



HAL
open science

Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice

Yann Monerie

► **To cite this version:**

Yann Monerie. Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II, 2000. Français. NNT : . tel-01814255

HAL Id: tel-01814255

<https://hal.science/tel-01814255>

Submitted on 13 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

Discipline : MECANIQUE

Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Yann MONERIE

le 17 octobre 2000

Titre :

**FISSURATION DES MATERIAUX COMPOSITES :
ROLE DE L'INTERFACE FIBRE/MATRICE**

Directeur de thèse :

Michel Raous

JURY

M.M.	T.	Bretheau	Président
	J.-L.	Chaboche	Rapporteur
	J.-J.	Marigo	Rapporteur
	E.	Martin	Examineur
	J.-C.	Michel	Examineur
	M.	Raous	Examineur
	V.	Tvergaard	Examineur

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

Discipline : MECANIQUE

Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Yann MONERIE

le 17 octobre 2000

Titre :

**FISSURATION DES MATERIAUX COMPOSITES :
ROLE DE L'INTERFACE FIBRE/MATRICE**

Directeur de thèse :

Michel Raous

JURY

M.M.	T.	Bretheau	Président
	J.-L.	Chaboche	Rapporteur
	J.-J.	Marigo	Rapporteur
	E.	Martin	Examineur
	J.-C.	Michel	Examineur
	M.	Raous	Examineur
	V.	Tvergaard	Examineur

*A Christine et Maël,
mes moteurs en toutes choses.
A ma mère et mon frère,
pour être simplement là.
A mon père et mon grand-père,
qui, j'en suis sûr, auraient eu
de nombreuses questions.*

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille dirigé par Pierre Suquet et plus récemment par Michel Raous, dans le cadre d'une bourse DGA/CNRS.

Je remercie Michel Raous pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour m'avoir proposé un sujet passionnant tant par ses finalités claires et appliquées que par la palette des problèmes plus théoriques qu'il s'agissait d'aborder. La confiance scientifique qu'il m'a témoignée et son soutien dans l'exploration de nouvelles pistes ont été des éléments clés du bon déroulement de ce travail et du plaisir que j'ai pris à le réaliser.

Ma gratitude à l'égard de Thierry Bretheau va au-delà de sa qualité de président du jury. Je le remercie notamment pour son amitié suivie, ses encouragements et sa vision scientifique à spectre large que j'ai pu apprécier lors de nos réunions à l'ONERA, à l'école thématique du CNRS sur l'homogénéisation et lors de mon bref séjour au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique.

Je remercie également Jean-Louis Chaboche et Jean-Jacques Marigo d'avoir bien voulu rapporter sur ce travail. Ceci constitue pour moi une satisfaction en soi. Je tiens en particulier à remercier Jean-Louis Chaboche pour les amicaux et très fructueux échanges que nous avons eu à l'ONERA et de m'avoir communiqué à ces occasions sa rigueur et son entrain.

Je suis très honoré de la présence de Viggo Tvergaard dans la composition des examinateurs. Ses travaux précurseurs sur les modèles de zones cohésives avec prise en compte du frottement font aujourd'hui référence au plan international. Ils ont été pour moi une source renouvelée d'inspiration et m'ont convaincu du potentiel de ces modèles.

Enfin, je suis heureux qu'Eric Martin et Jean-Claude Michel aient accepté d'examiner ce travail. Leurs remarques amicales l'ont conduit à sa forme définitive. Je remercie en particulier Jean-Claude Michel pour avoir si souvent répondu à mes questions et pour m'avoir encouragé sur la voie des simulations 3D.

D'une manière plus générale, j'adresse mes plus sincères remerciements à Pierre Suquet ainsi qu'à François-Henri Leroy. Je leur dois mon goût grandissant pour la recherche, un soutien scientifique et amical fort dans les moments de doutes et une partie non négligeable des résultats obtenus.

Michel Jean et Vincent Acary, par leurs connaissances mécaniques et leurs talents de numériques ont contribué de manière significative aux résultats les plus récents et les plus aboutis de ce mémoire. Qu'il me soit permis en particulier de remercier Vincent Acary pour son opiniâtreté. Sans lui ce travail n'aurait pu être soutenu dans les temps.

Mes chaleureux remerciements vont à Anne-Sophie Bretelle, Laurent Cangémi, Frédéric Du-

bois, Jean-Marc Ricaud, Robert Silve et Didier Vola pour leurs compétences mécaniques sûres dans le domaine des composites et en grandes déformations notamment, leur recul et leurs idées mathématiques, leur compréhension fine de la thermodynamique, leur pragmatisme et leur maîtrise brillante de l'outil numérique. Ils reconnaitrons leurs talents. Je leur témoigne mon amitié sincère.

Je remercie enfin les membres des différentes équipes où j'ai eu le plaisir de travailler : l'équipe Mécanique et Modélisation du Contact du LMA aujourd'hui dirigée par Patrick Chabrand, l'équipe Modèles Numériques du LMA dirigée par Bruno Cochelin et en particulier Sébastien Baguet, Stéphane Bourgeois, Thierry Desoyer, Stéphane Méo et Vincent Acary, l'équipe Matériaux et Structures Hétérogènes du LMA dirigée par Pierre Suquet puis par Jean-Claude Michel avec qui nos échanges furent toujours amicaux et constructifs, le Département des Matériaux et des Systèmes Composites et le Département Mécanique du Solide et de l'Endommagement de l'ONERA. Au LMA, l'efficacité et la bonne humeur d'Annie Fornacciari et d'Alain Rimeymeille ainsi que la solidarité entre doctorants m'ont été souvent d'une aide précieuse. Merci encore aux plus anciens : Laurence, Florent et Olivier.

Je ne saurais conclure ces remerciements sans exprimer ma gratitude à mon entourage proche et à Christine. Elle seule peut mesurer ce que je lui dois, bien loin derrière le petit Maël.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

7

Chapitre I

État de l'art sur les modèles de fissuration des matériaux

I.1	La mécanique linéaire de la rupture	13
I.1.1	Fissuration d'un matériau homogène	13
I.1.1.a	L'approche en contraintes	13
I.1.1.b	L'approche énergétique	14
I.1.1.c	Le lien entre l'approche en contraintes et l'approche énergétique	17
I.1.2	Mécanique de la rupture interfaciale	19
I.1.2.a	L'approche en contraintes	20
I.1.2.b	L'approche énergétique	22
I.2	Les faiblesses de la mécanique linéaire de la rupture. Quelques tentatives pour y remédier	24
I.2.1	L'amorçage de fissure	24
I.2.1.a	La définition de critères d'amorçage de fissure	24
I.2.1.b	Une "revisite" de la mécanique de la rupture comme un problème de minimum d'énergie	25
I.2.1.c	La mécanique de la rupture ductile	26
I.2.1.d	La mécanique de l'endommagement	27
I.2.2	L'évolution temporelle des trajets de fissuration	27
I.2.3	L'évolution spatiale des trajets de fissuration	28
I.2.4	Les conditions de bords libres sur les lèvres de la fissure	29
I.3	Les modèles de zone cohésive	30
I.3.1	Les modèles pionniers et les avantages de la notion de zone cohésive	32
I.3.1.a	Le modèle de Barenblatt	32

I.3.1.b	Le modèle de Dugdale	33
I.3.1.c	Les avantages des modèles de zone cohésive par rapport à la mécanique de la rupture et à ses alternatives	34
I.3.2	Le lien entre les modèles de zone cohésive et la mécanique de la rupture .	37
I.3.2.a	Equivalence des critères de fissuration de Griffith et de Barenblatt	37
I.3.2.b	Egalité de l'énergie de décohésion et du taux de restitution de l'énergie	38
I.3.3	Différents modèles de zone cohésive	42
I.4	Conclusion du chapitre	46

<p>Chapitre II Un modèle de comportement d'interface couplant adhésion, frottement et contact unilatéral</p>

II.1	Introduction	51
II.2	Formulation thermodynamique	52
II.2.1	Premier principe de la thermodynamique, équations d'équilibre	52
II.2.2	Energie libre, lois d'état	53
II.2.3	Dissipation, lois complémentaires	56
II.3	Problème quasi-statique : formulation variationnelle et traitement numérique . .	61
II.3.1	Formulation variationnelle du problème quasi-statique	62
II.3.2	Traitement numérique, problème incrémental, θ -méthode	64
II.4	Interprétation et analyse mécanique du modèle et de ses variantes	69
II.4.1	Bilan énergétique sur un exemple simple : interface en cisaillement sous pression normale	69
II.4.1.a	Un seuil de décohésion	70
II.4.1.b	Le frottement	70
II.4.1.c	L'évolution visqueuse de l'endommagement interfacial	71
II.4.1.d	Energies dissipées durant le processus de décohésion interfaciale	73
II.4.1.e	Comportement interfacial pour des chargements cycliques et à vitesses variables	74
II.4.2	Un modèle à coefficient de frottement variable	75
II.4.3	Limitation de la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation	77
II.5	Extension du modèle aux grandes déformations	81
II.5.1	Les difficultés liées aux grandes déformations	82
II.5.1.a	Les difficultés d'ordre cinématique	82

II.5.1.b	Les difficultés d'ordre mécanique	82
II.5.1.c	Les difficultés d'ordre mathématique	83
II.5.2	Formulations du modèle thermodynamique et du problème aux limites	84
II.5.3	Résultat d'existence dans un cas particulier : contact sans frottement avec un obstacle plan	88
II.6	Conclusion du chapitre	92

Chapitre III

Solutions non régulières et questions d'unicité pour la décohésion interfaciale

III.1	Existence et unicité conditionnelle de solutions à un problème quasi-statique de décohésion de solides élastiques	97
III.1.1	Un théorème d'unicité conditionnelle	97
III.1.2	Un exemple uniaxial	99
III.2	Longueur d'onde des instabilités	101
III.2.1	Position du problème	102
III.2.2	Solutions périodiques le long de l'interface	103
III.2.3	Cas des solides isotropes	105
III.2.3.a	Cas 1 : solide déformable / interface / solide déformable	105
III.2.3.b	Cas 2 : solide déformable / interface / corps rigide	107
III.3	La régularisation visqueuse des modèles de décohésion interfaciale	109
III.4	Conclusion du chapitre	111

Chapitre IV

Une comparaison de différents modèles de décohésion

IV.1	Introduction	115
IV.2	Modèle uniaxial relatif au couplage interface/structure : micro-indentation	116
IV.2.1	Un modèle uniaxial	116
IV.2.2	Comparaison du modèle uniaxial et du modèle éléments finis	117
IV.3	Comparaison de lois d'interface indépendantes du temps	118
IV.3.1	Quatre lois d'interface indépendantes du temps	118
IV.3.2	Simulation d'un essai d'indentation. Energie de décohésion	120
IV.3.3	Saut de solution	120
IV.4	Comparaison de lois d'interfaces sensibles à la vitesse de sollicitation	122
IV.5	Conclusion du chapitre	124

<p>Chapitre V L'interface fibre/matrice dans les matériaux composites à matrice céramique</p>

V.1	Introduction	127
V.2	L'interface fibre/matrice	127
V.2.1	La micromécanique des matériaux composites	127
V.2.2	Interface/interphase	128
V.2.3	Les essais micromécaniques	129
V.3	Simulation numérique d'essais de micro-indentation (push-in)	132
V.3.1	L'essai de micro-indentation	132
V.3.1.a	Le principe	132
V.3.1.b	Le chargement	133
V.3.1.c	Les constituants	133
V.3.1.d	Les résultats expérimentaux	134
V.3.2	Simulation d'une expérience de micro-indentation d'un composite SiC/SiC à fibres longues	135
V.3.2.a	Prise en compte de la souplesse du système de mesure	135
V.3.2.b	Prise en compte de l'indentation élasto-plastique de la fibre	136
V.3.2.c	Modélisation de l'essai	136
V.3.2.d	Le maillage	138
V.3.2.e	Le chargement et la discrétisation temporelle	139
V.3.2.f	Les contraintes résiduelles d'origine thermo-mécanique	139
V.4	Identification des paramètres mécaniques de l'interface fibre/matrice	141
V.4.1	Méthode d'identification des paramètres mécaniques du modèle adhé- sif/frottant	141
V.4.2	Identification avec viscosité du comportement interfacial	142
V.4.3	La question de la viscosité	143
V.4.3.a	Une approche énergétique	144
V.4.3.b	Une identification sans viscosité	145
V.4.4	Discussion sur les paramètres mécaniques identifiés	146
V.4.4.a	Les critères de validité	146
V.4.4.b	Le coefficient de frottement μ	147
V.4.4.c	L'énergie de décohésion	147
V.4.4.d	La contrainte critique et la contrainte maximale	147

V.4.4.e	La raideur interfaciale	148
V.4.5	Validation du modèle : l'influence de V_f	150
V.5	Conclusion du chapitre	152

Chapitre VI La fissuration tridimensionnelle des matériaux composites

VI.1	Le rôle de l'interface fibre/matrice dans la fissuration des matériaux composites	157
VI.2	Contact, frottement et adhérence en 3D - Méthode NSCD	160
VI.2.1	Généralités sur la méthode NSCD	160
VI.2.2	Cinématique	161
VI.2.3	Equation de la dynamique	161
VI.2.4	Discrétisation temporelle	162
VI.2.5	Contact et frottement	163
VI.2.6	Prise en compte de l'adhérence	164
VI.3	Optimisation de la résistance à la fissuration	165
VI.3.1	Les données du problème	165
VI.3.1.a	La sollicitation et les conditions de bords	166
VI.3.1.b	Les propriétés matériaux pour la fissuration	167
VI.3.1.c	Le maillage	169
VI.3.2	Optimisation du composite industriel	170
VI.3.2.a	Tenue du composite et déviation des fissures aux interfaces	170
VI.3.2.b	Discussion des résultats	174
VI.3.2.c	Le piégeage des fissures matricielles	175
VI.4	Conclusion du chapitre	177

CONCLUSION ET PERSPECTIVES	179
-----------------------------------	------------

Bibliographie	181
----------------------	------------

Introduction

Ce travail concerne le développement de lois de comportement d'interface, couplant ici adhérence, frottement et contact unilatéral, et leurs extensions comme modèles de fissuration 3D pour des matériaux composites.

Nos contributions portent d'abord sur l'approfondissement de l'analyse énergétique et des questions d'identification de paramètres pour le modèle proposé par M.Raous, L.Cangémi et M.Cocu. Après mise en œuvre et discussion de quelques variantes, le modèle est étendu à la modélisation de la fissuration. En proposant une version 3D de ce modèle d'interface et de fissuration, nous avons pu discuter le rôle des interfaces fibre/matrice dans le processus de fissuration des composites et ainsi envisager l'amélioration de leur résistance à la fissuration. Ce dernier point constituait l'objectif de notre étude.

Nous avons travaillé sur les composites unidirectionnels à matrice céramique et à fibres longues de carbure de silicium (SiC/SiC). Malgré des propriétés intéressantes des constituants de ces matériaux (haut module, tenue en température, résistance à l'usure, à l'oxydation et à la corrosion), l'utilisation des composites céramique/céramique dans des applications thermostructurales (aubes de turbine, tuiles ablatives de rentrée dans l'atmosphère, ...) reste limitée du fait d'une rupture souvent prématurée. Les différentes phases constitutives de ces composites étant purement fragiles, les interfaces entre constituants s'avèrent être les lieux privilégiés de la mise en œuvre des mécanismes de dissipation et d'accommodation des chargements. L'optimisation de la ténacité, de la déformation et de la contrainte à rupture macroscopiques est ainsi très fortement influencée par un choix convenable des propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice.

Notre analyse est centrée sur les aspects micromécaniques de cette fissuration. Ce travail doit permettre à des analyses réalisées aux échelles méso- ou macroscopique d'aboutir directement à des recommandations aux élaborateurs. Pour ce faire, nous étudions les deux mécanismes susceptibles d'intervenir lors de l'interaction d'une fissure matricielle et d'une interface fibre/matrice : d'une part la compétition entre la déviation de la fissure à l'interface et sa pénétration dans la fibre, et d'autre part le piégeage des fissures matricielles par une rangée de fibres. Ces deux phénomènes sont en effet estimés être à l'origine de deux améliorations distinctes de la tenue du composite. La discussion sera menée en faisant une large place à l'analyse énergétique de ces deux processus et bien sûr à la quantification des énergies de décohésion.

Le phénomène de *dévi*ation/*pénétration* porte sur la ductilité apparente du composite. Nous montrerons qu'une énergie de décohésion optimale peut être envisagée : la rupture des fibres peut être évitée tout en faisant de la déviation de la fissure à l'interface un mécanisme consommateur d'énergie avant d'aboutir la situation d'une fissure matricielle pontée par des fibres en extraction frottante. Par ailleurs, le phénomène de *piégeage* des fissures — peu étudié dans la littérature — concerne l'amélioration de la ténacité apparente du composite : lorsque la tenue interfaciale est élevée et lorsque l'énergie à rupture de la fibre est suffisante, la propagation de la fissure matricielle peut alors être momentanément ralentie, voire stoppée.

Il convient de souligner que la mise en évidence de ces deux phénomènes est un problème fortement tridimensionnel. Notamment, le contournement des fibres par les fissures matricielles ne peut être obtenu en deux dimensions (fissures planes ou annulaires). La formulation 3D de ces problèmes est une originalité forte du travail présenté dans ce mémoire.

La fissuration des matériaux est abordée ici sous l'angle des modèles de comportement surfaciques, plus que sous celui des critères de fissuration : notre approche repose sur les modèles de zone cohésive. Quelle que soit la mise en œuvre numérique de ces modèles (éléments finis surfaciques ou conditions aux limites mixtes contrainte/déplacement), ils autorisent des simulations allant de l'amorçage des fissures jusqu'à la ruine des matériaux. Ils permettent par ailleurs de prendre en compte la physique des processus de décohésion à une échelle plus fine que ce soit pour la fissuration des solides volumiques ou pour celle des interfaces qui les lient. Ces modèles de zone cohésive s'avèrent particulièrement adaptés à l'étude de la fissuration des matériaux composites.

Notre démarche consiste à identifier les propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice d'un composite industriel sur une expérience de micro-indentation, puis à simuler la fissuration d'un composite ayant ces propriétés. Une prospection numérique autour des valeurs identifiées permet de formuler des recommandations sur les propriétés interfaciales optimales. Le modèle de zone cohésive retenu pour réaliser ces simulations est le *modèle adhésif/frottant* de M.Raous, L.Cangémi et M.Cocu. Ce modèle, basé sur les travaux de M.Frémond, propose un couplage entre adhérence, frottement et contact unilatéral.

Pour mener à bien ce travail, un certain nombre de points ont dû être abordés :

1. Les modèles de zone cohésive présentent certains avantages par rapport aux modèles de fissuration plus classiques tels que la mécanique de la rupture (amorçage des fissures, suivi spatial et temporel). Cependant, l'inconvénient majeur de ces modèles est qu'ils peuvent conduire à des *sauts de solution*. Un théorème, proposé dans ce mémoire, montre en effet que l'unicité de la solution à un problème de solides cohésifs en évolution quasi-statique est conditionnelle. Pour pallier ces problèmes de sauts de solution, deux régularisations ont été envisagées : une viscosité interfaciale et une formulation dynamique.
2. L'identification des paramètres mécaniques de l'interface sur un composite industriel est

un problème délicat. L'essai retenu pour conduire cette identification est l'essai de micro-indentation (push-in). Il s'agit en effet d'un des rares essais micromécaniques permettant d'envisager une sollicitation interfaciale pertinente (cisaillement et compression radiale) sur un composite réel. Un soin particulier a été apporté à la correction des résultats expérimentaux (souplesse du système de mesure, plasticité sous l'indenteur, ...) et à la simulation numérique de cet essai (prise en compte des contraintes résiduelles thermiques, ...). Par ailleurs, la méthode d'identification proposée tient compte de la présence d'une *interface* entre la fibre et la matrice : elle repose sur la détermination de bornes mécaniquement admissibles pour les paramètres du modèle adhésif/frottant. Nous montrerons que la précision avec laquelle est réalisée cette identification conduit à une énergie de décohésion interfaciale supérieure à celle classiquement évoquée pour les systèmes SiC/SiC.

3. La question de l'existence d'une viscosité interfaciale a été largement étudiée. L'intérêt de cette viscosité a été détaillé sur le plan d'une régularisation mécanique et numérique des problèmes de sauts de solution. Sur le plan physique, nous verrons que les nombreux efforts faits dans le domaine expérimental et dans celui de la modélisation ne permettent pas de conclure avec certitude à l'existence d'une sensibilité du comportement interfacial à la vitesse de sollicitation. La formulation dynamique a donc été retenue pour l'analyse de la fissuration 3D.
4. Un outil numérique a été développé pour simuler la fissuration 3D des solides et de leurs interfaces. Cet outil s'appuie sur une formulation dynamique des modèles de zone cohésive et de leur couplage avec des conditions de contact frottant (extension de la méthode "Non Smooth Contact Dynamics" due à J.-J. Moreau et à M. Jean). La simulation de l'interaction d'une fissure matricielle avec une rangée de fibres a ainsi pu être envisagée. Nous montrerons qu'il est possible de définir des propriétés interfaciales optimales du point de vue de la déformation et de l'énergie à rupture. La contrainte à rupture pourra aussi être améliorée par un choix de propriétés mécaniques conduisant au piégeage de la fissure par la rangée de fibres.

Ce mémoire s'organise en trois parties.

La première partie (chapitre I) propose un état de l'art sur les modèles de fissuration. Une analyse mécanique détaillée de ces modèles est menée : origine des modèles, pertinence physique, difficultés mathématiques, comparaison des modèles. Une attention particulière est portée à la commodité de leur mise en œuvre numérique. Le choix que nous faisons des modèles de zone cohésive est largement guidé par la finalité de cette étude : la fissuration des *composites* et de leurs *interfaces* depuis les conditions d'amorçage jusqu'à la propagation dynamique des fissures.

La seconde partie concerne le modèle de comportement d'interface et de fissuration couplant adhérence, frottement et contact unilatéral. Le modèle est présenté ainsi que quelques variantes (chapitre II) : formulation thermodynamique, problème continu de solides élastiques liés par

une zone cohésive, formulation variationnelle, traitement numérique et convergence de l'algorithme de résolution. Les problèmes de sauts de solution inhérents aux modèles de zone cohésive sont ensuite étudiés, ainsi que les instabilités qu'ils engendrent (chapitre III). Différents modèles de comportement interfacial issus de la littérature récente sont enfin comparés (chapitre IV).

La troisième partie traite de la fissuration du composite SiC/SiC. Les propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice sont identifiées sur une expérience de micro-indentation (chapitre V). Des consignes de modification de ces propriétés pour améliorer la ductilité ou la ténacité du composite sont enfin données à l'issue d'une étude tridimensionnelle (chapitre VI).

CHAPITRE I

Etat de l'art sur les modèles de fissuration des matériaux

Dans ce chapitre, des notions classiques concernant l'analyse et la simulation de la fissuration des matériaux sont présentées. Un détail argumenté des forces et des faiblesses des différents modèles de fissuration usuels permet de situer notre contribution dans ce domaine. En particulier, deux grandes classes de modèles sont distinguées : la mécanique de la rupture et les modèles de zone cohésive.

Les premiers ont fait leur preuve pour une vaste gamme de situations mécaniques. Ils ont notamment permis de mettre en évidence le taux de restitution de l'énergie G comme un paramètre clé de la fissuration. Ils sont cependant confrontés à certaines limitations, notamment au problème de l'amorçage des fissures. Pour les modèles de zone cohésive, cet amorçage émerge naturellement du trajet de chargement sans hypothèses complémentaires.

Pour une propagation quasi-statique de fissure, l'équivalence des deux classes de modèles peut être obtenue.

PLAN DU CHAPITRE I

I.1	La mécanique linéaire de la rupture	13
I.1.1	Fissuration d'un matériau homogène	13
I.1.2	Mécanique de la rupture interfaciale	19
I.2	Les faiblesses de la mécanique linéaire de la rupture. Quelques tentatives pour y remédier	24
I.2.1	L'amorçage de fissure	24
I.2.2	L'évolution temporelle des trajets de fissuration	27
I.2.3	L'évolution spatiale des trajets de fissuration	28
I.2.4	Les conditions de bords libres sur les lèvres de la fissure	29
I.3	Les modèles de zone cohésive	30
I.3.1	Les modèles pionniers et les avantages de la notion de zone cohésive . .	32
I.3.2	Le lien entre les modèles de zone cohésive et la mécanique de la rupture	37
I.3.3	Différents modèles de zone cohésive	42
I.4	Conclusion du chapitre	46

I.1 La mécanique linéaire de la rupture

L'objet de la mécanique de la rupture est d'étudier et de prévoir les conditions de propagation des fissures dans les matériaux solides. Les nombreux développements théoriques, numériques et les succès qu'a connus cette discipline dans les années 1970 ont conduit à son implantation massive dans les codes de calcul industriels. C'est aujourd'hui un outil de simulation prisé : chargement critique, taille critique de défauts, etc. La plupart de ces simulations se font dans le cadre de la mécanique *linéaire* de la rupture. Les solides fissurés sont ainsi considérés idéalement *élastiques* et soumis à un chargement monotone ne pouvant entraîner qu'une propagation quasi-statique des fissures.

Nous présentons ici les forces et les faiblesses de la mécanique linéaire de la rupture et nous soulignons la spécificité de son utilisation dans la fissuration des matériaux composites. Une approche en contraintes et une approche énergétique sont détaillées d'une part pour la fissuration d'un matériau élastique homogène isotrope et d'autre part pour la fissuration de l'interface d'un bimatériau.

I.1.1 Fissuration d'un matériau homogène

Le lecteur désireux d'approfondir les notions introduites dans ce paragraphe pourra se rapporter à SUQUET [1987] dont la présentation ci-dessous est largement inspirée.

I.1.1.a L'approche en contraintes

Au-delà les travaux fondateurs de GRIFFITH [1920], la mécanique de la rupture ne connaît de réels développements qu'à partir des années cinquante. Les premiers résultats concernent le caractère universel de la singularité asymptotique du champ des contraintes en pointe de fissure, pour un problème statique de corps bidimensionnel fissuré, parfaitement élastique, sous l'hypothèse des transformations infinitésimales. WILLIAMS [1957] montre en effet que dans ce cas, quels que soient le chargement et la géométrie du problème, et pour tous les modes de propagation de la fissure, on a :

$$(I.1) \quad \sigma(r, \theta) = \frac{K_\alpha}{\sqrt{r}} f_\alpha(\theta) + j_\alpha(r, \theta) \quad \text{pour } \alpha = \text{I, II ou III.}$$

Le couple (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point du solide repéré par rapport à la pointe de la fissure (en deux dimensions, en contraintes planes ou en déformations planes), les fonctions $j_\alpha(r, \theta)$ restent bornées lorsque r tend vers zéro, $f_\alpha(\theta)$ sont des fonctions d'angle. Par superposition (élasticité linéaire), l'équation (I.1) peut s'entendre au sens de la sommation sur les indices répétés α , ce qui est le cas le plus général.

Les termes K_I , K_{II} et K_{III} sont les *facteurs d'intensité de contraintes* relatifs respectivement aux modes I de propagation de la fissure (traction normale), II (cisaillement plan) et III (cisaillement antiplan). Ils dépendent du chargement et de la géométrie du solide et sont homogènes à des $[MPa][m]^{1/2}$.

Par exemple, pour un solide élastique homogène isotrope contenant une fissure rectiligne de longueur $2l$ et soumis à un chargement à l'infini σ_∞ orienté perpendiculairement à la fissure (qui est donc sollicitée en mode I), on a :

$$(I.2) \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}.$$

A partir du résultat analytique (I.1) de Williams, IRWIN [1957, 1958] propose un critère de propagation de fissure qui suppose l'existence d'une *valeur critique* des facteurs de concentration de contrainte. Ce critère, initialement défini en deux dimensions et en mode I pur, peut être étendu à tous les modes de propagation.

Critère d'Irwin

Il existe une valeur critique de K_α , notée $K_{\alpha c}$ telle que :

$$(I.3) \quad \begin{cases} K_\alpha < K_{\alpha c} \Rightarrow \dot{l} = 0, \\ K_\alpha = K_{\alpha c} \Rightarrow \dot{l} > 0, \end{cases} \quad \alpha = I, II \text{ ou III.}$$

Les constantes $K_{\alpha c}$ doivent être considérées comme purement *phénoménologiques* : elles sont sensées traduire *toute la physique du processus de rupture*. Ce sont des constantes intrinsèques au matériau. La donnée des $K_{\alpha c}$ ne saurait constituer autre chose qu'une information *matérielle*.

La critique que l'on peut formuler à cette approche est claire : le critère de propagation de la fissure défini par (I.3) est lié à la divergence des contraintes en pointe de fissure dont l'existence est due à l'analyse en élasticité linéaire. Le sens physique impose cependant que les contraintes restent finies en tout point du solide (plasticité, changement de phase, ...). Cet inconvénient d'une approche *locale* peut être évité par une approche énergétique *globale*.

I.1.1.b L'approche énergétique

Le raisonnement de Griffith L'approche énergétique consiste à analyser l'avancée de la fissure selon l'angle des échanges d'énergies qu'elle met en jeu.

Cette approche globale repose sur le raisonnement pionnier de GRIFFITH [1920] qui, en étudiant les processus de fissuration quasi-statiques pour des solides élastiques idéalement fragiles à l'équilibre, note que l'énergie potentielle macroscopique du système (énergie interne élastique stockée + énergie externe potentielle des chargements appliqués) varie avec la surface fissurée. Son idée est d'inclure l'énergie de surface γ créée par l'éventuelle avancée de la fissure comme

une énergie potentielle supplémentaire du système et d'invoquer le principe du minimum de l'énergie potentielle pour les systèmes conservatifs. Il s'agit alors de comparer l'énergie totale emmagasinée dans la structure *avant et après* l'éventuelle propagation de la fissure.

Pour une fissure de surface S s'accroissant de dS , l'énergie totale de la structure fissurée passe de $E(S)$ à $E(S + dS)$, avec :

$$(I.4) \quad E(S) = P(S) + 2S\gamma,$$

où P est l'énergie potentielle mécanique et $2S\gamma$ est l'énergie de surface relative aux deux lèvres de la fissure.

Le système ayant tendance à minimiser son énergie, la fissure se propagera si :

$$(I.5) \quad E(S + dS) = P(S + dS) + 2S\gamma + 2dS\gamma \leq P(S) + 2S\gamma = E(S).$$

Un critère énergétique de propagation de la fissure est alors le :

Critère de Griffith

$$(I.6) \quad \begin{cases} G < 2\gamma \Rightarrow \dot{l} = 0, \\ G \geq 2\gamma \Rightarrow \dot{l} > 0, \end{cases}$$

où on a posé :

$$(I.7) \quad G = -\frac{dP}{dS}.$$

L'approche énergétique de Griffith met donc en évidence une grandeur macroscopique G , appelé *taux de restitution de l'énergie*. Cette grandeur permet d'établir un critère de propagation de fissure pour un solide élastique linéaire. Ce critère s'affranchit de la notion de singularité de contraintes en fond de fissure. La lacune de cette approche est cependant de reposer sur un bilan d'énergie simple et d'envisager la fissuration comme un processus *réversible* ⁽¹⁾. La notion de taux de restitution de l'énergie peut être conservée dans une écriture thermodynamique du problème plus complète (incluant le second principe et donc la notion d'entropie).

L'approche thermodynamique Soit un corps $\Omega(l)$ contenant une fissure de longueur l , de frontière $\partial\Omega$, de masse volumique ρ , de densité d'énergie élastique $w(\varepsilon)$, soumis à un champ de forces volumiques f , à des efforts \bar{F} sur la partie de sa frontière notée $\partial\Omega_F$ et à des déplacements imposés \bar{U} sur la partie de sa frontière notée $\partial\Omega_U$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_U$, $\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_U = \emptyset$).

⁽¹⁾ γ est une énergie de surface réversible.

Le bilan des puissances mécaniques et calorifiques mises en jeu dans ce système est donné par le premier principe de la thermodynamique :

$$(I.8) \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{E} + \mathcal{C}) = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{cal},$$

où \mathcal{E} est l'énergie interne du système, \mathcal{C} l'énergie cinétique, \mathcal{P}_e la puissance des efforts extérieurs et \mathcal{P}_{cal} la puissance calorifique échangée par le système avec l'extérieur. Le second principe de la thermodynamique introduit la notion d'entropie, notée \mathcal{S} , et assure de la positivité de la dissipation intrinsèque totale \mathcal{D}_1 du système (T est la température du système) :

$$(I.9) \quad \mathcal{D}_1 = T \frac{d\mathcal{S}}{dt} - \mathcal{P}_{cal} \geq 0.$$

En utilisant (I.8) et (I.9), on peut écrire :

$$(I.10) \quad \mathcal{D}_1 = -S\dot{T} - \dot{W} + \mathcal{P}_e - \dot{\mathcal{C}},$$

où $W = \mathcal{E} - ST$ est l'énergie libre totale du système. Par ailleurs, l'énergie potentielle mécanique du système s'écrit :

$$(I.11) \quad P = W - L, \quad \text{avec} \quad W = \int_{\Omega} \rho w(\varepsilon) dx \quad \text{et} \quad L = \int_{\Omega} \rho f \cdot u dx + \int_{\partial\Omega_F} \bar{F} \cdot u ds.$$

L est l'opposé de l'énergie potentielle des efforts extérieurs (i.e. $\mathcal{P}_e = -\dot{L}$) et u est la solution du problème mécanique (i.e. u minimise P) :

$$(I.12) \quad P(l) = \min_{(u=U \text{ sur } \partial\Omega_U)} \left\{ \int_{\Omega(l)} \rho w(\varepsilon) dx - \int_{\Omega(l)} \rho f \cdot u dx - \int_{\partial\Omega_F} \bar{F} \cdot u ds \right\}.$$

En négligeant l'énergie cinétique du système (évolution quasi-statique) et en considérant une évolution isotherme, (I.10) et (I.11) conduisent à :

$$(I.13) \quad \mathcal{D}_1 = -\dot{P},$$

soit, encore :

$$(I.14) \quad \mathcal{D}_1 = G\dot{l} \quad \text{avec} \quad G = -\frac{dP}{dl}(l).$$

REMARQUE I.1. Cette définition *thermodynamique* du taux de restitution de l'énergie G suscite plusieurs remarques :

1. G dépend en toute généralité de la longueur de fissure l ,

2. G est positif (la dissipation \mathcal{D}_1 est positive d'après (I.9), \dot{l} est positif : la fissure ne peut se refermer),
3. G peut être considéré comme la *force thermodynamique associée à la longueur de fissure* : c'est la force motrice de l'avancée de la fissure.

Un critère classique de propagation de la rupture fragile est alors :

Il existe une valeur critique de G , notée G_c telle que :

$$(I.15) \quad \begin{cases} G < G_c \Rightarrow \dot{l} = 0, \\ G = G_c \Rightarrow \dot{l} \geq 0. \end{cases}$$

Le paramètre G_c est le *taux critique de restitution de l'énergie*. En rapprochant ce critère de (I.6), on peut considérer que $G_c = 2\gamma + \text{énergies dissipées durant le processus de fissuration (plasticité en pointe de fissure, frottement sur les lèvres de la fissure,...)}$. Pour une évolution quasi-statique de fissure, un bilan énergétique *complet* permet donc de définir un critère sous forme d'égalité ($G = G_c$) alors que le bilan simple initialement proposé par Griffith conduisait à une *inégalité* ($G \geq 2\gamma$).

I.1.1.c Le lien entre l'approche en contraintes et l'approche énergétique

Ces deux approches conduisent à des critères (I.3) et (I.15) dont la forme générale est :

Il existe une valeur critique de \mathcal{A} , notée \mathcal{A}_c telle que :

$$(I.16) \quad \begin{cases} \mathcal{A} < \mathcal{A}_c \Rightarrow \dot{l} = 0, \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_c \Rightarrow \dot{l} \geq 0. \end{cases}$$

On note qu'un critère de ce type peut encore s'écrire sous forme de relations de complémentarité :

$$(I.17) \quad \dot{l} \geq 0, \quad \mathcal{A}_c - \mathcal{A} \geq 0, \quad (\mathcal{A}_c - \mathcal{A}) \cdot \dot{l} = 0.$$

Le paramètre \mathcal{A} peut être le facteur de concentration de contraintes, auquel cas le critère est *local* et *matériel*, ou le taux de restitution de l'énergie, auquel cas le critère est *global* et *structurel* (G se définit à partir de $P = W - L$ dont le terme W est relatif au matériau et le terme L inclut la géométrie du système).

Ces deux approches, dont nous avons souligné le caractère a priori antagoniste, sont pourtant reliées par la *formule d'Irwin* [IRWIN, 1960] :

$$(I.18) \quad G = \frac{k+1}{2\mu}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu}K_{III}^2.$$

Cette formule est valable en élasticité linéaire isotrope, pour une évolution quasi-statique de fissure (k dépend de l'hypothèse adoptée : déformations ou contraintes planes, μ est le module de cisaillement). Elle donne une légitimité inattendue à l'approche en contraintes. On peut pourtant faire remarquer que l'éventuelle existence d'une petite zone plastique en pointe de fissure remettrait en cause la notion de singularité des contraintes en pointe de fissure, alors qu'elle n'affecterait presque pas l'énergie potentielle P .

La surprenante validité de la formule d'Irwin est éclairée par l'intégrale de Rice [RICE, 1968], classiquement notée J :

$$(I.19) \quad J = \int_{\Gamma} \left(\rho w(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds,$$

où Γ est un contour ouvert orienté (voir FIG. I.1).

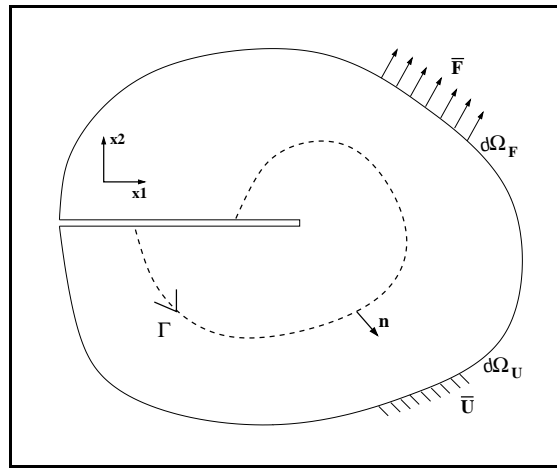


FIG. I.1 – Définition d'un contour autour d'une fissure.

La valeur de cette intégrale J est indépendante du choix du contour Γ en élasticité linéaire, sans forces volumiques et sans moments volumiques appliqués.

L'intégrale J est en réalité la première composante de la partie vectorielle du tenseur moment-énergie [ESHELBY, 1956], simplement calculée sur un contour ouvert. Cette partie vectorielle est appelée premier invariant intégral d'Eshelby et s'écrit :

$$(I.20) \quad J_i = \int_{\text{contour fermé}} \left(\rho w(\varepsilon) n_i - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) ds \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3.$$

En l'absence de forces et de moments volumiques, on peut démontrer la relation suivante :

$$(I.21) \quad \dot{P} = -\dot{l}_k J_k,$$

où les \dot{l}_k (pour $k=1$ à 3) sont les composantes de la vitesse de translation de la fissure. Cette relation s'obtient en substituant au problème d'un solide fixe dans lequel se propage une fissure

à la vitesse \dot{l} celui d'un solide animé d'une vitesse \dot{l} contenant une fissure fixe dans l'espace. Les conditions aux limites sont alors : $\dot{u} = 0$ sur $\partial\Omega_F$ et $\dot{u} = -\dot{l}$ sur $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_F$. L'explicitation de dP/dt , l'utilisation de ces conditions aux limites, de la relation $\sigma = \rho\partial w/\partial\varepsilon$ et de la formule de Green donnent le résultat.

Dans le cas d'une fissure se propageant rectilignement selon la direction x_1 à la vitesse \dot{l} , la relation (I.21) devient :

$$(I.22) \quad \dot{P} = -J\dot{l}.$$

En notant que $\dot{P} = (\partial P/\partial l)\dot{l}$, on trouve :

$$(I.23) \quad G = J.$$

REMARQUE I.2. Pour conclure sur l'intégrale J , on peut souligner :

1. L'intérêt numérique de l'intégrale de Rice : le calcul de J est un moyen simple de calculer le taux de restitution de l'énergie (voir (I.23)) et donc d'utiliser un critère de propagation de fissures basé sur le taux critique de propagation de l'énergie (I.15). L'indépendance de J par rapport au contour de calcul Γ ⁽²⁾ permet de calculer la valeur de cette intégrale *loin* de la pointe de la fissure (sur le contour géométrique de la structure, par exemple). Le résultat n'est pas affecté par des erreurs faites sur les champs statiques et cinématiques à proximité de la pointe de fissure. C'est la méthode numérique la plus pratiquée dans les codes éléments finis.
2. Un éclairage de la formule d'Irwin : l'intégrale de Rice et son équivalence avec le taux de restitution de l'énergie permettent de comprendre pourquoi la formule d'Irwin peut être valide : ce qui se passe dans un voisinage de la pointe de fissure (contour ouvert) peut être traduit par un bilan énergétique global.
3. L'extension de la notion d'intégrale de contour :
 - (a) aux cas élastiques non linéaires [HUTCHINSON, 1968 ; RICE et ROSENGREN, 1968],
 - (b) aux cas dynamiques [ATKINSON et ESHELBY, 1968] (voir paragraphe I.3.2).

I.1.2 Mécanique de la rupture interfaciale

Ce mémoire concerne la fissuration des matériaux composites. Un intérêt particulier est donc porté à la propagation des fissures aux interfaces entre les différents constituants. Divers développements de la mécanique de la rupture ont été réalisés pour ces analyses spécifiques. Ils

⁽²⁾en prenant soin de respecter les hypothèses de validité de cette indépendance : pas de forces ni de moments volumiques appliqués.

peuvent être regroupés sous l'appellation *mécanique de la rupture interfaciale*. Nous en présentons brièvement les principales notions, en soulignant que par rapport au cas homogène, les calculs sont beaucoup plus délicats, principalement du fait d'une mixité intrinsèque des modes de fissuration. Sur ce thème, une synthèse bibliographique détaillée pourra être trouvée dans [MARTIN, 1996].

I.1.2.a L'approche en contraintes

Les premiers résultats concernant le caractère général de la mixité des modes de propagation d'une fissure à l'interface d'un bimatériau sont dus à WILLIAMS [1959], ENGLAND [1965] et ERDOGAN [1965]. Ces auteurs montrent que la non symétrie des déformations de part et d'autre de la fissure génère un cisaillement interfacial qui conduit à l'impossibilité de distinguer les modes I et II de fissuration ; et ce, même pour un chargement à l'infini qui solliciterait une fissure en mode I dans le cas d'un matériau homogène. La forme de la singularité des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure est donnée par une relation du type :

$$(I.24) \quad \sigma(r, \theta) = K f(\theta) r^{-\lambda}.$$

Le facteur K est un facteur d'intensité de contraintes *complexe*, pour lequel les effets de tension et de cisaillement sur la pointe de la fissure sont intrinsèquement liés. La fonction $f(\theta)$ est une fonction d'angle et λ est l'ordre complexe de la singularité ($i^2 = -1$).

$$(I.25) \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\epsilon.$$

La constante ϵ , initialement introduite par RICE et SIH [1965], est caractéristique du bimatériau. En pratique elle reste inférieure à 0,08 [RICE, 1988]. Son expression est :

$$(I.26) \quad \epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right),$$

où β est un des deux *paramètres de Dundurs* [DUNDURS, 1969] qui en deux dimensions vaut :

$$(I.27) \quad \beta = \frac{\mu_1/\mu_2(a_1 - 1) - (a_2 - 1)}{\mu_1/\mu_2(a_1 + 1) + (a_2 + 1)}.$$

Les coefficients a_k ($k = 1, 2$) prennent les valeurs suivantes :

$$(I.28) \quad \begin{cases} a_k = \frac{3 - \nu_k}{1 + \nu_k}, & \text{en contraintes planes, } k = 1, 2, \\ a_k = 3 - 4\nu_k, & \text{en déformations planes, } k = 1, 2, \end{cases}$$

où μ_k et ν_k sont respectivement les modules de cisaillement et les coefficients de Poisson de la phase k .

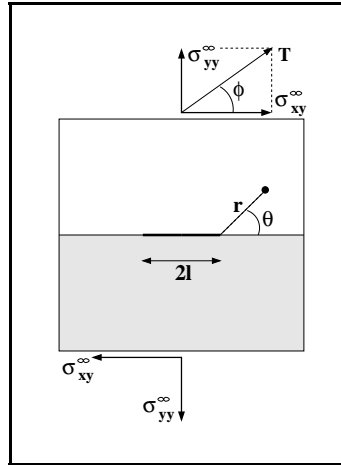


FIG. I.2 – Chargement lointain mixte d'une fissure à l'interface d'un bimatériau.

Le paramètre β est caractéristique d'un couple de matériaux. On peut noter que $\beta = 0$ dans le cas d'un matériau homogène et que β croît avec le rapport μ_1/μ_2 .

Dans le plan de l'interface : existence d'une zone de contact Dans le plan de l'interface ($\theta = 0$), et pour un chargement lointain $T e^{i\phi} = \sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty}$ (FIG. I.2), on a à l'avant du front de fissure :

$$(I.29) \quad (\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty})_{\theta=0} = \frac{K r^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi r}},$$

où K vaut [HUTCHINSON et al., 1987 ; RICE, 1988] (voir aussi le cas homogène, équation (I.2)) :

$$(I.30) \quad K = k T e^{i\phi} l^{-i\epsilon} \sqrt{l} \quad \text{en} \quad [MPa][m]^{1/2-\epsilon}.$$

Soit :

$$(I.31) \quad (\sigma_{yy}^{\infty} + i\sigma_{xy}^{\infty})_{\theta=0} = k T \sqrt{\frac{l}{2\pi r}} e^{i(\phi - \epsilon \ln(l/r))}.$$

On pose :

$$(I.32) \quad \psi = \phi - \epsilon \ln\left(\frac{l}{r}\right),$$

L'angle de mixité des modes de fissuration le long de l'interface. Il dépend de l'angle de la mixité du chargement mais aussi de la mixité intrinsèque des modes de fissuration à l'interface.

En notant $[u]$ le saut de déplacement entre les deux lèvres de la fissure, on a enfin :

$$(I.33) \quad [u] = (u_y + iu_x)_{\theta=\pi} - (u_y + iu_x)_{\theta=-\pi} = \frac{(1 + a_1)/\mu_1 + (1 + a_2)/\mu_2}{2\sqrt{2\pi}(1 + 2i\epsilon) \cosh(\pi\epsilon)} K r^{i\epsilon} \sqrt{r}.$$

L'équation (I.33) montre que lorsque l'on approche de la pointe de fissure, la fréquence des oscillations augmente rapidement (en $\ln(1/r)$) et que la partie imaginaire de $[u]$ peut devenir négative. Cette zone d'interpénétration des lèvres de la fissure doit alors être considérée (et traitée) comme une *zone de contact*.

Cette approche en contraintes conduit à des expressions assez différentes de celles vues dans le cas homogène. Rice montre cependant que, lorsque ϵ est petit, il est possible de définir un paramètre K plus proche de celui de la mécanique de la rupture classique [RICE, 1988]. En effet, le terme $Kr^{i\epsilon} = kTe^{i\phi}\sqrt{l}(r/l)^{i\epsilon}$ est alors sensiblement indépendant de r . Il est donc possible de choisir une valeur *arbitraire* de r , notée \hat{r} , au-delà de laquelle on soit capable de considérer la valeur du champ des contraintes comme relative à une fissure sollicitée selon des modes I et II plus classiques et définis par :

$$(I.34) \quad K_I + iK_{II} = K\hat{r}^{i\epsilon} = kTe^{i\phi}\sqrt{l}\left(\frac{\hat{r}}{l}\right)^{i\epsilon}.$$

La mixité modale est alors définie par $\psi = \arctan(K_{II}/K_I) = \arctan(\sigma_{xy}/\sigma_{yy})_{\theta=0}$, et on a : $K = |K|e^{i\psi}$.

Le paramètre \hat{r} est homogène à une longueur. De son choix dépend la valeur de la mixité modale et en toute rigueur on ne peut donc comparer les facteurs d'intensité de contraintes de deux bimatériaux que s'ils ont été définis avec les mêmes \hat{r} .

I.1.2.b L'approche énergétique

Là encore, la situation est plus complexe que dans le cas homogène. Le taux de restitution de l'énergie s'exprime ici par [MALYSHEV et SALGANIK, 1965] :

$$(I.35) \quad G = \frac{(1 + a_1)/\mu_1 + (1 + a_2)/\mu_2}{16 \cosh^2(\pi\epsilon)} K \bar{K}.$$

Cette approche énergétique permet de définir G indépendamment d'une longueur de référence \hat{r} . Par contre, il est impossible de donner des définitions séparées de G_I et G_{II} (par exemple [TOYA, 1992]).

Il est particulièrement important de remarquer que $G = G(\psi)$. La dépendance du taux de restitution de l'énergie à l'angle de mixité modale a trois conséquences de premier plan :

1. l'écriture d'un critère de Griffith est délicate car ψ varie avec l'avancée de la fissure,
2. la notion de mixité modale dépend du choix des unités,
3. la mesure expérimentale d'un taux de restitution critique de l'énergie comme fonction de l'angle de mixité modale devient particulièrement difficile ($G_c(\psi)$). De plus, la notion de "meilleure résistance à la fissuration" d'un bimatériau par rapport à un autre dépend de la valeur de ψ (voir FIG. I.3).

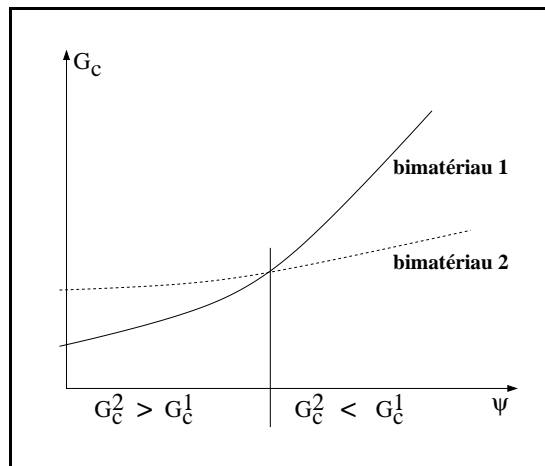


FIG. I.3 – Dépendance du taux critique de restitution de l'énergie par rapport à l'angle de mixité modale.

BILAN DU PARAGRAPHE I.1

Certains avantages évidents de la mécanique linéaire de la rupture ont été soulignés. Cette approche met en évidence un paramètre clé de la fissuration des matériaux : le taux de restitution de l'énergie G . Sa définition thermodynamique (I.14) lui donne une signification physique indiscutable. La formule d'Irwin (I.18) le relie aux facteurs de concentrations de contraintes K et permet ainsi d'analyser la fissuration selon l'angle des champs statiques et cinématiques plus intuitifs pour le mécanicien. Enfin, l'intégrale de Rice J (I.23) offre un moyen simple de calculer numériquement le taux de restitution de l'énergie.

Ces avantages ont fait de la mécanique linéaire de la rupture un outil théorique et numérique dont l'efficacité est indéniable dans de nombreuses situations standards (typiquement les propagations quasi-statiques de fissures dans les matériaux élastiques, homogènes). Cependant, cette approche présente certaines faiblesses qui limitent son utilisation dans les situations mécaniques complexes (dynamique, matériaux dissipatifs, matériaux fortement hétérogènes, ..). Le paragraphe suivant énumère quelques unes des principales faiblesses. Il énonce aussi brièvement les développements qui ont été faits pour y remédier, ainsi que les limites de ces développements.

I.2 Les faiblesses de la mécanique linéaire de la rupture. Quelques tentatives pour y remédier

Une des limitations les plus sévères de la mécanique linéaire de la rupture est son incapacité à prédire l'amorçage des fissures. Trois autres difficultés sont abordées dans ce paragraphe : les évolutions temporelles des fissures (instabilités), les évolutions spatiales (bifurcation, branchement) et les conditions de bord sur les lèvres de la fissure (contact, frottement).

I.2.1 L'amorçage de fissure

Les critères de *propagation* de fissures du type critères de Griffith (I.16) ne peuvent prédire un amorçage de fissure (i.e. lorsque $l = 0$). Cette impossibilité est claire lorsque le critère porte sur le taux de restitution de l'énergie G dont la nature *différentielle* (I.14) est incompatible avec l'absence de préfissure : lorsque $l = 0$, soit la dérivée $\partial P/\partial l$ n'est pas définie, soit elle est nulle pour tout chargement extérieur. Lorsque le critère porte sur le facteur de concentration des contraintes, la situation est identique : la relation (I.2) montre que K est proportionnel à $\sigma_\infty \sqrt{l}$; la formule d'Irwin (I.18) donne alors $G \propto \sigma_\infty^2 l$ et le critère de Griffith indique que le chargement critique $\sigma_\infty^{\text{propa}}$, conduisant à la propagation de la fissure, est proportionnel à $1/\sqrt{l}$. Par conséquent, en l'absence de fissure ($l \rightarrow 0^+$), le chargement nécessaire à la propagation d'une fissure est infini. Ces situations sont en contradiction évidente avec les observations expérimentales qui révèlent des amorçages de fissure pour des chargements *finis*.

Nous évoquons dans ce paragraphe quatre tentatives pour surmonter cette limitation :

1. la définition de critères d'amorçage de fissure,
2. une "revisite" de la mécanique linéaire de la rupture comme un problème de minimum d'énergie due à FRANCFORT et MARIGO [1998],
3. une approche par la mécanique de la rupture *ductile*,
4. une approche par la mécanique de l'endommagement.

I.2.1.a La définition de critères d'amorçage de fissure

Les critères proposés par LEGUILLON et al. [1998] sont des critères basés sur l'énergie potentielle P elle-même plutôt que sur sa dérivée (le taux de restitution de l'énergie). Un résultat de première importance, dû à LEGUILLON [1989], montre en effet que pour une fissure s'amorçant d'une longueur δl (petite devant les autres dimensions du problème) au voisinage d'un point où la singularité est en r^α et où K est le facteur d'intensité de la singularité, on a :

$$(I.36) \quad P(l) - P(l + \delta l) = \delta P = kK^2 \delta l^{2\alpha} \quad \text{où} \quad k > 0.$$

Une condition *nécessaire* de propagation est alors :

$$(I.37) \quad kK^2\delta l^{2\alpha-1} \geq G_c.$$

Il est intéressant de noter que si $\alpha = 1/2$ (i.e. si le point singulier considéré est la pointe de fissure), (I.37) est un critère du type Irwin ($K \geq \sqrt{G_c/k} = K_c$). En supposant qu'il existe un chargement critique pour lequel une fissure s'amorce, et donc une valeur critique de K , notée K_c , un critère du type $K \geq K_c$ conduit à définir une longueur caractéristique de fissuration :

$$(I.38) \quad \bar{\delta}l = \left(\frac{G_c}{K_c^2 k} \right)^{1/(2\alpha-1)}.$$

L'amorçage de la fissuration se fait donc de manière discontinue : on passe d'une longueur de fissure nulle à une longueur $\bar{\delta}l > 0$. En pointe de fissure ($\alpha = 1/2$), la longueur $\bar{\delta}l$ ne peut plus être définie (membre de droite de (I.38) indéterminé) : ce critère ne permet pas de prévoir la propagation *progressive* des fissures préexistantes.

Une approche identique où le critère de Griffith différentiel est remplacé par un critère incrémental a été proposée par HASHIN [1996].

Ces développements donnent des résultats intéressants mais les bilans incrémentaux proposés ne permettent pas un *suivi continu* de l'amorçage progressif des fissures et de leur propagation quasi-statique.

I.2.1.b Une "revisite" de la mécanique de la rupture comme un problème de minimum d'énergie

Le principe de cette approche proposée par FRANCFORT et MARIGO [1998] est de trouver, pour un chargement donné, l'état de fissuration qui minimise l'énergie de la structure parmi tous les états de fissuration possible. L'énergie de la structure comprend, à la manière de Griffith, une énergie de surface. L'ensemble des états de fissuration possibles est défini par : $\mathcal{F} = \{\Gamma \subset \bar{\Omega} \mid \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) < +\infty\}$, où $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$ est la $(N - 1)$ -mesure de Hausdorff de Γ . C'est-à-dire que l'on impose seulement aux fissures, outre une certaine régularité, d'être d'aire finie en 3D et de longueur finie en 2D. Pour un corps Ω_Γ dans un état de fissuration Γ , soumis à des déplacements imposés \bar{U} assez réguliers sur sa frontière $\partial\Omega_U$, il s'agit alors de résoudre le problème de minimum suivant :

$$(I.39) \quad E(\Gamma, U) = \min_{(u=\bar{U}_{\text{sur}} \partial\Omega_U \setminus \{\Gamma \cap \partial\Omega\})} \int_{\Omega_\Gamma} \rho w(\varepsilon(u)) dx + \int_{\Gamma} k(x, n(x)) d\mathcal{H}^{N-1}(x),$$

où k est une densité d'énergie de surface et $n(x)$ la normale unitaire extérieure de la fissure au point x .

La mise en œuvre numérique de cette approche est réalisée par BOURDIN [1998], BOURDIN et al. [2000] et son application à la fissuration des matériaux composites est proposée par BILTERYST et MARIGO [1999], BILTERYST [2000].

L'intérêt de cette approche énergétique est indéniable : elle conserve les principes fondamentaux de la théorie de Griffith tout en permettant la prédiction de l'amorçage des fissures ainsi que le suivi de leur propagation. Cependant les coûts de calculs numériques liés à cette méthode semblent pénalisants, notamment pour des situations géométriques complexes.

I.2.1.c La mécanique de la rupture ductile

Il s'agit d'une approche *micromécanique locale* qui s'intéresse aux mécanismes physiques locaux qui conduisent à la fissuration. Elle diffère en cela de la mécanique linéaire de la rupture (ou mécanique de la rupture fragile) dont nous avons déjà mentionné le caractère *global*.

La fissuration dans les métaux peut, par exemple, être décrite par les trois étapes suivantes (par exemple [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1978] ou [LEBLOND, 1998]) :

1. décohésion de la matrice métallique autour d'inclusions ou rupture d'inclusions qui conduisent à la *création* de microcavités,
2. croissance des cavités par écoulement plastique de la matrice,
3. coalescence des cavités jusqu'à former des macrofissures.

En réalité, la majorité des analyses menées sur l'amorçage des fissures (point 1.) dans le cadre de la mécanique de la rupture ductile, sont le plus souvent phénoménologiques. Par contre, les effets de la croissance des fissures sont étudiés en détail au travers de la recherche du comportement macroscopique d'un matériau plastique *poroux*. Cette approche s'axe autour des travaux de GURSON [1975]. Il s'agit de définir un comportement élasto-plastique progressivement *adoucissant* lorsque la fraction volumique de porosité croît. La pertinence de ces modèles est soulignée, par exemple, par les simulations numériques de TVERGAARD et NEEDLEMAN [1984]. La rupture en tronc de cône d'un barreau cylindrique soumis à un chargement axial est parfaitement décrite grâce à l'utilisation du modèle de Gurson : striction au centre du barreau, naissance d'une fissure perpendiculaire au chargement au centre de la zone strictionnée, propagation rectiligne vers les bords libres, puis bifurcation à 45° à proximité des bords libres.

Cependant, ces approches ne répondent pas vraiment à la question de l'amorçage des fissures. La description de leur coalescence reste aussi à préciser.

REMARQUE I.3. Un caractère général des approches micromécaniques de la fissuration est qu'elles s'intéressent à la définition de *lois de comportement*, plutôt qu'à la définition de *critères* de propagation des fissures, comme c'est le cas de la mécanique linéaire de la rupture.

I.2.1.d La mécanique de l'endommagement

En cherchant à définir des lois de comportement, la mécanique de l'endommagement [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1985 ; KACHANOV, 1986] rejoint l'approche précédente. Elle se base sur un outil aujourd'hui classique dans l'écriture des lois de comportement : la thermodynamique des processus irréversibles [GERMAIN et al., 1983]. Elle définit une variable interne supplémentaire, habituellement notée D , qui traduit l'endommagement du matériau : $D = 0$ le matériau est sain, $D = 1$ le matériau est totalement endommagé. La variable D peut représenter par exemple le rapport de la surface de cavités sur la surface de matériau sain dans la section d'un barreau (penser à la fraction de porosités de Gurson). D'autres définitions sont possibles : rapport du module d'Young à l'instant t sur celui du matériau sain, etc.

L'engouement pour cette approche, relativement récente, a donné lieu à de nombreux développements (endommagement anisotrope, définition tensorielle de D , couplage avec des lois de comportement complexes : visco-élasto-plasticité avec endommagement, endommagement par fluage, endommagement oligo-cyclique, à grand nombre de cycle, en température, ...) dont l'efficacité reste incontestée dans de nombreuses situations. Cependant, certaines faiblesses sont aujourd'hui soulignées : l'écriture de lois de comportement avec endommagement, parce qu'elles débouchent sur un problème "mal posé" du fait de l'adoucissement du comportement, nécessite la plupart du temps l'introduction de *longueurs caractéristiques* auxquelles il est parfois difficile de donner une signification physique ; la notion de surface de rupture disparaît.

I.2.2 L'évolution temporelle des trajets de fissuration

Un problème délicat de la mécanique linéaire de la rupture est la propagation *instable* des fissures. Pour le cas simple d'un solide élastique homogène isotrope, en deux dimensions, soumis à un chargement lointain σ_∞ perpendiculaire à une fissure de longueur $2l$, nous rappelons que l'on a ((I.2), (I.14) et (I.18)) :

$$(I.40) \quad G = -\frac{\partial P}{\partial l}(l) \quad \# \quad \sigma_\infty l.$$

Deux cas se présentent :

1. P est convexe :

$$(I.41) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial l}(l) \right|_{\sigma_\infty = \text{const.}} = - \left. \frac{\partial^2 P}{\partial l^2}(l) \right|_{\sigma_\infty = \text{const.}} \leq 0.$$

Lorsqu'un chargement critique σ_∞^c est atteint tel que $G = G_c$, alors la fissure se propage (i.e. l croît) et l'équation (I.41) indique que G décroît. On passe ainsi en dessous du seuil ($G < G_c$) et le chargement doit être augmenté pour poursuivre la fissuration. La propagation de la fissure est stable, sa progression est connue.

2. P est concave :

$$(I.42) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial l}(l) \right|_{\sigma_{\infty}=\text{const.}} = - \left. \frac{\partial^2 P}{\partial l^2}(l) \right|_{\sigma_{\infty}=\text{const.}} \geq 0.$$

A contrario, lorsque σ_{∞}^c est atteint, G continue de croître. On reste ainsi au-delà du seuil ($G > G_c$) même lorsque le chargement critique reste maintenu. La propagation de la fissure est instable et la longueur finale de fissure ne peut être connue. Dans ce cas des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour déterminer jusqu'où la fissure se propage.

En se basant sur l'analyse de la dérivée seconde de l'énergie élastique, ce problème de propagation instable des fissures et les problèmes associés (bifurcation et post-bifurcation) peuvent être étudiés pour des matériaux fragiles ou plastiques [NGUYEN, 1987], ainsi que pour des matériaux composites [OUSSET, 1999] (dé laminage dans les stratifiés). Il semble cependant délicat de proposer mieux que des conditions *nécessaires* de stabilité basées sur la convexité stricte de l'énergie élastique.

La notion de stabilité de la fissuration est étudiée en détails (et selon l'angle des modèles de zone cohésive) au chapitre III.

I.2.3 L'évolution spatiale des trajets de fissuration

Le critère de Griffith permet (éventuellement) de prédire l'intensité du chargement conduisant à la propagation de la fissure et la longueur d'avancée de la fissure ; il ne permet pas de prédire la nouvelle *direction* d'évolution de cette fissure. Le suivi spatial d'une fissure sollicitée en mode mixte est donc impossible par un tel critère.

La définition de critères de branchement a donné lieu à de nombreuses controverses. Il est cependant aujourd'hui admis qu'une fissure sollicitée en mode mixte branche dans une direction qui conduit à sa *propagation en mode I pur*. La raison classiquement invoquée est le principe de symétrie locale [GOLSTEIN et SALGANIK, 1974]. Des arguments simples peuvent aussi être donnés (on note K_I et K_{II} les facteurs de concentration de contraintes avant branchement et K_I^* et K_{II}^* ceux après branchement). Le premier, dû à AMESTOY et al. [1979] et AMESTOY et LEBLOND [1979], peut se résumer de la manière suivante : s'il existe du mode II, la fissure branche instantanément ; or en mode mixte I+II, la fissure après un branchement *initial* se propage rectilignement ; donc au-delà de ce branchement initial, on a $K_{II}^* = 0$ quelle que soit la longueur de propagation de la fissure ($K_{II}^*(l_{\text{branchement}} + \delta l_{\text{branchement}}^{\text{post}}) = 0 \forall \delta l_{\text{branchement}}^{\text{post}}$) et en particulier lorsque cette longueur tend vers zéro ($\delta l_{\text{branchement}}^{\text{post}} \rightarrow 0$) ; d'où le critère $K_{II}(l_{\text{branchement}}) = 0$. Un autre argument, plus pragmatique, consiste à dire qu'*expérimentalement* on mesure : $K_{Ic} \ll K_{IIc}$ et $K_{Ic} \ll K_{IIIc}$. En deux dimensions, lorsque la longueur post-bifurcation est suffisamment petite, on a [LEBLOND et AMESTOY, 1985 ; LEGUILLON, 1993] :

$$(I.43) \quad K_{II}^* = K_{II}^*(K_I, K_{II} ; \phi).$$

L'application du critère :

$$(I.44) \quad K_{II}^*(K_I, K_{II}; \phi) = 0,$$

conduit alors à l'expression de l'angle de branchement en fonction du rapport de mixité K_{II}/K_I :

$$(I.45) \quad \phi = f(K_{II}/K_I).$$

D'autres critères de branchement ont été définis. On peut citer le très intéressant critère 2D récemment proposé par GURTIN et PODIO-GUIDUGLI [1998] : la direction de branchement est celle qui maximise l'énergie dissipée en pointe de fissure lors de la rupture des liaisons cohésives.

