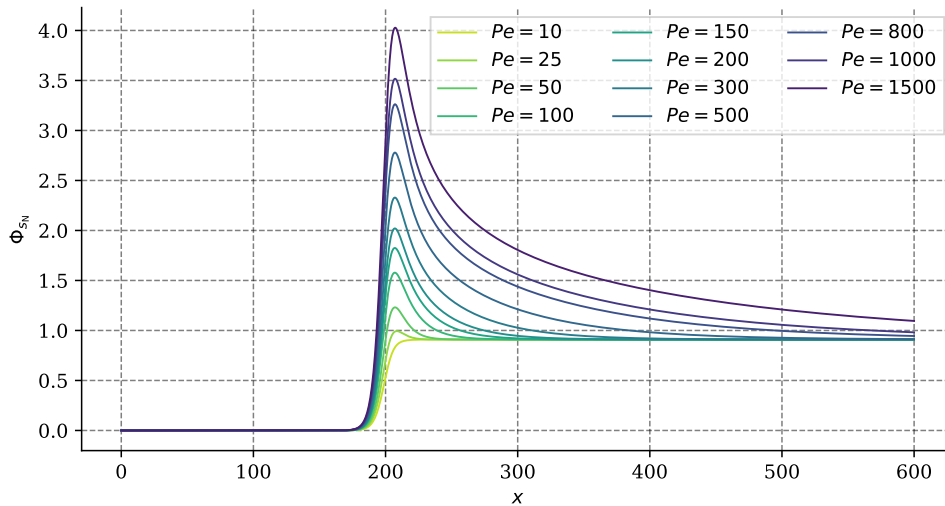


Figure 4.4 – Flux à la paroi pour un film plat à différents nombres de Peclet.

de flux de chaleur pour des nombres de Peclet 50 et 800, pour le modèle intégral et pour l'équation de Fourier. On observe un bon accord une fois le régime établi. Ce n'est pas le cas à proximité de l'entrée du domaine, en particulier pour un nombre de Peclet élevé.

Le modèle  $\theta - \phi$  prend comme point de départ du développement la solution de Nusselt. Il est donc normal que nous observions de tels écarts lorsque nous nous éloignons de la solution de base. En prenant comme condition d'entrée un film plat à l'équilibre thermique, nous éviterons ces écarts. Cela reste une limite de notre modèle : tout écart important à l'état d'équilibre doit être



évité pour garder un accord raisonnable. Dans ce cas contraire, il est nécessaire de résoudre l'équation de Fourier.

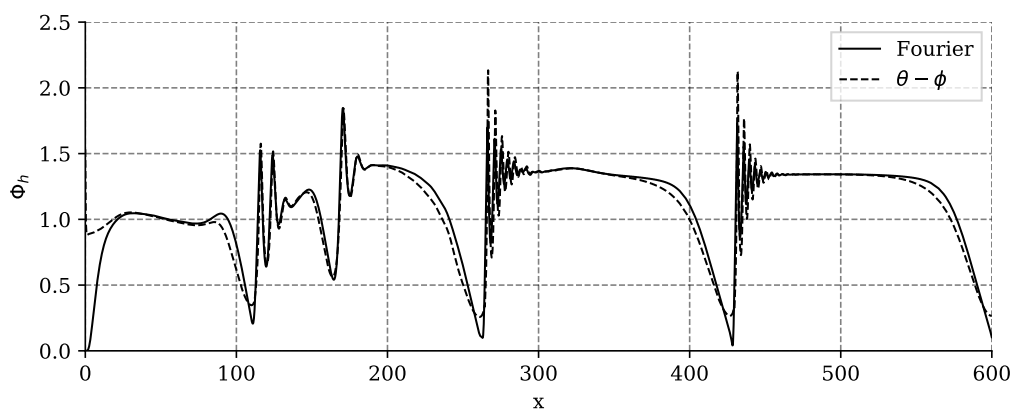
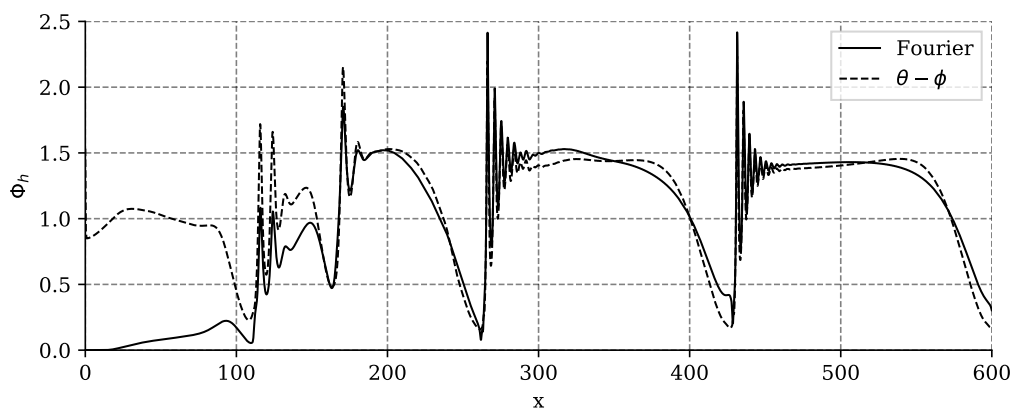
(a)  $Pe = 50$ (b)  $Pe = 800$ 

Figure 4.5 – Flux de chaleur à l'interface en fonction de la distance pour différents nombres de Peclet ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$  et  $B = 10$ ).

Les figures 4.6 et 4.7 présentent le champ de température et la densité de flux pour les nombres de Peclet 50 et 800, à la fois pour le modèle  $\theta - \phi$  et pour la résolution de l'équation de Fourier. Si les ordres de grandeurs sont bons, il apparaît que notre modèle n'est pas assez complexe pour capturer correctement les variations de température au niveau de la crête. Malgré tout, la position du point de rebroussement ( $x \approx 430$ ) est située au même endroit pour les deux modèles.

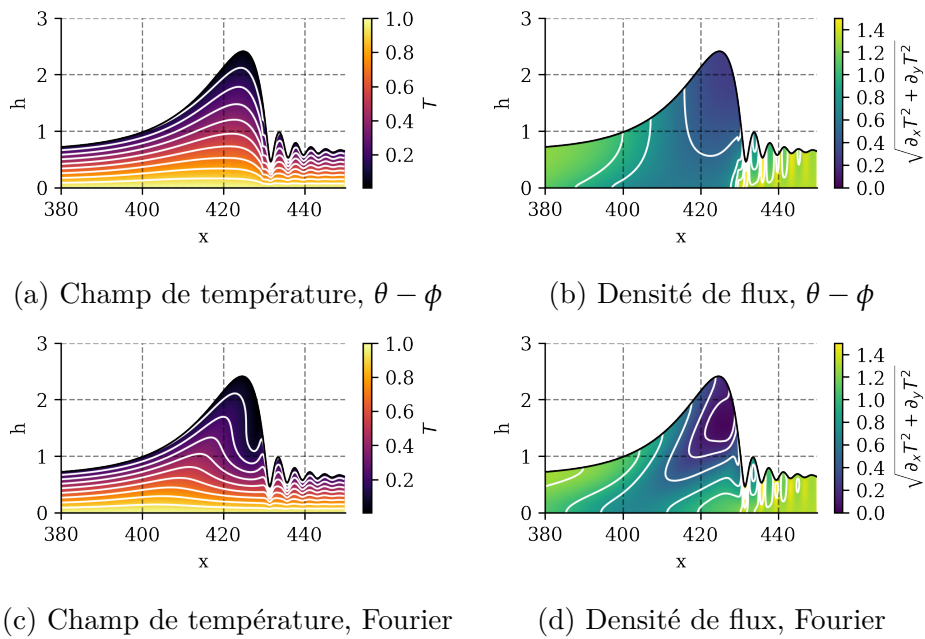


Figure 4.6 – Comparaison entre modèle intégral et résolution de l'équation de Fourier ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$ ,  $Pe = 50$ ,  $B = 10$ ).

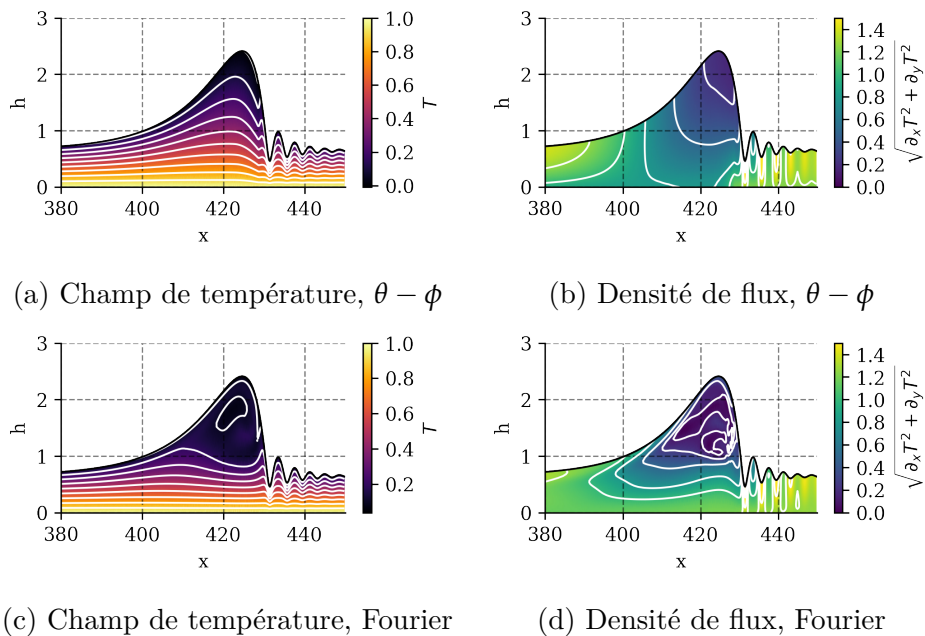


Figure 4.7 – Comparaison entre modèle intégral et résolution de l'équation de Fourier ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$ ,  $Pe = 800$ ,  $B = 10$ ).

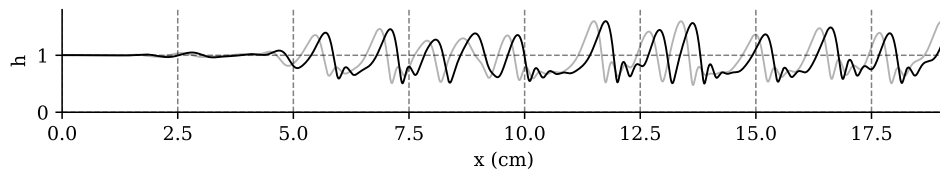
### 4.1.2 Écoulement sur support vertical

Une seconde série de simulations concerne un écoulement sur support vertical. Le travail est similaire : il s'agit d'explorer l'effet de l'augmentation du nombre de Peclet sur le transfert de chaleur au travers du film ruisselant, mais sur une hydrodynamique plus complexe. L'étude sera plus complète et couvrira deux nombres de Biot et deux nombres de Reynolds, pour un fluide entrant à l'équilibre thermique. Un bruit est appliqué sur l'épaisseur en entrée du fluide afin d'obtenir un régime dominé par les ondes naturelles (et d'éviter de favoriser une fréquence en particulier). Nous utiliserons l'équation de Fourier ainsi que notre modèle avec et sans coefficients de relaxation. De cette façon, nous pourrions valider le bon fonctionnement de notre modèle dans un cas d'usage réel avec une dépendance temporelle. Les paramètres communs à toutes les simulations de cette section sont :  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ .

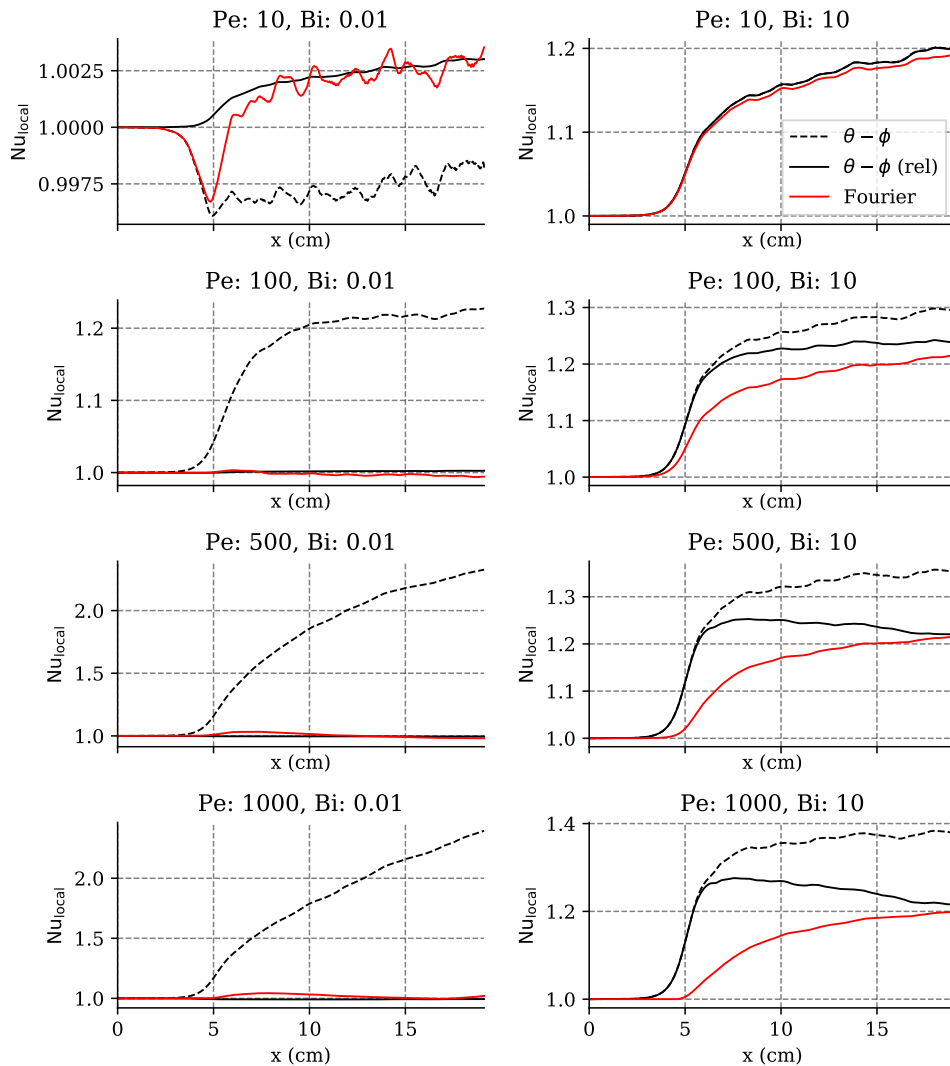
#### 4.1.2.1 Validation & analyse globale

Deux comportements distincts sont observés (voir figure 4.8) pour les deux différents nombres de Biot. Pour un nombre Biot faible ( $Bi = 0.01$ ), l'intensification est très faible (de l'ordre de  $1/1000$ ). Notre modèle est incapable de retrouver les grandeurs calculées avec l'équation de Fourier sans les coefficients de relaxation modifiés, et ce même pour des nombres de Peclet raisonnables ( $Pe > 10$ ). C'est cohérent avec les résultats obtenus pour un domaine périodique (voir chapitre 3, section 3.2.2). L'ordre de grandeur obtenu est correct lorsque l'on utilise les coefficients de relaxation modifiés, mais l'intensification de transfert est extrêmement faible : la présence d'ondes propagatives ne semble pas, sous ces conditions, améliorer le transfert thermique de façon significative. C'est donc un cas que nous allons mettre de côté dans la suite de notre étude.

Il en va autrement pour un nombre de Biot plus élevé ( $Bi = 10$ ). Nous remarquons tout d'abord que nous sur-estimons l'intensification avec notre modèle, avec ou sans coefficients de relaxation modifiés. Celui-ci est capable de forcer le modèle à retrouver les valeurs d'intensification à l'équilibre obtenues avec l'équation de Fourier, non de représenter correctement le comportement thermique vers l'entrée du domaine, là où les ondes commencent à s'établir ( $x \approx 5$ ). Le flux est largement surestimé dans cette zone.



(a) Épaisseur du film en fonction de la distance, dernier pas de temps.



(b) Nusselt local en fonction de la distance, comparaison entre les différents modèles.

Figure 4.8 – Comparaison du modèle  $\theta - \phi$  (avec et sans coefficients de relaxation modifiés) avec l'équation de Fourier pour différents nombres de Biot et de Peclet,  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ .

Il semble que l'utilisation du modèle  $\theta - \phi$  soit restreinte à une gamme de Peclet plus restreinte que ne laissait entendre nos calculs chapitre 3, section 3.2.2. Pour la suite, les simulations seront effectuées avec comme paramètres  $\text{Bi} = 10$ , pour de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  et pour un nombre de Reynolds  $\text{Re} = 15$ . Dans ces conditions,  $\text{Pe} = 105$  : notre modèle se comporte de façon satisfaisante.

Il est important de noter que malgré ces contraintes, le modèle  $\theta - \phi$  garde un avantage non négligeable : il est bien plus rapide que son équivalent. La figure 4.9 montre un gain (facteur 3 à 6) sur le temps de calcul comparé à la résolution de l'équation de Fourier avec 15 points de discrétisation dans l'épaisseur du film.

