



**HAL**  
open science

# Études numériques d'instabilités d'une goutte sphérique

Ali-Higo Ebo Adou

► **To cite this version:**

Ali-Higo Ebo Adou. Études numériques d'instabilités d'une goutte sphérique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie (UPMC Paris 6), 2015. Français. NNT: . tel-01807621

**HAL Id: tel-01807621**

**<https://hal.science/tel-01807621>**

Submitted on 4 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

**Spécialité : Mécanique des fluides**

**École doctorale : « SMAER »**

réalisée

au **Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes**

présentée par

**Ali-higo Ebo Adou**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Études numériques d'instabilités d'une goutte sphérique**

**soutenue le 14 Décembre 2015**

devant le jury composé de :

M. Pascal Chossat	Président
M. Stéphan Fauve	Rapporteur
M. Jean-Christophe Robinet	Rapporteur
M. Stéphane Popinet	Examineur
M. Jalel Chergui	Invité
M. Damir Juric	Directeur de thèse
M <sup>me</sup> Laurette S. Tuckerman	Directrice de thèse





**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

**Spécialité : Mécanique des fluides**

**École doctorale : « SMAER »**

réalisée

au Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

présentée par

**Ali-higo Ebo Adou**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Études numériques d'instabilités d'une goutte sphérique**

soutenue le 14 Décembre 2015

devant le jury composé de :

M. Pascal Chossat	Président
M. Stéphan Fauve	Rapporteur
M. Jean-Christophe Robinet	Rapporteur
M. Stéphane Popinet	Examineur
M. Jalel Chergui	Invité
M. Damir Juric	Directeur de thèse
M <sup>me</sup> Laurette S. Tuckerman	Directrice de thèse



---

---

## Résumé

Nous étudions dans cette thèse le problème de la stabilité d'une goutte à l'état sphérique. La goutte est soumise à un forçage qui s'exerce à sa surface de manière purement radiale. Deux configurations sont envisagées : lorsque le forçage est oscillant (avec ou sans une composante constante) et lorsque le forçage est constant.

Pour ce faire, nous avons utilisé un code de simulation numérique tridimensionnel pour les écoulements multiphasique incompressibles massivement parallélisé. Le solver combine les méthodes eulériennes et lagrangiennes pour le traitement de la dynamique de l'interface. Le premier problème correspond à l'analogie de l'instabilité de Faraday en présence d'une interface sphérique. Nous avons réalisé une étude de stabilité linéaire en utilisant une décomposition spatiale sur une base d'harmonique sphérique et une généralisation de l'analyse de Floquet de [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#) d'une interface plane. Les régions d'instabilités permettent de déterminer le mode sphérique le plus instable. Le mode prédit par la théorie linéaire correspond à celui obtenu à l'aide des simulations numériques non-linéaires. Nous interprétons les motifs que forment ces modes instables sur la surface de la goutte à l'aide de la théorie des bifurcations avec des symétries sphériques de manière générale, et avec la géométrie des solides de Platon pour certain modes en particulier. Le second problème est celui d'un forçage radial constant à l'interface de la goutte. En orientant la force dans le sens opposé à celui du gradient de densité, le problème est similaire à l'instabilité de Rayleigh-Taylor en géométrie sphérique. Nous présentons les résultats préliminaires de nos simulations à très haute résolution pour des grands nombres d'onde sur une sphère en tenant compte de la tension de surface durant les premières phases de l'instabilités. La phase turbulente n'est pas abordée. Pour de petit nombre d'onde, nous avons suivi l'évolution de différent motifs de la condition initiale jusque dans la phase à grandes amplitudes.

Un troisième problème est considéré pour un forçage horizontal d'une interface plane. Nous avons reproduit à l'aide de notre solver numérique les expériences de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#). L'interface entre deux fluides stablement stratifiés avec un fort contraste de viscosité est soumise à un cisaillement oscillant et horizontal. Le problème est celui de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz oscillant. Les simulations numériques reproduisent avec succès la croissance et l'évolution de l'interface. Nous distinguons deux régimes où l'interface adopte un comportement qualitativement différent dont un nouvel état à saturation est mis en évidence. Nous avons obtenu que pour ce nouvel état l'interface se déstabilise via une première bifurcation fourche supercritique. Cet état semble subir une seconde bifurcation lorsque la fréquence de forçage dépasse un second seuil avec une transition sous-critique, où deux états existent pour les mêmes paramètres de forçages.

---

## Abstract

We consider in this thesis the stability problem of a spherical drop subjected to a radial bulk force for two different configurations consisting of an oscillating (with or without a constant component) and a constant force.

To do so, we use a full three-dimensional parallel front-tracking code for incompressible multiphase flow to calculate the interface motion. The first configuration consist of the spherical analogue of the Faraday instability. We linearize the governing equations about the state of rest and decompose deformations of the interface as spherical harmonics. Generalizing the [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#) Floquet procedure to a spherical interface, we present a linear stability analysis for the appearance of standing waves. The most unstable spherical mode at onset predicted by the linear theory agrees with full three-dimensional nonlinear numerical simulations. We interpret the shape in light of theoretical results concerning pattern formation in the presence of  $O(3)$  symmetry. The second configuration consists of the spherical analogue of the Rayleigh-Taylor instability when the force is oriented from the heavier to the lighter fluid. We performed numerical simulations for both high and low spherical modenumbers and followed their evolutions up to the nonlinear stage.

Finally, we consider a plane interface subjected to an horizontal oscillatory forcing which is called the oscillatory Kelvin-Helmholtz instability. We consider the experimental configuration proposed by [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#) for stably stratified fluids with a high viscosity contrast. Numerical simulations reproduce succesfully the growth and the evolution of the interface. We distinguish a new regime for the interface saturation which was not observed by the original experiment. We obtained a subcritical transition between the two different regimes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Contexte général . . . . .	11
1.2	Plan de la thèse . . . . .	15
<b>2</b>	<b>BLUE, un code numérique pour les écoulements multiphasiques</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Solutions des équations du mouvement . . . . .	20
2.2.1	Préliminaires . . . . .	21
2.2.2	Équations de Navier-Stokes . . . . .	22
2.2.3	Advection de l'interface . . . . .	24
2.3	Description de la méthode pour le traitement de l'interface . . . . .	25
2.3.1	<i>Local Contour Reconstruction Method</i> . . . . .	26
2.3.2	Parallélisation . . . . .	27
2.4	Tests de performance . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Articles à paraître __ Faraday instability on a sphere : Floquet analysis</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Governing equations . . . . .	35
3.2.1	Equations of motion . . . . .	35
3.2.2	Linearizing the governing equations . . . . .	37
3.3	Solution to linear stability problem . . . . .	40
3.3.1	Spherical Harmonic Decomposition . . . . .	40
3.3.2	Floquet Solution . . . . .	42
3.4	Ideal fluid case and non-dimensionalization . . . . .	44
3.5	Viscous fluids . . . . .	47
3.6	Discussion . . . . .	49
3.7	Appendix . . . . .	52
3.7.1	Boundary conditions for the two-fluid case . . . . .	52
3.7.2	Differentiation relations . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Articles à paraître __ Faraday instability on a sphere : Numerical simulation</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Methods . . . . .	57

4.2.1	Pattern formation on a sphere . . . . .	57
4.2.2	Problem formulation, governing equations and numerical scheme . . . . .	59
4.2.3	Physical and numerical parameters . . . . .	61
4.2.4	Spherical harmonic transform . . . . .	64
4.3	Results . . . . .	65
4.3.1	Case $\ell = 1$ . . . . .	65
4.3.2	Case $\ell = 2$ . . . . .	66
4.3.3	Case $\ell = 3$ . . . . .	69
4.3.4	Case $\ell = 4$ . . . . .	71
4.3.5	Case $\ell = 5$ . . . . .	74
4.3.6	Case $\ell = 6$ . . . . .	77
4.4	Discussion . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Cas d'un forçage radial constant</b>	<b>83</b>
5.1	L'instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	84
5.2	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	88
5.2.1	Relation de dispersion avec tension superficielle . . . . .	89
5.2.2	Mode de croissance maximum lorsque $\mathcal{A}_S \sim 1$ . . . . .	90
5.3	Simulations numériques tridimensionnelles pour $\mathcal{A}_S \sim 1$ . . . . .	91
5.3.1	Évolution non linéaire des motifs . . . . .	92
5.4	Conclusion . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Simulations de l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz</b>	<b>97</b>
6.1	Stabilité de fluides sous cisaillement oscillatoire horizontal . . . . .	98
6.2	Modélisation numérique de l'instabilité . . . . .	100
6.2.1	Résumé de l'expérience de <a href="#">Yoshikawa and Wesfreid (2011b)</a> . . . . .	100
6.2.2	Formulation du domaine numérique . . . . .	101
6.3	Visualisations de l'écoulement . . . . .	103
6.3.1	Champ de Base . . . . .	103
6.3.2	Deux régimes de l'instabilité . . . . .	105
6.3.3	Écoulement moyenné . . . . .	106
6.4	Évolution de la hauteur de l'interface . . . . .	108
6.5	Conclusion . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

# Table des figures

2.1	Illustration (a) de la fonction indicatrice de phase dans la méthode VOF (Couderc, 2007) et (b) des marqueurs de la grille lagrangienne supplémentaire représentant l'interface (Tryggvason et al., 2001) . . . . .	19
2.2	(a) Représentation de la fonction Level-Set dans le cas bidimensionnel. Voir (Shin et al., 2015) pour le cas 3D. (b) Méthode pour le calcul de la fonction distance à partir des centres de chaque cellule aux marqueurs de l'interface (Shin and Juric, 2009). . . . .	27
2.3	Illustration de la décomposition du domaine en sous ensembles disjoints. Chaque sous-domaine est associé à un processus. (Shin et al., 2015) . . . . .	28
2.4	(a) Efficacité et (b) accélération moyenne par pas de temps en fonction du nombre de threads mesurant les performances globales du solver avec une seule ou sans reconstruction du maillage lagrangien. . . . .	30
2.5	Répartition des coûts du calcul pour le premier pas de temps numérique. (a) Sans et (b) avec reconstruction du maillage lagrangien et écriture des données. . . . .	31
3.1	Instability tongues for instability due to oscillatory forcing of amplitude $a$ and angular frequency $\omega$ . Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers $\ell = 1, 2, 3, 4$ originate at $\omega/\omega_g = 2\sqrt{\ell}/n$ . (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers $\ell = 2, 3, 4, 5$ originate at $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}/n$ , with $n$ odd (even) for subharmonic (harmonic) tongues. . . . .	48
3.2	Instability tongues due to oscillatory forcing of amplitude $a$ and angular frequency $\omega$ . Tongues correspond to the temporal harmonics index with $n$ odd (even) subharmonic (harmonic) response. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongue. . . . .	49
3.3	Instability tongues for instability due to oscillatory forcing of amplitude $a$ and angular frequency $\omega$ for a viscous fluid drop. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers $\ell = 1, 2, 3, 4$ . (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers $\ell = 2, 3, 4, 5$ . . . . .	50

3.4	Same as figure 3.3, but plotted in terms of $\omega_0$ and $a_0$ . (a) Gravitational case with stronger viscosity (b) Capillary case with weaker viscosity. . . .	51
4.1	Instability tongues resulting from oscillatory forcing with amplitude $a$ and angular frequency $\omega$ for an inviscid drop with parameters given in table 4.1. Diamond shapes designate the parameter values of our simulations. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers $\ell = 1, 2, 3, 4$ originate at $\omega/\omega_g = 2\sqrt{\ell}/n$ , with $n = 1$ for subharmonic tongues and $n = 2$ for harmonic tongues. (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers $\ell = 2, 3, 4, 5, 6$ originate at $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}/n$ . . . . .	63
4.2	Visualization of $\ell = 1$ mode for drop. The drop is displaced alternately to the left and the right, and finally hits the surface of the domain. The cubic domain is shown, as well as the eight subdomains, each of which is assigned to a process thread. . . . .	65
4.3	Drop interface and velocity field for $\ell = 2$ pattern of gravitational harmonic waves over one reponse period $T$ . During the prolate phase, the velocity is directed in the polar direction, while during the oblate phase it is directed in the equatorial direction. Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal when the surface is least deformed and minimal where it is most deformed. Only outward-point velocity vectors are shown ; those pointing inwards are hidden by the opaque surface of the drop. . . . .	67
4.4	Same as figure 4.3 but from a slightly different perspective and showing the outer bounding sphere and the velocity field in the outer fluid. . . . .	67
4.5	Timeseries of interface amplitude $ \zeta_{\max} - \zeta_{\min} $ . Insets show the projection of the height $\zeta(\theta, \phi)$ on the sphere. Prolate and oblate configurations have higher and lower maximum values of $ \zeta_{\max} - \zeta_{\min} $ , respectively. The drop spends about 60% of each period in the prolate configuration. . . . .	68
4.6	Timeseries of components of different $\ell$ modes when the dominant mode is $\ell = 2$ . All multiples of $\ell = 2$ are present, as well as $\ell = 0$ , which is the constant average radius. Long-time evolution is visualized by envelopes (bold curves) of the rapidly oscillating timeseries. The growth rate of component $\zeta_4$ is about twice that of $\zeta_2$ . . . . .	68
4.7	Timeseries of components of various $m$ modes, when the dominant mode is $\ell = 2$ . Initially, the drop is axisymmetric and the only component is $m = 0$ . The drop remains axisymmetric, but its axis of symmetry tilts away from the $z$ axis, which continues to oscillate periodically, manifested by alternating dominance of $m = 1$ and $m = 2$ . . . . .	69
4.8	Drop interface and corresponding velocity field for $\ell = 3$ pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal when the surface is least deformed and minimal where it is most deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown ; those pointing inwards are hidden by the opaque surface of the drop. . . . .	70

4.9	Time evolution of the amplitudes of modes with different $\ell$ values. The principle mode is $\ell = 3$ . The amplitude of mode $\ell = 4$ is very close to that of the second harmonic $\ell = 6$ , and that of $\ell = 7 = 3 + 4$ is close to that of the third harmonic $\ell = 9$ . . . . .	70
4.10	Time evolution of the amplitudes of $\zeta_3^m$ . The initial position of the pattern is tilted with respect to the $z$ axis. As the $m = 2$ component increases, the pattern aligns with the $z$ axis. It then decreases as the pattern tilts again. . . . .	71
4.11	Drop interface and velocity field for $\ell = 4$ pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period $2T$ . The interface oscillates between (a) an octahedron, with six maxima, and (c) a cube, with eight maxima. Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown. . . . .	72
4.12	Time evolution of amplitude of different $\ell$ components when the dominant wavenumber is $\ell = 4$ . The spectrum also contains an important $\ell = 6$ component. The spectrum contains multiples of 4, multiples of 6, and combinations of the two ( $10=4+6$ , $14=8+6$ , $20=8+12$ ). . . . .	72
4.13	Evolution of amplitudes of important modes $m = 0$ and $m = 4$ , which together comprise the pattern with cubical symmetry for $\ell = 4$ . Inset shows projection of height on the sphere at instants at which the interface has a cubic or octahedral shape. The alignment with the $z$ axis can be seen, for example by the red patch at the north pole (where the longitudinal gridlines meet) for the octahedron. . . . .	73
4.14	Drop interface and corresponding velocity field for axisymmetric $\ell = 5$ pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown. . . . .	75
4.15	Drop interface and corresponding velocity field for $\ell = 5$ pattern with $D_4$ symmetry. . . . .	75
4.16	Time evolution of the amplitudes of modes with different $\ell$ values when the dominant mode is $\ell = 5$ . Components 4, 6, 8 are present, in addition to the expected multiples of 5. . . . .	76
4.17	Time evolution of the amplitudes of modes $Y_5^m$ . An initially axisymmetric pattern, composed of $Y_5^0$ , proves to be unstable and is replaced by a $D_4$ pattern, which is a superposition of $Y_5^0$ and $Y_5^4$ . Insets shows projections on sphere of $\zeta(\theta, \phi)$ of axisymmetric pattern and two views of $D_4$ pattern. . . . .	76
4.18	Drop interface and corresponding velocity field for $\ell = 6$ pattern with icosahedral symmetry seen in subharmonic capillary waves over one reponse period $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown. . . . .	77
4.19	Drop interface and corresponding velocity field for $\ell = 6$ pattern with cubic symmetry. . . . .	77



4.20	Time evolution of the amplitudes of modes with different $\ell$ values when the dominant mode is $\ell = 6$ . In addition to multiples of 6, the spectrum contains multiples of 4 and combinations of the two. . . . .	78
4.21	Evolution of amplitudes of $m$ modes for $\ell = 6$ . From an icosahedral initial condition composed of modes $m = 0$ and $m = 5$ , the pattern tilts away from the $z$ axis and eventually acquires cubic symmetry with dominant mode is $m = 4$ . The subsequent increase in mode $m = 3$ is associated with a tilting of orientation of the cubical pattern away from the $z$ axis. Insets show projections of icosahedral and dodecahedral phases of the initial pattern, side (equatorial) and top (polar) view of a single cubic pattern aligned with the $z$ axis, and a tilted cubic pattern. . . . .	78
4.22	Instantaneous $\ell$ spectrum of a nominally spherical solution below threshold. The spectrum has an important $T$ -periodic $\ell = 4$ component, as well as components 2, 6, 8 and (not labelled) 10, 12, 14, 16. . . . .	81
5.1	La configuration initiale est stablement stratifiée dans le champ de pesanteur terrestre. Les densités des fluides sont assez proches avec une perturbation initialement sinusoïdale de l'interface. Pour créer l'instabilité, le système est accéléré à $1.34g$ vers le haut. La phase linéaire correspond à (a-c), la phase non-linéaire (d-g) et la phase turbulente (h-j) (Waddell et al., 2001). . . . .	86
5.2	Taux de croissance normalisé avec $\gamma_{\ell_{max}}$ pour des valeurs croissantes de $g$ et donc de $\ell_c$ . . . . .	91
5.3	évolution de l'interface et champs de vitesse à l'interface avec un mode (a-d) axisymétrique $Y_3^0$ , (e-h) $\ell = 4$ à symétrie cubique et (i-l) $\ell = 6$ avec une symétrie icosaédrale. . . . .	94
5.4	évolution de l'interface (a) et champs de vitesse à l'interface avec un mode $\ell_{max} = 16$ avec un motif cubique. . . . .	95
5.5	évolution de l'interface pour un mode $\ell_{max} = 23$ . . . . .	95
6.1	établissement des ondes gelées (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b). . . . .	98
6.2	(a) Coupe verticale du cylindre dans le plan $(r, z)$ . Illustration des phases durant l'évolution de l'interface. Après une première phase de croissance exponentielle, une seconde phase de croissance non linéaire s'installe et mène à la saturation de l'onde. (b) Coupe horizontale du cylindre dans le plan $(r, \phi)$ . Évolution des instabilités à la périphérie du cylindre. Le nombre d'onde observé ne varie pas sur un grand nombre d'oscillations. On peut négliger l'effet de la courbure à l'échelle d'une longueur d'onde comprise entre les deux barres rouges (Yoshikawa and Wesfreid (2011b)). . . . .	101
6.3	(a) Diagramme de stabilité et (b) nombre d'onde critique au seuil obtenu dans deux dispositifs cylindriques. Les carrés blancs sont mesurés pour un cylindre de $R = 112\text{mm}$ et les carrés noirs pour $R = 120\text{mm}$ . Extrait de (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b). . . . .	102

6.4	Vue en perspective de la configuration cartésienne (sans courbure) à l'échelle d'une longueur d'onde. La direction azimutale est assimilée à la direction $Ox$ et la direction radiale à la direction transverse. On illustre les sous-domaines associés à un processus MPI. . . . .	104
6.5	(a) Configuration générique pour un cisaillement horizontal parallèle et oscillant et (b) Solution du second problème de Stokes (6.1) à intervalle de $T/4$ où $T$ est la période de forçage et une épaisseur de pénétration de 20%. . . . .	105
6.6	État asymptotique quand $f = 0.28$ Hz pour les petites hauteurs. Le domaine numérique (6.4) montre une seule longueur d'onde. . . . .	107
6.7	État asymptotique quand $f = 0.47$ Hz pour les grandes hauteurs. On peut clairement distinguer les lâchés tourbillonnaires. . . . .	107
6.8	Profil de vitesses dans la direction du forçage selon la direction verticale à $t = T/4$ des figures (a) 6.6 et (b) 6.7. . . . .	108
6.9	Lignes de courant moyennées par unité de longueur d'onde sur quelques périodes à saturation. . . . .	109
6.10	(a) Évolution de la hauteur de l'interface mesurée avec les simulations numériques. La hauteur de l'interface est définie comme la distance des creux aux bosses des ondes. (b) Mesure du carré de la hauteur de saturation en fonction de la fréquence de forçage pour 0.15 Hz, 0.18 Hz et 0.20 Hz. . . . .	110
6.11	Évolution de la hauteur de l'interface mesurée expérimentalement, extraite de (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b). . . . .	111
6.12	En rouge, courbe d'un état à grande hauteur baissé à $f = 0.32$ Hz. La hauteur asymptotique est différente de l'état de petite hauteur (en bleu) obtenu lorsque l'état initial est donné par l'interface plate. . . . .	111
6.13	Modification de la hauteur de l'interface lorsque (a) la fréquence d'un état de petite hauteur est augmentée et (b) la fréquence d'un état de grande hauteur est augmentée. . . . .	112
6.14	Première bifurcation fourche supercritique et seconde sous-critique avec deux états à saturation pour $f = 0.32$ Hz. . . . .	113



# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème de l'équilibre de gouttes isolées à l'état sphérique. La goutte est libre dans l'espace et soumise à des forces qui s'appliquent de manière purement radiale à sa surface. La tension superficielle est la principale force qui permet à la goutte de maintenir son état sphérique. Nous étudions la stabilité de l'état sphérique lorsque des forces oscillantes ou constantes, ou les deux à la fois, sont exercées. La configuration du problème est ainsi idéale et, au jour d'aujourd'hui, la réalisation expérimentale ne peut être effectuée qu'en situation de microgravité.

### 1.1 Contexte général

L'étude de l'oscillation des gouttes est un sujet bien connu dans la littérature scientifique. [Rayleigh \(1879\)](#) ainsi que [Kelvin \(1863\)](#) sont les premiers à s'être intéressés au problème. Lorsque la tension de surface est la seule force présente, elle permet à la goutte de minimiser son énergie en gardant une forme sphérique. Sous l'hypothèse de vibrations de faible amplitude, [Rayleigh \(1879\)](#) fut le premier à calculer la fréquence de résonance des modes d'oscillations quand la goutte est dans le vide. [Lamb \(1932\)](#) généralise ce calcul au cas d'une goutte oscillant dans un milieu de densité non nulle. Ainsi, celles-ci sont sphériques à l'équilibre et présentent des résonances pour des fréquences

$$\omega_\ell^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} \ell(\ell-1)(\ell+2) \quad (1.1)$$

---

où  $R$  est le rayon,  $\rho$  la densité et  $\sigma$  la tension superficielle du liquide.  $\ell$  est le nombre d'onde du mode entrant en résonance. On l'appellera le mode sphérique. Ces modèles assez simples, négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et du milieu environnant, donnent en réalité une bonne approximation de la fréquence et de l'amortissement des modes d'oscillations. [Miller and Scriven \(1968\)](#) ont effectué un calcul complet en résolvant les équations de Navier-Stokes linéarisées, obtenant une solution plus générale.

Plusieurs expériences ont été réalisées dans les dernières décennies dans le but de retrouver la fréquence (1.1). Pour ne citer que les plus connues, [Trinh and Wang \(1982\)](#) ainsi que [Wang et al. \(1996\)](#) ont obtenu un très bon accord en piégeant la goutte par lévitation acoustique ou dans un environnement de microgravité pour maintenir son état sphérique. De nos jours, le problème des oscillations amorties des ondes capillaires est bien compris et constitue un *benchmark* pour les codes de calculs traitant de la dynamique d'une interface entre fluides immiscibles.

D'un point de vue pratique, la compréhension de la dynamique d'une interface entre fluides non miscibles est d'un intérêt central. Ainsi, l'étude de l'oscillation des gouttes s'inscrit dans le cadre plus général des écoulements multiphasiques. Les applications industrielles sont aujourd'hui très nombreuses et conduisent à l'assimilation de nouveaux phénomènes physiques. La désintégration d'un jet liquide en un ensemble de nombreuses gouttes de petites tailles ([Eggers and Villermaux, 2008](#)) ou encore l'impact des gouttes sur de surfaces solides ([Josserand and Zaleski, 2003](#)) font partie des disciplines les plus courantes.

Les techniques expérimentales sont parfois limitées à cause de la multitude des échelles caractéristiques mises en jeu et qui sont inaccessibles. Les simulations numériques pour les écoulements multiphasiques apparaissent ainsi comme étant un outil incontournable pour fournir une étude pertinente. [Fuster et al. \(2009\)](#) passent en revue les dernières avancées sur les méthodes numériques. Les codes de calculs emploient des méthodes de plus en plus sophistiquées pour représenter les déformations complexes que peut subir l'interface durant son évolution ([Popinet, 2003](#); [Shin et al., 2015](#)).

## Dynamique et stabilité des interfaces

En faisant vibrer verticalement une couche liquide, il existe un seuil d'accélération au dessus duquel l'interface se déstabilise. L'instabilité se manifeste par la formation d'ondes stationnaires à la surface du liquide. La longueur d'onde des motifs dépend principalement de la fréquence de l'oscillation, et ne dépend que très peu de la hauteur de la couche liquide. [Faraday \(1831\)](#) fut le premier à mettre en évidence cette instabilité. Ces motifs peuvent s'organiser en lignes, en carrés ou encore en hexagones. D'autres motifs plus exotiques ont été observés par [Edwards and Fauve \(1994\)](#) et [Périnet et al. \(2009\)](#) effectuèrent la première simulation numérique tridimensionnelle.

[Faraday \(1831\)](#) rapporte également que l'interface se comporte comme un oscillateur résonnant à la moitié de la fréquence d'oscillation. On parle de résonance paramétrique. L'interface présente une résonance lorsque la fréquence du forçage vaut le double de sa fréquence propre. [Benjamin and Ursell \(1954\)](#) expliquent le mécanisme en considérant un modèle de fluides non visqueux et réduisent l'équation d'évolution de l'interface à une équation de Mathieu. [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#) étudient le problème entièrement visqueux.

Dans ce travail, nous allons étudier un aspect fondamental de la dynamique de l'interface d'une goutte. Le problème central que nous allons considérer consistera à transposer le problème de l'instabilité de Faraday sur une goutte dans son état sphérique. Des résonances paramétriques ont été observées dans les expériences sur l'oscillation d'une goutte lorsque qu'elle est soumise à une oscillation entretenue. Sa fréquence de résonance est donnée par la relation [\(1.1\)](#).

Une propriété remarquable de la fréquence de résonance de Rayleigh est sa robustesse : elle est aussi retrouvée lorsque l'on oscille une goutte qui n'a pas une forme sphérique. Par exemple, en faisant osciller une goutte aplatie par l'effet de la gravité, on observe également que la goutte entre en résonance. Les premiers modes propres d'oscillation  $\ell$  permis par la formule [\(1.1\)](#) sont alors observés, c'est-à-dire pour les modes  $\ell \geq 2$ . [Brunet and Snoeijer \(2011\)](#) font une revue des diverses méthodes expérimentales employées, comme la lévitation acoustique ou magnétique, ou simplement par la vibration verticale d'un substrat solide.

---

À l'aide de notre code de calcul (Shin et al., 2015), que nous allons présenter dans la section suivante, nous allons être en mesure de pouvoir simuler cette situation encore inaccessible expérimentalement. En effet, l'enjeu principal d'une telle configuration est le maintien d'une excitation à symétrie sphérique. Lorsque le paramètre de forçage dépassera un certain seuil, la symétrie sphérique à l'équilibre sera brisée et alors la goutte entrera en résonance.

### Bifurcation en présence d'une symétrie sphérique

Lorsqu'on fait varier un paramètre d'un système physique et que l'on observe un changement qualitatif dans son comportement, on dit que le système a subi une bifurcation. Ce paramètre est appelé le paramètre de contrôle du système. Si le système présente une symétrie, alors certains aspects du problème peuvent être traités sans tenir compte de la physique sous jacente. En particulier, il existe une universalité dans la dynamique en géométrie sphérique.

L'étude des bifurcations avec des symétries est formulée avec un système d'équations différentielles ordinaires donné par

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \lambda) \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  est le paramètre de bifurcation et  $f$  une application non linéaire continûment dérivable. On dit que le problème de bifurcation (1.2) est invariant par l'action d'un groupe de symétrie  $\Gamma$  si l'application  $f$  vérifie

$$\gamma f(\mathbf{x}, \lambda) = f(\gamma\mathbf{x}, \lambda) \quad (1.3)$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Ainsi, si  $\mathbf{x}(t)$  est solution de (1.2) alors  $\gamma\mathbf{x}(t)$  l'est aussi.

En géométrie sphérique, le groupe de symétrie considéré est  $O(3)$ , le groupe des transformations orthogonales réelles dans l'espace à trois dimensions, et en particulier le sous-groupe  $SO(3)$  qui contient les transformations orthogonales préservant l'orientation d'espace. La bifurcation est alors caractérisée par le mode sphérique  $\ell$  qui bifurque et ce quelque soit la nature du problème physique (Golubitsky et al., 1988; Chossat et al.,

1991). La littérature renseigne sur les différentes solutions (donc différents motifs) possible selon chaque mode  $\ell$  (Busse, 1975; Chossat et al., 1991; Matthews, 2003). Sattinger (1978) est le premier à appliquer la théorie des groupes aux problèmes de la bifurcation en géométrie sphérique et montre que la nature de la bifurcation dépend de la parité de  $\ell$ . Matthews (2003) étudie l'existence ainsi que la stabilité des différentes solutions pour des  $\ell$  pairs jusqu'à  $\ell = 20$ . Dans la plupart des cas, toutes les solutions sont instables au seuil, et on parle alors de solution préférée qui est la moins instable et susceptible de devenir stable via une bifurcation secondaire.

## 1.2 Plan de la thèse

Le travail central de la thèse consistera à étudier théoriquement et numériquement l'instabilité de Faraday d'une interface sphérique. La tension de surface est la principale force stabilisatrice. L'instabilité sera provoquée par une accélération oscillante, que l'on peut se représenter comme une gravité radiale, qui contient, ou pas, une composante constante. Nous allons étudier les différentes solutions qui bifurquent jusqu'à  $\ell = 6$  et observer que les motifs peuvent s'interpréter avec la géométrie des solides de Platon lorsque  $\ell = 3, 4, 6$ .

La deuxième configuration consiste à considérer la composante oscillante comme nulle et maintenir un forçage radial constant. Pour avoir une instabilité, on comprend que l'accélération doit être dirigée du fluide le plus dense vers le moins dense. La configuration représente alors une version sphérique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Pour le cas classique d'une interface plane, l'instabilité se produit lorsqu'un fluide dense surplombe un fluide plus léger en présence d'un champ de pesanteur. L'interface est alors instable et le fluide lourd s'enfonce dans le fluide léger et vice-versa. Nous allons voir dans quelle mesure la tension de surface peut contrer l'accélération lorsque la géométrie est sphérique. Nous allons aussi présenter des simulations de l'interface pour des petites et grandes valeurs de  $\ell$ , ces dernières nécessitant une plus grande résolution.

Nous allons pour finir considérer une situation où les forces s'appliquant à l'interface se trouvent dans une géométrie plane. La composante constante de l'accélération sera représentée par la gravité terrestre et sera dirigée vers le bas. La composante oscillante sera, quant à elle, dirigée latéralement. L'instabilité se jouera alors entre la composante



---

oscillante, qui provoque l'instabilité, et les forces de gravité et de tension de surface, qui maintiennent la platitude de l'interface. L'instabilité qui est provoquée est plus connue sous le nom de l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz. Nous avons reproduit les résultats des expériences de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#) et nous avons aussi découvert un nouveau régime intermédiaire.

Dans le chapitre suivant nous ferons une brève présentation du code de calcul numérique de notre équipe. Nous traiterons ensuite le problème de Faraday sphérique pour lequel nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de Floquet ainsi que des simulations tridimensionnelles avec des modes sphériques différents. Nous passerons alors aux simulations de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour une interface sphérique. Nous terminerons par présenter l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz.

## Chapitre 2

# BLUE, un code numérique pour les écoulements multiphasiques

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	18
<b>2.2</b>	<b>Solutions des équations du mouvement</b>	20
2.2.1	Préliminaires	21
2.2.2	Équations de Navier-Stokes	22
2.2.3	Advection de l'interface	24
<b>2.3</b>	<b>Description de la méthode pour le traitement de l'interface</b>	<b>25</b>
2.3.1	<i>Local Contour Reconstruction Method</i>	26
2.3.2	Parallélisation	27
<b>2.4</b>	<b>Tests de performance</b>	<b>29</b>

---

Dans ce chapitre, nous présenterons un nouveau code de simulation numérique directe pour les écoulements multiphasiques incompressibles tridimensionnel, *BLUE* (Shin et al., 2015). Ce solveur est entièrement écrit en FORTRAN 2003 et il est parallélisé avec la méthode de décomposition de domaine avec l'aide de la bibliothèque d'échanges de messages MPI. Massivement parallélisé, il peut être utilisé sur une grande variété d'architectures, d'un ordinateur portable aux plus grands clusters de calculs numériques disponibles.

Pour représenter le plus fidèlement possible la dynamique de l'interface fluide, le solveur

---

utilise une procédure hybride combinant méthodes lagrangiennes et eulériennes, *Front-tracking* et *Level Set* respectivement. Le solver BLUE est à notre connaissance le premier code de calcul de haute performance (*High Performance Computing*, HPC) à utiliser une telle méthode hybride pour le traitement de l'interface, *Level Contour Reconstruction Method* (LCRM), pour les simulations d'écoulements multiphasiques.

## 2.1 Introduction

L'intérêt croissant porté à la dynamique des écoulements multiphasiques a participé à la compréhension de phénomènes nouveaux de plus en plus complexes et à l'élaboration de méthodes numériques sophistiquées pour la simulation numérique directe. La présence d'une interface (de discontinuités) et les non-linéarités qui en résultent se rajoutent à la complexité bien connue posée par la résolution des équations de Navier-Stokes. En effet, l'enjeu majeur concerne l'élaboration de méthodes assurant un suivi précis et une représentation fidèle de la dynamique des interfaces au cours du temps, tout en évitant des temps de calcul prohibitifs.

On peut généralement classer en deux familles les méthodes numériques capables de simuler un écoulement avec un suivi de l'interface : les méthodes de "Front Tracking" et les méthodes de "Front Capturing". Les méthodes de Front Tracking présentent l'avantage de fournir un traitement explicite sur la position de l'interface. Quant aux méthodes de Front Capturing, elles reconstruisent l'interface implicitement grâce aux propriétés de certains champs de variables comme la densité ; les phases sont localisées par une fonction indicatrice. La différence entre ces deux classes de méthodes réside donc dans la représentation de l'interface : explicite ou implicite.

Les méthodes de Front Capturing sont dites *eulériennes* dans le sens où l'interface est représentée implicitement par un champ scalaire transporté par le champ de vitesse via une équation de transport où chacune des phases peut être localisée sur la grille eulérienne fixe. La nature implicite des méthodes eulériennes permet de prendre en compte plus facilement les changements de topologie telle que la reconnexion ou la rupture de l'interface. Elle consiste à déterminer la position de l'interface sur la grille stationnaire en

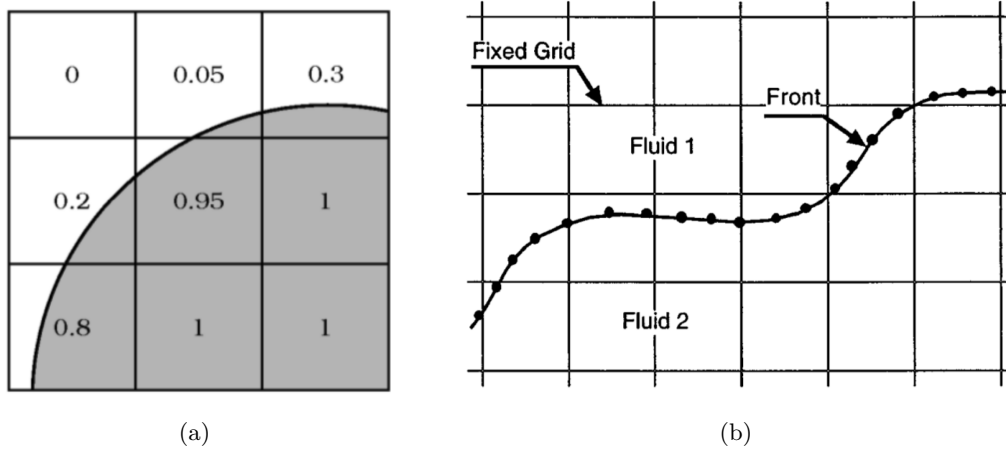


FIGURE 2.1 – Illustration (a) de la fonction indicatrice de phase dans la méthode VOF (Couderc, 2007) et (b) des marqueurs de la grille lagrangienne supplémentaire représentant l'interface (Tryggvason et al., 2001)

s'intéressant à une quantité scalaire advectée localement par le champ de vitesse. Il est alors nécessaire de considérer une équation de transport supplémentaire dans la modélisation des équations du mouvement. Parmi les méthodes eulériennes les plus utilisées, la méthode VOF (Hirt and Nichols, 1981) et la méthode Level-Set (Osher and Sethian, 1988) se différencient par leur représentation de l'interface.

