



DIMENSION ET ENTROPIE DES ATTRACTEURS ASSOCIES A DES ECOULEMENTS REELS: ESTIMATION ET ANALYSE DE LA METHODE

Jean-Guy Caputo

► To cite this version:

Jean-Guy Caputo. DIMENSION ET ENTROPIE DES ATTRACTEURS ASSOCIES A DES ECOULEMENTS REELS: ESTIMATION ET ANALYSE DE LA METHODE . Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1986. Français. <NNT : >. <tel-01794089>

HAL Id: tel-01794089

<https://hal.science/tel-01794089v1>

Submitted on 17 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THESE
présentée par

Jean Guy CAPUTO

pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

SUJET

DIMENSION ET ENTROPIE DES ATTRACTEURS
ASSOCIES A DES ECOULEMENTS REELS:
ESTIMATION ET ANALYSE DE LA METHODE

Soutenue le 25 Juin 1986 devant la commission d'Examen

MM Y. Pomeau

P. Atten
M. Cosnard
M. Dubois
E. Hopfinger
R. Rammal

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord P. Atten pour m'avoir initié à la recherche ; il a assuré l'encadrement de ce travail avec beaucoup de compétence tout en me laissant une grande indépendance.

Que les autres personnes qui ont permis ce travail et y ont contribué trouvent ici toute ma reconnaissance ; en particulier : P. Bergé, M. Dubois, Y. Gagne, B. Malraison et P. Manneville.

Monsieur Y. Pomeau a suivi l'évolution de cette étude avec un grand intérêt et a bien voulu présider le jury ; je l'en remercie vivement.

C'est par de longues discussions avec M. Cosnard, J. Demongeot et F. Macl^Cuskey que j'ai pu aborder certains des problèmes mathématiques évoqués dans ce mémoire. Je les en remercie.

Que soit remercié R. Rammal pour des suggestions et des remarques de même que pour avoir rapporté sur ce travail.

E. Hopfinger a bien voulu participer au Jury et je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie aussi Madame PETROWITCH qui a assuré la frappe avec diligence, G. Laulier pour une assistance dans la réalisation et Madame Trévisson pour le tirage.

Enfin je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire pour la bonne atmosphère qui y règne, Isabelle Bouvier pour sa présence, mes amis et tous ceux qui pensent trouver leur place ici.

INTRODUCTION		5
Liste des notations utilisées		9
CHAPITRE I	INTRODUCTION , RAPPELS DE DEFINITIONS ET DISCUSSION	
A -	L'équation de Navier-Stokes	10
B -	Le problème étudié par Ruelle et Takens et l'observabilité des tores T_n	14
C -	Attracteurs pour un système dynamique différentiable dans R^n	22
D -	L'essence des attracteurs étranges ou les systèmes hyperboliques	23
E -	Caractérisation métrique des attracteurs	26
F -	Caractérisation probabiliste des attracteurs	28
CHAPITRE II	LES METHODES DE CARACTERISATION DE SIGNAUX CHAOTIQUES EXPERIMENTAUX	
A -	Spectres de Fourier et fonctions d'auto-corrélation	37
B -	La construction d'un pseudo-espace des phases	44
C -	Estimation des exposants de Lyapunov et des dimensions pour un signal expérimental	47
D -	Mise en oeuvre de la méthode de calcul de D_2	53
CHAPITRE III	APPLICATION DE LA METHODE DE RECONSTITUTION D'ESPACE DES PHASES ET DE DETERMINATION DE LA DIMENSION A DES SIGNAUX MODELES TRES SIMPLES	
A -	Signaux periodiques	64
B -	Signaux multiperiodiques	77
C -	Etude du bruit blanc	85
CHAPITRE IV	LA CARACTERISATION D'ATTRACTEURS EXPERIMENTAUX DE FAIBLE DIMENSION	
A -	Introduction	95
B -	Estimation de la dimension	95
C -	La méthode pratique de calcul de l'entropie	105

		Pages
D -	Le calcul de l'entropie sur les systèmes de Rayleigh-Bénard et de Lorenz	111
E -	Premières limitations de la méthode: variations de n et p	129
CHAPITRE V	LES ATTRACTEURS A HAUTE OU MOYENNE DIMENSION ET UNE APPROCHE DES PROBLEMES DE TURBULENCE SPATIO-TEMPORELLE	
A -	Introduction	141
B -	Particularités des courbes $C(r)$	141
C -	Les problèmes associés à la fréquence d'échantillonnage	144
D -	Analyse de solutions d'équations aux dérivées partielles	157
E -	Possibilités de la méthode: discussion	169
CONCLUSION		175
BIBLIOGRAPHIE		177

INTRODUCTION

Le problème de la turbulence a été posé il y a un siècle environ. Il n'est pas encore résolu. Une première approche a consisté en une description zoologique du caractère désordonné et apparemment aléatoire du mouvement. Puis Taylor a introduit les idées statistiques avec le concept limite de turbulence homogène et isotrope. Cet aspect probabiliste a été mis en valeur au travers de la théorie de Kolmogorov : l'élément principal étant celui de cascade d'énergie entre différentes échelles de tourbillons. Landau a été le premier à proposer une vision globale du phénomène sous la forme d'une évolution de l'ordre vers le désordre. Il est parti du concept d'instabilité et a suggéré que la transition vers la turbulence se fait par une succession d'instabilités. Comme la théorie des phénomènes non linéaires n'était pas très développée à l'époque, Landau avait une vision "linéaire" de cette complexification. Pour lui, le champ de vitesse d'un écoulement turbulent était quasi périodique. A la limite d'un nombre de Reynolds infini, il y avait une infinité de modes.

Actuellement la vision est très différente. En 1963, Lorenz un météorologiste, a présenté un système de trois équations différentielles non linéaires couplées pour modéliser un écoulement de convection atmosphérique. Ainsi il a introduit le concept de système dynamique dans les problèmes hydro-dynamiques. Cette notion provenait de questions de la mécanique céleste et avait donné lieu au développement d'un important courant mathématique d'étude des phénomènes non linéaires, tant conservatifs que dissipatifs. Il a été montré qu'un système déterministe pouvait présenter un comportement chaotique. En 1971, Ruelle et Takens ont créé une rupture épistémologique en reliant la turbulence au chaos des systèmes dynamiques. Ils ont montré qu'un système d'équations aux dérivées partielles pouvait être considéré comme un système dynamique dans un espace particulier. Ceci a deux conséquences pour le problème de la turbulence : celle-ci apparaît pour un nombre de Reynolds faible et la dynamique peut être décrite par un attracteur étrange. Cette approche a alors suscité de nombreux travaux théoriques et expérimentaux à la fois dans le domaine de l'hydrodynamique et des systèmes dynamiques.

Dans un premier temps l'étude expérimentale de la transition à la turbulence a confirmé les idées de Ruelle et Takens et établi de nouveaux scénari. Il fallait alors caractériser les états chaotiques à l'aide de concepts existants : dimension, entropie, exposants de Lyapunov. Ce problème de la "mesure" du chaos n'a pu être résolu que grâce au développement récent de nouvelles techniques comme celle de Grassberger et Procaccia (1983).

Ce travail s'inscrit dans la démarche de caractérisation des attracteurs pour des écoulements réels par la détermination de dimension et d'entropie. Son point de départ a été la première estimation de dimension effectuée sur deux cas particuliers par Malraison et Atten. La suite logique de ce travail était d'analyser la variation de la dimension en fonction du paramètre et l'estimation de l'entropie. Ces problèmes se sont révélés difficiles car les méthodes n'étaient pas au point : elles ont été données sous la forme d'un principe mais les règles de validité n'étaient pas fixées. C'est pourquoi notre démarche a été double. D'une part, nous avons voulu caractériser des attracteurs "expérimentaux" par la mesure de dimension et d'entropie. D'autre part, nous avons étudié les conditions d'application ainsi que les possibilités de ces méthodes sur des systèmes dynamiques connus.

Dans le chapitre I nous rappellerons certains théorèmes et le lien qui existe entre la turbulence (c'est-à-dire le comportement irrégulier de solutions de l'équation aux dérivées partielles non linéaires de Navier-Stokes) et le chaos observé dans les systèmes dynamiques. Nous insisterons sur la notion de stabilité structurelle et de genericité. Seront brièvement rappelés ensuite la notion d'attracteur étrange chaotique et les outils pour leur caractérisation géométrique (dimension de Hausdorff, entropie topologique) et probabiliste (mesure de probabilité invariante, dimensions et entropies d'information et généralisées).

Le chapitre II sera consacré aux diverses méthodes actuellement disponibles pour la caractérisation de signaux chaotiques expérimentaux.

Nous montrerons l'inadéquation des méthodes classiques pour caractériser les attracteurs. Ensuite nous décrirons les méthodes qui permettent de reconstruire un pseudo espace des phases à partir d'un signal expérimental. Seront alors discutées les différentes méthodes qui ont été proposées pour calculer les dimensions et les entropies. Nous montrerons que la technique proposée par Grassberger et Procaccia est de loin celle qui est la plus adaptée au traitement de signaux expérimentaux. On donnera quelques précisions sur la manière pratique d'effectuer les calculs.

Dans le chapitre III, on étudie ce que donne la méthode sur des modèles très simples : signaux périodiques, quasi périodiques. La détermination de la dimension sera abordée dans le cas de signaux où la dynamique n'est pas homogène. Enfin l'étude d'un cycle limite bruité nous a permis d'examiner l'influence du bruit additif expérimental.

On aborde dans le chapitre IV le problème de la détermination effective de la dimension et de l'entropie pour des attracteurs de faible dimension. La confrontation des résultats obtenus pour un système expérimental (R.B.) et un système modèle (Lorenz) permet de conclure à la présence d'un attracteur chaotique de faible dimension (~ 3) dans l'espace des phases et de cerner un certain nombre de précautions qu'il faut prendre dans l'exploitation des calculs.

Dans le chapitre V on abordera le problème de la caractérisation d'attracteurs de dimension plus élevée essentiellement sur des systèmes modèles (système différentiel de Franceschini et équation aux dérivées partielles de Kuramoto-Sivashinski). On montrera que la fréquence d'échantillonnage doit être judicieusement choisie si on veut accéder à une information significative. Il sera montré que l'on peut analyser des quantités globales et locales provenant de l'équation de K.S. et accéder ainsi à la dynamique déterministe de ce système ;

ceci pose le problème de la vraie turbulence qui présente des caractéristiques spatiales et temporelles. Enfin nous rassemblerons nos résultats sur les conditions d'utilisation et les possibilités de la méthode en vue de caractériser des attracteurs de dimension assez élevée (> 10).

* * * * *

Liste des notations utilisées

N	nombre d'échantillons
m	nombre de moyennes effectuées pour calculer $C(r)$
Δt	période d'échantillonnage
p	décalage
$p\Delta t = \tau$	temps-décalage
n	dimension d'espace des phases
v	exposant associé à la courbe $C(r)$
Δ_i	pente locale associée au point r_i de la courbe $C(r)$
$T = (n-1) p\Delta t$	temps total utilisé pour reconstruire un vecteur de R^n
T_0	pseudo-période

CHAPITRE I : INTRODUCTION, RAPPEL DE DEFINITIONS ET DISCUSSIONS

Dans l'optique d'une présentation générale du lien qui peut être établi entre turbulence et systèmes dynamiques, je rappellerai d'abord quelques propriétés des équations de Navier-Stokes et le travail de Ruelle et Takens en 1971. Enfin, j'introduirai les objets mathématiques appelés "attracteurs étrangers" en montrant comment on peut les caractériser.

A - L'EQUATION DE NAVIER-STOKES

A.1 GENERALITES

La dynamique des fluides est basée sur l'hypothèse du milieu continu. On considère une "particule fluide", c'est-à-dire un élément de volume de fluide qui est grand par rapport aux échelles moléculaires et petit par rapport aux échelles de variation des grandeurs macroscopiques (vitesses d'un fluide turbulent par exemple).

On sait écrire l'équation qui régit le mouvement d'un tel système qui dérive de la relation fondamentale de la dynamique depuis la fin du siècle dernier (Navier et Stokes) :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

Les termes du membre de gauche correspondent à la dérivée totale de la vitesse $\vec{u}(x,t)$, la pression p tient compte des contraintes qui agissent sur l'élément fluide considéré, μ est la viscosité dynamique et \vec{F} une force volumique extérieure sur laquelle nous reviendrons. L'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$ devient, si $\rho = \text{cte}$ (ce qui est le cas pour toutes les situations expérimentales que nous avons considérées) :

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Pour décrire complètement le mouvement, il faut se fixer des conditions aux limites sur un volume Ω (que nous supposerons borné) ainsi que des conditions initiales.

Dans (1), le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ est non-linéaire. Supposons que l'on injecte de l'énergie par \vec{F} dans le système à une certaine échelle spatiale (en créant des tourbillons de taille donnée par exemple). La partie cinétique de cette énergie sera alors distribuée entre les différentes échelles spatiales de l'écoulement par le terme précédent (loi de Kolmogorov). En deçà d'une certaine taille de tourbillon, la viscosité va jouer et dissiper l'énergie grâce au terme $\mu \nabla^2 \vec{u}$. L'importance relative d'un terme vis à vis de l'autre est donnée par le rapport :

$$\frac{\rho \|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}\|}{\mu \|\nabla^2 \vec{u}\|} \sim \frac{\rho u d}{\mu} = Re \quad (3)$$

où d , u sont respectivement des longueurs et des vitesses typiques et Re est appelé le nombre de Reynolds.

La question qui se pose est de savoir ce qui se passe lorsque le nombre de Reynolds devient important. Observons le comportement temporel d'une composante de la vitesse en un point donné pour un fluide turbulent contenu dans un volume Ω fini. Un spectre de Fourier de cette quantité montre une zone large bande qui indique que toutes les fréquences sont alimentées en énergie. Une autre caractéristique est le fait que le comportement est imprédictible (par exemple la fonction d'auto-corrélation temporelle tend vers 0).

Dans la pratique, les expériences que nous avons analysées sont généralement des instabilités convectives ; dans ces systèmes la force est une force extérieure indirecte. Il faut alors ajouter à (1) et (2) une équation qui décrit l'évolution de cette dernière. Par exemple pour le problème de Rayleigh-Bénard (couche horizontale de fluide chauffée par dessous), c'est la distribution de température qui induit une distribution de masse volumique qui constitue le moteur de l'instabilité par l'intermédiaire de la poussée d'Archimède. Ainsi le champ de température est couplé très fortement au champ de vitesse. Les équations de ce problème dans le cas général sont plus compliquées que (1) et (2), nous ne les présenterons donc pas.

Cependant, les idées qualitatives qui vont suivre peuvent s'étendre à de tels systèmes et à d'autres objets physiques qui sont régis par des équations aux dérivées partielles non-linéaires dissipatives. Nous considérerons donc (1) et (2) comme un modèle typique.

Lorsque l'on examine le comportement turbulent d'un liquide confiné et que l'on essaye de comprendre la nature de celui-ci, une idée qui pourrait venir à l'esprit est que (1) et (2) n'ont pas toujours de solutions ou même que celles-ci ne sont pas régulières. C'est pourquoi nous évoquons maintenant les propriétés d'existence et d'unicité des solutions de (1) et (2).

A.2 EXISTENCE ET UNICITE DE SOLUTIONS, SINGULARITES

Pour étudier ce problème, il faut distinguer le cas bi-dimensionnel ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) du cas tri-dimensionnel ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Pour le premier, on démontre qu'il y a existence et unicité des solutions des équations de Navier-Stokes (pour $\mu > 0$) pour tous les temps. De plus, ces solutions sont analytiques (dérivables et toutes les dérivées continues) et réelles.

A trois dimensions, la solution jouit des mêmes propriétés pour un certain intervalle de temps fini. Ensuite, la vitesse peut devenir non bornée à des instants singuliers (Leray), on parle alors de singularité. Mathématiquement, on est incapable de dire si un tel phénomène se produit ou non. Un certain nombre d'études numériques ont été effectuées pour tenter de les mettre en évidence.

Intuitivement, on sent que les conditions pour lesquelles une singularité peut se produire correspondent à un champ de vitesse très inhomogène. Une façon de réaliser cela est de prendre des conditions initiales correspondant à des tourbillons.

Citons deux voies de recherche des singularités : la voie directe et l'approche par les singularités complexes. La première utilise des méthodes dites de vortex : on peut décrire la distribution de la vitesse à une distance donnée d'un tourbillon par des équations analogues à celles de la magnétostatique tirées de (1) et (2) dans l'approximation $\mu = 0$.

Les simulations [1] effectuées sur un seul vortex que l'on perturbe semblent indiquer que la taille de celui-ci tend vers 0, ce qui implique que la vitesse maximum en son intérieur tend vers l'infini (la circulation est constante). Il faut se garder cependant de conclure à la présence de singularités car les calculs évoqués plus haut reposent sur le fait que les tourbillons conservent indéfiniment leur aspect cylindrique*.

Pour la deuxième approche, considérons la vitesse $u(x,t)$; elle dépend de coordonnées d'espace-temps réelles $(x,t) \in \mathbb{R}^4$; on peut plonger \mathbb{R}^4 dans \mathbb{C}^4 (\mathbb{C} corps des complexes) et la solution "prolongée" peut alors présenter des singularités [2]. Il peut se produire que ces singularités soient très proches du domaine réel. La simulation des équations (1) et (2) pour $\mu = 0$ et des conditions initiales de tourbillon de Taylor-Green a révélé que les singularités d'espace complexe se rapprochent du domaine réel suivant une loi de puissance [2], sans toutefois jamais l'atteindre.

Ainsi le problème de l'existence ou non de singularités pour les équations de Navier-Stokes est ouvert. Cependant, dans toute la suite nous supposons que les solutions de (1) et (2) sont uniques et régulières pour tous les temps. Dans cette optique, pour expliquer le comportement des écoulements turbulents, Landau a proposé la théorie suivante.

A.3 LA TURBULENCE VUE PAR LANDAU (1944) ([3])

Supposons un écoulement stationnaire. Si on augmente le nombre de Reynolds, celui-ci va se destabiliser, d'après [3] on aura alors un écoulement qui présentera une composante temporelle périodique⁺.

* On sait en particulier que des tourbillons cylindriques peuvent donner lieu à des rubans de vorticité (rotationnel de la vitesse) qui sont eux-mêmes instables.

+ La vitesse s'écrit alors :

$$v = \operatorname{Re} \left[\sum_{p \in \mathbb{Z}} A_p e^{i(2\pi f_1 t + \varphi_1)p} \right]$$

Pour une valeur supérieure de Re celui-ci va de nouveau de déstabiliser et donner lieu à un écoulement bi-périodique [3] ($1/f_1, 1/f_2$) avec f_1/f_2 irrationnel*.

Ce processus va se répéter [3] et on aura un écoulement n -périodique (tore T_n) avec $n \rightarrow \infty$ pour $Re \rightarrow \infty$. Cette théorie est peu satisfaisante dans la mesure où la solution pour $n < \infty$ est régulière (la fonction d'auto-corrélation ne tend pas vers 0) ; de plus le spectre en fréquences est discret. Ces deux faits sont contraires aux observations, pourtant ce n'est qu'en 1971 que cette phénoménologie a pu être complètement remise en question.

B - LE PROBLEME ETUDIE PAR RUELLE ET TAKENS ET L'OBSERVABILITE DES TORES T_n

De façon très générale, en l'absence de singularités, une équation aux dérivées partielles peut être considérée comme une équation différentielle dans un espace de champs que nous appellerons espace des phases. Dans le cas particulier de (1) et (2) celui-ci sera le sous-espace de l'espace (de dimension infinie) des champs de vitesse de carré sommable $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tels que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ frontière du volume Ω confinant le fluide [4]. L'équation (1) devient alors [4] :

$$\frac{d\mathbb{U}}{dt} = M(\mathbb{U}, t) \quad (4)$$

où \mathbb{U} correspond à la donnée de la vitesse en tous les points du volume Ω . Il faut donc considérer (4) comme une équation différentielle ordinaire liant des opérateurs dans un espace de dimension infinie et l'étudier en tant que telle.

Nous supposerons que la définition de conditions initiales :

* On parle en ce cas de tore T_2 . Un tore T_2 peut être considéré comme "produit" de deux courbes fermées ; ces dernières étant associées chacune à une des fréquences

$$\mathbb{U}|_{t=0} = \mathbb{U}_0 \quad (5)$$

définit la solution \mathbb{U}_t de (4) de façon unique ; l'opérateur f^t tel que $\mathbb{U}_t = f^t \mathbb{U}_0$ sera appelé le flot associé à \mathbb{U}_0 . La théorie de Landau impliquait que \mathbb{U}_t était une fonction n -périodique et donc que \mathbb{U}_t décrivait un objet de dimension n (tore T_n) dans l'espace des phases. Ruelle et Takens ont montré que ces objets peuvent disparaître lors de petites perturbations du système (4).

Pour cela, ils se sont ramenés à un espace de dimension finie, grâce au théorème de la variété centrale que nous allons expliciter. Remarquons qu'en utilisant des outils globaux (majorations de normes dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$), Temam [5] a pu montrer récemment que la dimension des attracteurs pour les équations de Navier-Stokes était finie. Ici cependant nous reprendrons l'aspect historique du problème en montrant que sa résolution a constitué le point de départ d'une nouvelle conception des phénomènes turbulents.

B.1 LE THEOREME DE LA VARIETE CENTRALE

Pour étudier le problème de la stabilité de tores T_n , Ruelle et Takens se sont d'abord ramenés à un sous-ensemble de l'espace des phases ($\mathbb{L}^2(\Omega)$ de dimension infinie) qui est de dimension finie. Avant d'explicitier ce théorème montrons comment évolue ce que l'on va appeler un point fixe du système.

Pour cela, considérons le cas particulier où M de (4) ne dépend pas du temps (on peut souvent s'y ramener). Soit \mathbb{U}_s un champ tel que $M(\mathbb{U}_s) = 0$; $\mathbb{U}_t = \mathbb{U}_s$ est une solution de (4) mais on ne sait pas si elle est observable ou non. Pour l'être, elle doit être stable c'est-à-dire que toute perturbation de \mathbb{U}_t autour de \mathbb{U}_s s'amortit. Ceci se produit lorsque la différentielle de M en \mathbb{U}_s a toutes les valeurs propres de son spectre⁺ qui sont à partie réelle négative.

+ La différentielle qui est un opérateur linéaire est analogue dans ce problème au hamiltonien qui possède des niveaux d'énergie en Mécanique Quantique. L'espace est ici aussi un espace de Hilbert.

Imaginons maintenant que l'une des valeurs propres ait une partie réelle nulle et que lors d'une évolution des paramètres cette dernière deviendra positive. Le point fixe U_s deviendra instable ; intuitivement on comprend que l'on peut réduire l'étude locale du changement de la dynamique à un espace de dimension 1. Ceci peut se formaliser sous la forme d'un théorème que nous énoncerons dans le cas où l'espace des phases est de dimension finie [6]. Pour cela il est d'abord nécessaire d'introduire la notion, que nous ré-utiliserons par la suite, de champ de vecteurs.

Considérons (4) avec M indépendant de t , dans un espace des phases de dimension faible (\mathbb{R}^2 pour fixer les idées). Le champ de vecteurs associé à (4) sera par définition la carte des vecteurs tangents à la trajectoire en tous les points de \mathbb{R}^2 ; ceux-ci sont donnés par $M(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il est clair que la donnée du champ de vecteur $M(x,y)$ définit (4) de façon unique.

Nous allons maintenant citer le théorème. Plaçons nous dans \mathbb{R}^n et considérons un champ de vecteurs C^r (r fois différentiable) qui possède le point fixe $(0,0,\dots,0)$. Considérons la matrice jacobienne des dérivées partielles et supposons qu'elle possède des valeurs propres à partie réelle négative (en nombre σ_s), nulle (σ_c). Alors, il existe au moins une variété W_c (de classe C^{r-1})⁺ invariante localement sous l'action du flot qui est tangente en 0 au sous-espace propre E_c soutendu par les valeurs propres associées à σ_c . Cette variété centrale est très importante pour déterminer comment évoluent les propriétés de stabilité locales d'un point lorsque l'on change les paramètres (nous supposerons dorénavant qu'il n'y en a qu'un, que l'on appellera μ). Lors d'une variation infinitésimale de μ , la structure locale du flot associée à des valeurs propres de partie réelle non nulle ne va pas beaucoup évoluer (les systèmes que l'on considère sont suffisamment "lisses" pour cela).

+ Pour fixer les idées une variété différentiable de classe C^k et de dimension n est un ensemble M tel que pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage U_x pour lequel il existe une bijection de classe C_k $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_x$ dont la réciproque ϕ^{-1} est aussi de classe C^k (ex: la sphère dans \mathbb{R}^3 est une variété C^∞ de dimension 2).

Par contre, les valeurs propres dont la partie réelle est nulle pour $\mu = \mu^*$, peuvent devenir à partie réelle positive ou négative lorsque $\mu > \mu^*$. Il y aura alors des nouvelles directions instables ou stables. Le corollaire très important de ce théorème est que l'on peut réduire l'étude du changement de la dynamique du champ de vecteurs de \mathbb{R}^n à W_c qui possède en général une dimension nettement plus faible*. Ruelle et Takens [7] ont utilisé une version de ce théorème qui s'applique dans le cas où l'espace des phases est de dimension infinie, ce qui est le cas pour celui associé aux équations de Navier-Stokes ; ils se sont alors ramenés à une variété de dimension faible. En fait, ils se sont placés heuristiquement dans \mathbb{R}^n .

B.2 LE PROBLEME DE LA STABILITE STRUCTURELLE ET DE L'OBSERVABILITE

La notion de stabilité structurelle de systèmes est liée à la structure de l'ensemble de ces systèmes. Considérons l'ensemble des systèmes dynamiques lisses (c'est-à-dire des champs de vecteurs C^∞) qui agissent sur une partie bornée de \mathbb{R}^n . On peut définir une norme sur ces champs de vecteurs. Dans [7], on peut voir l'exemple d'une telle norme construite à l'aide des différentes dérivées partielles du champ. Ruelle et Takens ont montré (proposition 9.2 de [7]) que quelque soit un voisinage (dans l'espace des champs de vecteurs et au sens de la distance définie par la norme ci-dessus) d'un champ de vecteurs qui laisse invariant un tore T_k ($k \geq 4$), il contient un ensemble ouvert de champs de vecteurs qui possèdent un "attracteur étrange" (attracteur Axiome A non trivial).

Nous expliciterons plus loin ces derniers termes. De tels objets sont stables par rapport à de petites perturbations des paramètres, puisque précisément ils constituent un ensemble dense de l'ensemble des champs de vecteurs pour la norme définie plus haut.

* Dans le cas très intéressant physiquement, où toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle, cette réduction à la variété centrale permet une analyse non linéaire détaillée du système [8].

La situation est un peu analogue à celle de l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} et de l'ensemble des réels \mathbb{R} . Supposons que l'on "perturbe" un rationnel en modifiant à l'infini les termes de son écriture décimale, alors on a toutes les chances de tomber sur un réel ; ce dernier restera un réel sous l'action des mêmes perturbations. On dit que les tores T_k ($k \geq 4$) sont structurellement instables ; au contraire les attracteurs étranges sont structurellement stables. Ce résultat a été étendu dans [9] à $k = 3$ et à des champs de vecteurs de classe C^2 . Peixoto (cité dans [7]) avait montré que les champs de vecteurs laissant invariant un tore T_2 sont structurellement instables, et cèdent la place à des champs de vecteurs périodiques lorsqu'ils sont soumis à de petites perturbations (on parle en ce cas d'accrochage). Tous ces théorèmes de stabilité structurelle nous disent que l'on peut trouver des champs de vecteurs possédant des "attracteurs étranges" aussi près que l'on veut des tores T_k ($k \geq 3$). Cependant ils ne nous renseignent pas sur le nombre (la mesure) de ces objets dans un voisinage (toujours dans l'espace des champs de vecteurs) de T_k en fonction de la taille de ce voisinage. En particulier s'ils sont en densité de probabilité négligeables on ne les observera pas. On en arrive à la notion d'observabilité qui va refléter davantage la réalité expérimentale. Ainsi, la famille de difféomorphismes (bijections différentiables et dont la réciproque est différentiable) du cercle $[0, 2\pi[$:

$$A_\alpha \quad \gamma : \longrightarrow \gamma + \alpha + \varepsilon \sin \gamma \quad \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{array} \quad (6)$$

que l'on peut considérer comme sections de Poincaré (coupes orientées) d'un flot sur un tore T_2 , ne devraient pas remplir le cercle pour des valeurs quelconques de ε et α . (On devrait en effet observer une trajectoire périodique, c'est-à-dire fermée sur T_2 et celle-ci ne donnerait qu'un nombre fini de points dans la section). En fait [10], bien que l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquels on a une trajectoire fermée soit partout dense dans l'espace des paramètres (ε, α) (ce qui montre la stabilité structurelle de celle-ci) il devient -en densité de probabilité- négligeable lorsque ε_0 (tel que $\varepsilon < \varepsilon_0$) tend vers 0. Le nombre ε_0 peut être considéré comme la taille du voisinage (évoqué précédemment) ou l'importance de la non-linéarité. Ce résultat confirme l'observation numérique de trajectoires qui remplissent le cercle pour ε_0 petit, pour le système (6).

Dans ce cas particulier, la situation peut être étudiée complètement et les tores à nombre de rotation (quantité mesurant le nombre de "tours" effectués en moyenne en une itération du difféomorphisme), proche voir [10] d'un nombre rationnel vont se déstabiliser les premiers (théorème Kolmogorov-Arnold et Moser). Pour répondre à la question de l'observabilité de tores T_3 , T_4 , des simulations numériques ont été effectuées récemment [11]. Les auteurs ont considéré des applications de $[0, 2\pi]^2$ où chaque coordonnée ressemblait à (6) ; de tels systèmes peuvent être assimilés à des sections de Poincaré de tores T^3 (ou T^4). La perturbation est simulée en introduisant une amplitude et une phase aléatoire dans le sinus de (6). Ces calculs indiquent que plus l'intensité de la perturbation est grande (l'équivalent du ϵ_0 précédent) et plus le pourcentage (tirage aléatoire sur l'amplitude et la phase) de tores qui vont se déstabiliser augmente. L'idée qui se dégage de cette étude est que si l'intensité du "couplage" non-linéaire entre oscillateurs diminue alors on pourra observer des tores T_n ($n \gg 3$). Expérimentalement, on a pu réaliser des expériences de convection thermique dans lesquelles il y avait quatre fréquences incommensurables. La taille du récipient est grande et trois fréquences sur les quatre sont localisées spatialement [12] ; ceci semble impliquer que le couplage entre ces modes est faible. Dans le même état d'esprit [13] un système de 3 systèmes différentiels non-linéaires très faiblement couplés présentant chacun un tore T_2 a été étudié. On a alors un mouvement sur un tore T_6 ($= T_2 \times T_2 \times T_2$).

Lorsque des tores T_n se déstabilisent, ils peuvent -si l'intensité de la perturbation est faible- donner lieu à des tores T_{n-1} , T_{n-2} , ... ou -si celle-ci est plus forte- des "attracteurs étranges" dont nous allons évoquer les principales propriétés.

B.3 LES ATTRACTEURS ETRANGES : UN APERÇU

Supposons le système dissipatif, c'est-à-dire qu'un volume infinitésimal tend vers 0 sous l'action du système*. Les solutions peuvent tendre vers des attracteurs simples : points fixes ou cycles

* Il y a ici une grande différence avec les systèmes hamiltoniens ou plus généralement conservatifs pour lesquels le volume usuel de l'espace des phases est conservé : théorème de Liouville.

limites ou même tores T_n . Si la dimension de l'espace des phases est supérieure ou égale à 3, on peut avoir des attracteurs plus compliqués. La trajectoire s'inscrira sur un objet fractal dont la dimension est génériquement non-entière. Nous verrons plus loin que l'on peut définir un "nouveau volume" qui sera conservé pour ces systèmes (notion de mesure).

Sur ces attracteurs particuliers, la dynamique est presque toujours* chaotique, les trajectoires très proches divergent exponentiellement. L'objet étant borné, il y a convergence exponentielle dans d'autres directions (pour une image, voir Figure 1). Sur un tel système on perd très vite la donnée d'une condition initiale. Il agit donc comme un générateur d'information vis à vis d'un observateur extérieur.

De tels attracteurs présentent pour des observables définies sur l'espace des phases certaines des caractéristiques que nous avons évoquées à propos des écoulements turbulents : un spectre de Fourier large bande et une fonction d'auto-corrélation temporelle qui tend vers 0. Nous allons préciser davantage ces objets en présentant les propriétés d'un système dynamique différentiable de \mathbb{R}^n .

Les résultats cités plus haut (instabilité structurelle des tores T_k , $k \geq 3$) sont valables pour des objets de dimension finie (espaces euclidiens ou variétés). Nous nous ramènerons à \mathbb{R}^n sachant que l'on peut plonger toute variété différentiable de dimension n dans \mathbb{R}^{2n+1} par un difféomorphisme (bijection bi-différentiable) (théorème de Whitney, voir [15]). Teman [4, 5] a montré que la dimension des attracteurs pour les équations de Navier-Stokes était finie⁺.

* Mais pas toujours, Grebogi, Ott, Pelikan et Yorke ont donné un exemple d'attracteur étrange (fractal) non chaotique [14] pour une classe de systèmes modélisant un oscillateur (pendule) non-linéaire excité par deux fréquences incommensurables (f_1, f_2) . Un tel objet se trouve détruit et devient chaotique si la perturbation n'est pas quasi-périodique de périodes $1/f_1$, $1/f_2$. Usuellement de tels systèmes semblent rares ; un comportement fractal non chaotique se rencontrera pour des valeurs singulières du paramètre d'instabilité Ex. $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ $\mu = 3.6...$

+ en l'absence de singularités pour la solution.

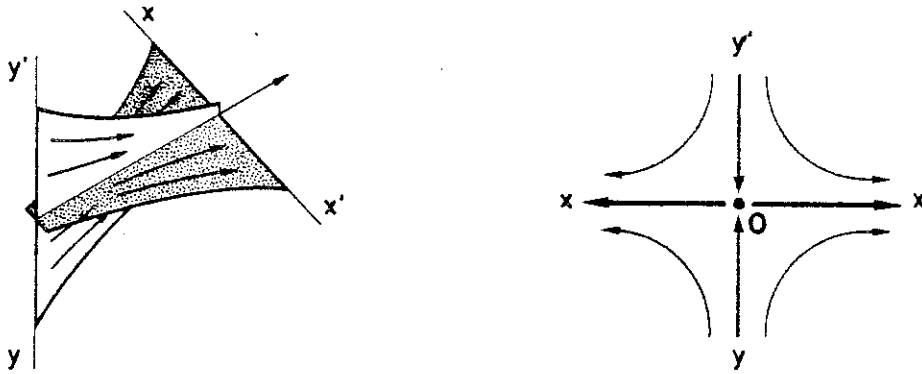


Figure 1 : Image de l'hyperbolicité pour un flot

XX' correspondant à l'espace instable E_X^i

YY' correspondant à l'espace stable E_X^s

OO' correspondant à l'espace tangent E_X^o

Nous supposons que ces attracteurs reposent sur des variétés de dimension finie que l'on peut alors plonger dans \mathbb{R}^n . Nous verrons au chapitre II la manière pratique de réaliser cette dernière opération qui est le problème auquel est confronté l'expérimentateur en hydrodynamique.

Nous allons maintenant illustrer plus précisément les problèmes associés au système dans son espace des phases en étudiant le cas d'un système dynamique de \mathbb{R}^n .

C - ATTRACTEURS POUR UN SYSTEME DYNAMIQUE DIFFERENTIABLE DANS \mathbb{R}^n

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Une fois la condition initiale \mathbf{x}_0 fixée, la solution $\mathbf{x}_t = T^t \mathbf{x}_0$ existe et est unique (en particulier il n'y a pas de croisement de trajectoires). De plus, le système dynamique T que nous considérerons sera dissipatif (les volumes de l'espace des phases seront contractés en moyenne sous l'action de T). A ce propos il est intéressant de mentionner que pour une transformation T à temps discret, les éléments de volume infinitésimaux au point \mathbf{x} croissent proportionnellement au déterminant de la matrice des dérivées partielles en ce point. Pour un système différentiel, c'est la trace de la matrice jacobienne qui intervient dans la croissance relative d'un élément de volume infinitésimal. En effet, soit $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$ la matrice jacobienne, l'équation linéarisée de la transformation T s'écrit :

$$\dot{u} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}(t)} u \quad (7)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$. Considérons un élément de volume $U = |U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n|$ infinitésimal de \mathbb{R}^n où les U_i obéissent à (7). Alors [16] :

$$\frac{\dot{U}}{U} = \text{Tr} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}(t)} \quad (8)$$

Dans certains cas, $\text{Tr} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) < 0$ ne dépend pas de \mathbf{x} ; cela se produit par exemple pour le système de Lorenz [17]. Cependant, cette propriété est très rare dans l'ensemble des systèmes dynamiques.

Pour un système général, F est une fonction de x (de même le déterminant des dérivées partielles si T est à temps discret). Ainsi le taux de dissipation dépend en général de la position dans l'espace des phases.

Il existe même des systèmes tels que celui qui a été présenté dans [18] pour lesquels $\text{Tr} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) x(t)$ est en moyenne négative tout en étant nulle pour certaines trajectoires. Dans ce cas particulier, l'espace des phases présente des zones conservatives (tores de K.A.M.) et un attracteur. Il y a donc plusieurs ensembles qui vont décrire le comportement asymptotique des trajectoires. Par la suite, nous supposons que nous avons un attracteur unique dans l'espace des phases ou que les conditions initiales que nous avons ne donnent pas lieu à une ambiguïté dans les conditions finales.

D - L'ESSENCE DES ATTRACTEURS ETRANGES OU LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES [19]

Les situations pour lesquelles on peut développer une théorie mathématique complète sont celles où le système présente la propriété d'hyperbolicité⁺. Cette notion formalise la contraction locale suivant certaines directions et la dilatation suivant d'autres. Cette propriété se conserve lors de petites perturbations du système : les systèmes hyperboliques sont structurellement stables.

Nous gardons cette définition sous son aspect formel car nous l'analyserons en détail sur des exemples par la suite.

Soit T une application différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n*} et soit Λ compact tel que $T\Lambda \subset \Lambda$. Supposons T inversible sur un voisinage de Λ . Soit DT_x la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right)$ (d'ordre n) en x . L'ensemble Λ sera dit hyperbolique si pour tout x de Λ \mathbb{R}^n se décompose

+ On parle aussi de C-systèmes ou systèmes Axiome A, lorsque des propriétés additionnelles sont vérifiées.

* Par exemple une application à temps discret ou la section de Poincaré d'un flot.

en une somme directe de sous-espaces $\mathbb{R}^n = E_x^s \oplus E_x^i$ (tout vecteur de \mathbb{R}^n s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de E_x^s et d'un vecteur de E_x^i) tels que :

a : E_x^s et E_x^i sont invariants par DT_x

$$DT_x E_x^s = E_{Tx}^s$$

$$DT_x E_x^i = E_{Tx}^i$$

b : $\exists C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ (indépendants de x) tels que

$$\begin{array}{ll} \text{si } \xi \in E_x^s & \|DT_x^n \xi\| \leq C \lambda^n \|\xi\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \xi \in E_x^i & \|DT_x^n \xi\| \leq C \lambda^n \|\xi\| \quad \text{---} \end{array}$$

c : E_x^s et E_x^i dépendent continûment de x .

E_x^s (E_x^i) est appelé espace stable (instable). Pour de tels systèmes on a une structuration de l'espace régulière avec dans chacune des directions un comportement contractant (E_x^s) ou dilatant (E_x^i) et celle-ci se transporte de façon continue avec x .

Remarques :

1. Le cas des systèmes différentiels $\dot{x} = F(x)$ et $x = f^t x_0$ à temps continu est légèrement plus compliqué : il faut tenir compte du vecteur tangent ($\mathbb{R}^n = E_x^s \oplus E_x^0 \oplus E_x^i$ avec dimension $E_x^0 = 1$) (voir figure 1).
2. Pour de tels systèmes on peut montrer l'existence de variétés stables W_x^s et instables W_x^i qui sont tangentes en x à E_x^s et E_x^i .
3. Dans l'ensemble des systèmes hyperboliques il existe une sous-classe de systèmes appelés difféomorphismes Axiome A. Ils sont tels que l'ensemble \bigwedge des points récurrents* est compact et hyperbolique et tels que l'ensemble des points périodiques soit dense dans \bigwedge .

* x_0 est récurrent si il existe des points x très proches de x_0 tels que la trajectoire issue de x repasse très près de x_0 en attendant suffisamment longtemps (plus précisément pour tout ouvert $U \ni x_0$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n U \cap U \neq \emptyset$).

4. Pour un attracteur Axiome A, on exige en plus que Λ soit un attracteur (c'est-à-dire que l'ensemble des conditions initiales dont les trajectoires atteignent l'attracteur soit de mesure de Lebesgue positive). De plus il faut qu'il existe un $x \in \Lambda$ tel que $T^n x$ soit dense dans Λ . (Tout point de Λ est atteint par $T^n x$)

Ce type de système est académique. Le contexte dans lequel on parle d'attracteurs est plus vaste (voir les polémiques à propos des définitions d'attracteurs) cependant il est des cas où il a été possible de montrer que l'attracteur est hyperbolique ; en voici quelques exemples :

Pour la transformation de Lozi [20] dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (9)$$

on a pu démontrer l'hyperbolicité en presque tous les points d'une partie de \mathbb{R}^2 qui contient l'attracteur (voir références dans [21]). Pour le système de Lorenz [17], on a considéré la transformation T induite par le flot $f^t x$ à l'intérieur de la section de Poincaré ($z = \text{cte}$). Sinai et Vul [22] ont vérifié numériquement les conditions d'hyperbolicité (du moins pour ce qui est de la dilatation) sur T . Remarquons que l'hyperbolicité de la transformation induite n'entraîne pas celle du flot. Néanmoins, il est très probable que l'attracteur de Lorenz soit hyperbolique. Au contraire, la transformation de Hénon [23] qui correspond à (9) avec x_n^2 au lieu de $|x_n|$ ne possède pas un attracteur hyperbolique ; la continuité des espaces stables E_x^s et instables E_x^l pourrait ne pas être vérifiée car W_x se replie indéfiniment sur elle-même. (voir [6] p. 268). Il se pourrait que "l'attracteur" numérique observé corresponde à une infinité d'orbites périodiques avec des bassins d'attraction* très petits (on "sauterait" d'un bassin à l'autre sous l'action du bruit toujours présent). Néanmoins pour ce qui est de la pratique expérimentale, nous n'aurons vraisemblablement jamais accès à ce genre d'information ;

* Bassin d'un attracteur : ensemble de tous les points dont les trajectoires vont "aller" sur l'attracteur.

nous considérerons donc l'attracteur de Hénon comme un attracteur étrange chaotique.

Le problème qui se pose maintenant est de caractériser ces ensembles limites décrits par les trajectoires du système. Les quantités que nous allons introduire auront toutes la propriété d'être invariantes lors de changements de coordonnées pour lesquels le Jacobien et l'inverse du jacobien sont uniformément bornés⁺.

E - CARACTERISATION METRIQUE DES ATTRACTEURS

Les notions que nous allons introduire reposent sur la définition d'une distance sur l'objet considéré : c'est la structure d'espace métrique.

E.1 DIMENSIONS GEOMETRIQUES: CAPACITE , DIMENSION DE HAUSSDORFF

L'attracteur est comme nous l'avons vu un objet qui a un volume nul (il a une mesure de Lebesgue nulle) dans l'espace des phases \mathbb{R}^n . Ceci nous conduit à dire qu'il faut le caractériser par une dimension non-entière, strictement inférieure à n . Nous sommes alors conduit à introduire des quantités qui généralisent la notion de dimension⁺⁺ à de tels ensembles. Nous présenterons la capacité introduite par Kolmogorov (1953) puis nous la relierons à une notion définie par Hausdorff au début du siècle.

Soit A un attracteur et soit un recouvrement de A constitué par des boules de diamètre r . Soit $N(r, A)$ le nombre minimum de boules qui doivent être utilisées pour recouvrir A . La capacité de A sera

$$d_c(A) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left[- \frac{\log N(r, A)}{\log r} \right]$$

+ Cette condition n'est peut-être pas réalisée dans la pratique.

++ Encore une fois, nous considérons ici la notion de dimension comme associée à une distance et non à une structure d'espace vectoriel (ce qui donne lieu à un objet essentiellement linéaire). (Voir le chapitre III pour un exemple montrant l'inutilité de telles notions dans ce contexte).

Cette quantité montre comment varient les recouvrements de l'objet en fonction de la taille de ceux-ci ; le nombre de boules $N(r,A)$ recouvrant A vaut à un pré-facteur près $r^{-d_c(A)}$. Dans les cas particuliers $A = \mathbb{R}^n$ $d_c(A) = n$, il en est de même pour \mathbb{Q}^n . Cette notion est donc relativement grossière : elle ne fait pas la différence entre un ensemble dénombrable et un ensemble non-dénombrable. Il faut alors recourir à une autre définition dans laquelle les boules du recouvrement ont une taille variable. C'est la notion de dimension de Hausdorff* d_H . De façon générale, on peut montrer que pour un ensemble compact (de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini), $d_H \leq d_c$. En reprenant l'exemple précédent, on aura

$$0 = d_H(\mathbb{Q}) < d_H(\mathbb{R}) = 1$$

L'inégalité $d_H < d_c$ sera cependant considérée comme pathologique, et dans la plupart des cas "physiques" ou des modèles considérés, il y aura égalité entre ces deux quantités.

Grâce à ces notions de dimension, on peut caractériser l'aspect self-similaire de l'attracteur, c'est-à-dire que le nombre de boules de taille r le recouvrant croîtra comme une puissance de r pour les faibles valeurs de r et ceci aussi faibles soient ces valeurs. Nous décrirons maintenant la dynamique associée aux trajectoires du système sur l'attracteur.

E.2 L'ENTROPIE TOPOLOGIQUE : TAUX DE GENERATION DE NOUVELLES TRAJECTOIRES

Nous allons maintenant considérer un nouveau paramètre : la longueur des trajectoires. L'entropie topologique décrit le comportement du taux de divergence de trajectoires en fonction de leur longueur.

* La dimension de Hausdorff est définie [6] comme la borne inférieure des α tels que :

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\delta > 0$ et un recouvrement U de A ($A \subset \bigcup_{u \in U} u$) tel que $\forall u \in U, \text{diamètre}(u) < \delta$ et $\sum_{u \in U} [\text{diam}(u)]^\alpha < \varepsilon$

Soit un recouvrement de l'attracteur A par des boîtes de taille r^* qui sont numérotées de 1 à $M(r)$. Considérons maintenant une séquence de b boîtes (i_1, \dots, i_b) . Si le système engendre une trajectoire décrivant ces b boîtes nous compterons 1 sinon 0. On somme alors sur toutes les séquences (i_1, \dots, i_b) possibles soit $N^p(n)$ ce nombre. L'entropie de A par rapport à la partition r est définie par la limite si elle existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} [N^p(n)]$$

Pour définir l'entropie topologique, on prend la borne supérieure de ces quantités pour toutes les partitions possibles (dans ce cas particulier cela revient à prendre $r \rightarrow 0$).

Les définitions précédentes ne nous donnent aucune information sur la densité avec laquelle l'espace des phases sera rempli. Elles sont très difficiles à calculer et toujours sous-estimées dans la pratique. En effet, lorsque l'on génère une trajectoire d'un système dynamique, celle-ci va beaucoup peupler certaines zones de l'espace des phases et peu d'autres. Il faut donc disposer de très longues trajectoires pour que le calcul de ces quantités géométriques ait un sens. Pour rendre compte de la non-équipartition des trajectoires dans l'espace des phases il faut introduire une densité de probabilité (ou mathématiquement une mesure).

F - CARACTERISATION PROBABILISTE DES ATTRACTEURS

Ces densités de probabilité vont donner la répartition des trajectoires dans l'espace des phases (ou sur l'attracteur). Elles ne seront pas simples car elles sont définies sur des ensembles fractals:

* La définition que nous allons donner est pour des boules de taille fixe. On pourrait très bien considérer des recouvrements finis d'ouverts quelconques [19d] (ce qui impose A compact). Nous en verrons un exemple au chapitre IV.

F.0 LA NOTION DE MESURE [24]

Pour construire une mesure sur un espace métrique A , il est nécessaire d'avoir un ensemble B ($\supset A$) de parties de A qui possède des propriétés de stabilité par rapport aux opérations de complémentation et de réunion infinie. Une mesure positive sera une fonction de B sur \mathbb{R}^+ telle que l'image d'une réunion dénombrable d'éléments soit la somme des images de chacun de ces éléments (propriété d'additivité dénombrable). Les éléments de B seront des ensembles mesurables. Ces notions proviennent de la généralisation de la notion d'intégrale. Ainsi pour $A = \mathbb{R}$ et $B =$ ensemble des intervalles de \mathbb{R} , on peut définir la mesure courante ou mesure de Lebesgue par $\mu([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$ et l'intégrale de Lebesgue. Pour une description en termes de probabilités nous nous intéresserons au cas où $\mu(A) = 1$. Cette mesure sera intéressante pour décrire la dynamique si elle est conservée par celle-ci. Plus précisément : quel que soit $A' \subset B$

$$\mu (T^{-1} A') = \mu (A') \quad (10)$$

On parle alors de mesure invariante sous la transformation T . Ainsi la mesure de Lebesgue $d\mu = dx_1 \dots dx_n$ est la mesure invariante pour un système conservatif de \mathbb{R}^n . Physiquement, cela signifie que le volume usuel est conservé par la transformation (théorème de Liouville pour un système hamiltonien). Nous définissons maintenant une propriété très importante du triplet (B, T, μ) : celle d'ergodicité. Elle signifie que les moyennes temporelles sont égales aux moyennes d'ensemble. Si ϕ est une fonction continue et μ une mesure ergodique :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \phi(x(t)) dt \right] = \int_A \phi(x) d\mu \quad (11)$$

Dans ces conditions, si ϕ est une fonction continue invariante sous T c'est-à-dire si $\phi(Tx) = \phi(x) \quad \forall x \in A$ (ϕ fonction de trajectoire) alors on peut montrer que ϕ est constante sauf sur des ensembles de μ -mesure 0 (μ presque partout constante). Ceci constituera une propriété très utile par la suite. Une définition équivalente à (11) est de dire que μ est ergodique si on a :

$A' (\in B)$ est invariant $\iff \mu(A') = 0$ ou 1 .