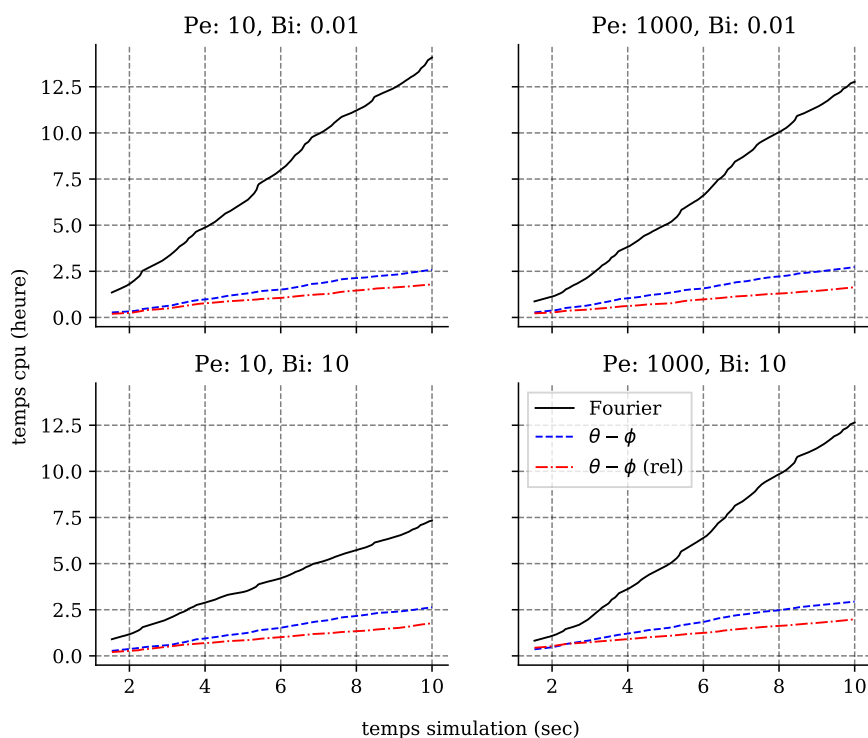


Figure 4.9 – Comparaison du temps de calcul entre les différents modèles pour différents nombres de Biot et de Peclet.

Ce gain n'est pas négligeable, mais la résolution de l'équation de Fourier demande un temps acceptable (de l'ordre de la demi-journée pour un domaine d'une vingtaine de centimètres, de l'ordre de la journée pour un domaine d'une soixantaine de centimètres). De fait, il est possible travailler en deux temps : le modèle  $\theta - \phi$  permet de réaliser une étude paramétrique rapide (à condition

de se trouver dans un domaine où ce modèle se comporte correctement), et l'équation de Fourier est ensuite utilisé pour confirmer les résultats à proximité des zones d'intérêt.

#### 4.1.2.2 Le phénomène de transfert en détail

Si l'on observe plus en détail comment la chaleur est transférée à travers l'épaisseur du film ruisselant (voir figure 4.10), on remarque un phénomène intéressant : pour un Peclet faible, le flux transféré est très dépendant de l'épaisseur du film. Il est important au creux de l'onde et faible à la crête, à la paroi comme à l'interface. Lorsque le nombre de Peclet devient élevé, le flux augmente : le minimum local du flux à la paroi situé sous la crête n'existe plus, et le flux est beaucoup plus homogène.

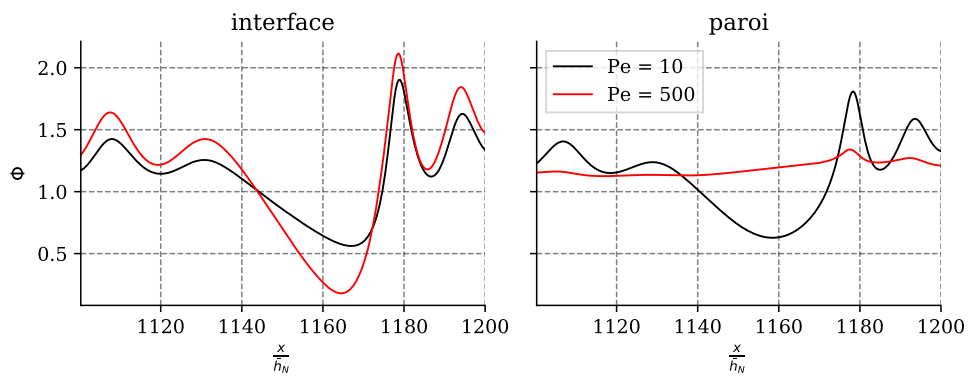


Figure 4.10 – Comparaison des flux transférés à l'interface et à la paroi pour différents nombres de Peclet en fonction de la distance,  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ ,  $Bi = 10$ .

Les maxima locaux du flux à l'interface sont au contraire plus importants, en favorisant malgré tout légèrement les maxima (au creux des vagues capillaires), ce qui mène à un flux plus important pour le cas  $Pe = 500$  (voir figure 4.11).

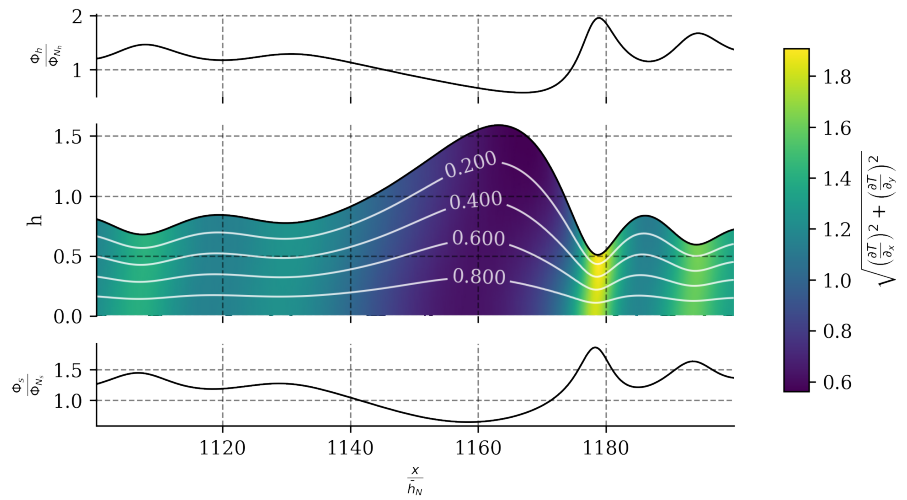
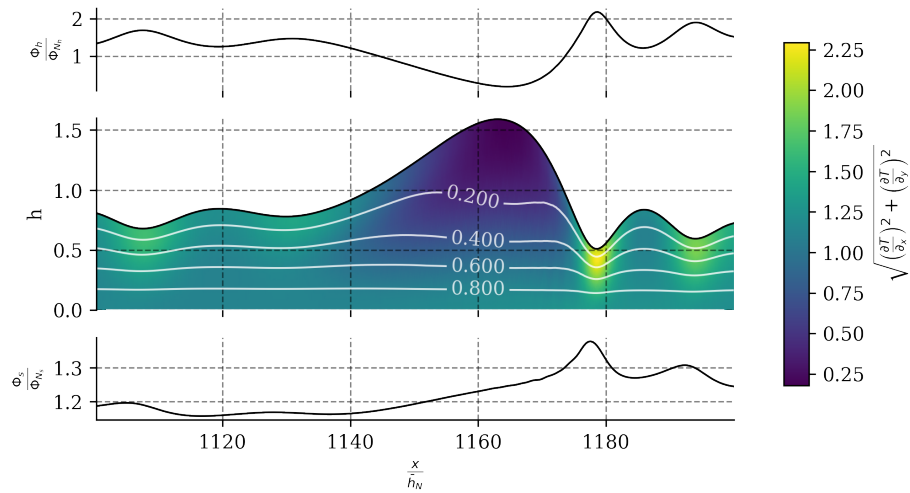
(a)  $Pe = 10$ (b)  $Pe = 500$ 

Figure 4.11 – Transfert thermique à travers une onde propagative : le gradient de couleur représente la densité de flux, les isothermes sont indiquées en blanc. Les flux à la paroi et à l'interface sont tracés respectivement en dessous et au dessus de la figure principale.  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ ,  $Bi = 10$ .

## 4.2 Influence de la fréquence de forçage

Nous avons vu que la présence des instabilités hydrodynamiques permet d'augmenter les transferts de façon significative. Notre hypothèse est que la présence d'une recirculation au sein de la crête des ondes propagatives (visibles dans le référentiel des ondes) transporte la chaleur vers l'interface fluide / atmosphère. La présence de cette recirculation est fortement liée au régime hydrodynamique du film ruisselant. Nous allons donc étudier l'influence de la fréquence de forçage sur le régime hydrodynamique et sur l'intensification de transfert au sein du film. Les fréquences les plus favorables devraient être celles qui favorisent la formation de "rouleaux" au niveau des crêtes.

Nous avons vu dans la section précédente que l'intensification de transfert était négligeable pour des nombres de Biot faibles, phénomène que nous n'arrivons pas à capturer avec le modèle intégral. Nous nous focaliserons donc sur le cas d'un évaporateur, avec des nombres de Biot modérés. Nous modélisons donc un film d'eau, ruisselant sur un support vertical. Les paramètres fixes sont  $Re = 15$ ,  $We = 265,8$ , ( $Ka = 3360$ ),  $Ct = 0$ ,  $Bi = 10$ . Les fréquences varient entre 4 Hz et 40 Hz, et nous avons choisi comme nombre de Peclet  $Pe = 105$ . Nous avons vérifié à la section précédente que pour ces conditions, le modèle intégral se comporte correctement.

### 4.2.1 Analyse temporelle

La figure 4.12 montre, pour différentes longueurs de plaque, le nombre de Nusselt global pour chaque fréquence de forçage.

Pour les fréquences les plus basses et les plus élevées, l'intensification de transfert atteint un plateau. Ce plateau correspond au régime hydrodynamique dominé par les ondes naturelles. Le film ne réagit pas aux fréquences de forçage les plus basses et les plus élevées pour des raisons différentes : les hautes fréquences sont atténuées par la tension de surface du film ruisselant : seules les fréquences bruitées sont amplifiées. Les très basses fréquences ont un effet à une échelle de temps trop grande : le temps de passage du fluide est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du signal en entrée. Seules les fréquences bruitées amplifient le film tandis que le signal joue sur l'épaisseur moyenne globale du film.



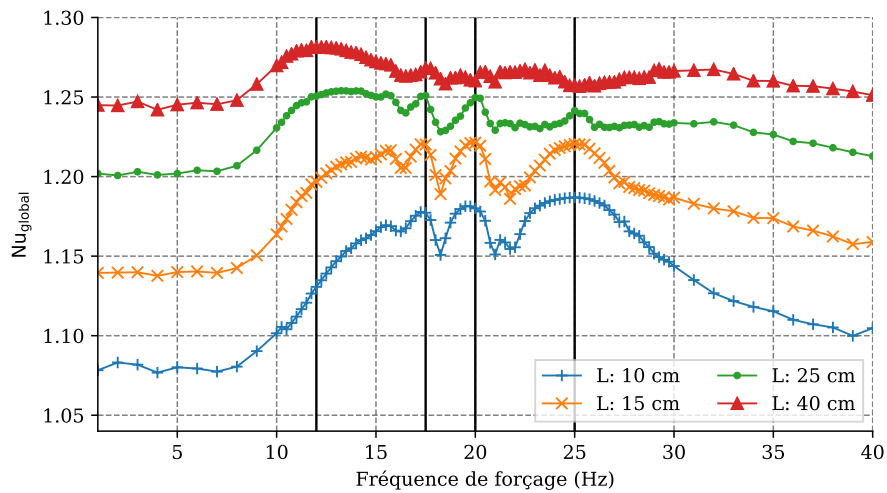


Figure 4.12 – Nusselt global en fonction de la fréquence de forçage, pour différentes longueurs d'écoulement.  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ ,  $Bi = 10$ , modèle  $\theta - \phi$ .

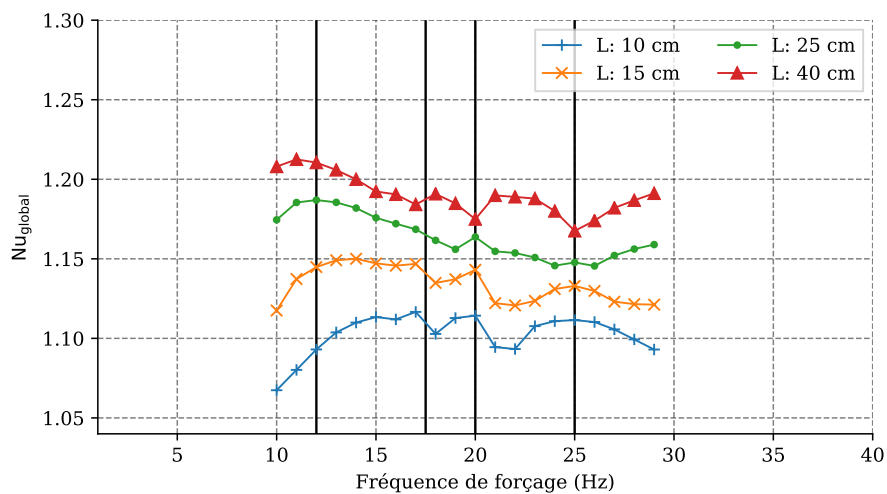


Figure 4.13 – Nusselt global en fonction de la fréquence de forçage, pour différentes longueurs d'écoulement.  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ ,  $Bi = 10$ , équation de Fourier.

Nous avons vérifié cette tendance en résolvant l'équation de Fourier, pour quelques fréquences (voir figure 4.13). Notre modèle surestime un peu les transferts thermiques, mais les tendances et les extrema locaux sont correctement capturés.

Le nombre de Peclet semble influencer principalement sur l'amplitude de l'intensification : pour des plaques de faible longueur, il existe des maximums locaux à  $f = 17.5 \text{ Hz}$ ,  $f = 20 \text{ Hz}$  et  $f = 25 \text{ Hz}$ . Au fur et à mesure que la longueur de plaque augmente, le Nusselt augmente et cette topographie se lisse.

Si l'on trace l'intensification de transfert ( $\text{Nu}_{\text{global}} - 1$ ) en fonction de la longueur de plaque et de la fréquence de forçage, on voit que la fréquence a une forte influence sur l'intensification de transfert, influence qui diminue avec la longueur de plaque. Toutefois, autour de  $f = 12 \text{ Hz}$ , la tendance se renforce avec l'accroissement de la longueur de plaque.

En regardant le Nusselt local le long de l'écoulement pour ces différentes fréquences, on observe qu'un minimum local forme une frontière autour des zones de forte intensification observées aux fréquences autour de  $f = 20 \text{ Hz}$  et  $f = 25 \text{ Hz}$ , lorsque la plaque est courte.

La figure 4.14 nous donne un indice quant aux phénomènes sous-jacents à ce comportement. Celle-ci présente l'épaisseur du film au dernier pas de temps pour les différentes fréquences étudiées en même temps que l'intensification du film pour les différentes longueurs.

L'intensification diminue dès lors que les instabilités secondaires détruisent le train d'onde. C'est particulièrement visible autour de  $25 \text{ Hz}$  : les intensifications les plus faibles se situent là où le régime est en transition et pour lequel il existe beaucoup d'appariement d'ondes (voir figure 4.15). Pour des faibles longueurs de plaque, d'importantes intensifications ont lieu à  $20 \text{ Hz}$  et  $25 \text{ Hz}$ , là où les ondes sont établies (avec et sans ondes capillaires précédant les ondes principales). Mais ces trains d'ondes sont aussi très fragiles vis-à-vis des instabilités secondaires dues au bruit. Pour des longueurs plus élevées, ces instabilités secondaires dominent sur une fraction importante de l'écoulement, ce qui explique que les différentes fréquences aient moins d'importance sur l'intensification globale.

On observe autour de  $25 \text{ Hz}$  et  $20 \text{ Hz}$ , pour le Nusselt local (voir figure 4.16), un phénomène très particulier ressemblant à un effet de Moiré : il existe des minimums et maximums locaux en espace, alors même que les grandeurs sont moyennées en temps.

En traçant l'enveloppe des ondes pour quelques fréquences en fonction de la distance (voir figure 4.17), on observe une modulation en espace. C'est un

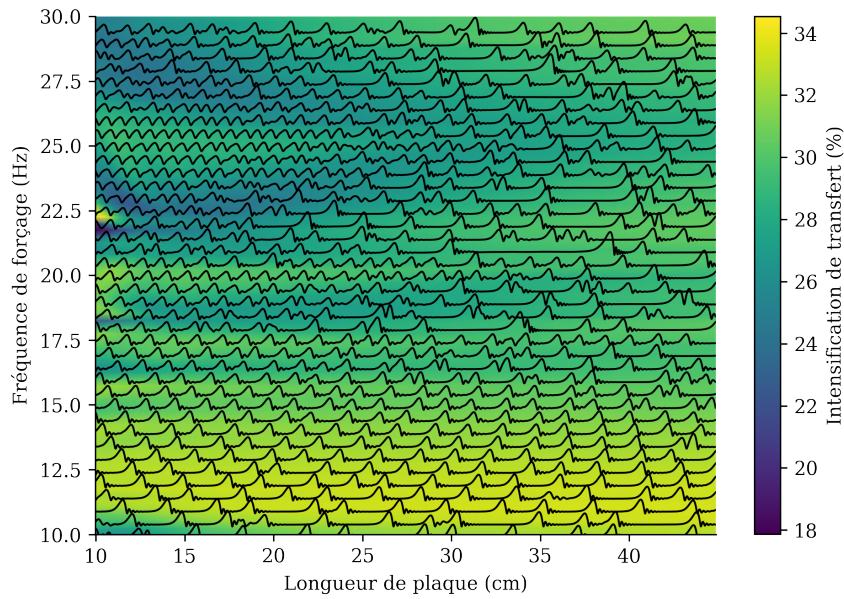


Figure 4.14 – Intensification du transfert thermique comparé à un film plat en fonction de la longueur de plaque et de la fréquence de forçage. En surimpression, l'épaisseur du film ruisselant en fonction de la distance et de la fréquence de forçage au dernier pas de temps.