La méthode VOF pour "Volume Of Fluid" est la première à avoir été développée. Une fonction indicatrice de phase est définie sur tout le domaine valant 1 dans une phase et 0 dans l'autre, on parle aussi de fonction couleur  $C$ . La fonction indicatrice correspond à la fraction volumique qu'occupe une phase dans chaque cellule, voir figure 2.1(a). Ainsi, l'interface est repérée au niveau des cellules ayant une valeur de  $C$  strictement comprise entre 0 et 1. La méthode Level-Set consiste à définir dans le domaine une fonction distance  $\phi$  pour représenter l'interface par des courbes de niveaux continues. La fonction distance  $\phi$  prend la valeur 1 dans une phase et -1 dans l'autre et le niveau zéro est l'interface que l'on cherche à décrire. La difficulté majeure des méthodes eulériennes réside dans la résolution de l'équation de transport de la fonction indicatrice discontinue. Des erreurs de nature purement mathématique s'introduisent et peuvent affaiblir la localisation précise de l'interface dans le cas de la méthode VOF. Des algorithmes de reconstruction de l'interface sont alors introduits pour palier au problème. Cependant, la méthode Level-Set ne nécessite pas de telles procédures de reconstruction mais des

---

algorithmes supplémentaires pour réorganiser les lignes de niveau autour de la nouvelle position de l'interface. En effet, sa nature de fonction distance est perdue lors de la résolution de l'équation d'advection à chaque pas de temps. On peut également souligner que pour la méthode Level-Set la mise en œuvre est aussi directe en 2D qu'en 3D ce qui n'est pas le cas pour la méthode VOF.

Les méthodes de Front Tracking sont dites *lagrangiennes* dans le sens où l'interface est décrite explicitement à l'aide d'éléments (particules sans masse ou *marqueurs*, voire figure 2.1(b)) maillés sur une nouvelle grille lagrangienne supplémentaire. Elles permettent un suivi précis de l'interface en utilisant des procédures de remaillage pour épouser sa forme. L'advection de l'interface est ainsi calculée séparément contrairement au couplage avec les équations du mouvement des méthodes eulériennes. Dans cette approche, l'interface est considérée comme une discontinuité des champs physiques et les conditions limites peuvent être appliquées exactement à l'interface. La force de tension superficielle est donc calculée directement à l'interface. Le niveau de précision peut alors être maintenu dans les différentes phases, et également le long de l'interface, assurant une bonne conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Cependant, les changements de topologie ne sont pas pris en compte aussi aisément qu'avec les méthodes eulériennes. Le principal inconvénient des méthodes lagrangiennes réside dans le fait que les situations de connexions ou de ruptures de l'interface sont difficilement traitées. Les procédures de reconstruction de l'interface nécessitent l'emploi d'algorithmes supplémentaires coûteux et relativement arbitraires pour la gestion des marqueurs. En effet, il est nécessaire d'assurer une distribution régulière des marqueurs sur l'interface (pour éviter qu'ils ne s'accumulent par exemple) et une gestion de la connexion entre les éléments de l'interface (addition et suppression de marqueurs/éléments) à chaque pas de temps. Ces algorithmes sont souvent lourds à implémenter pour des simulations tridimensionnelles et parallélisées.

## 2.2 Solutions des équations du mouvement

Le but de ce chapitre étant la présentation succincte du solver ainsi que de sa spécificité, la résolution bien documentée des équations du mouvement pour les écoulements

multiphasiques incompressibles ne sera pas détaillée. Seuls les aspects élémentaires de représentation de discontinuités dans l'approche lagrangienne ainsi que de leur implémentation dans le solveur seront présentés. Les références seront indiquées tout au long de ce chapitre.

### 2.2.1 Préliminaires

Sur la grille eulérienne stationnaire, les différentes phases peuvent être identifiées par une fonction de Heaviside  $H$  qui vaut 1 dans une phase et 0 dans l'autre. La fonction indicatrice de Heaviside  $H$  est donnée par

$$H(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{S}(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{S}(t)$  est la surface déterminé par la position instantanée de l'interface et  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  est une distribution de Dirac tridimensionnelle qui ne prend de valeur non nulle qu'à l'interface, en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Ainsi, on peut exprimer la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  dans l'écoulement comme

$$\rho = \rho_1 H + \rho_0 (1 - H) \quad (2.2)$$

$$\mu = \mu_1 H + \mu_0 (1 - H) \quad (2.3)$$

Ici 1 est la phase où  $H = 1$  et 0 où  $H = 0$ . Pour fermer le système d'équations, il est nécessaire de considérer une équation pour l'interface. L'écoulement étant incompressible, la densité dans chaque phase est constante, la condition d'incompressibilité est :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.4)$$

En utilisant (2.2) dans (2.4), on obtient une équation d'évolution pour la fonction de Heaviside  $H$  :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho_1 \frac{DH}{Dt} - \rho_0 \frac{DH}{Dt} = \Delta\rho \frac{DH}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{DH}{Dt} = 0 \quad (2.5)$$

La position de l'interface est définie par la valeur non-nulle du gradient de la fonction de Heaviside qui est donné par

---


$$\nabla H = - \int_{\partial\mathcal{S}(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} ds' \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface et  $\partial\mathcal{S}(t)$  est le contour délimitant l'interface (Tryggvason et al., 2001). En réalité,  $H$  n'est pas discontinue mais possède une épaisseur de lissage à l'échelle de quelques cellules proches de l'interface. Cette épaisseur, de l'ordre du pas d'espace est fixe, évitant une dissipation de la représentation numérique de l'interface. L'interface est maillée sur une nouvelle grille et est formée d'éléments triangulaires pour le cas tridimensionnel et de segments dans le cas bidimensionnel. Il est à noter que la position  $\mathbf{x}'$  d'un *marqueur* de l'interface ne coïncide pas forcément avec la position  $\mathbf{x}$  d'un noeud de la grille eulérienne.

La méthode de résolution est décomposée en deux parties implémentées dans deux modules séparés. Dans un premier temps, l'advection de l'interface par le champ de vitesse est calculée et permet d'actualiser la nouvelle distribution de la fonction indicatrice  $H$ . On obtient ainsi les densités et viscosités de chaque phase. Ensuite, les champs de vitesse et de pression qui sont solutions des équations du mouvement sont déterminés.

## 2.2.2 Équations de Navier-Stokes

Un écoulement multiphasique incompressible est décrit par les équations de Navier-Stokes données par (dans la formulation mono-fluide)

$$\begin{cases} \rho [\partial_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)] \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \rho \mathbf{G} + \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse,  $P$  la pression,  $\mathbf{F}$  la force de tension de surface locale s'appliquant à l'interface et  $\mathbf{G}$  l'accélération gravitationnelle. Dans le cadre des simulations effectuées dans cette thèse, le terme de gravité est orienté de manière radiale comprenant une composante constante et oscillante définie par

$$\mathbf{G} = -(g + a \cos(\omega t)) \vec{e}_r$$

Les équations du mouvement (3.3a) sont intégrées à l'aide de la méthode classique de projection (Chorin, 1968) permettant le découplage de la vitesse et de la pression. La

discrétisation spatiale se fait sur un maillage aux différences finies eulérien uniforme et tridimensionnel où la discrétisation est décalée de type MAC (Harlow and Welch, 1965) à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux. Les vitesses sont calculées sur les faces de chaque cellule et la pression ainsi que la fonction  $H$  au centre. Un schéma ENO du second ordre est employé pour les termes d'advection. Un schéma d'Euler du premier ordre est employé pour l'intégration temporelle, avec un traitement implicite des termes visqueux. D'autres méthodes sont disponibles et adaptables au problème physique.

Les forces de tension superficielle interviennent dans le bilan des forces mais sont calculées directement à l'interface et redistribuées à la grille eulérienne grâce à la méthode des frontières immergées (Peskin, 1977). Avec la méthode hybride LCRM,  $\mathbf{F}$  est formulée avec (2.6) comme

$$\mathbf{F} = \sigma \kappa_C \nabla H \quad (2.8)$$

où  $\sigma$  est le coefficient de tension de surface supposé constant et  $\kappa_C$  la courbure locale de l'interface. Il est en général difficile d'évaluer numériquement la force de tension de surface  $\mathbf{F}$ . Shin et al. (2005); Shin and Juric (2007) détaillent la méthode employée dans le solver BLUE.

### Méthode multigrille pour la pression

La méthode de projection, pour les écoulements multiphasiques, conduit à la résolution pour la pression d'une équation de Poisson inséparable de la forme

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) = S \quad (2.9)$$

où le terme source  $S$  est fonction de la vitesse à divergence non-nulle ainsi que des forces présentes dans (3.3a). Shin et al. (2015) présentent l'implémentation de la méthode multigrille pour les calculs tridimensionnels parallélisés. La méthode résout avec succès des sauts de densité allant jusqu'à  $O(10^5)$ . L'efficacité de la résolution lors des simulations se mesure à l'aide du paramètre de convergence

$$\gamma = \left( \frac{R_{nc}}{R_0} \right)^{\frac{1}{nc}} \quad (2.10)$$

avec  $nc$  le nombre de cycle pour atteindre la convergence à chaque pas de temps et  $R_0$



---

et  $R_{nc}$  la norme  $L^2$  du résidu initial et à la convergence, respectivement. Le paramètre  $\gamma$  doit être compris entre 0 et 1 et indique une convergence rapide si proche de 0 et lente si proche de 1. On estime que la convergence est atteinte lorsque la norme du résidu  $R_{nc}$  est inférieur à un seuil de tolérance. Les différences de densité entre les phases considérées dans ce travail sont de l'ordre de  $O(10^3)$  et nous assurent  $\gamma < 0.4$  où la tolérance pour la convergence est fixée à  $10^{-9}$ .

### 2.2.3 Advection de l'interface

L'interface est, quant à elle, discrétisée sur une nouvelle grille non-stationnaire pour représenter l'interface. Une fois la vitesse  $\mathbf{V}$  du fluide à l'interface calculée (interpolée depuis le maillage eulérien) la nouvelle position de l'interface peut être recalculée avec l'équation d'advection pour l'interface. En intégrant l'équation (2.5) pour la fonction de Heaviside  $H$ , on a (Tryggvason et al., 2001)

$$\frac{DH}{Dt} = \nabla H \cdot \left( \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Ainsi, pour que cette relation soit aussi vraie à l'interface, à  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , il faut

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad (2.12)$$

L'advection lagrangienne (2.12) des marqueurs/éléments permet ainsi le suivi explicite de l'interface. L'interface est considérée comme une discontinuité et les conditions limites lui sont directement appliquées. Cette équation est intégrée avec une méthode de Runge-Kutta du second ordre. On présentera dans la section 2.3 la procédure choisie pour reconstruire l'interface.

Finalement, la fonction indicatrice est réactualisée en résolvant un problème de Poisson

$$\nabla^2 H = \nabla \cdot \int_{\partial S(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} ds' \quad (2.13)$$

où l'intégrale dans le membre de droite représente l'information transportée par l'interface sur la grille lagrangienne qui doit être redistribuée sur le maillage eulérien. Les nouveaux champs de densités et de viscosités sont définis comme dans (2.2) et (2.3),

repectivement. Dans les méthodes de Front-Tracking, cette redistribution est effectuée en s'inspirant de la méthode des frontières immergées développée par [Peskin \(1977\)](#). Le lissage de la fonction indicatrice permet la distribution sur quelques cellules proches de l'interface.

### **2.3 Description de la méthode pour le traitement de l'interface**

Les méthodes de Front-Tracking possèdent l'avantage de pouvoir calculer la position exacte et la géométrie de l'interface tout en assurant une bonne conservation de la masse ou aussi une absence de diffusion numérique de l'interface. La difficulté majeure réside dans l'implémentation numérique de la procédure de reconstruction de l'interface pour des codes de calculs tridimensionnels et parallélisés. Sur la grille non-stationnaire un marqueur de l'interface est repéré par sa position  $\mathbf{x}'$ . L'interface est formée d'ensembles de segments en 2D et de triangles en 3D ([Tryggvason et al., 2001](#)), interconnectés par interpolation linéaire entre marqueurs voisins. La procédure de reconstruction de l'interface nécessite de garder en mémoire la gestion de la connexion logique des éléments lors de la simulation. Ce traitement supplémentaire peut s'avérer lourd à traiter pour des calculs tridimensionnels qui ont besoin d'un grand nombre d'additions et de suppressions de marqueurs/éléments de l'interface. La *Local Contour Reconstruction Method* (LCRM) simplifie et allège cette procédure de Front-Tracking en la combinant avec la méthode de Level-Set pour une reconstruction locale de l'interface et une connexion implicite entre marqueurs/éléments de l'interface ([Shin and Juric, 2002](#); [Shin et al., 2005](#); [Shin and Juric, 2009](#)). En effet, le maillage lagrangien est à chaque fois écrasé et reconstruit à l'aide de la fonction de distance de la méthode Level-Set. Nous allons maintenant présenter succinctement cette procédure. Pour une description plus exhaustive de la LCRM voir ([Shin and Juric, 2002](#); [Shin et al., 2005](#); [Shin and Juric, 2009](#)).

---

### 2.3.1 *Local Contour Reconstruction Method*

Dans un premier temps, rappelons brièvement le principe de la méthode de Level-Set. On introduit la *fonction distance*  $\phi(\mathbf{x}, t)$  donnant la distance d'un point  $\mathbf{x}$  à l'interface, vérifiant  $|\nabla\phi| = 1$ . La fonction  $\phi$  prend une valeur positive dans un fluide en particulier et négative dans l'autre et l'interface que l'on cherche est représentée par l'isovaleur  $\phi(\mathbf{x} = \mathbf{x}', t) = 0$  (voir figure 2.2(a) dans le cas bidimensionnel). La résolution d'une équation de transport permet alors de déterminer la dynamique de l'interface dans un champ de vitesse donné

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (2.14)$$

L'advection par (2.14) de la fonction distance  $\phi$  est la partie la plus délicate. Il arrive généralement que la fonction  $\phi$  devienne trop irrégulière avec  $|\nabla\phi| \neq 1$ . Ces erreurs dissipatives s'introduisent lors de la résolution provoquant des déplacements artificiels de l'interface, ce qui a pour conséquence d'entraîner des erreurs dans le bilan des masse. La procédure de reconstruction de l'interface consiste alors à réorganiser les lignes de niveau autour de l'interface en remplaçant la fonction  $\phi$  par une nouvelle fonction distance  $\phi'$  qui a le même niveau zéro, vérifiant  $|\nabla\phi'| = 1$ . L'interface est alors donnée par l'isovaleur  $\phi'(\mathbf{x} = \mathbf{x}', t) = 0$ .

Dans le solver, la fonction distance  $\phi$  est uniquement recalculée pour trouver la fonction indicatrice  $H$  mais aucune équation d'advection n'est intégrée. En pratique, pour définir la fonction distance  $\phi$ , on choisit un certain nombre de cellules proches de l'interface et on calcule la distance du noeud au centre de ces cellules aux marqueurs de l'interface, voir figure 2.2(b). Chaque élément/marqueur de l'interface peut alors être traité localement et indépendamment des ses voisins. Ainsi, les procédures lourdes de gestion/sauvegarde des éléments de l'interface sont remplacées par cette procédure de reconstruction de l'interface qui devient implicite.

D'autre part, la fonction de Heaviside n'est pas une fonction discontinue mais en est une approximation lissée à l'échelle de quelques pas d'espace près de l'interface. Ainsi, si  $H$  varie de 0 à 1 alors l'interface se trouve entre les points du maillage avec des valeurs de  $H$  différentes. Il est montré que cette méthode hybride donne deux représentations distinctes de la position de l'interface : (1) la position de l'interface donnée par la position

des marqueurs lagrangiens et (2) l'isovaleur 0.5 de la fonction indicatrice  $H$  (Shin and Juric, 2002; Shin et al., 2005). L'interface peut donc être construite de deux façons différentes : une fois la fonction indicatrice donnée, les éléments de l'interface peuvent être construits sur le niveau  $H = 0.5$ . Inversement pour une distribution donnée de l'interface, la résolution de l'équation de Poisson (2.13) permet d'obtenir la fonction indicatrice.

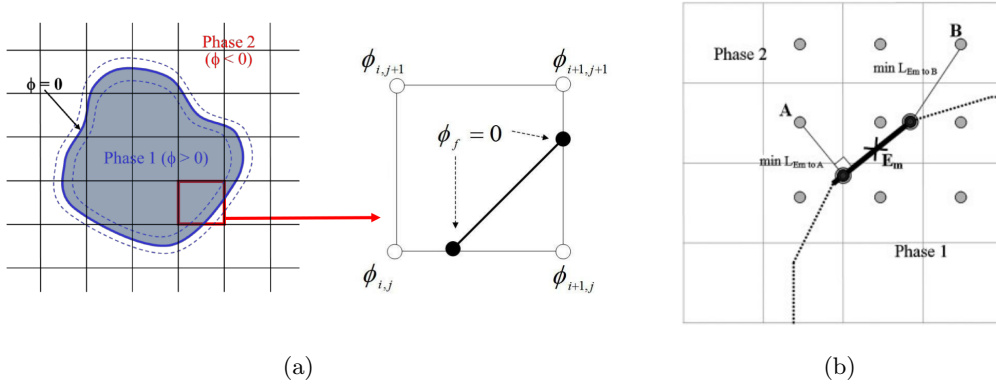


FIGURE 2.2 – (a) Représentation de la fonction Level-Set dans le cas bidimensionnel. Voir (Shin et al., 2015) pour le cas 3D. (b) Méthode pour le calcul de la fonction distance à partir des centres de chaque cellule aux marqueurs de l'interface (Shin and Juric, 2009).

Pour construire la nouvelle interface, à partir de la distribution de la fonction  $H$ , les éléments de l'étape précédente sont supprimés et la nouvelle position  $\mathbf{x}'_i$  des marqueurs est donnée par l'isovaleur  $H = 0.5$  sur la grille eulérienne. Le nouvel élément est alors obtenu en reliant chaque marqueur par une simple interpolation linéaire. Ainsi, la procédure de reconstruction de l'interface peut être traitée localement et les éléments reconstruits simultanément et indépendamment, dispensant de la gestion (addition et suppression) des éléments. De plus, grâce à une méthode type Level-Set, les situations de ruptures ou de coalescences de l'interface sont plus naturellement prises en compte, ce qui n'est pas le cas dans les méthodes classiques de Front-Tracking.

### 2.3.2 Parallélisation

La parallélisation du solveur se fait à l'aide de la méthode de décomposition du domaine, bien adaptée au calcul parallèle, qui consiste à découper le domaine initial en un

ensemble de sous-domaines disjoints (ou blocs), voir figure 2.3(a). En effet, la division d'un problème en plusieurs petits sous-problèmes est un moyen naturel d'introduire le calcul parallèle. La recherche de la solution sur l'ensemble du domaine est alors décomposée en une série de sous-problèmes consistant à rechercher les solutions sur chacun des sous-domaines, et la communication de la solution entre les sous-domaines est effectuée dans une zone tampon, comme illustré sur la figure 2.3(b). Ces techniques assurent la continuité de chacune des grandeurs physiques et de leurs dérivées à travers les sous-domaines.

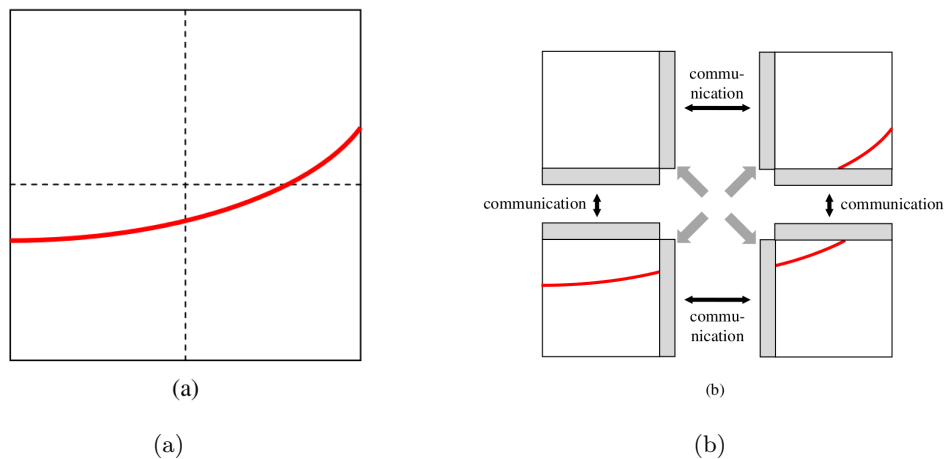


FIGURE 2.3 – Illustration de la décomposition du domaine en sous ensembles disjoints. Chaque sous-domaine est associé à un processus. (Shin et al., 2015)

Par ailleurs, d'un point de vue matériel, les architectures parallèles sont aujourd'hui équipées d'un ensemble de *noeuds* qui emboîtent des processeurs, eux-mêmes emboîtant des *coeurs* dont l'unité de calcul est une entité matérielle que l'on désigne par *thread* (ou processus léger). Chaque sous-domaine est ainsi associé à un processus/threads.

Ainsi, les méthodes pour la simulation numérique des écoulements multiphasiques et pour le traitement de l'interface doivent être adaptées aux architectures des calculateurs parallèles. La procédure de reconstruction de l'interface de la LCRM devient facilement adaptable à la parallélisation dans le sens où la reconstruction de l'interface est locale à chaque élément, donc ici à chaque sous-domaine. Le solveur BLUE permet de mener des

simulations sur des architectures massivement parallèles jusqu'à 131 072 threads ([Shin et al., 2015](#)).

## 2.4 Tests de performance

Les mesures ont été réalisées sur la machine BlueGene/Q de l'IDRIS. L'échelle de mesure adoptée est une "échelle faible" (*Weak Scaling*). Celle-ci consiste à relever le temps de restitution  $t$  d'une simulation à résolution constante du maillage par sous-domaine et à nombre  $N_t$  croissant d'unités de calcul (threads). Chaque thread, assimilé à un processus MPI, est chargé de la résolution numérique du problème associé à un sous-domaine composé de  $32^3$  cellules (charge de calcul constante par thread).

Selon l'échelle faible, l'extensibilité des performances se mesure en fonction de l'efficacité  $E$  et de l'accélération  $A$  (*speed-up*) en fonction du nombre  $N_t$  de threads suivant les relations ci-dessous

$$E(N_t) = \frac{T_r}{T(N_t)} \quad A(N_t) = \frac{N_t}{N} E(N_t) \quad (2.15)$$

où  $T_r$  représente le temps de restitution de référence correspondant à une exécution sur un nombre de threads de référence que nous avons fixé ici à  $N_r = 512$ . Nous avons mené deux types de campagnes de mesures afin d'analyser l'extensibilité du solver et les mesures ont été réalisées sur un nombre  $N_t = 512, 4096$  ou  $32768$  de threads. La première consiste à mesurer l'efficacité  $E$  et l'accélération  $A$  du solver pour des simulations avec un temps physique de simulation fixé. Le coût des communications et synchronisations MPI peut ainsi être mesuré avec l'augmentation du nombre de threads. La seconde concerne la répartition des tâches, pour un seul pas de temps, des différents solvers Navier-Stokes et Interface ainsi que pour l'écriture des données. Toutes les mesures sont réalisées pour des simulations avec une seule ou aucune reconstruction du maillage lagrangien.

Pour la première campagne, les mesures s'appuient sur un temps de restitution  $t$  mesuré en secondes correspondant à un temps de simulation physique fixé à  $t_\phi = 15$ ms. Le nombre de pas de temps  $n\delta t$  pour atteindre  $t_\phi$  va alors augmenter avec  $N_t$ . En effet, l'aug-

mentation de la résolution globale du domaine avec  $N_t$  implique une diminution du pas d'espace  $\Delta x$  et entraîne celui du pas de temps  $\Delta t$  pour assurer la stabilité des schémas numériques, par contrainte CFL par exemple. Les paramètres de convergence du solveur pour la pression sont calibrés afin de conserver approximativement l'ordre de grandeur du paramètre de convergence  $\gamma$  défini par (2.10). Les figures 2.4(a) et 2.4(b) montrent respectivement l'efficacité et l'accélération en fonction du nombre de threads. On obtient une efficacité moyenne de 80% et une accélération presque linéaire soutenue jusqu'à 32768 threads, et ce avec ou sans reconstruction du maillage lagrangien pour l'interface. Comparés aux coût idéaux, l'impact des coûts de communications et synchronisations MPI est estimé entre 10% à 15% des performances globales du code.

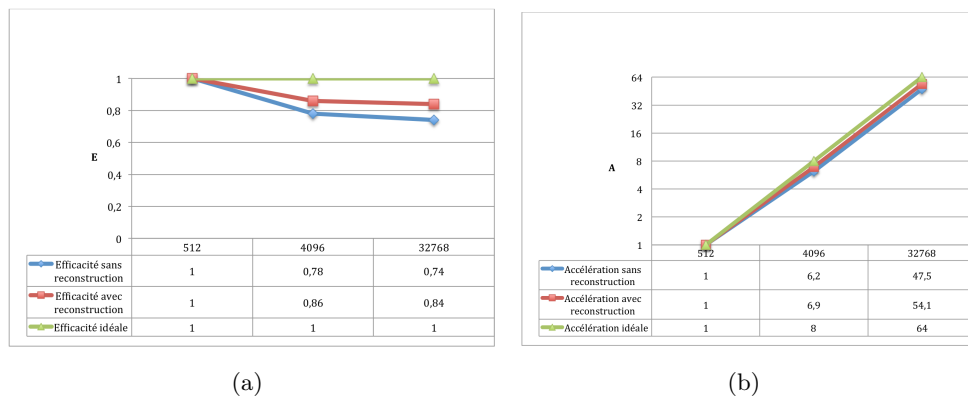


FIGURE 2.4 – (a) Efficacité et (b) accélération moyenne par pas de temps en fonction du nombre de threads mesurant les performances globales du solveur avec une seule ou sans reconstruction du maillage lagrangien.

La seconde campagne consiste à mesurer les taux de répartition des coûts relatifs aux différents modules du solveur en fonction du nombre de threads. Les mesures avec et sans reconstruction pour un seul pas de temps permettent ainsi d'estimer le coût éventuel des modules lorsque l'on exige une reconstruction du maillage lagrangien à chaque pas de temps durant la simulation. De la même façon, une troisième comparaison est considérée avec l'écriture des données. Les résultats sont montrés sur les figures 2.5(a) et 2.5(b). Comme attendu, le coût relatif à l'écriture des données d'entrées-sorties entre en jeu lorsqu'il est activé, et devient de moins en moins négligeable quand  $N_t \geq 4096$  threads. Avec ou sans reconstruction du maillage lagrangien pour l'interface, on observe

une diminution des coûts du solver pour l'interface avec l'augmentation du nombre de processus indiquant l'apport efficace de la parallélisation dans cette procédure. Il est à noter que même sans reconstruction du maillage, les marqueurs de l'interface sont quand même advectés. Inversement, on observe que le coût du solver Navier-Stokes augmente. Cependant, le coût du solver interface est nettement plus élevé que celui du solver Navier-Stokes lors de la reconstruction du maillage lagrangien.

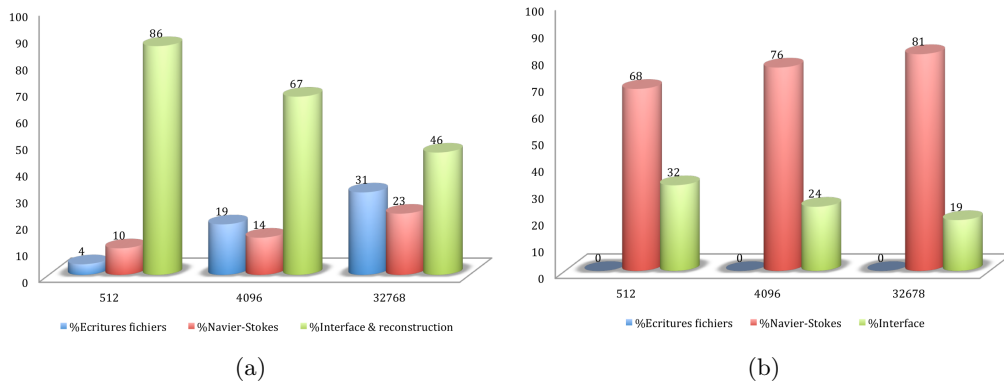


FIGURE 2.5 – Répartition des coûts du calcul pour le premier pas de temps numérique. (a) Sans et (b) avec reconstruction du maillage lagrangien et écriture des données.



---

## Chapitre 3

# Articles à paraître — Faraday instability on a sphere : Floquet analysis

The oscillation of a spherical viscous liquid drop subjected to radial parametric oscillation is considered. This is the spherical analogue of the Faraday instability. Modifying the [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#) planar Floquet solution to a spherical interface, we present a linear stability analysis for the appearance of standing waves.

### 3.1 Introduction

The dynamics of oscillating drops are of interest to researchers in pattern formation and dynamical systems as well as having practical applications over a wide variety of scales, in areas as diverse as astroseismology, containerless material processing for high purity crystal growth and drug delivery and mixing in microfluidic devices.

Surface tension is responsible for the spherical shape of a drop. In the absence of external forces, if the drop is slightly perturbed, it will recover its spherical shape through decaying oscillations. This problem was first considered by [Kelvin \(1863\)](#) and [Rayleigh \(1879\)](#), who described natural oscillations of drops of inviscid fluids. [Lamb \(1932\)](#) derived the now-classic resonance mode frequency resulting from the restoring force of surface

---

tension :

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\ell(\ell-1)(\ell+2)}{R^3} \quad (3.1)$$

where  $\omega$  is the frequency,  $\sigma$  and  $\rho$  the surface tension and density,  $R$  is the radius, and  $\ell$  is the degree of the spherical harmonic

$$Y_\ell^m = P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi} \quad (3.2)$$

describing the perturbation. Linear analyses including viscosity were carried out by [Reid \(1960\)](#), [Chandrasekhar \(1961\)](#) and [Miller and Scriven \(1968\)](#). These authors demonstrated the equivalence of this problem to that of a fluid globe oscillating under the influence of self-gravitation, generalizing the previous conclusion of Lamb. Chandrasekhar showed that the return to a spherical shape could take place via monotonic decay as well as via damped oscillations. The problem was further investigated by [Prosperetti \(1980\)](#) using an initial-value code. Weakly nonlinear effects in inviscid fluid drops were investigated by [Tsamopoulos and Brown \(1983\)](#) using a Poincaré-Lindstedt expansion technique.

Turning to the experimental literature, drops have been levitated by using acoustic or magnetic forces. One of the purposes of such experiments is to provide a measurement of the surface tension. [Trinh et al. \(1982\)](#) visualized the shapes and internal flow of vibrating drops and compared the frequencies to those of [Lamb \(1932\)](#) and the damping coefficients to those derived by [Marston \(1980\)](#). The experimental procedure cannot produce a perfectly spherical base state, and indeed, [Trinh and Wang \(1982\)](#) and [Cummings and Blackburn \(1991\)](#) discuss differences between oscillating oblate and prolate drops, and the resulting deviations from (3.1). By working in a microgravity environment, [Wang et al. \(1996\)](#) were able to confirm the decrease in frequency with increasing oscillation amplitude predicted by [Tsamopoulos and Brown \(1983\)](#).

Here, and in a companion paper, we consider a problem similar to these experiments, that of a viscous drop under the influence of a time-periodic radial bulk force and of surface tension. Our investigation relies on a variety of mathematical and computational tools. Here, we solve the linear stability problem by adapting to spherical coordinates the Floquet method of [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#). We find that the equations for the inviscid case reduce exactly to the Mathieu equation, as they do for the planar case, with merely a reassignment of the parameter definitions. In contrast, for the viscous case, the

spherical geometry leads to an additional term.

At the linear level, the instability depends only on the spherical wavenumber  $\ell$  of (3.2) as illustrated by the Lamb relation (3.1). Thus, perturbations can be assumed to be axisymmetric without loss of generality. Indeed, the theoretical, numerical and experimental investigations listed above have assumed that the drop shape remains axisymmetric. For the nonlinear problem, however, this is not so. In our complementary investigation (Ebo Adou et al., 2015), we will describe the results of full three-dimensional simulations which calculate the interface motion and the velocity field inside and outside the parametrically forced drop and interpret them in the context of the theory of pattern formation.

## 3.2 Governing equations

### 3.2.1 Equations of motion

We consider a drop of viscous, incompressible liquid bounded by a spherical free surface that separates the liquid from the exterior in the presence of an uniform radial oscillatory body force. The fluid motion inside the drop satisfies the Navier-Stokes equations

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \right] \mathbf{U} &= -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{U} - \rho G(r, t) \vec{e}_r \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3a)$$

where  $\mathbf{U}$  is the velocity,  $P$  the pressure,  $\rho$  the density and  $\eta$  the dynamic viscosity, and where  $G(r, t)$  is an imposed radial parametric acceleration given by

$$G(r, t) = (g - a \cos(\omega t)) \frac{r}{R} \quad (3.4)$$

The interface is located at

$$r = R + \zeta(\theta, \phi, t). \quad (3.5)$$

The boundary conditions applied at the interface are the kinematic condition, which states that the interface is advected by the fluid

---


$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \right] \zeta = U_r|_{r=R+\zeta} \quad (3.6)$$

and the interface stress balance equation, which is given by

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{\Pi}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} = \sigma \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) - \nabla \sigma \quad (3.7)$$

where  $\sigma$  is the surface tension coefficient and  $\mathbf{n}$  represents the unit outward normal to the surface. The tensors  $\mathbf{\Pi}$  (drop/medium) and  $\hat{\mathbf{\Pi}}$  (medium/drop) denote the stress tensor in each fluid and are defined by

$$\mathbf{\Pi} = -P\mathbf{I}_d + \eta \left[ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right]. \quad (3.8)$$

Since we consider a drop in a vacuum, we set the pressure and the stress tensor  $\hat{\mathbf{\Pi}}$  outside the drop to zero. The boundary conditions corresponding to the case of drop forced in a medium are described in the Appendix. We assume that the surface tension is uniform, so  $\nabla \sigma = 0$ . The tangential stress balance equation at the free surface then reduces to

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (3.9)$$

for both unit tangent vectors  $\mathbf{t}$ .

The normal stress jump boundary condition determines the curvature of the deformed interface. The divergence  $\nabla \cdot \mathbf{n}$  of the unit normal can be related to the mean curvature by the Laplace formula, leading to

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.10)$$

with  $R_1$  and  $R_2$  the principal radii of curvature at a given point of the surface.

For a sphere,  $R_1 = R_2 = R$  and equation (3.10) becomes

$$P|_{r=R} = 2 \frac{\sigma}{R} \quad (3.11)$$

and the solution to the governing equations (3.3a) and boundary conditions (3.6), (3.9),

(3.10) is the equilibrium spherical state at  $r = R$  with

$$\bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (3.12a)$$

$$\bar{P}(r, t) = 2\frac{\sigma}{R} - \int_r^R \rho G(r', t) dr' \quad (3.12b)$$

### 3.2.2 Linearizing the governing equations

We linearize the Navier-Stokes equations about the unperturbed state (3.12) by decomposing the velocity and the pressure

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u} \quad (3.13a)$$

$$P = \bar{P} + p \quad (3.13b)$$

which leads to the equation for the perturbation fields  $\mathbf{u}$  and  $p$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.14b)$$

We write the definitions in spherical coordinates of various differential operators :

$$\nabla_{H \cdot} \equiv \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \hat{e}_\theta \cdot + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \cdot \quad (3.15a)$$

$$\nabla_H \equiv \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.15b)$$

$$\nabla_H^2 \equiv \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.15c)$$

For a solenoidal field satisfying (3.14b), definitions (3.15c) lead to

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{u})_r &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_H^2 - \frac{2}{r^2} \right) u_r - \frac{2}{r} \nabla_H \cdot \mathbf{u}_H \\ &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \nabla_H^2 \right) u_r \\ &= \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r + \nabla_H^2 \right) u_r \equiv \tilde{\mathcal{L}}^2 u_r \end{aligned} \quad (3.15d)$$

We can then eliminate the horizontal velocity  $\mathbf{u}_H = (u_\theta, u_\phi)$  and the pressure  $p$  from (3.14a) in the usual way by operating with  $\vec{e}_r \cdot \nabla \times \nabla \times$  on (3.14a), leading to :

$$\tilde{\mathcal{L}}^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \tilde{\mathcal{L}}^2 \right) u_r = 0 \quad (3.16)$$

Since we are interested in the linear stability of the interface located at  $r = R + \zeta$ , we Taylor-expand the fields and their radial derivatives around  $r = R$  and retain only the lowest-order terms. It is then sufficient to compute the fields and their radial derivatives at  $r = R$ . The kinematic condition (3.6) becomes

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta = u_r|_{r=R} \quad (3.17)$$

We now wish to apply the stress balance equations at  $r = R$ . The components of the stress tensor which we will need are

$$\Pi_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right) \quad (3.18a)$$

$$\Pi_{r\phi} = \eta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right) \quad (3.18b)$$

$$\Pi_{rr} = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.18c)$$

We have from (3.9) that the tangential stress components must vanish at  $r = R$ , leading to :

$$\Pi_{r\theta}|_{r=R} = \Pi_{r\phi}|_{r=R} = 0 \quad (3.19)$$

Taking the horizontal divergence of  $\Pi_{r\theta} \hat{e}_\theta + \Pi_{r\phi} \hat{e}_\phi$  leads to

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_H \cdot (\Pi_{r\theta} \hat{e}_\theta + \Pi_{r\phi} \hat{e}_\phi)]_{r=R} \\ &= \eta \left[ \nabla_H \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right) + \nabla_H \cdot \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \hat{e}_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \hat{e}_\phi \right) \right]_{r=R} \\ &= \eta \left[ \nabla_H \cdot \nabla_H u_r + \frac{\partial}{\partial r} \nabla_H \cdot (u_\theta \hat{e}_\theta + u_\phi \hat{e}_\phi) \right]_{r=R} = \eta \left[ \left( \nabla_H^2 - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \right) u_r \right]_{r=R} \end{aligned} \quad (3.20)$$

which is the form of the tangential stress continuity equation that we impose.