On dit alors que μ est indécomposable sur B . Cela revient à dire que l'on ne peut pas écrire $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ mesure qui correspondrait au cas où il y a plusieurs ensembles limites dans l'espace des phases, le terme p est lié à la géométrie des bassins d'attraction. Il est clair qu'il y a une correspondance étroite entre l'attracteur et sa mesure.

Un exemple de mesure invariante ergodique est la mesure des temps de séjour (ou mesure naturelle) introduite par Bowen et Ruelle :

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \delta_{x(t)} \quad (12)$$

Si la limite de (12) est indépendante de x_0 alors μ ainsi définie est ergodique.

A priori, il peut exister une infinité de mesures ergodiques invariantes pour un système donné (voir section 2.5 de [19c] par exemple). Dans le cas particulier des systèmes Axiome A il existe une seule mesure de probabilité invariante et ergodique définie par (12) presque pour tout x par rapport à la mesure de Lebesgue, et qui est absolument continue le long des variétés instables ; c'est-à-dire que la restriction de la mesure aux variétés instables s'écrit $\mu(dx) = \phi(x) \cdot dx$ où ϕ est intégrable. Dans les cas concrets, la construction d'une mesure invariante est un problème extrêmement ardu. Pour un exemple dans le cas du système de Lozi (9) on pourra se reporter à [21]. Le problème de l'unicité de la mesure invariante ne se pose pas lorsque l'on fait des expériences numériques. Le bruit numérique qui est toujours présent opère une sélection entre toutes les mesures invariantes ergodiques possibles. Il va choisir la mesure naturelle ; c'est celle que l'on obtient en faisant des histogrammes, lors de l'itération (nous supposons de plus l'ergodicité de celle-ci, c'est-à-dire son indépendance par rapport aux conditions initiales, cas d'un attracteur unique). Comme exemples de mesures invariantes ergodiques pour des transformations données, nous pouvons citer : la mesure de Lebesgue :

$d\mu = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ pour un "bruit blanc" dans R^n ; la mesure

$$d\mu = dx / \pi \sqrt{x(1-x)}$$

(qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue) pour la transformation de $[0,1]$; $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \text{ (*)}^+$; et la mesure :

$$d\mu = d\theta_1 \dots d\theta_k / (2\pi)^k$$

décrivant un mouvement quasi périodique à k fréquences (tore T_K)
 $0 < \theta_i \leq 2\pi$.

Nous allons montrer maintenant comment caractériser ces mesures, par différentes quantités.

F.1 LES DIMENSIONS PROBABILISTES

Nous ne donnerons ici qu'un bref aperçu de toutes les dimensions que l'on peut associer à une mesure de probabilité. Pour une revue très générale de ce domaine, on pourra consulter [25] ; nous ne présenterons ici que celles que nous utiliserons par la suite.

Supposons que nous ayons partitionné l'attracteur en boîtes de taille r^* , numérotées de 1 à $M(r)$. Soit π_i la probabilité (c'est-à-dire la mesure de la boîte i). La façon la plus "naturelle" de caractériser la distribution des π_i est de construire une quantité $\sum \pi_i \log \pi_i$ de façon analogue à ce que l'on fait en Mécanique Statistique. On définit alors la dimension d'information par la limite : (si elle existe) :

+ Ce résultat s'obtient en transformant (*) en $X_{n+1} = 2 X_n$ modulo 1 qui possède une mesure invariante constante.

* On aurait pu donner des définitions où la taille des boîtes serait variable comme pour la dimension de Hausdorff [27]. Des différences n'apparaissent pas pour des ensembles communément rencontrés. Nous nous contenterons donc de (13) et (14) qui sont plus proches de la réalité opérationnelle.

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{- \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon} \right] \quad (13)$$

Il est possible d'introduire aussi les différents moments de la distribution des p_i . On arrive alors à la notion de dimension généralisée :

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q}{\log \varepsilon} \right] \quad (14)$$

introduite dans [26]. Cette dernière notion redonne pour $q \rightarrow 0$ la capacité du support de la mesure sur l'attracteur [26] (ensemble des points où la mesure est non nulle). Pour $q \rightarrow 1$ on retrouve d_I [26]. D_2 est la quantité que nous utiliserons le plus en pratique. Il faut noter la relation $D_q \geq D_p$ pour $p > q$ [26]. Il est clair que (14) va pondérer la distribution des p_i et suivant la valeur de q favoriser les p_i faibles ou importants.

Dans la caractérisation de la dynamique la mesure va aussi intervenir car il y aura certaines trajectoires qui seront beaucoup plus probables que d'autres. Nous introduisons maintenant les différentes entropies probabilistes.

F.2 LES DIFFERENTES ENTROPIES PROBABILISTES

Reprenons la partition de l'attracteur définie précédemment, soit B . Définissons la probabilité $p(i_1, i_2, \dots, i_b)$ de trouver le système dans la boîte i_1 à t , i_2 à $t + \Delta t$, ..., i_b à $t + (b-1)\Delta t$. Calculons alors l'information :

$$I_b = - \sum_{(i_1, \dots, i_b)} p(i_1, \dots, i_b) \log p(i_1, \dots, i_b) \quad (15)$$

L'entropie métrique (ou de Kolmogorov Sinai) est définie par :

$$K = \sup_{B, \Delta t} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{I_b}{b \Delta t} \right] \quad (16)$$

Remarques :

- On aurait pu introduire K de façon plus générale à l'aide des notions de partitions d'ouverts mesurables quelconques [28].
- De la même façon que l'on a introduit Dq on pourrait introduire [29] des :

$$Kq = \sup_{B, \Delta t} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \frac{\text{Log} \sum p(i_1 \dots i_b)^q}{b \Delta t} \right] \quad (17)$$

qui possèderaient le même genre de propriétés : $Kq \geq Kp$ pour $p > q$,
et :

$$\lim_{q \rightarrow 0} Kq = h_{\text{top}} \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} Kq = K$$

Cette notion d'entropie donne une information globale sur le taux de divergence des trajectoires. Il n'est pas possible de savoir si la divergence se fait suivant un plan ou une droite par exemple. La notion que nous introduisons maintenant permettra de répondre à cette question au moins globalement pour l'attracteur.

F.3 LES EXPOSANTS DE LYAPUNOV - DEFINITION ET RELATIONS AVEC LES QUANTITES PRECEDEMMENT DEFINIES

La définition de ces quantités repose sur un théorème dû à Oseledec (1968) qui est d'une grande beauté formelle. En voici l'énoncé (extrait de [19c]).

Soit μ une mesure de probabilité sur un espace M et $T : M \rightarrow M$ une application laissant μ invariante telle que (μ, T) soit ergodique. Soit B une application de M dans l'ensemble des matrices $m \times m$ qui soit mesurable et telle que $\int \mu(dx) \text{Log} \|B(x)\| < \infty$. Soit la matrice $B_x^n = B(T_x^{n-1}) \dots B(T_x) B(x)$. Alors pour μ presque tout x la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_x^{n*} B_x^n)^{1/2n} = \Lambda_x \quad (18)$$

existe et est μ -presque partout constante.

(B^* : transposée de la matrice complexe conjuguée de B)

Ce théorème très général s'applique à n'importe quelle fonction $B(x)^+$ mesurable. (\Leftrightarrow son intégrale existe sur l'espace des matrices). Les exposants de Lyapunov sont les logarithmes des valeurs propres de $\Lambda(x)$, pour un choix particulier de la fonction B.

Pour une application T de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ B(x) sera la matrice des dérivées partielles $(\frac{\partial T_i}{\partial x_j})$ en x. Pour un système différentiel dans \mathbb{R}^n (*), $\dot{x} = F(x)$, qui a pour trajectoires $x(t) = T^t x$, $B_{(x)}^t = (\frac{\partial T_i^t}{\partial x_j})$ matrice des dérivées partielles du flot en x.

Remarquons [19c] que si $m = 1$ et B est une matrice réelle positive alors (18) \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \log \left(\prod_{i=1}^n B T^{n-i} x \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log T(f^{n-i} x) = \log \Lambda(x)$$

on retrouve (11) qui est le théorème ergodique.

Les exposants de Lyapunov sont à relier au taux de croissance d'éléments de volumes infinitésimaux ; ainsi le taux de croissance d'un vecteur $\delta x(t)$ est donné généralement par l'exposant le plus grand λ_1 , celui d'un élément de volume $|\delta x_1 \wedge \delta x_2 \dots \wedge \delta x_k|$ généralement par $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$). Imaginons une sphère sous-tendue par les k vecteurs orthogonaux $(\delta_{x1}, \dots, \delta_{xk})$; sous l'action du système elle sera transformée en un ellipsoïde qui aura pivoté (certains vecteurs seront dilatés, d'autres contractés). Ce principe est utilisé lors du calcul pratique d'exposants de Lyapunov (voir chapitre II). Il a aussi permis d'établir une conjecture liant la dimension d'information et les exposants de Lyapunov (Kaplan et Yorke). Soit λ_{k+1} l'exposant tel que $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, soit la fonction $V(s) = \sum_{i=1}^k \lambda_i + s \lambda_{k+1}$ on a $V(1) < 0 < V(0)$ V va s'annuler pour $s_0 = (\sum_{i=1}^k \lambda_i) / |\lambda_{k+1}|$

+ Il est important de noter que les matrices B(x) ne commutent généralement pas (ce point constitue la difficulté du théorème).

* Le théorème est valable aussi si M est un espace de Hilbert. Dans ce cas le spectre de $\Lambda(x)$ sera infini. Ceci justifie les calculs d'exposants de Lyapunov effectués sur des équations aux dérivées partielles.

La dimension de Lyapunov sera définie par :

$$d_{KY} = k + s_0 = k + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) / |\lambda_{k+1}|$$

elle correspond à la "dimension" du premier élément de volume qui ne croîtra plus sous le flot. Bien que l'égalité $d_I = d_{KY}$ (19) soit conjecturée, le seul résultat rigoureux existant [19c] indique que $d_I \leq d_{KY}$ (20) pour une transformation de classe C_2 et une mesure μ ergodique de support compact. Ce résultat borne la dimension d'information des attracteurs pour des équations aux dérivées partielles à partir du calcul des exposants de Lyapunov. (Voir par exemple les calculs de Manneville sur l'équation de Kuramoto-Sivashinski qui seront évoqués au chapitre V).

Heuristiquement on doit avoir $\sum \lambda_i^+ = K$ (21) ; l'entropie qui mesure le taux de divergence des trajectoires doit être égale à la somme des nombres de Lyapunov positifs qui mesurent la divergence suivant chaque direction. Dans le cas général d'une application différentiable sur une variété de dimension finie et pour une mesure μ ergodique à support compact on peut démontrer que $K \leq \sum \lambda_i^+$ [19c] ; l'égalité se produisant si et seulement si la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue le long des variétés instables [30]. Cette hypothèse semble vérifiée dans beaucoup d'exemples expérimentaux ; nous retiendrons donc $K = \sum \lambda_i^+$. Mentionnons que des analogues D_q^{KY} et K_q^{PES} fonctions des λ_i et de q ont été inventés [29] pour les dimensions et entropies généralisées D_q , K_q et que des relations généralisant (20) et (21) ont été proposées et vérifiées numériquement sur certains exemples et quelques valeurs de q [29].

CHAPITRE II : LES METHODES DE CARACTERISATION DE SIGNAUX CHAOTIQUES EXPERIMENTAUX

Le chapitre I nous a permis de montrer qu'il y a un véritable lien entre équations aux dérivées partielles non-linéaires et systèmes dynamiques (dans la mesure où il n'y a pas de singularités pour la solution). Le problème qui se pose maintenant est de déterminer les invariants caractéristiques du système (dimension, entropie, Lyapunov) dans le cadre d'expériences hydrodynamiques réelles. Dans un premier temps, on examine les techniques classiques (spectre de Fourier) et leurs limitations. La deuxième partie sera consacrée aux techniques récentes ainsi qu'à une discussion sur la méthode la plus adaptée pour déterminer la dimension, la mise en oeuvre pratique de celle-ci est examinée ensuite en détail.

Pour un système différentiel non-linéaire d'ordre n , toute l'information sur les invariants associés aux attracteurs est contenue dans une fonction quelconque des variables du système. Etant donnée la continuité qui existe entre équations aux dérivées partielles et systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^n , dans toute la suite, nous considérerons que les caractéristiques de toute la dynamique du système expérimental sont contenues dans l'observable $X(t)$ que nous analyserons. Dans la pratique, cela signifie par exemple que l'évolution de la vitesse du liquide en un point donné de la boîte de convection reflètera la dynamique de tout le système et non pas seulement les caractéristiques d'un voisinage du point de mesure. Nous reviendrons sur cette question en détail dans le chapitre V.

A - SPECTRES DE FOURIER ET FONCTIONS D'AUTO-CORRELATION

A.1 L'OUTIL

On prend la transformée de Fourier de $X(t)$. Celle-ci comporte une partie réelle et une partie imaginaire mais on ne présente en général que le carré du module : spectres de puissance (d'où une perte d'information).

Cette technique assez facile à mettre en oeuvre sur un ordinateur (par l'intermédiaire de la transformée de Fourier rapide) a été longtemps la seule utilisable et utilisée expérimentalement (pour des exemples on pourra se reporter à [32]). L'analyse du spectre qui est parfaitement adaptée à l'étude de signaux multipériodiques a permis de bien caractériser le comportement du système au voisinage de la transition (dans la mesure où celle-ci se fait par étapes). Dans les régimes chaotiques, on ne peut que dégager certains critères qualitatifs*. Le caractère désordonné se traduit par la présence d'un bruit large bande que l'on peut différencier à la fois d'un spectre de raies et du bruit expérimental. La plupart des systèmes que nous considérerons présentent un spectre de Fourier avec une décroissance exponentielle e^{-f/f_c} à haute fréquence. Ce fait est intéressant car il se retrouve apparemment pour tous les systèmes déterministes (voir [32] et références citées). La fréquence caractéristique f_c est à relier à la distance minimum d'une singularité à temps complexe au domaine réel pour l'observable $x(t)$ ** . Cette théorie permet de rendre compte qualitativement de l'allure des spectres, cependant elle ne donne pas d'informations directes sur les invariants caractéristiques du système.

La fonction d'auto-corrélation que l'on peut calculer directement ou en prenant la transformée de Fourier du spectre de puissance (théorème de Wiener-Kinchine, voir [34]) va refléter davantage les quantités définies au chapitre I (du moins dans le cas des attracteurs Axiome A).

* Certains auteurs ont proposé d'extraire des spectres de Fourier certaines quantités que l'on peut appeler dimensions et entropies [31]. Cependant celles-ci ne caractérisent pas le système d'une façon géométrique comme le font celles du chapitre I, on ne peut pas dire si le système chaotique a une dimension faible ou non. Nous ne considérerons pas ces méthodes.

** Lorsque l'on calcule la transformée de Fourier à haute fréquence, on peut transformer l'intégrale sur R en une intégrale sur un contour C de C qui va venir entourer chaque singularité (si elles ne sont pas isolées, ce qui est le cas réel, le problème sera beaucoup plus difficile). Les seules contributions non nulles pour $\omega \rightarrow \infty$ proviennent de ces dernières ; on aura une somme de termes exponentiels (l'exposant sera donné par la distance au domaine réel) qui sera dominée par le terme d'exposant le plus petit [2, 33].

A.2 RELATION ENTRE L'ENTROPIE ET LA DECROISSANCE DE LA FONCTION D'AUTO-CORRELATION

A.2.1 Théorie et conjectures

Pour les difféomorphismes Axiome A (voir chapitre I) Ruelle [35] a pu montrer que la fonction d'auto-corrélation $C_F(t)$ -pour une fonction F des variables du système- définie par :

$$C_F(t) = \frac{1}{T} \int_0^T F(x(z)) F(x(t+z)) dz - \langle F^2 \rangle \quad (22)$$

décroissait suivant :

$$|C_F(t)| \leq A(F) e^{-\gamma t} \quad (23)$$

si F est continument différentiable (le même résultat existe pour les C-systèmes*). Si cette dernière condition n'est pas remplie C_F peut présenter n'importe quel type de décroissance [36]. Dans l'expression (23) on voudrait relier γ à l'entropie métrique ou à une moyenne des exposants de Lyapunov positifs. Ainsi Crawford [36] a effectué des calculs analytiques de $C_F(t)$ pour un C-système particulier, dans le cas où F est une fonction de carré sommable de classe C^r ; il a trouvé pour γ la valeur $r\lambda^+$ où λ^+ est l'exposant de Lyapunov positif du système. D'un point de vue général, le résultat (23) a été étendu dans [37] où il est démontré que la transformation de Fourier de C_F pour F différentiable ne présente que des pôles** au voisinage de l'axe réel dont les résidus et non la position dépendent de F (ceci entraîne que γ de (23) est indépendant de F). Pour les flots, la situation est un peu différente : Ruelle a pu donner un exemple de flot Axiome A pour lequel on n'observe pas (23) [35]. Néanmoins ce système ne possède pas d'attracteur : l'ensemble des points qui sous l'action du flot vont se retrouver sur l'ensemble invariant est l'ensemble invariant lui-même et est donc de mesure 0/mesure de Lebesgue. Ruelle conjecture :

* Systèmes dynamiques définis sur une variété hyperbolique.

** On reprend l'arsenal de [33] mais dans un tout autre contexte.

que dans le cas général [37] (non forcément Axiome A) le comportement de $C_F(t)$ est gouverné par la grandeur de t par rapport à un temps Lyapunov, temps correspondant à la perte d'information sur la condition initiale, $|\text{Log } \gamma| / \lambda_1$ où γ est l'imprécision sur le système et λ_1 l'exposant de Lyapunov maximal :

pour $t \ll |\text{Log } \gamma| / \lambda_1$ on doit observer "le comportement naturel de $C_F(t)$."

pour $t \gg \frac{|\text{Log } \gamma|}{\lambda_1}$ le "bruit" devrait entraîner la décroissance exponentielle de $C_F(t)$ (l'exposant étant la somme des exposants de Lyapunov positifs).

A.2.2 La dure loi de l'expérience

Nous avons examiné la fonction d'auto-corrélation pour le système différentiel de Lorenz [17]. Le système [17] (les paramètres valant $R = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$) a alors été intégré avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de 10^{-2} et des conditions initiales voisines de $(0,0,0)$. On a éliminé les premiers points jusqu'à un temps $t = 10$ qui correspondent à une solution transitoire. On a alors enregistré $N = 15 \cdot 10^3$ valeurs de la coordonnée Z , tous les $t = 0,05 \approx T_0/15$ où $T_0 = 0,73$ est la pseudo-période (pic d'énergie maximum qui subsiste dans la transformée de Fourier de $Z(t)$). On peut calculer un ordre de grandeur du temps Lyapunov défini plus haut : l'erreur commise à chaque pas d'intégration varie comme la puissance 5 du pas, l'exposant de Lyapunov positif λ_1 , vaut $\lambda_1 = 0,9$ [38]. L'ordre de grandeur du temps-Lyapunov est donc -en faisant l'hypothèse que le pré-facteur dans l'erreur est de l'ordre de 1- : $|\text{Log } 10^{-5}| / 0,9 \sim 35$. La figure 2 montre en coordonnées semi-logarithmiques la fonction d'auto-corrélation pour la coordonnée Z du système de Lorenz (avec les caractéristiques mentionnées plus haut). La stabilité par rapport à N a été vérifiée. Aux temps très courts $t \ll T_0$, $C_Z(t)$ présente une décroissance très rapide de 1 à 0.6... Ce phénomène qui reflète la partie bruit large bande du spectre, s'observe aussi dans le cas de signaux expérimentaux [39].

Analysons cela d'un point de vue plus détaillé dans le cas particulier du système de Lorenz. Pour les valeurs des paramètres considérées, il y a deux points fixes instables et la solution spirale autour de l'un d'eux avant d'être "réinjectée" aléatoirement autour de l'autre où elle exécute le même ballet, et ainsi de suite. Le processus de réinjection introduit une perte d'information quasi immédiate sur la valeur ultérieure $Z(t)$ beaucoup plus important que dans la partie "spirale" des trajectoires et c'est peut-être cela qui produit l'effet observé plus haut sur $C_Z(t)$ pour $t \lesssim T_0$. Pour des temps qui deviennent de l'ordre de grandeur du temps-Lyapunov la décroissance de $C_Z(t)$ peut être bornée par une fonction exponentielle (voir figure 2). L'exposant γ vaut environ 0.06, valeur 15 fois plus faible que l'exposant de Lyapunov positif. La figure 3 montre la fonction d'auto-corrélation $C_Z(t)$ en coordonnées semi-logarithmiques pour la coordonnée $Z(t)$ du système de Lorenz [17] pour d'autres valeurs des paramètres ($R = 40$, $\sigma = 16$, $b = 4$). La période d'échantillonnage Δt a été augmentée à $\Delta t = 0.1$; l'exposant de Lyapunov n'est pas très différent en ordre de grandeur de celui pour les valeurs précédentes du paramètre. Ainsi le temps-Lyapunov est environ le même que précédemment. On voit sur la figure 3 que $C_Z(t)$ peut être bornée par $e^{-\gamma_1 t}$ pour $T_0 \lesssim t \lesssim 20 T_0$ et $\gamma_1 \approx 0.07$ et par $e^{-\gamma_2 t}$ pour $20 T_0 \lesssim t$ et $\gamma_2 \approx 0.12$. Il semble donc que le comportement exponentiel (s'il existe) de $C_Z(t)$ soit masqué par le comportement "naturel" de $C_Z(t)$. Il faudrait peut-être explorer des intervalles de temps beaucoup plus longs ($t \sim 10$ temps-Lyapunov) pour l'observer. Dans la pratique, le nombre d'échantillons N sur lequel on effectue les moyennes est fini. Il ne semble donc pas possible à l'heure actuelle d'extraire des fonctions d'auto-corrélation une information reliée aux invariants définis dans le chapitre I.

Les méthodes de diagnostic par spectre de Fourier peuvent être mises en oeuvre directement sur l'observable $X(t)$. Les quantités du chapitre I sont définies dans un espace des phases qui est connu dans le cas d'un système dynamique donné. On peut alors intégrer les équations et accéder à la structure géométrique des attracteurs (points fixes, variétés stables, instables, etc). Dans le cas d'une expérience de convection, l'espace des phases (qui est un espace de Hilbert de dimension infinie) est à priori impraticable.

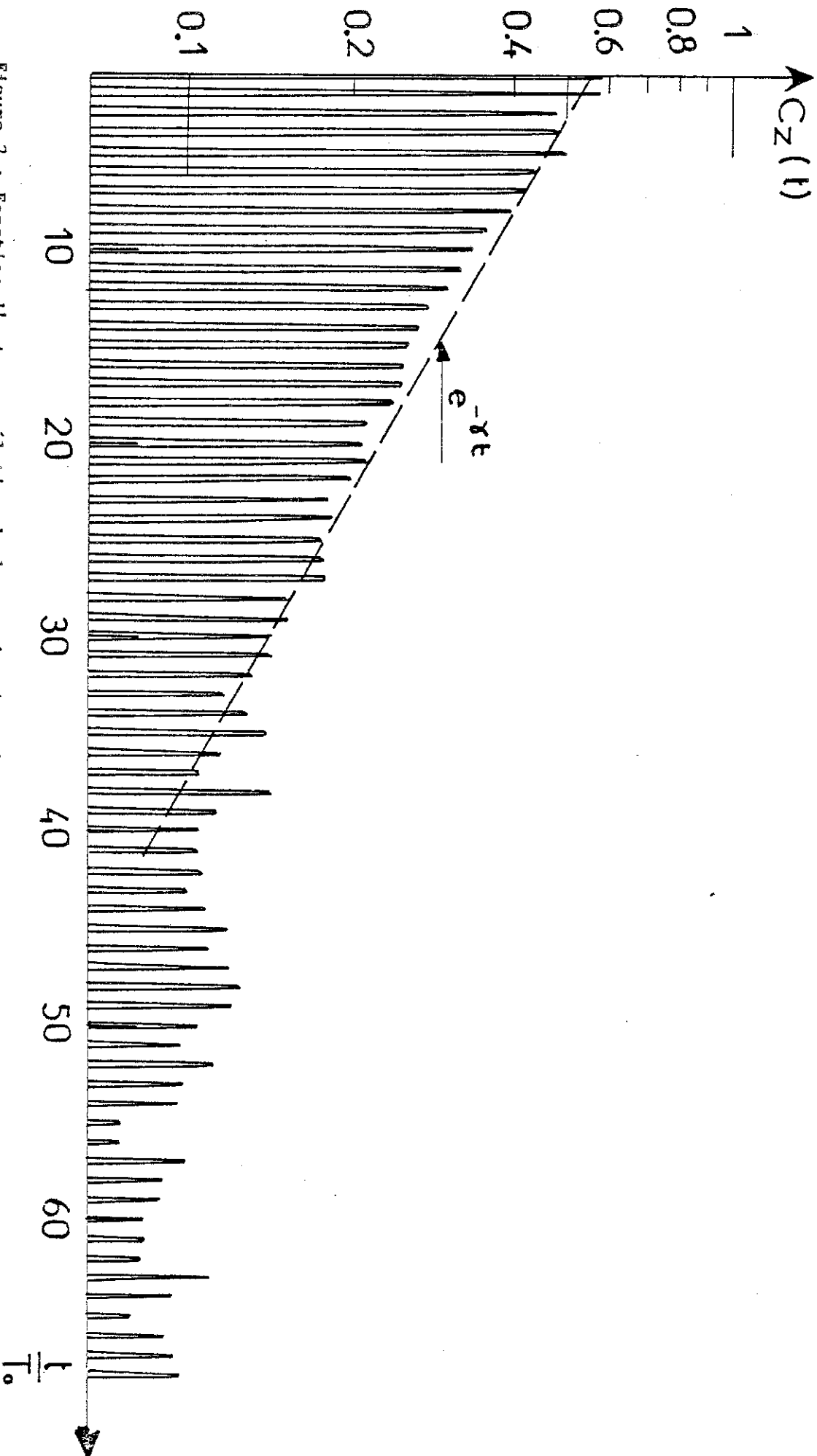


Figure 2 : Fonction d'auto-corrélation de la coordonnée z du système de Lorenz pour les valeurs des paramètres $R = 20$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$ en fonction du temps (normalisé à la pseudo-période T_0). Le nombre total d'échantillons est $N \approx 15 \cdot 10^3$ et la période d'échantillonnage $\Delta t = 0,05$ ($\approx T_0/15$).

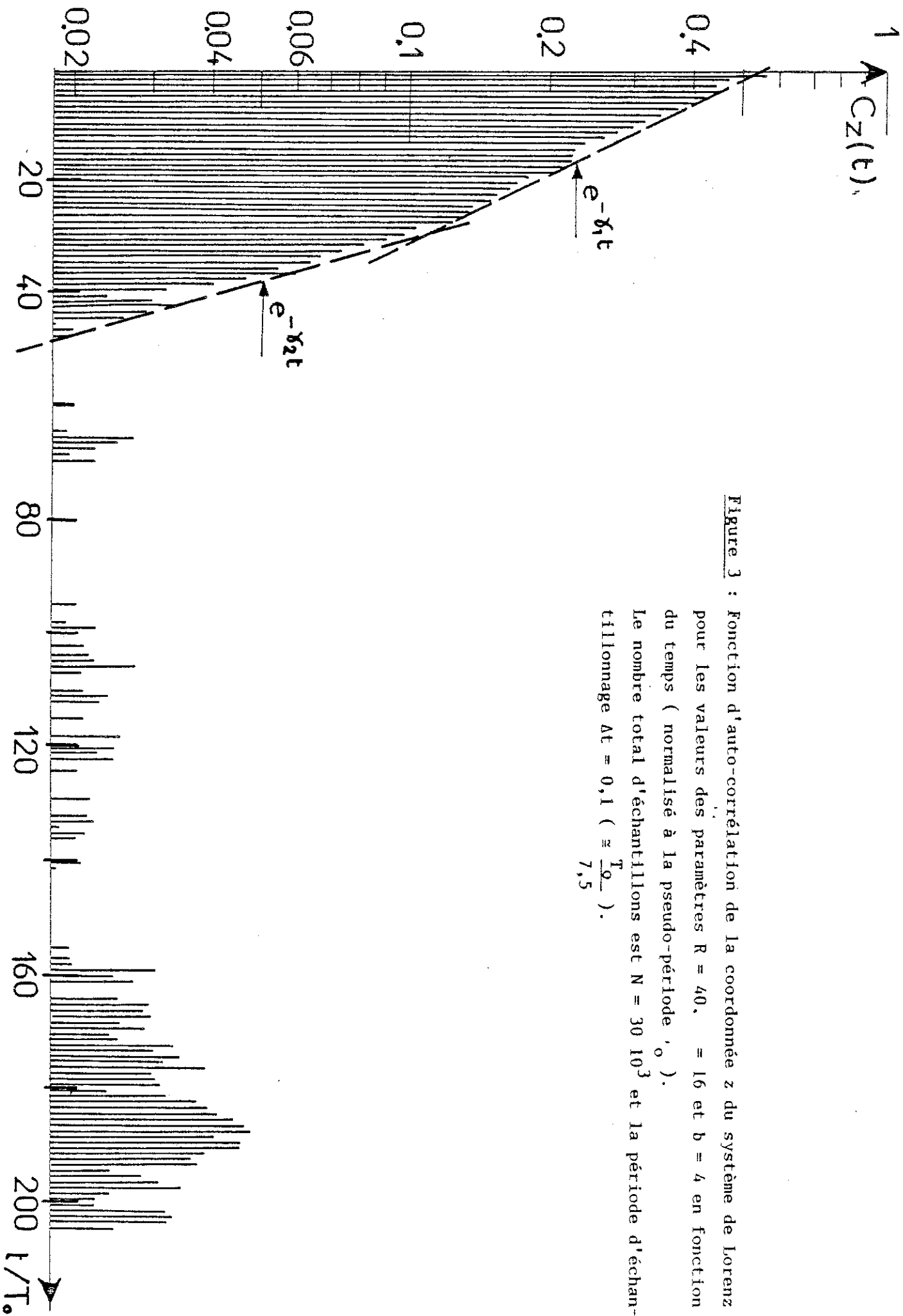


Figure 3 : Fonction d'auto-corrélation de la coordonnée z du système de Lorenz pour les valeurs des paramètres $R = 40$, $a = 16$ et $b = 4$ en fonction du temps (normalisé à la pseudo-période T_0).
Le nombre total d'échantillons est $N = 30 \cdot 10^3$ et la période d'échantillonnage $\Delta t = 0,1$ ($\approx \frac{T_0}{7,5}$).

Il en est de même pour le système dynamique engendré par les équations aux dérivées partielles (voir chapitre I (1) et (2)). Il faut alors recourir à des méthodes de projection des sous-ensembles de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ contenant la solution sur \mathbb{R}^n .

B - LA CONSTRUCTION D'UN PSEUDO-ESPACE DES PHASES

Considérons le champ de vitesse \mathbb{U}_t représentant le système à un instant donné dans l'espace de Hilbert (la donnée de \mathbb{U}_t spécifie la valeur de la vitesse en tous les points du fluide). Nous savons (voir chapitre I) que si la solution ne présente pas de singularités, alors \mathbb{U}_t se situe sur un objet de dimension finie.

Mané [40] a pu démontrer que si on projette l'attracteur de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ sur un espace de dimension finie (supérieure au double de la dimension de Hausdorff de l'attracteur), alors on a toutes les chances que la projection soit injective (chaque élément de l'espace a un antécédent au plus sur l'attracteur). Plus précisément : si E est un espace de Banach (espace vectoriel normé) et $\Lambda \subset E$ est une réunion dénombrable de sous-ensembles de E dont la dimension de Hausdorff est finie, alors pour chaque sous-espace $F \subset E$ tel que $2 \dim_H(\Lambda) + 1 < \dim F < \infty$ l'ensemble des projection $\Pi : E \rightarrow F$ telles que Π/Λ soit injective est un sous-ensemble dense dans l'espace des projections $P(F)$ de E sur F muni de la topologie de la norme. Ainsi, toute projection de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ serait injective ; on peut penser que la dimension de Hausdorff sera conservée par celle-ci car à chaque point de la projection correspond un point unique sur l'attracteur. En s'appuyant sur ce théorème, Guckenheimer et Buzyna [41] ont reconstruit un espace des phases \mathbb{R}^n à partir de n mesures en des endroits différents de la cellule expérimentale. Assez souvent, un expérimentateur ne mesure qu'un petit nombre de variables. Même dans le cas particulier où on a accès à une seule observable $X(t)$, on peut reconstruire un espace des phases. Une première méthode [42] serait d'utiliser des dérivées successives de $X(t)$:

$$\vec{X}(t) = (X(t), \dot{X}(t) \dots X^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n \quad (24)$$

Cette méthode est difficilement utilisable avec du signal expérimental car la dérivation (analogique ou digitale suivant les cas) engendrerait du bruit qui viendrait "polluer" le signal. La deuxième méthode [43] qui est très facile à réaliser sur un signal échantillonné est d'utiliser des décalages :

$$\tilde{X}(t) = (X(t), X(t-\tau), \dots, X(t-(n-1)\tau)) \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

Ceci a été formalisé dans [42, 43] par Takens qui a pu démontrer des propriétés de la projection beaucoup plus fortes que précédemment. Soit M une variété compacte de dimension m . Il y a un sous-ensemble ouvert et dense O de l'ensemble des champs de vecteurs C^1 sur M tel que pour chaque $F \in O$, il existe un sous-ensemble, ouvert et dense $\mathcal{F}_X \subset C^1(M)$ de fonctions C^1 de M sur \mathbb{R} tel que pour chaque $y \in \mathcal{F}_X$ $\Lambda^{2m} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ définie par

$$\Lambda^{2m}(x) = (y(x), y(f^1 x), \dots, y(f^{2m} x))$$

soit un homéomorphisme (bijection continue dont la réciproque est continue) de Lipschitz. (f^t est le flot associé à F). La condition de Lipschitz entraîne qu'il existe un nombre δ tel que

$$\|\Lambda^{2m}(x) - \Lambda^{2m}(x')\| \leq \delta \|x - x'\|$$

Ainsi, si on munit les deux ensembles de normes, la projection possède en général des propriétés de continuité très fortes. On est alors assuré que les dimensions mesurées sur la projection dans \mathbb{R}^n sont celles de l'attracteur. Notons cependant que tous ces théorèmes établissent que l'ensemble des "bonnes" projections est dense dans l'ensemble des projections mais ne donnent pas la probabilité de ces bonnes projections (voir les problèmes évoqués au chapitre I à propos de la stabilité structurelle des tores T^n). Cependant les études effectuées sur des systèmes numériques connus (système de Lorenz ou Hénon) montrent que les projections obtenues sont en général correctes. Il est important de noter que n'importe quelle fonction y continue permet la reconstitution. Ainsi pour le système de Lorenz, on peut choisir une fonction continue quelconque $G(x_1, x_2, x_3)$ qui redonne la dynamique (dimensions et entropies).

Expérimentalement, on peut mesurer l'intégrale du champ de vitesse ou la vitesse en un point donné (voir chapitre IV). Notons aussi que d'après Eckman et Ruelle [19c] la valeur de n nécessaire pour obtenir une "bonne" projection de l'attracteur de dimension D dans R^n est $n = E(D) + 1$.

Une fois cet espace des phases reconstruit, nous chercherons à déterminer les exposants de Lyapunov, les dimensions et les entropies tels qu'ils ont été définis au chapitre I. Nous présentons et critiquons maintenant les algorithmes pour les deux premières quantités qui peuvent être utilisés dans ce but. Les techniques de calcul des entropies étant plus compliquées, nous les introduirons au chapitre IV.

Dans R^n , toutes les normes sont équivalentes, c'est-à-dire que 2 normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ étant données il existe 2 constantes α_1 et α_2 telles que

$$\forall x \in R^n \quad \alpha_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|_1 \quad (26)$$

Ainsi, il est clair que le taux de dilatation moyen de vecteurs donnés sera en moyenne le même pour toutes les normes.

La plupart des méthodes que nous allons introduire dans la suite de ce chapitre reposent sur la définition d'une norme et des problèmes de comptage du nombre de points à une certaine distance r d'un point ou d'un objet donné. On s'intéresse au comportement de cette quantité en fonction de r quand $r \rightarrow 0$. Il est alors clair que toutes les normes vont donner le même résultat.

Exemple : nombre de points $C(r)$ à une distance r autour d'une origine x_i pour deux normes équivalentes dans R^n .

$$(24) \text{ entraîne : } C_{\| \cdot \|_1} \left(\frac{r}{\alpha_1} \right) \leq C_{\| \cdot \|_2}(r) \leq C_{\| \cdot \|_1} \left(\frac{r}{\alpha_2} \right) \quad (27)$$

Ceci indique que les limites de $C_{\| \cdot \|_1}$ et $C_{\| \cdot \|_2}$ lorsque r tend vers 0 sont identiques.

Nous verrons au chapitre IV que le comportement asymptotique d'autres quantités peut être différent suivant les normes. Dans la pratique, les signaux expérimentaux sont convertis en entiers de 12 à 15 bits. La norme du maximum se révèle alors la plus efficace dans les traitements numériques : n tests qui peuvent être effectués en langage assembleur, la valeur de la norme reste bornée.

C - ESTIMATION DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DES DIMENSIONS POUR UN SIGNAL EXPERIMENTAL

C.1 L'ESTIMATION DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

Nous avons vu (chapitre I) que les exposants de Lyapunov pour un système différentiel étaient définis comme les logarithmes des valeurs propres de la matrice

$$\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left[B^*(x) B^*(T_x) \dots B^*(T_x^{n-1}) B(T_x^{n-1}) \dots B(x) \right]$$

où $B(x)$ sera la matrice des dérivées partielles du flot en x (flot linéarisé en x). Il est possible si l'on connaît les équations du système de calculer B et Λ . On pourrait alors en déduire tous les exposant λ_i . Cependant si $\lambda_1 \gg \lambda_2$ on aura des problèmes de précision [19d]. Il faut alors recourir à une autre méthode pour estimer λ_2 . Comme l'évolution des éléments de surface infinitésimaux est donnée par $\lambda_1 + \lambda_2$ on peut calculer λ_2 et ainsi de suite ; c'est cette méthode qui est la plus fréquemment employée numériquement. Elle a été développée pour l'analyse de signal expérimental [44]. On calcule d'abord λ_1 en examinant la dilatation du vecteur donné par deux points voisins dans l'espace des phases reconstitué R^n . Il est possible d'estimer $\lambda_1 + \lambda_2$ par l'évolution de petits éléments de surface. La technique devient inextricable au delà, car décrire l'évolution géométrique de l'élément de volume devient trop compliqué.

Une autre voie qui permettrait d'aller au delà de $\lambda_1 + \lambda_2$ est l'estimation directe de la matrice jacobienne $B(x)$ [19c, 45]. Soit $\vec{X}(i)$ un point de l'attracteur reconstitué dans R^n . Soit une boule*

* Ici encore le choix de la norme est sans importance.

de rayon r autour de $\vec{X}(i)$, elle contient un certain nombre de points $\vec{X}(j)$; nous allons considérer l'évolution des vecteurs -que l'on supposera très petits- $\vec{X}(i) - \vec{X}(j)$ sous l'action du flot. On essaye alors de trouver une matrice $n \times n$ qui donne l'évolution de $\vec{X}(i) - \vec{X}(j)$ par une méthode de moindres carrés. La matrice ainsi définie est un estimateur de $B(x)$ la matrice jacobienne. On peut alors calculer Λ et les exposants de Lyapunov. Les études numériques qui ont été réalisées sur des systèmes dont l'espace des phases est connu, semblent donner de bonnes estimations pour les exposants et ceci même si n (dimension de l'espace des phases reconstitué) est supérieur à la véritable dimension de l'espace des phases ! Cependant les précautions numériques qui doivent être prises sont importantes : être toujours dans le régime linéaire (ce qui implique un bon choix de la période d'échantillonnage Δt), avoir un nombre important de points à l'intérieur de la boule $(\vec{X}(i), r)$ pour que l'estimation aux moindres carrés ait un sens, comment traiter les matrices singulières... Les résultats de [46] qui semblent donner lieu à une controverse, sont peut-être discutables à ce niveau là.

Avec cette technique on accèdera aux exposants de Lyapunov positifs mais généralement pas aux négatifs. Ce fait [19d] est lié à la propriété de la mesure d'être lisse dans les directions dilatantes et au contraire très chahutée dans les directions contractantes. On aura alors trop peu de points proches dans ces dernières et les calculs n'auront plus de sens.

C.2 LES DIMENSIONS

Jusqu'en 1983, les dimensions n'étaient pas accessibles expérimentalement. Pour estimer la capacité, on se fixait une partition de taille r sur l'espace des phases et on regardait le comportement en fonction de r du nombre de boîtes contenant au moins un point de l'attracteur. Ces calculs se révèlent impossibles dès que la dimension dépasse 2 [47].

Cette méthode repose sur la définition d'une partition ad hoc alors que pour les techniques plus récentes, les boîtes de la partition sont centrées sur des points de l'attracteur. Le nombre de points nécessaires pour réaliser une estimation de la dimension est alors beaucoup plus petit. Des estimations indirectes et relativement grossières de la dimension avaient été proposées sur des systèmes modèles [48], cependant ces méthodes reposaient sur une bonne connaissance géométrique de l'attracteur ; ceci n'est en général pas possible pour un système expérimental. Mentionnons cependant une étude heuristique réalisée sur un signal provenant d'une réaction chimique chaotique (Belousov-Zhabotinski) dans un régime où la dimension de l'attracteur est ≤ 3 . Les auteurs [49] ont alors construit une section de Poincaré et étudié l'application de premier retour associée. Ils ont établi un histogramme de la densité de probabilité et estimé l'exposant de Lyapunov qui lui était associé. Sa valeur divisée par le temps de retour moyen donne une estimation de l'entropie du système [19d]. Cette méthode ne peut être utilisée que dans le cas où l'attracteur a une dimension strictement inférieure à 3 et où la dynamique dans la section peut se ramener à une itération de l'intervalle.

Nous introduisons maintenant différents algorithmes proposés récemment qui permettent d'estimer du moins en théorie les dimensions généralisées D_q . Nous discuterons ensuite une remarque de Ruelle à propos de l'ergodicité de la mesure.

Pour définir les D_q , il faut disposer d'une partition de l'attracteur en boîtes de taille r . Nous l'avons définie formellement au chapitre I. Les algorithmes que nous allons discuter se rapprochent de cette situation. Il n'y a pas ici de théorèmes qui donnent la validité des approximations que l'on effectue. Les méthodes qui vont suivre s'appliquent au cas d'un système échantillonné (flot ou difféomorphisme), ce qui est toujours le cas pratique (numérique ou expérimental).

De façon heuristique, pour estimer les D_q il existe trois méthodes principales :

a. Calcul des fonctions de corrélation d'ordre q ($q \in \mathbb{N}$) [50]

$$C_q(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-q} \left\{ \begin{array}{l} \text{nombre } q\text{-uplets } (\vec{X}_{i_1}, \dots, \vec{X}_{i_q}) \\ \text{tels que } \|\vec{X}_{i_\alpha} - \vec{X}_{i_\beta}\| \leq r \\ i_1 \leq i_\alpha, i_\beta \leq i_q \end{array} \right\} \quad (28)$$

$C_q(r)$ approxime $\sum_{i=1}^{M(r)} p_i^q(r)$. En effet, p_i^q est la probabilité de trouver q -vecteurs dans la même boîte de la partition. Dans le cas particulier $q = 2$, $C_2(r) = \sum_i p_i^2 + \sum_i p_i \left(\sum_{j \text{ proches voisins de } i} p_j \right)$.

Lorsque r varie, le premier terme de droite variera aussi, par contre le deuxième restera proche de 1 ($\sum p_i = 1$). (On n'a donc rigoureusement que $C_2(r) > \sum_i p_i^2(r)$). Estimer $C_q(r)$ est possible pour $q \leq 2$ [51] mais cela devient vite impraticable au delà car il faut faire C_q calculs pour chaque q -uplet. De plus, avec un nombre N limité, on ne peut avoir accès à des valeurs de r très petites (voir chapitre IV).

b. Considérons $C_2(r)$, cette expression peut s'écrire :

$$C_2(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(r) = \langle C_i(r) \rangle_i$$

où
$$C_i(r) = \frac{1}{N} \text{nb} \left\{ j, \|\vec{X}_i - \vec{X}_j\| \leq r \right\} \quad (29)$$

On peut alors essayer d'estimer directement p_i pour la partition constituée par les boules centrées sur \vec{X}_i , un point de la série temporelle. En effet, $C_i(r)$ constitue -pour N grand- un estimateur de p_i . De plus la moyenne $\langle C_i^q(r) \rangle_i$ -sur une trajectoire- est égale si on suppose la mesure ergodique (voir chapitre I) à la moyenne d'ensemble $\int C_i^q(r) d\mu$ [52]. Cette dernière est voisine de $\sum_i p_i C_i(r) \simeq \sum_i p_i^{q+1}(r)$. On peut ainsi calculer [53] toutes les dimensions D_q^* -et en particulier D_2 comme nous allons le voir dans la section suivante-. Pour $q < 0$, cependant il faut se limiter à la valeur $C_i(r) = \frac{1}{N}$ et ceci introduira une limitation très sérieuse (voir chapitre IV).

* Ainsi que D_1 grâce à $\langle \log C_i \rangle_i$.

Au lieu de $C(r)$ on peut calculer $r(C)$ rayon moyen correspondant à un nombre de points donnés autour de l'origine \vec{X}_i . Cette méthode a été proposée par Termonia et Alexandrowicz [54]. Ainsi on aurait pu estimer $\langle r_i^q \rangle$ en fonction du nombre de points mais alors il aurait fallu tenir compte de corrections artificielles à la loi d'échelle [27a]. Ceci est donc à écarter.

Une autre façon d'estimer π est de calculer le temps de premier retour du système à moins d'une distance r d'un point X_i précédemment visité. Cette technique a permis d'estimer toute l'échelle des D_q , pour un signal expérimental provenant d'une expérience de convection de Rayleigh-Rénard dans laquelle on imposait un forçage périodique [55]. La combinaison de ce dernier et de la fréquence naturelle du système donnait lieu à une dynamique chaotique provenant de la destabilisation d'un régime bi-périodique. Dans la section de Poincaré que l'on réalise en échantillonnant le système à la période de forçage, Libchaber et al. ont montré que l'on avait une situation correspondant à une application du cercle (pour un exemple, voir le chapitre I, section B.2). Ils ont estimé que la capacité valait 1. L'estimation des temps de retour a permis de trouver toute l'échelle des D_q , $q \in \mathbb{R}$. Ce calcul a été effectué avec 2048 points. Ceci contraste avec l'estimation de D_0, D_1, D_2, D_3 qui a été faite par Grassberger en utilisant le même type de technique [26a] sur le système de Hénon [23], dont la dimension de capacité vaut environ 1.2, où il a fallu prendre 10^6 points. Il semble donc que l'estimation de π par temps de retour ne soit adaptée que pour des systèmes de très faible dimension. Nous ne l'avons donc pas utilisée.

c. La dernière méthode que l'on peut utiliser pour calculer les D_q est de calculer la fonction dite de dimension introduite par Badii et Politi [56]. Ils considèrent le comportement en loi de puissance de $\langle r_i^\gamma \rangle$ - où r_i est la distance entre le point i et son p ième plus proche voisin et γ un exposant quelconque non pas en fonction de p (comme plus haut) mais en fonction du nombre total de points N . Ils introduisent alors la fonction de dimension par [56] :

$$D(\gamma) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma \log N}{\log \langle r_i^\gamma \rangle_{i \in [1, N]}} \quad (30)$$

Le calcul des D_q peut se faire de façon indirecte en utilisant la relation suivante [56] :

$$D_q = D(\gamma) \quad \text{pour} \quad \gamma = (1-q) D_q \quad (31)$$

Cette méthode a été appliquée [56] à un certain nombre de systèmes connus (Hénon, Lorenz, ...), cependant -et ceci montre que l'on a le même type de limitation que plus haut- seules cinq valeurs de γ (centrées autour de $\gamma = 0$) ont pu être calculées.

En conclusion, il apparaît que le calcul des D_q pour $q \in \mathbb{R}$ ne peut pas être réalisé dans beaucoup de cas. Il a été possible pour un système expérimental de très faible dimension et pour d'autres systèmes de faible dimension où les règles de construction de l'attracteur (fractal) ont été bien comprises [27b]. D_2 (qui constitue une borne inférieure de la capacité D_0) est l'exposant qui est de loin le plus simple à déterminer lorsque l'on possède un nombre relativement faible de points expérimentaux. Les problèmes auxquels nous nous sommes intéressés sont surtout liés à la reconstruction d'un espace des phases, et à l'estimation de la dimension et de l'entropie. L'étude des D_q constitue pour nous un raffinement ; d'autant que l'on peut se poser la question : Quel sens y a-t-il à vouloir calculer les D_q ?

D'un point de vue théorique, Eckman et Ruelle [19c] ont suggéré que dans le cas d'une mesure ergodique, la dimension locale

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_i(r)}{\log r} \quad (+) \quad (32)$$

devait être presque partout constante. Ils appliquent une des conséquences du théorème ergodique (chapitre I) : une fonction continue invariante est μ -presque partout constante, à la fonction invariante :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_i(r)}{\log r}$$

Il est alors clair que $\mu_i \sim F(i) r^D$ et donc tous les D_q devraient être égaux. Une façon de considérer les D_q [27b] est de comparer la mesure sur l'attracteur à une distribution de singularité de force α ($\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$), distribuées sur un ensemble fractal de capacité $f(\alpha)$. Dans cette perspective D_0 est associée à l'ensemble de plus grande capacité. Les D_q pour $q \neq 0$ sont alors à relier à un ensemble de mesure 0 par rapport à la mesure sur l'attracteur. Il n'y a alors apparemment pas de contradiction entre des D_q différents et l'ergodicité de la mesure. Cependant expérimentalement on ne devrait pas observer des valeurs différentes pour les D_q ; ce n'est pas le cas (voir exemples cités précédemment et aussi [57]). Il faut alors remettre en question l'applicabilité du lemme d'ergodicité à la fonction dimension locale. Il peut se produire que la limite (+) n'existe pas (voir les oscillations de $C(r)$ dans la section suivante) ; la limite sup (borne supérieure des limites de suites extraites) elle, existe et on peut élargir la définition des D_q . Par contre, la continuité de la fonction dimension locale n'est peut-être pas assurée ; en particulier dans les directions stables. Pour celles-ci, la mesure peut être complètement singulière et répartie de façon très inhomogène.

