



HAL
open science

Laplacien discret d'un 2-complexe simplicial

Yassin Chebbi

► **To cite this version:**

Yassin Chebbi. Laplacien discret d'un 2-complexe simplicial . Mathématiques [math]. Université de Nantes, Faculté des sciences et des techniques.; Université de Carthage (Tunisie), 2018. Français. NNT: . tel-01800569

HAL Id: tel-01800569

<https://hal.science/tel-01800569>

Submitted on 26 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Yassin CHEBBI

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
Docteur de Université de Carthage
Label européen
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions., section CNU 27

Unité de recherche : Laboratoire des Mathématiques Jean Leray Nantes (LMJL)

Soutenue le 07 Avril 2018

Laplacien discret d'un 2-complexe simplicial

JURY

Président : **M. Abderrazak KAROUI**, Professeur, Université de Carthage
Rapporteurs : **M. Hatem NAJAR**, Professeur, Université de Monastir
M. Sylvain GOLÉNIA, Maître de conférence-HDR, Université de Bordeaux 1
Examineurs : **M. Béchir DALI**, Professeur, Université de Carthage
M. Michel BONNEFONT, Maître de conférence, Université de Bordeaux 1
Directrices de thèse : **M^{me} Colette ANNÉ**, HDR-Chargée de Recherche au CNRS, Université de Nantes
M^{me} Nabila TORKI-HAMZA, Professeur, Université de Kairouan

Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences de Bizerte (Université de Carthage) et le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray "LMJL" (Université de Nantes) avec le soutien financier du Ministère Tunisien de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et du Ministère des affaires étrangères de la France dans le cadre du programme PHC-Utique projet CMCU numéro 13G1501 "Graphes, Géométrie et Théorie Spectrale". De plus, j'ai bénéficié d'un soutien financier en tant que membre de l'unité de recherche Mathématiques et Applications (UR/13ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte et en tant que membre du laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes (LMJL).

En tout premier lieu, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mes chères directrices de thèse Madame Nabila Torki-Hamza et Madame Colette Anné. Je les remercie tout chaleureusement pour tous les encouragements, les conseils et l'inspiration au cours de la durée de ma thèse. Je les remercie également pour m'avoir proposé un sujet de recherche intéressant en tenant compte de mon parcours et pour la confiance qu'elles m'ont accordée. Merci pour toutes les connaissances que vous m'avez transmises. Je leur suis reconnaissant.

Je tiens à remercier les rapporteurs Monsieur Sylvain Golénia et Monsieur Hatem Najar pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leur rapport. Je leur adresse mes sentiments les plus respectueux.

Je tiens à remercier également les examinateurs Monsieur Michel Bonnefont et Monsieur Béchir Dali qui ont accepté de juger ce travail. Un grand merci d'avoir accepté cette charge.

Je remercie le Professeur Abderrazak Karoui de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse, veuillez trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie également Monsieur le professeur Belgacem Draouil, directeur de l'unité de recherche Mathématiques et Applications (UR/13ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte pour ses qualités humaines et son encouragement.

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres du laboratoire LMJL de Nantes pour leur accueil, leur gentillesse et leur sympathie et surtout Mesdames Stéphanie, Brigitte, Nathalie et Ana Paula et Messieurs Eric et Saïd..

Je souhaite encore remercier les membres de l'administration de la Faculté des Sciences de Bizerte et surtout Messieurs Sami et Hichem, pour leur services et gentillesse.

Je remercie sincèrement Messieurs Laurent Guillopé et Yann Rollin de m'avoir donné l'opportunité de participer à des cours de Master *Mathématiques Fondamentales et Appliquées* de l'Université de Nantes.

Un très grand merci tout particulier au Professeur Matthias Keller, pour son accueil lors de mes séjours à Potsdam, sa disponibilité, sa générosité et sa modestie. Je lui suis également reconnaissant.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes chers amis Zied Medini, Marwa

Balti, H la Ayadi pour tous les moments agréables passés ensemble.

Enfin, ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les encouragements permanents de mes parents. Je les en remercie profondément et je leur dédie cette thèse en signe de reconnaissance.

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 7 |
| | Introduction | 7 |
| 2 | Sur la géométrie et l'analyse des triangulations | 11 |
| 2.1 | Généralités sur les graphes | 11 |
| 2.2 | Notion de triangulation | 13 |
| 2.2.1 | Structure d'une triangulation | 13 |
| 2.2.2 | Triangulations pondérées | 15 |
| 2.3 | Espaces fonctionnels d'une triangulation | 16 |
| 2.4 | Opérateurs | 18 |
| 2.4.1 | Opérateurs sur les graphes | 18 |
| 2.4.2 | Opérateurs sur les triangulations | 21 |
| 2.5 | Fermabilité des opérateurs | 28 |
| 2.6 | La bornitude des Laplaciens | 31 |
| 3 | Le caractère essentiellement auto-adjoint | 35 |
| 3.1 | Métrique intrinsèque | 35 |
| 3.2 | L'hypothèse de χ -complétude | 37 |
| 3.2.1 | Triangulation χ -complète | 37 |
| 3.2.2 | Triangulation non χ -complète | 42 |
| 3.3 | Laplacien essentiellement auto-adjoint | 46 |
| 3.4 | Exemples | 55 |
| 3.4.1 | Triangulation d'une 1-décomposition de graphe | 55 |
| 3.4.2 | Arbre triangulaire | 57 |
| 3.4.3 | Le caractère essentiellement auto-adjoint sur le cas simple | 58 |
| 4 | Trou spectral des triangulations | 63 |
| 4.1 | Théorie spectrale | 63 |
| 4.1.1 | Spectre des graphes | 63 |
| 4.1.2 | Inégalité de Cheeger | 66 |
| 4.2 | Relations entre les spectres des Laplaciens | 69 |
| 4.3 | Trou spectral d'une triangulation finie | 76 |
| 4.4 | Triangulation d'un graphe complet | 79 |
| 4.4.1 | Majoration du trou spectral | 79 |
| 4.4.2 | Minoration du trou spectral | 83 |

| | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| 5 | Annexe | 89 |
| 5.1 | Théorème de type Hopf-Rinow | 89 |
| 5.2 | Théorème de Reed-Simon | 92 |
| 5.3 | Théorème de von Neumann | 93 |
| | Bibliographie | 94 |



1

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude du caractère essentiellement auto-adjoint du Laplacien qui est défini en termes de la structure combinatoire d'un 2-complexe simplicial, voir [7]. Plus précisément, nous introduisons la notion de face triangle orientée dans un graphe connexe, orienté et localement fini. En fait, nous distinguons trois types d'opérateurs Laplaciens: le premier est défini sur l'espace des fonctions sur les sommets, le deuxième est défini sur l'espace des fonctions sur les arêtes et le troisième est défini sur l'espace des fonctions sur les faces. Dans ce contexte, il s'agit d'étudier le caractère essentiellement auto-adjoint pour l'opérateur de Gauß-Bonnet, comme suite du travail de Colette Anné et Nabila Torki-Hamza [1].

L'impact de la géométrie sur le caractère essentiellement auto-adjoint du Laplacien est étudié dans divers domaines des mathématiques sur les variétés Riemanniennes, voir ([9], [16], [19] et [31]) et aussi sur les complexes simpliciaux de dimension 1, voir ([1], [13], [18], [24], [32] et [40]). Les Laplaciens sur les variétés Riemanniennes et les complexes simpliciaux partagent beaucoup d'éléments communs. Malgré cela, les notions géométriques comme la distance et la complétude dans le cadre Riemannien n'ont pas d'analogies immédiates dans le cas discret. L'étude du Laplacien discret sur les graphes commence par *Kirchhoff* sur les réseaux électriques [27]. Ce travail présente un cadre plus général pour les Laplaciens définis en termes de structure combinatoire d'un complexe simplicial. Les complexes simpliciaux peuvent être considérés comme une généralisation des graphes. Plus précisément, à partir de n'importe quel graphe, on peut former un 2-complexe simplicial où les faces correspondent aux cycles simples du graphe. Dans cette thèse, nous considérons un graphe orienté localement fini et nous introduisons les faces orientées de telle sorte que toutes les faces soient des triangles pour atteindre la structure d'un 2-complexe simplicial. Cette structure particulière s'appelle *triangulation*. Cela permet de définir notre Laplacien discret \mathcal{L} agissant sur les triplets de fonctions, 1-formes et 2-formes. Notre but est de trouver une condition géométrique pour assurer le caractère essentiellement auto-adjoint du Laplacien discret. Pour cela, nous développons l'hypothèse de χ -complétude défini dans [1], pour les triangulations. Cette hypothèse sur les graphes localement finis couvre de nombreuses situations qui ont déjà été étudiées dans [1]. Les auteurs prouvent que l'hypothèse de χ -complétude est satisfaite par des graphes qui sont complets pour

la métrique intrinsèque, comme défini dans [18] et [24].

D'autres résultats principaux de cette thèse concernent les propriétés spectrales de nos différents Laplaciens considérés dans une triangulation finie, voir [8]. Il y a plusieurs travaux récents concernant le bas du spectre d'un opérateur de Laplace sur un graphe ont appelées ainsi des estimations isopérimétriques, voir ([20] et [26]). En outre, Cheeger a prouvé une inégalité en fonction d'une constante métrique géométrique $h(\mathcal{X}, g)$ attachée à une variété Riemannienne compacte connexe (\mathcal{X}, g) . Cette inégalité concerne la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Laplace-Beltrami auto-adjoint, voir [5]. Ceci a inspiré une théorie analogue sur les graphes pour le Laplacien \mathcal{L}_0 , voir ([10], [11] et [12]). De plus, en utilisant le critère de Weyl, connu de [38], pour montrer que tous les spectres de nos différents Laplaciens obtenus ont les mêmes caractérisations dans les cas d'une triangulation finie connexe, voir ([3] et [8]). Dans une triangulation finie, nous définissons le trou spectral comme étant la valeur propre minimale du Laplacien $\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+$ sur les 1-formes. Cette définition permet alors que notre trou spectral peut atteindre la valeur 0. En général, le trou spectral est l'écart entre 0 et la première valeur propre non nulle, voir ([10], [11] et [12]). Cette définition coïncide avec la notre dans les cas où $Im(\delta^1) = \ker(\delta^0)$. Cette dernière condition assure la nullité de notre trou spectral.

L'objectif dans la deuxième partie est de trouver une estimation pour le trou spectral du Laplacien $\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+$ dans une triangulation d'un graphe complet. Une majoration explicite est donnée par la généralisation de la constante de Cheeger. Une minoration est obtenue par la première valeur propre non nulle du Laplacien discret agissant sur les fonctions \mathcal{L}_0 .

Cette thèse est structurée comme suit: le deuxième chapitre présente les concepts de base utilisés dans ce travail. Nous présentons d'abord les diverses notations et définitions sur les graphes ou plutôt les 1-complexes simpliciaux. Ensuite, nous introduisons la notion de face triangle orientée. Dans ce contexte, nous définissons l'opérateur de Gauß-Bonnet $T = d + \delta$ agissant sur le triplet de fonctions, 1-formes et 2-formes. Cet opérateur de type Dirac permet de définir le Laplacien discret $\mathcal{L} := T^2$ qui admet une décomposition selon le degré

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2.$$

Dans le troisième chapitre, nous développons l'hypothèse de χ -complétude pour assurer le caractère essentiellement auto-adjoint de l'opérateur de Gauß-Bonnet T sur les triangulations. Cette hypothèse géométrique est basée sur les fonctions de coupure. Il a été introduite sur les graphes par Colette Anné et Nabila Toriki-Hamza dans [1]. Dans le cas d'une variété Riemannienne complète, il y a un résultat très important de *Chernoff* dans [9], qui a conclu que l'opérateur de Laplace-Beltrami est essentiellement auto-adjoint à partir de l'opérateur de Dirac. En conséquence, nous utilisons cette relation pour prouver le caractère essentiellement auto-adjoint de notre Laplacien discret. Ce résultat s'inspire du travail de [1] dans le cas des graphes. De plus, nous donnons l'exemple "*Arbre triangulaire*" qui produit un moyen concret de trouver une triangulation qui n'est pas χ -complète inspiré de [4]. Et nous finissons ce chapitre avec l'étude de la condition de χ -complétude et d'en étudier le caractère essentiellement auto-adjoint sur des exemples particuliers de triangulations.

Dans le quatrième chapitre, nous donnons quelques résultats concernant la théorie spectrale des triangulations. Le résultat essentiel ici est de trouver une estimation concrète pour le trou spectral du Laplacien supérieur \mathcal{L}_1^+ agissant sur les 1-formes, voir [8]. En outre, une majoration attachée à la généralisation de la constante de Cheeger pour les complexes simpliciaux d'un graphe complet \mathcal{K}_n , voir [35]. Dans notre cas, on désigne par $\mathcal{T}_n = (\mathcal{K}_n, \mathcal{F})$ la triangulation

d'un graphe complet et on définit la constante de Cheeger $h(\mathcal{T}_n)$ comme suit:

$$h(\mathcal{T}_n) := \min_{(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)} \frac{n|\mathcal{F}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)|}{|\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|},$$

où $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont des ensembles non vides formant une partition de \mathcal{V} et $\mathcal{F}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ désigne l'ensemble des faces orientées avec un sommet dans chaque \mathcal{A}_i .

De plus, nous donnons une minoration de notre trou spectral à partir des premières valeurs propres non nulles des Laplacien discret \mathcal{L}_0 sur les graphes connexes associés à une triangulation d'un graphe complet.

Nous clôturons ce travail avec le chapitre Annexe qui contient les résultats principaux concernant la notion de complétude sur les graphes et portant sur les opérateurs symétriques, utilisés au cours de cette thèse qui sont extraits de [24], [37] et [38].



2

Sur la géométrie et l'analyse des triangulations

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments d'analyse et de géométrie sur les complexes simpliciaux de dimension 2, qui couvrent les prérequis nécessaires à la compréhension de nos travaux. Outre les concepts généraux, nous traitons principalement de la notion de triangulation pondérée.

2.1 Généralités sur les graphes

Soit \mathcal{V} un ensemble au plus dénombrable de *sommets* et \mathcal{E} un sous-ensemble de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, l'ensemble des *arêtes*, nous appelons $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe. Soit $x, y \in \mathcal{V}$, on dit que x et y sont *voisins* ou *adjacents* s'ils sont connectés par une arête e , notée par $e = (x, y)$ ou bien $x \sim y$. Un graphe \mathcal{K} *orienté* consiste à définir une partition de \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^- \cup \mathcal{E}^+$$

$$(x, y) \in \mathcal{E}^+ \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{E}^-$$

On suppose que l'ensemble d'arêtes \mathcal{E} est *sans boucles* et *symétrique*, i.e

$$x \in \mathcal{V} \Rightarrow (x, x) \notin \mathcal{E}, (x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{E}.$$

Dans ce cas, on choisit une orientation sur les arêtes. Soit $e = (x, y) \in \mathcal{E}^+$, on définit l'origine $e^- = x$, la terminaison $e^+ = y$ et l'arête opposée $-e = (y, x)$. Un *chemin* de taille n est une suite finie d'arêtes $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telle que si $n \geq 2$ alors $e_i^+ = e_{i+1}^-$, pour tout $i \in$

$\{1, \dots, n-1\}$. Un *cycle* est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont identiques, i.e. $e_1^- = e_n^+$. Un *chemin simple* est un chemin qui ne passe qu'au plus une fois par chaque arête. Pour $e \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\{-e, e\}$ n'est pas un chemin simple.

- L'ensemble des voisins d'un sommet x est donné par:

$$\mathcal{V}(x) = \{y \in \mathcal{V}, y \sim x\}.$$

- La *valence* ou le *degré* d'un sommet x est le nombre de ses voisins et noté par $\text{deg}(x)$, qui peut être fini ou infini.
- Le graphe \mathcal{K} est dit *localement fini*, si pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ est fini.
- Le graphe \mathcal{K} est *connexe* si deux sommets quelconques x et y peuvent être connectés par un chemin d'arête, i.e.

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \exists n, \{e_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ tel que } e_1^- = x, e_n^+ = y.$$

- La *distance combinatoire* d_{comb} sur \mathcal{K} est donnée par:

$$d_{\text{comb}}(x, y) := \min\{n, \{e_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq \mathcal{E} \text{ un chemin entre les deux sommets } x \text{ et } y\},$$

pour tout $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $x \neq y$. Par convention, on pose $d_{\text{comb}}(x, x) = 0$.

Par analogie à la géométrie Riemannienne, une *métrique* sur \mathcal{K} est une fonction paire $a : \mathcal{E} \rightarrow (0, \infty)$. Elle définit une distance sur le graphe \mathcal{K} . On définit d'abord la *longueur d'un chemin* $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$ comme suit:

$$l_a(\gamma) := \sum_{i=1}^n \sqrt{a(e_i)}.$$

La *distance métrique* entre deux sommets distincts x et y est donnée par:

$$d_a(x, y) := \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} l_a(\gamma).$$

où Γ_{xy} est l'ensemble des chemins allant du sommet x au sommet y . Par convention, on pose $d_a(x, x) = 0$.

Dans la suite, nous ne considérons que des graphes:

connexes, orientés, localement finis et sans boucles.

Exemple 2.1.1 Nous citons des exemples de graphes très connus dans la théorie des graphes:

- **Un arbre:** est un graphe connexe sans cycle.
- **Graphe complet \mathcal{K}_n :** est un graphe fini de n sommets dont les sommets sont adjacents deux à deux, c'est-à-dire que tout couple de sommets disjoints est relié par une arête.

- **Graphe biparti:** On dit qu'un graphe est biparti, s'il existe une partition de son ensemble de sommets \mathcal{V} en deux sous ensembles \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans \mathcal{V}_1 et l'autre dans \mathcal{V}_2 .
- **Graphe régulier:** est un graphe où tous les sommets ont le même degré. Un graphe régulier dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe k -régulier ou graphe régulier de degré k .
- **Graphe cyclique C_n :** est un graphe constitué d'un unique cycle élémentaire de longueur n (pour $n \geq 3$). Il est 2-régulier. De plus, nous avons C_n est un graphe biparti si et seulement si n est paire.

2.2 Notion de triangulation

Nous développons d'abord un cadre général pour introduire les opérateurs de Laplace définis en termes de la structure combinatoire d'un complexe simplicial.

2.2.1 Structure d'une triangulation

Une triangulation \mathcal{T} est la donnée d'un triplet $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, où \mathcal{V} est l'ensemble de sommets, \mathcal{E} est l'ensemble des arêtes et \mathcal{F} est l'ensemble des faces triangulaires qui est un sous-ensemble de l'ensemble des cycles simples de taille 3 quotienté par les permutations directes (e.g. $(x, y, z) = (y, z, x) \neq (y, x, z)$). Cette structure d'un 2-complexe simplicial (voir [17]) est notée aussi par le couple $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe connexe et localement fini.

Remarque 2.2.1 Une triangulation est un 2-complexe simplicial dont toutes les faces sont des triangles. Dans cette structure, on peut avoir des cycles simples de taille 3 qui ne sont pas des faces triangulaires. Les coins des faces triangulaires forment un sous-ensemble de \mathcal{V} et l'ensemble des arêtes des faces triangulaires forment un sous-ensemble de \mathcal{E} du graphe.

Remarque 2.2.2 Une triangulation d'un graphe localement fini implique qu'il y a un nombre fini de triangles qui sont voisins d'un triangle donné.

Dans la suite, nous pouvons représenter les faces orientées par leurs sommets de la manière suivante:

$$\varpi = (e_1, e_2, e_3) = (e_1^- = e_3^+, e_1^+ = e_2^-, e_2^+ = e_3^-) \in \mathcal{F}.$$

Pour une face $\varpi = (x, y, z) \in \mathcal{F}$, nous avons

$$\varpi = (x, y, z) = (y, z, x) = (z, x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow -\varpi = (y, x, z) = (x, z, y) = (z, y, x) \in \mathcal{F}.$$

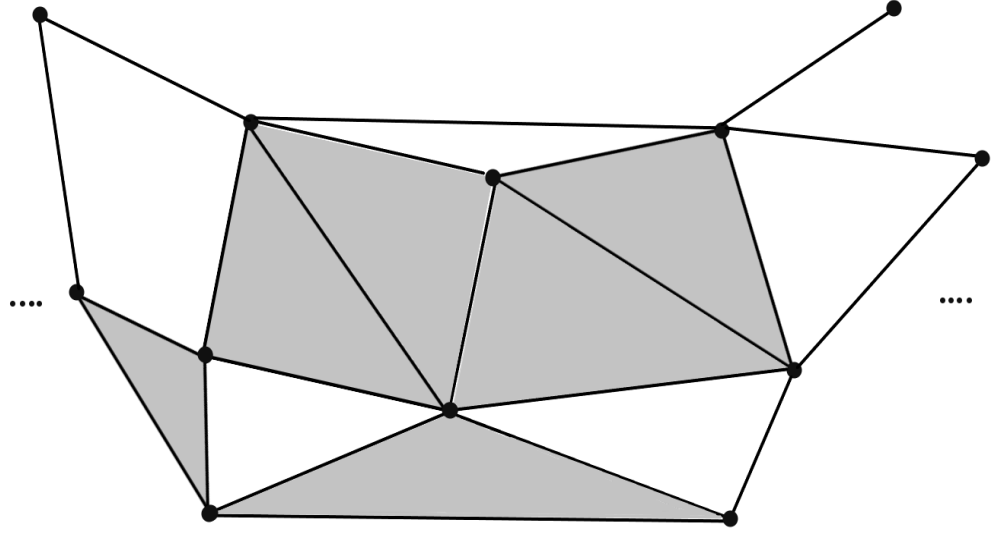


Figure 2.1: Triangulation

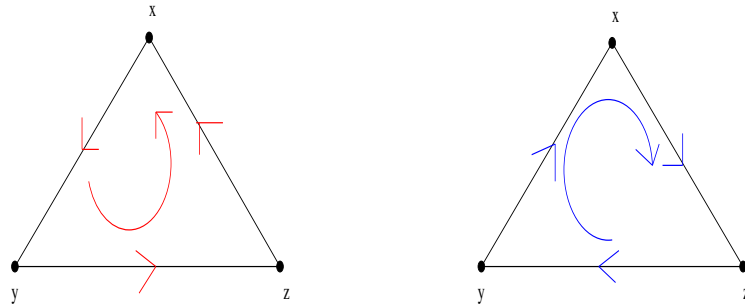


Figure 2.2: L'orientation d'une face

Pour un sommet $x \in \mathcal{V}$, nous désignons également la face orientée (y, z, x) par (e, x) , avec $e = (y, z)$. L'ensemble des sommets qui construisent les faces triangulaires avec l'arête $e \in \mathcal{E}$ est donné par

$$\mathcal{F}_e := \{x \in \mathcal{V}, (e, x) \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{V}(e^-) \cap \mathcal{V}(e^+).$$

Soit B un sous-ensemble fini de \mathcal{V} , nous définissons le bord de sommet, le bord d'arête et le bord de face de B , notés respectivement $\partial_{\mathcal{V}}B$, $\partial_{\mathcal{E}}B$ et $\partial_{\mathcal{F}}B$, par:

$$\partial_{\mathcal{V}}B := \{x \notin B; \exists y \in B, x \sim y\},$$

$$\partial_{\mathcal{E}}B := \{e \in \mathcal{E}; \{e^-, e^+\} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \{e^-, e^+\} \cap B^c \neq \emptyset\}.$$

et

$$\partial_{\mathcal{F}}B := \{\sigma = (e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{F}; \exists i \in \{1, 2, 3\}, e_i \in \partial_{\mathcal{E}}B\}.$$

Exemple 2.2.1 *Considérons la triangulation infinie 2-complexe d'arbre régulier \mathcal{T}_2^2 , voir [36]. Ce complexe n'est pas localement fini. Sa construction se continue à l'infini.*

Remarque 2.2.3 *Dans Figure 2.3, le cercle n'est pas une partie des arêtes.*

Exemple 2.2.2 *(Triangulation de Delaunay)*

Une triangulation \mathcal{DT} d'un ensemble de sommets \mathcal{V} est dite triangulation de Delaunay si

l'intérieur du cercle circonscrit de chacun des triangles de \mathcal{DT} ne contient aucun sommet de \mathcal{V} .

Remarque 2.2.4 *La triangulation de Delaunay est une triangulation planeaire.*

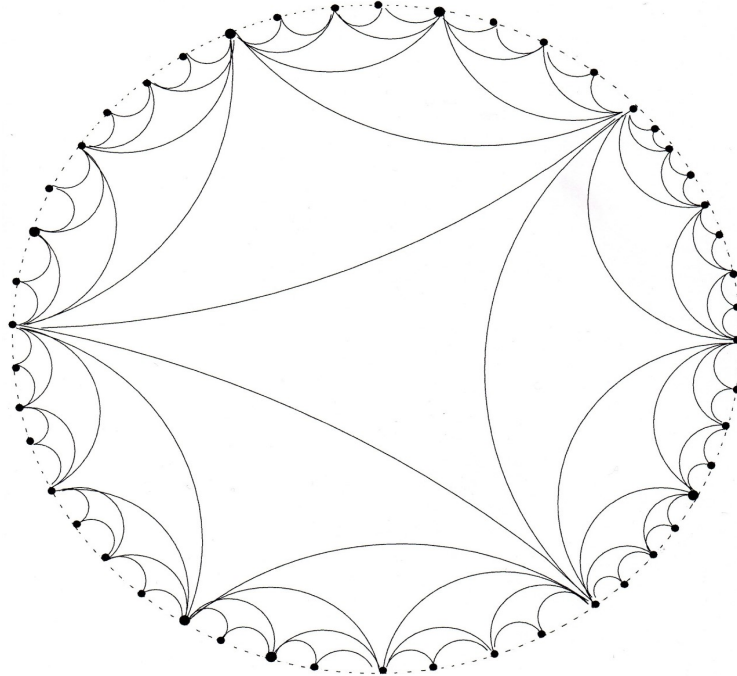


Figure 2.3: Triangulation 2-complexe d'arbre régulier \mathcal{T}_2^2

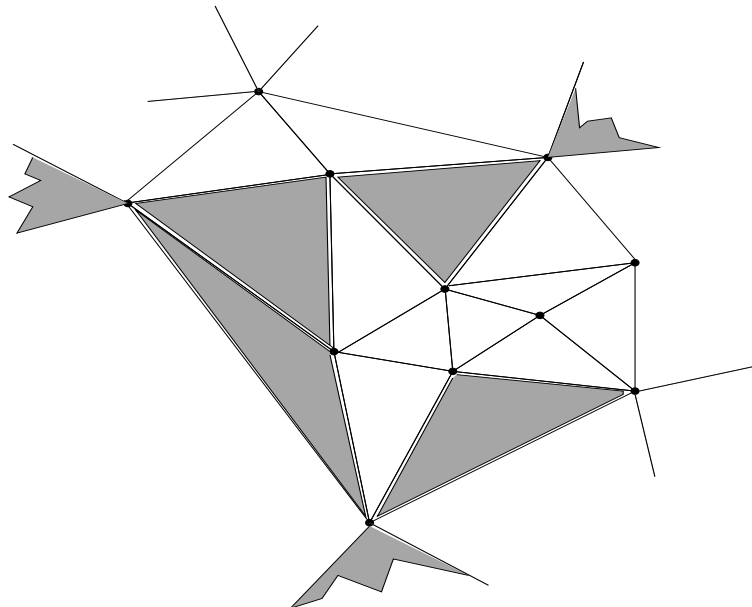


Figure 2.4: Triangulation de Delaunay

2.2.2 Triangulations pondérées

Pour définir les triangulations pondérées, nous introduisons des poids:

- $c : \mathcal{V} \rightarrow (0, \infty)$, c'est le poids sur les sommets.
- $r : \mathcal{E} \rightarrow (0, \infty)$, c'est le poids sur les arêtes, où $\forall e \in \mathcal{E}, r(-e) = r(e)$.
- $s : \mathcal{F} \rightarrow (0, \infty)$, c'est le poids sur les faces, où $\forall \varpi \in \mathcal{F}, s(-\varpi) = s(\varpi)$.