We now turn to the normal stress balance equation :

$$-[\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}]_{r=R+\zeta} = \left[ \mathbf{n} \cdot \left( P\mathbf{I}_d - \eta \left[ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right] \right) \cdot \mathbf{n} \right]_{r=R+\zeta} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.21)$$

The right-hand-side of (3.21) is the curvature of a deformed interface and can be shown (Lamb, 1932, §275) to be, up to first order in  $\zeta$ ,

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_{r=R+\zeta} \approx \frac{2}{R} - \left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta \quad (3.22)$$

For the left-hand-side of (3.21), we use (3.12) to expand the pressure as

$$\left( \bar{P} + p \right)_{r=R+\zeta} \approx \left( \bar{P} + p \right)_{r=R} + \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} \right)_{r=R} \zeta = 2 \frac{\sigma}{R} + p|_{r=R} - \rho G(R, t) \zeta \quad (3.23)$$

Adding the term resulting from the viscosity leads to

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}|_{r=R+\zeta} \approx 2 \frac{\sigma}{R} + p|_{r=R} - \rho G(R, t) \zeta - 2\eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (3.24)$$

Multiplying (3.22) by  $\sigma$  and setting it equal to (3.24) leads to

$$p|_{r=R} - \rho G(R, t) \zeta - 2\eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=R} = -\sigma \left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta \quad (3.25)$$

It will be useful to take the horizontal Laplacian of (3.25) :

$$\nabla_H^2 p|_{r=R} = 2\eta \nabla_H^2 \frac{\partial}{\partial r} u_r|_{r=R} + \rho G(R, t) \nabla_H^2 \zeta - \sigma \nabla_H^2 \left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta \quad (3.26)$$

We can derive another expression for  $\nabla_H^2 p|_{r=R}$  by taking the horizontal divergence of (3.14a) :

$$\nabla_H^2 p = \frac{1}{r^2} \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \quad (3.27)$$

Setting equal the right-hand-sides of equations (3.27) and (3.26), we obtain the *pressure jump condition*



---


$$\left[ \frac{1}{r^2} \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) - 2\eta \nabla_H^2 \frac{\partial}{\partial r} u_r \right]_{r=R} = \rho G(R, t) \nabla_H^2 \zeta - \sigma \nabla_H^2 \left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta \quad (3.28)$$

This is the only equation in which the parametrical external forcing  $G(R, t)$  appears explicitly. We now have a set of linear equations (3.16), (3.17), (3.20) and (3.28) involving only  $u_r(r, \theta, \phi, t)$  and  $\zeta(\theta, \phi, t)$ , which reduce to the those for the planar case (Kumar and Tuckerman, 1994) in the limit of  $R \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Solution to linear stability problem

#### 3.3.1 Spherical Harmonic Decomposition

The equations simplify somewhat when we use the poloidal-toroidal decomposition

$$\mathbf{u} = \nabla \times (g \vec{e}_r) + \nabla \times \nabla \times (f \vec{e}_r) \quad (3.29)$$

The radial velocity component  $u_r$  depends only on the poloidal field  $f$  and is given by

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = -\nabla_H^2 f(r, \theta, \phi, t) \quad (3.30)$$

Using

$$\underbrace{\left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r + \nabla_H^2 \right)}_{\tilde{\mathcal{L}}^2} \nabla_H^2 = \nabla_H^2 \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nabla_H^2 \right)}_{\mathcal{L}^2} \quad (3.31)$$

we express (3.16) in terms of the poloidal field

$$\nabla_H^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \mathcal{L}^2 \right) \mathcal{L}^2 f = 0 \quad (3.32)$$

Functions are expanded in series of spherical harmonics  $Y_\ell^m(\theta, \phi) = P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$  satisfying

$$\nabla_H^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (3.33)$$

We write the deviation of the interface  $\zeta(t, \theta, \phi)$  and the scalar function  $f$  as

$$\zeta(t, \theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \zeta_{\ell}^m(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad \text{and} \quad f(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell}^m(r, t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (3.34)$$

The equations do not couple different spherical modes  $(\ell, m)$ , allowing us to consider each mode separately. The term multiplying  $\sigma \nabla_H^2 \zeta$  in the normal stress equation (3.28) becomes

$$\left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta_{\ell}^m = \left( \frac{2}{R^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right) \zeta_{\ell}^m = -\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{R^2} \zeta_{\ell}^m \quad (3.35)$$

The value  $\ell = 0$  corresponds to an overall expansion or contraction of the sphere, which is forbidden by mass conservation. The value  $\ell = 1$  corresponds to a shift of the drop, rather than a deformation of the interface, so that surface tension cannot act as a restoring force; it is included in this study only when the surface tension  $\sigma$  is zero and the constant radial bulk force  $g$  is non-zero.

The complete linear problem given by equations (3.32), (3.17), (3.20) and (3.28) is expressed in terms of  $f_{\ell}^m(r, t)$  and  $\zeta_{\ell}^m(t)$  as :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_{\ell}^m = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta_{\ell}^m = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} f_{\ell}^m|_{r=R} \quad (3.37)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_{\ell}^m|_{r=R} = 0 \quad (3.38)$$

$$\left[ \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} - \eta \left( \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \ell(\ell+1) \left( \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^3} \right) \right) \right) f_{\ell}^m \right]_{r=R} = - \left( \rho G(R, t) + \sigma \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{R^2} \right) \zeta_{\ell}^m \quad (3.39)$$

where we have used (3.30) and (3.33) and have divided through by  $\ell(\ell+1)/R^2$ .

---

### 3.3.2 Floquet Solution

The presence of the time-periodic term in (3.39) means that (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) comprise a Floquet problem. To solve it, we follow the Kumar and Tuckerman (1994) procedure, whereby  $\zeta_\ell^m$  and  $f_\ell^m$  are written in the Floquet form :

$$\zeta_\ell^m(t) = e^{(\mu+i\alpha)t} \sum_n \zeta_n e^{in\omega t} \quad \text{and} \quad f_\ell^m(r, t) = e^{(\mu+i\alpha)t} \sum_n f_n(r) e^{in\omega t} \quad (3.40)$$

where  $\mu+i\alpha$  is the Floquet exponent and we have omitted the indices  $(\ell, m)$ . Substituting the Floquet expansions (3.40) into (3.36) gives, for each temporal frequency  $n$

$$\left( \mu + i(n\omega + \alpha) - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_n = 0 \quad (3.41)$$

or

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - q_n^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_n(r) = 0 \quad (3.42)$$

where

$$q_n^2 \equiv \frac{\mu + i(n\omega + \alpha)}{\nu} \quad (3.43)$$

In order to solve the fourth-order differential equation (3.42), we first solve the homogeneous second-order equation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - q_n^2 \right) \tilde{f}_n = 0 \quad (3.44)$$

which is a modified spherical Bessel, or Riccati-Bessel, equation (Abramowitz and Stegun, 1965). The general solutions are of the form

$$\tilde{f}_n(r) = \tilde{B}_n r^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(iq_n r) + \tilde{D}_n^2 r^{\frac{1}{2}} J_{-(\ell+\frac{1}{2})}(iq_n r) \quad (3.45)$$

where  $J_{\ell+\frac{1}{2}}$  is the spherical Bessel function of half-integer order  $\ell + \frac{1}{2}$ .

The remaining second-order differential equation is

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_n = \tilde{f}_n \quad (3.46)$$

whose solutions are the general solutions of (3.42) and are given by

$$f_n(r) = A_n r^{\ell+1} + B_n r^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(iq_n r) + C_n r^{-\ell} + D_n r^{\frac{1}{2}} J_{-(\ell+\frac{1}{2})}(iq_n r) \quad (3.47)$$

Note that  $u_r \sim f_n/r^2$  satisfies (3.16). Eliminating the solutions in (3.47) which diverge at the center, we are left with :

$$f_n(r) = A_n r^{\ell+1} + B_n r^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(iq_n r) \quad (3.48)$$

The constants  $A_n$  and  $B_n$  can be related to  $\zeta_n$  by using the kinematic condition (3.37) and the tangential stress condition (3.38) which, for Floquet mode  $n$ , are

$$(\mu + i(n\omega + \alpha))\zeta_n = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} f_n|_{r=R} \quad (3.49)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_n|_{r=R} = 0 \quad (3.50)$$

Appendix 3.7 gives more details on the determination of these constants and also presents the solution and boundary conditions in the case for which the exterior of the drop is a fluid rather than a vacuum.

There remains the normal stress (pressure jump) condition (3.39), the only equation which couples temporal Floquet modes for different  $n$ . Writing

$$a \cos(\omega t) \sum_n \zeta_n e^{in\omega t} = a \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \sum_n \zeta_n e^{in\omega t} = \frac{a}{2} \sum_n (\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1}) e^{in\omega t} \quad (3.51)$$

and inserting the Floquet decomposition (3.40) into (3.39) leads to

$$\left[ \rho(\mu + i(n\omega + \alpha)) \frac{\partial}{\partial r} - \eta \left( \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \ell(\ell+1) \left( \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^3} \right) \right) f_n \right]_{r=R} + \left( \rho g + \sigma \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{R^2} \right) \zeta_n = \rho \frac{a}{2} (\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1}) \quad (3.52)$$

Using (3.79) and (3.80) to express the partial derivatives of  $f_n$  as multiples of  $\zeta_n$ , (3.52)

---

can be written as an eigenvalue problem with eigenvalues  $a$  and eigenvectors  $\{\zeta_n\}$

$$\mathcal{A}\zeta = a\mathcal{B}\zeta \quad (3.53)$$

The usual procedure for a stability analysis is to fix the wavenumber (here the spherical mode  $\ell$ ) and the forcing amplitude  $a$ , to calculate the exponents  $\mu + i\alpha$  of the growing solutions and to select that whose growth rate  $\mu(\ell, a)$  is largest. Following [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#), we instead fix  $\mu = 0$  and restrict consideration to two kinds of growing solutions, harmonic with  $\alpha = 0$  and subharmonic with  $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ . We then solve the problem (3.53) for the eigenvalues  $a$  and eigenvectors  $\{\zeta_n\}$  and select the smallest, or several smallest, real positive eigenvalues  $a$ . These give the marginal stability curves  $a(\ell, \mu = 0, \alpha = \frac{1}{2}\omega)$  and  $a(\ell, \mu = 0, \alpha = 0)$  without interpolation. The detailed procedure for the solution of the eigenvalue problem (3.53) are available in [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#); [Kumar \(1996\)](#).

### 3.4 Ideal fluid case and non-dimensionalization

For an ideal fluid drop ( $\nu = 0$ ) and for a given spherical harmonic  $Y_\ell^m$ , system (3.36) reduces to

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f(r, t) = 0 \quad (3.54)$$

We make the customary assumption that the vorticity is not only constant, as implied by (3.54), but zero. In this case, the solution which does not diverge at the drop center is of the form

$$f(r, t) = F(t)r^{\ell+1} \quad (3.55)$$

As the tangential stress is purely viscous in origin, only the kinematic condition (3.37) and the pressure jump condition across the interface (3.39) are applied. Using (3.55), these are reduced to :

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} F(t)R^{\ell+1} \quad (3.56)$$

$$(\ell + 1)\dot{F}(t)R^\ell = - \left( G(R, t) + \frac{\sigma}{\rho} \frac{(\ell - 1)(\ell + 2)}{R^2} \right) \zeta_\ell^m(t) \quad (3.57)$$

By differentiating (3.56) with respect to time and substituting into (3.57), we arrive at

$$\ddot{\zeta} = - \left( g \frac{\ell}{R} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\ell(\ell - 1)(\ell + 2)}{R^3} - a \frac{\ell}{R} \cos(\omega t) \right) \zeta \quad (3.58)$$

Focusing for the moment on the unforced equation, we define :

$$\omega_0^2 \equiv \left( g \frac{\ell}{R} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\ell(\ell - 1)(\ell + 2)}{R^3} \right) \quad (3.59)$$

Equation (3.59) is the spherical analogue of the usual dispersion relation for gravity-capillary waves in a plane layer of infinite depth, with the modifications

$$gk \rightarrow g \frac{\ell}{R} \quad (3.60a)$$

$$\frac{\sigma}{\rho} k^3 \rightarrow \frac{\sigma}{\rho} \frac{\ell(\ell - 1)(\ell + 2)}{R^3} \quad (3.60b)$$

The transformation (3.60a) can be readily understood by the fact that the wavelength of a spherical mode  $\ell$  is  $2\pi R/\ell$ . The transformation (3.60b) must be understood in light of the fact that an unperturbed sphere, unlike a planar surface, has a non-zero curvature term proportional to  $2\sigma/R$ , from which (3.60b) is derived as a deviation via (3.35). In the absence of a bulk force,  $g = 0$ , (3.59) becomes Rayleigh's formula [Rayleigh \(1879\)](#) for the eigenfrequencies of capillary oscillation of a spherical drop perturbed by a deformation characterized by spherical wavenumber  $\ell$ .

Using definitions (3.59) and

$$a_0 \equiv \frac{R\omega_0^2}{\ell} \quad (3.61)$$

and non-dimensionalizing time via  $\hat{t} \equiv t\omega$ , equation (3.58) can be converted to the Mathieu equation

$$\frac{d^2\zeta}{d\hat{t}^2} = - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( 1 - \frac{a}{a_0} \cos \hat{t} \right) \zeta \quad (3.62)$$

combining the multiple parameters  $g$ ,  $R$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $a$ ,  $\omega$  and  $\ell$  into only two,  $\omega/\omega_0$  and  $a/a_0$ . The stability regions of (3.62) are bounded by tongues which intersect the  $a = 0$  axis at

$$\omega = \frac{2}{n} \omega_0 \quad (3.63)$$

---

Thus the inviscid spherical Faraday linear stability problem reduces to the Mathieu equation, as it does in the planar case [Benjamin and Ursell \(1954\)](#). In a Faraday wave experiment or numerical simulation,  $\ell$ , unlike the other parameters, is not known a priori. Instead, in light of [\(3.59\)](#), equation [\(3.63\)](#) is a cubic equation which determines  $\ell$  given the other parameters, Both of the variables  $\omega/\omega_0$  and  $a/a_0$  contain the unknown  $\ell$  and so cannot be interpreted as simple non-dimensionalizations of  $\omega$  and  $a$ . (For the purely gravitational case,  $a_0 = g$  is independent of  $\ell$ .)

It is useful to examine [\(3.59\)](#) and [\(3.61\)](#) in the two limits of gravity and capillary waves. We first define nondimensional angular frequencies and oscillation amplitudes which do not depend on  $\ell$  :

$$\omega_g^2 \equiv \frac{g}{R} \quad a_g \equiv R\omega_g^2 = g \quad (3.64)$$

$$\omega_c^2 \equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} \quad a_c \equiv R\omega_c^2 \quad (3.65)$$

so that

$$\omega_0^2 = \omega_g^2 \ell + \omega_c^2 \ell(\ell - 1)(\ell + 2) \quad (3.66)$$

$$a_0 = a_g + a_c(\ell - 1)(\ell + 2) \quad (3.67)$$

The Bond number measuring the relative importance of the two forces can be written as :

$$Bo \equiv \frac{\rho g R^2}{\sigma} = \frac{\omega_g^2}{\omega_c^2} \quad (3.68)$$

In the gravity-dominated regime (large  $Bo$ ), we write [\(3.63\)](#) as

$$\omega^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \omega_g^2 \left[ \ell + \frac{1}{Bo} \ell(\ell - 1)(\ell + 2) \right] \quad (3.69)$$

The stability boundaries for  $1/Bo = 0$  are given in figure [3.1\(a\)](#). The subharmonic and harmonic tongues originate at  $\omega/\omega_g = 2\sqrt{\ell}$  and  $\omega/\omega_g = \sqrt{\ell}$ .

In the capillary-dominated regime (small  $Bo$ ) it is more appropriate to write [\(3.63\)](#) as

$$\omega^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \omega_c^2 [\ell(\ell - 1)(\ell + 2) + Bo \ell] \quad (3.70)$$

The stability boundaries for  $Bo = 0$  are given in figure [3.1\(b\)](#) in terms of  $\omega/\omega_c$  and

$a/a_c$ . These consist of families of tongues, which originate on the  $a = 0$  axis at  $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}/n$  for  $\ell = 2, 3, 4, 5$  and for  $n = 1, 2, \dots$  within which the drop has one of the spatial forms corresponding to the spherical wavenumber  $\ell$  and oscillates like  $e^{in\omega t/2}$ . The solid curves bound the first subharmonic instability tongues, which originate on the  $a = 0$  axis at  $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}$  for  $\ell = 2, 3, 4, 5$ , within which the drop oscillates like  $e^{i\omega t/2}$ . The dashed curves bound the first harmonic tongues, originating at  $\omega/\omega_c = \sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}$  describing a response like  $e^{i\omega t}$ . Tongues for higher  $n$  are located at still lower values of  $\omega$ .

The curves in figure 3.1 for different  $\ell, g, \sigma/\rho, R$  all collapse onto a single set of tongues when they are plotted in terms of  $\omega/\omega_0$  and  $a/a_0$ . This is shown in figure 3.2, in which the various tongues correspond to the temporal harmonic index  $n$ . In order to use figure 3.2 to determine whether the drop is stable against perturbations with spherical wavenumber  $\ell$  when a radial force with amplitude  $a$  and angular frequency  $\omega$  is applied, the following procedure must be used.

For each  $\ell$ , formulas (3.59) and (3.61) are used to determine the values of  $(\omega_0, a_0)$ . If  $(\omega/\omega_0, a/a_0)$  is inside one of the instability tongues (usually, but not always, that corresponding to an  $\omega/2$  response with  $n = 1$ ) then the drop is unstable to perturbations of that  $\ell$ . The drop is stable if  $(\omega/\omega_0, a/a_0)$  lies outside the tongues for all  $\ell$  and all  $n$ . This is the procedure described by Benjamin and Ursell (1954) and carried out by Batson et al. (2013) in a cylindrical geometry.

Because  $(\omega/\omega_0, a/a_0)$  depends on the unknown  $\ell$ , an experimental or numerical choice of parameters cannot immediately be assigned to a point in figure 3.2, rendering its interpretation somewhat more obscure. It is perhaps because of this that investigations of the Faraday instability are often presented in dimensional terms. Figures like 3.1(a) and (b), in which the two axes are non-dimensional quantities defined in terms of known parameters, represent a good compromise between universality and ease of use. This treatment can also be applied to non-spherical geometries in which the unperturbed surface is flat and the depth is finite.

### 3.5 Viscous fluids

We now return to the viscous case. For a viscous fluid, it is not possible to reduce the governing equations to a Mathieu equation even with the addition of a damping term,



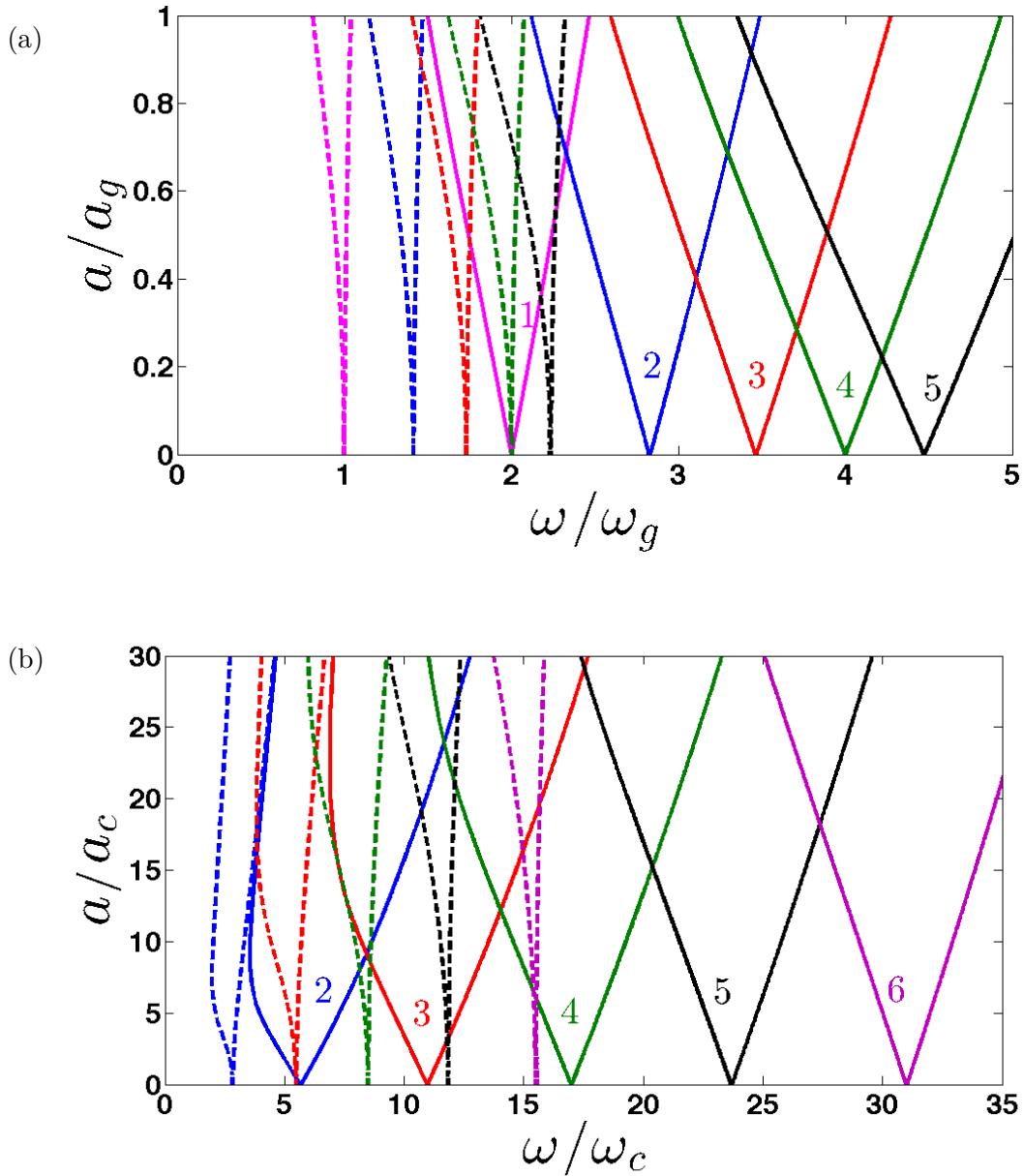


FIGURE 3.1 – Instability tongues for instability due to oscillatory forcing of amplitude  $a$  and angular frequency  $\omega$ . Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers  $\ell = 1, 2, 3, 4$  originate at  $\omega/\omega_g = 2\sqrt{\ell}/n$ . (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers  $\ell = 2, 3, 4, 5$  originate at  $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)}/n$ , with  $n$  odd (even) for subharmonic (harmonic) tongues.

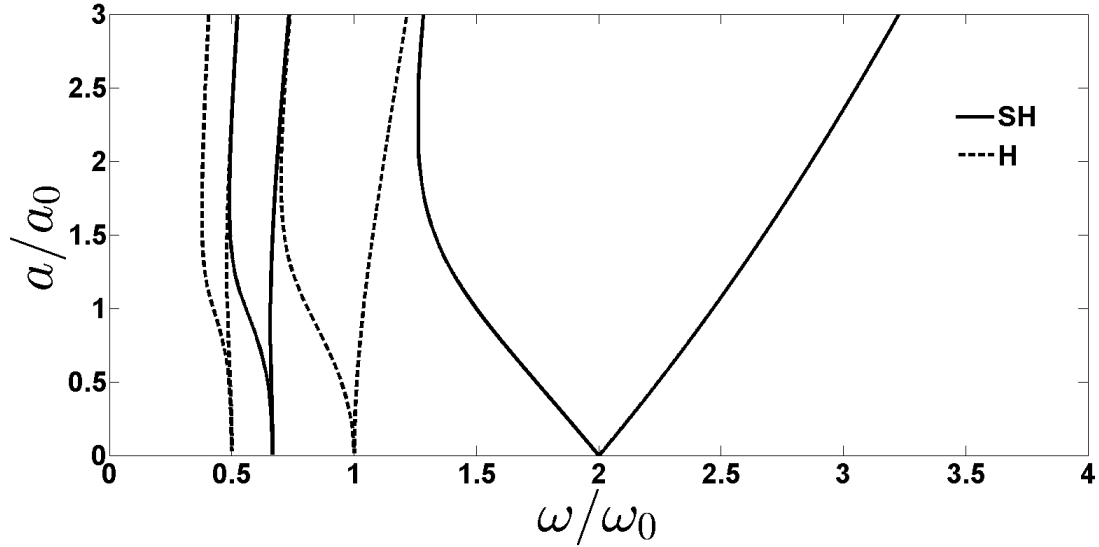


FIGURE 3.2 – Instability tongues due to oscillatory forcing of amplitude  $a$  and angular frequency  $\omega$ . Tongues correspond to the temporal harmonics index with  $n$  odd (even) subharmonic (harmonic) response. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongue.

[Kumar and Tuckerman \(1994\)](#). As described in section 3.3.2, the governing equations and boundary conditions are reduced to an eigenvalue problem, whose solution gives the critical oscillation amplitude  $a$ . Figure 3.3 displays the regions of instability for a drop of viscous fluid subjected to a radial oscillatory force. We use the same conventions as we did for the ideal fluid case, treating capillary and gravitational instability separately and plotting the stability boundaries in units of  $\omega_c$ ,  $\omega_g$ ,  $a_c$ ,  $a_g$ . The viscosity for the gravitational case is  $\nu/\sqrt{gR^3} = 0.07$ ; that for the capillary case, is  $\nu/\sqrt{\sigma R/\rho} = 0.09$ . Viscosity smoothes the instability tongues and displaces the critical forcing amplitude towards higher values. Figure 3.4 presents the same data, but scaled by  $\omega_0$  and  $a_0$ , and demonstrates that, unlike in the inviscid case, this scaling does not make all the curves collapse onto a single one.

### 3.6 Discussion

We have considered a configuration similar to the classic problem of freely oscillating liquid drops, that of a viscous drop under the influence of a time-periodic radial bulk force and of surface tension. Here, we have carried out a linear stability analysis, while

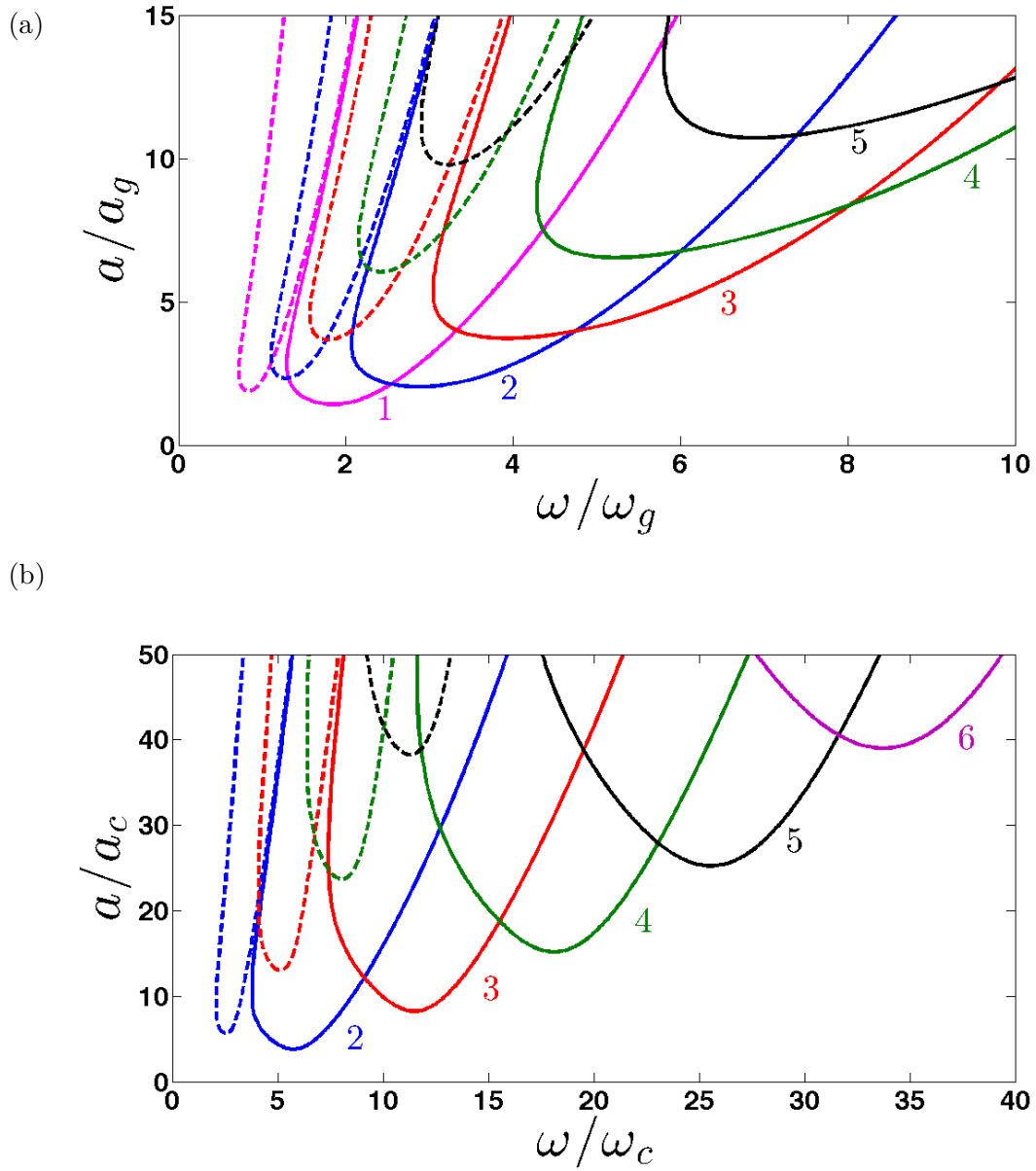


FIGURE 3.3 – Instability tongues for instability due to oscillatory forcing of amplitude  $a$  and angular frequency  $\omega$  for a viscous fluid drop. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers  $\ell = 1, 2, 3, 4$ . (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers  $\ell = 2, 3, 4, 5$ .

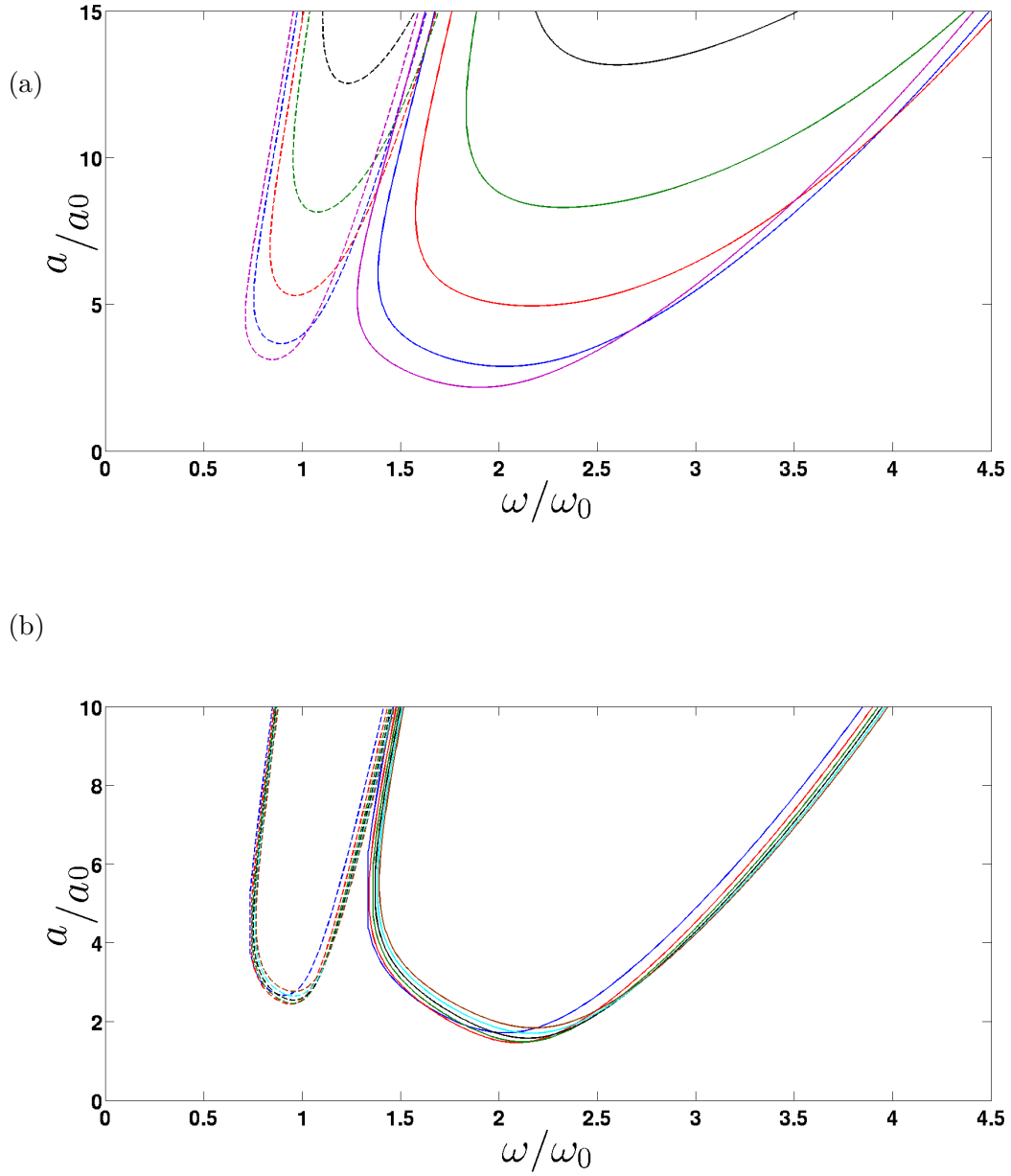


FIGURE 3.4 – Same as figure 3.3, but plotted in terms of  $\omega_0$  and  $a_0$ . (a) Gravitational case with stronger viscosity (b) Capillary case with weaker viscosity.

---

in a companion paper [Ebo Adou et al. \(2015\)](#), we describe the results of a full numerical simulation. We believe both of these investigations to be the first of their kind.

Our investigation relies on a variety of mathematical and computational tools. We have solved the linear stability problem by adapting to spherical coordinates the Floquet method of [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#). The solution method uses a spherical harmonic decomposition in the angular directions and a Floquet decomposition in time to reduce the problem to a series of radial equations, whose solutions are monomials and spherical Bessel functions.

We find that the equations for the inviscid case reduce exactly to the Mathieu equation, as they do for the planar case [Benjamin and Ursell \(1954\)](#), with merely a reassignment of the parameter definitions. In contrast, for the viscous case, the spherical geometry leads to additional geometry-specific terms.

## 3.7 Appendix

### 3.7.1 Boundary conditions for the two-fluid case

We describe here the modifications necessary in order to take into account the fluid medium surrounding the drop of radius  $R$ , occupying either a finite sphere of radius  $R_{\text{out}}$  or an infinite domain. The inner and outer density, dynamic viscosity and poloidal fields are denoted by  $\rho_j$ ,  $\eta_j$ , and  $f^{(j)}$  for  $j = 1, 2$ .  $\Delta\Psi \equiv \left[ \Psi^{(2)} - \Psi^{(1)} \right]_{r=R}$  denotes the jump of any quantity  $\Psi$  across the interface and applies to all quantities to its right within a term. For each spherical harmonic wavenumber  $\ell$  and each Floquet mode  $n$ , the poloidal fields  $f_n^{(j)}$  given in [\(3.47\)](#) are as follows :

$$f_n^{(1)}(r) = A_n^{(1)} r^{\ell+1} + B_n^{(1)} r^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(iq_n^{(1)} r) \quad (3.71a)$$

$$f_n^{(2)}(r) = A_n^{(2)} r^{\ell+1} + B_n^{(2)} r^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(iq_n^{(2)} r) + C_n^{(2)} r^{-\ell} + D_n^{(2)} r^{\frac{1}{2}} J_{-(\ell+\frac{1}{2})}(iq_n^{(2)} r) \quad (3.71b)$$

where

$$q_n^{(j)} \equiv \left[ \frac{\mu + i(n\omega + \alpha)}{\nu^{(j)}} \right]^{1/2} \quad (3.72)$$

The introduction of four more constants requires four additional conditions. Two of these are provided by the exterior boundary conditions. The relations

$$0 = u_r = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f \quad (3.73a)$$

$$0 = \nabla_H \cdot \mathbf{u}_H = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \ell(\ell+1) \quad (3.73b)$$

imply that both  $f_n^{(2)}$  and its radial derivative must vanish at  $R_{\text{out}}$  :

$$0 = f_n^{(2)}(R_2) = f_n^{(2)'}(R_2) \quad (3.74)$$

If the exterior is infinite, then  $A_n^{(2)} = B_n^{(2)} = 0$ ; otherwise equations (3.74) couple the six constants. Continuity of the velocity at  $r = R_1$ , together with (3.73) provides the remaining two additional conditions :

$$0 = \Delta f = \Delta f' \quad (3.75)$$

The kinematic condition (3.49) remains unchanged :

$$(\mu + i(n\omega + \alpha))\zeta_n = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} f_n|_{r=R} \quad (3.76)$$

since  $f$  is continuous across the interface, while the tangential stress condition (3.50) becomes

$$0 = \Delta \left[ \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f_n \right] \quad (3.77)$$

The pressure jump condition (3.52) becomes

$$0 = \Delta \left[ \rho(\mu + i(n\omega + \alpha)) \frac{\partial}{\partial r} - \eta \left( \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \ell(\ell+1) \left( \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^3} \right) \right) f_n \right. \\ \left. + \left( \rho g + \sigma \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{R^2} \right) \zeta_n - \rho \frac{a}{2} (\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1}) \right] \quad (3.78)$$

where  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\partial^2 f / \partial r^2$  and  $\partial^3 f / \partial r^3$  are all discontinuous across the interface.