Les mises en œuvre numériques de ces critères sont plus rares. Pour le principe de symétrie locale, STONE et BABUKA [1998] proposent un estimateur d'erreur de direction a posteriori.

L'analyse des conditions de déviation d'une fissure au niveau d'une interface entre deux matériaux est un point largement développé dans la suite de ce mémoire. Les auteurs qui font référence sur le thème sont précisés à cette occasion.

I.2.4 Les conditions de bords libres sur les lèvres de la fissure

En mécanique de la rupture, les fissures créées présentent des conditions de bords libres. Si $n(x)$ est la normale unitaire sortante au point x situé sur une lèvre de fissure, on a : $\sigma(x) \cdot n(x) = 0$. Cette hypothèse doit être revue, par exemple, dans les situations suivantes :

1. les trajets de chargement considérés conduisent à une situation de refermeture de la fissure dont les lèvres se trouvent alors en compression : une situation de contact unilatéral doit être envisagée ($(\sigma(x) \cdot n(x)) \cdot n(x) \leq 0$),
2. la fissure se propage en mode II ou III sous pression normale : les effets du frottement ne peuvent plus être négligés ($\|\sigma(x) \cdot n(x) - ((\sigma(x) \cdot n(x)) \cdot n(x))n(x)\| \geq 0$),
3. la fissure se propage à l'interface d'un bimatériau et il existe une zone d'interpénétration des lèvres de la fissure (voir l'équation (I.33)).

Le modèle interfacial de COMNINOU [1977a] prend en compte des conditions de contact unilatéral pour la situation 3. Ce modèle doit être utilisé dans une zone proche de la pointe de fissure, tandis que la solution (I.33) reste valide dans une zone éloignée. Il indique que les contraintes de traction ne sont plus singulières au voisinage de la pointe de fissure ; l'ordre de la singularité des contraintes de cisaillement reste cependant égal à 1/2. La prise en compte du frottement dans la zone proche diminue l'ordre de cette singularité [COMNINOU, 1977b ; LEGUILLON, 1999].

Le paragraphe suivant montre qu'il est judicieux dans certaines situations d'envisager non seulement des conditions de contact unilatéral et de frottement sur les lèvres de la fissure, mais aussi des forces de résistance supplémentaires (dans les directions normale et éventuellement tangentielle) dans une zone d'élaboration de la fissure.

BILAN DU PARAGRAPHE I.2

De nombreux efforts ont été réalisés pour pallier certaines faiblesses de la mécanique de la rupture. Ces travaux ont eux aussi leurs limitations. On retiendra pour l'essentiel qu'ils ne permettent pas — soit sur le plan théorique, soit à des coûts numériques abordables — la simulation d'un processus de fissuration complet : de l'amorçage des fissures jusqu'à leur propagation éventuellement instable. Cependant l'atout majeur de la mécanique de la rupture reste la manipulation de paramètres énergétiques dont la signification physique est indiscutable (notamment le taux de restitution de l'énergie G).

Les modèles de zone cohésive que nous présentons ci-dessous permettent de conserver ces paramètres énergétiques et de simuler des processus de fissuration complexes.

I.3 Les modèles de zone cohésive

L'analyse de la fissuration des matériaux peut se faire par d'autres approches que la mécanique de la rupture et notamment par celles basées sur la notion de *zone cohésive*. Cette notion offre de remarquables perspectives dans le domaine de l'analyse mécanique des amorçages et des propagations de fissures. Elle permet d'envisager des situations mécaniques très complexes (matériaux multiphases, forte hétérogénéité de la microstructure, mixité globale et locale des modes de sollicitation, fissuration tridimensionnelle, évolutions dynamiques instables, . . .), tout en conservant une compréhension fine de la physique à l'échelle locale. Cette notion de zone cohésive établit une synthèse des deux principales classes de modèles de fissuration : ceux utilisant des critères énergétiques (taux critique de restitution de l'énergie, . . .) et ceux fondés sur des critères de contrainte maximale (cisaillement maximal en mode II, . . .). **L'évolution de la fissuration est décrite** grâce à des critères locaux, souvent énergétiques, et **en termes de relation entre la contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure σ et la discontinuité de déplacement $[u] = u^+ - u^-$** où u^+ et u^- sont les déplacements respectifs de chaque lèvre de la fissure (FIG. I.4). L'amorçage de la fissuration résulte alors naturellement du trajet de chargement et les champs cinématiques et sthéniques sont connus en chaque point de la structure.

Cette notion de zone cohésive, initialement introduite par DUGDALE [1960], BARENBLATT [1962] et RICE [1968], n'a concerné dans un premier temps que le comportement des efforts normaux agissant sur les lèvres de la fissure (force de traction et/ou de compression $(\sigma \cdot n) \cdot n$ en fonction de l'ouverture de la fissure). La prise en compte du cisaillement dans les modèles de zone cohésive est apparue avec les modèles de IDA [1972] sur la fracture dynamique de

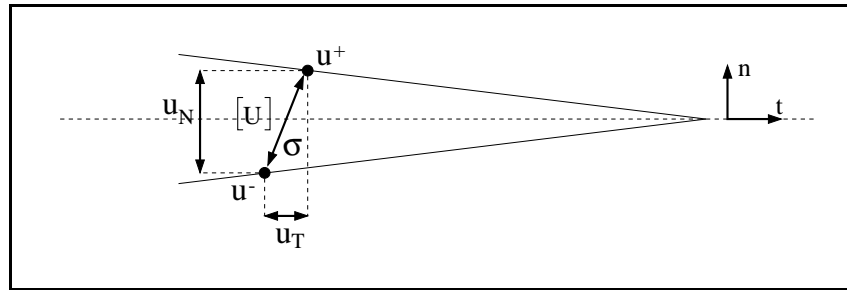


FIG. I.4 – Contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure et discontinuité du déplacement.

la couche terrestre et de PALMER et RICE [1973] concernant le cisaillement sous poids propre d'une couche d'argile inclinée. L'introduction de conditions de contact unilatéral a été ajoutée par FRÉMOND [1982a]. La notion de zone cohésive a été étendue à la fin des années 1980 par NEEDLEMAN [1987] en proposant des modèles phénoménologiques de décohesion indépendants du trajet de chargement et inspirés des travaux atomistiques de ROSE et al. [1981] et ROSE et al. [1983] portant sur les bimétalliques. Ces modèles, parfaitement adaptés à devenir de véritables modèles de fissuration, prennent en compte dès 1990 (par exemple [TVERGAARD, 1990a ; NEEDLEMAN, 1992]) l'irréversibilité du comportement local (un endommagement surfacique). TVERGAARD [1990a], en considérant les évolutions normale *et* tangente du comportement interfacial, propose l'introduction d'un frottement de Coulomb post-décohesion, puis celle des contraintes résiduelles de frettage [TVERGAARD, 1991]. Les perspectives ouvertes par ces travaux sont mises aujourd'hui en valeur par de récents développements analytiques et numériques concernant les propagations (éventuellement dynamiques) de fissures [XU et NEEDLEMAN, 1994 ; COSTANZO et WALTON, 1997 ; XU et al., 1998 ; NEEDLEMAN et ROSAKIS, 1999]. Ils consistent en particulier à considérer chaque point d'une discrétisation spatiale comme une "zone" cohésive à part entière. Pour la première fois il est ainsi possible de simuler de manière très efficace l'amorçage et la propagation de fissures non seulement aux interfaces entre les solides mais aussi dans les solides eux-mêmes, en prenant en compte la physique de la décohesion à l'échelle la plus fine. Plus précisément, le formalisme des zones cohésives a permis l'analyse de la fissuration quasi-statique des matériaux élasto-plastiques (par exemple [NEEDLEMAN, 1990 ; TVERGAARD et HUTCHINSON, 1992]) et celle de leur fissuration dynamique [XU et NEEDLEMAN, 1994]. Cette analyse a été ensuite étendue aux matériaux élasto-viscoplastiques [SIEGMUND et NEEDLEMAN, 1997], ainsi qu'aux matériaux composites [SIEGMUND et al., 1997] (condition de déviation de la fissure à l'interface en fonction du rapport des énergies de décohesion du matériau initialement fissuré et de l'interface), [XU et al., 1997] (rôle des hétérogénéités sur le branchement et le ralentissement des fissures pour des matériaux élastiques), [NEEDLEMAN et ROSAKIS, 1999] (effet de la tenue interfaciale sur la propagation dynamique rapide des fissures à l'interface d'un bimatériau).

Sur le plan national, les travaux les plus significatifs sur le thème ont été menés par FRÉMOND [1982a], MICHEL et SUQUET [1994], CANGÉMI et al. [1996], RAOUS et al. [1999] et CHABOCHE

et al. [1997a] en ce qui concerne les approches micromécaniques de la fissuration des matériaux composites ; et par ALLIX et al. [1989] et ALLIX et al. [1995] pour l'endommagement des matériaux composites à l'échelle du pli.

Les travaux pionniers de Barenblatt et de Dugdale sont brièvement présentés ci-dessous, ainsi que les notions mécaniques utiles à l'analyse de la fissuration par des modèles de zone cohésive. Nous soulignons l'intérêt de ces modèles vis-à-vis des lacunes de la mécanique de la rupture énoncées au paragraphe I.2. Nous indiquons les liens qu'il existe entre ces modèles et la mécanique de la rupture, d'abord par une approche en contraintes donnant l'équivalence entre les critères de Barenblatt et de Griffith, puis par une approche énergétique basée sur l'intégrale de taux de flux d'énergie. Enfin les principaux modèles de zone cohésive cités ci-dessus sont présentés.

I.3.1 Les modèles pionniers et les avantages de la notion de zone cohésive

I.3.1.a Le modèle de Barenblatt

Le formalisme relatif à la notion de zone cohésive peut être attribué à BARENBLATT [1962]. L'origine de son modèle consiste à prendre en compte les forces atomiques qui agissent sur la fissure au voisinage de son front, c'est-à-dire à l'endroit où la distance entre les lèvres de la fissure est faible et les forces d'attraction mutuelles sont grandes. Ces forces d'attraction évoluent de la manière suivante : "lorsque la distance entre les faces opposées croît, l'intensité des forces de cohésion atteint rapidement un maximum élevé qui s'approche du module d'Young, puis décroît rapidement". Physiquement, cette remarque de Barenblatt doit être rapprochée, dans le cas d'un matériau volumique, des potentiels classiques d'interaction atomique dont l'évolution en fonction de la distance entre les plans atomiques est donnée schématiquement sur la FIG. I.5. Pour les interfaces entre bimatériaux, une vérification expérimentale de ce comportement est donnée dans le cas des métaux dans [ROSE et al., 1981].

Barenblatt souligne que, par la méthode énergétique de Griffith, le rayon de courbure en pointe d'une fissure elliptique dans un milieu infini élastique est trouvé de l'ordre de grandeur des distances inter-atomiques ; ce qui invalide un calcul basé sur des hypothèses de Mécanique des Milieux *Continus*. La longueur de fissure l obtenue par cette méthode est cependant correcte. Il en conclut que la prise en compte des forces de cohésion n'est pas nécessaire pour déterminer la longueur d'une fissure à l'équilibre. Cependant la distance pour laquelle les forces de cohésion deviennent non négligeables est comparable à celle le long de laquelle la forme du front de fissure varie. *La longueur de la fissure à l'équilibre peut donc être déterminée sans considérer les forces de cohésion, mais pas sa forme.* Cette vision, sans remettre en cause les bilans énergétiques globaux, souligne l'importance des champs cinématiques et statiques locaux.

La théorie de la fissuration de Barenblatt repose sur deux hypothèses :

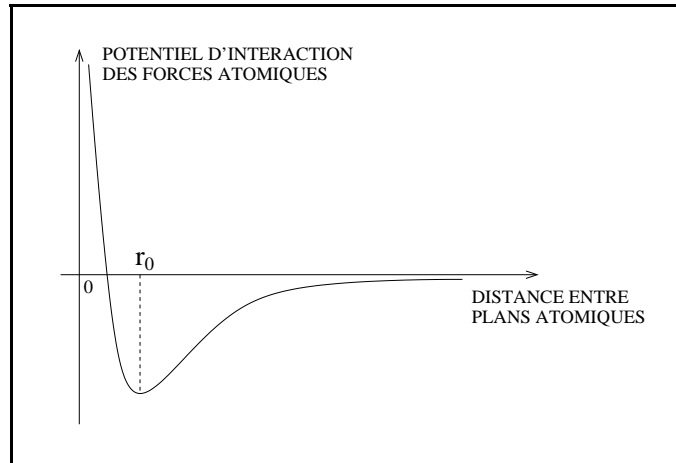


FIG. I.5 – Evolution schématisée des potentiels d'interaction atomique en fonction de la distance entre les plans atomiques.

1. hypothèse 1 : l'aire sur laquelle agissent les forces de cohésion est négligeable devant l'aire de la fissure,
2. hypothèse 2 : la forme de la fissure (et donc la distribution *locale* des forces de cohésion) près du front de fissure ne dépend pas du chargement appliqué.

Ces deux hypothèses conduisent à définir le "module de cohésion" de Barenblatt :

$$(I.46) \quad H = \int_0^d \frac{R(x)}{\sqrt{x}} dx,$$

où $R(x)$ est l'intensité des forces de cohésion et d la taille de la zone cohésive (FIG. I.6). Le critère d'avancée de la fissure est alors (en mode I et sous les deux hypothèses énoncées) :

$$(I.47) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} K_I \geq H.$$

I.3.1.b Le modèle de Dugdale

Ce modèle concerne la fissuration sous traction normale de fines couches de matériaux ductiles présentant une plasticité fortement localisée en pointe de fissure [DUGDALE, 1960]. La force de cohésion est choisie constante en fonction de l'ouverture normale et prend une valeur σ_0 . Ce comportement, équivalent à celui qu'aurait un solide idéalement rigide-plastique, est valable jusqu'à une valeur critique δ_C de l'ouverture de fissure. Au-delà de δ_C la force de cohésion est nulle. Le paramètre δ_C peut se définir en fonction de la longueur d de zone cohésive (voir FIG. I.6). Cette définition est valable pour tous les modèles de zone cohésive en deux dimensions, y compris ceux ayant comme variable le *vecteur* saut de déplacement $[u]$ (l'ouverture

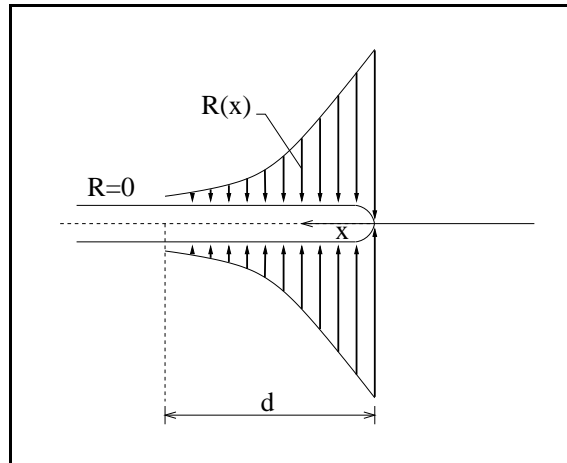


FIG. I.6 – Définition de la zone cohésive en pointe de fissure [BARENBLATT, 1962].

$u_N = [u] \cdot n$ et le glissement $u_T = [u] - u_N \cdot n$, voir équation (II.5) :

$$(I.48) \quad \delta_C = \|[u(d)]\|.$$

L'énergie consommée dans la zone cohésive par unité d'avancée de fissure, lors d'une propagation à vitesse constante, est ainsi simplement :

$$(I.49) \quad E_D = \sigma_0 \delta_C.$$

I.3.1.c Les avantages des modèles de zone cohésive par rapport à la mécanique de la rupture et à ses alternatives

Les avantages présentés ci-dessous proviennent en grande partie de la différence suivante ⁽³⁾ : la mécanique de la rupture s'intéresse à la définition de *critères* de propagation, alors que les approches micromécaniques — auxquelles appartiennent les modèles de zone cohésive — s'intéressent à la recherche de *lois de comportement* pour la fissuration. La possibilité d'amorçage de fissure et de suivi de leur propagation découle de cette connaissance de l'état du système pour *chaque* valeur des variables de la fissuration (champs de la discontinuité de déplacement le long de la fissure, ...). Ainsi, parmi les alternatives à la mécanique de la rupture présentées au paragraphe I.2, celles qui sont les plus proches des modèles de zone cohésive sont les approches micromécaniques (mécanique de la rupture ductile, mécanique de l'endommagement surfacique).

L'amorçage des fissures L'amorçage des fissures est possible avec les modèles de zone cohésive. Elle émerge naturellement des trajets de chargement et des caractéristiques du com-

⁽³⁾ voir REMARQUE (I.3)

portement de la zone cohésive sans hypothèses ad hoc supplémentaires concernant un critère d’amorçage. Sur ce point, les avantages des modèles de zone cohésive par rapport aux alternatives à la mécanique de la rupture sont les suivants :

1. La notion de zone cohésive offre la possibilité d’un suivi continu de la propagation de fissure (sous réserve d’hypothèses données au chapitre III) ; ce que ne permettent pas les critères d’amorçage basés sur des bilans énergétiques incrémentaux.
2. Le coût numérique de l’utilisation des modèles de zone cohésive est lié à celui des itérations d’équilibre nécessaires pour l’application de conditions aux limites qui dépendent de la solution :

$$\sigma \cdot n = R([u]) \quad \text{sur les lèvres de la fissure.}$$

Ce coût est cependant plus modeste que celui des méthodes de recherche de l’état de fissuration qui minimise l’énergie $E(\Gamma, U)$ de (I.39) (voir [BOURDIN et al., 2000]).

3. En ce qui concerne la mécanique de la rupture ductile, des modifications successives du modèle de GURSON [1977] ont été proposées ([TVERGAARD, 1981 ; MATHUR et al., 1996] pour des versions locales du modèles et [LEBLOND et al., 1994 ; TVERGAARD et NEEDLEMAN, 1995] pour des versions non locales). Elles ont conduit à des simulations numériques de croissance-coalescence de cavités et de propagations de fissures dans les matériaux ductiles tout à fait conformes aux observations expérimentales [TVERGAARD et NEEDLEMAN, 1984] ou d’intérêt prospectif évident [TVERGAARD et NEEDLEMAN, 1995, 1997 ; NEEDLEMAN et TVERGAARD, 1998]. Ces modèles ne permettent cependant pas véritablement d’amorcer la fissuration : les fissures se propagent soit à partir de pré-fissures, soit à partir de microcavités (matériaux poreux par exemple).⁽⁴⁾
4. En mécanique de l’endommagement, la notion d’évolution de l’endommagement — comme celle de la porosité dans le modèle de Gurson — est liée à l’adoucissement du comportement. Cette notion est essentielle dans les modèles de zone cohésive (la force de résistance sur les lèvres de la fissure doit s’annuler pour une ouverture de fissure suffisamment grande). Ces deux modèles sont donc relativement proches. Les modèles de zone cohésive ont l’avantage de réintroduire la notion de *surface* de rupture. Ainsi l’adoucissement présent dans ces modèles est qualifiable d’endommagement surfacique. La fissure est alors une *surface matérielle*, c’est-à-dire une surface ayant un comportement thermodynamique propre. Ce caractère endommageable est fortement marqué dans le modèle de zone cohésive présenté au chapitre II.

⁽⁴⁾Une voie de recherche intéressante serait d’associer un modèle de zone cohésive (dont les paramètres peuvent être issus de travaux atomistiques) pour amorcer la création de cavités à un modèle de type Gurson modifié pour le calcul de la croissance et de la coalescence des cavités ainsi créées. La propagation de la microfissure résultant de cette coalescence peut ensuite s’opérer via un modèle de zone cohésive dont les paramètres sont issus cette fois-ci de l’analyse micromécanique précédente.

L'évolution temporelle des trajets de fissuration Le suivi temporel des fissures est un point délicat des modèles de zone cohésive comme en mécanique de la rupture [CHABOCHE et al., à paraître]. Cependant, l'approche par zones cohésives permet une étude fine des propagations instables de fissure (*voir* chapitre III). Une condition d'unicité pour les problèmes quasi-statiques de fissuration de solides élastiques par des modèles de zone cohésive a ainsi pu être obtenue par l'auteur (*voir* théorème III.1). La rapidité d'adoucissement du comportement de la zone cohésive (constante de Lipschitz de la courbe contrainte-saut de déplacement) est un paramètre essentiel de cette condition d'unicité. Ainsi, pour un problème donné, il est *possible* d'adapter le modèle de zone cohésive pour garantir une propagation stable des fissures. Cette adaptation peut se faire soit par une modification des coefficients du modèle (augmentation de l'ouverture critique δ_C en particulier), soit par l'introduction d'ingrédients physiques supplémentaires dans le comportement cohésif [MONERIE et al., 1998 ; MONERIE et RAOUS, 2000] : viscosité [FRÉMOND, 1985], formulation dynamique,...

L'évolution spatiale des trajets de fissuration Le suivi spatial des fissures est évident aux interfaces : l'interface entre deux matériaux est une surface de "guidage" pour les fissures. En ce qui concerne la fissuration des solides eux-mêmes, aucun critère de branchement n'est nécessaire dans le cas d'une fissuration par des modèles de zone cohésive. Il s'agit d'un avantage fort par rapport à la mécanique de la rupture. L'idée, largement détaillée dans [XU et NEEDLEMAN, 1994 ; XU et al., 1997], est de considérer chaque point d'un maillage éléments finis comme une "zone" cohésive. Comme dans le cas des zones cohésives surfaciques, le trajet de fissuration résulte naturellement du chargement. L'utilisation de cette méthode reste cependant délicate : la dépendance de la fissuration au maillage nécessite l'utilisation de maillages extrêmement fins et "isotropes". Ce thème de recherche mérite une attention particulière.

Les conditions de bords Ces conditions ne sont évidemment plus des conditions de bords libres dans le cas des modèles de zone cohésive. Ces modèles permettent la prise en compte de nombreux phénomènes physiques sur les lèvres de la fissure : frottement, usure, contact unilatéral, etc (*voir* modèle proposé au chapitre II).

En conclusion, la notion de zone cohésive se révèle être extrêmement efficace dans l'analyse de l'amorçage et de la propagation des fissures, que ce soit aux interfaces entre constituants ou dans les solides eux-mêmes. Elle permet notamment de pallier certaines lacunes de la mécanique de la rupture et offre la possibilité d'introduire davantage de physique dans le processus de fissuration (temps d'activation, usure, frottement, ...). Cette notion présente cependant une difficulté : la nécessité de définir une longueur caractéristique. Cette nécessité est liée à l'absence de notion de *déformation* sur la surface matérielle, remplacée par celle de discontinuité de déplacement. Cette longueur caractéristique peut être par exemple la taille de la zone d'élaboration de la fissure ou l'épaisseur de l'*interphase* séparant les constituants des matériaux com-

positives. Il est d'ailleurs fréquemment avancé que la notion de surface matérielle de fissuration convient mieux aux matériaux fragiles. Elle convient en réalité à tous les matériaux présentant une zone d'élaboration de fissure petite devant la longueur de fissure (*voir* l'hypothèse 1 de Barenblatt) : matériaux à plasticité très localisée par exemple.

Les avantages de la notion de zone cohésive sont d'autant plus intéressants qu'elle permet des bilans énergétiques identiques à ceux proposés par la mécanique de la rupture, ainsi que nous le soulignons dans le paragraphe suivant.

I.3.2 Le lien entre les modèles de zone cohésive et la mécanique de la rupture

I.3.2.a Equivalence des critères de fissuration de Griffith et de Barenblatt

L'équivalence de ces deux critères est due à une analyse en contraintes de WILLIS [1967] dans le cas des déformations planes. Le critère de Griffith (I.6) s'exprime en mode I (en utilisant la formule d'Irwin (I.18)) par :

$$(I.50) \quad \frac{1-\nu}{2\mu} K_I^2 \geq 2\gamma.$$

Nous rappelons le critère de Barenblatt (I.47) en mode I :

$$(I.51) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} K_I \geq H,$$

et l'expression du module de cohésion H :

$$(I.52) \quad H = \int_0^d \frac{R(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Ainsi, si l'égalité :

$$(I.53) \quad 2\gamma = \frac{1-\nu}{\mu\pi} H^2$$

est vraie, alors les deux critères (I.50) et (I.51) sont équivalents. En utilisant les deux hypothèses de Barenblatt et l'hypothèse supplémentaire suivante⁽⁵⁾ :

$$(I.54) \quad \frac{1-\nu}{\mu\pi} \sqrt{x} \int_0^d \frac{R([U(s)])}{\sqrt{s(s-x)}} ds = \mathcal{O}(1) \quad \text{si } x = \mathcal{O}(d),$$

WILLIS [1967] montre que l'on a :

$$(I.55) \quad 2\gamma = \frac{1-\nu}{\mu\pi} H^2 (1 + \mathcal{O}(\frac{d}{l})).$$

⁽⁵⁾qui semble mécaniquement acceptable [WILLIS, 1967].

Ainsi, la première hypothèse de Barenblatt ($d \ll l$) assure l'équivalence des deux critères. L'équation (I.55) est d'ailleurs annoncée par BARENBLATT [1962] sans le terme complémentaire en $\mathcal{O}(d/l)$.

Il est à noter que l'expression (I.55) se généralise dans le cas d'une propagation dynamique de fissure de la manière suivante :

$$(I.56) \quad 2\gamma = \frac{\left(\dot{l}/c_2\right)^2 \sqrt{1 - \left(\dot{l}/c_1\right)^2}}{D(\dot{l})\mu\pi} H^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{d}{l}\right)\right),$$

où $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ sont respectivement les vitesses des ondes de dilatation et de cisaillement et $D(\dot{l})$ vaut :

$$(I.57) \quad D(\dot{l}) = 4\sqrt{\left[1 - \left(\dot{l}/c_1\right)^2\right] \left[1 - \left(\dot{l}/c_2\right)^2\right] - \left[2 - \left(\dot{l}/c_2\right)^2\right]^2}.$$

Les modèles de Griffith et de Barenblatt sont donc équivalents au premier ordre en d/l . Il est possible d'étendre cette équivalence par une approche énergétique et d'établir l'égalité entre l'énergie de décohésion (moralement l'aire sous la courbe $\sigma([u])$) et le taux de restitution de l'énergie, ainsi que nous l'indiquons ci-dessous.

I.3.2.b Egalité de l'énergie de décohésion et du taux de restitution de l'énergie

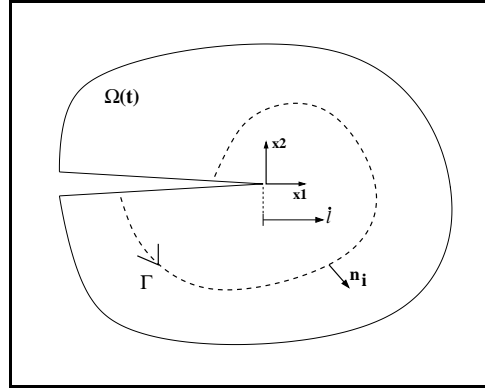
Cette égalité est réalisée pour une fissure se propageant rectilignement à vitesse constante. Pour la démontrer nous indiquons :

1. la définition de l'intégrale de taux de flux d'énergie $I(\Gamma)$,
2. la définition du taux dynamique de restitution de l'énergie G ,
3. comment l'indépendance de I par rapport à Γ dans le cas d'une fissure se propageant à vitesse constante \dot{l} permet d'obtenir $G\dot{l} = E_D\dot{l}$.⁽⁶⁾

1. L'intégrale de taux de flux d'énergie est un des paramètres clé de l'équation du mouvement des fissures [ATKINSON et ESHELBY, 1968 ; WILLIS, 1975 ; FREUND, 1989]. La définition de cette intégrale de contour s'obtient à partir de l'équation du mouvement du solide $\Omega(t)$ (de frontière $\partial\Omega(t)$). En l'absence de forces volumiques, cette équation s'écrit :

$$(I.58) \quad \text{div}(\sigma) = \rho\ddot{u}.$$

⁽⁶⁾ $E_D = \int_0^{\delta_C} \sigma([u]) \cdot d[u]$ est l'énergie de décohésion.


 FIG. I.7 – Contour se propageant avec la pointe de fissure : vitesse instantanée \dot{l} .

En faisant le produit scalaire de chaque membre de cette équation avec \dot{u} , en notant w la densité d'énergie élastique :

$$(I.59) \quad w = \int_{-\infty}^t \sigma : \nabla \dot{u}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

et c la densité d'énergie cinétique :

$$(I.60) \quad c = \frac{1}{2} \rho |\dot{u}|^2,$$

on obtient, lorsque la masse volumique ρ est constante :

$$(I.61) \quad \text{div}(\sigma \cdot \dot{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(w + c).$$

En intégrant (I.61) sur $\Omega \times [t_1, t_2]$, en appliquant le théorème de la divergence, en notant Γ un contour se propageant avec la fissure dans la direction x_1 à la vitesse \dot{l} (FIG. I.7) et s la coordonnée curviligne le long de Γ , on obtient :

$$(I.62) \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n \cdot \dot{u} d\partial\Omega dt = \int_{\Omega(t_2)} (w + c) d\Omega - \int_{\Omega(t_1)} (w + c) d\Omega + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n \cdot \dot{u} + (w + c)\dot{l} \cdot n_1] ds dt \quad \forall t_1, t_2.$$

Le terme de gauche dans (I.62) est le travail total des efforts appliqués sur $\partial\Omega$ ou sur la fissure entre les instants t_1 et t_2 . Les deux premiers termes du membre de droite représentent la variation d'énergie mécanique totale. Par conséquent, le terme :

$$(I.63) \quad I(\Gamma) = \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n \cdot \dot{u} + (w + c)\dot{l} \cdot n_1] ds$$

est le taux instantané de flux d'énergie à travers le contour Γ . Cette intégrale de contour est proportionnelle à une énergie par unité de temps et par unité de longueur, ou encore à une force par unité de temps.

REMARQUE I.4. On peut faire les remarques suivantes :

- En général, l'intégrale I n'est pas indépendante du contour Γ . On peut montrer qu'elle le devient lorsque la fissure se propage rectilignement à vitesse constante \dot{l} .
- La définition de I (I.63) n'est pas spécifique à l'analyse des fissures. C'est une intégrale de contour dont le caractère est général pour tous les contours se déplaçant dans les solides. Elle est adaptable au cas tridimensionnel et à celui des grandes déformations (en substituant les champs correspondants : par exemple en prenant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff à la place du tenseur des contraintes de Cauchy).

2. Le taux dynamique de restitution de l'énergie est l'énergie restituée par le solide par unité d'avancée de la fissure, c'est-à-dire le taux de flux d'énergie divisé par la vitesse d'avancée de la fissure :

$$(I.64) \quad G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{I(\Gamma)}{\dot{l}} \right\}.$$

REMARQUE I.5. Numériquement, la difficulté de calculer G provient de la nécessité d'avoir un contour Γ infiniment petit autour de la pointe de fissure. Des méthodes permettent néanmoins d'étendre la notion d'intégrale de Rice J au cas élasto-dynamique :

$$(I.65) \quad G\dot{l} = I(\Gamma) + \int_{A(\Gamma)} \text{div}(\sigma \cdot \dot{u} + (w + c)\dot{l})dA,$$

où $A(\Gamma)$ est l'aire encerclée par le contour Γ . Cette intégrale est définie [NAKAMURA et al., 1985] et peut avoir de nombreuses écritures (en appliquant notamment le théorème de la divergence à (I.65)) qui contiennent toutes une intégrale de contour et une intégrale surfacique.

3. Le cas particulier d'une fissure se propageant rectilignement à vitesse constante \dot{l} , selon la direction x_1 . Précisons les notations : la fissure débute en $x_1 = 0$ et sa pointe se trouve en $x_1 = l(t)$; la longueur de la zone cohésive est d , ce qui signifie que pour $0 < x_1 < l(t) - d$ les forces cohésives sont d'intensité nulle. On pose : $\xi = x_1 - l(t)$. La propriété essentielle que nous utilisons ici est que $I = I(\Gamma)$ est indépendante de Γ lorsque la fissure se propage rectilignement à vitesse constante (voir REMARQUE I.4). Par conséquent, avec les notations de la FIG. I.8, on a :

$$(I.66) \quad I(\Gamma) = I(\Gamma_{\text{cohésion}}).$$

Or, l'indépendance de I par rapport au contour conduit aussi à écrire (I.64) sous la forme :

$$(I.67) \quad I(\Gamma) = G\dot{l},$$

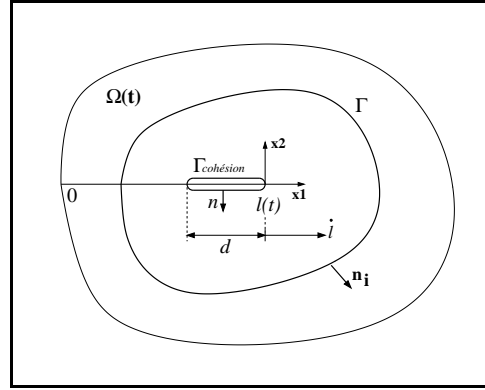


FIG. I.8 – Fissure se propageant rectilignement à vitesse constante \dot{l} selon la direction x_1 :
 $I = I(\Gamma) = I(\Gamma_{\text{cohésion}})$.

et par définition, on a :

$$(I.68) \quad I(\Gamma_{\text{cohésion}}) = 2 \int_{-d}^0 \sigma \cdot n \cdot \dot{u} d\xi.$$

Par symétrie, on a : $[u](\xi, t) = 2u(\xi, 0, t)$. La décomposition dans le repère normal-tangent :
 $[u] = u_N n + u_T$, $\sigma \cdot n = \sigma_N n + \sigma_T$ et les équations (I.66), (I.67) et (I.68) conduisent à :

$$(I.69) \quad G\dot{l} = \int_{-d}^0 (\sigma_N \dot{u}_N + \sigma_T \cdot \dot{u}_T) d\xi.$$

Enfin, en utilisant :

$$(I.70) \quad \begin{cases} \dot{u}_N(\xi, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \dot{l} \frac{\partial u_N}{\partial \xi}, \\ \dot{u}_T(\xi, t) = \frac{\partial u_T}{\partial t} - \dot{l} \frac{\partial u_T}{\partial \xi}, \end{cases}$$

on aboutit à :

$$(I.71) \quad G\dot{l} = \int_{-d}^0 \left(\sigma_N \frac{\partial u_N}{\partial t} + \sigma_T \cdot \frac{\partial u_T}{\partial t} \right) d\xi + \dot{l} \left\{ \int_0^{\delta_C} \sigma_N du_N + \int_0^{\delta_C} \sigma_T \cdot du_T \right\}.$$

Pour une propagation de fissure à vitesse constante \dot{l} , le premier terme de (I.71) est nul pour un observateur se déplaçant avec la pointe de fissure. Pour toute vraie propagation (i.e. $\dot{l} \neq 0$), on a donc (en omettant la décomposition normale-tangente) :

$$(I.72) \quad \boxed{G = \int_0^{\delta_C} \sigma([u]) \cdot d[u]}$$

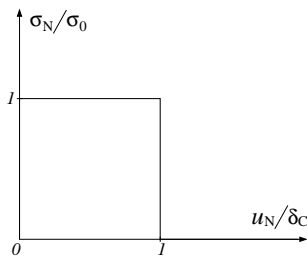
Cette égalité est essentielle. Elle indique que si la fissure se propage en ligne droite de manière stable (\dot{l} constante), il est équivalent d'utiliser un modèle de zone cohésive ou un critère de

type Griffith. Cette équivalence est obtenue lorsque l'énergie de décohésion est égale au taux critique de restitution de l'énergie. Ainsi, tous les modèles de décohésion conduisent à la même propagation de fissure s'ils présentent la même énergie de décohésion, indépendamment de la relation $\sigma([u])$. En bref, la fissuration ne dépend que de l'aire sous la courbe $\sigma([u])$ et non de sa forme. Ce n'est a priori plus vrai lorsque \dot{l} varie dans le temps⁽⁷⁾. Inversement, à l'amorçage de la fissuration ou lors de propagations instables de fissure, la forme de la courbe $\sigma([u])$ joue un rôle déterminant (voir notamment le chapitre III).

I.3.3 Différents modèles de zone cohésive

Nous présentons ici brièvement quelques modèles de zone cohésive parmi les plus significatifs.

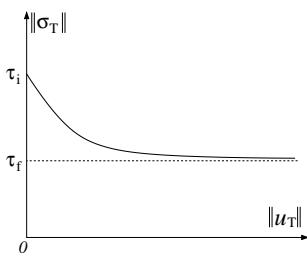
DUGDALE [1960]



Nous rappelons que ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives de traction $\sigma_N = \sigma_N(u_N)$ en fonction du saut de déplacement normal en pointe de fissure. Le comportement choisi est celui d'un solide rigide-plastique parfait et ce jusqu'à un seuil δ_C d'ouverture des lèvres de la fissure au-delà duquel la résistance à la fissuration devient négligeable (nulle ici).

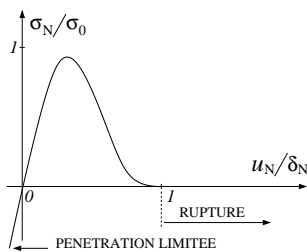
$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_0 = \text{constante} & \text{si } 0 \leq u_N \leq \delta_C \\ \sigma_N = 0 & \text{si } u_N > \delta_C \end{cases}$$

PALMER et RICE [1973]



Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives tangentielles en fonction du saut de déplacement tangentiel. Pour qu'un glissement relatif des lèvres de la fissure puisse apparaître ($\|u_T\| > 0$), il faut que le cisaillement dépasse une valeur τ_i , interprétée comme un coefficient de frottement statique. Lorsque le glissement est actif, le seuil de cisaillement diminue progressivement pour atteindre une valeur limite τ_f interprétée comme un coefficient de frottement dynamique.

NEEDLEMAN [1987]



Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives normales σ_N et tangentielles σ_T en fonction des composantes normale u_N et tangentielle u_T du saut de déplacement. σ_N et σ_T sont supposées dériver d'un potentiel :

$$\sigma_N = \frac{\partial \Phi}{\partial u_N} \quad \text{et} \quad \sigma_T = \frac{\partial \Phi}{\partial u_T}.$$

⁽⁷⁾en pratique, MONERIE et al. [1998] confirment ce résultat pour une évolution de la fissure suffisamment stationnaire, y compris lorsque les modèles de zone cohésive incluent du frottement de Coulomb.

Un choix *polynômial* de Φ est fait (δ_N et σ_0 sont des paramètres, α représente la part de résistance au glissement part rapport à la résistance normale) :

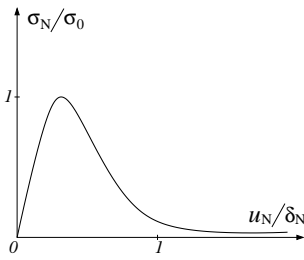
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(u_N, u_T) = \frac{27}{8} \sigma_0 \delta_N \left\{ \left(\frac{u_N}{\delta_N} \right)^2 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{u_N}{\delta_N} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_N}{\delta_N} \right)^2 \right] \right. \\ \quad \left. + \alpha \left(\frac{\|u_T\|}{\delta_N} \right)^2 \left[1 - 2 \left(\frac{u_N}{\delta_N} \right) + \left(\frac{u_N}{\delta_N} \right)^2 \right] \right\} \quad \text{si } 0 \leq u_N \leq \delta_N \\ \Phi(u_N, u_T) = \Phi_{sep} \quad \text{si } u_N > \delta_N \end{array} \right.$$

Lorsque $u_T = 0$ (figure ci-contre) l'énergie de décohésion vaut :

$$\Phi_{sep} = \int_0^{\delta_N} \frac{\sigma_N}{\sigma_0} du_N = \frac{9\delta_N\sigma_0}{16}.$$

Lorsque $u_N < 0$ la valeur de σ_N dérivant du potentiel joue le rôle d'une pénalisation : aucune hypothèse supplémentaire n'est faite pour la gestion du contact unilatéral.

NEEDLEMAN [1990]

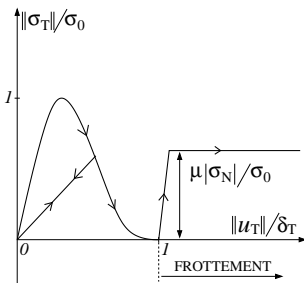


Ce modèle est identique au précédent mais propose une expression *exponentielle* du potentiel Φ (une forme similaire est retenue dans [RICE et WANG, 1989]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(u_N, u_T) = \frac{\sigma_0 \exp(1) \delta_N}{z} \left\{ 1 - \left[1 + z \frac{u_N}{\delta_N} - \alpha z^2 \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{u_N}{\delta_T}\right) \right] \right] \right. \\ \quad \left. \times \exp\left(-z \frac{u_N}{\delta_N}\right) \right\} \\ \Phi(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u_N \rightarrow \infty} \Phi = \Phi_{sep} \end{array} \right.$$

Ici, $z = 16/9 \exp(1)$ et on a souvent : $\delta_T = \delta_N$. Le dépendance périodique en u_T doit être soulignée. Pour $u_N = 0$, le travail interfacial total associé au glissement $u_T = \delta_T$ est nul : le travail de 0 à $\delta_T/2$ est annulé par celui de $\delta_T/2$ à δ_T . Ceci est une limitation forte de la représentation périodique. La figure ci-contre correspond au cas $u_T = 0$.

TVERGAARD [1990a]

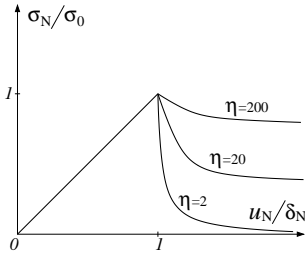


Ce modèle reprend le modèle de NEEDLEMAN [1987] et y introduit l'irréversibilité du comportement (pas de recollement spontané des fissures créées), ainsi qu'un frottement de Coulomb post-décohésion. En deux dimensions, le modèle se définit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{(u_N/\delta_N)^2 + (u_T/\delta_T)^2} \quad (\text{paramètre sans dimension}) \\ F(\lambda) = 27/4\sigma_0(1-\lambda)^2 \quad \text{pour } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_N = u_N/\delta_N F(\lambda) \\ \sigma_T = \alpha u_T/\delta_T F(\lambda) \end{array} \right\} \quad \text{pour } \dot{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{u_N}{\delta_N} \frac{\dot{u}_N}{\delta_N} + \frac{u_T}{\delta_T} \frac{\dot{u}_T}{\delta_T} \right) \geq 0 \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_N = u_N/\delta_N F(\lambda_{max}) \\ \sigma_T = \alpha u_T/\delta_T F(\lambda_{max}) \end{array} \right\} \quad \text{pour } \dot{\lambda} < 0 \end{array} \right.$$

Et pour $\lambda_{max} \geq 1$, le frottement de Coulomb entraîne : $\sigma_T = -\text{signe}(\dot{u}_T)\mu|\sigma_N|$. La figure ci-contre correspond au cas $u_N = 0$.

MICHEL et al. [1992]



Ce modèle est destiné aux décohésions d'interface dans les composites à matrice métallique et renfort particulaire. En notant Int l'interface, le modèle s'écrit en deux dimensions (c est un paramètre dépendant de la fraction volumique de renforts et du rapport des modules d'Young des matériaux en présence) :

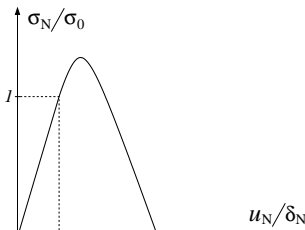
$$\sigma_N = \frac{1-D}{1+cD} K^0 u_N, \quad \sigma_T = \frac{1-D}{1+cD} \mu^0 u_T.$$

L'évolution du paramètre D est régie par un critère moyen sur l'interface. La fonction seuil de cette évolution est ($\gamma_0 \geq 0, \eta \geq 0$) :

$$\frac{1}{2|Int|} \int_{Int} (K^0 u_N^2 + \mu^0 u_T^2) - H(D), \quad \text{avec } H(D) = \gamma_0(1 + \eta D)^2.$$

La figure ci-contre correspond au cas $u_T = 0$: $\sigma_N = \sigma_0(1-D)/(1+cD)u_N/\delta_N$ avec $u_N/\delta_N = 1 + \eta D$.

MICHEL et SUQUET [1994]



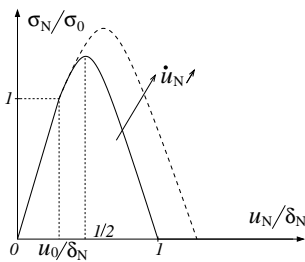
Ce modèle est un variante du précédent :

$$\sigma_N = (1-D)K^0 u_N, \quad \sigma_T = (1-D)\mu^0 u_T$$

et $H(D) = \gamma_0(1 + \eta \frac{D}{2-D})^2$.

Lorsque $u_T = 0$, ce modèle se ramène à : $\sigma_N = \sigma_0(1-D)u_N/u_0$ avec $(1-D) = (1 - u_N/\delta_N)/(1 - 2u_0/\delta_N + u_N/\delta_N)$.

ALAUZAN et al. [1995]



Ce modèle concerne les décohésions interplis dans les matériaux composites stratifiés. C'est un des premiers modèles à introduire un endommagement surfacique anisotrope et une sensibilité à la vitesse de sollicitation. Il s'écrit en deux dimensions, pour la version isotrope :

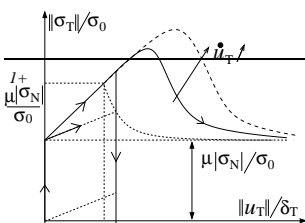
$$\sigma_N = (1-D)K_N u_N, \quad \sigma_T = (1-D)K_T u_T.$$

$$\dot{D} = \eta/a[1 - \exp(-a(w(Y) - D)^+)] \quad \text{si } D < 1, D = 1 \text{ sinon.}$$

$$w(Y) = \frac{(\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0})^+}{\sqrt{Y_C} - \sqrt{Y_0}} \quad \text{et } Y = \text{Sup} \{ (1/2K_N u_N^2)^\alpha + (1/2K_T u_T^2)^\alpha \}^{1/\alpha}$$

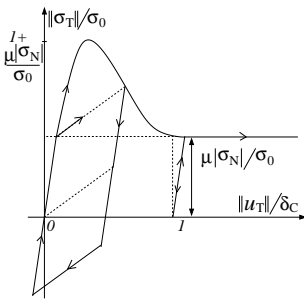
(souvent $\alpha = 1$). Pour $u_T = 0$ et pour une évolution quasi-statique, le modèle se résume à : $\sigma_N = \sigma_0(1 - u_N/\delta_N)/(1 - u_0/\delta_N)u_N/u_0$.

CANGÉMI et al. [1996] ; RAOUS et al. [1999]



Ce modèle se base sur une formulation thermodynamique. Il couple endommagement surfacique, frottement de Coulomb et contact unilatéral en incluant une sensibilité à la vitesse de sollicitation. Il étend ainsi le modèle de FRÉMOND [1987]. Les détails de ce modèle sont donnés au chapitre II. En deux dimensions, pour $u_N = 0$ et $\dot{u}_T > 0$, il se résume à (voir (II.62)) : $\|\sigma_T\| = \mu|\sigma_N| + \sigma_0\beta^2\|u_T/\delta_T\|$ avec la loi d'évolution suivante pour β : $b\dot{\beta} = -\sigma_0\delta_T(1 - \beta\|u_T/\delta_T\|)^-$.

CHABOCHE et al. [1997a]



Ce modèle s'adresse aux décohésions interfaciales dans les composites à matrice métallique. Il reprend le modèle de TVERGAARD [1990a] et propose un frottement de Coulomb actif dès le début de la décohésion. Le glissement est décomposé en parties élastiques et plastiques ($u_T = u_T^e + u_T^p$) et la fonction de charge pour le critère de Coulomb s'écrit :

$$\|\sigma_T - \frac{K_T F(\lambda_{\max})}{1 - F(\lambda_{\max})} \frac{u_T^p}{\delta_T}\| - \mu(-\sigma_N)_+ \leq 0, \quad \text{avec :}$$

$$\lambda = 1 - \left(1 - \sqrt{\left(\frac{\|u_T\|}{\delta_T} - \frac{\mu K_T (-u_N)_+}{K_T \delta_N} \text{sign}(u_T^*) \right)_+^2 + \left(\frac{(u_N)_+}{\delta_N} \right)_+^2} \right)_+,$$

où $u_T^* = u_T - \frac{u_T^p}{1 - F(\lambda_{\max})}$.

Les modèles de zone cohésive connaissent aujourd'hui une utilisation croissante dans l'étude des phénomènes de fissuration. Clairement, la littérature actuelle accorde une importance particulière au modèle de TVERGAARD [1990a] dont l'aspect "courbe en cloche" peut légitimement être attribué à NEEDLEMAN [1987]. Outre les travaux déjà mentionnés dans ce paragraphe I.3⁽⁸⁾, il convient de citer les très récents travaux de PANDOLFI et al. [2000] et de FOULK et al. [2000] (et les travaux antérieurs auxquels ils se réfèrent) qui proposent une formulation tridimensionnelle de ce modèle en cloche.

Nous estimons que les principales raisons du succès de ce modèle sont les suivantes :

1. le modèle contient (en deux dimensions) seulement deux paramètres à choisir parmi les suivants : contrainte ou déplacement maximal, énergie de décohésion, module initial ;
2. l'expression polynômiale ou exponentielle du modèle est aisée à implanter numériquement et mathématiquement très régulière (C^∞) ;
3. certaines justifications atomistiques peuvent être invoquées.

BILAN DU PARAGRAPHE I.3

⁽⁸⁾pour l'essentiel : F. Costanzo, J.-L. Chaboche, J.W. Hutchinson, A. Needleman, A.J. Rosakis, T. Siegmund, V. Tvergaard, X.-P. Xu et leurs collaborateurs.

Les modèles de zone cohésive s'avèrent pertinents dans l'analyse de la fissuration des matériaux composites. Ils permettent aussi bien de simuler la fissuration des matériaux volumiques que la décohésion aux interfaces entre constituants. Cette décohésion peut notamment inclure une physique de dégradation complexe (usure, frottement, temps d'activation des mécanismes d'endommagement). Les simulations numériques basées sur des modèles de zone cohésive (conditions mixtes contrainte-déplacement ou éléments d'interface) peuvent aller de l'amorçage des fissures jusqu'à la ruine des matériaux et des structures par la propagation dynamique de ces fissures. Ces modèles permettent de surmonter la majorité des difficultés rencontrées en mécanique de la rupture (notamment la question de l'amorçage des fissures) en s'appuyant sur la notion de comportement local. Des bilans énergétiques globaux sont cependant possibles et l'équation (I.72) montre que le taux critique de restitution de l'énergie demeure le paramètre mécanique clé lors d'une fissuration établie.

I.4 Conclusion du chapitre

Nous avons rappelé dans ce chapitre les deux grandes classes de modèles permettant l'analyse et la simulation de la fissuration des matériaux et des structures : la mécanique de la rupture et les modèles de zone cohésive.

La mécanique de la rupture est un outil classique. Elle permet de traiter efficacement de nombreuses situations standards telles que la propagation quasi-statique des fissures dans les matériaux homogènes élastiques. Elle présente cependant certaines faiblesses qui limitent son utilisation dans des situations mécaniques plus délicates. Ces faiblesses concernent pour l'essentiel l'amorçage de la fissuration, le suivi temporel (propagation instables) et spatial (branchement) des trajets de fissuration et la prise en compte d'une physique de fissuration plus complexe (contact frottant sur les lèvres de la fissure, usure, phénomène de croissance-coalescence, ...). Des modèles plus élaborés permettant de pallier ces faiblesses ont été présentés. Les limitations théoriques ou numériques que connaissent ces modèles eux-mêmes nous ont conduit à envisager la fissuration des matériaux selon l'angle des modèles de zone cohésive.

Ces derniers permettent en effet de surmonter les difficultés que rencontre la mécanique de la rupture. Ils sont en outre adaptés à l'analyse de la fissuration aux interfaces entre les solides ainsi qu'à celle des solides eux-mêmes. Cet avantage est essentiel dans la suite de ce mémoire où la fissuration des matériaux composites est envisagée. Enfin, ces modèles se révèlent numériquement efficaces. Ils autorisent des simulations allant de l'amorçage des fissures à la ruine des matériaux.

Par ailleurs, les modèles de zone cohésive conservent la notion clé de taux de restitution de l'énergie mise en évidence par la mécanique de la rupture. L'équivalence de ces deux classes de modèles peut notamment être obtenue dans le cas des propagations quasi-statiques de fissures.

Quelques uns des modèles de zone cohésive présentés dans ce chapitre sont comparés au chapitre IV sur des simulations numériques d'expérience de micro-indentation. Le modèle utilisé dans la suite de ce mémoire est le modèle adhésif/frottant de CANGÉMI et al. [1996] et RAOUS et al. [1999]. Nous le présentons dans le chapitre suivant en proposant quelques variantes.

CHAPITRE II

Un modèle de comportement d'interface couplant adhésion, frottement et contact unilatéral

Nous présentons dans ce chapitre le modèle adhésif/frottant de Raous, Cangémi et Cocu ([CANGÉMI et al., 1996 ; RAOUS et al., 1999]) destiné à la fissuration des interfaces fibre/matrice dans les matériaux composites. Nous en proposons quelques variantes (en particulier un modèle à coefficient de frottement variable en fonction du niveau de l'endommagement), ainsi qu'une extension au cas des grandes déformations. La formulation de ce modèle, son traitement numérique et son analyse mécanique détaillée sont donnés. Une attention particulière est portée à l'étude et à la limitation de la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation.

PLAN DU CHAPITRE II

II.1 Introduction	51
II.2 Formulation thermodynamique	52
II.2.1 Premier principe de la thermodynamique, équations d'équilibre	52
II.2.2 Energie libre, lois d'état	53
II.2.3 Dissipation, lois complémentaires	56
II.3 Problème quasi-statique : formulation variationnelle et traitement numérique 61	
II.3.1 Formulation variationnelle du problème quasi-statique	62
II.3.2 Traitement numérique, problème incrémental, θ -méthode	64
II.4 Interprétation et analyse mécanique du modèle et de ses variantes	69
II.4.1 Bilan énergétique sur un exemple simple : interface en cisaillement sous pression normale	69
II.4.2 Un modèle à coefficient de frottement variable	75
II.4.3 Limitation de la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation	77
II.5 Extension du modèle aux grandes déformations	81
II.5.1 Les difficultés liées aux grandes déformations	82
II.5.2 Formulations du modèle thermodynamique et du problème aux limites	84
II.5.3 Résultat d'existence dans un cas particulier : contact sans frottement avec un obstacle plan	88
II.6 Conclusion du chapitre	92

II.1 Introduction

Le modèle présenté ici est dû à Raous, Cangémi et Cocu [CANGÉMI et al., 1996 ; CANGÉMI, 1997 ; COCU et al., 1997 ; RAOUS et al., 1997, 1999]. Il décrit l'évolution d'une interface entre deux corps déformables initialement adhérents. Il propose une transition d'un état adhérent à un état frottant dans le plan tangent de l'interface et à un état de contact unilatéral dans la direction normale à l'interface.

Les contributions apportées dans ce mémoire par l'auteur sur ce modèle de zone cohésive sont :

1. L'introduction d'un coefficient de frottement variable avec le niveau de décohésion interfacial. Cette formulation interdit toute dissipation par frottement avant que l'endommagement interfacial ne soit amorcé. La transition de l'adhésion au frottement est progressive.
2. La prise en compte d'un gradient d'intensité d'adhésion permettant d'inclure des effets non locaux de l'endommagement surfacique. L'effort G_β associé à la variable d'adhésion β est remplacé par $G_\beta - \text{div } G_{\nabla\beta}$. Ce développement est inspiré d'une théorie du premier gradient pour le contact unilatéral avec adhérence proposée par FRÉMOND [1985] et analysée par TRUONG DINH TIEN [1990]. La formulation est alors non locale. Les efforts associés à β et $\nabla\beta$ sont introduits à partir des lois d'état (*voir* les équations (II.27)-(II.28)). Le cadre de cette formulation est celui de la Thermodynamique des Processus Irréversibles standard [GERMAIN et al., 1983], ce qui la distingue de :
 - (a) la formulation de Frémond où les efforts associés à β et $\nabla\beta$ sont introduits par leur puissance à partir du Principe des Puissances Virtuelles,
 - (b) la formulation de RAOUS et al. [1999] qui est locale.
3. Une interprétation mécanique fine du modèle et de ses variantes (paragraphe II.4), et notamment un bilan détaillé des énergies mises en jeu dans le processus de décohésion. Ce travail a été mené en collaboration avec François-Henri Leroy au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille.
4. Une extension du modèle aux grandes déformations. De manière plus générale, nous avons proposé une formulation de problèmes couplant contact unilatéral, frottement et adhérence entre deux solides hyperélastiques en grandes déformations ([BRETTELLE et al., 2000]). Un résultat d'existence est obtenu pour le contact sans frottement d'un solide hyperélastique contre un support rigide plan et pour une évolution de l'adhérence indépendante de la vitesse de sollicitation.
5. Le détail d'une limitation de la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation. Cette limitation, envisagée dans [RAOUS et al., 1999], est réalisée par l'introduction d'une loi puissance dans l'évolution de la variable d'adhésion β . La formulation thermodynamique de ce modèle est précisée ici : l'obtention de la loi complémentaire pour $\dot{\beta}$ fait notamment

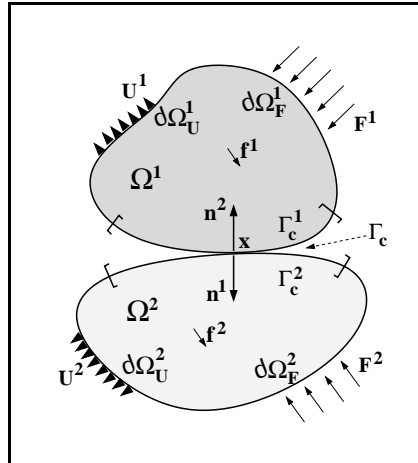


FIG. II.1 – Deux corps déformables en contact adhésif.

l'objet de la proposition II.2. Une θ -méthode adaptée à la résolution de l'équation différentielle de β a été proposée. L'énergie consommée par viscosité durant le processus de décohésion a été identifiée et une méthode permettant d'annuler la sensibilité à la vitesse de sollicitation a été développée (paragraphe II.4.3).

II.2 Formulation thermodynamique

II.2.1 Premier principe de la thermodynamique, équations d'équilibre

Soient deux corps déformables Ω^1 et Ω^2 occupant des espaces de \mathbb{R}^m ($m = 2, 3$) ouverts, bornés, de frontières $\partial\Omega^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) assez régulières, de masses volumiques ρ^α et soumis à des forces volumiques f^α . On distingue sur $\partial\Omega^\alpha$ trois parties disjointes : Γ_c^α la zone potentielle de contact entre Ω^α et l'extérieur, $\partial\Omega_U^\alpha$ la zone d'application des déplacements et $\partial\Omega_F^\alpha$ la zone d'application des forces, avec $\partial\Omega^\alpha = \Gamma_c^\alpha \cup \partial\Omega_U^\alpha \cup \partial\Omega_F^\alpha$ (voir FIG. II.1). L'hypothèse des petites perturbations, permet de mettre en correspondance de manière biunivoque les points de la surface de contact Γ_c^1 et ceux de la surface Γ_c^2 (par exemple [STRÖMBERG et al., 1996]). On peut ainsi définir la zone potentielle de contact entre les deux solides : $\Gamma_c \simeq \Gamma_c^1 \simeq \Gamma_c^2$. Pour tout point x de $\Gamma_c^1 \cap \Gamma_c^2$, l'identification, au signe près, de la normale $n^1(x)$ extérieure sortante au solide Ω^1 et de la normale $n^2(x)$ au solide Ω^2 , conduit aussi à définir une normale à Γ_c : $n(x) \simeq n^1(x) \simeq -n^2(x)$.

REMARQUE II.1. Cette définition d'une seule zone de contact entre deux solides déformables à laquelle on peut associer une unique normale n'est plus possible en grandes déformations. Cette impossibilité est à l'origine de nombreuses difficultés (voir par exemple [DUBOIS, 1994 ; CHERTIER, 1997] pour le cas élasto-plastique et [VOLA, 1998] pour le cas hyperélastique). Ces difficultés sont accentuées lorsque ce contact est adhésif (la normale selon laquelle on définit la

distance entre les deux corps n'est pas celle selon laquelle s'appliquent les forces d'adhésion : voir paragraphe II.5).

On note $u = \{u^1, u^2\}$ le champ des déplacements dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$ et $[u] = u^2 - u^1$ le saut de déplacement à l'interface Γ_c . Les forces intérieures duales à ces variables cinématiques sont : $\sigma = \{\sigma^1, \sigma^2\}$ le champs des contraintes dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$ et R la force de contact sur Γ_c . Soient $\mathcal{V} = \{v, [v]\}$ l'ensemble des vitesses virtuelles sur $\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c$, ε le champ des déformations dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$, $f = \{f^1, f^2\}$ les forces volumiques dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$ et $F = \{F^1, F^2\}$ les forces appliquées sur $\partial\Omega_F^1 \cup \partial\Omega_F^2$.

Le lemme de Cauchy appliqué au principe fondamental de la mécanique sur chaque corps Ω^α , conduit d'une part à la définition de tenseurs σ^α tels que :

$$(II.1) \quad F^\alpha = \sigma^\alpha \cdot n \quad \text{pour } \alpha = 1, 2,$$

et d'autre part à l'équation d'équilibre :

$$(II.2) \quad \text{div } \sigma^\alpha + f^\alpha = \rho^\alpha \ddot{u}^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2.$$

Les équations d'équilibre complètes du problème de deux corps déformables avec interface s'écrivent donc :

$$(II.3) \quad \begin{cases} \text{div } \sigma^\alpha + f^\alpha = \rho^\alpha \ddot{u}^\alpha & \text{dans } \Omega^\alpha \\ \sigma^\alpha \cdot n^\alpha = F^\alpha & \text{sur } \partial\Omega_F^\alpha \\ \sigma^1 \cdot n^1 = -\sigma^2 \cdot n^2 = R & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad \text{pour } \alpha = 1, 2.$$

II.2.2 Energie libre, lois d'état

Une idée fondamentale de ce modèle est d'introduire une variable d'état supplémentaire pour décrire l'état du contact. Cette variable, notée β et initialement introduite par Frémond [FRÉMOND, 1982a,b, 1987, 1988], permet de distinguer un contact unilatéral classique d'un contact adhésif. Elle traduit la proportion de liaisons adhésives actives entre les deux corps en contact. Cette variable est choisie telle que :

$$(II.4) \quad \begin{cases} \beta = 1, & \text{l'interface est vierge,} \\ 0 < \beta < 1, & \text{l'interface est partiellement endommagée,} \\ \beta = 0, & \text{l'interface est rompue.} \end{cases}$$

Nous soulignons le fait qu'elle peut aussi être considérée à juste titre comme une variable d'endommagement surfacique (avec $D_S = 1 - \beta$). On parlera ainsi indifféremment de perte d'adhésion, d'évolution de la décohésion ou d'évolution de l'endommagement surfacique.

	variables d'état	forces thermodynamiques
dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$	ε	σ^r
sur Γ_c	u_N	R_N^r
sur Γ_c	u_T	R_T^r
sur Γ_c	β	$-G_\beta$
sur Γ_c	$\nabla\beta$	$-G_{\nabla\beta}$

TAB. II.1 – Les variables thermodynamiques du modèle.

Des effets *non locaux* peuvent être introduits dans l'évolution de l'endommagement surfacique par l'intermédiaire du gradient de β . Cette idée a pour origine les travaux de FRÉMOND [1985] et TRUONG DINH TIEN [1990].