D'abord, on définit les graphes pondérés normalisés où le poids sur les sommets est défini à partir du poids sur les arêtes:

Définition 2.2.1 • Un graphe pondéré (\mathcal{K}, c, r) est la donnée d'un graphe $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, un poids c sur les sommets et un poids r sur les arêtes.

- Un graphe normalisé est un graphe pondéré (\mathcal{K}, c, r) tel que le poids c est donné par:

$$c(x) = \sum_{e, e^+ = x} r(e).$$

Dans ce cas, on le note aussi par (\mathcal{K}, r) .

On introduit une première définition telle que le poids sur les sommets, celui sur les arêtes et celui sur les faces sont indépendants:

Définition 2.2.2 Une triangulation pondérée (\mathcal{T}, c, r, s) est donnée par la triangulation $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ munie des poids c, r et s respectivement sur les sommets, les arêtes et les faces. Nous disons que \mathcal{T} est simple si les poids des sommets, des arêtes et des faces sont tous constants égaux à 1.

Une deuxième définition telle que son graphe est normalisé et le poids sur les arêtes est défini à partir du poids sur les faces.

Définition 2.2.3 Une triangulation pondérée $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ est dite normalisée si:

- \mathcal{K} est un graphe normalisé.
- Le poids s sur \mathcal{F} fait apparaître le poids r sur \mathcal{E} , donné par:

$$r(e) = \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x).$$

2.3 Espaces fonctionnels d'une triangulation

Dans cette partie, nous donnons les différents espaces fonctionnels qui sont bien connus sur les graphes. Nous introduisons également d'autres espaces fonctionnels associés à la triangulation \mathcal{T} .

Notons l'ensemble des fonctions complexes sur \mathcal{V} par:

$$\mathcal{C}(\mathcal{V}) = \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

et son sous-ensemble des fonctions à support fini par $\mathcal{C}_c(\mathcal{V})$.

De même, nous avons l'ensemble des 1-formes anti-symétriques sur \mathcal{E} :

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi(-e) = -\varphi(e)\}$$

et son sous-ensemble des 1-formes à support fini par $\mathcal{C}_c(\mathcal{E})$.

De plus, nous notons l'ensemble des 2-formes anti-symétriques sur \mathcal{F} par:

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) = \{\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}, \phi(-\varpi) = -\phi(\varpi)\}$$

et son sous-ensemble des 2-formes à support fini par $\mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Nous considérons maintenant les espaces de Hilbert associés à la triangulation pondérée \mathcal{T} :

- Nous associons à \mathcal{V} l'espace de Hilbert:

$$l^2(\mathcal{V}) := \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{V}); \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x)|f(x)|^2 < \infty\},$$

muni du produit scalaire donné par:

$$\langle f, g \rangle_{l^2(\mathcal{V})} := \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x)f(x)\bar{g}(x)$$

et de la norme induite

$$\|f\|_{l^2(\mathcal{V})} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{l^2(\mathcal{V})}}.$$

- Nous désignons aussi par $l^2(\mathcal{E})$ l'espace de Hilbert des 1-formes

$$l^2(\mathcal{E}) := \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{E}); \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e)|\varphi(e)|^2 < \infty\},$$

muni du produit scalaire donné par:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} := \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e)\varphi(e)\bar{\psi}(e)$$

et de la norme induite

$$\|\varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}}.$$

- De même, nous avons l'espace de Hilbert des 2-formes

$$l^2(\mathcal{F}) := \{\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{F}); \sum_{\varpi \in \mathcal{F}} s(\varpi)|\phi(\varpi)|^2 < \infty\},$$

muni du produit scalaire donné par:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{F})} &:= \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) \phi_1(x,y,z) \overline{\phi_2(x,y,z)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\varpi \in \mathcal{F}} s(\varpi) \phi_1(\varpi) \overline{\phi_2(\varpi)}. \end{aligned}$$

et de la norme induite

$$\|\phi\|_{l^2(\mathcal{F})} := \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_{l^2(\mathcal{F})}}.$$

La somme directe des espaces $l^2(\mathcal{V})$, $l^2(\mathcal{E})$ et $l^2(\mathcal{F})$ est considérée comme un nouvel espace de Hilbert désigné par \mathcal{H} , c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = l^2(\mathcal{V}) \oplus l^2(\mathcal{E}) \oplus l^2(\mathcal{F}),$$

muni du produit scalaire

$$\forall i = 1, 2, \forall F_i = (f_i, \varphi_i, \phi_i) \in \mathcal{H}, \langle F_1, F_2 \rangle_{\mathcal{H}} := \langle f_1, f_2 \rangle_{l^2(\mathcal{V})} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{F})}.$$

et de la norme associée

$$\|F\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + \|\varphi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 + \|\phi\|_{l^2(\mathcal{F})}^2}$$

2.4 Opérateurs

Nous présentons dans cette partie les différentes expressions et propriétés des opérateurs bien connus sur les graphes [30] et nous introduisons également d'autres opérateurs définis sur les triangulations [7].

2.4.1 Opérateurs sur les graphes

- **L'opérateur de différence:** C'est l'opérateur

$$d^0 : \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{E}),$$

donné par

$$d^0 f(e) = f(e^+) - f(e^-).$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ et $e \in \mathcal{E}$.

- **L'opérateur divergence:** C'est l'adjoint formel de d^0 , noté δ^0 et satisfait l'égalité

$$\langle d^0 f, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \langle f, \delta^0 \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{V})}. \quad (2.1)$$

pour tout $(f, \varphi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$.

Ainsi, nous avons la formule suivante qui caractérise δ^0 , voir [1].

Lemme 2.4.1 *L'opérateur divergence δ^0 est donné par:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}), \delta^0(\varphi)(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e).$$

Preuve:

Soit $(f, \varphi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle d^0 f, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) d^0 f(e) \overline{\varphi}(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) (f(e^+) - f(e^-)) \overline{\varphi}(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) \left(\sum_{e, e^+=x} r(e) \overline{\varphi}(e) - \sum_{e, e^-=x} r(e) \overline{\varphi}(e) \right). \end{aligned}$$

L'antisymétrie de φ entraîne:

$$\sum_{e, e^+=x} r(e) \overline{\varphi}(e) = - \sum_{e, e^-=x} r(e) \overline{\varphi}(e).$$

Par conséquent, en utilisant (2.1), nous obtenons

$$\langle d^0 f, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) \overline{\left(\sum_{e, e^+=x} r(e) \varphi(e) \right)} = \langle f, \delta^0 \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{V})}.$$

où

$$\delta^0(\varphi)(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e).$$

□

Remarque 2.4.1 *Les opérateurs d^0 et δ^0 s'étendent naturellement sur $\mathcal{C}(\mathcal{V})$, respectivement $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Nous les notons \widehat{d}^0 et $\widehat{\delta}^0$:*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{V}), \widehat{d}^0 f(e) = f(e^+) - f(e^-).$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), \widehat{\delta}^0 \varphi(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e).$$

Nous donnons maintenant un résultat important, c'est la formule de dérivation, voir [2] et [32]. Au début, pour $f \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$, on définit la fonction

$$\tilde{f}(e) := \frac{f(e^+) + f(e^-)}{2},$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$.

Proposition 2.4.1 Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, alors

$$\begin{aligned} \widehat{d}^0(fg)(e) &= f(e^+) \widehat{d}^0(g)(e) + \widehat{d}^0(f)(e) g(e^-) \\ &= \tilde{f}(e) \widehat{d}^0(g)(e) + \tilde{g}(e) \widehat{d}^0(f)(e). \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\delta}^0(\tilde{f}\varphi)(x) = f(x) \widehat{\delta}^0(\varphi)(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) \widehat{d}^0(f)(e) \varphi(e).$$

Preuve:

Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{d}^0(fg)(e) &= (fg)(e^+) - (fg)(e^-) \\ &= f(e^+) (g(e^+) - g(e^-)) + g(e^-) (f(e^+) - f(e^-)) \\ &= f(e^+) \widehat{d}^0(g)(e) + g(e^-) \widehat{d}^0(f)(e). \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{d}^0(fg)(e) &= f(e^+) \widehat{d}^0(g)(e) + g(e^-) \widehat{d}^0(f)(e) \\ &= \tilde{f}(e) \widehat{d}^0(g)(e) + \frac{1}{2} f(e^+) \widehat{d}^0(g)(e) - \frac{1}{2} f(e^-) \widehat{d}^0(g)(e) + g(e^-) \widehat{d}^0(f)(e) \\ &= \tilde{f}(e) \widehat{d}^0(g)(e) + \frac{1}{2} \widehat{d}^0(f)(e) \widehat{d}^0(g)(e) + g(e^-) \widehat{d}^0(f)(e) \\ &= \tilde{f}(e) \widehat{d}^0(g)(e) + \widehat{d}^0(f)(e) \left(\frac{1}{2} \widehat{d}^0(g)(e) + g(e^-) \right) \\ &= \tilde{f}(e) \widehat{d}^0(g)(e) + \tilde{g}(e) \widehat{d}^0(f)(e). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ et $x \in \mathcal{V}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}^0(\tilde{f}\varphi)(x) &= \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)(\tilde{f}\varphi)(e) \\
&= \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) (f(e^+) + f(e^-)) \varphi(e) \\
&= \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)f(e^+)\varphi(e) + \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) \left(\frac{f(e^-) - f(e^+)}{2} \right) \varphi(e) \\
&= \frac{f(x)}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\widehat{d}^0 f(e)\varphi(e) \\
&= f(x)\widehat{\delta}^0\varphi(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\widehat{d}^0 f(e)\varphi(e).
\end{aligned}$$

□

2.4.2 Opérateurs sur les triangulations

- **L'opérateur dérivée extérieure:** C'est

$$d^1 : \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{F}),$$

donné par

$$d^1(\psi)(x, y, z) = \psi(x, y) + \psi(y, z) + \psi(z, x).$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et $(x, y, z) \in \mathcal{F}$.

- **L'opérateur co-dérivée extérieur:** C'est l'adjoint formel de d^1 , noté δ^1 qui satisfait

$$\forall (\psi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{F}), \langle d^1\psi, \phi \rangle_{l^2(\mathcal{F})} = \langle \psi, \delta^1\phi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}. \quad (2.2)$$

Ainsi, nous avons la formule suivante qui caractérise δ^1 , voir [7].

Lemme 2.4.2 *L'opérateur δ^1 est donné par la formule suivante*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F}), \delta^1(\phi)(e) = \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x)\phi(e, x).$$

Preuve:

Soit $(\psi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$. Comme le poids s est paire. D'après le théorème de

Fubini, l'équation (2.2) donne

$$\begin{aligned}
\langle d^1\psi, \phi \rangle_{l^2(\mathcal{F})} &= \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) d^1(\psi)(x,y,z) \bar{\phi}(x,y,z) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{x,y,z} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) \bar{\phi}(x,y,z) (\psi(x,y) + \psi(y,z) + \psi(z,x)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) \psi(x,y) \bar{\phi}(x,y,z) \\
&= \langle \psi, \delta^1\phi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}.
\end{aligned}$$

Pour justifier la dernière égalité, notons que l'expression de d^1 contribuant à la première somme est divisée en trois parties similaires. Il reste à montrer que

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) \psi(x,y) \bar{\phi}(x,y,z) &= \sum_{e \in \mathcal{E}} \psi(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) \bar{\phi}(e,x) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \psi(e) \overline{\left(\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) \phi(e,x) \right)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.2 De même, on étend d^1 et δ^1 sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ par les mêmes formules et on note \widehat{d}^1 et $\widehat{\delta}^1$ ces extensions.

Pour $f \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$, on définit la fonction

$$\widetilde{f}(x,y,z) := \frac{\widetilde{f}(x,y) + \widetilde{f}(y,z) + \widetilde{f}(z,x)}{3} = \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3},$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{F}$.

Nous donnons aussi une formule du produit extérieur dans le cas discret entre deux 1-formes, défini comme suit:

$$\cdot \wedge_{disc} \cdot : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{F}),$$

par

$$\begin{aligned}
(\psi \wedge_{disc} \varphi)(x,y,z) &= [\psi(z,x) + \psi(z,y)] \varphi(x,y) \\
&\quad + [\psi(x,y) + \psi(x,z)] \varphi(y,z) \\
&\quad + [\psi(y,z) + \psi(y,x)] \varphi(z,x).
\end{aligned}$$

Il satisfait $\psi \wedge_{disc} \varphi = -(\varphi \wedge_{disc} \psi) = -\varphi \wedge_{disc} \psi = \varphi \wedge_{disc} -\psi$, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Nous désignons par $\lrcorner : \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$, le produit intérieur défini pour

$$\langle \phi, \psi \wedge_{disc} \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{F})} = \langle \psi \lrcorner \phi, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}. \tag{2.3}$$

où $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Lemme 2.4.3 *Le produit intérieur \lrcorner est donné par la formule suivante*

$$(\psi \lrcorner \phi)(e) = \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\bar{\psi}(x, e^-) + \bar{\psi}(x, e^+)) \phi(e, x)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Preuve:

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$. En utilisant l'équation 2.3, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \wedge_{disc} \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{F})} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} \phi(e, x) (\bar{\psi}(x, e^-) + \bar{\psi}(x, e^+)) \bar{\varphi}(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \bar{\varphi}(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\bar{\psi}(x, e^-) + \bar{\psi}(x, e^+)) \phi(e, x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \bar{\varphi}(e) \left(\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\bar{\psi}(x, e^-) + \bar{\psi}(x, e^+)) \phi(e, x) \right). \end{aligned}$$

□

Nous donnons maintenant un autre résultat très important, c'est une autre formule de dérivation, voir [7].

Proposition 2.4.2 *Soit $(f, \varphi, \phi) \in \mathcal{C}(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}(\mathcal{F})$ alors*

$$\widehat{d}^1(\widetilde{f}\varphi)(x, y, z) = \widetilde{f}(x, y, z) \widehat{d}^1(\varphi)(x, y, z) + \frac{1}{6} \left(\widehat{d}^0(f) \wedge_{disc} \varphi \right)(x, y, z).$$

$$\widehat{\delta}^1(\widetilde{f}\phi)(e) = \widetilde{f}(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \left[\widehat{d}^0(f)(e^-, x) + \widehat{d}^0(f)(e^+, x) \right] \phi(e, x).$$

Preuve:

(1) Soient $(f, \varphi) \in \mathcal{C}(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}(\mathcal{E})$, nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{d}^1(\widetilde{f}\varphi)(x, y, z) &= \widetilde{f}(x, y)\varphi(x, y) + \widetilde{f}(y, z)\varphi(y, z) + \widetilde{f}(z, x)\varphi(z, x) \\
&= [\widetilde{f}(x, y) + \widetilde{f}(y, z) + \widetilde{f}(z, x)][\varphi(x, y) + \varphi(y, z) + \varphi(z, x)] \\
&\quad - \left(\widetilde{f}(y, z) + \widetilde{f}(z, x)\right)\varphi(x, y) - \left(\widetilde{f}(z, x) + \widetilde{f}(x, y)\right)\varphi(y, z) \\
&\quad - \left(\widetilde{f}(x, y) + \widetilde{f}(y, z)\right)\varphi(z, x) \\
&= \widetilde{f}(x, y, z)\widehat{d}^1(\varphi)(x, y, z) \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(x, y) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(y, z) + \widetilde{f}(z, x)]\right)\varphi(x, y) \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(y, z) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(z, x) + \widetilde{f}(x, y)]\right)\varphi(y, z) \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(z, x) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(x, y) + \widetilde{f}(y, z)]\right)\varphi(z, x).
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(x, y) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(y, z) + \widetilde{f}(z, x)]\right) &= \frac{1}{3} \left([\widetilde{f}(x, y) - \widetilde{f}(y, z)] + [\widetilde{f}(x, y) - \widetilde{f}(z, x)] \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(\widehat{d}^0(f)(z, x) + \widehat{d}^0(f)(z, y) \right).
\end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(y, z) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(z, x) + \widetilde{f}(x, y)]\right) = \frac{1}{6} \left(\widehat{d}^0(f)(x, y) + \widehat{d}^0(f)(x, z) \right).$$

et

$$\left(\frac{2}{3}\widetilde{f}(z, x) - \frac{1}{3}[\widetilde{f}(x, y) + \widetilde{f}(y, z)]\right) = \frac{1}{6} \left(\widehat{d}^0(f)(y, z) + \widehat{d}^0(f)(y, x) \right).$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{d}^1(\widetilde{f}\varphi)(x, y, z) &= \widetilde{f}(x, y, z)\widehat{d}^1(\varphi)(x, y, z) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[\widehat{d}^0(f)(z, x) + \widehat{d}^0(f)(z, y) \right] \varphi(x, y) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[\widehat{d}^0(f)(x, y) + \widehat{d}^0(f)(x, z) \right] \varphi(y, z) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[\widehat{d}^0(f)(y, z) + \widehat{d}^0(f)(y, x) \right] \varphi(z, x).
\end{aligned}$$

(2) Soient $(f, \phi) \in \mathcal{C}(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}(\mathcal{F})$. En utilisant le lemme 2.4.2, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}^1(\widetilde{f}\phi)(e) &= \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \widetilde{f}(e, x) \phi(e, x) \\ &= \frac{1}{3r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \left(\widetilde{f}(e) + \widetilde{f}(e^+, x) + \widetilde{f}(x, e^-) \right) \phi(e, x) \\ &= \frac{1}{3} \widetilde{f}(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) + \frac{1}{3r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \widetilde{f}(e^+, x) \phi(e, x) \\ &\quad + \frac{1}{3r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \widetilde{f}(x, e^-) \phi(e, x). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}^1(\widetilde{f}\phi)(e) &= \widetilde{f}(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) \\ &\quad + \frac{1}{3r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \left(\widetilde{f}(e^+, x) - \widetilde{f}(e) \right) \phi(e, x) \\ &\quad + \frac{1}{3r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \left(\widetilde{f}(x, e^-) - \widetilde{f}(e) \right) \phi(e, x) \\ &= \widetilde{f}(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) \\ &\quad + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \left[\widehat{d}^0(f)(e^-, x) + \widehat{d}^0(f)(e^+, x) \right] \phi(e, x). \end{aligned}$$

□

- **Opérateur de Gauß-Bonnet:** Par analogie à la géométrie Riemannienne, nous utilisons la décomposition des opérateurs dans [16]. D'abord, nous commençons par définir l'opérateur

$$d : \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \circlearrowleft$$

par

$$\forall (f, \varphi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}), \quad d(f, \varphi, \phi) = (0, d^0 f, d^1 \varphi),$$

L'adjoint formel de d , noté par δ satisfait

$$\langle d(f_1, \varphi_1, \phi_1), (f_2, \varphi_2, \phi_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (f_1, \varphi_1, \phi_1), \delta(f_2, \varphi_2, \phi_2) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (2.4)$$

pour tout $(f_1, \varphi_1, \phi_1), (f_2, \varphi_2, \phi_2) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Lemme 2.4.4 Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation. Alors, l'opérateur

$$\delta : \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \circlearrowleft$$

est donné par

$$\delta(f, \varphi, \phi) = (\delta^0 \varphi, \delta^1 \phi, 0), \forall (f, \varphi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}).$$

Preuve:

Soient $(f_1, \varphi_1, \phi_1), (f_2, \varphi_2, \phi_2) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$. En utilisant l'équation (2.4)

$$\begin{aligned} \langle d(f_1, \varphi_1, \phi_1), (f_2, \varphi_2, \phi_2) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (0, d^0 f_1, d^1 \varphi_1), (f_2, \varphi_2, \phi_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle d^0 f_1, \varphi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \langle d^1 \varphi_1, \phi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle f_1, \delta^0 \varphi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{V})} + \langle \varphi_1, \delta^1 \phi_2 \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle (f_1, \varphi_1, \phi_1), (\delta^0 \varphi_2, \delta^1 \phi_2, 0) \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

□

Définition 2.4.1 *L'opérateur de Gauß-Bonnet est défini comme suit*

$$T := d + \delta : \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$$

est donné par

$$T(f, \varphi, \phi) = (\delta^0 \varphi, d^0 f + \delta^1 \phi, d^1 \varphi)$$

pour tout $(f, \varphi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

La représentation matricielle de T est donnée par

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta^0 & 0 \\ d^0 & 0 & \delta^1 \\ 0 & d^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.4.5 *Si $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ est une triangulation alors $d^1 d^0 = \delta^0 \delta^1 = 0$.*

Preuve:

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$, nous avons que

$$\begin{aligned} d^1(d^0 f)(x, y, z) &= d^0 f(x, y) + d^0 f(y, z) + d^0 f(z, x) \\ &= (f(y) - f(x)) + (f(z) - f(y)) + (f(x) - f(z)) = 0. \end{aligned}$$

Comme $d^1 d^0 = 0$ et l'opérateur $\delta^0 \delta^1$ est l'adjoint formel de $d^1 d^0$. Alors $\delta^0 \delta^1 = 0$.

□

- **Laplacien discret:** À travers l'opérateur de Gauß-Bonnet T , on peut définir le Laplacien discret sur \mathcal{T} . Donc le lemme 2.4.5 induit la définition suivante

Définition 2.4.2 Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation, le Laplacien sur \mathcal{T} est défini comme suit:

$$\mathcal{L} := T^2 : \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \circlearrowleft$$

est donné par

$$\mathcal{L}(f, \varphi, \phi) = (\delta^0 d^0 f, (d^0 \delta^0 + \delta^1 d^1) \varphi, d^1 \delta^1 \phi).$$

pour tout $(f, \varphi, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

On peut aussi l'écrire

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2,$$

où

- \mathcal{L}_0 est le Laplacien discret agissant sur les fonctions. Il est donné par

$$\mathcal{L}_0(f)(x) := \delta^0 d^0(f)(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) (f(x) - f(e^-)).$$

- \mathcal{L}_1 est le Laplacien discret agissant sur les 1-formes. Il est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\varphi)(x, y) &:= (d^0 \delta^0 + \delta^1 d^1)(\varphi)(x, y) \\ &= \frac{1}{c(y)} \sum_{e, e^+=y} r(e) \varphi(e) - \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) \varphi(e) \\ &\quad + \frac{1}{r(x, y)} \sum_{z \in \mathcal{F}(x, y)} s(x, y, z) (\varphi(x, y) + \varphi(y, z) + \varphi(z, x)). \end{aligned}$$

- \mathcal{L}_2 est le Laplacien discret agissant sur les 2-formes. Il est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\phi)(x, y, z) &:= d^1 \delta^1(\phi)(x, y, z) \\ &= \frac{1}{r(x, y)} \sum_{u \in \mathcal{F}(x, y)} s(x, y, u) \phi(x, y, u) \\ &\quad + \frac{1}{r(y, z)} \sum_{u \in \mathcal{F}(y, z)} s(y, z, u) \phi(y, z, u) \\ &\quad + \frac{1}{r(z, x)} \sum_{u \in \mathcal{F}(z, x)} s(z, x, u) \phi(z, x, u). \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3 L'opérateur \mathcal{L}_1 est appelé le Laplacien total, il est défini comme suit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^- + \mathcal{L}_1^+$, où $\mathcal{L}_1^- = d^0 \delta^0$ (resp. $\mathcal{L}_1^+ = \delta^1 d^1$) est appelé le Laplacien inférieur (resp. le Laplacien supérieur).

2.5 Fermabilité des opérateurs

Nous rappelons d'abord que les opérateurs d^0 et δ^0 sont fermables sur un graphe connexe localement fini, voir [1].

Lemme 2.5.1 *Soit \mathcal{K} un graphe connexe localement fini. Alors, les opérateurs d^0 et δ^0 sont fermables.*

Preuve:

- Supposons qu'il existe une suite convergente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{V})$. On note φ sa limite. Nous devons montrer que $\varphi = 0$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} + \|d^0 f_n - \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0,$$

Alors pour chaque sommet x , la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 et pour chaque arête e , la suite $(d^0 f_n(e))$ converge vers $\varphi(e)$. Comme \mathcal{K} est localement fini et d'après l'expression de d^0 , pour toute arête e , $d^0 f_n(e)$ converge vers 0.

- La même chose peut être faite pour δ^0 : La convergence en norme vers 0 de la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique la convergence simple vers 0 ce qui implique la convergence simple de $\delta^0(\varphi_n)$ vers 0, car le graphe \mathcal{K} est localement fini. Alors, la convergence en norme de la suite $\delta^0(\varphi_n)$ doit être vers 0.

□

De la même manière, nous montrons que les opérateurs d^1 et δ^1 sont fermables sur une triangulation.

Lemme 2.5.2 *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation. Alors, les opérateurs d^1 et δ^1 sont fermables.*

Preuve:

- Soient $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et $\phi \in l^2(\mathcal{F})$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} + \|d^1 \varphi_n - \phi\|_{l^2(\mathcal{F})} = 0,$$

alors pour chaque arête e , la suite $(\varphi_n(e))_n$ converge vers 0 et pour chaque face ϖ , $(d^1(\varphi_n)(\varpi))_n$ converge vers $\phi(\varpi)$. Comme \mathcal{K} est localement fini et d'après l'expression de d^1 , pour chaque face ϖ , $d^1(\varphi_n)(\varpi)$ converge vers 0. Alors, nous avons que $\phi = 0$.

- La même chose peut être faite pour δ^1 : Soient $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_c(\mathcal{F})$ et $\varphi \in l^2(\mathcal{E})$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} + \|\delta^1 \phi_n - \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0,$$

alors pour chaque face σ , $\phi_n(\sigma)$ converge vers 0 et pour chaque arête e , $\delta^1(\phi_n)(e)$ converge vers $\varphi(e)$. Comme \mathcal{K} est localement fini et d'après l'expression

de δ^1 , pour chaque arête e , $\delta^1(\phi_n)(e)$ converge vers 0. Alors, nous avons que $\varphi = 0$. □

La plus petite extension de d^0 s'appelle la fermeture, voir ([38] et [39]) et notée par $\overline{d^0} = d_{min}^0$ (resp. $\overline{\delta^0} = \delta_{min}^0$, $\overline{d^1} = d_{min}^1$, $\overline{\delta^1} = \delta_{min}^1$, $\overline{T} = T_{min}$, $\overline{L} = L_{min}$) de domaine

$$Dom(d_{min}^0) := \{f \in l^2(\mathcal{V}); \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} d^0(f_n) \text{ existe dans } l^2(\mathcal{E})\}.$$

Pour chaque fonction $f \in Dom(d_{min}^0)$, nous avons

$$d_{min}^0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^0(f_n).$$

On remarque que $d_{min}^0(f)$ est indépendant de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, car d^0 est fermable.

On note $d_{max}^0 = (\delta^0)^*$ l'opérateur adjoint de δ_{min}^0 , (resp. $\delta_{max}^0 = (d^0)^*$, l'opérateur adjoint de d_{min}^0).

On note $d_{max}^1 = (\delta^1)^*$ l'opérateur adjoint de δ_{min}^1 , (resp $\delta_{max}^1 = (d^1)^*$, l'opérateur adjoint de d_{min}^1).