L'hypothèse

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu [B_x(r)]}{\log r} = \alpha \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \quad (33)$$

(où $B_x(r)$ est la boule de centre x et de rayon r , $\mu [B_x(r)] \simeq C_x(r)$) qui est souvent faite par les théoriciens des systèmes dynamiques est peut-être à rejeter dans le cas général.

D - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE CALCUL DE D_2

Rappelons que nous construisons un espace des phases R^n avec un signal scalaire $X(t)$ en utilisant la méthode des décalages (25). Dans la pratique (numérique ou expérimentale) le signal sera échantillonné et converti en entiers de 12 ou 15 bits.

Le décalage prend alors les valeurs $\tau = p \Delta t$ où p est un entier et Δt la période d'échantillonnage. La fonction de corrélation à deux termes $C(r)$ [51] peut s'écrire :

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} (C(r)) \quad \text{où} \quad (34)$$

$$C_N(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \text{nb} \left\{ j, \|\vec{X}_i - \vec{X}_j\| \leq r \right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(r) \quad (35)$$

Compte tenu des remarques sur l'ergodicité de la mesure, nous avons approché (32) en n'effectuant qu'un nombre limité de moyennes

$$C_m(r) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m C_i(r) \quad (m \ll N).$$

De plus, le nombre d'échantillons N , est nécessairement fini. Le problème qui se pose alors est de voir quel est le degré d'approximation que l'on fait pour le calcul de (34). A nombre N fixé, on estime (35) en augmentant m jusqu'à ce que les courbes $C_m(r)$ ne dépendent plus de m . Les figures 4 et 5 montrent de telles courbes $C_m(r)$ pour différentes valeurs de m , pour la coordonnée x de l'application de Hénon [23] et pour un signal expérimental provenant d'une expérience de convection de Rayleigh-Bénard. Il est clair dans les deux cas que $C_m(r)$ pour $m \geq 100$ constitue une bonne approximation de $C_N(r)$ du moins pour une certaine plage de valeurs de r . Il s'agit ensuite de vérifier que la limite (34) a bien été atteinte. Pour cela on augmente la valeur de N jusqu'à ce que les courbes $C_m(r)$ ne dépendent plus de N . Les figures 6, 7 et 8 montrent des courbes $C_m(r)$ à m fixe pour différentes valeurs de N pour l'application de Hénon, la variable $z(t)$ du système de Lorenz et le signal expérimental évoqué précédemment. On ne remarque plus d'écarts décelables pour les courbes dans une certaine plage de r et on admettra que la limite (34) a été atteinte. Il est clair que plus le produit $N \times m$ sera grand et meilleure sera la définition statistique des $C_m(r)$, et par voie de conséquence l'accord avec les limites (34) et (35).

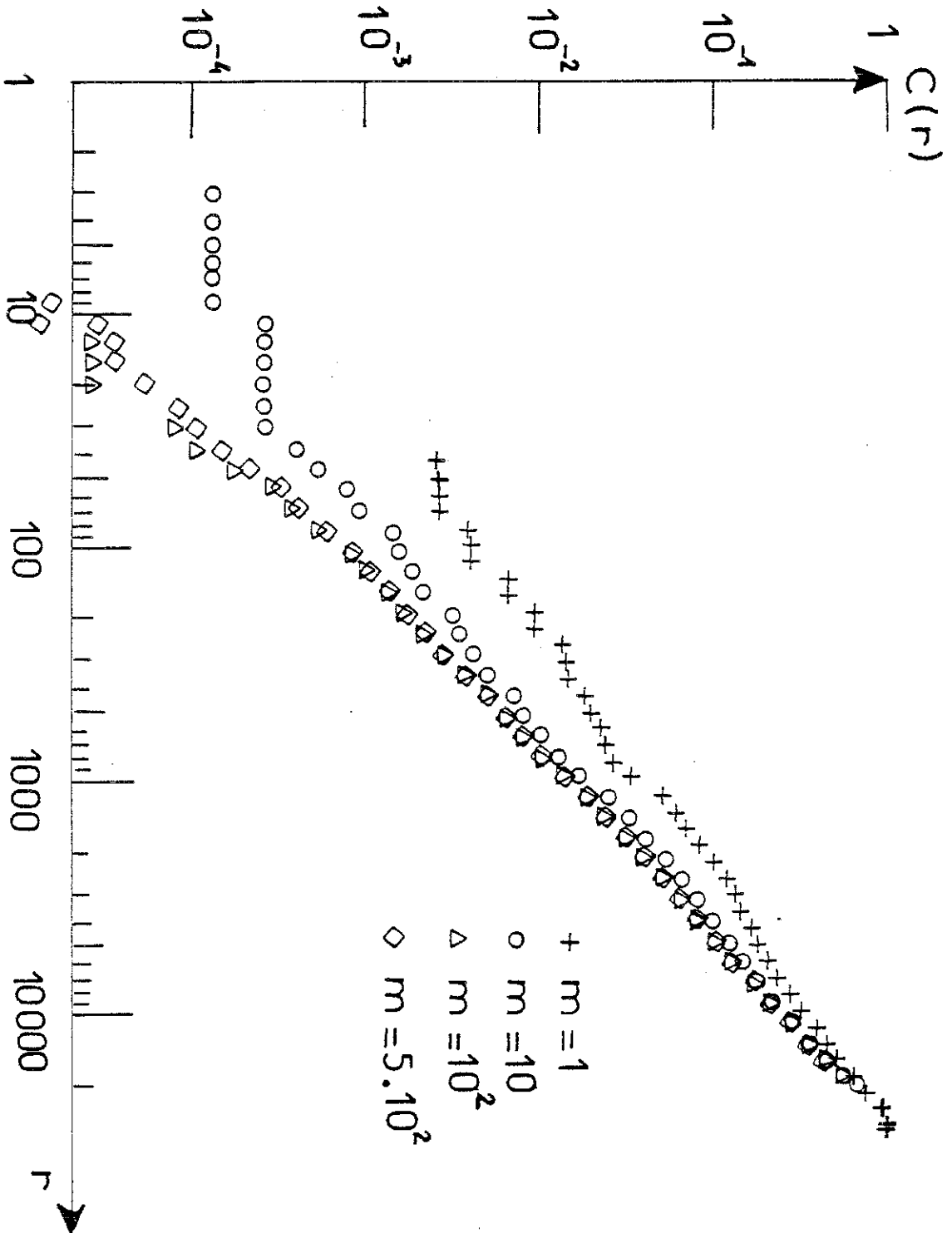


Figure 4 : Courbes $C_m(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le système de Hénon (valeurs des paramètres $a = 1,4$; $b = 0,3$) pour $m = 1, 10, 100, 500$. ($N = 768$; $\Delta t = 1$; $p = 1$; $n = 3$).

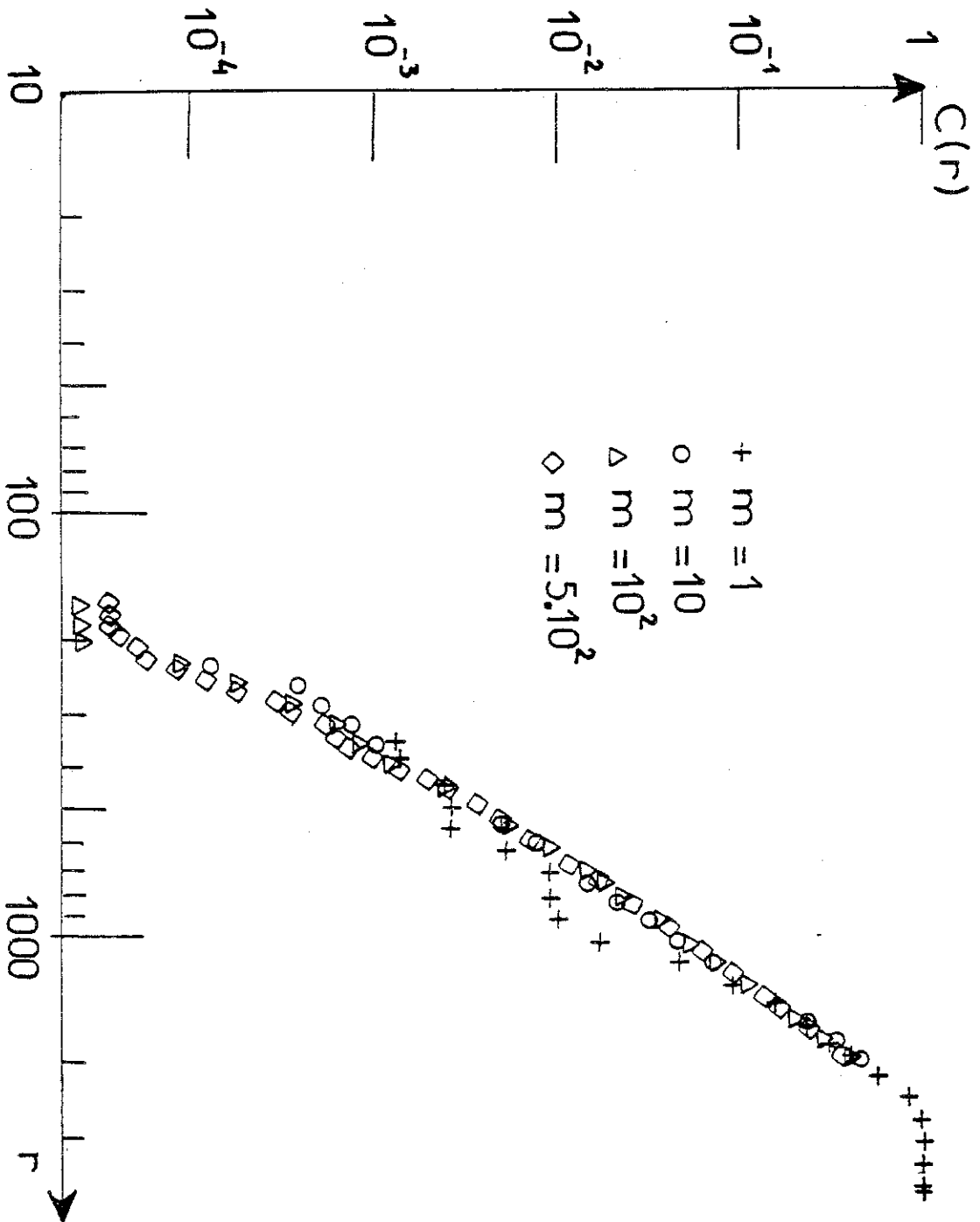


Figure 5 : Courbes $C_m(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal expérimental provenant d'une expérience de convection de Rayleigh-Bénard (voir chapitre IV) pour $m = 1, 10, 10^2$ et $5 \cdot 10^2$.
 ($N = 768$; $\Delta t = 0,33$; $p = 3$; $n = 10$)

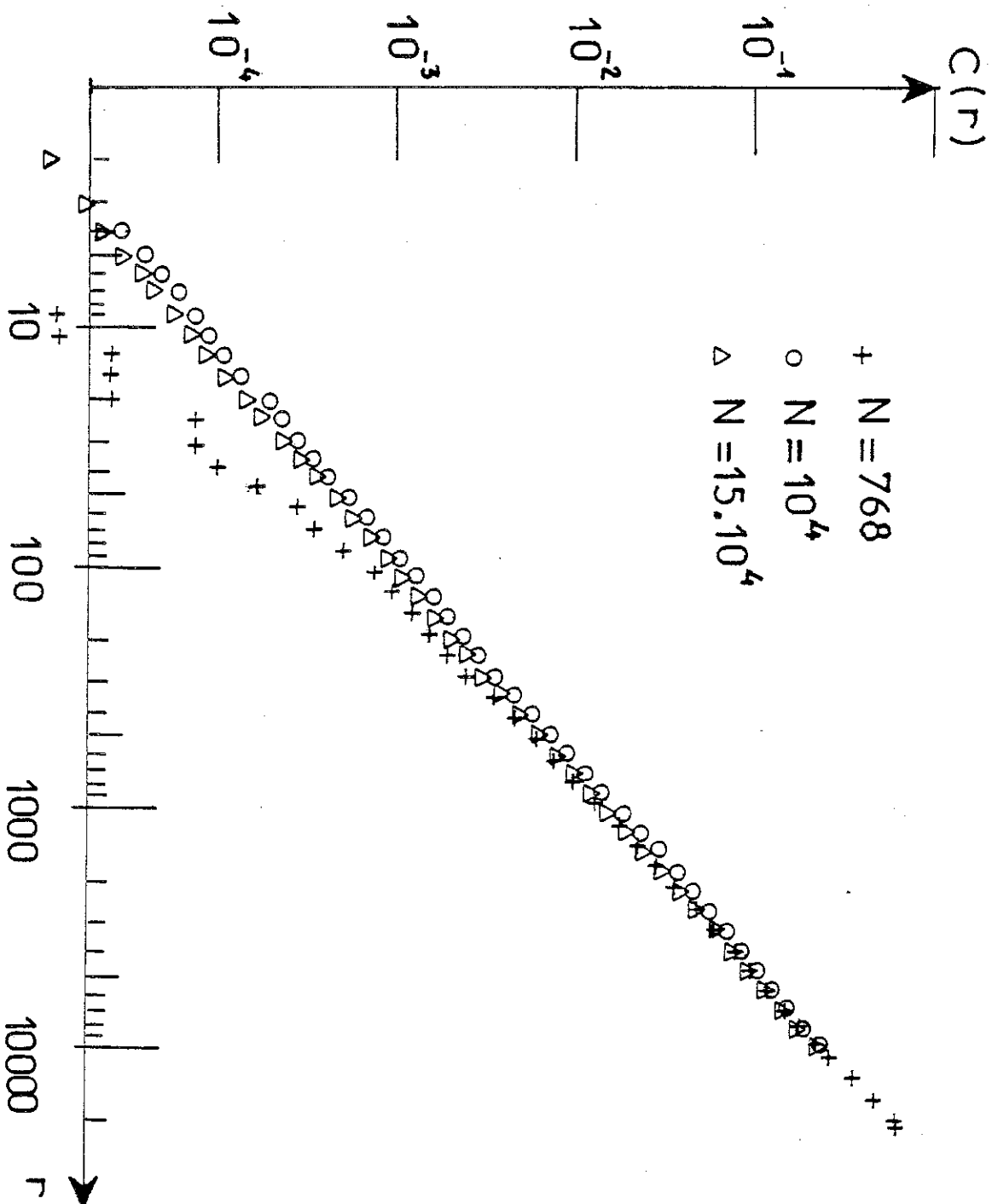


Figure 6 : Courbes $C_m(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le système de Hénon ($a = 1,4$; $b = 0,3$) pour $N = 768$, 10^4 et $15 \cdot 10^4$ ($10^2 \leq m \leq 1,5 \cdot 10^2$; $\Delta t = 1$; $p = 1$; $n = 3$).

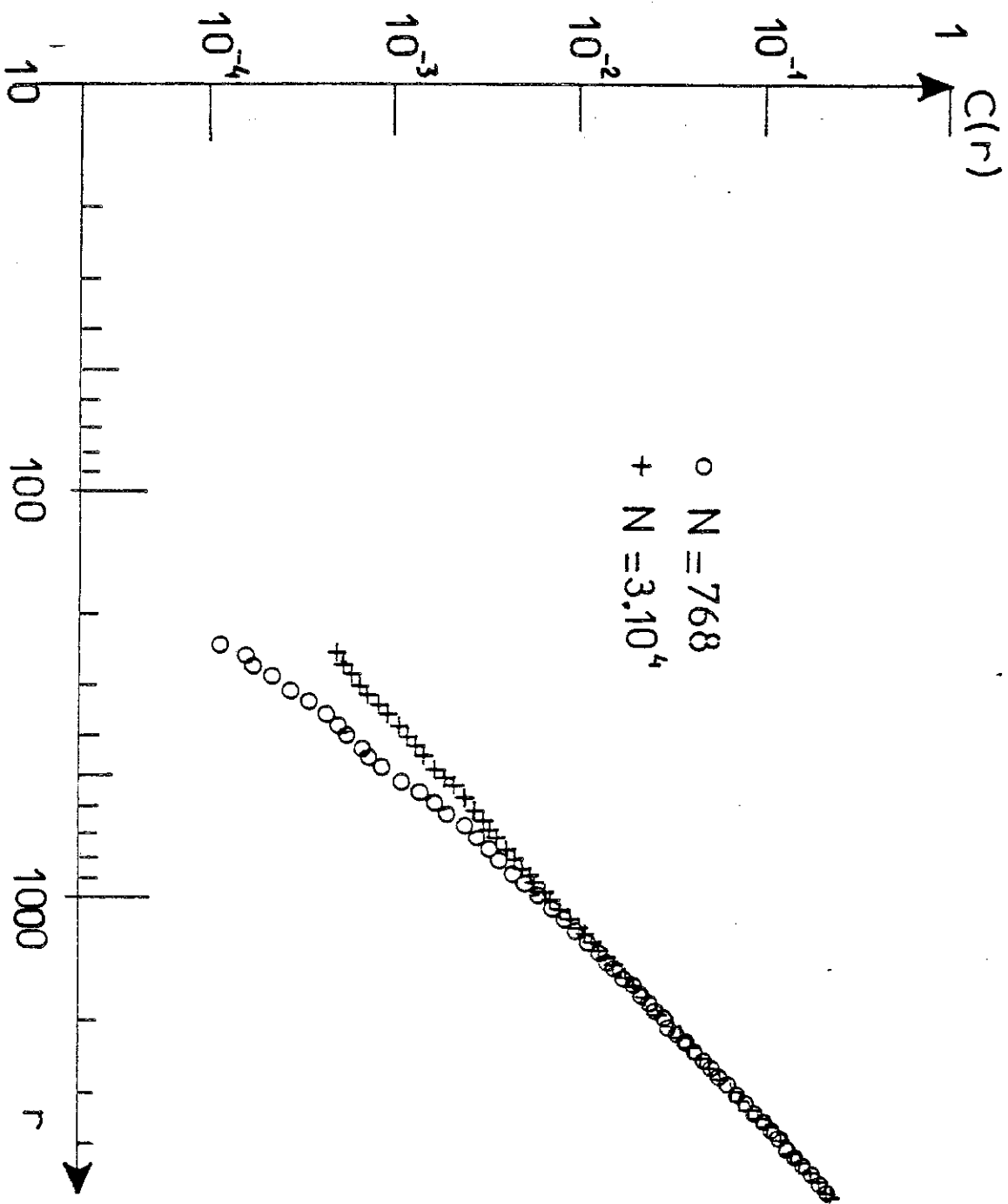


Figure 7 : Courbes $C_m(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable z du système de Lorenz (pas d'intégration : 0,01) pour $N = 768$ et $30 \cdot 10^4$, ($m = 100$; $\Delta t = 0,02$; $p = 5$; $n = 10$).

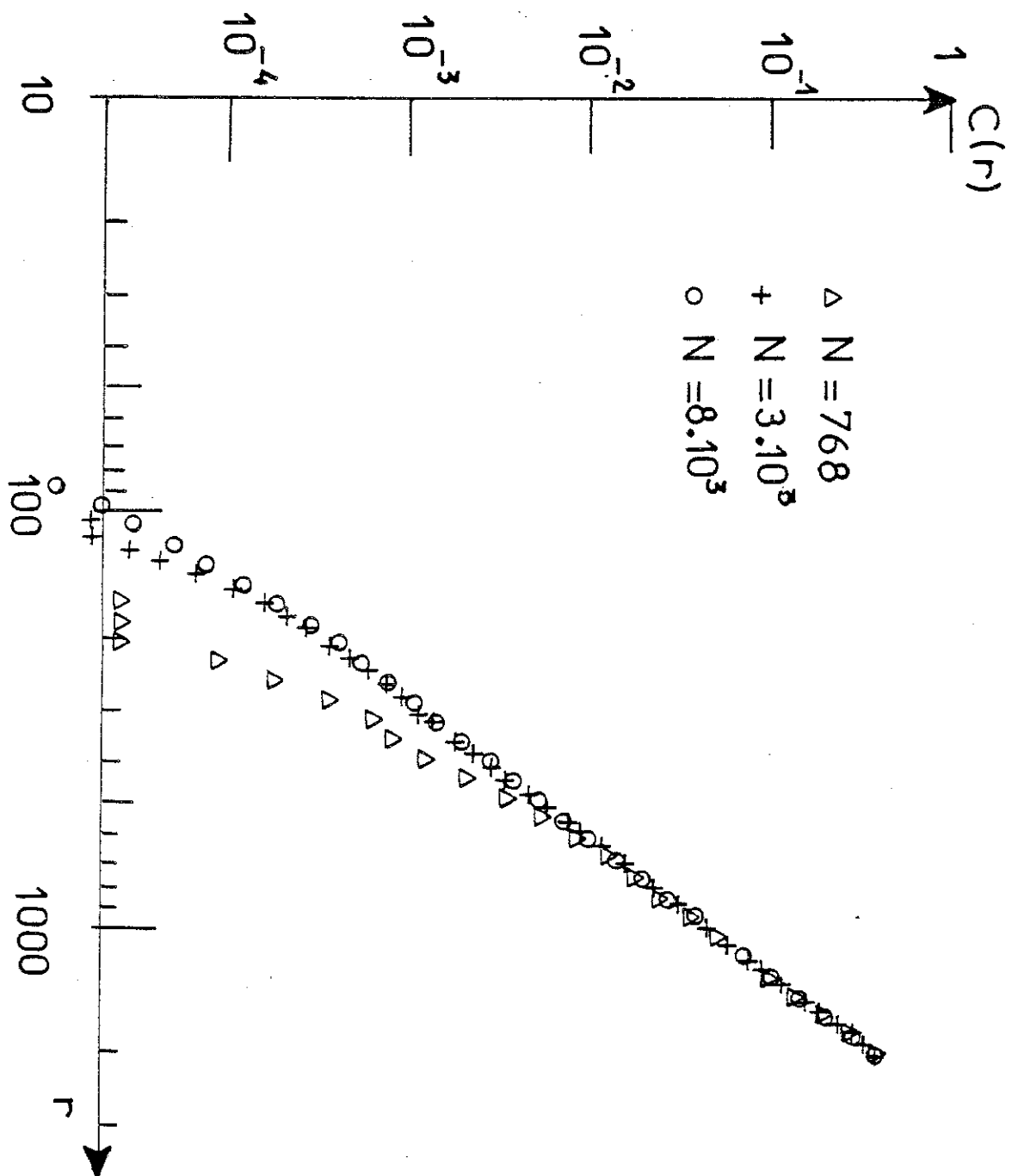


Figure 8 : Courbes $C_m(r)$ en fonction de r pour un signal expérimental (voir figure 5) pour $N = 768$; $3 \cdot 10^3$ et $8 \cdot 10^3$. ($m = 100$; $\Delta t = 0,33$; $p = 3$; $n = 10$).

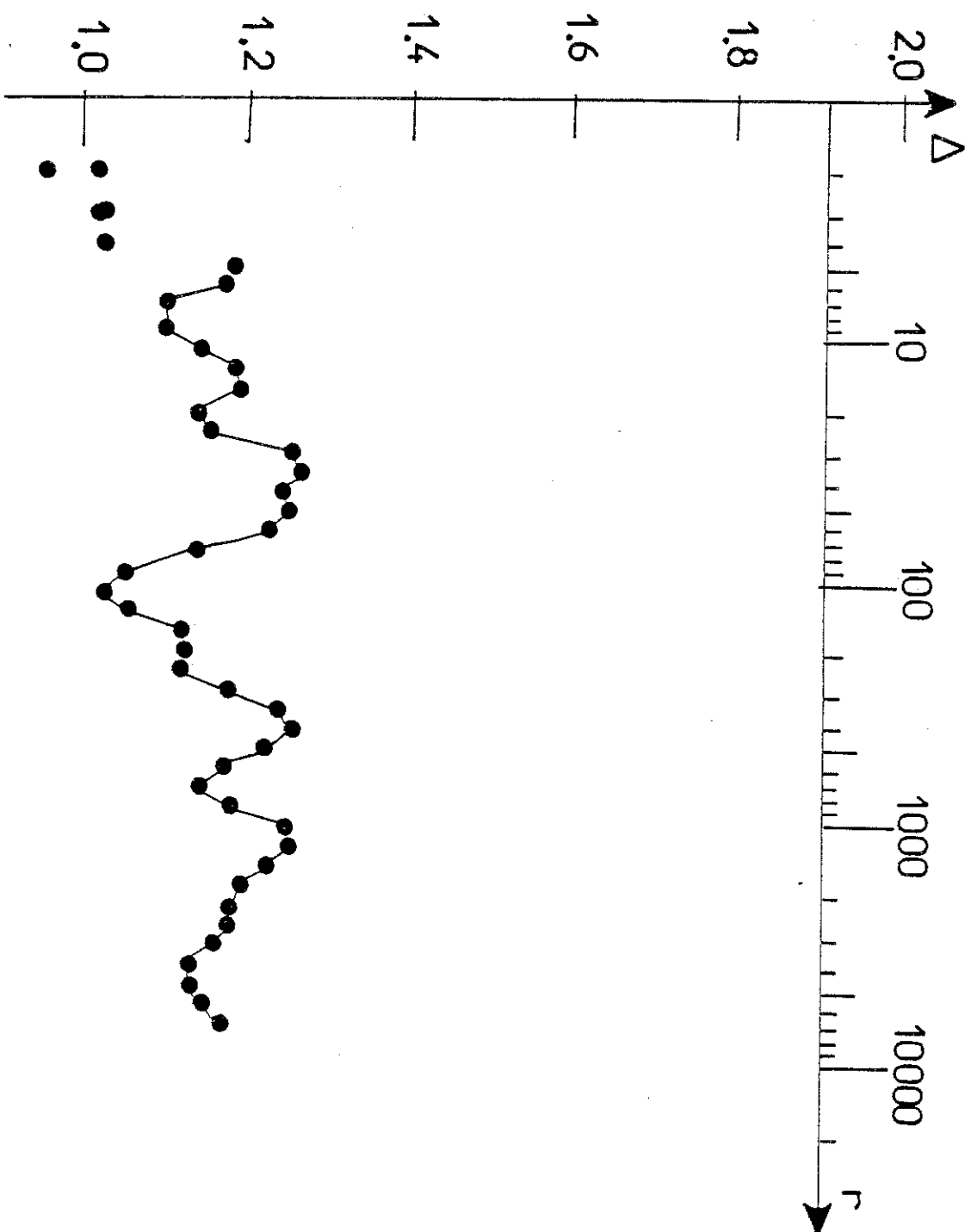


Figure 9 : Pente locale δ pour le système de Hénon en fonction de r montrant des oscillations (celles ci ne sont pas dues à des fluctuations statistiques car on a une bonne résolution).
 ($N \approx 15 \cdot 10^4$; $m = 150$; $\Delta t = 1$; $p = 1$; $n = 3$).

Ces calculs effectués sur une grande classe de systèmes montrent qu'avec un nombre relativement faible d'échantillons N et de moyennes m , on peut obtenir des courbes $C_m(r)$ qui constituent de bonnes approximations des définitions de $C(r)$. Dans toute la suite, l'indépendance de $C_m(r)$ par rapport à N et m pour les zones en r que nous étudierons aura été vérifiée. Nous conviendrons d'omettre l'indice m de $C_m(r)$.

Pour déterminer D_2 , il faut examiner le comportement de $\sum p_i^2(r)$ en fonction de r , et déterminer la limite du rapport des logarithmes de ces quantités quand r tend vers 0. On est donc conduit à porter $\text{Log } C(r)$ en fonction de $\text{Log } r$ et à déterminer la pente de cette courbe pour r petit.

Il s'agit d'une pente moyenne car la courbe $C(r)$ peut être discontinue partout à N fini (pour un ensemble de Cantor par exemple). Dans ce cas, pour $N \rightarrow \infty$ elle n'est pas dérivable car elle comporte un nombre infini de ruptures de pentes. Ces effets se manifestent à N fini par des oscillations que l'on peut observer sur $C(r)$. Celles-ci apparaissent comme elles-mêmes constituées d'oscillations plus petites lorsque N augmente (voir [58] et la figure 9). Par la suite nous négligerons ces effets et ne considérerons que la pente moyenne. Pour cela, nous avons utilisé deux techniques principales :

a. la détermination de la pente globale ² par une méthode de moindres carrés

b. une estimation de la pente locale en calculant la densité

$$\delta_i = \frac{\text{Log } C(r_{i+1}) - \text{Log } C(r_{i-1})}{\text{Log } r_{i+1} - \text{Log } r_{i-1}} \quad \text{au point } r = r_i \quad (36)$$

Pour "lisser" les variations de δ_i nous avons parfois estimé la pente Δ_i par la méthode des moindres carrés sur 5 ou 7 points centrés sur i .

Ces méthodes ne nous donnent pas l'erreur que l'on commet sur l'estimation de γ . Il faudrait pour cela recourir à la méthode proposée par Takens [59] qui pour une suite de N valeurs de distances d_{xy} donne

le "meilleur" exposant γ . La détermination de γ par une méthode de moindres carrés ne donne pas de barre d'erreur sur la pente ; cette nouvelle technique permet au contraire d'apprécier l'incertitude sur l'exposant γ préalablement déterminé. Pour l'appliquer il faudrait être sûr que le comportement de $C(r)$ est bien en r^γ . Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas dans la pratique, il y a souvent des courbures systématiques (voir chapitre IV) ; ce sont ces effets que nous avons étudiés par la suite.

CHAPITRE III : APPLICATION DE LA METHODE DE RECONSTRUCTION D'ESPACE
DES PHASES ET DE DETERMINATION DE LA DIMENSION A DES SYSTEMES
MODELES TRES SIMPLES

Nous avons vu dans la section D du chapitre II que l'on pouvait facilement estimer $C(r)$ avec un nombre limité de points N et de moyennes m ; ceci étant fait dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire la reconstruction d'un espace des phases R^n à partir d'un signal scalaire. On commence ici à examiner quelques-unes des questions liées à l'application pratique de la méthode : quelle sera l'influence du bruit sur la détermination de la dimension ?, quelle sera la dimension maximum d'attracteur que l'on pourra atteindre ?, combien de points d'un objet de dimension donnée faudra-t-il pour le caractériser ? Que donnera la méthode sur un signal qui comporte plusieurs échelles d'énergie différentes ?

Pour essayer d'y répondre, nous avons analysé des systèmes modèles très simples. Dans un premier temps, nous examinerons le cas de signaux périodiques et quasi périodiques. On examinera aussi un exemple de signal à très grand nombre de degrés de liberté : le bruit blanc.

A - SIGNAUX PERIODIQUES

A.1 LA SINUSOIDE COMME EXEMPLE DE SIGNAL PERIODIQUE

Si $X(t)$ est une fonction périodique, alors pour tout $n \in N$, la projection dans R^n par (25) donnera des points $\vec{X}(t)$ qui seront sur une trajectoire fermée : le cycle limite.

Dans le cas particulier où $X(t) = \sin t$, la trajectoire $\vec{X}(t) = (\sin t, \sin(t - \tau), \dots, \sin[t - (n-1)\tau])$ dans R^n est située dans un plan qui passe par l'origine (il y a $n-2$ équations qui relient n variables).

En outre, il est possible de faire des calculs analytiques avec ce système. Néanmoins, les conclusions de l'étude que nous présentons sont valables pour un signal périodique quelconque.

La dynamique d'un tel signal est régulière : toutes les dimensions définies au chapitre I* vont donner la valeur 1. De même les entropies sont nulles (voir chapitre IV).

Nous avons examiné ce que donne la technique pour le signal périodique $X(t) = \sin(2\pi ft)$ pour $f = 1/40.039\ 42$. Nous avons calculé $N = 15\ 10^4$ valeurs de t régulièrement espacées de $\Delta t = 1$ et converti le signal en valeurs entières en prenant la partie entière de $16350 \times [X(t) + 1]$. Le choix de la fréquence a été fait de telle sorte qu'il

* Seules les quantités métriques ont un sens pour la caractérisation de phénomènes non linéaires, en effet, si l'on s'intéresse à d'autres quantités, comme par exemple la dimension -que l'on qualifiera de linéaire- de l'espace euclidien qui contient l'attracteur (c'est le nombre de vecteurs linéairement indépendants qui décrivent l'ensemble de ce dernier) [60], on trouvera des résultats qui dépendent de la fonction X . Dans le cas simple où $X(t) = \sin t$, la dimension linéaire sera 2 (voir plus haut). Par contre, pour $X(t) = e^{\sin t}$, signal périodique qui présente une infinité d'harmoniques dont l'énergie décroît, la dimension linéaire vaudra une infinité (le nombre d'harmoniques) [61]. Lorsque nous calculons D_2 pour ce système nous trouvons 1 (comme tous les $C_1(r)$ se comportent comme $r, D_q = 1$ pour tout q).

Ces conclusions s'étendent facilement à des tores T_n ; pour $n = 2$, nous avons analysé le signal $X(t) = \exp(\sin f_1 t \sin f_2 t)$ qui est du même type que le précédent et ici aussi nous avons $D_2 = 1$ ($D_q = 1$ pour tout q de la même façon). Il est alors clair que les méthodes linéaires globales sont tout à fait inadaptées pour la définition d'une notion de degré de liberté.

y ait environ 40 points par période du cycle, mais en même temps qu'il n'y ait pas commensuration entre la période et la période d'échantillonnage. La figure 10 montre des courbes $C(r)$ pour ce signal pour deux valeurs de la dimension n et pour un décalage $p = 7$ fixé ($\sim 1/6$ période). Il y a clairement une zone de comportement en $r^{\sqrt{}}$ très bien définie avec $\sqrt{} = 1.02 \pm 0.02$ pour $10^2 \leq r \leq 10^4$. Ce comportement a été observé pour $n \in [2, 12]$. Dans la plage de r considérée l'exposant $\sqrt{}$ est toujours supérieur à 1 (de 1 à 2 %). Nous verrons plus loin que cet effet est dû à une contamination du signal par du bruit. (Remarquons aussi que pour $n = 2$ la pente de la courbe $C(r)$ déterminée pour $r \in [10^3, 10^4]$ vaut 0.96). Au delà de $r = 10^4$, il y a un changement de comportement de $C(r)$, on observe alors une courbure de $C(r)$ en coordonnées log-log. Ceci est dû au fait que r devient comparable au diamètre de l'attracteur. Il y a alors un très grand nombre de points qui sont comptabilisés par suite de tangences entre la sphère et les bords de l'attracteur. Au delà de cette distance, il n'y aura plus de points et $C(r)$ atteindra une saturation à la valeur 1. La situation est moins simple pour les très basses valeurs de r ($r \leq 100$). On observe alors une rupture de la loi d'échelle pour les courbes $C(r)$ et ceci quel que soit n (voir figure 11 pour un exemple). Cet effet est dû à des problèmes de commensurabilité entre la période du système et la période d'échantillonnage. Les points⁺ sont groupés par structures ; il y a des défauts de remplissage. Nous pouvons interpréter ces effets d'une façon semi-quantitative.

Pour cela considérons les valeurs $t_i = i \Delta t$ de t qui seront telles que $|X(0) - X(t_i)| < \varepsilon_i$, autrement dit les valeurs de la période apparente du signal échantillonné (et non du signal). Dans ce cas, $i = 40, 400$ ou 4004 . Pour $i = 40$ on aura (puisque nous sommes au voisinage de 0) :

$$X(i\Delta t) = \sin \left(2\pi \frac{40}{40.03942} \right) \cong \sin [2\pi(1 + 98 \cdot 10^{-5})] \cong 98 \cdot 10^{-5}$$

⁺ Nous raisonnons sur des valeurs de $X(t)$ dans R ; il est clair que l'on aurait qualitativement les mêmes effets pour $\tilde{X}(t)$ (reconstitué à partir de $X(t)$) dans R^n .

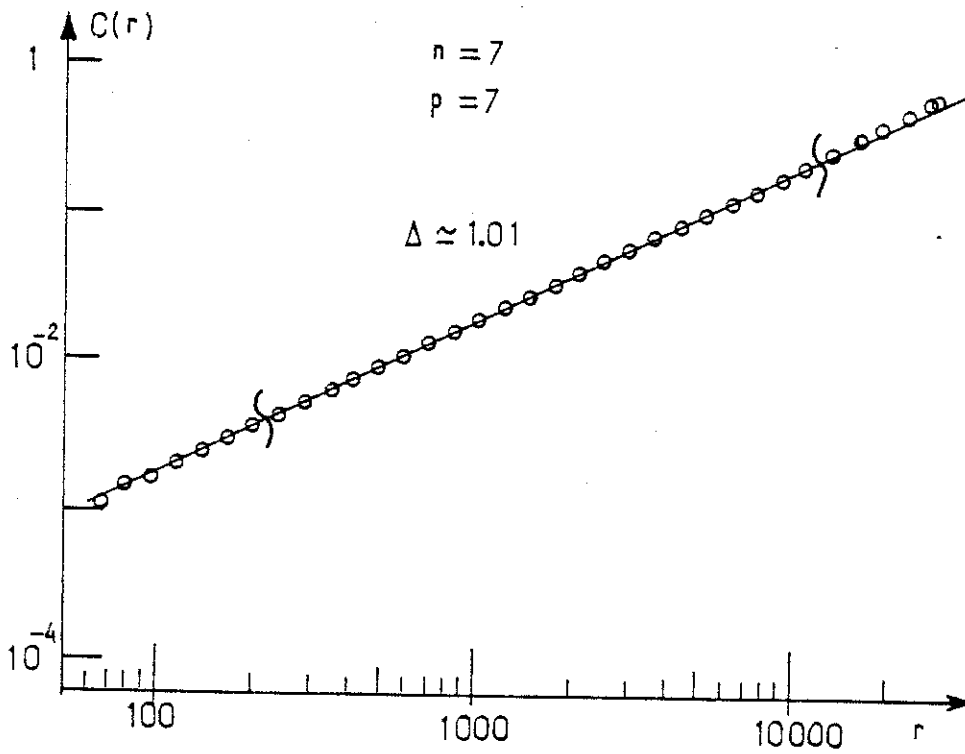
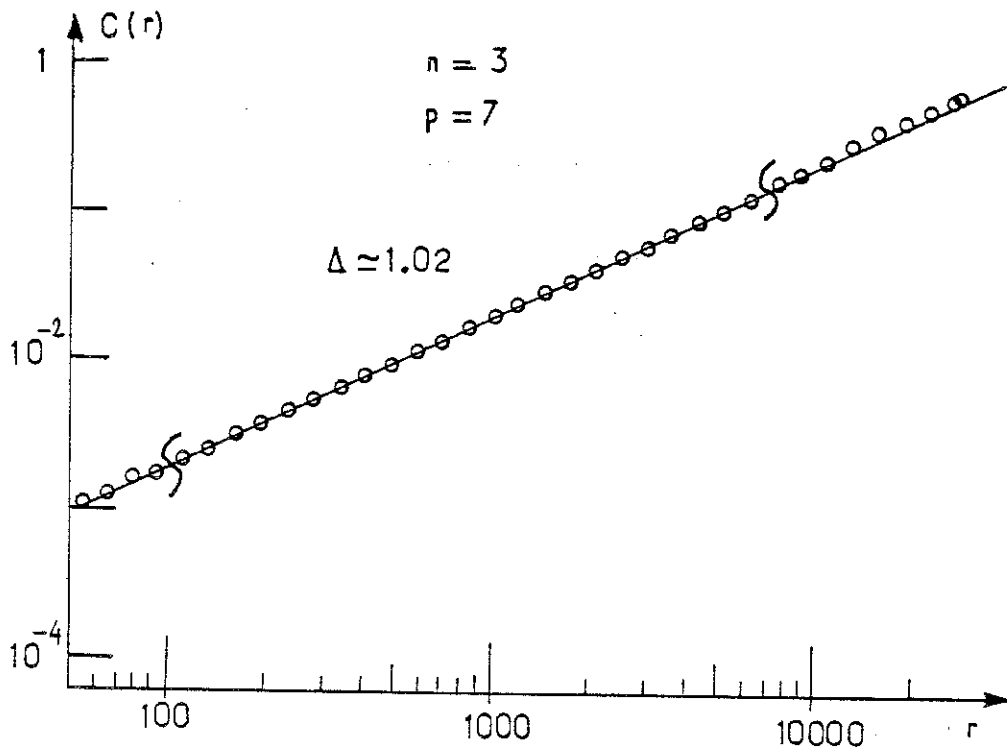


Figure 10

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un cycle limite (le signal scalaire $X(t)$ est une sinusoïde) pour deux valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 3$ et 7 ($N = 10 \cdot 10^4$; $m = 12$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$), $p = 7$).

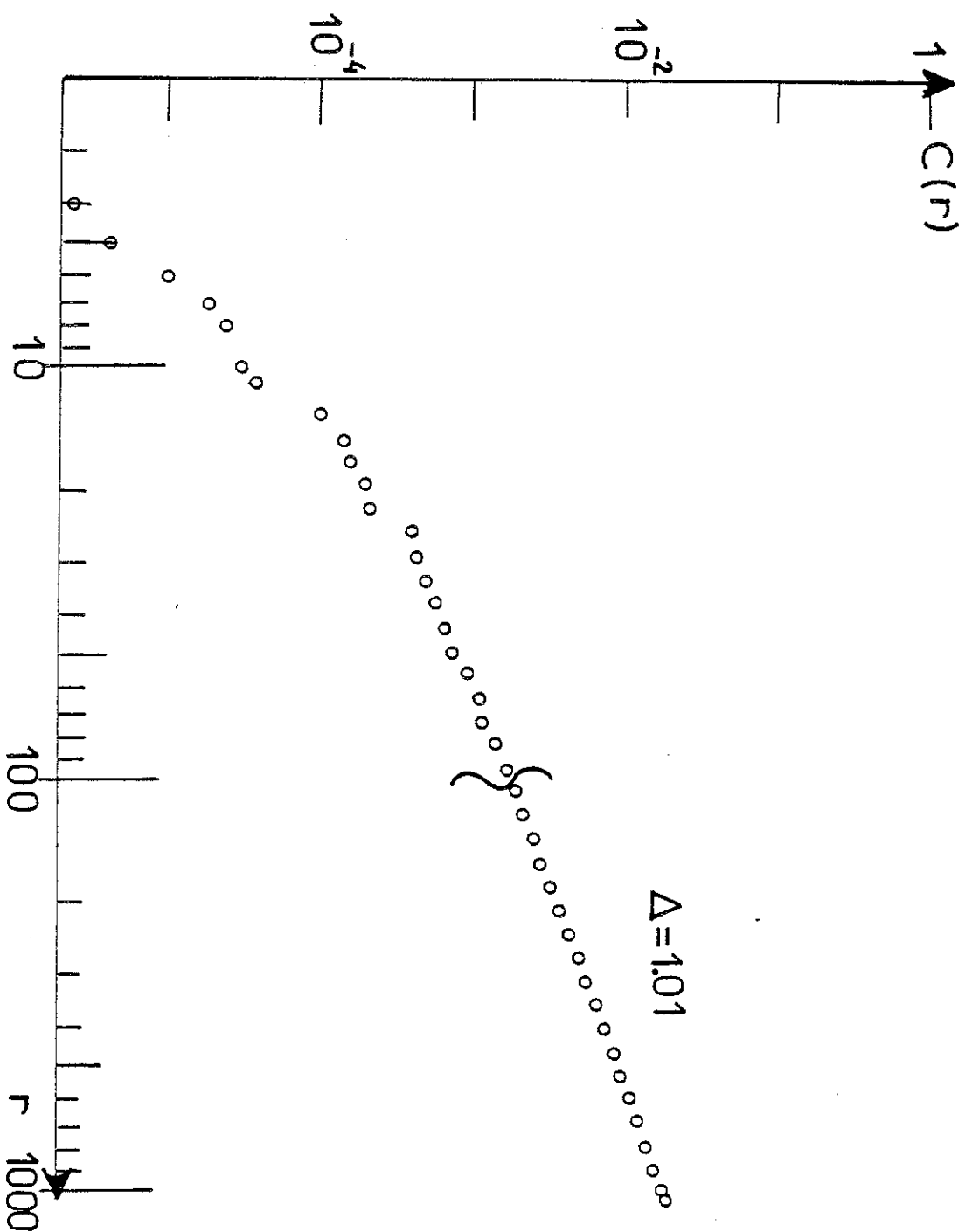


Figure 11

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le signal de la figure 10 avec $n = 7$ pour de très basses valeurs de r . (mêmes paramètres que pour la figure 10).

Ceci correspondra à une distance de $16\,350 \times 0.00098 \simeq 16$. Ainsi les points $X(t)$ seront distribués en 40 structurations de $\frac{15 \cdot 10^4}{40} \simeq 3\,750$ points

chacun. La distance entre points voisins dans une même structure sera environ de 16. La situation est analogue pour $i = 400$ et 4004 : pour $i = 400$ (resp. 4004) les points seront distribués en 400 (resp. 4004) paquets de 375 (resp. 37) points environ chacun. La distance entre points voisins ne varie pas beaucoup. $r_0 \simeq 150$ pour 400 et 23 pour 4004. Ainsi l'extension de ces structures qui vaut $r_0 \times$ nombre de points passe de $6 \cdot 10^5$ ($i = 40$) à $2 \cdot 10^5$ ($i = 400$) et enfin à 861 ($i = 4004$). Il est alors clair que les deux premiers groupes correspondent à des structures qui vont recouvrir tout le cycle et donc se chevaucher, ce n'est pas le cas pour le dernier. Les distances associées aux deux premiers groupes vont alors diminuer, par contre celles qui sont associées au dernier groupe ne vont pas évoluer et les décrochements observés pour les courbes $C(r)$ correspondent alors plutôt à r_0 associé à $i = 4004$. Pour étudier ce phénomène de façon plus quantitative, nous avons choisi une sinusoïde $X(t)$ telle que $f = 11/401$. Dans ce cas, la période d'échantillonnage et la période propre sont exactement commensurables dans un rapport relativement faible. Dans ce cas il y aura 401 groupes de $\frac{15 \cdot 10^4}{401} \simeq 374$ points chacun qui seront tous confondus. La courbe $C(r)$ variera donc par paliers de $\frac{2}{401} \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ (le chiffre 2 vient du fait que comme 401 est impair, les paquets de points viendront par 2 : il y a un paquet de points pour 2π et pas de points pour π). La distance r_0 pour laquelle se produira le premier décrochement est lorsque $n = 1$: $\sin\left(\frac{2\pi}{401}\right) \times 16\,350 \times \frac{1}{2} \simeq 125$. (Le facteur $1/2$ correspond à 0 et π qui sont confondus lorsque $n = 1$). Ainsi pour $n = 1$ on devrait observer pour $C(r)$ (avec des origines près de 0) des paliers de $5 \cdot 10^{-3}$ qui se produisent pour $r = 125, 250, 375, 500 \dots$ La figure 12 montre le calcul de $C(r)$ dans ces conditions, il y a un très grand accord avec les prédictions précédentes. A deux dimensions le facteur $1/2$ dans le calcul précédent n'a plus raison d'être car 0 et π correspondent à des points distincts sur la trajectoire. Ainsi les décrochements devraient se produire pour $r = 250, 500, 750$. Ici encore, l'accord avec le calcul numérique est très bon comme le montre la figure 13.

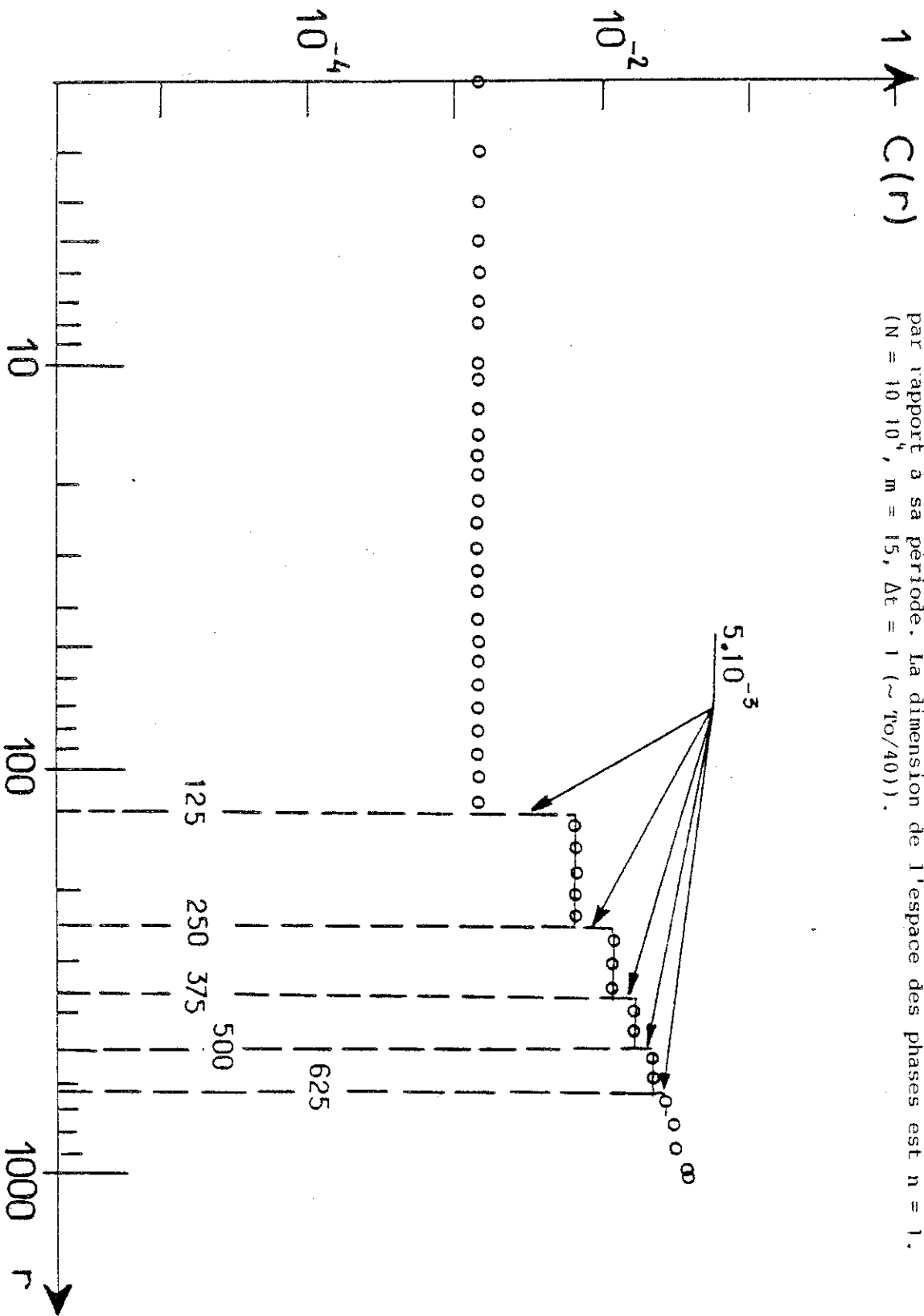


Figure 12

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal périodique (sinusoïde) échantillonné de façon exactement commensurable par rapport à sa période. La dimension de l'espace des phases est $n = 1$. ($N = 10 \cdot 10^4$, $m = 15$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$)).