Enfin, la décomposition du saut de déplacement interfacial $[u]$ en parties normale et tangente, conduit à la définition de deux variables d'état u_N et u_T sur Γ_c :

$$(II.5) \quad [u] = u_N n + u_T \quad \text{avec :} \quad u_N = [u] \cdot n.$$

Les variables d'état du modèle et les forces thermodynamiques associées sont données dans le TAB. II.1 (les exposants $(.)^r$ et $(.)^{ir}$ indiquent respectivement les parties réversibles et irréversibles). Les choix spécifiques des potentiels d'énergie libre volumique et surfacique (équations (II.6) et (II.7)) conduisent à l'écriture des lois d'états (équations (II.8) et (II.9)). Ces lois sont données sous forme sous-différentielle du fait de la non différentiabilité du potentiel surfacique d'énergie libre [DAHER et MAUGIN, 1986 ; FRÉMOND, 1987].

$$(II.6) \quad \Psi^\alpha(\varepsilon^\alpha) = \frac{1}{2\rho^\alpha} A_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega^1 \cup \Omega^2,$$

où $A^\alpha = (A_{ijkl}^\alpha)$ est le tenseur d'élasticité pour le corps Ω^α . Le comportement volumique est considéré élastique linéaire.

$$(II.7) \quad \Psi_S(u_N, u_T, \beta) = \underbrace{\frac{\beta^2 C_N}{2} u_N^2 + \frac{\beta^2 C_T}{2} \|u_T\|^2 - w h(\beta)}_{=\Psi_S^d \text{ (notation)}} + \frac{k}{2} |\nabla\beta|^2 + \underbrace{I_{\mathbb{R}^+}(u_N) + I_{[0,1]}(\beta)}_{=\Psi_S^c \text{ (notation)}}$$

sur Γ_c , où I_X est la fonction indicatrice de l'ensemble X . Les constantes et les fonctions introduites dans ce modèle sont :

- les raideurs initiales de la liaison interfaciale C_N et C_T , homogènes à un module d'élasticité par unité de longueur,
- w , une énergie par unité d'aire de référence : c'est la limite de l'énergie consommée durant le processus de décohésion lorsque la vitesse de sollicitation tend vers zéro,

- $h(\beta)$, une fonction donnée,
- k , une constante homogène à une énergie.

La partie Ψ_S^d de Ψ_S est différentiable mais non convexe en le triplet de variables $\{u_N, u_T, \beta\}$. La partie Ψ_S^c de Ψ_S est convexe mais non différentiable. Les lois d'état sont :

$$(II.8) \quad (\sigma^r)^\alpha = \rho^\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \varepsilon^\alpha}(\varepsilon^\alpha) \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

$$(II.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_N^r \in \partial_{u_N} \Psi_S(u_N, u_T, \beta) \\ R_T^r \in \partial_{u_T} \Psi_S(u_N, u_T, \beta) \\ -G_\beta \in \partial_\beta \Psi_S(u_N, u_T, \beta) \\ -G_{\nabla\beta} \in \partial_{\nabla\beta} \Psi_S(u_N, u_T, \beta) \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

L'équation (II.8) donne immédiatement :

$$(II.10) \quad (\sigma^r)^\alpha = A_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Le potentiel Ψ_S étant différentiable en u_T , on obtient aussi sans difficulté :

$$(II.11) \quad R_T^r = \beta^2 C_T u_T \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

Et tout aussi directement, on a :

$$(II.12) \quad G_{\nabla\beta} = -k \nabla\beta \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

Pour tout état admissible du point de vue de l'adhésion (i.e. $\beta \in [0, 1] : I_{[0,1]}(\beta) = 0$), on a :

$$(II.13) \quad R_N^r \in \partial_{u_N} I_{\mathbb{R}^+}(u_N) + \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial u_N},$$

ce qui est équivalent à :

$$(II.14) \quad -R_N^r + \beta^2 C_N u_N \geq 0, \quad u_N \geq 0, \quad (-R_N^r + \beta^2 C_N u_N) u_N = 0.$$

Enfin, pour toute situation cinématiquement admissible (i.e. $u_N \geq 0 : I_{\mathbb{R}^+}(u_N) = 0$), et en étudiant les différents cas $\beta = 1$, $\beta \in]0, 1[$ et $\beta = 0$ on a :

$$(II.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} G_\beta \geq w h'(\beta) & \text{si } \beta = 0, \\ G_\beta = w h'(\beta) - (C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2) \beta & \text{si } \beta \in]0, 1[, \\ G_\beta \leq w h'(\beta) - (C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2) & \text{si } \beta = 1. \end{array} \right.$$

II.2.3 Dissipation, lois complémentaires

Le bilan global des puissances mécaniques et calorifiques mises en jeu dans l'évolution de $\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c$ est donné par le premier principe de la thermodynamique (*voir* (I.8)).

$$(II.16) \quad \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{cal}, \quad \forall \mathcal{D} \subset \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c,$$

$$(II.17) \quad \text{avec : } \begin{cases} \mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \rho e dx + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} e_S ds, \text{ l'énergie interne du système,} \\ \mathcal{C} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho |\dot{u}|^2 dx, \text{ l'énergie cinétique,} \\ \mathcal{P}_e = \int_{\mathcal{D}} f \cdot \dot{u} dx + \int_{\partial \mathcal{D}} F \cdot \dot{u} ds, \text{ la puissance des efforts extérieurs,} \\ \mathcal{P}_{cal} = \int_{\mathcal{D}} r dx - \int_{\partial \mathcal{D}} q \cdot n ds, \text{ la puissance calorifique,} \end{cases}$$

où on a noté : e la densité spécifique d'énergie interne, e_S la densité surfacique d'énergie interne, r la source de chaleur dans le volume et q le flux surfacique de chaleur. Les équations d'équilibre (II.3), la décomposition de \mathcal{P}_e en :

$$(II.18) \quad \mathcal{P}_e = \int_{\mathcal{D}} f \cdot \dot{u} dx + \int_{\partial \mathcal{D} \setminus \Gamma_c} F \cdot \dot{u} ds + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} R \cdot [\dot{u}] ds$$

et l'utilisation de la formule de Green conduisent à écrire (II.16) sous la forme :

$$(II.19) \quad \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} dx + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \dot{e}_S ds = \int_{\mathcal{D}} (r - \operatorname{div} q + \sigma : \varepsilon(\dot{u})) dx + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} R \cdot [\dot{u}] ds.$$

Les notions d'évolutions irréversibles du système $\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c$ sont traduites par le second principe de la thermodynamique (*voir* (I.9)) :

$$(II.20) \quad \dot{\mathcal{S}} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dx - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{q \cdot n}{T} ds,$$

$$(II.21) \quad \text{avec : } \mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho s dx + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} s_S ds, \text{ l'entropie,}$$

où s est la densité spécifique d'entropie et s_S la densité surfacique d'entropie. Les équations (II.19) et (II.20), l'introduction des densités spécifiques et surfaciques d'énergie libre de Helmholtz respectivement définies par $\Psi = e - sT$ et $\Psi_S = e_S - s_S T$ et la décomposition de $R \cdot [\dot{u}]$ en parties normale et tangentielle, permettent d'obtenir les inégalités volumique et surfacique de Clausius-Duhem sous forme non locale :

$$(II.22) \quad \forall \mathcal{D} \subset \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{D}} \left(-\rho \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) + \sigma : \dot{\varepsilon} - q \cdot \frac{\nabla T}{T} \right) dx \geq 0, \\ \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \left(-\left(\dot{\Psi}_S + s_S \dot{T} \right) + R_N \dot{u}_N + R_T \cdot \dot{u}_T \right) ds \geq 0. \end{cases}$$

Soit, dans le cas *isotherme* :

$$(II.23) \quad \forall \mathcal{D} \subset \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{D}} (-\rho \dot{\Psi} + \sigma : \dot{\varepsilon}) dx \geq 0, \\ \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} (-\dot{\Psi}_S + R_N \dot{u}_N + R_T \cdot \dot{u}_T) ds \geq 0. \end{cases}$$

Le terme de dérivée temporelle $\int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \dot{\Psi}_S ds$ peut être calculé par valeurs supérieure et inférieure de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} (\dot{\Psi}_S)_- ds &= \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \left((\dot{\Psi}_S^d)_- + \lim_{\Delta t \leq 0^-} \left(\frac{\Psi_S^c(t + \Delta t) - \Psi_S^c(t)}{\Delta t} \right) \right) ds \\ &= \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \left(\frac{\partial \Psi_S^d}{\partial u_T} \cdot \dot{u}_T + \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial u_N} \dot{u}_N - \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial \beta} \dot{\beta} - \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial \nabla \beta} \cdot \nabla \dot{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\Delta t \leq 0^-} \left(\frac{I_{\mathbb{R}^+}(u_N(t + \Delta t)) - I_{\mathbb{R}^+}(u_N(t))}{\Delta t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\Delta t \leq 0^-} \left(\frac{I_{[0,1]}(\beta(t + \Delta t)) - I_{[0,1]}(\beta(t))}{\Delta t} \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Or, pour tout v dans \mathbb{R}^+ , on a d'après l'équation (II.13) :

$$(II.24) \quad (v - u_N(t)) \left(R_N^r - \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial u_N} \right) \leq I_{\mathbb{R}^+}(v) - I_{\mathbb{R}^+}(u_N(t)),$$

et en particulier, pour $v = u_N(t + \Delta t)$, en divisant par Δt négatif et en passant à la limite par valeur inférieure, on a :

$$(II.25) \quad \lim_{\Delta t \leq 0^-} \left(\frac{I_{\mathbb{R}^+}(u_N(t + \Delta t)) - I_{\mathbb{R}^+}(u_N(t))}{\Delta t} \right) \leq \dot{u}_N \left(R_N^r - \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial u_N} \right).$$

De même, on obtient :

$$(II.26) \quad \lim_{\Delta t \leq 0^-} \left(\frac{I_{[0,1]}(\beta(t + \Delta t)) - I_{[0,1]}(\beta(t))}{\Delta t} \right) \leq \dot{\beta} \left(-G_\beta - \frac{\partial \Psi_S^d}{\partial \beta} \right).$$

Enfin, en procédant de même par valeur supérieure, on obtient l'égalité :

$$(II.27) \quad \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \dot{\Psi}_S ds = \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \left(R_N^r \dot{u}_N + R_T^r \cdot \dot{u}_T - G_\beta \dot{\beta} - G_{\nabla \beta} \cdot \nabla \dot{\beta} \right) ds.$$

L'utilisation de la formule de Green et l'hypothèse d'absence de termes de bords relatifs à $\nabla \beta$, conduisent pour tout $\mathcal{D} \subset \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_c$ à :

$$(II.28) \quad \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \dot{\Psi}_S ds = \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \left(R_N^r \dot{u}_N + R_T^r \cdot \dot{u}_T - (G_\beta - \operatorname{div} G_{\nabla \beta}) \dot{\beta} \right) ds.$$

La *forme locale* de la dissipation du système s'écrit finalement de la manière suivante (on distingue la dissipation volumique et la dissipation surfacique) :

$$(II.29) \quad \begin{cases} \mathcal{D} &= (\sigma - \sigma^r) : \dot{\varepsilon} && \text{dans } \Omega^1 \cup \Omega^2, \\ \mathcal{D}_S &= (R_N - R_N^r)\dot{u}_N + (R_T - R_T^r)\dot{u}_T + (G_\beta - \operatorname{div} G_{\nabla\beta})\dot{\beta} && \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

On note $\widetilde{G}_\beta = G_\beta - \operatorname{div} G_{\nabla\beta}$ la force associée à la vitesse $\dot{\beta}$. A partir de maintenant, le comportement volumique est supposé élastique (potentiel de dissipation volumique nul), ce qui conduit aux lois complémentaires volumiques (II.30). Notre attention se porte désormais essentiellement sur le comportement surfacique.

$$(II.30) \quad (\sigma)^\alpha = (\sigma^r)^\alpha, \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Les seuls mécanismes dissipatifs envisagés à l'interface sont le frottement et l'endommagement des liaisons adhésives. La positivité de la dissipation surfacique est assurée par le choix d'un pseudo-potential de dissipation Φ_S convexe en $(\dot{u}_T, \dot{\beta})$ et nul en $(0, 0)$. Ce choix est donné par l'équation (II.31). On note χ_N le triplet de variables auxiliaires $\{R_N^r, u_N, \beta\}$.

$$(II.31) \quad \Phi_S(\dot{u}_T, \dot{\beta}; \chi_N) = \underbrace{\mu f(\beta) |R_N^r - \beta^2 C_N u_N|}_{=g(\chi_N) \text{ (notation)}} \|\dot{u}_T\| + \frac{b}{p+1} |\dot{\beta}|^{p+1} + I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}),$$

où $0 \leq p \leq 1$ et $f(\beta) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue décroissante de β . Les lois complémentaires s'écrivent ainsi sur Γ_c :

$$(II.32) \quad \begin{cases} R_N^{ir} &= 0, \\ R_T^{ir} &\in \partial_{\dot{u}_T} \Phi_S(\dot{u}_T, \dot{\beta}; \chi_N), \\ \widetilde{G}_\beta &\in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S(\dot{u}_T, \dot{\beta}; \chi_N), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

La première égalité de (II.32) conduit à l'écriture d'une loi de contact unilatéral avec adhérence. L'explicitation du sous-différentiel $\partial_{\dot{u}_T} \Phi_S$ permet d'aboutir à une loi de frottement avec adhérence. On peut montrer que l'appartenance de R_T^{ir} à ce sous-différentiel est équivalente aux équations (II.33) [CANGÉMI, 1997].

$$(II.33) \quad \|\dot{R}_T^{ir}\| \leq g(\chi_N), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \|\dot{R}_T^{ir}\| < g(\chi_N) &\Rightarrow \dot{u}_T = 0, \\ \|\dot{R}_T^{ir}\| = g(\chi_N) &\Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{u}_T = \lambda R_T^{ir}. \end{cases}$$

L'explicitation de la loi d'évolution de β à partir de l'équation (II.32) fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION II.2.

$$(II.34) \quad \widetilde{G}_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S \iff b|\dot{\beta}|^p = -(\widetilde{G}_\beta)^-,$$

où $(x)^- = \max(0, -x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ est la partie négative.

Preuve.

$$\begin{aligned}
 \widetilde{G}_\beta &\in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S(\dot{u}_T, \dot{\beta}; \chi_N) \\
 &\iff \widetilde{G}_\beta(\gamma - \dot{\beta}) \leq \Phi_S(\dot{u}_T, \gamma; \chi_N) - \Phi_S(\dot{u}_T, \dot{\beta}; \chi_N), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^- \\
 &\quad (\mathbb{R}^- \text{ est l'espace des vitesses admissibles pour } \beta) \\
 &\iff \widetilde{G}_\beta(\gamma - \dot{\beta}) \leq \frac{b}{p+1} |\gamma|^{p+1} - \frac{b}{p+1} |\dot{\beta}|^{p+1} + I_{\mathbb{R}^-}(\gamma) - I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^- \\
 &\iff \widetilde{G}_\beta(\gamma - \dot{\beta}) - \frac{b}{p+1} (|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1}) \leq 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^- \\
 &\iff b|\dot{\beta}|^p = -(\widetilde{G}_\beta)^-.
 \end{aligned}$$

La preuve de cette dernière équivalence nécessite quelques calculs dont on peut faire l'économie en première lecture. On rappelle que $0 \leq p \leq 1$. Nous démontrons d'abord l'implication suivante, puis sa réciproque :

$$b|\dot{\beta}|^p = -(\widetilde{G}_\beta)^- \implies \widetilde{G}_\beta(\gamma - \dot{\beta}) - \frac{b}{p+1} (|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1}) \leq 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^-.$$

L'égalité $b|\dot{\beta}|^p = -(\widetilde{G}_\beta)^-$ implique :

1. si $\widetilde{G}_\beta \geq 0$ alors $\dot{\beta} = 0$, et donc pour tout γ de \mathbb{R}^- , on a :

$$\widetilde{G}_\beta \gamma \leq 0 \leq \frac{b}{p+1} |\gamma|^{p+1}, \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{G}_\beta \gamma - \frac{b}{p+1} |\gamma|^{p+1} \leq 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^-,$$

2. si $\widetilde{G}_\beta \leq 0$ alors $b|\dot{\beta}|^p = -\widetilde{G}_\beta \geq 0$. Pour tout γ de \mathbb{R}^- , on a :

$$(II.35) \quad |\gamma| = -\gamma \quad \text{et} \quad |\dot{\beta}| = -\dot{\beta}.$$

On distingue trois cas :

- (a) Si $\gamma = 0$, en multipliant l'égalité $b|\dot{\beta}|^p = -\widetilde{G}_\beta$ par $|\dot{\beta}|$ et en tenant compte du fait que $0 \leq p \leq 1$, on obtient l'inégalité cherchée.

- (b) Si $\gamma < 0$ et $\frac{1}{1+p} |\gamma|^p - |\dot{\beta}|^p \geq 0$, alors on a :

$$(II.36) \quad \left(\frac{1}{1+p} |\gamma|^p - |\dot{\beta}|^p \right) |\gamma| \geq 0 \geq \frac{-p}{1+p} |\dot{\beta}|^{p+1} = \left(-1 + \frac{1}{p+1} \right) |\dot{\beta}|^{p+1}.$$

- (c) Si $\gamma < 0$ et $\frac{1}{1+p} |\gamma|^p - |\dot{\beta}|^p \leq 0$, en constatant que l'on a :

$$-\frac{1}{1+p} |\gamma|^{p+1} \left(\frac{p}{(p+1)^{1/p+1}} - 1 \right) \leq \frac{1}{1+p} |\gamma|^{p+1},$$

et en utilisant l'hypothèse $\frac{1}{1+p} |\gamma|^p \leq |\dot{\beta}|^p$, on obtient :

$$-|\dot{\beta}|^p \left(\frac{p}{(p+1)^{1/p+1}} - 1 \right) |\gamma| \leq \frac{1}{1+p} |\gamma|^{p+1}.$$

En réutilisant l'hypothèse sous la forme $|\gamma|/(1+p)^{1/p} \leq |\dot{\beta}|$, on a encore :

$$|\dot{\beta}|^p \left(-\frac{p}{p+1} |\dot{\beta}| + |\gamma| \right) \leq \frac{1}{1+p} |\gamma|^{p+1}.$$

Ce qui permet de retrouver l'inéquation (II.36).

Les deux cas 2b et 2c, conduisent donc à :

$$\left(-1 + \frac{1}{p+1} \right) |\dot{\beta}|^{p+1} \leq \left(\frac{1}{1+p} |\gamma|^p - |\dot{\beta}|^p \right) |\gamma|, \quad \forall \gamma < 0.$$

En utilisant (II.35) et en multipliant l'équation précédente par b on obtient donc :

$$-b|\dot{\beta}|^p(\gamma + |\dot{\beta}|) - \frac{b}{p+1} (|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1}) \leq 0, \quad \forall \gamma < 0.$$

Ce qui conduit à l'inégalité recherchée en utilisant l'hypothèse et le résultat pour $\gamma = 0$.

L'implication suivante est maintenant prouvée :

$$b|\dot{\beta}|^p = -(\widetilde{G}_\beta)^- \iff \widetilde{G}_\beta(\gamma - \dot{\beta}) - \frac{b}{p+1} (|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1}) \leq 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^-$$

1. si $\widetilde{G}_\beta \geq 0$ a-t-on $\dot{\beta} = 0$?

Par l'absurde, si $\dot{\beta} \neq 0$ alors $\dot{\beta} < 0$, et pour γ tel que $\dot{\beta} < \gamma < 0$, on a : $\gamma - \dot{\beta} > 0$ et $|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1} < 0$, d'où : $\widetilde{G}_\beta \leq \frac{b}{p+1} \left(\frac{|\gamma|^{p+1} - |\dot{\beta}|^{p+1}}{\gamma - \dot{\beta}} \right) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

2. si $\widetilde{G}_\beta \leq 0$ a-t-on $b|\dot{\beta}| = -\widetilde{G}_\beta$?

On pose : $b|\dot{\beta}| = -\widetilde{G}_\beta + x$ avec $x \in \mathbb{R}$. On choisit $\gamma \leq 0$ tel que $|\gamma|^{p+1} = k|\dot{\beta}|^{p+1}$ avec $k \geq 0$, i.e. $|\gamma| = k^{1/(p+1)}|\dot{\beta}|$. On a alors :

$$\widetilde{G}_\beta |\dot{\beta}| (k^{1/(p+1)} - 1) - \frac{b}{p+1} |\dot{\beta}|^{p+1} (k - 1) \geq 0.$$

(a) si $|\dot{\beta}| \neq 0$, alors, en divisant l'inégalité précédente par $|\dot{\beta}|$ et en utilisant $b|\dot{\beta}| = -\widetilde{G}_\beta + x$, on obtient après arrangement : $\widetilde{G}_\beta [(k^{1/(p+1)} - 1)(p+1) - (k-1)] - x(k-1) \geq 0$.

i. si $k > 1$, on a : $x \leq \underbrace{\left[(p+1) \frac{k^{1/(p+1)} - 1}{k-1} - 1 \right]}_{\rightarrow 0^- \text{ lorsque } k \rightarrow 1^+} \widetilde{G}_\beta.$

ii. si $k < 1$, on a : $x \geq \underbrace{\left[(p+1) \frac{k^{1/(p+1)} - 1}{k-1} - 1 \right]}_{\rightarrow 0^+ \text{ lorsque } k \rightarrow 1^-} \widetilde{G}_\beta.$

D'où $x = 0$, ce qui démontre l'égalité $b|\dot{\beta}|^p = -\widetilde{G}_\beta$.

(b) si $|\dot{\beta}| = 0$, alors par hypothèse, on a : $-\widetilde{G}_\beta - \frac{b}{p+1} |\gamma|^p \leq 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^-,$

soit : $0 \geq \widetilde{G}_\beta \geq -\frac{b}{p+1} |\gamma|^p.$

En faisant tendre γ vers 0 par valeur négative, on obtient donc : $\widetilde{G}_\beta = 0 = -b|\dot{\beta}|^p.$

Ce qui achève la preuve. □

En utilisant les lois d'état (II.11), (II.12), (II.14) et (II.15), ainsi que les lois complémentaires (II.32 - première équation), (II.33) et (II.34 - second membre de l'équivalence), on obtient le modèle de comportement interfacial donné par les équations (II.37) à (II.39).

Contact unilatéral avec adhésion

$$(II.37) \quad -R_N^r + \beta^2 C_N u_N \geq 0, \quad u_N \geq 0, \quad (-R_N^r + \beta^2 C_N u_N) u_N = 0.$$

Frottement de Coulomb avec adhésion

$$(II.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_T^r = \beta^2 C_T u_T, \quad R_N^r = R_N, \\ \|R_T - R_T^r\| \leq \mu f(\beta) |R_N - \beta^2 C_N u_N|, \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \|R_T - R_T^r\| < \mu f(\beta) |R_N - \beta^2 C_N u_N| \Rightarrow \dot{u}_T = 0, \\ \|R_T - R_T^r\| = \mu f(\beta) |R_N - \beta^2 C_N u_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{u}_T = \lambda(R_T - R_T^r). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Evolution de l'intensité d'adhésion

$$(II.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = - \left[\frac{1}{b} \left(w h'(\beta) - \beta (C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2) - k \Delta \beta \right) \right]^{1/p} \quad \text{si } \beta \in [0, 1[, \\ \dot{\beta} \leq - \left[\frac{1}{b} \left(w h'(\beta) - \beta (C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2) - k \Delta \beta \right) \right]^{1/p} \quad \text{si } \beta = 1. \end{array} \right.$$

BILAN DU PARAGRAPHE II.2

La formulation thermodynamique non locale présentée ici aboutit à un modèle de zone cohésive couplant adhérence, frottement et contact unilatéral. Ce modèle, à des variantes près, est dû à RAOUS et al. [1999]. Les variantes proposées concernent un endommagement surfacique non local et un frottement à coefficient variable en fonction du niveau de décohésion.

Dans le paragraphe suivant nous donnons une formulation variationnelle du problème quasi-statique de deux solides élastiques séparés par une zone cohésive, ainsi que le traitement numérique de ce problème.

II.3 Problème quasi-statique : formulation variationnelle et traitement numérique

Pour ce paragraphe, on considère le problème quasi-statique de deux corps en contact adhésif. Par soucis de simplification, les déplacements imposés sur les bords des corps Ω^1 et Ω^2 sont supposés nuls, les constantes p et k du modèles prennent les valeurs spécifiques $p = 1$ et $k = 0$ et la fonction $h(\beta)$ est choisie telle que $h(\beta) = \beta$. Ici, comme dans le paragraphe précédent, les résultats présentés sont dus en grande partie à CANGÉMI [1997] et à RAOUS et al. [1999]. Les

contributions personnelles de l'auteur concernant l'extension du résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème discrétisé en temps au cas de l'utilisation d'une θ -méthode pour l'intégration numérique de l'équation différentielle d'évolution de la variable β (jusqu'ici résolue par une méthode d'Euler implicite); ce qui fait l'objet de la proposition II.4 en particulier. Un accent est mis sur les performances d'une telle méthode dans la résolution numérique du problème par une méthode de point fixe sur la variable d'endommagement : découplage des problèmes de contact frottant à β fixé et de l'évolution de β .

II.3.1 Formulation variationnelle du problème quasi-statique

Sous les hypothèses formulées ci-dessus, le problème aux limites s'écrit :

Problème aux limites

Trouver les déplacements u^α tels que :

$$(II.40) \quad \begin{cases} \varepsilon^\alpha = \nabla_s u^\alpha & \text{dans } \Omega^\alpha \\ \operatorname{div} \sigma^\alpha + f^\alpha = 0 & \text{dans } \Omega^\alpha \\ \sigma^\alpha = A^\alpha : \varepsilon^\alpha & \text{dans } \Omega^\alpha \\ \sigma^\alpha \cdot n^\alpha = F^\alpha & \text{sur } \partial\Omega_F^\alpha \\ u^\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega_U^\alpha \\ u^2 - u^1 = u_N n + u_T & \text{sur } \Gamma_c \\ \sigma^1 \cdot n^1 = -\sigma^2 \cdot n^2 = R_N n + R_T & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad \text{pour } \alpha = 1, 2,$$

avec sur Γ_c :

$$(II.41) \quad \begin{cases} \text{équation de contact unilatéral avec adhésion (II.37),} \\ \text{équation de frottement de Coulomb avec adhésion (II.38),} \\ \text{équation d'évolution de } \beta \text{ (II.39).} \end{cases}$$

On introduit les ensembles suivants :

$$(II.42) \quad \begin{cases} V^\alpha = \{v^\alpha \in [H^1(\Omega^\alpha)]^m; v^\alpha = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega_U^\alpha\}, \\ V = V^1 \times V^2, \\ K = \{v = (v^1, v^2) \in V; v_N \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}, \\ H = L^\infty(\Gamma_c). \end{cases}$$

La norme sur V est donnée par $\|v\|_V = \|v^1\|_{V^1} + \|v^2\|_{V^2}$ pour tout v dans V et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité sur $H^{-1/2}(\Gamma_c) = \left(H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)\right)'$. On suppose les forces volumiques et surfaciques assez régulières :

$$(II.43) \quad \begin{cases} f \in W^{1,2}(0, T; [L^2(\Omega^1)]^m \times [L^2(\Omega^2)]^m), \\ F \in W^{1,2}(0, T; [L^2(\partial\Omega_F^1)]^m \times [L^2(\partial\Omega_F^2)]^m), \end{cases}$$

ce qui assure que $\phi \in W^{1,2}(0, T; V)$, où (somme sur les indices répétés) :

$$(II.44) \quad \forall v \in V, \quad (\phi, v) = \int_{\Omega^\alpha} f^\alpha \cdot v^\alpha dx + \int_{\partial\Omega_F^\alpha} F^\alpha \cdot v^\alpha ds.$$

En se donnant des conditions initiales en déplacement et sur β , $u_0 \in K$, $\beta_0 \in H \cap [0, 1]$, le problème variationnel est une généralisation du problème quasi-statique de contact unilatéral avec frottement considéré dans [COCU et al., 1996] auquel s'ajoute un terme de couplage avec l'adhérence.

Problème variationnel

Trouver $u \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\beta \in W^{1,2}(0, T; H)$ tels que $u(0) = u_0$, $\beta(0) = \beta_0$ et $u(t) \in K$ p.p. dans $[0, T]$ et :

$$(II.45) \quad \begin{cases} a(u, v - \dot{u}) + j(\beta, u, v) - j(\beta, u, \dot{u}) + c_T(\beta, u, v - \dot{u}) \geq (\phi, v - \dot{u}) \\ \hspace{15em} - \langle R_N, v_N - \dot{u}_N \rangle \quad \forall v \in V, \\ -\langle R_N, z_N - u_N \rangle + c_N(\beta, u, z - u) \geq 0 \quad \forall z \in K, \\ \dot{\beta} = y(\beta, u) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

où on a posé :

$$(II.46) \quad \begin{cases} a : \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad (u, v) \longmapsto \int_{\Omega^\alpha} A_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{ij}(u^\alpha) \varepsilon_{kl}(v^\alpha) dx, \\ j : \quad H \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad (\beta, u, v) \longmapsto \int_{\Gamma_c} \mu f(\beta) |R_N^*(Pu^1) + \beta^2 C_N u_N| \|v_T\| ds, \\ c_N : \quad H \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad (\beta, u, v) \longmapsto \int_{\Gamma_c} \beta^2 C_N u_N v_N ds, \\ c_T : \quad H \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad (\beta, u, v) \longmapsto \int_{\Gamma_c} \beta^2 C_T u_T \cdot v_T ds, \\ y : \quad H \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad (\beta, u) \longmapsto -\frac{1}{b} \left(w - \beta (C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2) \right)^-. \end{cases}$$

Dans la définition de j , $(\cdot)^* : H^{-1/2}(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Gamma_c)$ est une application linéaire compacte [DUVAUT, 1980] et P est une projection de $W^{1,2}(0, T; V^1)$ sur V_0^1 telle que :

$$(II.47) \quad V_0^1 = \left\{ r^1 \in W^{1,2}(0, T; V^1); \quad \forall \eta \in L^2(0, T; V^1), \quad \eta = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c \times]0, T[, \right. \\ \left. \int_0^T a^1(r^1, \eta) dt = \int_0^T (f^1, \eta)_{[L^2(\Omega^1)]^m} dt + \int_0^T (F^1, \eta)_{[L^2(\partial\Omega_F^1)]^m} dt \right\}.$$

En supposant que la forme bilinéaire a est coercive et continue sur $V \times V$ (inégalités (II.48)), que $\mu f(\beta)$ est dans $L^\infty(\Gamma_c)$, que j satisfait la propriété (II.49), en posant $c = c_N + c_T$, en notant x^i la valeur de la variable x au pas de temps t^i ($t^i = iT/n = i\Delta t$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1, \dots, n-1$), en utilisant un schéma implicite $\dot{x}^i = (x^{i+1} - x^i)/\Delta t$ et une θ -méthode pour l'intégration numérique de l'équation différentielle d'évolution de β , on obtient une succession de problèmes incrémentaux notés P^i (II.50-II.51).

$$(II.48) \quad \begin{cases} \exists M > 0, & \forall u \in V, \forall v \in V, & |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \\ \exists m > 0, & \forall u \in V, & a(u, u) \geq m \|u\|_V^2. \end{cases}$$

$$(II.49) \quad \begin{cases} \exists C > 0, & \forall u, \hat{u}, v, \hat{v} \in V_0^1, \\ |j(\beta, u, v) + j(\beta, \hat{u}, \hat{v}) - j(\beta, u, \hat{v}) - j(\beta, \hat{u}, v)| \leq |\mu f(\beta)| C \|u - \hat{u}\|_V \|v - \hat{v}\|_V. \end{cases}$$

II.3.2 Traitement numérique, problème incrémental, θ -méthode

Problème incrémental P^i

Trouver $u^i \in K, \beta^i \in H$ tels que :

$$(II.50) \quad \begin{aligned} a(u^{i+1}, v - u^{i+1}) + j(\beta^{i+1}, u^{i+1}, v - u^i) - j(\beta^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \\ + c(\beta^{i+1}, u^{i+1}, v - u^{i+1}) \geq (\phi^{i+1}, v - u^{i+1}), \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

$$(II.51) \quad \beta^{i+1} = \beta^i + \Delta t [\theta y(\beta^{i+1}, u^{i+1}) + (1 - \theta)y(\beta^i, u^i)], \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_c.$$

Ces problèmes incrémentaux sont résolus par l'utilisation d'une méthode de point fixe : à chaque itération de point fixe, une approximation de la valeur de β^{i+1} est utilisée pour résoudre l'inéquation quasi-variationnelle (II.50) et ainsi obtenir une estimation de la valeur de u^{i+1} ; cette valeur est alors utilisée pour calculer une nouvelle approximation de β^{i+1} à partir de (II.51). La résolution de (II.50) s'appuie sur des algorithmes de minimisation sous contrainte dus à RAOUS et al. [1988] et à LEBON et RAOUS [1992]. Précisément, nous employons ici une méthode de surrelaxation avec projection sur le convexe des déplacements admissibles (méthode SORP). L'algorithme général correspondant à la résolution couplée de (II.50) et (II.51) est le suivant :

$$(II.52) \quad \left[\begin{array}{l} \text{boucle : incrément de temps : } i + 1 \text{ (} u^i, \beta^i \text{ donnés ; on cherche } u^{i+1}, \beta^{i+1} \text{)} \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle : couplage adhérence/frottement : point fixe } \nu \\ \text{initialisation : } \beta_{\nu=0}^{i+1} = \beta^i \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle : problème de contact frottant à endommagement donné} \\ \text{résolution itérative de l'inéquation quasi-variationnelle du} \\ \text{problème de frottement par la méthode SORP} \longrightarrow \boxed{u_{\nu}^{i+1}} \end{array} \right. \\ \text{évolution de l'endommagement (méthode d'intégration : } \theta\text{-méthode)} \\ \beta_{\nu+1}^{i+1} = \beta^i + \Delta t [\theta y(\beta_{\nu+1}^{i+1}, u_{\nu}^{i+1}) + (1 - \theta)y(\beta^i, u^i)] \longrightarrow \boxed{\beta_{\nu+1}^{i+1}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

REMARQUE II.3. Lorsque la puissance p est prise égale à 1, y est linéaire en β (sous réserve de traiter convenablement la partie négative par ailleurs) et peut donc s'inverser facilement. La présence de $y(\beta_{\nu+1}^{i+1}, u_{\nu}^{i+1})$ dans l'algorithme ne pose pas de problèmes supplémentaires dans ce cas là. Lorsque $0 < p < 1$, une méthode de recherche de point fixe d'application non linéaire doit être envisagée (point fixe, Newton-Raphson,...).

Dans l'algorithme précédent, la résolution du problème de contact frottant à endommagement donné passe par une méthode de point fixe sur les seuils de glissement dont la convergence n'est assurée que si $|\mu f(\beta)|_{L^\infty(\Gamma_c)} < m/C$ ([COCU, 1984]). En notant $r(\beta)$ la solution de ce problème pour tout β dans H , et en notant $s(\bar{u}) = \beta$ la solution de $\beta = \beta^i + \Delta t(\theta y(\beta, \bar{u}) + (1 - \theta)y(\beta^i, u^i))$ pour tout \bar{u} dans K , l'algorithme proposé consiste à trouver le point fixe de l'application $T = r \circ s : K \rightarrow K$. On peut montrer ([CANGÉMI, 1997]) que T est une contraction pour Δt suffisamment petit, dès lors que l'on a la condition suivante sur l'application s :

$$(II.53) \quad \begin{cases} \exists \bar{k} > 0 \quad \forall u, \tilde{u} \in K, \\ |\beta - \tilde{\beta}| = |s(u) - s(\tilde{u})| \leq \bar{k} \Delta t \|u - \tilde{u}\| (\|u\| + \|\tilde{u}\|) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas de l'utilisation d'une θ -méthode, l'unicité de la solution est obtenue en démontrant la proposition suivante :

PROPOSITION II.4. L'application s vérifie la condition (II.53) dans le cas de l'utilisation d'une θ -méthode.

Preuve.

Par soucis de clarté, on pourra faire l'économie de cette preuve en première lecture. Dans ce qui suit β^i et u^i sont donnés. Il s'agit de montrer que $\forall u, \tilde{u} \in K$, les solutions respectives β et $\tilde{\beta}$ de $\beta = \beta^i + \Delta t(\theta y(\beta, u) + (1 - \theta)y(\beta^i, u^i))$ et de $\tilde{\beta} = \beta^i + \Delta t(\theta y(\beta, \tilde{u}) + (1 - \theta)y(\beta^i, u^i))$, vérifient la propriété suivante :

$$(II.54) \quad \exists \bar{k} > 0, \quad |\beta - \tilde{\beta}| \leq \bar{k} \Delta t |u - \tilde{u}| \quad \|u\| + |\tilde{u}| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_c.$$

On rappelle que l'on a :

$$y(\beta, u) = -\frac{1}{b} \left(w - \beta \underbrace{(C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2)}_{=\hat{c}(u) \text{ (notation)}} \right)^-.$$

On distingue deux cas :

1. Si $w - \beta^i \hat{c}(u^i) \geq 0$, $y(\beta^i, u^i) = 0$ et on retrouve le cas d'une méthode d'Euler implicite en changeant Δt en $\theta \Delta t$. La propriété recherchée (II.54) est alors obtenue (voir CANGÉMI [1997]), en notant que $\theta \leq 1$.
2. Si $w - \beta^i \hat{c}(u^i) < 0$, deux cas se présentent :

(a) si $w - \beta \hat{c}(u) \geq 0$, alors l'équation générique s'écrit :

$$\beta = \beta^i + \frac{\Delta t}{b} (1 - \theta) (w - \hat{c}(u^i) \beta^i),$$

et la condition (2a) devient : $w - \hat{c}(u) A \geq 0$, où on a posé :

$$A = \beta^i + \frac{\Delta t}{b} (1 - \theta) (w - \hat{c}(u^i) \beta^i).$$

(b) si $w - \beta \hat{c}(u) < 0$, alors l'équation générique s'écrit :

$$\beta = \beta^i + \frac{\Delta t}{b} [w - \theta \hat{c}(u) \beta - (1 - \theta) \hat{c}(u^i) \beta^i],$$

soit encore :

$$\beta = \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b} [w - (1 - \theta) \hat{c}(u^i) \beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b} \theta \hat{c}(u)}.$$

La condition (2b) devient alors :

$$w - \hat{c}(u) \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b} [w - (1 - \theta) \hat{c}(u^i) \beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b} \theta \hat{c}(u)} < 0,$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme : $w - \hat{c}(u) A < 0$.

On est donc conduit à la définition de s suivante :

$$(II.55) \quad \beta = s(\beta) = \begin{cases} (1) \quad \beta^i + \frac{\Delta t}{b} (1 - \theta) (w - \hat{c}(u^i) \beta^i) & \text{si } w - \hat{c}(u) A \geq 0, \\ (2) \quad \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b} [w - (1 - \theta) \hat{c}(u^i) \beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b} \theta \hat{c}(u)} & \text{si } w - \hat{c}(u) A < 0. \end{cases}$$

On distingue 4 cas :

cas 1 : u et \tilde{u} vérifient (1). On a alors : $|\beta - \tilde{\beta}| = 0$ et la propriété (II.54) est obtenue pour tout $\bar{k} > 0$.

cas 2 : u vérifie (1) et \tilde{u} vérifie (2). On a alors :

$$|\beta - \tilde{\beta}| = \left| \beta^i + \frac{\Delta t}{b}(1 - \theta)(w - \hat{c}(u^i)\beta^i) - \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b}[w - (1 - \theta)\hat{c}(u^i)\beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b}\theta\hat{c}(\tilde{u})} \right|.$$

En remarquant que $1/|1 + \Delta t/b\theta\hat{c}(\tilde{u})| \leq 1$, on obtient après arrangement : $|\beta - \tilde{\beta}| \leq \Delta t/b\theta |\hat{c}(\tilde{u})A - w|$, avec $|\hat{c}(\tilde{u})A - w| = -w + \hat{c}(\tilde{u})A$ car \tilde{u} vérifie (2). D'où encore :

$$|\beta - \tilde{\beta}| \leq \frac{\Delta t}{b}\theta(-w + \hat{c}(\tilde{u})A) + \underbrace{\frac{\Delta t}{b}\theta(w - \hat{c}(u)A)}_{\geq 0 \text{ car } u \text{ vérifie (1)}}.$$

Soit enfin :

$$|\beta - \tilde{\beta}| \leq \frac{\Delta t}{b}\theta(\hat{c}(\tilde{u}) - \hat{c}(u))A.$$

Par ailleurs, on peut montrer ([CANGÉMI, 1997]) que :

$$\forall u, \tilde{u} \in K, \quad |\hat{c}(\tilde{u}) - \hat{c}(u)| \leq C_m\sqrt{2}|u - \tilde{u}||u| + |\tilde{u}|,$$

où C_m est une constante positive. Ce qui donne finalement :

$$|\beta - \tilde{\beta}| \leq \frac{\Delta t}{b}\theta|A|C_m\sqrt{2}|u - \tilde{u}||u| + |\tilde{u}|.$$

cas 3 : u vérifie (2) et \tilde{u} vérifie (1). Ce cas est similaire au précédent.

cas 4 : u vérifie (2) et \tilde{u} vérifie (2). On a :

$$\begin{aligned} |\beta - \tilde{\beta}| &= \left| \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b}[w - (1 - \theta)\hat{c}(u^i)\beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b}\theta\hat{c}(u)} - \frac{\beta^i + \frac{\Delta t}{b}[w - (1 - \theta)\hat{c}(u^i)\beta^i]}{1 + \frac{\Delta t}{b}\theta\hat{c}(\tilde{u})} \right|, \\ &\leq \left\{ \beta^i + \frac{\Delta t}{b}[w - (1 - \theta)\hat{c}(u^i)\beta^i] \right\} \left\{ \frac{\Delta t}{b}\theta(\hat{c}(\tilde{u}) - \hat{c}(u)) \right\}, \\ &\leq \frac{\Delta t}{b}\theta C_m\sqrt{2}|u - \tilde{u}||u| + |\tilde{u}| \left| \beta^i + \frac{\Delta t}{b}[w - (1 - \theta)\hat{c}(u^i)\beta^i] \right|, \\ &\leq \frac{\Delta t}{b}\theta C_m\sqrt{2}|u - \tilde{u}||u| + |\tilde{u}| \underbrace{\left| \beta^i + \frac{\Delta t}{b}w \right|}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

En posant $\bar{k} = C_m\frac{\sqrt{2}}{b}(\beta^i + \frac{\Delta t}{b}w)$ et en constatant que $\theta \leq 1$, on a bien la proposition cherchée. Ce qui achève la preuve. \square

Discrétisation temporelle : condition sur le choix de Δt

Dans le cas d'une liaison interfaciale simple unidimensionnelle sollicitée en traction normale ($u_T = 0$ et $u_N > 0$), on peut remarquer que l'utilisation d'une méthode d'Euler implicite ($\theta = 1$) conduit à l'expression suivante (si $w - \beta C_N u_N^2 \leq 0$) :

$$(II.56) \quad \beta_{\nu+1}^{i+1} = \frac{t_c\beta + \Delta t}{t_c + \Delta t(u_{N\nu}^{i+1}/u_{N0})^2},$$

où on a posé :

$$(II.57) \quad t_c = \frac{b}{w}, \quad u_{N0} = \sqrt{\frac{w}{C_N}}.$$

Par conséquent, si l'incrément de temps Δt est très supérieur au temps t_c , l'équation (II.56) se réduit à : $\beta_{\nu+1}^{i+1} \simeq (u_{N0}/u_{N\nu}^{i+1})^2$ et la sensibilité de l'évolution de la variable β à la vitesse de sollicitation n'est plus rendue. De plus, la précision de la résolution s'améliore lorsque Δt est petit. Une condition sur Δt peut donc être définie de la manière suivante :

$$(II.58) \quad \Delta t \ll t_c = \frac{b}{w}.$$

θ -méthode pour $\theta = 1/2$

Sur un tel exemple unidimensionnel, la mise en œuvre d'une θ -méthode révèle que la résolution numérique peut être optimisée pour $\theta = 1/2$ (méthode des trapèzes) [MONERIE et RAOUS, 1997]. Cette méthode permet le choix d'un pas de temps environ 7 fois plus grand pour obtenir la même précision que les méthodes implicite ($\theta = 1$) et explicite ($\theta = 0$) (FIG. II.2). Pour $\theta = 0$, l'endommagement est sous-estimé à chaque itération. La résistance interfaciale étant ainsi surestimée, le saut de déplacement interfacial est alors lui-même sous-estimé à l'itération suivante. La situation est donc celle d'un retard sur la solution. Inversement, pour $\theta = 1$, a méthode purement explicite conduit à une anticipation de la solution.

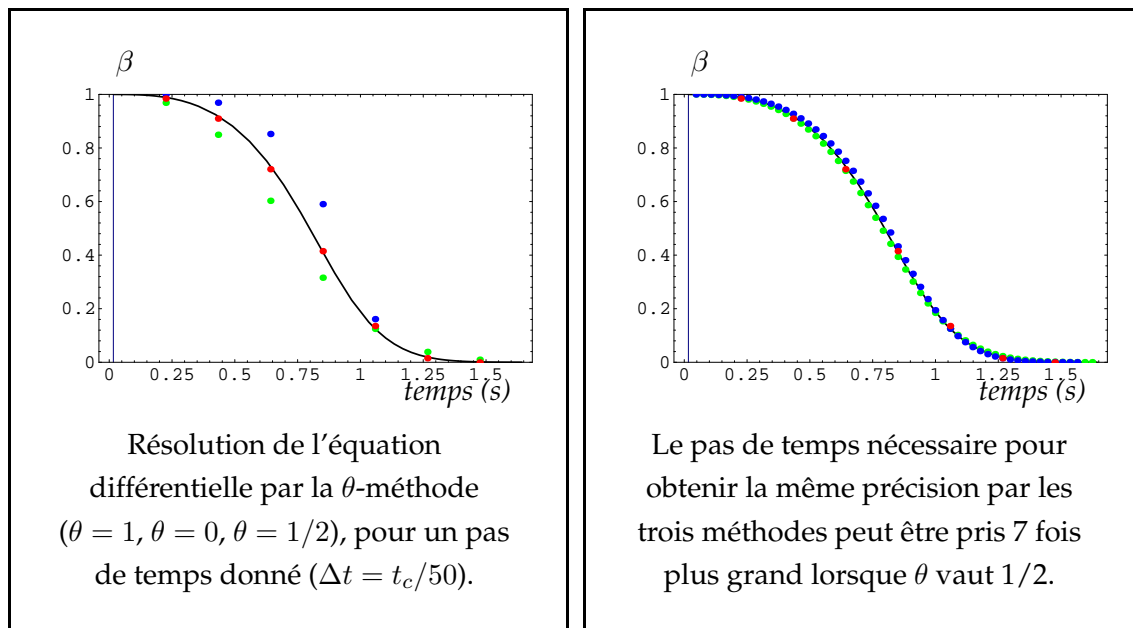


FIG. II.2 – Evolution de l'endommagement pour une liaison interfaciale seule sollicitée en traction normale à vitesse constante. [— intégration exacte, ● Euler explicite ($\theta = 0$), ● Euler implicite ($\theta = 1$), ● “trapèzes” ($\theta = 1/2$)]

BILAN DU PARAGRAPHE II.3

La formulation variationnelle du problème quasi-statique de solides cohésifs conduit au couplage d'une inéquation quasi-variationnelle, d'une inéquation variationnelle et d'une

équation différentielle en β (voir (II.45)). En utilisant un schéma de discrétisation temporelle implicite pour \dot{u} et une θ -méthode d'intégration de l'équation différentielle, une succession de problèmes incrémentaux est obtenue. Ces problèmes sont résolus par une méthode de point fixe portant sur u et dont l'application est une contraction pour $\theta \in [0, 1]$. L'algorithme proposé (voir (II.52)) converge donc et sa performance est améliorée pour $\theta = 1/2$.

II.4 Interprétation et analyse mécanique du modèle et de ses variantes

Dans ce paragraphe, le modèle de comportement d'interface donné par les équations (II.37) à (II.39) est analysé sur des exemples simples, le plus souvent unidimensionnels. L'objectif est de comprendre le comportement mécanique proposé par le modèle et le rôle des différents paramètres mécaniques que nous rappelons :

- C_N et C_T sont les raideurs initiales normale et tangentielle de la liaison interfaciale (en MPa/m),
- w est une énergie de référence à partir de laquelle est défini le seuil d'évolution de la variable d'adhésion β (en J/m^2),
- μ est le coefficient de frottement de Coulomb lorsque $f(\beta) = 1$ (sans dimension),
- b est un coefficient de viscosité pour l'évolution de l'endommagement interfacial (en Ns/m),
- p est une puissance intervenant dans la loi d'évolution de l'endommagement interfacial (sans dimension),
- k est une constante négative donnant la sensibilité de l'évolution de β en fonction du laplacien de β (en J).

Nous présentons une interprétation mécanique du modèle pour un choix de paramètres simples, puis nous indiquons le rôle d'un coefficient de frottement variable.

II.4.1 Bilan énergétique sur un exemple simple : interface en cisaillement sous pression normale

L'analyse mécanique du modèle pour la situation particulière où $h(\beta) = \beta$, $f(\beta) = 1$, $C_N = C_T = C$, $p = 1$, $k = 0$ a été menée en collaboration avec François-Henri Leroy. Une partie des résultats présentés ici peuvent être trouvés dans [MONERIE, 1996 ; LEROY et RAOUS, 1997 ; MONERIE et RAOUS, 1997].

II.4.1.a Un seuil de décohésion

Une des principales hypothèses mécaniques du modèle est que l'endommagement de l'interface ne débute que lorsque la densité d'énergie élastique atteint *localement* une valeur critique. Cette approche diffère en ce sens de la mécanique de la rupture fragile qui considère l'énergie élastique *globale* (voir les remarques faites au paragraphe I.1).

Dans le modèle proposé, le critère d'évolution de l'endommagement surfacique n'est pas un simple critère de rupture local comme le proposent de nombreux modèles (cisaillement interfacial maximal, par exemple) mais un critère basé sur l'énergie consommée durant le processus de décohésion. De ce point de vue, le modèle est similaire à celui de la mécanique de la rupture. Cette énergie, notée w , est choisie constante en chaque point de l'interface. Elle est supposée être une caractéristique mécanique des matériaux en présence et/ou du troisième corps présent entre deux solides cohésifs. Concernant la condition de propagation de la décohésion, ce paramètre w n'a cependant pas la signification d'un taux de restitution de l'énergie comme dans le critère de Griffith. On rappelle que le critère de Griffith indique que la fissure se propage lorsque le taux de restitution de l'énergie atteint une valeur critique G_c . Ici, l'endommagement interfacial progresse lorsque la force thermodynamique $-\tilde{G}_\beta$ ⁽¹⁾ associée à la variable d'endommagement β devient nulle. Dans cette situation, lorsque l'interface est encore vierge ($\beta = 1$) et pour une vitesse de sollicitation infiniment faible ($[\dot{u}] \simeq 0$), l'énergie stockée dans la liaison interfaciale $1/2(C_N u_N^2 + C_T \|u_T\|^2)$ (soit ici $1/2C\|u\|^2$) est égale à $w/2$. Lorsque la liaison interfaciale est rompue après un trajet de chargement à vitesse infiniment faible, le processus de décohésion a consommé une énergie égale à w . On note en particulier que cette énergie consommée durant tout le processus de décohésion de l'interface ne dépend pas du mode de sollicitation (I, II ou mixte).

L'évolution de la décohésion interfaciale est donc basée à la fois sur un critère de type énergétique (comme c'est le cas pour le critère de Griffith) et sur un critère local en contrainte maximale.

II.4.1.b Le frottement

Un autre idée majeure de ce modèle est de proposer un couplage fort entre l'adhésion et le frottement. On passe progressivement d'un état où la résistance interfaciale est principalement liée à la présence de forces adhésives à un état purement régi par du frottement de Coulomb. Cette transition progressive est une originalité forte du modèle. Jusqu'ici, l'éventuelle prise en compte d'un frottement dans le comportement d'une zone cohésive était le plus souvent réalisée de manière découplée : le frottement n'intervient que lorsque les liaisons adhésives sont totalement rompues (voir [TVERGAARD, 1990a]). La transition de l'adhésion au frottement

⁽¹⁾identifiée ici à $-G_\beta$ puisque $k = 0$

induit dans ce cas une discontinuité de la contrainte de cisaillement interfaciale qui s'avère numériquement pénalisante⁽²⁾.

Pour le cas d'une liaison interfaciale sollicitée en mode II sous pression normale, ce couplage adhésion/frottement conduit donc à une contrainte de cisaillement qui ne s'annule *jamais*, même au-delà de l'amorçage de l'endommagement. Ce couplage joue ainsi incontestablement un rôle stabilisant dans l'évolution de l'endommagement le long de l'interface.

Le seuil de frottement devant être dépassé pour qu'un glissement interfacial apparaisse, une certaine énergie est dissipée par frottement *avant* que le seuil de décohésion ne soit atteint. En pratique, cette énergie doit être limitée tant que la variable β reste égale à 1, i.e. tant que l'endommagement interfacial n'est pas amorcé. Nous proposons dans le paragraphe II.4.2 un modèle à coefficient de frottement variable en fonction du niveau d'endommagement de l'interface qui permet d'éviter cette situation et de renforcer l'idée d'un passage progressif de l'adhésion au frottement.

Dans des conditions de traction normale ($u_N > 0$), le seuil de glissement $\mu|R_N - \beta^2 C_N u_N|$ est nul du fait des conditions de contact unilatéral avec adhésion (II.37) et de la relation $R_N^r = R_N$. Dans des conditions de pression normale, le déplacement normal étant nul ($u_N = 0$), le seuil de glissement vaut $\mu|R_N|$. Tant que la contrainte de cisaillement $\|R_T\|$ reste inférieure à ce seuil, aucun glissement n'est possible (condition initiale $u_T = 0$ et \dot{u}_T dans l'équation (II.38)). Lorsque le seuil de glissement est atteint, un saut de déplacement tangentiel élastique apparaît (cette situation est indiquée plus loin sur la FIG. II.5). Lorsque la liaison adhésive est rompue ($\beta = 0$) une condition de frottement de Coulomb classique est obtenue.

Dans ce cas d'une vitesse de chargement infiniment faible, l'évolution du rapport $|R_N|/\|R_T\|$ en fonction de u_T est donnée sur la FIG. II.3.

REMARQUE II.5. Le comportement interfacial indiqué sur la FIG. II.3 est à rapprocher d'une loi cohésive de type Mohr-Coulomb (FIG. II.4) dont le seuil de cohésion serait variable en fonction de u_T .

II.4.1.c L'évolution visqueuse de l'endommagement interfacial

Une dernière idée forte de ce modèle de comportement d'interface est que les processus physiques qui conduisent à un endommagement interfacial ont des temps caractéristiques d'évolution. On peut penser par exemple pour les systèmes céramique/céramique à un processus d'amorçage-coalescence de microfissures dans le *troisième corps* qui constituent l'*interphase* modélisée ici par une *interface* (sans épaisseur). Cette hypothèse induit une évolution de l'endom-

⁽²⁾Le modèle présenté dans [CHABOCHE et al., 1997a,b] propose de modifier le modèle Tvergaard pour introduire ce passage continu de l'adhésion au frottement.

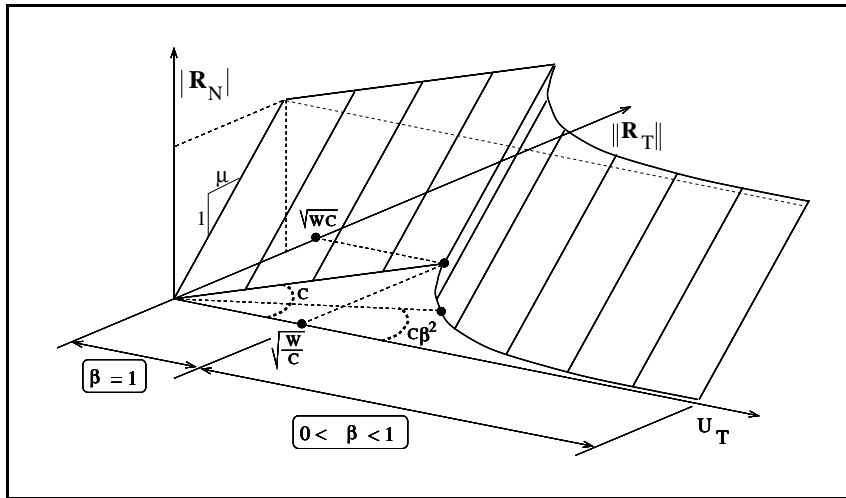


FIG. II.3 – Evolution du rapport $|R_N|/||R_T||$ en fonction de u_T .

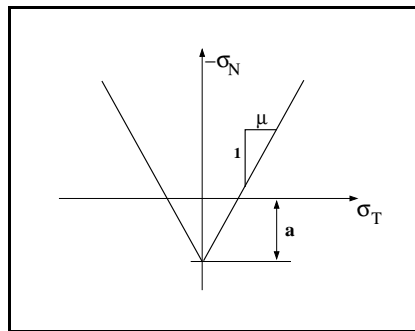


FIG. II.4 – Loi cohésive de type Mohr-Coulomb avec un seuil de cohésion a .

magement déphasée par rapport à la sollicitation de l'interface, ce qui est traduit dans le modèle par une équation différentielle portant sur la variable β .

Dans certains travaux, cette viscosité d'endommagement est introduite comme une simple régularisation numérique. L'intérêt d'une telle régularisation sur les plans mathématique, mécanique et numérique est discuté au chapitre III.

La vitesse d'endommagement $\dot{\beta}$ (membre de gauche dans l'équation (II.39)) est choisie proportionnelle (lorsque $p = 1$) à la différence entre la densité locale d'énergie élastique et sa valeur critique $w\beta/2$. Cette relation implique un comportement interfacial sensible à la vitesse de sollicitation. Durant un processus de décohésion à vitesse de chargement strictement positive, une quantité de l'énergie consommée à l'interface est dissipée par viscosité. La valeur de cette énergie n'est connue que de manière implicite et ne peut pas être en général déterminée analytiquement. Cependant, pour une liaison interfaciale unique sollicitée en mode II à vitesse constante \dot{u}_T (suffisamment grande pour que l'énergie dissipée par viscosité soit prédominante devant les autres énergies mises en jeu dans le processus de décohésion), on peut montrer sans

difficulté que cette énergie dissipée par viscosité (notée E_v) est proportionnelle à $\|\dot{u}_T\|^{1/3}$:

$$(II.59) \quad E_v = b \int_0^\infty \dot{\beta}^2(t) dt \quad \# \quad (Cb^2\|\dot{u}_T\|)^{1/3}.$$

Dans cette situation, la contrainte interfaciale atteint un maximum égal à $(C^2b\|\dot{u}_T\|)^{1/3}(2e)^{-1/3}$ (i.e. croît comme $\|\dot{u}_T\|^{1/3}$) et peut dépasser plusieurs fois le seuil d'endommagement en contrainte $R_0 = \sqrt{wC}$ (voir paragraphe suivant) lorsque la vitesse de sollicitation est localement élevée. La loi puissance ($p \neq 1$) permet de limiter cette valeur de la contrainte maximale interfaciale (voir le paragraphe II.4.3).

La réponse du modèle pour une vitesse de chargement infiniment faible correspond au cas limite d'un coefficient de viscosité tendant vers zéro ($b \rightarrow 0$). L'évolution de la variable d'endommagement β est alors explicite et on a la relation suivante :

$$(II.60) \quad \beta = \frac{w}{C\|[u]\|^2}.$$

II.4.1.d Energies dissipées durant le processus de décohésion interfaciale

Le rôle des différents mécanismes mis en jeu lors de l'évolution de la décohésion interfaciale peut être indiqué de manière simple pour le cas d'une liaison interfaciale seule, en deux dimensions et sollicitée en cisaillement et pression normale à vitesse de chargement constante. Cette sollicitation particulière est caractérisée par les relations $u_N = 0$ et $R_N \leq 0$ (pression normale), $\|\dot{u}_T\| = \dot{u}_T = \text{constante} > 0$ et $R_T = \beta^2 C u_T + \mu |R_N|$ (deux dimensions). Les conditions initiales à $t = 0$ sont $\beta = 1$ ($\dot{\beta} = 0$) et $u_T = 0$. Les équations (II.37) à (II.39) se résument alors à :

$$(II.61) \quad \begin{cases} R_T = \beta^2 C u_T + \mu |R_N|, \\ b\dot{\beta} = w - C u_T^2 \beta. \end{cases}$$

La partie négative $(.)^-$ est supprimée de l'équation différentielle d'évolution de la variable d'endommagement (II.39) en supposant une évolution monotone croissante de l'endommagement. La décroissance de β débute lorsqu'on atteint un déplacement critique $u_0 = \sqrt{w/C}$. Le cisaillement associé à ce déplacement critique est $R_0 + \mu |R_N|$ où $R_0 = \sqrt{wC}$. L'évolution du système est alors décrite par les équations adimensionnées suivantes :

$$(II.62) \quad \begin{cases} \frac{R_T}{R_0} = \beta^2 \frac{u_T}{u_0} + \mu \frac{|R_N|}{R_0}, \\ \frac{bC}{R_0^2} \dot{\beta} = 1 - \left(\frac{u_T}{u_0} \right)^2 \beta. \end{cases}$$

Avant que le déplacement critique u_0 ne soit atteint, le comportement de l'interface est insensible à la vitesse de sollicitation. Au-delà de cette valeur, une vitesse tangentielle strictement croissante conduit à un comportement pour lequel les contraintes admissibles (ligne pleine sur la FIG. II.5) sont plus élevées que celles correspondant au cas quasi-statique (ligne en pointillés). Durant l'évolution de l'endommagement (point P sur la FIG. II.5 : au temps t_P , $\|u_T(t_P)\| > u_0$ et $0 < \beta(t_P) < 1$), une partie de l'énergie donnée à l'interface est stockée et une autre est dissipée. L'énergie dite stockée est celle qui peut être récupérée par une décharge à vitesse infinie (β constant) : elle comprend une partie stockée élastiquement ($E_{\text{stockée}}$) et un surcroît d'énergie stockée par effet visqueux. Les énergies dissipées sont : l'énergie dissipée par endommagement ($E_{\text{endommagement}}$), l'énergie dissipée par friction (E_{friction}) et l'énergie dissipée par viscosité ($E_{\text{viscosité}}$). Ces énergies prennent les valeurs suivantes :

$$(II.63) \quad \begin{cases} E_{\text{stockée}} & = \frac{u_0 R_0}{2} \beta(t_P), \\ E_{\text{endommagement}} & = u_0 R_0 (1 - \beta(t_P)), \\ E_{\text{friction}} & = \mu |R_N| \|u_T(t_P)\|, \\ E_{\text{viscosité}} & = b \int_0^{t_P} \dot{\beta}(t)^2 dt. \end{cases}$$

L'énergie dissipée par frottement *avant* que la liaison interfaciale ne s'endommage reste négligeable devant w tant que la raideur de l'interface est suffisamment grande. Cette condition peut se résumer par $w \gg \mu |R_N| u_0 = \mu |R_N| \sqrt{w/C}$, c'est-à-dire :

$$(II.64) \quad C \gg \frac{(\mu |R_N|)^2}{w}.$$

On tâchera de vérifier cette condition lorsque le modèle de frottement à coefficient variable n'est pas employé, i.e. lorsque $f(\beta) = 1$ (voir les commentaires du paragraphe II.4.2).

II.4.1.e Comportement interfacial pour des chargements cycliques et à vitesses variables

Les chargements macroscopiques complexes que l'on peut rencontrer dans les matériaux composites génèrent des sollicitations aux interfaces entre les différents constituants encore plus complexes. La FIG. II.6 indique le comportement interfacial prévu par le modèle pour des chargements cycliques. Une situation plus détaillée est présentée sur la FIG. II.7 : après une première charge à vitesse constante ① (\dot{u}_1) et une relaxation infinie ②, le déplacement tangentiel ne peut décroître que lorsque l'autre face du cône de Coulomb est atteinte ③ (c'est-à-dire lorsque la contrainte tangentielle décroît de la quantité $2\mu |R_N|$). La recharge est ensuite élastique ④ jusqu'à ce que la quantité $(1 - (u_T/u_0)^2)\beta$ devienne négative (seuil de décohésion variable : voir (II.39)). Enfin la sensibilité du comportement à la vitesse de sollicitation est claire lorsque l'on augmente brusquement la vitesse de chargement ⑤.

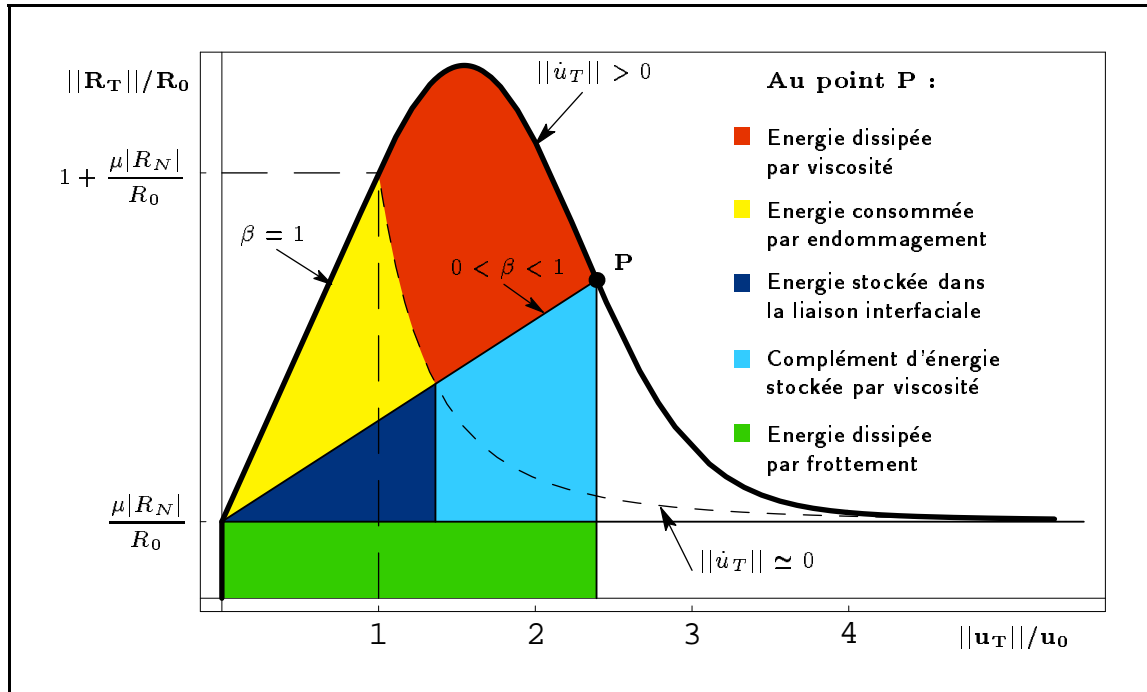


FIG. II.5 – Energies mises en jeu durant le processus de décohésion interfaciale.