Proposition 2.5.1 Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation pondérée. Alors

$$Dom(T_{min}) \subseteq Dom(d_{min}^0) \oplus (Dom(\delta_{min}^0) \cap Dom(d_{min}^1)) \oplus Dom(\delta_{min}^1).$$

Preuve:

Soit $F = (f, \varphi, \phi) \in Dom(T_{min})$, donc il existe une suite $(F_n)_n = ((f_n, \varphi_n, \phi_n))_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ dans \mathcal{H} et $(TF_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{H} . On note $l_0 = (f_0, \varphi_0, \phi_0)$ sa limite. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|TF_n - l_0\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\delta^0 \varphi_n - f_0\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + \|(d^0 + \delta^1)(f_n, \phi_n) - \varphi_0\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \\ &\quad + \|d^1 \varphi_n - \phi_0\|_{l^2(\mathcal{F})}^2. \end{aligned}$$

Alors $\delta^0 \varphi_n \rightarrow f_0$ et $d^1 \varphi_n \rightarrow \phi_0$ respectivement dans $l^2(\mathcal{V})$ et dans $l^2(\mathcal{F})$. Par définition, $\varphi \in Dom(\delta_{min}^0) \cap Dom(d_{min}^1)$, $f_0 = \delta_{min}^0 \varphi$ et $\phi_0 = d_{min}^1 \varphi$. De plus, nous combinons l'identité du parallélogramme avec le lemme 2.4.5 pour obtenir le résultat suivant

$$\|(d^0 + \delta^1)(f, \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \|d^0(f)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 + \|\delta^1(\phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (f, \phi) \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{F}).$$

Comme $((d^0 + \delta^1)(f_n, \phi_n))_n$ converge dans $l^2(\mathcal{E})$. D'après la complétude de $l^2(\mathcal{E})$ nous avons que $(d^0(f_n))_n$ et $(\delta^1(\phi_n))_n$ sont convergentes dans $l^2(\mathcal{E})$. Alors, nous concluons que $f \in Dom(d_{min}^0)$ et $\phi \in Dom(\delta_{min}^1)$. □

Proposition 2.5.2 Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation pondérée. Alors

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_{\min}) \subseteq \text{Dom}(\delta_{\min}^0 d_{\min}^0) \oplus (\text{Dom}(d_{\min}^0 \delta_{\min}^0) \cap \text{Dom}(\delta_{\min}^1 d_{\min}^1)) \oplus \text{Dom}(d_{\min}^1 \delta_{\min}^1).$$

Preuve:

i) Nous montrons que $(\mathcal{L}_0)_{\min} \subseteq \delta_{\min}^0 d_{\min}^0$. D'abord, nous notons que

$$\text{Dom}(\delta_{\min}^0 d_{\min}^0) = \{f \in \text{Dom}(d_{\min}^0), d_{\min}^0 f \in \text{Dom}(\delta_{\min}^0)\}.$$

Soit $f \in \text{Dom}((\mathcal{L}_0)_{\min})$, alors il existe une suite $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ telle que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } l^2(\mathcal{V}), \quad \delta^0 d^0 f_n \rightarrow (\delta^0 d^0)_{\min} f \text{ dans } l^2(\mathcal{V}).$$

Donc $(\mathcal{L}_0 f_n)_n$ est une suite de Cauchy. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \|d^0 f_n - d^0 f_m\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \langle d^0(f_n - f_m), d^0(f_n - f_m) \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle \delta^0 d^0(f_n - f_m), f_n - f_m \rangle_{l^2(\mathcal{V})} \\ &= \langle \mathcal{L}_0(f_n - f_m), f_n - f_m \rangle_{l^2(\mathcal{V})} \\ &\leq \| \mathcal{L}_0(f_n - f_m) \|_{l^2(\mathcal{V})} \|f_n - f_m\|_{l^2(\mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Alors $(d^0 f_n)_n$ est une suite de Cauchy. D'où, elle est convergente dans $l^2(\mathcal{E})$. Par fermabilité, nous concluons que $f \in \text{Dom}(\delta_{\min}^0 d_{\min}^0)$.

ii) D'abord, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ nous avons

$$\langle \mathcal{L}_1 \varphi, \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \langle \delta^0 \varphi, \delta^0 \psi \rangle_{l^2(\mathcal{V})} + \langle d^1 \varphi, d^1 \psi \rangle_{l^2(\mathcal{F})}. \quad (2.5)$$

En utilisant la même méthode que dans i) avec (2.5), nous obtenons $(\mathcal{L}_1^-)_{\min} \subseteq d_{\min}^0 \delta_{\min}^0$ et $(\mathcal{L}_1^+)_{\min} \subseteq \delta_{\min}^1 d_{\min}^1$. Il reste à montrer que

$$(\mathcal{L}_1)_{\min} \subseteq (\mathcal{L}_1^-)_{\min} + (\mathcal{L}_1^+)_{\min}$$

En effet, soit $\varphi \in \text{Dom}((\mathcal{L}_1)_{\min})$, alors il existe une suite $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ tel que $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ in $l^2(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{L}_1 \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $l^2(\mathcal{E})$. D'après l'identité du parallélogramme et le lemme 2.4.5 nous obtenons

$$\|(\mathcal{L}_1^- + \mathcal{L}_1^+)(\varphi_n)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \|\mathcal{L}_1^-(\varphi_n)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 + \|\mathcal{L}_1^+(\varphi_n)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $(\mathcal{L}_1^-(\varphi_n))_n$ et $(\mathcal{L}_1^+(\varphi_n))_n$ sont convergentes dans $l^2(\mathcal{E})$. En utilisant la fermabilité de \mathcal{L}_1^- et \mathcal{L}_1^+ , nous concluons que $\varphi \in \text{Dom}((\mathcal{L}_1^-)_{\min}) \cap \text{Dom}((\mathcal{L}_1^+)_{\min})$.

iii) Pour $\phi, \Theta \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$, nous avons

$$\langle \mathcal{L}_2 \phi, \Theta \rangle_{l^2(\mathcal{F})} = \langle d^1 \delta^1 \phi, \Theta \rangle_{l^2(\mathcal{F})} = \langle \delta^1 \phi, \delta^1 \Theta \rangle_{l^2(\mathcal{E})}. \quad (2.6)$$

En utilisant la même méthode que dans i) avec (2.6), nous obtenons $(\mathcal{L}_2)_{min} \subseteq d_{min}^1 \delta_{min}^1$.

□

2.6 La bornitude des Laplaciens

Nous discutons dans cette partie la question de la bornitude pour les Laplaciens discrets. On commence par définir:

- Le degré pondéré des sommets est donné par:

$$deg_{\mathcal{V}}(x) := \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e).$$

- Le degré pondéré d'arêtes est donné par:

$$deg_{\mathcal{E}}(e) := \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x).$$

Soit \mathcal{K} un graphe pondéré, nous avons une équivalence bien connue. Dans [26], les auteurs prouvent que \mathcal{L}_0 est borné si et seulement si $deg_{\mathcal{V}}$ est borné.

Lemme 2.6.1 *Soit \mathcal{K} un graphe pondéré. Alors, l'équivalence suivante est satisfaite:*

$$\mathcal{L}_0 \text{ est borné} \Leftrightarrow deg_{\mathcal{V}} \text{ est borné.}$$

Preuve:

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ et on suppose que $deg_{\mathcal{V}}$ est borné. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_0 f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &= \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) |\mathcal{L}_0 f(x)|^2 \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left(\sum_{e, e^+=x} r(e) |d^0 f(e)| \right)^2 \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{V}} deg_{\mathcal{V}}(x) \left(\sum_{e, e^+=x} r(e) |d^0 f(e)|^2 \right) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} deg_{\mathcal{V}}(x) \left(\sum_{y \sim x} r(x, y) (|f(x)|^2 + |f(y)|^2) \right) \\ &= \|\mathcal{L}_0 f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + \sum_{x \in \mathcal{V}} deg_{\mathcal{V}}(x) \sum_{y \sim x} r(x, y) |f(y)|^2. \end{aligned}$$

Posons $C := \sup_{x \in \mathcal{V}} \deg_{\mathcal{V}}(x)$. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_0 f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &\leq \|\deg_{\mathcal{V}}(\cdot) f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + C \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \sim x} r(x, y) |f(y)|^2 \\ &= \|\deg_{\mathcal{V}}(\cdot) f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + C \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) \deg_{\mathcal{V}}(x) |f(x)|^2 \\ &\leq \|\deg_{\mathcal{V}}(\cdot) f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + C^2 \|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 \\ &= 2C^2 \|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, si \mathcal{L}_0 est borné. Soit $x \in \mathcal{V}$ fixé, considérons la fonction caractéristique $1_{\{x\}} : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$1_{\{x\}}(y) := \begin{cases} 1 & \text{pour tout } y \in \mathcal{V}(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, nous avons

$$\langle 1_{\{x\}}, \mathcal{L}_0 1_{\{x\}} \rangle_{l^2(\mathcal{V})} = \deg_{\mathcal{V}}(x).$$

□

Proposition 2.6.1 *Soit \mathcal{T} une triangulation pondérée. Alors, nous avons l'équivalence suivante:*

$$\mathcal{L}_1 \text{ est borné} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_1^- \text{ est borné} \Leftrightarrow \deg_{\mathcal{V}}(\cdot) < \infty \\ \mathcal{L}_1^+ \text{ est borné} \Leftrightarrow \mathcal{L}_2 \text{ est borné} \Leftrightarrow \deg_{\mathcal{E}}(\cdot) < \infty \end{cases}$$

Preuve:

En utilisant d'abord le fait que

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}), \langle \psi, \mathcal{L}_1 \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \langle \psi, \mathcal{L}_1^- \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \langle \psi, \mathcal{L}_1^+ \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})},$$

et que les opérateurs \mathcal{L}_1^- et \mathcal{L}_1^+ sont positifs, on en déduit que \mathcal{L}_1 est borné si et seulement si les deux opérateurs \mathcal{L}_1^- et \mathcal{L}_1^+ sont bornés. De plus, nous référons à [4] qui montre que \mathcal{L}_1^- est borné si et seulement si \mathcal{L}_0 est borné. D'après le lemme 2.6.1, il est alors équivalent que $\deg_{\mathcal{V}}(\cdot)$ est borné. D'autre part, prenons $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$. Si $\deg_{\mathcal{E}}(\cdot) < \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \psi, \mathcal{L}_1^+ \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} &= \|d^1 \psi\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 = \frac{1}{6} \sum_{[x,y,z] \in \mathcal{F}} s(x, y, z) |d^1 \psi(x, y, z)|^2 \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \psi^2(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) \\ &= 3 \langle \psi, \deg_{\mathcal{E}}(\cdot) \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Alors \mathcal{L}_1^+ est borné. De l'autre côté, nous avons

$$\langle \chi^{e_0}, \mathcal{L}_1^+ \chi^{e_0} \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \text{deg}_{\mathcal{E}}(e_0)$$

où $\chi^{e_0} = 1_{\{e_0\}} - 1_{\{-e_0\}}$.

Nous tournons à \mathcal{L}_2 . On désigne par $\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}}$ l'extension de Friedrichs de \mathcal{L}_2 , voir [37]. Alors, nous avons

$$\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}} \text{ est borné} \Leftrightarrow \delta^1 \text{ est borné.}$$

Cette équivalence vient du fait de la construction de l'extension de Friedrich et de $\|(\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}})^{\frac{1}{2}} \phi\|_{l^2(\mathcal{F})} = \|\delta^1 \phi\|_{l^2(\mathcal{E})}$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathcal{L}_2 \text{ est borné} \Leftrightarrow \delta^1 \text{ est borné} \Leftrightarrow d^1 \text{ borné} \Leftrightarrow \mathcal{L}_1^+ \text{ est borné.}$$

□

Le caractère essentiellement auto-adjoint

Ce chapitre a fait l'objet de l'article [7] et étudie le caractère essentiellement auto-adjoint du Laplacien discret sur une triangulation pondérée. Ce caractère est assuré par l'hypothèse géométrique de χ -complétude sur la triangulation qui s'inspire de [1] pour les graphes.

3.1 Métrique intrinsèque

Définition 3.1.1 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré connexe et localement fini, un poids c sur les sommets et un poids r sur les arêtes. Une pseudo-métrique sur \mathcal{V} est une application

$$d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$$

qui vérifie les trois conditions suivantes:

- $\forall x \in \mathcal{V}, d(x, x) = 0.$
- $\forall x, y \in \mathcal{V}, d(x, y) = d(y, x).$
- $\forall x, y, z \in \mathcal{V}, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Une pseudo-métrique $d = d_\sigma$ est dite une pseudo-métrique de chemin, s'il existe une fonction symétrique $\sigma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$ telle que $\sigma(x, y) > 0$ si et seulement si $x \sim y$ et

$$d_\sigma(x, y) := \inf \{ l_\sigma(x_0, \dots, x_n) \text{ tel que } n \geq 1 \text{ et } (x_0, \dots, x_n) \text{ est un chemin entre } x \text{ et } y \}$$

où l_σ la longueur d'un chemin (x_0, \dots, x_n) , est donnée par

$$l_\sigma((x_0, \dots, x_n)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(x_0, \dots, x_n).$$

Nous disons qu'une pseudo-métrique d admet une taille de saut $s > 0$ si, pour tout $x, y \in \mathcal{V}$, $r(x, y) = 0$ quand $d(x, y) > s$.

On présente maintenant une définition de la pseudo-métrique intrinsèque qui s'est révélée très utile dans plusieurs autres problèmes sur les graphes, voir [18] et [24].

Définition 3.1.2 • Une pseudo-métrique d est dite intrinsèque si, pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{y \sim x} r(x, y) d^2(x, y) \leq 1.$$

• Une pseudo-métrique de chemin d_σ est dite fortement intrinsèque si, pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{y \sim x} r(x, y) \sigma^2(x, y) \leq 1.$$

Exemple 3.1.1 1) Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré connexe. Pour $(x, y) \in \mathcal{E}$, soit

$$\sigma_0(x, y) = \min\{deg_{\mathcal{V}}^{-\frac{1}{2}}(x), deg_{\mathcal{V}}^{-\frac{1}{2}}(y), 1\}.$$

où $deg_{\mathcal{V}}(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e \in \mathcal{E}, e^+ = x} r(e)$, pour tout $x \in \mathcal{V}$. Il est clair que d_{σ_0} est fortement intrinsèque de taille de saut 1.

2) Pour les graphes pondéré et localement finis, soit

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}, \sigma_1(x, y) = r^{-\frac{1}{2}}(x, y) \min \left\{ \frac{c(x)}{deg(x)}, \frac{c(y)}{deg(y)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Il est clair que d_{σ_1} est fortement intrinsèque. De plus, si le graphe de valence bornée, alors d_{σ_1} équivalent aux métriques utilisées dans [13], [14], [33] et [34] dans le cas d'un champ magnétique et sans potentiel.

3) Supposons que $\sigma = 1$ sur \mathcal{E} . Alors, d_σ donne la distance combinatoire $d_{comb} = d_\sigma$ pour les graphes. Évidemment, d_{comb} est fortement intrinsèque si et seulement si $deg_{\mathcal{V}} \leq 1$. Dans le cas général, si $deg_{\mathcal{V}} \leq K$, pour un certain $K > 0$, alors $\frac{d_{comb}}{\sqrt{K}}$ est aussi une métrique fortement intrinsèque.

Remarque 3.1.1 *Le premier exemple montre qu'il existe toujours des pseudo-métriques de chemin fortement intrinsèques avec une taille de saut 1 sur un graphe pondéré connexe.*

3.2 L'hypothèse de χ -complétude

3.2.1 Triangulation χ -complète

D'abord, nous commençons par un rappel de la notion de χ -complétude sur les graphes dans [1].

Définition 3.2.1 (Graphe χ -complet) *Un graphe $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est dit χ -complet s'il existe une suite croissante d'ensembles finis $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\mathcal{V} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ et il existe une suite de fonctions de coupure χ_n , satisfaisant les trois conditions suivantes:*

$$i) \chi_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}), 0 \leq \chi_n \leq 1.$$

$$ii) x \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \chi_n(x) = 1.$$

iii) $\exists C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{V}$, nous avons

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{e \in \mathcal{E}, e^\pm = x} r(e) |d^0 \chi_n(e)|^2 \leq C.$$

Exemple 3.2.1 *Considérons un arbre infini d'une valence croissante. Prenons des poids constants sur les sommets et les arêtes. Fixons un sommet O , c'est l'origine du graphe de génération 0 et de valence 2. Il est lié à deux sommets qui sont de génération 1 et de valence 3. Plus généralement, il y a $2n!$ sommets de valence $(n+2)$ dans la génération n . Ce graphe est χ -complet, voir [1].*

En effet, on définit la boule \mathcal{B}_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme l'ensemble de sommets de génération moins que n^2 et la fonction de coupure χ_n constante sur chaque génération de sommets:

$$x \text{ de génération } p \implies \chi_n(x) = \left(\frac{(n+1)^2 - p}{2n+1} \wedge 1 \right) \vee 0.$$

Alors, $p \leq n^2 \implies \chi_n(x) = 1$ et $p \geq (n+1)^2 \implies \chi_n(x) = 0$. Prenons $n^2 < p < (n+1)^2$, nous avons $|d^0 \chi_n(e)| \leq \frac{1}{2n+1}$. Pour vérifier la condition iii) de la définition 3.2.1, il s'agit de

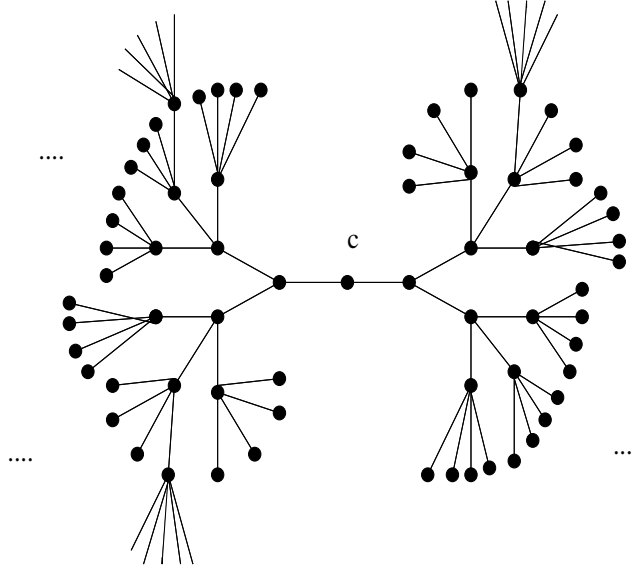


Figure 3.1: Arbre régulier

calculer pour ces générations. Soit $x \in \mathcal{V}$ de génération p , on a

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}, e^\pm = x} |d^0 \chi_n(e)|^2 &\leq \frac{p+2}{(2n+1)^2} \\ &\leq \frac{(n+1)^2 + 2}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

qui est borné indépendamment de n .

Remarque 3.2.1 La condition de χ -complétude couvre de nombreuses situations qui ont déjà été étudiées dans ([18] et [24]). En particulier, elle est satisfaite par des graphes localement finis qui sont complets pour une pseudo-métrique intrinsèque, comme définie dans ([18] et [24]).

Proposition 3.2.1 Si le graphe admet une distance métrique intrinsèque d_a tel que (\mathcal{V}, d_a) est complet alors le graphe est χ -complet.

Preuve:

Soit \mathcal{K} un graphe connexe localement fini admet une métrique a tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^\pm = x} r(e)a(e) \leq 1.$$

On suppose que la distance métrique d_a définit (\mathcal{V}, d_a) comme un espace métrique complet. On définit alors les fonctions de coupure χ_n comme suit. On fixe O un sommet de \mathcal{V} et donc nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_n := \{x \in \mathcal{V}; d_a(O, x) \leq n\}, \chi_n(x) := \sup\{1 - d_a(x, \mathcal{B}_n), 0\}.$$

Comme indiqué dans [24], la complétude (\mathcal{V}, d_a) donne que la boule \mathcal{B}_n est finie, voir le théorème de type Hopf-Rinow dans le chapitre 5 **Annexe**. Alors, nous avons

i) Le support de χ_n est fini à cause de:

$$\{x \in \mathcal{V}; d_a(x, \mathcal{B}_n) \leq 1\} \subseteq \mathcal{B}_{n+1}.$$

ii) $x \in \mathcal{B}_n \Rightarrow d_a(x, \mathcal{B}_n) = 0 \Rightarrow \chi_n(x) = 1$.

iii) D'après la définition de la $d_a(x, y) \leq a(x, y)$, pour tout $e \in \mathcal{E}$, nous avons $d_a^2(e) \leq a^2(e)$. Alors la condition de métrique intrinsèque donne:

$$\forall x \in \mathcal{V}, \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) d_a^2(e) \leq 1.$$

□

Remarque 3.2.2 *Considérons un graphe de valence bornée par \mathcal{C} , i.e $\forall x \in \mathcal{V}, \deg(x) \leq \mathcal{C}$, admet la métrique introduite dans [13]:*

$$a(e) := \frac{\min(c(e^-), c(e^+))}{r(e)}$$

Alors, si le graphe est complet pour cette métrique, la χ -complétude est satisfaite. En effet, le quotient $\frac{a}{\mathcal{C}}$ est une métrique intrinsèque, car:

$$\forall x \in \mathcal{V}, \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) a(e) \leq \mathcal{C}.$$

Définition 3.2.2 (Triangulation χ -complète) *Une triangulation \mathcal{T} est dite χ -complète, si:*

(C₁) \mathcal{K} est un graphe χ -complet.

(C₂) $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, e \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 \leq M.$$

Pour ce type de 2-complexes simpliciaux, nous avons

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n_p, n \geq n_p \Rightarrow \forall e \in \mathcal{E}, \text{ tel que } e^+ \text{ ou } e^- \in \mathcal{B}_p, d^0 \chi_n(e) = 0. \quad (3.1)$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \text{ si } \mathcal{E}_n := \{e \in \mathcal{E}, e^+ \in \mathcal{B}_n \text{ ou } e^- \in \mathcal{B}_n\}. \quad (3.2)$$

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists n_q, n \geq n_q \Rightarrow \forall (e, x) \in \mathcal{F}, \text{ tel que } e^-, e^+ \text{ ou } x \in \mathcal{B}_q, d^0 \chi_n(e^\pm, x) = 0. \quad (3.3)$$

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \text{ si } \mathcal{F}_n := \{(x, y, z) \in \mathcal{F}, x \in \mathcal{B}_n \text{ ou } y \in \mathcal{B}_n \text{ ou } z \in \mathcal{B}_n\}. \quad (3.4)$$

$$\forall f \in l^2(\mathcal{V}), \|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \chi_n f, f \rangle_{l^2(\mathcal{V})}. \quad (3.5)$$

$$\forall \varphi \in l^2(\mathcal{E}), \|\varphi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \chi_n(e^+) |\varphi(e)|^2. \quad (3.6)$$

$$\forall \phi \in l^2(\mathcal{F}), \|\phi\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \sum_{e \in \mathcal{E}} \widetilde{\chi}_n(e) \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) |\phi(e, x)|^2 \right). \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{e \in \mathcal{E}^*(n)} r(e) |\varphi(e)|^2 = 0, \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{E}^*(n) := \{e \in \mathcal{E}, \exists x \in \mathcal{F}_e \text{ tel que } (e^\pm, x) \in \text{supp}(d^0 \chi_n)\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{x \in \mathcal{F}_e^*(n)} s(e, x) |\phi(e, x)|^2 = 0, \quad (3.9)$$

où

$$\forall e \in \mathcal{E}, \mathcal{F}_e^*(n) := \{x \in \mathcal{F}_e, (e^\pm, x) \in \text{supp}(d^0 \chi_n)\}.$$

Proposition 3.2.2 Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation χ -complète. Alors, \mathcal{L}_0 est essentiellement auto-adjoint.

Preuve:

En fait, nous montrons que \mathcal{L}_0 est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V})$. Soit $f \in \text{Dom}((\mathcal{L}_0)_{\max})$, par la χ -complétude de \mathcal{T} , nous considérons maintenant la suite $(\chi_n f)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$. Il reste à montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \chi_n f\|_{l^2(\mathcal{V})} + \|(\mathcal{L}_0)_{\max}(f - \chi_n f)\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0. \quad (3.10)$$

Pour le premier terme de (3.10), puisque $f \in l^2(\mathcal{V})$ nous avons

$$\|f - \chi_n f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_n^c} c(x) |f(x)|^2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour le deuxième terme de (3.10), nous avons d'abord

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_0)_{\max}(f - \chi_n f)\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &= \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) |(\mathcal{L}_0)_{\max}(f - \chi_n f)(x)|^2 \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) \widehat{d}^0((1 - \chi_n)f)(e) \right|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de dérivation de \widehat{d}^0 de la proposition 2.4.1, nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_0(f - \chi_n f)\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &\leq 2 \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e)(1 - \chi_n)(e^+) \widehat{d}^0(f)(e) \right|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) f(e^-) d^0(\chi_n)(e) \right|^2 \\ &= 2 \|(1 - \chi_n)(\mathcal{L}_0)_{max}(f)\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) f(e^-) \widehat{d}^0(\chi_n)(e) \right|^2. \end{aligned}$$

Puisque $(\mathcal{L}_0)_{max}(f) \in l^2(\mathcal{V})$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \chi_n)(\mathcal{L}_0)_{max}(f)\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

D'autre part, par l'hypothèse *iii*) de la définition 3.2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) f(e^-) d^0(\chi_n)(e) \right|^2 &\leq \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left(\sum_{e, e^+ = x} r(e) |d^0(\chi_n)(e)|^2 \right) \\ &\quad \left(\sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |f(e^-)|^2 \right) \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{V}} C \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |f(e^-)|^2 \\ &\leq C \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n)} r(e) |f(e^-)|^2. \end{aligned}$$

Les propriétés (3.1) et (3.2) permettent de conclure que ce terme tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

□

Proposition 3.2.3 *Toute triangulation simple de valence bornée est χ -complète.*

Preuve:

Considérons \mathcal{T} une triangulation simple. On fixe $o \in \mathcal{V}$, soit \mathcal{B}_n la boule de rayon $n \in \mathbb{N}$ centrée par le sommet o , pour la distance combinatoire d_{comb} . Nous définissons la fonction de coupure $\chi_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ comme suit:

$$\chi_n(x) := \left(\frac{2n - d_{comb}(o, x)}{n} \vee 0 \right) \wedge 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $x \in \mathcal{B}_n$ alors $\chi_n(x) = 1$ et si $x \in \mathcal{B}_{2n}^c$ alors $\chi_n(x) = 0$. De plus, pour $e \in \mathcal{E}$, nous avons

$$|d^0 \chi_n(e)| \leq \frac{1}{n} |d_{comb}(o, e^+) - d_{comb}(o, e^-)| = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \sum_{e \in \mathcal{E}, e^\pm = x} |d^0 \chi_n(e)|^2 \leq \frac{\lambda}{n^2}$$

et

$$\forall e \in \mathcal{E}, \quad \sum_{x \in \mathcal{F}_e} |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 \leq \frac{2\lambda}{n^2}.$$

□

Exemple 3.2.2 *Considérons un graphe 6-régulier \mathcal{K} . Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation simple. Alors, \mathcal{T} est une triangulation χ -complète.*

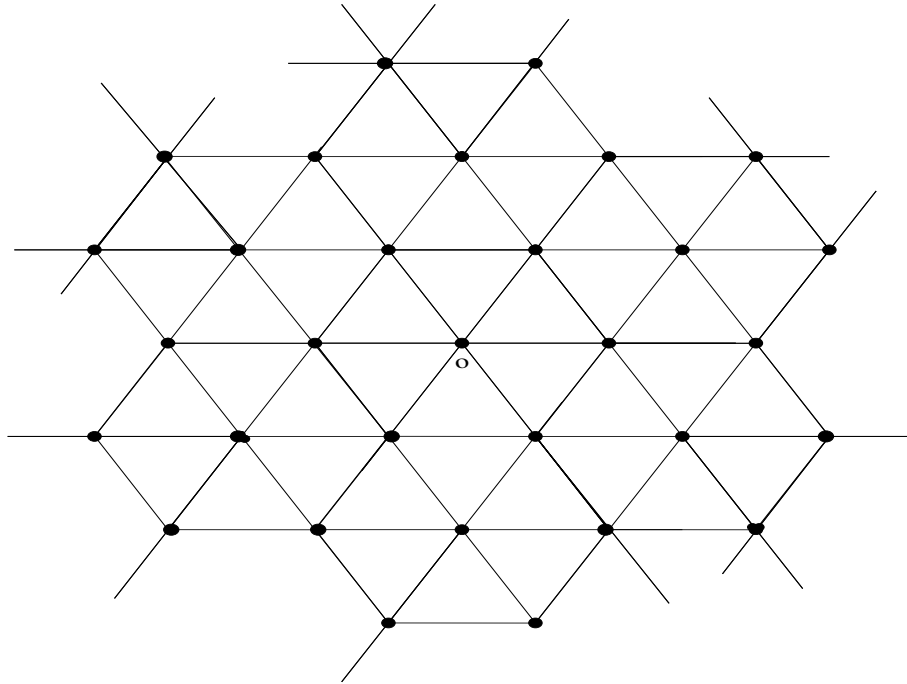


Figure 3.2: Triangulation d'un graphe 6-régulier

3.2.2 Triangulation non χ -complète

Dans cette section nous nous intéressons à trouver un exemple d'une triangulation non χ -complète. Les résultats suivants s'inspirent du travail de H. Baloudi, S. Golénia et A. Jeribi sur les graphes, voir [4]. D'abord, prenons $O \in \mathcal{V}$ et $n \in \mathbb{N}$, et on définit les sphères par

$$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathcal{V}, d_{comb}(O, x) = n\}.$$

Pour $x \in \mathbb{S}_n \setminus \{O\}$, on note \overleftarrow{x} l'unique sommet de \mathbb{S}_{n-1} tel que $(\overleftarrow{x}, x) \in \mathcal{E}$.