### 3.7.2 Differentiation relations

We express the governing equations in terms of the constants  $A_n, B_n, C_n, D_n$  via

$$f_n(r) = A_n r^{\ell+1} + B_n r^{\frac{1}{2}} J_+ + C_n r^{-\ell} + D_n r^{\frac{1}{2}} J_- \quad (3.79a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} f_n(r) &= A_n (\ell+1) r^\ell + B_n \left( \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_+ + i q_n r^{\frac{1}{2}} J'_+ \right) \\ &\quad - C_n \ell r^{-\ell-1} + D_n \left( \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_- + i q_n r^{\frac{1}{2}} J'_- \right) \end{aligned} \quad (3.79b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f_n(r) &= A_n \ell(\ell+1) r^{\ell-1} + B_n \left( -\frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} J_+ + i q_n r^{-\frac{1}{2}} J'_+ + q_n^2 r^{\frac{1}{2}} J''_+ \right) \\ &\quad + C_n \ell(\ell+1) r^{-\ell-2} + D_n \left( -\frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} J_- + i q_n r^{-\frac{1}{2}} J'_- - q_n^2 r^{\frac{1}{2}} J''_- \right) \end{aligned} \quad (3.79c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial r^3} f_n(r) &= A_n (\ell+1)\ell(\ell-1) r^{\ell-2} + B_n \left( \frac{3}{8} r^{-\frac{5}{2}} J_+ - \frac{3}{4} i q_n r^{-\frac{3}{2}} J'_+ - \frac{3}{2} q_n^2 r^{-\frac{1}{2}} J''_+ - i q_n^3 r^{\frac{1}{2}} J'''_+ \right) \\ &\quad - C_n \ell(\ell+1)(\ell+2) r^{-\ell-3} + D_n \left( \frac{3}{8} r^{-\frac{5}{2}} J_- - \frac{3}{4} i q_n r^{-\frac{3}{2}} J'_- - \frac{3}{2} q_n^2 r^{-\frac{1}{2}} J''_- - i q_n^3 r^{\frac{1}{2}} J'''_- \right) \end{aligned} \quad (3.79d)$$

where  $J_+$  and  $J_-$  denote  $J_{\ell+\frac{1}{2}}$  and  $J_{-(\ell+\frac{1}{2})}$ , respectively, to be evaluated at  $i q_n^{(j)} R$ . To evaluate the derivatives of the Bessel functions, we use the recurrence relations :

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)) \quad (3.80a)$$

$$J''_\nu(z) = \frac{1}{4} (J_{\nu-2}(z) - 2J_\nu(z) + J_{\nu+2}(z)) \quad (3.80b)$$

$$J'''_\nu(z) = \frac{1}{8} (J_{\nu-3}(z) - 3J_{\nu-1}(z) + 3J_{\nu+1}(z) - J_{\nu+3}(z)) \quad (3.80c)$$

For the two-fluid case, we express the seven conditions (3.74), (3.75), (3.76), (3.77) and (3.78) in terms of the constants  $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}, C_n^{(j)}, D_n^{(j)}$ , and  $\zeta_n$ . For the single-fluid case, we express the three conditions (3.49), (3.50), (3.52) in terms of  $A_n, B_n$ , and  $\zeta_n$ . Omitting the pressure jump condition leads to a  $6 \times 6$  (finite outer sphere),  $4 \times 4$  (infinite outer sphere), or  $2 \times 2$  (single fluid) system which can be inverted to obtain values for all of the constants as multiples of  $\zeta_n$ . The pressure jump condition is then a Floquet problem in  $\{\zeta_n\}$ , solved as described in section 3.3.2.

## Chapitre 4

# Articles à paraître — Faraday instability on a sphere : Numerical simulation

We consider a spherical variant of the Faraday problem, in which a spherical drop is subjected to a time-periodic bulk force, as well as surface tension. We use a full three-dimensional parallel front-tracking code to calculate the interface motion of the parametrically forced oscillating viscous drop, as well as the velocity field inside and outside the drop. Forcing frequencies are chosen so as to excite spherical harmonic wavenumbers ranging from 1 to 6. We excite gravity waves for wavenumbers 1 and 2 and observe translational and oblate-prolate oscillation, respectively. For wavenumbers 3 to 6, we excite capillary waves and observe patterns analogous to the Platonic solids. For this low-viscosity case, both subharmonic and harmonic responses are accessible. The patterns arising in each case are interpreted in the context of the theory of pattern formation with spherical symmetry.

### 4.1 Introduction

The [Faraday \(1831\)](#) instability, in which the interface between two superposed fluid layers subjected to periodic vertical vibration of sufficient amplitude forms sustained standing wave patterns, has been instrumental in the study of pattern formation leading to the discovery and analysis of hydrodynamic quasipatterns ([Edwards and Fauve, 1994](#);



---

Rucklidge and Skeldon, 2015), superlattices (Kudrolli et al., 1998; Silber and Proctor, 1998; Arbell and Fineberg, 2002), supersquares (Douady, 1990; Kahouadji et al., 2015) and other exotic patterns (Périnet et al., 2012; Rajchenbach et al., 2011).

Here, we consider a spherical analogue to the Faraday instability, that of a fluid drop subjected to a time-periodic radial bulk force. The laboratory realization of any configuration with only spherically symmetric radially directed forces is difficult, if not impossible. Indeed such experiments are sent into space (Wang et al., 1996; Futterer et al., 2013) in order to eliminate or reduce the perturbing influence of the vertically directed gravitational field of the Earth. Investigations of acoustically levitated drops excited by electric modulation Shen et al. (2010) or of drops and puddles weakly pinned on a vibrating substrate, Brunet and Snoeijer (2011) have produced star-like patterns, but in both configurations the basic state is necessarily oblate rather than spherical. The study of such problems therefore relies particularly on numerical simulation.

Numerical studies of axisymmetric oscillating viscous drops have been carried out numerically by Lundgren and Mansour (1988) via a boundary-integral method, by Patzek et al. (1991) and Meradji et al. (2001) via a Galerkin/finite-element method, and by Basaran (1992) via a marker-in-cell initial-value problem. Indeed, the problem of axisymmetric ellipsoidal drop oscillation and decay has now come to be seen as a routine validation test case for numerical codes and interface methods for multiphase flows. However, the full non-linear problem is non-axisymmetric and requires three-dimensional numerical simulation with interface algorithms that ensure volume conservation and precise calculation of capillary forces as well as the ability to integrate highly spatially resolved systems over long physical times.

Recent advances have led to powerful general purpose codes such as Popinet’s Gerris code (Popinet, 2003) and BLUE (Shin et al., 2015). It is with the multiphase code BLUE, which is based on recently developed front tracking interface methods implemented on parallel computer architectures, that we conduct the current study. We have previously used this code to study large-scale square patterns of Faraday waves (Kahouadji et al., 2015). Here, we use BLUE to carry out the first numerical investigation of the Faraday problem on a sphere.

One of the most appealing aspects of the Faraday instability is that the pattern length scale is not set by the geometry, but by the imposed forcing frequency. This means that for a drop with a fixed radius  $R$ , patterns can be created with any wavenumber  $\ell$ , where

the interface is described via its spherical harmonic decomposition

$$\zeta(t, \theta, \phi) = R + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \zeta_{\ell,m}(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (4.1)$$

Unlike the wavenumber in a planar geometry,  $\ell$  does not set a length scale but rather a set of allowed patterns. Each value of  $\ell$  leads to a qualitatively different situation. We will explore the motion and shape of an oscillating drop that results for values of  $\ell$  up to 6.

## 4.2 Methods

### 4.2.1 Pattern formation on a sphere

Our companion paper ([Ebo Adou and Tuckerman, 2015](#)) concerns the linear stability, via Floquet analysis, of the spherical Faraday problem. As is the case for all spherically symmetric problems, the equation governing the linear stability does not depend on the order  $m$  of the spherical harmonic. Therefore, a bifurcation from the spherically symmetric state involves  $2\ell + 1$  linearly independent solutions ( $Y_{\ell}^m$  with  $-\ell \leq m \leq \ell$ ) with the same growth rate. The combination of these modes, i.e. the pattern, that can result from such a bifurcation is determined by the nonlinear terms.

A pattern with a given  $\ell$  cannot be associated with a unique combination of modes  $m$ , since rotation of a spherical harmonic changes  $m$  (but not  $\ell$ ). Spherical harmonics are sometimes classified as zonal ( $m = 0$ , independent of  $\phi$ , nodal lines which are circles of constant latitude), sectoral ( $m = \pm\ell$ , independent of  $\phi$ ), sectoral ( $m = \pm\ell$ , independent of  $\theta$ , nodal lines which are circles of constant longitude), or tesseral ( $m \neq 0, \pm\ell$ , checkered). This classification as well depends on the orientation of the spherical harmonic.

Symmetry groups provide a classification of patterns which does not depend on orientation. A number of researchers ([Busse, 1975](#); [Busse and Riahi, 1982](#); [Riahi, 1984](#); [Ihrig and Golubitsky, 1984](#); [Golubitsky et al., 1988](#); [Chossat et al., 1991](#); [Matthews, 2003](#)) have studied the patterns which are allowed and those which are preferred for various values of  $\ell$ . Patterns that appear at bifurcations can be associated with a subgroup of the group  $O(3)$  of symmetries of the sphere. The subgroups of interest are  $O(2)$ ,  $D_m$ , and the

---

exceptional subgroups  $T$ ,  $O$ , and  $I$ .  $O(2)$  consists of the symmetries of a circle ; patterns which are axisymmetric (for some orientation) are in this category.  $D_k$  describes the symmetries of an  $k$ -gon, and thus patterns which are invariant under reflection and rotation by  $2\pi/k$  (about a fixed axis). The three exceptional subgroups are associated with the five Platonic solids :  $T$  (tetrahedron),  $O$  (octahedron or cube), and  $I$  (icosahedron or dodecahedron).

The Platonic solids are regular polyhedra. Although a drop does not have angular vertices and flat faces, a polyhedron with the same symmetry properties by assigning a local maximum on the surface to a vertex and a local minimum to a face. The dual of a polyhedron is obtained by inverting its vertices with its faces, an operation which preserves symmetry. Similarly, the dual of a drop can be formed by inverting maxima and minima. An oscillating drop provides an ideal opportunity to observe duality : since a location which is the site of a maximum contains a minimum after half of an oscillation period, the interface alternates between a pattern and its dual. For the Platonic solids, the dual of an octahedron is a cube, that of an icosahedron is a dodecahedron and the dual of a tetrahedron is another tetrahedron.

The results are highly dependent on the value of  $\ell$  considered. Axisymmetric (zonal) solutions are never stable if  $\ell \geq 2$  (Chossat et al., 1991). For odd  $\ell$ , solutions exist which are stable at onset. In contrast, for even  $\ell$ , all solutions are unstable near the bifurcation point. In this case, the preferred solution is considered to be that with the smallest number of unstable eigenvalues (Matthews, 2003). Unstable solution branches produced at a transcritical bifurcation can be stabilized, for example at a saddle-node bifurcation some distance from the threshold.

The theory of pattern selection with  $O(3)$  symmetry differs from the framework of our simulations in some important ways. First, the theory applies to steady bifurcations rather than oscillatory solutions resulting from time-periodic forcing. The underlying application is usually Rayleigh-Bénard convection in a sphere (Busse, 1975; Busse and Riahi, 1982; Riahi, 1984) and the steady symmetry-breaking bifurcations it undergoes. However, many of their conclusions can be generalized to the time-periodic context, by considering the discrete-time dynamical system derived by sampling the continuous-time system at a single phase of the forcing period.

A second difference is numerical : in particular, our simulations do not respect spherical symmetry. An initial set of simulations is carried out in a cubical domain, with a

surrounding fluid whose density is much lower than that of the drop so as to minimize its effect on the drop. In order to correct this, and as our computational capabilities expanded, a solid bounding sphere was inscribed in the cubical domain, providing an approximation to a spherical boundary. Nonetheless, the Cartesian grid remains and continues to exert a cubical influence on our simulations.

Finally, the theory applies close to the threshold. Our simulations are carried out far from threshold, so that instabilities can grow on a reasonable timescale and stabilize at an amplitude that can be clearly seen. Our patterns contain modes generated by nonlinear interactions which are absent from the theory, and their existence or stability may result from secondary bifurcations.

Despite these differences, we will see that there is a great deal of common ground between the patterns we observe and those predicted by theory.

#### 4.2.2 Problem formulation, governing equations and numerical scheme

The governing equations for an incompressible two-phase flow can be expressed by a single field formulation :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{G} + \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) + \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{u}$  is the velocity,  $P$  is the pressure,  $\rho$  is the density,  $\mu$  is the dynamic viscosity,  $\mathbf{G}$  represents the homogeneous volume forces, and  $\mathbf{F}$  is the local surface tension force at the interface. Here,  $\mathbf{G}$  contains the gravitational term supplemented by a time-dependent radial force accounting for the vibrations of the domain :

$$\mathbf{G} = - \left( g + a \cos(\omega t) \right) \frac{r}{R} \mathbf{e}_r \quad (4.3)$$

where  $g$  is the gravitational acceleration,  $\mathbf{e}_r$  is the radial unit vector,  $a$  is the amplitude of the inertial forcing and  $\omega$  its frequency.

Material properties such as density or viscosity are defined in the entire domain :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) I(\mathbf{x}, t) \\ \mu(\mathbf{x}, t) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) I(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

The indicator function,  $I$ , is a numerical Heaviside function, ideally zero in one phase

---

and one in the other phase.  $I$  is resolved with a sharp but smooth transition across 3 to 4 grid cells and is generated using a vector distance function computed directly from the tracked interface (Shin and Juric, 2009).

The fluid variables  $\mathbf{u}$  and  $P$  are calculated by a projection method (Chorin, 1968). The temporal scheme is first order, with implicit time integration used for the viscous terms. For spatial discretization we use the staggered-mesh marker-in-cell (MAC) method (Harlow and Welch, 1965) on a uniform finite-difference grid with second-order essentially non-oscillatory (ENO) advection (Shu and Osher, 1989). The pressure and distance function are located at cell centers while the  $x$ ,  $y$  and  $z$  components of velocity are located at the faces. All spatial derivatives are approximated by standard second-order centered differences. The treatment of the free surface uses a hybrid Front-Tracking/Level-Set technique which defines the interface both by a discontinuous density field on the Eulerian grid as well as by triangles on the Lagrangian interface mesh.

The surface tension  $\mathbf{F}$  is implemented by the hybrid/compact formulation (Shin, 2007)

$$\mathbf{F} = \sigma \kappa_H \nabla I, \quad \kappa_H = \frac{\mathbf{F}_L \cdot \mathbf{N}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}} \quad (4.5)$$

where  $\sigma$  is the surface tension coefficient assumed to be constant and  $\kappa_H$  is twice the mean interface curvature field calculated on the Eulerian grid, with

$$\mathbf{F}_L = \int_{\Gamma(t)} \kappa_f \mathbf{n}_f \delta_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds, \quad \mathbf{N} = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{n}_f \delta_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \quad (4.6)$$

Here,  $\mathbf{x}_f$  is a parameterization of the time-dependent interface,  $\Gamma(t)$ , and  $\delta_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)$  is a Dirac distribution that is non-zero only where  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f$ ;  $\mathbf{n}_f$  stands for the unit normal vector to the interface and  $ds$  is the length of an interface element;  $\kappa_f$  is twice the mean interface curvature obtained on the Lagrangian interface. The geometric information, unit normal,  $\mathbf{n}_f$ , and interface element length,  $ds$  in  $\mathbf{N}$  are computed directly from the Lagrangian interface and then distributed onto the Eulerian grid using the discrete delta function and the immersed boundary method of Peskin (1977). A detailed description of the procedure for calculating  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{N}$  and  $I$  can be found in Shin and Juric (2007).

The Lagrangian interface is advected by integrating  $d\mathbf{x}_f/dt = \mathbf{V}$  with a second-order Runge-Kutta method where the interface velocity,  $\mathbf{V}$ , is interpolated from the Eulerian velocity.

The parallelization of the code is based on algebraic domain decomposition, where the velocity field is solved by a parallel generalized minimum residual (GMRES) method for the implicit viscous terms and the pressure by a parallel multigrid method motivated by the algorithm of Kwak and Lee (2004). Communication across process threads is handled by message passing interface (MPI) procedures.

The code also contains a module for the definition of immersed solid objects and their interaction with the flow, which we have used to simulate Faraday waves in a spherical container. In our case, in order to simulate a fluid within a solid sphere we take the simple approach of defining all grid cells whose centers lie within the solid region as solid. Then the usual velocity and pressure boundary conditions are applied to those cell faces as in the projection method at conventional no-slip domain boundaries. On a Cartesian grid this necessarily creates a stair-stepped solid/fluid boundary, however it is found that the method works well in practice and is simpler than and equivalent to other approaches which impose a near wall force to ensure a no-slip condition at the solid (Tryggvason et al., 2011).

Further details are available in Shin et al. (2015).

### 4.2.3 Physical and numerical parameters

Our numerical code, like our Floquet analysis, can treat inner and outer spherical domains of any size containing fluids of any density  $\rho$ , viscosity  $\nu$ , and surface tension  $\sigma$ , leading potentially to at least five non-dimensional parameters, in addition to the two describing the forcing amplitude and frequency. We have chosen to limit the parameter space as follows.

The high density ratio ( $\rho_d/\rho_{\text{out}} = 8 \times 10^4$ ) between the inner and outer fluid minimizes the effect of the outer fluid.

The viscosity of both fluids is sufficiently low that the stability diagram approaches that of the Mathieu equation. (One of the conclusions of our companion paper is that the Mathieu equation describes the inviscid Faraday instability even in a spherical geometry.) More specifically,  $\nu_d/(R^2\omega)$  is between 0.0003 and 0.0006 for the capillary cases and 0.002 and 0.0006 for the gravitational cases. Thus, the configuration we have simulated is close to an inviscid fluid drop in a vacuum. Usually, Faraday waves are subharmonic, i.e. their period is twice the forcing period  $T$ . However, in this low-viscosity regime, we can easily

$\ell$	Temporal	Initial Condition	Forcing		Final Pattern
	Response		Amplitude	Frequency	
		Gravitational	$a/a_g$	$\omega/\omega_g$	
1	subharmonic	spherically symmetric	0.26	1.96	Translational
2	harmonic	axisymmetric	0.50	1.37	Prolate-Oblate
		Capillary	$a/a_c$	$\omega/\omega_c$	
3	subharmonic	spherically symmetric	13.53	13.21	Tetrahedral
4	subharmonic	spherically symmetric	5.07	16.61	Cubic-Octahedral
5	subharmonic	axisymmetric	22.00	25.02	$D_4$
6	subharmonic	icosahedral	16.07	30.63	Cubic-Octahedral

TABLE 4.1 – Parameters of imposed forcing and of the observed response.

excite harmonic waves as well, whose period is the same as the forcing period (Kumar, 1996). Although our thresholds are close to the inviscid ones, the Reynolds number is not large, since the velocity depends on the forcing amplitude  $a$  so that  $Re \sim aR/(\omega\nu_d) \simeq O(100)$ .

The domain is either a cube whose half-side is  $5R/3$ , or a sphere whose radius is  $2R$  inscribed in a cube of half-side  $2R$ . See figures 4.2 and 4.4. In both cases, the mesh is Cartesian. The domain is divided into subdomains, each of which contains  $32^3$  gridpoints and assigned to a process thread. Unless otherwise stated, our resolution is  $64^3$ , for which we use  $2^3 = 8$  subdomains and processes. For a few cases, we have carried out simulations with a resolution of  $256^3$ , for which we use  $8^3 = 512$  subdomains and processes. Except for the case described in section 4.3.1, we obtained the same patterns as with the lower resolution. We take about 2000 timesteps per forcing period  $T$ .

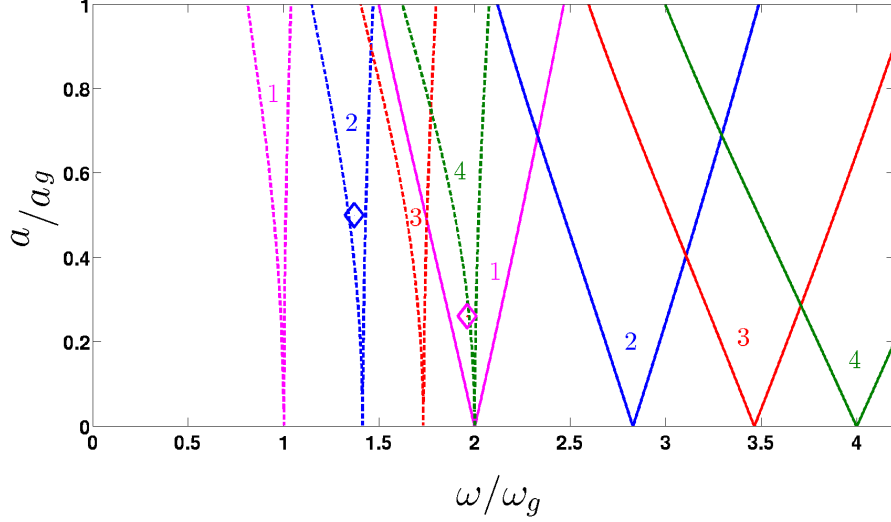
For some of our simulations, the initial condition for the interface is a sphere perturbed only by its representation on a triangular mesh as described in section 4.2.2; this is the condition designated as spherically symmetric in table 4.1. In other cases, the sphere is perturbed according to one of the formulas given by Busse (1975). Axisymmetric initial conditions are of the form

$$\zeta - R \propto Y_\ell^0 + \text{c.c.} \quad (4.7)$$

where c.c. means complex conjugate. In all cases, the initial velocity is zero.

Table 4.1 lists the simulations which we will describe in this paper. We study either gravity or capillary waves, i.e. a Bond number  $\rho g R^2/\sigma$  of either infinity or zero. Figure 4.1 locates the parameter values that we have used for our simulations within the instability

(a)



(b)

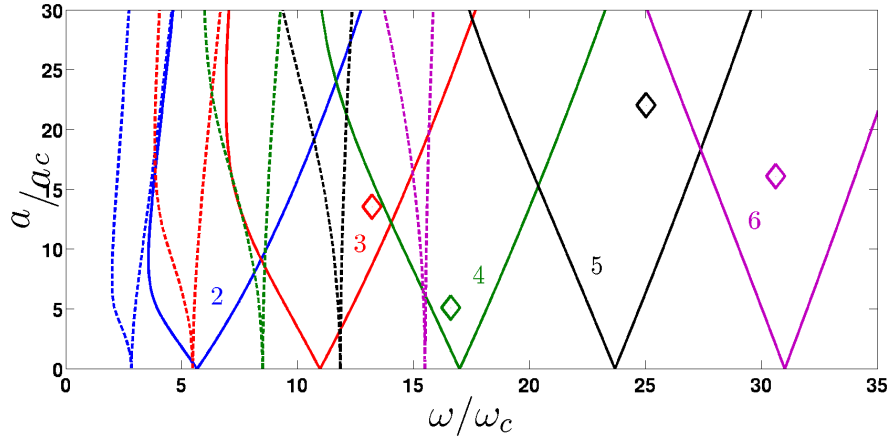


FIGURE 4.1 – Instability tongues resulting from oscillatory forcing with amplitude  $a$  and angular frequency  $\omega$  for an inviscid drop with parameters given in table 4.1. Diamond shapes designate the parameter values of our simulations. Solid curves bound subharmonic tongues and dashed curves bound harmonic tongues. (a) Tongues corresponding to gravitational instability with spherical wavenumbers  $\ell = 1, 2, 3, 4$  originate at  $\omega/\omega_g = 2\sqrt{\ell}/n$ , with  $n = 1$  for subharmonic tongues and  $n = 2$  for harmonic tongues. (b) Tongues corresponding to capillary instability with spherical wavenumbers  $\ell = 2, 3, 4, 5, 6$  originate at  $\omega/\omega_c = 2\sqrt{\ell(\ell - 1)(\ell + 2)}/n$ .



tongues for the gravitational or capillary cases, where

$$\omega_g^2 \equiv \frac{g}{R} \quad \omega_c^2 \equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} \quad (4.8a)$$

$$a_g \equiv R\omega_g^2 = g \quad a_c \equiv R\omega_c^2 \quad (4.8b)$$

See [Ebo Adou and Tuckerman \(2015\)](#) for more details on this non-dimensionalization. (For our low-viscosity cases, the tongues are very close to the inviscid ones; we plot the inviscid tongues for simplicity.) Frequencies are chosen to induce instabilities from  $\ell = 1$  to  $\ell = 6$ , as predicted from linear Floquet theory. In each case, the value of  $\ell$  from the full three-dimensional nonlinear direct simulations agrees with the theoretical value.

#### 4.2.4 Spherical harmonic transform

In order to analyze the shape of the drop quantitatively, we present its time-dependent spectral coefficients, both  $|\zeta_\ell^m(t)|$  from (4.1) and

$$|\zeta_\ell(t)| = \left[ \sum_{m=0}^{\ell} |\zeta_{\ell,m}(t)|^2 \right]^{1/2} \quad (4.9)$$

We calculate the spherical harmonic transform as follows. The three-dimensional Lagrangian interface consists of triangles composed of points  $(x_i, y_i, z_i)$  on the Cartesian grid. We transform each of these points to spherical coordinates  $(\zeta_i, \theta_i, \phi_i)$ . We interpolate the function  $\zeta(\theta_i, \phi_i) = \zeta_i$  onto a regular spherical grid  $(\theta_j, \phi_k)$ , discretizing the latitudinal interval  $[0, \pi]$  and longitudinal interval  $[0, 2\pi]$  with  $N_\theta = 80$  and  $N_\phi = 80$  points. Using the discrete data  $\zeta(\theta_j, \phi_k)$  and truncating the series (4.1) at  $\ell_{max} > 4 \times \ell_{onset}$ , we compute the spherical harmonic coefficients  $\zeta_\ell^m$  by the method of least squares ([Politis, 2013](#)). This procedure is carried out for each temporal snapshot of the interface.

The spectrum in  $m$  (but not in  $\ell$ ) depends on the orientation. We can rotate a pattern by localizing the coordinates  $(\theta, \phi)$  of one of its features, such as a maximum, rotating in longitude  $\phi$  to place it in the  $(x, z)$  plane and then rotating in colatitude  $\theta$  to place this feature at the north pole. This allows us to interpret our spectra by using the explicit representations given by [Busse \(1975\)](#) of various patterns in terms of  $Y_\ell^m$ . Conversely, if the shape of the pattern is known or constant, the spectrum in  $m$  can be used to track its orientation, and changes in its orientation.

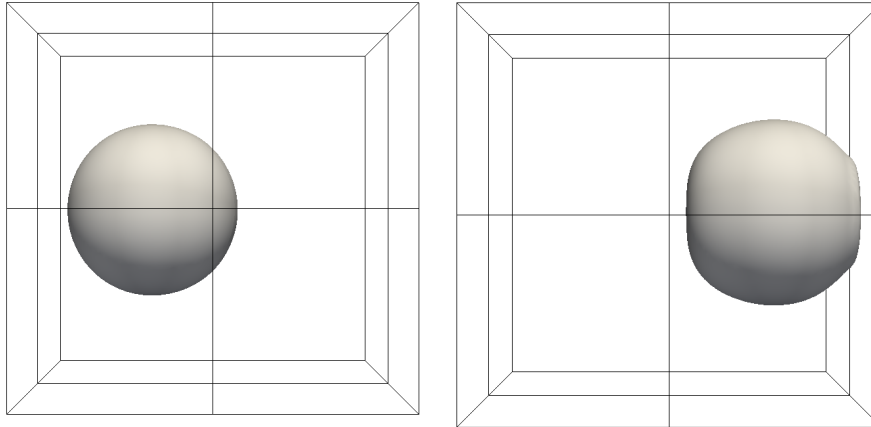


FIGURE 4.2 – Visualization of  $\ell = 1$  mode for drop. The drop is displaced alternately to the left and the right, and finally hits the surface of the domain. The cubic domain is shown, as well as the eight subdomains, each of which is assigned to a process thread.

## 4.3 Results

### 4.3.1 Case $\ell = 1$

We study the  $\ell = 1$  case in the purely gravitational regime, i.e. in the presence of a constant radial force  $g\mathbf{e}_r$  included in the the time-periodic force, and without surface tension. Our simulations of this case exhibit a periodic translational motion of the sphere about its original position, as shown in figure 4.2. This explains why the  $\ell = 1$  case is prohibited for capillary waves : translational motion does not involve deformation of the interface, and so surface tension cannot act as a restoring force. The oscillations increase in amplitude until the drop hits the boundary of the cubic domain ; despite decreasing the excitation amplitude, we have thus far been unable to obtain an asymptotic regime.

The subharmonic tongue for  $\ell = 1$  overlaps with the harmonic tongue for  $\ell = 4$  over a range of forcing frequencies ; see figure 4.1. When the driving parameters lie in this region, we find that the mode obtained depends on the numerical resolution. For a resolution of  $64^3$  we obtain subharmonic  $\ell = 1$  oscillations, while for a resolution of  $256^3$  the harmonic  $\ell = 4$  solution is obtained, but will not be presented here.

As stated by Busse (1975), there is no competition between different patterns. All solutions are obtained by rotation of a single axisymmetric pattern, which is expected to be stable. (The three spherical harmonics  $Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1}$  are also related by rotation.)

---

### 4.3.2 Case $\ell = 2$

For  $\ell = 2$ , we have simulated harmonic oscillations in the gravitational regime. A sequence of figures from our numerical simulations showing the shape and velocity field at the interface is shown in figure 4.3 and figure 4.4, which also shows the velocity field in the outer fluid. The interface remains axisymmetric and spheroidal, with two principal axes of the same length, and a third of a different length. Figure 4.3(a) shows a prolate shape, like a rugby ball (the third axis is longer than the other two), while the shape in figure 4.3(c) is oblate, like a disk (the third axis is shorter). During the prolate phase, the velocity is directed in the polar direction, while during the oblate phase it is directed in the equatorial direction. At maximum deformation, the velocity changes direction, so that the velocity is minimum when the surface is most deformed and maximum when it is least deformed. Because the interface is opaque, velocity vectors directed inwards cannot be seen.

Oblate-to-prolate oscillations have been studied extensively (Trinh and Wang, 1982; Tsamopoulos and Brown, 1983; Patzek et al., 1991). These authors observe that the drop spends a longer time in the prolate than in the oblate configuration. Figure 4.5 shows the amplitude  $|\zeta_{\max} - \zeta_{\min}|$  as a function of time. The prolate and oblate configurations are represented by higher and lower maximum values of  $|\zeta_{\max} - \zeta_{\min}|$ , respectively. We observe that the drop spends about 60% of each period in the prolate configuration, in agreement with the literature (Trinh and Wang, 1982; Tsamopoulos and Brown, 1983; Patzek et al., 1991).

We present the results of the spherical harmonic transform of the interface height  $\zeta(\theta, \phi, t)$ . Figure 4.6 shows the time evolution of the amplitude of  $\zeta_\ell$ , defined in (4.9). The most visible feature of figure 4.6 is its rapid oscillation. In order to examine the dynamics on larger timescales, we extract the envelope of each  $\zeta_\ell$ , as shown by the bold curves in figure 4.6. There is no variation in  $\zeta_0$ , since this is the mean radius, and cannot change due to incompressibility. Although  $\ell = 2$  is the dominant non-zero spherical wavenumber for this case, other even  $\ell$  (multiples of 2) are also present. These wavenumber multiples  $n\ell$  are generated by nonlinear interactions which also multiply the growth rates and frequencies by the same factor of  $n$ .

Although we began our simulations by perturbing the sphere with an axisymmetric initial condition, proportional to  $Y_2^0 + \text{c.c.}$ , the drop orientation quickly tilted away from

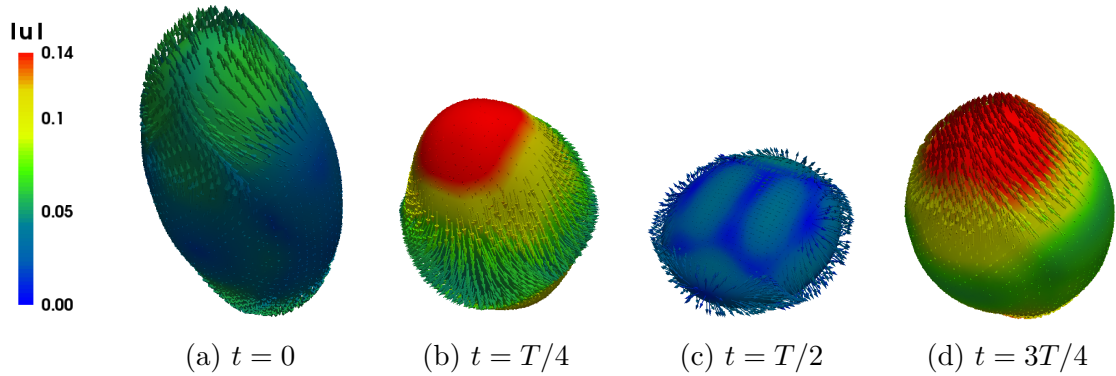


FIGURE 4.3 – Drop interface and velocity field for  $\ell = 2$  pattern of gravitational harmonic waves over one reponse period  $T$ . During the prolate phase, the velocity is directed in the polar direction, while during the oblate phase it is directed in the equatorial direction. Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal when the surface is least deformed and minimal where it is most deformed. Only outward-point velocity vectors are shown ; those pointing inwards are hidden by the opaque surface of the drop.

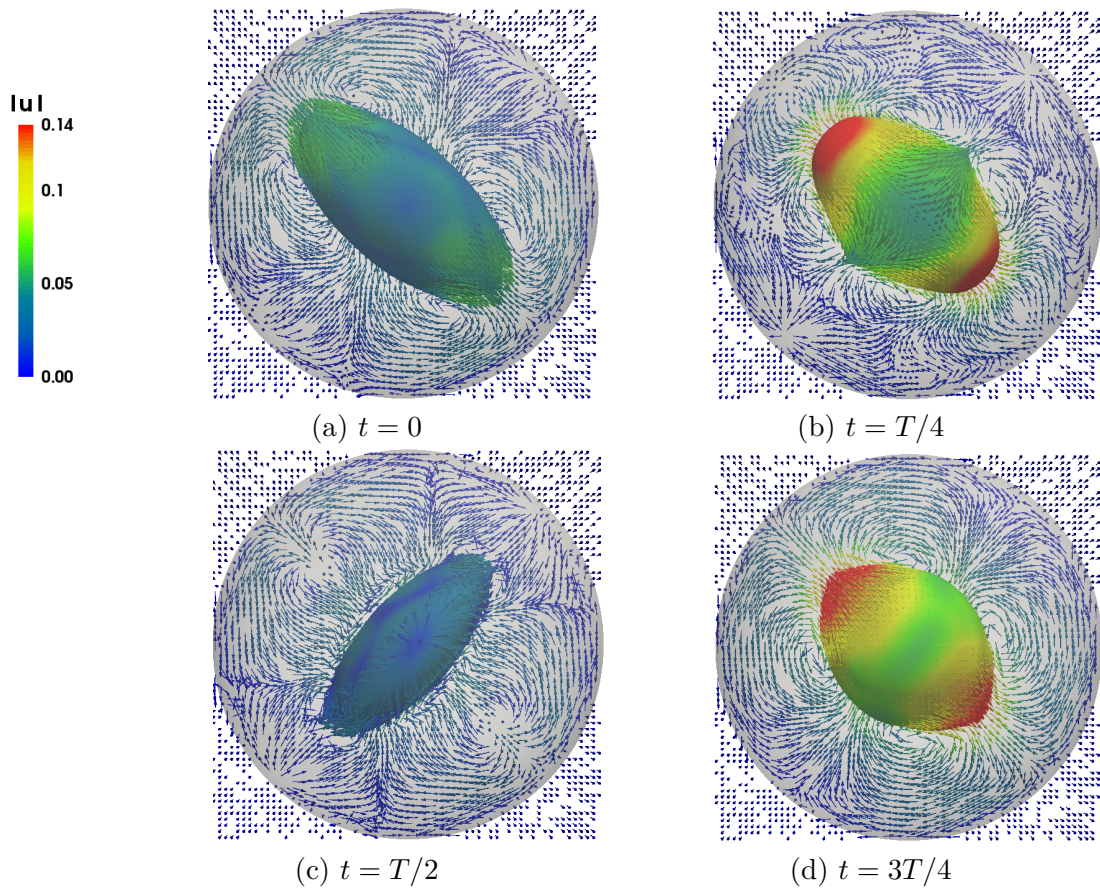


FIGURE 4.4 – Same as figure 4.3 but from a slightly different perspective and showing the outer bounding sphere and the velocity field in the outer fluid.