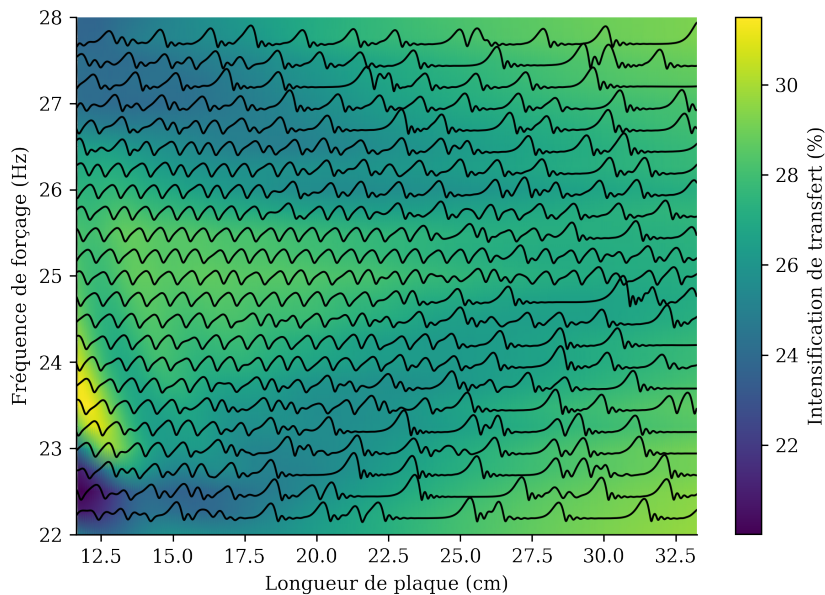


Figure 4.15 – Grossissement sur l'intervalle [22 Hz – 28 Hz] / [10 cm – 33 cm]

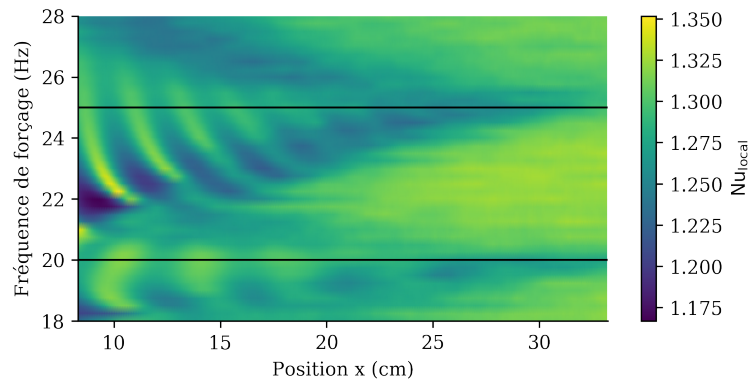


Figure 4.16 – Nusselt local en fonction de la distance et de la fréquence de forçage.

phénomène qui a été observé et décrit par Kalliadasis et al. (2012) (section 7.3.1, figure 7.43) : en absence de bruit et pour certaines fréquences de forçage, le système présente une modulation en espace qui fini par être amorti en aval de l'écoulement. La présence de bruit dans le signal d'entrée fini par détruire la synchronisation du film avec la fréquence d'entrée et par générer des ondes solitaires. Cette modulation en espace en première partie de l'écoulement explique les variations de Nusselt local observées.

Les fréquences autour de 12 Hz mènent à un régime hydrodynamique favorable au transfert thermique. De plus, les trains d'ondes obtenus se révèlent très stables, même sur des longueurs importantes.

Nous allons tenter de quantifier ces observations. Pour cela, nous réalisons une analyse spectrale de nos résultats : l'objectif est de vérifier l'accrochage en fréquence entre le forçage et l'évolution temporelle du film ruisselant le long de l'écoulement, et d'essayer de détecter les zones où le film ruisselant est synchronisé avec la fréquence de forçage. De cette façon, nous espérons confirmer nos premières observations : l'intensification est meilleure là où le film génère un nombre assez important d'ondes propagatives stables et établies, et donc là où le régime hydrodynamique est contrôlé par notre fréquence de forçage.

#### 4.2.2 Analyse fréquentielle

La figure 4.18 présente les densités spectrales de puissances (DSP) le long de l'écoulement pour différentes fréquences : Pour  $f = 14 \text{ Hz}$ , on observe trois

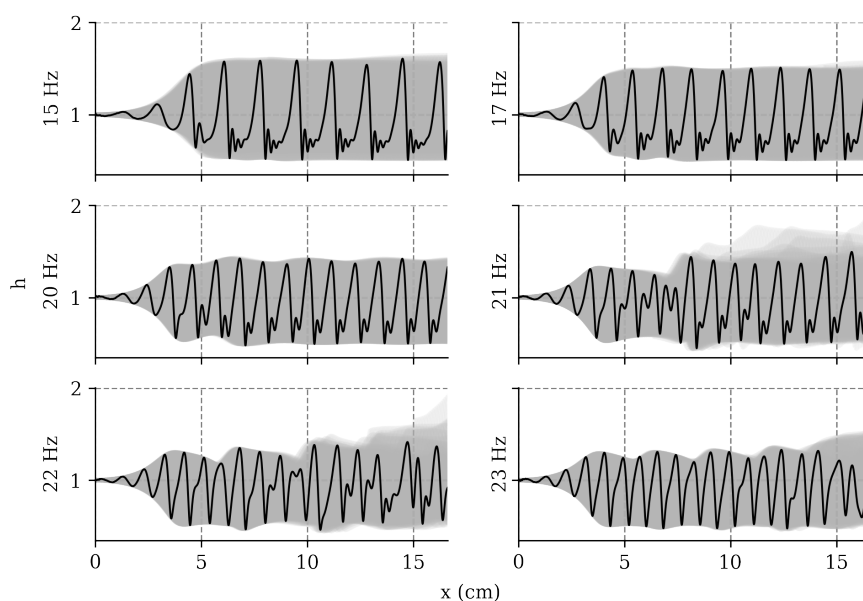


Figure 4.17 – Épaisseur du film en fonction de la distance (dernier pas de temps) en trait noir, l’enveloppe de l’épaisseur (domaine entre le minimum et maximum selon le temps en fonction de la distance) est représenté en gris clair.

bandes situées respectivement à 14, 28 et 32 Hz : le film ruisselant amplifie la fréquence de forçage en développant le train d’ondes et ses harmoniques via les ondes capillaires précédant les ondes principales. Pour  $f = 20$  Hz et  $f = 25$  Hz, on observe le même phénomène jusqu’à une certaine longueur de plaque après quoi le signal envahit toutes les fréquences : le train d’ondes est détruit par les instabilités secondaires générées par le bruit d’entrée. Cela arrive presque immédiatement pour les basses et hautes fréquences ( $f = 5$  Hz et  $f = 40$  Hz). Dans ce cas, le film n’accroche pas la fréquence de forçage : il joue le rôle d’un filtre passe haut et passe bas.

La figure 4.19 présente, plus en détail, la DSP à différents emplacements pour un certain nombre de fréquences. On observe nettement la perte de l’accrochage après une certaine distance : certaines fréquences sont plus robustes que d’autres et les trains d’ondes générés sont alors capables de résister aux instabilités secondaires. En cohérence avec notre hypothèse, ces zones de stabilité semblent alignées avec les domaines les plus favorables à l’intensification thermique.

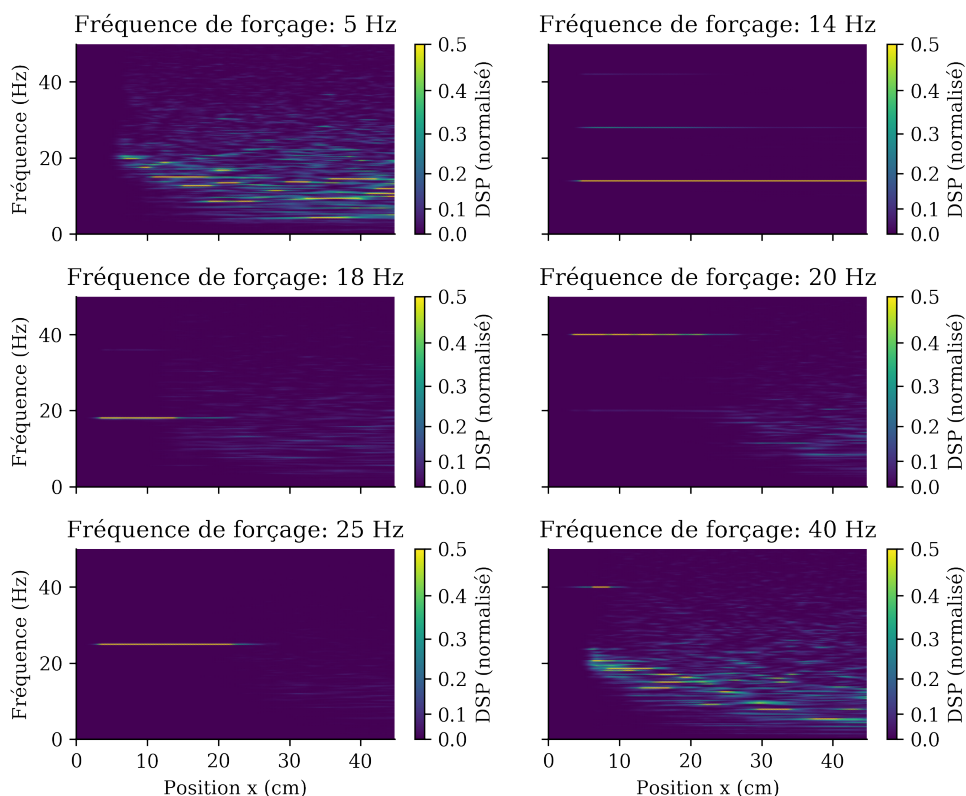


Figure 4.18 – Transformée de Fourier de l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant le long de l'écoulement pour différentes fréquences de forçage.

L'objectif suivant passe par la mise en place d'une métrique quantifiant l'accrochage en fréquence le long de l'écoulement pour les fréquences étudiées.

Nous avons décomposé le domaine fréquentiel en deux sous-domaines :  $A_{\text{total}}$  l'ensemble des fréquences et  $A_{H_N}$  les fréquences situées à  $\pm 0.2$  Hz de la fréquence de forçage et de ses  $N$  premières harmoniques. Notre métrique est alors définie comme

$$\log_{10} \left( \frac{\int_{A_{\text{total}}} \text{DSP} df}{\int_{A_{H_2}} \text{DSP} df} \right) \quad (4.6)$$

Elle est définie sur  $\mathbb{R}^-$  et plus la valeur est proche de 0, plus l'accrochage est bon (voir figure 4.20). Les phénomènes observés précédemment sont capturés par notre métrique : certaines fréquences restent synchronisées avec le forçage sur l'ensemble de l'écoulement tandis que d'autres la perdent plus ou moins brusquement après une certaine distance.

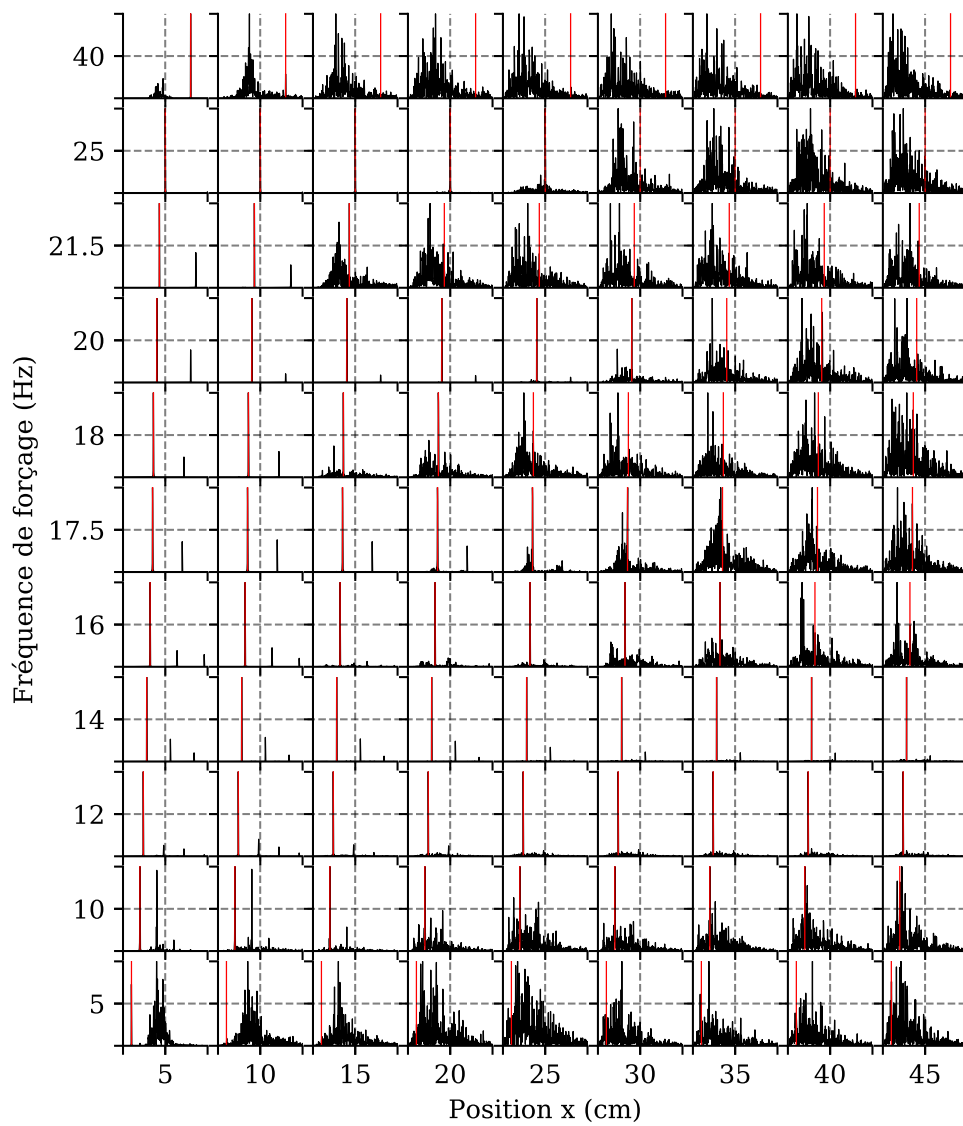


Figure 4.19 – Transformées de Fourier de l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant pour différentes fréquences de forçage à différentes distances.

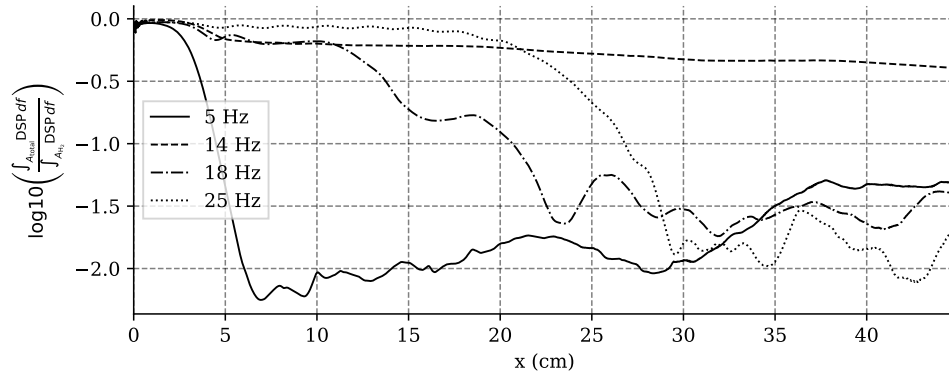


Figure 4.20 – Indicateur de l’intensité d’accrochage entre l’évolution temporelle de l’épaisseur du film ruisselant et la fréquence de forçage en fonction de la distance, pour différentes fréquences de forçage.

Nous avons ensuite utilisé un algorithme de partitionnement pour identifier une frontière séparant le domaine où le film ruisselant est synchronisé avec la fréquence de forçage du domaine où les vagues naturelles dominent. Nous avons utilisé un partitionnement en  $k$ -moyennes : il s’agira de diviser le domaine en  $N$  sous-domaines (ici,  $N = 2$ ) cohérents.

### ⊕ Algorithmes de partitionnement de données

Avec l’explosion de la quantité de données numériques disponibles, de nouveaux moyens de traitement ont été développés. Parmi eux, les algorithmes d’apprentissages supervisés et non supervisés.

Les premiers nécessitent deux ensembles d’échantillons déjà étiquetés : un ensemble d’entraînement et un ensemble de validation. Une fois passé la phase d’apprentissage, l’algorithme sera capable de catégoriser correctement des échantillons similaires à son ensemble d’entraînement. La présence d’un “expert” est nécessaire pour étiqueter les exemples des sets d’apprentissage et de validation. Le succès récent de ces algorithmes provient de la quantité de données déjà classées provenant des bases de données et du web, ainsi que de la diminution des coûts de calcul. Les applications sont nombreuses, et ces algorithmes se sont particulièrement fait remarquer dans la reconnaissance d’image.

Les seconds ne nécessitent pas d’étiquetage préalable : le partitionnement se fera en groupant les données partageant des caractéristiques



communes. La similarité des objets est souvent calculée comme une distance (le choix de la métrique est un point important) entre paires d'objets. Il existe un nombre important d'algorithmes capables de gérer un nombre plus ou moins important d'échantillons et de catégories, ou d'opérer des séparations plus ou moins linéaires entre les échantillons.