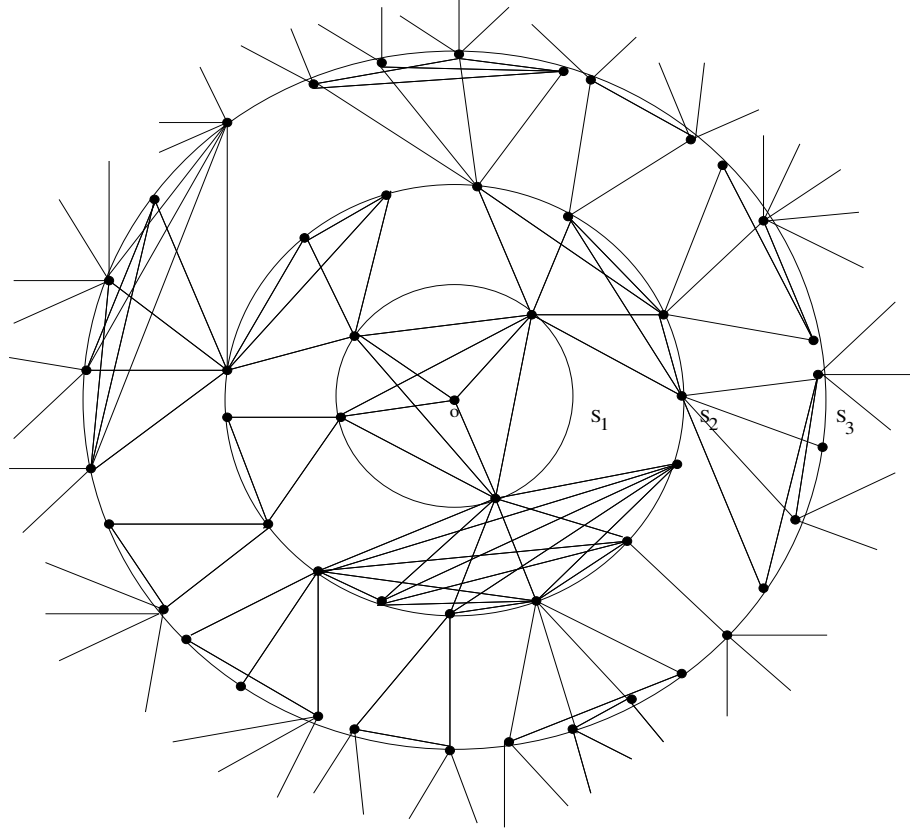


Figure 3.3: Arbre triangulaire

Définition 3.2.3 Un arbre triangulaire \mathbb{T} d'origine O est une triangulation où $\mathcal{V} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_n$, tel que les conditions suivantes sont satisfaites:

$$i) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{S}_n \setminus \{O\}, \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n-1} = \{\overleftarrow{x}\}.$$

$$ii) \forall n \geq 1, \forall (x, y) \in \mathcal{E} \cap (\mathbb{S}_n \setminus \{O\})^2 \Rightarrow \overleftarrow{x} = \overleftarrow{y}.$$

Soit \mathbb{T} une arbre triangulaire. Le offspring de la n -ième génération est donné par:

$$\text{off}(n) := \frac{|\mathbb{S}_{n+1}|}{|\mathbb{S}_n|}$$

Proposition 3.2.4 Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire simple d'origine O . Supposons qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{S}_n : 0 < \alpha \leq \frac{|\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n+1}|}{\text{off}(n)} \leq \beta.$$

Alors

$$\mathbb{T} \text{ est une triangulation } \chi\text{-complète} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\text{off}(n)}} = \infty.$$

Preuve:

\Rightarrow) Par contradiction, nous commençons par supposer que \mathcal{T} est χ -complète et que la série converge. Donc, il existe une suite $(\chi_n)_n$ dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{V})$, satisfaisant à la condition suivante:

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{V}, \sum_{y \sim x} |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 \leq C.$$

Fixons $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_m \in \mathbb{S}_m$. Comme la triangulation est localement finie, il existe $x_{m+1} \in \mathcal{V}(x_m) \cap \mathbb{S}_{m+1}$, tel que

$$|\chi_n(x_m) - \chi_n(x_{m+1})| = \min_{y \in \mathcal{V}(x_m) \cap \mathbb{S}_{m+1}} |\chi_n(x_m) - \chi_n(y)|.$$

Mais,

$$\sum_{y \in \mathcal{V}(x_m) \cap \mathbb{S}_{m+1}} |\chi_n(x_m) - \chi_n(y)|^2 \leq C.$$

Par conséquent, on construit une suite de sommets $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui vérifie

$$|\chi_n(x_m) - \chi_n(x_{m+1})| \leq \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\text{off}(m)}}.$$

En outre, par convergence de la série, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k \geq N} \frac{1}{\sqrt{\text{off}(k)}} < \frac{1}{2\sqrt{C}}.$$

Alors, par ii) de la définition 3.2.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_{n_0}(x) = 1$ pour tout $d_{\text{comb}}(O, x) \leq N$. Puisque χ_{n_0} est de support fini, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_{n_0}(x) = 0$ pour tout $d_{\text{comb}}(O, x) \geq N + M$. Donc,

$$\begin{aligned} |\chi_{n_0}(x_N) - \chi_{n_0}(x_{N+M})| &\leq |\chi_{n_0}(x_N) - \chi_{n_0}(x_{N+1})| \\ &\quad + \dots + |\chi_{n_0}(x_{N+M-1}) - \chi_{n_0}(x_{N+M})| \\ &\leq \sqrt{C} \sum_{k=n}^{N+M-1} \frac{1}{\sqrt{\text{off}(k)}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or $|\chi_{n_0}(x_N) - \chi_{n_0}(x_{N+M})| = 1$. D'où la contradiction.

\Leftarrow) Nous considérons la fonction de coupure:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{\text{comb}}(O, x) \leq n, \\ \max \left(0, 1 - \sum_{k=n}^{d_{\text{comb}}(O, x)-1} \frac{1}{\sqrt{\text{off}(k)}} \right) & \text{si } d_{\text{comb}}(O, x) > n. \end{cases}$$

Puisque la série diverge, χ_n est de support fini et satisfait i) et ii) de la défini-

tion 3.2.1. Ensuite, prenons $x \in \mathbb{S}_m$ avec $m > n$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{m+1}} |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 &\leq \frac{|\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{m+1}|}{\text{off}(m)} \leq \beta. \\ \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_m} |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 &= 0. \\ \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{m-1}} |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 &= |\chi_n(x) - \chi_n(\overleftarrow{x})|^2 \leq \frac{1}{\text{off}(m-1)}. \end{aligned}$$

Alors, la condition *iii*) de la définition 3.2.1 est satisfait. On en déduit que le graphe associé à \mathbb{T} est χ -complet. D'autre part, il s'agit de prouver la condition (\mathcal{C}_2) de la définition 3.2.2:

- Si $e \in \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_{m+1}$ avec $m > n$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 &= \sum_{x \in \mathcal{F}_e} |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \\ &\leq \frac{|\mathcal{F}_e|}{\text{off}(m)} \leq \frac{|\mathcal{V}(e^-) \cap \mathbb{S}_{m+1}|}{\text{off}(m)} \leq \beta. \end{aligned}$$

- Si $e \in \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_m$ avec $m > n$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 &= \sum_{x \in \mathcal{F}_e} |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \\ &= |2\chi_n(\overleftarrow{e}) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \\ &\leq \frac{4}{\text{off}(m-1)}, \end{aligned}$$

avec \overleftarrow{e} est l'unique sommet dans $\mathbb{S}_{m-1} \cap \mathcal{F}_e$.

Par conséquent, \mathbb{T} est χ -complète.

□

Remarque 3.2.3 *La propriété ne dépend pas des faces choisies.*

Corollaire 3.2.1 *Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire simple d'origine O tel que*

$$\text{off}(n) = |\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n+1}|, \text{ pour tout } x \in \mathbb{S}_n,$$

alors \mathbb{T} est χ -complète si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\text{off}(n)}} = \infty.$$

Corollaire 3.2.2 *On fixe $\alpha > 0$. Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire simple d'origine O tel que*

$$\text{off}(n) = |\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n+1}| = \lfloor n^\alpha \rfloor + 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{S}_n,$$

alors \mathbb{T} est χ -complète si et seulement si $\alpha \leq 2$.

3.3 Laplacien essentiellement auto-adjoint

Dans cette section, nous présentons l'un de nos principaux résultats qui est assuré par l'hypothèse de χ -complétude sur les triangulations. D'abord, nous commençons par un résultat important dans [1] concernant le caractère essentiellement auto-adjoint sur les graphes:

Proposition 3.3.1 *Soit \mathcal{K} est un graphe χ -complet alors l'opérateur $d^0 + \delta^0$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$.*

Preuve:

On note d'abord, que

$$\text{Dom}(d_{max}^0) := \{f \in l^2(\mathcal{V}), \widehat{d}^0 f \in l^2(\mathcal{E})\}$$

$$\text{Dom}(\delta_{max}^0) := \{\varphi \in l^2(\mathcal{E}), \widehat{\delta}^0 \varphi \in l^2(\mathcal{V})\}.$$

Si $d_{min}^0 = d_{max}^0$ et $\delta_{min}^0 = \delta_{max}^0$ alors $d^0 + \delta^0$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$. En effet, l'opérateur $d^0 + \delta^0$ est une somme directe et si $F = (f, \varphi) \in \text{Dom}((d^0 + \delta^0)_{max})$ alors $\varphi \in \text{Dom}(\delta_{max}^0)$ et $f \in \text{Dom}(d_{max}^0)$. Par hypothèse, nous avons $\varphi \in \text{Dom}(\delta_{min}^0)$ et $f \in \text{Dom}(d_{min}^0)$, alors $F \in \text{Dom}((d^0 + \delta^0)_{min})$. Il s'agit de prouver les deux égalités ci-dessus:

(a) Soit $f \in \text{Dom}(d_{max}^0)$, montrons que:

$$\|f - \chi_n f\|_{l^2(\mathcal{V})} + \|d_{max}^0(f - \chi_n f)\|_{l^2(\mathcal{E})} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Cela montre que $d_{min}^0 = d_{max}^0$. En effet, nous calculons

$$\|f - \chi_n f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 \leq \sum_{x \notin \mathcal{B}_n} c(x) |f(x)|^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

car $f \in l^2(\mathcal{V})$. Pour le second terme, la formule de dérivation de \widehat{d}^0 dans la proposition 2.4.1 donne

$$\forall e \in \mathcal{E}, d_{max}^0(f - \chi_n f)(e) = (1 - \chi_n)(e^+) \widehat{d}^0(f)(e) - f(e^-) d^0(\chi_n)(e).$$

D'après la propriété (3.6), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \chi_n)(e^+) \widehat{d}^0(f)(e)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|f(e^-)d^0(\chi_n)(e)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e)|f(e^-)|^2 |d^0(\chi_n)(e)|^2 \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} |f(x)|^2 \sum_{e, e^- = x} |d^0(\chi_n)(e)|^2 \\ &\leq C \sum_{x \in \mathcal{V}, \exists e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^- = x} c(x)|f(x)|^2 \end{aligned}$$

par la condition *iii*) de la définition 3.2.1. Par conséquent, la propriété (3.2) permet de conclure que ce terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

(b) Soit $\varphi \in \text{Dom}(\delta_{max}^0)$, on a alors

$$\|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} + \|\delta_{max}^0(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)\|_{l^2(\mathcal{V})} \rightarrow 0 \text{ when } n \rightarrow \infty.$$

Cela montre que $\delta_{min}^0 = \delta_{max}^0$. En effet, par les propriétés (3.1) et (3.2), nous avons

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n_p, \forall n \geq n_p, \|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_p^c} r(e)|\varphi(e)|^2$$

Alors, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

D'autre part, la formule de dérivation de $\widehat{\delta}^0$ dans la proposition 2.4.1 donne

$$\begin{aligned} \delta_{max}^0(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)(x) &= \widehat{\delta}^0 \left((1 - \widetilde{\chi}_n) \varphi \right) (x) \\ &= (1 - \chi_n)(x) \widehat{\delta}^0 \varphi(x) + \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e). \end{aligned}$$

Comme $\widehat{\delta}^0 \varphi \in l^2(\mathcal{V})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \chi_n) \widehat{\delta}^0\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

Pour le deuxième terme, nous utilisons la condition *iii*) de la définition 3.2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Alors, pour tout $x \in \mathcal{V}$, nous avons:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e) \varphi(e) \right|^2 &\leq \sum_{e, e^+ = x} r(e) |d^0 \chi_n(e)|^2 \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2 \\ &\leq C c(x) \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) \left| \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e) \varphi(e) \right|^2 &\leq C \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2 \\ &\leq C \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n)} r(e) |\varphi(e)|^2. \end{aligned}$$

Ce membre à droite tend vers 0 par les propriétés (3.1) et (3.2).

□

Nous présentons maintenant notre résultat pour les triangulations à l'aide de l'hypothèse de χ -complétude comme indiqué dans la définition 3.2.2.

Proposition 3.3.2 *Soit \mathcal{T} est une triangulation χ -complète alors l'opérateur $d^1 + \delta^1$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.*

Preuve:

On note d'abord, que

$$\text{Dom}(d_{max}^1) := \{\varphi \in l^2(\mathcal{E}), \widehat{d}^1 \phi \in l^2(\mathcal{F})\}$$

$$\text{Dom}(\delta_{max}^1) := \{\phi \in l^2(\mathcal{F}), \widehat{\delta}^1 \phi \in l^2(\mathcal{E})\}.$$

Il suffit de montrer que $d_{min}^1 = d_{max}^1$ et $\delta_{min}^1 = \delta_{max}^1$. En effet, $d^1 + \delta^1$ est une somme directe et si $F = (\varphi, \phi) \in \text{Dom}((d^1 + \delta^1)_{max})$ alors $\varphi \in \text{Dom}(d_{max}^1)$ et $\phi \in \text{Dom}(\delta_{max}^1)$. Par hypothèse, nous avons $\varphi \in \text{Dom}(d_{min}^1)$ et $\phi \in \text{Dom}(\delta_{min}^1)$ alors $F \in \text{Dom}((d^1 + \delta^1)_{min})$.

(a) Soit $\varphi \in \text{Dom}(d_{max}^1)$ alors il s'agit de prouver que

$$\|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} + \|d_{max}^1(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)\|_{l^2(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'après les propriétés (3.1) et (3.2), nous avons

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n_p, \forall n \geq n_p, \|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_n^c} r(e) |\varphi(e)|^2$$

Alors, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\| = 0.$$

En utilisant la formule de dérivation de \widehat{d}^1 dans la proposition 2.4.2, nous

avons

$$\begin{aligned}
d_{max}^1(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)(e, x) &= \widehat{d}^1 \left(\left(\widetilde{1 - \chi_n} \right) \varphi \right) (e, x) \\
&= \left(1 - \widetilde{\chi}_n \right) (e, x) \widehat{d}^1(\varphi)(e, x) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0(1 - \chi_n)(x, e^-) + d^0(1 - \chi_n)(x, e^+) \right) \varphi(e) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0(1 - \chi_n)(e) + d^0(1 - \chi_n)(e^-, x) \right) \varphi(e^+, x) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0(1 - \chi_n)(e^+, x) + d^0(1 - \chi_n)(-e) \right) \varphi(x, e^-) \\
&= \left(1 - \widetilde{\chi}_n \right) (e, x) \widehat{d}^1(\varphi)(e, x) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x) \right) \varphi(e) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0 \chi_n(-e) + d^0 \chi_n(x, e^-) \right) \varphi(e^+, x) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(d^0 \chi_n(x, e^+) + d^0 \chi_n(e) \right) \varphi(x, e^-).
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{d}^1 \varphi \in l^2(\mathcal{F})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(1 - \widetilde{\chi}_n \right) \widehat{d}^1 \varphi \right\|_{l^2(\mathcal{F})} = 0.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{(e,x) \in \mathcal{F}} s(e, x) |\varphi(e)|^2 |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}} |\varphi(e)|^2 \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) |d^0 \chi_n(e^-, x) + d^0 \chi_n(e^+, x)|^2 \right) \\
&\leq M \sum_{e \in \mathcal{E}^*(n)} r(e) |\varphi(e)|^2.
\end{aligned}$$

La propriété (3.8) permet de conclure que ce terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

En appliquant le même processus aux autres termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{(e,x) \in \mathcal{F}} s(e, x) |\varphi(e^+, x)|^2 |d^0 \chi_n(-e) + d^0 \chi_n(x, e^-)|^2 \\
&= \sum_{(e^+, x) \in \mathcal{E}} |\varphi(e^+, x)|^2 \sum_{y \in \mathcal{F}_{(e^+, x)}} s(e^+, x, y) |d^0 \chi_n(e^+, y) + d^0 \chi_n(x, y)|^2 \\
&\leq M \sum_{(e^+, x) \in \mathcal{E}^*(n)} r(e^+, x) |\varphi(e^+, x)|^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{(e,x) \in \mathcal{F}} s(e, x) |\varphi(x, e^-)|^2 |d^0 \chi_n(x, e^+) + d^0 \chi_n(e)|^2 \\
&= \sum_{(x, e^-) \in \mathcal{E}} |\varphi(x, e^-)|^2 \sum_{y \in \mathcal{F}_{(x, e^-)}} s(x, e^-, y) |d^0 \chi_n(x, y) + d^0 \chi_n(e^-, y)|^2 \\
&\leq M \sum_{(x, e^-) \in \mathcal{E}^*(n)} r(x, e^-) |\varphi(x, e^-)|^2.
\end{aligned}$$

(b) Soit $\phi \in \text{Dom}(\delta_{max}^1)$ alors il s'agit de prouver que

$$\|\phi - \widetilde{\chi}_n \phi\|_{l^2(\mathcal{F})} + \|\delta_{max}^1(\phi - \widetilde{\chi}_n \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'après les propriétés (3.3) et (3.4), on a

$$\begin{aligned} \|\phi - \widetilde{\chi}_n \phi\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 &= \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} s(x,y,z) |1 - \widetilde{\chi}_n(x,y,z)|^2 |\phi(x,y,z)|^2 \\ &\leq \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}_q^c} s(x,y,z) |\phi(x,y,z)|^2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de dérivation de $\widehat{\delta}^1$ dans la proposition 2.4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta_{max}^1(\phi - \widetilde{\chi}_n \phi)(e) &= \widehat{\delta}^1 \left(\widetilde{(1 - \chi_n)\phi} \right) (e) \\ &= (1 - \widetilde{\chi}_n)(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) \\ &\quad + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) d^0(1 - \chi_n)(e^-, x) \phi(e,x) \\ &\quad + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) d^0(1 - \chi_n)(e^+, x) \phi(e,x) \\ &= (1 - \widetilde{\chi}_n)(e) \widehat{\delta}^1(\phi)(e) \\ &\quad + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) d^0(\chi_n)(x, e^-) \phi(e,x) \\ &\quad + \frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) d^0(\chi_n)(x, e^+) \phi(e,x). \end{aligned}$$

D'abord, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \widetilde{\chi}_n) \widehat{\delta}^1(\phi)\| = 0$$

car $\delta^1 \phi \in l^2(\mathcal{E})$. Pour les deuxième et troisième termes, nous utilisons (\mathcal{C}_2) de la définition 3.2.2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On fixe $e \in \mathcal{E}$, alors

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) (d^0(\chi_n)(x, e^-) + d^0(\chi_n)(x, e^+)) \phi(e,x) \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e,x) |d^0(\chi_n)(x, e^-) + d^0(\chi_n)(x, e^+)|^2 \right) \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e^*(n)} s(e,x) |\phi(e,x)|^2 \right) \\ &\leq Mr(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e^*(n)} s(e,x) |\phi(e,x)|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \left| \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) (d^0(\chi_n)(x, e^-) + d^0(\chi_n)(x, e^+)) \phi(e, x) \right|^2$$

$$\leq M \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{x \in \mathcal{F}_e^*(n)} s(e, x) |\phi(e, x)|^2.$$

Par la propriété (3.9), ce terme tend vers 0 .

□

Théorème 3.3.1 *Soit \mathcal{T} une triangulation χ -complète alors l'opérateur de Gauß-Bonnet T est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.*

Preuve:

1^{er} étape: En premier lieu, nous prouvons

$$Dom(T_{min}) = Dom(d_{min}^0) \oplus (Dom(\delta_{min}^0) \cap Dom(d_{min}^1)) \oplus Dom(\delta_{min}^1).$$

D'après la proposition 2.5.1, il suffit de montrer l'autre inclusion. Soit $F = (f, \varphi, \phi) \in Dom(d_{min}^0) \oplus (Dom(\delta_{min}^0) \cap Dom(d_{min}^1)) \oplus Dom(\delta_{min}^1)$. Alors, il existe deux suites $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ et $(\phi_n)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$ tel que:

- $f_n \rightarrow f$ in $l^2(\mathcal{V})$ et $d^0 f_n \rightarrow d_{min}^0 f$ in $l^2(\mathcal{E})$.
- $\phi_n \rightarrow \phi$ in $l^2(\mathcal{F})$ et $\delta^1 \phi_n \rightarrow \delta_{min}^1 \phi$ in $l^2(\mathcal{E})$.

D'autre part, soit $\varphi \in Dom(\delta_{min}^0) \cap Dom(d_{min}^1)$. Par l'hypothèse de χ -complétude de \mathcal{T} , on peut considérer la suite $(\widetilde{\chi}_n \varphi)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$. Donc, il reste de montrer que

$$\|\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} + \|\delta_{min}^0(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)\|_{l^2(\mathcal{V})} + \|d_{min}^1(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)\|_{l^2(\mathcal{F})} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Le premier et le troisième termes ont été montrés dans la proposition 3.3.2. En utilisant la formule de dérivation de $\widehat{\delta}^0$ dans la proposition 2.4.1, nous avons

$$\delta_{min}^0(\varphi - \widetilde{\chi}_n \varphi)(x) = (1 - \chi_n)(x) \widehat{\delta}^0(\varphi)(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e) \varphi(e).$$

Par conséquent, comme $\delta_{min}^0 \varphi \in l^2(\mathcal{V})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \chi_n) \delta_{min}^0 \varphi\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

Pour le deuxième terme, on utilise la propriété *iii*) de la définition 3.2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Alors, pour tout $x \in \mathcal{V}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e) \varphi(e) \right|^2 &\leq \sum_{e, e^+ = x} r(e) |d^0 \chi_n(e)|^2 \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2 \\ &\leq Cc(x) \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{1}{c(x)} \left| \sum_{e, e^+ = x} r(e) d^0 \chi_n(e) \varphi(e) \right|^2 &\leq \sum_{x \in \mathcal{V}} C \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n), e^+ = x} r(e) |\varphi(e)|^2 \\ &\leq C \sum_{e \in \text{supp}(d^0 \chi_n)} r(e) |\varphi(e)|^2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

par les propriétés (3.1) et (3.2). Donc, nous avons

$$F_n \rightarrow F \text{ in } \mathcal{H}, \quad TF_n \rightarrow T_{\min} F \text{ in } \mathcal{H},$$

où $F_n = (f_n, \tilde{\chi}_n \varphi, \phi_n)$ et $T_{\min} F(f, \varphi, \phi) = (\delta_{\min}^0 \varphi, d_{\min}^0 f + \delta_{\min}^1 \phi, d_{\min}^1 \varphi)$. Alors $F \in \text{Dom}(T_{\min})$.