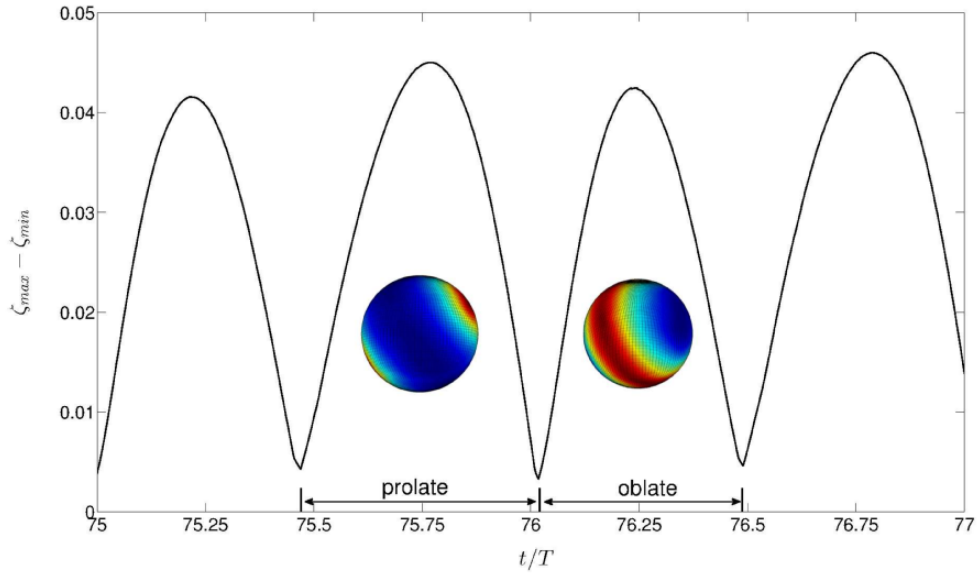


FIGURE 4.5 – Timeseries of interface amplitude  $|\zeta_{\max} - \zeta_{\min}|$ . Insets show the projection of the height  $\zeta(\theta, \phi)$  on the sphere. Prolate and oblate configurations have higher and lower maximum values of  $|\zeta_{\max} - \zeta_{\min}|$ , respectively. The drop spends about 60% of each period in the prolate configuration.

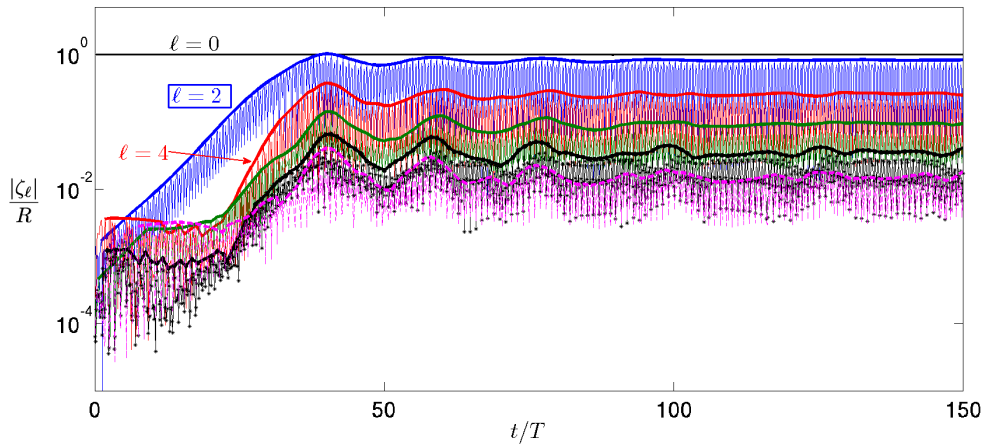


FIGURE 4.6 – Timeseries of components of different  $\ell$  modes when the dominant mode is  $\ell = 2$ . All multiples of  $\ell = 2$  are present, as well as  $\ell = 0$ , which is the constant average radius. Long-time evolution is visualized by envelopes (bold curves) of the rapidly oscillating timeseries. The growth rate of component  $\zeta_4$  is about twice that of  $\zeta_2$ .

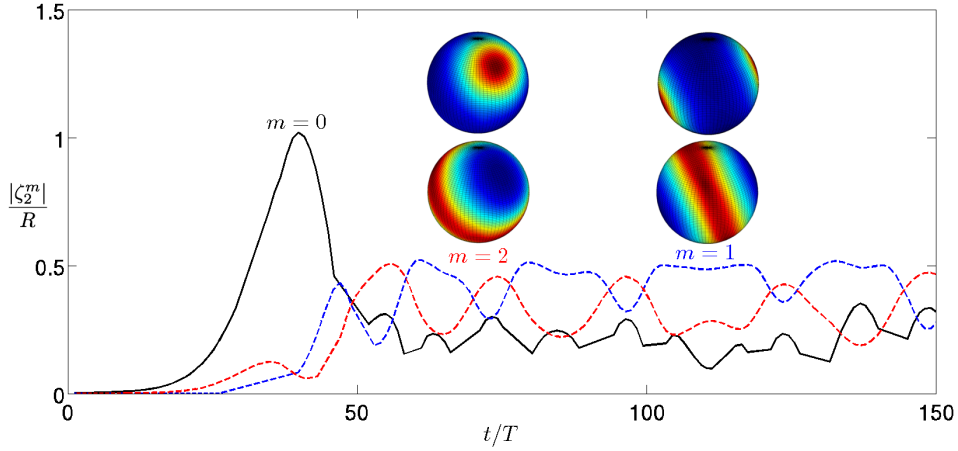


FIGURE 4.7 – Timeseries of components of various  $m$  modes, when the dominant mode is  $\ell = 2$ . Initially, the drop is axisymmetric and the only component is  $m = 0$ . The drop remains axisymmetric, but its axis of symmetry tilts away from the  $z$  axis, which continues to oscillate periodically, manifested by alternating dominance of  $m = 1$  and  $m = 2$ .

the  $z$  axis, acquiring components with  $m \neq 0$ . while remaining axisymmetric about its own axis. The symmetry axis continues to oscillate periodically, with alternating phases in which  $m = 2$  and then  $m = 1$  dominates, as shown in figure 4.7.

We have also obtained prolate-oblate oscillations in simulations (not presented here) of subharmonic capillary waves with an axisymmetric initial condition.

According to Busse (1975); Chossat et al. (1991), the only allowed solution for  $\ell = 2$  is axisymmetric, and is unstable at onset. Our observation of a stable asymptotic regime does not contradict this result since our parameter values are far from onset.

### 4.3.3 Case $\ell = 3$

For  $\ell = 3$ , there exist solutions with three possible symmetries : axisymmetric,  $D_6$ , and tetrahedral. Either the  $D_6$  or the tetrahedral solution can be stable at onset (Busse, 1975; Chossat et al., 1991). Our solution for this case has tetrahedral symmetry, as can be seen in figure 4.8, which shows subharmonic capillary oscillations. The initial condition is a slightly perturbed sphere, but the same behavior is seen starting from an initial condition proportional to  $Y_3^0$ . Over a half oscillation period, the tetrahedron in figure 4.8(a) reverses its orientation, as shown in figure 4.8(c), since this polyhedron is self-dual.

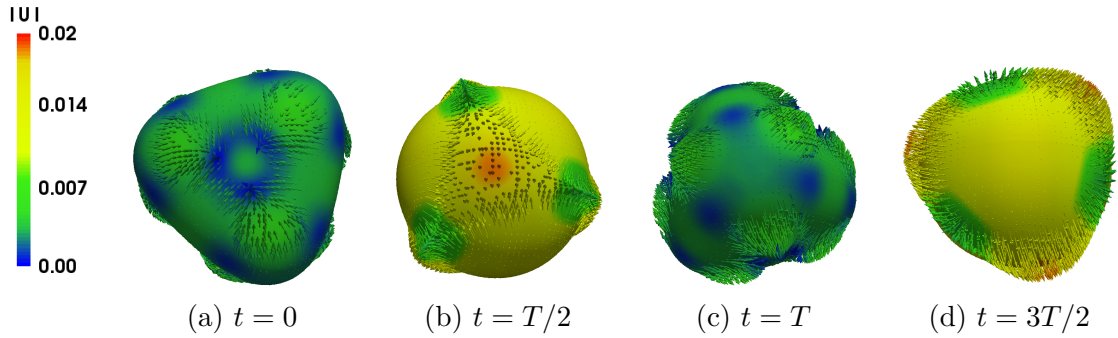


FIGURE 4.8 – Drop interface and corresponding velocity field for  $\ell = 3$  pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period  $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal when the surface is least deformed and minimal where it is most deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown; those pointing inwards are hidden by the opaque surface of the drop.

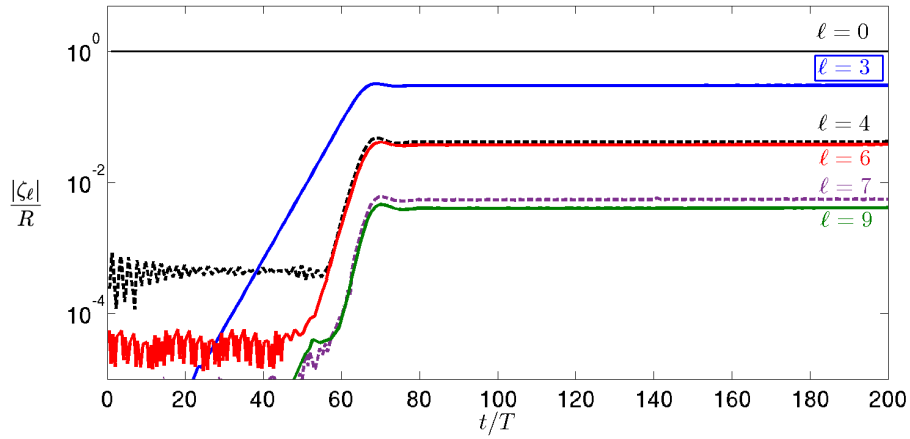


FIGURE 4.9 – Time evolution of the amplitudes of modes with different  $\ell$  values. The principle mode is  $\ell = 3$ . The amplitude of mode  $\ell = 4$  is very close to that of the second harmonic  $\ell = 6$ , and that of  $\ell = 7 = 3 + 4$  is close to that of the third harmonic  $\ell = 9$ .



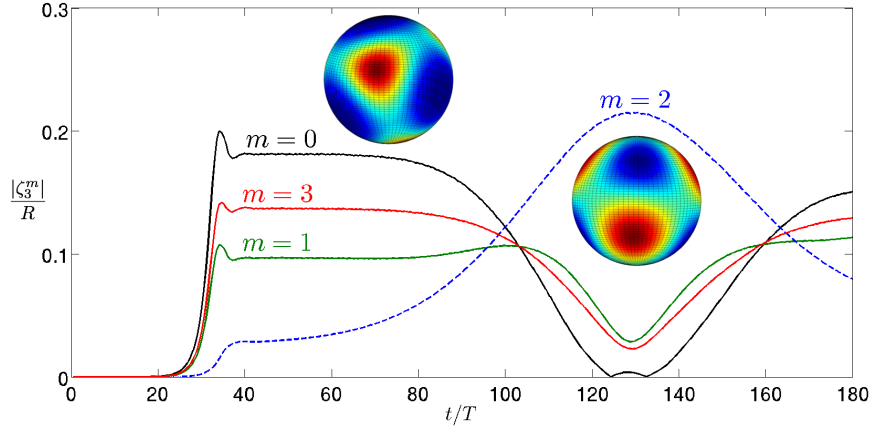


FIGURE 4.10 – Time evolution of the amplitudes of  $\zeta_3^m$ . The initial position of the pattern is tilted with respect to the  $z$  axis. As the  $m = 2$  component increases, the pattern aligns with the  $z$  axis. It then decreases as the pattern tilts again.

The pattern contains  $\ell$  components other than  $\ell = 3$ , as illustrated in figure 4.9. In particular, an important  $\ell = 4$  component is present, probably due to our Cartesian geometry. In a domain bounded by an immersed sphere, rather than a cubic box, the  $\ell = 4$  component is still present, which we believe is due to the Cartesian grid. The specific components present are  $(\ell, m) = (4, 0)$  and  $(4, 4)$ , which will be seen in figure 4.13 to compose a cube.

Initially, the pattern is not aligned with the domain, but, over long times, it tilts to become aligned with the  $z$  axis. This is illustrated in figure 4.10, since

$$\zeta - R \propto Y_3^2 + \text{c.c.} \quad (4.10)$$

corresponds to a tetrahedron aligned with the  $z$ -axis (Busse, 1975).

#### 4.3.4 Case $\ell = 4$

When  $\ell = 4$ , the preferred solution possesses octahedral/cubical symmetry  $O$  (Busse, 1975; Matthews, 2003). Visualizations of our numerical simulations of subharmonic capillary oscillations are shown in figure 4.11. Two initial conditions, axisymmetric or a perturbed sphere, gave similar results. The pattern oscillates between resembling a cube, with six square faces, of which three meet at each vertex, and resembling its dual, the octahedron with eight equilateral triangles, four of which meet at each corner.



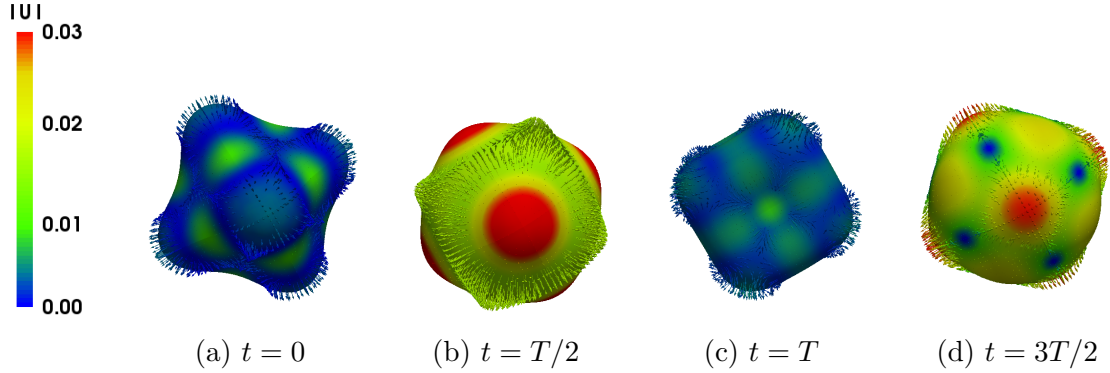


FIGURE 4.11 – Drop interface and velocity field for  $\ell = 4$  pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period  $2T$ . The interface oscillates between (a) an octahedron, with six maxima, and (c) a cube, with eight maxima. Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown.

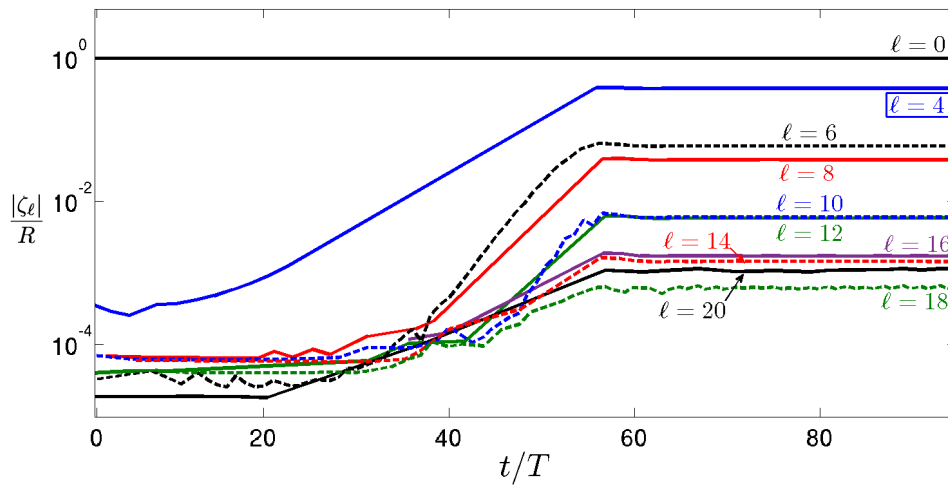


FIGURE 4.12 – Time evolution of amplitude of different  $\ell$  components when the dominant wavenumber is  $\ell = 4$ . The spectrum also contains an important  $\ell = 6$  component. The spectrum contains multiples of 4, multiples of 6, and combinations of the two ( $10=4+6$ ,  $14=8+6$ ,  $20=8+12$ ).

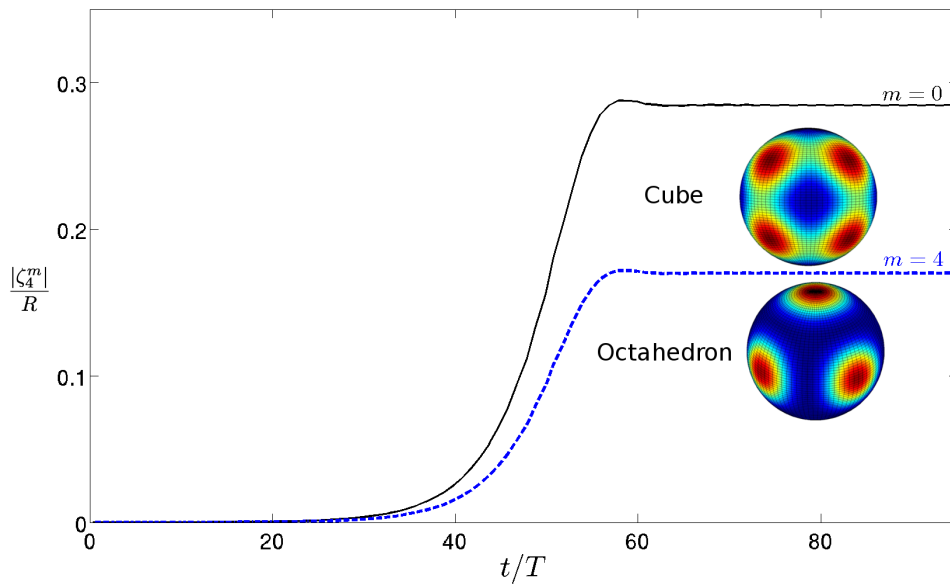


FIGURE 4.13 – Evolution of amplitudes of important modes  $m = 0$  and  $m = 4$ , which together comprise the pattern with cubical symmetry for  $\ell = 4$ . Inset shows projection of height on the sphere at instants at which the interface has a cubic or octahedral shape. The alignment with the  $z$  axis can be seen, for example by the red patch at the north pole (where the longitudinal gridlines meet) for the octahedron.

---

We have also obtained a cubic pattern in simulations (not presented here) of harmonic gravitational waves with a spherical initial condition and a resolution of  $256^3$ .

Figure 4.12 shows that, in addition to  $\ell = 4$  and its harmonics, the  $\ell$  wavenumber spectrum contains a large  $\ell = 6$  component, along with its harmonics, and modes resulting from interactions between the  $\ell = 4$  and  $\ell = 6$  families. We observe that the pattern is always aligned with the numerical domain, with two faces or minima (for the cube) or two vertices or maxima (for the octahedron) located at the north and south poles. With this alignment, Busse (1975) gives a construction of a cubic solution as a sum of zonal and sectoral modes :

$$\zeta - R \propto \sqrt{7} Y_4^0 + \sqrt{5} Y_4^4 + \text{c.c.} \quad (4.11)$$

The time evolution of  $\zeta_4^0$  and  $\zeta_4^4$  during our simulation is shown in figure 4.13.

Bifurcation theory predicts two possible solutions at onset (Busse, 1975; Chossat et al., 1991), with axisymmetric or cubic symmetry, produced by a transcritical bifurcation and with neither branch stable at onset. Our simulations are far from the threshold, so it is likely that secondary bifurcations have taken place which stabilize existing branches and create new ones.

### 4.3.5 Case $\ell = 5$

The theoretical analysis of the  $\ell = 5$  case is the most complicated of those surveyed here (Busse and Riahi, 1982; Riahi, 1984), since it leads to eight allowed solutions with different symmetries (Chossat et al., 1991). Figures 4.14 and 4.15 show gravitational subharmonic oscillations, starting from an initial condition which is an axisymmetric perturbation of the sphere, proportional to  $Y_5^0$ . The solution is at first axisymmetric, as shown in figure 4.14, but is eventually replaced by another solution with  $D_4$  symmetry, shown in figure 4.15. The pattern remains aligned with the  $z$  axis. The upper hemisphere contains four patches of outward (inward) flow, and the lower hemisphere contains four similar patches, located at longitudes which are halfway between those of the patches of the upper hemisphere. This pattern corresponds to the preferred solution **F** described by Riahi (1984)

$$\zeta - R \propto \sqrt{3} Y_5^0 + \sqrt{5} Y_5^4 + \text{c.c.} \quad (4.12)$$

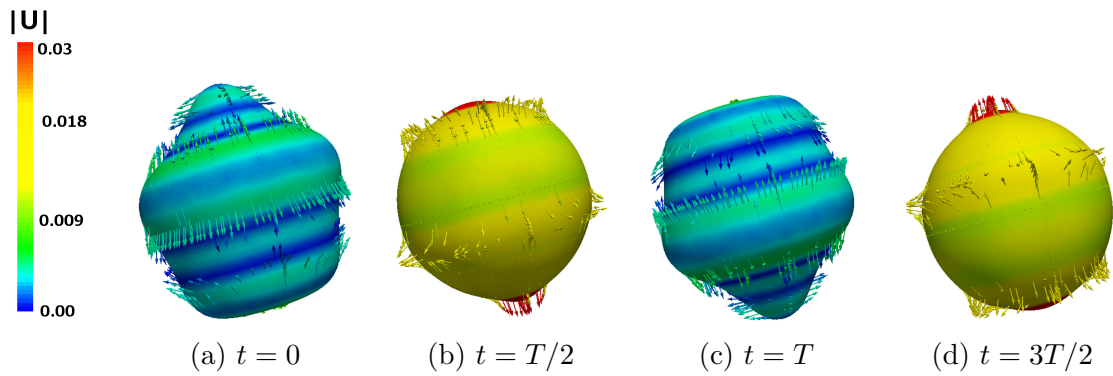


FIGURE 4.14 – Drop interface and corresponding velocity field for axisymmetric  $\ell = 5$  pattern seen in subharmonic capillary waves over one reponse period  $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown.

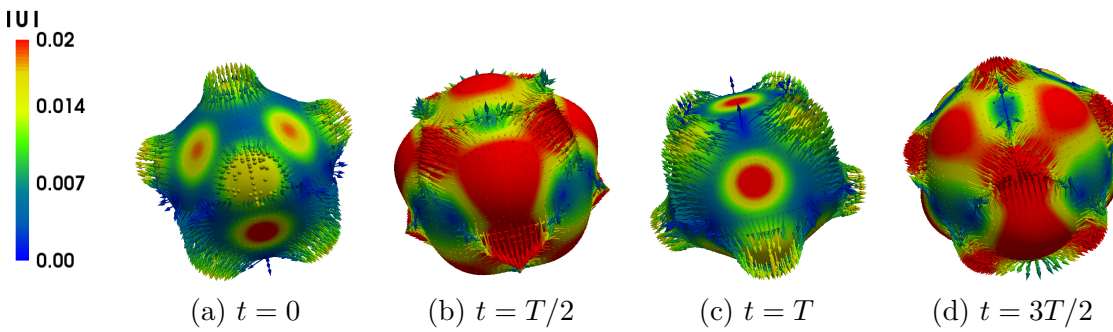


FIGURE 4.15 – Drop interface and corresponding velocity field for  $\ell = 5$  pattern with  $D_4$  symmetry.

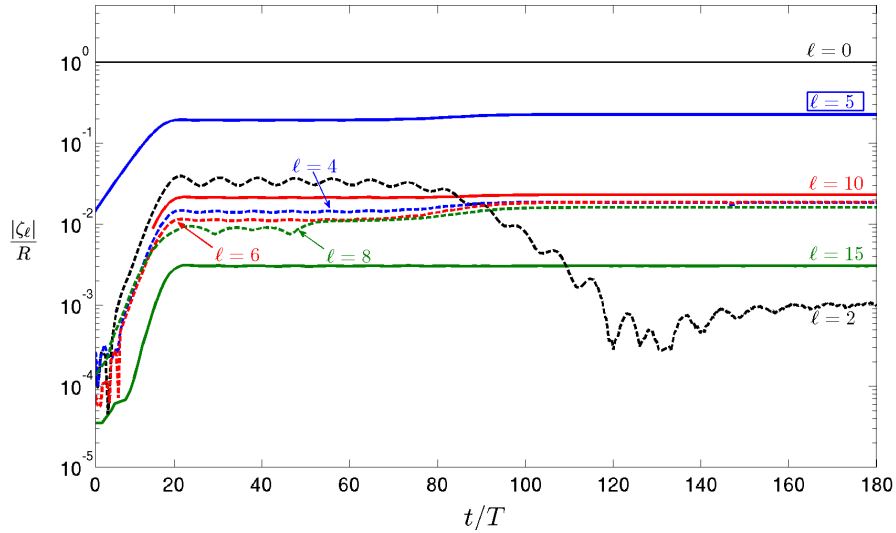


FIGURE 4.16 – Time evolution of the amplitudes of modes with different  $\ell$  values when the dominant mode is  $\ell = 5$ . Components 4, 6, 8 are present, in addition to the expected multiples of 5.

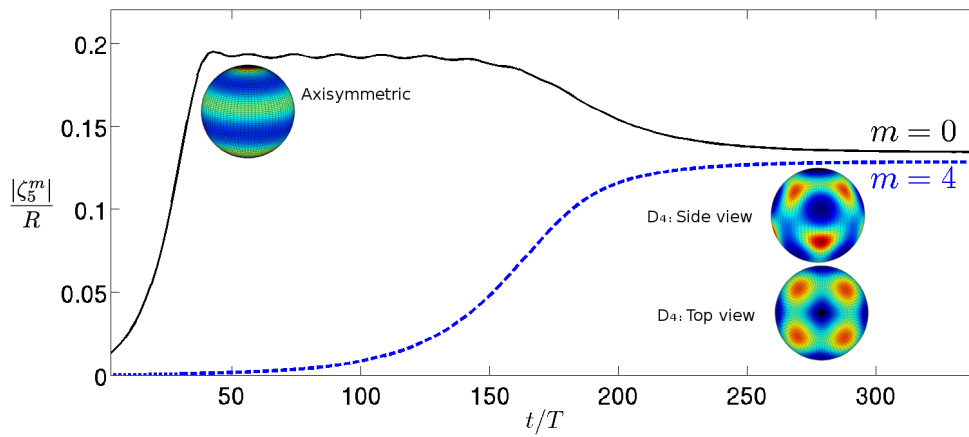


FIGURE 4.17 – Time evolution of the amplitudes of modes  $Y_5^m$ . An initially axisymmetric pattern, composed of  $Y_5^0$ , proves to be unstable and is replaced by a  $D_4$  pattern, which is a superposition of  $Y_5^0$  and  $Y_5^4$ . Insets show projections on sphere of  $\zeta(\theta, \phi)$  of axisymmetric pattern and two views of  $D_4$  pattern.

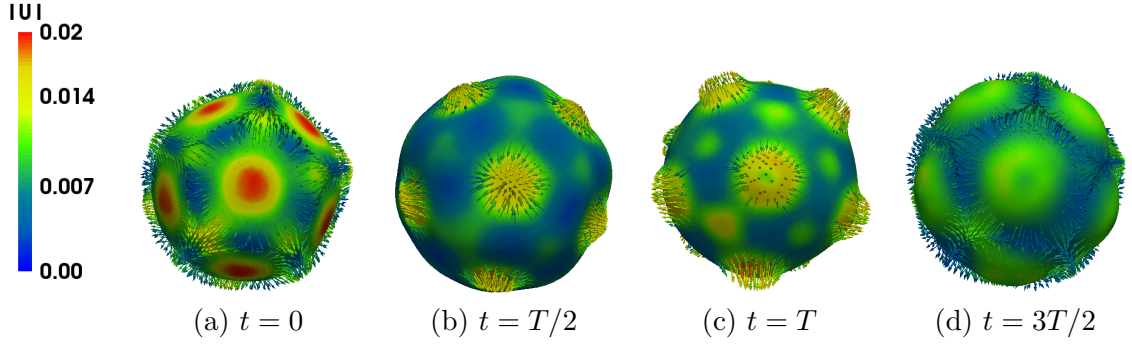


FIGURE 4.18 – Drop interface and corresponding velocity field for  $\ell = 6$  pattern with icosahedral symmetry seen in subharmonic capillary waves over one reponse period  $2T$ . Colors indicate the magnitude of the velocity, which is maximal (minimal) when the surface is least (most) deformed. Only outward-pointing velocity vectors are shown.

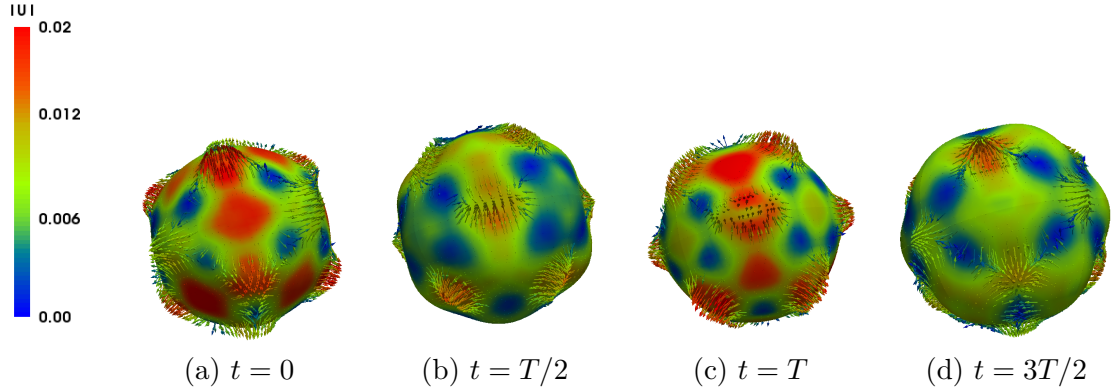


FIGURE 4.19 – Drop interface and corresponding velocity field for  $\ell = 6$  pattern with cubic symmetry.

Figure 4.17 shows this transition by tracking the amplitudes of the different  $m$  modes, which can easily be done since the pattern remains aligned with the  $z$  axis. The decrease in  $\zeta_5^0$  is accompanied by the increase in  $\zeta_5^4$ , which together comprise the stable solution with  $D_4$  symmetry. The initial plateau in  $\zeta_5^0$  indicates that the axisymmetric phase of the oscillations shown in figure 4.14 comprises an actual solution of our system.

#### 4.3.6 Case $\ell = 6$

For  $\ell = 6$ , there exist four possible solutions : axisymmetric ( $O(2)$ ), six-fold symmetric ( $D_6$ ) octahedral ( $O$ ), and icosahedral ( $I$ ). Of these, the icosahedral solution is preferred, via a maximization argument (Busse, 1975) or a stability argument (Matthews, 2003). Figures 4.18 and 4.19 show subharmonic capillary oscillations carried out in a domain

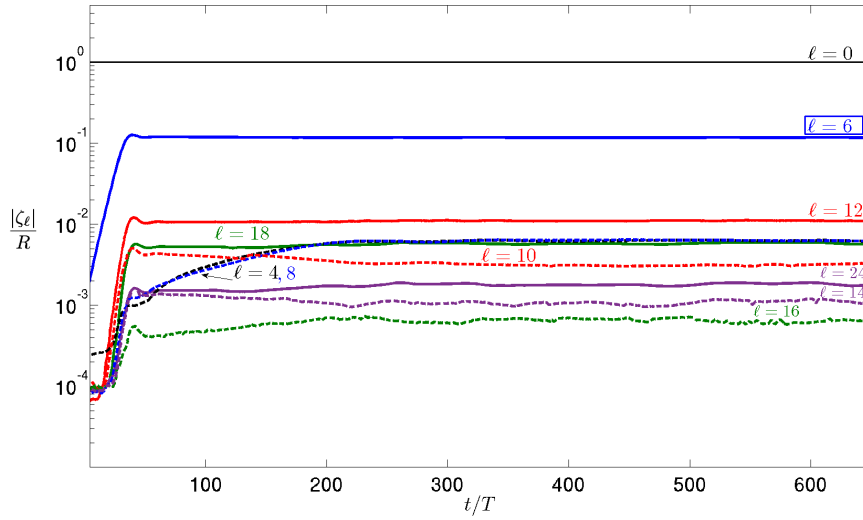


FIGURE 4.20 – Time evolution of the amplitudes of modes with different  $\ell$  values when the dominant mode is  $\ell = 6$ . In addition to multiples of 6, the spectrum contains multiples of 4 and combinations of the two.

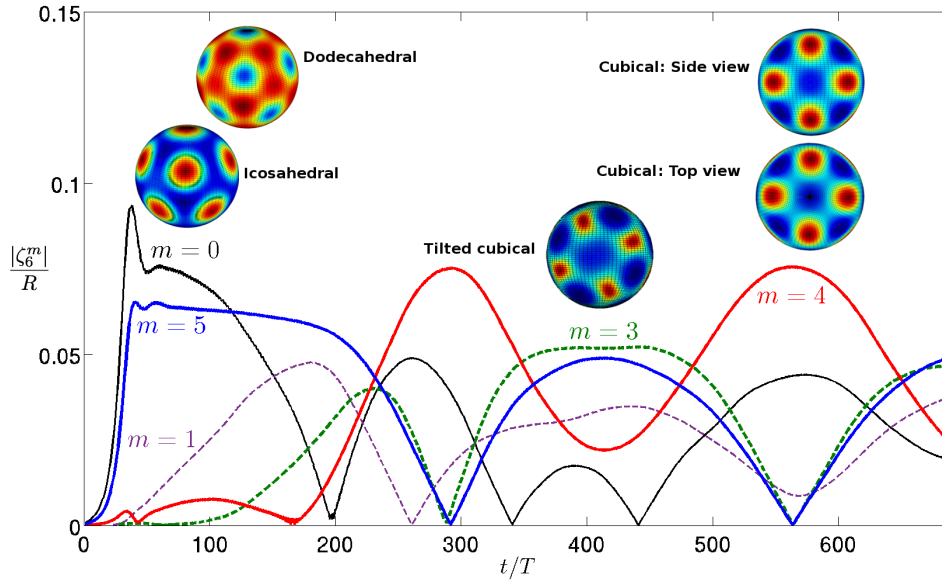


FIGURE 4.21 – Evolution of amplitudes of  $m$  modes for  $\ell = 6$ . From an icosahedral initial condition composed of modes  $m = 0$  and  $m = 5$ , the pattern tilts away from the  $z$  axis and eventually acquires cubical symmetry with dominant mode is  $m = 4$ . The subsequent increase in mode  $m = 3$  is associated with a tilting of orientation of the cubical pattern away from the  $z$  axis. Insets show projections of icosahedral and dodecahedral phases of the initial pattern, side (equatorial) and top (polar) view of a single cubical pattern aligned with the  $z$  axis, and a tilted cubical pattern.

bounded by an outer sphere. The initial condition is an icosahedral perturbation of the sphere (Busse, 1975) :

$$\zeta - R \propto \sqrt{11} Y_6^0 + \sqrt{14} Y_6^5 + \text{c.c.} \quad (4.13)$$

The first phase of the solution is shown in figure 4.18, whose five-fold symmetry is clearly visible. Figure 4.18(a) resembles a dodecahedron, i.e. pentagons which meet in sets of three at the vertices. Figure 4.18(c) resembles an icosahedron, i.e. triangles which meet in sets of five at the vertices. Further evolution leads to the solution shown in figure 4.19, which oscillates between a cube and its dual, an octahedron,

Figure 4.20 shows the time evolution of spectrum in  $\ell$  for his case, while figure 4.21 shows the time evolution of the most important  $m$  modes for this case. The icosahedral pattern, consisting of modes  $m = 0$  and  $m = 5$ , quickly tilts away from the  $z$  axis and is then replaced by a cubic pattern, whose dominant mode is  $m = 4$ . The subsequent increase in  $m = 3$  is associated with the tilting of the cubic pattern away from the  $z$  axis, rather than a change in the pattern.

Simulations carried out in a cubic domain from a spherical initial condition perturbed only by its discrete representation on a triangular mesh led directly to the cubic/octahedral solution, even when the resolution was increased from  $64^3$  to  $256^3$ . The preference for a cubic/octahedral pattern, even from an icosahedral initial condition in a nominally spherical domain, contradicts the theoretical prediction of preference for icosahedral patterns. We conjecture that the preference for a solution with cubic/octahedral symmetry is due to the residual cubical symmetry of the underlying Cartesian grid.