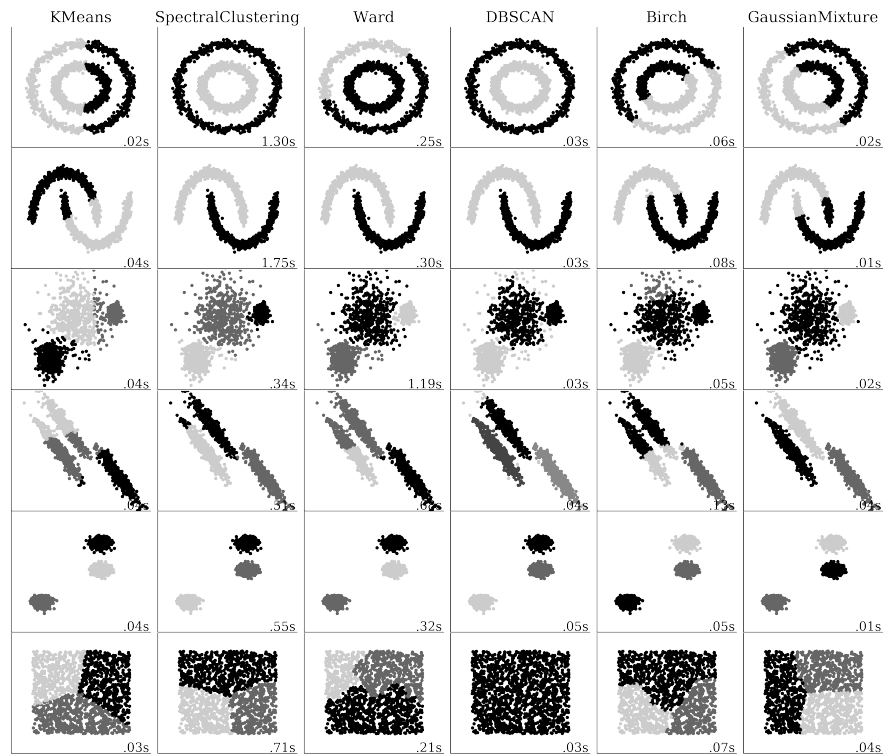
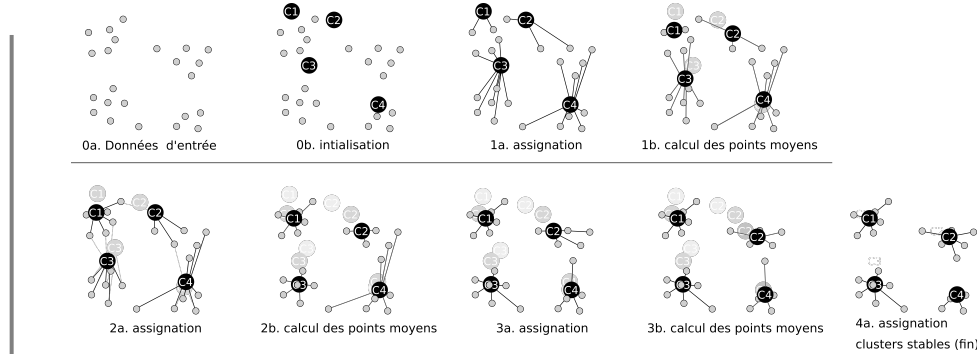
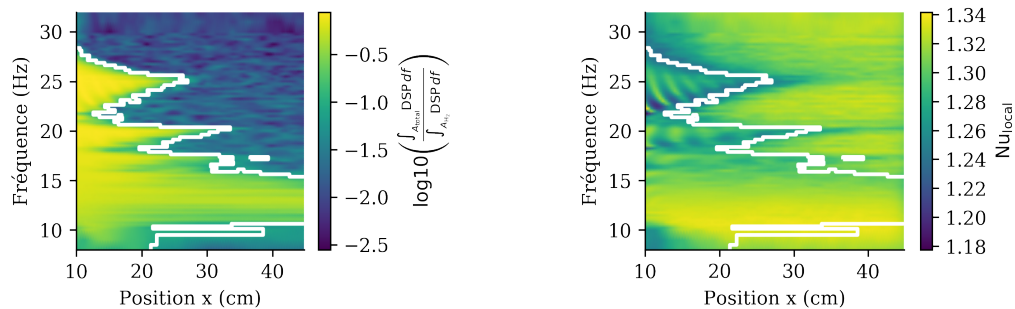


Figure 4.21 – Comparatif de différents algorithmes de partitionnement de données.

Notre cas d'utilisation nécessite une séparation quasi-linéaire mais nous avons un nombre important d'échantillons : nous utiliserons l'algorithme k-moyenne. Dans ce cas, on choisit  $k$  points (le nombre de catégories souhaitées) au hasard. On assigne au cluster  $k$  les observations les plus proches. On calcule la position moyenne de chaque cluster, et on déplace le point  $k$  à cette position. On recommence l'assignation, le calcul de la position de la moyenne et la mise à jour des points  $k$  jusque stabilisation des catégories.



La figure 4.22a montre le résultat de ce partitionnement. Nous sommes partis d'une analyse fréquentielle par transformée de Fourier pour obtenir un partitionnement de notre domaine initial  $(x, f)$ . La figure 4.22b représente ce partitionnement projeté sur la carte du Nusselt local en fonction de la position  $x$  et de la fréquence de forçage. Notre frontière, obtenue à partir d'une métrique représentant la synchronisation du signal avec la fréquence de forçage, est cohérente avec les variations du nombre de Nusselt.



(a) Indicateur d'accrochage en fréquence entre le forçage et le film en fonction de la distance et de la fréquence de forçage. La frontière dessinée est le résultat d'un partitionnement du domaine par un algorithme k-moyenne.

(b) Nusselt local en fonction de la distance et de la fréquence de forçage. La frontière est la même que celle décrite sur la figure de droite.

Si la présence d'un train d'onde établi (et donc synchronisé à la fréquence d'entrée) est un élément important pour améliorer l'intensification de transfert, nous devrions également observer une corrélation entre densité d'onde et intensification : si la distance séparant deux ondes propagatives se creuse, leur impact sur la thermique devrait diminuer.

### 4.2.3 Détection d'ondes

Afin d'étudier cette corrélation potentielle, nous avons identifié les ondes propagatives (principales et capillaires) pour l'ensemble des pas de temps et des fréquences étudiées (voir figure 4.23).

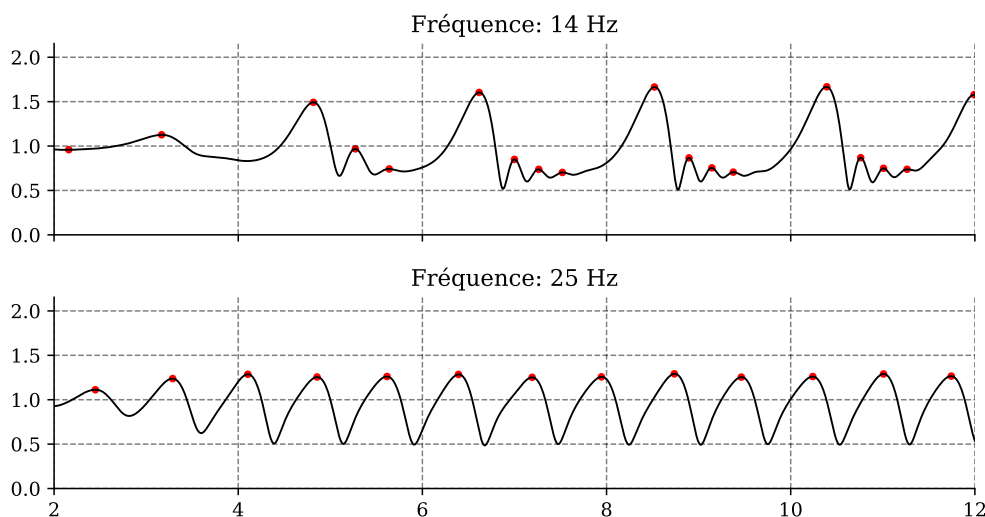
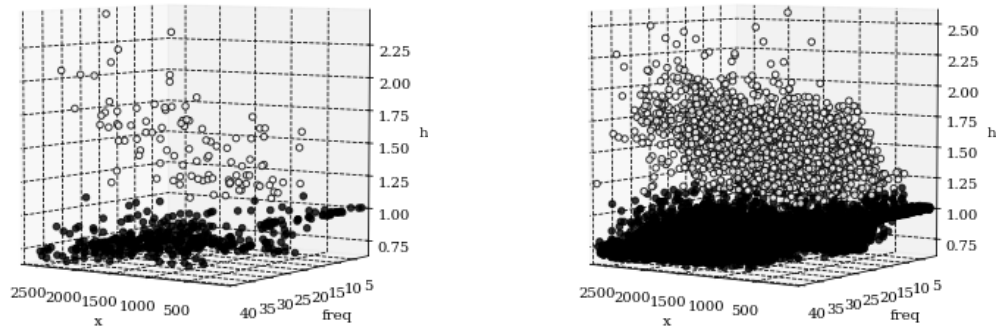


Figure 4.23 – Identification des crêtes des ondes (principales et capillaires) présentes à un instant donné de la simulation.

Ces ondes sont ensuite classées selon leur nature : ondes principales et ondes capillaires. Un partitionnement k-moyenne est utilisé pour cette tâche. Le nombre d'ondes étant important (73 millions), le partitionnement se fera en deux temps : tout d'abord une étape d'entraînement sur un échantillonnage réduit (500 échantillons, voir figure 4.24a), puis utiliser le résultat de cet entraînement sur l'ensemble des ondes identifiées (voir figure 4.24b). En traçant pour quelques fréquences le dernier pas de temps avec le résultat de cette classification, nous vérifions que le résultat est acceptable (voir figure 4.25).

Il est alors possible de séparer et d'agréger ces ondes selon leur position afin d'obtenir la densité d'ondes propagatives (voir figure 4.26). On y observe les deux phénomènes mentionnés plus haut : en augmentant la fréquence de forçage, on augmente le nombre d'ondes présentes sur la plaque, ce qui augmente le transfert thermique (voir figure 4.14).

Ce résultat est à contre-pied de ce que nous attendions : dans le domaine où le train d'ondes propagatives est stable (11 Hz - 16 Hz), les cas les plus



(a) Ensemble d'entraînement pour l'algorithme de partitionnement k-moyenne.

(b) Prédiction (après entraînement) réalisé avec l'algorithme k-moyenne.

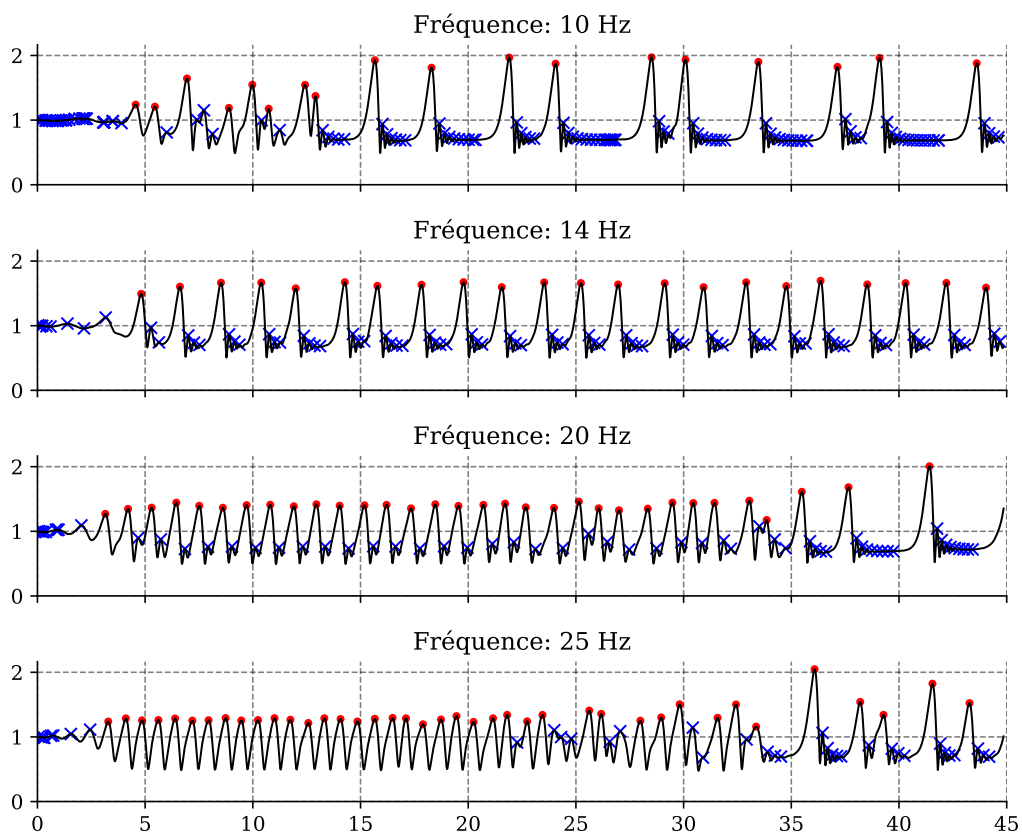


Figure 4.25 – Résultat du partitionnement (10000 échantillons / 70 millions) des ondes selon leur nature (dernier pas de temps).

favorables à l'intensification sont les écoulements où la densité d'onde est la plus faible (voir figure 4.26).

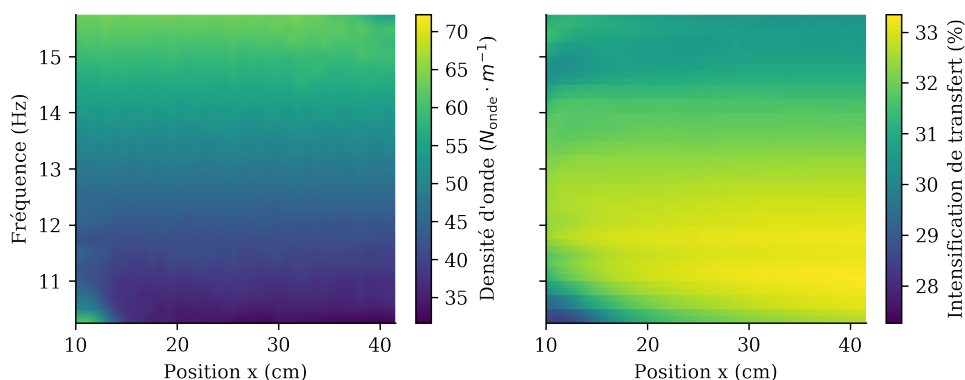


Figure 4.26 – Densité d'ondes propagatives en fonction de la fréquence et de la distance.

En traçant la position des crêtes pour différentes fréquences (voir figure 4.27), nous nous rendons compte que si l'augmentation de la fréquence de forçage permet de densifier le train d'ondes, elle mène aussi à des crêtes de moindre amplitude. La recirculation au sein de celles-ci est donc moins importante, ce qui explique l'amointrissement de l'intensification de transfert.

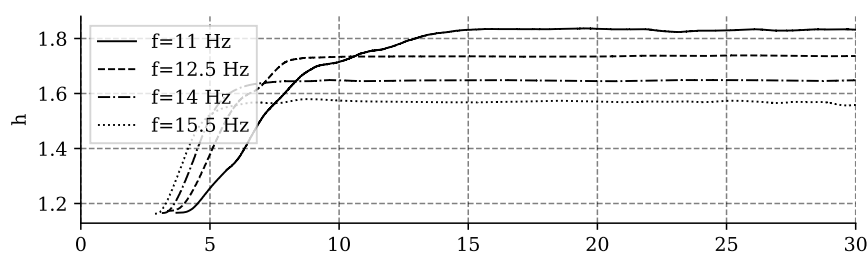


Figure 4.27 – Position moyenne des crêtes des ondes principales en fonction de la distance pour quelques fréquences.

## Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus pour des simulations de cas réels : le cas simulé n'est plus une boîte périodique de taille restreinte mais un écoulement de taille modéré (entre trente centimètres et un

mètre) en domaine ouvert. Notre modèle intégral développé au chapitre précédent a des difficultés à représenter l'établissement du régime thermique pour des nombres de Peclet dépassant la centaine, après quoi le transfert thermique de la zone d'établissement est largement sur-estimé.

Malgré cela, il a été possible de réaliser une étude sur l'impact de la fréquence de forçage sur l'intensification du transfert thermique comparé à un film plat équivalent. Notre hypothèse est que la présence du rouleau de recirculation situé sous les crêtes des ondes propagatives permet de transporter efficacement l'énergie depuis la paroi jusqu'à l'interface. Sans ce rouleau (ou pour un nombre de Peclet faible, qui limite l'impact de la convection sur le transfert thermique), le flux thermique pariétal sous la crête est très faible, car limité par l'épaisseur importante du film. Lorsque le nombre de Peclet augmente, la chaleur est transportée depuis la base du rouleau jusqu'à être transférée à l'atmosphère.

Ces rouleaux nécessitent d'avoir des ondes propagatives établies pour se développer, ce qui explique que les régimes hydrodynamiques les plus favorables au transfert soient ceux qui génèrent la plus grande densité d'ondes propagatives stables. Les films ruisselants ne réagissent pas aux fréquences de forçage trop basses ou trop élevées, et ils tendent à se déstructurer sous l'effet des instabilités secondaires après une certaine distance : à moins que la longueur d'écoulement soit faible, les fréquences optimales seront celles générant les trains d'ondes les plus stables.

Pour la suite, nous allons tenter d'utiliser la géométrie du support d'écoulement pour contrôler le régime hydrodynamique et de favoriser les transferts thermiques : l'objectif est d'obtenir une gamme de fréquences "stables" la plus large possible, voire de se passer au forçage actif.



# Chapitre 5

## Perspectives

---

5.1	Impact des ondulations sur l'hydrodynamique . . . . .	160
5.1.1	État de l'art . . . . .	160
5.1.2	Validation du modèle avec topographie . . . . .	163
5.1.3	Expériences numériques . . . . .	164
5.2	Simulations 3D, effet Marangoni et démouillage . . . . .	167
5.3	Étude de sensibilité, optimisation . . . . .	168
5.3.1	Étude de sensibilité . . . . .	168
5.3.2	Optimisation . . . . .	170
5.4	Prise en compte de la turbulence . . . . .	175

---



Un certain nombre de travaux ont été commencés dans le cadre de cette thèse et ne peuvent faire l'objet d'un chapitre complet. D'autres éléments ont été mis de côté durant notre étude mais mériteront de s'y pencher plus en détail à terme.

## 5.1 Impact des ondulations sur l'hydrodynamique

Une question importante est l'utilisation d'ondulations pour contrôler l'hydrodynamique du film ruisselant : stabilisation, déstabilisation du film, sélection passive des ondes... un travail pré-exploratoire a été effectué, mais la question étant très large, nous avons manqué de temps et ne sommes pas en mesure de fournir de réponses à nos nombreuses questions.

### 5.1.1 État de l'art

Les premières études sur les films ruisselants sur support ondulé ont commencé dans les années 80, avec les travaux de Pozrikidis (1988). Contrairement à l'analyse d'un film ruisselant sur un support plat, la position de l'interface n'est pas connue a priori mais doit être déterminée et fait partie de la solution du problème. Autrement dit, le film de Nusselt n'est pas solution d'un film ruisselant sur une paroi ondulée, et n'a pas forcément d'équivalent que l'on peut déterminer analytiquement. Cela complique grandement l'analyse mathématique. Pozrikidis (1988) a choisi une résolution intégrale d'un écoulement de Stokes. Dans ce cas, la forme analytique du champ de vitesse peut être connue a priori, ce qui facilite la résolution du problème tout en limitant le domaine de validité à des nombres de Reynolds faibles. Les équations obtenues sont fortement non linéaires et seul le cas stationnaire est considéré. L'objectif est donc de déterminer numériquement la forme du film plat équivalent, en fonction des conditions d'écoulement du fluide. Si certaines sont facilement prédictibles, il apparaît que les contraintes à la paroi sont fortement influencées par le débit et que changer la géométrie du support peut générer des recirculation du fluide dans certaines régions de l'écoulement. Ces résultats sont cohérents avec les travaux expérimentaux de Taneda (1979) qui a travaillé sur des écoulements de Stokes autour de géométries très diverses, et en particulier la présence d'obstacles (marches, forme en dent de scie...) et pour

lesquels des phénomènes de recirculations complexes peuvent apparaître. Plus spécifiquement sur les films ruisselants, c'est un phénomène également observé par Zhao et Cerro (1992) et plus récemment par A. Wierschem et al. (2003). Ces derniers ont utilisé des particules fluorescentes pour tracer les lignes de courant (méthode PIV) pour observer les écoulements de faibles épaisseurs sur des géométries complexes. Il semble que pour ondulation assez marquées, une zone de recirculation ne participant pas à l'écoulement global apparaisse systématiquement (voir figure 5.1).