2^{eme} étape: Pour montrer que T est essentiellement auto-adjoint, il suffit de prouver que $\overline{T_{\max}} = T_{\min}$. D'après la première étape, il reste à montrer que:

$$\text{Dom}(T_{\max}) \subseteq \text{Dom}(d_{\max}^0) \oplus (\text{Dom}(\delta_{\max}^0) \cap \text{Dom}(d_{\max}^1)) \oplus \text{Dom}(\delta_{\max}^1).$$

En utilisant les deux propositions 3.3.1 et 3.3.2, nous avons

$$\delta_{\min}^0 = \delta_{\max}^0 \text{ et } \delta_{\min}^1 = \delta_{\max}^1.$$

De plus, soit $F = (f, \varphi, \phi) \in \text{Dom}(T_{\max})$ alors $TF \in \mathcal{H}$. Cela implique que $\delta^0 \varphi \in l^2(\mathcal{V})$, $d^0 f + \delta^1 \phi \in l^2(\mathcal{E})$ et $d^1 \varphi \in l^2(\mathcal{F})$. Par conséquent, la définition de δ_{\max}^0 et d_{\max}^1 donne que $\varphi \in \text{Dom}(\delta_{\max}^0) \cap \text{Dom}(d_{\max}^1)$. De plus, par l'hypothèse de χ -complétude de \mathcal{T} , il existe une suite de fonctions de coupure $(\chi_n)_n \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$. En utilisant l'identité du parallélogramme et le lemme 2.4.5 nous obtenons

$$\|d^0(\chi_n f) + \delta^1(\tilde{\chi}_n \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \|d^0(\chi_n f)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 + \|\delta^1(\tilde{\chi}_n \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2.$$

Maintenant, Il reste à prouver que $d^0(\chi_n f) + \delta^1(\tilde{\chi}_n \phi)$ converge dans $l^2(\mathcal{E})$. En effet, nous avons besoin de quelques formules prises à la proposition 2.4.2 et le lemme 2.4.1 pour donner:

$$d^0(\chi_n f) = \tilde{\chi}_n \hat{d}^0(f) + \tilde{f} d^0(\chi_n).$$

$$\begin{aligned} \hat{d}^1(\tilde{\chi}_n \phi)(e) &= \tilde{\chi}_n(e) \hat{d}^1(\phi)(e) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{6r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e} s(e, x) [d^0(\chi_n)(e^-, x) + d^0(\chi_n)(e^+, x)] \phi(e, x)}_{\mathcal{I}_n(e)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|d_{max}^0(f - \chi_n f) + \delta_{max}^1(\phi - \widetilde{\chi}_n \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \|(1 - \widetilde{\chi}_n)(\widehat{d}^0 f + \widehat{\delta}^1 \phi) + \widetilde{f} d^0 \chi_n + \mathcal{I}_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \\ &\leq 3\|(1 - \widetilde{\chi}_n)(\widehat{d}^0 f + \widehat{\delta}^1 \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \\ &\quad + 3\left(\|\widetilde{f} d^0 \chi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 + \|\mathcal{I}_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2\right). \end{aligned}$$

Comme $\widehat{d}^0 f + \widehat{\delta}^1 \phi \in l^2(\mathcal{E})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \widetilde{\chi}_n)(\widehat{d}^0 f + \widehat{\delta}^1 \phi)\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = 0.$$

En utilisant la proposition 3.3.2, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{I}_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = 0.$$

De plus, par l'hypothèse *iii*) de la définition 3.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f} d^0 \chi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) |\widetilde{f}(e) d^0(\chi_n)(e)|^2 \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) |f(e^+)|^2 |d^0(\chi_n)(e)|^2 \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} |f(x)|^2 \sum_{e, e^+ = x} |r(e) d^0 \chi_n(e)|^2 \\ &\leq C \sum_{x \in \mathcal{V}_n} c(x) |f(x)|^2 \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}_n := \{x \in \mathcal{V}, \exists e \in \text{supp}(d^0 \chi_n) \text{ tel que } e^+ = x\}$. Ce terme tend vers 0 par la propriété (3.3).

□

Théorème 3.3.2 *Soit \mathcal{T} une triangulation χ -complète. Alors T est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$ si et seulement si \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.*

Preuve:

⇐) D'abord, notons que si le graphe est localement fini donc

$$\text{Dom}(T \pm i)\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}).$$

Alors, remarquons

$$\mathcal{L} + 1 = (T + i)(T - i) = (T - i)(T + i) \Rightarrow \text{Im}(\mathcal{L} + 1) \subseteq \text{Im}(T \pm i).$$

Mais \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint alors par le corollaire du théorème VIII.3 dans [38], $Im(\mathcal{L} + 1)$ est dense. Donc $Im(T \pm i)$ sont dense et T est essentiellement auto-adjoint.

\Rightarrow) Supposons que T est essentiellement auto-adjoint. D'après le théorème von Neumann (Théorème X.25 dans [37]), et comme T est fermable, on en déduit que $T^*T_{min} = T_{min}^*T_{min} = (T_{min})^2$, $(T_{min})^2$ est une extension de Friedrich de \mathcal{L}_{min} et il est auto-adjoint sur $Dom((T_{min})^2)$, donné par:

$$Dom((T_{min})^2) = \{F \in Dom(T_{min}), TF \in Dom(T^*)\}.$$

Nous concluons également que le domaine de $(T_{min})^2$ contient le domaine de \mathcal{L}_{min} . En utilisant le fait que $(T_{min})^2$ est auto-adjoint et que \mathcal{L} est fermable, on en déduit l'équivalence suivante:

$$\begin{aligned} Dom(\mathcal{L}_{min}) \subseteq Dom((T_{min})^2) &\Leftrightarrow Dom(((T_{min})^2)^*) \subseteq Dom((\mathcal{L}_{min})^*) \\ &\Leftrightarrow Dom((T_{min})^2) \subseteq Dom(\mathcal{L}^*). \end{aligned}$$

Donc, il reste à montrer que $Dom(\mathcal{L}^*) \subseteq Dom((T_{min})^2)$. Soit $F \in Dom(\mathcal{L}^*)$ alors

$$\exists C_F > 0, \forall \Psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}), |\langle (\mathcal{L} + 1)\Psi, F \rangle_{\mathcal{H}}| \leq C_F \|\Psi\|_{\mathcal{H}}.$$

On note que

$$T(\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F}).$$

Soit $\Phi \in Im(T + i)$ alors $\Psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$ tel que $\Phi = (T + i)\Psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$. Comme $(T_{min} \pm i)$ sont inversibles, alors

$$\exists \eta > 0, \forall \Psi \in Dom(T_{min}), \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq \eta \|(T_{min} \pm i)\Psi\|_{\mathcal{H}}.$$

D'où, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\Phi \in Im(T + i)$

$$\begin{aligned} |\langle (T - i)\Phi, F \rangle_{\mathcal{H}}| &= |\langle (\mathcal{L} + 1)\Psi, F \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq C_F \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C \|\Phi\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Comme $Im(T + i)$ est dense, alors l'inégalité (3.11) est satisfaite sur \mathcal{H} ou bien $(T + i)F \in \mathcal{H}$. Puisque T_{min} est auto-adjoint donc $F \in Dom(T_{min})$.

D'autre part, nous avons

$$|\langle T\Psi, TF \rangle_{\mathcal{H}}| = |\langle \mathcal{L}\Psi, F \rangle_{\mathcal{H}}| \leq (C_F + \|F\|_{\mathcal{H}}) \|\Psi\|_{\mathcal{H}},$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$. Alors, $TF \in Dom(T_{min})$, car T_{min} est auto-adjoint. Par conséquent $\mathcal{L}_{min} = (T_{min})^2$ est auto-adjoint sur $Dom((T_{min})^2)$.

□

Corollaire 3.3.1 *Soit \mathcal{T} une triangulation χ -complète alors \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.*

3.4 Exemples

3.4.1 Triangulation d'une 1-décomposition de graphe

Les résultats dans cette partie sont inspirés de [4] et [6].

Définition 3.4.1 (1-décomposition de graphe) *Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe et O un sommet de \mathcal{V} . La 1-décomposition de graphe \mathcal{K} est une famille d'ensembles finis $(\mathbb{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui forme une partition de \mathcal{V} telle que $\mathbb{S}_0 = \{O\}$ et pour tout $x \in \mathbb{S}_n, y \in \mathbb{S}_m$, nous avons*

$$(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow |n - m| \leq 1.$$

Exemple 3.4.1 *Nous citons la 1-décomposition des graphes très connus:*

- **Arbre d'origine O** : On considère $\mathbb{S}_n := \{x \in \mathcal{V}, d_{\text{comb}}(O, x) = n\}$.
- **Graphe complet d'origine O** : On considère $\mathbb{S}_0 = \{O\}$ et $\mathbb{S}_1 = \mathcal{V} \setminus \{O\}$.

Définition 3.4.2 *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation. On dit que \mathcal{T} est une triangulation d'une 1-décomposition de graphe, si \mathcal{K} admet une 1-décomposition de graphe.*

Exemple 3.4.2 • **Arbre triangulaire d'origine O** : On considère

$$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathcal{V}, d_{\text{comb}}(O, x) = n\}.$$

Considérons une triangulation d'une 1-décomposition de graphe, nous désignons par $B_n := \cup_{i=0}^n \mathbb{S}_i$. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} \deg_{\mathbb{S}_n}^{\pm}(x) := \frac{1}{c(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n \pm 1}} r(x, y) & \text{pour tout } x \in \mathbb{S}_n, \\ \deg_{\mathbb{S}_n}^0(x) := \frac{1}{c(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_n} r(x, y) & \text{pour tout } x \in \mathbb{S}_n, \\ \deg_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}}(e) := \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap (\mathbb{S}_n \cup \mathbb{S}_{n+1})} s(e, x) & \text{pour tout } e \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}, \\ \deg_{\mathbb{S}_n^2}^0(e) := \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_n} s(e, x) & \text{pour tout } e \in \mathbb{S}_n^2, \\ \deg_{\mathbb{S}_n^2}^{\pm}(e) := \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_{n \pm 1}} s(e, x) & \text{pour tout } e \in \mathbb{S}_n^2. \end{array} \right.$$

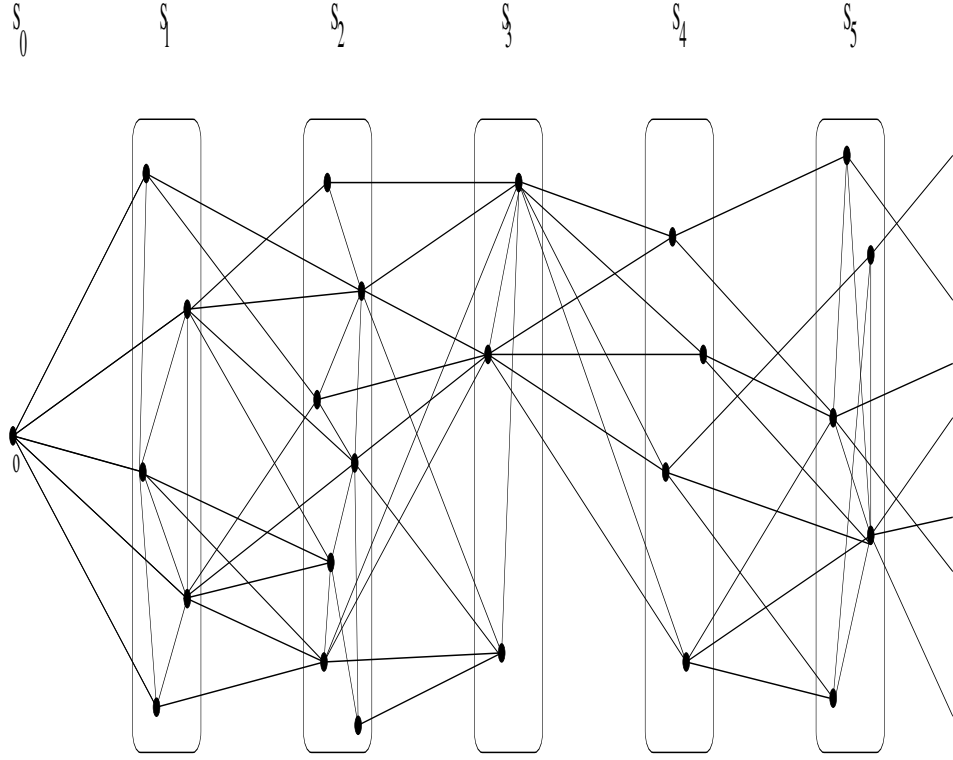


Figure 3.4: Triangulation d'une 1-décomposition de graphe

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\eta_n^\pm := \sup_{x \in \mathbb{S}_n} \deg_{\mathbb{S}_n}^\pm(x), \quad \beta_n := \sup_{e \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}} \deg_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}}(e), \quad \gamma_n^\pm := \sup_{e \in \mathbb{S}_n^2} \deg_{\mathbb{S}_n^2}^\pm(e).$$

et

$$\xi(n, n+1) = \eta_n^+ + \eta_{n+1}^- + \beta_n + \gamma_n^+ + \gamma_{n+1}^-.$$

Théorème 3.4.1 Soient $\mathcal{T} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ une triangulation et $(\mathbb{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une 1-décomposition de graphe \mathcal{K} . On suppose que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{\xi(n, n+1)}} = \infty,$$

alors \mathcal{T} est une triangulation χ -complète et par conséquent, \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Preuve:

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction de coupure χ_n définie par:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{\text{comb}}(o, x) \leq n, \\ \max \left(0, 1 - \sum_{k=n}^{d_{\text{comb}}(o, x)-1} \frac{1}{\sqrt{\xi(k, k+1)}} \right) & \text{si } d_{\text{comb}}(o, x) > n. \end{cases}$$

Comme la série diverge, la fonction χ_n est à support fini. Notons que χ_n égale 1 sur \mathbb{S}_n . Si $x \in \mathbb{S}_m$ avec $m > n$, nous avons

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{m+1}} r(x, y) |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 \leq \frac{\deg_{\mathbb{S}_m}^+(x)}{\xi(m, m+1)} \leq 1.$$

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_m} r(x, y) |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 = 0.$$

$$\frac{1}{c(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{m-1}} r(x, y) |\chi_n(x) - \chi_n(y)|^2 \leq \frac{\deg_{\mathbb{S}_m}^-(x)}{\xi(m-1, m)} \leq 1.$$

Donc \mathcal{K} est un graphe χ -complet. D'autre part, nous avons

- Si $e \in \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_{m+1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap (\mathbb{S}_m \cup \mathbb{S}_{m+1})} s(e, x) |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \\ & \leq \frac{\deg_{\mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_{m+1}}^+(x, y)}{\xi(m, m+1)} \leq 1. \end{aligned}$$

- Si $e \in \mathbb{S}_m^2$, nous obtenons

$$\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_m} s(e, x) |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 = 0$$

$$\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_{m+1}} s(e, x) |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \leq \frac{\deg_{\mathbb{S}_m^2}^+(e)}{\xi(m, m+1)} \leq 1.$$

$$\frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_{m-1}} s(e, x) |2\chi_n(x) - \chi_n(e^-) - \chi_n(e^+)|^2 \leq \frac{\deg_{\mathbb{S}_m^2}^-(e)}{\xi(m-1, m)} \leq 1.$$

Alors, la triangulation \mathcal{T} est χ -complète et d'après la corollaire 3.3.1 \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

□

3.4.2 Arbre triangulaire

Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire d'origine O . En raison de sa structure, nous avons les conditions suivantes satisfaites:

$$(**) \left\{ \begin{array}{ll} \deg_{\mathbb{S}_n}^-(x) := \frac{1}{c(x)} r(x, \overleftarrow{x}) & \text{pour tout } x \in \mathbb{S}_n, \\ \deg_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}}(e) := \frac{1}{r(e)} \sum_{x \in \mathcal{F}_e \cap \mathbb{S}_{n+1}} s(e, x) & \text{pour tout } e \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}, \\ \deg_{\mathbb{S}_n^2}^-(e) := \frac{1}{r(e)} s(e, \overleftarrow{e}) & \text{pour tout } e \in \mathbb{S}_n^2, \end{array} \right.$$

où \overleftarrow{e} est l'unique sommet dans $\mathbb{S}_{n-1} \cap \mathcal{F}_e$.

La fonction ξ devient comme suit:

$$\xi(n, n+1) = \eta_n^+ + \eta_{n+1}^- + \beta_n + \gamma_{n+1}^-.$$

Proposition 3.4.1 *Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire d'origine O . On suppose que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{\xi(n, n+1)}} = \infty,$$

alors \mathbb{T} est χ -complète et par conséquent, \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Preuve:

En utilisant la même méthode que le théorème 3.4.1 avec l'ensemble de conditions (**).

□

3.4.3 Le caractère essentiellement auto-adjoint sur le cas simple

Dans [25] et [41], les auteurs prouvent que \mathcal{L}_0 est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{V})$ dès que le graphe est simple. Mais, le caractère essentiellement auto-adjoint n'est pas toujours satisfait avec d'autres opérateurs dans le cas simple. Nous rappelons que l'opérateur \mathcal{L}_1^- n'est pas essentiellement auto-adjoint sur un cas d'arbre simple, voir [4]. De plus, on se réfère à [21] pour la matrice d'adjacence $\mathcal{A}_{\mathcal{K}} = \text{deg} - \mathcal{L}_0$ où deg désigne l'opérateur de multiplication avec les fonctions qui montre que les indices de déficience de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ sont infinis.

Le résultat suivant est inspiré de [4]. Il montre que \mathcal{L}_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint sur un arbre triangulaire simple.

Proposition 3.4.2 *Soit \mathbb{T} un arbre triangulaire simple. On suppose que*

$$\text{off}(n) = |\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n+1}|, \quad x \in \mathbb{S}_n. \quad (3.12)$$

$$n \mapsto \frac{\text{off}^2(n)}{\text{off}(n+1)} \in l^1(\mathbb{N}). \quad (3.13)$$

Alors, \mathcal{L}_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ et les indices de déficience sont infinis.

Preuve:

Nous construisons $\varphi \in l^2(\mathcal{E}) \setminus \{0\}$, tel que $\varphi \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1^* + i)$ et tel que φ soit constante égale à C_n sur $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}$. Il prend la valeur 0 sur \mathbb{S}_n^2 . Si $(x, y) \in \mathbb{S}_n^2$, nous obtenons que

$$C_n (|\mathcal{V}(x) \cap \mathbb{S}_{n+1}| - |\mathcal{V}(y) \cap \mathbb{S}_{n+1}|) = 0,$$

grâce à la condition (3.12). Prenons $(x, y) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}$, avec l'hypothèse (3.12), on doit vérifier la récurrence

$$(\text{off}(n) + 1 + i)C_n - \text{off}(n + 1)C_{n+1} - C_{n-1} = 0. \quad (3.14)$$

En utilisant l'équation (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f_{|\mathbb{S}_{n+1} \times \mathbb{S}_{n+2}}\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &= |C_{n+1}|^2 \prod_{k=0}^{n+1} \text{off}(k) \\ &\leq 2 \frac{|\text{off}(n) + 1 - i|^2}{\text{off}^2(n + 1)} \prod_{k=0}^{n+1} |C_n|^2 + \frac{2}{\text{off}^2(n + 1)} \prod_{k=0}^{n+1} |C_{n-1}|^2 \\ &= 2 \frac{|\text{off}(n) + 1 - i|^2}{\text{off}(n + 1)} \|f_{|\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}}\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 + \frac{2\text{off}(n)}{\text{off}(n + 1)} \|f_{|\mathbb{S}_{n-1} \times \mathbb{S}_n}\|_{l^2(\mathcal{V})}^2. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\text{off}^2(n)}{\text{off}(n + 1)}$ tend vers 0 quand n va à l'infini, on obtient par induction:

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_{|\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1}}\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 < \infty.$$

Alors, nous avons

$$\|f_{|\mathbb{S}_{n+1} \times \mathbb{S}_{n+2}}\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 \leq 2C \left(\frac{|\text{off}(n) + 1 - i|^2}{\text{off}(n + 1)} + \frac{\text{off}(n)}{\text{off}(n + 1)} \right).$$

En utilisant l'hypothèse (3.13), nous concluons que $f \in l^2(\mathcal{V})$ et $\dim \ker(\mathcal{L}_1^* + i) \geq 1$. D'après la preuve du théorème X.36 dans [37], nous avons que \mathcal{L}_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Enfin, en découpant la triangulation assez grande, nous reproduisons la même démonstration avec un nombre arbitraire d'arbres triangulaires identiques et dis-joints. Alors, on voit que $\dim \text{Ker}(\mathcal{L}_1^* + i) = \infty$.

□

Remarque 3.4.1 Pour la matrice d'adjacence, nous pouvons construire un exemple d'un graphe simple où les indices de déficience sont égaux à 1, voir [21]. Le cas de \mathcal{L}_1 est plus compliqué et trouver un exemple où les indices de déficience sont finis reste une question ouverte.

Nous verrons maintenant aussi que \mathcal{L}_2 n'est pas nécessairement essentiellement auto-adjoint sur une triangulation simple. C'est la première fois qu'on étudie le *book-like* pour ce type de question.

Définition 3.4.3 Une triangulation d'une 1-décomposition de graphe est dite de type livre ou "book-like", s'il existe une suite d'arête $(e_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont satisfaites:

- (i) $\mathbb{S}_0 = \{O\}$ et $\mathbb{S}_{2n+1} = \{e_{2n+1}\}$.
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{S}_{2n+2} \Rightarrow (x, y) \notin \mathcal{E}$.
- (iii) $\mathcal{F} = (\mathbb{S}_{2n+1}^2 \times \mathbb{S}_{2n}) \cup (\mathbb{S}_{2n+1}^2 \times \mathbb{S}_{2n+2})$.

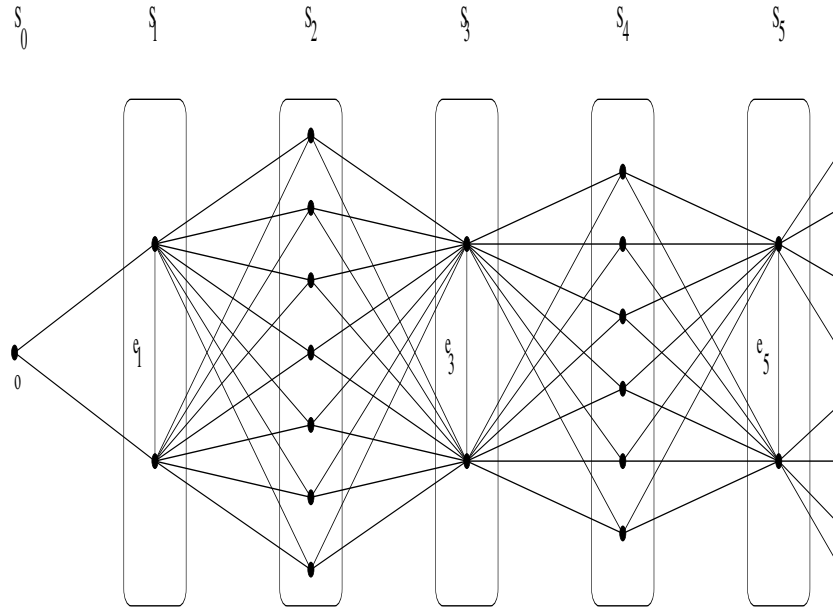


Figure 3.5: Triangulation de type livre

Proposition 3.4.3 Soit \mathcal{T} une triangulation simple de type livre, comme l'indique la figure 3.4. Supposons que

$$n \mapsto \frac{|\mathbb{S}_{2n}|}{|\mathbb{S}_{2(n+1)}|} \in l^1(\mathbb{N}). \quad (3.15)$$

Alors, \mathcal{L}_2 n'est pas essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

Preuve:

Soit $\phi \in l^2(\mathcal{F}) \setminus \{0\}$ tel que $\phi \in \text{Ker}(\mathcal{L}_2^* + i)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$\phi(e_{2n+1}, x) := \begin{cases} C_{2n+2} & \text{pour tout } x \in \mathbb{S}_{2n+2}. \\ C_{2n} & \text{pour tout } x \in \mathbb{S}_{2n}. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{S}_{2n+2}$, nous avons que

$$\begin{aligned} 0 = (L_2^* + i)(\phi)(e_{2n+1}, x) &= \sum_{u \in \mathcal{F}_{e_{2n+1}}} \phi(e_{2n+1}, u) + \sum_{u \in \mathcal{F}_{(e_{2n+1}^+, x)}} \phi(e_{2n+1}^+, x, u) \\ &+ \sum_{u \in \mathcal{F}_{(x, e_{2n+1}^-)}} \phi(x, e_{2n+1}^-, u) + i\phi(e_{2n+1}, x). \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons que

$$(|\mathbb{S}_{2n+2}| + 2 + i) C_{2n+2} + (|\mathbb{S}_{2n}|) C_{2n} = 0. \quad (3.16)$$

D'après l'équation (3.16), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \|\phi_{|\mathbb{S}_{2n+1}^2 \times \mathbb{S}_{2n+2}}\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 &= \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{S}_{2n+1}^2 \times \mathbb{S}_{2n+2}} |\phi(x, y, z)|^2 \\ &= \frac{1}{6} (|C_{2n+2}|)^2 (|\mathbb{S}_{2n+2}|) \\ &= \frac{1}{6} \frac{|C_{2n}|^2 |\mathbb{S}_{2n}|^2}{|\mathbb{S}_{2n+2}| + 2 + i|^2} (|\mathbb{S}_{2n+2}|) \\ &= \frac{|\mathbb{S}_{2n}| |\mathbb{S}_{2n+2}|}{|\mathbb{S}_{2n+2}| + 2 + i|^2} \|\phi_{|\mathbb{S}_{2n-1}^2 \times \mathbb{S}_{2n}}\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{S}_{2n}|}{|\mathbb{S}_{2(n+1)}|} = 0$, nous obtenons par induction

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|\phi_{|\mathbb{S}_{2n-1}^2 \times \mathbb{S}_{2n}}\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 < \infty.$$

Alors, nous avons que

$$\|\phi_{|\mathbb{S}_{2n+1}^2 \times \mathbb{S}_{2n+2}}\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 \leq C \frac{|\mathbb{S}_{2n}| |\mathbb{S}_{2n+2}|}{|\mathbb{S}_{2n+2}| + 2 + i|^2}.$$

À travers (3.15), nous concluons que $\phi \in l^2(\mathcal{F})$. En utilisant la preuve du théorème X.36 dans [37], on montre que $\dim \text{Ker}(L_2^* + i) \geq 1$ et par suite que \mathcal{L}_2 n'est pas essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{F})$.

□

Remarque 3.4.2 D'après les propositions 3.4.2 et 3.4.3, Nous concluons que notre Laplacien \mathcal{L} n'est pas toujours essentiellement auto-adjoint sur une simple triangulation.

Trou spectral des triangulations

Ce chapitre porte sur l'étude du trou spectral de notre Laplacien discret sur une triangulation, voir [8]. Cet élément spectral est lié à la géométrie de la triangulation qui permet alors d'estimer cette quantité. Plus précisément, nous présentons une estimation du trou spectral dans le cas d'une triangulation d'un graphe complet à l'aide de la généralisation de la constante de Cheeger qui s'inspire de [35].

4.1 Théorie spectrale

Soit A un endomorphisme de \mathbb{C}^n . On dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre de A , si l'opérateur $\lambda I - A$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs propres de A , appelé *spectre* de A et noté par $\sigma(A)$. Le spectre de A est constitué par les racines du polynôme $\det(\lambda I - A)$ qui est de degré n .

Proposition 4.1.1 *Si A est un opérateur auto-adjoint, alors $\sigma(A) \in \mathbb{R}$.*

4.1.1 Spectre des graphes

Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré, connexe et fini. On note $N := \#\mathcal{V}$ le nombre de sommets de \mathcal{K} . Le spectre du Laplacien \mathcal{L}_0 est donc composé de N valeurs propres réelles $\{\lambda_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$ rangées par ordre croissant:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}.$$

Pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$, on note f_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i de telle manière que la famille $\{f_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$ soit orthonormée.

Dans certains exemples de graphe simple et connexe, on peut calculer les valeurs propres du Laplacien \mathcal{L}_0 . Nous référons ici à [12] et [22] qu'on leur rappelle les deux exemples suivants:

Exemple 4.1.1 Prenons \mathcal{K}_N un graphe complet simple. Soit l'ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ et on considère la suite de fonctions $(f_k)_{1 \leq k \leq N-1}$ suivantes:

$$f_k(i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ -1, & i = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, on a

$$\mathcal{L}_0 f_k(i) = (N - 1)f_k(i) - \sum_{j \neq i} f_k(j).$$

Par conséquent, nous avons

- Si $i = 0$ alors $f_k(0) = 1$ et $\mathcal{L}_0 f_k(0) = N$.
- Si $i = k$ alors $f_k(k) = -1$ et $\mathcal{L}_0 f_k(k) = -N$.
- Si $i \neq 0, k$ alors $f_k(i) = 0$ et $\mathcal{L}_0 f_k(i) = 0 = N f_k(i)$.