## 4.4 Discussion

Simulating our spherical Faraday problem with BLUE, we have been able to produce patterns with all spherical harmonic wavenumbers, going from  $\ell = 1$  to  $\ell = 6$ . For  $\ell = 1$  and  $\ell = 2$ , we have simulated the gravitational regime, while for  $\ell = 3, 4, 5, 6$ , we have simulated capillary waves. Most of our simulations are of the usual subharmonic regime, but we have also been able to simulate harmonic waves in several cases, in particular  $\ell = 2$ .

Our simulations agree in most cases with two types of theory. First, the spherical harmonic wavenumber  $\ell$  obtained in each case agrees with the results of Floquet analysis,



---

presented in our companion paper (Ebo Adou and Tuckerman, 2015) and in figure 4.1.

Second, the interface shapes we observe are readily interpreted using the theory of pattern formation on the sphere, despite the important differences with our configuration mentioned in the introduction, i.e. the fact that our patterns are oscillatory rather than steady and that our parameters are far above threshold. For  $\ell = 1$  and  $\ell = 2$ , only one type of pattern is possible, and that is the one we observe. For our vibrating drop, the  $\ell = 1$  “pattern” is manifested as a back-and-forth motion of the spherical drop, while the  $\ell = 2$  pattern alternates between an oblate and a prolate spheroid. For  $\ell = 3$ , we observe a tetrahedral pattern, one of the two solutions predicted to be stable (out of the three which can exist), while for  $\ell = 4$ , we observe a cubic/octahedral pattern, one of the two solutions predicted to exist. For  $\ell = 5$ , we observe an unstable axisymmetric pattern and a stable  $D_4$  pattern. These are two of the eight possible solutions;  $D_4$  is one of those which can be stable at onset. For  $\ell = 6$ , we find a cubic/octahedral pattern. It is only in this case that our results differ from theory, which predicts that the icosahedral solution is the preferred solution, while in our case, it is only a transient even if it is introduced as the initial condition. We attribute this difference to cubical forcing by the underlying Cartesian grid. Indeed, the instantaneous spectrum from simulations of an initially nominally spherical solution below threshold, shown in Figure 4.22, has a significant  $\ell = 4$  component.

It would be interesting to extend the results further by conducting a more detailed bifurcation analysis. We recall that we simulate primarily subharmonic oscillations and, in some cases, harmonic oscillations. For the discrete-time system derived by sampling the continuous-time system at a single phase of the forcing period, harmonic oscillations are fixed points, while subharmonic oscillations are two-cycles. Because of this, harmonic oscillations can result from transcritical bifurcations, while subharmonic oscillations are necessarily associated with pitchfork bifurcations. Bifurcation theory (Matthews, 2003) predicts transcritical bifurcations for even  $\ell$ , which cannot occur for subharmonic oscillations. In this sense, bifurcations to harmonic oscillations in our time-periodic system may more closely resemble bifurcations in steady systems.

Another avenue of exploration that has arisen in our study is that of long-term dynamics. The  $\ell = 2$  (prolate-oblate),  $\ell = 3$  (tetrahedral) and  $\ell = 6$  (cubical-octahedral) cases all show the drop tumbling into and out of alignment with the coordinate system, as illustrated in figures 4.7, 4.10 and 4.21. One might expect a cubical pattern to remain

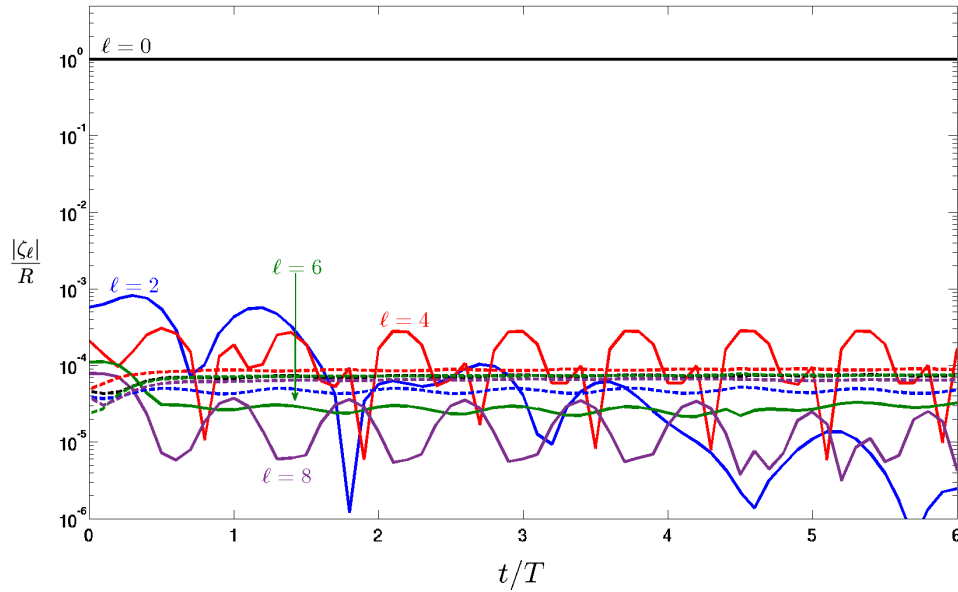


FIGURE 4.22 – Instantaneous  $\ell$  spectrum of a nominally spherical solution below threshold. The spectrum has an important  $T$ -periodic  $\ell = 4$  component, as well as components 2, 6, 8 and (not labelled) 10, 12, 14, 16.

aligned with the coordinate system, and it does in the  $\ell = 4$  case, but not for  $\ell = 6$ . It is possible that these long-term dynamics might be permanent, much like those in hexagonal Faraday waves in a minimal domain (Périnet et al., 2012).

The spectral analysis of our states demonstrates the complexity of these patterns, since large components which are not multiples of the dominant  $\ell$  are present. Some of these components may result from the Cartesian forcing. Others may provide evidence that the states that we observe are not in fact those produced at the primary bifurcations, but from secondary symmetry-breaking bifurcations that have yet to be explored.

On a practical level, we have demonstrated the feasibility of numerical simulation of an oscillating drop. We believe that the Faraday problem serves as a rigorous proving ground for numerical interface techniques since both qualitative and quantitative comparison of precise quantities is necessary. We hope that this work on the spherical Faraday instability can open up new possibilities in the study of pattern formation and that the numerical code can serve as a useful tool in the exploration of this rich dynamical system.

---

## **Acknowledgements**

This work was performed using high performance computing resources provided by the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) of the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), coordinated by GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif). L.S.T. acknowledges support from the Agence Nationale de la Recherche (ANR) for the TRANSFLOW project. This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT and future planning (NRF-2014R1A2A1A11051346).

# Chapitre 5

## Cas d'un forçage radial constant

### Contents

---

<b>5.1</b>	<b>L'instabilité de Rayleigh-Taylor</b> . . . . .	<b>84</b>
<b>5.2</b>	<b>Analyse de stabilité linéaire</b> . . . . .	<b>88</b>
5.2.1	Relation de dispersion avec tension superficielle . . . . .	89
5.2.2	Mode de croissance maximum lorsque $\mathcal{A}_S \sim 1$ . . . . .	90
<b>5.3</b>	<b>Simulations numériques tridimensionnelles pour <math>\mathcal{A}_S \sim 1</math></b> . . . . .	<b>91</b>
5.3.1	Évolution non linéaire des motifs . . . . .	92
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>96</b>

---

Dans ce dernier chapitre, nous considérons le cas d'un forçage radial constant à l'interface entre deux fluides. Le terme oscillant est nul ( $a = 0$ ) et le forçage est réduit à  $G(r, t) \equiv g \frac{r}{R} \vec{e}_r$ , orienté vers l'intérieur. En inversant la différence de densité, afin que le fluide soit plus lourd à l'extérieur qu'à l'intérieur, cette configuration représente celle de l'instabilité hydrodynamique classique de Rayleigh-Taylor.

L'étude tridimensionnelle complète de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dépasse le cadre de notre propos et nous nous contenterons de présenter de résultats préliminaires de simulations numériques décrivant l'évolution de l'interface en présence de tension de surface. Nous considérons le problème peu visqueux et linéaire menant à la relation de dispersion.

---

## 5.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor se produit lorsque l'interface entre deux fluides de densités différentes subit une accélération dirigée du fluide lourd vers le fluide léger. Les travaux précurseurs qui introduisent l'étude de cette instabilité dans sa version plane sont due initialement à [Rayleigh \(1883\)](#) et à [Taylor \(1950\)](#), qui en fait une généralisation dans un champ d'accélération quelconque. La stratification entre les fluides est alors dite instable.

Considérons le cas plan où deux fluides immiscibles de densités  $\rho_2 \neq \rho_1$  sont superposés, l'interface noté par  $\zeta(t, x, y)$  et l'accélération par  $g$ . On peut généralement distinguer trois phases lors de l'évolution de l'instabilité où l'interface adopte un comportement qualitativement distinct ([Sharp, 1984](#)). Sur la figure 5.1 est illustrée l'évolution de l'instabilité durant ces différentes étapes du développement : une première phase où les petites perturbations à l'interface, avec une dépendance horizontale sinusoïdale, croissent de manière exponentielle (phase linéaire - figure 5.1(a-c)). Durant cette phase, l'instabilité apparaît comme l'amplification due à l'accélération des ondes de longueur plus grande que la longueur capillaire ([Chandrasekhar, 1961](#)).

Dans un deuxième temps, lorsque l'amplitude de la perturbation devient comparable à sa longueur d'onde, l'instabilité entre dans une seconde phase où sa croissance n'est plus exponentielle et de nouvelles structures tridimensionnelles apparaissent (phase non-linéaire - figure 5.1(d-g)). La théorie linéaire n'est alors plus valide. Cette étape est fortement influencée par les effets non linéaires et dépend du rapport

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{5.1}$$

appelé le nombre d'Atwood. Pour une grande différence de densités, c'est-à-dire  $\mathcal{A} \simeq 1$ , on observe que le fluide léger remonte dans le fluide lourd sous forme de bulles et des pics du fluide lourd s'introduisent dans le fluide léger. Initialement bidimensionnelles, ces formes sont instables vis-à-vis des perturbations selon l'axe transverse et l'écoulement devient tridimensionnelle. Inversement, lorsque les densités des deux fluides sont proches,  $\mathcal{A} \simeq 0$ , ce sont plutôt des bulles de chaque fluide qui s'interpénètrent créant les formes de champignons que l'on peut observer sur la figure 5.1. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz

entre en jeu et domine l'écoulement.

Finalement, une dernière phase s'installe et provoque la rupture des structures lisses provenant des non-linéarités (phase turbulente - figure 5.1(h-j)). Le mélange des deux fluides est important et repérer l'interface devient difficile. L'instabilité est alors pleinement développée sur un spectre d'échelles plus larges. Cette phase peut mener au mélange complet des deux fluides lorsque l'accélération est suffisamment élevée.

Dans la littérature, les simulations numériques sont en majorité consacrées à l'évolution bidimensionnelle de l'instabilité. Peu de simulations numériques décrivent les phases à grande amplitude qui sont essentiellement tridimensionnelles. Tryggvason (1988); Tryggvason and Unverdi (1990) étudient le problème tridimensionnel incompressible et plan jusqu'à sa phase non-linéaire pour de grandes et petites différences de densités et montrent qu'une plus forte résolution spatiale est nécessaire quand  $\mathcal{A} \simeq 1$  pour la résolution des petites échelles qui se développent. Le problème représente encore un défi majeur à aborder et nécessite l'usage des ressources de calculs numériques intensifs.

Dans sa formulation incompressible et plan, l'analyse de stabilité linéaire fournit la relation de dispersion pour la déformation de modes normaux de l'interface  $\zeta$  (Chandrasekhar, 1961)

$$\gamma^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gk - \sigma k^3}{\rho_2 + \rho_1} \quad (5.2)$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les densités des fluides intérieur et extérieur, respectivement,  $\gamma$  est le taux de croissance de la perturbation et  $\sigma$  la tension de surface.  $g$  est l'accélération effective ressentie par l'interface dirigé vers l'intérieur et  $k$  le nombre d'onde de la perturbation. Quand  $\rho_2 < \rho_1$  la configuration est stablement stratifiée;  $\gamma$  est imaginaire pur et toutes les longueurs d'ondes sont stables. À l'inverse, pour  $\rho_1 < \rho_2$  la configuration est instable ( $\gamma^2 > 0$ ) pour tous les nombre d'ondes  $k$  tels que

$$0 < k < k_c \quad \text{où} \quad k_c \equiv \left( \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (5.3)$$

où  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  est la longueur capillaire. Ainsi, toutes les longueurs d'ondes plus petites que  $\lambda_c$  sont stabilisées par la tension de surface. En l'absence de tension superficielle,

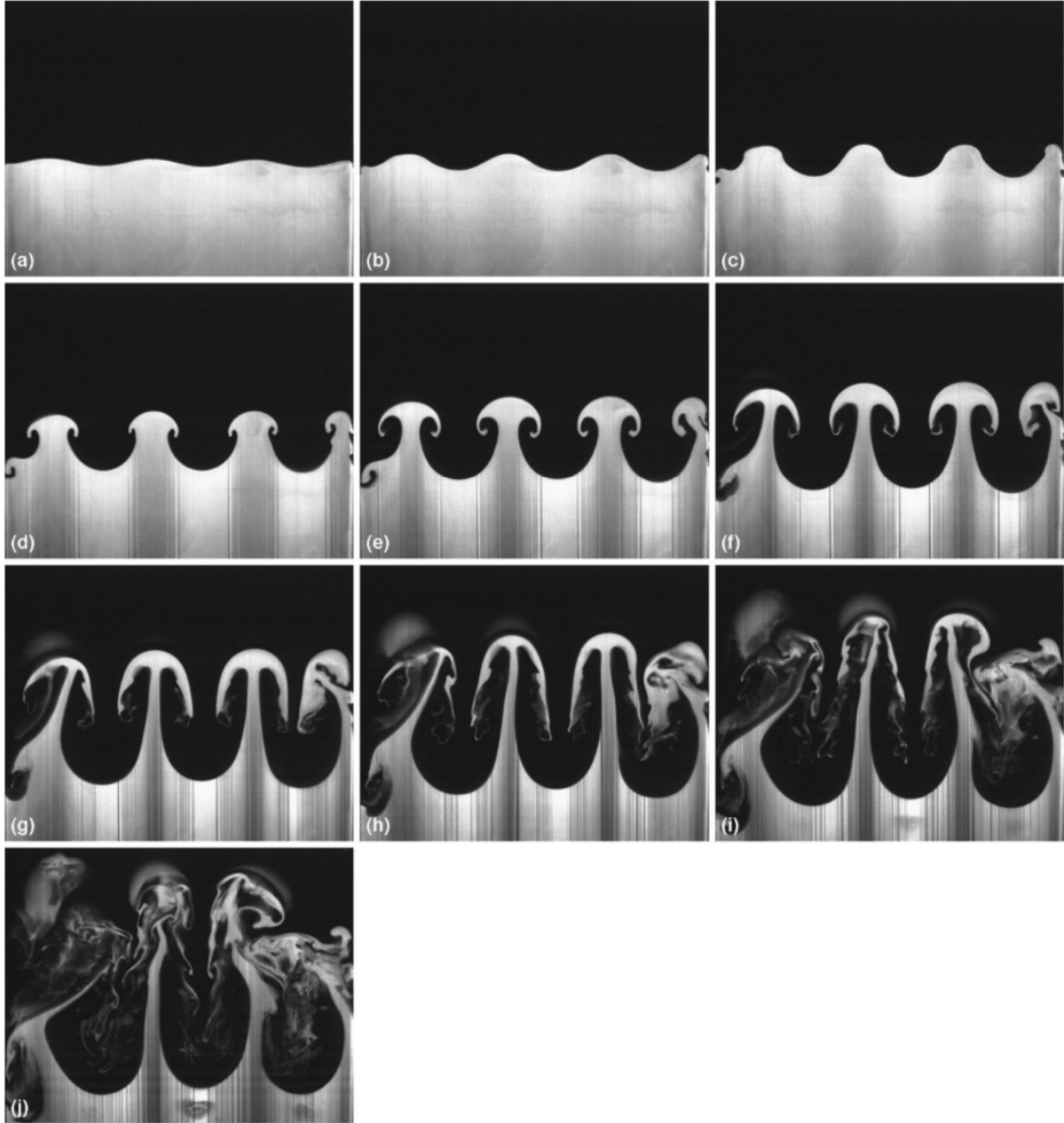


FIGURE 5.1 – La configuration initiale est stablement stratifiée dans le champ de pesanteur terrestre. Les densités des fluides sont assez proches avec une perturbation initialement sinusoïdale de l'interface. Pour créer l'instabilité, le système est accéléré à  $1.34g$  vers le haut. La phase linéaire correspond à (a-c), la phase non-linéaire (d-g) et la phase turbulente (h-j) (Waddell et al., 2001).

toutes les longueurs sont instables et sont amplifiées exponentiellement par  $g$  avec le taux

$$\gamma^2 = \mathcal{A}gk \tag{5.4}$$

Lorsque l'on tient compte de la viscosité dans le problème, [Chandrasekhar \(1961\)](#) montre que les modes instables stabilisés par la tension de surface sont indépendants de la viscosité et la condition (5.3) reste valable pour les nombre d'ondes instables.

L'étude de l'instabilité d'une interface sphérique est surtout appliquée à la dynamique des bulles. Les problèmes de la cavitation ou de la sonoluminescence des bulles en sont des exemples. Les modèles théoriques basés sur les travaux de [Plesset \(1954\)](#) considèrent le fluide intérieur (la bulle) comme un gaz compressible et le fluide extérieur comme un fluide incompressible. Le rayon de la bulle, considéré comme une fonction du temps, est suivi explicitement. [Prosperetti and Seminara \(1978\)](#) étudient l'amortissement due à la viscosité sur les modes les plus instables. [Gupta and Lawande \(1986\)](#) étudient un autre type de modèle où l'accélération  $g$ , orientée vers l'extérieur, entraîne le fluide intérieur vers l'extérieur, et ce pour plusieurs types de profils de densité. À la différence des précédentes études, les auteurs considèrent les fluides intérieur et extérieur comme incompressibles et négligent l'effet de la tension de surface. Leur relation de dispersion est équivalente à celle de [Plesset \(1954\)](#) pour les grands nombre d'ondes  $\ell \gg 1$  ([Mikaelian, 1987](#)).

Dans notre étude, nous suivons le système proposé par [Gupta and Lawande \(1986\)](#) où le rayon de la sphère est une quantité stationnaire. Cependant, on inverse à la fois le profil de densité et l'orientation de la force pour conserver une configuration instable. Les simulations tridimensionnelles traiteront de la limite  $\mathcal{A} \simeq 1$  durant les premières phases de croissance de l'instabilité. Le domaine numérique peut être soit choisi comme une boîte cubique (sans frontière) soit comme une sphère solide. Nous allons principalement considérer l'évolution de perturbations axisymétriques, cubiques et hexagonales. Les petits nombre d'onde seront aussi simulés. La phase turbulente conduisant à la rupture de l'interface, quant à elle, ne sera pas abordée.



---

## 5.2 Analyse de stabilité linéaire

On considère le cas simple où le profil de densité est constant dans chacune des phases et discontinu à l'interface. On décompose les champs linéarisés sur une base d'harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  et le taux de croissance  $\gamma_\ell$  des perturbations est réel. Le problème linéaire ne dépend que de  $\ell$  et non pas de  $m$ . Nous rappelons l'expression des déformations à l'interface  $\zeta(\theta, \phi, t)$  et du profil de vitesse radial linéarisé  $u_r^{(j)}(r, \theta, \phi, t)$  dans chaque fluide ( $j = 1, 2$ ) qui sont donnés par

$$\zeta(\theta, \phi, t) = \sum_{\ell \geq 1, m} e^{\gamma_\ell t} Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad , \quad u_r^{(j)}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\ell, m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} e^{\gamma_\ell t} f_\ell^{(j)}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (5.5)$$

où on a utilisé une décomposition toroïdale et poloïdale pour le champ de vitesse

$$\mathbf{u} = \nabla \times (g \mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times (f \mathbf{e}_r).$$

La centre de la sphère est l'origine du système de coordonnées. Le rayon de la sphère est constant avec  $\partial R / \partial t = 0$ , ce qui implique que le mode  $\ell = 0$  n'intervient pas dans la dynamique et reflète la conservation du volume.

En négligeant l'effet de la tension de surface, [Gupta and Lawande \(1986\)](#) obtiennent une version sphérique d'un résultat similaire à celui de [Chandrasekhar \(1961\)](#). Tous les modes  $\ell$  sont instables et sont exponentiellement amplifiés par la force  $g$  avec un taux

$$\gamma_\ell^2 = \frac{(\ell+1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1(\ell+1) + \rho_2 \ell} \frac{\ell}{R} g \quad (5.6)$$

$k_s \equiv \ell/R$  est introduit comme l'équivalent plan du nombre d'onde et

$$\mathcal{A}_S = \frac{(\ell+1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1(\ell+1) + \rho_2 \ell} \quad (5.7)$$

comme le nombre d'Atwood sphérique. Les grandes longueurs d'ondes sur la sphère sont associées aux petites valeurs de  $\ell \sim 1$  et similairement les petites longueurs d'ondes à  $\ell \gg 1$  pour lesquelles (5.6) est comparable à (5.2) du cas plan.

### 5.2.1 Relation de dispersion avec tension superficielle

Dans le cas du fluide parfait, la solution poloïdale des équations linéarisées qui ne diverge pas dans chaque fluide et qui obéit à la condition de continuité à l'interface est

$$\begin{cases} f_\ell^{(1)}(r) = A \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell-1} & \text{pour } 0 < r < R \\ f_\ell^{(2)}(r) = A \left(\frac{r}{R}\right)^{-\ell-2} & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (5.8)$$

La condition d'advection cinématique permet de relier la vitesse radiale au déplacement de l'interface

$$\zeta_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{\gamma_\ell} A \quad (5.9)$$

Enfin, la condition de saut de pression au premier ordre à l'interface qui mène au problème aux valeurs propres pour le taux de croissance  $\gamma_\ell$  est donnée par

$$\frac{1}{R^2} \Delta \left[ \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right]_{r=R} = \Delta \rho G(R, t) \nabla_H^2 \zeta_{\ell, m} + \sigma \nabla_H^2 \left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right) \zeta_{\ell, m} \quad (5.10)$$

où  $G(r, t) = g \frac{r}{R}$  et  $\Delta \Psi \equiv \Psi^2 - \Psi^1$ . Le terme  $\left( \frac{2}{R^2} + \nabla_H^2 \right)$  dans le membre de droite de (5.10) est issu de la linéarisation du saut de pression à l'interface en géométrie sphérique.

En insérant (5.8-5.9) et la propriété de  $\nabla_H^2 \equiv -\ell(\ell+1)/R^2$  dans la condition de saut de pression (5.10), on obtient la relation de dispersion tenant compte de la tension superficielle

$$\gamma_\ell^2 = \mathcal{A}_S \frac{\ell}{R} \left( g - \sigma \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{\Delta \rho R^2} \right) \quad (5.11)$$

Quand la tension de surface est nulle (5.11) est identique à la relation (5.6) de Gupta and Lawande (1986). En tenant compte de la tension de surface, la configuration est alors instable pour tous les modes sphériques  $\ell$  tel que

$$\sqrt{\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{R^2}} < \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\sigma}} \quad (5.12)$$

(5.12) devient la condition analogue à (5.3) en géométrie sphérique. De la même façon,

on définit  $\lambda_c = 2\pi R/\ell_c$  où

$$\ell_c \equiv R\sqrt{\frac{\Delta\rho g}{\sigma}}$$

### 5.2.2 Mode de croissance maximum lorsque $\mathcal{A}_S \sim 1$

La relation de dispersion (5.11) est un polynôme d'ordre quatre en  $\ell$ . L'entier le plus proche du maximum, que l'on note  $\ell_{max}$ , correspond au mode sphérique avec le plus grand taux de croissance et vérifie

$$\frac{\partial\gamma_\ell^2}{\partial\ell}(\ell_{max}) = 0 \quad (5.13)$$

Quand  $\rho_2 \gg \rho_1 \iff \mathcal{A}_S \sim 1$ , (5.11) est réduit à un polynôme d'ordre trois en  $\ell$  donné par

$$\gamma_\ell^2 = \frac{\ell}{R} \left( g - \sigma \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{\rho_2 R^2} \right) \quad (5.14)$$

Ainsi, en appliquant (5.13) à (5.14), on obtient après résolution d'une équation du second ordre, et en gardant la solution entière et positive,

$$\ell_{max} = \left[ \frac{1}{3} \left( \sqrt{3\ell_c^2 + 7} - 1 \right) \right] + 1 \quad (5.15)$$

dont le taux de croissance  $\gamma_{\ell_{max}}^2$  est calculé en insérant (5.15) dans (5.14). Pour  $\mathcal{A}_S = 0.99$ , la normalisation de relation de dispersion (5.11) avec  $\gamma_{\ell_{max}}$  est montrée sur la figure 5.2 pour des petites valeurs de  $\ell_{max}$  en fonction de l'accélération  $g$ , et donc de  $\ell_c$ .

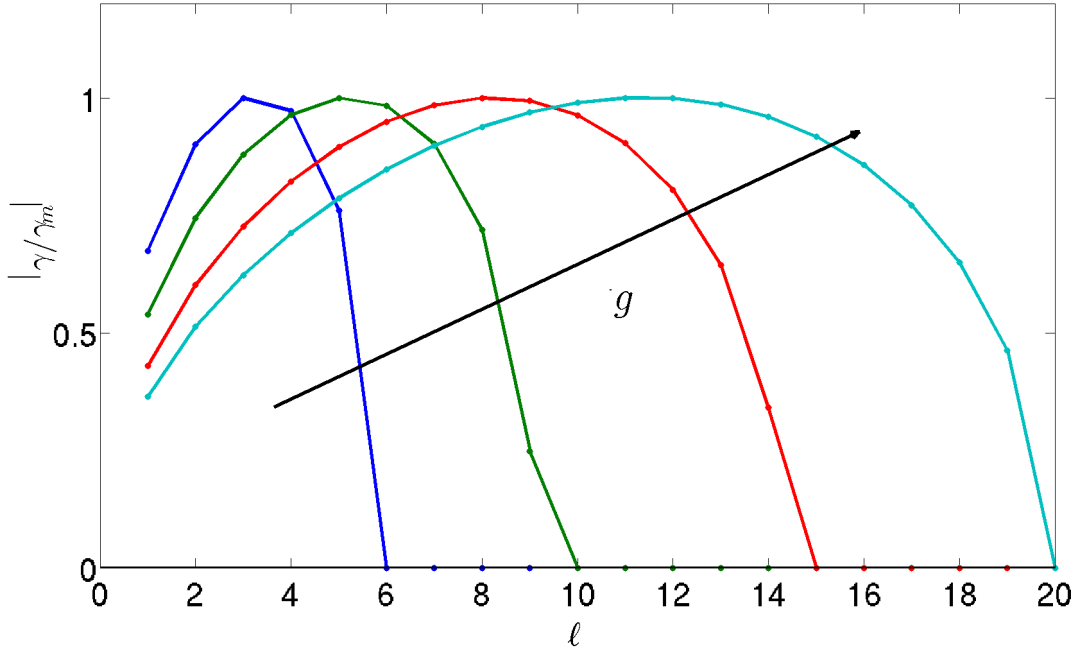


FIGURE 5.2 – Taux de croissance normalisé avec  $\gamma_{\ell_{max}}$  pour des valeurs croissantes de  $g$  et donc de  $\ell_c$ .

### 5.3 Simulations numériques tridimensionnelles pour $\mathcal{A}_S \sim 1$

Les fluides 1 (intérieur) et 2 (extérieur) sont de densités  $\rho_1 = 1.205\text{kg.m}^{-3}$  et  $\rho_2 = 940\text{kg.m}^{-3}$ , respectivement, ce qui donne  $\mathcal{A}_S = 0.99$  et de viscosités cinématiques  $\nu_1 = \nu_2 = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . L'interface est sphérique de rayon  $R = 0.04\text{m}$  et le second fluide occupe le reste du domaine qui est une sphère solide de rayon  $0.12\text{m}$ . La tension de surface est fixée à  $\sigma = 0.02\text{kg.s}^{-2}$  pour toutes les simulations et la force d'accélération  $g$  est calibrée de sorte à varier le nombre d'onde capillaire  $\ell_c$ .

Les simulations impliquant des déformations de l'interface de degré  $\ell \sim 1$  et  $\ell \gg 1$  sont effectuées avec une résolution de  $128^3$  et  $512^3$  cellules, respectivement. Les taux de croissance de la relation de dispersion (5.11) sont comparés avec ceux issus des simulations sur la table 5.1. L'augmentation des erreurs avec  $\ell$  montrent que les simulations pour des  $\ell \gg 1$  nécessitent de plus grandes résolutions. D'autre part, pour les longueurs d'onde plus grandes ou de l'ordre du rayon, une résolution de  $128^3$  cellules, tournant sur 16 processeurs, s'avère suffisante.

$\ell_{max}$	Résolution	$\gamma_{\ell_{max}}$ (5.11)	$\gamma_S$	Erreur Relative
5	128 <sup>3</sup>	5.65	5.77	2.15%
16	512 <sup>3</sup>	30.08	27.59	8.27%
23	512 <sup>3</sup>	50.78	44.78	11.82%
37	512 <sup>3</sup>	101.32	89.14	12.02%

TABLE 5.1 – Comparaison des taux de croissance obtenus à partir de la relation non visqueuse (5.11) pour des valeurs croissantes de  $\ell_{max}$ . Les erreurs augmentent avec  $\ell_{max}$ . Une meilleure résolution du domaine serait nécessaire ainsi qu'un modèle visqueux.

La condition initiale peut être donnée à l'aide d'harmoniques sphériques de degré  $\ell$  de la forme

$$\zeta - R \propto Y_\ell^m + c.c \quad \text{avec} \quad -\ell \leq m \leq \ell \quad (5.16)$$

où les motifs seront orientés avec l'axe  $Oz$  du domaine numérique. La condition d'incompressibilité impose au mode  $\ell = 0$  de rester constant tout au long des simulations. Sa variation renseigne sur la perte de la conservation de la masse.

Pour des faibles valeurs de viscosités, la phase non linéaire est atteinte rapidement par le mode  $\ell$  avec la plus grande amplitude à l'état initial. Dans ce cas, le mode  $\ell_{max}$  prédit par la relation de dispersion n'est pas toujours le plus dangereux. En effet, un état parfaitement sphérique étant difficile à reproduire avec une géométrie cartésienne, des perturbations dues à la construction du maillage lagrangien s'introduisent et dominent la dynamique.

### 5.3.1 Évolution non linéaire des motifs

#### Simulations pour $\ell \sim 1$

L'interface, initialement au repos, est formée avec une perturbation initiale d'amplitude valant 10% du rayon. Les motifs axisymétriques sont donnés par un ordre azimutal  $m = 0$  dans (5.16). L'expression des motifs avec une symétrie cubique pour le mode  $\ell = 4$  est obtenu avec une combinaison des modes  $m = 0$  et  $m = 4$

$$\zeta = R + \frac{1}{10} \left( \sqrt{7}Y_4^0 + \sqrt{5}Y_4^4 + c.c \right) \quad (5.17)$$

et celui du motif hexagonal (ou icosaèdre) pour  $\ell = 6$  avec une combinaison des modes

$m = 0$  et  $m = 5$

$$\zeta = R + \frac{1}{10} \left( \sqrt{11}Y_6^0 + \sqrt{14}Y_6^5 + c.c \right) \quad (5.18)$$

Sur la figure 5.3 est montrée l'évolution de la perturbation initiale ainsi que les champs de vitesse à l'interface pour un motif axisymétrique 5.3(a-d), cubique 5.3(e-h) et hexagonal 5.3(i-l). Les flèches à l'extérieur de l'interface indiquent le mouvement de l'intérieur vers l'extérieur et vice-versa.

Le comportement d'une interface sphérique pour des longueurs d'onde  $\ell \sim 1$  sous l'influence de l'instabilité de Rayleigh-Taylor montre un comportement relativement différent de celui observé dans le cas plan. Durant la phase linéaire, l'interface garde la forme simple associée au mode  $\ell$  de la perturbation initiale. Les modes azimutaux ayant le même  $\ell$  croissent tous avec le même taux de croissance.

Pendant la phase non linéaire, le fluide lourd s'enfonce dans le fluide plus léger sans former de pics à bouts pointus. La courbure est toujours plus forte dans ce sens. Par conservation du volume, le fluide léger remonte aussi le fluide lourd mais avec une courbure plus faible. La symétrie de l'interface persiste durablement jusqu'à la rupture de l'interface. En effet, le rapport relatif entre les modes dont l'amplitude initiale est non nulle dans (5.16,5.17,5.18) et les autres modes reste constant durant les phases de croissance, et donc le motif reste le même.

### Simulation à haute résolution pour $\ell \gg 1$

Pour des petites longueurs d'onde sur une sphère, les simulations nécessitent l'usage de grande ressources de calculs numériques pour résoudre les petites échelles de l'interface. La résolution du domaine pour les simulations est de  $512^3$  cellules ; ce sont des simulations qui ont nécessité l'utilisation de 2048 sous-domaines. Ici le domaine numérique est une boîte cubique sans frontière. Sur la figure 5.4 (a) est illustrée l'évolution de l'interface quand  $\ell_{max} = 16$  et  $\ell_c = 28.5$ , où l'on voit un motif cubique émerger et persister dans la phase non linéaire. La figure 5.4(b) montre la déformation de l'interface à l'intérieur de la sphère. La courbure de l'interface, créée par le fluide lourd, est clairement visible pour ces petites longueurs d'onde. La figure 5.5 illustre ces fortes courbures de l'interface lorsque  $\ell_{max} = 23$  et  $\ell_c = 29$ .

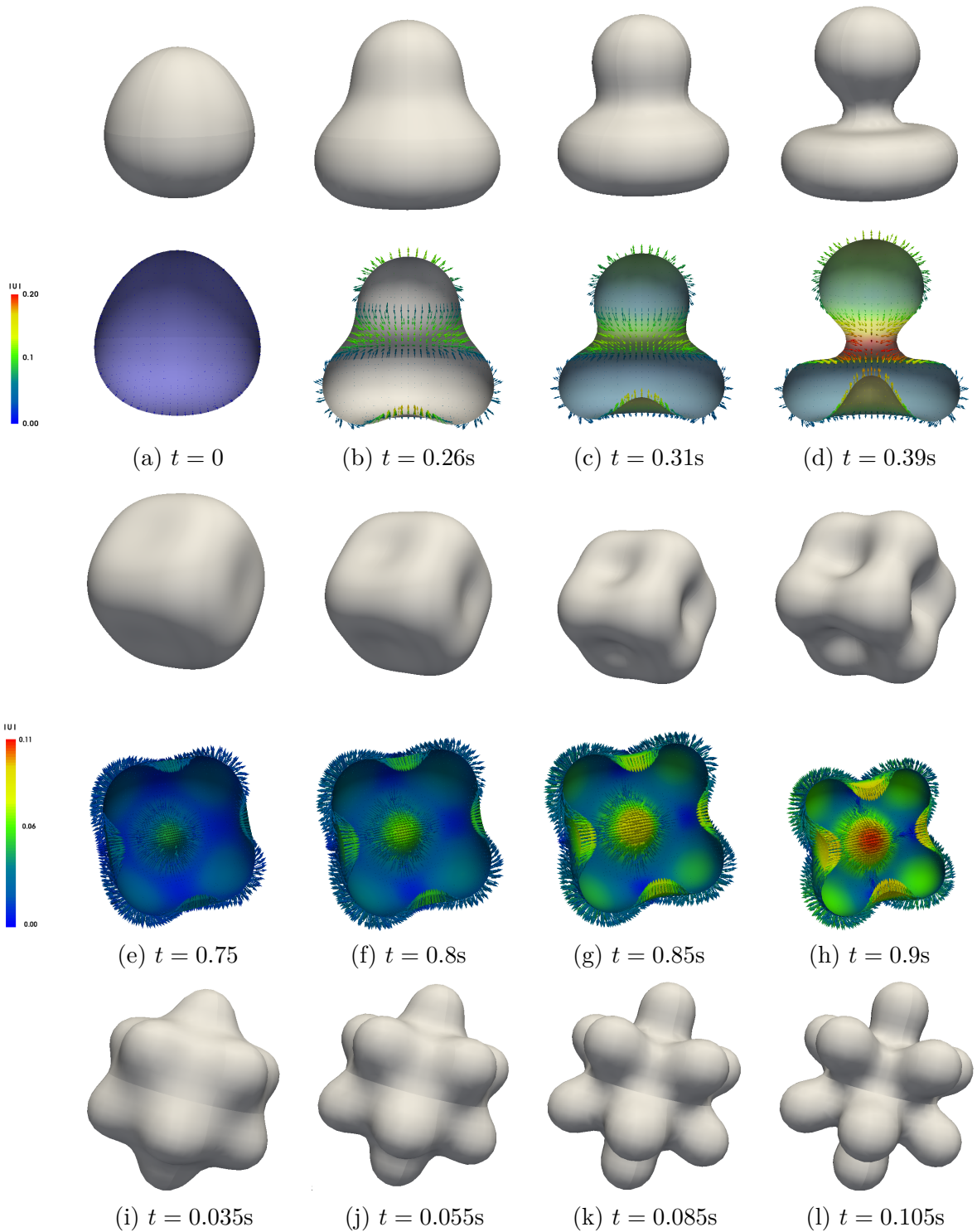


FIGURE 5.3 – évolution de l'interface et champs de vitesse à l'interface avec un mode (a-d) axisymétrique  $Y_3^0$ , (e-h)  $\ell = 4$  à symétrie cubique et (i-l)  $\ell = 6$  avec une symétrie icosaédrale.