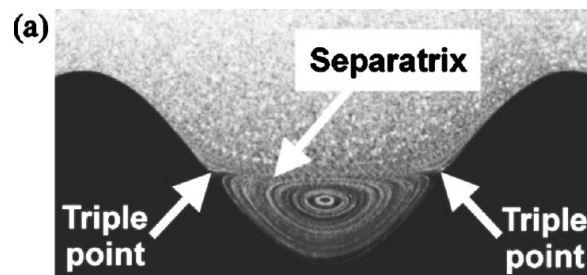


Figure 5.1 – Ligne séparatrice entre la zone de recirculation au creux des ondulations et l'écoulement du film (A. Wierschem et Aksel, 2004).

La présence d'une ligne séparatrice entre l'écoulement du fluide et la recirculation au fond des ondulations a été mise en évidence (A. Wierschem et Aksel, 2004). Celle-ci peut être perturbée ou détruite lorsque les débits augmentent et que l'inertie du fluide prend de l'importance. Les conséquences sur les transferts sont difficiles à estimer uniquement à partir de ces résultats : il sera nécessaire de réaliser des simulations couplées pour en savoir plus. Nous pourrions nous attendre à une zone de température homogène très proche des conditions à la paroi au creux des ondulations, au moins pour des nombres de Reynolds faibles.

Si cette interprétation est bonne, pour une amplitude et une longueur d'ondulation données ainsi que des écoulements à faibles débits, la forme devrait avoir une importance négligeable sur l'écoulement et sur les transferts. Si ce résultat se vérifie, cela facilitera grandement le dimensionnement des plaques et la détermination d'un optimum pour le transfert : il suffira de choisir la forme des ondulations selon les contraintes de fabrication et l'espace des paramètres à explorer se réduit à l'amplitude et la longueur des ondulations.

Y. Trifonov (1999), en développant un modèle intégral plus complexe (fondé sur un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes)

et en comparant les résultats avec une projection des équations Navier-Stokes sur des polynômes de Chebychev (approche pseudo-spectrale), a pu étudier les comportements du film pour des nombres de Reynolds plus élevés. L'approche intégrale a pu être validée pour des nombres de Reynolds modérés pour lequel l'écoulement est dominé par la tension de surface. Les recirculations apparaissent pour de faibles viscosités : une viscosité importante tend à aligner les lignes de courant avec la forme du fond.

L'ensemble de ces remarques est valable pour un film ruisselant stationnaire. Des expériences prenant en compte la composante transverse de l'écoulement ont été réalisées par Bontozoglou (2000), pour des écoulements stationnaires et instationnaires sur une plaque ondulée inclinée ( $1^\circ$  à  $8^\circ$ ). Pour ces inclinaisons, le film reste presque plat pour des Reynolds allant jusqu'à la dizaine. Pour des Reynolds  $\approx 100$ , l'interface est déformée de façon significative. De plus, en analysant l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant à travers une décomposition de Fourier, une fréquence préférentielle est trouvée à 2 Hz, pour de l'eau ruisselant sur une plaque ondulée inclinée à  $2.6^\circ$ , avec  $Re = 209$  et  $Ka = 3365$ . Pour un film ruisselant sur une plaque plane, aucune fréquence préférentielle n'est identifiée. Il semble donc qu'un forçage du film à des fréquences préférentielles soit possible, permettant une sélection des ondes par un choix pertinent de la topographie de la plaque. Malheureusement, cette étude se restreint à une seule forme de plaque : il est nécessaire de valider ce résultat pour une gamme plus importante de supports d'écoulement. A noter que les travaux de Reck et Aksel (2013) vont à l'opposé : ils n'ont observé aucune sélection des ondes, ni aucune corrélation entre la longueur d'onde du support d'écoulement et de la longueur des ondes propagatives, pour  $Re = 10$  (basé sur la vitesse du fluide à l'interface),  $Ka = 2.0$  et un angle d'inclinaison plus important  $\alpha = 10$ .

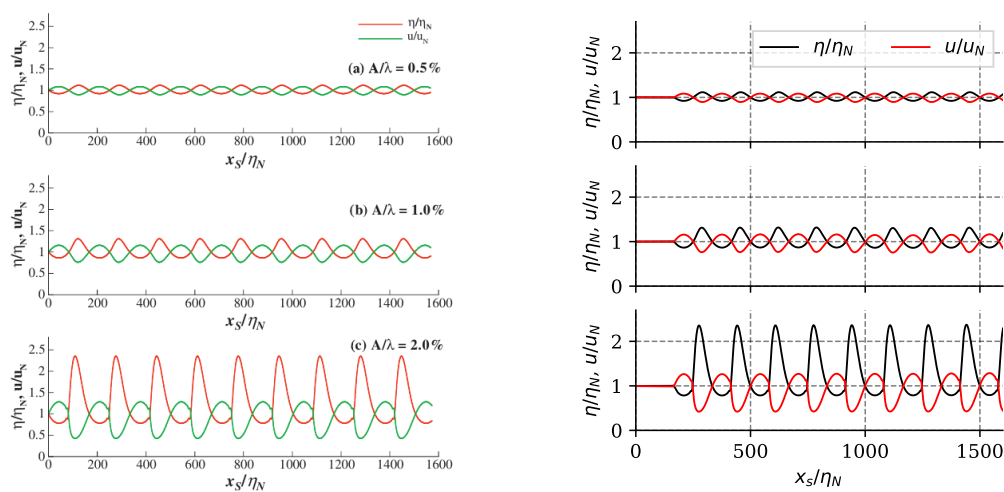
Cong et Plourde (2011) nous présentent une information à propos de l'impact de l'inclinaison du support sur la déformation de l'interface : en particulier, en se mettant dans les mêmes conditions hydrodynamiques que les expériences de Liu et al. (1993) et en augmentant l'inclinaison, on observe une diminution de l'effet des ondulations sur l'écoulement. Pour un angle d'inclinaison de  $30^\circ$  et plus, les simulations avec et sans ondulations sont similaires. C'est un résultat important que nous devons vérifier minutieusement. Dans le cas où ce comportement est vérifié et généralisé, cela signifierait qu'un

contrôle de l'hydrodynamique par les ondulations du fond sera impossible pour des échangeurs à écoulements verticaux.

Un autre comportement observé par Pollak2013 en présence d'ondulations est la stabilisation du film ruisselant par l'action des recirculations au creux des ondulations. La valeur du nombre de Reynolds critique<sup>1</sup> peut être réduit en présence d'ondulations.

### 5.1.2 Validation du modèle avec topographie

Afin de valider notre modèle avec une topographie non plane, nous avons reproduit une partie des résultats de Cong et Plourde (2011). Nous avons essayé de retrouver l'état stationnaire pour différentes amplitudes d'ondulations sinusoidales et pour les mêmes conditions hydrodynamiques que les expériences de Liu et al. (1993).



(a) Simulation des travaux de Cong et Plourde (2011).

(b) Simulation réalisé avec le modèle développé chapitre 3.

Figure 5.2 – Comparaison entre le modèle de Cong et Plourde (2011) et le modèle développé chapitre 3.

Les deux modèles semblent se comporter de façon similaire. Nous avons également reproduit l'expérience de A. Wierschem, Lepski et Aksel (2005)

<sup>1</sup>C'est la valeur du nombre de Reynolds pour lequel une perturbation infinitésimale va croître jusqu'à former une onde propagative au lieu de s'amortir et de disparaître.

(reprise par Cong et Plourde (2011)) ayant pour objectif d'étudier l'état stationnaire du film sur une ondulation, pour un nombre de Reynolds inférieur au Reynolds critique (voir figure 5.3).

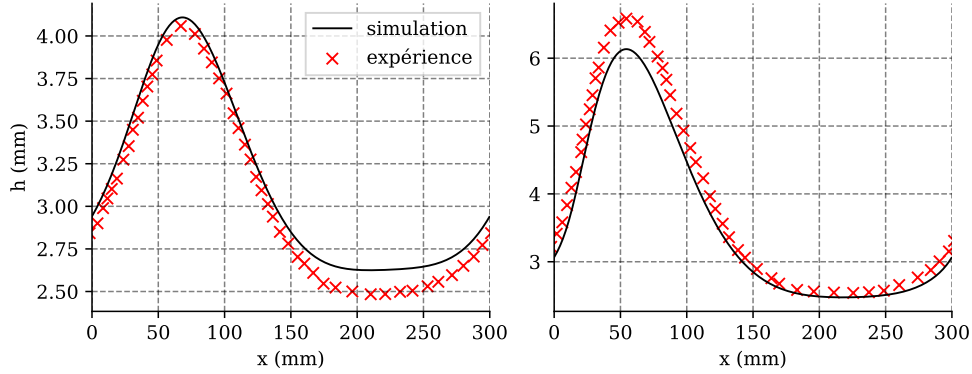


Figure 5.3 – Comparaison entre les simulation utilisant notre modèle et l'expérience de A. Wierschem, Lepski et Aksel (2005), ondulations sinusoïdales. À gauche  $\beta = 28^\circ$ . À droite,  $\beta = 18.05^\circ$ . Le fluide utilisé est une huile de silicone (B1000),  $\nu = 1110 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho = 969 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\sigma = 20.4 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 0.0285$ .

Bien que nous passions par une transformation de Prandtl au lieu de travailler en coordonnées curvilignes, notre modèle montre un bon accord avec les données expérimentales et avec le modèle de Cong et Plourde (2011). Nous considérons donc que celui-ci est valide pour des pentes raisonnables.

### 5.1.3 Expériences numériques

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la fréquence de forçage avait une influence non négligeable sur l'intensification du transfert. Toutefois, la plage de fréquences pour laquelle le transfert de chaleur est optimal est relativement réduite, ce qui rend le contrôle du système délicat. Nous allons donc étudier l'influence d'un support d'écoulement de forme sinusoïdale périodique sur l'hydrodynamique et le transfert de chaleur. L'objectif est d'obtenir le même type de synchronisation que celui observé au chapitre 4, mais sans forçage actif en entrée de l'écoulement.

Les simulations sont effectuées avec les mêmes paramètres qu'au chapitre précédent (En particulier, la plaque est verticale, contrairement aux travaux présentés plus haut), section 4.2 afin de pouvoir en comparer les effets.

Les ondulations sont choisies égales à  $A = 0.8 \bar{h}_N$ . Les longueurs d'ondes sont variables et bornées par  $\lambda_{\min} = 1 \text{ cm}$  et  $\lambda_{\max} = 8 \text{ cm}$ . Les simulations sont effectuées sur un domaine ouvert de 40 cm avec l'introduction d'un signal bruité en entrée, comportant des fréquences allant de 0.1 Hz à 100 Hz : l'objectif étant de voir si les ondulations permettent de sélectionner certaines de ces fréquences et de générer un train d'ondes régulier. Les fréquences qui nous intéressent sont situées autour de 20 Hz. Le bruit est obtenu à partir d'un générateur de nombre pseudo-aléatoire dont la graine est fixée, de façon à obtenir le même signal pour toutes les simulations.

La figure 5.4 présente quelques-unes de ces simulations. Pour ces conditions, il semble que les ondulations n'aient aucun rôle dans le développement préférentiel d'ondes propagatives de certaines séquences. Pour s'en convaincre, la figure 5.5 présente l'épaisseur du film pour quelques simulations. Les courbes sont toutes quasiment confondues : les différences dues à l'espacement des ondulations sont presque inexistantes.

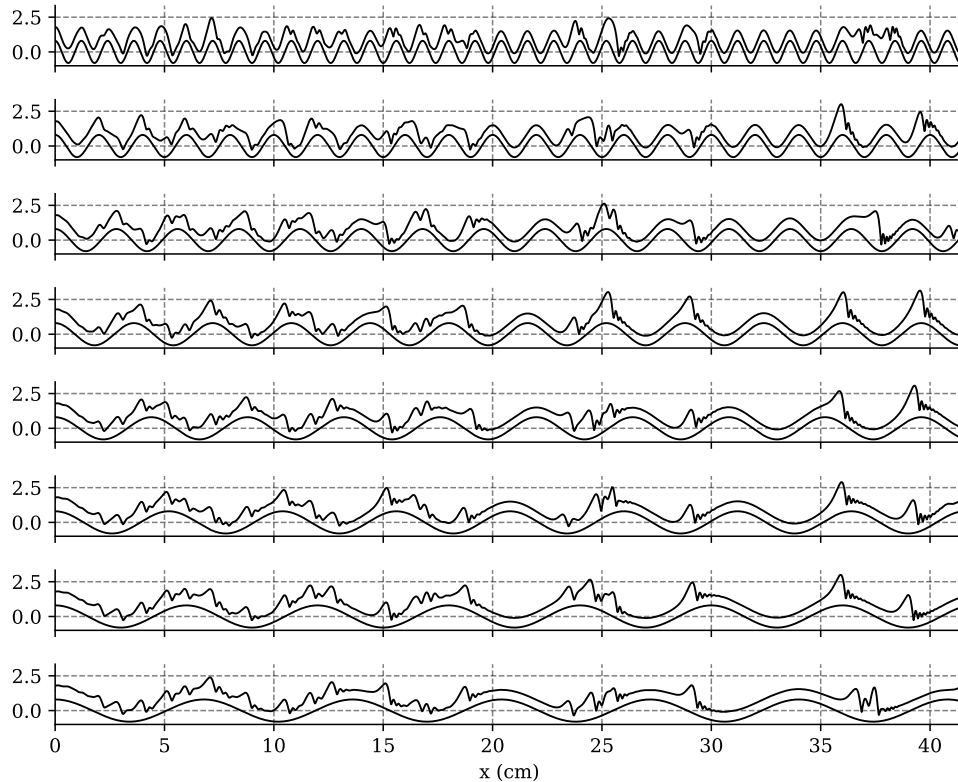


Figure 5.4 – Position du film ruisselant et de la paroi en fonction de la distance pour différentes longueurs d'ondulation.

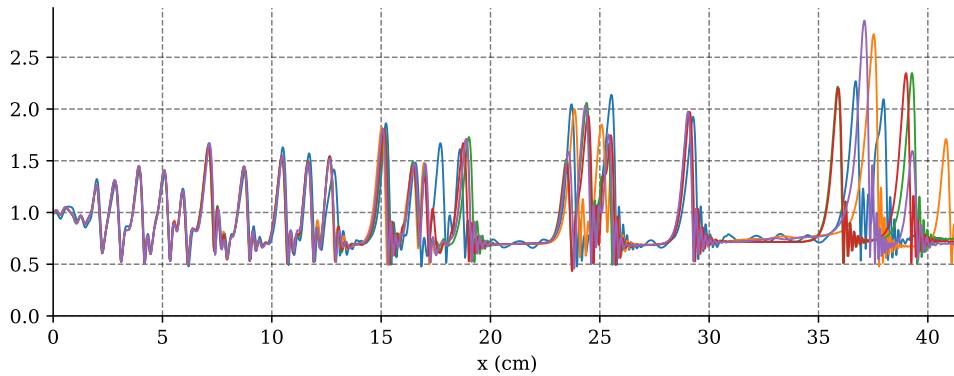


Figure 5.5 – Épaisseur du film ruisselant en fonction de la distance pour différentes longueur d’ondulation.

Il semblerait que nos conditions d’écoulement ne permettent pas d’interactions entre le support d’écoulement et le train d’ondes propagatives, contrairement aux expériences proposées par Bontozoglou, 2000, ce qui irait plutôt dans le sens des travaux de Pollak2013. Toutefois, toutes les conditions d’écoulement n’ont pas été explorées, loin de là. Il est possible qu’un angle d’inclinaison faible soit nécessaire pour observer une sélection des ondes (comme mis en avant par Cong et Plourde (2011)), où que le Reynolds étudié soit trop faible. En effet, une différence notable entre les deux études citées plus haut est le Reynolds utilisé : il semblerait que la synchronisation entre support d’écoulement et ondes propagatives ait lieu à un nombre de Reynolds trop important pour que nous puissions l’observer avec notre modèle.

## Conclusion

Nous avons pu noter que pour certaines conditions hydrodynamiques, la présence d’ondulations sur le support d’écoulement n’avait qu’un effet très limité sur la sélection des ondes propagatives. Une exploration plus exhaustive serait nécessaire pour délimiter les domaines où une sélection passive des ondes est possible (si ce domaine existe).

Nous envisageons également d’autres pistes d’études : il serait peut-être possible d’exciter le film avec une courte série d’obstacles en amont de l’écoulement pour remplacer le forçage en entrée, ou de coupler forçage actif et passif pour provoquer une synergie entre fréquence de forçage, forme du support d’écoulement et film ruisselant.

## 5.2 Simulations 3D, effet Marangoni et dé mouillage

L'effet Marangoni a été évoqué au chapitre 1. C'est une source d'instabilité qui provient de la variation de la tension de surface en présence d'un gradient de température ou de concentration. C'est un effet que l'on observe principalement dans le plan horizontal, l'instabilité de Kapitza, responsable de la formation des ondes propagatives, étant prédominante dans la direction de l'écoulement. Cet effet est responsable de l'affinement du film sous forme de rivulets et peut mener à l'apparition de zones sèches et au dé mouillage du film. Cela rend difficile l'utilisation de film ruisselants chauffés à bas nombre de Reynolds : un débit important est nécessaire pour éviter de dé-mouiller le support, même sans présence d'un gradient de température. Les expériences de Gonda et al. (2014) présentent des résultats pour différents nombres de Reynolds et différents écarts de température entre la paroi et le film de l'échangeur à film ruisselant. Selon les conditions thermiques, le Reynolds le plus bas présenté varie : cela est dû à la variation des propriétés physiques du fluide avec la température.