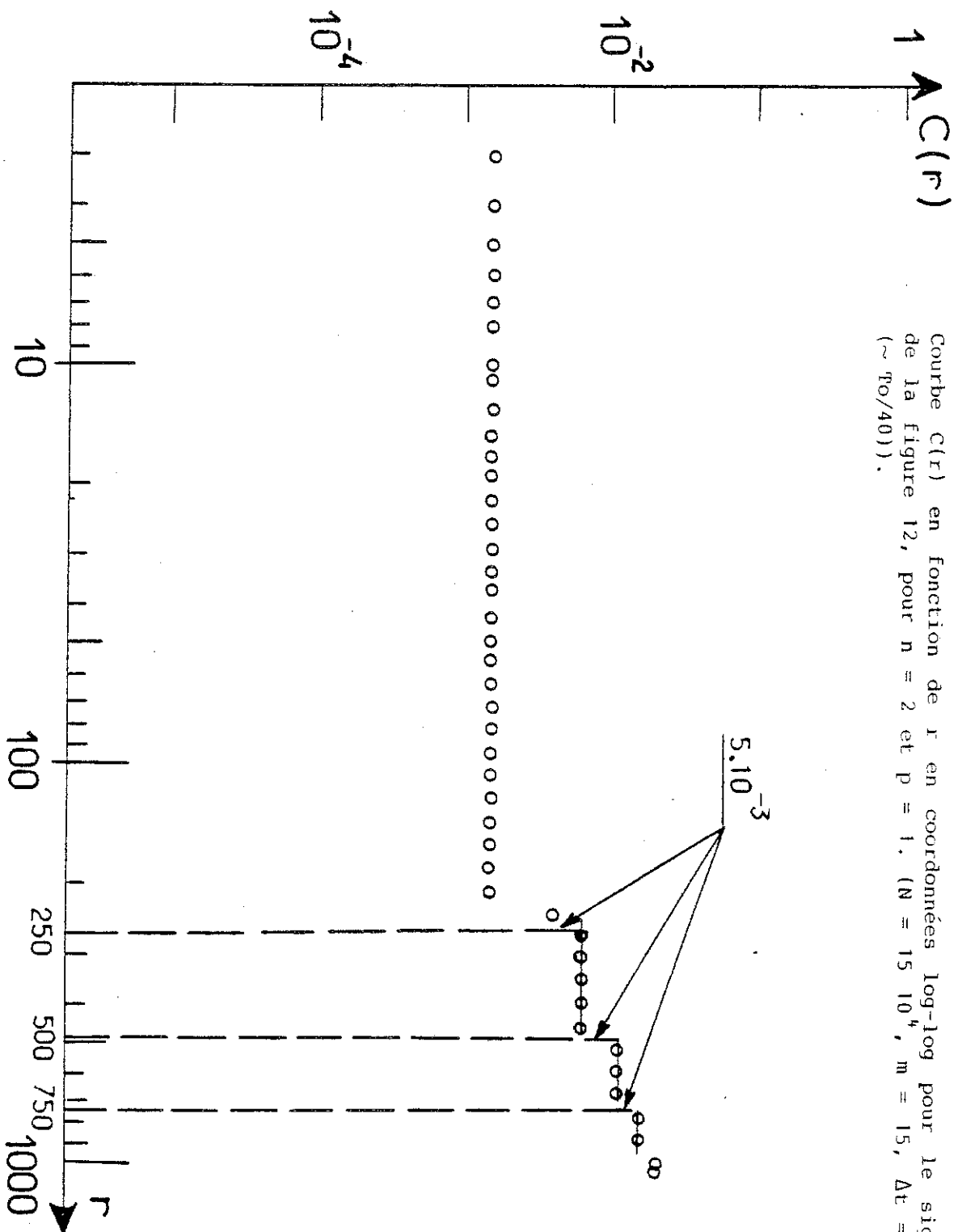


Figure 13

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le signal de la figure 12, pour $n = 2$ et $p = 1$. ($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 15$, $\Delta t = 1$. ($\sim T_0/40$)).

Ces effets de commensuration sont importants lorsque l'on examine les très basses valeurs de r , ils rendent compte du fait que l'intervalle $[0, 2\pi]$ n'est pas balayé de façon homogène pour le calcul de sint . C'est ce qui fait la généralité de la conclusion de cette étude qui peut être appliquée à d'autres signaux périodiques quelconques. Une autre remarque que l'on peut faire est que ces problèmes n'apparaîtront pas pour des signaux chaotiques où la présence d'exposants de Lyapunov positifs permettra le brouillage des trajectoires et un "remplissage" quasi homogène de l'attracteur. Nous avons mis en évidence à la fin du chapitre II des problèmes de lacunarité -c'est-à-dire de remplissage non uniforme- pour des ensembles de Cantor. Ceux-ci sont de nature intrinsèque ; par contre ceux que nous avons discutés peuvent être modifiés en changeant la période d'échantillonnage Δt ou le nombre de points N et constituent une particularité des signaux périodiques.

Par la suite, lorsque nous avons voulu observer des régions de $C(r)$ pour lesquelles r est très faible nous avons pris les précautions suivantes :

- . choix d'une "fréquence" qui soit le rapport de deux nombres premiers grands, ainsi $4003/160\,013$ tels que la période soit du même ordre que la taille de l'échantillon ($N = 15 \cdot 10^4$), afin d'obtenir un "remplissage uniforme"

- . calcul de l'argument du sinus en double précision, on se ramène par soustraction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour ne pas faire d'erreurs lors du calcul du sinus et introduire ainsi une dérive⁺ que l'on ne contrôle pas.

Grâce à la mise en évidence de ces problèmes liés à l'utilisation de la méthode de Grassberger-Procaccia sur un signal périodique très simple, nous avons pu comprendre géométriquement ce qui se passait pour des signaux périodiques plus généraux.

⁺ Par exemple, nous avons effectué un calcul sur le signal $X(t) = \sin 2\pi f t$ où $f = \frac{113}{4003}$ pour lequel les valeurs de r_0 sont plus faibles que pour le cas précédent ; le sinus étant calculé sans précautions. Pour $N = 10^4$, $C(r)$ présentait l'allure typique de la figure 12, par contre pour $N = 15 \cdot 10^4$ "les marches" avaient disparu et la courbe était devenue régulière.

A.2 SIGNAUX PERIODIQUES PLUS GENERAUX

Après la sinusoïde et ses problèmes de commensuration, nous avons voulu analyser un signal périodique plus général. A une fonction périodique X quelconque, nous avons préféré un signal modèle composé de deux sinusoïdes (fréquence f et un sous-harmonique) pour lequel on peut effectuer certaines prédictions. Pour cela, on a construit le signal suivant :

$$Y(t) = E [16\ 350 (X(t) + 1)]$$

$$X(t) = 0.5 (\sin 2\pi f t + \sin 2\pi 0.1 f t)$$

où $f = 1/40.039\ 42$. La trajectoire fermée $\vec{X}(t)$ va alors s'inscrire sur un tore T_2 . Ce tore plongé dans R^n , $n \geq 3$ a pour axe de symétrie la première bissectrice et il ne se recoupe pas. Nous avons fixé n et p de telle sorte que $(n-1) \nmid p$; ce qui a pour effet de contrôler l'évolution des distances des points par rapport au centre de l'hypercube de R^n (voir chapitre IV). En outre, nous avons imposé aux origines \vec{X}_i d'être le plus près possible du centre : les points \vec{X}_i sont alors sur le tore à une distance connue du centre.

La figure 14 montre les courbes $C(r)$ pour le signal $X(t)$ pour $n = 5$ et 8 . On observe pour les faibles valeurs de r une zone de pente 1 : on caractérise à cette distance le fait que le signal est périodique et donc correspond à un cycle limite. Pour des valeurs de r au delà d'une valeur seuil $r \simeq 4000$ qui est sensiblement constante pour $4 \leq n \leq 12$, la courbe $C(r)$ se redresse et présente alors une courbure monotone. La pente maximum dans cette zone vaut 2.4, alors que l'on s'attendrait à trouver un comportement en r^2 (caractéristique du tore T_2 qui est l'enveloppe de $X(t)$). Ce désaccord est vraisemblablement dû à des problèmes de saturation du même type que ceux que nous avons évoqués à propos de la sinusoïde : on doit "sentir" les bords de l'objet. La valeur seuil $r = 4000$ est à relier à la distance moyenne entre "boucles" de la trajectoire $\vec{X}(t)$. Supposons que l'on fixe la partie lente du signal, la trajectoire sera alors dans un plan. Maintenant, considérons la combinaison des deux : à chaque instant le plan va tourner.

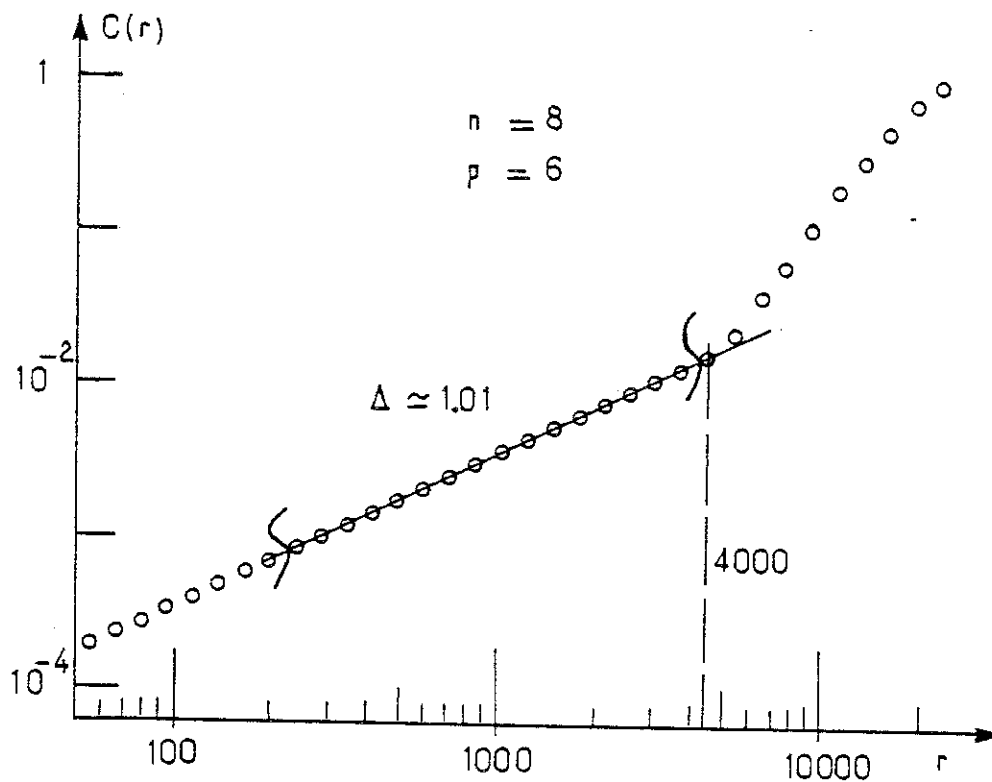
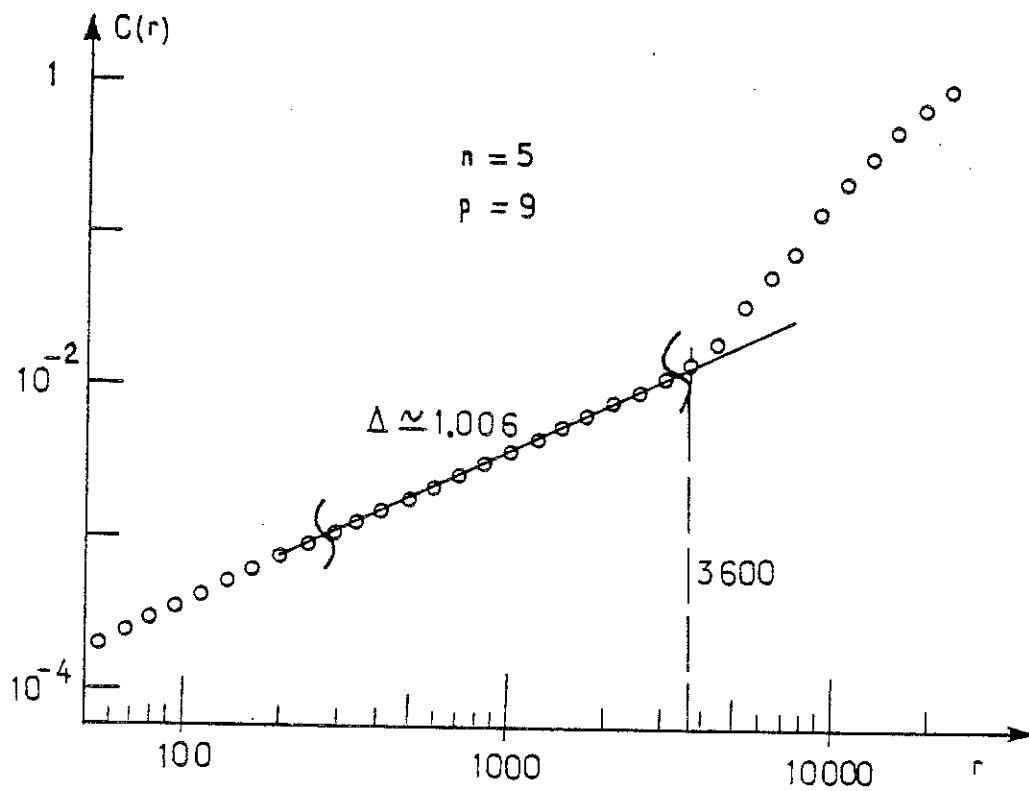


Figure 14

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le signal constitué par la moyenne de deux sinusoïdes de fréquences f et $f/10$, pour $n = 5$ ($p = 9$) et $n = 8$ ($p = 6$) ($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 12$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$)).

Au cours d'une révolution rapide il va tourner de $2\pi/10$. La distance moyenne "inter-boucles" sera le produit de l'angle ($2\pi/10$) par le rayon ; cette dernière quantité est la distance des origines au centre, elle a été fixée. La valeur trouvée 3600 est en accord avec ce que l'on observe sur la figure 14. Ceci se confirme lorsque l'on divise la fréquence du sous-harmonique par 10.

Soit le signal :

$$Y(t) = E[16\ 350 [X(t) + 1]] \text{ avec}$$

$$X(t) = 0.5 (\sin 2\pi ft + \sin 2\pi 10^{-2} ft)$$

où $f = 4003/160\ 013$ (nous avons pris en outre les précautions de la section précédente car nous examinerons ici des très basses valeurs de r). La figure 15 montre la pente locale Δ pour le signal précédent en fonction de r . La valeur seuil r_0 vaut de l'ordre de 400^+ , il y a clairement un facteur 10 par rapport à la valeur précédente. Au delà on a un comportement en r^ν où ν est voisin de $\frac{1}{2}$: c'est l'enveloppe de $\vec{X}(t)$ qui est ainsi caractérisée, il s'agit d'un tore $T_{\frac{1}{2}}$. Pour $r \leq 400$, la pente s'infléchit et tend vers une valeur proche de 1 : pour cette plage de distances, les boucles se distinguent les unes des autres ; ainsi $C(r)$ croît comme r .

Ces deux exemples nous incitent à examiner le cas d'un système dynamique qui subit une transition vers la turbulence par cascade de doublement de période. Dès que le nombre de sous-harmoniques devient important, l'aspect géométrique de l'objet sera très compliqué. Crawford et Omohundro [62] ont étudié la topologie des orbites de tels systèmes dans R^3 et établi une classification de celles-ci en termes de théorie des noeuds sur un tore. Cette étude a établi que lorsque le nombre de bifurcations aura dépassé 3 ou 4, on aura affaire à un tel paquet de spaguettis dans l'espace des phases qu'il sera à peu près impossible de résoudre l'aspect unidimensionnel (et donc périodique ?) du système.

+ Pour cet exemple nous n'avons pas choisi les origines à une distance calibrée : la valeur seuil est alors moins bien définie qu'auparavant.

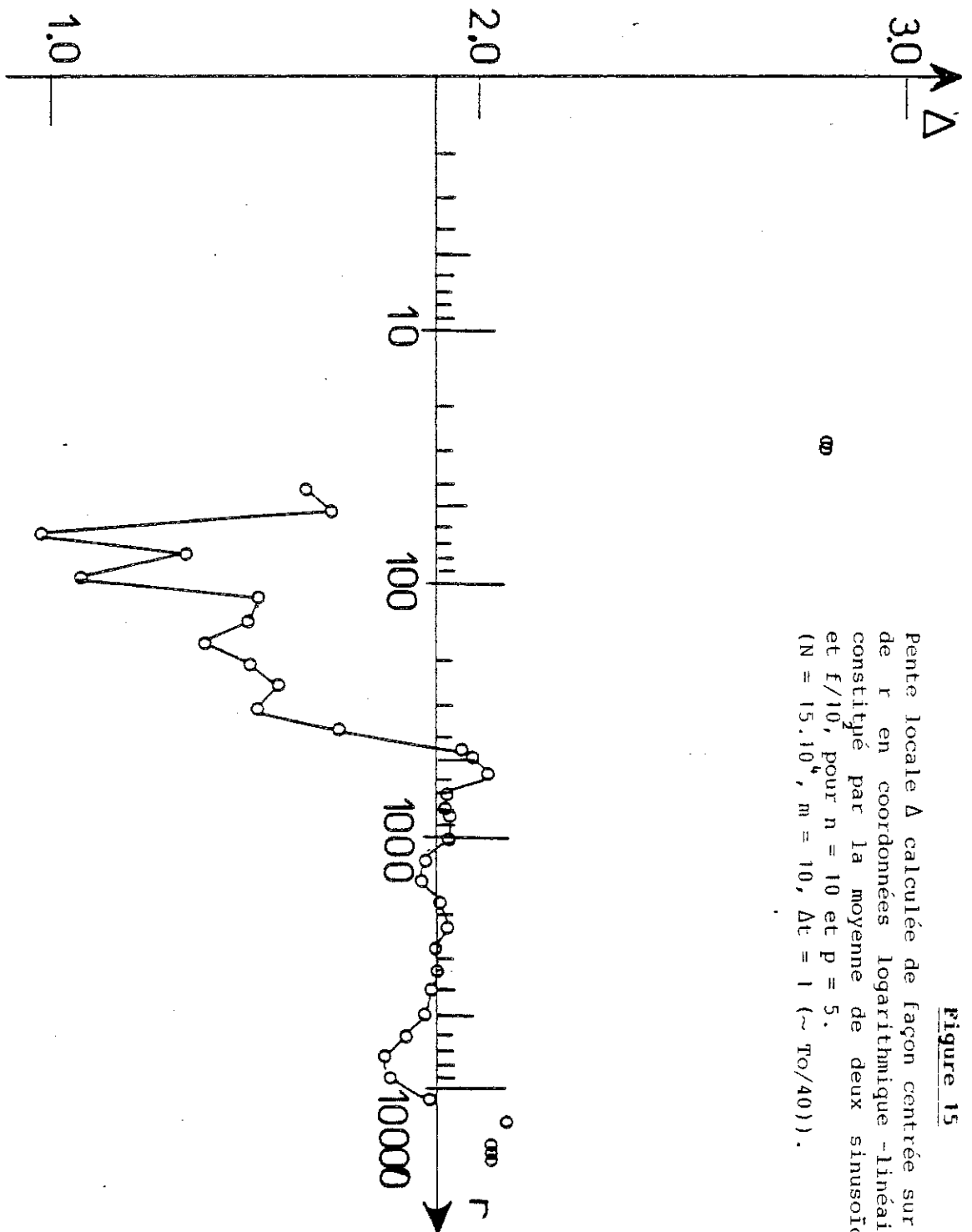


Figure 15

Pente locale Δ calculée de façon centrée sur 2 points en fonction de r en coordonnées logarithmique - linéaire pour le signal constitué par la moyenne de deux sinusoides de fréquences f et $f/10$, pour $n = 10$ et $p = 5$.
($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 10$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$)).

En effet, lors de la première bifurcation la trajectoire fermée s'enroulera sur un tore, à la suivante ce tore portant la trajectoire fermée s'enroulera lui-même autour d'un autre tore et ainsi de suite. L'épaisseur des tores, reliée à l'amplitude des sous-harmoniques décroîtra géométriquement. Ainsi, lorsque l'on étudiera le système à une échelle intermédiaire, on se heurtera aux difficultés que l'on a mises en évidence plus haut.

Pour retrouver dans la pratique le caractère périodique du signal, il est nécessaire de diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à la valeur du sous-harmonique (chapitre V). Nous mettons ici en évidence l'influence pratique importante de la fréquence d'échantillonnage sur la reconstitution de l'espace des phases R^n . Cet effet sera souligné au chapitre V lors de la caractérisation de signaux à très haute dimension.

B - LES SIGNAUX MULTI-PERIODIQUES

Afin d'examiner l'applicabilité de la méthode à des signaux à plus grand nombre de degrés de liberté, nous avons considéré des tores T_n . En pratique, nous les avons construits comme des moyennes (pondérées) de n sinusoides⁺. Il est alors très intéressant de faire varier l'énergie relative des modes. Dans l'expérience de convection de Rayleigh-Bénard effectuée dans [12] on observe que suivant la position de la sonde dans la cellule d'étude, le signal recueilli comportera plus d'énergie dans un mode donné et moins dans un autre. Pour réaliser numériquement cette situation, nous avons envisagé le cas d'un tore T_2 pour lequel l'amplitude d'une sinusoïde par rapport à l'autre varie. Nous examinons successivement les deux cas extrêmes où l'amplitude relative est du même ordre, puis très petite.

⁺ Il y a bien sûr le manque de généralité que nous avons évoqué plus haut, c'est-à-dire le fait qu'un tel objet se trouve dans un espace euclidien de dimension $2n$. Cependant ici encore les conclusions qualitatives que nous dégagerons resteront valables dans le cas général.

B.1 LE CAS OU L'AMPLITUDE RELATIVE EST DU MEME ORDRE

Ce cas est proche de la situation considérée plus haut de deux sinusoides (fréquence f et un sous-harmonique). Cependant ici, la trajectoire n'est plus fermée, elle remplit densément le tore T_2 . Pour fixer les idées, considérons : $Y(t) = E[6350 [X(t) + 1]]$ où $X(t) = 0.6 \sin 2\pi f_1 t + 0.4 \sin 2\pi f_2 t$ où $f_1 = 1/40.039\ 42$ et $f_2 = \pi/40.039\ 42$.

La figure 16 montre deux courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour $n = 3$ et $n = 12$. On distingue une plage de r sur laquelle on observe un comportement en r^{γ} bien défini. La valeur $\gamma = 2.0 \pm 0.05$ est indépendante de n . Il est intéressant de remarquer "l'accident" de $C(r)$ dans le cas $n = 3$; celui-ci est certainement dû à un effet de saturation parce que le tore T_2 n'a pas été suffisamment "déplié" (le produit $n \times p \Delta t$ est trop faible, voir chapitre IV). La situation devient plus riche dans le cas où l'amplitude relative est beaucoup plus faible.

B.2 LE CAS OU L'AMPLITUDE RELATIVE EST TRES FAIBLE

Considérons le signal :

$$Y(t) = E [16\ 350 (X(t) + 1)]$$

$$X(t) = 0.97 \sin 2\pi f_1 t + 0.03 \sin 2\pi f_2 t$$

avec $f_1 = 1/40.039\ 42$ et $f_2 = \pi/40.039\ 42$

La figure 17 montre les courbes $C(r)$ en coordonnées log-log pour deux valeurs de la dimension d'espace des phases : $n = 4$ et $n = 10^+$. Celles-ci présentent deux régimes de variation : pour $r \ll 0.03 \times 32\ 700$, $C(r)$ se comporte comme r^{γ_1} ($\gamma_1 \simeq 2.0 \pm 0.2$) ; si $r \gg 0.03 \times 32\ 700$ $C(r) \sim r^{\gamma_2}$ ($\gamma_2 = 1.05 \pm 0.05$).

+ Ici le choix des origines par rapport au centre de l'hypercube ne présente plus beaucoup d'intérêt car on s'intéresse à des propriétés locales sur l'attracteur lui-même.

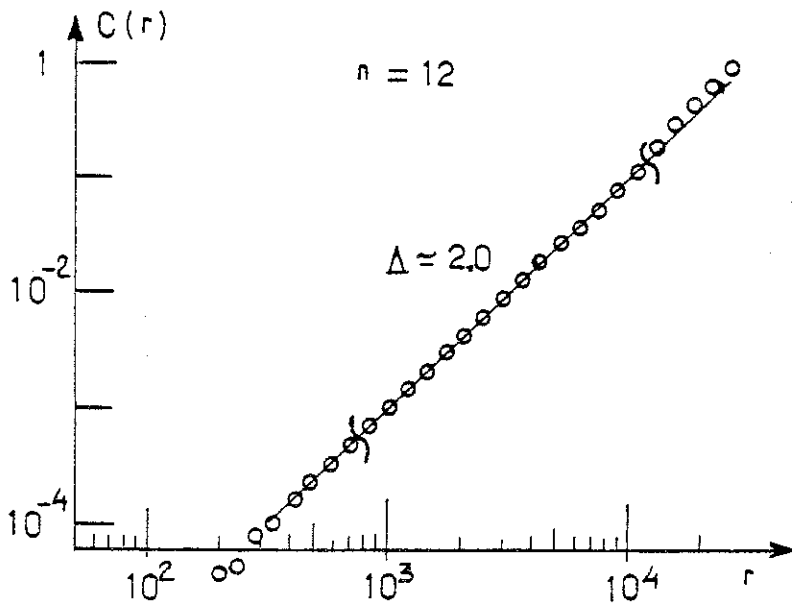
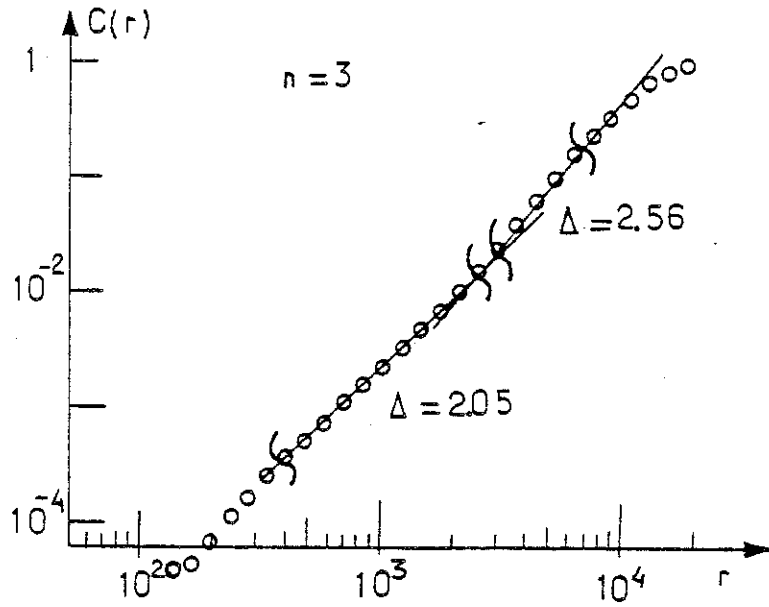


Figure 16

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal correspondant à la somme de deux sinusoïdes de fréquences incommensurables et d'amplitudes voisines pour deux valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 3$ et 12 .
 ($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 1$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$), $p = 9$).

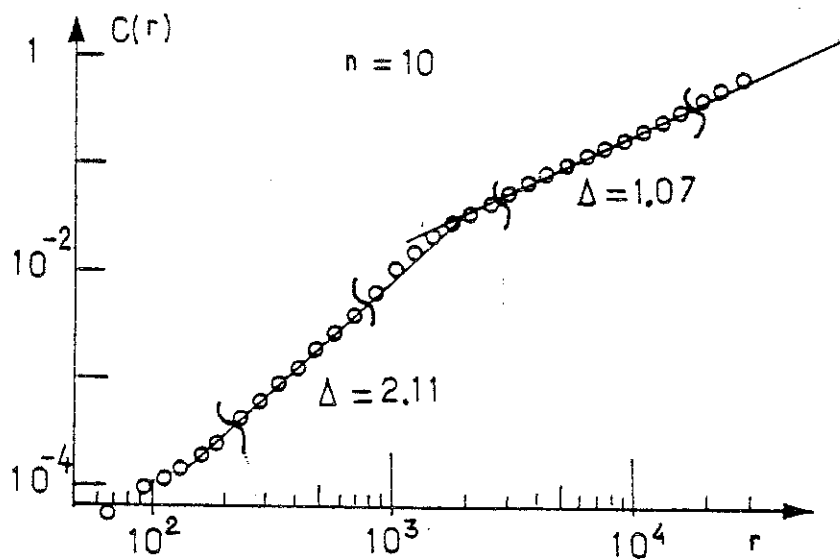
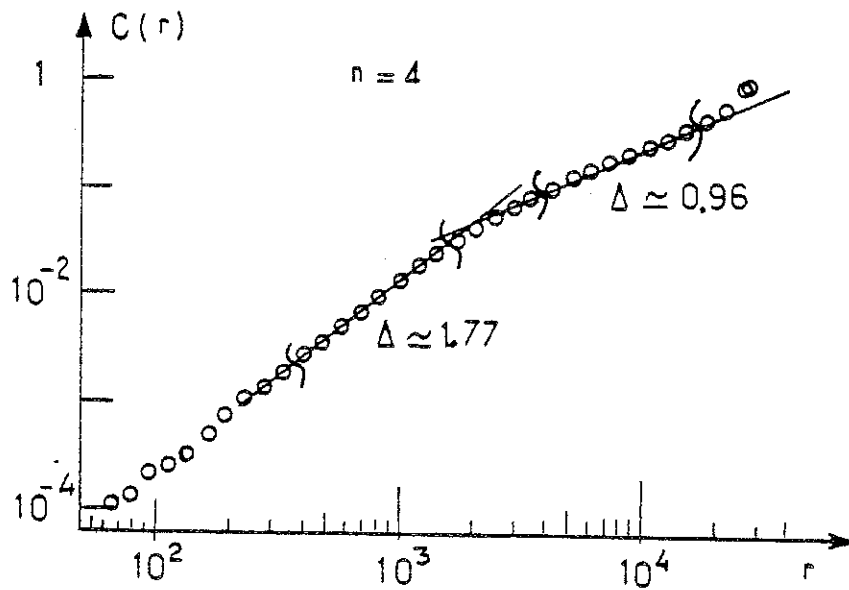


Figure 17

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal correspondant à la somme de 2 sinusoides de fréquences incommensurables et d'amplitudes très différentes pour deux valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 4$ et 10 .

($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 12$, $\Delta t = 1$ ($\approx \frac{T_0}{40}$), $p = 9$).

Ces valeurs ne sont qu'indicatives et dépendent sensiblement de la plage de r que l'on considère. De façon plus précise, il est intéressant de voir que l'on peut remonter aux valeurs de la pente locale de $C(r)$ dans la zone correspondant à la transition entre les deux régimes. Nous utilisons la méthode décrite par Takens [59]. Supposons que nous ayons un échantillon $r_1, \dots, r_m \in [0,1]$ aléatoire où les r_i sont "tirés" suivant la loi de probabilité $\propto r^{\alpha-1} dr$, ce qui correspond à une variation de $C(r)$ en r^{α} . Il s'agit d'estimer au mieux la valeur de α . Takens montre qu'en calculant $\langle \text{Log } r \rangle$, on obtient $-1/\alpha$ et que de plus la fonction Log est celle qui va minimiser l'écart-type. Grâce à cette technique, on peut estimer les corrections qui interviennent sur l'exposant calculé pour une échelle r suite à des lois de variations de $C(r)$ différentes pour des valeurs de r plus faibles. Supposons une loi de distribution $C(r)$ des distances d_{ij} entre couples telle que :

$$C(r) = \begin{cases} C_1 r^{\alpha_1} & r \leq r_0 \\ C_2 r^{\alpha_2} & r_0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (37)$$

Nous supposons de plus que $C(1) = 1$ ($\Rightarrow C_2 = 1$) et que $C(r)$ est continue en r_0 ($\Rightarrow C_1 = r_0^{\alpha_2 - \alpha_1}$). On estimera α à partir du calcul de la moyenne de Log r qui vaut :

$$\begin{aligned} & \int_0^{r_0} \text{Log } r C_1 \alpha_1 r^{\alpha_1-1} dr + \int_{r_0}^1 \text{Log } r \alpha_2 r^{\alpha_2-1} dr \\ &= -\frac{1}{\alpha_2} + r_0^{\alpha_2} \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad ([59]) \quad (*) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que nous nous intéressons au cas où r se déplace et r_0 reste fixe. La formule (*) écrite pour $r = 1$ restera vraie à condition de remplacer r_0 par $\frac{r_0}{r}$; en prenant la limite $r \rightarrow \infty$ on trouve $-\frac{1}{\alpha_2}$ ce qui est consistant. Ainsi si on définit un exposant α_3 qui dépend de l'échelle en r où on se place, on a :

$$\alpha_3(r) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_2} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha_2} \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)} \quad (38)$$

Considérons maintenant l'exemple précédent pour des valeurs de r telles que l'on soit dans la zone intermédiaire pour $C(r)$. Le tableau suivant montre la comparaison entre les valeurs de la pente

locale Δ calculées sur les courbes et α_3 , ($\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $r_0 = 0.03 \times 32\,700$) pour plusieurs valeurs de n , p et r .

	Valeur de Δ mesurée				Valeur $\alpha_3(r)$ calculée d'après (38)
	p = 9			p = 5	
r	n = 5	8	10	n = 3	
r = 1768	1.40	1.35	1.38	1.34	1.39
r = 2546	1.24	1.21	1.19	1.16	1.24

L'accord qui est observé n'est pas complètement compris : en effet Δ est une information qui apparaît comme locale (en r) et semble peu sensible à ce qui se passe pour d'autres valeurs de r plus petites, au contraire α_3 va refléter l'ensemble de la distribution des distances. Il semble alors que α_3 soit surtout sensible aux grandes valeurs de d_{ij} .

Cette méthode qui repose sur le fait que $C(r)$ obéit aux lois de variation évoquées précédemment donne de bons résultats dans cet exemple où la géométrie de l'objet est relativement simple. Il y a des cas pour lesquels les hypothèses de variation $C(r)$ considérées plus haut sont simplistes. Considérons par exemple le signal suivant :

$$Y(t) = E [16350 (X(t) + 1)]$$

$$X(t) = 0.898 \sin 2\pi f_1 t + 0.027 \sin 2\pi f_2 t + 0.046 \sin 2\pi f_3 t + 0.029 \sin 2\pi f_4 t$$

$$f_1 = 1/40.039\,42, f_2 = \pi f_1, f_3 = e f_1, f_4 = f_1 (1 + \sqrt{5}) / 2$$

Pour ce tore T_4 , les distances caractéristiques sont $r_0 \cong 880$, $r_1 \cong 950$ et $r_2 \cong 1510$; elles sont très proches et donc on n'observera pas de comportement bien défini pour $C(r)$, sauf si $r \gg r_2$. La figure 18 montre une courbe $C(r)$ pour ce système pour $n = 5$ et $p = 5$ en coordonnées log-log ; il est apparent que les valeurs de la pente dans les parties linéaires sont intermédiaires entre les valeurs entières 1, 2, 3 et 4 : de plus, à grande échelle le graphe semble courbe. Dans le tableau ci-après, nous comparons les valeurs de la pente locale mesurées et celles de l'exposant α_3 calculé d'après la méthode exposée

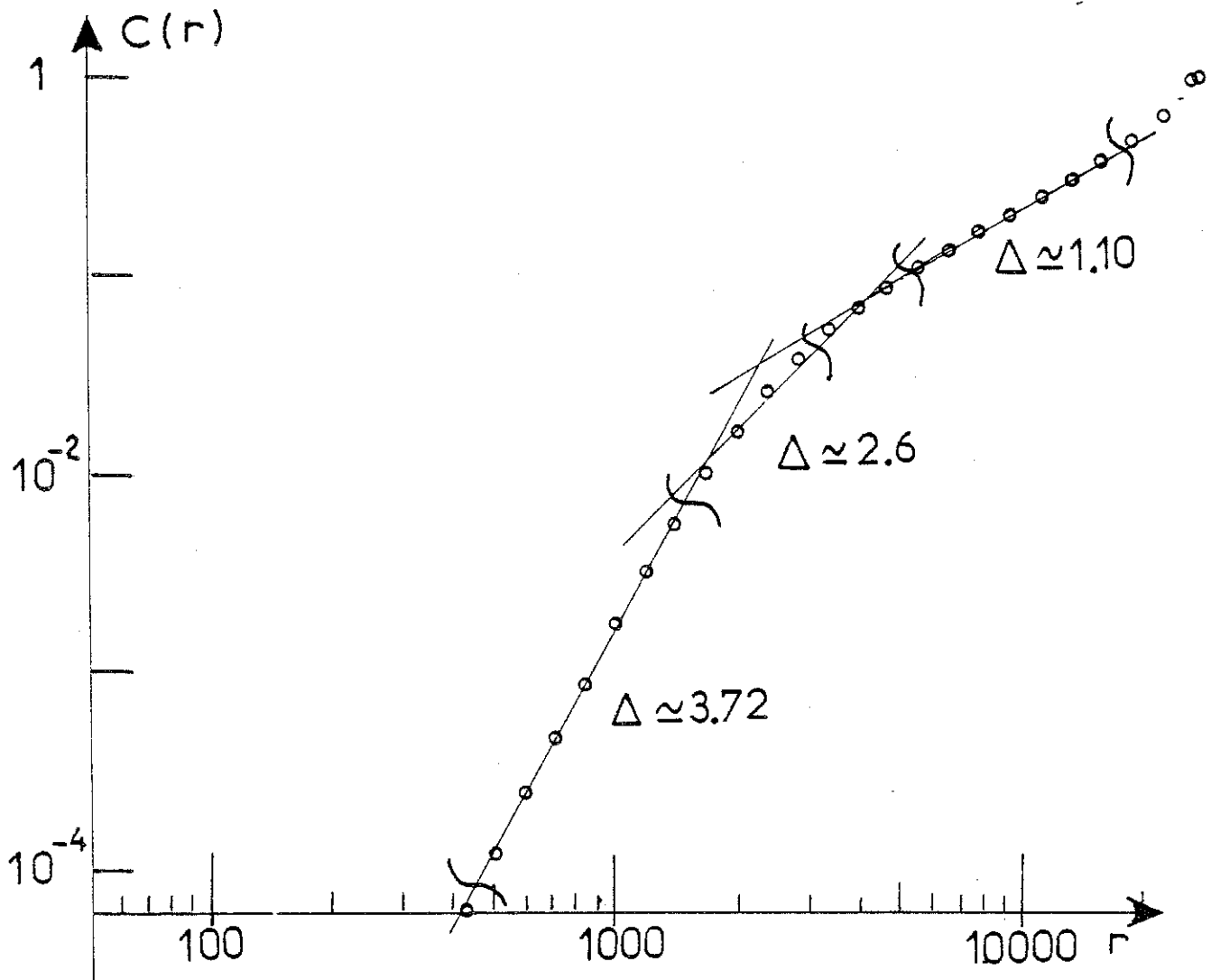


Figure 18

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal correspondant à la somme de 4 sinusôides de fréquences incommensurables dont une a une amplitude très grande par rapport aux trois autres, pour $n = 5$ et $p = 5$.

($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 12$, $\Delta t = 1 (\approx \frac{T_0}{40})$).

plus haut⁺ pour plusieurs valeurs de n, p et r.

	Valeur Δ mesurée			Valeur $\alpha_3(r)$ calculée par (38)
	p = 5			
	n = 5	7	10	
r = 1199	3.4	3.95	4.28	2.83
r = 2022	2.79	3.03	3.39	1.79
r = 4054	1.42	1.38	1.57	1.28
r = 9676	1.15	1.15	1.10	1.10

Comme prévu il n'y a pas du tout d'accord sauf pour les très grandes valeurs de r.

Ainsi, lorsque les amplitudes des différents "modes" présents dans le système sont différentes, la courbe $C(r)$ peut être très difficile à interpréter. Les signaux que nous avons traités sont relativement homogènes, ce qui n'est pas le cas pour des instabilités chimiques par exemple. Dans le cas contraire, il faut les mettre en forme : pour des signaux intermittents, on peut recourir à une transformation non linéaire (la fonction y définie dans le chapitre II à propos de la méthode des décalages) ; si les signaux ont des composantes de Fourier très différentes on peut filtrer, amplifier et recombinaer (à condition bien sûr que l'on puisse séparer les composantes en groupes bien distincts).

L'étude de ces tores T_n particuliers a permis ainsi d'aborder le problème de signaux très inhomogènes. Nous avons pu aussi apporter un élément de réponse à la question : quelle est la dimension maximum que l'on peut atteindre avec cette méthode ? grâce à l'étude d'un tore T_{20} . Cette analyse sera présentée dans le chapitre V.

+ Le calcul ne se fera pas de la même façon suivant que $r \in [r_0, r_1]$, $[r_1, r_2]$, $[r_2, 32700]$. Par exemple, pour $r \in [r_1, r_2]$ il faudra tenir compte de deux corrections ; pour $r \in [r_2, 32700]$ de trois, etc...

Une autre façon d'aborder cette dernière problématique a été d'étudier des signaux stochastiques à nombre infini de degrés de liberté dont un exemple est constitué par un bruit blanc (système dont le spectre de Fourier est plat).

C - ETUDE DU BRUIT BLANC

C.1 UN SYSTEME A TRES GRAND NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE

Pour générer un signal qui peut approximer un bruit blanc, nous avons procédé de deux façons, d'une part en amplifiant le bruit Nyquist d'une résistance de mesure ($10^{10} \Omega$) ou d'autre part en générant une suite de nombres aléatoires à l'aide d'un sous-programme standard de la bibliothèque du calculateur.

Dans une première étude, la taille de l'échantillon a été de $N = 15.10^3$ points et le nombre d'origines $m = 100$. Pour $n \leq 12$, les courbes $C(r)$ présentaient un comportement en r apparemment bien défini [63]. Il est clair qu'elles sont indépendantes du choix du temps-décalage $p\Delta t$ vu que le temps de corrélation du signal est inférieur à Δt (il doit être nul en théorie). En portant la pente γ de la courbe $C(r)$ en fonction de la dimension d'espace des phases n (figure 19) on observe que $\gamma < n$ pour $n \geq 5$. Ceci peut s'interpréter en termes d'effets de bord : les origines \overline{X}_i sont d'autant plus proches du "bord" de l'hypercube de R^n que n est grand (la densité varie comme r^{n-1} ; nous développerons ce point plus loin). Ainsi le nombre de points que contiendra en moyenne chaque boule de rayon r variera moins rapidement que r^n -les boules seront en partie vides-. Nous avons repoussé la limite n telle que $\gamma = n$ à la valeur $n = 11$ (figure 19) en choisissant les origines le plus près possible du centre et en augmentant le nombre d'échantillons ($N = 156 \cdot 10^3$) [64]. Au delà de cette valeur, les courbes $C(r)$ présentent une courbure systématique (figure 20) et il faut augmenter de façon exponentielle le nombre de points N pour avoir accès à la zone de variation en r^n . Ceci est dû aux effets de bord combinés pour les différentes origines.

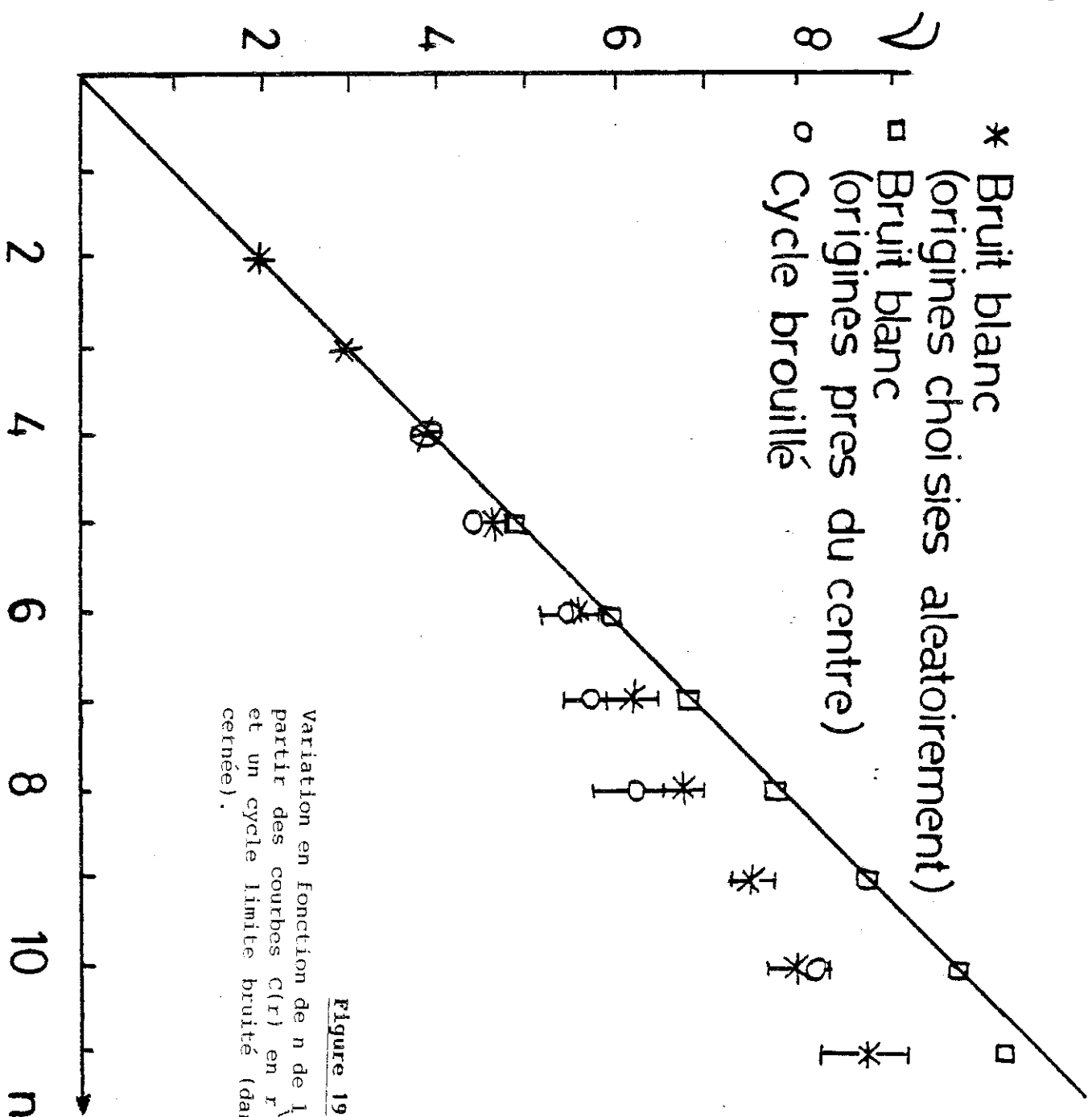


Figure 19

Variation en fonction de n de l'exposant γ obtenu à partir des courbes $C(r)$ en r^γ pour un bruit blanc et un cycle limite bruité (dans la plage de r concernée).