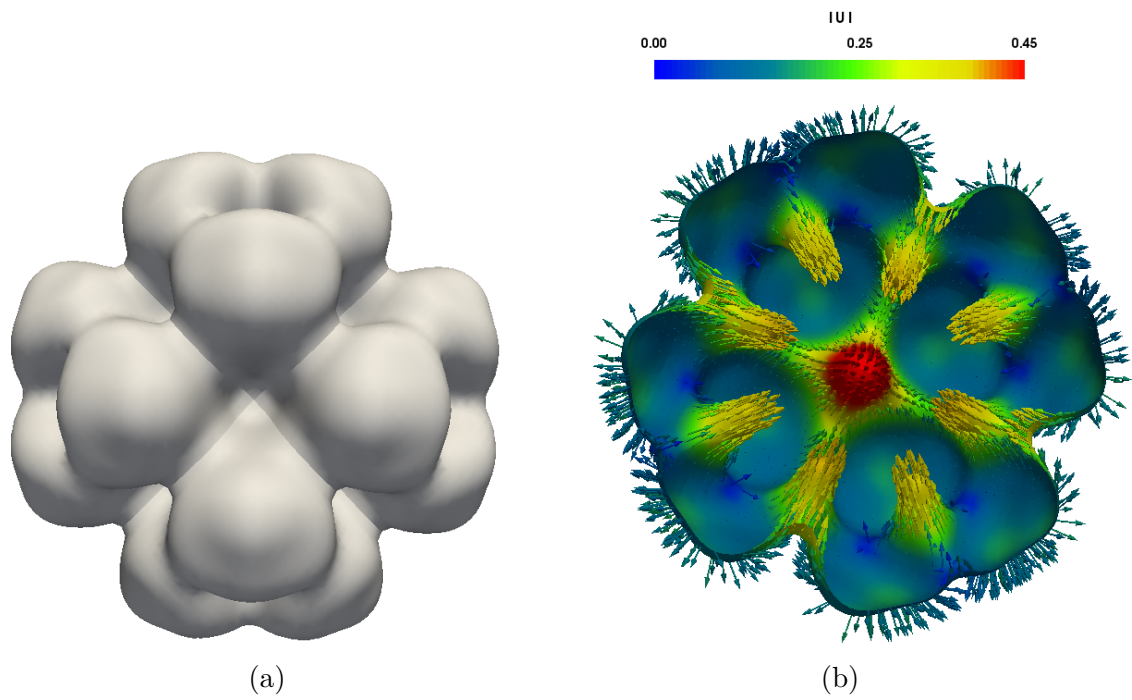


FIGURE 5.4 – évolution de l'interface (a) et champs de vitesse à l'interface avec un mode  $\ell_{max} = 16$  avec un motif cubique.

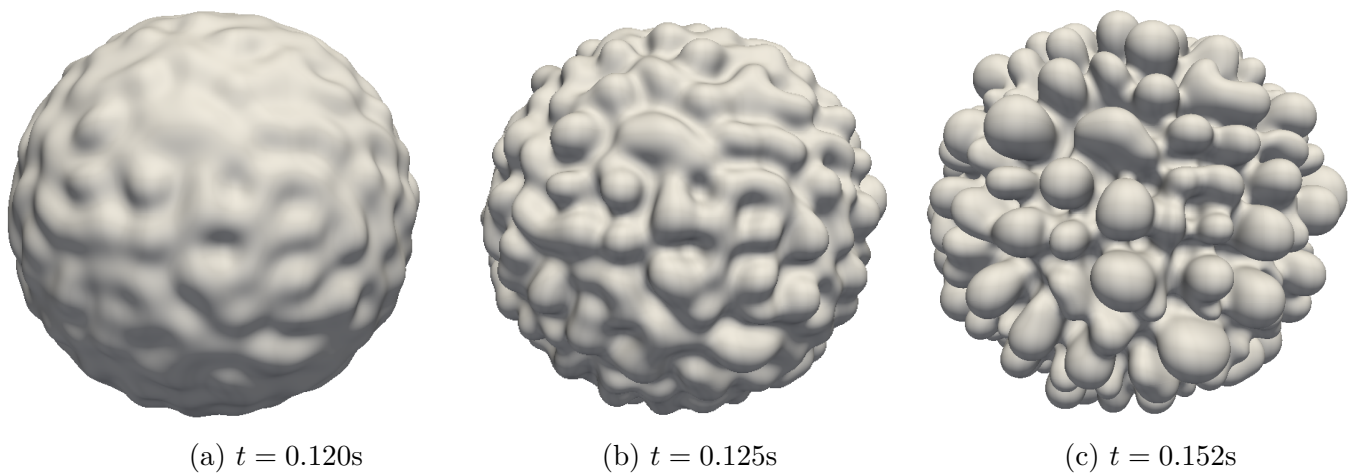


FIGURE 5.5 – évolution de l'interface pour un mode  $\ell_{max} = 23$ .



---

## 5.4 Conclusion

Nous avons réalisé des simulations numériques d'une interface sphérique subissant l'instabilité de Rayleigh-Taylor en présence de tension de surface à l'aide de notre solveur pour les écoulements multiphasiques. Les fluides intérieur et extérieur sont considérés comme incompressibles. L'effet stabilisant de la tension de surface permet à partir de la relation de dispersion de calculer le mode de croissance maximum de l'interface. La comparaison avec les taux issus des simulations pour de faibles viscosités est montrée sur le tableau 5.1.

Le solveur nous a permis de suivre l'évolution de l'interface pour de grandes différences de densités,  $\mathcal{A}_S \sim 1$ . Nous avons simulé la phase de croissance non linéaire impliquant de fortes déformation sur la sphère. Le fait que le solveur soit massivement parallélisable nous a permis d'atteindre des résolutions de  $512^3$  et d'effectuer des simulations pour des  $\ell \gg 1$ . Néanmoins, cette résolution s'avère insuffisante pour une étude quantitative des petites longueurs d'onde.

Le comportement de l'interface en géométrie sphérique a montré des différences avec le cas plan, notamment sur la déformation de l'interface en régime non linéaire. Nous n'avons pas observé de bouts pointus mais plutôt de déformations avec de fortes courbure de l'interface par le fluide lourd. Ceci a été observé pour les petites et grandes longueurs d'onde.

## Chapitre 6

# Simulations de l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz

### Contents

---

<b>6.1</b>	<b>Stabilité de fluides sous cisaillement oscillatoire horizontal</b>	<b>98</b>
<b>6.2</b>	<b>Modélisation numérique de l'instabilité</b>	<b>100</b>
6.2.1	Résumé de l'expérience de <a href="#">Yoshikawa and Wesfreid (2011b)</a>	100
6.2.2	Formulation du domaine numérique	101
<b>6.3</b>	<b>Visualisations de l'écoulement</b>	<b>103</b>
6.3.1	Champ de Base	103
6.3.2	Deux régimes de l'instabilité	105
6.3.3	Écoulement moyenné	106
<b>6.4</b>	<b>Évolution de la hauteur de l'interface</b>	<b>108</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>

---

Dans ce chapitre nous présentons les résultats de nos simulations numériques directes du développement de l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz.

Le système est constitué de deux fluides superposés, stratifiés et immiscibles avec un fort contraste de viscosité soumis à une oscillation horizontale et périodique où le fluide supérieur est plus visqueux. Bien qu'une large gamme de paramètres physiques influencent les conditions d'apparition et la morphologie de ces ondes interfaciales, nous considérons les paramètres utilisés pour le dispositif circulaire dans la thèse de [Nakagawa-Yoshikawa \(2006\)](#).

L'établissement de l'instabilité et les mesures de l'évolution de la hauteur de

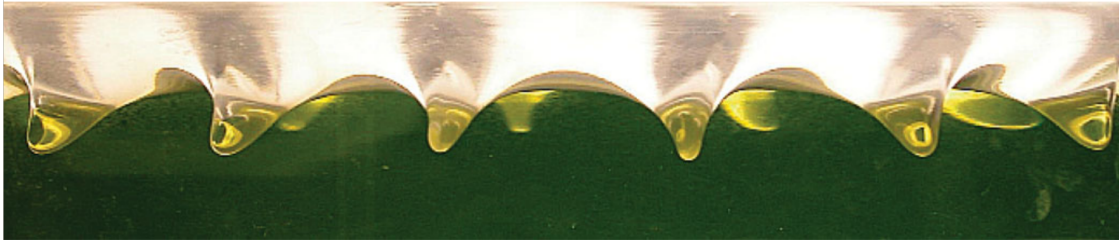


FIGURE 6.1 – établissement des ondes gelées (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b).

l'interface seront reportées à l'aide de notre code numérique *BLUE*.

## 6.1 Stabilité de fluides sous cisaillement oscillatoire horizontal

Considérons un système composé de deux liquides immiscibles et stratifiés stablement. En le soumettant à un cisaillement parallèle horizontal d'amplitude  $a$  et périodique de pulsation  $\omega$ , l'interface liquide/liquide située entre ces deux fluides peut alors subir une instabilité et conduire à la formation d'onde interfaciale. Au fur et à mesure que l'on augmente le forçage, les ondes prennent la forme de *doigts* accroché au fluide supérieur et se mettent à osciller comme un pendule, voir la figure 6.1.

Expérimentalement, on peut observer ces ondes interfaciales en faisant osciller horizontalement une cuve parallélépipédique (Wolf, 1969; Beysens et al., 1998; Ivanova et al., 2001; Talib et al., 2007) ou bien un dispositif cylindrique (Shyh and Munson, 1986; Nakagawa-Yoshikawa, 2006; Yoshikawa and Wesfreid, 2011b)) autour de son axe vertical de manière sinusoïdale. Un motif onduleux spatialement périodique et stationnaire se forme dans le référentiel de la cuve oscillante. On parle alors d'*ondes gelées*.

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux étudiant cette instabilité ont été réalisés au cours des dernières décennies. En faisant le parallèle avec l'instabilité non visqueuse de Faraday (Benjamin and Ursell, 1954), Kelly (1965) effectue la première analyse de stabilité linéaire. En considérant deux couches de fluides semi-infinies, l'auteur réduit le problème de l'évolution de l'interface à l'équation de Mathieu et définit un critère pour l'instabilité basé sur la différence de vitesse  $\Delta U_{cr} = U_{1_{max}} - U_{2_{max}}$  entre

les fluides où  $U_1$  et  $U_2$  est la vitesse du fluide inférieur et supérieur respectivement. Pour des couches de fluides de même profondeur, Lyubimov and Cherepanov (1986) effectuent une analyse en échelles multiples dans un régime de grandes fréquences et petites amplitudes d'oscillation ( $a \ll \lambda$ ). Le temps caractéristique pour l'établissement de l'instabilité est considéré grand par rapport à celui du forçage. Cette limite de grandes fréquences correspond à la limite non visqueuse où le mode de grande longueur  $k = 0$  est le plus instable. L'interface est déstabilisée via un mécanisme de type Kelvin-Helmholtz où le cisaillement est responsable de la croissance de l'instabilité. Le cisaillement oscillant a le même rôle que le cisaillement dans le cas classique de Kelvin-Helmholtz. Pour des hauteurs de fluides différentes, Lyubimov et al. (1998) déduisent également une équation de Mathieu avec un critère identique à celui obtenu par Kelly (1965). Cette étude est généralisée par Khenner et al. (1999) pour des régimes de forçage arbitraire dont la limite des hauteurs infinies est similaire aux résultats de Kelly (1965). Les auteurs proposent pour la première fois un modèle visqueux.

Dans leur étude théorique, Talib and Juel (2007); Talib et al. (2007) élargissent le modèle de Khenner et al. (1999) qui ne considère que le cas de viscosités identiques entre les fluides. Les expériences de Talib et al. (2007); Jalikop and Juel (2009) dans une cuve parallélépipédique montrent clairement qu'un modèle visqueux est nécessaire pour avoir une bonne prédiction quantitative sur l'apparition de l'instabilité. La viscosité élève les seuils d'instabilités et l'allure des courbes marginales est fortement influencée par la capillarité, la gravité et le contraste de viscosité des fluides. Yoshikawa and Wesfreid (2011a) effectuent une étude de stabilité visqueuse en suivant le modèle de couches de fluides semi-infinies de Kelly (1965). En considérant des petites amplitudes de forçage, ils distinguent un nouveau régime où le mécanisme responsable de l'instabilité n'est pas de type Kelvin-Helmholtz mais plutôt inertiel. Ce dernier n'est possible qu'en présence de fort contraste de viscosité et pour de faibles fréquences.

Nous nous sommes proposés de reproduire l'évolution de l'instabilité observé par Yoshikawa and Wesfreid (2011a) à l'aide de notre solveur non linéaire des équations de Navier-Stokes multiphasique. Les paramètres physiques des fluides ainsi que celui du forçage pour les simulations sont inspirés du travail de Yoshikawa and Wesfreid (2011b). Les hypothèses de travail, permettant des conditions aux limites périodiques, fournissent un cadre intéressant pour la reproduction numérique de l'instabilité. La croissance et la

---

saturation de l'interface peuvent être suivies de façon précise, que seules les expériences de [Jalilop and Juel \(2009\)](#); [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#) rapportent dans la littérature.

Pour le problème visqueux, la dynamique est régie par des paramètres qui sont le rapport de densité  $\rho = \rho_2/\rho_1$  et de viscosité  $N = \sqrt{\nu_2/\nu_1}$  où les indices 2 et 1 sont les propriétés des fluides supérieur et inférieur, respectivement, et la longueur d'onde  $\lambda$  est adimensionnée avec la longueur capillaire  $\lambda_{cap}$ . Un paramètre de vitesse  $\Delta U$  est inclus pour tenir compte des effets hydrodynamiques, responsables de l'amplification de la perturbation, par rapport aux effets, stabilisant, de la tension de surface et de la gravité. Lorsque l'on considère des hauteurs de fluides semi-infinies, la hauteur de référence est donnée par l'épaisseur de pénétration visqueuse de Stokes  $\delta_i = \sqrt{2\nu_i/\omega}$  dans chaque fluide. Dans le cas contraire, on utilise la hauteur de fluide.  $\Omega = \lambda_{cap}^2\omega/(2\nu_2) = (\lambda_{cap}/\delta_2)^2$  est la fréquence de forçage adimensionnée avec les propriétés du fluide le plus visqueux. Enfin, identiquement à ([Yoshikawa and Wesfreid, 2011a](#)), on définit un paramètre d'amplitude  $K = 2a/\lambda$  comme le double du rapport entre l'amplitude du forçage et la longueur d'onde.

## 6.2 Modélisation numérique de l'instabilité

### 6.2.1 Résumé de l'expérience de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#)

Dans ce travail, les auteurs étudient l'apparition de l'instabilité en faisant osciller un dispositif cylindrique de rayon  $R$  autour de son axe vertical avec une amplitude  $a = R\Phi$ , où  $\Phi$  est le déplacement angulaire. L'eau, plus dense et moins visqueuse, occupe la couche inférieure et l'huile, moins dense et plus visqueuse, occupe la couche supérieure.

Les différentes expériences ont été menées dans le but d'explorer des régimes d'oscillation équivalents à  $\lambda \gg \delta_{1,2}$  et  $\delta_1 \ll \lambda \ll \delta_2$  en présence d'un grand contraste de viscosité. L'évolution et la croissance de l'instabilité montrent un comportement indépendant de la fréquence de forçage, que l'on discutera plus loin. Les visualisations de leurs expériences sur les différentes étapes de l'évolution de l'instabilité sont illustrées sur la figure [6.2](#).

[Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#) reportent le diagramme de stabilité, figure [6.3\(a\)](#), où le seuil critique  $\Delta U_{cr}$  de l'instabilité est inversement proportionnel à la fréquence d'oscillation ; les seuils divergent pour les petites fréquences. Les disparités sur la prédiction

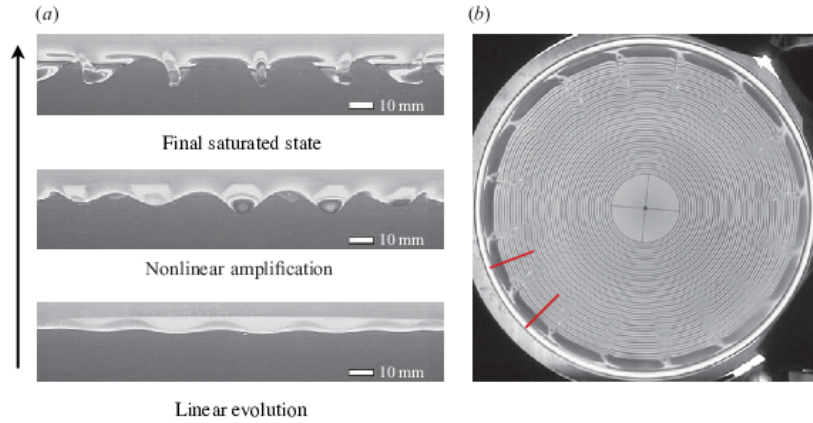
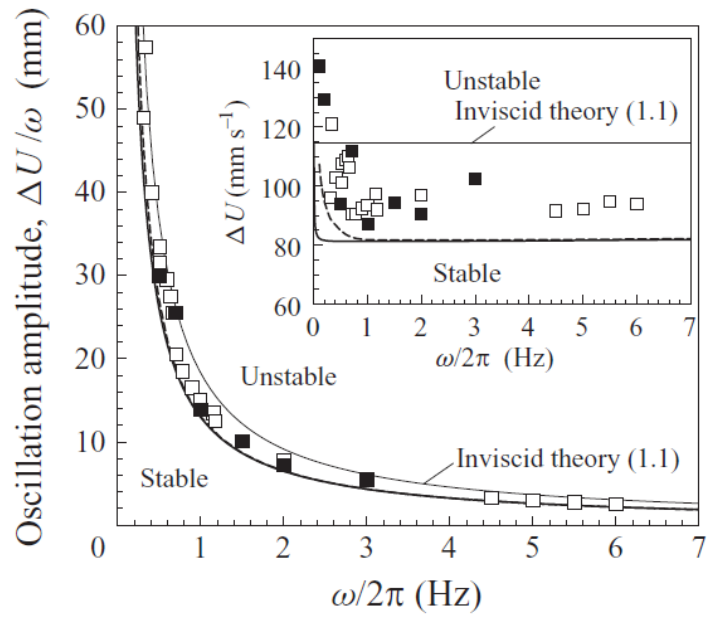


FIGURE 6.2 – (a) Coupe verticale du cylindre dans le plan  $(r, z)$ . Illustration des phases durant l'évolution de l'interface. Après une première phase de croissance exponentielle, une seconde phase de croissance non linéaire s'installe et mène à la saturation de l'onde. (b) Coupe horizontale du cylindre dans le plan  $(r, \phi)$ . Évolution des instabilités à la périphérie du cylindre. Le nombre d'onde observé ne varie pas sur un grand nombre d'oscillations. On peut négliger l'effet de la courbure à l'échelle d'une longueur d'onde comprise entre les deux barres rouges (Yoshikawa and Wesfreid (2011b)).

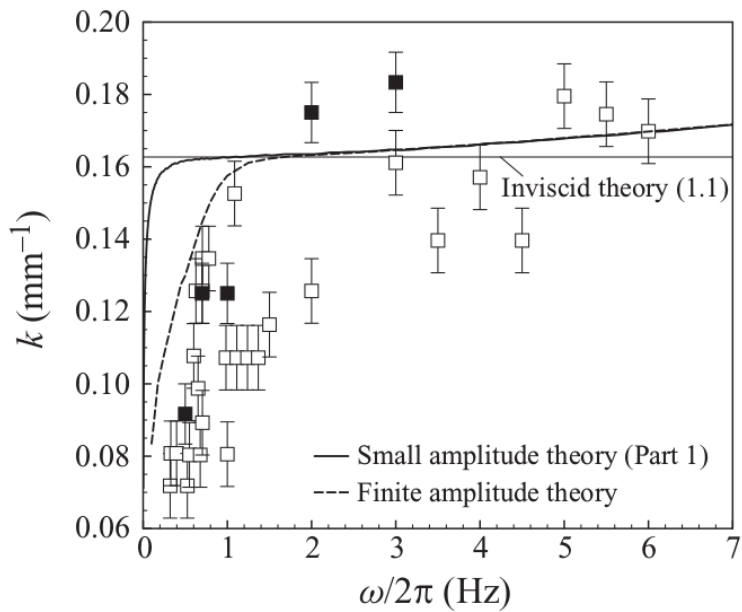
des nombre d'ondes critiques, illustrées par la courbe continue sur le diagramme 6.3(b), sont essentiellement dues à l'hypothèse des petites oscillations  $K \ll 1$  négligeant l'effet d'amplitude finie. Sur les figures 6.3(a) et 6.3(b), on peut voir que pour des fréquences  $\omega/2\pi < 1$  Hz, on a  $a = \Delta U/\omega \simeq 20\text{mm}$  et  $k \simeq 0.13\text{mm}^{-1}$  donnant des valeurs de  $K \simeq 0.8$ , sortant ainsi du cadre de l'hypothèse initiale. En tenant compte de cet effet d'amplitude finie, leur généralisation aux amplitudes d'oscillations arbitraires permet une meilleure prédiction de la longueur d'onde critique pour  $\omega/2\pi < 1$  Hz, courbe en pointillé sur 6.3(b).

### 6.2.2 Formulation du domaine numérique

Les instabilités se développent surtout à la périphérie du cylindre et peuvent y demeurer pendant un nombre assez grand d'oscillations. Elles prennent la forme d'un relief bidimensionnel stationnaire, avec une périodicité azimutale bien définie, voir figure 6.2 (b). L'écoulement généré peut être supposé comme étant uniquement dans la direction azimutale  $\mathbf{U} = U\vec{e}_\phi$  et la dépendance dans la direction radiale peut être négligée. Les longueurs d'onde observées étant suffisamment petites par rapport à la circonférence du cylindre, les effets de la courbure sont négligeables à l'échelle d'une longueur d'onde.



(a)



(b)

FIGURE 6.3 – (a) Diagramme de stabilité et (b) nombre d’onde critique au seuil obtenu dans deux dispositifs cylindriques. Les carrés blancs sont mesurés pour un cylindre de  $R = 112$  mm et les carrés noirs pour  $R = 120$  mm. Extrait de (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b).

Ainsi, le choix d'un repère cartésien avec des directions homogènes dans la direction du forçage  $Ox$  et dans la direction transverse  $Oy$  est justifié, voir la figure 6.4 et 6.2(b).

Le système est constitué de deux fluides immiscibles superposés stablement en cisaillement horizontal et périodique. L'état plat de l'interface est repéré par la position  $z = 0$ . Suivant la direction verticale  $Oz$  sont placées les parois supérieure (à  $H_2 = 3.5$  cm) et inférieure (à  $H_1 = -7$  cm) du domaine.

Les fluides considérés sont de l'huile de silicone 47V10000 (de densité  $9.73 \times 10^2$  kg/m<sup>3</sup> et de viscosité cinématique  $10^{-2}$  m<sup>2</sup>/s) superposée sur l'eau plus dense (de densité  $10^3$  kg/m<sup>3</sup> et de viscosité cinématique  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s). Le rapport de viscosité est  $N \equiv \sqrt{\nu_2/\nu_1} = 10^2$  et le rapport de densité  $\rho \equiv \rho_2/\rho_1 = 0.973$ . La tension de surface est fixée à  $\sigma = 0.01$  N.m<sup>-1</sup>.

On explore le régime de basse fréquence décrit précédemment en variant uniquement la fréquence d'oscillation. Contrairement aux expériences dans lesquelles  $\lambda$  varie selon la fréquence, nous fixons l'unité de longueur suivant la direction du forçage pour toutes les simulations à  $\lambda_B$  tel que  $q = \lambda_{cap}/\lambda_B = 0.77$ , avec  $k_B = 2\pi/\lambda_B = 0.125$ mm<sup>-1</sup>. La fréquence est comprise entre  $0.15$  Hz  $\leq f \leq 0.47$  Hz, ce qui correspond à  $0.067 \leq \Omega \leq 0.218$ . L'amplitude de forçage est aussi fixée à  $a = 0.0488$ m, ce qui donne un paramètre d'amplitude de  $K \simeq 1.9$ . Enfin, la longueur dans la direction transverse est fixée à  $\lambda_B/2$ .

Les simulations numériques parallélisées ont tourné sur un nombre  $8 = 2 \times 1 \times 4$  processeurs suivant les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , respectivement, avec une résolution de  $32^3$  cellules par sous-domaine. La configuration cartésienne, les sous-domaines et l'interface à l'état plat de l'interface sont montrés sur la figure 6.4.

## 6.3 Visualisations de l'écoulement

### 6.3.1 Champ de Base

Le champ de base pour générer un écoulement oscillant, comme dans 6.5(a), peut se formuler avec le second problème de Stokes. L'écoulement dans chaque fluide est unidimensionnel et l'expression de la vitesse est

$$\mathbf{U}_i = U_i e^{-z/\delta_i} \cos(\omega t - z/\delta_i) \vec{\mathbf{e}}_x \quad (6.1)$$



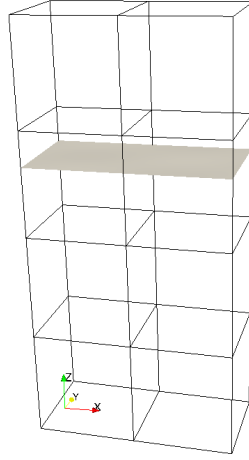


FIGURE 6.4 – Vue en perspective de la configuration cartésienne (sans courbure) à l'échelle d'une longueur d'onde. La direction azimutale est assimilée à la direction  $Ox$  et la direction radiale à la direction transverse. On illustre les sous-domaines associés à un processus MPI.

où  $\delta_i$  est la l'épaisseur de la couche de pénétration dans chaque fluide. Les solutions sur la figure 6.5(b) correspondent à un profil dont l'épaisseur de pénétration est de 20%. Avec un grand contraste de viscosité, le rapport d'échelles entre les hauteurs des parois verticales par rapport aux couches de pénétrations visqueuses dans chaque fluide sont telles que  $H_1 \gg \delta_1$  et  $H_2 \ll \delta_2$ . D'une part, la paroi supérieure entraîne le fluide plus visqueux dans un mouvement solide à vitesse constante, et d'autre part, le mouvement d'oscillation dans la partie inférieure moins visqueuse est restreint à une mince couche proche de la paroi laissant le fluide au repos dans le référentiel du laboratoire. Ainsi, le champ de base est

$$\mathbf{U}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_2 = U_2 \cos(\omega t) \vec{e}_x \quad (6.2)$$

Il est à noter que ce champ de base est différent de celui pour une cuve parallélépipédique, où les bords créent une recirculation dans le fluide intérieur et supérieur.

Dans nos simulations, le mouvement d'oscillation est imposé uniquement via un déplacement de la frontière supérieure et la frontière inférieure reste immobile. Initialement, l'interface est perturbée avec une fonction bidimensionnelle (dans le plan  $(x, y)$ ) et le champ de vitesse est nul dans tout le domaine. Dès les premiers pas de temps, l'interface devient une fonction unidimensionnelle (selon la direction  $x$ ) et le champ de vitesse

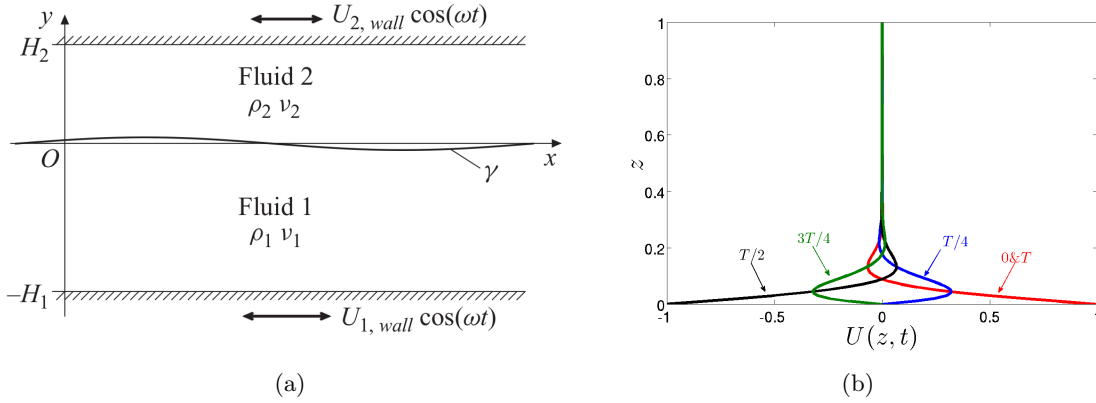


FIGURE 6.5 – (a) Configuration générale pour un cisaillement horizontal parallèle et oscillant et (b) Solution du second problème de Stokes (6.1) à intervalle de  $T/4$  où  $T$  est la période de forçage et une épaisseur de pénétration de 20%.

satisfait (6.2).

### 6.3.2 Deux régimes de l'instabilité

Les visualisations des simulations numériques montrent les mêmes phases de croissance qui sont décrites dans l'expérience. Après une première phase transitoire, des ondes se développent à l'interface et essentiellement dans le fluide moins visqueux. La hauteur de ces ondes croît de manière exponentielle pendant les premières oscillations avant de saturer à une hauteur finie. L'onde répond de manière harmonique à la fréquence de forçage.

Le seuil d'instabilité est compris entre 0.14 Hz et 0.15 Hz, voir 6.10(b). Pour des fréquences de forçage inférieure, les perturbations de l'interface disparaissent exponentiellement. (Nous n'avons pas réalisé de convergence en maillage pour confirmer ce résultat quantitatif.) Cette valeur est globalement en accord avec la théorie pour des amplitudes finies qui concerne nos simulations. Sur la courbe en pointillé de la figure 6.3(b), pour  $k_B = 0.125\text{mm}^{-1}$  le seuil est estimé à  $f = 0.20$  Hz. Par contre, dans les expériences, le seuil d'instabilité a été estimé à des valeurs de  $f$  comprises entre 0.32 Hz et 0.33 Hz. En dessous de cette fréquence, les auteurs ont estimé que l'interface entre les deux fluides reste plane.

Une explication de ce désaccord entre la théorie et les expériences de Yoshikawa and Wesfreid (2011b) pourrait être notre observation de deux régimes dans nos simulations.

---

En effet, nous distinguons principalement deux états où l'écoulement a deux types de comportements qualitativement différents selon que la fréquence est supérieure ou inférieure à 0.33 Hz. Les figures 6.6 et 6.7 montrent l'état asymptotique des deux régimes pour  $f = 0.28$  Hz et  $f = 0.47$  Hz, respectivement.

La première différence entre ces états concerne la croissance des ondes. Quand  $f \leq 0.32$  Hz les ondes saturent immédiatement après la phase linéaire. La hauteur à l'état asymptotique montre une forte dépendance avec la fréquence. D'autre part, pour  $f \geq 0.33$  Hz, les ondes subissent une seconde phase de croissance et saturent à une hauteur nettement plus grande qui dépend peu de la fréquence. La saturation est atteinte d'autant plus rapidement que  $f$  est plus grand que 0.33 Hz. Ce comportement est aussi celui observé par [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#).

La seconde différence se rapporte à la présence ou l'absence de lâchés tourbillonnaires dans le liquide inférieur à l'état asymptotique, comme on peut le voir sur les figures 6.6 et 6.7. Dans la figure 6.6, le mouvement périodique de l'interface se met à entraîner le fluide dans son voisinage. Lorsque  $f \geq 0.33$  Hz, sur la figure 6.7, alors l'inertie est suffisamment grande et on observe des tourbillons se former au niveau des creux des ondes dans le liquide moins visqueux. Dans la suite, nous appelons les cas avec  $f \leq 0.32$  Hz le régime de petites hauteurs et les cas avec  $f \geq 0.33$  Hz le régime de grandes hauteurs.

Sur les figures 6.8(a) et 6.8(b) sont représentés les profils de la vitesse dans la direction du forçage selon l'axe  $Oz$ . Ces profils sont associés aux figures 6.6 et 6.7 à la phase d'oscillation  $t = T/4$ . Dans le régime de petites hauteurs, l'écoulement se concentre dans un voisinage proche et en dessous de l'interface. Le champ de base (6.2) est très peu perturbé par rapport au régime de grandes hauteurs où les tourbillons sont présent.

### 6.3.3 Écoulement moyenné

À partir des champs de vitesses, on peut extraire les lignes de courant pour caractériser et comprendre les différentes structures de l'écoulement. Sur les figures 6.9(a) et 6.9(b) sont montrées les lignes de courant moyennées sur quelques périodes pour  $f = 0.28$  Hz et  $f = 0.47$  Hz à saturation. Les états de petites et grandes hauteurs se différencient par la présence de 4 et de 2 cellules de recirculation sous l'interface par unité de longueur d'onde, respectivement.

Le centre des cellules de recirculation est d'autant plus éloigné de l'interface que

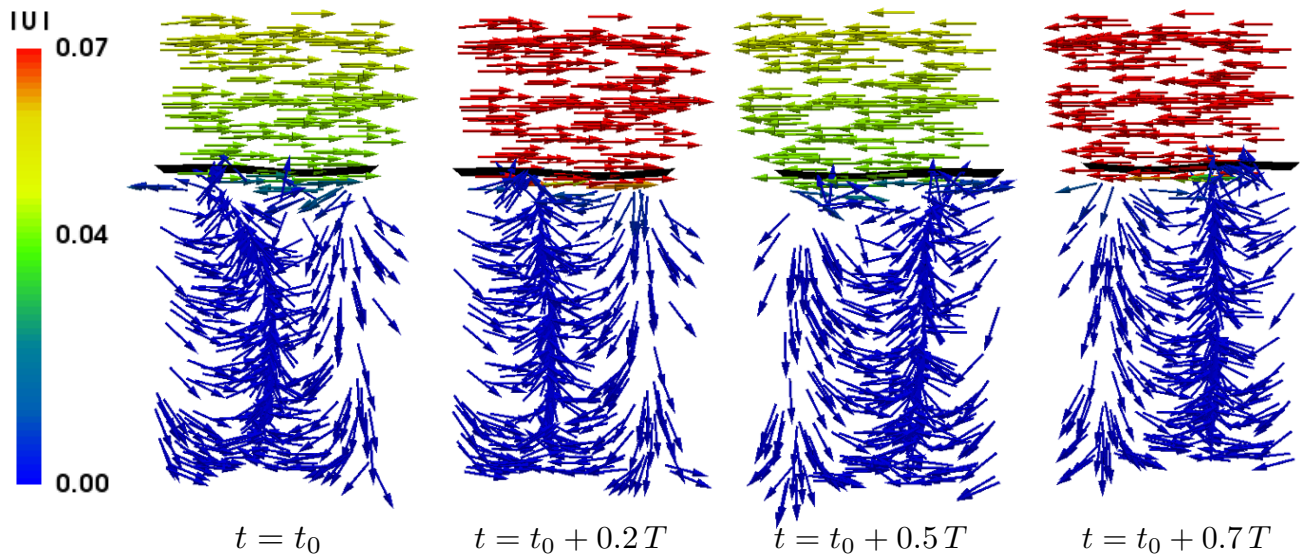


FIGURE 6.6 – État asymptotique quand  $f = 0.28$  Hz pour les petites hauteurs. Le domaine numérique (6.4) montre une seule longueur d'onde.

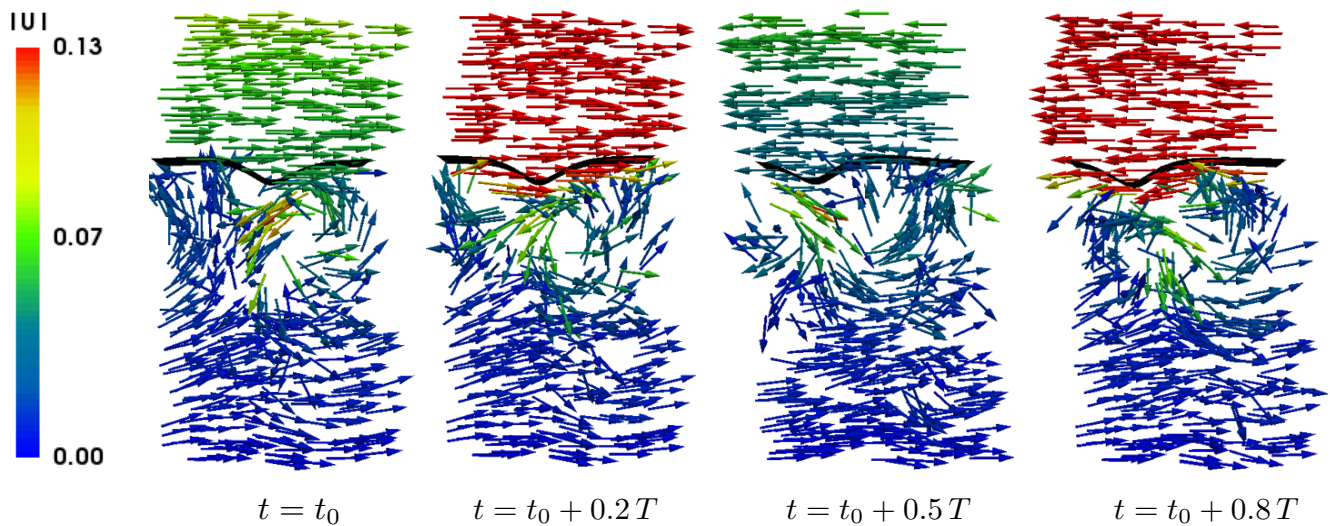


FIGURE 6.7 – État asymptotique quand  $f = 0.47$  Hz pour les grandes hauteurs. On peut clairement distinguer les lâchés tourbillonnaires.