II.4.2 Un modèle à coefficient de frottement variable

Comme nous l'avons dit, le modèle conduit à une dissipation par frottement avant que l'endommagement de l'interface ne débute. Si l'on considère que le processus physique à l'origine du frottement entre deux corps est le chevauchement d'aspérités de surface, il semble naturel de limiter ce frottement tant que les liaisons adhésives ne sont pas rompues, du moins partiellement. Une condition énergétique assurant que l'énergie dissipée par frottement avant l'amorçage de l'endommagement reste négligeable devant le seuil énergétique de décohésion a été proposée (équation (II.64)).

Cette limitation peut être obtenue par l'introduction d'un coefficient de frottement variable en fonction du niveau d'endommagement de l'interface. C'est ce que réalise la fonction $f(\beta)$ présente dans l'équation (II.38). Le coefficient de frottement *effectif* $\bar{\mu}$ est alors $\mu \times f(\beta)$. Cette fonction $f(\beta)$ assure que le coefficient de frottement soit égal à μ lorsque l'adhésion est rompue et nul lorsque la liaison interfaciale est vierge ($\beta = 1$). On peut proposer par exemple :

$$(II.65) \quad f(\beta) = 1 - \beta.$$

Dans le cas d'un chargement de l'interface locale quasi-statique, nous avons vu que β décroissait au-delà de u_0 en $1/(u/u_0)^2$. Le coefficient $\bar{\mu}$ croît donc en $\mu(1 - 1/(u/u_0)^2)$. Le comportement interfacial correspondant à cette situation est indiqué sur la FIG. II.8.

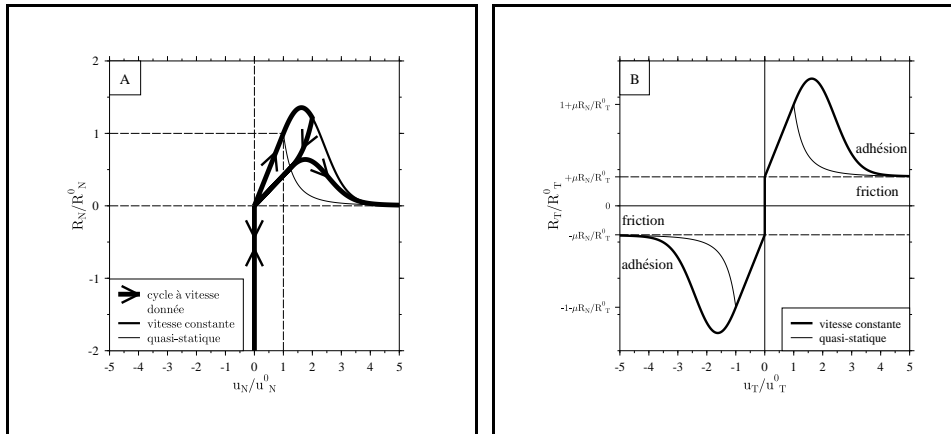


FIG. II.6 – Forces normalisées en fonction du saut de déplacement interfacial normalisé : (A) $R_N - u_N$ pour $u_T = 0$, (B) $R_T - u_T$ pour $u_N = 0$ et $R_N < 0$.

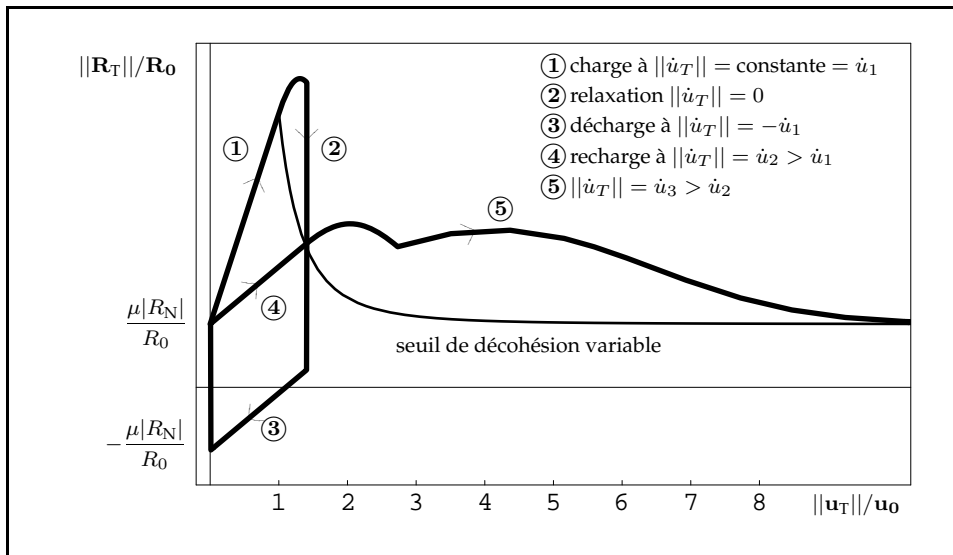


FIG. II.7 – Chargement cyclique d'une liaison interfaciale en deux dimensions sollicitée en cisaillement et sous pression normale à des vitesses de chargement variables.

REMARQUE II.6. On peut noter que dans le cas d'une évolution visqueuse telle qu'elle est présentée sur la FIG. II.5, le modèle proposé de frottement à coefficient variable en fonction de β conduit à un comportement tangentiel (pour des chargements interfaciaux monotones croissants) très similaire à celui du modèle présenté dans [CHABOCHE et al., 1997a,b]. Les énergies mises en jeu durant le processus de décohésion, les mécanismes physiques invoqués, les comportements cyclés ainsi que la sensibilité du comportement à la vitesse de sollicitation sont cependant très différents.

Une particularité intéressante de ce modèle de frottement à coefficient variable est d'induire des hystérésis de frottement qui évoluent au fur et à mesure que l'endommagement interfacial

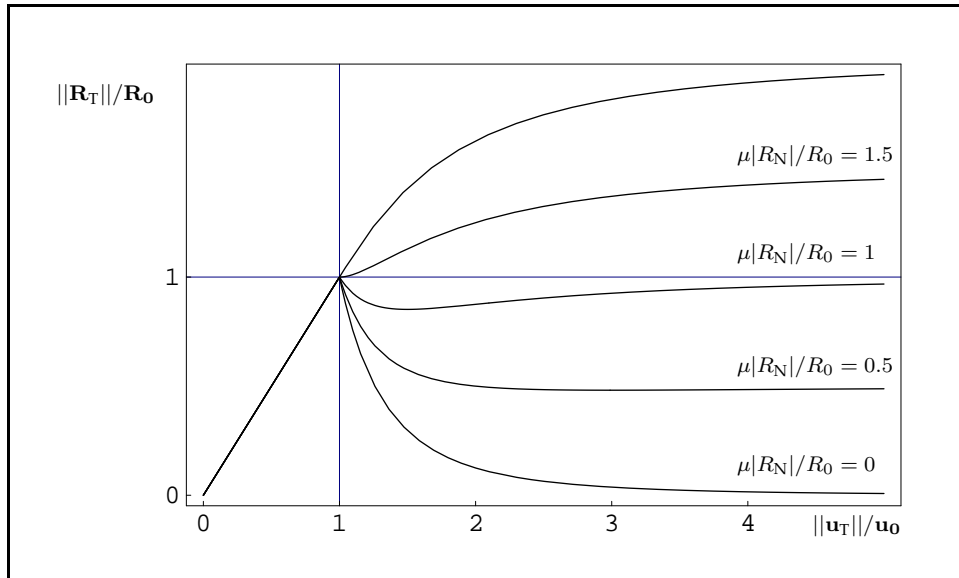


FIG. II.8 – Evolution de $\|R_T\|$ en fonction de $\|u_T\|$ et pour différentes valeurs de $\mu|R_N|$ dans le cas d'un modèle à coefficient de frottement variable en fonction du degré d'endommagement (chargement quasi-statique).

progressive (comparer les FIGURES II.9 et II.10). Enfin, l'interprétation de ce modèle en terme de loi cohésive de type Mohr-Coulomb est donnée sur la FIG. II.11.

II.4.3 Limitation de la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation

La sensibilité d'une structure complète à la vitesse de sollicitation contenant une interface visqueuse est une question délicate du fait des gradients de vitesse le long de l'interface (*voir* [MONERIE et al., 1998]). De forts gradients peuvent conduire à une dissipation par viscosité très élevée. Cette situation peut parfois être préjudiciable. Elle l'est de manière évidente lorsque l'on cherche simplement à éviter les sauts de solution (*voir* paragraphe III.1.2). Il s'agit alors de limiter la sensibilité des modèles à la vitesse de sollicitation. Pour le modèle considéré, cette limitation est réalisée par la puissance p .

Pour une décohésion interfaciale en mode II réalisée sur une liaison interfaciale seule à vitesse constante $\|\dot{u}_T\|$ et si l'énergie dissipée par viscosité est prédominante devant les autres énergies

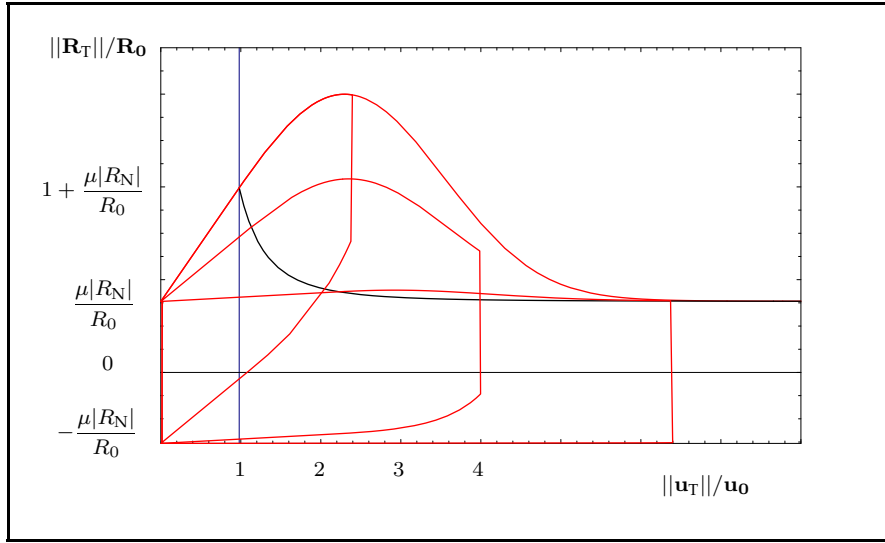


FIG. II.9 – Evolution des hystérésis de frottement dans le cas d'un modèle à coefficient de frottement constant.

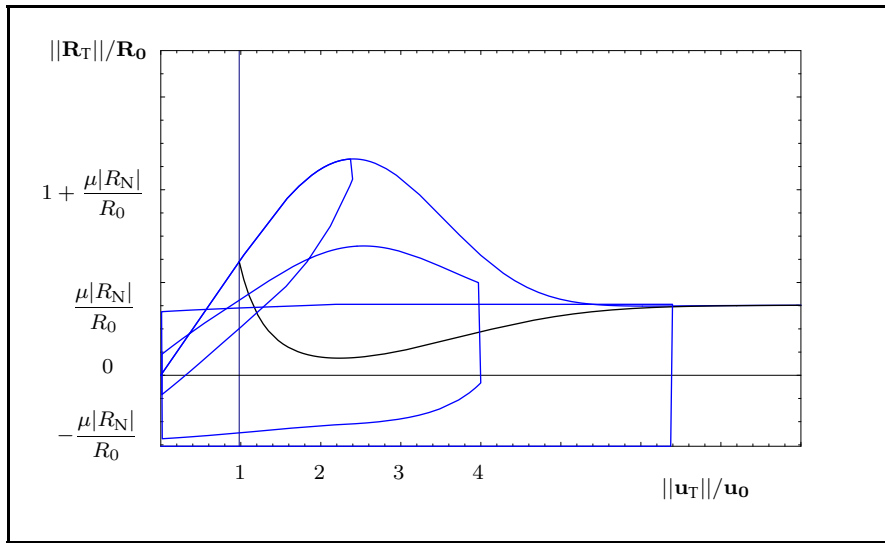


FIG. II.10 – Evolution des hystérésis de frottement dans le cas d'un modèle à coefficient de frottement variable en fonction du degré d'endommagement.

prises en jeu durant le processus de décohésion, la dissipation visqueuse vaut pour ce modèle :

$$(II.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\text{viscosité}}^{0 < p < 1} = \frac{1}{2} \left(C^p b^2 \|\dot{u}_T\|^{2p} \left(\frac{1-p}{2+p} \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{2+p}} \\ \quad \times \Gamma \left(\frac{-2p(1+2p)}{-2+p+p^2} \right) \Gamma \left(\frac{2+3p}{2p} \right) / \Gamma \left(\frac{2p}{1-p} \right) \quad \text{si } 0 < p < 1, \\ E_{\text{viscosité}}^{p=1} = \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{C b^2 \|\dot{u}_T\|^2}{12} \right)^{1/3} \quad \text{si } p = 1, \end{array} \right.$$

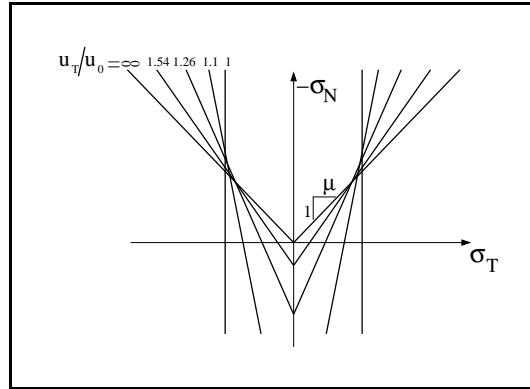


FIG. II.11 – Loi cohésive de type Mohr-Coulomb correspondant au modèle couplant adhésion et frottement avec coefficient de frottement variable en fonction de l’endommagement : le coefficient de frottement est variable avec le seuil de cohésion.

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma d’Euler $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Les relations (II.66) sont obtenues en évaluant la quantité $b \int_0^{+\infty} \dot{\beta}(t)^2 dt$ (voir (II.63)) à partir de la relation $b\dot{\beta}^p = w - C u_T^2 \beta$ (voir (II.39)) où l’on a négligé la quantité w devant les autres termes.

La sensibilité de ce modèle à la vitesse de sollicitation diminue lorsque p tend vers 0, mais la valeur de $E_{\text{viscosité}}$ augmente lorsque p décroît. Cette situation est illustrée sur la FIG. II.12.

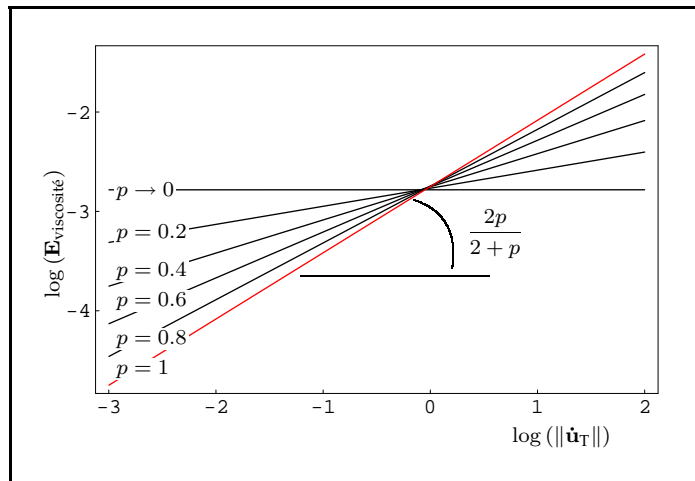


FIG. II.12 – Sensibilité de l’énergie dissipée par viscosité à la vitesse de sollicitation pour une loi puissance (évolution monotone de l’endommagement interfacial pour une vitesse de cisaillement constante).

Si la vitesse de sollicitation locale v_1 est connue, un jeu de paramètres mécaniques $\{w, C, b, p = 1\}$ peut être converti en un jeu $\{w, C, \tilde{b}, 0 < \tilde{p} < 1\}$ qui donne la même dissipation par viscosité à $\|\dot{u}_T\| = v_1$, mais une dissipation visqueuse bien moindre à $\|\dot{u}_T\| = v_2 \gg v_1$. Pour ce faire, on

résout :

$$(II.67) \quad E_{\text{viscosité}}^{0 < p < 1}(\tilde{p}, \tilde{b}) = E_{\text{viscosité}}^{p=1}(b).$$

Cette méthode permet de définir des paramètres du modèles adhésif/frottant qui limitent la sensibilité du comportement interfacial à la vitesse de sollicitation. Ainsi, une loi avec $p \simeq 0$ peut présenter la même énergie de décohésion qu'une loi avec $p = 1$, mais en évitant une sensibilité à la vitesse de sollicitation trop importante (FIG. II.13).

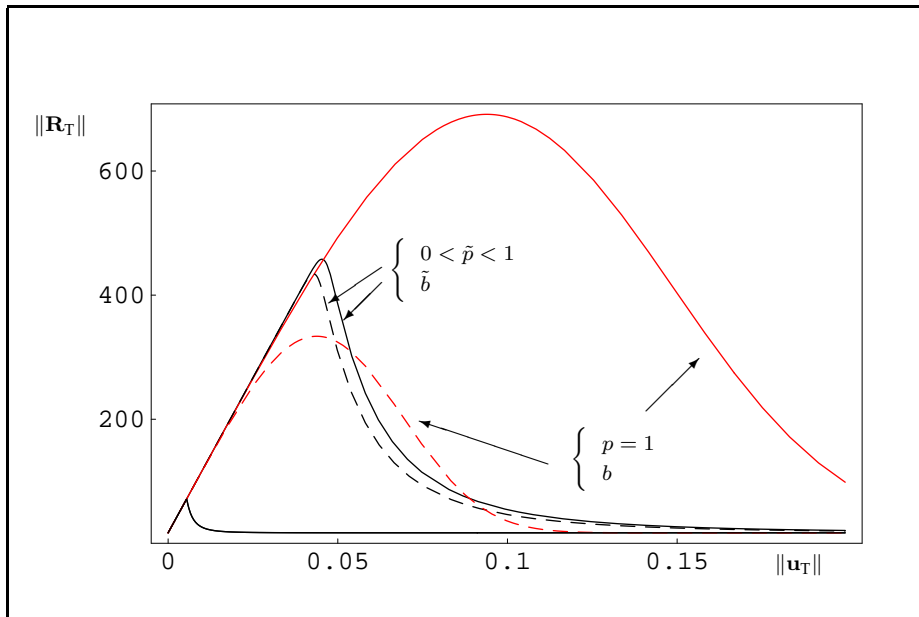


FIG. II.13 – Limitation de la sensibilité à la vitesse de sollicitation pour une loi puissance (ligne pleine : $\|\dot{u}_T\| = v_1$, pointillés : $\|\dot{u}_T\| = v_2 = 10v_1$).

BILAN DU PARAGRAPHE II.4

Comme nous venons de le voir, le modèle de zone cohésive proposé par RAOUS et al. [1999] s'avère particulièrement riche sur le plan mécanique. Les deux idées fortes de ce modèle sont d'une part le couplage adhérence-frottement et d'autre part l'existence d'un temps d'activation des processus de décohésion. Enfin, la prise en compte de conditions de contact unilatéral entre solides cohésifs et l'existence d'un seuil énergétique de décohésion destinent ce modèle à des applications micromécaniques où des phénomènes physiques fins doivent être représentés. En particulier, c'est un outil efficace de modélisation des interfaces fibre/matrice dans les matériaux composites (*voir* chapitre V). Les analyses mécaniques et énergétiques conduites ont permis de mieux comprendre le comportement local induit par ce modèle.

Quelques variantes du modèle ont été proposées. La première concerne la prise en compte d'un frottement à seuil variable en fonction du niveau d'endommagement. Ceci permet

notamment de ne pas consommer d'énergie par frottement avant que la décohésion interfaciale ne débute ; ce qui est légitime si l'on considère le frottement comme issu du chevauchement d'aspérités. La seconde est l'introduction de phénomènes non locaux par une théorie du premier gradient d'endommagement. Ce mémoire ne s'étend pas davantage sur ce gradient de β . Nous soulignons cependant qu'il permet de régulariser de nombreuses situations délicates sur le plan de la décohésion. Enfin, une méthode permettant de limiter la sensibilité du modèle à la vitesse de sollicitation tout en préservant les effets régularisants de la viscosité interfaciale a été présentée.

Une extension du modèle au cas des grandes déformations est donnée dans le paragraphe suivant.

II.5 Extension du modèle aux grandes déformations

Nous proposons ici une formulation des modèles de zone cohésive incluant du frottement et des conditions de contact unilatéral en grandes déformations. Ceci constitue en particulier une extension du modèle précédent au cas de l'élasticité non linéaire. Il s'agit de formuler une loi de contact prenant en compte du frottement de Coulomb et de l'adhérence entre deux solides hyperélastiques dans le cas de grandes déformations. L'application de ce modèle aux matériaux composites concerne :

1. d'une part les matériaux composites à constituants hyperélastiques et/ou élastiques : on peut penser à des stratifiés métal/élastomère pour des sollicitations où la phase métallique reste élastique (cisaillement) ou à des composites à matrice élastomérique et à renforts particuliers métalliques ;
2. d'autre part les sollicitations qui engendrent des déformations élastiques des constituants mais de grands glissements des constituants les uns par rapport aux autres : typiquement les essais de *pull-out* ou de *push-out* sur les systèmes fragile/fragile à fibres longues.

Ce travail a été mené en collaboration avec Anne-Sophie Bretelle et Marius Cocu du LMA. Nous présentons, pour l'essentiel, les résultats synthétisés dans [BRETTELLE et al., 2000] et [BRETTELLE et al., soumis pour publication]. Le détail des développements mathématiques peut être trouvé dans [BRETTELLE, 1999].

Le problème considéré est un problème quasi-statique couplant contact unilatéral, frottement de Coulomb et adhérence en grandes déformations entre deux solides hyperélastiques homogènes et isotropes. Grâce à la cinématique du contact des grandes déformations introduite par CURNIER et al. [1992], HE et al. [1996] et KLARBRING [1995], une formulation thermodynamique eulérienne de ce problème est proposée. Le problème aux limites obtenu couple les équations d'équilibre, les conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb et une inclusion différentielle caractérisant l'évolution de l'intensité d'adhérence.

Cette formulation est donnée dans la configuration actuelle ; configuration dans laquelle les lois de comportement surfaciques trouvent une expression naturelle. Dans le cas particulier de l'hypothèse des petites perturbations, nous retrouvons les résultats des paragraphes précédents.

Dans le cas du contact unilatéral sans frottement entre un solide hyperélastique et un support rigide plan et d'une loi "statique" pour l'intensité d'adhérence β^φ , une formulation par rapport à la configuration de référence du problème précédent nous permet d'étudier le problème aux limites par l'intermédiaire d'un problème de minimum. Cette démarche conduit à un problème classique de minimisation pour lequel nous montrons l'existence d'une solution. Ce résultat étend ceux de BALL [1977] et CURNIER et al. [1992] au contact adhésif. Les problèmes de *pull-out* et *push-out* sur composites à fort contraste de modules (déformation d'un des deux constituants négligeable) entrent dans ce cadre particulier.

II.5.1 Les difficultés liées aux grandes déformations

L'écriture d'un modèle de contact adhésif en grandes déformations est confrontée à plusieurs difficultés d'ordre cinématique, mécanique et mathématique.

II.5.1.a Les difficultés d'ordre cinématique

1. L'adhésion : l'adhésion est ici considérée comme une extension de la notion de cohésion. C'est-à-dire qu'elle se traduit par un effort agissant entre deux points matériels appartenant à deux surfaces distinctes. Cet effort est porté par la droite reliant ces deux points. La situation présentée sur la FIG. II.14(a) est donc exclue.
2. Le contact unilatéral : en grandes déformations, le choix d'une normale pour la gestion du contact unilatéral est délicat (*voir* REMARQUE II.1). Nous avons choisi une approche locale "maître-esclave" qui présente l'avantage de s'adapter à une mise en œuvre numérique. Elle nécessite quelques précautions : notamment, la projection orthogonale d'un point du solide maître sur le solide esclave doit être unique (FIG. II.14(b) : cette situation est exclue pour des raisons de simplicité), la normale au point projeté doit être unique (FIG. II.14(c)).

II.5.1.b Les difficultés d'ordre mécanique

La principale difficulté d'ordre mécanique liée au cadre des grandes déformations est le respect du principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité. Ce principe fort a de nombreuses implications mécaniques (*voir* par exemple [TRUESDELL, 1974]). En ce qui nous concerne, il conduit en outre à chercher une loi de comportement invariante par tout changement de référentiel et

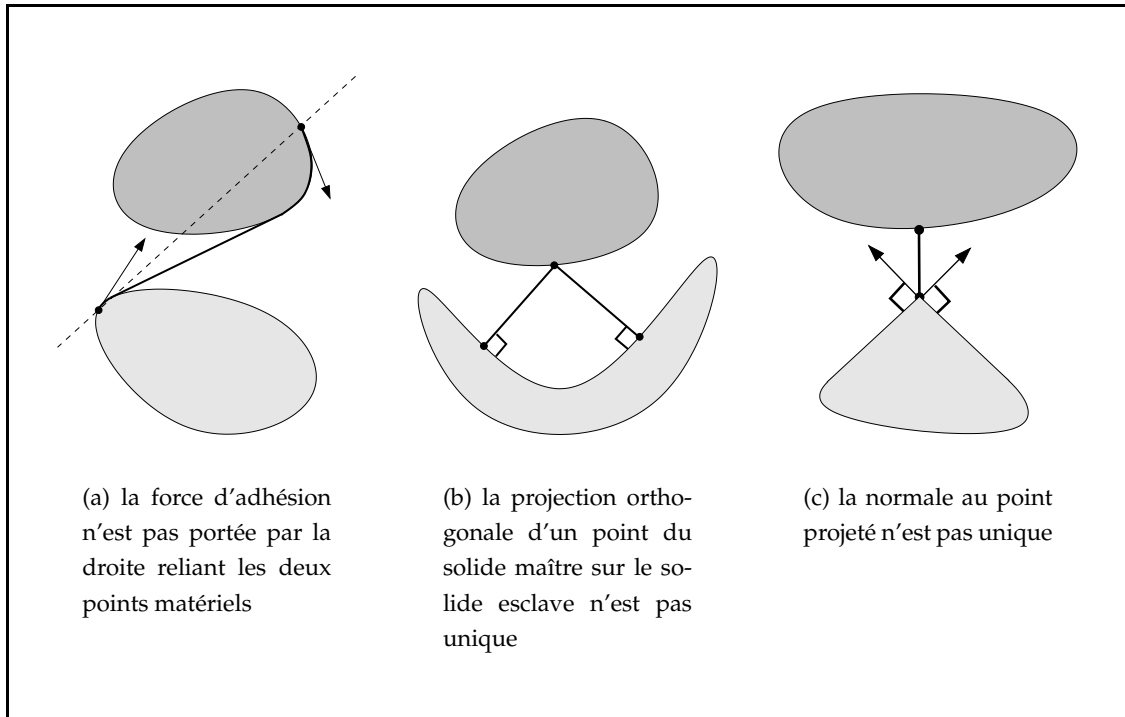


FIG. II.14 – Situations exclues pour le contact adhésif en grandes déformations.

à définir une vitesse relative entre deux points du solide maître et du solide esclave qui soit objective. La dérivée temporelle de la distance relative contient en effet un terme proportionnel à la dérivée de la normale au point de la surface du solide esclave ; cette dérivée n'étant pas objective.

II.5.1.c Les difficultés d'ordre mathématique

Sous des hypothèses de régularité suffisante, le problème aux limites associé à l'équilibre d'un solide hyperélastique en grandes déformations peut être étudié à travers le problème de minimum suivant :

PROBLÈME II.7. Trouver la déformation φ qui réalise le minimum suivant :

$$(II.68) \quad I(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{Q}} I(\psi) \quad \text{avec} \quad I(\psi) = \int_{\Omega} W(X, \nabla \psi(X)) dX - F(X),$$

où W est la densité d'énergie élastique, F le travail des efforts extérieurs et \mathcal{Q} l'ensemble des déformations admissibles.

Les difficultés mathématiques sont liées à la *non convexité* de la fonctionnelle W et de l'ensemble \mathcal{Q} . Cette situation interdit tout théorème d'unicité globale du minimum précédent (voir FIG. II.15). L'existence d'un tel minimum peut cependant être obtenue pour des fonctionnelles relatives aux solides hyperélastiques soumis à des conditions aux limites mixtes force-

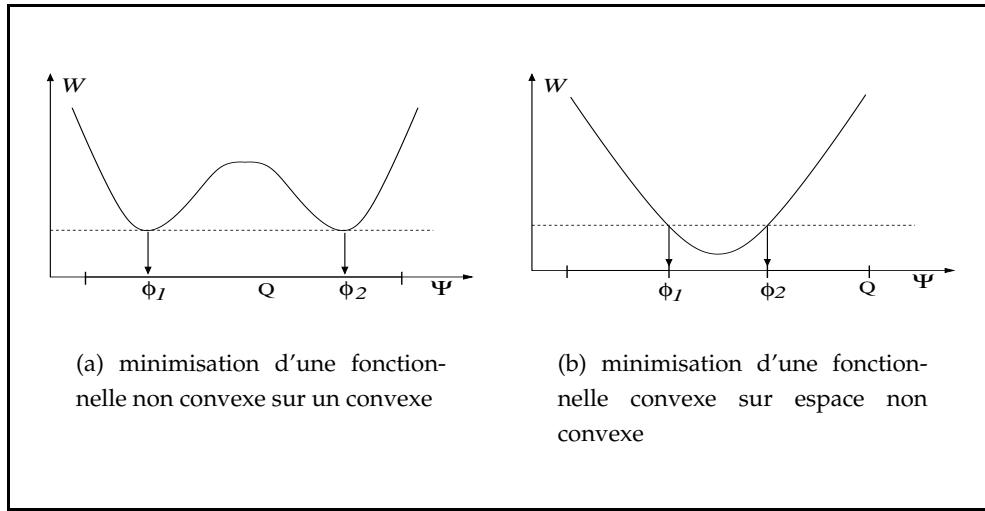


FIG. II.15 – Non unicité du minimum.

déplacement. Ce théorème d'existence est dû à BALL [1977]. Il utilise la notion de polyconvexité (qui affaiblit la notion standard de convexité) et le théorème de Weierstrass généralisé.

Concernant l'adhérence, le problème aux limites proposé correspond à un problème de minimum, sous réserve de la différentiabilité des potentiels et d'une écriture "explicite" de la variable β^φ en fonction de la déformation φ . C'est le cas pour une loi d'adhérence "statique".

II.5.2 Formulations du modèle thermodynamique et du problème aux limites

Les notations de ce paragraphe sont dans une large mesure indépendantes du reste du mémoire. En particulier, la normale de référence est maintenant définie sur le solide indicé 2 (classiquement le solide esclave) et le vecteur distance de contact est défini du solide 2 vers le solide 1 (équation (II.74)). Les variables du contact unilatéral (équation (II.85)) sont ainsi : $d_{n^\varphi}^\varphi$ (précédemment u_N) et $(t_{n^\varphi}^{\varphi 1})^r$ (précédemment $-(R_N)^r$).

La variable α prend successivement les valeurs 1 et 2. On considère deux solides déformables et $\Omega^\alpha \in \mathbb{R}^3$ leurs configurations de référence de normales extérieures unitaires \mathbf{n}^α . On note Ω^{φ^α} les configurations actuelles des solides ayant subi la déformation φ^α et $\mathbf{n}^{\varphi^\alpha}$ leur normale extérieure unitaire. On décompose les frontières de Ω^α et Ω^{φ^α} , supposées régulières, en des parties ouvertes disjointes notées respectivement Γ^α et $\Gamma^{\varphi^\alpha} = \varphi^\alpha(\Gamma^\alpha, t)$ telles que :

$$(II.69) \quad \Gamma^\alpha = \bar{\Gamma}_D^\alpha \cup \bar{\Gamma}_T^\alpha \cup \bar{\Gamma}_c^\alpha, \quad \Gamma^{\varphi^\alpha} = \bar{\Gamma}_D^{\varphi^\alpha} \cup \bar{\Gamma}_T^{\varphi^\alpha} \cup \bar{\Gamma}_c^{\varphi^\alpha}.$$

Les corps sont soumis à des densités de forces volumiques et surfaciques : $\mathbf{f}^\alpha, \mathbf{T}^\alpha$ définies dans Ω^α et respectivement sur Γ_T^α et $\mathbf{f}^{\varphi^\alpha}, \mathbf{T}^{\varphi^\alpha}$ données dans Ω^{φ^α} et respectivement sur $\Gamma_T^{\varphi^\alpha}$. Les parties $\Gamma_c^\alpha, \Gamma_c^{\varphi^\alpha} = \varphi^\alpha(\Gamma_c^\alpha, t)$ sont les surfaces potentielles de contact des deux solides dans les deux configurations où les corps peuvent être en contact unilatéral. Sur Γ_D^α et $\Gamma_D^{\varphi^\alpha}$ on impose

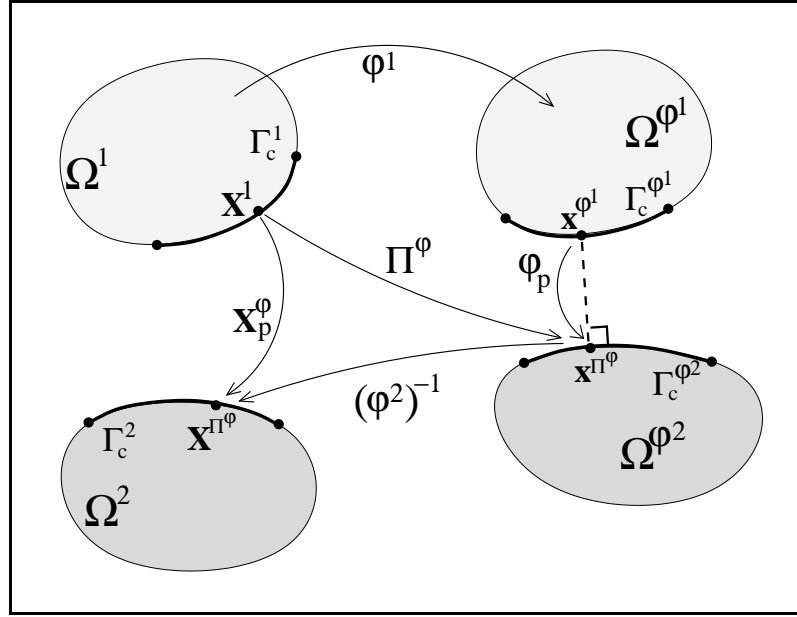


FIG. II.16 – Notations, décomposition de l'application projection pour la définition de la distance relative entre deux solides hyperélastiques.

des déformations. On désigne par t^α , t^{φ^α} les densités de forces exercées le long des surfaces Γ_c^α , $\Gamma_c^{\varphi^\alpha}$. On introduit une application φ_p permettant de relier un point de $\Gamma_c^{\varphi^1}$, noté \mathbf{x}^{φ^1} , à son projeté sur $\Gamma_c^{\varphi^2}$ noté \mathbf{x}^{Π^φ} . On note \mathbf{X}_p^φ l'application $(\varphi^2)^{-1} \circ \varphi_p \circ \varphi^1$ de Γ_c^1 dans Γ_c^2 , Π^φ l'application $\varphi_p \circ \varphi^1$ de Γ_c^1 dans $\Gamma_c^{\varphi^2}$ et $\mathbf{X}^{\Pi^\varphi} = \mathbf{X}_p^\varphi(\mathbf{X}^1)$ [CURNIER et al., 1992] (FIG. II.16). Le point \mathbf{X}^{Π^φ} est solution du problème de minimum suivant :

$$(II.70) \quad \|\varphi^1(\mathbf{X}^1, t) - \varphi^2(\mathbf{X}^{\Pi^\varphi}, t)\| = \min_{\mathbf{X}^2 \in \Gamma_c^2} \|\varphi^1(\mathbf{X}^1, t) - \varphi^2(\mathbf{X}^2, t)\|.$$

On considère une paramétrisation de la surface $\Gamma_c^{\varphi^2}$ afin de construire un repère local pour le solide esclave Ω^{φ^2} . Avec les notations de la FIG. II.17, on définit une application $\Gamma_c^{\varphi^2}$ (différentiable et inversible) d'un sous-ensemble A^2 de \mathbb{R}^2 dans $\Gamma_c^{\varphi^2}$ et l'application $\gamma^{\varphi^2} : A^2 \rightarrow \Gamma_c^{\varphi^2}$ telle que :

$$(II.71) \quad \gamma^{\varphi^2} = \varphi^2 \circ \gamma^2.$$

Chaque élément de A^2 est noté :

$$(II.72) \quad \boldsymbol{\xi}^{\varphi^2} = (\xi_1^{\varphi^2}, \xi_2^{\varphi^2}) = (\gamma^{\varphi^2})^{-1}(\mathbf{x}^{\varphi^2}).$$

Le problème de minimum (II.70) s'écrit alors :

$$(II.73) \quad \|\varphi^1(\mathbf{X}^1, t) - \varphi^2(\gamma^2(\boldsymbol{\xi}_p^\varphi), t)\| = \min_{\boldsymbol{\xi} \in A^2} \|\varphi^1(\mathbf{X}^1, t) - \varphi^2(\gamma^2(\boldsymbol{\xi}), t)\|,$$

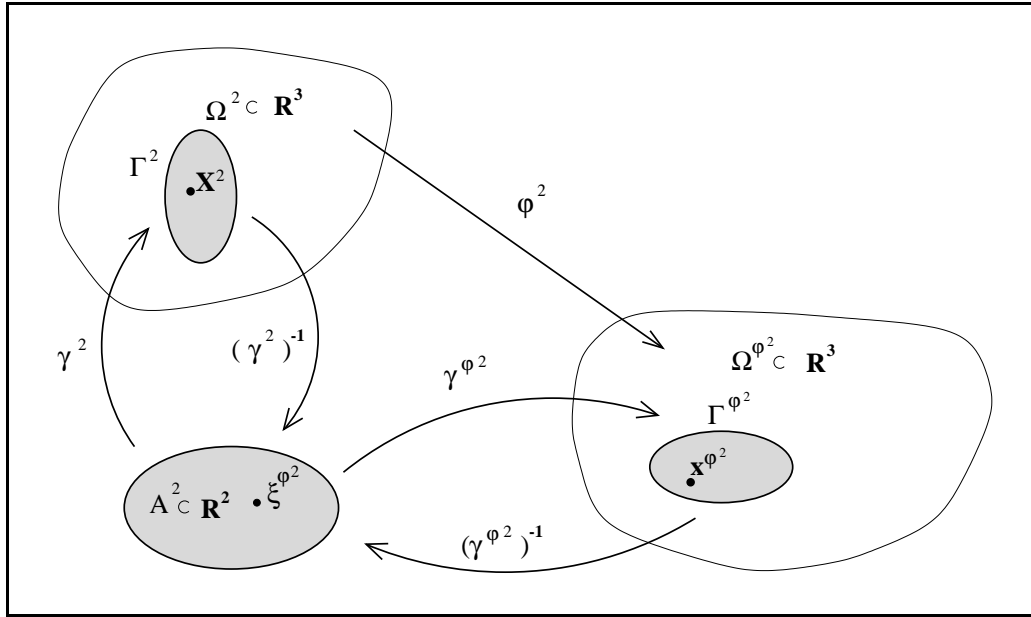


FIG. II.17 – Paramétrisation de la surface $\Gamma_c^{\varphi^2}$.

où ξ_p^φ est donc le point correspondant à $\mathbf{x}^{\Pi\varphi}$ dans l'espace de paramétrisation. Un repère local normal/tangent $(\mathbf{n}^\varphi, \boldsymbol{\tau}^\varphi)$ est défini en ce point, où $\mathbf{n}^\varphi = \mathbf{n}^{\varphi^2}(\mathbf{x}^{\Pi\varphi})$ et $\boldsymbol{\tau}^\varphi = (\boldsymbol{\tau}_1^\varphi, \boldsymbol{\tau}_2^\varphi)$, $\boldsymbol{\tau}_\alpha^\varphi$ sont des vecteurs linéairement indépendants et tangents à la surface $\varphi^2(\Gamma_c^2, t)$ au point considéré. On définit le vecteur distance de contact par :

$$(II.74) \quad \mathbf{d}^\varphi(\mathbf{x}^{\varphi^1}, t) = \mathbf{x}^{\varphi^1} - \mathbf{x}^{\Pi\varphi}(\mathbf{x}^{\varphi^1}, t) = \varphi^1(\mathbf{X}^1, t) - \varphi^2(\mathbf{X}^{\Pi\varphi}(\mathbf{X}^1), t)$$

que l'on peut décomposer en $\mathbf{d}^\varphi = d_{N^\varphi}^\varphi \mathbf{n}^\varphi$. On définit la vitesse relative généralisée suivante :

$$(II.75) \quad \mathbf{V}_{re}^\varphi = \dot{d}_{N^\varphi}^\varphi \mathbf{n}^\varphi + \dot{\xi}_p^\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}^\varphi = \dot{d}_{N^\varphi}^\varphi \mathbf{n}^\varphi + \dot{\xi}_{\boldsymbol{\tau}^\varphi}^\varphi.$$

Cette vitesse satisfait l'axiome d'indifférence matérielle.

Cette définition de la distance privilégie un solide par rapport à l'autre (approche "maître/esclave"). On choisit ici les surfaces Γ_c^1 et $\Gamma_c^{\varphi^1}$ comme surfaces maîtres et on déduit le comportement de $\varphi_p(\Gamma_c^{\varphi^1})$ grâce à la loi d'action-réaction généralisée de CURNIER et al. [1992].

On exprime la densité d'énergie libre ψ^{φ^α} en fonction du tenseur de Hencky $\mathbb{H}^{\varphi^\alpha} = \ln(\mathbb{V}^\varphi)$ (où \mathbb{V}^φ provient de la décomposition polaire de \mathbb{F}^φ) qui permet naturellement d'exprimer le tenseur des contraintes de Cauchy comme la dérivée d'une énergie par rapport à cette variable (voir [BRETTELLE, 1999]).

Soit l'expression suivante de la dissipation intrinsèque volumique :

$$(II.76) \quad d^{\varphi^\alpha} = -\rho^{\varphi^\alpha} \dot{\psi}^{\varphi^\alpha} + \boldsymbol{\sigma}^{\varphi^\alpha} : \dot{\mathbb{H}}^{\varphi^\alpha} \text{ dans } \Omega^{\varphi^\alpha},$$

où ρ^{φ^α} est la densité volumique des solides. Soit la densité surfacique d'énergie libre Ψ^{φ^1} :

$$(II.77) \quad \Psi^{\varphi^1} = \Psi^{\varphi^1}(d_{N^\varphi}^\varphi, \boldsymbol{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi, \beta^\varphi) = \frac{1}{\rho_S^{\varphi^1}} (I_K(d_{N^\varphi}^\varphi) + I_P(\beta^\varphi)) + \Psi_0^{\varphi^1}(d_{N^\varphi}^\varphi, \boldsymbol{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi, \beta^\varphi) \text{ sur } \Gamma_c^{\varphi^1},$$

où $K = \{d_N ; d_N \geq 0\}$, $P = \{\gamma ; 0 \leq \gamma \leq 1\}$ et $\rho_S^{\varphi^1}$ est la densité surfacique du solide 1. Le terme $\Psi_0^{\varphi^1}$ est donné sur $\Gamma_c^{\varphi^1}$, convexe en $(d_{N^\varphi}^\varphi, \boldsymbol{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi)$ et en β^φ et fini.

La dissipation intrinsèque surfacique s'exprime de la façon suivante :

$$(II.78) \quad D^{\varphi^1} = -\rho_S^{\varphi^1} \dot{\Psi}^{\varphi^1} - t_{N^\varphi}^{\varphi^1} \dot{d}_{N^\varphi}^\varphi - \mathbf{t}_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\tau^\varphi}^\varphi \text{ sur } \Gamma_c^{\varphi^1}.$$

Les deux premiers principes de la thermodynamique conduisent aux inégalités de Clausius-Duhem pour toute évolution isotherme du système :

$$(II.79) \quad \rho^{\varphi^\alpha} \dot{\psi}^{\varphi^\alpha} = \sigma^{\varphi^\alpha} : \dot{\mathbb{H}}^{\varphi^\alpha} \text{ dans } \Omega^{\varphi^\alpha},$$

$$(II.80) \quad \rho_S^{\varphi^1} \dot{\Psi}^{\varphi^1} \leq -t_{N^\varphi}^{\varphi^1} \dot{d}_{N^\varphi}^\varphi - \mathbf{t}_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\tau^\varphi}^\varphi \text{ sur } \Gamma_c^{\varphi^1}.$$

En décomposant les forces thermodynamiques en parties réversible et irréversible on postule les lois d'état suivantes :

$$(II.81) \quad (\sigma^{\varphi^\alpha})^R = \rho^{\varphi^\alpha} \frac{\partial \psi^{\varphi^\alpha}}{\partial \mathbb{H}^{\varphi^\alpha}} \text{ dans } \Omega^{\varphi^\alpha},$$

$$(II.82) \quad (-t_{N^\varphi}^{\varphi^1})^r \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{d_{N^\varphi}^\varphi} \Psi^{\varphi^1}, \quad (-\mathbf{t}_{\tau^\varphi}^{\varphi^1})^r \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{\boldsymbol{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi} \Psi^{\varphi^1}, \quad -G_\beta \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{\beta^\varphi} \Psi^{\varphi^1} \text{ sur } \Gamma_c^{\varphi^1}.$$

On choisit un potentiel de dissipation surfacique de la forme :

$$(II.83) \quad \Phi^{\varphi^1} = \Phi^{\varphi^1}(\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\tau^\varphi}^\varphi, \dot{\beta}^\varphi; \chi) = \frac{\mu}{\rho_S^{\varphi^1}} \left| t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^\varphi} \right| \|\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\tau^\varphi}^\varphi\| + \Phi_0^{\varphi^1}(\dot{\beta}^\varphi; t_{N^\varphi}^{\varphi^1}, \beta^\varphi),$$

où $\chi = (t_{N^\varphi}^{\varphi^1}, d_{N^\varphi}^\varphi, \boldsymbol{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi, \beta^\varphi)$. La fonction $\Phi_0^{\varphi^1}$ est une fonction donnée objective, convexe et finie.

REMARQUE II.8. Seuls la prise en compte de conditions de contact unilatéral entre les deux solides hyperélastiques et le couplage du frottement de Coulomb avec une force adhésive supplémentaire sont spécifiés explicitement dans cette formulation :

1. Dans l'expression du potentiel surfacique d'énergie libre (équation II.77), l'indicatrice $I_K(d_{N^\varphi}^\varphi)$ où $K = \{d_N ; d_N \geq 0\}$ conduit aux conditions de contact unilatéral (non pénétration), l'indicatrice $I_P(\beta^\varphi)$ où $P = \{\gamma ; 0 \leq \gamma \leq 1\}$ assure que la variable β^φ joue bien le rôle d'une variable d'adhérence (ou endommagement surfacique, selon le contexte); toute autre particularisation des lois d'état peut se faire par le choix de $\Psi_0^{\varphi^1}$.

2. Dans l'expression du potentiel surfacique de dissipation (équation II.83), le premier terme permet un couplage entre l'adhérence et le frottement de Coulomb ; le mode d'évolution de l'intensité d'adhérence est donné par le choix de $\Phi_0^{\varphi^1}$.

La formulation proposée est donc très générale. Elle permet d'étendre au cas des grandes déformations la grande majorité des modèles de zone cohésive de la littérature et d'y inclure l'éventuelle prise en compte du contact et du frottement (la seule restriction étant que les parties réversible et irréversible des forces adhésives dérivent d'un potentiel).

Les lois complémentaires sont les suivantes :

$$(II.84) \quad \begin{cases} (\sigma^{\varphi^\alpha})^{ir} = 0 \text{ dans } \Omega^{\varphi^\alpha}, \\ (t_{N^\varphi}^{\varphi^1})^{ir} = 0, -(t_{\tau^\varphi}^{\varphi^1})^{ir} \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{\xi_{\tau^\varphi}^\varphi} \Phi^{\varphi^1}, G_\beta \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{\dot{\beta}^\varphi} \Phi^{\varphi^1} \text{ sur } \Gamma_c^{\varphi^1}. \end{cases}$$

On déduit alors le problème quasi-statique sous la forme générale suivante où l'on a noté par “*” la transformée de Legendre-Fenchel :

Problème \mathcal{P}^E

Trouver $\varphi^\alpha, \beta^\varphi$ telles que $\varphi^\alpha(0) = \varphi_0^\alpha$ dans Ω^{φ^α} et $\beta^\varphi(0) = \beta_0^\varphi$ sur $\Gamma_c^{\varphi^1}$ vérifiant les équations d'équilibre, la loi constitutive (II.81), les conditions aux limites sur $\Gamma_D^{\varphi^\alpha}$ et $\Gamma_T^{\varphi^\alpha}$ et les conditions suivantes pour tout $t \in]0, T[$:

$$(II.85) \quad t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^{\varphi^1}} \geq 0, \quad d_{N^\varphi}^{\varphi^1} \geq 0, \quad \left(t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^{\varphi^1}} \right) d_{N^\varphi}^{\varphi^1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^{\varphi^1},$$

$$(II.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\| t_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial \xi_{\tau^\varphi}^\varphi} \right\| \leq \mu \left| t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^{\varphi^1}} \right| \quad \text{sur } \Gamma_c^{\varphi^1} \\ \text{et } \left\{ \begin{array}{l} \left\| t_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial \xi_{\tau^\varphi}^\varphi} \right\| < \mu \left| t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^{\varphi^1}} \right| \Rightarrow \dot{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi = \mathbf{0} \\ \left\| t_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial \xi_{\tau^\varphi}^\varphi} \right\| = \mu \left| t_{N^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial d_{N^\varphi}^{\varphi^1}} \right| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \dot{\xi}_{\tau^\varphi}^\varphi = -\lambda \left(t_{\tau^\varphi}^{\varphi^1} + \rho_S^{\varphi^1} \frac{\partial \Psi_0^{\varphi^1}}{\partial \xi_{\tau^\varphi}^\varphi} \right), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(II.87) \quad \dot{\beta}^\varphi \in \partial_{G_\beta} \left(\rho_S^{\varphi^1} \Phi^{\varphi^1} \right)^*, \quad -G_\beta \in \rho_S^{\varphi^1} \partial_{\beta^\varphi} \Psi^{\varphi^1} \quad \text{sur } \Gamma_c^{\varphi^1}.$$

II.5.3 Résultat d'existence dans un cas particulier : contact sans frottement avec un obstacle plan

Dans le cas du contact entre un solide hyperélastique et un support rigide plan en contact à l'instant initial (FIG. II.18), les variables d'état du système dans la configuration de référence, se

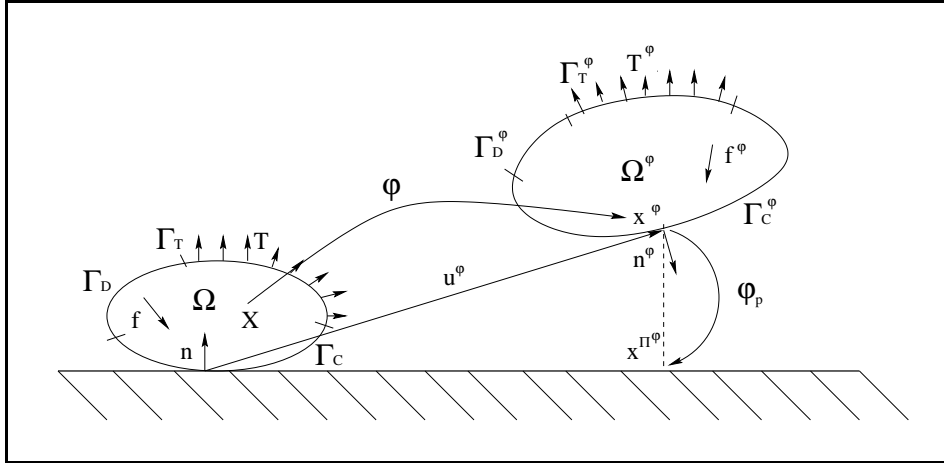


FIG. II.18 – Contact entre un solide hyperélastique et un demi-espace rigide.

réduisent aux variables $\xi_{\tau}^{\varphi} = \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi} + \mathbf{c}$, \mathbf{c} constante, $d_{N^{\varphi}}^{\varphi} = u_{N^{\varphi}}^{\varphi}$, $\beta = \beta^{\varphi} \circ \varphi$ où $\mathbf{u}^{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ et $u_{N^{\varphi}}^{\varphi}(0) = 0$. Dans ce cas, $\Psi_0 = \hat{\Psi}_0(\mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}, u_{N^{\varphi}}^{\varphi}, \beta)$ et pour simplifier l'expression, on a éliminé les indices correspondant à $\alpha = 1$ ($\alpha = 2$ étant l'indice du plan). En utilisant le tenseur non symétrique de Piola-Kirchhoff \mathbb{P}^{φ} et la densité d'énergie $\mathbf{W} = \rho\psi$, le problème \mathcal{P}^E est ramené au problème suivant :

Problème \mathcal{P}^L

Trouver φ, β telles que $\varphi(0) = \varphi_0$ dans Ω , $\beta(0) = \beta_0$ sur Γ_c et vérifiant les équations d'équilibre, la loi constitutive, les conditions aux limites sur Γ_D et Γ_T et les conditions suivantes pour tout $t \in]0, T[$:

$$(II.88) \quad t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_{N^{\varphi}}^{\varphi}} \geq 0, \quad u_{N^{\varphi}}^{\varphi} \geq 0, \quad \left(t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_{N^{\varphi}}^{\varphi}} \right) u_{N^{\varphi}}^{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c,$$

$$(II.89) \quad \begin{cases} \left\| \mathbf{t}_{\tau} + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}} \right\| \leq \mu \left| t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_{N^{\varphi}}^{\varphi}} \right| & \text{sur } \Gamma_c \\ \text{et } \begin{cases} \left\| \mathbf{t}_{\tau} + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}} \right\| < \mu \left| t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_{N^{\varphi}}^{\varphi}} \right| & \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{\tau}^{\varphi} = \mathbf{0} \\ \left\| \mathbf{t}_{\tau} + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}} \right\| = \mu \left| t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_{N^{\varphi}}^{\varphi}} \right| & \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\tau}^{\varphi} = -\lambda \left(\mathbf{t}_{\tau} + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}} \right), \end{cases} \end{cases}$$

$$(II.90) \quad \dot{\beta} \in \partial_{G_{\beta}}(\rho_S \Phi)^*, \quad -G_{\beta} \in \rho_S \partial_{\beta} \Psi \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

En notant V et K les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} V &= \{ \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; \psi = \varphi_D \quad \text{sur } \Gamma_D \}, \\ K &= \{ \psi \in V; u_{N^{\varphi}}^{\psi} \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \}, \end{aligned}$$

et en définissant :

$$(II.91) \quad (A\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \mathbb{P}^{\varphi} : \nabla \psi \, d\mathbf{X},$$

$$(II.92) \quad L(\psi) = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \cdot \psi \, dA + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \psi \, d\mathbf{X},$$

$$(II.93) \quad j(\beta, \varphi, \psi) = \int_{\Gamma_c} \mu |t_N + \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_N^{\psi}}| \| \mathbf{u}_{\tau}^{\psi} \| \, dA,$$

$$(II.94) \quad c_T(\beta, \varphi, \psi) = \int_{\Gamma_c} \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}} \cdot \mathbf{u}_{\tau}^{\psi} \, dA, \quad c_N(\beta, \varphi, \psi) = \int_{\Gamma_c} \rho_S \frac{\partial \Psi_0}{\partial u_N^{\varphi}} u_N^{\psi} \, dA,$$

le problème \mathcal{P}^L admet la formulation variationnelle suivante :

Problème variationnel

Trouver φ, β telles que $\varphi(0) = \varphi_0$ dans $\Omega, \beta(0) = \beta_0$ sur $\Gamma_c, \forall t \in]0, T[, \varphi(t) \in K$ et

$$(II.95) \quad (A\varphi, \partial_t \psi - \partial_t \varphi) + j(\beta, \varphi, \partial_t \psi) - j(\beta, \varphi, \partial_t \varphi) + c_T(\beta, \varphi, \partial_t \psi) \\ \geq L(\partial_t \psi - \partial_t \varphi) + \int_{\Gamma_c} t_N(\partial_t \psi - \partial_t \varphi)_N \quad \forall \psi \in V,$$

$$(II.96) \quad \int_{\Gamma_c} t_N(u_N^w - u_N^{\varphi}) + c_N(\beta, \varphi, w - \varphi) \geq 0 \quad \forall w \in K,$$

$$(II.97) \quad \dot{\beta} \in \partial_{G_{\beta}}(\rho_S \Phi_0)^*, \quad -G_{\beta} \in \rho_S^{\varphi} \partial_{\beta} \Psi_0.$$

Formellement, en couplant (II.95) et (II.96), on obtient :

$$(II.98) \quad (A\varphi, \psi - \varphi) + j(\beta, \varphi, \partial_t \varphi + \psi - \varphi) - j(\beta, \varphi, \partial_t \psi - \psi + \varphi) \\ + c(\beta, \varphi, \psi - \varphi) \geq L(\psi - \varphi) \quad \forall \psi \in K,$$

$$(II.99) \quad \dot{\beta} \in \partial_{G_{\beta}}(\rho_S \Phi_0)^*, \quad -G_{\beta} \in \rho_S \partial_{\beta} \Psi_0,$$

où $c = c_T + c_N$.

En faisant l'hypothèse que Φ_0 et Ψ_0 sont respectivement différentiables en $\dot{\beta}$ et en β et en supposant que $\partial \Phi_0 / \partial \dot{\beta}$ ne dépende que de $(\mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}, u_N^{\varphi}, \beta)$ (loi "statique"), i.e. :

$$(II.100) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{\beta}} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{\beta}}(\mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}, u_N^{\varphi}, \beta),$$

on obtient :

$$(II.101) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{\beta}}(\mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}, u_N^{\varphi}, \beta) = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta}(\mathbf{u}_{\tau}^{\varphi}, u_N^{\varphi}, \beta).$$

Enfin, en supposant Φ_0 et Ψ_0 suffisamment régulières pour appliquer le théorème des fonctions implicites, on aboutit à l'existence d'une fonction h telle que :

$$(II.102) \quad \beta = h(\mathbf{u}_T^\varphi, u_N^\varphi).$$

On note encore $\beta = h(\varphi)$, ainsi que $\Psi_0(\mathbf{u}_T^\varphi, u_N^\varphi, h(\mathbf{u}_T^\varphi, u_N^\varphi)) = \Psi_0(\varphi)$. De là, le problème variationnel (II.98-II.99) sans frottement se réduit au problème de minimum classique :

$$(II.103) \quad \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} \{I(\psi) + J(\psi) - L(\psi)\},$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} = \{\psi \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \text{Cof } \nabla \psi \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^9), \det \nabla \psi \in L^r(\Omega), \\ \det \nabla \psi > 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \psi = \varphi_D \text{ p.p. sur } \Gamma_D, u_N^\psi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}, \\ I(\psi) = \int_{\Omega} \mathbf{W}(\mathbf{X}, \nabla \psi(\mathbf{X})) d\mathbf{X}, \\ J(\psi) = \int_{\Gamma_c} \rho_S \Psi_0(\mathbf{X}, \psi) dA, \\ L(\psi) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \psi d\mathbf{X} + \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \cdot \psi dA. \end{array} \right.$$

En supposant que :

1. $\Psi_0(\mathbf{X}, \cdot)$ est semi-continue inférieurement sur \mathbb{R}^3 pour presque tout \mathbf{X} et $\Psi_0(\mathbf{X}, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}$ et $\mathbf{X} \in \Omega$,
2. \mathbf{W} est polyconvexe,
3. ils existe des constantes $\alpha > 0, \hat{\alpha}, p \geq 2, q \geq \frac{p}{p-1}, r > 1$, telles que $\mathbf{W}(\mathbf{X}, \mathbb{F}) \geq \alpha(\|\mathbb{F}\|^p + \|\text{Cof } \mathbb{F}\|^q + (\det \mathbb{F})^r) + \hat{\alpha}$,
pour presque tout $\mathbf{X} \in \Omega$ et pour tout $\mathbb{F} \in \mathbf{M}_+^3$ (où \mathbf{M}_+^3 est l'ensemble des matrices à déterminant positif),
4. $\lim_{\det \mathbb{F} \rightarrow 0^+} \mathbf{W}(\mathbf{X}, \mathbb{F}) = +\infty$,

il est possible d'étendre le résultat d'existence de BALL [1977] ou HE et al. [1996], en considérant la fonctionnelle J caractéristique de l'adhérence. Ce qui fait l'objet du théorème suivant :

THÉORÈME II.9.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 et $\mathbf{W} : \Omega \times \mathbf{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la densité d'énergie vérifiant les hypothèses 2., 3. et 4. et soit $L : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.

Soit $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_T \cup \bar{\Gamma}_c$ avec $mes(\Gamma_D) > 0$ et soit $\varphi_D : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction mesurable telle que l'ensemble \mathcal{Q} soit non vide. Si l'intégrande de J vérifie l'hypothèse 1. et si l'on a :

$$(II.104) \quad \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} [I(\psi) + J(\psi)] < \infty,$$

il existe alors au moins une fonction φ telle que :

$$(II.105) \quad \varphi \in \mathcal{Q} \text{ et } I(\varphi) + J(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} [I(\psi) + J(\psi)].$$

Preuve.

Soit (φ^k) une suite minimisante de $I + J$. D'après la seconde assertion de l'hypothèse 1. et (II.104) on a $\inf_{\psi \in \mathcal{Q}} I(\psi) \leq \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} (I(\psi) + J(\psi)) < \infty$. La fonctionnelle I est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement [BALL, 1977].

On montre que J est aussi séquentiellement faiblement semi-continue. Soit une suite ψ^k telle que $\psi^k \rightharpoonup \psi$ dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et par un résultat de compacité ([KIKUCHI et ODEN, 1988]) $\psi^k \rightarrow \psi$ dans $L^p(\Gamma_c; \mathbb{R}^3)$. Il existe donc une sous suite de ψ^k , encore notée ψ^k , qui converge presque partout vers ψ . D'après l'hypothèse 1., cette sous suite vérifie :

$$(II.106) \quad \Psi_0(\mathbf{X}, \psi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Psi_0(\mathbf{X}, \psi^k).$$

Cette relation et le lemme de Fatou conduisent à :

$$(II.107) \quad \begin{aligned} J(\psi) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c} \rho \Psi_0(\mathbf{X}, \psi^k) dA \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\psi^k). \end{aligned}$$

Par conséquent, J est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement et $I + J$ l'est aussi.

En notant que $\varphi \in \mathcal{Q}$ (\mathcal{Q} est faiblement fermé) et que l'on a :

$$(II.108) \quad \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} [I(\psi) + J(\psi)] \leq I(\varphi) + J(\varphi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} [I(\varphi^k) + J(\varphi^k)] = \inf_{\psi \in \mathcal{Q}} [I(\psi) + J(\psi)],$$

on en conclut que φ est solution au problème de minimum (II.103). \square

BILAN DU PARAGRAPHE II.5

Une formulation générique de modèles de zone cohésive a été donnée en grandes déformations dans un cadre thermodynamique. Ces modèles peuvent inclure du frottement de Coulomb et des conditions de contact unilatéral. Une particularisation de cette formulation permet notamment de retrouver le modèle adhésif/frottant de RAOUS et al. [1999] dans le cas des petites déformations. Les autres modèles du paragraphe I.3.3 peuvent aussi être retrouvés. Un théorème d'existence est obtenu pour un problème de solide hyperélastique en contact adhésif non frottant avec un support rigide plan et pour une loi adhésive vérifiant l'équation (II.102).

II.6 Conclusion du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre le modèle adhésif/frottant développé par CANGÉMI et al. [1996] et RAOUS et al. [1999]. Ce modèle est utilisé dans la suite de ce mémoire

pour l'analyse de la fissuration des matériaux composites.

Les processus complexes de fissuration qu'il permet de prendre en compte en font un outil pertinent pour les analyses micromécaniques de la fissuration. Les deux originalités fortes de ce modèle sont d'une part le couplage adhérence-frottement et d'autre part l'existence d'un temps d'activation des processus de décohésion.

Au travers d'une formulation thermodynamique non locale, nous avons proposé quelques variantes à ce modèle. Les variantes les plus significatives concernent un frottement à coefficient variable en fonction du niveau de décohésion et une prise en compte des phénomènes non locaux par une théorie du premier gradient d'endommagement. Le traitement numérique du modèle et de ses variantes a été abordé. La convergence de l'algorithme associé est obtenue par extension des résultats de CANGÉMI [1997]. Enfin, une extension du modèle aux grandes déformations a été proposée [BRETTELLÉ et al., 2000]. Les situations de grands glissements fibre/matrice relatives aux composites à fibres longues peuvent ainsi être envisagées.