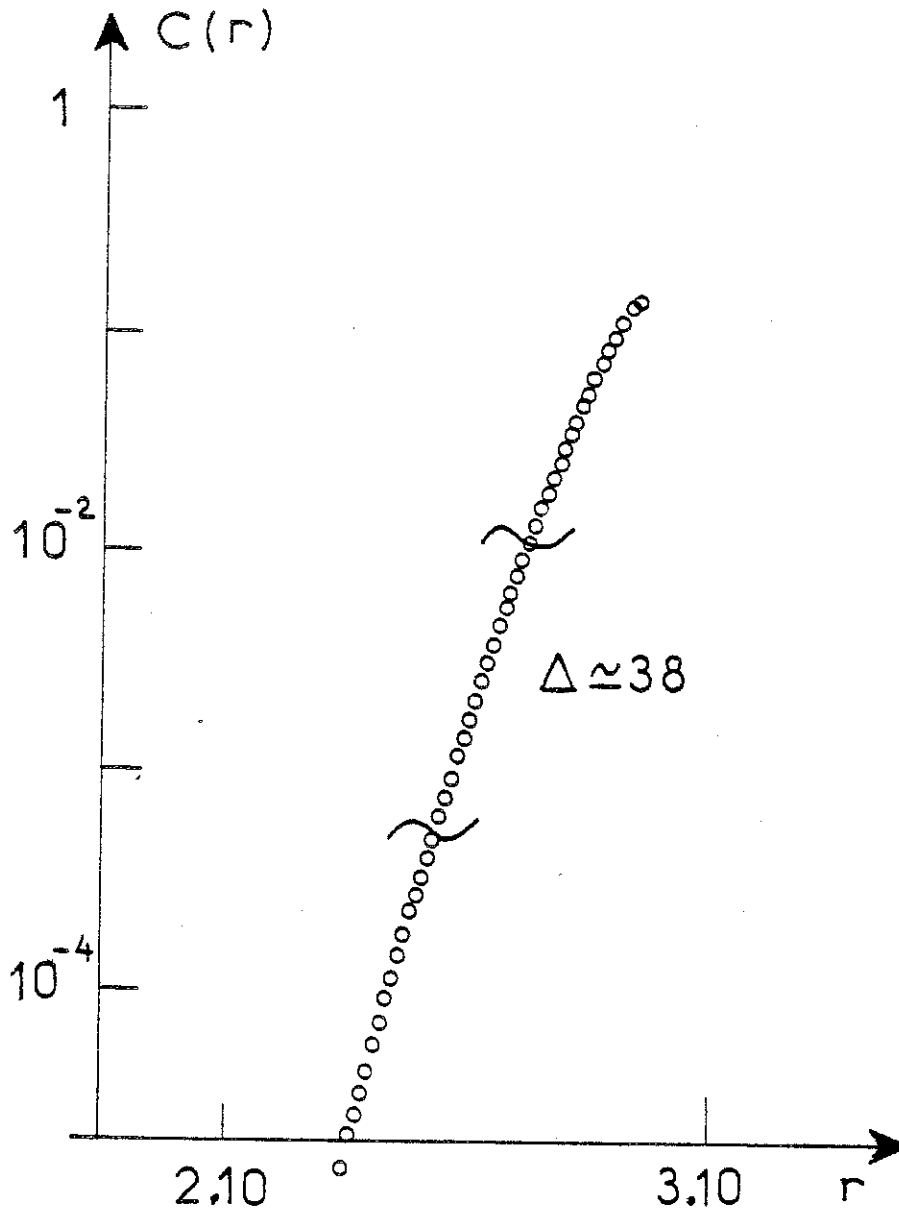


Figure 20

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le bruit blanc pour une dimension d'espace des phases $n = 100$.

($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 30$).

Remarque

Pour le bruit blanc, on pourrait essayer d'estimer directement $C(r)$ de la façon suivante. D'abord, il faut calculer la distance minimum du nuage de points au centre. Pour cela, il suffit de dire que la distance au centre est distribuée en r^{n-1} ; on jette N points aléatoirement dans l'hypercube, ceci nous donne la distance r_{\min} :

$$\frac{1}{N} = \int_0^{r_{\min}} \frac{r^{n-1} dr}{r_{\max}^n}$$

Nous avons obtenu les mêmes ordres de grandeur pour r_{\min} pour le bruit blanc pour $n = 5$ et 10 par un calcul direct de la densité.

L'estimation de $C(r)$ peut alors être faite en faisant l'hypothèse que chaque origine est dans une position de symétrie par rapport aux faces de l'hypercube telle que l'on puisse calculer comment varie $C_i(r)$. On somme alors sur toutes les positions dans l'hypercube (faces, coins, ...). Cela nécessite d'abord de comptabiliser le nombre de faces d'une espèce donnée, puis de voir quelle est l'importance respective de chaque type de face en fonction de l'échelle r . On intègre alors grâce à la distribution des N points calculée précédemment.

D'après l'étude précédente, il est clair que pour "couvrir" un attracteur de dimension élevée avec une résolution donnée, il faudra un nombre de points N qui variera exponentiellement avec la dimension. A une échelle de distances intermédiaire, le nombre de points $C(r)$ variera moins vite que r^D car on "sentira" les bords de l'objet. Dans la pratique, avec une résolution $N \times m$ donnée, il faudra -et c'est ce que nous avons observé au chapitre V- considérer des valeurs de n beaucoup plus grandes que D afin d'obtenir une zone en r^D pour $C(r)$.

C.2 LE PROBLEME DU BRUIT EXPERIMENTAL

La combinaison du bruit blanc et d'un système déterministe modèle permet d'étudier l'influence du bruit expérimental toujours

présent sur la détermination pratique de la dimension. Nous n'avons considéré qu'une situation où le bruit est additif : celle où il vient s'ajouter à l'observable : c'est le bruit de mesure.

Nous le supposerons en plus borné. Ceci constitue une restriction très forte par rapport à la situation générale où le bruit peut être multiplicatif et non borné. Pour les signaux expérimentaux que nous avons analysés, le paramètre (nombre de Rayleigh par exemple) ne fluctue pratiquement pas (du moins sur l'échelle de temps que nous étudions), nous considérerons donc ce système comme purement déterministe. C'est pourquoi l'hypothèse d'un bruit additif ou multiplicatif agissant sur le système et donc sur le paramètre peut être écartée. Le bruit est borné en moyenne ; nous le supposerons borné à chaque instant.

Le signal modèle que nous avons analysé est un cycle limite brouillé :

$$Y(t) = E [16350 (X(t) + 1)]$$
$$X(t) = (1 + \xi) (\sin 2\pi f t + \xi B(t))$$

où $B(t)$ est un bruit blanc dont les valeurs sont comprises entre -1 et +1. La figure 21 montre des courbes $C(r)$ pour ce signal dans le cas où $\xi = 5 \%$. Pour les valeurs de r supérieures à $r_0 = \xi \times 16350 \approx 800$, on observe un comportement de $C(r)$ en r^γ où $\gamma = 1.05 \pm 0.05$. Au contraire, pour $r \ll r_0$ on atteint le comportement caractéristique du bruit : $C(r) \sim r^n$. Cependant par suite des effets de bord discutés dans le paragraphe précédent, on observe (pour $n \gtrsim 3$ ou 4) que est strictement inférieur à n (voir figure 19). Ainsi la courbe $C(r)$ présente deux régions bien séparées où on observe un comportement type cycle limite ou bruit blanc.

Pour examiner la partie transitionnelle de la courbe, nous avons fait une analyse en pentes locales. La figure 22 montre les pentes Δ en fonction de r (calculées sur 2 points centrés) pour trois valeurs de $\xi = 0.5 \%, 5 \%$ et 10% .

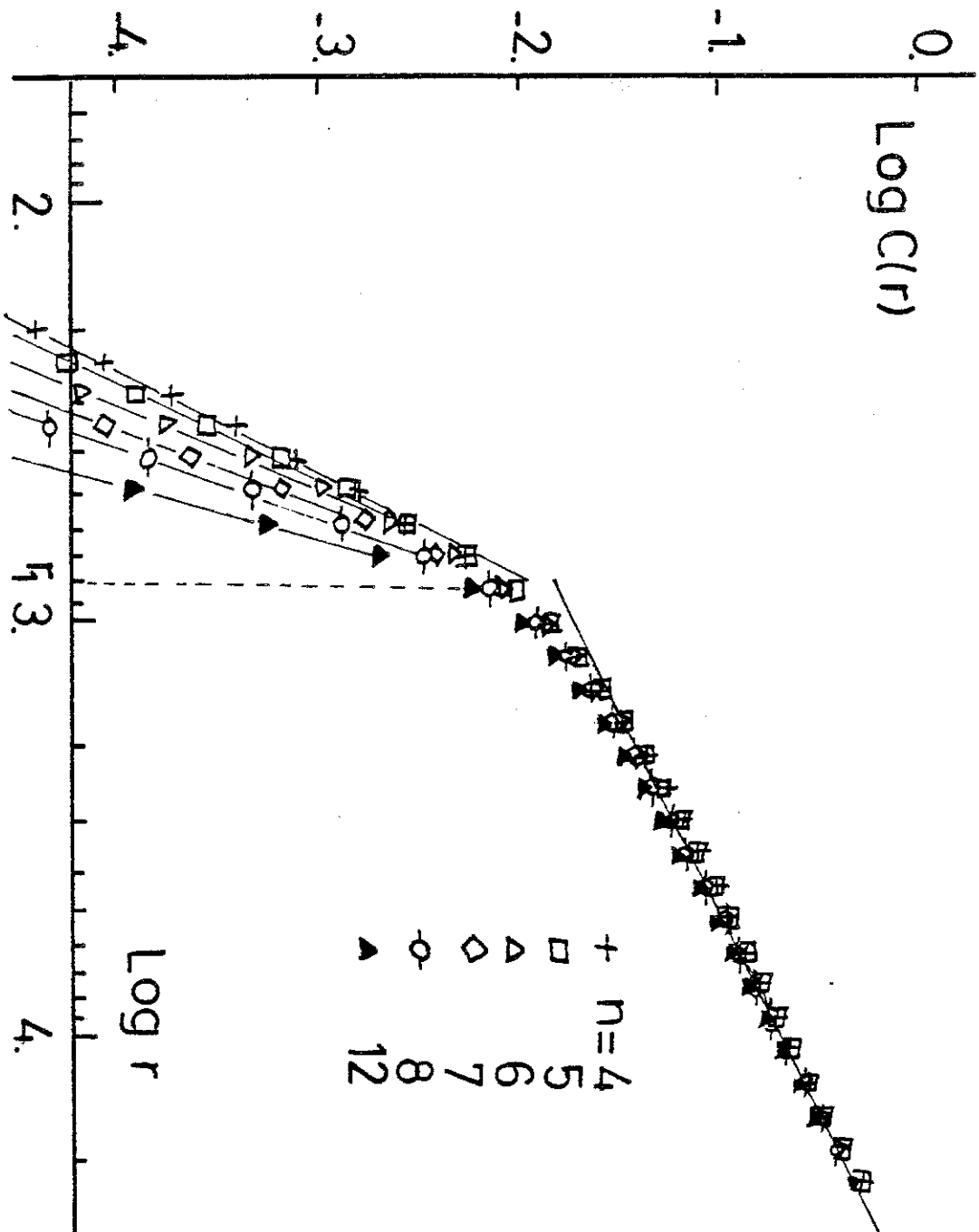


Figure 21

Courbes $C(r)$ pour un cycle limite brouillé par $\epsilon = 5\%$ de bruit blanc pour diverses valeurs de la dimension n . ($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 12$, $\Delta t = 1$ ($\approx 10/40$), $p = 9$).

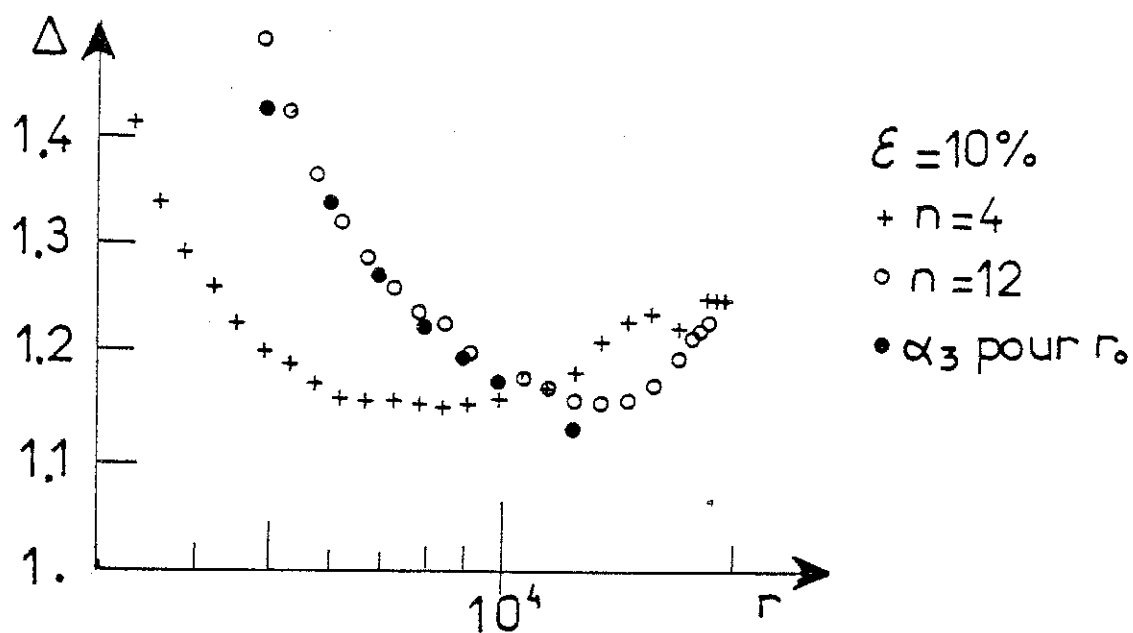
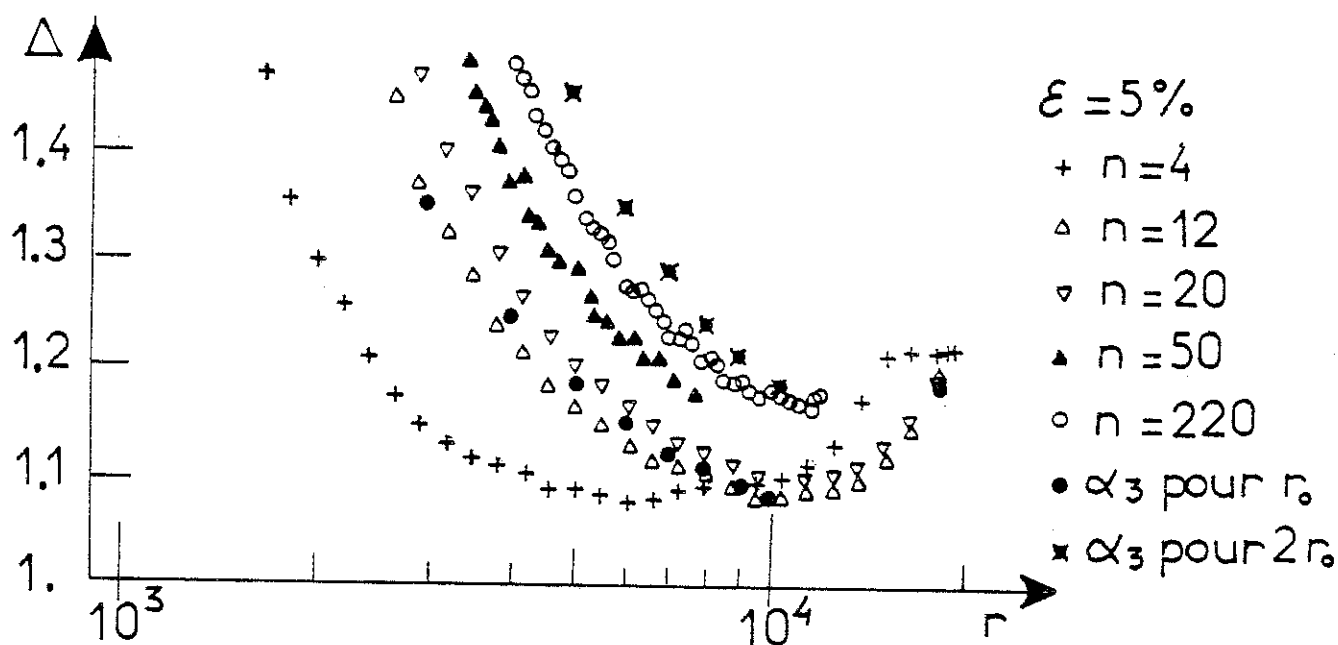
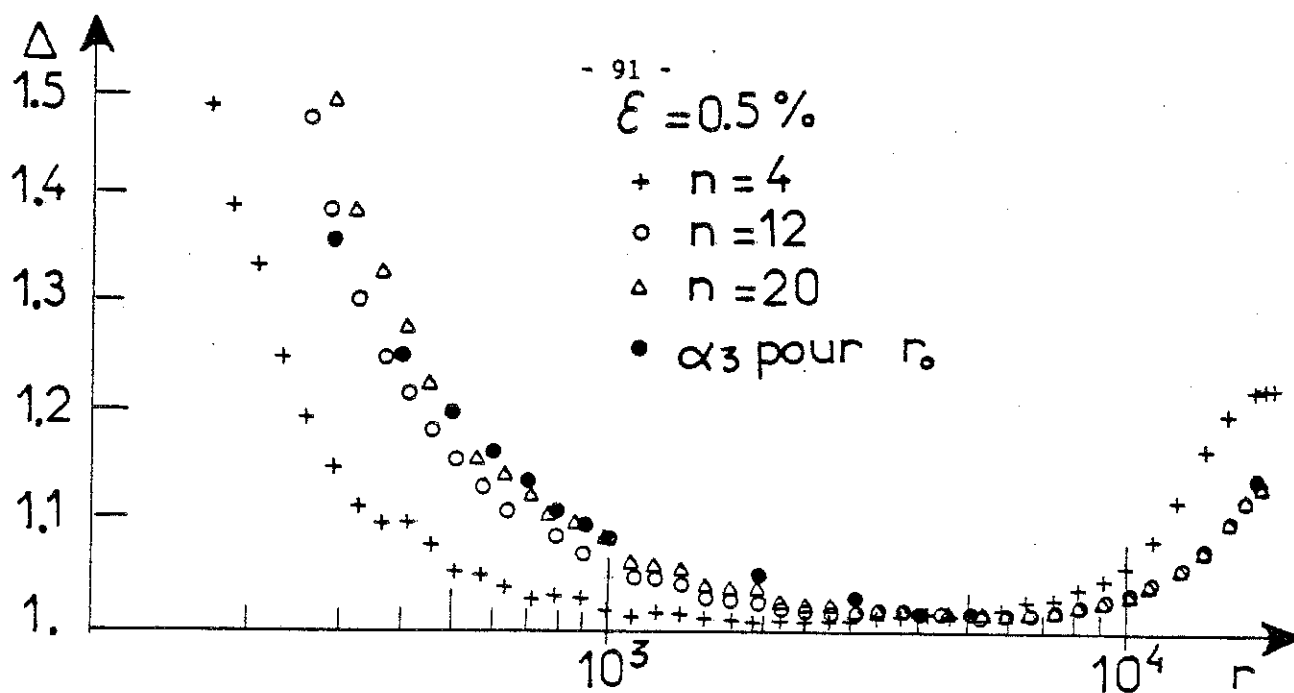


Figure 22

Pentes locales Δ et valeurs α_3 calculées, en fonction de r pour des cycles limites brouillés pour diverses valeurs de n et pour trois valeurs de ε (intensité du bruit).

($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 20$, $\Delta t = 1$ ($\sim T_0/40$), $p = 9$).

Les courbes Δ présentent un minimum plat dont l'ordonnée dépend linéairement de l'intensité du bruit (Σ normalisée par r). Sur la figure 22, nous avons reporté la valeur de l'exposant α_3 calculé d'après la méthode de Takens en s'imposant une variation de $C(r)$ en r^n pour $r \ll r_0$ et en r au-delà. Pour des valeurs de n supérieures ou égales à 10 environ, on observe un bon accord qualitatif avec α_3 (cette quantité a été calculée dans la limite $n \rightarrow \infty$; la correction due à la valeur finie de n devient négligeable pour les valeurs de n considérées). Suite au fait que l'attracteur est borné, on observera pour Δ une remontée non linéaire alors que α_3 continuera à décroître vers la valeur 1. Pour le cas $\Sigma = 5\%$, nous avons pris de très grandes valeurs de n . Nous avons représenté dans ce cas α_3 calculé pour $2 r_0$ (et non plus r_0) ; on voit que Δ est bien approximé par cette valeur. Pour expliquer le fait que ce soit $2 r_0$ et non plus r_0 qui joue, il faut recourir à une représentation géométrique relativement simple du système dans R^n . Supposons le cycle non bruité. Toutes ses sections de Poincaré seront réduites à un point.

Ajoutons maintenant un bruit d'intensité Σ , il est clair que la section de Poincaré sera un carré de côté 2Σ centré sur le point correspondant au cycle non bruité. Lorsque n augmente, les points seront de plus en plus "plaqués" contre les "bords" et donc loin du cycle (leur densité est en ρ^{n-1} où ρ est la distance au cycle). On observera alors un comportement de $C(r)$ en r^n jusqu'à une taille caractéristique de $2 r_0$ et non plus de r_0 . Cette étude permet de conclure sur l'effet du bruit expérimental sur la détermination de la dimension. Dès que la dimension "du signal" sera supérieure à une valeur de 3 environ, il n'y aura plus d'effets car les échelles en r qui seront utilisées seront beaucoup plus grandes que celles du bruit [64]. Ceci s'applique aussi au problème de l'influence de la discrétisation (qui peut être considérée comme un bruit). Nous pouvons alors étudier des signaux chaotiques expérimentaux pour lesquels le rapport signal/bruit est bon ($> 10^4$ en puissance).

CHAPITRE IV : LA CARACTERISATION D'ATTRACTEURS EXPERIMENTAUX

DE FAIBLE DIMENSION

A - INTRODUCTION

Nous avons vu au chapitre II qu'il était possible d'obtenir à n (dimension), p (décalage), Δt (période d'échantillonnage) fixés une courbe $C(r)$ qui ne dépende plus des paramètres N (nombre total de points) et m (nombre de moyennes), du moins pour une certaine plage de valeurs de r . (Dans le chapitre V nous montrerons que le fait de travailler avec N fini peut se révéler dramatique pour certaines reconstitutions). Cependant, on ne sait rien quant aux valeurs qu'il faut donner à n , p et Δt pour caractériser un attracteur à partir d'un signal expérimental donné. Dans ce chapitre, nous allons d'abord établir de façon indiscutable qu'un signal provenant d'une expérience de convection de Rayleigh-Bénard correspond à un attracteur de faible dimension. Puis nous calculerons son entropie. Enfin, nous conclurons sur le rôle des paramètres n et p en mettant en évidence certaines limitations de la méthode.

B - ESTIMATION DE LA DIMENSION

Le principe utilisé pour caractériser un attracteur de dimension D donné est que la courbe $C(r)$ doit se comporter comme r^D sur une plage de r grande, ceci quelle soit la dimension n ($> D$) de l'espace des phases. Nous allons maintenant montrer sur un exemple que l'on peut aboutir à des conclusions erronées en utilisant ce principe, si on ne fait pas varier de façon indépendante les deux paramètres n et p .

B.1 LES SYSTEMES ANALYSES

Parmi les systèmes analysés deux sont expérimentaux. Afin de pouvoir conclure de façon objective sur ces derniers, nous avons aussi étudié la variable $Z(t)$ du système de Lorenz [17] pour les valeurs des paramètres correspondant à la présence d'un attracteur chaotique unique de faible dimension (≈ 2.06) dans l'espace des phases.

En effet, les théorèmes du chapitre II nous indiquent que la projection ainsi réalisée de R^3 dans R^n laisse invariante la dimension de l'attracteur. Nous avons intégré le système par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et échantillonné la coordonnée $z(t)$ -qui est pseudo-périodique- à la période $\Delta t = 0.02$ ($\simeq T_0/37$ car $T_0 \simeq 0.74$). Nous l'avons traitée comme du signal expérimental.

Le premier signal expérimental provient d'une expérience de convection de Rayleigh-Bénard réalisée par Bergé et Dubois à Saclay. Il s'agit d'un système constitué par une couche fluide emprisonnée par deux plaques conductrices et chauffée par le bas. La solution $u(x,t) = 0$ pour tout x et t devient alors instable et cède la place à une structure en rouleaux. Lorsque l'on gèle cette dernière grâce aux parois, on obtient un système à très peu de degrés de liberté. Son comportement de transition vers la turbulence ressemble beaucoup à ce que l'on peut observer pour certains systèmes dynamiques très simples.

Dans le cas particulier considéré, le fluide est de l'huile silicone, le récipient est parallélépipédique de rapports d'aspect ($\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1.2, \Gamma_z = 1$). La variable analysée est semi-locale, c'est la déflexion d'un rayon lumineux traversant la cellule. L'état chaotique analysé précède une cascade de doublements de période (le nombre de Raleigh analysé vaut 235 fois le nombre de Raleigh critique).

Le second signal qui a été analysé provient d'une expérience de convection en injection unipolaire. Considérons une couche de liquide isolant soumise à une injection ionique grâce à des membranes échangeuses d'ions, une différence de potentiel étant appliquée sur le liquide. On peut montrer que la distribution de charge en conditions statiques est potentiellement instable (le raisonnement qualitatif ressemble à celui que l'on a fait pour le cas de Rayleigh-Bénard) Le paramètre d'instabilité est proportionnel à la tension appliquée. Ce phénomène a fait l'objet de nombreuses études [66].

Dans le cas où les ions injectés ne sont que d'un seul signe, les cellules de convection sont hexagonales. Pour l'analyse de la dynamique de l'écoulement, on mesure le courant électrique total

$$I = \int_{\Omega} q (K \vec{E} + \vec{u}) \cdot \vec{z} dz$$

(q : densité volumique de charge ; K mobilité ionique ; \vec{E} champ électrique ; \vec{u} : vitesse de l'élément de volume ; \vec{z} : vecteur unitaire normal à la couche ; dz : élément de volume)

qui traverse la cellule d'étude.

Pour un petit rapport d'aspect cylindrique ($\Gamma \approx 1$) la transition à la turbulence est analogue à celle que l'on peut observer pour des Systèmes Dynamiques à petit nombre de degrés de liberté [67]. De plus, comme le montre la figure 23, le spectre de puissance des fluctuations du courant présente la décroissance exponentielle qui semble caractéristique du chaos déterministe [32]. Le signal qui a été analysé correspond à une expérience à petit rapport d'aspect ($\Gamma = 1$) effectuée par Bernard Malraison au L.E.M.D. La tension a été fixée à une valeur de 270 V ce qui correspond à trois ou quatre fois la valeur du seuil d'instabilité.

B.2 LES RESULTATS ANTERIEURS ET LE PARADOXE EN E.H.D.

Ces deux signaux ont été échantillonnés ($\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-3}$ s pour l'E.H.D., voir figure 23, et $\Delta t = 0.33$ s pour R.B., voir figure 24, ce qui correspond environ à 15 points par pseudo-période principale T_0) et discrétisés sur 12 bits.

La figure 25 montre les courbes $C(r)$ correspondant aux deux signaux pour des valeurs de n croissantes de 3 à 12 telles que $(n-1)p\Delta t \approx T_0$ et pour des valeurs de p croissantes à n fixe. Ces graphes présentent en log-log des zones linéaires dont la pente semble se saturer en fonction de n .

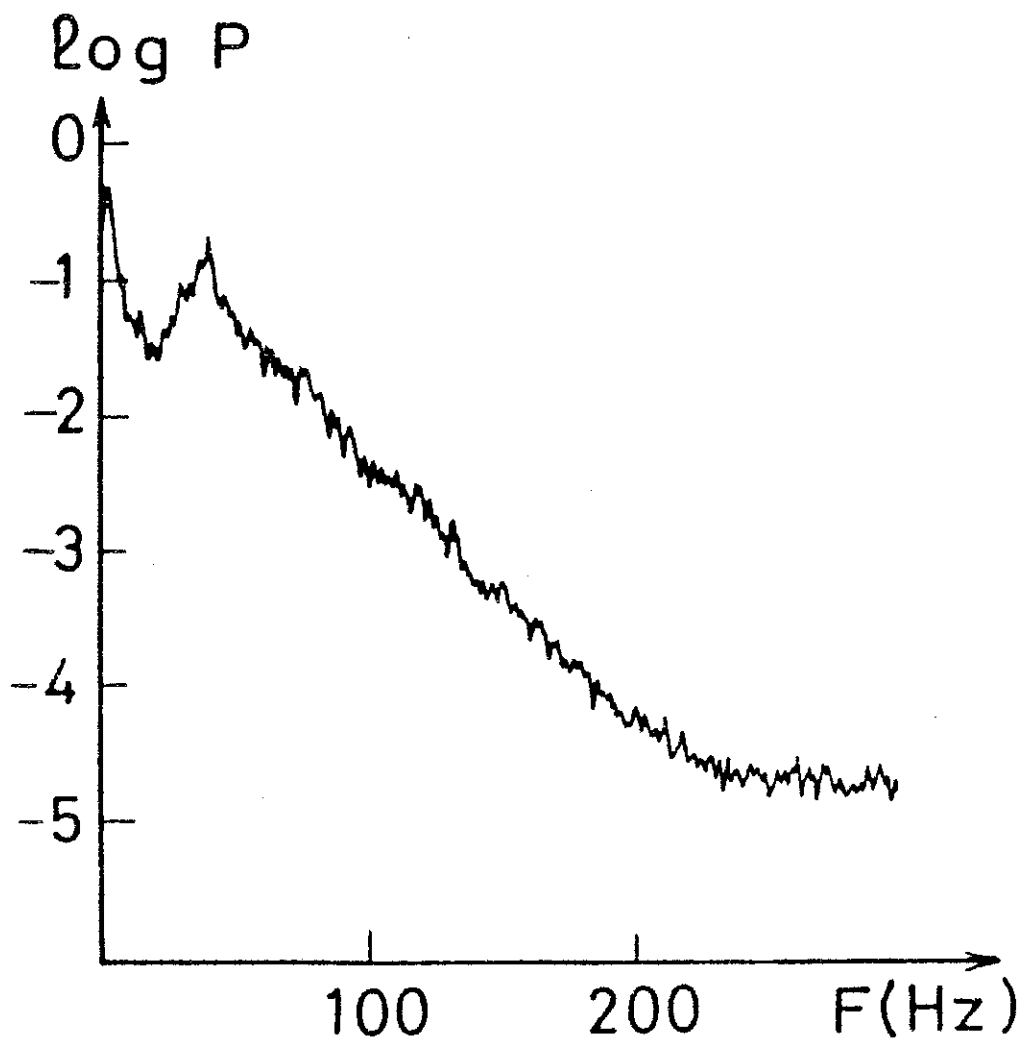


Figure 23

Spectre de puissance pour un régime chaotique de convection E.H.D.
Extrait de [63]

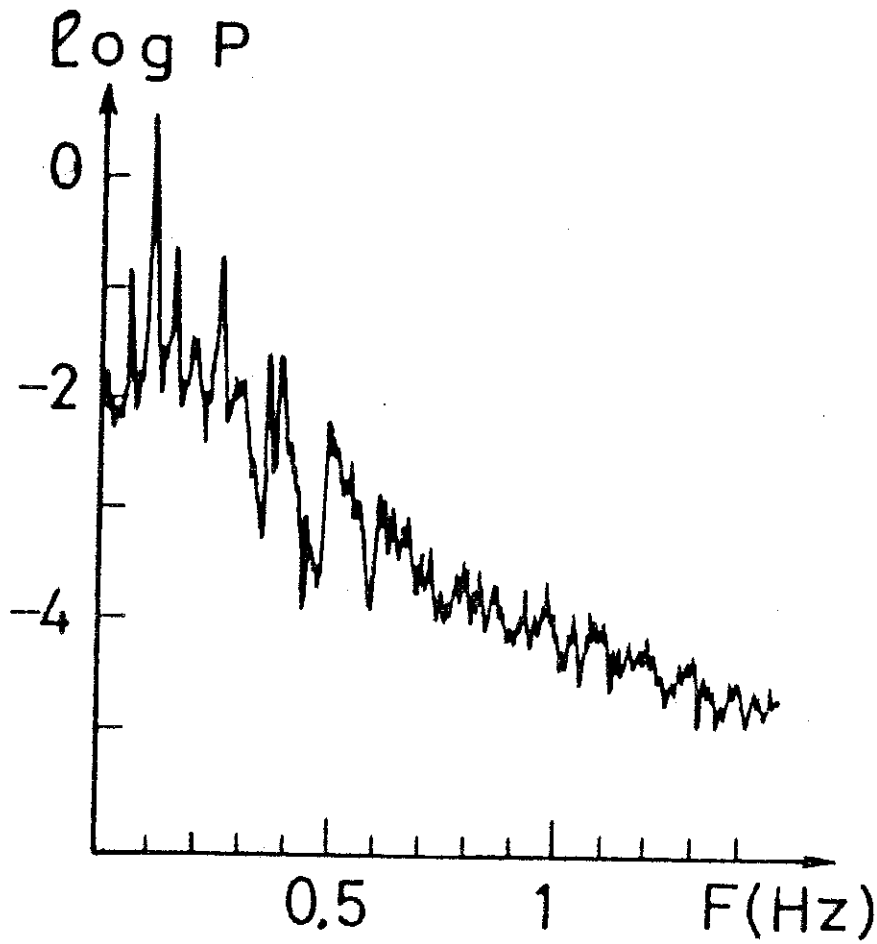


Figure 24

Spectre de puissance pour un régime chaotique de convection de R.B.
Extrait de [63]

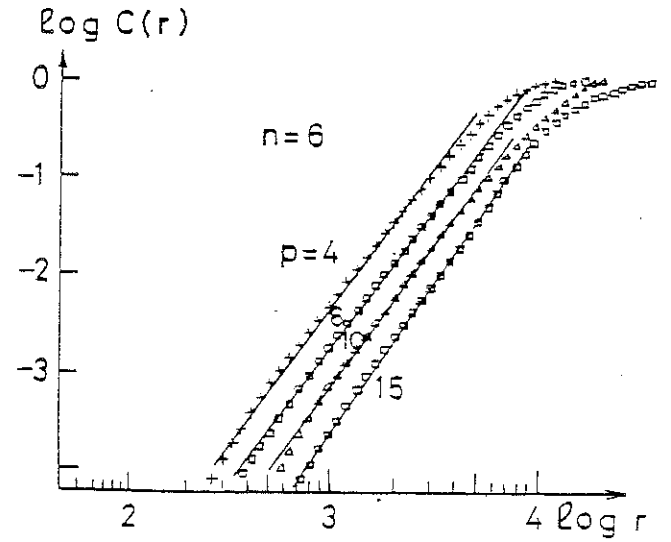
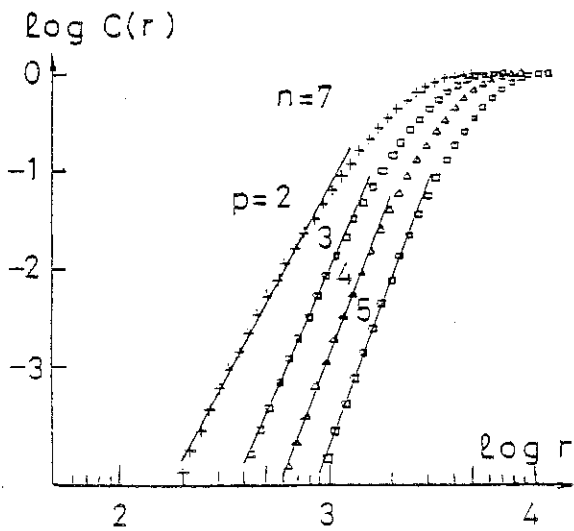
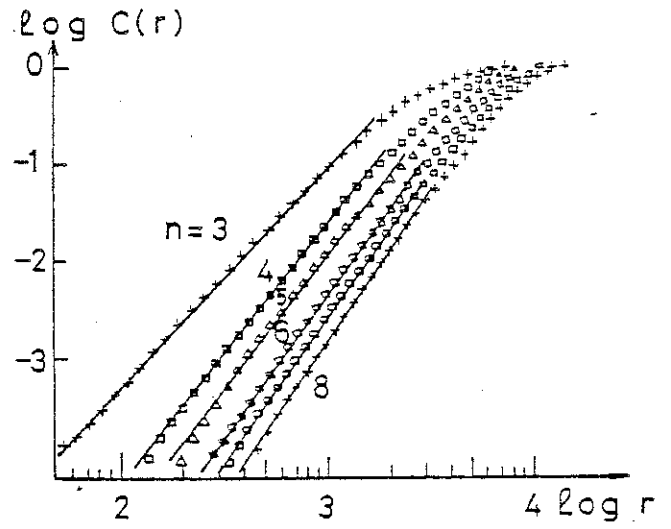
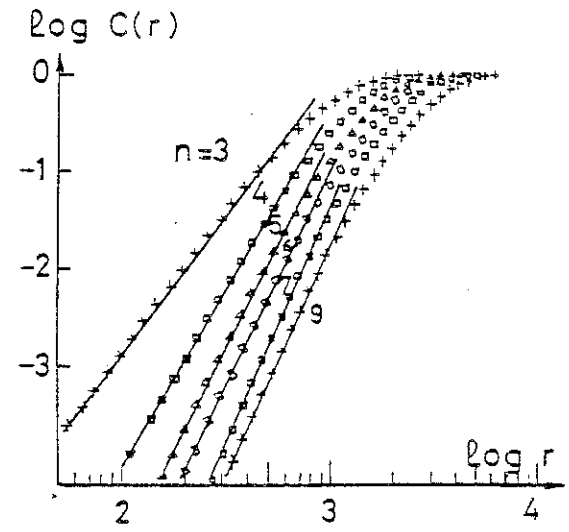


Figure 25a

Figure 25b

Figure 25

Courbes $\log C(r)/\log r$ pour deux signaux chaotiques expérimentaux :

a. Convection E.H.D.

b. Convection de Rayleigh-Bénard

(extrait de [63]) ($N = 15 \cdot 10^3$, $m = 100$).

Les auteurs de [63] ont alors conclu à la présence d'un attracteur de dimension 2.8 pour le signal de Rayleigh-Bénard et 5,1 pour l'E.H.D. On peut néanmoins faire la remarque suivante : la valeur de p pour $n = 7$ qui est reportée dans la courbe $\gamma(n)$ (figure 26) qui présente une saturation, est très faible (~ 2 ou 3). Or pour des valeurs de p supérieures, la pente de $C(r)$ augmente et dépasse la valeur de saturation $\gamma = 5.1$. Ceci semble indiquer une dépendance de γ par rapport à p .

Pour les mêmes plages de paramètres que précédemment ($N = 15 \cdot 10^3$ à $30 \cdot 10^3$, $10^2 \leq m \leq 5 \cdot 10^2$, $\frac{T_0}{30} \leq \Delta t \leq \frac{T_0}{15}$, $3 \leq n \leq 12$, $3 \leq p \leq 9$ et $(n-1)p\Delta t \approx T_0$), nous avons étudié des signaux pour différentes valeurs de la tension ($\propto T$) et du rapport d'aspect Γ . Les résultats que nous avons obtenus [64,68] indiquaient une saturation pour $\gamma(n)$ à des valeurs comprises entre 5 et 6 et ceci quelles que soient les valeurs de T et de Γ . Nous étions confrontés à deux éventualités :

- Un écoulement très compliqué (T grand et Γ grand) était décrit par un attracteur de petite dimension dans l'espace des phases associé R^n .

- Il y avait une mauvaise utilisation de la méthode de détermination de la dimension, en particulier les paramètres n et p n'ont pas été variés de façon indépendante et systématique.

B.3 L'EXPLORATION SYSTEMATIQUE DES PARAMETRES n ET p : CONCLUSION [64,65]

C'est alors que nous avons repris en parallèle l'étude des deux signaux expérimentaux et du signal issu du système de Lorenz. Nous avons fait varier les paramètres n et p dans de très grandes plages sans conditions les liant. Nous avons refait l'expérience de convection E.H.D. pour une valeur très faible du rapport d'aspect ($\Gamma = 1$) et du paramètre d'instabilité ($U = 507 \text{ V} \approx 6 \times U_c$). Le signal a été échantillonné à $t = 5 \cdot 10^{-4}$ ($\sim \frac{T_0}{30}$) et digitalisé sur 12 bits.

La question qui se posait alors était de savoir si ces différents signaux expérimentaux avaient un nombre faible de degrés de liberté. Les résultats de la variation systématique des paramètres pour ces trois signaux sont présentés dans la figure 26. Il faut tout de suite noter l'analogie entre les comportements pour le signal chaotique de R.B. et le système de Lorenz ; γ semble relativement indépendant de n et p^* . Au contraire dans le cas de l'E.H.D. on n'observe pas de saturation pour $\gamma(n)$ (à p constant) pour n croissant. A n constant, on observe que $\gamma(p)$ se sature pour p grand. La valeur atteinte correspond à celle que l'on obtient pour le bruit blanc (avec les mêmes valeurs de N et m). Lorsque p augmente on va décorréler les coordonnées du vecteur X_t de R^n l'une par rapport à l'autre. En effet, la fonction d'auto-corrélation associée à un tel signal décroît très vite comme le montre la figure 27.

Dans la limite de très grandes valeurs de p , le comportement de $C(r)$ dans une plage de r fixée devient analogue à celui que l'on observe pour un bruit blanc. Cette étude nous permet aussi de comprendre la "saturation" précédente. Il faut se rappeler que ces calculs avaient été faits pour $n \ll 12$ et $(n-1)p \Delta t \approx T_0$. On se situe alors sur la partie des courbes $\gamma(p)$ qui croît. Lorsque n augmente, p diminue et on se déplace dans le diagramme vers la gauche, ce qui donne une apparente saturation de γ .

Cette étude a permis de montrer que l'on pouvait clairement mettre en évidence un attracteur expérimental de dimension faible. L'invariance de γ par rapport à des variations très grandes de n et p et la similarité de comportement d'un système numérique de très petit nombre de degrés de liberté sont des preuves manifestes que les points expérimentaux se situent sur un objet de faible dimension dans l'espace des phases reconstitué. Il est clair aussi que la conclusion $\gamma \approx 5$ pour le signal E.H.D. est à remettre en question.

* Les légères déviations que l'on peut observer lorsque n et p augmentent seront expliquées par la suite.

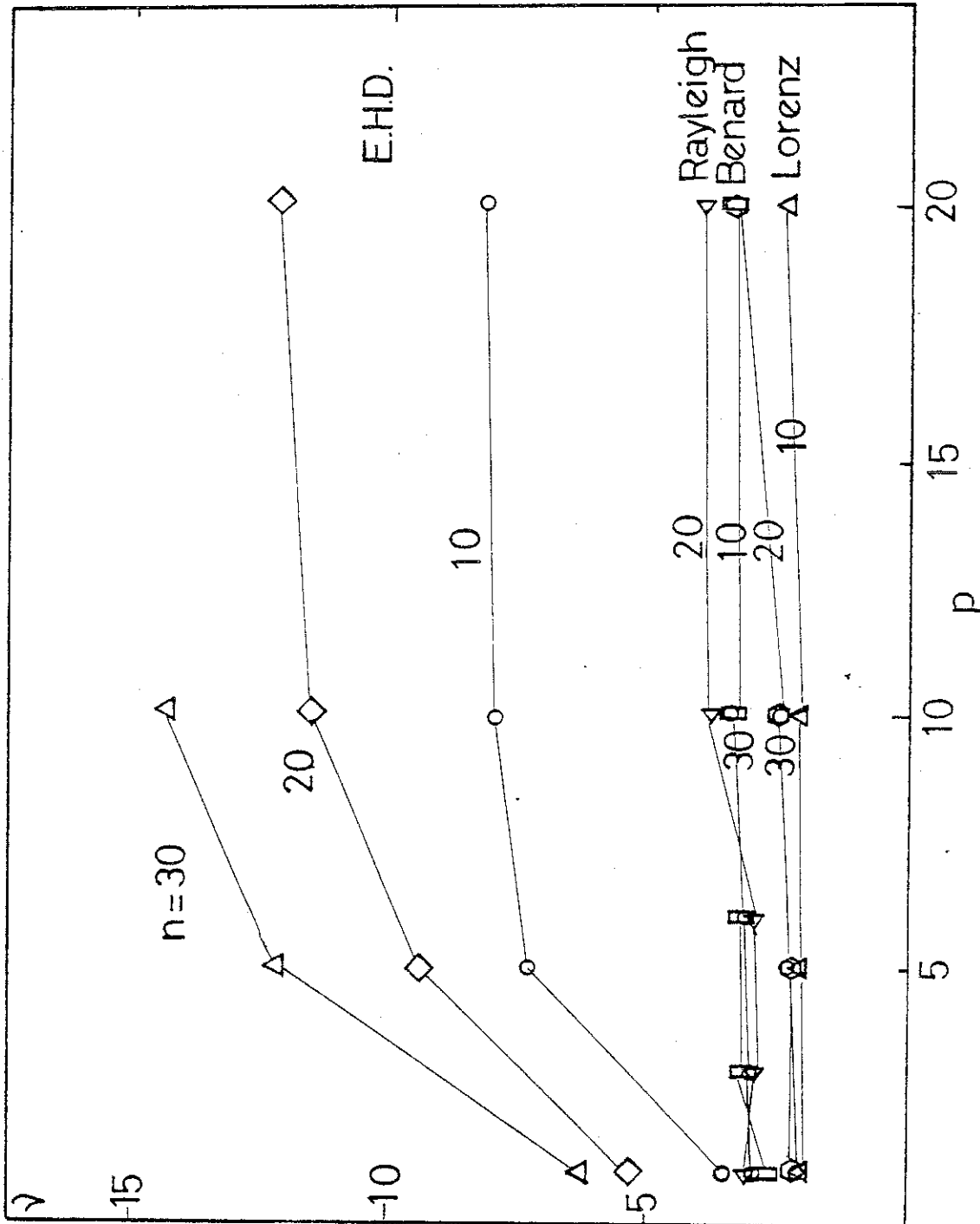


Figure 26

La dimension V en fonction des paramètres n et p pour plusieurs signaux : convection E.H.D. ($N = 150 \cdot 10^3$, $m = 300$), convection de R.B. ($N = 8 \cdot 10^3$, $m = 300$) et système de Lorenz (variable z , $N = 30 \cdot 10^3$, $m = 300$). La période d'échantillonnage a été fixée à $\Delta t \approx T_0/30$. (extrait de [64]).



Figure 27

Fonction d'auto-corrélation sur $15 \cdot 10^3$ points pour un régime chaotique de convection E.H.D. ($\Gamma = 1$, $U = 250$ V (seuil à 80 V), $T_0 \approx 5,3 \cdot 10^{-2}$ s, $\Delta t \approx (16,5)^{-1} \times T_0$).

Naïvement, on pourrait penser d'après l'analyse des courbes $C(r)$ que la dimension de l'attracteur pour le signal E.H.D. est supérieure à 15 (la valeur maximum que nous ayons obtenue dans calculs). Or, il se peut que celle-ci n'atteigne pas cette valeur qui pourrait être due à une courbure de $C(r)$. Pour trouver la dimension, il faut calculer $C(r)$ pour des valeurs très faibles de r comme nous le verrons lors de l'étude de l'entropie.

C - LA METHODE PRATIQUE DE CALCUL DE L'ENTROPIE

Nous avons pu établir de façon indiscutable que le régime de convection de Rayleigh-Bénard que nous avons étudié était décrit par un petit nombre de degrés de liberté. Il faut alors vérifier que l'on a bien divergence exponentielle des trajectoires sur l'attracteur. Un premier argument en faveur de cela est l'existence d'un bruit large bande dans le spectre de puissance (voir figure 24). Cependant, il est intéressant d'évaluer l'entropie pour quantifier le taux de divergence des trajectoires sur l'attracteur (et ainsi pouvoir comparer le système à d'autres comme nous le verrons).

Rappelons brièvement que l'entropie est calculée à partir d'une partition de l'espace des phases en boîtes de taille r numérotées de 1 à $M(r)$; on estime alors la probabilité $p(i_1 \dots i_b)$ que le système génère la séquence $(i_1 \dots i_b)$. L'entropie K_2 s'estime en calculant :

$$\frac{I_b}{b \Delta t} = - \frac{1}{b \Delta t} \log \sum_{(i_1 \dots i_b)} p^2(i_1, \dots i_b) \quad (39)$$

la somme étant effectuée sur toutes les séquences $(i_1, \dots i_b)$.

Cette quantité doit devenir indépendante de b , de la période d'échantillonnage et de la partition.

On pose :

$$K_2 = \sup_{\substack{\text{partition} \\ \Delta t}} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{I_b}{b \Delta t} \right]$$

L'entropie métrique K se définit de la même façon par :

$$K = \sup_{\text{partition}, \Delta t} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b\Delta t} \sum_{(i_1 \dots i_b)} p(i_1 \dots i_b) \log p(i_1 \dots i_b) \right]$$

C.1 MISE EN PRATIQUE DE LA METHODE

Plaçons-nous dans l'espace des phases R^n . Considérons la suite de vecteurs \vec{X}_i $i \in [1, N]$ qui décrit une trajectoire du système. Il faut trouver une partition de l'espace des phases en un nombre fini de sous-ensembles afin de calculer les probabilités p . Le choix de cette partition est délicat. Si on choisit une partition quelconque, on a toutes les chances qu'elle ne soit pas génératrice, ce qui se traduit par le fait que la borne supérieure (dans la pratique, le maximum) de la limite de (39) quand b tend vers l'infini n'est pas atteinte pour cette partition [28]. Physiquement une partition est génératrice si elle morcelle l'espace des phases à l'infini sous l'action du flot. Dans le cas qui nous occupe Cohen et Procaccia [69] ont montré numériquement que le fait d'"attacher" la partition à la dynamique en centrant chaque boule sur un vecteur de la trajectoire fait que celle-ci est génératrice. Par la suite, nous vérifierons cela sur un certain nombre d'exemples. (D'un point de vue plus géométrique, Grassberger et Kantz [70] ont pu construire une partition génératrice à deux éléments en s'appuyant sur la connaissance des variétés stables et instables au voisinage d'un point fixe hyperbolique).

Dans le calcul de $p(i_1 \dots i_b)$, nous avons éliminé les séquences correspondant à des boîtes et donc à des vecteurs non consécutifs car leur probabilité est très faible. Soit donc la suite de vecteurs "fiduciaire" : $(\vec{X}_i, \vec{X}_{i+1}, \dots, \vec{X}_{i+b-1})$ où les \vec{X}_j sont construits par décalages sur une coordonnée scalaire X . Pour estimer la probabilité associée à une telle suite, il faut calculer le nombre de suites $(\vec{X}_j, \vec{X}_{j+1}, \dots, \vec{X}_{j+b-1})$ (choisies consécutives pour les mêmes raisons que plus haut), telles que :

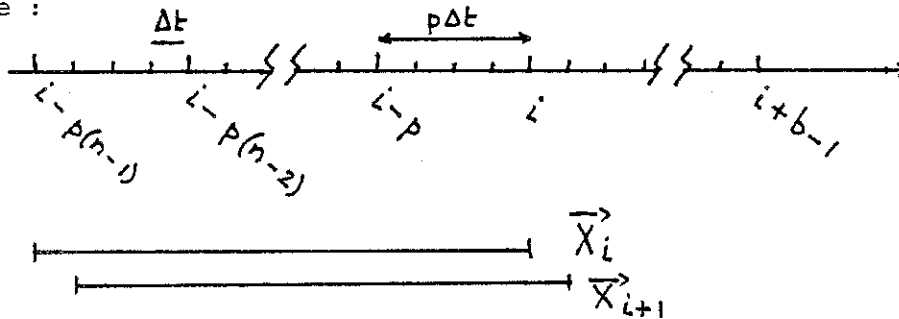
$$\| \vec{X}_{i+k} - \vec{X}_{j+k} \| \leq \epsilon \quad \text{pour } 0 \leq k \leq b-1 \quad (40)$$

En utilisant la norme du maximum, la condition (39) devient pour le signal scalaire $X(t)$:

$$\max_{0 \leq b \leq n-1} \left| X[(i+k)\Delta t - b_p \Delta t] - X[(j+k)\Delta t - b_p \Delta t] \right| \leq r \quad (41)$$

pour $0 \leq k \leq b-1$. (On parlera de r -coïncidence pour chacun des termes $X(l) - X(m)$).