Il aurait été intéressant de tenter de représenter ce phénomène, mais il est pour cela nécessaire d'étendre notre modèle au cas 3D. Cela ne représente pas de difficulté quant au développement du modèle. La mise en place du schéma numérique et les coûts de calculs associés posent plus de problèmes. La prise en compte de modèles à plusieurs dimensions dans le code de calcul Triflow (présenté au chapitre 2, section 2.2) permettra de s'affranchir des difficultés de mise en place du schéma numérique. Les coûts de calculs seront plus importants mais devraient être assez raisonnables pour conduire une première exploration et vérifier l'impact de l'effet Marangoni sur l'amincissement du film.

Pour finaliser cette étude, il sera également nécessaire de travailler sur le dé mouillage du film. Quelques travaux ont été menés sur la prise en compte du dé mouillage en considérant une pression de disjonction, conduisant à une hauteur critique pour laquelle le fluide dé-mouille (Lallement, Villedieu, Trontin et Laurent, 2017). La pression de disjonction est liée à l'angle de contact entre le fluide et le support d'écoulement. Celui-ci peut dépendre de la température, s'ajoutant à l'effet Marangoni et favorisant le dé mouillage à haute température. Une recherche de corrélations expérimentales sera donc également nécessaire,



où à défaut, la mise en place d'une caractérisation expérimentale au sein du laboratoire.

### 5.3 Étude de sensibilité, optimisation

Les derniers points abordés se présentent comme une question ouverte nécessitant d'explorer de larges plages de valeurs pour un nombre important de paramètres : forme, amplitude et longueur d'onde de topographie du support d'écoulement, inclinaison de la plaque, caractéristique du fluide, vitesse de l'écoulement...

Il sera nécessaire de conduire les futures études en optimisant le nombre de cas à simuler nécessaire pour obtenir le plus de simulations possibles. Différentes méthodes existent allant dans ce sens, nous allons en décrire quelques-une.

#### 5.3.1 Étude de sensibilité

Les modèles intégraux sont moins coûteux que la résolution des équations couche-limite couplées à l'équation de Fourier. Avec des temps de calcul plus proches de l'heure que du mois, et ce même sur un seul CPU, il devient possible de conduire des campagnes d'optimisation. Nous avons remarqué que la fréquence de forçage, le nombre de Reynolds, la présence d'ondulations... étaient des paramètres influençant l'intensification de transfert de façon non négligeable. Toutefois, l'exploration de l'espace de ces paramètres a été effectuée de façon très naïve, due à l'héritage des simulations numériques très coûteuses. Avec la rapidité propres à nos modèles simplifiés, il est possible de conduire des analyses plus rigoureuses quant à l'impact des paramètres d'entrée sur une métrique cible (par exemple, l'intensification du transfert). Les méthodes d'analyse de sensibilité ne requièrent qu'un modèle "boîte noire", de la liste des paramètres influant supposés et d'une variable de sortie. Les méthodes les plus modernes nécessitent un nombre d'itérations réduit (une centaine pour un modèle faiblement non-linéaire) et sont adaptées à un fonctionnement en parallèle.

Les études de sensibilité peuvent être locales ou globales. Les études locales permettent de connaître l'influence des paramètres d'entrée sur un (ou

plusieurs) paramètres de sortie à proximité d'un point de référence dans l'espace des paramètres. Si le modèle est complexe / non linéaire, l'information obtenue est limitée et ne peut pas être extrapolé sur un domaine plus large. Les études de sensibilité globales permettent d'avoir une information sur l'ensemble de l'espace des paramètres.

L'échantillonnage des paramètres d'entrée est important. L'objectif est ici de minimiser le nombre d'échantillons tout en restant représentatif. Un échantillonnage aléatoire (de type Monte-Carlo) est particulièrement inefficace, bien que garantissant une convergence même pour des cas fortement non linéaire... à condition de disposer d'un temps de calcul infini. Parmi les échantillonnages alternatifs, l'hypercube latin permet de fortement réduire le nombre de tirage nécessaire à atteindre la convergence. Cet échantillonnage permet de découper de façon régulière le domaine des paramètres en sous-domaines au sein desquels est effectué un tirage aléatoire. De cette façon, il est garanti que l'ensemble du domaine soit exploré et la convergence est grandement accélérée. Pour vérifier que la convergence a bien été atteinte, il est possible de faire un bootstrap : on va conduire l'analyse de sensibilité sur une part de plus en plus grande des échantillons et comparer le résultat de l'analyse de sensibilité pour ces différents tirages.

Pour donner un cas d'exemple, nous allons utiliser les simulations de validation du modèle  $\theta - \phi$  présentées section 3.2.2. Les entrées qui nous intéressent sont le nombre de Biot et le nombre de Peclet. La sortie est le flux pariétal réduit par le flux pariétal du film de Nusselt équivalent, moyenné en espace.

Nous allons utiliser l'algorithme RBD-FAST (Goffart, Rabouille et Mendes, 2017). Les entrées du modèle sont le nombre de Peclet. Cet algorithme consiste à réordonner les entrées et les sorties selon l'ordre de chacune des entrées, et de les insérer alternativement de manière ascendante et descendante. De cette façon, un pic apparaît dans les entrées du modèle (voir figure 5.6a), pic que nous essayons de retrouver dans les sorties du modèle triées selon le même ordre (voir figure 5.6b).

On fait de même avec l'ordre donné par chacune des entrées du modèle, et l'on utilise une transformée de Fourier pour quantifier la dispersion de la sortie. Si le paramètre n'est pas influent, la sortie ne présentera aucune forme caractéristique et le spectre sera similaire à celui obtenu avec un bruit blanc. Si au contraire le paramètre est très influent, la majorité de la densité de

puissance du spectre sera reparti sur les premières harmoniques. Cela nous donne accès aux indices de sensibilité de 1er ordre : cela correspond à la part imputée à la variance de chaque paramètre d'entrée sur la variance de la sortie du modèle. Cette méthode ne permet pas d'accéder aux indices de second ordre. Ceux-ci représentent la part de la variance qui est imputée aux interactions entre deux paramètres.

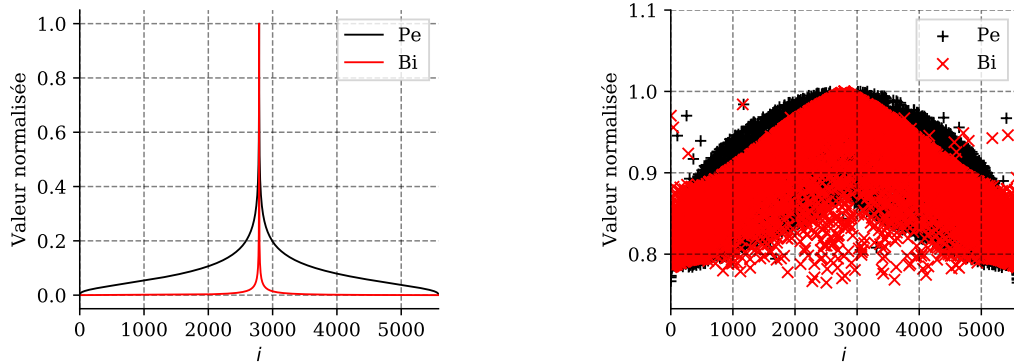
S'il n'y a pas d'interactions entre les paramètres et que la convergence est atteinte, la somme des indices de sensibilités doit être égale à 1. Si les indices de sensibilités du 1er ordre ne permettent pas d'expliquer l'ensemble de la variance de la sortie du modèle, c'est que les interactions entre paramètres ne sont pas négligeables. D'autres algorithmes capables de les quantifier existent, mais nécessitent un nombre plus important de simulations dont les paramètres doivent être choisis avec plus de soin. Il n'est donc pas possible d'en faire la démonstration sans relancer de nouveaux calculs.

Dans notre cas, nous obtenons  $s_{Pe} = 39,6\%$  et  $s_{Bi} = 54,4\%$ . Il reste 5% de la variance que nous pouvons imputer aux interactions entre le nombre de Peclet et le nombre de Biot. Nos deux paramètres ont un impact important sur la sortie du modèle. Nous pouvons également vérifier que le nombre de simulations utilisé est suffisant en effectuant un bootstrap : l'algorithme est répété avec un nombre croissant d'échantillons tirés parmi les simulations déjà effectuées (voir figure). Dans notre cas, la convergence est obtenue autour de 500 simulations (voir figure 5.7).

Un des intérêts de ces méthodes est de pouvoir éliminer les paramètres non influents de l'étude : d'une dizaine de paramètres potentiels, il est possible d'identifier les paramètres influents et de conduire une étude plus fine sur ces paramètres.

### 5.3.2 Optimisation

En complément, une fois les paramètres les plus influents déterminés, il est possible de conduire une campagne d'optimisation afin de déterminer, par exemple, un design optimal pour le support d'écoulement, modulo des contraintes d'usinages. Sans réaliser le travail de l'équipementier en trouvant la forme optimale pour un échangeur et une application donnée, il serait intéressant d'en prouver la faisabilité. Notre modèle pourrait être utilisé dans un but de concep-



(a) Paramètres d'entrée du modèle (remis à l'échelle  $[0 - 1]$ ), réordonnée de façon alternée croissante / décroissante selon Pe et Bi .

(b) Valeur de sortie du modèle (remis à l'échelle  $[0 - 1]$ ) selon l'ordonnement présenté ci-contre.

Figure 5.6 – Entrées et sortie du modèle, réordonnées de façon à appliquer la méthode RBD-FAST.

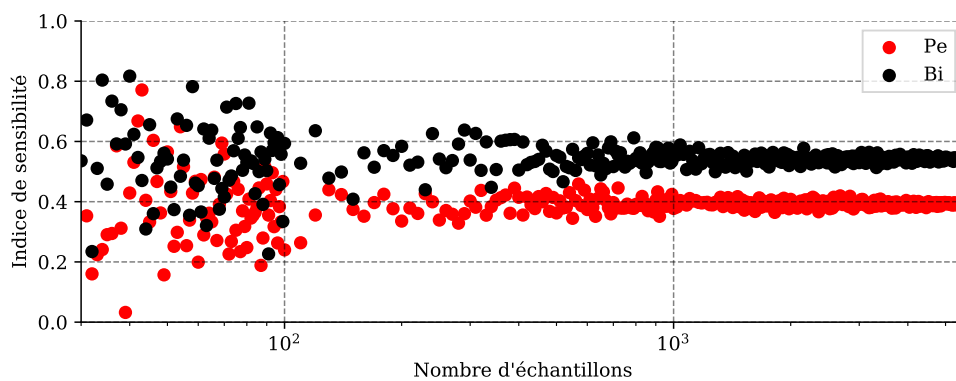


Figure 5.7 – Indice de sensibilité du premier ordre obtenu selon la méthode RBD-FAST selon le nombre d'échantillons utilisé.

tion, en complément de son apport dans la compréhension des phénomènes. De même que pour les études de sensibilité, les algorithmes modernes, contrairement aux méthodes plus classiques tels que celles fondées sur les descentes en gradient, peuvent être adaptées à un fonctionnement en multi-processus et peuvent nécessiter un nombre réduit d'itérations tout en acceptant des contraintes sur les paramètres.

Afin de présenter ces différents algorithmes, un cas test sera utilisé : la fonction de Styblinski–Tang. La fonction à optimiser est la suivante :

$$f(x, y) = \frac{x^4 - 16x^2 + 5x + y^4 - 16y^2 + 5y}{2} \quad (5.1)$$

Le minimum global est situé aux coordonnées

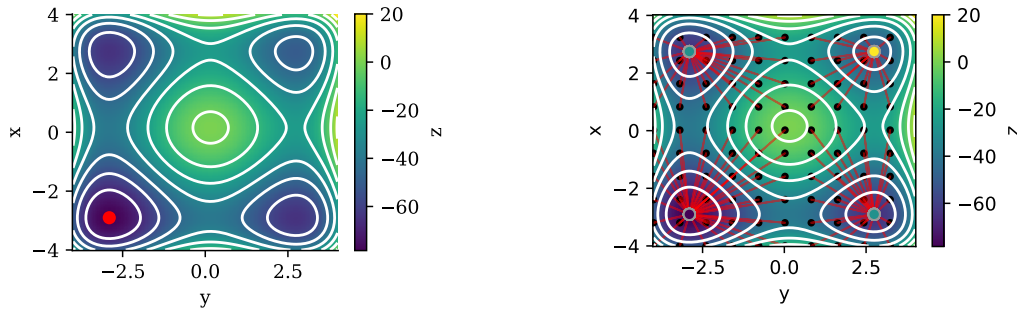
$$f(-2.9035, -2.9035) = -78.328 \quad (5.2)$$

et présente 4 minima locaux en symétrie autour de l'axe  $x$  et  $y$  (figure 5.8a), ce qui rend l'identification du minimum global délicat.

L'approche classique pour trouver le minimum d'un modèle est d'utiliser des méthodes de descente de gradient. Il s'agira de suivre la pente maximale de la fonction jusqu'à "tomber" au creux de la surface. Il existe de nombreuses variantes de cette méthode, variantes qui partagent les mêmes défauts : ces méthodes sont fortement dépendantes de l'initialisation et ne peuvent pas garantir de trouver le minimum global de l'espace de recherche (voir figure 5.8b). On voit nettement que le minimum trouvé sera le minimum local le plus proche de la position initiale. De plus, ces algorithmes ne peuvent pas être parallélisés : le choix des paramètres du modèle dépendent de la simulation précédente. En contrepartie, ces algorithmes sont rapides et très adaptés aux modèles ne présentant pas de topographie trop complexes. Ils sont également faciles à mettre en place. Une façon simple de rendre ces méthodes plus robustes lorsque la topologie présente des minima locaux est de faire tourner en parallèle plusieurs descentes en gradient en simultanée dont les conditions initiales sont choisies selon un échantillonnage aléatoire ou semi-aléatoire : on obtient alors plusieurs trajectoires explorant l'espace des paramètres. Le surcoût est nul si le nombre d'échantillons est inférieur au nombre de CPU disponibles, les trajectoires étant indépendantes.

L'algorithme PSO (pour Particle Swarm Optimisation, ou optimisation par essaim particulaire) tire également son inspiration dans le vivant. On initialise l'algorithme avec  $N$  échantillons (particules) qui se déplacent dans l'espace des paramètres selon leur vitesses (dépendantes du gradient de la fonction à minimiser), de la meilleure solution rencontrée et de la meilleure solution obtenue par les particules voisines. Cela revient à opérer une optimisation par descente en gradient avec  $N$  particules qui communiquent entre elles pour s'orienter correctement et éviter les minimum locaux. C'est une forme plus avancée de la méthode hybride Monte-Carlo / descente en gradient présentée plus haut, rendue plus robuste par la communication possible entre les différentes trajectoires. La figure 5.9 présente le nombre d'évaluations du modèle nécessaire pour obtenir une valeur raisonnablement proche du minimum global (à  $10^{-2}$  près), et ce pour un grand nombre d'essais. On observe un nombre d'évaluations nettement plus élevé pour la méthode Monte-Carlo (recherche aléatoire), et des résultats assez proches pour la méthode hybride et la méthode PSO. La fonction à minimiser n'est pas très fortement non-linéaire et le nombre de minima locaux n'est pas très important, ce qui explique que la méthode hybride fonctionne correctement. Pour des cas plus extrêmes, l'écart entre méthode hybride et PSO serait plus important.

Les algorithmes génétiques font partis des algorithmes évolutionnistes, ils utilisent la notion de sélection naturelle proche du principe moteur de l'évolution des êtres organiques. L'algorithme boucle sur quatre étapes : d'abord, le modèle tourne sur un échantillonnage (sélectionné aléatoirement pour l'initialisation). Ensuite, les échantillons les plus performants sont sélectionnés, et des croisements sont alors possibles entre échantillons pour remplacer la population éliminée lors de l'étape de sélection, en moyennant les paramètres d'entrée de deux échantillons par exemple. Enfin, il est possible de faire "muter" un individu, en modifiant de manière aléatoire une de ses entrées. Le taux de mutation doit rester bas pour éviter de retomber sur une recherche aléatoire de paramètres, mais cela permet d'éviter une convergence prématurée : cela rend l'algorithme plus robuste face aux problèmes de minima locaux. La mise en place de ces algorithmes est loin d'être triviale, mais ils sont adaptés aux problèmes complexes : ils seront utiles pour travailler sur la forme du fond, et particulièrement pour travailler sur les obstacles ponctuels, où de nombreux paramètres interagissent : nombre, position, forme de l'obstacle, obstacles de



(a) Cartographie 2D de la fonction de Styblinski–Tang. En rouge le minimum global.

(b) Valeur cible obtenu par l’algorithme Marquardt-Levenberg (basé sur une descente de gradient) en fonction du paramètre d’initialisation.

Figure 5.8 – Fonction test d’optimisation, et application d’un algorithme de Marquardt-Levenberg.

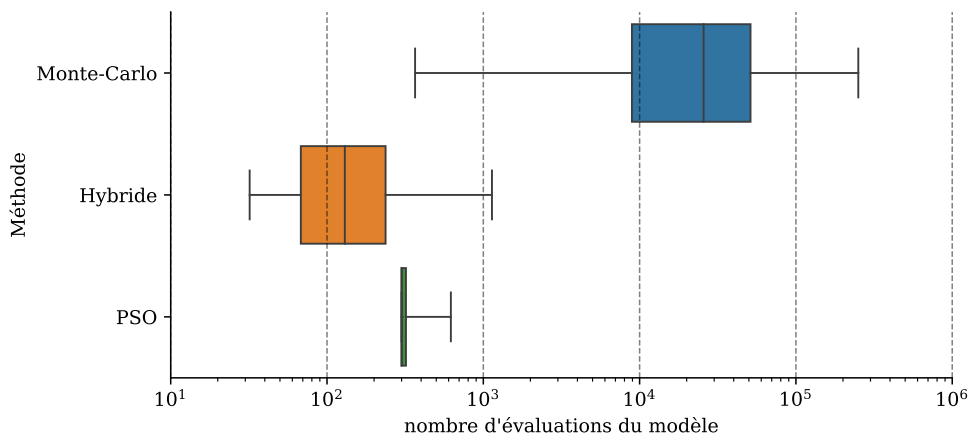


Figure 5.9 – Nombre d’évaluations du modèle nécessaires afin d’obtenir une position raisonnablement proche du minimum global selon les méthodes Monte-Carlo, hybrides Monte-Carlo / descente de gradient et PSO. La barre centrale représente la médiane, la boîte englobe l’interquartile, et les barres externes les minima et maxima.

natures différentes...