L'efficacité des modèles de zone cohésive a été soulignée au paragraphe précédent. Cependant, dans certaines situations, ces modèles peuvent être confrontés à des problèmes de sauts de solution. Afin d'utiliser le modèle présenté pour l'analyse de la fissuration des composites, ces problèmes de sauts de solution sont étudiés en détail au chapitre suivant.

CHAPITRE III

Solutions non régulières et questions d'unicité pour la décohésion interfaciale

Une difficulté majeure des modèles de zone cohésive est les sauts de solution auxquels ils peuvent être confrontés. Le comportement interfacial adoucissant relatif à ces modèles rend le problème mal posé et des solutions à sauts peuvent être obtenues pour certaines conditions.

Si la forme de la courbe contrainte-saut de déplacement de ces modèles n'a pas d'influence sur l'évolution stationnaire de la fissuration (*voir* chapitre I), elle devient déterminante à l'amorçage des fissures. Elle conditionne l'apparition des sauts de solution. Un théorème d'unicité conditionnelle est obtenu pour le cas de solides élastiques cohésifs soumis à une évolution quasi-statique. La condition d'unicité est atteinte sur un exemple simple d'une structure plane en traction.

Les sauts de solution peuvent être corrélés à l'existence de certaines instabilités. Lorsque la décohésion est instable, l'existence d'une longueur caractéristique inhérente aux modèles de zone cohésive conduit à l'existence d'un minimum pour la longueur d'onde de ces instabilités.

PLAN DU CHAPITRE III

III.1 Existence et unicité conditionnelle de solutions à un problème quasi-statique de décohésion de solides élastiques	97
III.1.1 Un théorème d'unicité conditionnelle	97
III.1.2 Un exemple uniaxial	99
III.2 Longueur d'onde des instabilités	101
III.2.1 Position du problème	102
III.2.2 Solutions périodiques le long de l'interface	103
III.2.3 Cas des solides isotropes	105
III.3 La régularisation visqueuse des modèles de décohésion interfaciale	109
III.4 Conclusion du chapitre	111

III.1 Existence et unicité conditionnelle de solutions à un problème quasi-statique de décohésion de solides élastiques

On se propose ici de démontrer l'existence et l'unicité conditionnelle de solutions à un problème quasi-statique de solides élastiques liés par une zone cohésive. Le modèle de zone cohésive n'est pas précisé a priori. Il est simplement considéré sans frottement et indépendant de la vitesse de sollicitation.

III.1.1 Un théorème d'unicité conditionnelle

En l'absence de frottement, le problème variationnel (II.45) s'écrit ($j(\beta, u, v) = 0$, et les fonctions tests sont des déplacements) :

Trouver $u \in K$ tel que :

$$(III.1) \quad \begin{cases} a(u, v - u) + c_T(\beta, u, v - u) \geq (\phi, v - u) - \langle R_N, v_N - u_N \rangle & \forall v \in V, \\ -\langle R_N, z_N - u_N \rangle + c_N(\beta, u, z - u) \geq 0 & \forall z \in K, \\ \dot{\beta} = y(\beta, u) & \text{p.p. sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

L'hypothèse d'un modèle de zone cohésive indépendant de la vitesse de sollicitation, conduit à remplacer la dernière équation du système variationnel (III.1) par une loi du type (II.102) : $\beta = h([u])$, où h est une fonction à valeur dans $[0, 1]$. On a : $\beta \in L^\infty(\Gamma_c)$. Le système (III.1) devient alors :

$$(III.2) \quad \begin{cases} a(u, v - u) + c(\beta, u, v - u) - (\phi, v - u) \geq 0 & \forall v \in K, \\ \beta = h([u]) & \text{p.p. sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

où c s'écrit de manière générale :

$$\begin{aligned} c(\beta, u, v) &= \int_{\Gamma_c} \gamma(\beta, [u]) \cdot [v] ds \\ &= \int_{\Gamma_c} \gamma(h([u]), [u]) \cdot [v] ds \\ &= \int_{\Gamma_c} \xi([u]) \cdot [v] ds \quad (\text{notation}), \end{aligned}$$

avec $\xi : [L^2(\Gamma_c)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma_c)]^3$. On rappelle que dans (II.46), on avait : $\gamma(\beta, [u]) = \beta^2(C_N u_N n + C_T u_T)$.

Le problème variationnel est donc le suivant :

$$(III.3) \quad a(u, v - u) + \int_{\Gamma_c} \xi([u]) \cdot ([v] - [u]) ds - (\phi, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Notations, hypothèses complémentaires et résultat préliminaire :

1. On note ici $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_c)}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega^i)}$, respectivement les normes sur $[L^2(\Gamma_c)]^3$, $[H^1(\Omega)]^3$, $[H^{1/2}(\partial\Omega^i)]^3$ pour $i = 1, 2$.
2. ξ est supposée lipschitzienne :
 $\exists c_1 \geq 0$ telle que $\forall (y_1, y_2) \in V^2$, $\|\xi(y_1) - \xi(y_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq c_1 \|y_1 - y_2\|_{L^2(\Gamma_c)}$.
3. a est coercive (inégalité de Korn et déplacements imposés sur une partie de la frontière de mesure non nulle) :
 $\exists m > 0$, $\forall u \in V$, $a(u, u) \geq m \|u\|_V^2$.
4. On note $\gamma^1 u = \gamma|_{\Gamma_c} u^1$ la trace de u^1 sur Γ_c et $\gamma^2 u = \gamma|_{\Gamma_c} u^2$ la trace de u^2 sur Γ_c . On a alors :
$$\begin{aligned} \|[u(k_1)] - [u(k_2)]\|_{L^2(\Gamma_c)} &= \|(\gamma^2 u(k_1) - \gamma^1 u(k_1)) - (\gamma^2 u(k_2) - \gamma^1 u(k_2))\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &= \|(\gamma^2 u(k_1) - \gamma^2 u(k_2)) - (\gamma^1 u(k_1) - \gamma^1 u(k_2))\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\leq \|\gamma^2 u(k_1) - \gamma^2 u(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} + \|\gamma^1 u(k_1) - \gamma^1 u(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned}$$

en utilisant la première inégalité triangulaire. De plus :

- (a) l'injection de $[H^{1/2}(\partial\Omega^i)]^3$ dans $[L^2(\Gamma_c)]^3$ est continue pour $i = 1, 2$, d'où :
 $\exists \eta > 0$ telle que $\forall x \in [H^{1/2}(\partial\Omega^i)]^3$, $\|x\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \eta \|x\|_{H^{1/2}(\partial\Omega^i)}$, pour $i = 1, 2$,
- (b) l'application trace de $[H^1(\Omega)]^3$ dans $[H^{1/2}(\partial\Omega^i)]^3$ est continue pour $i = 1, 2$, i.e. :
 $\exists \tilde{\eta} > 0$ telle que $\forall x \in [H^1(\Omega)]^3$, $\|\gamma^i x\|_{H^{1/2}(\partial\Omega^i)} \leq \tilde{\eta} \|x\|_{H^1(\Omega)}$, pour $i = 1, 2$.

Il existe donc deux constantes strictement positives λ_1 et λ_2 telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} \|\gamma^2 u(k_1) - \gamma^2 u(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq \lambda_1 \|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)}, \\ \|\gamma^1 u(k_1) - \gamma^1 u(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq \lambda_2 \|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En notant $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, on a finalement :

$$(III.4) \quad \|[u(k_1)] - [u(k_2)]\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \lambda \|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)}.$$

A l'aide du résultat préliminaire (III.4), on peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité pour le problème (III.3) :

THÉORÈME III.1.

L'application $\tilde{s} : k \rightarrow \xi([u(k)])$ où $u(k) \in K$ est la solution de :

$$(III.5) \quad a(u, v - u) - (\phi, v - u) + \int_{\Gamma_c} k \cdot ([v] - [u]) ds \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

admet un unique point fixe \bar{k} dès lors que $\lambda^2 c_1 / m < 1$. Le déplacement $u(\bar{k})$ est alors la solution du problème (III.3).

Preuve.

Soient $u(k_1)$ solution de (III.5) pour $k = k_1$ et $u(k_2)$ solution de (III.5) pour $k = k_2$, deux solutions distinctes (à k fixé, l'existence et l'unicité d'une solution à (III.5) est un résultat classique sur les inéquations variationnelles [KIKUCHI et ODEN, 1988]). En prenant $v = u(k_2)$ dans (III.5) pour $k = k_1$ et $v = u(k_1)$ dans (III.5) pour $k = k_2$, on obtient par sommation :

$$a(u(k_1) - u(k_2), u(k_1) - u(k_2)) \leq \int_{\Gamma_c} (k_2 - k_1) \cdot ([u(k_1)] - [u(k_2)]) ds.$$

La coercivité de a et l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire dans $[L^2(\Gamma_c)]^3$ conduisent à :

$$\begin{aligned} m\|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \|k_2 - k_1\|_{L^2(\Gamma_c)}\|[u(k_1)] - [u(k_2)]\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\leq \lambda\|k_2 - k_1\|_{L^2(\Gamma_c)}\|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)} \quad (\text{d'après (III.4)}). \end{aligned}$$

Soit :

$$(III.6) \quad \|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\lambda}{m}\|k_2 - k_1\|_{L^2(\Gamma_c)}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{s}(k_1) - \tilde{s}(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq c_1\|[u(k_1)] - [u(k_2)]\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq \lambda c_1\|u(k_1) - u(k_2)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant (III.6), on a alors :

$$\|\tilde{s}(k_1) - \tilde{s}(k_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \frac{\lambda^2 c_1}{m}\|k_2 - k_1\|_{L^2(\Gamma_c)}.$$

L'application \tilde{s} est donc une contraction stricte de $[L^2(\Gamma_c)]^3$ dans lui-même lorsque la condition $\lambda^2 c_1/m < 1$ est respectée. L'application \tilde{s} admet alors un unique point fixe ; ce qui achève la preuve. \square

Ce résultat d'unicité conditionnelle est explicité ci-dessous sur un exemple uniaxial.

III.1.2 Un exemple uniaxial

Considérons une structure 2D simple composée d'un élément interfacial en série avec un barreau élastique de longueur L et de module E . La discrétisation spatiale de cet exemple ainsi que son comportement en série sont donnés sur la FIG. III.1. Nous avons proposé cet exemple en traction dans [CHABOCHE et al., à paraître] et en cisaillement dans [MONERIE et al., 1998].

Soient U le déplacement global appliqué en BC , T la contrainte résultante et $[u]$ la séparation interfaciale encore notée u . On a :

$$(III.7) \quad U = u + \frac{L}{E}T.$$

Par ailleurs, le comportement interfacial est donné par :

$$(III.8) \quad T = \xi(u).$$

Dans le repère (T, u) , pour un déplacement imposé U , le point de fonctionnement est obtenu par intersection de la droite $T = -E/L(U - u)$ et de la courbe adoucissante $T = \xi(u)$ ($\xi(u) = 0$ au-delà d'une valeur δ de u). Lorsque U croît à partir de zéro, deux situations peuvent se présenter au-delà du pic de la courbe :

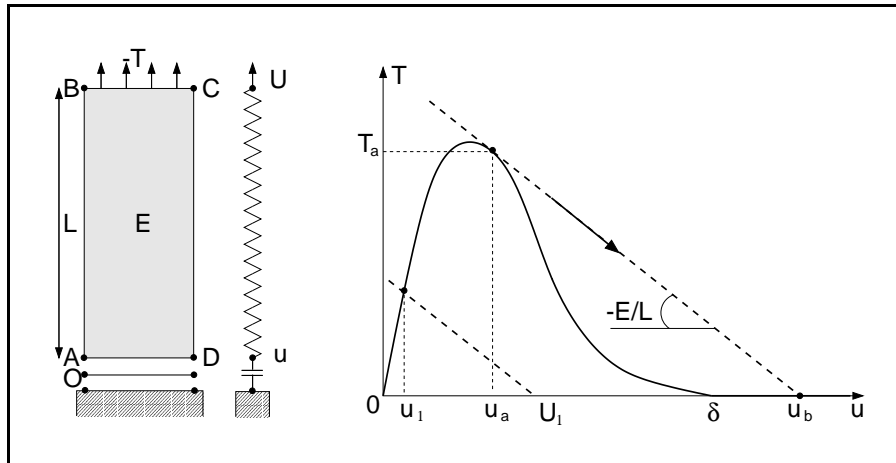


FIG. III.1 – Exemple uniaxial illustrant l'apparition de "sauts de solution" lors d'une décohésion interfaciale : situation mécanique et comportement local.

1. le rapport $k = E/L$ est suffisamment grand, il existe alors toujours un point de fonctionnement et l'évolution est stable,
2. la valeur (négative) de la pente de la droite devient trop faible (en valeur absolue), un *saut de solution* de u_a à $u_b > u_a$ peut alors se produire. L'énergie élastique emmagasinée dans la structure est suffisante pour rompre brutalement la liaison interfaciale.

La possibilité d'obtenir deux, voire trois, points de fonctionnement est liée au rapport entre la valeur k de la pente de la droite et la valeur de la plus grande pente de la courbe adoucissante ; c'est-à-dire au rapport $|k|/(\text{Sup } |\xi'(u)|)$, pour tout u tel que l'on soit au-delà du pic. La condition d'unicité du point de fonctionnement est donc :

$$(III.9) \quad \frac{\text{Sup}_u |\partial\xi/\partial u|}{|E/L|} < 1.$$

Sur un tel exemple, il est possible d'identifier $|E/L|$ à la constante de coercivité m et $\text{Sup } |\xi'(u)|$ à la constante de Lipschitz de $\xi(u)$. Si la courbe adoucissante possède un point d'inflexion, le $\text{Sup } |\xi'(u)|$ y est atteint. Sinon il est atteint en u_a (ce qui est le cas du modèle limite de RAOUS et al. [1999]).

BILAN DU PARAGRAPHE III.1

Nous avons souligné (*voir* équation (I.72)) que pour une fissuration établie et se poursuivant dans un régime stationnaire les modèles de zone cohésive sont équivalents entre eux dès lors qu'ils présentent la même "aire sous la courbe". La forme de cette courbe adoucissante n'a donc pas d'influence sur la propagation stationnaire des fissures. Le théorème III.1 montre qu'elle en a cependant dans deux situations :

- (a) lorsqu'il n'est plus possible d'écrire à bon droit la quantité $\int_0^{\delta_C} \sigma([u]) \cdot d[u]$ ⁽¹⁾ (ce qui est le cas lors d'un saut de solution), c'est-à-dire lorsque la fissuration n'est plus *stationnaire*,
- (b) à l'amorçage de la fissuration.

Les modèles de zone cohésive indépendants de la vitesse de sollicitation donnent donc lieu plus ou moins facilement à des sauts de solution. Pour résumer, les modèles "raides"⁽²⁾ sont les plus sensibles à l'apparition de sauts de solution.

Ces sauts peuvent être corrélés dans certains cas à des décohésions interfaciales instables. Ces instabilités sont étudiées ci-dessous plus en détails.

III.2 Longueur d'onde des instabilités

Nous cherchons ici à caractériser la plage de stabilité d'un système mécanique constitué de deux solides liés par une zone cohésive. Les solides occupent chacun un demi-espace. Ils sont liés par une zone cohésive plane et soumis à un chargement lointain (*voir* FIG. III.2). La stabilité d'un tel système est comprise comme l'unicité de solutions. La naissance d'une instabilité est identifiée au point où l'existence d'un certain type d'ondes stationnaires devient possible. La signification de ces ondes réside dans leur rôle de signalment de la transition de la stabilité à l'instabilité. De tels critères ont déjà été utilisés pour caractériser l'apparition d'une localisation volumique par celle d'ondes volumiques stationnaires [HILL, 1972 ; RICE, 1976], ainsi que pour l'apparition d'instabilité dans les solides cohésifs [NEEDLEMAN et ORTIZ, 1991 ; SUO et al., 1992].

La stabilité des interfaces peut être étudiée d'une manière générale au travers de l'existence d'ondes stationnaires particulières. Lorsque les solides sont parfaitement liés (interface collée) il s'agit des ondes stationnaires de Stoneley. En l'absence d'interface et lorsque l'un des deux solides disparaît (surface libre) il s'agit des ondes stationnaires de Rayleigh. Certains auteurs ont montré que dans ces cas là, le système ne possédant pas de longueur caractéristique, des modes de longueur d'onde infinitésimale peuvent apparaître ([HILL et HUTCHINSON, 1975 ; HUTCHINSON et TVERGAARD, 1980 ; NEEDLEMAN et ORTIZ, 1991]).

Nous constatons ici, à la suite de SUO et al. [1992], que ce n'est plus le cas lorsque l'interface est une zone cohésive à part entière, c'est-à-dire lorsque son comportement est décrit par l'intermédiaire d'une relation entre la contrainte interfaciale σ et le saut de déplacement $[u]$. Une telle relation fait apparaître une longueur caractéristique qui conduit à l'existence d'une longueur d'onde minimum pour les modes d'instabilité. Les ondes stationnaires relatives à ces modes

⁽¹⁾entre u_b et u_a , les termes \dot{u}_N et \dot{u}_T de l'équation (I.69) n'ont plus de sens.

⁽²⁾en réalité, ceux qui présentent la plus forte pente dans leur régime adoucissant.

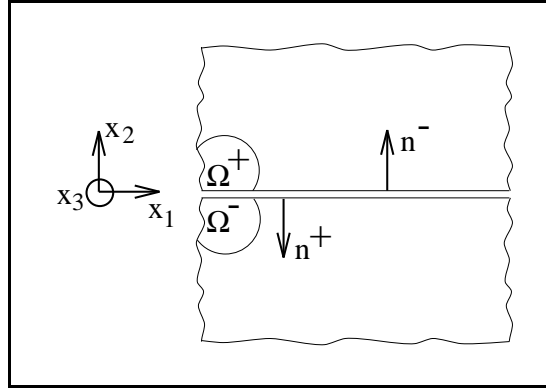


FIG. III.2 – Deux solides élastiques semi-infinis liés par une interface (plan $x_2 = 0$).

sont parfois dites “interfaciales”. Elles représentent les mouvements relatifs ondulatoires à l’interface.

III.2.1 Position du problème

Soient $\dot{u}^+ = (\dot{u}_j^+)$ et $\dot{u}^- = (\dot{u}_j^-)$ les vitesses de chacun des deux solides. On note encore synthétiquement $\dot{u}^\pm = (\dot{u}^\pm[j])$. Pour un système où les forces volumiques n’évoluent pas dans le temps, l’équation d’équilibre pour les taux s’écrit :

$$(III.10) \quad \text{div}(\dot{\sigma}^\pm) - \rho \frac{\partial^2 \dot{u}^\pm}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\pm.$$

Le comportement élastique des solides est supposé indépendant du temps et la loi de comportement tangente s’écrit :

$$(III.11) \quad \dot{\sigma}^\pm = A^\pm : \nabla_S \dot{u}^\pm \quad \text{dans } \Omega^\pm.$$

Soit, en notation indicielle (convention d’Einstein) :

$$(III.12) \quad \dot{\sigma}_{ij}^\pm = A_{ijkl}^\pm \dot{\epsilon}_{kl}^\pm = A_{ijkl}^\pm \frac{1}{2} (\dot{u}^\pm[k,l] + \dot{u}^\pm[l,k]) \quad \text{dans } \Omega^\pm.$$

A l’interface, la continuité des taux d’efforts à l’interface se traduit par les trois équations suivantes :

$$(III.13) \quad \begin{cases} \dot{R}^+ + \dot{R}^- = 0 \\ \dot{R}^+ = \dot{\sigma}^+ n^+ \\ \dot{R}^- = \dot{\sigma}^- n^- \end{cases} \quad \text{en } x_2 = 0.$$

Ici, comme au paragraphe précédent III.1, le comportement interfacial n’est pas précisé. Il s’agit simplement de définir en toute généralité une relation linéaire entre le saut de déplacement et

la contrainte à l'interface qui puisse traduire un comportement adoucissant.

$$(III.14) \quad R^+ = T[u]^+ \quad \text{en } x_2 = 0, \quad \text{où } [u]^+ = u^+ - u^-.$$

Avec $T = T([u]^+, t)$ une matrice 3×3 homogène à des $[MPa][m]^{-1}$. Ce comportement interfacial s'écrit en termes de taux :

$$(III.15) \quad \dot{R}^+ = S[\dot{u}]^+ + \tilde{S}[u]^+ \quad \text{en } x_2 = 0,$$

où on a posé :

$$(III.16) \quad \begin{cases} S = \frac{\partial R}{\partial [u]^+}, \\ \tilde{S} = \frac{\partial T}{\partial t}. \end{cases}$$

(S est la raideur tangente de l'interface). Et d'après la définition de $[u]^+$, on a :

$$(III.17) \quad \dot{R}^+ = S(\dot{u}^+ - \dot{u}^-) + \tilde{S}(u^+ - u^-) \quad \text{en } x_2 = 0.$$

Le problème continu s'écrit ainsi en notation indicielle :

$$(III.18) \quad \left. \begin{cases} \dot{\sigma}_{ij,j}^\pm - \rho \frac{\partial^2 \dot{u}^\pm[i]}{\partial t^2} = 0 \\ \dot{\sigma}_{ij}^\pm = A_{ijkl}^\pm \frac{1}{2} (\dot{u}^\pm[k,l] + \dot{u}^\pm[l,k]) \\ -\dot{\sigma}_{i2}^+ + \dot{\sigma}_{i2}^- = 0 \\ -\dot{\sigma}_{i2}^+ = S_{ij}(\dot{u}_j^+ - \dot{u}_j^-) + \tilde{S}_{ij}(u_j^+ - u_j^-) \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega^\pm, \\ \text{en } x_2 = 0. \end{array}$$

III.2.2 Solutions périodiques le long de l'interface

Les solutions de ce problème sont cherchées sous la forme d'ondes périodiques le long de l'interface⁽³⁾ :

$$(III.19) \quad \begin{cases} \dot{u}_j^+ = v_j^+ e^{i(K_m^+ x_m - \omega^+ t)} & \text{si } x_2 \geq 0, \\ \dot{u}_j^- = v_j^- e^{i(K_m^- x_m - \omega^- t)} & \text{si } x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations du problème (III.18) se résument alors à :

$$(III.20) \quad A_{ijkl}^\pm \frac{1}{2} (-K_j^\pm K_l^\pm \dot{u}^\pm[k] - K_j^\pm K_k^\pm \dot{u}^\pm[l]) - \rho(\omega^\pm)^2 \dot{u}^\pm[i] = 0.$$

⁽³⁾Il est possible de conduire la même étude sans supposer a priori la forme des solutions et en utilisant la représentation de Stroh. Pour plus de détails sur cette méthode, nous renvoyons le lecteur à SUO et al. [1992].

Soit finalement :

$$(III.21) \quad C^\pm \dot{u}^\pm = 0,$$

où on a posé :

$$(III.22) \quad C_{ik}^\pm = -\frac{1}{2} K_j^\pm (A_{ijkl}^\pm K_l^\pm + A_{ijmk}^\pm K_m^\pm) - \rho(\omega^\pm)^2 \delta_{ij}.$$

La perte d'unicité est ici identifiée au point d'apparition d'ondes stationnaires. La caractérisation de ces ondes impose :

$$(III.23) \quad \omega^\pm = 0.$$

Le système (III.21) admet des solutions non triviales si et seulement si :

$$(III.24) \quad \text{Det}(C^\pm) = 0.$$

Concernant l'interface, on suppose ici, comme nous l'avons fait précédemment, que la raideur interfaciale T est indépendante du temps, i.e. $\tilde{S} = 0$. La première équation interfaciale du problème (III.18) s'écrit alors :

$$(III.25) \quad \frac{1}{2} A_{i2kl}^- (\dot{u}_{k,l}^- + \dot{u}_{l,k}^-) - \frac{1}{2} A_{i2kl}^+ (\dot{u}_{k,l}^+ + \dot{u}_{l,k}^+) = 0.$$

Ce qui conduit au système :

$$(III.26) \quad B^- \dot{u}^- - B^+ \dot{u}^+ = 0,$$

où on a posé :

$$(III.27) \quad B_{ik}^\pm = A_{i2kl}^\pm K_l^\pm + A_{i2mk}^\pm K_m^\pm.$$

La seconde équation interfaciale du problème (III.18) s'écrit :

$$(III.28) \quad \frac{1}{2} A_{i2kl}^+ (\dot{u}_{k,l}^+ + \dot{u}_{l,k}^+) = -S_{ij} (\dot{u}_j^+ - \dot{u}_j^-).$$

Soit d'après (III.27) :

$$(III.29) \quad \frac{1}{2} B_{ik}^+ \dot{u}_k^+ = S_{ij} (\dot{u}_j^+ - \dot{u}_j^-).$$

Et d'après (III.26), si on a :

$$(III.30) \quad \text{Det}(B^-) \neq 0,$$

on obtient alors :

$$(III.31) \quad \left[\frac{i}{2}B^+ - S + S(B^-)^{-1}B^+ \right] \dot{u}^+ = 0.$$

Le système (III.31) admet des solutions non triviales si et seulement si :

$$(III.32) \quad \text{Det} \left(\frac{i}{2}B^+ - S + S(B^-)^{-1}B^+ \right) = 0.$$

III.2.3 Cas des solides isotropes

Nous particularisons maintenant l'étude au cas des solides isotropes (pour les solides orthotropes incompressibles nous renvoyons à [SUO et al., 1992]). Le tenseur A^\pm prend ainsi la forme suivante :

$$(III.33) \quad A_{ijkl}^\pm = \lambda^\pm \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^\pm (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et λ^\pm, μ^\pm les coefficients de Lamé. Enfin, nous faisons les hypothèses et les remarques complémentaires suivantes :

– La nullité de \dot{u}^\pm lorsque x_2 tend vers $\pm\infty$ impose :

$$(III.34) \quad \text{Im}(K_2^+) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(K_2^-) \leq 0.$$

– La périodicité de \dot{u}^\pm dans le plan interfacial ($x_2 = 0$) impose :

$$(III.35) \quad K_1^\pm \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad K_3^\pm \in \mathbb{R}.$$

– L'hypothèse des déformations planes est retenue (dans la direction 3) :

$$(III.36) \quad \epsilon_{i3}^\pm = \epsilon_{3i}^\pm = 0 \Leftrightarrow \dot{u}^\pm[i,3] + \dot{u}^\pm[3,i] = 0 \Rightarrow K_3^\pm \dot{u}^\pm[i] + K_i^\pm \dot{u}^\pm[3] = 0.$$

Ce qui impose :

$$(III.37) \quad \begin{cases} K_3^\pm = 0, \\ v_3^\pm = 0. \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, la forme du tenseur de raideur tangente interfacial est prise comme suit (la possibilité est laissée d'avoir un tenseur non symétrique, ce qui est par exemple le cas lorsque l'on prend en compte du frottement de Coulomb à l'interface) :

$$(III.38) \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous envisageons deux cas distincts : soit les deux solides sont déformables, soit l'un des deux est considéré comme rigide.

III.2.3.a Cas 1 : solide déformable / interface / solide déformable

Si les deux solides sont élastiques isotropes, on a :

$$A^\pm = \begin{bmatrix} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) K_1^{\pm 2} + \mu^\pm K_2^{\pm 2} & (\lambda^\pm + \mu^\pm) K_1^\pm K_2^\pm & 0 \\ (\lambda^\pm + \mu^\pm) K_1^\pm K_2^\pm & \mu^\pm K_1^{\pm 2} + (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) K_2^{\pm 2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^\pm (K_1^{\pm 2} + K_2^{\pm 2}) \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$(III.39) \quad \text{Det}(A^\pm) = \mu^{\pm 2} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) \left(K_1^{\pm 2} + K_2^{\pm 2} \right)^3.$$

L'équation (III.24) induit donc (si $\mu^\pm > 0$ et $\lambda^\pm > 0$) :

$$(III.40) \quad K_1^{\pm 2} + K_2^{\pm 2} = 0.$$

La condition (III.35) impose que K_1^+ et K_1^- soient réels. Par conséquent, on a :

$$(III.41) \quad K_2^\pm = \alpha i K_1^\pm \quad \text{avec} \quad \alpha \in \{-1, +1\}.$$

Ceci conduit à :

$$(III.42) \quad B^\pm = \begin{bmatrix} 2\mu^\pm K_2^\pm & 2\mu^\pm K_1^\pm & 0 \\ 2\lambda^\pm K_1^\pm & 2(\lambda^\pm + 2\mu^\pm) K_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^\pm K_2^\pm \end{bmatrix}$$

$$B^\pm = K_1^\pm \begin{bmatrix} 2\mu^\pm \alpha i & 2\mu^\pm & 0 \\ 2\lambda^\pm & 2(\lambda^\pm + 2\mu^\pm) \alpha i & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^\pm \alpha i \end{bmatrix} \quad \text{d'après (III.41)}$$

$$(III.42) \quad B^\pm = K_1^\pm M_1 \quad (\text{notation}).$$

On a par ailleurs :

$$(III.43) \quad \text{Det}(B^-) = 8\mu^{-2} K_2^- \left(-\lambda^- K_1^{-2} + (\lambda^- + 2\mu^-) K_2^{-2} \right).$$

Le respect de la condition (III.30) impose alors :

$$(III.44) \quad K_2^- \neq 0 \quad \text{et} \quad -\lambda^- K_1^{-2} + (\lambda^- + 2\mu^-) K_2^{-2} \neq 0.$$

Cette deuxième condition s'écrit aussi d'après (III.40) :

$$(III.45) \quad 2(\lambda^- + \mu^-) K_1^{-2} \neq 0.$$

Ce qui impose finalement :

$$(III.46) \quad K_1^- \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^- + \mu^- \neq 0.$$

Sous ces conditions, on a :

$$(III.47) \quad \left(\frac{1}{2} \text{III} + S(B^-)^{-1} \right) B^+ - S = M_2 B^+ - S \quad (\text{notation})$$

$$= K_1^+ M_2 M_1 - S \quad (\text{d'après (III.42)})$$

$$= K_1^+ M_3 - S \quad (\text{notation})$$

où M_3 est une matrice à coefficients à valeur dans \mathbb{C} . Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \text{(III.48)} \quad \text{Det} \left(\frac{i}{2} B^+ - S + S(B^-)^{-1} B^+ \right) &= \text{Det} (K_1^+ M_3 - S) \\
 &= \text{Det}(K_1^+ M_3) + \text{Det}(-S) \\
 &\quad + (K_1^+ M_3) : \text{Cof}(-S) + \text{Cof}(K_1^+ M_3) : (-S) \\
 &= K_1^{+3} \text{Det}(M_3) - \text{Det}(S) \\
 &\quad + K_1^+ M_3 : \text{Cof}(S) - K_1^{+2} \text{Cof}(M_3) : S.
 \end{aligned}$$

(On utilise ici : $\text{Det}(x + y) = \text{Det}(x) + \text{Det}(y) + x : \text{Cof}(y) + y : \text{Cof}(x)$, $\text{Cof}(x) = \text{Det}(x)x^{-T}$, et le fait que M_3 soit une matrice 3×3). Or $\text{Det}(S) = 0$ (voir (III.38)), donc la condition (III.32) devient :

$$\text{(III.49)} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} K_1^+ = 0, \\ (\text{Det}(M_3)) K_1^{+2} - (\text{Cof}(M_3) : S) K_1^+ + (M_3 : \text{Cof}(S)) = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} (polynôme de degré 2 en K_1^+ à coefficients dans \mathbb{C} de partie imaginaire non nulle). La seule solution au système (III.18) dans le cas de deux solides déformables est donc :

$$\text{(III.50)} \quad K_1^+ = 0 \quad \text{d'où} \quad K_2^+ = 0.$$

Ce qui correspond à des longueurs d'ondes d'instabilités infinies :

$$\text{(III.51)} \quad l_1^+ = \frac{2\pi}{K_1^+} = +\infty \quad \text{et} \quad l_2^+ = \frac{2\pi}{K_2^+} = +\infty.$$

Dans ce cas, les deux solides déformables cohésifs se séparent en bloc.

III.2.3.b Cas 2 : solide déformable / interface / corps rigide

Ici, seul le solide Ω^+ est considéré comme déformable. Le problème continu s'écrit alors :

$$\text{(III.52)} \quad \begin{cases} \text{div}(\dot{\sigma}^+) - \rho \frac{\partial^2 \dot{u}^+}{\partial t^2} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \dot{\sigma}^+ = A^+ : \nabla_S \dot{u}^+ \\ \dot{\sigma}^+ . n^+ = S . \dot{u}^+ + \tilde{S} . u^+ & \text{en } x_2 = 0. \end{cases}$$

Les équations précédentes se résument comme suit :

$$\text{(III.53)} \quad \begin{cases} \text{Det}(C^+) = 0, \\ \text{Det} \left(\frac{i}{2} B^+ - S \right) = 0. \end{cases}$$

En procédant comme précédemment, ce système devient :

$$(III.54) \quad \begin{cases} K_2^+ = \alpha i K_1^+ & \text{avec } \alpha \in \{-1, +1\} \\ -\alpha \mu^+ K_1^+ (s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21} + K_1^+ (\lambda^+ (\alpha s_{11} + i s_{12} + 2\mu^+ K_1^+) \\ + \mu^+ (i s_{21} + \alpha (2s_{11} + s_{22}) + 2\mu^+ K_1^+))) = 0. \end{cases}$$

Les solutions de cette seconde équation sont celles du système :

$$(III.55) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha \mu^+ K_1^+ = 0, \\ (2\mu^+ (\lambda^+ + \mu^+)) K_1^{+2} + (\lambda^+ (\alpha s_{11} + i s_{12}) + \mu^+ (\alpha (2s_{11} + s_{22}) + i s_{21})) K_1^+ \\ + (s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21}) = 0. \end{cases}$$

Si la loi d'interface définit la contrainte normale (resp. la contrainte de cisaillement) en fonction du déplacement tangent (resp. du déplacement normal), i.e. si $s_{12} \neq 0$ (resp. $s_{21} \neq 0$), alors l'équation du second ordre du système précédent n'a pas de solution réelle. La seule instabilité possible est alors donnée par la condition $K_1^+ = 0$; ce qui correspond à une longueur d'onde d'instabilité infinie. On est ramené au cas 1.

Dans le cas contraire (i.e. si $s_{12} = s_{21} = 0$) et en choisissant arbitrairement $K_1^+ \geq 0$ (qui d'après l'équation (III.34) implique que $\alpha = 1$), des instabilités apparaissent pour :

$$(III.56) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} K_1^+ = 0, \\ K_1^+ = - \left(s_{11} \lambda^+ + (2s_{11} + s_{22}) \mu^+ \right. \\ \left. + \sqrt{-8s_{11} s_{22} \mu^+ (\lambda^+ + \mu^+) + (s_{11} \lambda^+ + (2s_{11} + s_{22}) \mu^+)^2} \right) / 4\mu^+ (\lambda^+ + \mu^+). \end{cases}$$

Ce qui correspond à des longueurs d'onde d'instabilité ($\lambda^+ = \frac{E^+ \nu^+}{(1 - 2\nu^+)(1 + \nu^+)}$ et $\mu^+ = \frac{E^+}{2(1 + \nu^+)}$, où E^+ et ν^+ sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson) :

$$(III.57) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} l_1^+ = +\infty, \\ l_1^+ = \frac{4\pi E^+}{(1 + \nu^+)} / \left(-2s_{11} - s_{22} + 2(s_{11} + s_{22}) \nu^+ \right. \\ \left. + \sqrt{(-2s_{11} + s_{22})^2 + 4\nu^+ (-2s_{11}^2 + s_{11} s_{22} - s_{22}^2 + (s_{11} + s_{22})^2 \nu^+)} \right). \end{cases}$$

Deux cas peuvent alors être envisagés :

1. Comportements interfaciaux normaux et tangentiels identiques (i.e. $s_{11} = s_{22}$) :

$$(III.58) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} l_1^+ = +\infty, \\ l_1^+ = -\frac{2\pi E^+}{s_{22} (1 + \nu^+)}. \end{cases}$$

2. Absence de contribution tangentielle (i.e. $s_{11} = 0$) :

$$(III.59) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} l_1^+ = +\infty, \\ l_1^+ = -\frac{2\pi E^+}{s_{22} (1 + \nu^+) (1 - 2\nu^+)}. \end{cases}$$

Ce dernier cas est celui présenté au paragraphe précédent et notamment sur la FIG. III.1. On note que l'existence d'une instabilité de longueur d'onde non infinie n'apparaît que lorsque $s_{22} \leq 0$ ($l_1^+ \geq 0$), c'est-à-dire lorsque la courbe $R([u])$ est décroissante. Les instabilités des solides cohésifs n'apparaissent donc que lorsque le comportement interfacial entre dans sa phase adoucissante. Ceci est un apport complémentaire au théorème III.1. Une seconde remarque importante concerne l'existence d'une longueur d'onde minimale pour les instabilités des solides cohésifs. La longueur d'onde l_1^+ est minimum lorsque s_{22} est négatif et maximal, ce qui correspond dans la majorité des cas au point d'inflexion de la courbe $R([u])$, ainsi que nous l'avons signalé sur l'exemple uniaxial du paragraphe III.1.2.

BILAN DU PARAGRAPHE III.2

La forme de la courbe contrainte-saut de déplacement joue un rôle essentiel dans l'initiation de la décohésion interfaciale. En particulier, la stabilité interfaciale est très sensible aux comportements relatifs des solides et de la zone cohésive qui les lie. On note que lorsqu'une instabilité interfaciale apparaît ce n'est pas nécessairement au "pic" de la courbe $R([u])$: la zone potentielle d'apparition des instabilités interfaciales est l'ensemble de la partie adoucissante du comportement local $R([u])$.

Il a été établi que deux solides isotropes déformables semi-infinis et cohésifs se séparent nécessairement en bloc. Par contre, pour le cas d'un solide isotrope déformable et d'un obstacle rigide, il apparaît que l'existence d'une longueur caractéristique dans les problèmes de solides cohésifs conduit à l'existence d'une longueur d'onde minimale des instabilités interfaciales. L'existence d'un tel minimum est liée au point d'inflexion de la courbe de comportement $R([u])$. Enfin, il est à noter que le couplage des comportements interfaciaux normaux et tangentiels ($s_{12} \neq 0$ et/ou $s_{21} \neq 0$) favorise fortement les instabilités.

III.3 La régularisation visqueuse des modèles de décohésion interfaciale

Sur le plan numérique, les sauts de solution interfaciaux peuvent engendrer des discontinuités à l'échelle de la structure (voir FIG. IV.5) qui conduisent parfois à des instabilités numériques. Plusieurs méthodes permettent de les éviter ou de les traiter convenablement ([CHABOCHE et al., à paraître]) :

1. Raffiner le maillage éléments finis (voir [TVERGAARD, 1990b]). Cette solution conduit sou-

vent à des tailles de mailles extrêmement faibles et par conséquent s'avère coûteuse numériquement.

2. Un pilotage local de la solution. Après détection du nœud concerné par la discontinuité, le pilotage externe (force, déplacement) est remplacé par un pilotage local forçant la solution nodale à suivre la courbe de comportement interfacial. Les états d'équilibre intermédiaires ainsi obtenus sont cependant fictifs.
3. L'utilisation d'une théorie du premier gradient de la variable d'endommagement.
4. Remplacer un calcul quasi-statique par un calcul dynamique. L'énergie stockée dans la liaison interfaciale qui est brusquement restituée à la structure au moment du saut est alors transformée en énergie cinétique.
5. Une régularisation visqueuse du comportement interfacial. La restitution énergétique brutale est alors progressive dans le temps.

Ces deux dernières solutions peuvent avoir une justification physique indéniable (évolution rapide, comportement interfacial sensible à la vitesse de sollicitation). La formulation dynamique est utilisée au chapitre VI. La régularisation visqueuse est étudiée ici.

Du point de vue mécanique, la régularisation visqueuse des modèles de décohésion interfaciale conduit à consommer par viscosité l'énergie indiquée par une zone grisée sur la FIG. III.3(a). Cette énergie est consommée (au moins) quelles que soient les valeurs des paramètres de viscosité et quelle que soit la vitesse de sollicitation. Lorsque la valeur de ces paramètres augmente ou lorsque la vitesse croît, davantage d'énergie peut être consommée par viscosité. Il existe cependant un minimum noté E_v^{mini} (voir FIG. III.3(b)).

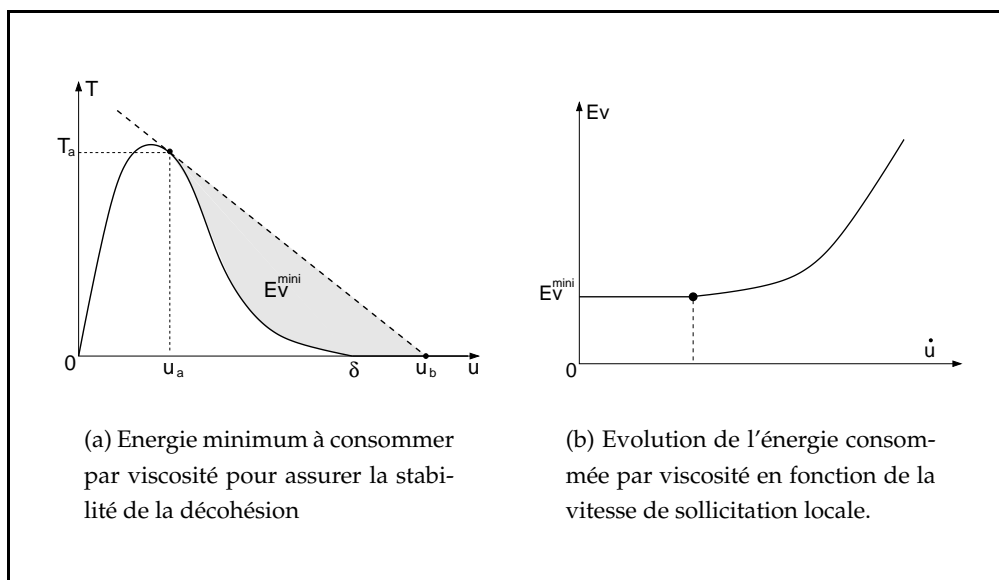


FIG. III.3 – Régularisation visqueuse des modèles de décohésion interfaciale.

BILAN DU PARAGRAPHE III.3

La régularisation visqueuse est un moyen numérique efficace et peu coûteux d'éviter les sauts de solution présentés au paragraphe III.1. Il présente aussi l'avantage de trouver une justification physique pour certains matériaux. Cependant, elle engendre une consommation énergétique supplémentaire qui possède, pour une situation donnée, un minimum en dessous duquel on ne peut pas descendre. Par ailleurs cette consommation énergétique par viscosité peut devenir prépondérante devant les autres énergies mises en jeu lorsque la vitesse de sollicitation devient localement très élevée (ce qui peut être le cas même lorsque le chargement macroscopique est quasi-statique). Une limitation de cette sensibilité à la vitesse de sollicitation a été proposée au paragraphe II.4.3.

III.4 Conclusion du chapitre

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre I, la forme de la courbe contrainte-déplacement des modèles de zone cohésive n'a pas d'influence sur la propagation stationnaire des fissures. Seule "l'aire sous la courbe" est un paramètre significatif de la fissuration. Cependant, cette forme adoucissante rend les problèmes de solides cohésifs mal posés en régime quasi-statique. L'unicité de la solution peut alors être perdue dans certaines situations ; c'est l'objet du théorème III.1. Des sauts de solution apparaissent alors : la fissuration n'est plus stationnaire. La sensibilité des modèles de zone cohésive à ces sauts de solution dépend de l'évolution de la pente dans la partie adoucissante de la courbe.

Les instabilités qui peuvent résulter de cette perte d'unicité ont été étudiées. Il apparaît notamment que deux solides élastiques semi-infinis liés par une zone cohésive se séparent en bloc. Lorsque l'un des deux solides est un obstacle rigide, l'existence d'une longueur caractéristique (inhérente aux problèmes de solides cohésifs) conduit à l'existence d'une longueur d'onde minimale des instabilités interfaciales. Cette valeur minimale doit être reliée à la plus forte pente du régime adoucissant (le point d'inflexion, en général). Par ailleurs, on note qu'un couplage des comportements interfaciaux normaux et tangents favorise les instabilités. Ces résultats sont en accords avec ceux de SUO et al. [1992].

Deux types de régularisation des problèmes de sauts de solution sont envisagés dans ce mémoire : une viscosité de la décohésion interfaciale et une formulation dynamique. La régularisation visqueuse est développée dans les deux chapitres suivants (chapitre IV : comparaison de différents modèles de décohésion ; chapitre V : identification du modèle adhésif/frottant sur une expérience de micro-indentation). L'absence de certitudes expérimentales à son sujet, nous a conduit à considérer la régularisation dynamique au chapitre VI (simulation 3D de la fissuration d'un composite à fibres longues).

CHAPITRE IV

Une comparaison de différents modèles de décohésion

Différents modèles de décohésion interfaciale, issus de la littérature récente, sont comparés sur une simulation uniaxiale d'un essai de micro-indentation. Lorsque ces modèles sont indépendants de la vitesse de sollicitation, l'évolution de la décohésion interfaciale est suffisamment stationnaire pour que les modèles conduisent à une réponse identique dès lors qu'ils présentent la même énergie de décohésion.

Tous ces modèles sont susceptibles de présenter des sauts de solution. Lorsque c'est le cas, des régularisations visqueuses sont envisagées et comparées. La sensibilité de la réponse de la structure à la vitesse de sollicitation est alors un problème délicat.

PLAN DU CHAPITRE IV

IV.1 Introduction	115
IV.2 Modèle uniaxial relatif au couplage interface/structure : micro-indentation .	116
IV.2.1 Un modèle uniaxial	116
IV.2.2 Comparaison du modèle uniaxial et du modèle éléments finis	117
IV.3 Comparaison de lois d'interface indépendantes du temps	118
IV.3.1 Quatre lois d'interface indépendantes du temps	118
IV.3.2 Simulation d'un essai d'indentation. Energie de décohésion	120
IV.3.3 Saut de solution	120
IV.4 Comparaison de lois d'interfaces sensibles à la vitesse de sollicitation	122
IV.5 Conclusion du chapitre	124

IV.1 Introduction

Nous présentons ici, pour l'essentiel, les travaux de MONERIE et al. [1998]. Il s'agit de comparer des lois d'interface fibre/matrice ⁽¹⁾ récemment développées et traitées par éléments finis au LMA de Marseille, à l'ONERA de Châtillon et au LMT de Cachan. Une modélisation uniaxiale adaptée à une expérience de micro-indentation est proposée. Son traitement rapide autorise une compréhension approfondie du couplage interface/structure et des spécificités de chacune des lois. Elle permet notamment de mettre en évidence :

1. le caractère général des sauts de solution étudiés au chapitre III,
2. la sensibilité des modèles d'interface à ces sauts,
3. la possibilité d'une régularisation visqueuse de ces sauts et en particulier de souligner la sensibilité des différents modèles à la vitesse de sollicitation et la difficulté de connaître cette sensibilité à l'échelle de la cellule composite.

La démarche comprend deux phases : d'abord l'analyse des lois au niveau de leur formulation décrivant le comportement d'une liaison interfaciale ponctuelle et isolée et ensuite l'analyse d'une interface complète au sein d'une structure composite. La première phase passe par l'écriture d'une formulation unifiée des lois ⁽²⁾ qui permet leur utilisation directe sans référence aux cadres thermodynamiques et phénoménologiques dans lesquels elles ont été élaborées. La deuxième phase offre une compréhension du couplage fort interface/structure. Ce couplage apparaît clairement pour un essai de micro-indentation : le profil de dissipation d'énergie à l'interface par endommagement dépend de l'énergie de décohésion définie par la loi mais aussi de l'énergie relaxée par la structure lorsque la décohésion fibre/matrice évolue. Nous proposons ici une modélisation uniaxiale d'essais de micro-indentation qui restitue cet aspect essentiel de la sollicitation. Cette modélisation est réalisée sur la base de conditions expérimentales réalistes. Elle permet en outre de comparer les lois d'interface indépendamment des codes éléments finis dans lesquels elles sont implantées.

Les comparaisons pour une liaison ponctuelle et pour une interface in situ sont effectuées pour deux classes de lois d'interface : les lois indépendantes du temps ([CHABOCHE et al., 1997b], [ALLIX et al., 1995], [MICHEL et al., 1994] et cas limite dans [RAOUS et al., 1999]) et les lois sensibles à la vitesse de sollicitation ([CHABOCHE et al., à paraître], [LADEVÈZE, 1995] et [RAOUS et al., 1999]).

⁽¹⁾ brièvement énoncées au paragraphe I.3.3.

⁽²⁾ valable lors d'une évolution monotone de la décohésion interfaciale.

IV.2 Modèle uniaxial relatif au couplage interface/structure : micro-indentation

IV.2.1 Un modèle uniaxial

Nous proposons ici de modéliser l'essai de micro-indentation par un assemblage d'éléments rhéologiques. Ces éléments sont élastiques pour les constituants et non linéaires pour le comportement de l'interface. Cette modélisation peut être apparentée à une modélisation éléments finis unidirectionnels.

La fibre est discrétisée en une succession d'éléments uniaxiaux compressibles de raideur K_f (FIG. IV.1). Cette raideur est celle du volume de matière représenté considéré libre latéralement (section πR_f^2 , hauteur h). L'influence de l'environnement de la fibre est restituée par le biais d'un réseau de raideurs K_e égales. Ce choix permet d'obtenir un raidissement structural indépendant de la longueur de décohésion (structure considérée semie-infinie, effets de bord négligés). Le calcul de la raideur apparente de la structure par éléments finis, pour une interface infiniment rigide, détermine la valeur de K_e .

Les contraintes résiduelles d'origine thermique sont introduites en associant aux raideurs K_f et K_e une dilatation propre. Le modèle proposé ne présente ainsi aucun paramètre ajustable hormis ceux liés à la loi d'interface.

Le schéma numérique de la résolution de l'endommagement est implicite. Pour les lois d'interface sensibles à la vitesse de sollicitation, les équations différentielles sont traitées par une θ -méthode ($\theta=1/2$) (voir paragraphe II.3.2). Le traitement est réalisé sous MathematicaTM.

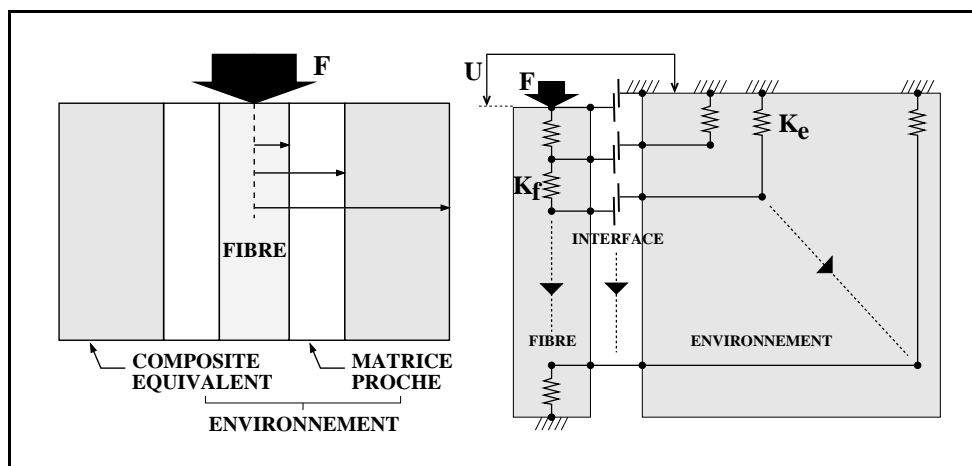


FIG. IV.1 – Modèle uniaxial de l'essai de micro-indentation. Sollicitation interfaciale cisaillement et pression radiale. Notations : R_f rayon de la fibre, h distance internodale, K_f et K_e raideurs élémentaires de fibre et d'environnement, F force appliquée, U déplacement mesuré.

IV.2.2 Comparaison du modèle uniaxial et du modèle éléments finis

Le modèle uniaxial est validé sur une simulation d'essai d'indentation menée avec le code éléments finis GYPTIS au LMA. Ce code intègre la loi d'interface développée par CANGÉMI et al. [1996] et RAOUS et al. [1997, 1999]. L'essai simulé est un essai réalisé à l'ONERA sur un composite SiC/SiC et piloté en force ($\dot{F} = 8.10^{-4} N/s$). Les caractéristiques thermo-mécaniques des matériaux sont indiquées dans le TAB. IV.1.

matériau	rayon externe	caractéristiques mécaniques	coefficients de dilatation
fibres SiC Nicalon NLM202	$8.5 \mu m$	$E = 200 GPa$ $\nu = 0.25$	$\alpha_L = \alpha_T = 3 \times 10^{-6} C^{-1}$
matrice SiC CVD	$17.95 \mu m$	$E = 350 GPa$ $\nu = 0.2$	$\alpha_L = \alpha_T = 4.6 \times 10^{-6} C^{-1}$
Composite équivalent SiC/SiC ($V_f = 40\%$)	$200 \mu m$	$E = 285 GPa$ $\nu = 0.2$	$\alpha_L = \alpha_T = 4.6 \times 10^{-6} C^{-1}$

TAB. IV.1 – Caractéristiques thermo-mécaniques des constituants du composite SiC/SiC indenté.

Le refroidissement post-élaboration est estimé être de $1000^\circ C$. Il conduit à une interface en compression radiale à la température ambiante. Une correction de la plasticité de la fibre sous l'indenteur est prise en compte. Le coefficient de frottement interfacial est estimé à 0.17 [MONERIE et al., en préparation]. Le modèle éléments finis et le modèle uniaxial comportent 100 noeuds interfaciaux.

La concordance des résultats obtenus par éléments finis et par le modèle uniaxial (FIG. IV.2) valide les hypothèses mécaniques sur lesquelles repose ce dernier. De plus, le temps CPU est ici réduit d'un facteur 80 par rapport aux éléments finis. Ce modèle simplifié constitue donc un outil efficace pour comparer des lois d'interface sollicitées en cisaillement/compression et soumises à un effet de structure. Il permet donc de réaliser de vastes campagnes d'essais numériques.

REMARQUE IV.1. Ce modèle uniaxial offre la possibilité de simuler simplement et avec une grande rapidité la décohésion des systèmes fibre/interface/environnement. Il est utilisé ici pour la simulation d'une expérience de *push-in* mais son utilisation peut être étendue sans difficulté au cas du *pull-out*. Ce modèle est donc un outil particulièrement intéressant pour traiter les problèmes de propagation de fissures matricielles pontées par des fibres. Ce cas correspond en effet à un assemblage en parallèle de cellules uniaxiales élémentaires en situation de *pull-out*, chaque cellule ayant un état de décohésion interfacial différent. A notre connaissance, ces calculs n'ont été menés jusqu'ici qu'analytiquement et sous des hypothèses simplificatrices

fortes. La simulation complète par éléments finis semble encore inadaptée compte tenu des possibilités de calcul actuelles. Ce modèle uniaxial est un bon compromis.

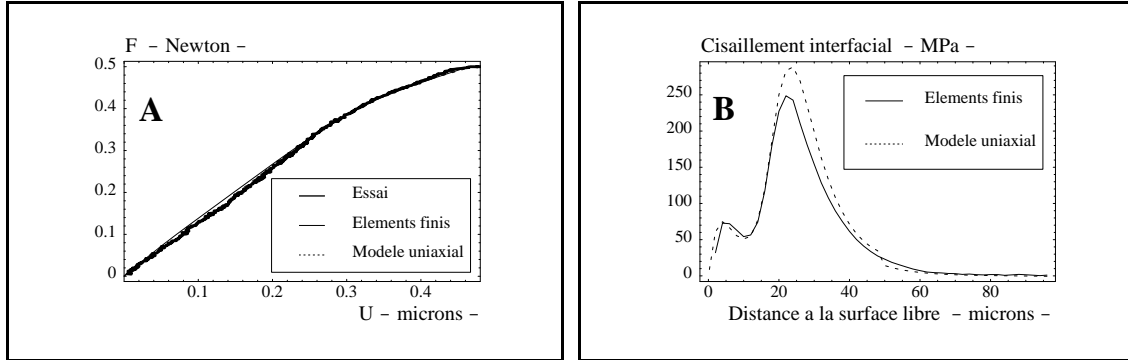


FIG. IV.2 – Simulation d'un essai d'indentation (loi RAOUS et al. [1999] $\mu = 0.17$; $C = 0.01N/\mu m^3$; $\delta_0 = 5.5nm$; $b = 1.65 \times 10^{-3}Ns/\mu m$). **A** : réponse globale ; **B** : profil de la contrainte de cisaillement le long de l'interface pour $F = 0.5N$.

BILAN DU PARAGRAPHE IV.2

Une modélisation uniaxiale de l'essai de micro-indentation a été proposée. Ce modèle, confronté à des calculs par éléments finis, est un outil performant pour comparer les lois d'interface. Il permet de compléter dans une très large mesure les comparaisons menées à partir de l'étude d'une liaison interfaciale ponctuelle.

IV.3 Comparaison de lois d'interface indépendantes du temps

IV.3.1 Quatre lois d'interface indépendantes du temps

On trouvera dans les articles cités en référence les détails concernant chacune des lois : loi I [TVERGAARD, 1990a ; CHABOCHE et al., 1997a,b], loi II [ALLIX et al., 1995], loi III [MICHEL et SUQUET, 1994 ; MICHEL et al., 1994], loi IV cas limite dans [CANGÉMI, 1997 ; RAOUS et al., 1997, 1999]. Nous proposons ici une formulation unifiée (équation (IV.1) et TAB. IV.2) qui, pour un endommagement de l'interface en mode II, lie la contrainte de cisaillement, notée ici simplement R , au glissement interfacial $[u]$ par l'intermédiaire d'une raideur endommageable $C\beta$. Cette formulation s'applique pour des chargements conduisant à un endommagement interfacial monotonement croissant. L'endommagement débute pour $[u] = \delta_0$; il est total pour $[u] = \delta_c$ (voir FIG. IV.3). Pour la loi IV ($\delta_c = +\infty$), la liaison interfaciale est considérée rompue lorsque 99% de l'énergie susceptible d'être dissipée par endommagement a effectivement été dissipée. Toute décharge partielle est élastique. En outre, ces lois sont ici couplées avec du frottement de Coulomb (coefficient $\mu = 0.17$) qui devient actif à l'amorce d'un glissement interfacial.

$$(IV.1) \quad R = C\beta[u] \begin{cases} \beta = 1 & \text{si } 0 \leq [u] \leq \delta_0 & \text{interface vierge,} \\ 1 > \beta > 0 & \text{si } \delta_0 \leq [u] \leq \delta_c & \text{interface partiellement endommagée,} \\ \beta = 0 & \text{si } [u] > \delta_c & \text{interface rompue.} \end{cases}$$

	Loi I	Loi II	Loi III	Loi IV
Evolution de β	$\beta = \left(\frac{\delta_C - [u]}{\delta_C}\right)^2$	$\beta = \frac{\delta_C - [u]}{\delta_C - \delta_0}$	$\beta = \frac{\delta_C - [u]}{\delta_C - 2\delta_0 + [u]}$	$\beta = \left(\frac{\delta_0}{[u]}\right)^2$
Paramètres	C, δ_C, μ	$C, \delta_0, \delta_C, \mu$	$C, \delta_0, \delta_C, \mu$	C, δ_0, μ
Remarques	$\delta_0 = 0$	—	—	$\delta_C = \infty$

TAB. IV.2 – Evolution monotone de la variable d'endommagement : loi I [TVERGAARD, 1990a ; CHABOCHE et al., 1997a], loi II [ALLIX et al., 1995], loi III [MICHEL et al., 1994], loi IV cas limite dans [RAOUS et al., 1999].

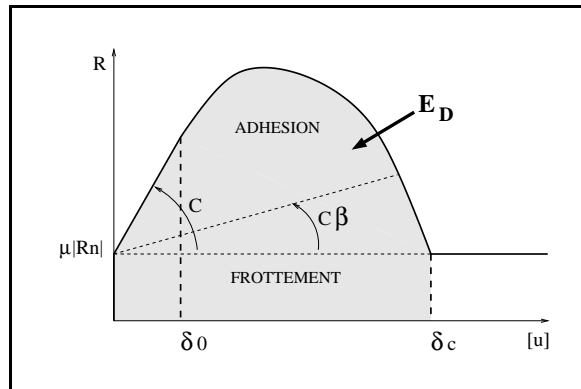


FIG. IV.3 – Comportement général des lois d'interface comparées : cisaillement et radiale R_N . On note E_D l'énergie de décohésion.

REMARQUE IV.2. On notera que la raideur endommageable (équation IV.1) est volontairement choisie proportionnelle à β : on rejoint une formulation plus classique en *mécanique de l'endommagement*. Pour le modèle de décohésion interfaciale présenté précédemment (chapitre II), la formulation d'origine (par exemple, les équations (II.61)) peut être retrouvée par un changement de variable $\beta \leftrightarrow \beta^2$.

Certaines spécificités propres à chaque loi sont perceptibles dans les formulations ci-dessus concernant une liaison interfaciale ponctuelle. Les lois I, II et III proposent une évolution très

progressive de l'endommagement en fonction du glissement interfacial (linéaire pour II), ce qui n'est pas le cas de la loi IV (évolution en $[u]^{-4}$). On remarque aussi qu'une absence de seuil d'endommagement ($\delta_0 = 0$) pour la loi I correspond à une interface initialement rompue.

IV.3.2 Simulation d'un essai d'indentation. Energie de décohésion

L'essai d'indentation défini précédemment est simulé avec les lois d'interface I à IV. Les paramètres sont identifiés de manière à obtenir la même réponse globale $F(U)$ pour chaque loi d'interface (FIG. IV.4A). Pour les noeuds interfaciaux entièrement endommagés (décohésion interfaciale totale d'environ $15\mu m$ à $F = 0.5N$), les comportements locaux spécifiques des lois I-II-III et de la loi IV présentent des différences significatives (FIG. IV.4B). La loi IV (cas particulier à viscosité nulle du modèle de RAOUS et al. [1999]) révèle notamment une contrainte maximale supportée par l'interface et un seuil de comportement élastique supérieurs aux autres lois (seuil d'endommagement élevé).

Cependant, ces lois présentent toutes la même énergie de décohésion (voir TAB. IV.3). Cette énergie semble donc être le paramètre interfacial essentiel régissant l'évolution de l'endommagement de la structure. L'ajustement précis de cette évolution dépend néanmoins du nombre de paramètres interfaciaux proposé par chaque loi.

	Loi I	Loi II	Loi III	Loi IV
$C (N/\mu m^3)$	0.00826	0.00825	0.00825	0.01
$\delta_0 (nm)$	—	8	8	36
$\delta_C (nm)$	138	94	112	—
$E_D (J/m^2)$	$\simeq 20.3$	$\simeq 21.0$	$\simeq 20.7$	$\simeq 21.5$

TAB. IV.3 – Paramètres identifiés (lois I à IV). L'énergie de décohésion relative à chaque loi est identique à 5 % près.

IV.3.3 Saut de solution

A une distance donnée de la surface libre, le niveau d'endommagement de l'interface est défini par le point de fonctionnement entre la loi de comportement interfacial et la réponse élastique de la structure localement vue par l'interface. Lorsque la structure devient localement trop compliant — ce qui est le cas par exemple en divisant le module de la fibre par 4 (FIG. IV.5B) — l'évolution de l'endommagement est discontinue [CHABOCHE et al., à paraître]. L'énergie élastique encore stockée dans cette liaison interfaciale au moment de la discontinuité est instantanément restituée à la structure. Elle devient le moteur du rechargement des liaisons interfaciales suivantes, qui sont à leur tour susceptibles de présenter cette discontinuité d'endommagement.

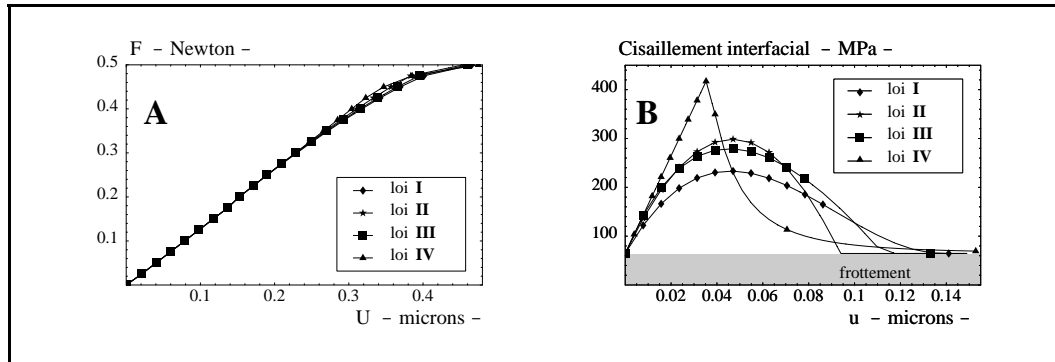


FIG. IV.4 – Simulation d'un essai d'indentation avec quatre lois d'interface indépendantes de la vitesse de sollicitation. **A** : réponse globale $F(U)$; **B** : comportement $R([u])$ local sur les 15 premiers microns de décohésion. Paramètres identifiés : voir TAB. IV.3.