Les portions de signal $X(t)$ utilisées pour construire la suite de vecteurs (\vec{X}_{i+k}) pour $0 \leq k \leq n-1$ se recouvrent. Supposons que la "longueur" de la suite $b-1$ soit plus grande que la "longueur" de chaque vecteur $p(n-1)$. La situation sur l'axe t pour $p=4$ est la suivante :



On exige alors d'après (41)

$$|X(l) - X(m)| \leq r \quad (42)$$

pour $i-p(n-1) \leq l \leq i+b-1$ soit $i+b-1 - [i-p(n-1)] + 1 =$
 $j-p(n-1) \leq m \leq j+b-1$ $b+p(n-1)$ conditions de r -coïncidence.

Si le flot se comporte de façon régulière dans l'espace des phases, on peut diminuer le nombre de termes à calculer dans (42) et ne calculer $|X(l) - X(m)|$ que tout les p termes. La condition que tous ces termes soient r -coïncidents semble équivalente à (42) (cela revient à prendre $p\Delta t$ comme nouvelle période d'échantillonnage).

La quantité :

$$C_{i,b}''(r) = N^{-1} \times nb \left\{ j, \|\vec{X}_{i+k} - \vec{X}_{j+k}\| \leq r; 0 \leq k \leq b-1 \right\} \quad (43)$$

pourra donc être approximée par :

$$C'_{i,b}(x) = N^{-1} \times nb \left\{ j, |X(i-p(n-1)+kp) - X(j-p(n-1)+kp)| \leq x \right. \\ \left. \text{pour } 0 \leq k \leq \left[E\left(\frac{b-1}{p}\right) - n + 1 \right] + 1 \right\} \quad (44)$$

ce qui est exactement le calcul d'une fonction $C_i(r)$ (35) dans un espace à $E\left(\frac{b-1}{p}\right) - n + 3$ dimensions avec un décalage p .

Une fois obtenue la probabilité $C''_{i,b}(r)$ de la séquence $I = (\vec{X}_i, \dots, \vec{X}_{i+b-1})$, grâce à cette méthode, il faut calculer (39). Pour cela nous pouvons utiliser le fait que :

$$\langle \text{Log } p_I \rangle_t \cong \sum_I p_I \text{Log } p_I \quad (45)$$

par suite de la propriété d'ergodicité de la mesure sur l'attracteur [52] appliquée à la fonction $\text{Log } p_I$. De la même façon,

$$\frac{\langle p_I \rangle_t}{\langle \text{Log } p_I \rangle_t} \cong \frac{\sum_I p_I^2}{\sum_I p_I \text{Log } p_I} \quad (46)$$

Ainsi, $C''_b(x) = m^{-1} \sum_{i=1}^m C''_{i,b}(x) \cong \frac{\sum_I p_I^2}{\sum_I p_I \text{Log } p_I}$ [71] et comme pour un attracteur

$$C''_b(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{D_2}$$

On obtient [71]

$$C''_b(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{D_2} e^{-b\Delta t K_2} \quad (47)$$

De la même façon, si :

$$C'''_b(x) = \left[\prod_{i=1}^N C_i(x) \right]^{1/N} \quad (48)$$

alors $\text{Log } C'''_b(x) \cong \sum_I p_I \text{Log } p_I$

et $C'''_b(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{D_1} e^{-b\Delta t K}$ (49)

Plus généralement, pour calculer K_q pour q quelconque (voir chapitre I), on peut estimer :

$$C_b^q(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m C_i^{q-1}(x) = \langle p_I^{q-1} \rangle_t \cong \sum_I p_I p_I^{q-1}$$

on en déduit $C_b^q(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{D_q} e^{-b\Delta t (q-1) K_q}$ (50)

Ceci constitue un moyen pratique de calculer K_q , en estimant p_i grâce à la méthode exposée plus haut. Nous verrons à la fin de ce chapitre, que cette technique n'est pas utilisable pour des signaux expérimentaux quelconques. Elle n'a pu être mise en oeuvre que dans des cas où la dimension de l'attracteur et l'entropie sont faibles et où le nombre de points N est très important.

C.2 QUELQUES REMARQUES

a. Il y a deux façons d'utiliser les relations (47) et (49) pour calculer K_2 et K . La méthode directe consiste à calculer :

$$-\frac{1}{b\Delta t} \text{Log} (C_b''(r)) \quad (\text{ou } C_b'''(r)) \text{ pour } b \rightarrow \infty \quad (51)$$

Ceci donne pour b grand des fluctuations et des erreurs d'ordre $1/b$ [19c].

Une autre façon est d'associer à la suite (μ_b) , telle que $\mu_b = -(1/b\Delta t) \text{Log} [C_b''(r)]$ (dont nous supposons que la limite existe) une suite (F_b) dont la suite de Cesaro (suite des moyennes $V_b = b^{-1} \sum_{a=1}^b F_a$) associée est (μ_b) . (F_b) aura la même limite que (μ_b) .

Nous choisisons

$$F_s^{(b)} = (s\Delta t)^{-1} [\text{Log} C_b''(r) - \text{Log} C_{b+s}''(r)] \quad (52)$$

avec des valeurs faibles pour s .

Dans le reste de cette étude, nous considérerons le calcul de la limite :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F_s^{(b)}(r) \quad (53)$$

On peut montrer que $(F_s^{(b)})$ constitue une suite décroissante de b [28]. En effet, dans le cas où il y a une seule séquence $(i_1 \dots i_b)$, $F_s^{(b)}$ est reliée à la probabilité d'une r -coïncidence sur un temps $(b+s)\Delta t$ sachant que l'on avait une r -coïncidence sur un temps $b\Delta t$.

Ainsi pour un système déterministe des taux moyens d'échappement des trajectoires tend vers une limite finie lorsque le temps sur lequel on effectue les observations tend vers l'infini. C'est ce qui est traduit dans les définitions plus formelles du chapitre I.

b. Le choix de la norme que l'on utilise pour le calcul de (40) se révèle très important, car on examine la limite b (ou n , ce qui est équivalent comme nous l'avons vu plus haut) tendant vers l'infini. Par la suite, nous noterons la dimension de l'espace des phases n ou b . Le taux de convergence vers la limite (53) varie suivant que l'on prend la norme euclidienne comme dans [71] ou la norme du maximum [72]. Pour montrer cela, considérons un signal périodique échantillonné convenablement (chapitre III). Pour la norme euclidienne, la distance entre deux séquences devrait varier avec n comme \sqrt{n} . En effet :

$$\|\vec{X}_i - \vec{X}_j\| = \left[\sum_{k=0}^{n-1} [X(i\Delta t - k\Delta t) - X(j\Delta t - k\Delta t)]^2 \right]^{1/2}$$

Cette quantité peut être bornée de la façon suivante :

$$\sqrt{n} \min_{0 \leq k \leq n-1} |X((i-k)\Delta t) - X((j-k)\Delta t)| \leq \|\vec{X}_i - \vec{X}_j\| \leq \sqrt{n} \max_{0 \leq k \leq n-1} |X((i-k)\Delta t) - X((j-k)\Delta t)|$$

Cette dépendance en \sqrt{n} se retrouve à toutes les échelles, et on peut alors en déduire pour une échelle r_0 de donnée :

$$C_n(r_0) \sim 1/\sqrt{n} \quad (54)$$

En injectant (54) dans (52), on voit que le terme $F_s^{(n)}(r)$ se comportera comme $1/n$ pour n tendant vers l'infini. Au contraire, dans le cas de la norme du maximum, la distance moyenne entre deux séquences ne dépendra plus que faiblement de n dès que $n\Delta t$ sera supérieur à une période T_0 (voir figure 35). Le terme $F_s^{(n)}(r)$ atteindra donc la limite (53) plus rapidement.

Ce problème, lié au fait que la norme euclidienne n'est pas bornée avec la dimension de R^n pourrait être résolu en multipliant les valeurs $C_n(r)$ par un facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il est tout de même plus simple d'utiliser la norme du maximum (voir chapitre II) et c'est ce que nous avons fait.

c. De la même façon que pour les D_q , le fait que l'on observe des K_q différents [29] est en contradiction (apparente ?) avec l'hypothèse d'ergodicité. En effet, il suffit d'appliquer le théorème ergodique vu au chapitre I à la fonction de \vec{X}_1 :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} \log C''_{i,b}(r) \right]$$

Alors cette expression sera constante pour μ -presque tout \vec{X}_1 et vaudra K (pour r faible afin que la partition soit génératrice). Ce résultat peut être démontré rigoureusement ([28] p. 257). A l'heure actuelle, nous ne comprenons pas quelles peuvent être les hypothèses -qui sont relativement faibles dans ce contexte- du théorème qui sont mises en défaut dans une situation réelle.

D - LE CALCUL DE L'ENTROPIE SUR LES SYSTEMES DE RAYLEIGH-BENARD ET DE LORENZ [73]

Nous avons vu plus haut que le calcul de $C''_b(r)$ (taux de séquences de b vecteurs de R^n reconstruits à partir d'une observable $X(t)$ qui sont à une distance r l'une de l'autre) pouvait -à condition de travailler avec la norme du maximum- se ramener au calcul de $C_{b+n-1}(r)$. Dans toute la suite, c'est ce que nous avons fait -en assimilant b et n -. L'entropie devant nous être donnée par (52) et (53).

D.1 LES PREMIERES ETUDES : VALEURS DE n ET p FAIBLES

La figure 28 montre les courbes $C(r)$ ainsi que les pentes locales associées pour le signal de Rayleigh-Bénard étudié plus haut.

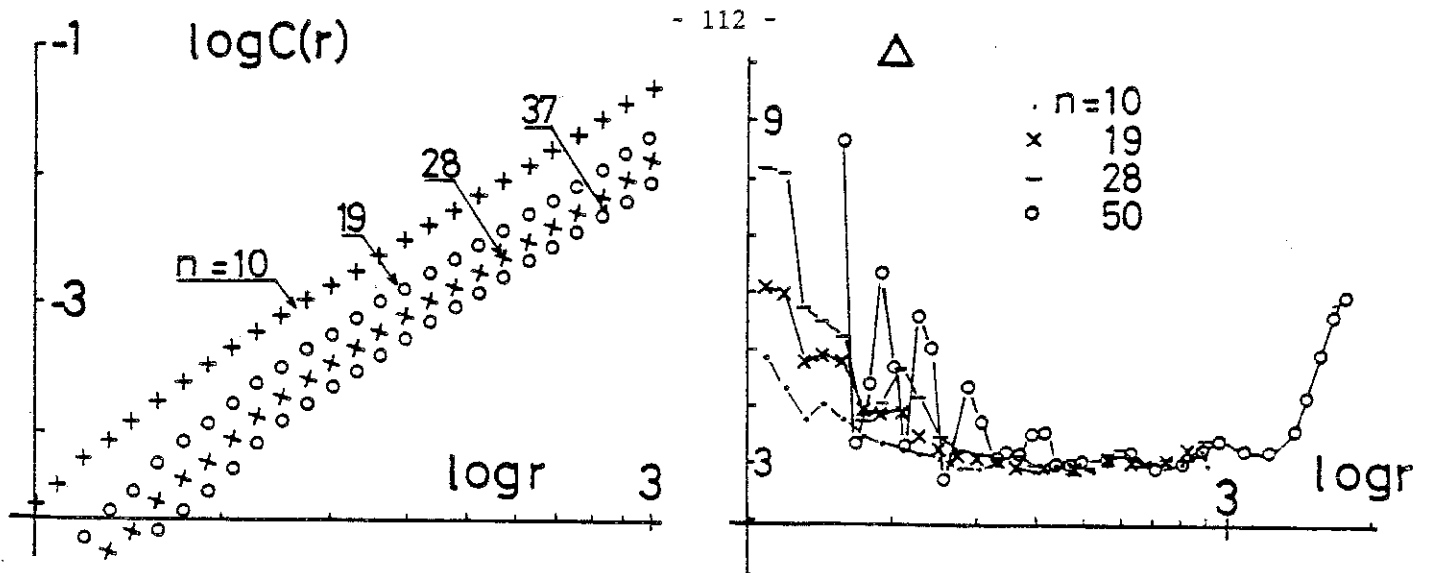


Figure 28

Signal chaotique de Rayleigh-Bénard :

- a. Courbes $\log C(r)$ en fonction de $\log r$
 b. Pentés locales en fonction de r

($N = 8 \cdot 10^3$, $m \approx 600$, $\Delta t = 0.33$ ($T_0/30$) $p = 3$, $n = 10 - 37$).

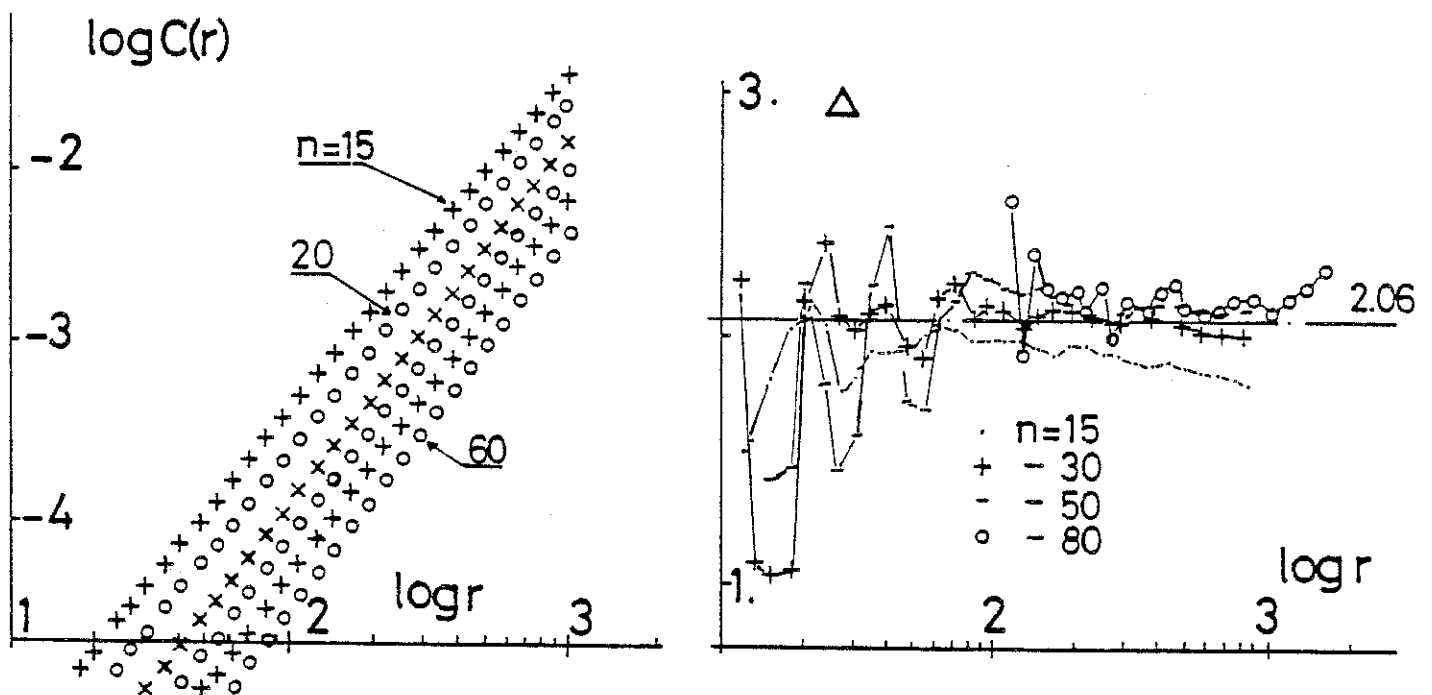


Figure 29

Variable $Z(t)$ du système de Lorenz ($R = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$)

- a. Courbes $\log C(r)$ en fonction de $\log r$
 b. Pentés locales en fonction de r

(Pas d'intégration : 0.01, $N = 30 \cdot 10^3$, $m \approx 600$, $\Delta t = 0.02$ ($T_0/37$) $p = 1$, $n = 15 \rightarrow 60$)

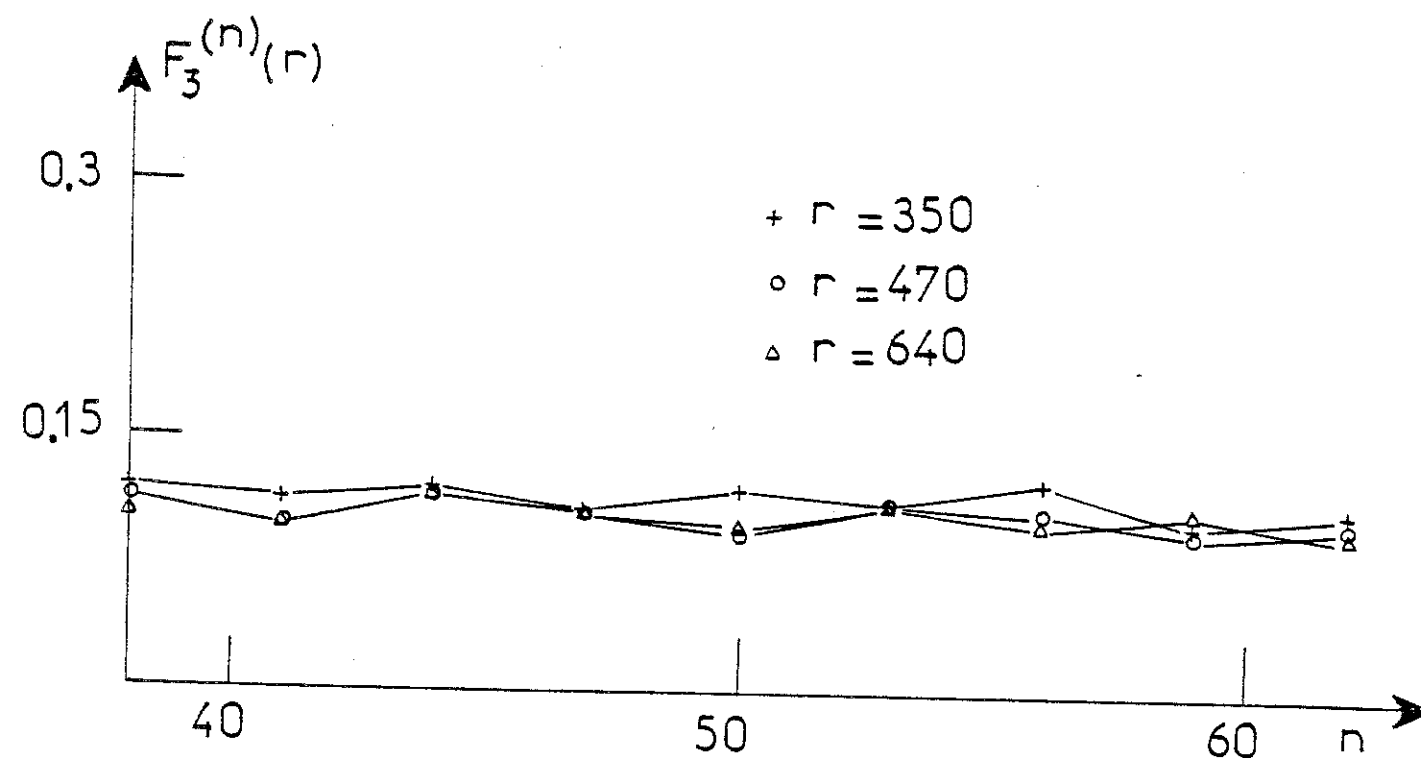
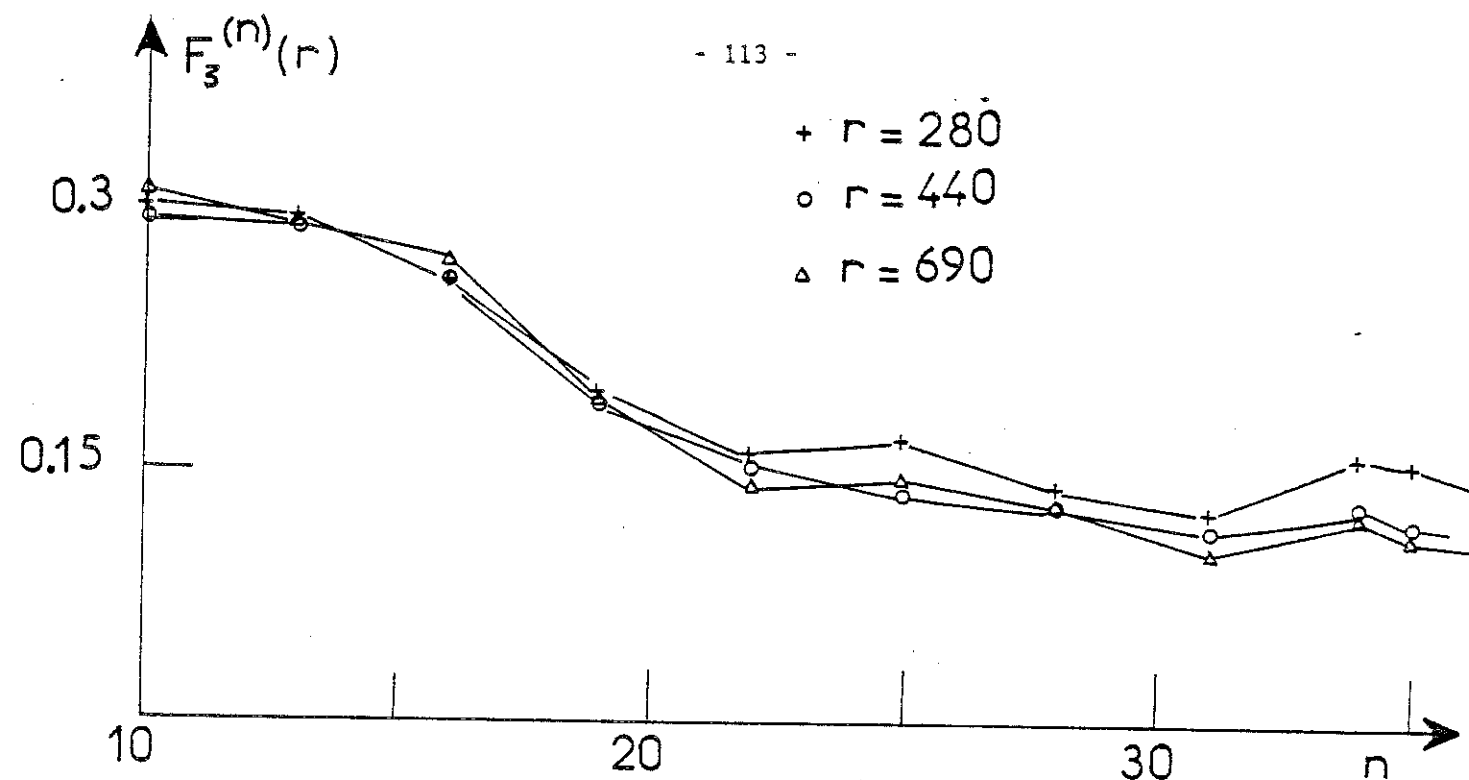


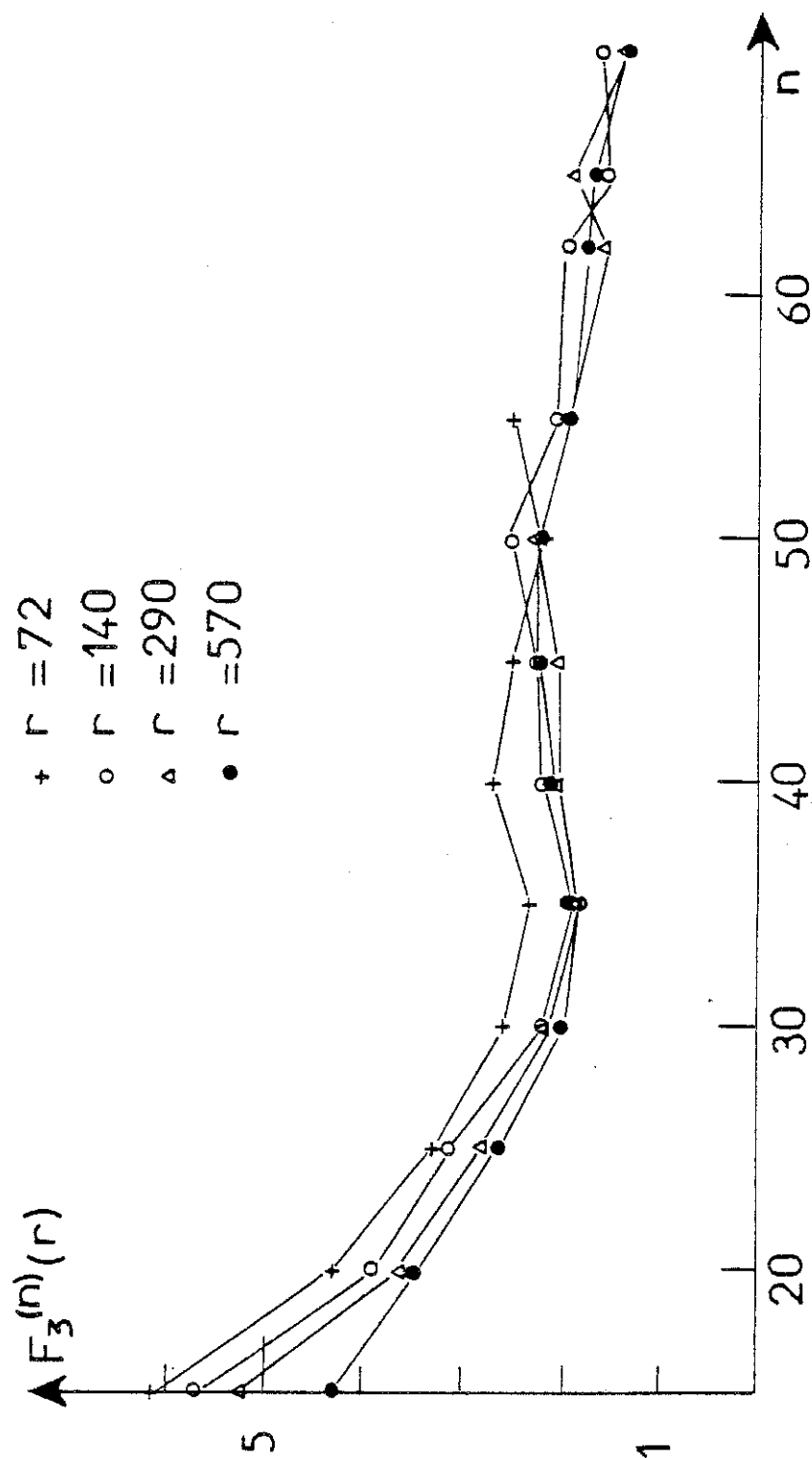
Figure 30

Signal chaotique de Rayleigh-Bénard. Courbe $F_3^{(n)}(r)$ pour 3 valeurs de r : $r = 280$, 440 et 690 jusqu'à $n = 60$. (mêmes paramètres que dans la figure 27).

Figure 31

Variable $z(t)$ du système de Lorenz

Courbe $F_3^{(n)}(r)$ en fonction de n pour 4 valeurs de r : $r = 72, 140, 290$ et 570 pour $n < 75$ (mêmes paramètres que pour la Figure 29).



Il est clair que nous avons une loi de comportement de $C(r)$ en r^γ ou γ est indépendant de n ($\gamma = 2.9 \pm 0.1$), car la pente locale ne dépend pas de n sur presque une décade en r . La courbure observée pour $C(r)$ pour les faibles valeurs de r est vraisemblablement due au bruit (voir étude du signal bi-périodique).

Pour la variable $Z(t)$ du système de Lorenz, la situation est très semblable comme le montre la figure 29. On observe ici aussi une identité des pentes locales à une valeur 2.05 ± 0.1 . Lorsque l'on fait le calcul de :

$$F_3^{(n)} = (3\Delta t)^{-1} \text{Log} \left[\frac{C_n(r)}{C_{n+3}(r)} \right]$$

pour les deux systèmes, pour diverses valeurs de r , on s'aperçoit que cette quantité est relativement indépendante de r et que comme on s'y attend, elle décroît lorsque n augmente. La figure 30 montre la variation de $F_3^{(n)}(r)$ en fonction de n , pour trois valeurs de r pour le signal issu de l'expérience de convection de Rayleigh-Bénard. Ce graphe semble présenter une saturation pour $n \gg 45$.

Dans le cas du système de Lorenz (figure 31) on observe bien les mêmes effets qualitatifs, cependant la courbe $F_3^{(n)}(r)$ continue à décroître avec n .

Ces premiers résultats : apparente saturation pour le signal expérimental et non saturation pour le système de Lorenz, peuvent s'interpréter à la lumière des études numériques réalisées dans [52, 71]. Dans ces travaux, le temps total $T = (n-1)p\Delta t$ sur lequel le système a été "suivi" (sur lequel on a comptabilisé des coïncidences à r près) nécessaire pour obtenir une convergence était de l'ordre de 6 ou 7 temps caractéristiques (temps construits sur l'inverse de l'entropie). Ainsi, il apparaît que nous n'avons peut-être pas exploré des intervalles de temps suffisamment longs.

D.2 LA CONVERGENCE VERS LA VALEUR DE L'ENTROPIE

Une première façon d'augmenter $T = (n-1)p \Delta t$ est de prendre de plus grandes valeurs de la dimension n de l'espace des phases. Pour diminuer le temps de calcul, nous avons préféré augmenter p (changement de la période d'échantillonnage de Δt à $p \Delta t$). Dans tous les cas, nous nous sommes alors heurtés à des problèmes de courbures systématiques de $C(r)$. Nous détaillerons plus loin ces limitations de la méthode associées aux variations systématiques des paramètres n et p . Il a été possible d'estimer K_2 pour le signal de Lorenz ainsi que pour celui provenant de l'expérience de convection de Rayleigh-Bénard de Bergé et Dubois. Le calcul de $F_3^{(n)}(r)$ doit se faire théoriquement pour des valeurs de r se trouvant dans la zone de "scaling" ($C_n(r) \sim r^{-\gamma}$). En pratique, nous l'avons évalué dans une région où $F_q^{(n)}(r)$ ne dépend pratiquement pas de r . Ceci signifie que malgré leur courbure les graphes de $C_p(r)$ sont décalés vers le bas d'une valeur constante lorsque l'on passe de $b = n$ à $n + q$ (ceci impose le choix de q). La figure 32 montre en parallèle les courbes $C_n(r)$ et $F_3^{(n)}(r) \times \Delta t$ associées au signal chaotique de Rayleigh-Bénard pour un temps-décalage de $p \times \Delta t = 12 \times 0.033 T_0$ et pour diverses valeurs de n . Il est manifeste que $F_3^{(n)}(r)$ tend vers une limite lorsque n augmente. La même situation se produit pour le signal de la variable $z(t)$ du système de Lorenz comme l'indique la figure 33. Ici, $F_3^{(n)}(r)$ a tendance à diminuer un peu avec r ; cet effet est dû au "resserrement" des courbes $C(r)$ pour r au-delà de la zone de "scaling". Dans la formule (47), la valeur Δt doit être remplacée par $p \Delta t$ lorsque le décalage vaut p ; en effet calculer $C_n(r)$ revient alors à chercher des r -coïncidences sur des séquences de vecteurs séparés par un intervalle de temps $p \Delta t$.

Définissons :

$$K_{(q)}(p, n) = p^{-1} \langle F_q^{(n)}(r) \rangle_r \quad (55)$$

Nous pouvons alors reporter tous nos résultats sur une courbe universelle $K^{(q)}(p, n)$ en fonction du paramètre $T (= (n-1)p \Delta t)$ -longueur de la séquence scalaire utilisée pour construire un vecteur de R^n - normalisé par T_0 (échelle de temps intrinsèque)

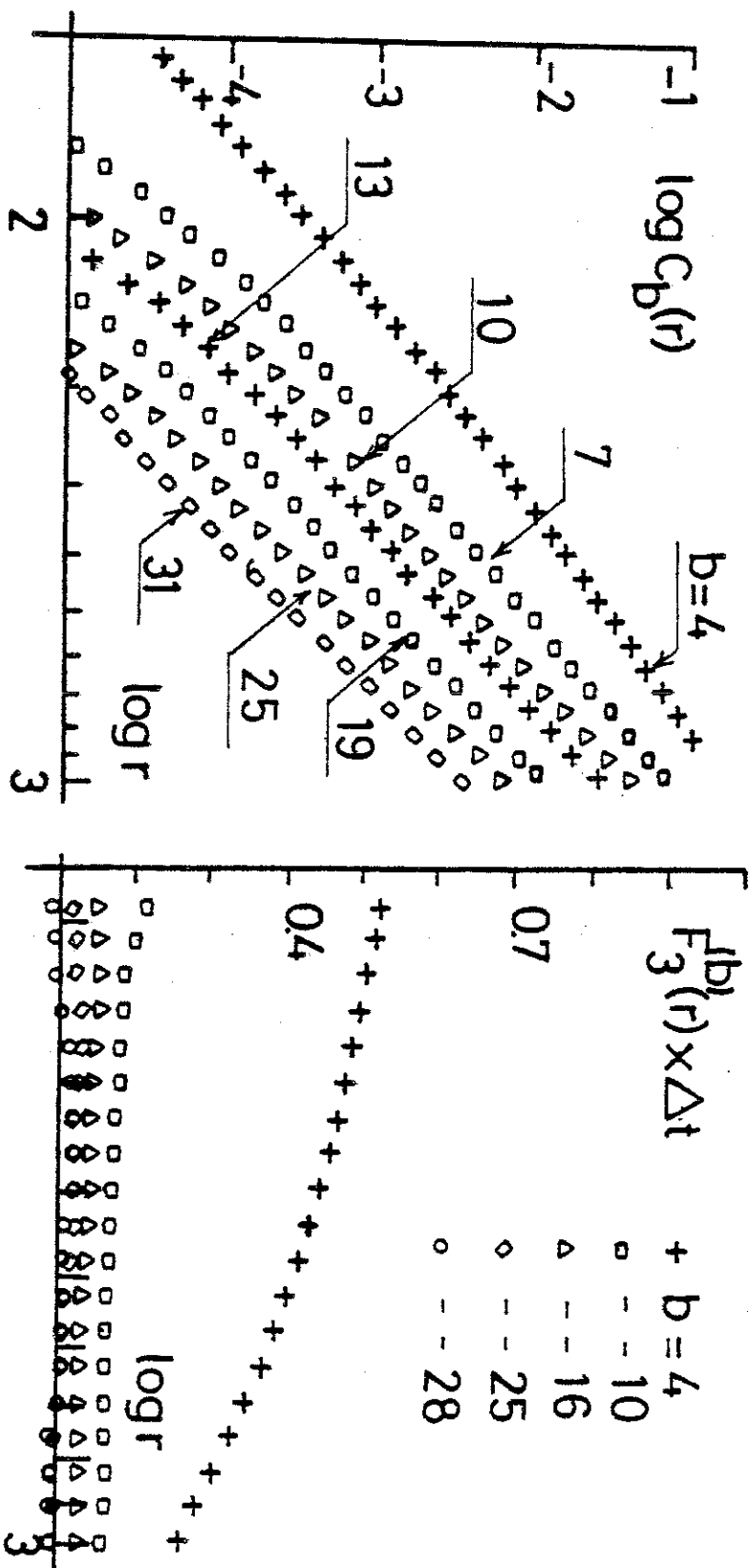


Figure 32

Signal expérimental provenant d'une expérience de Rayleigh-Bénard.

- Courbes $\log C_b(r)$ en fonction de $\log r$ pour différentes valeurs de b
 - Courbes $F_3^{(b)}(r) \times \Delta t$ déduites des précédentes
- ($N = 8500$, $m = 600$, $\Delta t = 0.33$ ($\approx T_0/30$), $p = 12$).

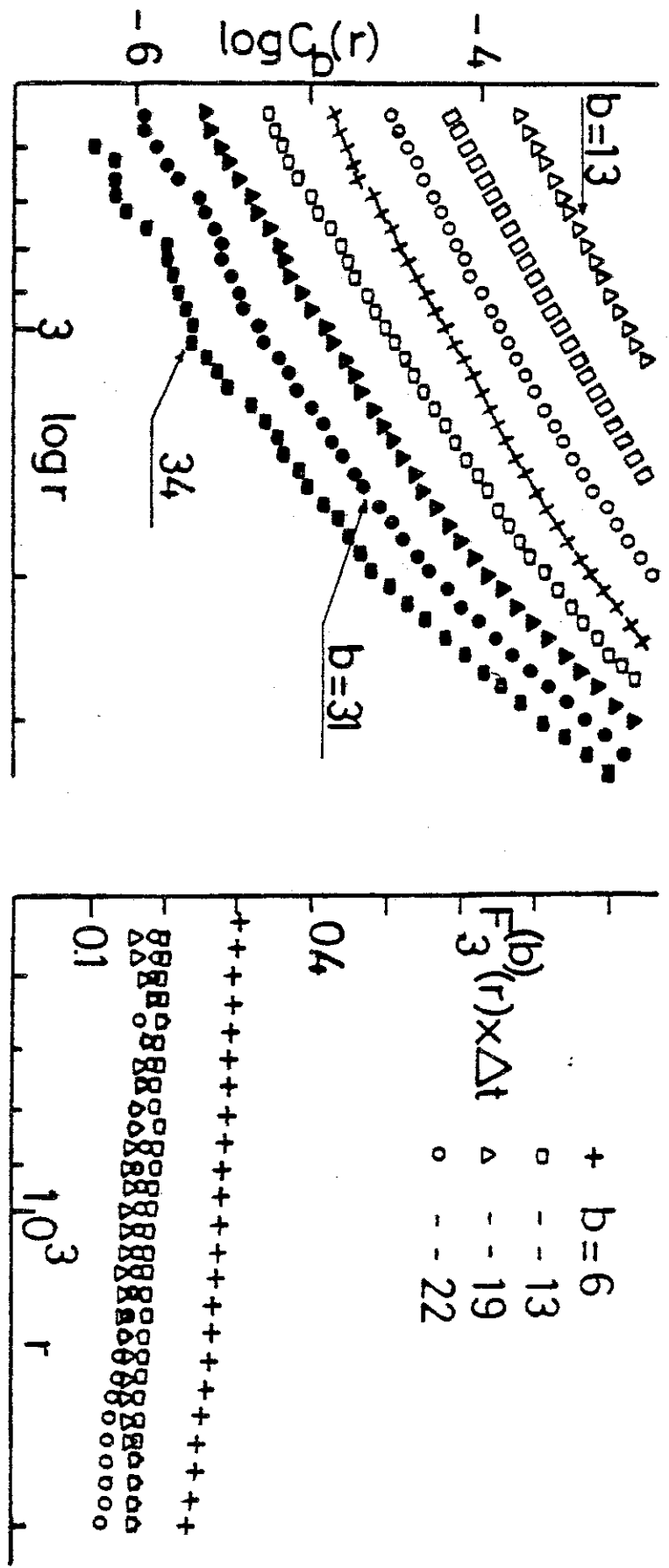


Figure 33

Système de Lorenz

- a. Courbes $\log C_b(r)$ en fonction de $\log r$ pour différentes valeurs de b
 - b. Courbes $F_3^{(b)}(r) \times \Delta t$ déduites des précédentes
- ($N = 3 \cdot 10^4$, $m = 600$, $\Delta t = 0.05$ ($\approx T_0/15$), $p = 6$)

La figure 34 donne cette courbe universelle pour le signal chaotique expérimental (la valeur limite est 0.09 ± 0.01) et le système de Lorenz (0.9 ± 0.1). Il est clair que la limite $b \rightarrow \infty$ de (39) a été atteinte. Dans les deux cas, la valeur limite ne dépend ni de la période d'échantillonnage Δt , ni des valeurs de r considérées (on a donc une partition génératrice). La valeur de K_2 calculée pour le système de Lorenz est en accord avec l'inégalité $K_2 \leq K \leq \lambda^+$ (voir chapitre I). On observe même $K_2 \cong \lambda^+$, ce qui confirme indirectement le résultat de Grassberger et Procaccia [29] qui ont montré par une méthode numérique dérivée de celle pour le calcul des exposants de Lyapunov que $K_2 = K_1 = K_0$ pour le système de Lorenz.

Pour comparer les entropies pour les deux systèmes, il faut les normaliser par rapport à une échelle de temps caractéristique du système, par exemple T_0 . Dans le cas précédent, on obtient les quantités $0.63 T_0^{-1}$ pour le système de Lorenz et $0.9 T_0^{-1}$. Ainsi le système expérimental est plus chaotique ; dans le sens où il génère plus d'information par cycle. Pour les systèmes chaotiques on obtient en pratique une entropie qui est strictement positive ; nous allons vérifier que ceci n'est pas le cas pour des signaux réguliers pour lesquels on doit trouver une entropie nulle.

D.3 ENTROPIE POUR UN SIGNAL PERIODIQUE ET BI PERIODIQUE

Dans ce cas, il est connu que les entropies K_q sont toutes nulles. En effet, pour ces systèmes, le taux de divergence des trajectoires n'est pas exponentiel.

La figure 35 montre des courbes $C(r)$ pour la sinusoïde du chapitre III pour trois valeurs assez grandes de n . Les courbes $C(r)$ semblent se superposer exactement. Pour un signal périodique quelconque, lorsque l'on utilise la norme du maximum, la distribution des distances d_{ij} ne va plus évoluer à partir d'une certaine valeur de T (typiquement $T \sim T_0$). Il est alors clair que l'entropie K_2 (et toutes les entropies car tous les $C_i(r)$ se comportent de la même façon) est nulle.

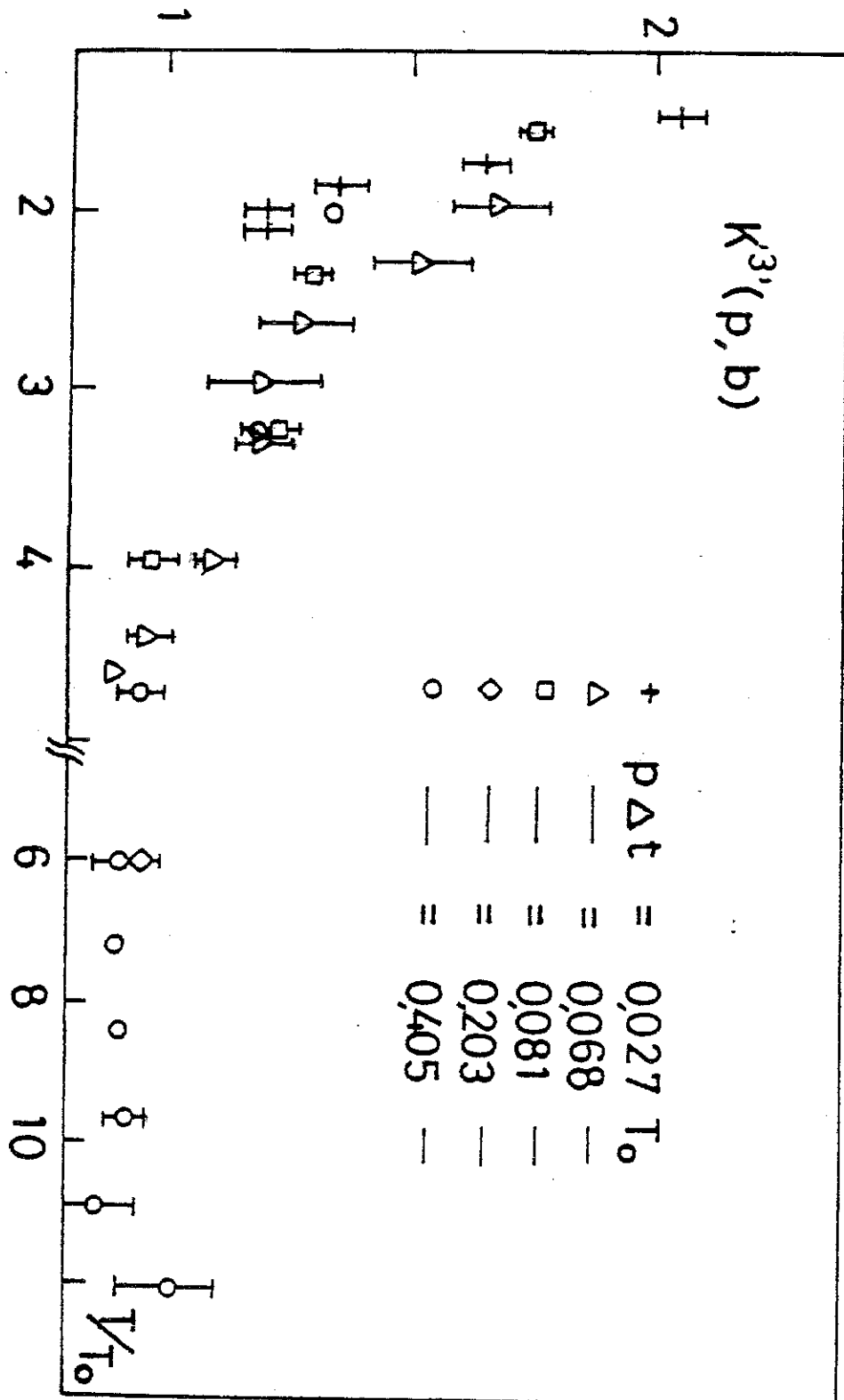


Figure 34a

Figure 34

Estimateurs $K_{(3)}'(p, b)$ de l'entropie en fonction de la longueur T des séquences normalisée par la pseudo-période T_0 pour :

- a. le système de Lorenz
- b. le signal expérimental

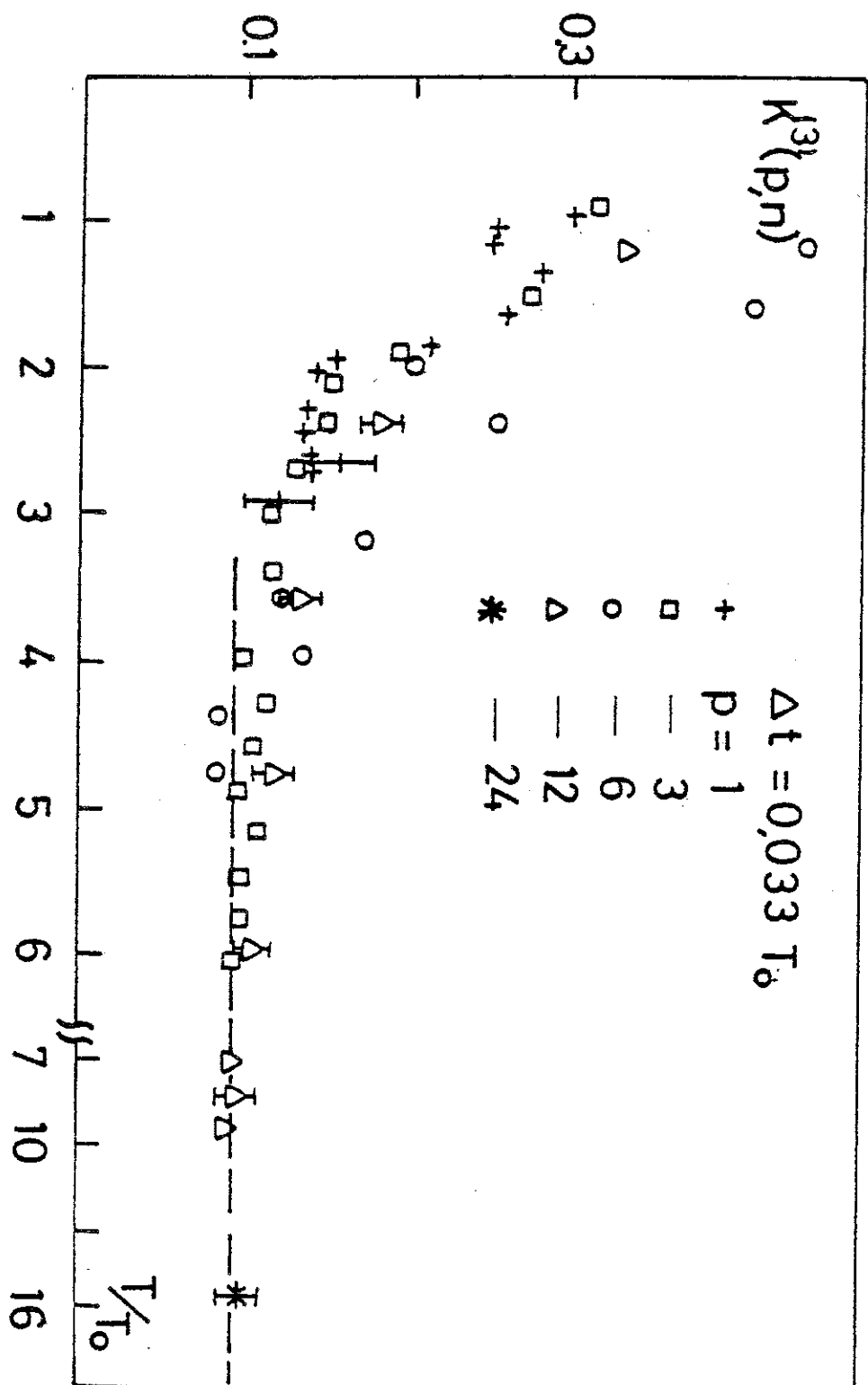


Figure 34b

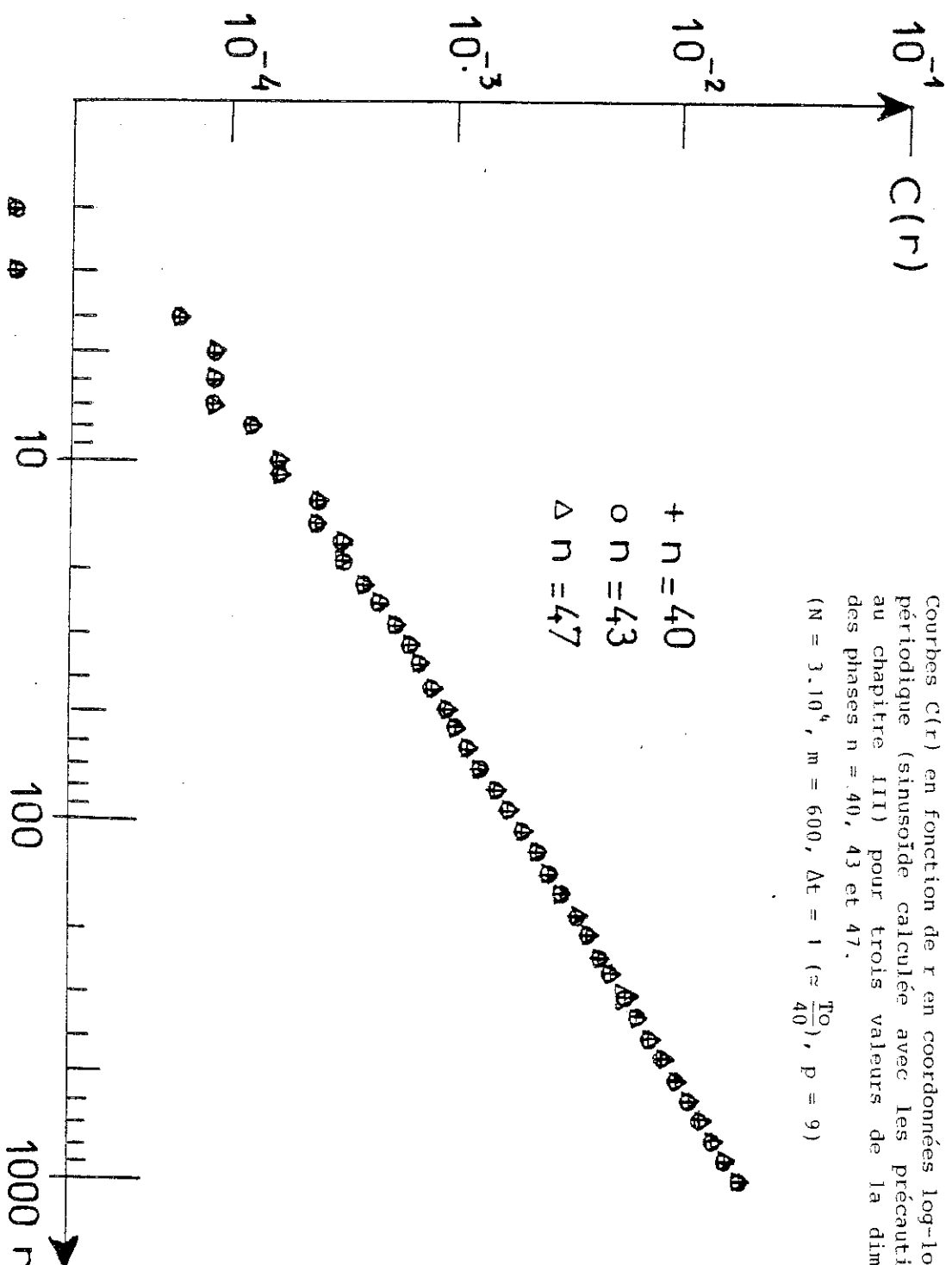


Figure 35

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal périodique (sinusoïde calculée avec les précautions mentionnées au chapitre III) pour trois valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 40, 43$ et 47 .