Alors, $\mathcal{L}_0 f_k = N f_k$ et N est la valeur propre de multiplicité $(N - 1)$:

$$\sigma(\mathcal{L}_0) = \{0, \underbrace{N}_{\text{de multiplicité } (N-1)}\}.$$

Exemple 4.1.2 Notre but est de calculer les valeurs propres du \mathcal{L}_0 sur le graphe cyclique simple \mathcal{C}_m . D'abord, nous rappelons que $\mathcal{C}_m = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m - 1\}$. L'opérateur de Markov est donné par:

$$\mathcal{P}f(k) := 2f(k) - \mathcal{L}_0 f(k) = f(k + 1) + f(k - 1).$$

Soit α une valeur propre de \mathcal{P} , donc il existe une fonction non nulle f telle que $\mathcal{P}f(k) = \alpha f(k)$. Alors, nous avons l'équation différentielle sur \mathbb{Z} suivante:

$$f(k + 1) - \alpha f(k) + f(k - 1) = 0. \tag{4.1}$$

D'abord, on remarque que:

- La constante $\alpha = 2$ est toujours une valeur propre de \mathcal{P} .
- La constante $\alpha = -2$ une valeur propre de \mathcal{P} si et seulement si \mathcal{C}_m est un graphe biparti si et seulement si m est paire.

Ensuite, prenons $\alpha \in]-2, 2[$ et on suppose que la solution de l'équation (4.1) est de la forme $f(k) = r^k$, où r est un réel donné. Alors, nous avons

$$r^2 - \alpha r + 1 = 0.$$

Les solutions sont:

$$r = \frac{\alpha}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = e^{\pm i\theta}.$$

où $\theta \in]0, \pi[$ donné par:

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Par conséquent, nous obtenons deux solutions indépendants de l'équation (4.1):

$$f_1(k) = e^{ik\theta} \text{ et } f_2(k) = e^{-ik\theta}.$$

En utilisant la formule d'Euler, nous arrivons aux les solutions réelles suivantes:

$$f_1(k) = \cos(k\theta) \text{ et } f_2(k) = \sin(k\theta). \tag{4.2}$$

De plus, la fonction f est m -periodique sur \mathbb{Z} . Alors, on considère f comme une fonction sur \mathbb{Z}_m :

$$f(k + m) = f(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions (4.2) sont m -peridiques, alors, $m\theta$ est multiple de 2π :

$$\theta = \frac{2\pi l}{m}, \text{ pour tout } l \in \mathbb{Z}.$$

La restriction $\theta \in]0, \pi[$ est équivalent à $l \in]0, \frac{m}{2}[$. Pour l dans ce intervalle, nous obtenons une valeur propre double $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{m}\right)$ de \mathcal{P} .

On en déduit le résultat suivant:

Proposition 4.1.2 Les valeurs propres de l'opérateur de Markov \mathcal{P} sur le graphe cyclique \mathcal{C}_m sont:

- Si m impaire alors les valeurs propres sont $\alpha = 2$ (simple) et $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{m}\right)$ de multiplicité 2 pour tout $l = 1, \dots, \frac{m-1}{2}$.

- Si m paire alors les valeurs propres sont $\alpha = \pm 2$ (simple) et $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{m}\right)$ de multiplicité 2 pour tout $l = 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$.

Remarque 4.1.1 Le Laplacien \mathcal{L}_0 est donné par $\mathcal{L}_0 = 2I - \mathcal{P}$. Alors, on en déduit que les valeurs propres de \mathcal{L}_0 sont de la forme $2 - \alpha$, où α une valeur propre de \mathcal{P} . En outre, les fonctions propres de \mathcal{P} et \mathcal{L}_0 sont les mêmes. De plus, comme $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq [-2, 2]$ alors $\sigma(\mathcal{L}_0) \subseteq [0, 4]$.

On rappelle la caractérisation variationnelle des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint, voir [38].

Proposition 4.1.3 (Principe du Min-Max) Soit A un opérateur auto-adjoint et $\{\lambda_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ l'ensemble de ses valeurs propres rangées par ordre croissant et $\{f_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ une famille orthonormée de vecteurs propres associés. Alors, nous avons

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \lambda_i = \inf_{f \perp \text{Vect}(f_0, \dots, f_{i-1})} \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

Le rapport $\frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$ est appelé quotient de Rayleigh de A en f .

Le trou spectral ou gap de \mathcal{K} , noté $\lambda_1(\mathcal{K})$ est défini par $\lambda_1(\mathcal{K}) := \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_1$. En utilisant la proposition 4.1.3, on en déduit une caractérisation de $\lambda_1(\mathcal{K})$:

$$\lambda_1(\mathcal{K}) = \inf_{f \perp 1} \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}.$$

4.1.2 Inégalité de Cheeger

Dans les années 70, J. Cheeger a introduit une constante métrique $h(\mathcal{X}, g)$ attachée à une variété Riemannienne compacte connexe (\mathcal{X}, g) et qui est définie de la façon suivante (voir [12]):

$$h(\mathcal{X}, g) := \inf_{\text{vol}(D) \leq \frac{\text{vol}(\mathcal{X})}{2}} \frac{\text{vol}(\partial D)}{\text{vol}(D)}$$

où la borne inf est prise sur les domaines réguliers $D \subset \mathcal{X}$ et les volumes sont calculés à l'aide de la métrique Riemannienne g . Cette constante donne une estimation de la première valeur propre non nulle du Laplacien, voir [5].

Définition 4.1.1 Soit \mathcal{A} un sous-ensemble fini de \mathcal{V} . Le bord $\partial_{\mathcal{E}} \mathcal{A}$ est l'ensemble des arêtes issues de \mathcal{A} et dont l'extrémité n'est pas dans \mathcal{A} .

La constante de Cheeger d'un graphe $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ à N sommets est définie comme suit (voir [12]):

$$h(\mathcal{K}) = \min_{0 < |\mathcal{A}| \leq \frac{N}{2}} \frac{|\partial_{\mathcal{E}} \mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}.$$

où \mathcal{A} est un sous-ensemble de \mathcal{V} .

Une autre constante, appelée encore la constante de Cheeger, donnée par:

$$\omega(\mathcal{K}) := \min_{0 < |\mathcal{A}| < N} \frac{N|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}||\mathcal{A}^c|}.$$

où \mathcal{A}^c est le complémentaire de \mathcal{A} dans \mathcal{V} .

Ces deux constantes de Cheeger sont équivalentes dans le sens où:

$$h(\mathcal{K}) \leq \omega(\mathcal{K}) \leq 2h(\mathcal{K}).$$

En fait, soit \mathcal{A} une partie de \mathcal{V} telle que $|\mathcal{V}| = N$ et $0 < |\mathcal{A}| \leq \frac{N}{2}$, nous avons

$$\frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} \leq \frac{N|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}||\mathcal{A}^c|} = \frac{(|\mathcal{A}| + |\mathcal{A}^c|)|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}||\mathcal{A}^c|} \leq 2\frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}.$$

On définit maintenant la constante de Cheeger pour un graphe infini ou un graphe à bord (voir [12]):

Définition 4.1.2 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}_0, \mathcal{E})$ un graphe de bord \mathcal{V}_0 (i.e \mathcal{V}_0 est un sous-ensemble de \mathcal{V}).

La constante de Cheeger associée au graphe \mathcal{K} est définie comme suit:

$$h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0) := \inf \frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}$$

où le inf porte sur les parties finies de \mathcal{V} ne rencontrant pas \mathcal{V}_0 .

Nous donnons maintenant le lien entre certaines propriétés géométriques pour les graphes finis et le trou spectral $\lambda_1(\mathcal{K})$. On peut estimer cette valeur propre de \mathcal{L}_0 à l'aide de la constante de Cheeger $h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0)$. Nous avons aussi une estimation pour λ_0 dans le cas d'un graphe infini. La remarque de base est que le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique d'un ensemble de sommets \mathcal{A} est exactement $\frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}$.

Laplacien de Dirichlet: Soit S un sous-ensemble de \mathcal{V} . Une fonction réelle $f : S \cup \partial_{\mathcal{V}}S \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions aux bords de Dirichlet si

$$f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \partial_{\mathcal{V}}S \quad (4.3)$$

Pour $f : S \cup \partial_{\mathcal{V}}S \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (4.3), on définit $\tilde{f} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement de f à \mathcal{V} tout entier en posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \notin S \cup \partial_{\mathcal{V}}S$. Le Laplacien de Dirichlet \mathcal{L}_0^D est alors défini par

$$\mathcal{L}_0^D \tilde{f}(x) = \begin{cases} \mathcal{L}_0 f(x) & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Théorème 4.1.1 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}_0, \mathcal{E})$ un graphe de bord \mathcal{V}_0 tel que $k := \max_{x \in \mathcal{V}} |\mathcal{V}(x)|$. Si λ_0 est

la plus petite valeur propre de \mathcal{L}_0 avec conditions de Dirichlet au bord, on a

$$\frac{h^2(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0)}{2k} \leq \lambda_0 \leq h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0).$$

Si \mathcal{K} est un graphe fini, on a $\lambda_0 = 0$ et

$$\frac{h^2(\mathcal{K})}{2k} \leq \lambda_1(\mathcal{K}) \leq 2h(\mathcal{K}).$$

Preuve:

Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de \mathcal{V} ne rencontrant pas \mathcal{V}_0 . Pour majorer λ_0 , on calcule le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique de \mathcal{A} , il vaut $\frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}$. Alors, on en déduit que:

$$\lambda_0 \leq \frac{|\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|}.$$

Pour minorer λ_0 , on prend f à valeurs réelles et à support fini disjoint de \mathcal{V}_0 . On évalue alors

$$S = \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} |f^2(x) - f^2(y)|.$$

Par Cauchy-Schwarz, on a:

$$S \leq \sqrt{2k} \|d^0 f\|_{l^2(\mathcal{E})} \|f\|_{l^2(\mathcal{V})},$$

Pour minorer S , on considère les valeurs $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r$ prises par f^2 et les ensembles $\mathcal{A}_l = \{x \in \mathcal{V}, f^2(x) \geq a_l\}$. On a

$$S = \sum (f^2(x) - f^2(y)),$$

où la somme porte sur les arêtes (x, y) orientées de façon que $f^2(x) - f^2(y) \geq 0$. On peut récrire cette somme sous la forme $S = \sum (a_l - a_{l-1})$, où le nombre de répétitions de $a_l - a_{l-1}$ est égale au nombre d'arêtes (x, y) telles que $f^2(x) \geq a_l$ et $f^2(y) \leq a_{l-1}$, donc $(x, y) \in \partial_{\mathcal{E}}\mathcal{A}_l$. En utilisant la définition de $h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0)$, il vient que:

$$S \geq h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0) \sum_{l=1}^r (a_l - a_{l-1}) |\mathcal{A}_l|,$$

qui est égale à $h(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0) \sum_k f^2(x)$. On peut en conclure que

$$\frac{\|d^0 f\|_{l^2(\mathcal{E})}^2}{\|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2} \geq \frac{h^2(\mathcal{K}, \mathcal{V}_0)}{2k}$$

et la minoration de λ_0 .

D'autre part, pour la majoration de λ_1 dans le cas d'un graphe fini, on fabrique une fonction d'intégrale nulle de la façon suivante: si $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une partition de \mathcal{V} avec $|\mathcal{A}| = a \leq |\mathcal{B}| = b$, on prend $f = b$ sur \mathcal{A} et $-a$ sur \mathcal{B} . On a le quotient de Rayleigh:

$$\frac{\langle \mathcal{L}_0 f, f \rangle_{l^2(\mathcal{V})}}{\|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2} = \frac{\|d^0 f\|_{l^2(\mathcal{E})}^2}{\|f\|_{l^2(\mathcal{V})}^2} = \frac{(a+b)^2 |\partial_{\mathcal{E}} \mathcal{A}|}{(a+b)ab},$$

d'où l'on déduit le résultat.

Pour la minoration, soit f est une fonction propre pour λ_1 ; Comme l'opérateur est réel et symétrique, $Re(f)$ et $Im(f)$ sont des fonctions propres (ou nulles). On peut donc supposer f réelle. Définissons

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{V}, f(x) > 0\}.$$

On peut supposer $0 < |\mathcal{A}| \leq \frac{|\mathcal{V}|}{2}$, soit alors f_1 égale à f sur \mathcal{A} et à 0 sur le complémentaire de \mathcal{A} . D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\|d^0 f_1\|_{l^2(\mathcal{E})}^2}{\|f_1\|_{l^2(\mathcal{V})}^2} \geq \frac{h^2(\mathcal{K})}{2k}$$

De plus, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} (f_1(x) - f_1(y))^2 &= \sum_{x \in \mathcal{A}} f_1(x) \sum_{y \sim x} |f_1(x) - f_1(y)| \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x) \mathcal{L}_0 f(x) \\ &= \lambda_1 \sum_{x \in \mathcal{A}} f^2(x). \end{aligned}$$

Si \mathcal{A} est vide ou $|\mathcal{A}| > \frac{|\mathcal{V}|}{2}$, on définit l'ensemble \mathcal{B} comme suit

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{V}, -f(x) > 0\}.$$

De même manière, nous obtenons la minoration de λ_1 , avec la fonction f_1 qui égale à $-f$ sur \mathcal{B} et à 0 sur le complémentaire de \mathcal{B} . Puisque f est une fonction propre, alors on ne peut pas avoir \mathcal{A} et \mathcal{B} vides en même temps. D'où le résultat. □

4.2 Relations entre les spectres des Laplaciens

Les résultats suivants basé sur le *critère de Weyl*, connu de [38], présentent un grand intérêt pour la détermination du spectre d'un opérateur auto-adjoint.

Théorème 4.2.1 (Critère de Weyl) *Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert*

séparable \mathcal{H} . λ est dans le spectre de A si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telle que

$$\|f_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)f_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

D'abord, nous référons à [2] et [3] qui prouvent avec nos notations que $\sigma(\mathcal{L}_0) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{L}_1^-) \setminus \{0\}$ sur un graphe pondéré normalisé.

Proposition 4.2.1 *Soit \mathcal{K} un graphe pondéré normalisé. Alors, nous avons*

$$\sigma(\mathcal{L}_0) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{L}_1^-) \setminus \{0\}.$$

Preuve:

- En utilisant le critère de Weyl, soit $\lambda \neq 0$ dans le spectre de \mathcal{L}_0 alors, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $l^2(\mathcal{V})$ telle que

$$\|f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

Il s'agit de trouver une suite $(\varphi_n)_n$ dans $l^2(\mathcal{E})$ telle que

$$\forall n, \|\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

Montrons d'abord que $\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})} \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \langle \mathcal{L}_0 f_n, f_n \rangle_{l^2(\mathcal{V})} \\ &= \langle (\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n, f_n \rangle_{l^2(\mathcal{V})} + \lambda \langle f_n, f_n \rangle_{l^2(\mathcal{V})} \\ &= \underbrace{\langle (\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n, f_n \rangle_{l^2(\mathcal{V})}}_{\text{tend vers 0}} + \lambda \end{aligned}$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \lambda$. Ainsi, il existe $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, nous avons $\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})} > c$.

Posons

$$\varphi_n := \frac{d^0 f_n}{\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}}.$$

En utilisant maintenant le fait que l'opérateur d^0 est borné, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} &= \left\| (\mathcal{L}_1^- - \lambda) \frac{d^0 f_n}{\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}} \right\|_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \frac{\|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}}{\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}} \\ &= \frac{\|d^0(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}}{\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}} \\ &\leq \frac{\|d^0\|}{c} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0$. Alors, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

Et ceci permet de conclure que λ est dans le spectre de $\sigma(\mathcal{L}_1^-) \setminus \{0\}$.

- Utilisons la même méthode que dans la première étape, soit $\lambda \neq 0$ dans le spectre de $\sigma(\mathcal{L}_1^-)$, alors, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de $l^2(\mathcal{E})$ telle que pour tout n , on a

$$\|\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

Il s'agit de trouver une suite $(f_n)_n$ de $l^2(\mathcal{V})$ telle que pour tout n , on a

$$\|f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

Montrons d'abord que $\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})} \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 &= \langle \mathcal{L}_1^- \varphi_n, \varphi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle (\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n, \varphi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \lambda \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \underbrace{\langle (\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n, \varphi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})}}_{\text{tend vers 0}} + \lambda. \end{aligned}$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}^2 = \lambda$. Ainsi, il existe $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, nous avons $\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})} > c$.

Posons

$$f_n := \frac{\delta^0 \varphi_n}{\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}}.$$

En utilisant maintenant le fait que l'opérateur δ^0 est borné, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} &= \left\| (\mathcal{L}_0 - \lambda) \frac{\delta^0 \varphi_n}{\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}} \right\|_{l^2(\mathcal{V})} \\ &= \frac{\|(\mathcal{L}_0 - \lambda)\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}}{\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}} \\ &= \frac{\|\delta^0(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}}{\|\delta^0 \varphi_n\|_{l^2(\mathcal{V})}} \\ &\leq \frac{\|\delta^0\|}{c} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0$. Et ceci permet de conclure que λ est dans le spectre de $\sigma(\mathcal{L}_0) \setminus \{0\}$.

□

Remarque 4.2.1 Pour le problème de zéro dans le spectre des Laplaciens \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1^- dans le cas d'un graphe normalisé connexe localement finis, nous avons un résultat dans [3] qui présente comme une généralisation d'un résultat inspiré de l'article [29]. Ce résultat dit que zéro est soit dans spectre de \mathcal{L}_0 , soit dans spectre de \mathcal{L}_1^- .

De la même manière, nous arrivons à d'autres résultats sur les triangulations qui prouvent en particulier, que le spectre de \mathcal{L}_1^+ et \mathcal{L}_2 coïncident en dehors de la valeur 0.

Proposition 4.2.2 Soit \mathcal{T} une triangulation normalisée. Alors, nous avons

- i) $\sigma(\mathcal{L}_1^+) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{L}_2) \setminus \{0\}$.
- ii) $(\sigma(\mathcal{L}_0) \cup \sigma(\mathcal{L}_2)) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(\mathcal{L}_1)$.

Preuve:

- i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ dans le spectre de \mathcal{L}_1^+ . D'après le critère de Weyl, il existe une suite $(\psi_n)_n$ de $l^2(\mathcal{E})$ telle que

$$\forall n, \|\psi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\psi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

Il s'agit de trouver une suite $(\phi_n)_n \in l^2(\mathcal{F})$ telle que

$$\forall n, \|\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_2 - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} = 0.$$

Montrons d'abord que $\|d^1 \psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|d^1 \psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 &= \langle \mathcal{L}_1^+ \psi_n, \psi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle (\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\psi_n, \psi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \langle \lambda \psi_n, \psi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle (\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\psi_n, \psi_n \rangle_{l^2(\mathcal{E})} + \lambda. \end{aligned}$$

D'où $\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}^2$ tend vers λ quand $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ nous avons $\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} > c$.

Prenons

$$\phi_n := \frac{d^1\psi_n}{\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}},$$

Il reste à montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_2 - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} = 0$. En fait, nous avons:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_2 - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} &= \left\| (\mathcal{L}_2 - \lambda) \frac{d^1\psi_n}{\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}} \right\|_{l^2(\mathcal{F})} \\ &= \frac{\|(\mathcal{L}_2 - \lambda)d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}{\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}} \\ &= \frac{\|\mathcal{L}_2 d^1 - \lambda d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}{\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}} \\ &= \frac{\|d^1(\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}{\|d^1\psi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}. \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur d^1 est borné, alors, il existe une constante $C > 0$ tel que $\|d^1\| \leq C$ et nous avons:

$$\|(\mathcal{L}_2 - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} \leq \frac{C}{c} \|(\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\psi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}.$$

En utilisant la même méthode que précédemment, prenons $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_2)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(\phi_n)_n$ dans $l^2(\mathcal{F})$ telle que $\|\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})} = 1$. Ensuite, nous considérons la suite $(\psi_n)_n \in l^2(\mathcal{E})$, définie comme suit:

$$\psi_n := \frac{\delta^1\phi_n}{\|\delta^1\phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}.$$

ii) Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_0) \setminus \{0\}$, alors, il existe une suite $f_n \in l^2(\mathcal{V})$ telle que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})} = 0.$$

Il s'agit de trouver une suite $(\varphi_n)_n$ dans $l^2(\mathcal{V})$ telle que

$$\forall n, \|\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L}_1 - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = 0.$$

D'après la proposition 4.2.1 $\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})} \neq 0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \lambda$. Ainsi, il existe $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, nous avons $\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})} > c$.

Considérons

$$\varphi_n := \frac{d^0 f_n}{\|d^0 f_n\|_{l^2(\mathcal{E})}}.$$

D'après le lemme 2.4.5, nous avons

$$\|(\mathcal{L}_1 - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = \|(\mathcal{L}_1^- - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}.$$

En utilisant le fait que l'opérateur d^0 est borné, nous avons

$$\|(\mathcal{L}_1 - \lambda)\varphi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \leq \frac{\|d^0\|}{c} \|(\mathcal{L}_0 - \lambda)f_n\|_{l^2(\mathcal{V})}.$$

D'autre part, prenons $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_2)$. Considérons la suite $(\psi_n)_n \in l^2(\mathcal{E})$, définie comme suit:

$$\psi_n := \frac{\delta^1 \phi_n}{\|\delta^1 \phi_n\|_{l^2(\mathcal{F})}}.$$

D'après le lemme 2.4.5, nous avons

$$\|(\mathcal{L}_1 - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{E})} = \|(\mathcal{L}_1^+ - \lambda)\phi_n\|_{l^2(\mathcal{E})}.$$

En utilisant la même méthode que précédemment, on obtient que $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_1)$ à l'aide de i .

□

Proposition 4.2.3 *Soit \mathcal{T} une triangulation pondérée finie. Alors, nous avons*

$$\min \sigma(\mathcal{L}_1) \leq \min_{e \in \mathcal{E}} \left[\left(\frac{1}{c(e^-)} + \frac{1}{c(e^+)} \right) r(e) + \deg_{\mathcal{E}}(e) \right].$$

Preuve:

Soit $e \in \mathcal{E}$, considérons $\chi^e = 1_{\{e\}} - 1_{\{-e\}}$. Alors

$$\left\| \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}}, \mathcal{L}_1 \left(\frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}}, \mathcal{L}_1^- \left(\frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right) \right\rangle + \left\langle \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}}, \mathcal{L}_1^+ \left(\frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right) \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{c(e^-)} + \frac{1}{c(e^+)} \right) r(e) + \deg_{\mathcal{E}}(e). \end{aligned}$$

On conclut par le principe du Min-Max que

$$\begin{aligned} \min \sigma(\mathcal{L}_1) &\leq \min_{e \in \mathcal{E}} \left[\frac{\left\langle \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}}, \mathcal{L}_1 \left(\frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right) \right\rangle}{\left\| \frac{\chi^e}{\sqrt{r(e)}} \right\|_{l^2(\mathcal{E})}} \right] \\ &= \min_{e \in \mathcal{E}} \left[\left(\frac{1}{c(e^-)} + \frac{1}{c(e^+)} \right) r(e) + \deg_{\mathcal{E}}(e) \right]. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.4 *Soit \mathcal{T} une triangulation finie simple. Alors, nous avons*

$$\min \sigma(\mathcal{L}_2) \leq 4 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|.$$

Preuve:

Soit $e_0 \in \mathcal{E}$, considérons $\chi^{e_0} = 1_{\{e_0\}} - 1_{\{-e_0\}}$. On a $\|\chi^{e_0}\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = 1$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \langle d^1 \chi^{e_0}, \mathcal{L}_2 d^1 \chi^{e_0} \rangle_{l^2(\mathcal{F})} &= \|\mathcal{L}_1^+ \chi^{e_0}\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} d^1 \chi^{e_0}(e, x) \right)^2 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \langle d^1 \chi^{e_0}, \mathcal{L}_2 d^1 \chi^{e_0} \rangle_{l^2(\mathcal{F})} &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} \chi^{e_0}(e) \right)^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\chi^{e_0}(e^+, x) + \chi^{e_0}(x, e^-)) \right)^2 \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|^2 (\chi^{e_0}(e))^2 + 4 \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} \chi^{e_0}(e^+, x) \right)^2 \\ &= 2|\mathcal{F}_{e_0}|^2 + 4 \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} \chi^{e_0}(e^+, x) \right)^2 \\ &= 2|\mathcal{F}_{e_0}|^2 + 4 \sum_{x \in \mathcal{F}_{e_0}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \chi^{e_0}(e^+, x) \right)^2 \\ &= 2|\mathcal{F}_{e_0}|^2 + 8|\mathcal{F}_{e_0}|. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\|d^1 \chi^{e_0}\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} |d^1 \chi^{e_0}(x, y, z)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{F}_{e_0}} |d^1 \chi^{e_0}(e_0, x)|^2 = 2|\mathcal{F}_{e_0}|.$$

D'après le principe de Rayleigh, nous obtenons:

$$\min \sigma(\mathcal{L}_2) = \inf_{\phi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{F}) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{L}_2 \phi, \phi \rangle_{l^2(\mathcal{F})}}{\|\phi\|_{l^2(\mathcal{F})}^2} \leq 4 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|.$$

□

4.3 Trou spectral d'une triangulation finie

Nous décrivons *la théorie discrète de Hodge* grâce à Eckmann [15]. C'est l'analogue discret de la théorie de Hodge dans la géométrie Riemannienne. En outre, il s'applique à tout complexe simplicial, et non seulement aux variétés. Nous commençons par prouver le lemme suivant:

Lemme 4.3.1 *Soit \mathcal{T} une triangulation finie. Nous avons les égalités suivantes:*

1. $\ker(\mathcal{L}_1^-) = \ker(\delta^0)$.
2. $\ker(\mathcal{L}_1^+) = \ker(d^1)$.
3. $\ker(\mathcal{L}_2) = \ker(\delta^1)$.
4. $\ker(\mathcal{L}_1) = \ker(\delta^0) \cap \ker(d^1)$.

Preuve:

1. Il est clair que $\ker(\delta^0) \subseteq \ker(\mathcal{L}_1^-)$. D'autre part, si $\mathcal{L}_1^- \varphi = d^0 \delta^0 \varphi = 0$, pour $\varphi \in l^2(\mathcal{E})$, nous avons

$$0 = \langle \varphi, \mathcal{L}_1^- \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \|\delta^0 \varphi\|_{l^2(\mathcal{V})}^2,$$

Alors, $\delta^0 \varphi = 0$.

2. et 3. Comme le raisonnement précédant, nous prouvons que $\ker(\mathcal{L}_1^+) = \ker(d^1)$ et $\ker(\mathcal{L}_2) = \ker(\delta^1)$.
4. Soit $\varphi \in \ker(\mathcal{L}_1)$ alors

$$0 = \langle \varphi, \mathcal{L}_1 \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} = \langle \delta^0 \varphi, \delta^0 \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{V})} + \langle d^1 \varphi, d^1 \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{F})},$$

ce qui montre que $\ker(\mathcal{L}_1) = \ker(\delta^0) \cap \ker(d^1)$.