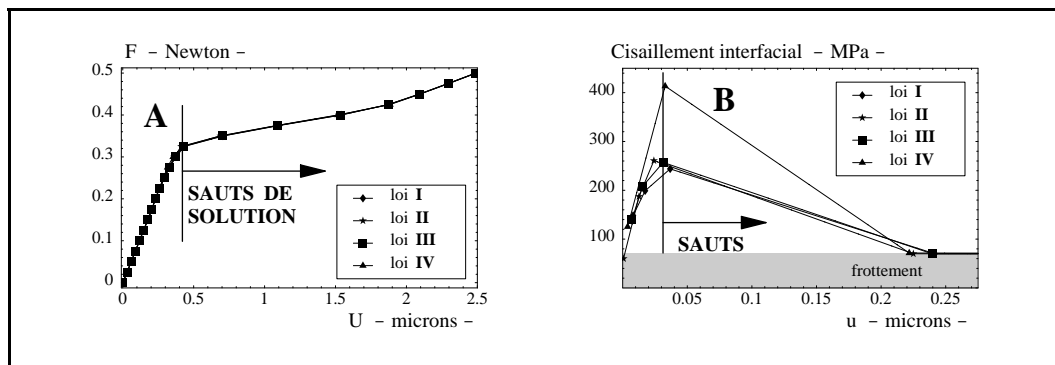


FIG. IV.5 – Saut de solution pour les lois d'interface indépendantes du temps. **A** : réponse globale $F(U)$; **B** : comportement $R([u])$ local à 10 mm de la surface libre .

Cette situation conduit à un saut de solution pour la réponse globale $F(U)$ (FIG. IV.5A).

BILAN DU PARAGRAPHE IV.3

L'étude menée ici offre une compréhension des principes mécaniques sur lesquels sont basées les lois de comportement interfacial (rôle donné au seuil de décohésion, notion de glissement à rupture, ...). Dans ce but, une formulation unifiée des lois étudiées a été présentée. Il a été cependant montré, par des simulations à l'aide du modèle uniaxial, que l'effet du comportement local de l'interface sur le comportement global d'une structure composite peut être différent de celui attendu par l'analyse d'une liaison interfaciale ponctuelle. Cette différence est inhérente au couplage fort qui existe entre le comportement structural et celui de la loi d'interface.

Des lois indépendantes du temps ont été comparées. Il apparaît que le paramètre interfacial essentiel dans l'évolution de l'endommagement de la structure composite semble être l'énergie de décohésion (ce résultat n'apparaît pas surprenant à la vue de l'équation (I.72)). Par ailleurs, toutes ces lois présentent des sauts de solution dans le cas d'une

structure localement trop compliant. Ce résultat est en accord avec ceux présentés au chapitre III.

IV.4 Comparaison de lois d'interfaces sensibles à la vitesse de sollicitation

Les lois d'interface dépendantes de la vitesse de sollicitation (lois visqueuses) constituent une régularisation des lois indépendantes du temps lorsque celles-ci présentent une discontinuité d'endommagement. Elles introduisent une dissipation visqueuse qui assure une relaxation progressive des contraintes interfaciales quelle que soit la sollicitation de l'interface.

La formulation de ces lois est donnée dans le TAB. IV.4. Pour une liaison interfaciale ponctuelle, la dépendance en vitesse de cette énergie dissipée par viscosité (notée E_v) est calculée analytiquement. Le calcul correspond à une sollicitation à vitesse constante $[\dot{u}]$ telle que l'essentiel de l'énergie de décohésion provienne de la dissipation visqueuse ($E_D = E_v$ i.e. jusqu'à la rupture de la liaison, les dissipations par endommagement et par frottement sont négligés devant la dissipation par viscosité). Lorsque ces lois (I bis, II bis et IV bis pour $p=1$) sont sollicitées à vitesse nulle, elles correspondent bien aux lois indépendantes du temps (lois I, II et IV).

Des simulations sont conduites pour une structure donnant lieu à un saut de solution avec les lois indépendantes du temps. Deux vitesses de chargement sont étudiées : $\dot{F}_1 = 8 \times 10^{-6} N/s$ et $\dot{F}_2 = 100\dot{F}_1$. Les lois sont identifiées (TAB. IV.5) de manière à ce qu'au lieu de plus fort gradient de vitesse à l'interface l'énergie dissipée par viscosité reste constante pour $\dot{F} < \dot{F}_1$ et croisse pour $\dot{F} > \dot{F}_1$. Pour chaque loi, l'influence de la vitesse est ainsi minorée dans la gamme $[\dot{F}_1, \dot{F}_2]$. L'existence d'un seuil de vitesse en deçà duquel la dissipation visqueuse reste constante ($\dot{F} < \dot{F}_1$) est une particularité du couplage interface/structure. De même, la simulation à $\dot{F}_2 = 100\dot{F}_1$ (FIG. IV.6) révèle que la sensibilité à la vitesse des lois I bis, II bis et IV bis n'est pas, pour la structure composite, celle calculée pour une liaison interfaciale ponctuelle. Pour cette dernière, la dépendance de l'énergie dissipée par viscosité est, par exemple, en $[\dot{u}]$ pour la loi I bis et en $[\dot{u}]^{2/3}$ pour la loi IV bis avec $p = 1$. La simulation avec le modèle uniaxial indique qu'entre \dot{F}_1 et \dot{F}_2 ces deux lois conduisent au même comportement global $F(U)$. La sensibilité à la vitesse de sollicitation peut être diminuée pour la loi IV bis avec $p = 0.5$.

BILAN DU PARAGRAPHE IV.4

Les sauts de solution relatifs à l'instabilité de la décohésion interfaciale sont évitées par les lois sensibles à la vitesse de sollicitation. Pour ces dernières, la sensibilité à la vitesse de l'énergie dissipée par viscosité a été calculée pour une liaison interfaciale ponctuelle. La prédiction de leur impact sur la structure composite n'est pas immédiate.

IV.4. COMPARAISON DE LOIS D'INTERFACES SENSIBLES À LA VITESSE DE SOLLICITATION

	Evolution de la variable d'endommagement	E_{visc} est proportionnelle à :
loi I bis	$\beta = \left(\frac{\delta_C - [u]}{\delta_C} \right)^2 \quad \text{si } 0 \leq \frac{[u]}{\delta_C} \leq \frac{1}{3}$ $\dot{\beta} = - \frac{[\dot{u}] \sqrt{\delta_C} (4[u]^2 + \alpha[\dot{u}]([u] + \alpha[\dot{u}] + \delta_C)) \sqrt{\beta}}{\sqrt{(2\delta_C + 3\alpha[\dot{u}])^3 [u]^3 (2[u] + \alpha[\dot{u}])}}$ $\quad \text{si } \frac{[u]}{\delta_C} > \frac{1}{3}$	$[\dot{u}]$
loi II bis	$\dot{\beta} = - \frac{k}{a} \left(1 - \exp \left[-a \left(\beta - \frac{\delta_C - [u]}{\delta_C - \delta_0} \right) \right] \right)$	$\delta_C^2 k^2 + a \delta_C k [\dot{u}] + (a[\dot{u}])^2$
loi IV bis	$\dot{\beta} = -2\sqrt{\beta} \left(\frac{C}{b} [u]^2 \left(\sqrt{\beta} - \left(\frac{\delta_0}{[u]} \right)^2 \right) \right)^{1/p}$	$[\dot{u}]^{2/(1+2/p)}$

TAB. IV.4 – Loïs d'interface sensibles à la vitesse de sollicitation et dépendance en vitesse de l'énergie dissipée par viscosité : I bis [CHABOCHE et al., à paraître], II bis [LADEVÈZE, 1995], IV bis [RAOUS et al., 1999].

Loi I bis	$C = 8.25 \times 10^{-2} N/\mu m^3$	$\delta_C = 138nm$	$\alpha = 500s$
Loi II bis	$C = 8.25 \times 10^{-2} N/\mu m^3$	$\delta_0 = 4nm$	$\delta_C = 138nm$
			$a = 10^{-6}$
			$k = 1.5 \times 10^{-3} s^{-1}$
Loi IV bis (p=1)	$C = 1 \times 10^{-2} N/\mu m^3$	$\delta_0 = 25nm$	$b = 2 \times 10^{-2} Ns/\mu m$
Loi IV bis (p=0.5)	$C = 1 \times 10^{-2} N/\mu m^3$	$\delta_0 = 0.1nm$	$b = 1.4 \times 10^{-3} Ns/\mu m$

TAB. IV.5 – Paramètres utilisés pour éviter le saut de solution grâce à l'introduction de lois visqueuses.

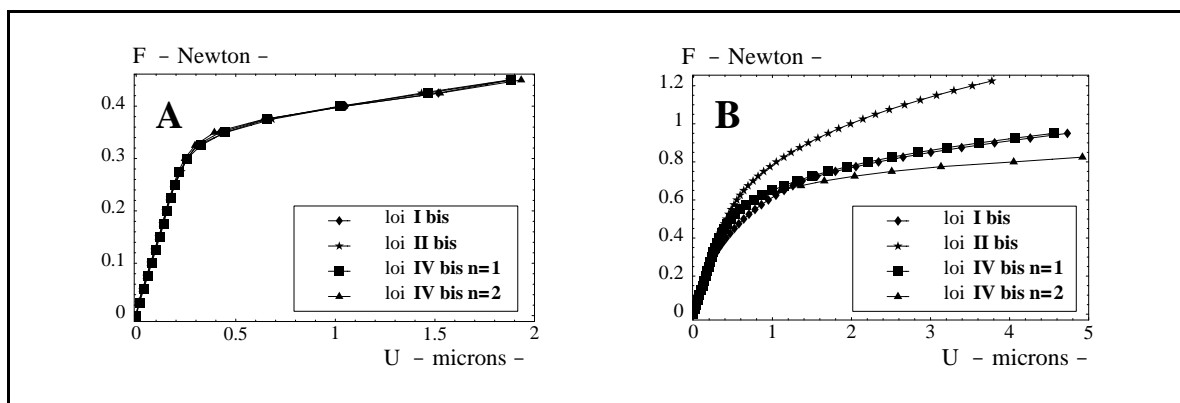


FIG. IV.6 – Sensibilité des lois visqueuses à la vitesse de sollicitation : A : $\dot{F}_1 = 8 \times 10^{-6} N/s$; B : $\dot{F}_2 = 100\dot{F}_1$.

IV.5 Conclusion du chapitre

Nous avons proposé dans ce chapitre une modélisation rhéologique uniaxiale de l'essai de micro-indentation. Cette modélisation permet une description simplifiée mais suffisamment fidèle du comportement d'un système fibre/interface/matrice (fibre et matrice élastiques, comportement adhésif/frottant de l'interface, prise en compte des contraintes résiduelles thermiques). Cette modélisation, après confrontation à des calculs par éléments finis, s'avère être un outil performant pour la simulation de la fissuration des composites. La sollicitation de push-in envisagée ici peut notamment être étendue sans difficulté au cas du pull-out. Un assemblage en parallèle de modèles uniaxiaux en pull-out doit ainsi permettre de simuler à moindre coût la propagation d'une fissure matricielle pontée par des fibres.

Dans la situation de push-in, une comparaison systématique de différents modèles de décohésion interfaciale a été réalisée. Dans leur version indépendante du temps, ces modèles présentent une réponse identique à l'échelle de la cellule composite dès lors qu'ils ont la même énergie de décohésion. Lorsque la structure devient localement trop compliant, des sauts de solution apparaissent quel que soit le modèle de décohésion utilisé (*voir* chapitre III). Ces problèmes de sauts de solution sont ici résolus en envisageant une régularisation visqueuse. La sensibilité de la réponse globale à la vitesse de sollicitation peut être forte selon le type de régularisation proposé par les différents modèles comparés.

CHAPITRE V

L'interface fibre/matrice dans les matériaux composites à matrice céramique

L'identification des propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice est un problème délicat. Elle nécessite une interaction forte entre expérimentation et simulation. Après une rapide présentation des essais micro-mécaniques dédiés aux interfaces fibre/matrice des composites à fibres longues, nous proposons une identification des paramètres mécaniques du modèle adhésif/frottant sur la simulation d'un essai de micro-indentation. La question de la viscosité interfaciale est discutée, ainsi que la validité des paramètres identifiés. L'énergie de décohésion interfaciale est estimée à 10 J/m^2 pour le composite SiC/SiC.

PLAN DU CHAPITRE V

V.1	Introduction	127
V.2	L'interface fibre/matrice	127
V.2.1	La micromécanique des matériaux composites	127
V.2.2	Interface/interphase	128
V.2.3	Les essais micromécaniques	129
V.3	Simulation numérique d'essais de micro-indentation (push-in)	132
V.3.1	L'essai de micro-indentation	132
V.3.2	Simulation d'une expérience de micro-indentation d'un composite SiC/SiC à fibres longues	135
V.4	Identification des paramètres mécaniques de l'interface fibre/matrice	141
V.4.1	Méthode d'identification des paramètres mécaniques du modèle adhé- sif/frottant	141
V.4.2	Identification avec viscosité du comportement interfacial	142
V.4.3	La question de la viscosité	143
V.4.4	Discussion sur les paramètres mécaniques identifiés	146
V.4.5	Validation du modèle : l'influence de \bar{V}_f	150
V.5	Conclusion du chapitre	152

V.1 Introduction

Les développements industriels nécessitent des matériaux toujours plus résistants, plus légers et opérationnels dans une large plage de température. Le concept de matériaux composites tend à répondre à ces exigences. Plus précisément, les composites les plus répandus couplent une bonne résistance mécanique à une masse volumique relativement faible : on parle de haute résistance spécifique. Cependant, la tenue en température est rarement accessible. C'est pour pallier ce manque que les céramiques sont apparues dans le domaine des matériaux composites.

Les composites à matrice céramique (CMC) sont principalement utilisés pour des applications thermostructurales. Ces composites ont en général un coût de fabrication élevé (qui tend cependant à diminuer actuellement) et une durée de vie relativement courte (surtout sous atmosphère oxydante). Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéressons au composite SiC/SiC (fibres longues) et à l'amélioration de sa durée de vie (sa résistance à la fissuration) au travers d'approches micromécaniques relatives à l'interface fibre/matrice.

V.2 L'interface fibre/matrice

V.2.1 La micromécanique des matériaux composites

La micromécanique cherche à faire le lien entre les mécanismes microscopiques et le comportement macroscopique des solides. Sa finalité est multiple. Il peut s'agir de donner une loi de comportement macroscopique à partir des propriétés élémentaires : c'est le cas de l'*homogénéisation* lorsque le milieu présente différentes phases. Il peut s'agir de comprendre de rôle d'un paramètre microscopique (propriété mécanique d'un constituant, texture, orientation cristallographique, morphologie, taille de précipités, fraction volumique pour les matériaux multiphasés) sur le comportement macroscopique : c'est l'approche *micro-macro*. Dans ce cas, l'objectif est en général du côté de la Science des Matériaux et on tente typiquement de répondre à la question : comment doit-on modifier un paramètre microscopique donné pour faire varier le comportement macroscopique selon un critère donné ?

Cette question est essentielle concernant les matériaux composites. Les propriétés macroscopiques recherchées étant données (haut module, tenue en température, applications thermostructurales), on peut considérer que les constituants sont définis (acier haut module, verre, céramique). Les paramètres microstructuraux qui peuvent être ajustés sont alors : la forme des renforts (particules, fibres, whiskers), la texture (tissé, unidirectionnel), la fraction volumique, éventuellement l'ajout de constituants supplémentaires (par exemple par précipité et en fraction volumique négligeable). Les procédés de fabrication imposent certains choix. Lorsque ces paramètres sont définis, il reste la question des propriétés des interfaces entre constituants.

Le rôle déterminant des interfaces sur le comportement mécanique des matériaux composites est double. D'une part, la résistance des interfaces assure la transmission des efforts entre constituants. Elles leur permettent ainsi de participer pleinement à la tenue mécanique du matériau composite. D'autre part, en cédant progressivement, les interfaces assurent une dégradation lente des caractéristiques du matériau composite.

Devant l'importance du rôle des interfaces, il s'est rapidement avéré nécessaire de les caractériser. De nombreux essais micromécaniques ont été développés dans ce sens. Cependant la caractérisation des interfaces ne peut se faire sans prendre en compte leur fonctionnement dans le composite ; ce qui a deux conséquences :

1. les essais doivent être représentatifs du comportement in situ des interfaces,
2. une interaction entre l'expérimentation et la modélisation est nécessaire. Des modèles mécaniques de comportement d'interface doivent être développés pour permettre des modélisations à l'échelle du composite. Le but des essais micromécaniques n'est alors plus de procéder à une comparaison qualitative et/ou empirique des interfaces mais de valider des modèles de comportement d'interface et d'identifier leurs paramètres mécaniques (par exemple, [BRETHERAU, 1997]).

Ainsi, nous présentons ci-dessous de quelle manière peut se constituer l'interface fibre/matrice pour le cas particulier des composites à fibres longues, quels sont les essais micromécaniques les concernant et nous identifions et validons le modèle adhésif/frottant sur une simulation d'essai de micro-indentation.

V.2.2 Interface/interphase

Pour le cas des composites à fibres longues, l'interface peut être considérée en toute généralité comme la zone comprise entre la fibre et la matrice. On parle ainsi de *zone interfaciale* ou d'*interphase*. L'interphase peut contenir plusieurs constituants, eux-mêmes séparés par des interfaces. Les limites de cette zone sont parfois difficilement identifiables et ses démarcations dépendent du type d'interphase considérée :

1. L'interphase est issue d'un troisième corps placé par l'élaborateur entre la fibre et la matrice ou autour de la fibre (revêtement) avant addition de la matrice au réseau de fibres. Ces troisième corps sont souvent analysés du point de vue de leur composition avant élaboration du composite mais rarement du point de vue mécanique (les travaux de LI et WISNOM [1996] font cependant exception). Le mécanicien doit ainsi identifier le comportement même élastique de l'interface à partir d'essais où les mécanismes interfaciaux sont complexes (endommagement, frottement, ...).
2. L'interphase est issue d'une interaction chimique entre la fibre et la matrice. Lorsque cette interaction est forte, le profil de l'interphase peut se révéler très découpé. La représentation de l'interphase par une interface sans épaisseur est alors délicate.

3. L'interphase est issue d'un troisième corps ayant subi une interaction chimique avec la fibre et la matrice. C'est le cas le plus général. Le troisième corps peut même être destiné à jouer le rôle de barrière de diffusion pour limiter l'attaque de la fibre. Son interaction chimique avec la matrice modifie alors sa composition et ses propriétés mais la fibre subit peu d'altération. Il s'agit alors d'identifier l'interface à ce troisième corps dont il faut déterminer les propriétés mécaniques.

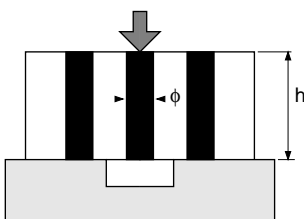
Le procédé d'élaboration du matériau composite a bien évidemment une influence sur la composition de l'interphase. Par exemple, pour les composites céramique/verre obtenus par pression à chaud de pré-imprégnés, le comportement mécanique des interfaces dépend du type de désensimage des fibres utilisé avant la fabrication des pré-imprégnés. SANGLEBOEUF [1998] a montré qu'un désensimage chimique (bain d'acétone et d'alcool) conduisait à des fibres présentant un résidu riche en carbone à leur surface (soit par désensimage incomplet soit par trace de solvant riche en carbone), alors qu'un désensimage thermique à 600°C ne laissait aucune trace. L'existence d'un dépôt carboné à la surface des fibres peut conduire à une interface post-élaboration au comportement mécanique très différent.

Au même titre, la fraction volumique de fibres peut localement influencer sur les propriétés interfaciales [SANGLEBOEUF, 1998 ; GUICHET et al., 1998 ; GUICHET, 1998]. La quantité de constituants présents dans la matrice pouvant migrer de la matrice vers l'interface est inversement proportionnelle à la fraction volumique de fibres : l'interface d'une fibre isolée dans la matrice n'a pas les mêmes propriétés mécaniques que celle d'une fibre au sein d'un toron dense.

V.2.3 Les essais micromécaniques

Pour une bibliographie complète sur ces essais et d'une manière générale sur les composites à matrice céramique le lecteur pourra se référer à [SANGLEBOEUF, 1998].

Push-out



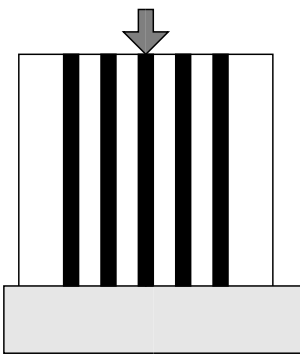
Il s'agit d'un essai de mise en compression d'une fibre selon son axe de symétrie. La fibre est poussée jusqu'à être extraite de son logement. L'interface est ainsi sollicitée en compression et en cisaillement. L'effort est appliqué sur la surface libre de la fibre par l'intermédiaire d'un indenteur (souvent à fond plat pour les fibres de gros diamètre). Cet effort est relevé en fonction de l'enfoncement de la fibre par rapport à la surface libre de l'échantillon. Pour cet essai, le rapport entre la hauteur de l'échantillon et le diamètre de la fibre indentée doit en général respecter : $4 < h/\phi < 60$.

Le principal avantage de cet essai est la connaissance de la surface frottante en fin d'essai ; ce qui est un paramètre essentiel des modèles interfaciaux basé sur une contrainte de cisaillement critique

ou sur un coefficient de frottement.

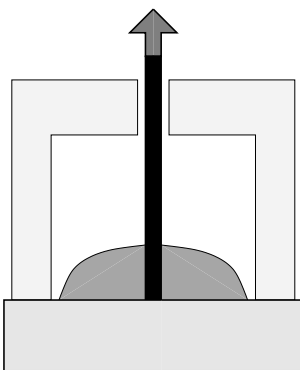
L'inconvénient majeur est la nécessité d'avoir un diamètre de fibre suffisant pour assurer que l'indenteur n'acoste pas la matrice durant l'essai.

Push-in (micro-indentation)



Comme pour le push-out, il s'agit de poinçonner une fibre selon son axe de symétrie et de relever la force appliquée en fonction de l'enfoncement du poinçon. Ici, la fibre n'est pas extraite de son logement. L'avantage de cet essai est donc son utilisation sur des fibres de faible diamètre ($\simeq 10\mu m$) : typiquement $h/\phi > 3000$. L'inconvénient est la précision requise dans la mesure des efforts et des déplacements : forces inférieures au newton, déplacements de l'ordre du micromètre.

Pull-out



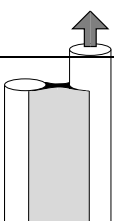
Cet essai, dit aussi de déchaussement, est plutôt destiné aux composites à matrice organique. Une fibre est positionnée dans une goutte de résine déposée sur un substrat. Une traction est ensuite appliquée sur la fibre, alors que la goutte solidifiée est maintenue en déplacement. La courbe force-déplacement est relevée.

La réponse obtenue montre une décohésion brusque et totale après une mise en charge élastique. Au-delà de cette décohésion une mesure des coefficients de frottement dynamique puis statique peut être effectuée. Cet essai propose donc une mesure relativement riche.

Il présente cependant différents inconvénients soulevés par LEROY [1998] :

1. le positionnement de la fibre orthogonalement au substrat est délicat,
2. l'existence d'un ménisque entre la fibre et la résine entraîne que la décohésion se fait par cisaillement de la résine et non par décohésion interfaciale ; la contrainte critique mesurée n'est pas celle de l'interface.

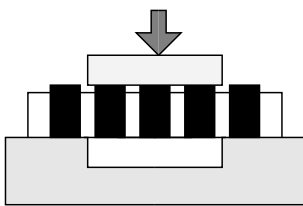
Pull-out LEROY [1998]



Cet essai proposé par LEROY [1998] est une alternative à l'essai de pull-out. Un couple de fibres gainées par de la résine dans une position dissymétrique est maintenue à une extrémité alors qu'un effort est appliqué à l'autre extrémité sur une seule fibre.

L'avantage incontestable de cet essai est de permettre une mesure du taux critique de restitution de l'énergie en mode II pur (G_{IIc}). La décohésion interfaciale se fait sans mixité modale contrairement à l'essai précédent.

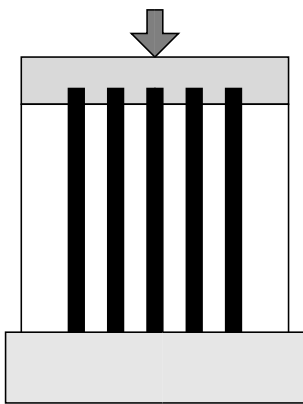
Bundle push-out



Cet essai est similaire à l'essai de push-out et en propose une mesure "moyenne". Cet avantage est indéniable compte tenu de la forte dispersion des résultats d'essais micromécaniques.

L'inconvénient principal de cet essai est qu'il ne peut s'appliquer qu'aux matériaux composites dont la matrice peut être dissoute sans dégrader les fibres ni les interfaces. Ce qui interdit en particulier son utilisation pour les composites à matrice céramique.

Slice-compression



Cet essai est similaire à l'essai de push-in et en propose une mesure "moyenne". L'effort est ici appliqué par l'intermédiaire d'un indenteur ductile. L'avantage est toujours d'obtenir une réponse moyenne à l'essai de micro-indentation.

Les inconvénients de cet essai sont cependant d'une part la nécessité de devoir dissoudre une partie de la matrice (*voir* l'essai bundle push-out) et d'autre part que la mesure du déplacement se fait par celle de la profondeur des empreintes laissées dans l'indenteur. La courbe force-déplacement est donc délicate à obtenir.

BILAN DU PARAGRAPHE V.2

L'interface renfort/matrice joue un rôle essentiel dans les matériaux composites. D'une part elle assure la cohésion entre les différents constituants, qui participent ainsi pleinement à la tenue mécanique du composite ; d'autre part, elle permet par sa dégradation une chute progressive des propriétés du composite. L'amélioration de la résistance à la fissuration du composite passe donc par des modifications des propriétés de l'interface renfort/matrice. La recherche de l'interface "optimale" repose donc sur deux points :

- (a) des simulation numériques prospectives basées sur un modèle de comportement d'interface,
- (b) une caractérisation expérimentale des propriétés de l'interface.

Peu d'essais permettent de réaliser ce dernier point. Ils sont confrontés à la difficulté de mesurer des propriétés mécaniques d'un constituant à cœur du matériau et à la faible épaisseur des interfaces à caractériser (rarement plus du micron pour les composites céramique/céramique).

Concernant les composites à fibres longues, l'essai micromécanique qui nous a semblé le mieux adapté à la caractérisation des propriétés mécaniques des interfaces fibre/matrice est l'essai de micro-indentation. Une simulation numérique de cet essai est présentée ci-dessous. Elle permet d'identifier les paramètres du modèle adhésif/frottant pour un composite SiC/SiC.

V.3 Simulation numérique d'essais de micro-indentation (push-in)

L'essai retenu pour identifier le comportement de l'interface fibre/matrice d'un matériau composite SiC/SiC à fibres longues est l'essai de micro-indentation. Les principales raisons de ce choix sont :

1. la richesse de l'essai concernant la sollicitation interfaciale (cisaillement, pression radiale, décohésion et frottement),
2. la possibilité de réaliser cet essai sur un composite industriel, c'est-à-dire tel qu'il se présente lors de son utilisation. En particulier, la fraction volumique de fibres, la composition de l'interface et les contraintes résiduelles post-élaboration sont dans cet essai celles du composite in-situ.

V.3.1 L'essai de micro-indentation

V.3.1.a Le principe

Comme nous l'avons déjà brièvement énoncé, l'expérience de micro-indentation consiste à venir indenter une fibre perpendiculairement à la surface libre d'un matériau composite à fibres longues. L'indentation se fait donc selon l'axe de la fibre. La courbe force/déplacement relevée lors de cet essai doit permettre d'accéder au comportement de l'interface fibre/matrice en cisaillement et sous pression radiale. L'indenteur utilisé est un indenteur pyramidal en diamant de type Vickers (4 faces, angle de 68° entre deux faces opposées). Le déplacement de l'indenteur est généré par un système piézo-électrique et mesuré par un capteur capacitif. La principale qualité de cet équipement est de permettre une mesure du déplacement sans contact supplémentaire avec l'éprouvette. La force imposée sur la fibre est mesurée par un capteur de force situé sous l'éprouvette, en série avec le bâtis. La sensibilité de ce capteur permet des mesures de forces inférieures à 0.01 N . Le principe de cette sensibilité est une souplesse élevée du capteur. Un principe simplifié du montage est donné sur la FIG. V.1.

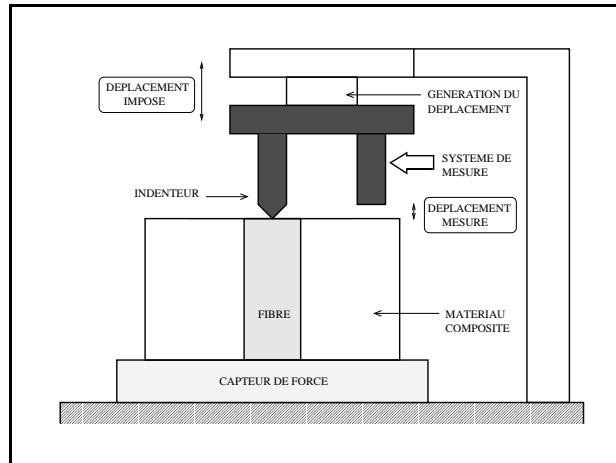


FIG. V.1 – Principe simplifié de l'expérience de micro-indentation.

Une difficulté de cette expérience est d'assurer l'alignement strict du système piézo-électrique, de l'indenteur et de la fibre. Lorsque cet alignement n'est pas correct, il existe une différence entre le déplacement imposé et le déplacement mesuré (par gauchissement du système de mesure) et la fibre est indentée selon un axe qui n'est pas son axe de symétrie.

V.3.1.b Le chargement

Dans l'expérience choisie, le chargement s'effectue à force imposée. Ce chargement est assuré par un asservissement du système de génération du déplacement. Dans cette situation, la souplesse globale du montage et en particulier celle du capteur de force n'a pas d'influence sur la mesure. Les différents éléments du montage constituent en effet un système de solides déformables assemblés en série avec l'éprouvette. La force imposée est donc bien celle qui s'applique sur l'éprouvette.

Le chargement interfacial qui résulte de cette sollicitation est un cisaillement et une compression ou une traction radiale en fonction des propriétés thermo-mécaniques de la fibre et de son environnement⁽¹⁾. Il est à noter que la forme pyramidale de l'indenteur engendre non seulement un effort axial sur la fibre, mais aussi un effort radial dont l'intensité devient cependant négligeable loin de la surface libre de l'éprouvette.

V.3.1.c Les constituants

Le matériau composite indenté est un composite unidirectionnel de type SiC/SiC : fibres longues de carbure de silicium (SiC) et matrice SiC. L'éprouvette possède une épaisseur de 1600 μm . La fibre est une fibre Nicalon NLM202 sélectionnée par la Société Européenne de

⁽¹⁾compression radiale pour le SiC/SiC (voir ci-après).

Propulsion. Cette fibre est d'un usage classique dans les composites à matrice céramique. Son diamètre moyen est de $17 \mu m$ (sa forme, légèrement elliptique, mesure $19 \mu m$ sur son grand axe et $15 \mu m$ sur son petit axe). Ce diamètre moyen varie peu d'une fibre à l'autre. La densité des fibres Nicalon est d'environ $2.6 g/cm^3$ et sa porosité aux alentours de 5% en volume [LIPOWITZ et al., 1987]. Le revêtement de cette fibre est composé de minces couches concentriques de carbone pyrolytique et mesure environ $150 nm$ [LOB, 1989].

La matrice SiC est obtenue par un procédé d'infiltration en phase vapeur (CVI). Le matériau composite SiC/SiC étudié à une fraction volumique de 40%.

V.3.1.d Les résultats expérimentaux

Les expériences présentées dans ce mémoire ont été réalisées par Bruno Passilly et François-Henri Leroy à l'Office National d'Etudes et de la Recherche Aéronautique, Châtillon. Les résultats utilisés ici concernent des expériences très précisément calibrées en temps : la force et le déplacement sont obtenus comme fonction du temps ; la courbe force-déplacement finale est donnée de manière implicite.

Ces expériences comportent :

1. un chargement à vitesse de force imposée jusqu'à un maximum,
2. un palier de fluage,
3. une décharge,
4. un nouveau cycle charge/décharge effectué de manière continue.

La durée des paliers de fluage peut varier de quelques minutes à plus d'une heure. Si une décohésion de l'interface fibre/matrice se produit durant le premier chargement, le palier de fluage doit permettre de mettre en évidence une éventuelle viscosité de la décohésion. Si tel est le cas le déplacement de l'indenteur doit se poursuivre alors que la force reste maintenue constante au cours du temps. Cette évolution du déplacement peut cependant avoir d'autres origines telles qu'une dérive du capteur de déplacement et/ou un comportement visqueux de la fibre SiC durant son indentation plastique. Ces points sont abordés en détail par la suite.

Le second cycle de charge/décharge doit permettre de discriminer un certain nombre d'effets mécaniques qui peuvent apparaître dans ces expériences de micro-indentation. Il permet en outre d'identifier la valeur du coefficient de frottement μ .

Deux exemples de résultats d'essai sont donnés sur la FIG. V.2.

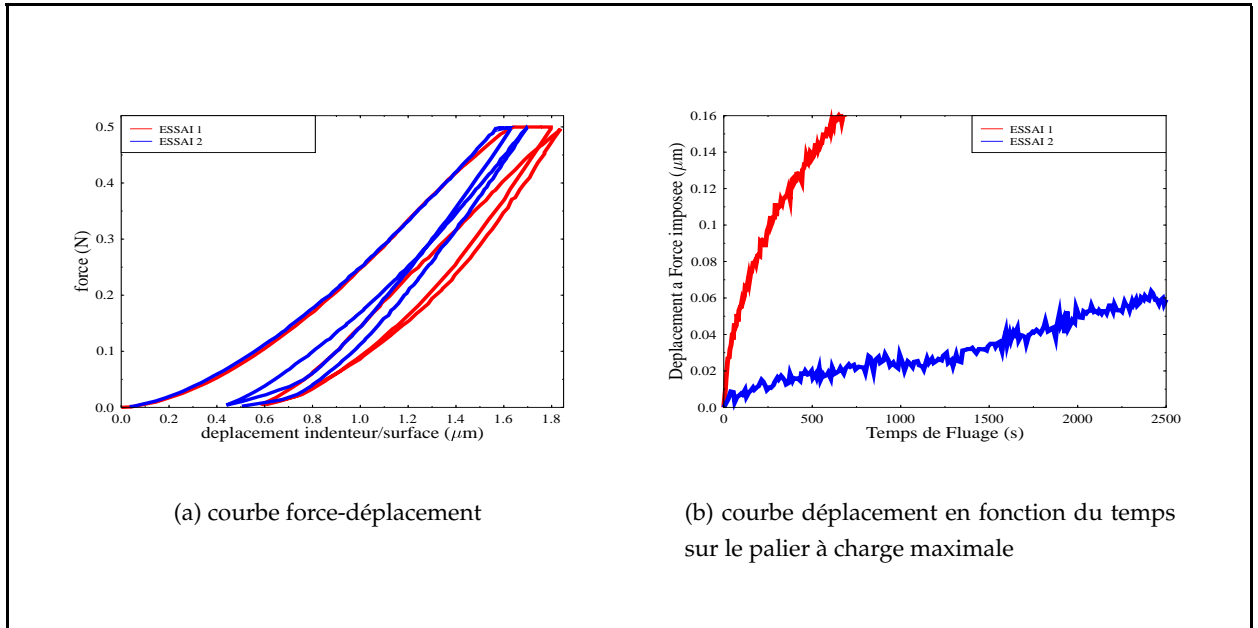


FIG. V.2 – Résultats bruts d’essais de micro-indentation cyclés avec palier de fluage sur matériaux composites SiC/SiC.

V.3.2 Simulation d’une expérience de micro-indentation d’un composite SiC/SiC à fibres longues

Les travaux présentés ici sont la finalisation de ceux initiées par CANGÉMI [1997] et RAOUS et al. [1999]. Par des premiers tests de faisabilité, ces auteurs avaient montré l’aptitude du modèle adhésif/frottant à décrire qualitativement la réponse d’un composite SiC/SiC à un essai de micro-indentation. Les aspects qualitatifs de ces simulations et la correction des artefacts expérimentaux sont dus à LEROY et RAOUS [1997] et à l’auteur.

V.3.2.a Prise en compte de la souplesse du système de mesure

Les techniques actuelles ne permettent pas une mesure du déplacement à l’endroit où il est imposé. La mesure est ainsi affectée par la souplesse S du système de génération et de mesure du déplacement (voir FIG. V.1). La déformation de ce système en compression conduit à une mesure surestimée du déplacement par rapprochement du capteur capacitif. Si F est la force appliquée sur l’éprouvette, le véritable déplacement imposé sur la fibre est fonction du déplacement mesuré ($u_{\text{mesuré}}$) :

$$(V.1) \quad u = u_{\text{mesuré}} - SF.$$

V.3.2.b Prise en compte de l'indentation élasto-plastique de la fibre

L'évolution élasto-plastique⁽²⁾ du contact fibre/indenteur est complexe. A la charge, l'indenteur pénètre plastiquement la fibre. La surface d'application de la charge augmente donc plus rapidement que si le contact était élastique ; ce qui a notamment pour conséquence d'augmenter la raideur apparente de l'éprouvette. A la décharge, la surface de contact évolue aussi du fait de l'ouverture de l'empreinte par récupération de la déformation élastique locale.

Les courbes expérimentales doivent être corrigées de cet effet. Cette correction est calculée à partir de l'indentation d'un composite SiC/Pyrex pour laquelle l'endommagement interfacial est nul. La simulation se fait alors à contact fibre/indenteur glissant [LEROY et RAOUS, 1997]. La surface de contact choisie est celle de l'empreinte obtenue à la pénétration plastique maximale.

La courbe corrigée de l'essai retenu est donnée sur la FIG. V.3.

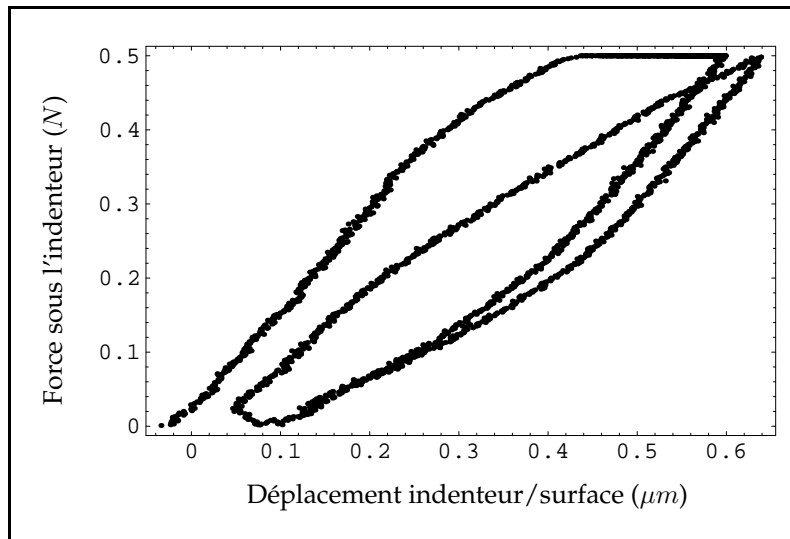


FIG. V.3 – Courbe force-déplacement corrigée des effets de la souplesse du système de mesure et de l'évolution élasto-plastique du contact fibre/indenteur : essai de micro-indentation retenu.

V.3.2.c Modélisation de l'essai

L'essai de micro-indentation sur composite SiC/SiC est simulé avec un réalisme poussé : prise en compte des contraintes résiduelles d'origine thermique, de la souplesse du système de mesure du déplacement, du contact élasto-plastique fibre/indenteur, simulation à force imposée, optimisation de la géométrie et du maillage de l'éprouvette (en particulier du maillage interfacial) et des conditions aux limites.

⁽²⁾ à l'issue de l'essai une empreinte de forme pyramidale peut être observée sur la surface libre de la fibre : le contact fibre/indenteur n'est donc pas un parfaitement élastique.

L'éprouvette est modélisée par une structure axisymétrique isotrope transverse à trois phases : fibre indentée (rayon r_f), matrice proche (rayon r_m) et composite équivalent (rayon r_{hc}). Cette modélisation est donnée sur la FIG. V.4(b). Le rayon de la fibre et celui de la matrice sont déterminés directement à partir d'une micrographie de la surface de l'échantillon (voir FIG. V.4(a)). Une attention particulière est portée à la fraction volumique locale de fibre : elle doit être représentative de la fraction volumique moyenne du composite ($V_f = 40\%$). L'influence de l'environnement immédiat de la fibre indentée doit être convenablement estimée.

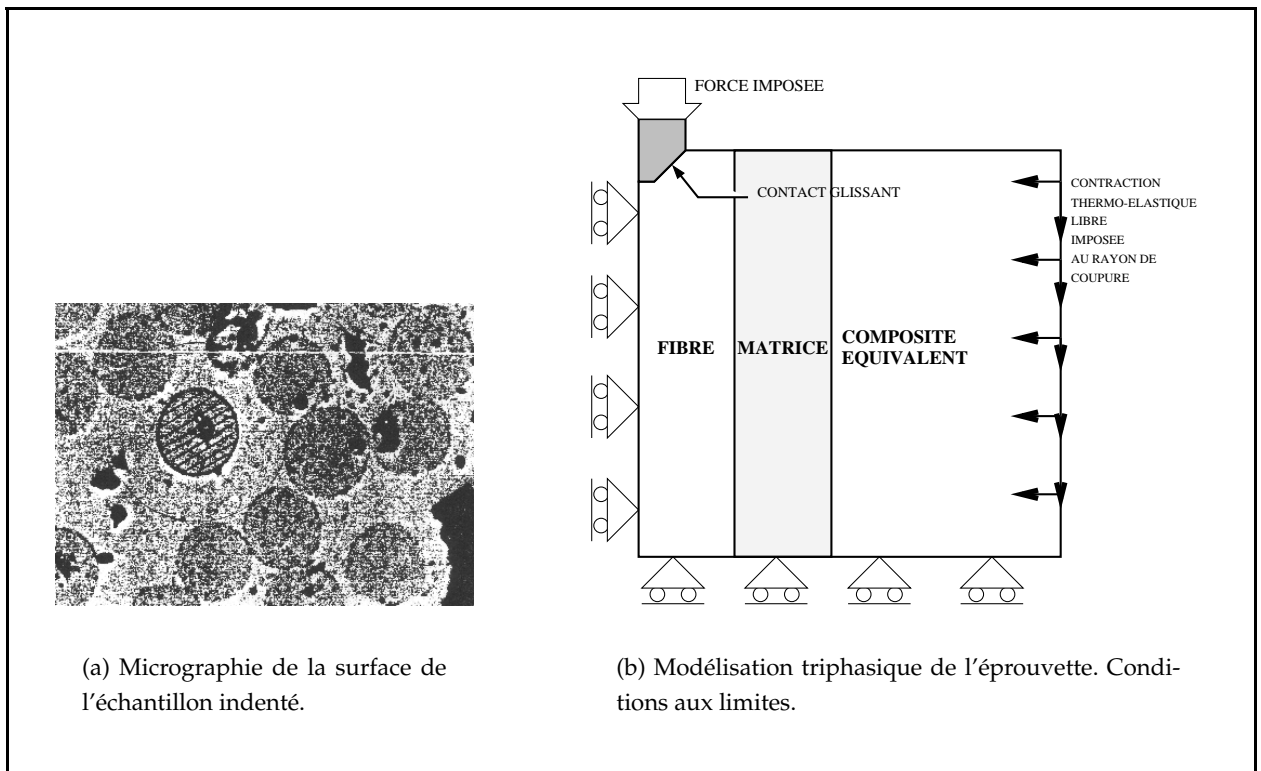


FIG. V.4 – Expérience de micro-indentation : fibre indentée et modélisation.

Les propriétés thermo-mécaniques de ces trois phases et de l'indenteur sont données au TAB. V.1. La fibre et la matrice proche sont considérées thermiquement et mécaniquement isotropes. Le composite équivalent est homogénéisé par la méthode de HASHIN [1983]. Il est pris mécaniquement isotrope (anisotropie mécanique non significative : $\simeq 5\%$) et thermiquement isotrope transverse (axe z).

Le rayon de coupure r_{hc} et la hauteur de coupure h de l'éprouvette modélisée sont déterminés en partant de valeurs surestimées puis progressivement réduites jusqu'à atteindre une précision sur les résultats numériques qui soit de l'ordre de la précision des résultats expérimentaux. L'éprouvette modélisée reste équivalente à une éprouvette semi-infinie. Une géométrie de $400\mu m \times 200\mu m$ ($h \times r_{hc}$) s'avère suffisante pour cette simulation avec les conditions aux limites indiquées sur la FIG. V.4(b).

	rayon externe (μm)	caractéristiques mécaniques	caractéristiques thermiques ($10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$)	fraction volumique de fibres (%)
indenteur Vickers <i>diamant</i>	—	$E = 1050 \text{ GPa}$ $\nu = 0.104$	—	—
fibre SiC (<i>Nicalon NLM202</i>)	8.5	$E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.25$	$\alpha_L = \alpha_T = 3$	100
matrice SiC (<i>CVD</i>)	17.95	$E = 350 \text{ GPa}$ $\nu = 0.20$	$\alpha_L = \alpha_T = 4.6$	0
composite équivalent <i>SiC/SiC</i>	200	$E = 285 \text{ GPa}$ $\nu = 0.20$	$\alpha_L = 4.1$ $\alpha_T = 4.0$	40

TAB. V.1 – Propriétés thermo-mécaniques des constituants.

Enfin, des observations détaillées révèlent que l'indenteur est en réalité un tronc de pyramide émoussée d'environ 150 nm à sa pointe. Cette forme particulière est modélisée.

V.3.2.d Le maillage

Le maillage éléments finis est donné sur la FIG. V.5. La zone sous l'indenteur et celle proche de l'interface fibre/matrice sont raffinées.

La distribution des contraintes le long de l'interface et le gradient de cisaillement interfacial proche de la surface libre sont fortement influencés par une prise en compte correcte du chargement de la fibre. La composante radiale du chargement appliqué sur la fibre (forme pyramidale de l'indenteur) conduit à une surpression à l'interface. Du fait du frottement fibre/matrice, la contrainte de cisaillement seuil pour laquelle la décohésion interfaciale s'amorce augmente donc. De faibles erreurs commises sur la prise en compte du chargement conduisent à des variations significatives du seuil de décohésion observable sur la courbe force-déplacement. Une attention particulière a donc été portée au maillage de cette zone.

Le maillage le long de l'interface doit être adapté à la valeur de la raideur interfaciale du modèle de zone cohésive utilisé (C dans notre modèle). Pour un saut de déplacement tangentiel donné à l'interface, la valeur du cisaillement croît avec la raideur interfaciale. Plus la raideur interfaciale est grande, plus le maillage le long de l'interface doit être fin si l'on souhaite rendre compte convenablement des concentrations de contraintes en pointe de la décohésion.

Le maillage proposé est composé d'éléments linéaires à trois nœuds qui conviennent à la gestion du contact unilatéral (approximation interne). Il possède 1200 nœuds dont 100 nœuds de contact (zone cohésive).

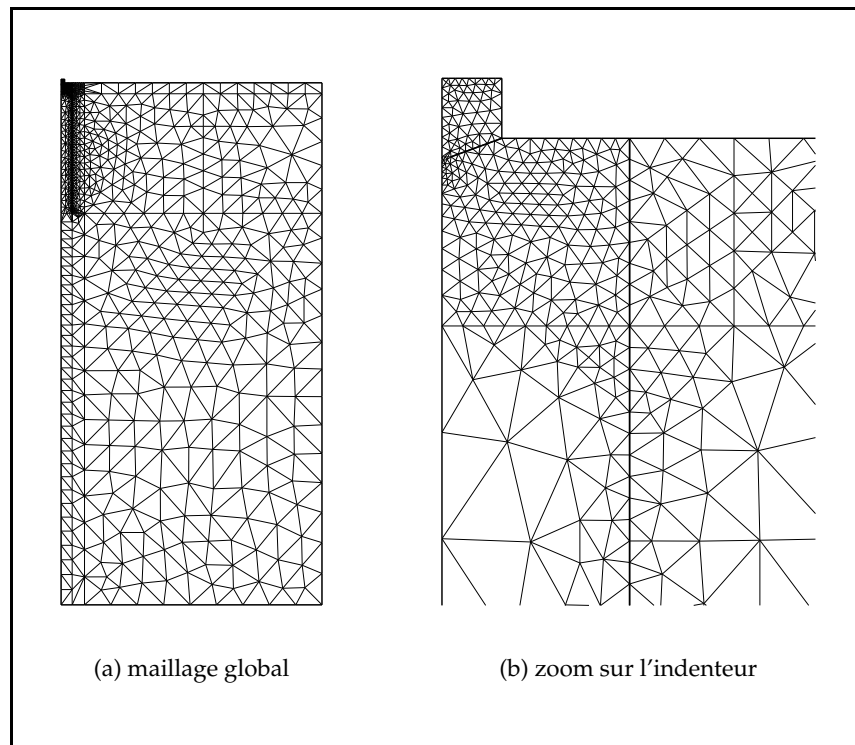


FIG. V.5 – Maillage éléments finis utilisé pour la simulation d'expérience de micro-indentation sur composite SiC/SiC.

V.3.2.e Le chargement et la discrétisation temporelle

Le chargement est effectué à la vitesse de force imposée $\dot{F} = 8.18 \times 10^{-4} N/s$. La force maximale ($F_{\max} = 0.5 N$) est atteinte à la fin de la première montée en charge en 20 incréments de durée $\Delta t = F_{\max}/(20\dot{F}) \simeq 30.56 s$.

V.3.2.f Les contraintes résiduelles d'origine thermo-mécanique

Les différences entre les propriétés thermo-mécaniques des constituants et la température d'élaboration du composite (T_E) conduisent à un champ de contraintes résiduelles à température ambiante (T_R) qu'il convient de prendre en compte.

La différence de température $\Delta T = T_R - T_E$ est estimée aux alentours de $-1000^{\circ}C$. Pour le composite SiC/SiC, le chargement mécanique résultant de cet écart de température est un cisaillement interfacial et une pression radiale. Ce cisaillement doit d'abord être compensé puis inversé lors de l'indentation de la fibre : une estimation précise du seuil de décohésion interfaciale nécessite donc une évaluation correcte des contraintes résiduelles.

Une pré-décohésion interfaciale peut apparaître lors du refroidissement post-élaboration du composite. Dans ce cas, la longueur de décohésion n'évolue pas tant que l'opposé du cisaille-

ment interfacial d'origine thermo-élastique n'a pas été atteint durant l'indentation. Cependant, la mise en charge de la fibre s'accompagne alors très rapidement d'une dissipation par frottement entre la fibre et la matrice.

Durant l'expérience de micro-indentation, la pression radiale interfaciale loin de la surface libre de l'échantillon est entièrement d'origine thermo-mécanique. L'identification d'un coefficient de frottement à l'interface fibre/matrice consiste en pratique à identifier la dissipation par friction lors d'un cycle de charge/décharge. Identifier cette dissipation revient à identifier le produit $\mu|R_N|$ le long de l'interface, la valeur de $|R_N|$ étant largement d'origine thermique.

Les contraintes résiduelles d'origine thermo-mécanique sont évaluées durant le premier pas de chargement. Les chargements mécaniques ultérieurs sont superposés à ce chargement thermique via une résolution incrémentale.

BILAN DU PARAGRAPHE V.3

L'essai de micro-indentation retenu est un essai cyclé, à force imposée, comprenant un palier de fluage, sur composite SiC/SiC à fibres longues. Il est simulé avec précision. Les résultats expérimentaux sont corrigés par la prise en compte de la souplesse du système de mesure et de l'évolution élasto-plastique du contact fibre/indenteur. Une modélisation particulièrement fine de cet essai a été réalisée. Cette modélisation repose sur une représentation triphasique classique : fibre / matrice proche / composite équivalent isotrope transverse. Les contraintes résiduelles d'origine thermique sont évaluées pour un refroidissement post-élaboration de $1000^\circ C$. Un soin particulier a été porté au maillage de la zone interfaciale et de celle sous l'indenteur.

V.4 Identification des paramètres mécaniques de l'interface fibre/matrice

V.4.1 Méthode d'identification des paramètres mécaniques du modèle adhésif/frottant

Rappelons que les paramètres mécaniques à identifier sont les suivants : la raideur interfaciale C (les raideurs normale C_N et tangentielles C_T sont supposées être égales ; cette hypothèse est vérifiée par la suite), le seuil de décohésion w , le coefficient de frottement de Coulomb μ et le coefficient de viscosité d'endommagement b (la puissance p est prise égale à 1).

La méthode d'identification repose sur des estimations et des calculs menés a priori sur ces paramètres. Des fourchettes d'ordre de grandeur sont ainsi définies pour les coefficients C , w et μ . Le manque de données mécaniques ne permet pas d'obtenir une estimation satisfaisante de b avant identification. L'identification finale des paramètres est ensuite effectuée dans ces plages de valeurs par calculs successifs. Les valeurs des paramètres sont ainsi déterminées par injection de sens mécanique dans la procédure d'identification. Le calcul de C , les estimations de w et de μ et la discussion sur la validité physique des paramètres sont donnés au paragraphe V.4.4.

Sachant que les paramètres ont des influences couplées sur la réponse cyclée globale de l'éprouvette, nous précisons les paramètres les plus influents pour chaque phase caractéristique de l'essai : charge élastique, début d'endommagement, endommagement établi, palier de fluage et cycles de charge/décharge (FIG. V.6).

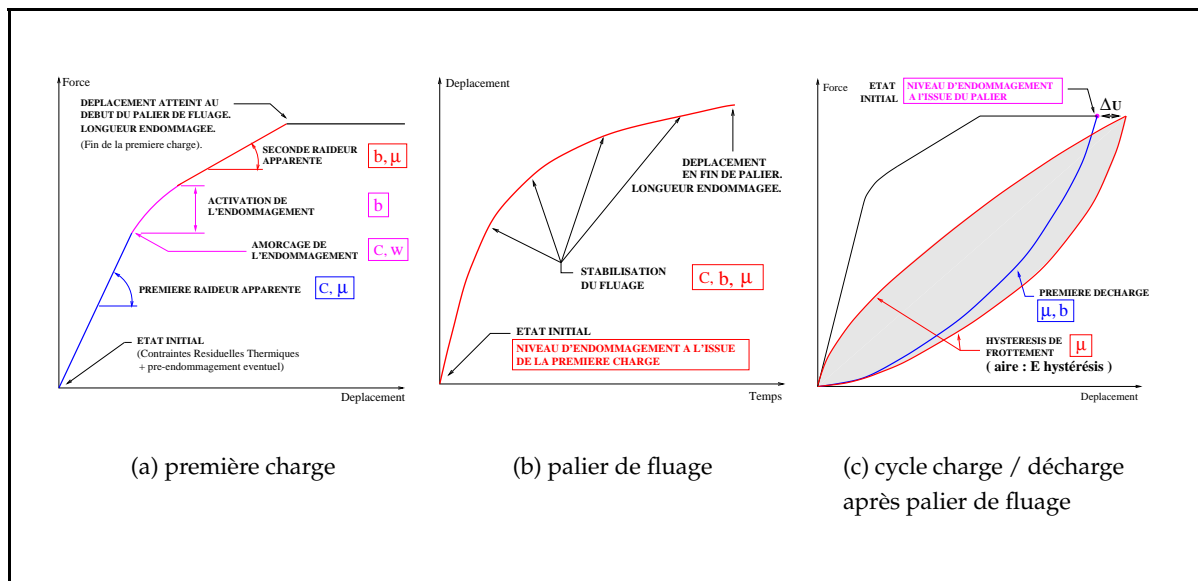


FIG. V.6 – Influence des paramètres du modèle adhésif/frottant et de leurs couplages lors de la simulation d'une expérience de micro-indentation.

V.4.2 Identification avec viscosité du comportement interfacial

Les paramètres identifiés sont :

$$(V.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = 0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3, \\ w = 0.3 \text{ J}/\text{m}^2, \\ \mu = 0.17, \\ b = 1.65 \times 10^{-3} \text{ Ns}/\mu\text{m}, \\ p = 1. \end{array} \right. \quad \boxed{\text{Paramètres visqueux}}$$

Cette identification est donnée sur la FIG. V.7(a) pour la première montée en charge et sur la FIG. V.7(b) pour le palier de fluage. La validité des paramètres identifiés est donnée au TAB. V.2 en fonctions des principaux critères d'identification indiqués sur la FIG. V.6. Sur la première montée en charge et pour un déplacement de l'indenteur donné, l'écart entre la résultante sur l'éprouvette dans l'expérience et dans la simulation numérique est inférieur à 5%. Sur le palier de fluage et pour un temps donné, l'écart entre le déplacement global de l'indenteur dans l'expérience et dans la simulation numérique est inférieur à 2%. L'écart entre le différentiel de déplacement après recharge ΔU (voir FIG. V.6(c)) dans l'expérience et dans la simulation est d'environ 3% du déplacement global de l'indenteur. Enfin, l'énergie consommée durant l'hystérésis de frottement (aire grisée sur la FIG. V.6(c)) est d'environ 63 nJ dans l'expérience et de 67 nJ dans la simulation ; ce qui représente un écart d'environ 7%.

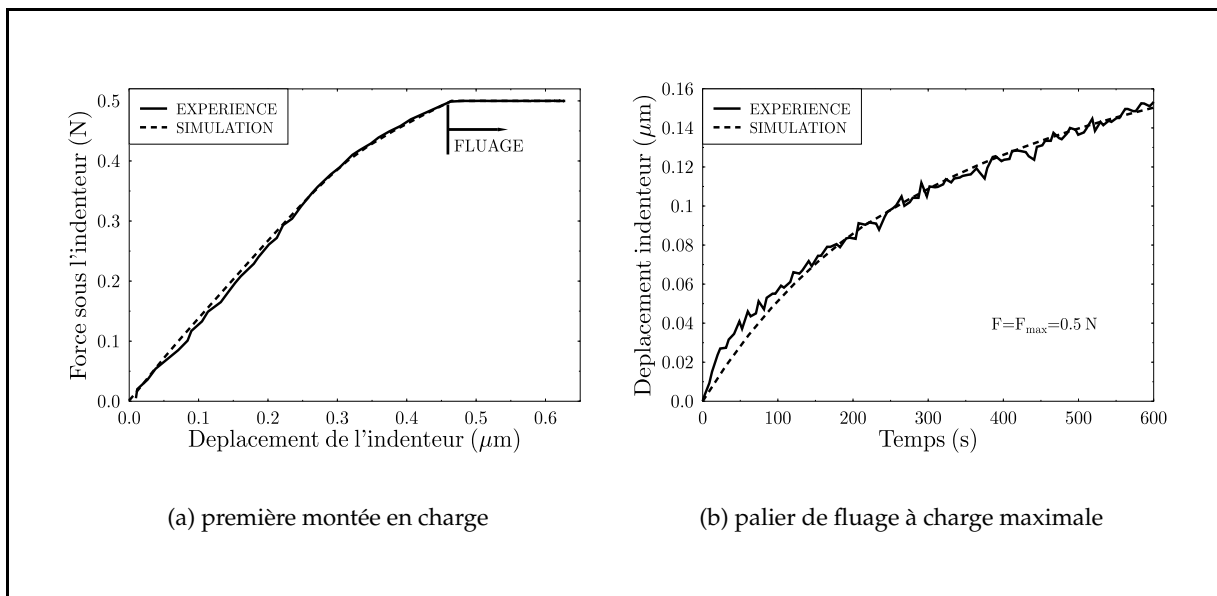


FIG. V.7 – Identification des paramètres mécaniques du modèle adhésif/frottant sur une expérience de micro-indentation sur composite SiC/SiC : comparaison expérience/simulation pour un endommagement interfacial visqueux ($b > 0$).

L'évaluation correcte de ces deux derniers critères (différentiel de déplacement et hystérésis

de frottement) est une exigence très forte pour les modèles d'interface et pour la qualité de la simulation de cet essai. Ils nécessitent en effet une estimation précise de l'évolution de la surface d'interface endommagée, de l'évolution du gradient des contraintes interfaciales, des contraintes résiduelles thermiques et du frottement fibre/matrice. Les propriétés mécaniques interfaciales identifiées doivent être considérées comme un résultat novateur. Les résultats antérieurs issus de la littérature reposent rarement sur une modélisation qualitativement fine de l'essai de micro-indentation et sur des critères aussi exigeants pour les modèles d'interface.

	Ecart simulation/expérience (%)
Montée en charge (écart sur $F_{\text{épreuve}}$)	< 5 %
Palier de fluage (écart sur $U_{\text{épreuve}}$)	< 2 %
Déplacement (voir FIG. V.6(c)) (écart sur $U_{\text{épreuve}}$)	\simeq 3 %
$E_{\text{hystérésis}}$	< 7 %

TAB. V.2 – Validité des paramètres visqueux identifiés.

Sur le plan du comportement interfacial, l'évolution du rapport $\|R_T\|/\|R_N\|$ le long de l'interface est donnée sur la FIG. V.8 pour un pas de chargement correspondant à la fin du palier de fluage. On note que lorsque la décohésion interfaciale est totale ($\beta = 0$), le rapport $\|R_T\|/\|R_N\|$ est égal à μ : le contact fibre/matrice est purement frottant dans cette zone.

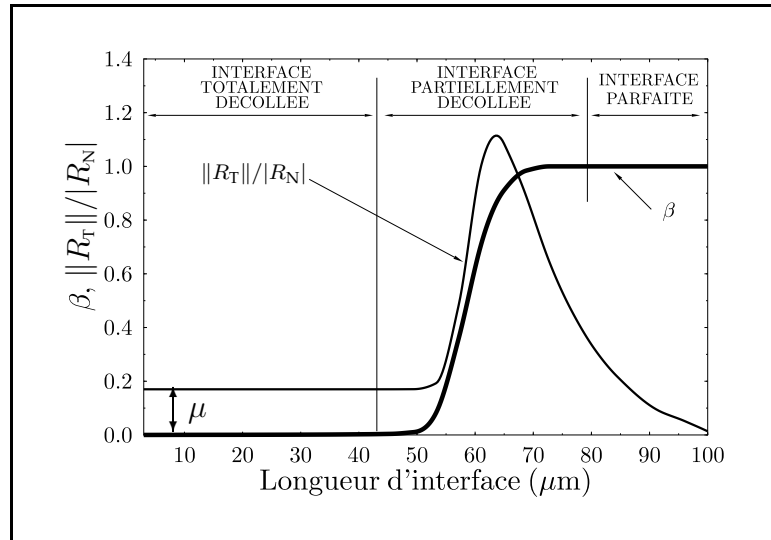


FIG. V.8 – Evolution du rapport $\|R_T\|/\|R_N\|$ le long de l'interface en fin de palier de fluage.

V.4.3 La question de la viscosité

La volonté d'identifier le coefficient de viscosité b a motivé notre choix de simuler un essai comportant un palier de fluage. Les valeurs des déplacements mis en jeu durant ce palier sont

cependant très faibles (environ 160 nm). Par ailleurs, la stabilité des mesures dans le temps est expérimentalement très délicate (variation de température ambiante durant l'essai, algorithme d'asservissement du système de génération du déplacement, ...). Ainsi, une récente analyse très fine a permis de montrer que la dérive du déplacement observée provenait en réalité d'une augmentation de la force [LEROY, 2000]. La viscosité de l'endommagement interfacial ne peut donc être invoquée dans cette situation.

La question d'une sensibilité du comportement interfacial à la vitesse de sollicitation restant une question ouverte, nous proposons deux alternatives à l'identification visqueuse précédente :

1. une approche énergétique permettant de montrer que les paramètres visqueux (V.2) retranscrivent correctement les échanges d'énergies entre la machine et l'éprouvette,
2. une identification sans viscosité.

V.4.3.a Une approche énergétique

Nous proposons de comparer les résultats expérimentaux et les simulations numériques selon l'angle de l'énergie échangée entre l'éprouvette et l'extérieur. Cette comparaison est présentée sur la FIG. V.9.

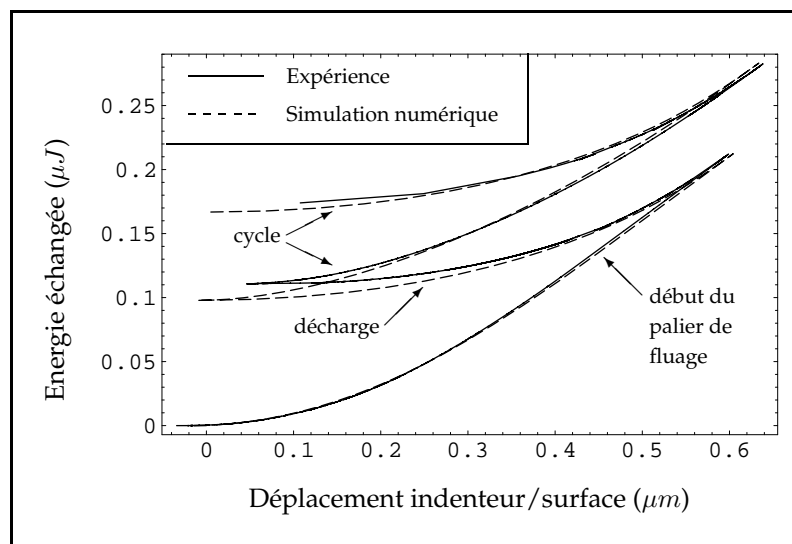


FIG. V.9 – Comparaison expérience/simulation : énergie échangée entre l'éprouvette et la machine en fonction du déplacement de l'indenteur (charge + palier de fluage, décharge, recharge, décharge).