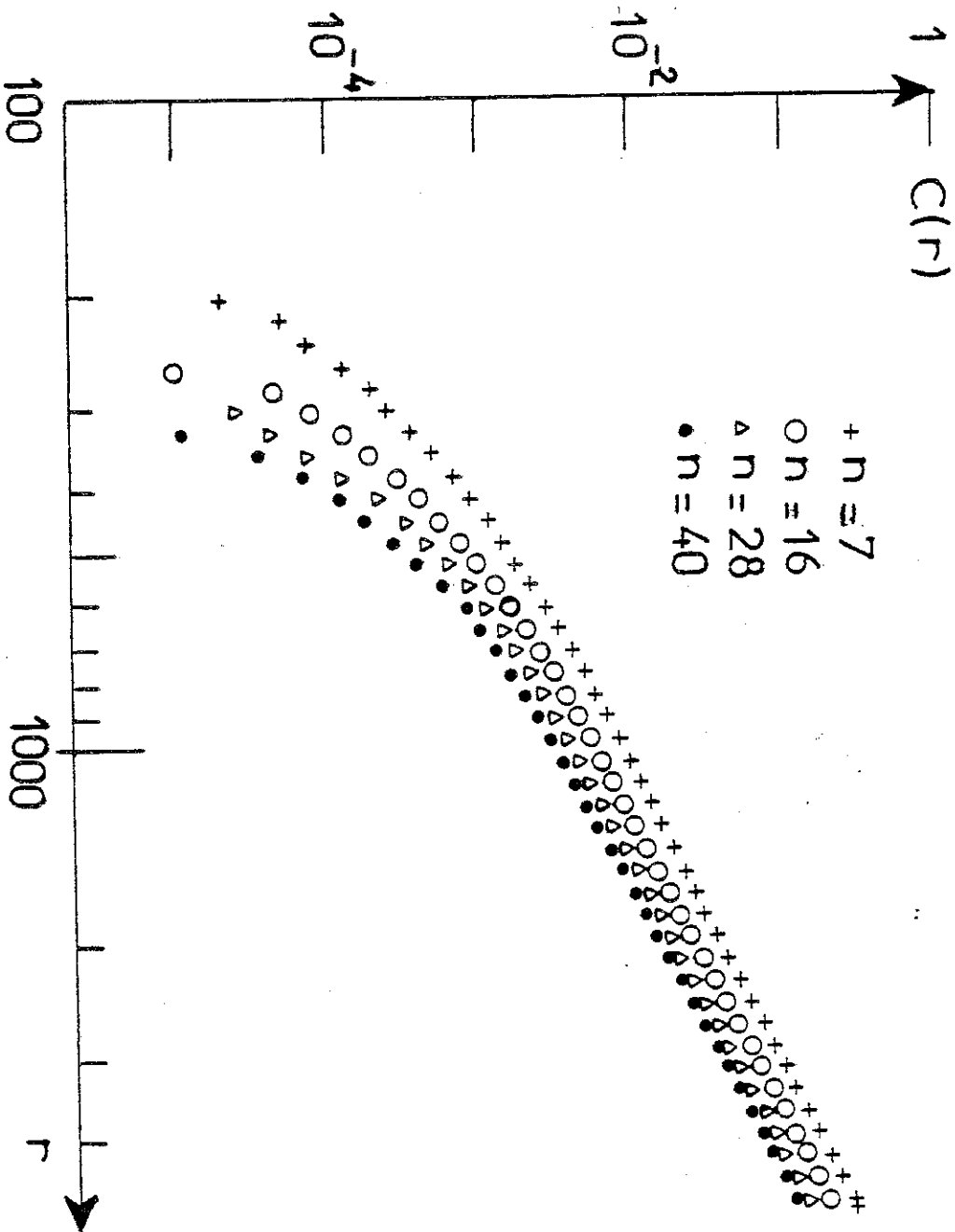
($N = 3 \cdot 10^4$, $m = 600$, $\Delta t = 1$ ($\approx \frac{T_0}{40}$), $p = 9$)

Si cette dernière conclusion doit rester et reste vraie dans la pratique expérimentale pour un signal bipériodique, la façon dont on atteint la limite est différente. Les courbes de la figure 36 ont été calculées pour un signal bipériodique provenant d'une expérience de convection de Rayleigh-Bénard. La bi-périodicité a été vérifiée par l'analyse du spectre de Fourier ainsi que par le recours à une section de Poincaré [74]. La fréquence principale vaut $T_0^{-1} = f_2 \approx 6.4 \cdot 10^{-2}$ Hz et celle qui possède une énergie moindre $T_1^{-1} = f_1 = f_2 / 7.2$. On observe sur la figure un bon alignement des courbes $C(r)$. En regardant plus finement celles-ci on s'aperçoit que la pente Δ dans la région $210^3 \leq r \leq 5 \cdot 10^3$ vaut 2,1 pour $n = 7$. Lorsque n augmente, Δ a tendance à dériver vers des valeurs légèrement plus grandes. Cet effet est dû à l'influence du bruit expérimental sur le signal qui se manifeste directement par la courbure observée pour les faibles valeurs de r ; dans cette zone la résolution pour $C(r)$ est bonne, l'effet ne peut donc pas être imputé à un manque de distances d_{ij} (voir fin du chapitre II). Celle qui est observée pour les courbes $C(r)$ associées au signal chaotique étudié précédemment s'explique de la même façon ; les plages en r correspondent au rapport signal/bruit dans le cas d'échantillonnage sur 12 bits (R.B. chaotique) ou sur 15 bits (R.B. bipériodique). Pour des valeurs de r supérieures, on retrouve la pente 2 pour la courbe $C(r)$ même pour de grandes valeurs de n et p ; $n = 20$, $p = 12$.

Remarquons que les courbes $C(r)$ se décalent lorsque n augmente. On n'atteint pas le régime asymptotique aussi rapidement que pour un signal périodique pour lequel le signal se répète exactement. La distance entre deux vecteurs \vec{X}_i et \vec{X}_j croîtra avec T pour le bipériodique alors qu'elle atteignait une saturation pour $T \sim T_0$ pour le périodique. Néanmoins, la croissance ne sera pas exponentielle. A p et Δ fixé, la quantité $F_s^{(n)}(r)$ décroît de façon non uniforme (à cause des pseudo-commensurations lorsque $T \propto 7 T_0$) vers 0. Comme plus haut, on obtient un comportement universel pour la quantité $K^{(3)}(p,b)$ en fonction de T . Sur la figure 37, sont reportées les valeurs de $K^{(3)}(p,b)$ en fonction de T/T_0 en coordonnées log-log pour : les deux signaux chaotiques étudiés précédemment et le signal bipériodique. Dans le premier cas on observe une saturation à une valeur strictement positive ; au contraire $K^{(3)}(p,b)$ décroît constamment pour le signal bi-périodique montrant que la limite est nulle pour $T \rightarrow \infty$. Le calcul de K_2 permet donc d'établir si un signal est chaotique et quel est son degré de chaos.

Figure 36

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un signal bi-périodique expérimental calculées pour quelques valeurs de la dimension d'espace des phases ($N = 15 \cdot 10^3$, $m = 600$, $\Delta t =$, $p = 12$).



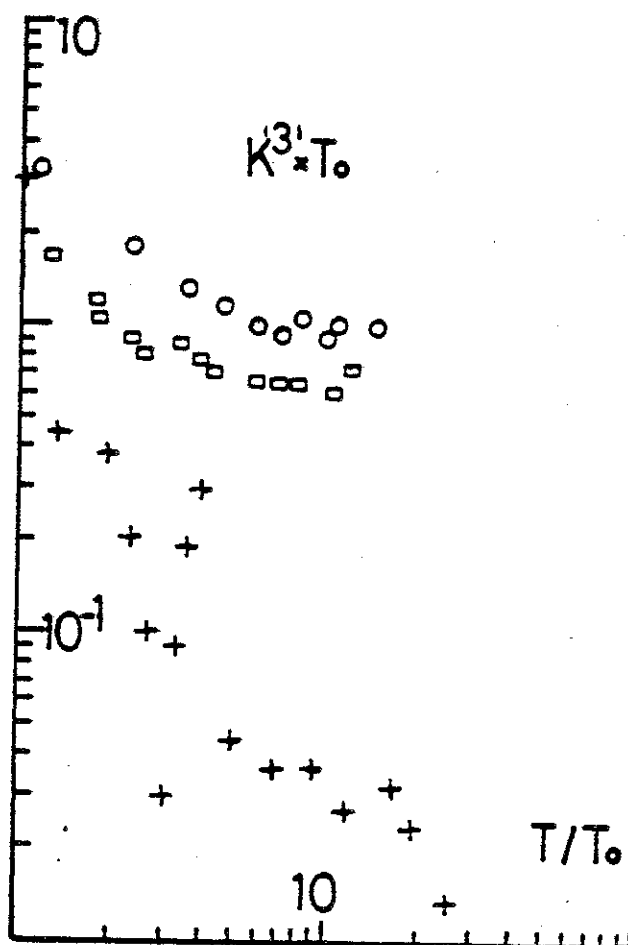


Figure 37

Comparaison de l'estimateur de l'entropie $K^{(3)}(p,b)$ normalisé par T_0 en fonction de la longueur des séquences explorées pour :

- le système de Lorenz
- le signal chaotique expérimental
- + le signal bi-périodique expérimental

D.4 ESTIMATION DE K : LES PROBLEMES

La méthode pratique est la même que pour K_2 , sauf que l'on calcule non plus la moyenne arithmétique des $C_i(r)$ mais la moyenne géométrique notée $C''_b(r)$ (48). L'entropie sera donnée par le décalage des courbes $C''_b(r)$ lorsque b augmente (49).

Pour calculer (48), pour une valeur r donnée, nous avons éliminé les séquences \vec{X}_i pour lesquelles $C_i(r) = 0$ et augmenté le nombre de moyennes jusqu'à ce que $C''_b(r)$ n'évolue plus. Alors, la plus petite valeur pour $C''_b(r)$ est $1/N$ (un seul \vec{X}_i contribue à la moyenne). On aurait pu éviter de faire cela en moyennant sur r , à C donné. Cependant, il aurait alors fallu introduire des corrections artificielles au "scaling".

Nous avons analysé le système de Lorenz avec cette méthode pour deux grandes valeurs du nombre total de points : $N = 30 \cdot 10^3$ et $15 \cdot 10^4$. Dans ces deux cas l'estimation de K s'est révélée impossible. Les courbes $C''(r)$ présentent une partie en loi de puissance suivie par une partie courbe pour les faibles valeurs de r (figure 38). Lorsque n augmente $C''(r)$ devient toute entière courbe. Si on calcule $F_s^{(n)}(r)$ pour s petit on obtient une courbe qui a une allure en cloche. La limitation en $1/N$ jouant sur les petites valeurs de r vient s'ajouter à celle qui joue pour r grand. Heuristiquement on fixe $K(p,b)$ comme étant le maximum des courbes $F_s^{(n)}(r)$ en fonction de r .

Il est alors impossible de déterminer dans la pratique, la limite de $K(p,b)$ avec la résolution prise : $K(p,b)$ tendra vers 0 de façon parasite (figure 39) (après un comportement universel sur une plage limitée de T) et ne présentera pas de saturation.

La comparaison entre la saturation claire obtenue pour K_2 avec $N = 3 \cdot 10^4$ et la non saturation pour K pour $N = 15 \cdot 10^4$ est éloquent. Pour $C_2(r)$, on obtient le "scaling" jusqu'aux plus petites valeurs de r . C'est ce qui permet le calcul de K_2 pour le signal expérimental avec seulement $N = 8000$ points. A l'heure actuelle, il semble donc que le calcul de D_q et K_q pour q quelconque soit impossible pour un signal expérimental qui ne soit pas à très faible dimension ou à très faible entropie.

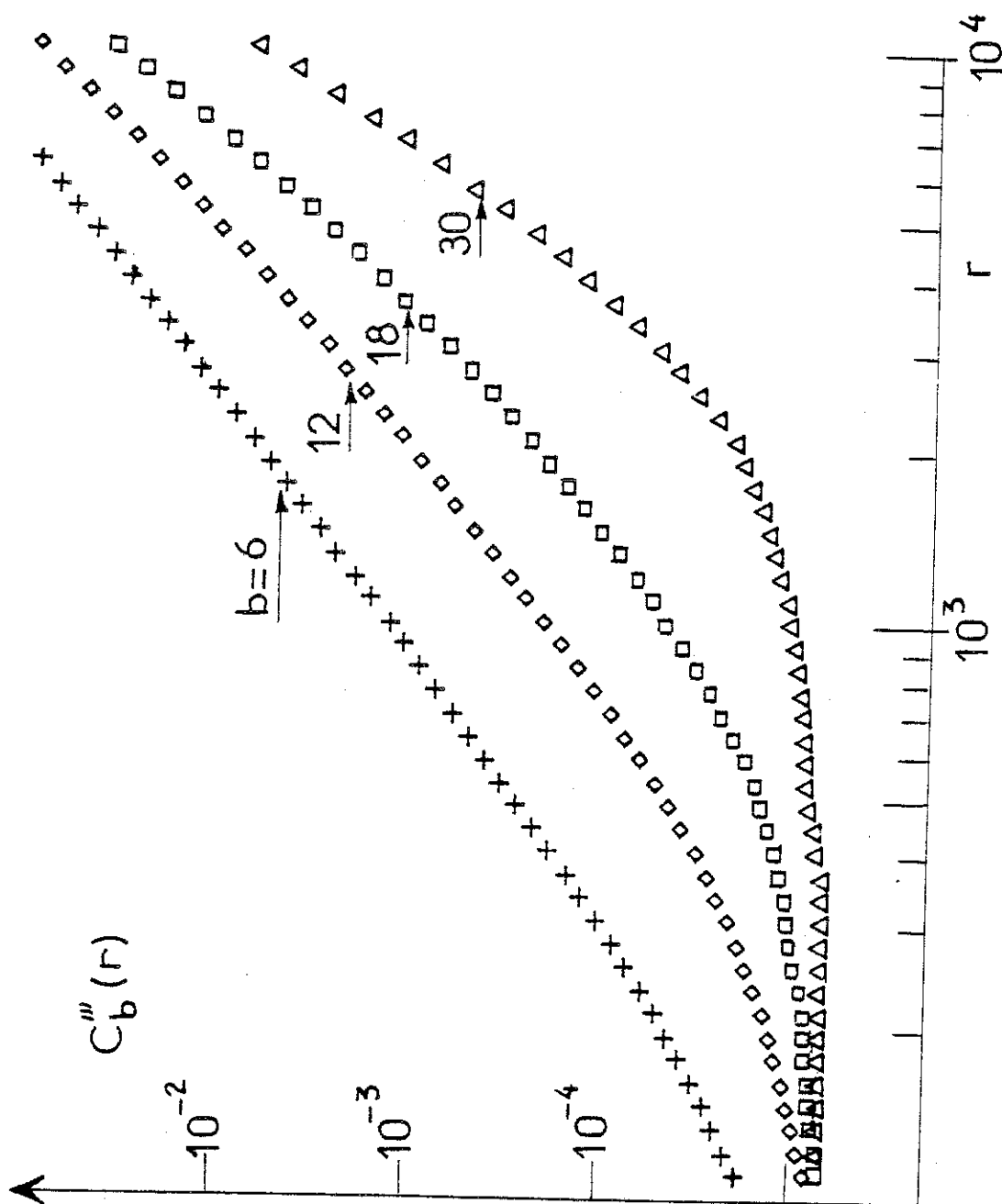


Figure 38

Courbes $\log C_b'''(r)$ en fonction de $\log r$ pour le système de Lorenz.
 ($N = 15 \cdot 10^4$, $m = 400$, $\Delta t = 0.25$, $p = 1$)

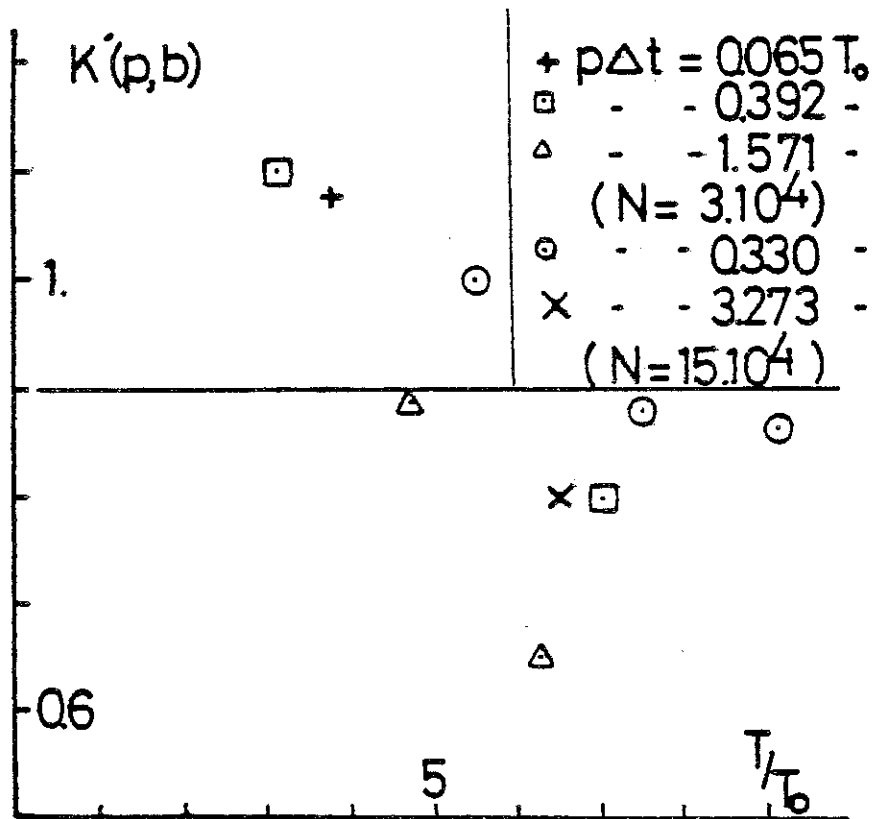


Figure 39

Courbe $K'(p,b)$ en fonction de T/T_0 ne présentant pas de saturation.

Les seuls calculs de K qui ont clairement* abouti [69] concernent des systèmes où la dimension est très faible ($D \leq 2$). Il a tout de même été nécessaire d'augmenter le nombre de points jusqu'à $N = 5.10^5$ ou même 10^6 ; ceci semble impraticable du point de vue expérimental pour un système comme une expérience de convection thermique où les temps caractéristiques sont grands par rapport au 10ème de seconde.

E - PREMIERES LIMITATIONS DE LA METHODE

VARIATIONS DE n ET p

E.1 LES PETITES VALEURS DE n ET p

Réexaminons la figure 29 qui montre des courbes $C(r)$ pour le système de Lorenz pour un décalage $p (= 1)$ et une période d'échantillonnage $\Delta t (= 0.02 \simeq T_0/37)$ faibles. Pour $n = 15$, on observe une sous-estimation de la pente par rapport à cette valeur. Ceci montre que même lorsque l'on respecte la borne théorique ($n \geq 2D + 1$) établie par Takens [42], il se pose des problèmes pratiques lorsque l'on travaille avec une résolution finie. Pour une reconstruction donnée de l'attracteur, il sera peut-être nécessaire d'explorer de très petites échelles en r afin de mettre en évidence une zone de comportement self-similaire. Dans ce cas particulier, le temps décalage $p \times \Delta t = 0.02$ et la dimension n sont petits de telle sorte que le nuage de points peut se trouver étiré suivant la diagonale. Ceci aura pour effet de sous-estimer la dimension (chapitre V).

E.2 GRANDES VALEURS DE n ET p

"Le problème et l'explication" [75]. Lorsque l'on augmente n ou p pour atteindre de très grandes valeurs comme sur la figure 40, pour laquelle $\tau = 1$ ($p = 20$ et $\Delta t = 0.05$) les courbes $C(r)$ semblent conserver un comportement en loi de puissance dans une certaine plage de r .

* La convergence dont fait état Termonia dans [52], n'a pas été vérifiée sur une grande plage de T/T_0 .

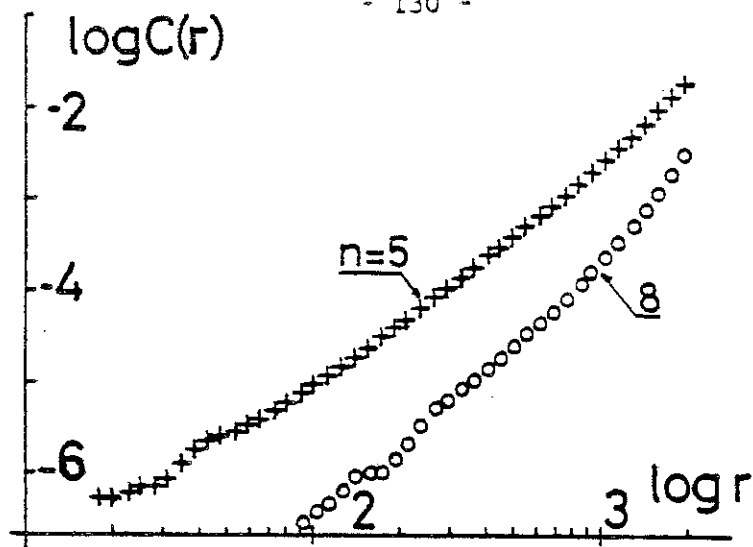


Figure 40

Variable $Z(t)$ du système de Lorenz

Courbe $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour un temps-décalage très grand ($\Delta t = 0.05 (T_0/15)$, $p = 20$) pour $n = 5$ et 8 . (Les autres paramètres sont les mêmes que pour la figure 29).

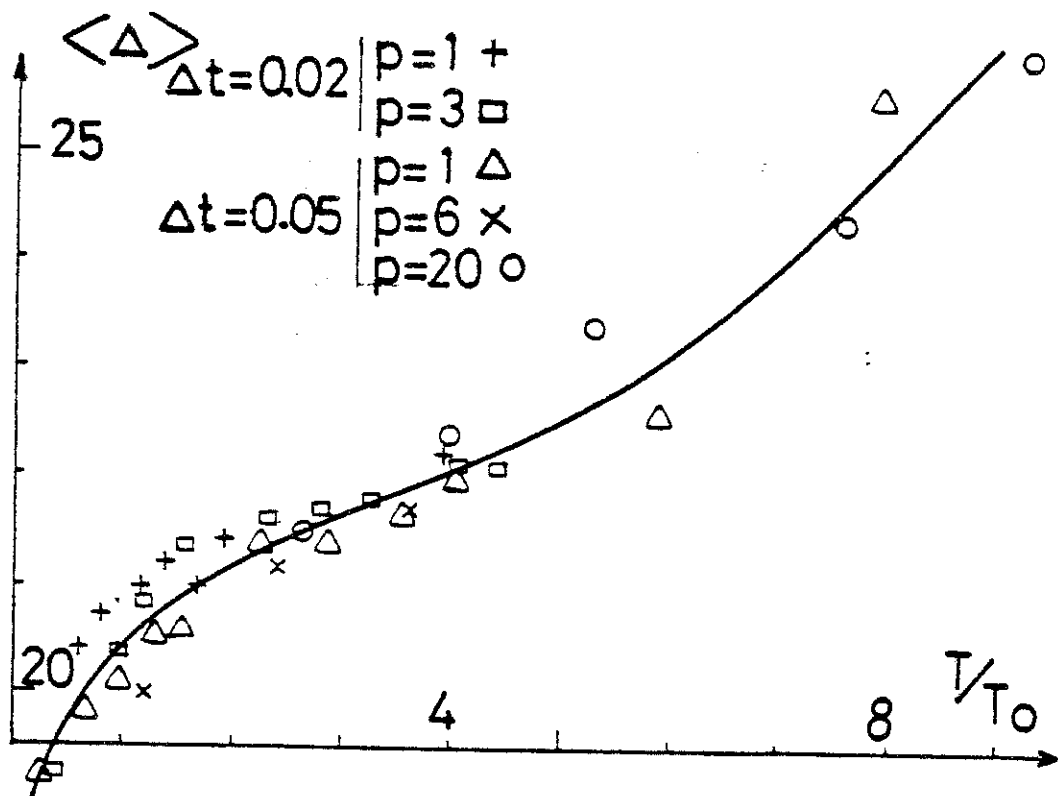


Figure 41

Variable $Z(t)$ du système de Lorenz

Courbe universelle $\langle \Delta \rangle$ en fonction de $T (= (n-1)p \Delta t) / T_0$ pour différentes valeurs de n , p et Δt .

Mais le calcul de la pente révèle une valeur de 2.3 pour $10^2 \ll r \ll 10^3$. Lorsque l'on augmente la dimension d'espace des phases à $n = 8$, on trouve une pente moyenne de 2.6 pour la même plage de r ; de plus on observe une courbure de $C(r)$ pour les grandes valeurs de r . Pour $n = 5$, $C(r)$ présente aussi une courbure, cependant celle-ci est plus difficile à détecter si on n'analyse pas la pente locale. Cette courbure entraîne une augmentation apparente de la pente de la courbe $C(r)$ pour une plage de r fixée ($10^2 \ll r \ll 10^3$). L'exposant apparent ne dépend alors que de la longueur totale de signal utilisée pour reconstituer un vecteur de R^n : $T = (n-1)p\Delta t$. La figure 41 montre une telle courbe $\langle \Delta \rangle(T/T_0)$ pour le système de Lorenz (T_0 est la pseudopériode).

L'action de cet effet de courbure de $C(r)$ entraînant le rejet vers les très basses valeurs de r de la zone de variation en loi de puissance est apparu très clairement lorsque nous avons augmenté la résolution $N \times m$ de l'un des calculs présentés sur la figure 40 ($N = 3.10^4$, $m = 2.5.10^4$, $n = 5$, $p = 20$, $\Delta t = 0.05$ ($T \sim 5 T_0$)). La pente locale pour la courbe $C(r)$ a été portée sur la figure 42. Elle présente une décroissance monotone pour $10^2 \ll r \ll 10^3$ -ce qui révèle une courbure là où nous avions supposé que le comportement était linéaire-. Ensuite, on observe une sorte de plateau 2.09 ± 0.04 pour $60 \ll r \ll 120$ qui se trouve ensuite noyé par des fluctuations statistiques. Il est clair que pour cette plage de r , on peut parler de comportement en loi de puissance pour $C(r)$ et que la valeur de l'exposant est consistante avec les estimations précédentes. Afin de comprendre la genèse de cette effet, considérons un réseau de courbes $C(r)$ à $p\Delta t$ fixe et pour des valeurs de n croissantes, telles qu'elles ont été calculées par Grassberger et Procaccia pour le système de Hénon [71] (figure 43). Lorsque l'on augmente n -en supposant que nous avons atteint le régime asymptotique (47)- de une unité les valeurs $\log C(r)$ se décaleront d'une quantité $-K_2 \frac{1}{n}$ dans la zone de comportement en $r^{\frac{1}{n}}$. C'est pourquoi dans cette région, les courbes $C(r)$ pour des valeurs de n croissantes sont parallèles (voir les droites tracées sur la figure 43) et décalées d'une quantité constante dans le graphe en log-log. Pour des valeurs de r qui se rapprochent du diamètre de l'attracteur, toutes les courbes $C(r)$ tendent vers la valeur 1 et l'atteignent pour le même r puisque nous utilisons la norme du maximum.

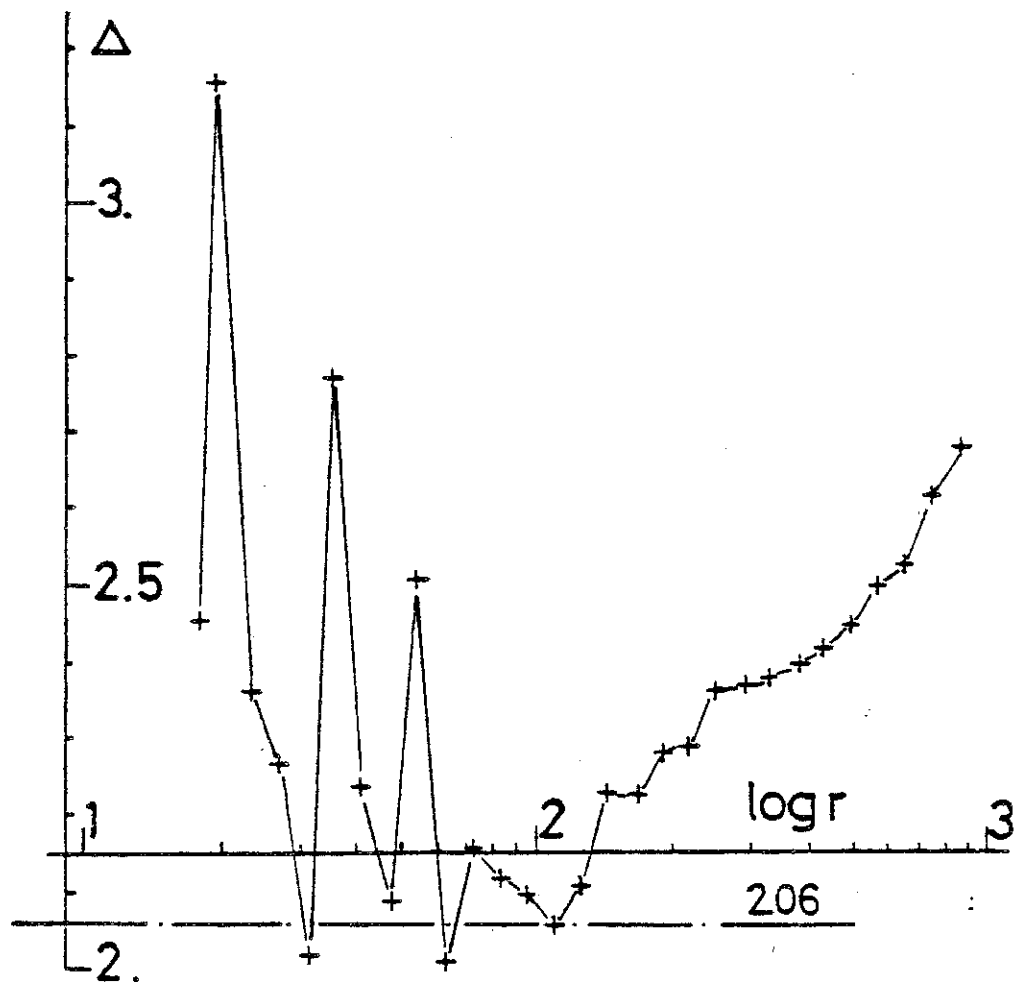


Figure 42

Pente locale Δ en fonction de $\log r$ pour la courbe $C(r)$ calculée pour la variable z du système de Lorenz pour $n = 5$ comme pour la figure 32 mais avec $m = 2.5 \cdot 10^4$.

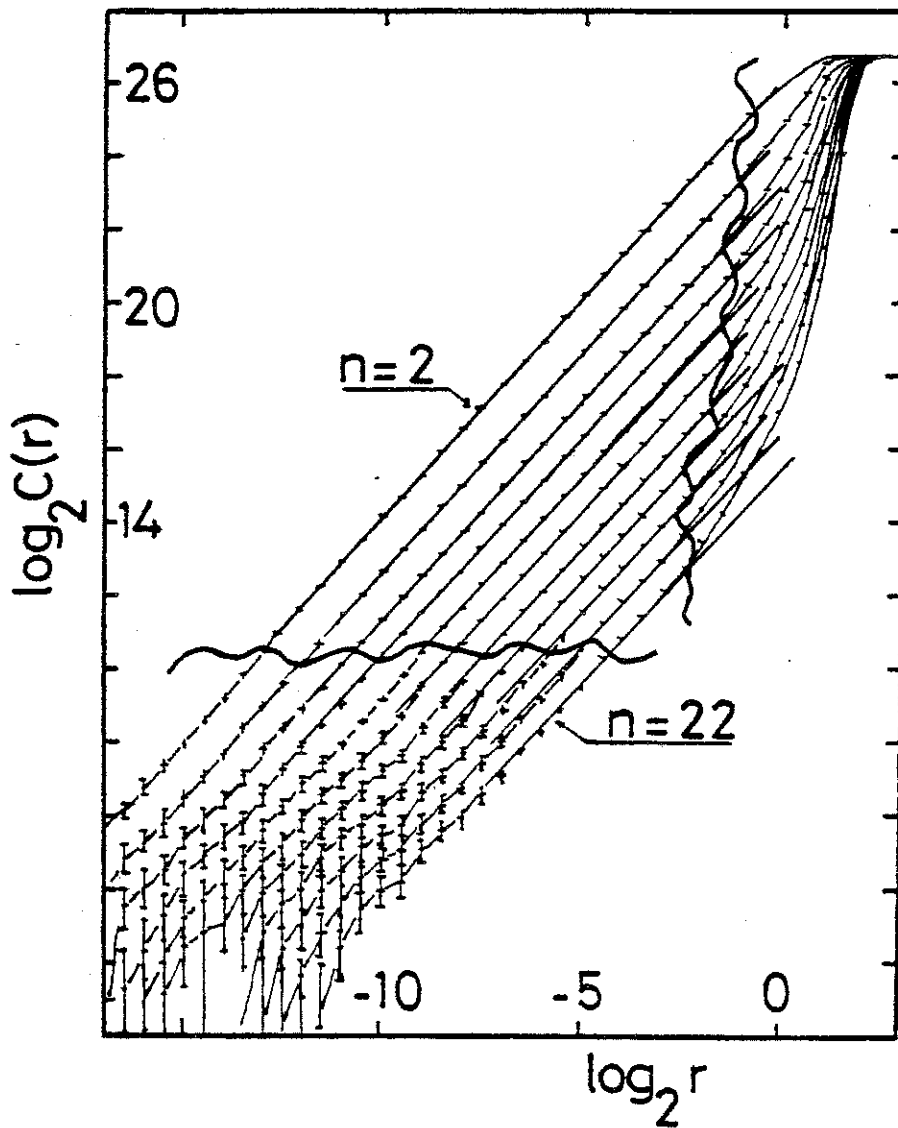


Figure 43

Réseau de courbes $\log_2 C(r)$ en fonction de $\log_2 r$ pour le système de Hénon pour $n = 2, 4, \dots, 22$ calculées en utilisant la norme euclidienne ($\Delta t = 1$, $p = 1$, $N = m = 15 \cdot 10^3$) d'après [71]. Nous avons indiqué les limites de la zone de comportement en loi de puissance qui est accessible.

Ainsi pour les grandes valeurs de r , $C(r)$ croîtra d'autant plus vite que n sera important. Il est donc illusoire de vouloir déduire la dimension D de l'attracteur de la pente Δ évaluée dans cette plage de r .

Cet effet introduit une première limitation en fixant la zone où r est inférieur à r_0 qui est intéressante pour le comportement en loi de puissance de $C(r)$. Le fait que le nombre de points N et le nombre d'origines m soit fini fixe les valeurs de $C(r)$ qui peuvent être calculées. Dans ce cas particulier, $N \times m = N^2 \simeq 2.2 \cdot 10^8$, on aura donc accès à une plage $C_0 = \frac{90}{N \times m} \leq C(r) \leq 1$ avec $q_0 \sim 100$ à 300 d'après des observations expérimentales.

Les deux effets mis en évidence délimitent un quadrant dans le plan $(r, C(r))$ dans lequel nous pourrions extraire de l'information du système. Pour un attracteur de dimension D_2 et d'entropie K_2 données, "reconstitué" avec un temps-décalage $p \Delta t = 2$ et pour une résolution $N \times m$, fixés il y aura une plage limitée de valeurs de n pour lesquelles on aura accès à D_2 et K_2 .

Remarque : Dans les deux cas considérés par Grassberger et Procaccia [71] de tels problèmes ne se posaient pas en dépit d'une résolution moyenne ($N = m \simeq 1.2 \cdot 10^4$).

Les deux systèmes qui ont été étudiés sont celui de Hénon et le système à temps de retard de Mackey-Glass (référence dans [52]). Le premier système est de dimension relativement faible ($D \simeq 1.2$). Une décade en r correspond à une décade en $C(r)$. Une diminution de $C(r)$ due à l'entropie n'entraîne pas une diminution notable des échelles en r . Ceci permet une exploration de $C(r)$ de $n = 2$ à 22 et suffit pour la convergence de K_2 . Dans le deuxième cas, la dimension est plus importante ($D \simeq 2.4$) mais l'entropie est très faible ($K_2 \simeq 8 \cdot 10^{-3}$). Ainsi les courbes $C(r)$ se décalent relativement peu lorsque n augmente. On peut alors explorer une gamme large de valeurs de n (4 - 28). Toutefois les calculs n'ont pas été faits jusqu'à la valeur $T = (n-1)p \Delta t$ qui permet la convergence ; l'estimation de K_2 a été faite par extrapolation.

Le calcul effectué sur le système de Lorenz, que nous avons évoqué plus haut, montre que même pour un temps de décalage correspondant au temps caractéristique de l'entropie ($1/K$), on peut obtenir une zone de "scaling" et retrouver la valeur correcte pour D . Tout ce qui est nécessaire est d'augmenter la résolution $N \times m$ de façon à atteindre des plages de r en deçà de r_0 . Les figures 41 et 42 suggèrent que pour $r \leq 10^2$, nous allons observer un plateau $\langle \Delta_i \rangle = D_2$ et qu'un écart à ce comportement se produira pour une valeur donnée de T/T_0^* . Ceci semble montrer que la valeur limite r_0 de la zone de "scaling" dépend seulement de T . On peut expliquer la remontée non linéaire de $\log C(r)$ $\log r$ pour $r \gg r_0$ par le fait que lorsque T devient grand, la projection de l'attracteur dans l'espace R^n sera de plus en plus étirée, courbée et plaquée contre les bords de l'hypercube R^n comme le montre la figure 44 représentant un plan de phase $(z(t), z(t-\tau))$ du système de Lorenz pour des valeurs croissantes de T .

A la suite de cela, les différents $C_i(r)$ varieront plus que linéairement pour se saturer lorsque r sera de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Ceci n'est pas en contradiction avec le petit raisonnement phénoménologique du paragraphe B.3. A très petite échelle $r \leq r_0$, la structure fractale de l'attracteur est encore "visible". Au contraire pour des valeurs de r plus grandes, celui-ci aura été tellement étiré, courbé et "plaqué" contre les bords de l'hypercube $[0, 32767]^n$ que l'on ne pourra plus distinguer sa structure avec la résolution ($N \times m$) finie que l'on a. A la limite, la projection semblera remplir de façon

* Intuitivement, on peut comprendre pourquoi c'est T qui fixe l'échelle des distances d_{ij} . Soient deux vecteurs de R^n \vec{X}_i, \vec{X}_j (construits bien entendu par décalages). La distance d_{ij} sera

$$0 \leq \sup_{1 \leq n-1} |X(i - lp\Delta t) - X(j - lp\Delta t)|$$

Soit maintenant k l'indice correspondant au terme d'écart minimum :

$$|X(i - kp\Delta t) - X(j - kp\Delta t)| \leq |X(i - lp\Delta t) - X(j - lp\Delta t)|$$

$$1 \in [0, n-1]$$

Plaçons nous en $t = kp\Delta t$; lorsque nous suivons la trajectoire pour les t croissants ou décroissants l'écart augmentera. Pour des faibles valeurs de celui-ci, c'est T qui gouvernera sa croissance (divergence de trajectoires proches). Au-delà la situation est beaucoup plus compliquée, on peut même avoir des courbes $C_T(r)$ et $C_{T'}(r)$ telles que $C_T > C_{T'}$, dans une certaine plage de r et $T > T'$.

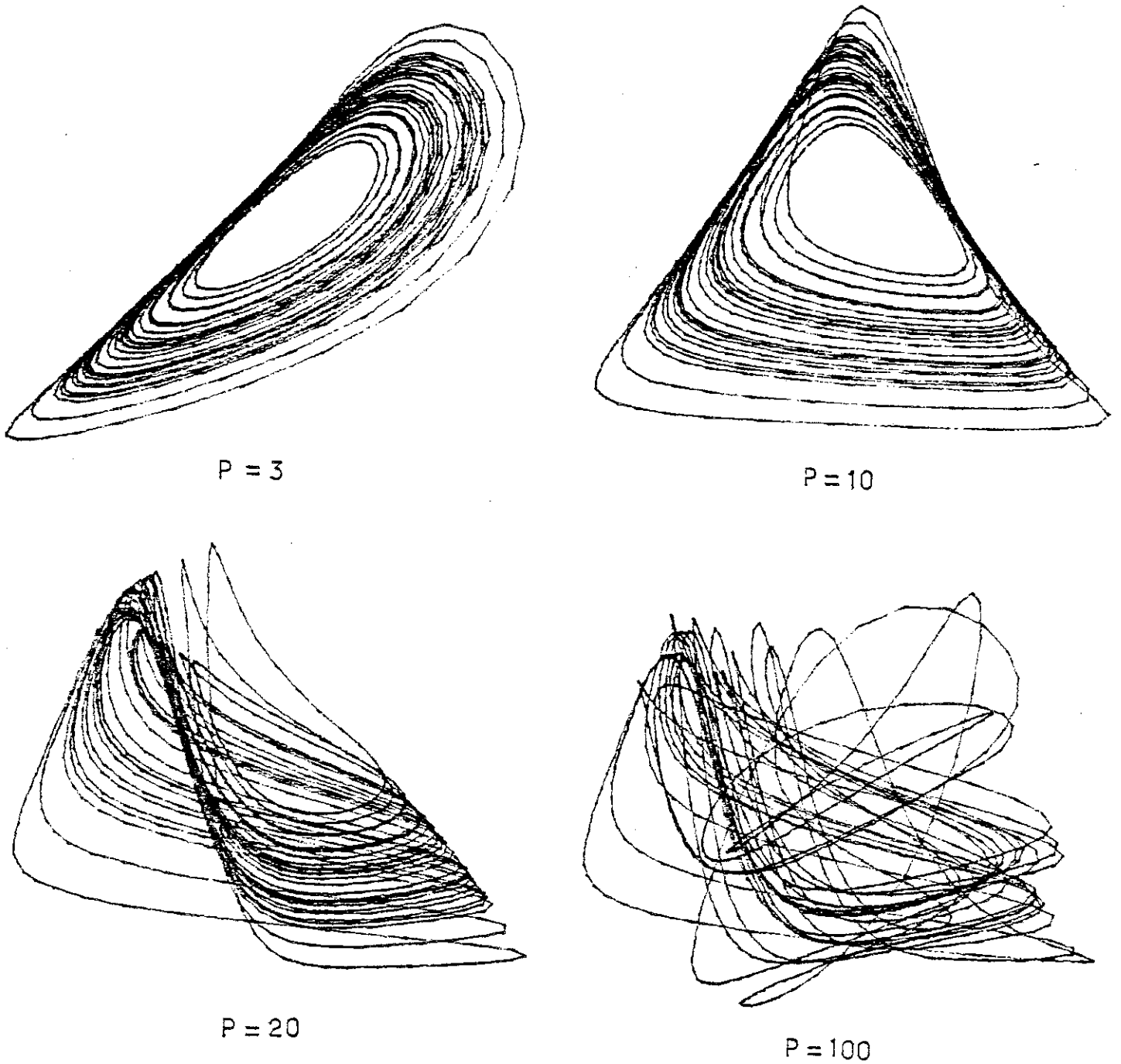


Figure 44

Evolution du portrait de phase $(z(t-\tau), z(t))$ pour le système de Lorenz pour différentes valeurs du décalage $p = \tau / \Delta t$ ($N = 10^3$, $\Delta t = 0.02$, pas d'intégration 0.01).

dense une partie de l'hypercube de R^n . La figure 45 montre une série de courbes $C(r)$ pour la variable z du système de Lorenz pour une très grande valeur du temps décalage $p\Delta t$ ($= 40 \times 0.25 = 10$) pour trois valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 3, 4, 5$. Les courbes $C(r)$ se comportent sur la plage de r considérée comme r^n . Nous retrouvons ici les résultats du bruit blanc ; c'est en échantillonnant un signal chaotique déterministe avec une période très longue que l'on génère les suites aléatoires utilisées comme modèles de bruits blancs.

E.3 VALEURS DE n et $p\Delta t$ PERMISES EN PRATIQUE

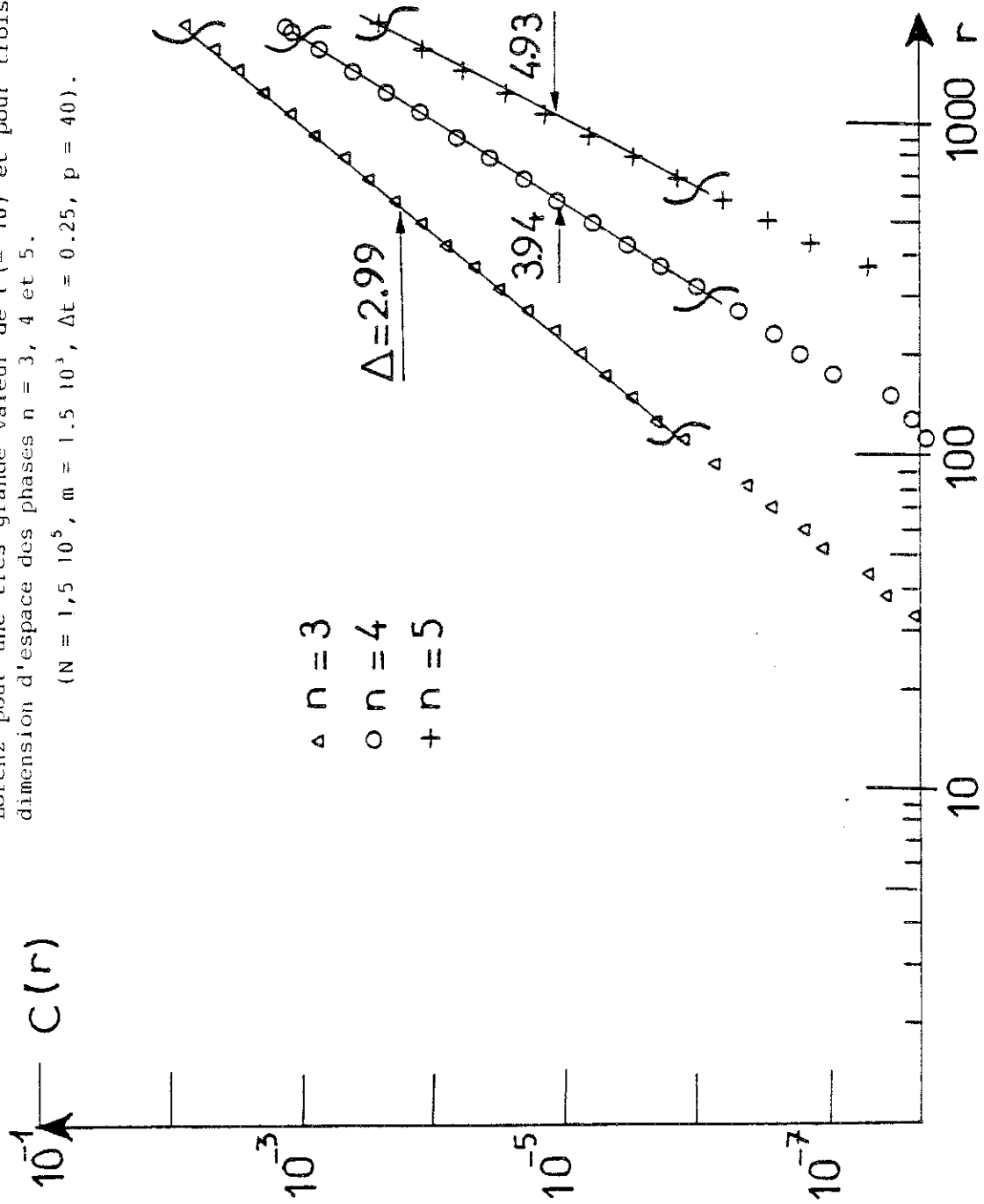
Grâce au calcul de D_2 , nous avons un critère objectif qui nous permet de fixer quelles doivent être les valeurs permises pour n et τ ($= p\Delta t$). En théorie [43], toutes les valeurs de n et τ sont permises ; dans la mesure où la trajectoire est une "vraie" trajectoire du système. Pour un signal intégré numériquement, cette condition est réalisée si le système est hyperbolique, ce qui est le cas pour le système de Lorenz et pour les valeurs des paramètres que nous avons considéré, comme l'ont montré numériquement Sinai et Vul [22].