□

L'égalité $\ker(\mathcal{L}_1) = \ker(\delta^0) \cap \ker(d^1)$ permet alors d'en déduire *la théorie discrète de Hodge* dans le cas d'une triangulation finie.

$$l^2(\mathcal{E}) = \ker(\mathcal{L}_1) \oplus \text{Im}(d^0) \oplus \text{Im}(\delta^1).$$

En particulier, il s'ensuit que l'espace des formes harmoniques peut être identifié avec l'homologie de \mathcal{T} :

$$\ker(d^1)/\text{Im}(d^0) = \text{Im}(\delta^1)^\perp/\text{Im}(d^0) = (\text{Im}(d^0) \oplus \ker(\mathcal{L}_1)) / \text{Im}(d^0) \cong \ker(\mathcal{L}_1).$$

Il en va de même pour l'homologie de \mathcal{T} , donnant

$$\ker(d^1)/\text{Im}(d^0) \cong \ker(\mathcal{L}_1) \cong \ker(\delta^0)/\text{Im}(\delta^1).$$

Pour une triangulation, l'espace $\text{Im}(d^0)$ est toujours dans le noyau du Laplacien supérieur \mathcal{L}_1^+ , et considéré comme ses *zéros triviaux*. Il peut y avoir plus de zéros dans le spectre, puisque $\text{Im}(d^0) \subset \ker(\mathcal{L}_1^+) = \ker(d^1)$. Comme $l^2(\mathcal{E}) = \ker(\delta^0) \oplus \text{Im}(d^0)$, cela conduit à la définition suivante:

Définition 4.3.1 (Le trou spectral) *Le trou spectral d'une triangulation finie \mathcal{T} , noté $\lambda_{\mathcal{T}}$, est la valeur propre minimale du Laplacien supérieur sur les 1-formes:*

$$\lambda_{\mathcal{T}} := \min \sigma \left(\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+ \right) = \min \sigma \left(\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)} \right),$$

l'égalité découle du fait que $\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)} \equiv \mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+$.

Remarque 4.3.1 *Généralement, le trou spectral est l'écart entre 0 et la première valeur propre non nulle, (voir [10], [11] et [12]). Cette définition coïncide avec la définition 4.3.1 dans les cas où la valeur propre $\lambda_{\mathcal{T}}$ est non nulle.*

La proposition suivante donne une caractérisation du trou spectral.

Proposition 4.3.1 *Le spectre du Laplacien \mathcal{L}_1^+ est composé de $|\mathcal{E}|$ valeurs propres réelles $\{\lambda_i\}_{0 \leq i \leq |\mathcal{E}|-1}$ rangées par ordre croissant:*

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{|\mathcal{E}|-1}.$$

De plus, nous avons

$$\lambda_{\mathcal{T}} = \lambda_{|\mathcal{V}|-1}.$$

Preuve:

Comme la dimension de l'espace $\text{Im}(d^0)$ est le nombre des zéros triviaux du Laplacien supérieur, en utilisant le théorème du rang pour l'opérateur $d^0 : l^2(\mathcal{V}) \rightarrow l^2(\mathcal{E})$, nous obtenons

$$\lambda_{\mathcal{T}} := \lambda_{\dim(\text{Im}(d^0))} = \lambda_{|\mathcal{V}|-1}.$$

□

Proposition 4.3.2 Soit \mathcal{T} une triangulation finie. Alors, nous avons

$$|\mathcal{F}| < |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1 \Rightarrow \lambda_{\mathcal{T}} = 0.$$

Preuve:

En utilisant le théorème du rang pour $d^0 : l^2(\mathcal{V}) \rightarrow l^2(\mathcal{E})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\delta^0)) &= |\mathcal{E}| - \dim(\text{Im}(d^0)) \\ &= |\mathcal{E}| - (|\mathcal{V}| - 1) = |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1 \end{aligned}$$

Et comme $\dim(\text{Im}(\delta^1)) \leq |\mathcal{F}|$, alors

$$|\mathcal{F}| < |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1 \Rightarrow \text{Im}(\delta^1) \subsetneq \ker(\delta^0) \Leftrightarrow \lambda_{\mathcal{T}} = 0.$$

□

Remarque 4.3.2 Dans les cas où $\text{Im}(\delta^1) = \ker(\delta^0)$, on a $|\mathcal{F}| \geq |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1$ et $\lambda_{\mathcal{T}} \neq 0$.

Exemple 4.3.1 Considérons une triangulation \mathcal{T} où tous les triangles sont des faces comme l'indique la figure 4.1. En utilisant le théorème du rang, on a:

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}(d^0)) = 5 \text{ et } \dim(\mathcal{C}(\mathcal{E})) = 12 & \Rightarrow \dim(\ker(\delta^0)) = 7 \\ \dim(\mathcal{C}(\mathcal{F})) = 8 \text{ et } \dim(\ker(\delta^1)) = 1 & \Rightarrow \dim(\text{Im}(\delta^1)) = 7. \end{cases}$$

Alors, $\lambda_{\mathcal{T}} \neq 0$.

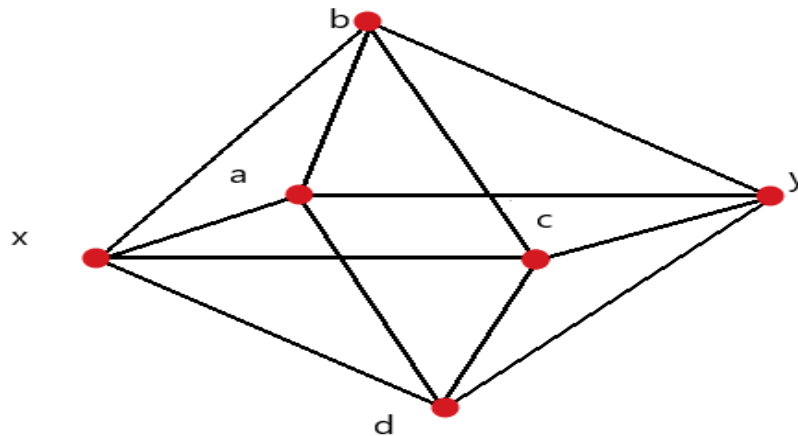


Figure 4.1: Exemple d'une triangulation avec trou spectral non nul

4.4 Triangulation d'un graphe complet

Le but de cette partie est de fournir des estimations efficaces pour le trou spectral d'une triangulation simple d'un graphe complet. Ce problème est ouvert sur les formes pour le cas d'une variété Riemannienne.

Définition 4.4.1 Une triangulation d'un graphe complet \mathcal{T}_n est la donnée d'un couple $(\mathcal{K}_n, \mathcal{F})$, où \mathcal{K}_n est le graphe complet de n sommets et \mathcal{F} est l'ensemble des faces triangulaires. On dit que \mathcal{T}_n est une triangulation complète, si tous les triangles sont des faces, i.e $\mathcal{F} = \mathcal{V}^3$.

D'abord, nous donnons un résultat assure que notre trou spectral est non nul dans une triangulation d'un graphe complet. Ce résultat pris de la proposition 4.3.2.

Corollaire 4.4.1 Soit \mathcal{T}_n une triangulation d'un graphe complet de n sommets. Alors, nous avons

$$|\mathcal{F}| < \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{T}} = 0.$$

4.4.1 Majoration du trou spectral

Nous voudrions trouver une majoration concrète du trou spectral en jouant sur le nombre de faces orientées dans la triangulation simple d'un graphe complet.

Proposition 4.4.1 Soit \mathcal{T}_n une triangulation simple d'un graphe complet. Alors, les conditions suivantes sont satisfaites:

- i) $n \in \sigma(\mathcal{L}_1)$.
- ii) Si \mathcal{T}_n une triangulation complète alors $\sigma(\mathcal{L}_1) = \{n\}$.

Lemme 4.4.1 Soit \mathcal{T} une triangulation finie. Alors

$$\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma(\mathcal{L}_{1|Im(d^0)}^-) \cup \sigma(\mathcal{L}_{1|ker(\delta^0)}^+).$$

Preuve:

Il est clair que $\sigma(\mathcal{L}_{1|Im(d^0)}^-) \cup \sigma(\mathcal{L}_{1|ker(\delta^0)}^+) \subseteq \sigma(\mathcal{L}_1)$. Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_1)$, il existe une fonction $\psi_\lambda \in l^2(\mathcal{E})$ non nul telle que $\mathcal{L}_1 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$. Comme $l^2(\mathcal{E}) = \ker(\delta^0) \oplus Im(d^0)$, alors il existe $\psi_\lambda = \psi_\lambda^1 + \psi_\lambda^2$ avec ψ_λ^1 dans $ker(\delta^0)$ et ψ_λ^2 dans $Im(d^0)$. Alors, $\psi^1 \neq 0$ ou $\psi^2 \neq 0$. D'où $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{1|Im(d^0)}) \cup \sigma(\mathcal{L}_{1|ker(\delta^0)}) = \sigma(\mathcal{L}_{1|Im(d^0)}^-) \cup \sigma(\mathcal{L}_{1|ker(\delta^0)}^+)$.

□

Preuve:

i) Soit $\psi \in \text{Im}(d^0)$, alors il existe $f \in {}^2(\mathcal{V})$ tel que $\psi = d^0 f$. Calculons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^- \psi(x, y) &= \sum_{e, e^+ = y} \psi(e) - \sum_{e, e^+ = x} \psi(e) \\ &= \sum_{e, e^+ = y} (f(y) - f(e^-)) - \sum_{e, e^+ = x} (f(x) - f(e^-)) \\ &= (n-1)d^0 f(x, y) + \sum_{z \sim x} f(z) - \sum_{z \sim y} f(z) \\ &= n\psi(x, y). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_{1|\text{Im}(d^0)}^- = nI$. D'après le Lemme 4.4.1, nous avons $n \in \sigma(\mathcal{L}_1)$.

ii) Soit $\psi \in \ker(\delta^0)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^+ \psi(x, y) &= \sum_{z \in \mathcal{F}_{x,y}} (\psi(x, y) + \psi(y, z) + \psi(z, x)) \\ &= (n-2)\psi(x, y) + \sum_{z \in \mathcal{F}_{(x,y)}} \psi(y, z) + \sum_{z \in \mathcal{F}_{(x,y)}} \psi(z, x) \\ &= n\psi(x, y) + \delta^0 \psi(x) - \delta^0 \psi(y) = n\psi(x, y). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.4.1, nous obtenons que $\sigma(\mathcal{L}_1) = \{n\}$.

□

Corollaire 4.4.2 Soit \mathcal{T}_n une triangulation simple d'un graphe complet. Alors

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \leq 2 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|.$$

De plus, \mathcal{T}_n est une triangulation complète si et seulement si $\lambda_{\mathcal{T}_n} = n$.

Preuve:

D'après la proposition 4.4.1 et le lemme 4.4.1, on en déduit que $\min \sigma(\mathcal{L}_1) = \min\{\lambda_{\mathcal{T}_n}, n\}$. De plus, la proposition 4.2.3 donne une majoration du bas du spectre de \mathcal{L}_1 :

$$\min \sigma(\mathcal{L}_1) \leq 2 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|. \quad (4.4)$$

Si $\min \sigma(\mathcal{L}_1) < n$ alors c'est $\lambda_{\mathcal{T}_n}$. Donc, l'inégalité (4.4) donne une estimation du trou spectral $\lambda_{\mathcal{T}_n}$ comme suit:

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \leq 2 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|.$$

Si $\min \sigma(\mathcal{L}_1) = n$ alors $\lambda_{\mathcal{T}_n} \geq n$ et $n \leq 2 + \min_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e|$. Donc, la triangulation \mathcal{T}_n est complète. D'après la proposition 4.4.1, $\lambda_{\mathcal{T}_n} = n$.

□

Remarque 4.4.1 Dans une triangulation simple d'un graphe complet, nous avons toujours:

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} = \min \sigma \left(\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+ \right) = \min \sigma(\mathcal{L}_1).$$

Notre objectif maintenant est de trouver un autre moyen d'estimer le trou spectral $\lambda_{\mathcal{T}_n}$, grâce à la constante de Cheeger. Cette idée s'inspire de [23] et [35].

Définition 4.4.2 Soit \mathcal{T}_n une triangulation simple d'un graphe complet. La constante de Cheeger $h(\mathcal{T}_n)$, est définie par:

$$h(\mathcal{T}_n) := \min_{\mathcal{V} = \cup_{i=0}^2 \mathcal{A}_i} \frac{n|\mathcal{F}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)|}{|\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|},$$

où $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont des ensembles non vides, formant une partition de \mathcal{V} , et $\mathcal{F}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ désigne l'ensemble des faces orientées tels que chacune des faces à ses trois sommets dans des \mathcal{A}_i différents, comme l'indique la figure 4.2.

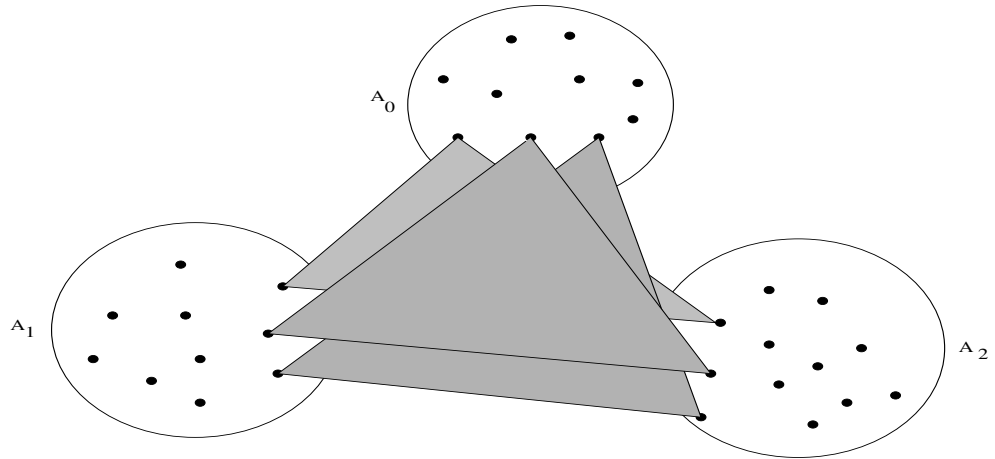


Figure 4.2: Tripartite d'une triangulation

$$\exists x \in \mathcal{V}, \text{ tel que } \forall e \in \mathcal{E}, x \in \mathcal{F}_e, x \neq e^\pm \implies h(\mathcal{T}_n) \neq 0. \quad (4.5)$$

Soit $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ des ensembles finis de \mathcal{V} tels que $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1 = \emptyset$, nous définissons l'ensemble:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) := \{e \in \mathcal{E}, \{e^-, e^+\} \cap \mathcal{A}_0 \neq \emptyset \text{ et } \{e^-, e^+\} \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset\}.$$

Théorème 4.4.1 Si $h(\mathcal{T}_n) \neq 0$, alors le trou spectral satisfait la majoration suivante

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \leq h(\mathcal{T}_n).$$

Preuve:

Soient $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ et \mathcal{A}_2 une partition de \mathcal{V} qui réalise le minimum dans $h(\mathcal{T}_n)$. Nous définissons $\tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \in l^2(\mathcal{E})$ par

$$\tilde{\psi}(e) = \begin{cases} |\mathcal{A}_i| & \text{si } e \in \mathcal{A}_{\pi(i)} \times \mathcal{A}_{\pi(i+1)} \\ -|\mathcal{A}_i| & \text{si } e \in \mathcal{A}_{\pi(i+1)} \times \mathcal{A}_{\pi(i)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ est une fonction telle que $\pi(i) = i + 1$ modulo 3. D'abord, pour $x \in \mathcal{A}_0$, calculons

$$\begin{aligned} \delta^0 \tilde{\psi}(x) &= \sum_{e, e^+ = x} \tilde{\psi}(e) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{A}_1} \tilde{\psi}(y, x) + \sum_{y \in \mathcal{A}_2} \tilde{\psi}(y, x) \\ &= -|\mathcal{A}_2||\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2| = 0. \end{aligned}$$

De la même manière pour $x \in \mathcal{A}_1$ ou $x \in \mathcal{A}_2$. Alors $\tilde{\psi} \in \ker(\delta^0)$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1^+ \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle_{l^2(\mathcal{E})} &= \|d^1 \tilde{\psi}\|_{l^2(\mathcal{F})}^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} \left| \tilde{\psi}(x, y) + \tilde{\psi}(y, z) + \tilde{\psi}(z, x) \right|^2 \\ &= n^2 |\mathcal{F}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\tilde{\psi}(e)|^2 \\ &= \frac{1}{2} (|\mathcal{E}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)||\mathcal{A}_2|^2 + |\mathcal{E}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)||\mathcal{A}_0|^2 + |\mathcal{E}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_0)||\mathcal{A}_1|^2) \\ &= |\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|^2 + |\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2||\mathcal{A}_0|^2 + |\mathcal{A}_2||\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1|^2 \\ &= |\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2| (|\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|) \\ &= n|\mathcal{A}_0||\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|. \end{aligned}$$

Par le principe de Rayleigh, nous avons:

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} = \min \sigma \left(\mathcal{L}_{1|\ker(\delta^0)}^+ \right) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{L}_1^+ \psi, \psi \rangle_{l^2(\mathcal{E})}}{\|\psi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2} \leq h(\mathcal{T}_n).$$

□

Exemple 4.4.1 Considérons la triangulation $\mathcal{T}_4 = (\mathcal{K}_4, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4)\}$. Alors, nous avons que $h(\mathcal{T}_4) = 2$. En appliquant le théorème

4.4.1, nous obtenons que

$$\lambda_{\mathcal{T}_4} \leq 2.$$

Exemple 4.4.2 *Considérons la triangulation $\mathcal{T}_5 = (\mathcal{K}_5, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5)\}$. Alors, nous avons que $h(\mathcal{T}_5) = \frac{5}{3}$. En appliquant le théorème 4.4.1, nous obtenons que*

$$\lambda_{\mathcal{T}_5} \leq \frac{5}{3}.$$

4.4.2 Minoration du trou spectral

D'abord, nous rappelons qu'il y a quelques minoration du trou spectral du Laplacien \mathcal{L}_0 sur les graphes connexes (voir [12],[26]). Notre objectif est de trouver minoration du trou spectral $\lambda_{\mathcal{T}_n}$ en fonction de la première valeur propre non nulle du \mathcal{L}_0 .

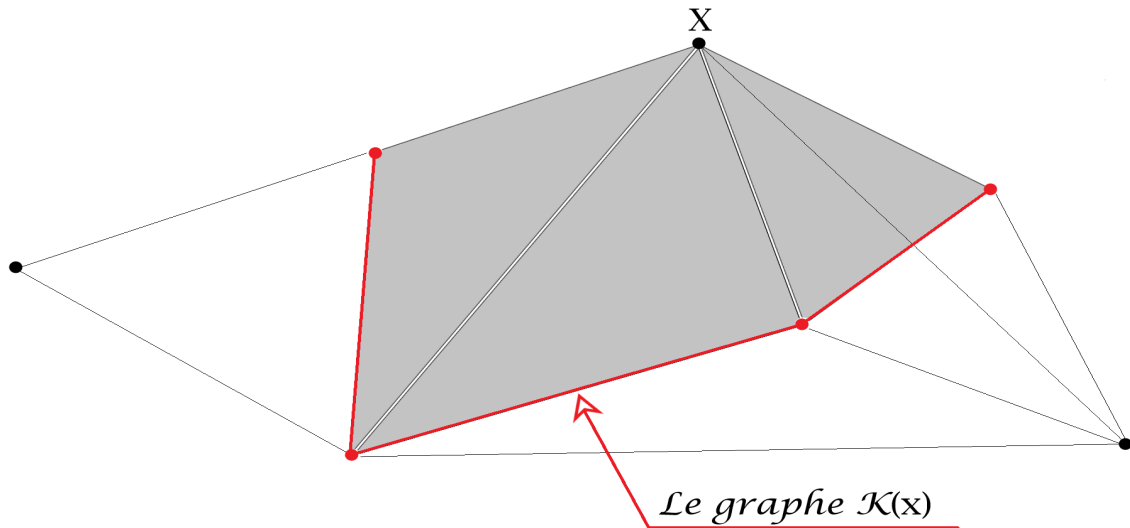


Figure 4.3: Le graphe $\mathcal{K}(x)$ associé au sommet x .

Soient $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ une triangulation finie et $x \in \mathcal{V}$. On définit l'ensemble d'arête \mathcal{E}_x comme suit:

$$\mathcal{E}_x := \{e \in \mathcal{E}; e^\pm \neq x \text{ et } x \in \mathcal{F}_e\}.$$

Désignons par $\mathcal{K}(x) := (\mathcal{V}_x, \mathcal{E}_x)$ le graphe associé au sommet x , où:

$$\mathcal{V}_x := \{y \in \mathcal{V}; \exists z \in \mathcal{V} \text{ tel que } (y, z) \in \mathcal{E}_x\}.$$

Nous remarquons que si, pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$, nous avons $\mathcal{V}_x = \mathcal{V} \setminus \{x\}$.

Remarque 4.4.2 *L'hypothèse (4.5) assure que, pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$. Et alors, nous avons que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_x = \mathcal{V} \setminus \{x\}$.*

Théorème 4.4.2 Soit \mathcal{T}_n une triangulation simple d'un graphe complet. Supposons que pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$, alors

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \geq \min_{e \in \mathcal{E}} (2\lambda_1(\mathcal{K}(e^-)) - |\mathcal{F}_e|).$$

Preuve:

Prenons $\varphi \in \ker(\delta^0)$ une fonction propre associée à $\lambda_{\mathcal{T}_n}$ telle que $\|\varphi\|_{l^2(\mathcal{E})} = 1$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{T}_n} &= \langle \mathcal{L}_1^+ \varphi, \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\varphi(e) + \varphi(e^+, x) + \varphi(x, e^-)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e| \varphi^2(e) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e) \sum_{x \in \mathcal{F}_e} (\varphi(e^+, x) + \varphi(x, e^-)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e| \varphi^2(e) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e) \left(\sum_{x \in \mathcal{F}_e} \varphi(e^+, x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e| \varphi^2(e) + \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{e \in \mathcal{E}_x} \varphi(e) \varphi(e^+, x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e| \varphi^2(e) + \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \mathcal{V}_x} \sum_{e \in \mathcal{E}_x, e^+ = y} \varphi(e) \varphi(e^+, x)}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Pour chaque sommet $x \in \mathcal{V}$, on peut définir sur \mathcal{V}_x la fonction $f_x(y) := \varphi(x, y)$. Alors, on a $f_x(y) = -f_y(x)$, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \mathcal{V}_x} \sum_{e \in \mathcal{E}_x, e^+ = y} f_{e^-}(e^+) f_{e^+}(x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \mathcal{V}_x} f_x(y) \left(\sum_{z \in \mathcal{F}_{(x,y)}} f_y(z) \right) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \mathcal{V}_x} f_x(y) \left(\sum_{z \in \mathcal{F}_{(x,y)}} f_x(y) - f_x(z) \right) \\ &+ \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \mathcal{V}_x} f_x(y) \left(\sum_{z \in \mathcal{F}_{(x,y)}} f_y(x) + f_y(z) + f_x(z) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \langle \mathcal{L}_{0\nu_x} f_x, f_x \rangle_{l^2(\nu_x)} - 2 \langle \text{deg}_{\mathcal{E}} \varphi, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \nu_x} f_x(y) \left(\sum_{z \in \mathcal{F}(x,y)} f_y(z) + f_x(z) \right)}_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que \mathcal{E} est orienté, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{y \in \nu_x} \sum_{z \in \mathcal{F}(x,y)} \varphi(x,y) \varphi(y,z) &= \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} \varphi(x,y) \varphi(y,z) \\ &= - \sum_{(x,y,z) \in \mathcal{F}} \varphi(x,y) \varphi(x,z) \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{J} = 0$. D'autre part, on a

$$\varphi \in \ker(\delta^0) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{V}, f_x \perp 1.$$

En appliquant le principe du Min-Max, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{T}_n} &\geq \sum_{x \in \mathcal{V}} \lambda_1(\mathcal{K}(x)) \|f_x\|_{l^2(\nu_x)}^2 - \langle \text{deg}_{\mathcal{E}} \varphi, \varphi \rangle_{l^2(\mathcal{E})} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} \lambda_1(\mathcal{K}(x)) \left(\sum_{y \in \nu_x} f_x^2(y) \right) - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\mathcal{F}_e| \varphi^2(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} (2\lambda_1(\mathcal{K}(e^-)) - |\mathcal{F}_e|) \varphi^2(e) \\ &\geq \min_{e \in \mathcal{E}} (2\lambda_1(\mathcal{K}(e^-)) - |\mathcal{F}_e|). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.4.3 Ce théorème est intéressant dans le cas où les graphes $(\mathcal{K}(x))_{x \in \mathcal{V}}$ sont connexes ou plutôt le nombre des faces triangulaires est assez grand pour que $\min_{x \in \mathcal{V}} \lambda_1(\mathcal{K}(x)) \neq 0$.

Exemple 4.4.3 Considérons la triangulation $\mathcal{T}_5 = (\mathcal{K}_5, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5)\}$. Nous combinons la proposition 4.1.2 et le théorème 4.4.2, on obtient que:

$$\lambda_{\mathcal{T}_5} \geq 2\lambda_1(\mathcal{C}_4) - 2 = 2 \times 2 - 2 = 2.$$

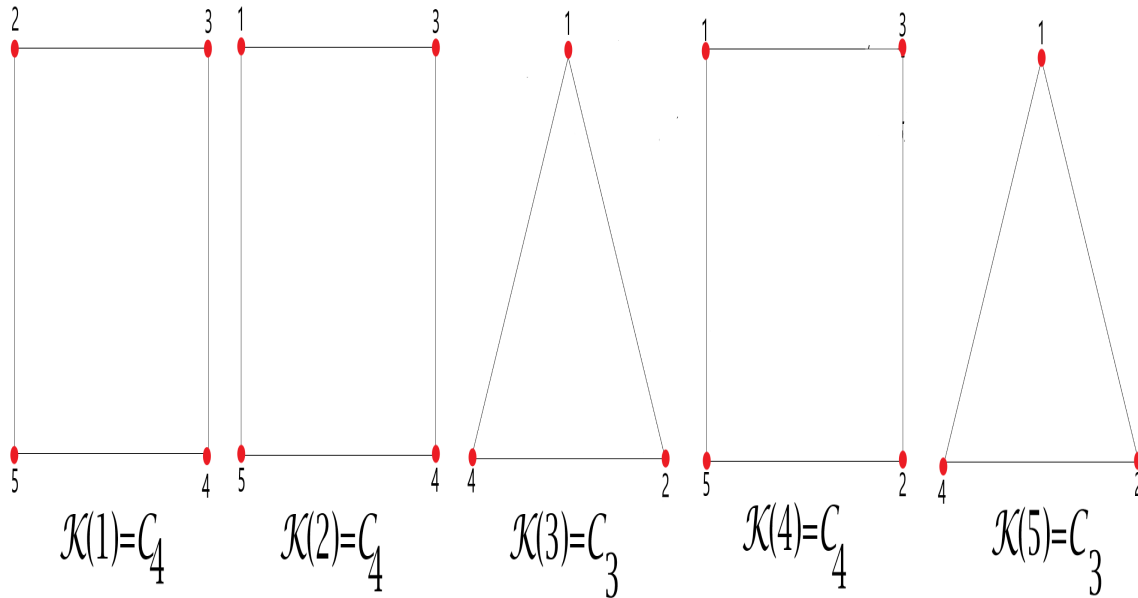


Figure 4.4: Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}_5

Exemple 4.4.4 *Considérons la triangulation $\mathcal{T}_6 = (\mathcal{K}_6, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6)\}$. Nous combinons la proposition 4.1.2 et le théorème 4.4.2, on obtient que:*

$$\lambda_{\mathcal{T}_6} \geq 2\lambda_1(\mathcal{C}_5) - 2 \approx 2 \times 1.3819 - 2 = 0.7639.$$

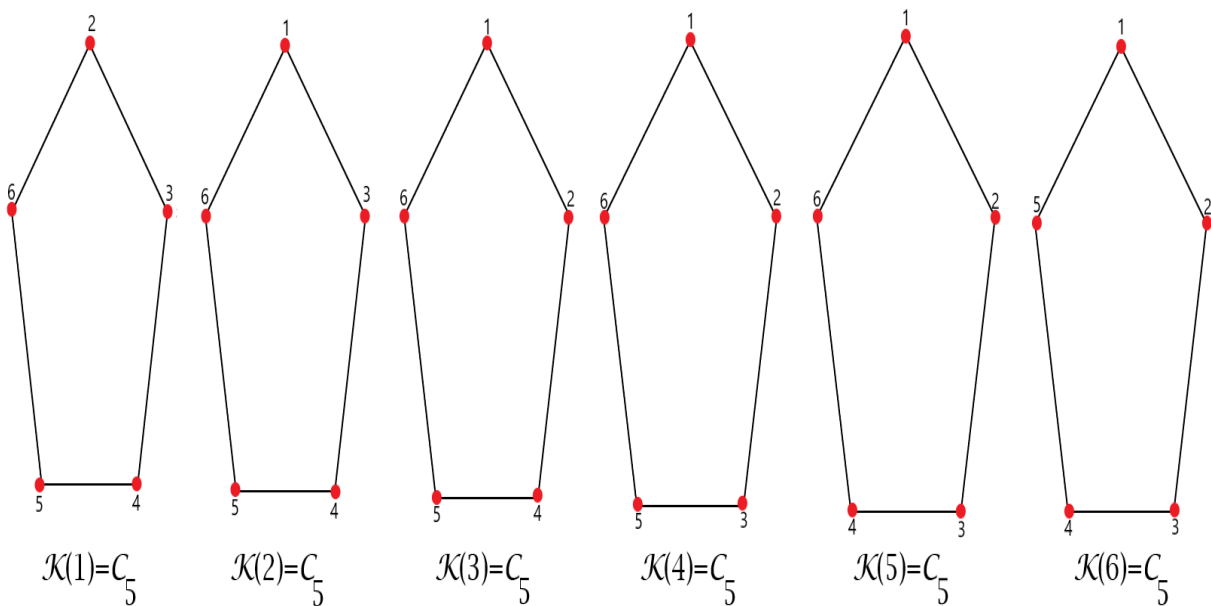


Figure 4.5: Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}_6

Nous donnons maintenant un résultat très important, connu de [28], qu’il nous aide à obtenir plus d’exemples. En ajoutant une arête dans un graphe connexe entraîne toujours une augmentation du trou spectral, à condition que nous ayons le même ensemble de sommets.