Ces deux derniers algorithmes, ont de nombreux points communs : tous deux inspirés par la nature, ils permettent un fonctionnement en multiprocesseurs (les individus d'un run des algorithmes génétiques sont indépendants, les particules ne doivent communiquer qu'après chaque itération), et sont robustes aux problèmes de minimum locaux, ce qui est important pour travailler correctement avec des phénomènes non-linéaires. Toutefois, les algorithmes génétiques sont bien plus puissants, mais aussi bien plus complexes.

Ces outils seront précieux pour répondre aux questions de l'impact de la topographie sur les transferts au travers des films ruisselants. La question étant très large, il sera important de rationaliser son exploration.

## 5.4 Prise en compte de la turbulence

Les travaux expérimentaux montrent une transition dans le régime hydraulique au sein des échangeurs pour un nombre de Reynolds faible (autour de  $Re = 125$ , en reprenant la définition utilisée dans notre étude). Il semble donc que même à des nombres de Reynolds modérés, il soit nécessaire de prendre en compte l'apparition de tourbillons. Ceux-ci ont été observés en surface du fluide, mais il n'est pas possible de savoir si leur origine vient du déferlement des ondes ou de la transition de l'écoulement vers un régime turbulent. Dans ce dernier cas, les tourbillons se formeraient sous la surface et finiraient par y remonter.

Pour appuyer cette dernière hypothèse, il faut préciser que le nombre de Reynolds pour un film ruisselant est calculé à partir du film de Nusselt équivalent. Mais la vitesse des ondes propagatives peut être bien supérieur, en particulier au niveau des crêtes. Cela s'explique par le profil parabolique du champ de vitesse. Il existe donc des zones localisées au sein duquel le nombre de Reynolds peut atteindre des valeurs importantes.

Face aux indices provenant des travaux expérimentaux ainsi que des spécificités des écoulements de fluides de faible épaisseur, des travaux ont débutés afin de prendre en compte la turbulence à travers l'ajout d'une viscosité turbulente. Cette viscosité est dépendante de la distance à la paroi et est implémenté dans un modèle d'écoulement de film comme fonction du débit local. Cette première approche marche correctement pour des nombres de Reynolds



élevé mais n'est pas assez complexe pour représenter correctement la transition entre régime laminaire et turbulent.

# Chapitre 6

## Conclusion

Durant cette étude, nous avons mis en place des outils nécessaires pour la résolution performante d'équations hydrodynamiques couplées à celles de la thermique pour les films ruisselants. Ces équations sont obtenues par une intégration à travers le film ruisselant des résidus obtenus à partir des équations de Navier-Stokes et de Fourier, pondérées suivant une stratégie adaptée décrite chapitre 3. Cette méthode permet d'éliminer une dimension, ainsi qu'une partie des termes algébriques du système d'équations. En contrepartie, ce modèle simplifié est limité à des nombres de Reynolds et de Peclet limités : des travaux sont en cours afin de faire reculer ces limites.

Le modèle hydrodynamique est le même que celui développé par Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000), avec la prise en compte d'un support ondulé via un changement de variable appelé transformation de Prandtl : il en résulte une limitation sur la pente locale des ondulations. Le couplage à la thermique a été particulièrement laborieux, contrairement à nos prévisions. Les isothermes se complexifient rapidement sous l'effet des lignes de courant, une projection de l'équation de Fourier sur un nombre réduit de variables montre vite ses limites. Comme alternative, il est possible de coupler la forme réduite de l'équation Navier-Stokes avec une résolution complète de l'équation de Fourier. La résolution est plus longue mais évite les limites intrinsèques aux modèles réduits.

Afin de résoudre les équations aux dérivées partielles obtenues, un outil a été mis en place. Il se présente sous la forme d'une librairie python et est appelé Triflow. Celui-ci permet d'écrire les équations sous forme mathématique : le logiciel discrétise alors les dérivées spatiales par différences finies, et calcule

la forme exacte et creuse de la matrice Jacobienne. Une routine est optimisée et compilée par un outil spécialisé (Theano). Un algorithme de résolution d'équations différentielles ordinaires Runge-Kutta implicite d'ordre élevé est utilisé (schéma Rosenbrock Wanner), couplé à un contrôleur de pas de temps. Cela permet d'arriver rapidement à une résolution performante et stable des équations aux dérivées partielles.

Les modèles décrits plus haut ont été résolus avec Triflow afin d'obtenir une validation du couplage thermique et d'en établir les limites. Le modèle présente un comportement non physique pour des nombres de Biot élevés : il ne peut pas garantir que les températures restent bornées entre la température de l'atmosphère et la température du support. Ce problème a été résolu en travaillant sur le modèle afin de forcer la relaxation à l'équilibre lorsque la température est hors borne. Il est toutefois impossible d'obtenir des résultats corrects pour des nombres de Peclet élevés : il est alors nécessaire de résoudre l'équation de Fourier à travers le film ruisselant afin d'obtenir des résultats cohérents.

Malgré tout, une étude paramétrique a pu être conduite pour de l'eau ruisselant sur une paroi verticale. On observe une intensification quasi-nulle pour des nombres de Biot faibles, mais une intensification non-négligeable lorsque le nombre de Biot augmente. De plus, l'augmentation du nombre de Peclet, s'il mène à une amélioration du transfert à l'équilibre thermique, augmente la longueur d'établissement du régime. Un nombre de Peclet trop élevé fait chuter les transferts globaux pour peu que la longueur de plaque ne soit pas assez importante. En augmentant le nombre de Peclet, et donc la part des effets convectifs, l'impact de la recirculation au niveau de la crête est plus important (voir figure 6.1). Pour un transfert purement conductif, cette crête est peu favorable au transfert : son épaisseur importante mène à une résistance thermique élevée. L'apparition d'effets convectifs diminue cette résistance en jouant le rôle de raccourci : la chaleur est transportée à l'arrière de la crête où elle sera évacuée à l'atmosphère.

Cette hypothèse quant au mode de transfert de chaleur au sein des ondes propagatives est confortée par l'étude de l'impact d'un forçage en entrée de l'écoulement : les régimes hydrodynamiques les plus favorables sont ceux qui favorisent l'existence d'un train d'ondes propagatives bien établies, présentant une amplitude importante et donc des recirculations importantes.

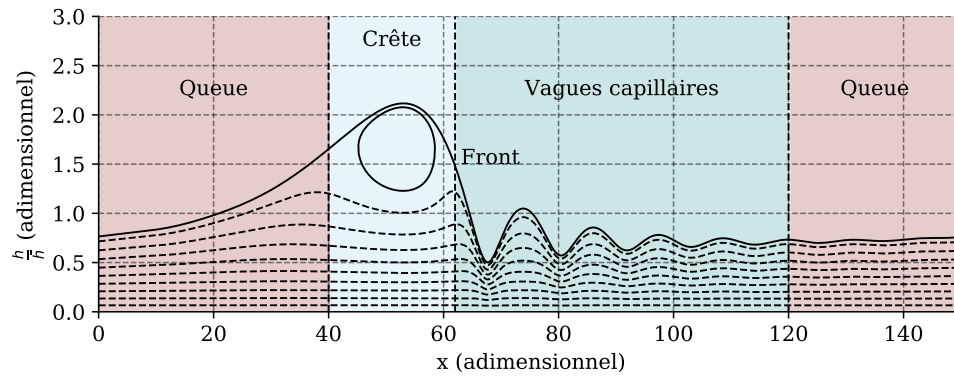


Figure 6.1 – Ligne de courant au sein d’une onde propagative. La recirculation a lieu dans la partie supérieure de la crête.

Enfin, nous avons commencé à aborder l’impact des ondulations du support sur le régime hydrodynamique et les transferts thermiques : notre objectif est d’obtenir un moyen de contrôle passif assurant un régime favorable aux transferts. Toutefois, les différentes parties de cette étude ont demandé plus de temps que prévu. Nous n’avons pu qu’effleurer ce problème : cette piste est donc en cours d’exploration.



# Annexe A

## Nomenclature

### Description du système

- $\beta$  Angle entre le support d'écoulement et le plan horizontal.
- $\phi$  Flux pariétal réduit  $h \partial_y T$ .
- $\theta$  Température réduite à l'interface.
- $h$  Hauteur du fluide réduite.
- $q$  Débit local réduit.
- $T$  Température réduite.
- $t$  Coordonnée temporelle s.
- $x$  Coordonnée spatiale, direction de l'écoulement **m**.
- $y$  Coordonnée spatiale, direction perpendiculaire à l'écoulement **m**.

### Indices

- $\infty$  Grandeur affilié à l'atmosphère.
- $N$  Grandeur affilié à la solution de Nusselt, le film plat équivalent.
- $s$  Grandeur affilié au support d'écoulement.

### Nombres adimensionnels

- B** Nombre de Biot de surface (rapport entre transfert à l'interface et à travers la couche limite thermique côté atmosphère).
- Bi** Nombre de Biot.
- Bo** Nombre de Bond (rapport entre les forces gravitationnelles et la tension de surface).
- Ct** Nombre d'inclinaison.
- Ka** Nombre de Kapitza (rapport de la tension de surface et des forces inertielles).
- Ma** Nombre de Marangoni (rapport des forces de surface sur les forces visqueuses). C'est un indicateur des effets qu'ont les variations des propriétés du fluide vis à vis d'un gradient de température ou de concentration pouvant amplifier les déformation de la surface comparé aux forces visqueuses à les amortir.
- Nu** Nombre de Nusselt (rapport entre transfert convectif sur transfert conductif).
- Pe** Nombre de Peclet (rapport des temps caractéristiques de transferts par convection et par conduction).
- Pr** Nombre de Prandtl (rapport entre diffusivité de la quantité de mouvement et de la chaleur). C'est un indicateur de l'effet du champs de vitesse sur le profil de température.
- Re** Nombre de Reynolds (rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses).
- We** Nombre de Weber.

### Paramètres physiques

- $\alpha$  Taux de transfert thermique convectif  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ .
- $\chi$  Diffusivité thermique de l'atmosphère  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .
- $\gamma$  Coefficient thermo-capillaire.

$\lambda$	Conductivité thermique du film $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ .
$\nu$	Viscosité cinématique $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .
$\rho$	Masse volumique $\text{kg m}^{-3}$ .
$\sigma$	Tension de surface $\text{N m}^{-1}$ .
$c_p$	Capacité calorifique $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

## Table des figures

### Chapitre 1

1.1	Film ruisselants . . . . .	10
1.2	Différentes instabilités hydrodynamiques . . . . .	11
1.3	Équipements industriels utilisant les films ruisselants, d’hier à aujourd’hui. . . . .	12
1.4	Schéma représentatif d’un film ruisselant sur une paroi ondulée chauffée. . . . .	14
1.5	Développement des instabilités le long d’un film vertical avec forçage périodique en entrée (modèle de Christian Ruyer-Quil et Manneville (2000), simulation réalisée avec le logiciel Triflow (voir chapitre 2)). . . . .	17
1.6	Écoulement d’un film ruisselant sur plaque inclinée, mélange eau / glycol . . . . .	18
1.7	Simulation d’une onde solitaire dans une boîte périodique . . . . .	19
1.8	Simulation de la croissance d’une onde solitaire dans son propre référentiel . . . . .	19
1.9	Onde établie et les différents domaines d’intérêt . . . . .	20
1.10	Bifurcation fourche d’équation $y' = ay - by^3$ . . . . .	23
1.11	Brisure de symétrie d’une bifurcation fourche . . . . .	23



1.12 Simulation numérique d'un film ruisselant avec modèle de Benney d'ordre 1 . . . . .	27
1.13 Illustration d'un repère mobile de Darboux le long d'une courbe 3D	30
1.14 Transformation de Prandtl (aussi appelé translation de Prandtl).	32
1.15 Différents événements hydrodynamiques occurents en présence d'une topographie sinusoïdale . . . . .	33
1.16 Présence de recirculation au creux d'une corrugation . . . . .	34

## Chapitre 2

2.1 Effet de la diffusion au sein de l'équation de diffusion-convection .	54
2.2 Comparaison des schémas Euler implicite et explicite . . . . .	54
2.3 Spectres de Fourier des fenêtres rectangle et gaussienne. . . . .	56
2.4 Utilisation d'un filtre . . . . .	56
2.5 Comparaison des différents schémas upwind avec un schéma centré d'ordre 2. Le schéma upwind d'ordre 1 est très diffusif, le schéma d'ordre 3 montre un très bon accord avec la solution exacte. . . . .	57
2.6 Advection diffusion, schéma explicite . . . . .	61
2.7 Graphe algorithmique, addition vectorielles (Theano) . . . . .	63
2.8 Structure du cœur de Triflow. . . . .	68
2.9 Graphes spatio-temporels de l'équation d'advection-diffusion. . . . .	72
2.10 Validation du solveur, cas n°1 . . . . .	75
2.11 Validation du solveur, cas n°2 . . . . .	76
2.12 Condition initiale pour l'équation de Burgers-KdV . . . . .	78
2.13 Graphe spatio-temporel d'un choc dispersif modélisé par l'équation de Burgers-KdV. . . . .	80
2.14 Effet d'un saut hydraulique initial sur les simulations d'ondes pro- pagatives . . . . .	83
2.15 Nombre d'inclinaison variable le long de l'écoulement . . . . .	84

## Chapitre 3

3.1 Transformation de Prandtl (ou translation de Prandtl) . . . . .	96
3.2 Coefficient de relaxation $A$ . . . . .	111
3.3 Convergence en maillage, hydrodynamique. . . . .	114
3.4 Comparaison du modèle hydrodynamique avec la littérature . . . . .	116
3.5 Maillage régulier et irrégulier . . . . .	119

3.6 Convergence de l'erreur sur le nombre de point du maillage suivant  $y$ . . . . . 120

3.7 Comparaison entre des simulations utilisant une méthode pseudo-spectrales et différences finies . . . . . 121

3.8 Échantillons de validation . . . . . 122

3.9 Erreurs relatives sur  $\theta$  et  $\phi$  . . . . . 124

3.10 Erreur sur le bilan des flux . . . . . 125

3.11 Champ de température et magnitude du flux de chaleur à travers un liquide de film ruisselant sur plaque plane,  $Pr = 30$ ,  $Bi = 0.01$  et  $Re = 22.5$ . . . . . 125

3.12 Liquide ruisselant sur plaque plane verticale,  $Re = 15$ ,  $Pr = 7$ ,  $Bi = 10$  . . . . . 126

3.13 Liquide ruisselant sur plaque plane verticale,  $Re = 15$ ,  $Pr = 30$ ,  $Bi = 0.01$  . . . . . 127

Chapitre 4

4.1 Représentation de la différence entre les simulations réalisées par Malamataris, Vlachogiannis et Bontozoglou (2002) et celle réalisée dans le cadre de cette étude. . . . . 133

4.2 Flux pariétal réduit, instantané et moyenne temporelle pour différents nombres de Peclet ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$  et  $B = 10$ ). . . . . 134

4.4 Flux à la paroi pour un film plat à différents nombres de Peclet. . . . . 135

4.5 Flux de chaleur à l'interface en fonction de la distance pour différents nombres de Peclet ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$  et  $B = 10$ ). . . . . 136

4.6 Comparaison entre modèle intégral et résolution de l'équation de Fourier ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$ ,  $Pe = 50$ ,  $B = 10$ ). . . . . 137

4.7 Comparaison entre modèle intégral et résolution de l'équation de Fourier ( $Ct = 8.9$ ,  $Re = 19.3$ ,  $We = 5.3$ ,  $Pe = 800$ ,  $B = 10$ ). . . . . 137

4.8 Comparaison du modèle  $\theta - \phi$  (avec et sans coefficients de relaxation modifiés) avec l'équation de Fourier pour différents nombres de Biot et de Peclet,  $Re = 15$ ,  $Ct = 0$ ,  $We = 265,8$ . . . . . 139

4.9 Comparaison du temps de calcul entre les différents modèles pour différents nombres de Biot et de Peclet. . . . . 140

4.10	Comparaison des flux transférés à l'interface et à la paroi pour différents nombres de Peclet en fonction de la distance, $Re = 15$ , $Ct = 0$ , $We = 265,8$ , $Bi = 10$ . . . . .	141
4.11	Transfert thermique à travers une onde propagative : le gradient de couleur représente la densité de flux, les isothermes sont indiquées en blanc. Les flux à la paroi et à l'interface sont tracés respectivement en dessous et au dessus de la figure principale. $Re = 15$ , $Ct = 0$ , $We = 265,8$ , $Bi = 10$ . . . . .	142
4.12	Nusselt global en fonction de la fréquence de forçage, pour différentes longueurs d'écoulement. $Re = 15$ , $Ct = 0$ , $We = 265,8$ , $Bi = 10$ , modèle $\theta - \phi$ . . . . .	144
4.13	Nusselt global en fonction de la fréquence de forçage, pour différentes longueurs d'écoulement. $Re = 15$ , $Ct = 0$ , $We = 265,8$ , $Bi = 10$ , équation de Fourier. . . . .	144
4.14	Intensification du transfert thermique comparé à un film plat en fonction de la longueur de plaque et de la fréquence de forçage . .	146
4.15	Grossissement sur l'intervalle $[22 \text{ Hz} - 28 \text{ Hz}] / [10 \text{ cm} - 33 \text{ cm}]$ .	146
4.16	Nusselt local en fonction de la distance et de la fréquence de forçage.	147
4.17	Épaisseur du film en fonction de la distance . . . . .	148
4.18	Transformée de Fourier de l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant le long de l'écoulement pour différentes fréquences de forçage. . . . .	149
4.19	Transformées de Fourier de l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant pour différentes fréquences de forçage à différentes distances. . . . .	150
4.20	Indicateur de l'intensité d'accrochage entre l'évolution temporelle de l'épaisseur du film ruisselant et la fréquence de forçage en fonction de la distance, pour différentes fréquences de forçage. . . . .	151
4.21	Comparatif de différents algorithmes de partitionnement de données.	152
4.23	Identification des crêtes des ondes (principales et capillaires) présentes à un instant donné de la simulation. . . . .	154
4.25	Résultat du partitionnement des ondes selon leur nature . . . . .	155
4.26	Densité d'ondes propagatives en fonction de la fréquence et de la distance. . . . .	156