La concordance simulation/expérience indique que les paramètres identifiés conduisent à un comportement interfacial convenable du point de vue de l'énergie de décohésion interfaciale qu'il met en jeu. Pour la vitesse de sollicitation à laquelle se déroule cet essai, les paramètres vis-

queux identifiés sont qualitativement corrects. Si des résultats expérimentaux complémentaires indiquent une totale absence de sensibilité de la réponse de cet essai à la vitesse de sollicitation, ces paramètres devront être revus dans le sens d'une absence de viscosité. C'est ce que nous proposons ci-dessous.

V.4.3.b Une identification sans viscosité

La FIG. V.10 indique la comparaison expérience/simulation pour une simulation sans viscosité ($b = 0, p = 1$) sur la première montée en charge. Les paramètres identifiés sont les suivants :

$$(V.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = 0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3, \\ w = 9 \text{ J}/\text{m}^2, \\ \mu = 0.17, \\ b = 0 \text{ N s}/\mu\text{m}, \\ p = 1. \end{array} \right. \quad \boxed{\text{Paramètres non visqueux}}$$

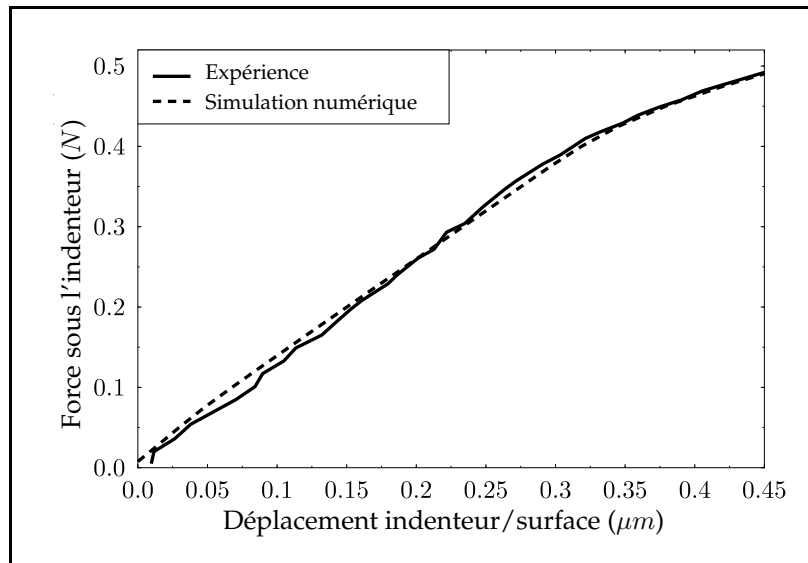


FIG. V.10 – Comparaison expérience/simulation sur la première montée en charge : paramètres sans viscosité ($b = 0, p = 1$).

A l'échelle de l'éprouvette, la réponse force-déplacement est identique à celle obtenue avec les paramètres $b \neq 0$. A l'échelle locale la réponse interfaciale est différente. Cependant, les paramètres non visqueux identifiés sont tels que l'énergie de décohésion interfaciale soit identique à celle du cas $b \neq 0$ pour la zone interfaciale où la vitesse de sollicitation est la plus élevée. Cette énergie est d'environ $9 \text{ J}/\text{m}^2$. Cette situation est indiquée sur la FIG. V.11.

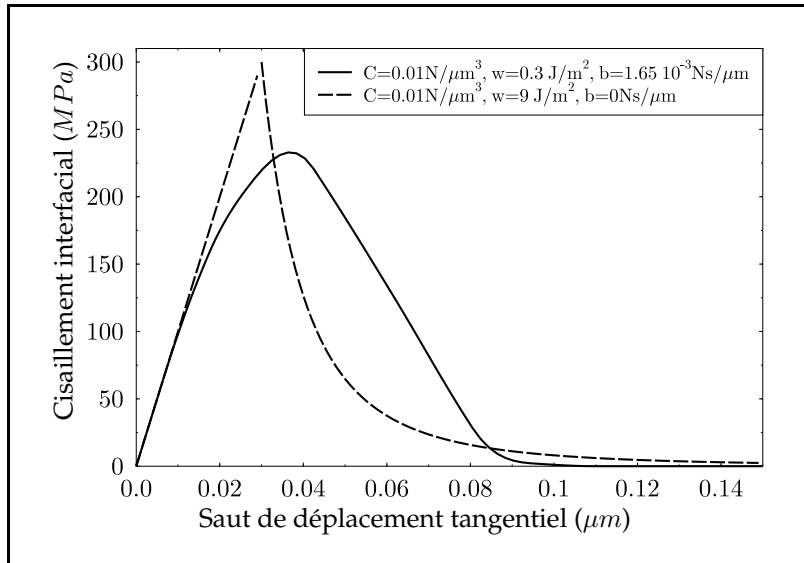


FIG. V.11 – Comportement interfacial local : cisaillement en fonction du saut de déplacement tangentiel. Comparaison des réponses locales pour deux jeux de paramètres différents ($b \neq 0$ et $b = 0$) présentant la même énergie de décohésion.

	Paramètres visqueux	Paramètres non visqueux
C ($N/\mu m^3$)	0.01	0.01
w (J/m^2)	0.3	9
μ	0.17	0.17
b ($Ns/\mu m$)	1.65×10^{-3}	0
p	1	1

TAB. V.3 – Rappel des deux jeux de paramètres identifiés : avec ou sans viscosité.

V.4.4 Discussion sur les paramètres mécaniques identifiés

V.4.4.a Les critères de validité

- En ce qui concerne les paramètres visqueux, le temps critique $t_c = b/w \simeq 5500s$ est nettement supérieur à l'incrément de temps ΔT de la discrétisation temporelle ($\Delta T = 30.56 s$). Ceci garantit la précision de l'intégration numérique de l'équation d'évolution de la variable d'endommagement et le rendu de l'effet visqueux souhaité (cf équation (II.58)).
- Le frottement interfacial est interprété comme le chevauchement des aspérités de la surface de décohésion dont l'ordre de grandeur est estimé à $50 nm$ [JERO et al., 1991]. Le modèle autorise un glissement avant endommagement qui doit être limité (voir paragraphe II.4.2). En l'absence d'utilisation du modèle à coefficient de frottement variable en fonction du niveau d'endommagement interfacial, cette limitation est réalisée en imposant par exemple un déplacement tangentiel maximal à l'interface avant endommagement u_{T0} nettement in-

férier à l'ordre de grandeur des aspérités de la surface de décohésion. Cette condition $u_0 = \sigma_0/c \simeq 5nm \ll 50nm$ est respectée :

1. dans le cas des paramètres visqueux : $u_{T0} = \sqrt{C/w} \simeq 5nm \ll 50nm$,
2. dans le cas des paramètres non visqueux : $u_{T0} = \sqrt{C/w} \simeq 30nm < 50nm$.

V.4.4.b Le coefficient de frottement μ

La valeur identifiée ($\mu = 0.17$) est supérieure aux valeurs classiquement admises dans la littérature ([PETERS et al., 1995 ; LARA-CURZIO et FEBER, 1996]) pour les systèmes céramique/céramique ($\mu = 0.1$). Cette surestimation compense l'absence d'une modélisation du chevauchement des irrégularités de la surface post-décohésion (dilatance). L'énergie dissipée par frottement lors du cycle charge/décharge ($E_{\text{hystérésis}}$) confirme que notre estimation conduit à une bonne représentation du contact frottant sur la surface de décohésion.

V.4.4.c L'énergie de décohésion

Dans le cas des paramètres visqueux, l'énergie de décohésion E_D est essentiellement d'origine visqueuse. Elle varie le long de l'interface avec le gradient des vitesses du saut de déplacement tangentiel. Le profil de E_D le long de l'interface est indiqué sur la FIG. V.12 pour une décohésion de $40\mu m$ (fin du palier de fluage). Ce profil particulier s'explique de la manière suivante ([LEROY et RAOUS, 1997]) : la décohésion s'amorce lentement près de la surface libre de l'éprouvette, l'effet de la vitesse sur E_D y est moins important ; il augmente ensuite là où la vitesse de propagation de la décohésion est élevée (coude sur la courbe l'indentation) ; cet effet décroît enfin lorsque la surface frottante devient significative et que le frottement ralentit la propagation de la décohésion. On peut cependant définir une consommation interfaciale moyenne. Elle est de l'ordre de $10 J/m^2$, pour les 40 premiers microns d'interface.

Dans le cas des paramètres non visqueux, l'énergie de décohésion E_D est constante le long de l'interface et égale à $w = 9 J/m^2$.

La valeur de cette énergie de décohésion (pour les deux jeux de paramètres identifiés) est supérieure aux estimations habituelles du taux critique de restitution de l'énergie en mode II G_{IIc} ($\simeq 1 J/m^2$) pour ce type d'interface. De nombreux indicateurs (notamment la correspondance entre les deux jeux de paramètres et l'analyse énergétique du paragraphe V.4.3) nous permettent cependant d'estimer cette valeur comme correcte.

V.4.4.d La contrainte critique et la contrainte maximale

La contrainte critique ($\sigma_0 = \sqrt{Cw}$) est la contrainte pour laquelle l'endommagement interfacial s'amorce. Dans le cas des paramètres non visqueux, cette contrainte est égale à la contrainte

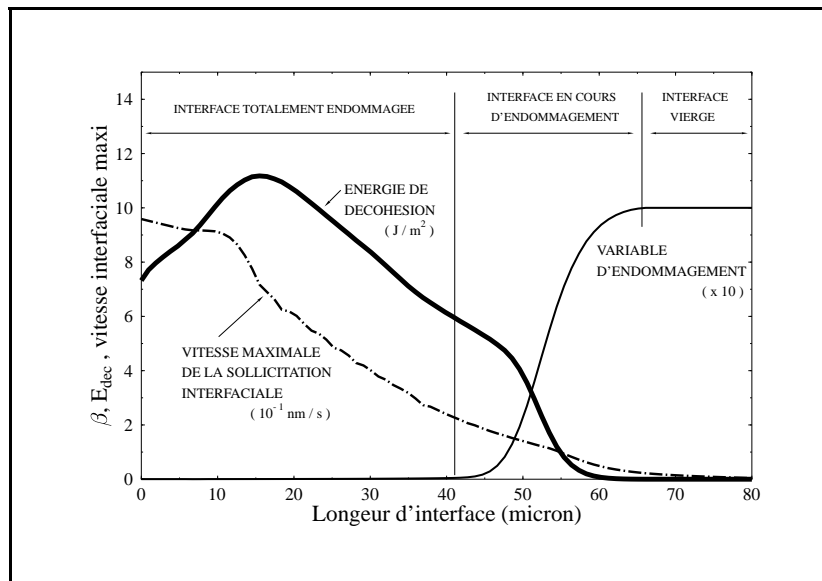


FIG. V.12 – Paramètres visqueux : vitesse maximale du saut de déplacement tangentiel à l'interface lors de la simulation, énergie consommée et profil de la variable d'endommagement pour une décohésion de $40 \mu m$.

maximale. Dans le cas des paramètres visqueux, la déphasage de l'endommagement par rapport à la sollicitation conduit à une contrainte critique ($\simeq 55 MPa$) qui peut être très inférieure à la contrainte maximale (jusqu'à $300 MPa$) (voir FIG. V.11). La contrainte critique ne semble pas avoir de signification physique forte. Par contre, la contrainte maximale peut être considérée comme un paramètre interfacial important. Elle est identifiée ici aux alentours de $250 MPa$.

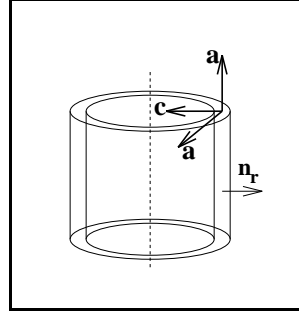
V.4.4.e La raideur interfaciale

Pour les deux jeux de paramètres identifiés, la raideur interfaciale est estimée par le calcul suivant qui est indépendant de l'identification.

L'hypothèse essentielle de ce calcul est que le modèle adhésif frottant représente ici le comportement du troisième corps situé entre la fibre et la matrice : le revêtement de la fibre. Ce revêtement possède une épaisseur $e \simeq 150 nm$ et est constitué de carbone pyrolytique [LOB, 1989]. Les propriétés élastiques de ce matériau isotrope transverse sont les suivantes [LI et WISNOM, 1996] :

La déformation d'une interphase peut être évaluée par la relation (V.4) [MICHEL et SUQUET, 1994].

$$(V.4) \quad \varepsilon(u) \simeq \frac{[u] \otimes_S n}{e},$$



$$\begin{cases} E_{cc} = 8 \text{ GPa} \\ E_{aa} = 28 \text{ GPa} \\ G_{ac} = 1.5 \text{ GPa} \\ \nu_{aa} = -0.12 \\ \nu_{ac} = 1 \end{cases}$$

où $(\alpha \otimes_S \gamma) = (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i)/2$. La contrainte interfaciale peut donc être approchée par la relation suivante (en coordonnées cylindriques) :

$$(V.5) \quad T_i = \sigma_{ir} \cdot n_r = \frac{K_{irkr}}{e} \cdot [u]_k \quad (\{i, k\} \in \{r, \theta, z\}),$$

où K est le tenseur d'élasticité de l'interphase. Ce qui donne pour une interphase isotrope transverse :

$$(V.6) \quad \begin{cases} T_r = R_N = \frac{K_{rrrr}}{e} [u]_r, \\ T_z = R_T = \frac{K_{rzzz}}{e} [u]_z. \end{cases}$$

Ainsi, les raideurs interfaciales normale et tangentielle correspondantes sont :

$$(V.7) \quad \begin{cases} C_N = \frac{1}{e} \cdot \frac{(1 - \nu_{aa})(E_{cc})^2}{2(\nu_{ac})^2 E_{aa} - (1 - \nu_{aa})E_{cc}} \simeq 0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3, \\ C_T = \frac{G_{ac}}{e} \simeq 0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3. \end{cases}$$

L'ordre de grandeur de cette valeur ($0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3$) est acceptable. Les incertitudes de ce calcul portent sur les mesures expérimentales de l'épaisseur du revêtement, sur la composition chimique du revêtement après interaction avec la matrice et sur les propriétés mécaniques du revêtement. L'égalité $C_N \simeq C_T$ justifie a posteriori le choix de ne considérer qu'une seule raideur interfaciale C dans les deux directions.

On peut noter que l'approximation (V.4) donne pour un matériau isotrope dans la direction radiale :

$$(V.8) \quad C_N = \frac{K_{rrrr}}{e} = \frac{\lambda_{\text{interphase}} + 2\mu_{\text{interphase}}}{e},$$

où $\lambda_{\text{interphase}}$ et $\mu_{\text{interphase}}$ sont les coefficient de Lamé. Un calcul analytique simple montre que la différence entre la valeur approchée (V.8) et la valeur exacte obtenue sur un tri-cylindre fibre/revêtement/matrice sous pression radiale est inférieure à 0.1 % pour une épaisseur de revêtement de 150 nm. Pour ce faire, le revêtement est supposé isotrope. La raideur radiale

de l'interphase est définie comme le rapport de la contrainte radiale évaluée au rayon externe de l'interphase (cas le plus pénalisant) et du saut de déplacement radial aux extrémités de l'interphase. La validité de l'approximation (V.8) confirme que l'hypothèse (V.4) sur laquelle repose le calcul de C est convenable pour une épaisseur d'interphase de 150 nm.

V.4.5 Validation du modèle : l'influence de V_f

Après le travail d'identification mené sur une expérience de micro-indentation, l'étape de validation du modèle n'est pas simple : on ne peut réaliser commodément d'autres types d'expériences (pull-out, ...) sur le même composite. Nous proposons ici la mise en œuvre du modèle (avec les paramètres identifiés précédemment) sur une autre expérience de micro-indentation : une fibre entourée seulement de matrice dans son voisinage proche.

L'environnement direct de la fibre indentée joue un rôle important sur la courbe l'indentation. Les paramètres mécaniques identifiés prennent ce rôle en compte.

Pour s'en assurer nous simulons à l'aide du jeu de paramètres non visqueux identifiés une expérience de micro-indentation portant sur une fibre identique à la simulation précédente mais présentant un environnement immédiat composé exclusivement de matrice. Le diamètre de la fibre indentée est supérieur d'environ 15% à celui de la fibre précédemment indentée (FIG. V.13). La fraction volumique de fibre est localement proche de 0%. Les contraintes résiduelles d'origine thermo-mécanique sont donc maintenant très différentes. Il en résulte que la première montée en charge de la courbe d'indentation ne présente plus de décohésion. Le résultat présenté sur la FIG. V.14 montre l'excellent accord modélisation/expérience. Ceci est un premier élément (modeste) de validation.

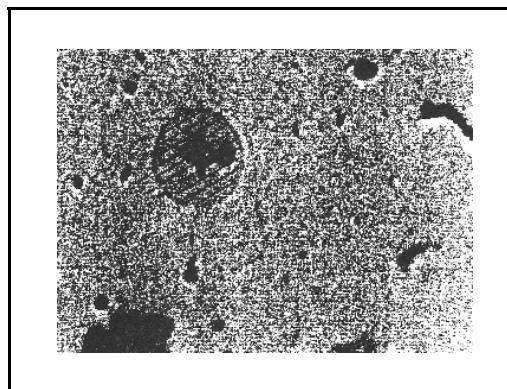


FIG. V.13 – Micrographie de la surface de l'échantillon indenté : nouvelle fraction volumique de fibre locale.

BILAN DU PARAGRAPHE V.4

Deux jeux de paramètres mécaniques ont été identifiés pour le comportement de l'in-

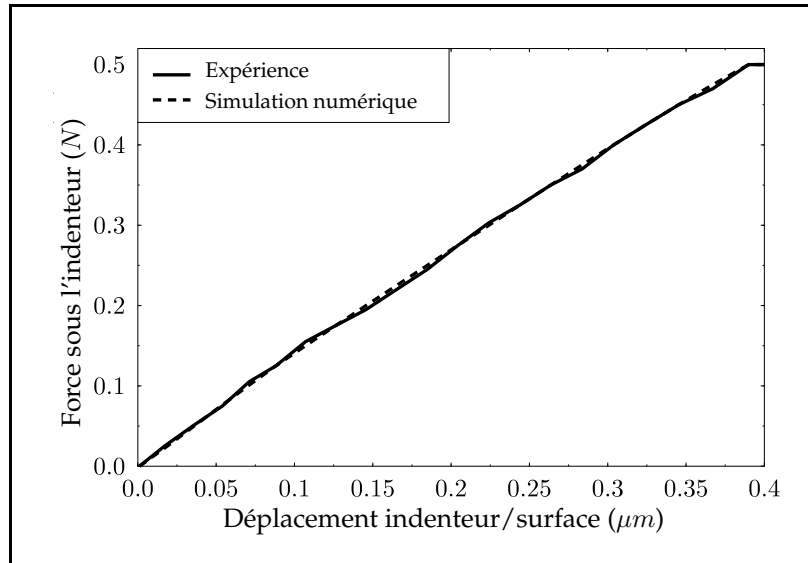


FIG. V.14 – Comparaison expérience/simulation sur la première montée en charge pour une fibre plus grosse et une fraction volumique proche de 0% : paramètres sans viscosité ($b = 0$, $p = 1$).

terface fibre/matrice. Le premier considère que la dérive de déplacement observée sur le palier de fluage a pour origine une viscosité de la décohésion interfaciale. Le second, plus réaliste aux vues d'analyses récentes menées à l'ONERA, attribue ce fluage à un artefact expérimental et possède donc un coefficient de viscosité nul ($b = 0$).

Les deux identifications proposées conduisent à un comportement interfacial présentant la même énergie de décohésion ($\simeq 10 \text{ J}/\text{m}^2$), la même raideur interfaciale ($C = 0.01 \text{ N}/\mu\text{m}^3$), le même coefficient de frottement ($\mu = 0.17$) et des contraintes maximales du même ordre de grandeur ($\simeq 250 \text{ MPa}$). Pour la vitesse de sollicitation de l'essai, les comportements interfaciaux relatifs à ces deux jeux de paramètres ont donc des caractéristiques mécaniques très proches.

Une discussion mécanique concernant ces paramètres a été menée. Une particularité forte de ces résultats concerne l'énergie de décohésion estimée ici à $10 \text{ J}/\text{m}^2$ (environ 10 fois la valeur habituellement évoquée dans la littérature). On peut noter que la raideur interfaciale a été choisie pour représenter la raideur du revêtement de la fibre.

Malgré les efforts réalisés à l'ONERA et dans ce travail, la question de l'existence d'une viscosité interfaciale reste ouverte. Des essais complémentaires sont nécessaires afin de discriminer les deux jeux de paramètres identifiés. On peut penser notamment à des essais à différentes vitesses ou à l'élaboration d'un nouvel ensemble appareillage/asservissement autorisant des maintiens à force constante.

L'existence d'une viscosité interfaciale n'ayant pu être établie, le jeu de paramètres non visqueux est retenu. Le modèle adhésif/frottant non visqueux est donc utilisé pour

l'étude de la résistance à la fissuration du composite SiC/SiC (chapitre VI). Dans ce qui suit, un effort particulier porte donc sur le traitement des problèmes de sauts de solution au travers d'une formulation dynamique des modèles de zone cohésive.

V.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, les paramètres du modèle adhésif/frottant ont été identifiés sur une expérience de micro-indentation.

Cette expérience a été retenue pour la pertinence de la sollicitation interfaciale qu'elle engendre (cisaillement et compression radiale) et pour la possibilité de la conduire sur un composite industriel. L'essai particulier considéré est un essai cyclé, à force imposée, comportant un palier de fluage et réalisé sur un composite à matrice céramique et à fibres longues de carbure de silicium (SiC/SiC). La simulation de cet essai a été menée avec un réalisme poussé : prise en compte des contraintes résiduelles thermiques, de la souplesse du système de mesure et de l'évolution élasto-plastique du contact fibre/indenteur. La méthode d'identification proposée repose sur une estimation a priori de bornes de valeurs mécaniquement admissibles, puis sur un affinement de ces bornes par simulations numériques successives.

Deux jeux de paramètres ont été identifiés : l'un visqueux ($b > 0$), l'autre non ($b = 0$). Ces deux jeux conduisent à un comportement interfacial identique du point de vue des principales caractéristiques mécaniques : l'énergie de décohésion ($\simeq 10 J/m^2$), la raideur interfaciale ($= 0.01 N/\mu m^3$), le coefficient de frottement ($= 0.17$) et la contrainte de cisaillement maximale ($\simeq 250 MPa$). Pour les discriminer de nouvelles données expérimentales sont nécessaires (des essais à différentes vitesses de chargement, par exemple). Un résultat fort de ces identifications concerne la valeur de l'énergie de décohésion : elle est estimée ici aux alentours de $10 J/m^2$, alors que les valeurs classiquement admises sont de l'ordre du J/m^2 . Les résultats de la littérature sur ce thème ne reposent cependant pas, à notre connaissance, sur des modélisations aussi fines de l'expérience de micro-indentation.

A l'heure actuelle, l'existence d'une viscosité interfaciale pour ce composite n'est toujours pas confirmée. Le jeu de paramètres non visqueux est donc retenu pour la suite. La possibilité de voir alors apparaître les sauts de solution étudiés au chapitre III nous conduit à envisager une formulation dynamique du modèle adhésif/frottant. C'est l'objet du chapitre suivant. Les paramètres interfaciaux identifiés y sont utilisés pour simuler

l'interaction d'une fissure matricielle et d'une interface fibre/matrice.

CHAPITRE VI

La fissuration tridimensionnelle des matériaux composites

Ce chapitre concerne l'amélioration de la résistance à la fissuration des matériaux composites. Le rôle de l'interface fibre/matrice sur la tenue des composites à matrice céramique est étudié au travers d'une approche micromécanique. Des simulations dynamiques tridimensionnelles de l'interaction d'une interface et d'une fissure matricielle sont réalisées. Nous étendons ainsi au cas 3D les nombreuses études menées sur ce thème en deux dimensions (fissures planes ou circulaires).

Le modèle d'interface présenté précédemment est appliqué à la fois à l'interface fibre/matrice et comme modèle de fissuration volumique pour la fibre et la matrice (les paramètres du modèle étant adaptés à ces deux fonctions).

Pour le composite SiC/SiC, la déviation d'une fissure semi-infinie à l'interface fibre/matrice est analysée en fonction des propriétés mécaniques de l'interface. Des propriétés optimales sont obtenues et comparées à celles identifiées sur l'essai de micro-indentation (chapitre V). Le phénomène de piégeage des fissures matricielles par une rangée de fibres est évoqué.

PLAN DU CHAPITRE VI

VI.1 Le rôle de l'interface fibre/matrice dans la fissuration des matériaux composites	157
VI.2 Contact, frottement et adhérence en 3D - Méthode NSCD	160
VI.2.1 Généralités sur la méthode NSCD	160
VI.2.2 Cinématique	161
VI.2.3 Equation de la dynamique	161
VI.2.4 Discrétisation temporelle	162
VI.2.5 Contact et frottement	163
VI.2.6 Prise en compte de l'adhérence	164
VI.3 Optimisation de la résistance à la fissuration	165
VI.3.1 Les données du problème	165
VI.3.2 Optimisation du composite industriel	170
VI.4 Conclusion du chapitre	177

VI.1 Le rôle de l'interface fibre/matrice dans la fissuration des matériaux composites

Durant la vie du composite, le rôle de l'interface fibre/matrice est multiple. Nous l'avons déjà souligné, lorsque le matériau est sain, l'interface lie les constituants et les fait ainsi pleinement participer à la tenue mécanique du composite.

Lorsque l'interface est rompue, les glissements relatifs fibre/matrice conduisent à une dissipation par frottement qui contribue à augmenter de manière significative la ductilité du composite. Cette dissipation intervient notamment lorsqu'une fissure matricielle est pontée par les fibres (FIG. VI.1) : au fur et à mesure que la fissure s'ouvre, les fibres sont extraites de leur gaine de matrice comme dans un essai de pull-out. Le frottement fibre/matrice qui en résulte est vraisemblablement la composante essentielle de la ductilité apparente du composite. Cette situation a été étudiée en détail par de nombreux auteurs [ROSE, 1987 ; BUDIANSKY et al., 1988 ; BECHER et al., 1988 ; BUDIANSKY et AMAZIGO, 1989 ; NAIR, 1990]. Ces approches, en majorité analytiques, reposent le plus souvent sur un modèle de cisaillement critique à l'interface. La prise en compte du pontage de la fissure par les fibres se fait par l'introduction d'une distribution de pression $p(\delta)$ le long de la fissure. La relation pression-ouverture est déduite d'un calcul de la force nécessaire pour extraire une fibre unique dans un essai de pull-out. La donnée de $p(\delta)$ permet ensuite de déterminer la résistance du composite, la longueur de la zone pontée et l'ouverture de la fissure en fonction des propriétés des constituants, de la géométrie (diamètre de fibre, ...), de la fraction volumique, des contraintes résiduelles d'origine thermique. La validité de ces approches repose sur une estimation correcte de $p(\delta)$. A notre connaissance, les travaux les plus aboutis sur ce thème sont actuellement menés à l'ONERA où le modèle analytique de HUTCHINSON et JENSEN [1990] a été enrichi de la loi de décohésion proposée par CHABOCHE et al. [1997a]. Le modèle résultant de cette analyse prend en considération les contraintes résiduelles, les effets de Poisson et un comportement interfacial couplant décohésion progressive et frottement avec dilatance et usure (*voir* [LEROY et al., 1999]). Il permet d'améliorer les résultats classiques du modèle micromécanique de MARSHALL et al. [1992].

REMARQUE VI.1. Le modèle rhéologique que nous avons proposé au chapitre IV pour simuler de manière simplifiée une expérience de micro-indentation, offre la possibilité de réaliser des simulations multi-échelles directes où la donnée $p(\delta)$ serait issue du calcul lui-même. Un assemblage en parallèle de ce modèle uniaxial permettrait de simuler la propagation d'une fissure pontée par des fibres.

L'étude que nous proposons de mener ici concerne l'interaction du front de la fissure matricielle et d'une rangée de fibres. Notre intérêt porte sur la simulation intermédiaire entre les deux précédentes : entre le moment où l'interface fibre/matrice est vierge (comportement élastique) et celui où elle est totalement endommagée (extraction frottante de la fibre). Les mécanismes à

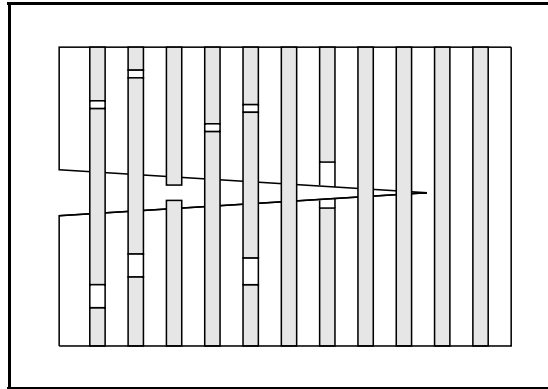


FIG. VI.1 – Fissure matricielle pontée par des fibres : les fibres sont dans une situation de pull-out.

l'étude sont :

1. la déviation de la fissure matricielle à l'interface fibre/matrice,
2. le piégeage de la fissure par une rangée de fibres.

Si la résistance interfaciale est faible, la fissure matricielle est rapidement déviée à l'interface. Sa vitesse de propagation diminue temporairement du fait d'une consommation énergétique par décohésion interfaciale. Cependant, l'interface est rapidement rompue et la tenue du composite est affaiblie par la diminution de la transmission des efforts entre la fibre et la matrice.

Si la résistance interfaciale est élevée, la fissure ne peut être déviée à l'interface. Elle est provisoirement stoppée. La tenue du composite est élevée du fait de la forte cohésion fibre/matrice. Cependant aucun processus de dissipation n'est activé à l'interface (pas de décohésion, ni de frottement). Deux situations sont à envisager. Si la résistance de la fibre est supérieure à celle de la matrice, la fissure est définitivement piégée par la rangée de fibres jusqu'à leur rupture. La contrainte à rupture de la cellule fibre/interface/matrice est alors élevée. Si, par contre, la résistance de la fibre est inférieure à celle de la matrice, la fibre se rompt rapidement et la ruine du composite est prématurée.

Par conséquent, si la fibre a une résistance plus faible que la matrice, une résistance interfaciale optimale peut être envisagée, à mi-chemin entre les deux cas extrêmes : une énergie de décohésion très faible (déviation de la fissure à l'interface mais faible dissipation interfaciale) et une énergie de décohésion très forte (déviation de la fissure à l'interface faible mais dissipation interfaciale élevée par unité d'aire d'interface endommagée). A l'inverse, si la fibre a une résistance plus élevée que la matrice, c'est le piégeage de la fissure qui peut être envisagé.

Si la déviation des fissures matricielles à l'interface fibre/matrice possède une réalité physique reconnue, le piégeage de la fissure par une rangée de fibres longues n'a été que récemment mis en évidence (composites à matrice métallique [LARSON, 1994], composites à matrice céramique [MOWER et ARGON, 1995]). L'apparition concomitante de la déviation et du piégeage a aussi

été observée [KAGAWA et GOTO, 1998].

REMARQUE VI.2. Un autre phénomène a été révélé expérimentalement : l'apparition d'une décohésion interfaciale avant que la fissure matricielle n'atteigne l'interface fibre/matrice. Pour l'étude énergétique de ce phénomène, nous renvoyons à [LEGUILLON et al., 2000].

Du point de vue de l'analyse mécanique, les conditions de déviation d'une fissure ont été largement analysées pour des cas bidimensionnels :

1. Interaction d'une fissure plane et d'une interface séparant deux solides isotropes élastiques [HE et HUTCHINSON, 1989], éventuellement en présence de contraintes résiduelles [HE et al., 1994].
2. Interaction d'une fissure plane et d'une interface séparant deux solides orthotropes élastiques [GUPTA et al., 1992].
3. Interaction d'une fissure plane se propageant dynamiquement et d'une interface séparant un solide élastique d'un solide visco-élastique [SIEGMUND et al., 1997].
4. Interaction d'une fissure matricielle annulaire et d'une interface séparant une matrice élastique fragile d'une fibre longue élastique fragile [MARTIN et al., 1998].

L'analyse tridimensionnelle est plus rare. A notre connaissance, la compétition déviation/piégeage pour une situation tridimensionnelle réaliste a très peu été étudiée dans la littérature. Les travaux de XU et al. [1998] font cependant exception. Les auteurs utilisent une approche de type mécanique de la rupture. La fissure se propage en mode I pur dans la matrice et en mode II pur à l'interface fibre/matrice. La déviation est étudiée dans le cas particulier où la fibre ne peut pas rompre : $G_c^{\text{fibre}} \geq G_c^{\text{matrice}}$.

Notre approche, basée sur les modèles de zone cohésive, permet d'envisager la mixité des modes de propagation de la fissure et l'éventuelle rupture de la fibre sans hypothèses supplémentaires. Le modèle tridimensionnel de fissuration dynamique en présence de contact et frottement est présenté ci-dessous. L'analyse de l'interaction fissure/interface est ensuite conduite.

BILAN DU PARAGRAPHE VI.1

Nous proposons d'analyser le rôle de l'interface fibre/matrice sur la fissuration des matériaux composites. Les matériaux à l'étude sont des composites à fibres longues et à matrice céramique. Les constituants de ces composites étant fragiles, leur ductilité apparente est issue du comportement interfacial. Le phénomène le plus souvent évoqué pour cette ductilité — et donc le plus souvent abordé dans la littérature — est l'extraction frottante des fibres de leur gaine de matrice lorsque la décohésion interfaciale est totale. Les phénomènes que nous proposons d'analyser sont plus rarement étudiés. Ils surviennent entre le moment où une fissure matricielle approche une rangée de fibres et celui où elle a dépassé cette rangée. Deux situations sont alors envisagées : soit la fissure est pontée par des fibres en extraction frottante, soit les fibres sont rompues. Dans le cas où la fissure

n'est pas déviée à l'interface, la tenue des fibres doit permettre un piégeage temporaire de la fissure matricielle. Ces situations reposent sur un éventuel contournement des fibres par la fissure. Il s'agit d'un problème fortement 3D.

Pour mener cette étude, nous proposons un modèle tridimensionnel de fissuration dynamique en présence de contact et frottement. Ce modèle est présenté ci-dessous. L'analyse de l'interaction fissure/interface est ensuite conduite.

VI.2 Contact, frottement et adhérence en 3D - Méthode NSCD

L'existence physique d'une viscosité des comportements interfaciaux reste une question ouverte (*voir* chapitre V). Les simulations réalisées dans ce chapitre se font ainsi sans régularisation visqueuse. Les problèmes d'instabilité présentés au chapitre III peuvent donc être rencontrés. Pour les éviter, le problème de contact frottant avec cohésion est traité dans le cadre d'une approche dynamique : la méthode Non-Smooth Contact Dynamics (NSCD). Cette méthode a été initiée par MOREAU [1974, 1988] et JEAN [1995]. Le logiciel LMGC (code éléments finis) basé sur cette méthode est dû à Jean. Les développements spécifiques à la mise en œuvre numérique de la méthode pour les problèmes tridimensionnels de contact frottant ont été réalisés par Jean et par ACARY [en préparation]. La prise en compte de l'adhérence dans ces problèmes est due à Acary et à l'auteur.

VI.2.1 Généralités sur la méthode NSCD

La méthode NSCD est dédiée à la résolution de problèmes relatifs aux systèmes dynamiques avec contraintes unilatérales. Elle est donc particulièrement adaptée aux problèmes de contact frottant.

Elle propose un traitement non régularisé (pas de compliance, pas de pénalisation) des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. Une attention particulière est portée à l'intégration numérique en temps des équations du mouvement en présence de telles contraintes. Le cadre des mesures différentielles et des distributions permet notamment d'aborder convenablement les discontinuités des champs de vitesse relatives à ces contraintes unilatérales. Pour plus de détails sur cette méthode nous renvoyons à MOREAU [1998] et JEAN [1999].

La prise en compte de l'adhérence dans cette méthode permet de considérer chaque point de contact comme une zone cohésive. Les paramètres mécaniques relatifs à ces zones cohésives peuvent varier en tout point de la discrétisation spatiale du problème. L'outil numérique correspondant est donc adapté aux problèmes de contact adhésif/frottant pour des collections à grand nombre d'objets (rigides ou déformables) et/ou — ce qui est notre cas — aux problèmes de fissuration des matériaux multiphases. La fissuration des constituants peut être envisagée

(matrice et renforts) tout comme la décohésion aux interfaces entre constituants.

VI.2.2 Cinématique

Soit q la discrétisation spatiale du vecteur position global. La vitesse relative en un contact α vaut :

$$(VI.1) \quad \dot{U}^\alpha = H^{\star\alpha}(q)\dot{q}.$$

Par dualité, le représentant local R^α de la réaction r^α au contact α vaut :

$$(VI.2) \quad r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha,$$

où les applications linéaires H^\star et H vérifient : $H^\star = H^T$.

VI.2.3 Equation de la dynamique

La discrétisation spatiale du Principe des Puissances Virtuelles en formulation lagrangienne conduit à l'équation matricielle de la dynamique :

$$(VI.3) \quad M(q, t)\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) - r,$$

où M est la matrice d'inertie et F est le vecteur des forces internes et externes.

Des conditions unilatérales pouvant engendrer des discontinuités du champ de vitesse, l'accélération ne peut être considérée comme la dérivée temporelle classique de la vitesse. Pour être couplée à du contact frottant, l'équation (VI.3) doit être prise au sens des mesures.

$$(VI.4) \quad M(q, t)d\dot{q} = F(q, \dot{q}, t)dt - r d\nu,$$

où dt est une mesure de Lebesgue, $d\dot{q}$ est une mesure différentielle associée à $\dot{q}(t)$:

$$(VI.5) \quad \int_{t_1}^{t_2} d\dot{q} = q(t_2^+) - q(t_1^-) \quad \forall t_2 > t_1,$$

et $d\nu$ est une mesure réelle positive pour laquelle $d\dot{q}$ possède une densité.

Par intégration de (VI.4) entre t_1 et t_2 compris dans $]0, T]$, on obtient :

$$(VI.6) \quad \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} M(q, t)d\dot{q} = \int_{t_1}^{t_2} F(q, \dot{q}, t)dt - \int_{]t_1, t_2]} r d\nu, \\ q(t_2) = q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}(\tau)d\tau. \end{cases}$$

VI.2.4 Discrétisation temporelle

Sur un intervalle $]t_i, t_{i+1}]$ de longueur h , l'utilisation d'une θ -méthode donne :

$$(VI.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(q, \dot{q}, t) dt = h \{ (1 - \theta) F(q(t_i), \dot{q}(t_i), t_i) + \theta F(q(t_{i+1}), \dot{q}(t_{i+1}), t_{i+1}) \}, \\ \qquad \qquad \qquad = h \{ (1 - \theta) F(q_i, \dot{q}_i, t_i) + \theta F(q_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, t_{i+1}) \} \quad (\text{notation}), \\ \qquad \qquad \qquad = h \{ (1 - \theta) F_i + \theta F_{i+1} \} \quad (\text{notation}), \\ q_{i+1} = q_i + h \{ (1 - \theta) \dot{q}_i + \theta \dot{q}_{i+1} \}. \end{array} \right.$$

L'intégration de $\int_{]t_i, t_{i+1}]} r d\nu$ et de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} M(q, t) d\dot{q}$ se fait par un schéma implicite et en supposant que : $\forall \tau \in]t_i, t_{i+1}] M(q(\tau), \tau) = M(q_{i+1}, t_{i+1})$, ce qui conduit à :

$$(VI.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{]t_i, t_{i+1}] } r d\nu = hr(t_{i+1}) = hr_{i+1} \quad (\text{notation}), \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} M(q, t) d\dot{q} = M(q_{i+1}, t_{i+1}) (\dot{q}((t_{i+1})^+) - \dot{q}((t_i)^-)). \end{array} \right.$$

Pour des raisons évidentes, les variables numériques ont une valeur unique à un incrément de temps donné. On se restreint donc à l'écriture suivante : $(\dot{q}((t_{i+1})^+) - \dot{q}((t_i)^-)) = \dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i$. En utilisant (VI.7) et (VI.8), (VI.6) devient ainsi :

$$(VI.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(q_{i+1}, t_{i+1}) (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i) - h \{ (1 - \theta) F_i + \theta F_{i+1} \} + hr_{i+1} = 0, \\ q_{i+1} = q_i + h \{ (1 - \theta) \dot{q}_i + \theta \dot{q}_{i+1} \}. \end{array} \right.$$

La première équation de (VI.9) est du type $\mathcal{R}(\dot{q}_{i+1}) = 0$. Elle est résolue par une méthode de Newton-Raphson (k est l'exposant d'itération). En utilisant les notations suivantes :

$$(VI.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^k = M(q_{i+1}^k, t_{i+1}), \\ C^k = -\frac{\partial F_{i+1}}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_{i+1}^k, q_{i+1}^k, t_{i+1}) \quad \text{la matrice d'amortissement tangente,} \\ K^k = -\frac{\partial F_{i+1}}{\partial q}(\dot{q}_{i+1}^k, q_{i+1}^k, t_{i+1}) \quad \text{la matrice de raideur tangente,} \\ w^k = (M^k + h\theta C^k + h^2\theta^2 K^k)^{-1} \quad \text{l'inverse de la matrice des itérations,} \end{array} \right.$$

et en désignant par $\dot{q}_{\text{lib}}^{k+1}$ la valeur de \dot{q}_{i+1}^{k+1} en l'absence de contact⁽¹⁾, la résolution de (VI.9) conduit au système suivant :

$$(VI.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_{i+1}^{k+1} = \dot{q}_{\text{lib}}^{k+1} - w^k hr_{i+1}^k, \\ q_{i+1}^{k+1} = q_i + h \{ (1 - \theta) \dot{q}_i + \theta \dot{q}_{i+1}^{k+1} \}. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾i.e. lorsque $r_{i+1}^k = 0$.

VI.2.5 Contact et frottement

En posant, pour le contact α :

$$(VI.12) \quad (W^{\alpha\beta})^k = H^{\alpha\alpha}(\bar{q})w^k H^\beta(\bar{q}) \quad \text{et} \quad (\dot{U}_{\text{lib}}^\alpha)^{k+1} = H^{\alpha\alpha}(\bar{q})\dot{q}_{\text{lib}}^{k+1},$$

où \bar{q} est une évolution intermédiaire de q (voir [JEAN, 1999]), on a l'écriture locale suivante de la première équation de (VI.11) :

$$\begin{aligned} (\dot{U}^\alpha)_{i+1}^{k+1} &= (\dot{U}_{\text{lib}}^\alpha)^{k+1} - \sum_{\beta} (W^{\alpha\beta})^k h(R^\beta)_{i+1}^k, \\ &= (\dot{U}_{\text{lib}}^\alpha)^{k+1} - \underbrace{\sum_{\beta \neq \alpha} (W^{\alpha\beta})^k h(R^\beta)_{i+1}^k - (W^{\alpha\alpha})^k h(R^\alpha)_{i+1}^k}_{= (\dot{U}_{\text{libloc}}^\alpha)^{k+1} \quad (\text{notation})}. \end{aligned}$$

Pour la prise en compte du contact unilatéral et du frottement, nous notons synthétiquement que le couple $((\dot{U}^\alpha)_{i+1}^{k+1}, (R^\alpha)_{i+1}^{k+1})$ doit respecter les graphes de Signorini et Coulomb. Brièvement — et avec les conventions des équations (II.37) et (II.38) — si un couple (\dot{x}, y) respecte les graphes de Signorini et Coulomb, cela signifie :

$$(VI.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_N, y_N) \text{ vérifient : } x_N \geq 0, y_N \leq 0, x_N y_N = 0 \\ (\dot{x}_T, y_T) \text{ vérifient : } \begin{cases} \|y_T\| \leq \mu |y_N|, \\ \text{avec } \begin{cases} \|y_T\| < \mu |y_N| \Rightarrow \dot{i}_T = 0, \\ \|y_T\| = \mu |y_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{x}_T = \lambda y_T. \end{cases} \end{cases} \end{array} \right.$$

Si $\theta = 1$, quelques précautions sont à prendre pour l'évaluation numérique de x_N à partir de \dot{x} . Nous renvoyons sur ce point à [VOLA et al., 1998] et [JEAN, 1999].

En omettant les indices d'itération et d'incrément, on peut réécrire le problème tridimensionnel sous la forme ($\rho > 0$, $D(\mu|R_N^\alpha|)$ est le disque de rayon $\mu|R_N^\alpha|$ centré en l'origine) :

$$(VI.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}^\alpha - \dot{U}_{\text{libloc}}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha = 0, \\ R_N^\alpha - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (R_N^\alpha + \rho U_N^\alpha) = 0, \\ R_T^\alpha - \text{proj}_{D(\mu|R_N^\alpha|)} (R_T^\alpha + \rho U_T^\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Il existe donc une fonction Φ telle que l'on ait :

$$(VI.15) \quad \Phi(\dot{U}^\alpha, R^\alpha) = 0.$$

Les racines de cette équation non linéaire sont calculées par un algorithme de Newton généralisé aux fonctions non régulières (voir [ALART et CURNIER, 1988]).

VI.2.6 Prise en compte de l'adhérence

Selon le modèle présenté au chapitre II, la prise en compte de l'adhérence dans les problèmes de contact frottant peut se faire par le changement de variable suivant :

$$(VI.16) \quad \tilde{R} = R - R_{adh},$$

où R_{adh} est en toute généralité une force de résistance supplémentaire dont l'intensité diminue lorsque la décohésion progresse. Pour le modèle particulier du chapitre II, on a :

$$(VI.17) \quad R_{adh} = \beta^2 (C_N U_N n + C_T U_T).$$

La réécriture de la première équation de (VI.14) est alors :

$$(VI.18) \quad \begin{aligned} \dot{U}^\alpha &= \dot{U}_{libloc}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h \tilde{R}^\alpha, \\ &= \dot{U}_{libloc}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h (R^\alpha - R_{adh}^\alpha), \\ &= \widetilde{\dot{U}_{libloc}^\alpha} - W^{\alpha\alpha} h R^\alpha, \end{aligned}$$

où on a posé :

$$(VI.19) \quad \widetilde{\dot{U}_{libloc}^\alpha} = \dot{U}_{libloc}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R_{adh}^\alpha.$$

L'algorithme de résolution proposé est alors le suivant :

$$(VI.20) \quad \left[\begin{array}{l} \text{boucle : incrément de temps} \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle : couplage adhérence/frottement : point fixe sur } \dot{U}, R, \beta \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle : parcours des nœuds de contact } (\alpha \text{ nœud courant}) \\ 1. \text{ évaluation de } \dot{U}_{libloc}^\alpha \\ 2. \text{ calcul de } \beta^\alpha \text{ après estimation de } U^\alpha \\ 3. \text{ calcul de } R_{adh}^\alpha \\ 4. \text{ changement de variable } \widetilde{\dot{U}_{libloc}^\alpha} = \dot{U}_{libloc}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R_{adh}^\alpha \\ 5. \text{ calcul de } \dot{U}^\alpha = \widetilde{\dot{U}_{libloc}^\alpha} - W^{\alpha\alpha} h R^\alpha \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle : résolution de } \Phi(\dot{U}^\alpha, R^\alpha) = 0 \\ \text{itérations de la méthode de Newton-Raphson généralisée} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

BILAN DU PARAGRAPHE VI.2

Une extension tridimensionnelle du modèle de zone cohésive étudié au chapitre II a été proposée (modèle adhésif/frottant de RAOUS et al. [1999]). La mise en œuvre des modèles de zone cohésive par la méthode "Non-Smooth Contact Dynamics" de JEAN [1999]

permet de traiter des problèmes de décohésion en présence de conditions non régulières de contact frottant et en l'absence de régularisation visqueuse des comportements surfaciques. Une formulation dynamique permet en effet de s'affranchir des problèmes d'instabilités mentionnés au chapitre III. L'outil numérique associé à ce modèle offre la possibilité de simuler la fissuration des matériaux volumiques, ainsi que celle des interfaces qui les séparent. Il est utilisé ci-dessous pour l'étude de la fissuration tridimensionnelle des matériaux composites à matrice céramique.

VI.3 Optimisation de la résistance à la fissuration

VI.3.1 Les données du problème

Le problème étudié est celui d'une fissure matricielle semi-infinie se présentant perpendiculairement à une rangée de fibres (FIG. VI.2). Les simulations portent sur un composite SiC/SiC tel qu'il a été présenté au chapitre V.

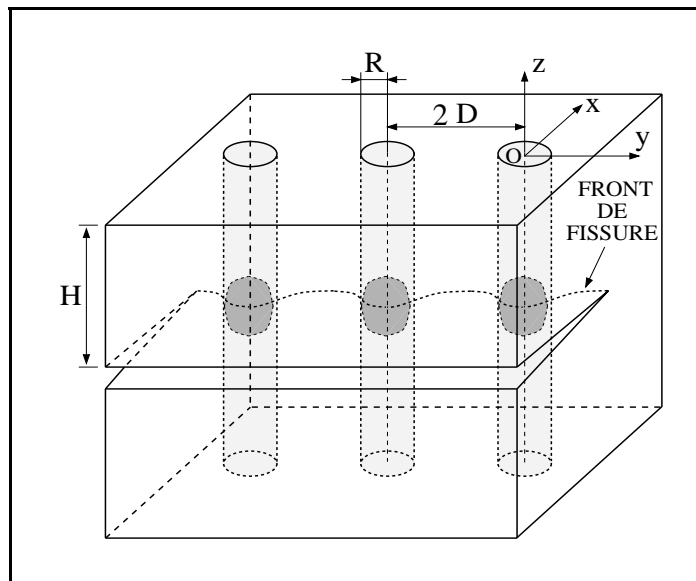


FIG. VI.2 – Piégeage et déviation à l'interface fibre/matrice d'une fissure matricielle dans un matériau composite à fibres longues.

Les données matériau sont celles du chapitre V. La matrice est élastique isotrope. Son module d'Young est de 350 GPa et son coefficient de Poisson de 0.20 . Sa masse volumique est de 3.1 g/cm^3 . Elle est renforcée par des fibres longues SiC Nicalon, élastiques isotropes, de module d'Young 200 GPa , de coefficient de Poisson 0.25 et de densité 2.6 g/cm^3 . Le diamètre R des fibres est identique à celui de la fibre sur laquelle l'identification des paramètres interfaciaux a été menée. Les fibres sont espacées d'une distance $2D$ telle que $R/(2D) = 1/4$. Cette

configuration permet de respecter une fraction volumique de fibres proche de 40 %.

Soit un repère (O, x, y, z) . Le point O est défini comme l'intersection du plan de propagation de la fissure et de l'axe de symétrie d'une fibre (axe z). La fissure se propage initialement dans la direction $-x$ le long du plan $z = 0$ et la rangée de fibres est parallèle à l'axe y . La modélisation porte sur une cellule uniaxiale élémentaire délimitée par les coordonnées $[x = -D, x = D]$, $[y = 0, y = D]$, $[z = 0, z = H]$. La hauteur H est telle que $H/D = 6$. Une préfissure existe dans le demi-plan $(x \leq -D, z = 0)$.

VI.3.1.a La sollicitation et les conditions de bords

Un déplacement U_z est imposé sur le plan $z = H$ dans le sens des z positifs. Une rampe de charge est appliquée : $U_z = \dot{U}_z \times \Delta T \times i$, où $\Delta T = 10^{-9}$ s et $\dot{U}_z = 0.675$ m/s (i est le numéro d'incrément). Les bords $x = -D$ et $x = D$ sont libres. Les déplacements selon y sont bloqués sur les bords $y = 0$ (condition de symétrie pour la fibre) et $y = D$ (dans des conditions de déformations planes généralisées, cette condition s'approche des conditions de périodicité).

Dans le demi-espace $z \leq 0$, un corps non déformable B sans mouvement de solide rigide permet d'appliquer les conditions de symétrie du problème par rapport au plan $z = 0$ et de définir le saut de solution $[u]$ le long des zones cohésives. Ces zones cohésives sont situées dans le plan $z = 0$ pour la fissuration de la matrice et de la fibre, et à l'interface fibre/matrice. A l'interface, le saut de déplacement $[u]$ est défini comme la distance entre deux points de contact initialement en vis-à-vis, i.e. $[u]_{\text{interface}} = u_{\text{interface}}^{\text{fibre}} - u_{\text{interface}}^{\text{matrice}}$. Dans le plan $z = 0$, le saut de déplacement $[u]$ existant entre les deux lèvres de la fissure vaut, dans le sens normal, deux fois la différence de déplacement entre les nœuds de la fibre ou de la matrice et le corps rigide B . La symétrie impose donc dans ce plan : $u_{N(z=0)}^{\text{réel}} = 2u_{N(z=0)}^{\text{modélisation}}$.

Pour la sollicitation appliquée, on notera que les effets dynamiques sont importants dans les simulations présentées, mais non prépondérants devant les phénomènes que l'on cherche à qualifier. Le pas de temps choisi correspond à 1/10 de la plus petite période des ondes élastiques, qui est celle de la fibre ($\simeq 10^{-8}$ s).

Tant que la hauteur H de la cellule est suffisante, un rechargement complet de la matrice est possible. Le problème ainsi modélisé est celui d'un ensemble périodique de fissures matricielles semi-infinies sans interaction entre elles et se présentant perpendiculairement à une rangée de fibres. Sur les simulations présentées par la suite, ce rechargement matriciel est obtenu tant que la tenue interfaciale n'est pas trop faible. Lorsque la tenue interfaciale tend vers zéro, la décohesion fibre/matrice est presque totale sur la cellule composite. L'absence d'interaction entre les fissures n'est alors plus une hypothèse valide. Pour des raisons évidentes de coût de calcul, la hauteur de la cellule a cependant été conservée. Les résultats concernant ces valeurs de tenue interfaciale sont ainsi donnés à titre indicatif, le problème mécanique étant en partie modifié.

VI.3.1.b Les propriétés matériaux pour la fissuration

Les fissurations de la fibre et de la matrice sont modélisées ici par le modèle adhésif/frottant pris sans viscosité d'évolution de l'endommagement et sans frottement (ouverture normale). Deux paramètres de ce modèle doivent donc être identifiés pour la simulation de la fissuration des matériaux volumiques : la raideur interfaciale C et l'énergie de rupture w .

Les raideurs interfaciales En l'absence de propagation de la fissure, la raideur interfaciale doit être suffisamment élevée pour que l'assemblage en série (dans le sens de la traction) zone cohésive + corps maillé possède une raideur proche de celle du corps maillé seul, dont on cherche à étudier la fissuration. En toute rigueur, cette condition n'est remplie que lorsque $C \rightarrow +\infty$. Des simulations annexes, réalisées sur des barreaux homogènes isotropes ayant les propriétés mécaniques de la fibre (respectivement de la matrice) permettent d'identifier C^{fibre} , encore notée C^f , (respectivement C^{matrice} , notée C^m). Des choix croissants de C^f (resp. C^m) déterminent la raideur limite du barreau $K^f(C \rightarrow +\infty)$ (resp. $K^m(C \rightarrow +\infty)$). Des valeurs acceptables pour ces raideurs vérifient ainsi : $K^f(C^f) = 0.9 \times K^f(C \rightarrow +\infty)$ (resp. $K^m(C^m) = 0.9 \times K^m(C \rightarrow +\infty)$). Les valeurs identifiées sont :

$$(VI.21) \quad \begin{cases} C^f \simeq 0.025 \text{ N}/\mu\text{m}^3, \\ C^m \simeq 0.044 \text{ N}/\mu\text{m}^3. \end{cases}$$

Ces valeurs traduisent convenablement l'élasticité des matériaux avant leur fissuration. On a notamment :

$$(VI.22) \quad \frac{C^f}{C^m} \simeq \frac{E^f}{E^m}.$$

REMARQUE VI.3. La validité des paramètres de zone cohésive peut être assurée par le critère suivant ([NEEDLEMAN, 1990]) : la longueur caractéristique interfaciale l doit rester inférieure à $10^{-2} - 10^{-4}$ fois toute autre longueur du problème. Il est légitime de considérer que, pour ces modèles, l se définit comme le rapport de l'énergie de décohésion sur la contrainte maximale que peut supporter l'interface. Cette longueur est dans notre modèle : $l = w/\sqrt{wC} = \sqrt{w/C} = u_0$. Par conséquent, si l'énergie de décohésion w est donnée, l tend vers 0 lorsque C tend vers $+\infty$. Notre critère est donc cohérent avec celui proposé par Needleman.

L'énergie de rupture Ainsi que nous l'avons signalé au chapitre I, les taux critiques de restitution de l'énergie de la fibre G_c^f et de la matrice G_c^m peuvent être identifiés aux énergies de décohésion w^f et w^m , dites aussi énergies de rupture pour les matériaux volumiques. La littérature donne des valeurs relativement dispersées concernant les contraintes à rupture et les

taux critiques de restitution de l'énergie pour la fibre Nicalon et pour la matrice SiC. On peut cependant se référer aux valeurs suivantes qui sont communément admises : $G_c^f = 4 - 8 J/m^2$ [EVANS, 1989], $G_c^f \simeq 15 J/m^2$ [VILLENEUVE, 1991] et $G_c^m = 5 - 10 J/m^2$ [EVANS et al., 1994].

Deux observations peuvent être formulées quant à l'utilisation de ces valeurs pour les simulations que nous souhaitons mener :

1. Dans les essais permettant de mesurer le taux critique de restitution de l'énergie ou la contrainte à rupture de la fibre, l'amorçage de la rupture se fait généralement sur des défauts. Ainsi le G_c^f expérimental s'apparente davantage à un G_c^f de propagation dynamique qu'à un G_c^f d'amorçage de la fissuration. Dans le modèle de zone cohésive utilisé, il n'existe pas de distinction entre l'énergie de décohésion d'amorçage et celle de propagation. Les phénomènes mécaniques que nous souhaitons mettre en évidence sont conditionnés par l'apparition ou non de la rupture de la fibre. L'énergie de décohésion d'amorçage est donc le paramètre que nous retenons. Elle doit donc être prise supérieure au G_c^f expérimental.
2. A l'inverse, la fissure matricielle que nous modélisons représente une fissure semie-infinie et en état de propagation.

Par conséquent, les valeurs $G_c^f = 4 - 15 J/m^2$ et $G_c^m = 5 - 10 J/m^2$ doivent être revues dans le sens d'une augmentation de G_c^f et, dans une moindre mesure, d'une diminution de G_c^m . Les valeurs suivantes sont retenues :

$$(VI.23) \quad \begin{cases} G_c^f &= 20 \quad J/m^2, \\ G_c^m &= 4 \quad J/m^2. \end{cases}$$

Ces valeurs doivent être considérées comme arbitraires face au manque de certitudes expérimentales. Elles appartiennent néanmoins à des gammes de valeurs réalistes (*voir* notamment les travaux de MARTIN et al. [1998] sur le composite SiC/C/SiC dont les valeurs sont rappelées au paragraphe VI.3.2.b) et elles permettent de mettre en évidence des phénomènes observés expérimentalement.

Les contraintes maximales et les déplacements critiques Les raideurs interfaciales et les énergies de décohésion retenues conduisent aux valeurs suivantes des contraintes maximales supportées par la fibre et par la matrice, ainsi que des déplacements pour lesquels ces contraintes sont atteintes et pour lesquels la rupture des matériaux débute :

$$(VI.24) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}^f &= \sqrt{C^f w^f} \simeq 707 \text{ MPa}, & u_0^f &= \sqrt{w^f / C^f} \simeq 28 \text{ nm}, \\ \bar{\sigma}^m &= \sqrt{C^m w^m} \simeq 418 \text{ MPa}, & u_0^m &= \sqrt{w^m / C^m} \simeq 9.6 \text{ nm}. \end{cases}$$

La symétrie du problème impose de prendre $C_T^f = C_T^m = 0$. On impose donc : $C^f = C_N^f$ et $C^m = C_N^m$. Les contraintes maximales $\bar{\sigma}^f$ et $\bar{\sigma}^m$ concernent ainsi l'ouverture normale de la fissure.

L'interface fibre/matrice est principalement sollicitée en cisaillement, sa contrainte maximale concerne donc la composante tangentielle de l'ouverture : $\bar{\sigma}^i = \sqrt{C_T^i w^i}$.

VI.3.1.c Le maillage

Le maillage utilisé est présenté sur la FIG. VI.3. Il est composé d'éléments prismatiques à 8 nœuds. Il contient 4082 nœuds (12246 D.D.L.) et 3000 éléments. La largeur de bande du problème est de 423.

Ce maillage permet un bon compromis entre une intégration satisfaisante des contraintes (notamment en pointe de fissure) et des temps de calcul qui autorisent des prospectives numériques à court terme. Une étude fine des champs de contraintes nécessiterait un raffinement du maillage. Néanmoins, en l'absence de branchement des fissures dans les matériaux volumiques, les travaux de SIEGMUND et al. [1997] montrent que l'étude de la fissuration par des modèles de zone cohésive est satisfaisante lorsque la taille de la maille la plus fine représente jusqu'à 125 fois la plus petite longueur caractéristique interfaciale du problème. Ce rapport est ici d'environ 110.

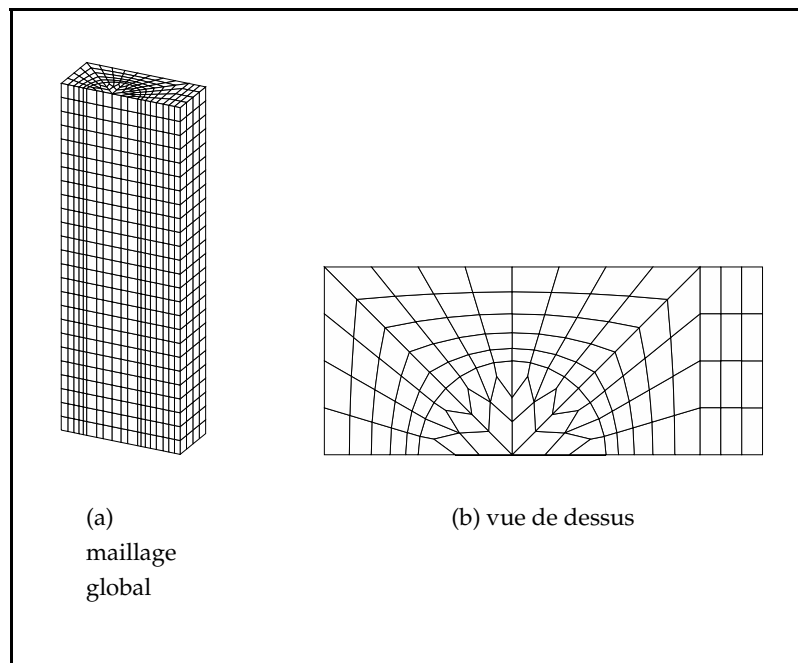


FIG. VI.3 – Maillage éléments finis utilisé pour la simulation de la fissuration tridimensionnelle d'un composite SiC/SiC.

VI.3.2 Optimisation du composite industriel

VI.3.2.a Tenue du composite et déviation des fissures aux interfaces

Les FIGURES VI.4, VI.6 et VI.5 donnent l'évolution de la réaction sur la cellule en fonction du déplacement appliqué pour différents paramètres interfaciaux. L'évolution de la fissuration dans la matrice, à l'interface et éventuellement dans la fibre est aussi reportée sur ces figures (la fissure est représentée par les zones sombres).

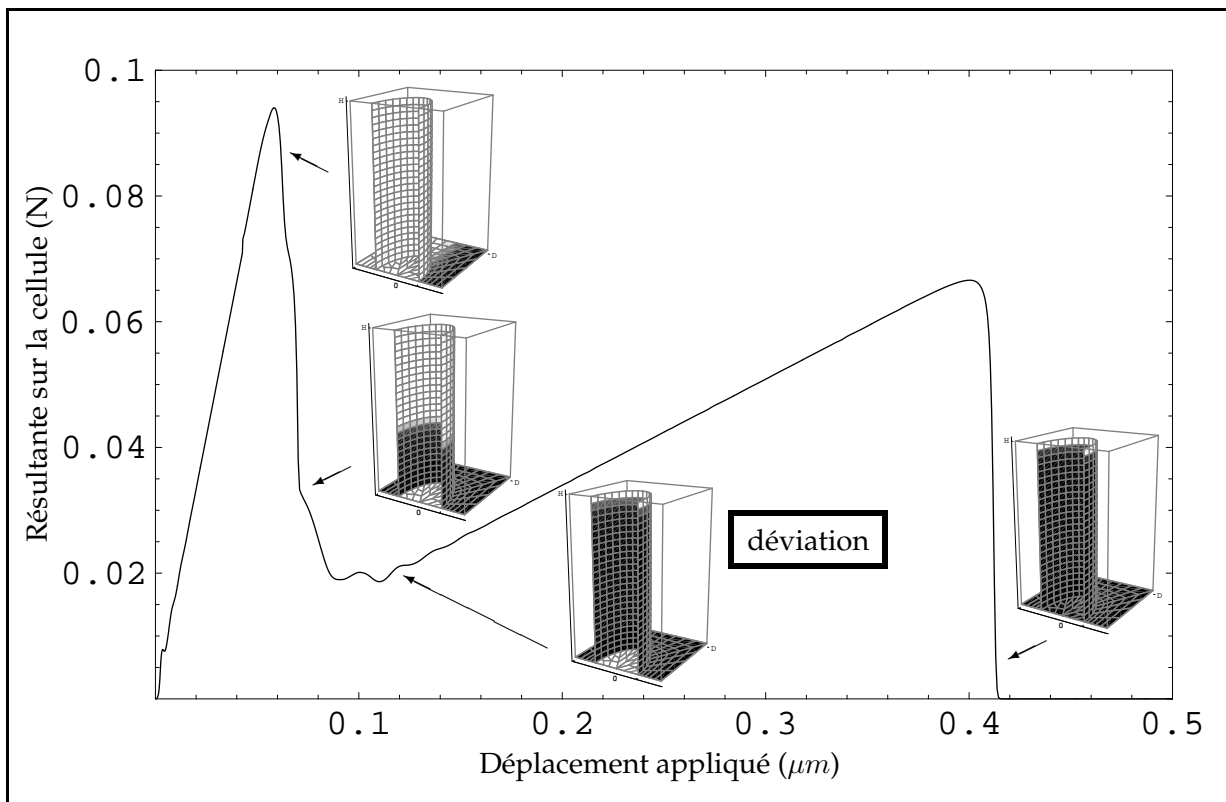


FIG. VI.4 – Résultante sur la cellule en fonction du déplacement appliqué : $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.005$.