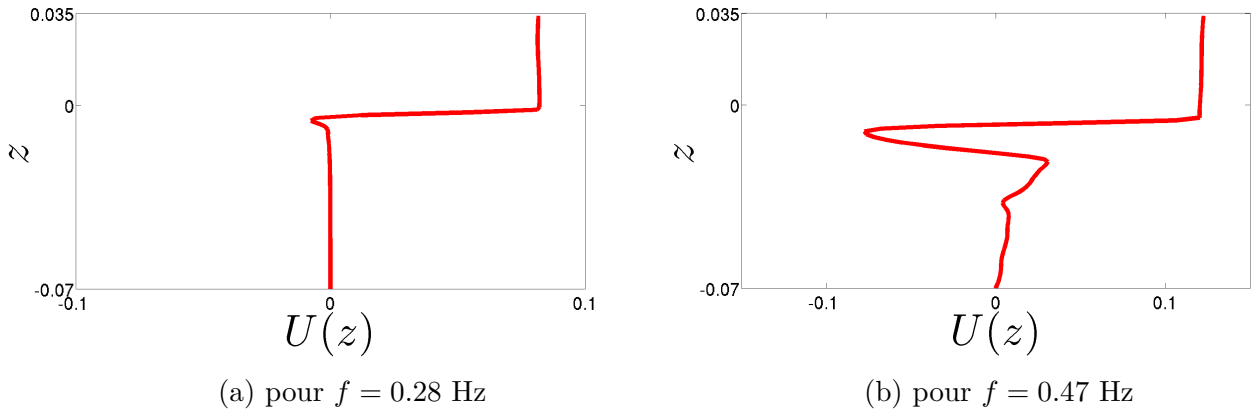


FIGURE 6.8 – Profil de vitesses dans la direction du forçage selon la direction verticale à  $t = T/4$  des figures (a) 6.6 et (b) 6.7.

la fréquence d'oscillation est grande. La distance maximale est atteinte pour le régime de grande hauteur. Au fur et à mesure que l'on augmente la fréquence, l'amplitude des cellules augmente ainsi que la hauteur des ondes. Quand  $f > 0.33$  Hz, l'énergie emmagasinée est suffisante pour entraîner les lâchés tourbillonnaires. Les mouvements de recirculations se propagent alors plus loin dans le fluide inférieur mais n'affectent pas le fluide supérieur. Dans le référentiel oscillant, il n'y a pas d'écoulement dans le fluide supérieur et toutes les lignes de courant sont ouvertes. [Yoshikawa and Wesfreid \(2011a\)](#) prévoit la vorticité comme mécanisme responsable de l'instabilité.

## 6.4  volution de la hauteur de l'interface

Sur la figure 6.10(a) est montrée les hauteurs à saturation issues des simulations numériques pour des valeurs de  $f$  comprises entre 0.15 Hz   0.47 Hz. On constate que l'interface ne subit pas de phase de croissance pour  $f \leq 0.15$  Hz ; ceci est la valeur minimale pour avoir une croissance exponentielle des perturbations.

Pour les fréquences comprises entre 0.18 Hz et 0.32 Hz, la hauteur de saturation dépend clairement de la fréquence. Sur la figure 6.10(b) est montrée la mesure du carré de la hauteur de saturation pour  $0.18 \text{ Hz} \leq f \leq 0.32 \text{ Hz}$  de la figure 6.10(a). Cette dépendance linéaire avec la fréquence suggère la présence d'un état stable suite à une première bifurcation fourche supercritique, où  $h^{1/2} \propto f$ .

D'autre part, les expériences de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011b\)](#) rapportent uniquement les mesures pour le régime de grandes hauteurs ( $f \geq 0.32$  Hz) ; en dessous de cette

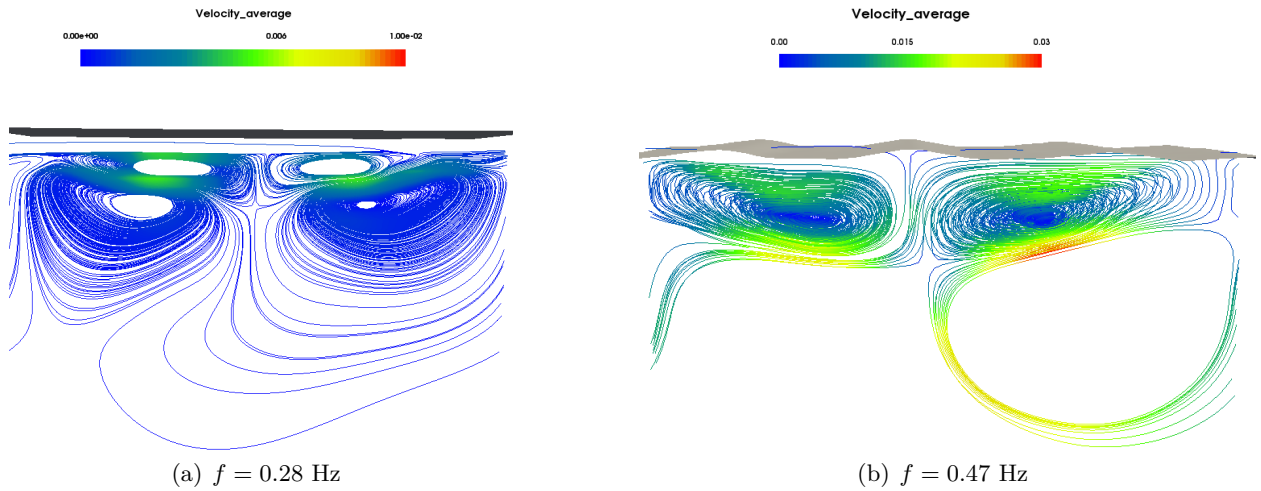


FIGURE 6.9 – Lignes de courant moyennées par unité de longueur d'onde sur quelques périodes à saturation.

fréquence les déformations de l'interface n'ont pas pu être détectées. Pour cette gamme de fréquences, les mesures expérimentales et nos simulations numériques montrent les mêmes résultats : une hauteur de saturation asymptotique indépendante de la fréquence. Cependant, on peut constater que la hauteur de saturation finale mesurée est sensiblement différente entre les expériences et les simulations. Ceci peut être liée au fait que la longueur d'onde ne change pas avec les fréquences dans nos simulations, ce qui est le cas dans les expériences.

Sur les figures 6.10(a) et 6.11, le déclenchement de la seconde phase de croissance est très bien illustré pour  $f = 0.33$  Hz, où l'on voit que la transition aux grandes hauteurs est plus courte à mesure que l'on augmente la fréquence. Ces transitions suggèrent ainsi la présence d'une seconde bifurcation à  $0.32$  Hz  $\sim$   $0.33$  Hz. Les simulations montrent qu'il existe aussi un état stable aux petites hauteurs pour  $f = 0.32$  Hz. À titre de comparaison, les mesures expérimentales sont montrées sur la figure 6.11. Sur la figure 6.12 est montrée la hauteur de saturation d'un état à  $f = 0.47$  Hz lorsque la fréquence est baissée à  $f = 0.32$  Hz (courbe rouge à partir de  $t = 75$ s). La solution est différente de celle obtenue à partir de la condition initiale plane (courbe bleue). La présence de deux états pour la même fréquence est systématiquement observée lorsque la fréquence d'un état à grande (resp. petite) hauteur est baissée (resp. augmentée) à  $f = 0.32 \sim 0.33$  Hz. La transition pourrait ainsi être sous-critique. D'autre part, pour les fréquences plus grandes

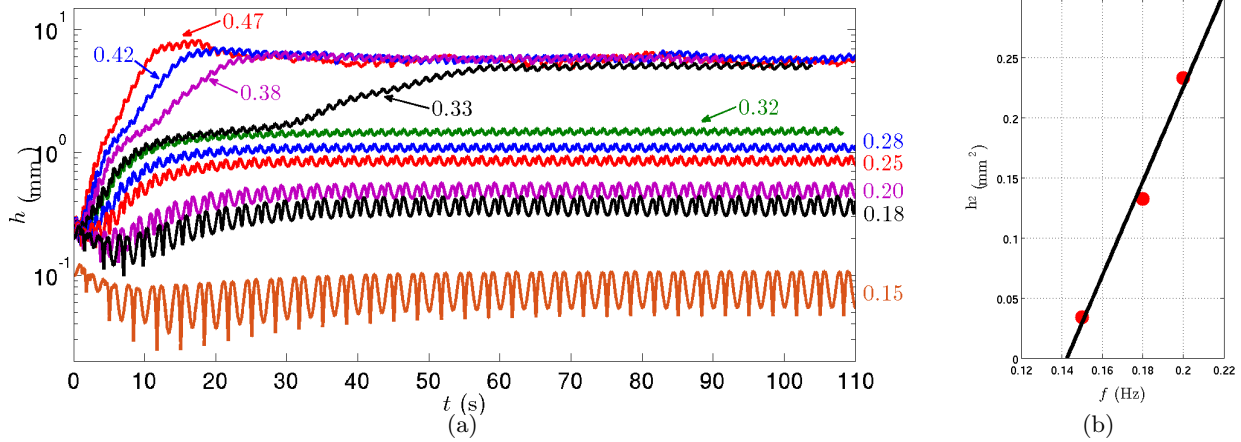


FIGURE 6.10 – (a) Évolution de la hauteur de l’interface mesurée avec les simulations numériques. La hauteur de l’interface est définie comme la distance des creux aux bosses des ondes. (b) Mesure du carré de la hauteur de saturation en fonction de la fréquence de forçage pour 0.15 Hz, 0.18 Hz et 0.20 Hz.

et plus petites les hauteurs asymptotiques sont uniques et indépendantes de l’historique de l’onde, voir figure 6.13. Nous n’avons pas déterminé la plage précise de fréquences pour lequel il existe deux états. Quand  $f = 0.33$  Hz, l’écoulement passe successivement par ses deux états. Une première saturation est observée à un état stationnaire instable aux petites hauteurs.

## 6.5 Conclusion

Sous l’impulsion de J.E. Wesfreid, nous avons réalisé des simulations numériques sur l’instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz avec un contraste de viscosité de  $10^4$  entre les fluides. Des expériences avec les mêmes paramètres de fluides et d’oscillations avaient été effectués au cours de la thèse de [Nakagawa-Yoshikawa \(2006\)](#).

Les résultats obtenus expérimentalement ont été reproduit avec succès par notre solveur numérique. La structure de l’écoulement, avec des lignes de courant fermées avec 2 ou 4 cellules de recirculation sous l’interface, est en accord avec la prédiction théorique de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011a\)](#). Dans ces régimes d’oscillation, le mécanisme responsable est prédit comme étant inertiel et ne provenant pas du cisaillement qui produirait des lignes de courant enveloppant l’interface.

De plus, un nouvel état de saturation de l’onde à des petites hauteurs, qui existe



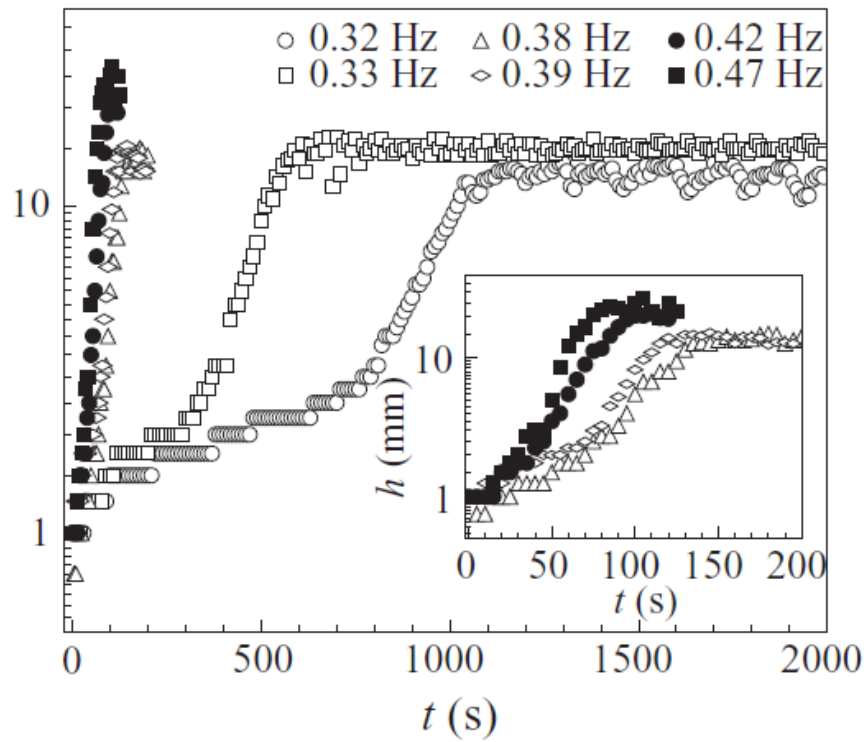


FIGURE 6.11 – Évolution de la hauteur de l'interface mesurée expérimentalement, extraite de (Yoshikawa and Wesfreid, 2011b).

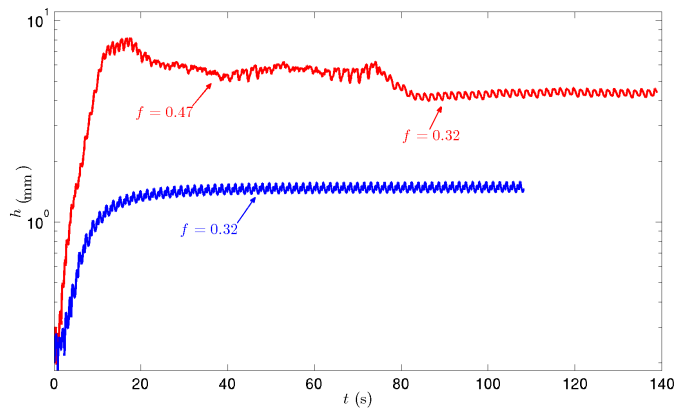
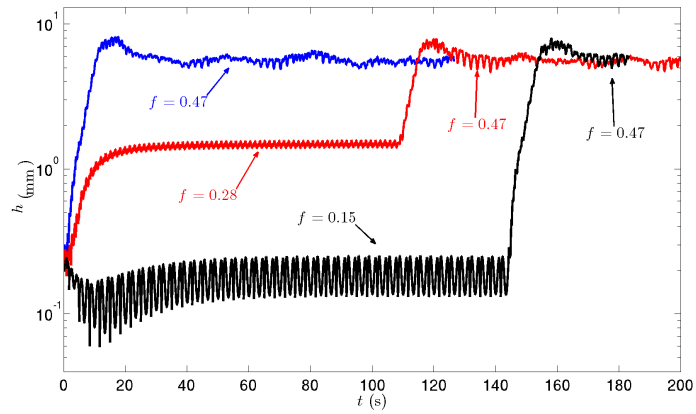
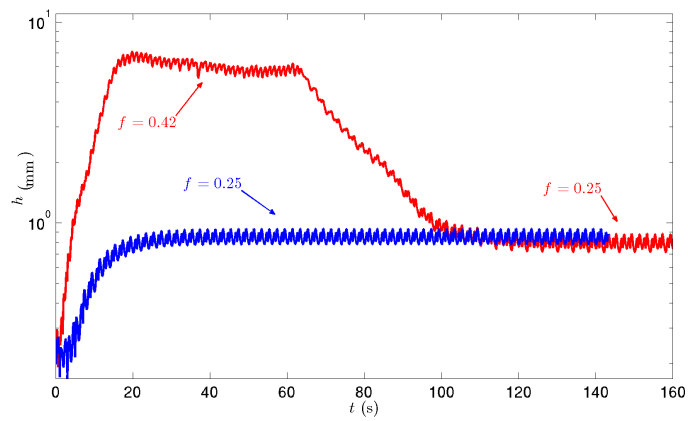


FIGURE 6.12 – En rouge, courbe d'un état à grande hauteur baissé à  $f = 0.32$  Hz. La hauteur asymptotique est différente de l'état de petite hauteur (en bleu) obtenu lorsque l'état initial est donné par l'interface plate.





(a)



(b)

FIGURE 6.13 – Modification de la hauteur de l’interface lorsque (a) la fréquence d’un état de petite hauteur est augmentée et (b) la fréquence d’un état de grande hauteur est augmentée.

entre 0.15 Hz et 0.32 Hz, a été mis en évidence. Un régime que les expériences précédentes n'avaient pas observé. Cet état stable semble subir une bifurcation aux états à grandes hauteurs (observés expérimentalement) lorsque la fréquence de forçage se trouve entre 0.32 Hz et 0.33 Hz, comme le montre la figure 6.14. Ces résultats prometteurs nécessiteraient une étude plus approfondie.

Une autre perspective pour ce travail serait de confirmer l'analogie pour les deux différents états asymptotiques avec l'écoulement au dessus d'un fond sableux. En effet, le régime des petites hauteurs pourrait être analogue à celui des rides à grains roulants et celui des grandes hauteurs à celui des rides à tourbillons. La croissance de la hauteur, le lâché tourbillonnaire ou encore le motif des lignes de courant sont les mêmes caractéristiques utilisées pour différencier ces deux types de rides sous-marines (Bagnold and Taylor, 1946). Les expériences de Stegner and Wesfreid (1999) prédisent que l'état des rides à grains roulants est instable, ce qui pourrait être confirmé ou infirmé avec des simulations sur l'instabilité dans ce régime.

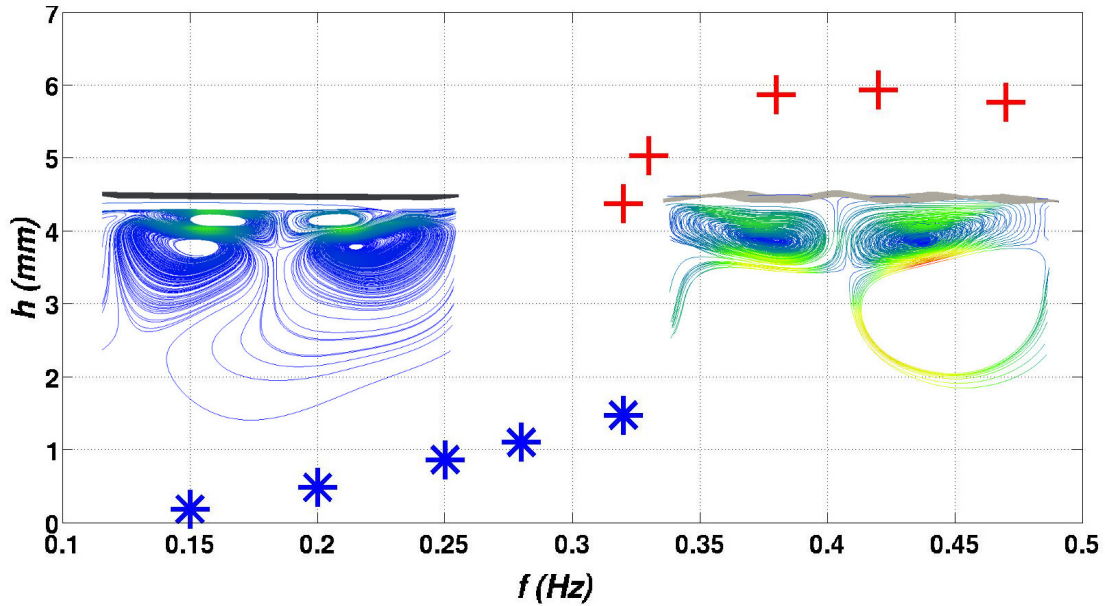


FIGURE 6.14 – Première bifurcation fourche supercritique et seconde sous-critique avec deux états à saturation pour  $f = 0.32$  Hz.

---

## Chapitre 7

# Conclusion Générale

à l'aide de notre code de calcul pour les écoulements multiphasiques de Navier-Stokes, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité d'une interface lorsque celle-ci subit un forçage radial et périodique. La configuration étudiée est impossible à reproduire de manière expérimentale et ainsi l'utilisation de moyens numériques est incontournable.

Le problème principal est l'étude de la stabilité d'une goutte sphérique forcée périodiquement. Le problème est l'équivalent du problème de [Faraday \(1831\)](#) en géométrie sphérique. Nous avons dans un premier temps effectué une analyse de stabilité linéaire en généralisant la procédure de Floquet de [Kumar and Tuckerman \(1994\)](#). Nous avons ainsi pu déterminer les langues d'instabilités et le mode sphérique  $\ell$  le plus instable selon les paramètres du forçage. Lorsque l'on néglige la viscosité, le problème est réduit à une équation de Mathieu comme dans le cas plan.

Les simulations numériques nous ont permis de valider quantitativement le mode le plus instable et de suivre son évolution sur le long terme. Nous avons été en mesure de reproduire l'instabilité pour des modes allant de  $\ell = 1$  à  $\ell = 6$ . Pour ces valeurs de  $\ell$ , la littérature fournit l'ensemble des solutions existantes et préférées que nous avons reproduit numériquement. Le mode  $\ell = 1$  n'est pas permis lorsque la capillarité domine et ne décrit pas une oscillation de l'interface mais un mouvement de va-et-vient de l'ensemble de la goutte. Pour chacun de ces modes, nous avons observé que le mode  $\ell$  oscille entre le motif prédit et son dual. Ces motifs peuvent être interprétés à l'aide des solides de Platon, sauf pour  $\ell = 2$  et  $\ell = 5$ . Lorsque  $\ell = 3$  ou  $\ell = 4$ , le motif oscille avec une forme tétraédrique ou cubique, respectivement. Après une période de forçage

---

(ou deux, si la réponse est sous-harmonique) le motif retrouve sa forme. Entre les deux oscillations, il prend la forme du dual, c'est-à-dire d'un autre tétraèdre, si  $\ell = 3$ , ou d'un octaèdre,  $\ell = 4$ . Lorsque  $\ell = 6$ , la théorie prédit que la solution préférée a une symétrie icosaédrale. Nous n'avons cependant pas réussi à obtenir une solution stable avec une telle symétrie, toutes les solutions ayant une symétrie cubique. Nous suspectons la géométrie cartésienne du domaine numérique de forcer ou de choisir les solutions avec une symétrie cubique.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor a aussi été étudiée dans sa version sphérique. Pour cela on considère que la composante oscillante de la force est nulle et l'accélération dirigée du fluide lourd vers le fluide léger. Nous avons essentiellement effectué des simulations de l'interface en présence de tension de surface. Nous avons suivi l'évolution avec différentes conditions initiales, et nous avons montré la limite de la résolution acceptable pour représenter les petites longueurs d'onde.

Le dernier chapitre a été consacré à la simulation de l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz pour une interface située entre deux fluides stablement stratifiés et immiscibles. La nouveauté dans l'étude de [Yoshikawa and Wesfreid \(2011a,b\)](#) concerne la configuration avec un fort gradient de viscosité ( $10^4$ ) et un régime de petites fréquences ( $< 2$  Hz). Les simulations ont permis de trouver un nouvel état intermédiaire de l'interface qui sature à des petites hauteurs.

Au cours de la thèse, nous nous sommes intéressés à des problèmes nouveaux qui n'ont pas encore été étudiés numériquement : l'instabilité de Faraday sphérique et l'instabilité oscillante de Kelvin-Helmholtz avec grand un contraste de viscosité. Notre solveur, BLUE, des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles et multiphasiques s'est avéré performant pour reproduire la dynamique d'une interface 2D et 3D et capable de tourner efficacement sur les plus grandes architectures de calcul intensif. La question de l'instabilité de la solution icosaèdre ou encore de la représentation de petites échelles sur une surface sphérique, comme dans le cadre de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, ouvre des perspectives tant sur le plan numérique que sur celui des applications futures.

# Bibliographie

- Abramowitz, M. and Stegun, I. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications.
- Arbell, H. and Fineberg, J. (2002). Pattern formation in two-frequency forced parametric waves. *Phys. Rev. E*, 65(3) : 036224.
- Bagnold, R. A. and Taylor, G. (1946). Motion of waves in shallow water. interaction between waves and sand bottoms. *Proc. R. Lond. A*, 187(1008) : 1–18.
- Basaran, O. A. (1992). Nonlinear oscillations of viscous liquid drops. *J. Fluid Mech.*, 241 : 169–198.
- Batson, W., Zoueshtiagh, F., and Narayanan, R. (2013). The Faraday threshold in small cylinders and the sidewall non-ideality. *J. Fluid Mech.*, 729 : 496–523.
- Benjamin, T. B. and Ursell, F. (1954). The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. Lond.*, 225 : 505–515.
- Beysens, D., Wunenburger, R., Chabot, C., and Garrabos, Y. (1998). Effect of oscillatory accelerations on two-phase fluids. *Microgravity Sci. Technol*, 11(3) : 113–118.
- Brunet, P. and Snoeijer, J. H. (2011). Star-drops formed by periodic excitation and on an air cushion—a short review. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 192(1) : 207–226.
- Busse, F. H. (1975). Patterns of convection in spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 72(01) : 67–85.
- Busse, F. H. and Riahi, N. (1982). Patterns of convection in spherical shells. part 2. *J. Fluid Mech.*, 123 : 283–301.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical simulation of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 22 : 745–762.
- Chossat, P., Lauterbach, R., and Melbourne, I. (1991). Steady-state bifurcation with  $O(3)$  symmetry. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 : 313–376.

- Couderc, F. (2007). *Développement d'un code de calcul pour la simulation d'écoulements de fluides non miscibles. Application à la désintégration assistée d'un jet liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, ENSAE - Toulouse.
- Cummings, D. L. and Blackburn, D. A. (1991). Oscillations of magnetically levitated aspherical droplets. *J. Fluid Mech.*, 224 : 395–416.
- Douady, S. (1990). Experimental study of the Faraday instability. *J. Fluid Mech.*, 221 : 383–409.
- Ebo Adou, A. and Tuckerman, L. S. (2015). Faraday instability on a sphere : Floquet analysis. *J. Fluid Mech.*, to be submitted.
- Ebo Adou, A., Tuckerman, L. S., Shin, S., Chergui, J., and Juric, D. (2015). Faraday instability on a sphere : Numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, to be submitted.
- Edwards, W. S. and Fauve, S. (1994). Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.*, 278 : 123–148.
- Eggers, J. and Villermaux, E. (2008). Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.*, 71(3) : 036601.
- Faraday, M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 121 : 299–340.
- Fuster, D., Agbaglah, G., Josserand, C., Popinet, S., and Zaleski, S. (2009). Numerical simulation of droplets, bubbles and waves : state of the art. *Fluid Dyn. Res.*, 41 : 065001.
- Futterer, B., Krebs, A., Plesa, A. C., Zaussinger, F., Hollerbach, R., Breuer, D., and Egbers, C. (2013). Sheet-like and plume-like thermal flow in a spherical convection experiment performed under microgravity. *J. Fluid Mech.*, 735 : 647–683.
- Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D. G. (1988). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory : Vol. II*. Springer-Verlag.
- Gupta, N. and Lawande, S. (1986). Rayleigh-Taylor instability in spherical geometry. *Phys. Rev. A*, 33(4) : 2813.
- Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 : 2182.
- Hirt, C. W. and Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39(1) : 201–225.
- Ihrig, E. and Golubitsky, M. (1984). Pattern selection with  $O(3)$  symmetry. *Physica D*, 13(1) : 1–33.
- Ivanova, A., Kozlov, V., and Evesque, P. (2001). Interface dynamics of immiscible fluids under horizontal vibration. *Fluid Dyn.*, 36(3) : 362–368.

- Jalikop, S. V. and Juel, A. (2009). Steep capillary-gravity waves in oscillatory shear-driven flows. *J. Fluid Mech.*, 640 : 131–150.
- Josserand, C. and Zaleski, S. (2003). Droplet splashing on a thin liquid film. *Phys. Fluids*, 15(6) : 1650–1657.
- Kahouadji, L., Périnet, N., Tuckerman, L. S., Shin, S., Chergui, J., and Juric, D. (2015). Numerical simulation of supersquare patterns in Faraday waves. *J. Fluid Mech.*, 772 : R2.
- Kelly, R. (1965). The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow. *J. Fluid Mech.*, 22(03) : 547–560.
- Kelvin, S. L. (1863). Elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 153 : 583.
- Khenner, M., Lyubimov, D., Belozerova, T., and Roux, B. (1999). Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(6) : 1085–1101.
- Kudrolli, A., Pier, B., and Gollub, J. P. (1998). Superlattice patterns in surface waves. *Physica D*, 123 : 99–111.
- Kumar, K. (1996). Linear theory of Faraday instability in viscous fluids. *Proc. R. Soc. Lond.*, 452 : 1113–1126.
- Kumar, K. and Tuckerman, L. S. (1994). Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid Mech.*, 279 : 49–68.
- Kwak, D. Y. and Lee, J. S. (2004). Multigrid algorithm for the cell-centered finite-difference method ii : Discontinuous coefficient case. *Numer. Meth. Part. Differ. Equ.*, 20 : 723–741.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Lundgren, T. S. and Mansour, N. N. (1988). Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects. *J. Fluid Mech.*, 194 : 479–510.
- Lyubimov, D. and Cherepanov, A. (1986). Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field. *Fluid Dyn.*, 21(6) : 849–854.
- Lyubimov, D., Khenner, M., and Shotz, M. (1998). Stability of a fluid interface under tangential vibrations. *Fluid Dyn.*, 33(3) : 318–323.
- Marston, P. L. (1980). Shape oscillation and static deformation of drops and bubbles driven by modulated radiation stresses—theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(1) : 15–26.
- Matthews, P. C. (2003). Pattern formation on a sphere. *Phys. Rev. E*, 67(3) : 036206.
- Meradji, L., P., T., Lyubimov, D. V., and Roux, B. (2001). Numerical simulation of a liquid drop freely oscillating. *Cryst. Res. Technol.*, 36 : 729–744.



- Mikaelian, K. O. (1987). Comment on “Rayleigh–Taylor instability in spherical geometry”. *Phys. Rev. A*, 36(1) : 411.
- Miller, C. A. and Scriven, L. E. (1968). The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *J. Fluid Mech.*, 32 : 417–435.
- Nakagawa-Yoshikawa, H. (2006). *Instabilités des interfaces sous oscillations*. PhD thesis, Université Paris 6.
- Osher, S. and Sethian, J. (1988). Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79 : 12–49.
- Patzek, T., Benner, R., Basaran, O., and Scriven, L. (1991). Nonlinear oscillations of inviscid free drops. *J. Comput. Phys.*, 97(2) : 489–515.
- Périnet, N., Juric, D., and Tuckerman, L. S. (2009). Numerical simulation of Faraday waves. *J. Fluid Mech.*, 635 : 1–26.
- Périnet, N., Juric, D., and Tuckerman, L. S. (2012). Alternating hexagonal and striped patterns in Faraday surface waves. *Phys. Rev. Lett.*, 109(16) : 164501.
- Peskin, C. S. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.*, 25 : 220–252.
- Plesset, M. (1954). On the stability of fluid flows with spherical symmetry. *J. Appl. Phys.*, 25(1) : 96–98.
- Politis, A. (2013). Real/complex spherical harmonic transform, Gaunt coefficients and rotations. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43856-real-complex-spherical-harmonic-transform--gaunt-coefficients-and-rotations/>.
- Popinet, S. (2003). Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 190 : 572–600.
- Prosperetti, A. (1980). Normal-mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid. *J. Mec.*, 19 : 149–182.
- Prosperetti, A. and Seminara, G. (1978). Linear stability of a growing or collapsing bubble in a slightly viscous liquid. *Phys. Fluids*, 21(9) : 1465–1470.
- Rajchenbach, J., Leroux, A., and Clamond, D. (2011). New standing solitary waves in water. *Phys. Rev. Lett.*, 107(2) : 024502.
- Rayleigh, L. (1879). On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, 29 : 71–97.
- Rayleigh, L. (1883). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 14(1) : 8.
- Reid, W. H. (1960). The oscillations of a viscous liquid drop. *Q. Appl. Math.*, 18 : 86–89.
- Riahi, N. (1984). Nonlinear convection in a spherical shell. *J. Phys. Soc. of Jpn.*, 53(8) : 2506–2512.

- Rucklidge, A. M. and Skeldon, A. C. (2015). Can weakly nonlinear theory explain Faraday wave patterns near onset? *J. Fluid Mech.*, 777 : 604–632.
- Sattinger, D. (1978). Bifurcation from rotationally invariant states. *J. Math. Phys.*, 19(8) : 1720–1732.
- Sharp, D. H. (1984). An overview of Rayleigh–Taylor instability. *Physica D*, 12(1) : 3–18.
- Shen, C. L., Xie, W. J., and Wei, B. (2010). Parametrically excited sectorial oscillation of liquid drops floating in ultrasound. *Phys. Rev. E*, 81(4) : 046305.
- Shin, S. (2007). Computation of the curvature field in numerical simulation of multiphase flow. *J. Comput. Phys.*, 222 : 872–878.
- Shin, S., Abdel-Khalik, S. I., Daru, V., and Juric, D. (2005). Accurate representation of surface tension using the level contour reconstruction method. *J. Comput. Phys.*, 203 : 493–516.
- Shin, S., Chergui, J., and Juric, D. (2015). A solver for massively parallel direct numerical simulation of three-dimensional multiphase flows. *Commun. Comput. Phys.*, submitted. arXiv :1410.8568.
- Shin, S. and Juric, D. (2002). Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity. *J. Comput. Phys.*, 180 : 427–470.
- Shin, S. and Juric, D. (2007). High order level contour reconstruction method. *J. Mech. Sci. Technol.*, 21(2) : 311–326.
- Shin, S. and Juric, D. (2009). A hybrid interface method for three-dimensional multiphase flows based on front-tracking and level set techniques. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 60 : 753–778.
- Shu, C. W. and Osher, S. (1989). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, ii. *J. Comput. Phys.*, 83 : 32–78.
- Shyh, C. and Munson, B. (1986). Interfacial instability of an oscillating shear layer. *J. Fluid Eng.*, 108(1) : 89–92.
- Silber, M. and Proctor, M. R. E. (1998). Nonlinear competition between small and large hexagonal patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 81(12) : 2450.
- Stegner, A. and Wesfreid, J. E. (1999). Dynamical evolution of sand ripples under water. *Phys. Rev. E*, 60(4) : R3487.
- Talib, E., Jalikop, S. V., and Juel, A. (2007). The influence of viscosity on the frozen wave instability : theory and experiment. *J. Fluid Mech.*, 584 : 45–68.
- Talib, E. and Juel, A. (2007). Instability of a viscous interface under horizontal oscillation. *Phys. Fluids*, 19(9) : 092102.

- Taylor, G. (1950). The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proc. R. Lond. A*, 201(1065) : 192–196.
- Trinh, E. and Wang, T. G. (1982). Large-amplitude free and driven drop-shape oscillations : experimental observations. *J. Fluid Mech.*, 122 : 315–338.
- Trinh, E., Zwern, A., and Wang, T. G. (1982). An experimental study of small-amplitude drop oscillations in immiscible liquid systems. *J. Fluid Mech.*, 115 : 453–474.
- Tryggvason, G. (1988). Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *J. Comput. Phys.*, 75(2) : 253–282.
- Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S., and Jan, Y. J. (2001). A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *J. Comput. Phys.*, 169 : 708–759.
- Tryggvason, G., Scardovelli, R., and Zaleski, S. (2011). *Direct Numerical Simulation of Gas-Liquid Multiphase Flows*. Cambridge University Press.
- Tryggvason, G. and Unverdi, S. O. (1990). Computations of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Rev. A*, 2(5) : 656–659.
- Tsamopoulos, J. A. and Brown, R. A. (1983). Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles. *J. Fluid Mech.*, 127 : 514–537.
- Waddell, J., Niederhaus, C., and Jacobs, J. (2001). Experimental study of Rayleigh-Taylor instability : low atwood number liquid systems with single-mode initial perturbations. *Phys. Fluids*, 13(5) : 1263–1273.
- Wang, T. G., Anilkumar, A. V., and Lee, C. P. (1996). Oscillations of liquid drops : results from USML-1 experiments in space. *J. Fluid Mech.*, 308 : 1–14.
- Wolf, G. H. (1969). The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium. *Z. Physik*, 227(3) : 291–300.
- Yoshikawa, H. N. and Wesfreid, J. E. (2011a). Oscillatory Kelvin-Helmholtz instability. part 1. a viscous theory. *J. Fluid Mech.*, 675 : 223–248.
- Yoshikawa, H. N. and Wesfreid, J. E. (2011b). Oscillatory Kelvin-Helmholtz instability. part 2. an experiment in fluids with a large viscosity contrast. *J. Fluid Mech.*, 675 : 249–267.