Table des figures	187
4.27 Position moyenne des crêtes des ondes principales en fonction de la distance pour quelques fréquences. . . . .	156
Chapitre 5	
5.1 Ligne séparatrice de la zone de recirculation . . . . .	161
5.2 Validation du modèle avec ondulation, comparaison avec la littérature. . . . .	163
5.3 Comparaison entre les simulation utilisant notre modèle et l'expérience de A. Wierschem, Lepski et Aksel (2005) . . . . .	164
5.4 Position du film ruisselant et de la paroi en fonction de la distance pour différentes longueurs d'ondulation. . . . .	165
5.5 Épaisseur du film ruisselant en fonction de la distance pour différentes longueur d'ondulation. . . . .	166
5.6 Entrées et sortie du modèle, réordonnées de façon à appliquer la méthode RBD-FAST. . . . .	171
5.7 Indice de sensibilité du premier ordre obtenus selon la méthode RBD-FAST selon le nombre d'échantillons utilisé. . . . .	171
5.8 Fonction test d'optimisation, et application d'un algorithme de Marquardt-Levenberg. . . . .	174
5.9 Benchmarking des méthodes Monte-Carlo, hybrides Monte-Carlo / descente de gradient et PSO . . . . .	174
Chapitre 6	
6.1 Ligne de courant au sein d'une onde propagative. La recirculation a lieu dans la partie supérieure de la crête. . . . .	179



# Bibliographie

- Alhousseini, A. A., Tuzla, K. & Chen, J. C. (1998). Falling film evaporation of single component liquids. *Int. J. Heat Mass Transf.* 41(12), 1623-1632. doi :10.1016/S0017-9310(97)00308-6
- Benjamin, T. B. (1961). The development of three-dimensional disturbances in an unstable film of liquid flowing down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* 10(3), 401-419. doi :10.1017/S0022112061001001
- Benney, D. J. (1966). Long waves on liquid films. *J. Math. Phys.* 45(2), 150-155.
- Bontozoglou, V. (2000). Laminar film flow along a periodic wall. *C. - Comput. Model. Eng. Sci.* 1(2), 133-142. doi :10.1017/S0022112001007637
- Boutounet, M. & Chupin, L. (2008). Shallow water viscous flows for arbitrary topography. ... *Math. Sci.* 6(1), 1-36.
- Brauner, N. (1989). Modelling of wavy flow in turbulent free falling films. *Int. J. Multiph. Flow*, 15(4), 505-520. doi :10.1016/0301-9322(89)90050-5
- Chhay, M., Dutykh, D., Gisclon, M. & Ruyer-Quil, C. (2017). New asymptotic heat transfer model in thin liquid films. *Appl. Math. Model.* 48, 844-859. doi :10.1016/j.apm.2017.02.022
- Chun, K. R. & Seban, R. A. (1971). Heat Transfer to Evaporating Liquid Films. *J. Heat Transfer*, 93(4), 391. doi :10.1115/1.3449836
- Cong, N. C. & Plourde, F. (2011). Wavy wall influence on the hydrodynamic instability of a liquid film flowing along an inclined plane. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 32(3), 698-707. doi :10.1016/j.ijheatfluidflow.2011.02.008
- D'Alessio, S. J. D. [S J D], Seth, C. J. M. P., Pascal, J. P., D'Alessio, S. J. D., Seth, C. J. M. P. & Pascal, J. P. (2014). The effects of variable fluid properties on thin film stability. *Phys. Fluids*, 26(12), 122105. doi :10.1063/1.4904095

- D'Alessio, S. J. D. [S. J. D.], Pascal, J. P., Jasmine, H. A. & Ogden, K. A. (2010). Film flow over heated wavy inclined surfaces. *J. Fluid Mech.* 665, 418-456. doi :10.1017/S0022112010004003
- Davis, T. A. (2004). Algorithm 832. *ACM Trans. Math. Softw.* 30(2), 196-199. doi :10.1145/992200.992206
- Demmel, J. W., Eisenstat, S. C., Gilbert, J. R., Li, X. S. & Liu, J. W. H. (1999). A Supernodal Approach to Sparse Partial Pivoting. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 20(3), 720-755. doi :10.1137/S0895479895291765
- Focke, W. W. & Knibbe, P. G. (1986). Flow visualization in parallel-plate ducts with corrugated walls. *J. Fluid Mech.* 165(-1), 73. doi :10.1017/S0022112086003002
- Fornberg, B. (1988). Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Math. Comput.* 51(184), 699-699. doi :10.1090/S0025-5718-1988-0935077-0
- Foster, J. & Zinkova, M. (2006). Kelvin-Helmholtz near San Francisco.
- Goffart, J., Rabouille, M. & Mendes, N. (2017). Uncertainty and sensitivity analysis applied to hydrothermal simulation of a brick building in a hot and humid climate. *J. Build. Perform. Simul.* 10(1), 37-57. doi :10.1080/19401493.2015.1112430
- Gonda, A., Lancereau, P., Bandelier, P., Luo, L., Fan, Y. & Benezech, S. (2014). Water falling film evaporation on a corrugated plate. *Int. J. Therm. Sci.* 81(1), 29-37. doi :10.1016/j.ijthermalsci.2014.02.010
- Häcker, T. & Uecker, H. (2009). An integral boundary layer equation for film flow over inclined wavy bottoms. *Phys. Fluids*, 21(9), 1-15. doi :10.1063/1.3224858. arXiv : 0811.3436
- Han, J. & Fletcher, L. S. (1985). Falling film evaporation and boiling in circumferential and axial grooves on horizontal tubes. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 24(3), 570-575. doi :10.1021/i200030a009
- Haroun, Y., Legendre, D. & Raynal, L. (2010). Direct numerical simulation of reactive absorption in gas/liquid flow on structured packing using interface capturing method. *Chem. {Engineering} {Science}*, 65(1), 351-356. doi :10.1016/j.ces.2009.07.018
- Haroun, Y., Raynal, L. & Legendre, D. (2012). Mass transfer and liquid hold-up determination in structured packing by CFD. *Chem. Eng. Sci.* 75, 342-348. doi :10.1016/j.ces.2012.03.011

- Heining, C., Bontozoglou, V., Aksel, N. & Wierschem, A. (2009). Nonlinear resonance in viscous films on inclined wavy planes. *Int. J. Multiph. Flow*, 35(1), 78-90. doi :10.1016/j.ijmultiphaseflow.2008.07.005
- Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Wiley. doi :10.1002/9780470172636.ch5. arXiv : arXiv:1011.1669v3
- Kalliadasis, S., Ruyer-Quil, C., Scheid, B. & Velarde, M. G. (2012). *Falling Liquid Films*. Applied Mathematical Sciences. London : Springer London. doi :10.1007/978-1-84882-367-9
- Kapitza, P. [P.L.] & Kapitza, S. (1949). Wave flow on thin layers of a viscous fluid. *Zhurnal Eksp. i Teor. Fiz.* 19, 105-120.
- Kapitza, P. [PL] & Kapitza, S. (1948). Wave flow of thin viscous fluid layers. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 18(3).
- Killion, J. D. & Garimella, S. (2001). A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. *Int. J. Refrig.* 24(8), 755-797. doi :10.1016/S0140-7007(00)00086-4
- Kofman, N., Mergui, S. & Ruyer-Quil, C. (2017). Characteristics of solitary waves on a falling liquid film sheared by a turbulent counter-current gas flow. *Int. J. Multiph. Flow*, 95, 22-34. doi :10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.05.007
- Lallement, J., Villedieu, P., Trontin, P. & Laurent, C. (2017). A shallow water type model to describe the dynamic of thin partially wetting films.
- Leenaerts, R. (1988). *Technique industrielle de la couche mince*. Tech. l'ingénieur, 33(0).
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press.
- Li, S. & Li, H. (2006). Parallel AMR Code for Compressible MHD or HD Equations. Los Alamos Natl. Lab. Retrieved, 3-4. doi :10.1007/BF01128931
- Li, W., Wu, X.-Y., Luo, Z., Yao, S.-c. & Xu, J.-L. (2011). Heat transfer characteristics of falling film evaporation on horizontal tube arrays. *Int. J. Heat Mass Transf.* 54(9), 1986-1993. doi :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.12.031
- Lin, S. P. (1967). Instability of a liquid film flowing down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 10(3-4), 308-313. doi :10.1063/1.1762110
- Liu, J. & Gollub, J. P. (1994). Solitary wave dynamics of film flows. *Phys. Fluids*, 6(5), 1702-1712. doi :10.1063/1.868232



- Liu, J., Paul, J. D. & Gollub, J. P. (1993). Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.* 250(-1), 69. doi :10.1017/S0022112093001387
- Luo, H. & Pozrikidis, C. (2007). Gravity-driven film flow down an inclined wall with three-dimensional corrugations. *Acta Mech.* 188(3-4), 209-225. doi :10.1007/s00707-006-0351-6
- Malamataris, N. A., Vlachogiannis, M. & Bontozoglou, V. (2002). Solitary waves on inclined films : Flow structure and binary interactions. *Phys. Fluids*, 14(3), 1082-1094. doi :10.1063/1.1449465
- McKay, M. D., Beckman, R. J. & Conover, W. J. (1979). A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*, 21(2), 239. doi :10.2307/1268522
- Miller, W. (1998). The Experimental Analysis of Aqueous Lithium Bromide Vertical Film Absorption. Dr. Diss.
- Miyara, A. (1999). Numerical analysis on flow dynamics and heat transfer of falling liquid films with interfacial waves. *Heat Mass Transf.* 35(4), 298-306. doi :10.1007/s002310050328
- Najder, L. E. (1964). Thin film evaporation. *Ind. Eng. Chem.* 56(2), 26-30. doi :10.1021/ie50650a005
- Nguyen, P.-K. & Bontozoglou, V. (2011). Steady solutions of inertial film flow along strongly undulated substrates. *Phys. Fluids*, 23(5), 52103. doi :10.1063/1.3591154
- Nguyen, P.-k., Bontozoglou, V., Valourgeorgis, D., Pelekasis, N., Andritsos, A. N., Tsamopoulos, J., ... Papageorgiou, D. (2012). Computational Study of Liquid Film Flows along either Flat or Undulated Substrates.
- Nusselt, W. (1916). Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. *Zetschr. Ver. Deutch. Ing.* 60, 541-546.
- Ogden, K. A., D'Alessio, S. J. D. & Pascal, J. P. (2011). Gravity-driven flow over heated, porous, wavy surfaces. *Phys. Fluids*, 23(12), 122102. doi :10.1063/1.3667267
- Ooshida, T. (1999). Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number. *Phys. Fluids*. doi :10.1063/1.870186

- Pascal, J. P., Gonputh, N. & D'Alessio, S. J. D. (2013). Long-wave instability of flow with temperature dependent fluid properties down a heated incline. *Int. J. Eng. Sci.* 70, 73-90. doi :10.1016/j.ijengsci.2013.05.003
- Paz, R. R., Storti, M. A. & Garelli, L. (2011). Local absorbent boundary condition for non-linear hyperbolic problems with unknown Riemann invariants. *Comput. Fluids*, 40(1), 52-67. doi :10.1016/j.compfluid.2010.08.001
- Pozrikidis, C. (1988). The flow of a liquid film along a periodic wall. *J. Fluid Mech.* 188(-1), 275. doi :10.1017/S0022112088000734
- Prandtl, L. (1938). Zur Berechnung der Grenzschichten. *ZAMM - Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.* 18(1), 77-82. doi :10.1002/zamm.19380180111
- Rang, J. (2015). Improved traditional Rosenbrock-Wanner methods for stiff ODEs and DAEs. *J. Comput. Appl. Math.* 286, 128-144. doi :10.1016/j.cam.2015.03.010
- Reck, D. & Aksel, N. [Nuri]. (2013). Experimental study on the evolution of traveling waves over an undulated incline. *Phys. Fluids*, 25(10), 102101. doi :10.1063/1.4823730
- Ribatski, G. & Jacobi, A. M. (2005). Falling-film evaporation on horizontal tubes—a critical review. *Int. J. Refrig.* 28(5), 635-653. doi :10.1016/j.ijrefrig.2004.12.002
- Roberts, A. J. & Li, Z. (1999). The accurate and comprehensive model of thin fluid flows with inertia on curved substrates. *J. Fluid Mech.* 553(-1), 49. doi :10.1017/S0022112006008640. arXiv : 9906011 [chao-dyn]
- Rocha, J. A., Bravo, J. L. & Fair, J. R. (1993). Distillation-Columns Containing Structured Packings - a Comprehensive Model for Their Performance .1. Hydraulic Models. *Ind. Eng. Chem. Res.* 32(4), 641-651. doi :10.1021/ie9910773
- Ruyer-Quil, C. [C.] & Manneville, P. [P.]. (1998). Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 6(2), 277-292. doi :10.1007/s100510050550
- Ruyer-Quil, C. [C.] & Manneville, P. [P.]. (2002). Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. *Phys. Fluids*, 14(1), 170-183. doi :10.1063/1.1426103
- Ruyer-Quil, C., Scheid, B., Kalliadasis, S., Velarde, M. G. & Zeytounian, R. K. (2005). Thermocapillary long waves in a liquid film flow. Part 1. Low-

- dimensional formulation. *J. Fluid Mech.* 538, 199-222. doi :10.1017/S0022112005005422
- Ruyer-Quil, C. [Christian] & Manneville, P. [Paul]. (2000). Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 15(2), 357-369. doi :10.1007/s100510050550
- Savcenco, V., Hundsdorfer, W. & Verwer, J. G. (2007). A multirate time stepping strategy for stiff ordinary differential equations. *BIT Numer. Math.* 47(1), 137-155. doi :10.1007/s10543-006-0095-7
- Schiesser, W. E. (2012). *The numerical method of lines : integration of partial differential equations*. Academic Press.
- Scholle, M., Haas, A., Aksel, N., Wilson, M. C. T., Thompson, H. M. & Gaskell, P. H. (2008). Competing geometric and inertial effects on local flow structure in thick gravity-driven fluid films. *Phys. Fluids*, 20(12), 123101. doi :10.1063/1.3041150
- Seban, R. A. & Faghri, A. (1978). Wave Effects on the Transport to Falling Laminar Liquid Films. *J. Heat Transfer*, 100(1), 143. doi :10.1115/1.3450488
- Serifi, K., Malamataris, N. A. & Bontozoglou, V. (2004). Transient flow and heat transfer phenomena in inclined wavy films. *Int. J. Therm. Sci.* 43(8), 761-767. doi :10.1016/j.ijthermalsci.2004.02.016
- Shetty, S. & Cerro, R. (1993). Flow of a thin film over a periodic surface. *Int. J. Multiph. flow*, 19(6), 1013-1027. doi :10.1016/0301-9322(93)90075-6
- Shkadov, V. Y. (1970). Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Fluid Dyn.* 2(1), 29-34. doi :10.1007/BF01024797
- Smith, K. A. (1966). On convective instability induced by surface-tension gradients. *J. Fluid Mech.* 24(02), 401. doi :10.1017/S0022112066000727
- Taneda, S. (1979). Visualization of Separating Stokes Flows. doi :10.1143/JPSJ.46.1935
- Trifonov, Y. Y. [Y.Y. Y]. (2014). Stability of the wavy film falling down a vertical plate : The DNS computations and Floquet theory. *Int. J. Multiph. Flow*, 61, 73-82. doi :10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.01.006
- Trifonov, Y. Y. [Yu Ya]. (2007). Stability of a viscous liquid film flowing down a periodic surface. *Int. J. Multiph. Flow*, 33(11), 1186-1204. doi :10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.05.004

- Trifonov, Y. (1999). Viscous liquid film flows over a periodic surface. *Int. J. Multiph. Flow*, 24(7), 1139-1161. doi :10.1016/S0301-9322(98)00022-6
- Tseluiko, D., Blyth, M. G. & Papageorgiou, D. T. (2013). Stability of film flow over inclined topography based on a long-wave nonlinear model. *J. Fluid Mech.* 729, 638-671. doi :10.1017/jfm.2013.331
- Wang, C.-Y. (1981). Liquid film flowing slowly down a wavy incline. *AIChE J.* 27(2), 207-212. doi :10.1002/aic.690270206
- Whitham, G. B. & Fowler, R. G. (1975). *Linear and Nonlinear Waves*. *Phys. Today*, 28(6), 55-56. doi :10.1063/1.3069011
- Wiegand, J. (2007). Falling-film evaporators and their applications in the food industry. *J. Appl. Chem. Biotechnol.* 21(12), 351-358. doi :10.1002/jctb.5020211204
- Wierschem, A. [A.] & Aksel, N. [N.]. (2004). Influence of inertia on eddies created in films creeping over strongly undulated substrates. *Phys. Fluids*, 16(12), 4566. doi :10.1063/1.1811673
- Wierschem, A. [A.], Bontozoglou, V., Heining, C., Uecker, H. & Aksel, N. (2008). Linear resonance in viscous films on inclined wavy planes. *Int. J. Multiph. Flow*, 34(6), 580-589. doi :http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.12.001
- Wierschem, A. [A.], Lepski, C. & Aksel, N. (2005). Effect of long undulated bottoms on thin gravity-driven films. *Acta Mech.* 179(1-2), 41-66. doi :10.1007/s00707-005-0242-2
- Wierschem, A. [A.], Scholle, M. & Aksel, N. (2003). Vortices in film flow over strongly undulated bottom profiles at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 15(2), 426-435. doi :10.1063/1.1533075
- Wierschem, A. [Andreas] & Aksel, N. [N.]. (2004). Hydraulic jumps and standing waves in gravity-driven flows of viscous liquids in wavy open channels. *Phys. Fluids*, 16(11), 3868-3877. doi :10.1063/1.1789431
- Yang, L. & Shen, S. (2008). Experimental study of falling film evaporation heat transfer outside horizontal tubes. *Desalination*, 220(1), 654-660. doi :10.1016/j.desal.2007.02.046
- Yoshimura, P. N., Nosoko, T. & Nagata, T. (1996). Enhancement of mass transfer into a falling laminar liquid film by two-dimensional surface waves—Some experimental observations and modeling. *Chem. Eng. Sci.* 51(8), 1231-1240. doi :10.1016/0009-2509(95)00387-8

- Zhao, L. & Cerro, R. L. (1992). Experimental characterization of viscous film flows over complex-surfaces. *Int. J. Multiph. Flow*, 18(4), 495-516.  
doi :doi:10.1016/0301-9322(92)90048-L