Pour une résistance interfaciale faible ($\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.005$), la FIG. VI.4 montre un comportement élastique de la cellule, suivi d'une rupture fragile de la matrice. Cette rupture s'accompagne d'une décohésion interfaciale presque totale. Le comportement s'apparente ensuite à celui d'une fibre seule en traction : comportement élastique, puis rupture fragile. L'énergie E^F qu'il a fallu fournir pour rompre la cellule est proche de celle qu'il faut fournir pour rompre un système fibre/matrice en parallèle. La déformation à rupture ε^R est celle de la fibre seule possédant l'énergie à rupture que nous avons choisie. La réalité physique de cette déformation à rupture n'est donc pas établie. La poursuite de la fissuration de la cellule composite jusqu'à sa rupture complète permet cependant l'étude mécanique de l'optimisation de sa tenue à la rupture en fonction des propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice.

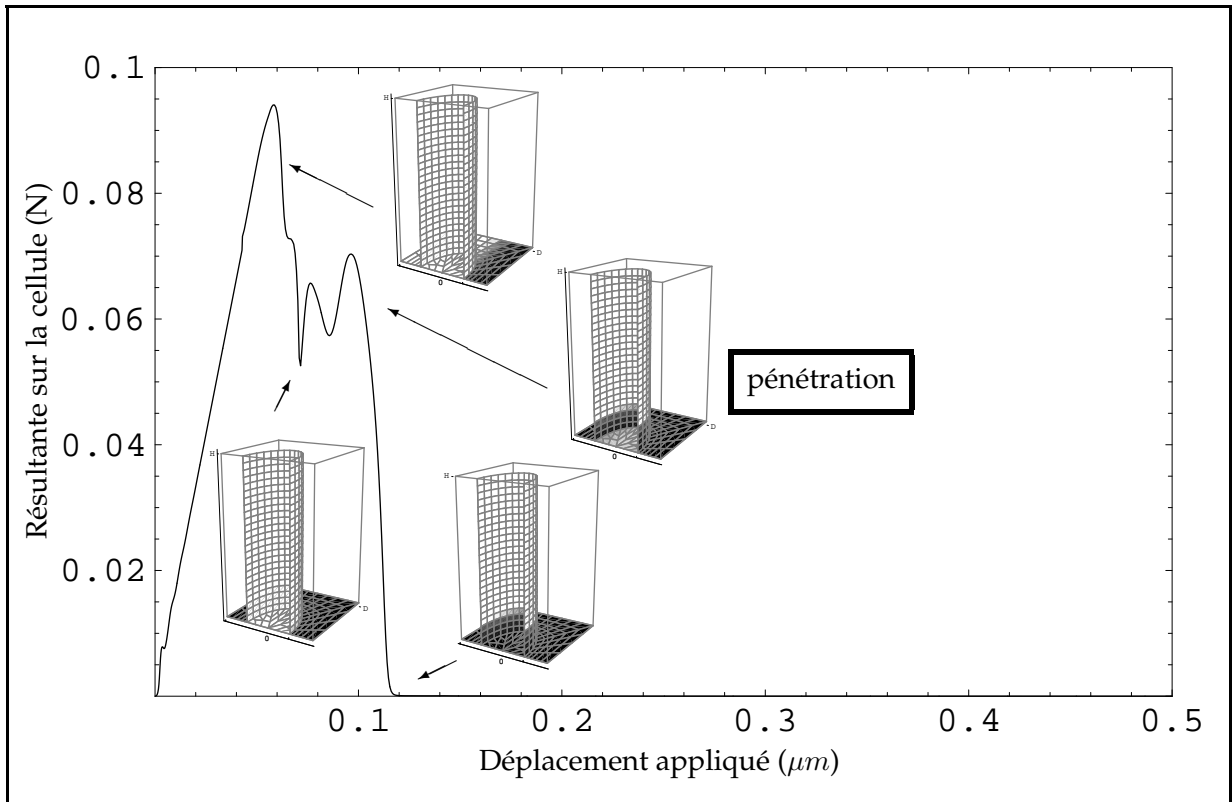


FIG. VI.5 – Résultante sur la cellule en fonction du déplacement appliqué : $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.35$.

Lorsque la résistance interfaciale est forte ($\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.35$), le comportement de la cellule varie dans le sens d'une diminution de E^F et de ε^R (FIG. VI.5). En effet, lorsque la fissure matricielle se propage brusquement, l'interface fibre/matrice reste pratiquement vierge. Le comportement est donc ensuite celui d'un assemblage matrice rompue / interface élastique / fibre élastique. La raideur de cet assemblage est intermédiaire entre celle de la cellule initiale et celle de la fibre seule. Lorsque la contrainte à rupture de la fibre est atteinte, la cellule se rompt rapidement. La déformation à rupture est donc faible. L'énergie E^F est proche de celle qu'il faut fournir pour rompre d'une part la matrice et d'autre part un système plus raide que le précédent (après rupture de la matrice) et ayant la même contrainte à rupture. Cette énergie est donc plus faible que la précédente.

Lorsque la résistance interfaciale prend une valeur intermédiaire entre les deux précédentes (par exemple $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.245$), il est possible de conserver la déformation à rupture maximale, tout en dissipant une certaine quantité d'énergie par décohésion interfaciale. Cette situation est représentée sur la FIG. VI.6. Après rupture d'une partie de la matrice, l'interface fibre/matrice commence à s'endommager au moment où le rechargement de la fibre peut s'avérer critique pour cette dernière. La décohésion interfaciale se poursuit en régime stationnaire à mesure que le déplacement appliqué augmente (la consommation énergétique par unité de surface d'interface endommagée est alors de w^i). Lorsque la décohésion interfaciale est totale, l'énergie

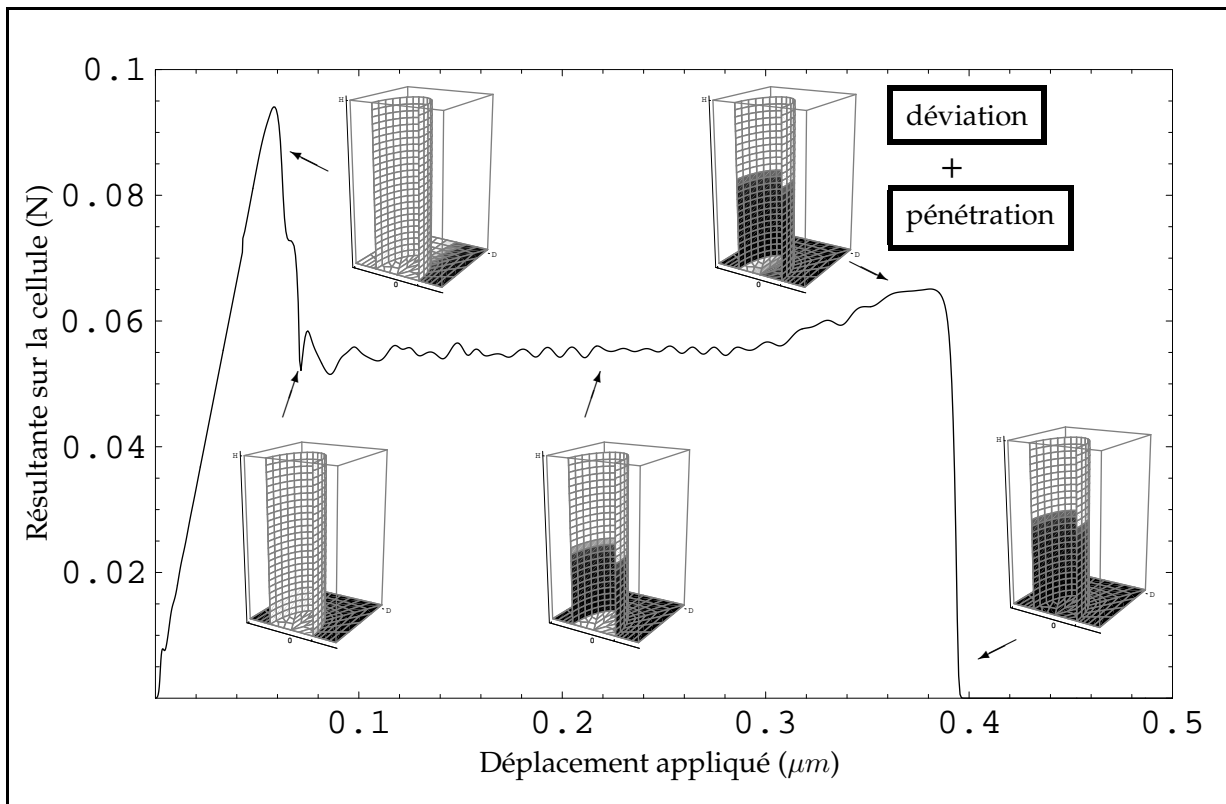
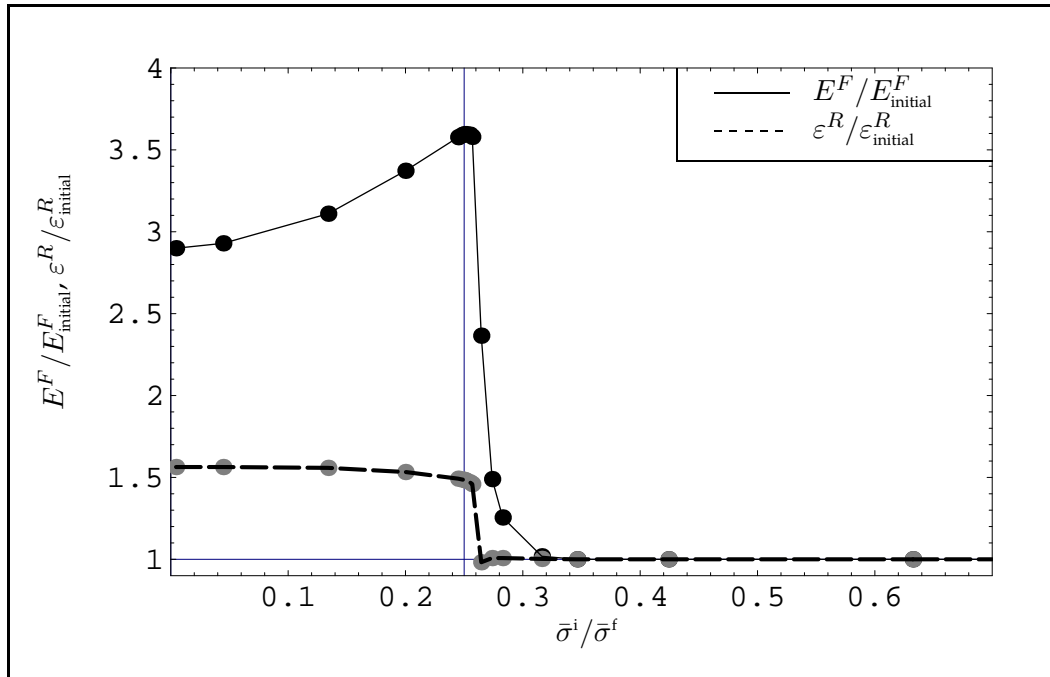


FIG. VI.6 – Résultante sur la cellule en fonction du déplacement appliqué : $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 0.245$.

fournie à la cellule conduit à un rechargement élastique de la fibre. Cette dernière atteint rapidement sa contrainte à rupture et se rompt brutalement. Par conséquent, l'énergie E^F fournie pour obtenir la rupture de la cellule est plus importante que dans les deux cas précédents. La déformation à rupture ε^R est légèrement inférieure à celle d'une cellule à interface infiniment faible.

La tenue de la cellule composite peut ainsi être optimisée par un choix convenable des propriétés de l'interface fibre/matrice. Les caractéristiques de la cellule qui peuvent être améliorées par ce biais sont : la déformation à rupture et l'énergie qu'il faut fournir à la cellule pour parvenir à sa ruine. Pour le composite SiC/SiC étudié, ces deux caractéristiques sont optimales lorsque la décohésion interfaciale précède très légèrement la rupture de la fibre. Pour résumer, le composite doit céder aux interfaces en même temps que ces renforts se rompent. Cette situation est réalisée lorsque la contrainte critique interfaciale vaut environ 1/4 de la contrainte critique de la fibre ($\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \simeq 0.25$).

La FIG. VI.7 montre l'évolution du rapport de l'énergie E^F sur l'énergie à fournir pour rompre la cellule possédant les propriétés interfaciales identifiées sur l'essai de micro-indentation (E_{initial}^F) en fonction du rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f$. L'évolution du rapport de la déformation critique ε^R sur $\varepsilon_{\text{initial}}^R$ est aussi indiquée. Le rapport initial $\bar{\sigma}_{\text{initial}}^i/\bar{\sigma}^f$ est voisin de 0.42. La situation optimale peut


 FIG. VI.7 – Evolution des rapports $E^F/E_{initial}^F$ et $\varepsilon^R/\varepsilon_{initial}^R$ en fonction du rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f$.

donc être obtenue en divisant par environ $3/2$ la contrainte critique interfaciale. S'il est possible de modifier l'énergie de décohésion de l'*interphase* (par adjonctions de constituants par exemple) sans modifier ses propriétés élastiques ni son épaisseur, le rapport identifié des énergies de décohésion ($w_{initial}^i/w^f \simeq 0.45$) doit être divisé par 3 environ pour obtenir le rapport optimal $w_{optimal}^i/w^f \simeq 0.15$. Un autre moyen d'aboutir à la situation optimale est de conserver les mêmes propriétés de l'*interphase* mais de modifier son épaisseur. L'équation (V.7) montre en effet que la raideur interfaciale C^i est à peu près inversement proportionnelle à cette épaisseur e . En conservant $w^i = w_{initial}^i$, le rapport $\bar{\sigma}_{optimal}^i/\bar{\sigma}^f$ est atteint en prenant : $e_{optimal}/e_{initial} \simeq 2.5$. Ce qui conduit à : $e_{optimal} \simeq 350 \text{ nm}$.

Un aspect surprenant de ces résultats est que les paramètres interfaciaux identifiés sur l'expérience de micro-indentation conduisent à une absence de déviation de la fissure à l'interface fibre/matrice. Des observations révèlent cependant que l'on peut observer des fissures matricielles pontées par des fibres dans le composite industriel. Plusieurs explications peuvent être données pour expliquer cette différence :

1. Il est possible que l'énergie à rupture retenue pour la fibre soit trop faible. Sans exclure cette hypothèse, nous y accordons cependant peu de crédit puisqu'elle majore la majorité des valeurs proposées dans la littérature.
2. L'interface dans le composite réel révèle certaines macro-porosités. Leur rôle est peut-être moins déterminant lors d'une identification des paramètres interfaciaux sur un essai de micro-indentation (pression radiale à l'interface par effet Poisson sur la fibre) que lors de

la fissuration. Une porosité interfaciale au droit d'une fissure matricielle engendre déjà une déviation instantanée de la fissure à l'interface.

3. La prise en compte des contraintes résiduelles thermo-mécaniques dans la simulation de la fissuration du composite peut conduire à un état effectif de déviation de la fissure pour les paramètres interfaciaux identifiés. Comme nous l'avons vu sur la simulation de l'expérience de micro-indentation, leur rôle est essentiel. Elles ne peuvent être négligées. Leur prise en compte serait un prolongement naturel de ce travail.
4. Un autre hypothèse est que les fibres qui pontent la fissure soient en réalité (pré-)rompues à une certaine distance de la fissure (*voir* FIG. VI.1) et que cette distance soit trop faible pour autoriser un rechargement suffisant des fibres au niveau de la fissure. Cette situation n'est pas modélisée dans ce travail.

VI.3.2.b Discussion des résultats

Le rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \simeq 1/4$ permet de maximiser la dissipation interfaciale tout en conservant une valeur de la déformation à rupture proche de sa valeur optimale. Lorsque $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \gg 1/4$, la fissure matricielle poursuit sa trajectoire rectiligne, pénètre la fibre et la rompt. Lorsque $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \ll 1/4$, la fissure matricielle est déviée à l'interface fibre/matrice de manière symétrique. La décohésion se propage alors le long de l'interface d'autant plus facilement que le rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f$ est faible. Lorsque ce rapport croît et s'approche de la valeur $1/4$, la fissure est toujours déviée à l'interface, mais la dissipation interfaciale par unité d'interface endommagée w^i augmente (à $\bar{\sigma}^f$ fixé, le rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f$ évolue comme la racine carrée de w^i : $\bar{\sigma}^i = \sqrt{C_1^i w^i}$). La dissipation interfaciale vaut alors $w^i \times S^e$, où S^e est la surface endommagée à l'interface. Plus la résistance interfaciale est élevée, plus cette surface endommagée est faible : la surface $S^e(w^i)$ est une fonction décroissante de w^i . La FIG. VI.7 révèle que la dissipation $w^i \times S^e(w^i)$ augmente progressivement avec w^i jusqu'à ce que le rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f$ vaille $1/4$. Au-delà de cette valeur la surface endommagée S^e diminue plus rapidement que $1/w^i$ et la dissipation interfaciale chute rapidement. Lorsque $S^e(w^i)$ devient nulle, la fissure n'est plus déviée à l'interface et la fibre est rompue (situation de la FIG. VI.5). Par conséquent, cette valeur optimale de $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f = 1/4$ n'est pas une condition, au sens strict, de la transition entre la déviation à l'interface et la pénétration dans la fibre. Cette transition s'étend en réalité sur la plage de valeurs $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \in [0.25, 0.32]^{(2)}$. Afin de discuter nos résultats au regard de résultats antérieurs, nous retenons comme indicateur de la transition déviation/pénétration la chute brutale de la déformation à rupture. Cette dernière est obtenue pour un rapport $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \simeq 0.27$. Cette valeur correspond à un rapport des énergies de décohésion d'environ $w^i/w^f \simeq 0.17$.

⁽²⁾On note notamment que le contournement de la fibre par la fissure matricielle nécessite une décohésion interfaciale. Dans le cas contraire, elle est piégée (*voir* paragraphe VI.3.2.c). Cela ne signifie pas pour autant que la fissure poursuit sa trajectoire le long de l'interface. Cette *transition* déviation/piégeage n'existe pas en 2D : soit la fissure est déviée, soit elle pénètre la fibre.

Le résultat que nous venons de présenter est original. Il est donc difficile de le comparer à d'autres résultats issus de la littérature. Les travaux tridimensionnels les plus proches des nôtres sont ceux de XU et al. [1998]. Cependant, pour la compétition déviation/pénétration, ces derniers se réfèrent aux résultats antérieurs de HE et al. [1994] concernant une analyse 2D (fissure plane en interaction avec une interface séparant deux matériaux élastiques en présence de contraintes résiduelles thermo-mécaniques). Cette analyse 2D est menée par une approche du type mécanique de la rupture. Elle conduit à une condition portant sur le rapport des taux critiques de restitution de l'énergie : $G_c^i/G_c^f < 0.25$. En-deçà de cette valeur la fissure est déviée à l'interface, au-delà elle pénètre le second solide.

Toujours en 2D, HE et HUTCHINSON [1989] ont montré qu'en l'absence de contraintes résiduelles thermo-mécaniques, cette condition était légèrement modifiée : $G_c^i/G_c^f < 0.2$. Les travaux de SIEGMUND et al. [1997] confirment que la transition déviation/pénétration est obtenue pour un rapport G_c^i/G_c^f compris entre 0.15 et 0.25. Cette dernière étude s'appuie, de la même manière que nous, sur des modèles dynamiques de fissuration par zones cohésives. Il s'agit cependant d'une étude bidimensionnelle (fissure plane) de l'interaction d'une fissure avec l'interface séparant un matériau élastique et un matériau visco-élastique.

Enfin, sur le plan des matériaux étudiés, les résultats que nous obtenons sont à rapprocher de ceux de MARTIN et al. [1998]. Ces auteurs proposent notamment une étude axisymétrique (fissure matricielle annulaire) de la cellule composite SiC/C/SiC par une approche mécanique de la rupture incrémentale, en présence de contraintes résiduelles. Les données matériaux retenues par ces auteurs sont proches des nôtres (l'interphase de carbone est considérée isotrope) :

$$(VI.25) \quad \begin{cases} E^f = 200 \text{ GPa}, & \nu^f = 0.12, & G_c^f = 15 \text{ J/m}^2, \\ E^m = 400 \text{ GPa}, & \nu^m = 0.2, & G_c^m = 5 \text{ J/m}^2, \\ E^i = 30 \text{ GPa}, & \nu^i = 0.25. \end{cases}$$

La condition de déviation de la fissure matricielle à l'interface obtenue par MARTIN et al. [1998] dépend de l'épaisseur de l'interphase de carbone. Pour une épaisseur de $1 \mu m$, cette condition est $G_c^i/G_c^f < 0.013$ et pour une épaisseur de $0.5 \mu m$, $G_c^i/G_c^f < 0.02$. Des observations expérimentales confirment qu'une diminution de la taille de l'interphase rend la déviation interfaciale plus difficile. L'épaisseur que nous avons retenue pour l'identification de la raideur interfaciale est de $0.15 \mu m$ (voir chapitre V). Avec cette épaisseur, le rapport critique w^i/w^f que nous obtenons ($\simeq 0.17$) semble néanmoins supérieur à celui proposé par ces auteurs.

VI.3.2.c Le piégeage des fissures matricielles

Lorsque la tenue interfaciale est suffisante ($\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f > 0.27$), la fissure matricielle peut être piégée par la rangée de fibres. Sa propagation n'évolue alors presque plus tant que la fibre ne rompt pas. Dans ces conditions, une augmentation de la tenue de la fibre permet d'augmenter de

manière significative la résistance du composite en terme de contrainte à rupture.

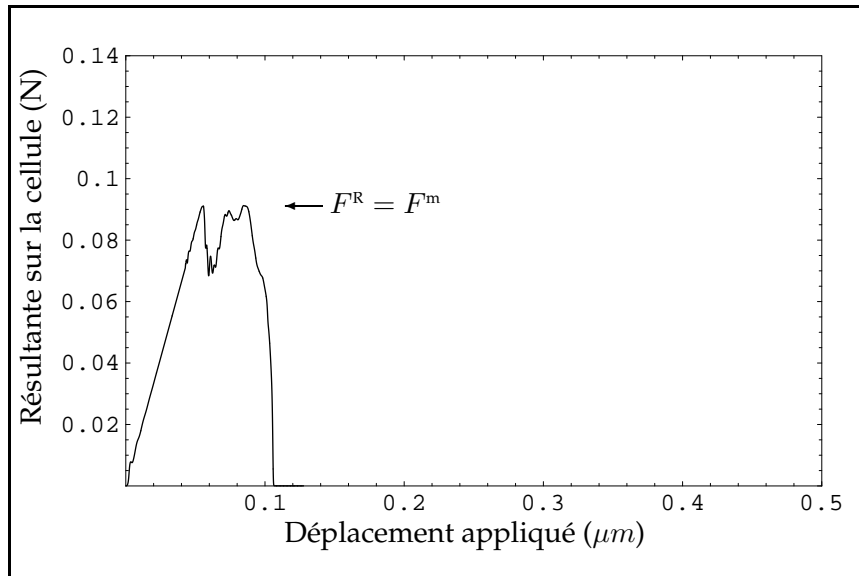


FIG. VI.8 – Résultante sur la cellule en fonction du déplacement appliqué : $w^f/w^m = 5$ et $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f > 0.27$.

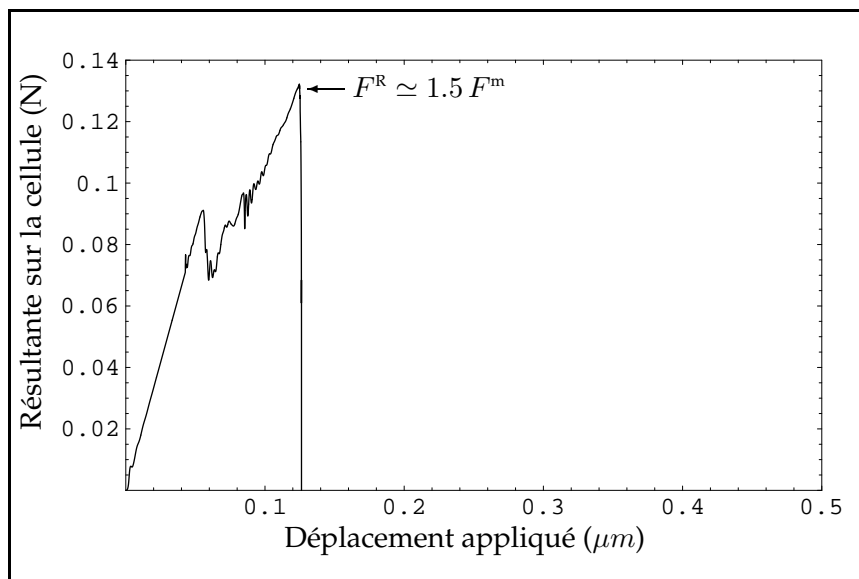


FIG. VI.9 – Résultante sur la cellule en fonction du déplacement appliqué : $w^f/w^m = 15$ et $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f > 0.27$.

Pour les résultats du paragraphe précédent, la force maximale F^R que pouvait supporter la cellule composite était celle correspondant à l'amorçage de la fissuration matricielle, notée F^m . Ainsi nous avons $F^R/F^m = 1$. La situation où ce rapport F^R/F^m est atteint à la rupture de la fibre plutôt qu'à celle de la matrice est indiquée sur la FIG. VI.8. Après une première fissuration de la matrice, la fissure est piégée par les fibres. La raideur de rechargement est alors comprise

entre celle de la cellule composite vierge et celle de la cellule composite lorsque la matrice est totalement fissurée. Lorsque la tenue de la fibre augmente encore (FIG. VI.9), le rapport F^R/F^m continue de croître par piégeage de la fissure matricielle. Les résultats de la FIG. VI.10 montrent que ce rapport peut être augmenté lorsque le rapport w^f/w^m croît. Ces résultats ne sont valides que si l'on s'assure à chaque simulation que la condition de piégeage de la fissure est respectée (non déviation de la fissure à l'interface si $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f > 0.27$).

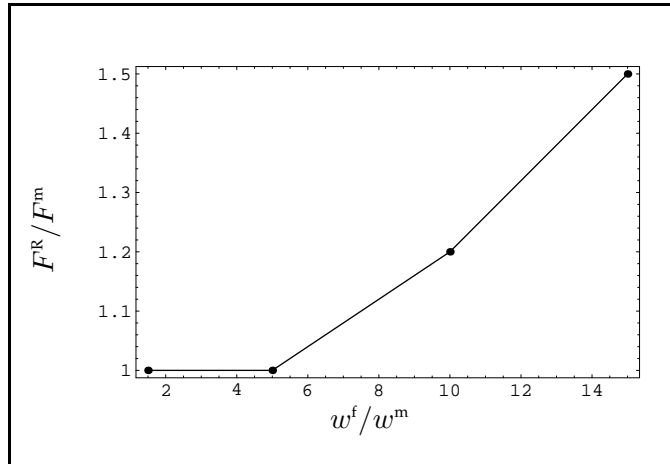


FIG. VI.10 – Augmentation de la contrainte à rupture de la cellule composite par piégeage de la fissure matricielle : évolution du rapport F^R/F^m en fonction du rapport w^f/w^m .

Nos résultats indiquent que l'augmentation du rapport F^R/F^m au-delà de 1 par piégeage de la fissure peut être obtenue dès lors que l'on vérifie : $w^f/w^m \geq 5$. Les travaux de XU et al. [1998] sur ce thème (ainsi que ceux de BOWER et ORTIZ [1993] pour le cas particulier d'une interface parfaite), ne permettent pas de confirmer ou d'infirmer cette valeur en raison de la nature différente des critères mis en œuvre. XU et al. [1998] estiment en effet l'amélioration de la tenue du composite par piégeage de la fissure grâce à la ténacité effective de la cellule lorsque le front de fissure réalise un angle de 90° sur la fibre par rapport au point d'impact initial de la fissure avec la fibre. Nos résultats sont cependant cohérents avec ceux obtenus par ces auteurs dans le cas $R/(2D) = 1/4$.

VI.4 Conclusion du chapitre

L'interaction d'une fissure avec une rangée de fibres a été étudiée dans un cas tridimensionnel. Le problème considéré concerne une fissure matricielle initialement perpendiculaire aux fibres, dans un composite à matrice céramique. Les simulations effectuées permettent de mettre en évidence les conditions qui conduisent soit à la rupture des fibres

par la fissure, soit à la déviation de la fissure à l'interface fibre/matrice. Plusieurs résultats ont été obtenus pour le composite SiC/SiC :

- (a) Les fissures matricielles sont déviées à l'interface fibre/matrice lorsque la condition suivante est satisfaite : $w^i/w^f \leq 0.17$. Cette condition confirme les résultats antérieurs de la littérature pour des cas bidimensionnels (fissures planes ou axisymétriques).
 - (b) L'énergie nécessaire pour rompre la cellule composite SiC/SiC peut être maximisée lorsque la contrainte interfaciale maximale vérifie : $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \simeq 1/4$. Dans ce cas, la déformation à rupture de la cellule est aussi proche de sa valeur maximale. Ces conditions optimales peuvent être obtenues en se ramenant soit à une *interphase* possédant une énergie de décohésion environ 3 fois moindre ($\simeq 3 J/m^2$) que celle identifiée sur le composite réel sur un essai de micro-indentation (chapitre V), soit en multipliant par environ 2.5 fois l'épaisseur de l'interphase ($e_{\text{optimal}} \simeq 350 \text{ nm}$).
 - (c) Il est possible d'augmenter la contrainte à rupture de la cellule composite. Cette augmentation correspond à une situation de piégeage de la fissure matricielle par la rangée de fibre. Ce piégeage ne peut être obtenu qu'en l'absence de déviation de la fissure à l'interface ($w^i/w^f > 0.17$) et lorsque la tenue de la fibre est suffisante ($w^f/w^m \geq 5$).
-

Conclusion et perspectives

Nous avons abordé dans ce travail l'analyse du rôle de l'interface fibre/matrice sur l'amélioration de la résistance à la fissuration des matériaux composites à matrice céramique (SiC/SiC).

Les modèles de fissuration retenus pour mener cette étude sont les modèles de zone cohésive et en particulier le modèle adhésif/frottant de Raous, Cangémi et Cocu. Ce modèle est utilisé pour simuler la fissuration des interfaces entre constituants et une version "rupture fragile" a été proposée pour simuler celle de la matrice et des fibres.

La mise en œuvre de ces modèles a nécessité l'analyse des sauts de solution auxquels ils peuvent être confrontés. La régularisation de ces sauts a été envisagée soit par une prise en compte d'une viscosité de l'endommagement interfacial, soit par une formulation dynamique. L'existence physique d'une viscosité interfaciale pour ces matériaux reste une question ouverte malgré les efforts produits pour la mettre en évidence. La formulation dynamique a donc été préférée.

Notre démarche générale a consisté à identifier les propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice d'un composite SiC/SiC industriel sur une expérience de micro-indentation, puis à utiliser ces propriétés pour analyser l'interaction d'une fissure matricielle et d'une interface. Une prospection numérique autour des valeurs identifiées nous a permis de donner des recommandations aux élaborateurs. Ces recommandations portent sur l'amélioration de la ductilité, de la déformation et de la contrainte à rupture du matériau. L'interaction fissure/interface est un problème fortement tridimensionnel (éventuel contournement des fibres par la fissure). Cet aspect, peu abordé dans la littérature, nous a semblé essentiel à une étude détaillée du rôle de l'interface sur la résistance à la fissuration des composites unidirectionnels. Un outil numérique de fissuration 3D dynamique par zones cohésives en présence de contact frottant a donc été développé.

Les principaux résultats présentés concernent :

1. L'identification des propriétés interfaciales : la modélisation fine de l'essai de micro-indentation proposée conduit à une énergie de décohésion interfaciale voisine de $10 J/m^2$.
2. La résistance à la fissuration :
 - (a) Nous avons obtenu la condition de déviation d'une fissure matricielle à l'interface

fibre/matrice suivante : $w^i/w^f \leq 0.17$ (w^i est l'énergie de décohésion interfaciale et w^f est l'énergie à rupture de la fibre). Cette condition est cohérente avec celles évoquées par des travaux 2D ([HE et HUTCHINSON, 1989] : $G_c^i/G_c^f < 0.2$; [SIEGMUND et al., 1997] : $0.15 \leq G_c^i/G_c^f \leq 0.25$).

- (b) La déformation à rupture et la ductilité du composite peuvent être optimisées par un choix d'interface réalisant la condition : $\bar{\sigma}^i/\bar{\sigma}^f \simeq 0.25$. Pour obtenir cette valeur, soit l'énergie de décohésion interfaciale identifiée doit être diminuée d'environ 60 %, soit l'épaisseur de l'interphase doit être augmentée d'environ 150 %.
- (c) L'amélioration de la contrainte à rupture peut être obtenue lorsque des conditions de piégeage de la fissure matricielle par une rangée de fibres sont réalisées. Pour ce faire, la déviation de la fissure à l'interface doit être évitée ($w^i/w^f > 0.17$) et l'énergie à rupture de la fibre doit être augmentée jusqu'à satisfaire : $w^f/w^m \geq 5$ (où w^m est l'énergie à rupture de la matrice).

Certains prolongements de ce travail doivent être envisagés pour les composites céramique/céramique. Sur le plan expérimental, un prolongement immédiat concerne la question de l'existence d'une viscosité interfaciale. Pour conclure, une campagne d'essais à différentes vitesses est nécessaire. Sur le plan de la fissuration 3D, les résultats évoqués sont à confirmer par la prise en compte des contraintes résiduelles thermiques. A moyen terme, une perspective intéressante à cette étude est l'analyse des effets du frottement et de la fraction volumique de fibres sur les résultats présentés. A plus long terme, des études aux échelles méso- et macroscopiques doivent permettre de tirer pleinement partie de ce travail. La fissuration des composites sous impact peut notamment être envisagée (dynamique rapide).

Enfin, les outils développés permettent d'envisager un thème de recherche plus général concernant les matériaux multiphasés : la fissuration dynamique en présence de microstructures complexes. D'une part, certains effets de la microstructure doivent être éclaircis : influence des défauts sur la résistance à la fissuration, effets d'échelle liés à la microstructure dans les matériaux multiphasés. D'autre part, la rupture dynamique propose un certain nombre de problèmes ouverts : effets de la vitesse de chargement et de la cohésion sur l'amorçage dynamique et sur la propagation subsonique des fissures dans les structures cohésives, définition de critères dynamiques de branchement et d'arrêt des fissures dans un matériau homogène et aux interfaces, effets de ce branchement sur la résistance à la rupture, réalisation de modèles micromécaniques de rupture dynamique et analyse des micromécanismes locaux associés (création et croissance de vides en présence d'inertie, sensibilité à la vitesse de sollicitation locale). La géomécanique offre notamment des perspectives de recherche intéressantes sur ces thèmes : instabilités dynamiques liées au frottement des lèvres d'une faille profonde en milieu confiné, fissurations des roches compactées, émission et la propagation des ondes élastiques résultant de ces phénomènes dans des milieux à fort gradient de propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

- ACARY V. [en préparation]. *Contribution à l'étude mécanique des édifices maçonnés*. Thèse, Université de la Méditerranée.
- ALART P. et CURNIER A. [1988]. A generalized newton method for contact problems with friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7 :67–82.
- ALLIX O., DAUDEVILLE L. et LADEVÈZE P. [1989]. Delamination and damage mechanics. In BAPTISTE D., éditeur, *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-materials*, page 143, Saint-Etienne. MECAMAT.
- ALLIX O., LADEVÈZE P. et CORIGLIANO A. [1995]. Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1) :61–74.
- AMESTOY M., BUI H.D. et DANG VAN K. [1979]. Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 289B :99–102.
- AMESTOY M. et LEBLOND J.B. [1979]. Sur le critère donnant la direction de propagation des fissures dans la théorie de Griffith. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 301(Série II) :969–972.
- ATKINSON C. et ESHELBY J.D. [1968]. The flow energy into the tip of a moving crack. *Int. J. Fract.*, 4 :3–8.
- BALL J.M. [1977]. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 63 :337–403.
- BARENBLATT G.I. [1962]. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7 :55–129.
- BECHER P.F., HSUEH C.-H., ANGELINI P. et TIEGS T.N. [1988]. Toughening behavior in whisker-reinforced ceramic matrix composites. *J. Am. Ceram. Soc.*, 71(12) :1050.
- BILTERYST F. [2000]. *Une approche énergétique des phénomènes de décohésion et de multifissuration dans les composites*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie.
- BILTERYST F. et MARIGO J.-J. [1999]. Amorçage de la décohésion dans l'essai d'arrachement. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327(Série II b) :977–983.
- BOURDIN B. [1998]. *Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture, théorie et applications numériques*. Thèse, Université Paris-Nord.
- BOURDIN B., FRANCFORT G.A. et MARIGO J.-J. [2000]. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(4) :787–826.
- BOWER A.F. et ORTIZ M. [1993]. The influence of grain size on the toughness of monolithic ceramics. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 115 :228–236.
- BRETELLE A.-S. [1999]. *Formulation et résolution des problèmes de contact avec frottement et adhérence en grandes déformations*. Thèse, Université Aix-Marseille II.

BIBLIOGRAPHIE

- BRETELLE A.-S., COCU M. et MONERIE Y. [2000]. Formulation du contact avec adhérence en élasticité non linéaire entre deux solides déformables. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(Série II b) :1–6.
- BRETELLE A.-S., COCU M. et MONERIE Y. [soumis pour publication]. Unilateral contact with adhesion and friction between two hyperelastic bodies.
- BRETHEAU T. [1997]. Micromécanique expérimentale des interfaces fibre/matrice. In *Journée Thématique DRET "Matériaux Composites Structuraux"*, Paris.
- BUDIANSKY B. et AMAZIGO J.C. [1989]. Toughening by aligned, frictionally constrained fibers. *J. Mech. Phys. Solids*, 37(1) :83.
- BUDIANSKY B., AMAZIGO J.C. et EVANS A.G. [1988]. Small-scale crack bridging and the fracture toughness of particulate-reinforced ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*, 36(2) :167.
- CANGÉMI L. [1997]. *Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*. Thèse, Université de la Méditerranée.
- CANGÉMI L., COCU M. et RAOUS M. [1996]. Adhesion and friction model for the fibre/matrix interface of a composite. In *Third biennial Joint Conference on engineering system design and analysis*, pages 157–163, Montpellier. ASME.
- CHABOCHE J.-L., FEYEL F. et MONERIE Y. [à paraître]. Interface debonding model : a viscous regularization with a limited rate dependency. *Int. J. Solids Structures*.
- CHABOCHE J.-L., GIRARD R. et LEVASSEUR P. [1997a]. On the interface debonding models. *Int. J. Damage Mechanics*, 6 :220–257.
- CHABOCHE J.-L., GIRARD R. et SCHAFF A. [1997b]. Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20 :3–11.
- CHERTIER O. [1997]. *Contact et frottement en grandes déformations entre plusieurs solides déformables, cinématique des grandes déformations, comportement élastoplastique, loi de frottement à coefficient variable*. Thèse, Université de la Méditerranée.
- COCU M. [1984]. Existence of solutions of Signorini problems with friction. *Int. J. Eng. Sci.*, 22 :567–575.
- COCU M., CANGÉMI L. et RAOUS M. [1997]. Approximation results for a class of quasistatic contact problem including adhesion and friction. In *Variation of domains and free-boundary problems in solids mechanics*, Paris. IUTAM'97, Kluwer.
- COCU M., PRATT E. et RAOUS M. [1996]. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact. *Int. J. Eng. Sci.*, 34(7) :783–798.
- COMNINOU M. [1977a]. The interface crack. *Journal of Applied Mechanics*, 44 :631–636.
- COMNINOU M. [1977b]. Interface crack with friction in the contact zone. *Journal of Applied Mechanics*, 44 :780–781.
- COSTANZO F. et WALTON J.R. [1997]. A study of dynamic crack growth in elastic materials using a cohesive zone model. *Int. J. Engng Sci.*, 35(12-13) :1085–1114.
- CURNIER A., HE Q.C. et TÉLÉGA J.J. [1992]. Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II(314)* :1–6.
- DAHER N. et MAUGIN G.A. [1986]. The method of virtual power of continuum mechanics. application to media presenting singular surfaces and interfaces. *Acta Mechanica*, 60 :217–240.
- DUBOIS F. [1994]. *Contact, frottement, grandes déformations. Application à l'emboutissage*. Thèse, Université de la Méditerranée.

-
- DUGDALE D.S. [1960]. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8 :100–104.
- DUNDURS J. [1969]. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedge. *Journal of Applied Mechanics*, 36 :650–652.
- DUVAUT G. [1980]. Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 290(Série A) :263–265.
- ENGLAND A.H. [1965]. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :400–402.
- ERDOGAN F. [1965]. Stresses distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :403–410.
- ESHELBY J.D. [1956]. The continuum theory of lattice defects. In SEITZ F. et TURNBULL D., éditeurs, *Progress in solid state physics*, volume 2, pages 79–144. Academic, New York.
- EVANS A.G. [1989]. The mechanical performance of fiber-reinforced ceramic matrix composites. *materials Science and Engineering*, A107 :227–239.
- EVANS A.G., DOMERGUE J.-M. et VAGAGGINI E. [1994]. Methodology for relating the tensile constitutive behavior of ceramic-matrix composites to constituent properties. *J. Am. Ceram. Soc.*, 77(6) :1425–1435.
- FOULK J.W., ALLEN D.H. et HELMS K.L.E. [2000]. Formulation of a three-dimensional cohesive zone model for application to a finite element algorithm. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183 :51–66.
- FRANCFORT G.A. et MARIGO J.-J. [1998]. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8) :1319–1342.
- FREUND L.B. [1989]. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press.
- FRÉMOND M. [1982a]. Adhésion et contact unilatéral. In *Contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, pages 63–77, Vancouver British Columbia. University of Waterloo Press.
- FRÉMOND M. [1982b]. Equilibre des structures qui adhèrent à leur support. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 295(Série II) :913–916.
- FRÉMOND M. [1985]. Contact unilatéral avec adhérence, une théorie du premier gradient. In DEL PIERO G. et MACERI F., éditeurs, *Unilateral Problems in Structural Analysis*, volume 304 of *CISM - Courses and Lectures*, pages 117–137, Prescudin. Proceedings of the 2nd meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis.
- FRÉMOND M. [1987]. Adhérence des solides. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(3) :383–407.
- FRÉMOND M. [1988]. Contact with adhesion. In MOREAU J.-J. et PANAGIOTOPOULOS P.D., éditeurs, *Nonsmooth mechanics and applications*, volume 302 of *CISM - Courses and Lectures*, pages 177–221. Springer.
- GERMAIN P., NGUYEN Q.S. et SUQUET P. [1983]. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 3 :1010–1020.
- GOLSTEIN R.V. et SALGANIK R.L. [1974]. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *Int. J. Fract.*, 10 :507–523.
- GRIFFITH A.A. [1920]. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society (London)*, A221 :163–198.
- GUICHET B. [1998]. *Identification de la loi de comportement interfacial d'un composite SiC/Ti*. Thèse, Ecole Centrale Lyon.
-

BIBLIOGRAPHIE

- GUICHET B., SANGLEBŒUF J.-C., VASSEL A. et BRETHEAU T. [1998]. A study of the micromechanical push-out test : response of an SCS-6/Ti-62422 composite. *Composites Science and Technology*, 58 :665–670.
- GUPTA V., ARGON A.S. et SUO Z. [1992]. Crack deflection at an interface between two orthotropic media. *J. Appl. Mech.*, 59 :79–87.
- GURSON A.L. [1975]. *Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction*. Thèse, Brown University.
- GURSON A.L. [1977]. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng Mater. Technol.*, 99 :2–15.
- GURTIN M.E. et PODIO-GUIDUGLI P. [1998]. Configurational forces and constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8) :1343–1378.
- HASHIN Z. [1983]. Analysis of composites materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :481–505.
- HASHIN Z. [1996]. Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(7) :1129–1145.
- HE M.Y., EVANS A.G. et HUTCHINSON J.W. [1994]. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials : role of residual stresses. *Int. J. Solids Structures*, 31 :3443–3455.
- HE M.Y. et HUTCHINSON J.W. [1989]. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *Int. J. Solids Structures*, 25 :1053–1067.
- HE Q.C., TÉLÉGA J.J. et CURNIER A. [1996]. Unilateral contact of two solids subject to large deformations : formulation and existence results. *Proceedings of the Royal Society (London)*, A452 :2691–2727.
- HILL R. [1972]. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10 :1–16.
- HILL R. et HUTCHINSON J.W. [1975]. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23 :239–264.
- HUTCHINSON J.W. [1968]. Plastic stresses and strain fields at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 16 :337–347.
- HUTCHINSON J.W. et JENSEN H.M [1990]. Models of fiber debonding pullout in brittle composites with friction. *Mechanics of Materials*, 9 :139.
- HUTCHINSON J.W., MEAR M.E. et RICE J.R. [1987]. Crack paralleling an interface between dissimilar materials. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :828–832.
- HUTCHINSON J.W. et TVERGAARD V. [1980]. Surface instabilities on statically strained plastic solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 22 :339–354.
- IDA Y. [1972]. Cohesive force across the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy. *Journal of Geophysical Research*, 77 :3796–3805.
- IRWIN G.R. [1957]. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 79 :361–364.
- IRWIN G.R. [1958]. Fracture. In *Handbuch der Physik*, volume 6. Springer, Berlin.
- IRWIN G.R. [1960]. Fracture mechanics. In GOODIER J.N. et HOFF N.J., éditeurs, *Structural mechanics*, pages 557–591. Pergamon, Elmsford.
- JEAN M. [1995]. Frictional contact in rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. pages 463–486, Amsterdam. Elsevier Science Publisher.

-
- JEAN M. [1999]. The non smooth contact dynamics method. In MARTINS J.A.C. et KLARBRING A., éditeurs, *Computer Meth. Appl. Mech. and Engrg., Special Issues on Computational Modeling on Contact and Friction*, volume 177, pages 235–257.
- JERO P.D., KERANS R.J. et PARTHASARATHY T.A. [1991]. Effect of interfacial roughness on the frictional stress measured using pushout test. *J. Am. Ceram. Soc.*, 74(11) :2793–2801.
- KACHANOV L.M. [1986]. *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- KAGAWA Y. et GOTO K. [1998]. Direct observation and modelling of the crack-fibre interaction process in continuous fibre-reinforced ceramics : model experiments. *Materials Science and Engineering*, A250 :285–290.
- KIKUCHI N. et ODEN J.T. [1988]. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, Philadelphia.
- KLARBRING A. [1995]. Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15 :237–253.
- LADEVÈZE P. [1995]. A damage computational approach for composites : basic aspects and micromechanical relations. *Computational Mechanics*, 17 :142–150.
- LARA-CURZIO E. et FEBER M.K. [1996]. Determination of interfacial properties and stresses in continuous fibre reinforced ceramic composites by means of single-fibre indentation tests. In BULL J.W., éditeur, *Numerical Analysis and Modelling of Composite Materials*. Chapman and Hall.
- LARSON M.C. [1994]. Experiments of crack-fiber interactions in composites with frictional interfaces. In VOYIADJIS G.Z. et JU J.W., éditeurs, *Inelasticity and micromechanics of metal matrix Composites*, pages 191–212. Elsevier.
- LEBLOND J.-B. [1998]. Conférence invitée : rupture fragile et rupture ductile. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326(Série II b) :243–250.
- LEBLOND J.-B. et AMESTOY M. [1985]. Sur l’universalité de la relation liant les facteurs d’intensité de contrainte d’une fissure juste avant et juste après un changement de direction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 300(Série II) :643–646.
- LEBLOND J.-B., PERRIN G. et DEVAUX J. [1994]. Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization. *Journal of Applied Mechanics*, 61 :236–242.
- LEBON F. et RAOUS M. [1992]. Multibody contact problem including friction in structure assembly. *Computer and Structures*, 9(1) :925–934.
- LEGUILLON D. [1989]. Calcul du taux de restitution de l’énergie au voisinage d’une singularité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309(Série II b) :155–160.
- LEGUILLON D. [1993]. Asymptotic and numerical analysis of crack branching in non-isotropic materials. *Eur. J. Mech.*, 12(A/Solids) :33–51.
- LEGUILLON D. [1999]. Interface crack tip singularity with contact and friction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327(Série II b) :437–442.
- LEGUILLON D., LACROIX C. et MARTIN E. [2000]. Interface debonding ahead of a primary crack. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :à paraître.
- LEGUILLON D., MARION G., HARRY R. et LÉCUYER F. [1998]. Amorçage du délaminage entre bords libres des stratifiés croisés. Etude de deux critères. In LAMON J. ET BAPTISTE D., éditeur, *Comptes Rendus des Onzièmes Journées Nationales sur les Composites*, volume II, pages 1379–1388, Arcachon. AMAC.
-

BIBLIOGRAPHIE

- LEMAÎTRE J. et CHABOCHE J.-L. [1978]. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée*, 2 :317–365.
- LEMAÎTRE J. et CHABOCHE J.-L. [1985]. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- LEROY F.-H. [1998]. *Rupture des composites unidirectionnels à fibres de carbone et matrice therm durcissable : approche micro-macro*. Thèse, Université Bordeaux 1.
- LEROY F.-H. [2000]. Communication personnelle.
- LEROY F.-H., CHABOCHE J.-L., LEVASSEUR P., LÉVÊQUE D. et KRUCH S. [1999]. Mécanique multi-échelle des matériaux composites. Rapport technique, Rapport Technique ONERA n° RT 1/7310 DMSC/N.
- LEROY F.-H. et RAOUS M. [1997]. Micromécanique des interfaces dans les CMC. Rapport technique, DRET n° 96/2525A.
- LI D.S. et WISNOM M.R. [1996]. Micromechanical modelling of SCS-6 fibre reinforced Ti-6Al-4V under transverse tension - effect of fibre coating. *Journal of Composites Materials*, 30(5) :561–588.
- LIPOWITZ J., FREEMAN H.A., CHEN R.T. et PRACK E.R. [1987]. Composition and structure of ceramic fibers prepared from polymer precursors. *Advanced Ceramic Materials*, 2 :121–126.
- LOB N. [1989]. *Relation entre microstructure et comportement mécanique des composites SiC/SiC : études de la nature et du rôle de l'interface fibre-matrice dans des matériaux mono- et multifilamentaires*. Thèse, Université Paris-Sud.
- MALYSHEV B.M. et SALGANIK R.L. [1965]. The strength of adhesive joints using the theory of crack. *Inter. J. Frac. Mech.*, 1 :114–128.
- MARSHALL D.B., SHAW M.C. et MORRIS W.L. [1992]. Measurement of interfacial debonding and sliding resistance in fiber reinforced intermetallics. *Acta Metall. Mater.*, 40(3) :443–454.
- MARTIN E. [1996]. Interaction fissure interface dans les matériaux fragiles. Application à l'étude du comportement à la rupture de matériaux composites à matrice non organique. Habilitation à diriger les recherches, Université de Bordeaux I.
- MARTIN E., PETERS P.W.M., LEGUILLON D. et QUENISSET J.M. [1998]. Conditions for matrix crack deflection at an interface in ceramic matrix composites. *Materials Science and Engineering*, A250 :291–302.
- MATHUR K.K., NEEDLEMAN A. et TVERGAARD V. [1996]. Three dimensional analysis of dynamic ductile crack growth in a thin plate. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(3) :439–464.
- MICHEL J.-C. et SUQUET P. [1994]. An analytical and numerical study of the overall behaviour of metal-matrix composites. *Modelling Simul. Mater. Sci.*, 2 :637–658.
- MICHEL J.-C., SUQUET P. et THÉBAUD F. [1992]. Une étude théorique et numérique de la décohésion d'interface dans les composites à matrice métallique et renfort particulaire. In ALLIX O., FAVRE J.-P. et LADEVEZE P., éditeurs, *Comptes Rendus des Huitième Journées Nationales sur les Composites*, pages 835–846. AMAC.
- MICHEL J.-C., SUQUET P. et THÉBAUD F. [1994]. Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Elements Finis*, 3(4) :573–595.
- MONERIE Y. [1996]. Modèle de comportement de l'interface fibre/matrice d'un matériau composite à matrice - optimisation de la modélisation numérique, identification des paramètres mécaniques. D.E.A., Université Aix-Marseille II.

-
- MONERIE Y., LEROY F.-H., RAOUS M. et PASSILLY B. [en préparation]. Model coupling adhesion and friction for a fibre/matrix interface : identification on a micro-indentation experiment (SiC/SiC).
- MONERIE Y. et RAOUS M. [1997]. Micromécanique des interfaces dans les CMC - Validation d'un modèle adhésif/frottant d'interface. Rapport technique, DRET n° 96/2552A.
- MONERIE Y. et RAOUS M. [2000]. A model coupling adhesion to friction for the interaction between a crack and a fibre/matrix interface. In M. BERVEILLER, A.K. LOUIS et C. FRESSENGEAS, éditeurs, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Special Issues*, volume 80, pages 205–209.
- MONERIE Y., RAOUS M., LEROY F.-H., SUDRE O., FEYEL F. et CHABOCHE J.-L. [1998]. Comparaison de lois d'interface fibre/matrice sur la base d'un modèle uniaxial d'expérience de micro-indentation. In LAMON J. et BAPTISTE D., éditeurs, *Comptes Rendus des Onzièmes Journées Nationales sur les Composites*, volume II, pages 565–574, Arcachon. AMAC.
- MOREAU J.-J. [1974]. On unilateral constraints, friction and plasticity. In CAPRIZ G. et STAMPACCHIA G., éditeurs, *New variational techniques in mathematical physics*, pages 175–322. CIME II ciclo 1973, Edizioni Cremonese.
- MOREAU J.-J. [1988]. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In MOREAU J.-J. et PANAGIOTOPOULOS P.D., éditeurs, *Non Smooth Mechanics and Applications*, volume 302 of *CISM - Courses and Lectures*, pages 1–82. Springer.
- MOREAU J.-J. [1998]. Some basics of unilateral dynamics. In PFEIFFER F., éditeur, *Symposium on Multi-body Dynamics*. IUTAM'98, Kluwer.
- MOWER T.M. et ARGON A.S. [1995]. Experimental investigations of crack trapping in brittle heterogeneous solids. *Mechanics of Materials*, 19 :343–364.
- NAIR S.V. [1990]. Crack-wake debonding and toughness in fiber- or whisker-reinforced brittle heterogeneous solids. *J. Am. Ceram. Soc.*, 73(10) :2839–2847.
- NAKAMURA T., SHIH C.F. et FREUND L.B. [1985]. Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture. *Int. Journal of Fracture*, 27 :229–243.
- NEEDLEMAN A. [1987]. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :525–531.
- NEEDLEMAN A. [1990]. An analysis of tensile decohesion along an interface. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3) :289–324.
- NEEDLEMAN A. [1992]. Micromechanical modeling of interfacial decohesion. *Ultramicroscopy*, 40 :203–214.
- NEEDLEMAN A. et ORTIZ M. [1991]. Effect of boundaries and interfaces on shear-band localization. *Int. J. Solids Structures*, 28(7) :859–877.
- NEEDLEMAN A. et ROSAKIS A.J. [1999]. The effect of bond strength and loading rate on the conditions governing the attainment of intersonic crack growth along interfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 :2411–2450.
- NEEDLEMAN A. et TVERGAARD V. [1998]. Dynamic crack growth in a nonlocal progressively cavitating solid. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17(3) :421–438.
- NGUYEN Q.S. [1987]. Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 35 :303–324.
-

BIBLIOGRAPHIE

- OUSSET Y. [1999]. Numerical simulation of delamination growth in layered composite plate. *Eur. J. of Mech.*, 18(A/Solids) :291–312.
- PALMER A.C. et RICE J.R. [1973]. The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay. *Proceedings of the Royal Society (London)*, A332 :527–548.
- PANDOLFI A., GUDURU P.R., ORTIZ M. et ROSAKIS A.J. [2000]. Three dimensional cohesive-element analysis and experiments of dynamic fracture in c300 steel. *Int J. Solids Structures*, 37 :3733–3760.
- PETERS P.W.M., MARTIN E. et QUENISSET J.M. [1995]. Slip and friction shear stresses in ceramic matrix composites. *J. Comp. Mater.*, 29(5) :550–570.
- RAOUS M., CANGÉMI L. et COCU M. [1997]. Un modèle couplant adhérence et frottement pour le contact unilatéral entre deux solides déformables. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 329(Série II b) :503–509.
- RAOUS M., CANGÉMI L. et COCU M. [1999]. Consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Computer Meth. Appl. Mech. and Engrg.*, 177(3-4) :383–399.
- RAOUS M., CHABRAND P. et LEBON F. [1988]. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7(supplement 1) :111–128.
- RICE J.R. [1968]. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In LIEBOWITZ H., éditeur, *Fracture*, volume 2, pages 191–311. Academic, New York.
- RICE J.R. [1976]. The localization of plastic deformation. In KOITER W.T., éditeur, *Theoretical and Applied Mechanics, IUTAM Congress*, North-Holland, Amsterdam.
- RICE J.R. [1988]. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 55 :98–103.
- RICE J.R. et ROSENGREN G.F. [1968]. Plane strain deformation near a crack tip in a power hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 16 :1–12.
- RICE J.R. et SIH G.C. [1965]. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :418–423.
- RICE J.R. et WANG J.-S. [1989]. Embrittlement of interfaces by solute segregation. In SURESH S. et NEEDLEMAN A., éditeurs, *Interfacial phenomena in composites : processing, characterization and mechanical properties*, volume A107, pages 23–40, Newport.
- ROSE J.H., FERRANTE J. et SMITH J.R. [1981]. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :675–678.
- ROSE J.H., SMITH J.R. et FERRANTE J. [1983]. Universal features of bonding in metals. *Phys. Rev.*, B28 :1835–1845.
- ROSE L.R.F. [1987]. Crack reinforcement by distributed springs. *J. Mech. Phys. Solids*, 35(4) :383.
- SANGLEBOEUF J.-C. [1998]. *Comportement mécanique multiéchelle des composites à matrice céramique unidirectionnels*. Thèse, Ecole polytechnique.
- SIEGMUND T., FLECK N.A. et NEEDLEMAN A. [1997]. Dynamic crack growth across an interface. *International Journal of Fracture*, 85 :381–402.
- SIEGMUND T. et NEEDLEMAN A. [1997]. A numerical study of dynamic crack growth in elastic-viscoplastic solids. *Int. J. Solids Structures*, 34(7) :769–787.
- STONE T.J. et BABUŠKA I. [1998]. Numerical method with a posteriori error estimation for determining the path taken by a propagating crack. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 160 :245–271.

-
- STRÖMBERG N., JOHANSON L. et KLARBRING A. [1996]. Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *Int. J. Solids Structures*, 33(13) :1817–1836.
- SUO Z., ORTIZ M. et NEEDLEMAN A. [1992]. Stability of solids with interfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(3) :613–640.
- SUQUET P. [1987]. Mécanique de la Rupture. *Cours de l'Ecole Polytechnique*.
- TOYA M. [1992]. On mode I and mode II energy release rates of interface crack. *Int. J. Fract.*, 56 :345–352.
- TRUESDELL C. [1974]. *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*. Masson, Paris.
- TRUONG DINH TIEN J.-M. [1990]. *Contact avec adhérence*. Thèse, Université Paris VI.
- TVERGAARD V. [1981]. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17 :389–407.
- TVERGAARD V. [1990a]. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Materials Science and Engineering*, A125 :203–213.
- TVERGAARD V. [1990b]. Micromechanical modelling of fibre debonding in metal reinforced by short fibres. In DVORAK G.J., éditeur, *Inelastic Deformation of Composite Materials*. IUTAM'90, Springer Verlag.
- TVERGAARD V. [1991]. Effect of thermally induced residual stresses on the failure of a whisker-reinforced metal. *Mechanics of Materials*, 11 :149–161.
- TVERGAARD V. et HUTCHINSON J.W. [1992]. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :1377–1397.
- TVERGAARD V. et NEEDLEMAN A. [1984]. Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32 :157–169.
- TVERGAARD V. et NEEDLEMAN A. [1995]. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, 32 :1063–1077.
- TVERGAARD V. et NEEDLEMAN A. [1997]. Nonlocal effects on localization in a void-sheet. *Int. J. Solids Structures*, 34(18) :2221–2238.
- VILLENEUVE F. [1991]. *Thèse no. 661*. Thèse, Université de Borbeaux.
- VOLA D. [1998]. *Frottement et instabilité en dynamique : bruits de crissement*. Thèse, Université de la Méditerranée.
- VOLA D., PRATT E., JEAN M. et RAOUS M. [1998]. Consistent time discretization for dynamical frictional contact problems and complementarity techniques. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7 :149–162.
- WILLIAMS M.L. [1957]. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 79 :109–144.
- WILLIAMS M.L. [1959]. The stresses around a fault or a crack in dissimilar media. *Bull. Seismological Soc. of America*, 49(2) :199–204.
- WILLIS J.R. [1967]. A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt. *J. Mech. Phys. Solids*, 15 :151–162.
- WILLIS J.R. [1975]. Equations of motions for propagating cracks. *The Mechanics and Physics Fracture*, pages 57–67.
- XU G., BOWER A.F. et ORTIZ M. [1998]. The influence of crack trapping on the toughness of fiber reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(10) :1815–1833.
-

BIBLIOGRAPHIE

- XU X.-P. et NEEDLEMAN A. [1994]. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 42(9) :1397–1434.
- XU X.-P., NEEDLEMAN A. et ABRAHAM F.F. [1997]. Effect of inhomogeneities on dynamic crack growth in an elastic solid. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 5 :489–516.

Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice

Résumé : Ce travail concerne le développement de lois de comportement d'interface, couplant ici adhérence, frottement et contact unilatéral, et leurs extensions comme modèles de fissuration 3D pour les matériaux multiphases. L'amélioration de la résistance à la fissuration des matériaux composites est étudiée au travers de ces modèles. Plus précisément, il s'agit de déterminer le rôle de l'interface fibre/matrice dans la fissuration des composites unidirectionnels à matrice céramique et à fibres longues de carbure de silicium (SiC/SiC). Le modèle adhésif/frottant de Raous, Cangémi et Cocu (modèle de zone cohésive couplant adhérence, frottement et contact unilatéral), avec quelques variantes, est appliqué à la fissuration volumique des matériaux (fibre et matrice), ainsi qu'à celle de l'interface. Sur le plan mathématique, l'analyse des solides cohésifs révèle la possibilité de décohésions interfaciales instables (sauts de solution) : deux façons de régulariser ces problèmes sont présentées. L'interaction d'une fissure matricielle et d'une interface fibre/matrice est étudiée. Pour traiter ce problème fortement tridimensionnel, un outil de fissuration 3D dynamique en présence de contact frottant est développé. L'optimisation du composite SiC/SiC est conduite en deux temps : (1) identification des propriétés mécaniques de l'interface fibre/matrice sur une simulation d'expérience de micro-indentation, (2) utilisation des propriétés identifiées pour l'analyse de la fissuration du composite. La compétition entre les mécanismes de pontage et de piégeage des fissures matricielles par les fibres et la rupture des fibres est abordée. Des recommandations aux élaborateurs de matériaux composites sont formulées (énergie de décohésion, épaisseur des interphases, ...).

Mots-clés : Fissuration, composites, micromécanique, interfaces, zones cohésives, contact unilatéral, frottement de Coulomb, céramique, identification, éléments finis, simulation 3D.

Fracture of composite materials : role of fibre/matrix interface

Abstract : This study is devoted to improve the fracture resistance of composites materials. More precisely, we analyse the role of the fibre/matrix interface on the toughness of ceramic matrix composite materials reinforced by silicon carbide long fibres (SiC/SiC). Cohesive zone models, including frictional contact, are used as debonding interface models as well as fracture models for bulk materials. The stability of solids with interfaces is analyzed in details and two regularizations of jump solutions are investigated : a rate-dependant cohesive zone model and a dynamical formulation. We consider the problem of the interaction between a matrix crack and a row of fibres. The simulation of this problem is carried out by extending the interface model of Raous, Cangémi and Cocu to a 3D-dynamical formulation. The optimization of the SiC/SiC composite material is obtained, firstly, by identifying the mechanical properties of the fibre/matrix interface on a micro-indentation experiment (push-in), and, secondly, by using these properties to simulate the 3D-fracture of this material. The competition between bridging and trapping of a matrix crack by a row of fibres is studied. An optimum design of the fibre/matrix interface is given.

Key-words : Fissuration, composite materials, micromechanics, interfaces, cohesive zone models, unilateral contact, Coulomb friction, ceramic, identification, finite elements, 3D-simulation.