Proposition 4.4.2 Soient \mathcal{K} un graphe connexe et \mathcal{K}' un graphe obtenu à partir de \mathcal{K} , en ajoutant une seule arête entre deux sommets. Alors, nous avons

$$\lambda_1(\mathcal{K}) \leq \lambda_1(\mathcal{K}').$$

Exemple 4.4.5 Prenons la triangulation $\mathcal{T}'_5 = (\mathcal{K}_5, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}$. Nous combinons les deux propositions 4.1.2 et 4.4.2, on obtient que $\min_{i=1, \dots, 5} \lambda_1(\mathcal{K}(i)) = \lambda_1(\mathcal{C}_4) = 2$. En utilisant le théorème 4.4.2, nous avons:

$$\lambda_{\mathcal{T}'_5} \geq 2\lambda_1(\mathcal{C}_4) - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

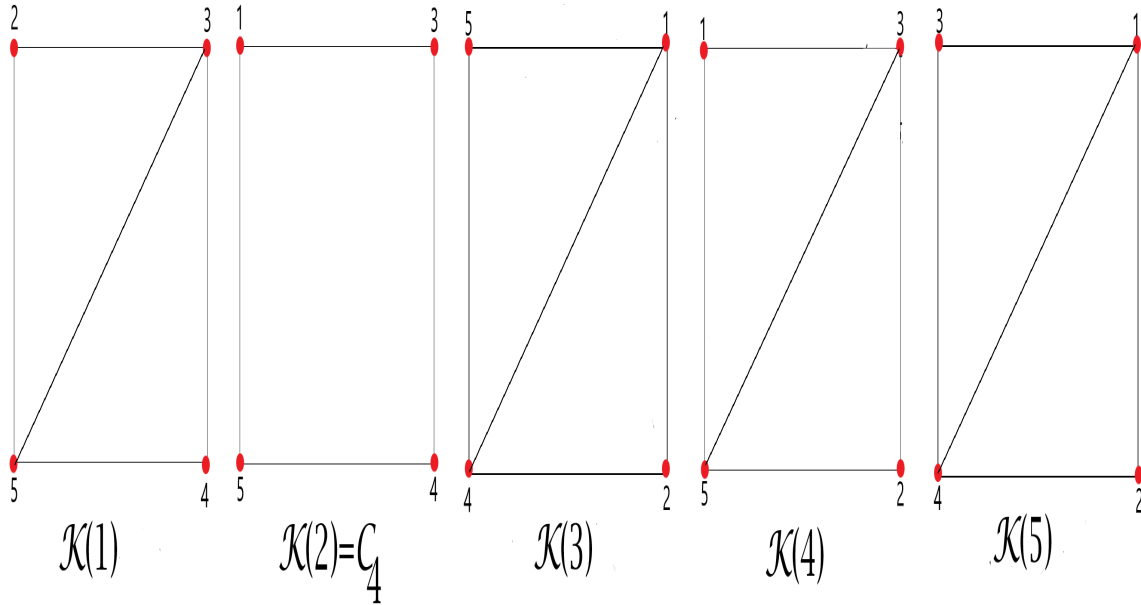


Figure 4.6: Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}'_5

Corollaire 4.4.3 Soit \mathcal{T}_n une triangulation simple d'un graphe complet. Supposons que pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$, alors

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \geq \min_{e \in \mathcal{E}} \left(\frac{h^2(\mathcal{K}(e^-))}{d_{e^-}} - |\mathcal{F}_e| \right).$$

où pour tout $x \in \mathcal{V}$, $d_x = \max_{y \in \mathcal{V}_x} \deg(y)$.

Preuve:

Soit $\varphi \in \ker(\delta^0)$ une fonction propre à $\lambda_{\mathcal{T}_n}$ telle que $\|\varphi\|_{l^2(\mathcal{E})}^2 = 1$. En utilisant les

théorèmes 4.1.1 et 4.4.2, nous obtenons que

$$\lambda_{\mathcal{T}_n} \geq \min_{e \in \mathcal{E}} (2\lambda_1(\mathcal{K}(e^-)) - |\mathcal{F}_e|) \geq \min_{e \in \mathcal{E}} \left(\frac{h^2(\mathcal{K}(e^-))}{d_{e^-}} - |\mathcal{F}_e| \right).$$

□

Annexe

Nous présentons dans ce chapitre les principaux résultats utilisés au cours de cette thèse concernant la notion de complétude sur les graphes et le caractère essentiellement auto-adjoint d'un opérateur à domaine dense. Ces résultats sont extraits de [24], [37] et [38].

5.1 Théorème de type Hopf-Rinow

Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré. D'abord, nous commençons par un rappel de quelques définitions:

- Un espace métrique (\mathcal{V}, d) est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente vers un élément de \mathcal{V} .
- Un chemin $(x_n)_n$ est dit géodésique (fini ou infini) par rapport à une métrique de chemin $d = d_a$ si $d(x_0, x_n) = l_a((x_0, \dots, x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- L'espace (\mathcal{V}, d) avec $d = d_a$ est dit géodésiquement complet, si toutes les géodésiques infinies sont des longueurs infinies, i.e.

$$l_a((x_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_a((x_0, \dots, x_n)) = \infty,$$

pour toutes les géodésiques infinies (x_k) .

Nous présentons maintenant le théorème de type Hopf-Rinow, qui extrait de l'article [24]:

Théorème 5.1.1 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré localement fini et d un pseudo-métrique de chemin. Alors, (\mathcal{V}, d) est un espace métrique discret. De plus, les éléments suivants sont équivalents:

- i) (\mathcal{V}, d) est un espace métrique complet.
- ii) (\mathcal{V}, d) est géodésiquement complet.
- iii) Toute boule est finie.
- iv) Tout fermé borné est compact.

En particulier, si (\mathcal{V}, d) est complet, alors pour tout $x, y \in \mathcal{V}$, il existe un chemin entre x et y tel que $d(x_0, x_n) = l_a((x_0, \dots, x_n))$.

Nous prouvons ce théorème en plusieurs étapes à travers les lemmes suivants

Lemme 5.1.1 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré localement fini et d un pseudo-métrique de chemin. Alors, nous avons

- a) (\mathcal{V}, d) est un espace métrique discret. En particulier, (\mathcal{V}, d) est localement compact.
- b) Un ensemble est compact dans (\mathcal{V}, d) si et seulement s'il est fini.

Preuve:

Comme \mathcal{K} est localement fini, on en déduit que pour tout $x \in \mathcal{V}$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $d(x, y) > r$, pour tout $y \in \mathcal{V}$ avec $y \sim x$. D'abord, par la définition de d , nous avons que pour tout $x, z \in \mathcal{V}$, il existe $y \sim x$ avec $d(x, y) \leq d(x, z)$. Alors, $d(x, y) = 0$ implique que $x = y$. Par conséquent, d est une distance. De plus, il donne que $B_r = \{x\}$ et $\{x\}$ est un ensemble ouvert qui montre a).

À partir de ce qui précède, nous concluons que pour tout ensemble infini U , la couverture $\{\{x\}, x \in U\}$ n'admet pas de couverture finie. L'autre sens de b) est clair.

□

Lemme 5.1.2 Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe pondéré localement fini et d un pseudo-métrique de chemin. Supposons que la boule B_r est infinie pour certains rayon $r \geq 0$. Alors, il existe une géodésique infinie de longueur borné.

Preuve:

Soit O le centre de la boule infinie B_r de rayon r et soit d_{comb} la distance combinatoire sur \mathcal{K} . Soit P_n , $n \geq 0$, l'ensemble des chemins finis (x_0, \dots, x_k) telle que $x_0 = O$, $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$, $d_{\text{comb}}(x_k, O) = n$ et $d_{\text{comb}}(x_k, O) \leq n$ pour $j = 0, \dots, k$. D'abord, nous montrons que, pour tout $n \geq 0$, on a:

$$\Gamma_n = \{\gamma \in P_n, \gamma \text{ géodésique par rapport à } d, l(\gamma) \leq r\} \neq \emptyset.$$

En effet, comme \mathcal{K} est localement fini, l'ensemble P_n est fini. Alors, il contient un élément minimal $\gamma = (x_0, \dots, x_k)$ par rapport à longueur l , i.e., pour tout $\gamma' \in P_n$ nous avons $l(\gamma') \geq l(\gamma)$. Alors, γ est un géodésique: pour chaque chemin (x'_0, \dots, x'_M) avec $x'_0 = O$ et $x'_M = x'_k$. Fixons $m \in \{n, \dots, M\}$ telle que $(x'_0, \dots, x'_m) \in P_n$. Par la minimalité de γ , nous en déduisons que:

$$l((x'_0, \dots, x'_M)) \geq l((x'_0, \dots, x'_m)) \geq l(\gamma).$$

Il s'ensuit que γ est une géodésique. C'est clair que $l(\gamma) \leq r$, sinon $B_r \subseteq \{y \in \mathcal{V}, d_{\text{comb}}(y, O) \leq n - 1\}$. Comme l'espace des chemins est localement fini, on en déduit que B_r est finie. Alors, $\gamma \in \Gamma_n$ ce qui prouve que $\Gamma_n \neq \emptyset$.

Par suite, nous construisons inductivement une géodésique infinie (x_k) de une longueur bornée. Soit $x_0 = O$, comme $\Gamma_n \neq \emptyset$, il existe une géodésique dans Γ_n pour tout $n \geq 0$ tel que x_0 est une sous-géodésique. Supposons que nous avons construit une géodésique (x_1, \dots, x_n) telle que pour tout $n \geq m$ il existe une géodésique dans Γ_n qui admet (x_1, \dots, x_m) comme une sous-géodésique. Puisque x_m admet un nombre fini de voisins. Alors, il existe une géodésique infinie $\gamma = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$l(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} l((x_0, \dots, x_n)) \leq r,$$

où $(x_0, \dots, x_n) \in \Gamma_n$ pour tout $n \geq 0$.

□

Preuve:

D'après le lemme 5.1.1 a), nous avons que (\mathcal{V}, d) est un espace métrique discret. Nous montrons maintenant les équivalences. Nous commençons par $i) \Rightarrow ii)$. Supposons qu'il existe une géodésique bornée alors c'est une suite de Cauchy. Comme

une géodésique est un chemin, il n'est pas toujours constant. Par discrétion, on en déduit que la suite ne converge pas. Alors, (\mathcal{V}, d) n'est pas métriquement complet. Ensuite, pour montrons $ii) \Rightarrow iii)$, on suppose qu'il existe une boule infinie. D'après le lemme 5.1.2, il existe une suite géodésique infinie et bornée. Alors, (\mathcal{V}, d) n'est pas géodésiquement complet. En utilisant 5.1.1 b), nous déduit que $iii) \Leftrightarrow iv)$. Enfin, si tout ensemble fermé borné est compact alors toute boule fermée est compact. Par conséquent, le lemme 5.1.1 b) montre que toutes les boules sont finies et que (\mathcal{V}, d) est métriquement complet. D'où, nous avons que $iv) \Rightarrow i)$.

□

5.2 Théorème de Reed-Simon

On rappelle quelques résultats sur les opérateurs symétriques et auto-adjoints extrait de la référence [38].

Théorème 5.2.1 Soit \mathcal{A} un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) \mathcal{A} est auto-adjoint.
- ii) \mathcal{A} est fermé et $\ker(\mathcal{A}^* \pm i) = \{0\}$.
- iii) $Im(\mathcal{A} \pm i) = \mathcal{H}$.

Preuve:

$i) \Rightarrow ii)$: Soit \mathcal{A} est auto-adjoint et $\varphi \in Dom(\mathcal{A}^*) = Dom(\mathcal{A})$ tel que $\varphi \in \ker(\mathcal{A}^* \pm i)$. Il suit alors que

$$\pm i \langle \varphi, \varphi \rangle = \mp \langle i\varphi, \varphi \rangle = \langle \mathcal{A}^* \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{A} \varphi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{A}^* \varphi \rangle = \mp i \langle \varphi, \varphi \rangle$$

D'où $\varphi = 0$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Soit $\psi \in Im(\mathcal{A} \pm i)^\perp$ alors $\langle \mathcal{A} \pm i \varphi, \psi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in Dom(\mathcal{A})$. Il suit alors que $\psi \in Dom(\mathcal{A}^*)$ et que $\mathcal{A}^* \psi = \pm i \psi$. c'est à dire que $\psi \in \ker(\mathcal{A} \mp i) = \{0\}$ et donc $Im(\mathcal{A} \pm i)$ est dense dans \mathcal{H} . Montrons que $Im(\mathcal{A} \pm i)$ est fermé. En effet, on a pour tout $\varphi \in Dom(\mathcal{A})$

$$\|(\mathcal{A} \pm i)\varphi\|^2 = \|\mathcal{A}\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2$$

puisque \mathcal{A} est symétrique. Ceci entraîne que si $\varphi_n \in \text{Dom}(\mathcal{A})$ est une suite telle que

$$(\mathcal{A} \pm i)\varphi_n \rightarrow \psi$$

alors φ_n converge vers un φ . Comme \mathcal{A} est fermé, on en déduit que $\varphi \in \text{Dom}(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A} \pm i)\varphi = \psi$.

iii) \Rightarrow i) : Soit $\varphi \in \text{Dom}(\mathcal{A}^*)$, comme $\text{Im}(\mathcal{A} \pm i) = \mathcal{H}$ il existe $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{A})$ tel que $(\mathcal{A} - i)\psi = (\mathcal{A}^* - i)\varphi$. Puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, on a alors $\varphi - \psi \in \text{Dom}(\mathcal{A}^*)$ et $(\mathcal{A}^* - i)(\varphi - \psi) = 0$. Il en résulte que

$$\varphi - \psi \in \ker(\mathcal{A}^* - i) = \text{Im}(\mathcal{A} \pm i)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}.$$

D'où $\varphi = \psi \in \text{Dom}(\mathcal{A})$.

□

Corollaire 5.2.1 Soit \mathcal{A} un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) \mathcal{A} est essentiellement auto-adjoint.
- ii) $\ker(\mathcal{A}^* \pm i) = \{0\}$.
- iii) $\text{Im}(\mathcal{A} \pm i)$ est dense dans \mathcal{H} .

Preuve:

Il suffit d'appliquer le théorème 5.2.1 pour $\overline{\mathcal{A}}$.

□

5.3 Théorème de von Neumann

Ce théorème extrait du livre Reed-Simon [37].

Théorème 5.3.1 Soit \mathcal{A} un opérateur fermé à domaine dense sachant que

$$\text{Dom}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \{\psi \in \text{Dom}(\mathcal{A}) \text{ tel que } \mathcal{A}\psi \in \text{Dom}(\mathcal{A}^*)\}.$$

On définit l'opérateur $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ sur $\text{Dom}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$ par $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\psi = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\psi)$. Alors, $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ est auto adjoint.

Bibliography

- [1] C. Anné and N. Torki-Hamza. *The Gauss-Bonnet operator of an infinite graph*. Anal. Math. Phys., 16:137–159, 2015. [7](#), [8](#), [19](#), [28](#), [35](#), [37](#), [46](#)
- [2] H. Ayadi. *Opérateur de Gauß-Bonnet semi-Fredholm et propriétés spectrales sur les graphes infinis*. PhD thesis, Université de Nantes et Université de Carthage, 2015. [19](#), [70](#)
- [3] H. Ayadi. *Spectra of laplacians on forms on an infinite graph*. Oper. Matrices, 11:567–586, 2017. [8](#), [70](#), [72](#)
- [4] H. Baloudi, S. Golénia, and A. Jeribi. *The adjacency matrix and the discrete laplacian acting on forms*. arXiv, 2015. [8](#), [32](#), [42](#), [55](#), [58](#)
- [5] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*. Springer Lecture Notes in Maths, 1971. [8](#), [66](#)
- [6] M. Bonnefont and S. Golénia. *Essential spectrum and weyl asymptotics for discrete laplacians*. Ann. Inst. fourier, 65:1969–1998, 2015. [55](#)
- [7] Y. Chebbi. *The discrete laplacian of a 2-simplicial complex*. Potential Analysis, DOI 10.1007/s11118-017-9659-1, 2017. [7](#), [18](#), [21](#), [23](#), [35](#)
- [8] Y. Chebbi. *Spectral gap of the discrete laplacian on triangulations*. en cours de soumission, 2018. [8](#), [63](#)
- [9] P.R. Chernoff. *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*. J. Funct. Anal., 12:401–414, 1973. [7](#), [8](#)
- [10] F. Chung, A. Grigoryan, and S-T. Yau. *Higher eigenvalues and isoperimetric inequalities on riemannian manifolds and graphs*. Comm. Anal. Geom., 8:969–1026, 2000. [8](#), [77](#)
- [11] F.R.K. Chung. *On the spectrum of non-compact manifolds with finite volume*. Regional Conference Series in Mathematics, 92:207, 1994. [8](#), [77](#)

- [12] Y. Colin de Verdière. Spectres de grahes. 1998. 8, 63, 66, 67, 77, 83
- [13] Y. Colin De Verdière, N. Torki-Hamza, and F. Truc. Essential self-adjointness for combinatorial schrödinger operators ii-metrically non complete graphs. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, 14:21–38, 2011. 7, 36, 39
- [14] Y. Colin De Verdière, N. Torki-Hamza, and F. Truc. Essential self-adjointness for combinatorial schrödinger operators iii-magnetic fields. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 6:599–611, 2011. 36
- [15] B. Eckmann. *Harmonische funktionen und randwertaufgaben in einemkomlex*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 17:240–255, 1944. 76
- [16] K. D. Elworthy and X. M. Li. *Special itô maps and an l^2 -hodge theory for one forms on path spaces*. pages 145–162, 2000. 7, 25
- [17] D. L. Ferrario and R. A. Piccinini. *Simplicial structures in topology*. Springer-Verlag New York, DOI:10.1007/978-1-4419-7236-1, page 243, 2011. 13
- [18] L. Frank, D. Lenz, and D. Wingert. *Intrinsic metrics for non-local symmetric dirichlet forms and applications to spectral theory*. *J. Funct. Anal*, 266:4765–4808, 2014. 7, 8, 36, 38
- [19] M. Gaffney. *Hilbert space methods in the theory of harmonic integrals*. *Ann. Math.*, 78:426–444, 1955. 7
- [20] S. Golénia. *Hardy inequality and asymptotic eigenvalue distribution for discrete laplacians*. 266:2662–2688, 2014. 8
- [21] S. Golénia and C. Schumacher. *The problem of deficiency indices for discrete schrödinger operators on locally finite graphs*. *J. Math. Phys.*, 52:1–17, 2011. 58, 59
- [22] A. Grigoryan. *Analysis on graphs*. University of Bielefeld, 2009/2010. 63
- [23] A. Gundert and M. Szedlák. *Higher dimensional discrete cheeger inequalities*. *Journal of the European Mathematical Society*, 2:54–71, 2015. 81
- [24] X. Huang, M. Keller, J. Masamune, and R.K. Wojciechowski. *A note on self-adjoint extensions of the laplacian on weighted graphs*. *J. Funct. Anal.*, 265:1556–1578, 2013. 7, 8, 9, 36, 38, 39, 89, 90

- [25] *Dodziuk J. Elliptic operators on infinite graphs, in analysis, geometry and topology of elliptic operators.* World Scientific, pages 353–368, 2006. [58](#)
- [26] *M. Keller and D. Lenz. Unbounded laplacians on graphs: basic spectral properties and the heat equation.* Math. Model. Nat. Phenom., 5:198–224, 2010. [8](#), [31](#), [83](#)
- [27] *G. Kirchhoff. über de aufösung der gleichungen auf welche man bei der untersuchen der linearen vertheilung galvannischer ströme geführt wird.* 72:495–508, 1847. [7](#)
- [28] *GP. Kurasov, G. Malenová, and S. Naboko. Spectral gap for quantum graphs and their connectivity.* arXiv:1302.5022v1, 2013. [86](#)
- [29] *J. Lott. Numerical range, the field of values of linear operators and matrices, volume 42.* 1996. [72](#)
- [30] *R. Lyons and Y. Peres. Probability on trees and networks.* Cambridge University Press, 2014. [18](#)
- [31] *J. Masamune. Analysis of the laplacian of an incomplete manifold with almost polar boundary.* Rend. Mat. Appl., 25:109–126, 2005. [7](#)
- [32] *J. Masamune. A liouville property and its application to the laplacian of an infinite graph.* Contemp. Math., 484:103–115, 2009. [7](#), [19](#)
- [33] *O. Milatovic. Essential self-adjointness of discrete magnetic schrödinger operators on locally finite graphs.* Integr. Equ. Oper. Theory **71**, 71, 2011. [36](#)
- [34] *O. Milatovic. A sears-type self-adjointness result for discrete magnetic schrödinger operator.* 396, 2012. [36](#)
- [35] *R. J. Tessler O. Parzanchevski, R. Rosenthal. Isoperimetric inequalities in simplicial complexes.* Combinatorica, DOI: 10.1007, 36:195–227, 2016. [8](#), [63](#), [81](#)
- [36] *O. Parzanchevski and R. Rosenthal. Simplicial complexes: spectrum, homology and random walks.* Random Structures and Algorithms, DOI 10.1002/rsa, pages 225–260, 2016. [14](#)
- [37] *M. Reed and B. Simon. Methods of modern Mathematical Physics. II.* Academic Press, 1975. [9](#), [33](#), [54](#), [59](#), [61](#), [89](#), [93](#)
- [38] *M. Reed and B. Simon. Methods of modern Mathematical Physics. I.* Academic Press, 1980. [8](#), [9](#), [29](#), [54](#), [66](#), [69](#), [89](#), [92](#)

- [39] K. Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on hilbert space*. Graduate texts in mathematics, 265, 2012. 29
- [40] N. Torki-Hamza. *Laplaciens de graphes infinis i-graphes métriquement complets*. Confluentes Math., 2:333–350, 2010. 7
- [41] R. K. Wojciechowski. *Stochastic compactetness of graph*. *PhD thesis*, 2008. 58

List of Figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | <i>Triangulation</i> | 14 |
| 2.2 | <i>L'orientation d'une face</i> | 14 |
| 2.3 | <i>Triangulation 2-complexe d'arbre régulier \mathcal{T}_2^2</i> | 15 |
| 2.4 | <i>Triangulation de Delaunay</i> | 15 |
| 3.1 | <i>Arbre régulier</i> | 38 |
| 3.2 | <i>Triangulation d'un graphe 6-régulier</i> | 42 |
| 3.3 | <i>Arbre triangulaire</i> | 43 |
| 3.4 | <i>Triangulation d'une 1-décomposition de graphe</i> | 56 |
| 3.5 | <i>Triangulation de type livre</i> | 60 |
| 4.1 | <i>Exemple d'une triangulation avec trou spectral non nul</i> | 78 |
| 4.2 | <i>Tripartite d'une triangulation</i> | 81 |
| 4.3 | <i>Le graphe $\mathcal{K}(x)$ associé au sommet x.</i> | 83 |
| 4.4 | <i>Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}_5</i> | 86 |
| 4.5 | <i>Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}_6</i> | 86 |
| 4.6 | <i>Les graphes associés à la triangulation \mathcal{T}'_5</i> | 87 |

Thèse de Doctorat

Yassin CHEBBI

Laplacien discret d'un 2-complexe simplicial

The discrete Laplacian of a 2-simplicial complex

Résumé

Cette thèse donne un cadre général pour les Laplaciens définis en termes de structure combinatoire d'un complexe simplicial. Plus précisément, nous introduisons la notion de face triangle orientée dans un graphe connexe, orienté et localement fini. Cette structure de 2-complexe simplicial permet de définir notre Laplacien discret qui agit sur les triplets de fonctions, 1-formes et 2-formes. Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'étude du caractère essentiellement auto-adjoint de notre Laplacien. Pour cela, on introduit l'hypothèse géométrique de χ -complétude sur les triangulations pour garantir le caractère essentiellement auto-adjoint à l'opérateur de Gauß-Bonnet. Cette thèse traite également de questions de théorie spectrale des triangulations finies portant sur notre Laplacien. Nous trouvons une estimation pour le trou spectral du Laplacien supérieur dans une triangulation d'un graphe complet pour lequel nous généralisons la définition de la constante de Cheeger qui nous donne une majoration explicite. En outre, nous obtenons une minoration de cette estimation par la première valeur propre non nulle du Laplacien discret défini sur l'espace des fonctions sur les sommets.

Mots clés

Graphe, Complexe simplicial, Laplacien discret, Opérateur de Gauß-Bonnet, Spectre, Constante de Cheeger.

Abstract

This thesis gives a general framework for Laplacians defined in terms of the combinatorial structure of a simplicial complex. More precisely, we introduce the notion of orientated triangle face in a connected, orientated and locally finite graph. This structure of a 2-simplicial complex allows to define our discrete Laplacian which acts on the triplets of functions, 1-forms and 2-forms. In this context, we are interested in studying the essential self-adjointness of our Laplacian. Thus, we introduce the geometrical hypothesis of χ -completeness on triangulations to ensure the essential self-adjointness of the Gauß-Bonnet operator. This thesis deals also with questions of spectral theory of finite triangulations on our Laplacian. We find an estimate for the upper Laplacian spectral gap in a triangulation of a complete graph for which we generalize the definition of the Cheeger constant which gives us an upper bound. Moreover, we obtain a lower bound of this estimate by the first non-zero eigenvalue of the discrete Laplacian defined on the space of functions on the vertices.

Key Words

Graph, Simplicial complex, discrete Laplacian, Gauß-Bonnet operator, Spectrum, Cheeger constant.