En effet, pour un tel système, on a le lemme suivant : $\varepsilon > 0$ étant un réel donné, il existe un δ tel que toute ε pseudo-trajectoire ((X'_n) est dite ε pseudo-trajectoire associée à une transformation T si $\|TX'_n - X'_{n+1}\| \leq \varepsilon$) est pistée à δ près par une vraie trajectoire de T ("shadow lemma"), (voir par exemple O. Lanford cours des Houches 1981). Lorsque l'on intègre numériquement le système de Lorenz, il suffit de prendre ε (l'erreur commise à chaque pas d'intégration) suffisamment petit pour que la trajectoire intégrée soit à δ près d'une "vraie" trajectoire du système. Tout se passe alors comme si le signal était "contaminé" par un bruit d'intensité δ . Pour un signal expérimental, nous ne considérerons que le cas d'un bruit venant se superposer au signal (voir la discussion du chapitre III).

Figure 45

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le système de Lorenz pour une très grande valeur de $\tau (= 10)$ et pour trois valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 3, 4$ et 5 .

($N = 1,5 \cdot 10^5$, $m = 1,5 \cdot 10^3$, $\Delta t = 0,25$, $p = 40$).



Ainsi, dans la pratique, un signal sera toujours bruité à une certaine échelle δ qui fixera la valeur de r en deça de laquelle on ne pourra obtenir d'information sur le système. Pour de très grandes valeurs du temps-décalage τ et de la dimension n , r_0 sera très petit et pourra atteindre δ . Pour de telles valeurs de T , nous ne pourrons pas extraire D_z ou K_2 des données car la structure (fractale) aura été effacée par le bruit.

**CHAPITRE V : LES ATTRACTEURS A HAUTE OU MOYENNE DIMENSION ET
UNE APPROCHE DES PROBLEMES DE TURBULENCE SPATIO-TEMPORELLE**

A - INTRODUCTION

Dans le chapitre IV, nous avons vu que l'on peut déterminer D_2 et K_2 pour un système à faible dimension (~ 2 ou 3) et à faible entropie ($K_2 T_0 \ll 1$). Peut-on espérer faire la même chose pour des systèmes à moyenne ou haute dimension (~ 10 ou plus) comme cela semble être le cas pour le régime de convection électrohydrodynamique analysé au chapitre IV ? Nous allons voir qu'il est possible de caractériser sans ambiguïtés un attracteur de dimension 6, sous réserve d'un bon choix de la fréquence d'échantillonnage. En utilisant les conclusions de cette analyse, nous avons étudié les solutions de l'équation aux dérivées partielles de Kuramoto-Sivashinski et abordé ainsi les problèmes de turbulence spatio-temporelle. Nous concluons par une discussion sur les possibilités de la méthode.

B - PARTICULARITES DES COURBES $C(r)$

Le principe de projection de l'attracteur dans R^n et de mesure de dimension tel qu'il a été proposé par Grassberger et Procaccia et les applications qu'ils en ont fait sur des systèmes modèles semblaient indiquer que toutes les courbes $C(r)$ varient en r^D où D est bien défini sur une certaine plage de r . Les calculs effectués dans le chapitre IV sur le système de Lorenz indiquent que ceci n'est absolument pas le cas général. Il y a des courbures systématiques qui peuvent être des causes d'erreur ; on peut trouver une loi reliant la pente moyenne $\langle \Delta \rangle$ sur une certaine plage de valeurs de r au paramètre $T = (n-1)p\Delta t$.

Pour d'autres systèmes que nous avons analysé, la situation est différente. On observe ainsi que la partie linéaire (en coordonnées log-log) de la courbe $C(r)$ varie en fonction de p dans le cas du signal provenant de l'expérience de convection E.H.D. (début du chapitre IV).

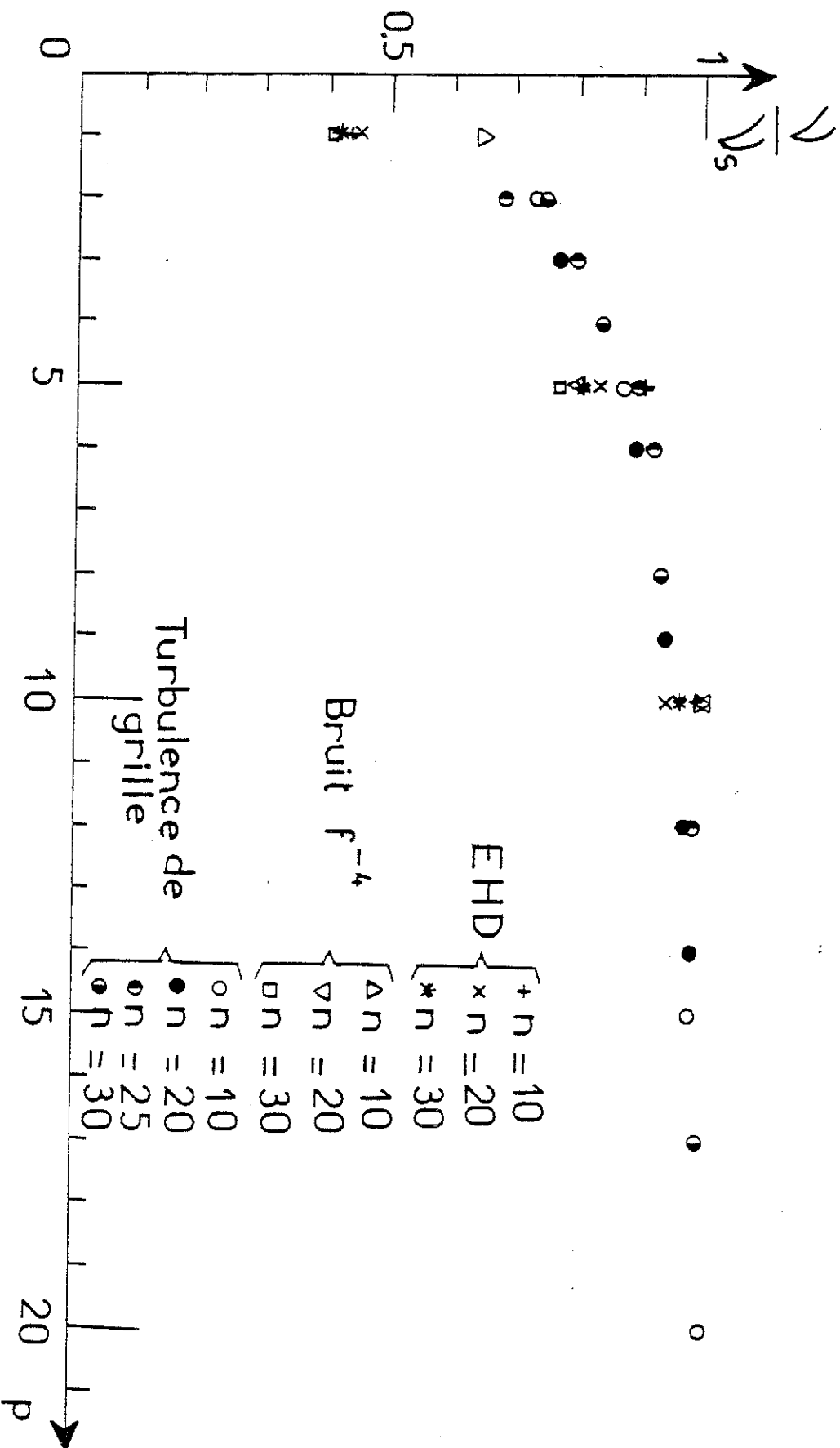
La saturation $\gamma = \gamma_s < n$ que l'on observe dans ce cas pour l'E.H.D. lorsque l'on fixe la dimension de l'espace des phases et que l'on fait varier le temps-décalage $\tau (= p \Delta t)$ se retrouve pour d'autres signaux pour lesquels on sait qu'ils sont engendrés par une dynamique à très grand nombre de degré de liberté. Le premier est un signal de turbulence de grille analysé par Yves Gagne de l'Institut de Mécanique de Grenoble [64]. Bien que le taux de turbulence ne soit pas très élevé ($\sim 2\%$), celle-ci est dans une bonne approximation homogène et isotrope. De plus, la plage des différentes tailles de tourbillons s'étale sur presque une décade. On peut alors supposer que ce système possède un très grand nombre de degrés de liberté. Quant au deuxième signal, il s'agit d'un modèle numérique obtenu en filtrant passe-bas un bruit blanc ; on obtient pour ce système un spectre de Fourier qui est plat jusqu'à une certaine fréquence puis présente une décroissance en f^{-4} . Ces trois signaux comportent chacun un temps caractéristique T_0 . Il est défini par le maximum d'énergie du spectre de Fourier pour l'E.H.D. et comme un temps de retour moyen pour les autres systèmes. La période d'échantillonnage a été choisie de telle sorte qu'il y ait environ 30 points par temps T_0 (sauf pour la turbulence de grille pour laquelle $\Delta t \simeq T_0/100$). Les courbes $C(r)$ ne présentent pas une zone de variation en loi de puissance bien définie ; néanmoins il existe un intervalle en $(\log r, \log C(r))$ où l'allure peut être considérée comme linéaire dans une première approximation. Nous étudierons l'exposant γ dans cette région. La figure 46 montre γ / γ_s en fonction du décalage p pour les trois systèmes : la variation semble universelle. La valeur γ_s croît avec n tout en restant inférieure à ce que donne le bruit blanc dans la même plage de $C(r)$ [65]. Ceci n'est pas étonnant car lorsque Δt augmente, les coordonnées $X(t)$ du vecteur $\vec{X}(t)$ de R^n vont se décorrélérer progressivement. Pour l'échelle en r que l'on observe, le point $\vec{X}(t)$ remplira de plus en plus R^n ; les points $\vec{X}(t), \vec{X}(t \pm \Delta t), \dots, \vec{X}(t \pm k \Delta t) \dots$ resteront corrélés et c'est ce qui fait que γ_s est inférieure à la valeur pour le bruit blanc.

Pour le système de Lorenz comme nous l'avons vu au chapitre IV, il y a une limitation pratique pour les valeurs du temps-décalage τ . Lorsque celui-ci devient trop grand (figure 37 ; $p \Delta t = 40 \times 0,25 = 10$) les courbes $C(r)$ présentent des lois de variation en r^γ où γ est très bien défini et très proche de n (du moins pour les valeurs considérées $n < 5$, au delà on aurait $\gamma < n$ à cause des effets de bord du chapitre III).

Figure 46

Courbe V/V_s en fonction du décalage p pour :

- un régime de convection électrohydrodynamique (E.H.D.)
- un signal de turbulence de grille
- un bruit en f^{-4}



Ainsi le comportement universel de la pente moyenne $\langle \Delta \rangle$ en fonction de T cède le pas à une dépendance $\sqrt{\nu} = n$ (pour $n \leq 5$) (proche de celle que nous avons observé pour l'E.H.D.) lorsque z devient très grand. A cette échelle on ne "sait" plus que ce système a une dimension faible. Encore une fois, ces observations dépendent de l'échelle en r que l'on observe. Dans l'hypothèse (toute théorique) d'une très grande résolution, si on explorait des valeurs de r très petites on retrouverait la valeur $\sqrt{\nu} = D_2$ (≈ 2.06).

Enfin, il est important de noter que tous les systèmes déterministes que nous avons étudiés présentent cette loi de variation de la pente dans une région donnée en fonction du seul paramètre $T = (n-1)p \Delta t$. Ceci pourrait peut-être conduire à une méthode de caractérisation dans le cas où la partie en loi de puissance des courbes $C(r)$ est inaccessible par manque de résolution.

C - LES PROBLEMES ASSOCIES A LA FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des valeurs de $\log r$ et $\log C(r)$ relativement grandes car c'est là que se trouvait la partie approximativement linéaire des courbes. Examinons maintenant la globalité des courbes $C(r)$. La figure 47.a représente des courbes $C(r)$ pour des valeurs croissantes de n et p pour le signal E.H.D. ($\Delta t \approx T_0/30$ fixé). Lorsque n et p augmentent, celles-ci passent d'une allure concave (en coordonnées log-log) à une forme qui présente un point d'inflexion et une zone pour r petit où $C(r)$ varie approximativement comme r . Le même phénomène se produit lorsque n devient grand pour $p = 1$ (figure 47.b). Il semble donc que ce soit le paramètre T qui détermine l'allure des courbes. Cette "queue" de pente environ 1 a été d'abord mise en évidence sur les calculs liés au signal de turbulence de grille. Elle est due au fait que lorsque T augmente, la distance entre deux points quelconques de l'attracteur (projeté) va augmenter (en moyenne). Au contraire, la distance entre les points \vec{X}_{j+k} , k faible, et \vec{X}_j ne dépend que de Δt (en utilisant la norme du maximum) et elle ne variera donc pas avec T . Ainsi, pour une échelle r , on résoudra l'orbite associée à X_j , et $C(r)$ variera comme r . La plage de telles valeurs de r sera d'autant plus importante que la période d'échantillonnage Δt sera faible par rapport à T .

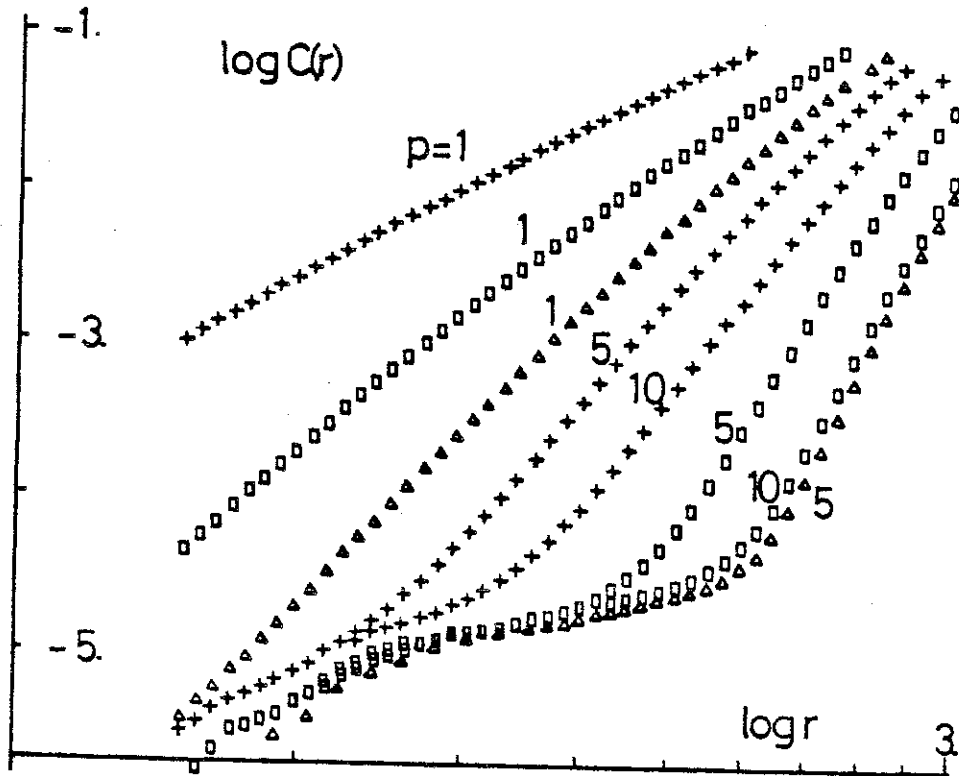


Figure 47 a

Courbe $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour le signal de convection électrohydrodynamique pour différentes valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 10$ (+), 20 (x), 30 (Δ) et pour différents décalages $p = 1, 5, 10$ ($N = 150 \cdot 10^3$, $m \approx 400$, $\Delta t \approx T_0/30$).

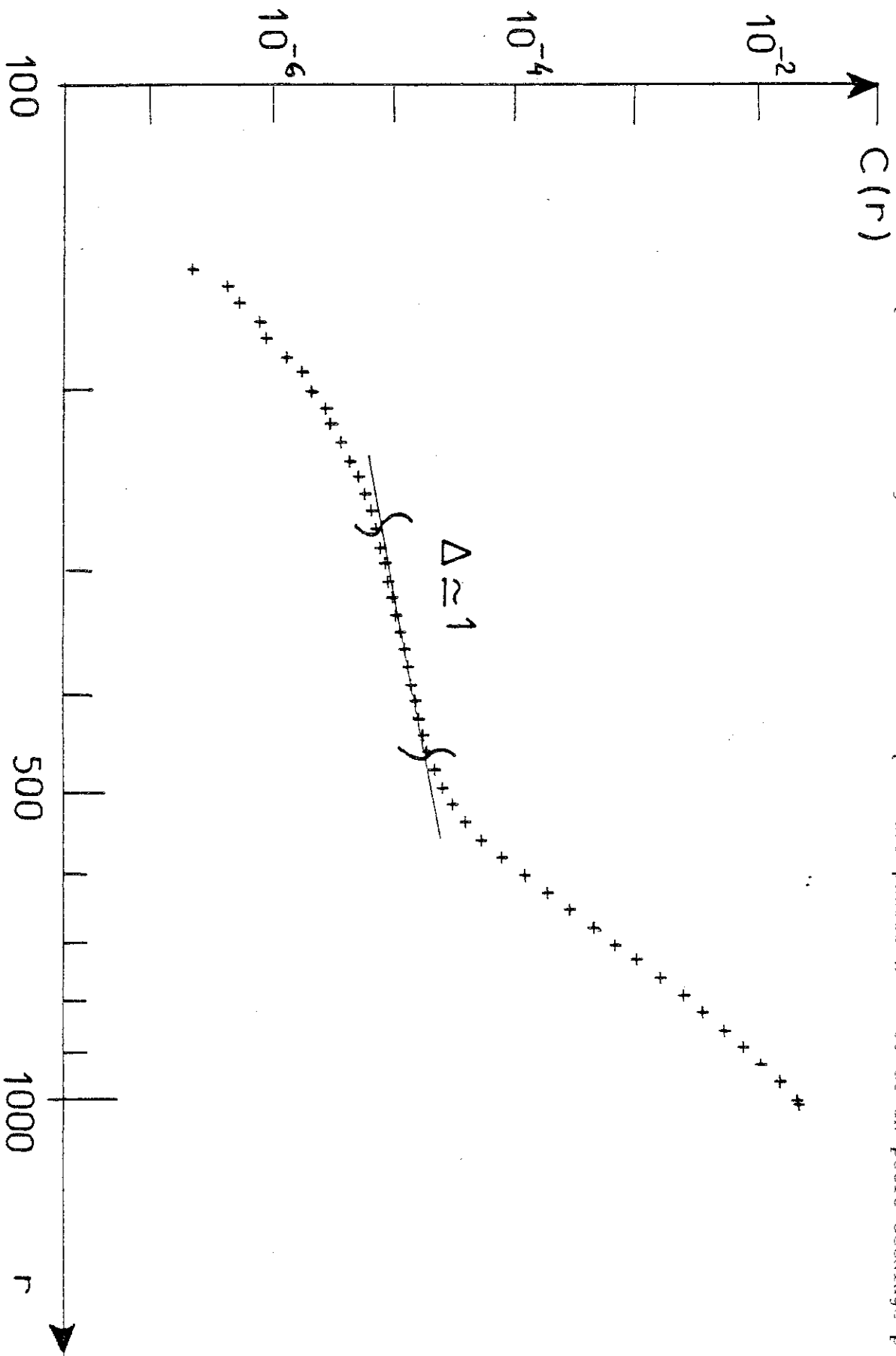


Figure 47.b

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour le signal de la figure 47 et pour une très grande dimension d'espace des phases $n = 100$ et un petit décalage $p = 1$.

La figure 48 montre deux séries de courbes pour le signal de turbulence de grille pour des fréquences d'échantillonnages de 2000 et 20000 Hz telles que T reste constant. La distance entre points consécutifs est divisée par 10 lorsque l'on passe de 2000 à 20000 Hz ; les courbes C(r) pour cette dernière fréquence présentent une zone de pente 1 pour les valeurs de r environ 10 fois plus faibles que celles pour 2000 Hz. Dans la gamme de r adéquate on trouve C(r) environ 10 fois plus élevé. Cette "queue" va réduire ou masquer la zone de "scaling" - c'est la raison pour laquelle il est souvent illusoire de vouloir approcher la dimension de l'attracteur en estimant une pente locale sur une telle courbe.

C.1 LE CAS D'UN SYSTEME DETERMINISTE DE MOYENNE DIMENSION

On pourrait croire que cette "queue" est liée au fait que le système analysé est à très haute dimension. En fait, il n'en est rien comme le montre l'étude qui va suivre.

Nous avons considéré le système différentiel non-linéaire d'ordre 7 de Franceschini [76] :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2 x_1 + 4 \sqrt{5} (x_2 x_3 + x_4 x_5) \\ \dot{x}_2 &= -9 x_2 + 3 \sqrt{5} (x_1 x_3 + x_6 x_7) \\ \dot{x}_3 &= -5 x_3 + 9 x_1 x_7 - 7 \sqrt{5} x_1 x_2 + R \\ \dot{x}_4 &= -5 x_4 - \sqrt{5} x_1 x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - 3 \sqrt{5} x_1 x_4 \\ \dot{x}_6 &= -8 x_6 - 4 \sqrt{5} x_2 x_7 \\ \dot{x}_7 &= -5 x_7 + \sqrt{5} x_2 x_6 - 9 x_1 x_3\end{aligned}$$

Ce système a été obtenu après avoir projeté les équations de Navier-Stokes à deux dimensions (avec des conditions aux limites périodiques et des conditions de forçage temporel périodique) sur une base de Fourier et en ne retenant que 7 modes.

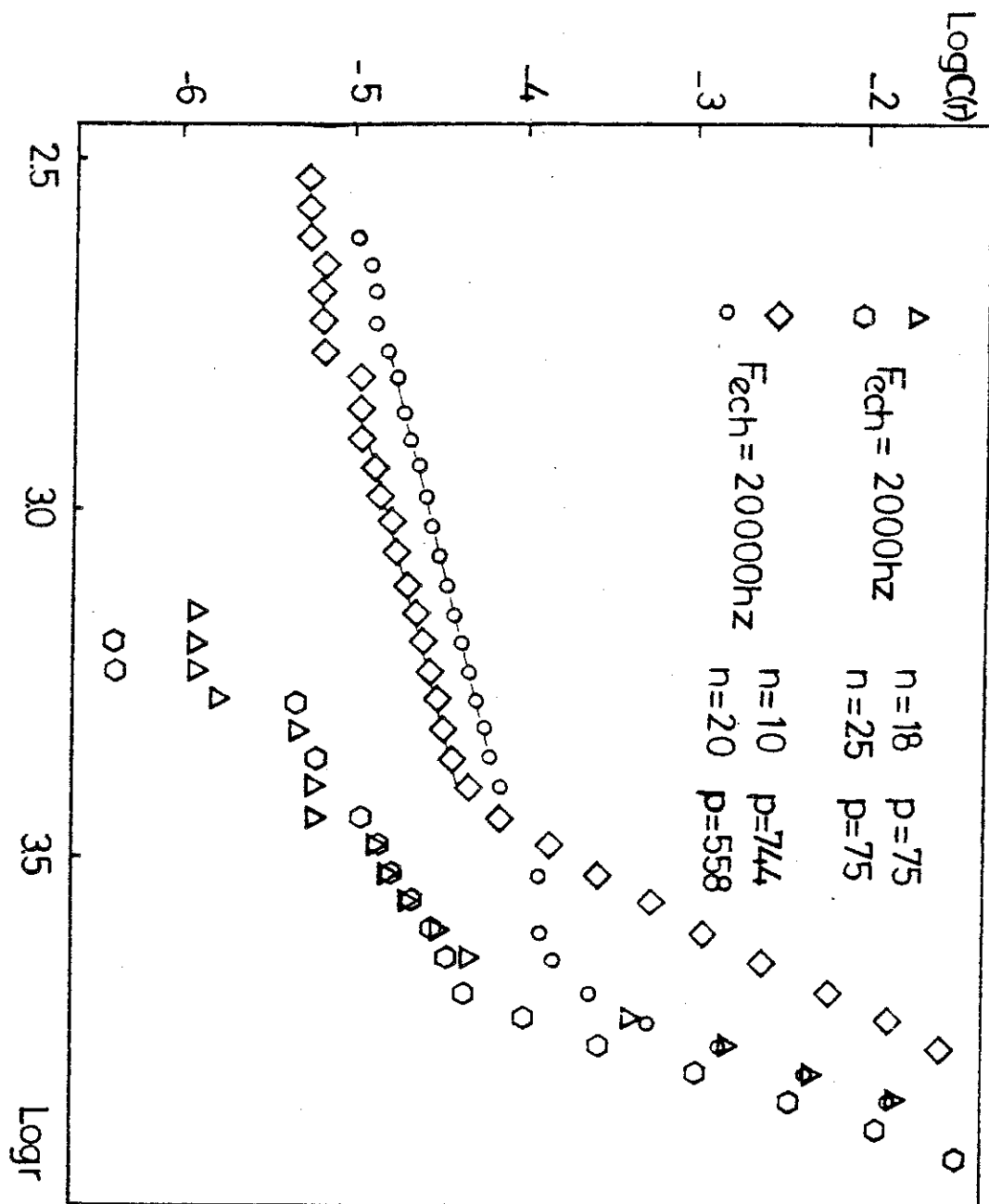


Figure 48

Variation de $C(r)$ dans la zone des petites valeurs de r (et donc de faibles valeurs de $C(r)$) pour la turbulence de grille, montrant l'effet de la fréquence d'échantillonnage. ($N = 250\,000$, $m \approx 400$).

Les exposants de Lyapunov pour ce système ont été calculés par Tavakol et Tworkovski [77] pour certaines valeurs du paramètre. En particulier pour $R = 4000$, la dimension de Kaplan-Yorke qu'ils obtiennent est de 6.2. En choisissant des conditions initiales de façon aléatoire (les conditions initiales n'étant pas précisées dans [77]), le système est toujours arrivé sur un point fixe. Nous l'avons alors intégré avec les conditions initiales de [77] pour $R = 326.25$ en incrémentant de manière continue (sauts de $R = 0.25$) le paramètre jusqu'à $R = 4000$. Nous avons alors vérifié que la région de l'espace des phases dans laquelle nous nous trouvions correspondait à celles des sections et projections de [77] et à partir de là on a admis que l'on était sur le même attracteur. Le signal que nous avons analysé est $x_3(t)$. Son spectre de Fourier est représenté sur la figure 49.

De façon attendue, il présente une décroissance quasi exponentielle. Le maximum d'énergie définit une échelle de temps caractéristique (temps de retour) T_0 .

Nous avons fait varier la période d'échantillonnage Δt dans de très larges gammes par rapport à T_0 . Lorsque Δt est faible, les courbes $C(r)$ présentent l'allure caractéristique décrite plus haut, avec une zone de pente faible pour les petites valeurs de r . Ainsi la figure 50 montre une courbe $C(r)$ avec une zone de pente 1 pour r faible pour une période d'échantillonnage très faible ($\Delta t \simeq T_0/140$). Pour un Δt plus grand, la "queue" est remplacée par un épaulement (figure 51) ; il suffirait d'augmenter T pour voir ce dernier se transformer en zone de pente 1 (figure 47.a).

La situation change lorsque l'on considère des périodes d'échantillonnage plus grandes. La figure 52 montre les courbes $C(r)$ pour un Δt de l'ordre de $T_0/5$ pour $p = 1$ et $n = 15$ à 60. Il n'y a plus de zone de pente 1 et il existe une région des courbes où la pente est indépendante de n (pour $n \gg 30$) et est de l'ordre de 6.0. Pour préciser cette valeur, nous avons porté le nombre d'échantillons à la valeur $N = 15 \cdot 10^4$. Pour $n = 30$ et 40, il y a une zone de "scaling" qui s'étend sur plus d'une 1/2 décade en r et l'exposant est d'environ 6.0 (figure 53).

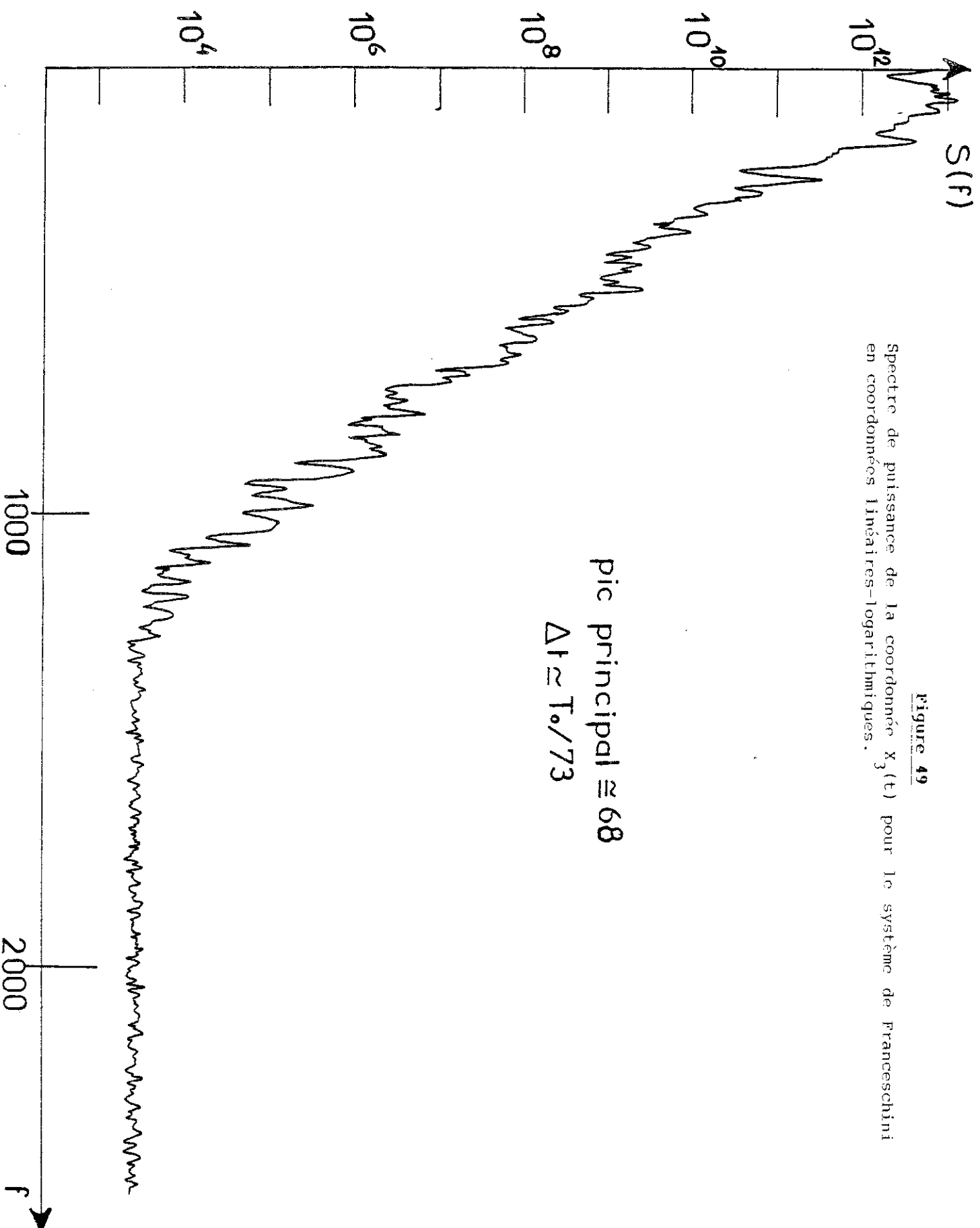


figure 49
Spectre de puissance de la coordonnée $X_3(t)$ pour le système de Franceschini en coordonnées linéaires-logarithmiques.

Figure 50

Courbe $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour le modèle de Franceschini ($R = 4000$) pour une valeur très faible de la période d'échantillonnage $\Delta t \approx T_0/140$.

($N = 5000$, $m = 100$, $n = 13$, $p = 7$) ..

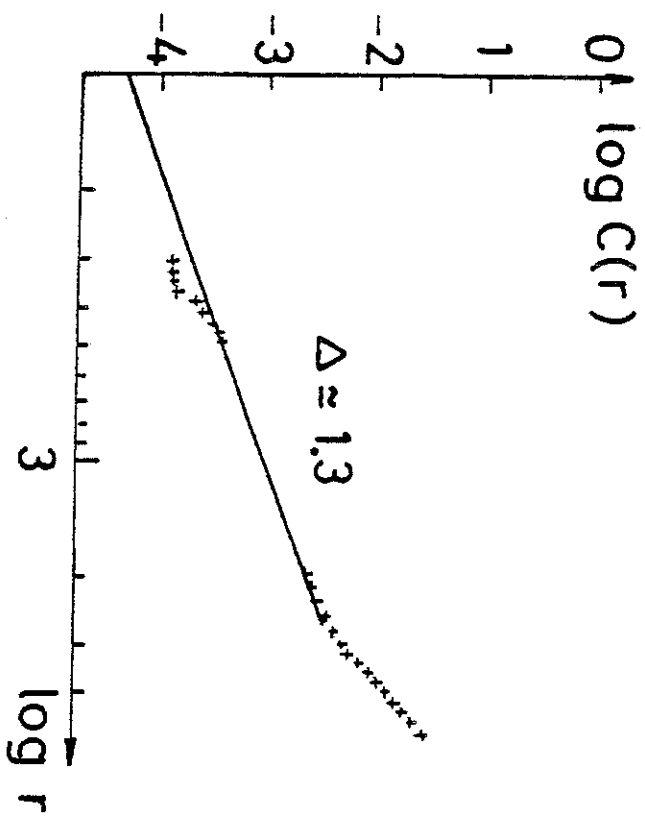


Figure 51

Courbe $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour le modèle de Franceschini (R = 4000) pour une valeur faible de la période d'échantillonnage $\Delta t \approx 10/29$.

(N = $3 \cdot 10^4$, m = 40, n = 15, p = 10)

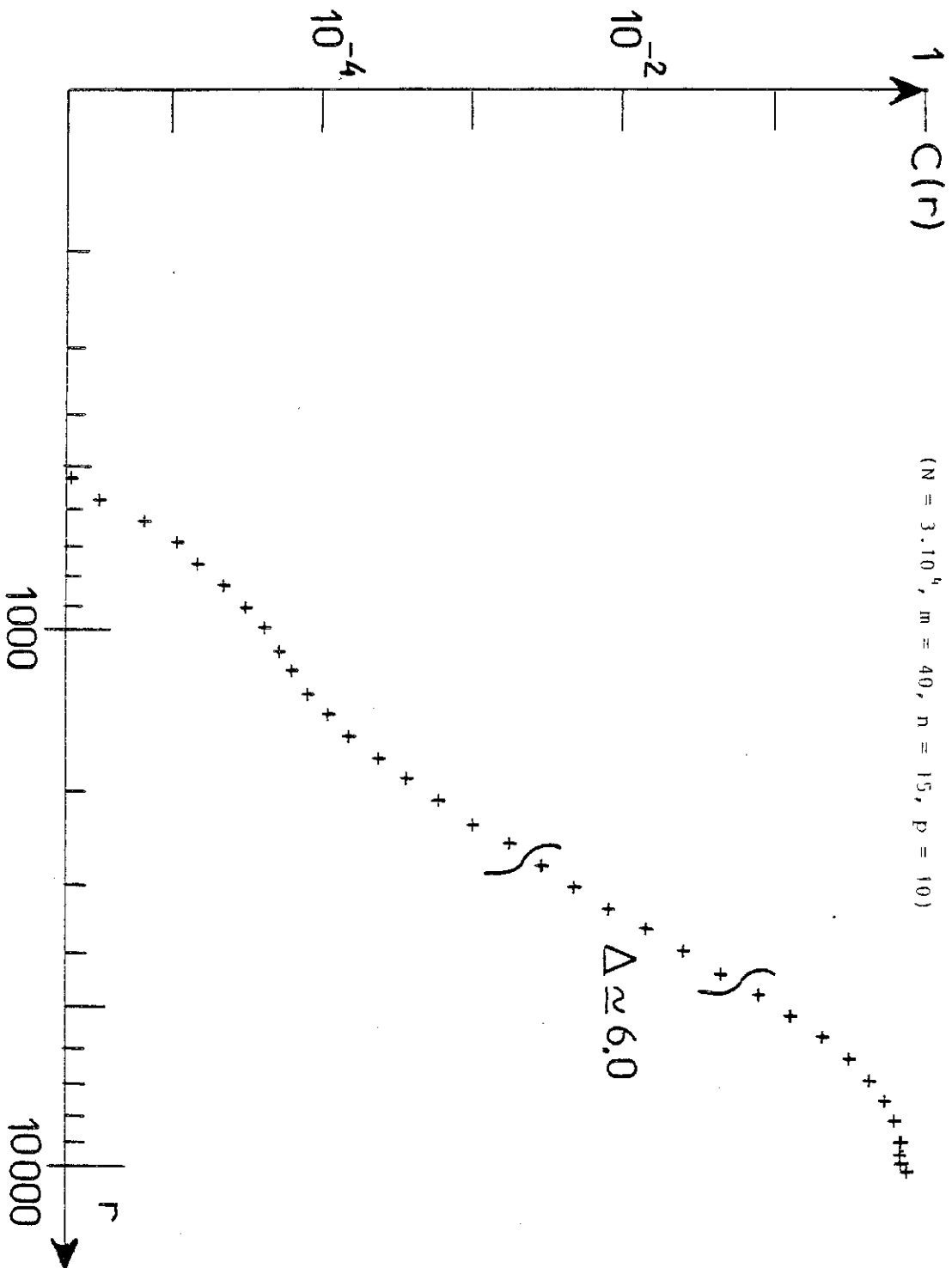


Figure 52

Réseau de courbes $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour le modèle de Franceschini pour une période d'échantillonnage $\Delta t \approx T_0/5$ pour $n = 15$ à 60. Les pentes moyennes Δ pour la zone de "scaling" sont indiquées.

($N = 104$, $m \approx 600$, $p = 1$)

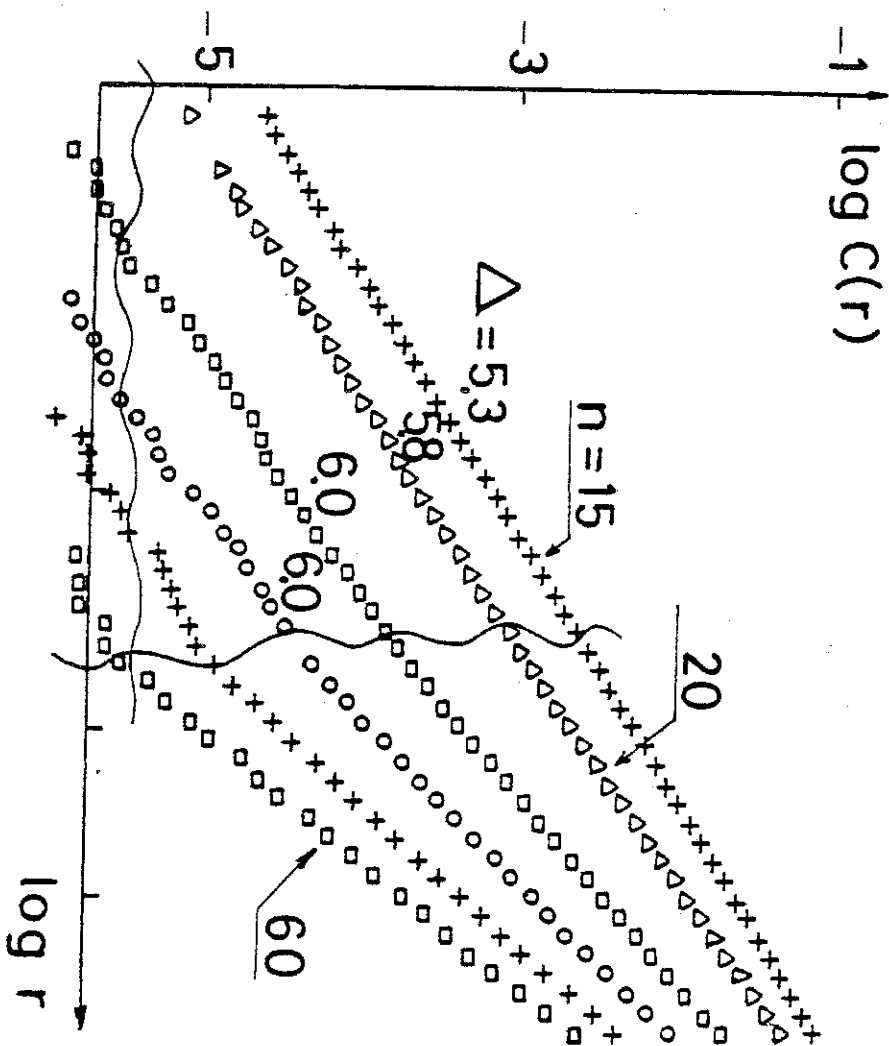
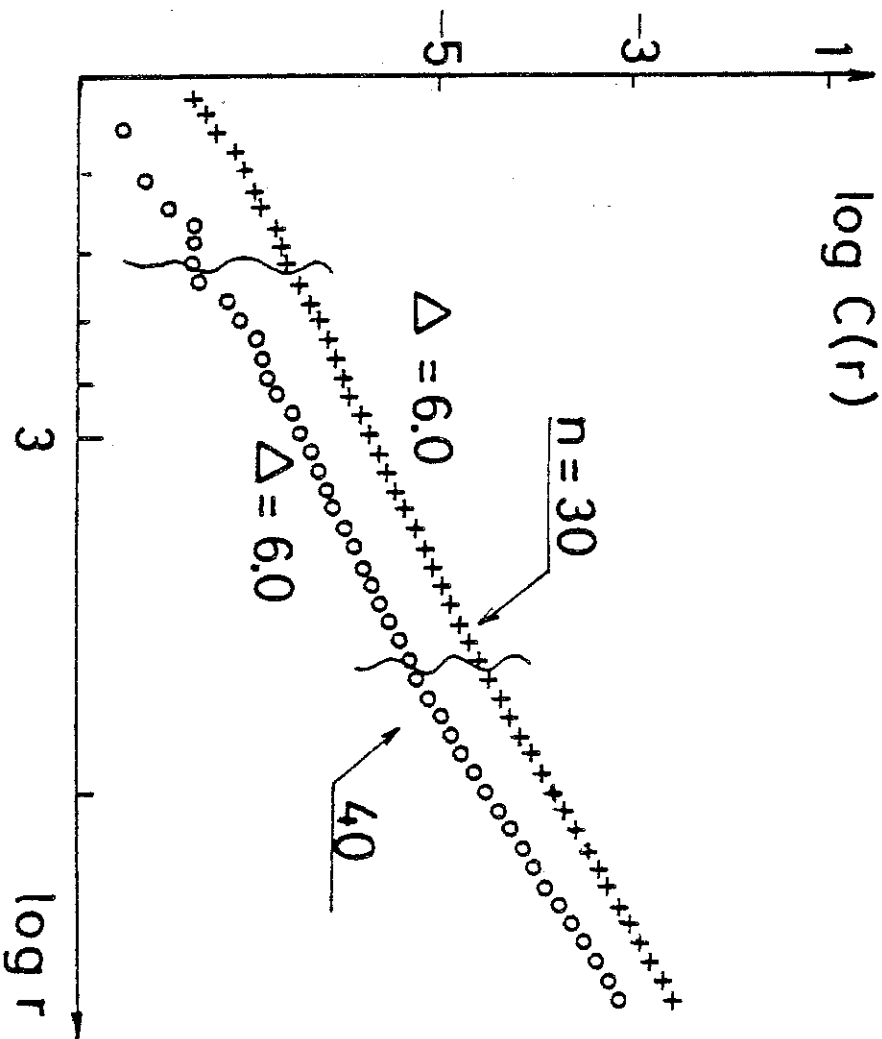


Figure 53

Même chose que pour la figure 52 pour $n = 30$ et 40
sauf $N = 1,5 \cdot 10^5$ et $m = 1,2 \cdot 10^3$



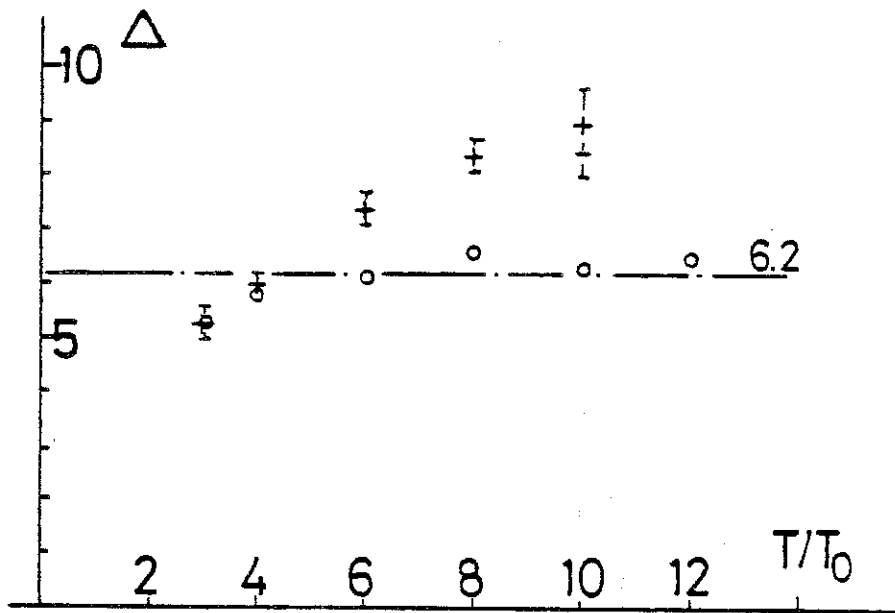


Figure 54

Valeur de la pente moyenne Δ des courbes $C(r)$ pour le modèle de Franceschini en fonction de T/T_0 pour deux différentes périodes d'échantillonnage et échelles de valeurs de r .

$$\Delta t = T_0/29, \quad 3 \cdot 10^3 < r < 5 \cdot 10^3 \quad (-)$$

$$\Delta t = T_0/5, \quad 3 \cdot 10^3 < r < 5 \cdot 10^3 \quad (+), \quad r < 2000 \quad (o)$$

Cette valeur est en accord raisonnable avec la dimension de Kaplan-Yorke ($\simeq 6.2$) tirée de [77] compte tenu de l'imprécision sur l'attracteur. La figure 54 représente la pente moyenne maximum sur certaines régions de r en fonction de T/T_0 pour deux périodes d'échantillonnage différentes. La saturation est manifeste pour $\Delta t = T_0/5$ et $r \leq 2000$. Au contraire, dans les autres cas ou pour d'autres parties de la courbe, la valeur de Δ continue à augmenter avec T , sans même présenter d'inflexion pour $\Delta = D_{KY}$. Le dernier point (-) met en lumière des effets de pseudo-saturation qui résultent de l'effet combiné des deux courbures dues aux non linéarités pour r grand et à la "queue" pour les faibles valeurs de r . Encore une fois, vouloir estimer la dimension à partir d'une pente moyenne prise sur une courbe $C(r)$ en "S" est illusoire. Un autre critère qui nous porte à croire que pour $\Delta t = T_0/5$ nous sommes bien dans le régime en loi de puissance est le fait que les courbes $C(r)$ se décalent de façon régulière lorsque n augmente (figure 43). On peut alors tenter d'estimer l'entropie K_2 associée à la trajectoire et la comparer à la somme des exposants de Lyapunov positifs [77] en utilisant la formule de Pesin (chapitre I) $K = \sum \lambda^+ \simeq 38.5$. Pour $n = 40$ et 50 , nous obtenons $K^{(10)}(1,n) = 48 \pm 5$. L'accord n'est que qualificatif car nous n'avons pas exploré un nombre suffisant de pseudo périodes T_0 pour être sûr que la limite $b \rightarrow \infty$ (17) a été obtenue. Pour que celle-ci soit atteinte, il faudrait beaucoup augmenter la résolution $N \times m$.

C.2 COMMENT FIXER LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE

Il apparaît donc que la présence de la "queue" qui masque la zone de comportement en loi de puissance n'est pas un effet propre aux systèmes à très haute dimension. Elle provient d'un échantillonnage non adapté. Pour essayer de fixer Δt pour un signal donné, il faut imposer à la distance entre points successifs (sur la même trajectoire) d'être supérieure ou égale à la distance moyenne entre proches voisins quelconques sur l'attracteur. Dans cet esprit, Atten a proposé la relation suivante :

$$\Delta t < \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| > \geq \lambda N^{-1/D} \quad (56)$$

Le terme de gauche est clairement la distance moyenne entre points consécutifs sur une même trajectoire. Le membre de droite représente la distance entre proches voisins sur l'attracteur, en supposant que les points y sont jetés aléatoirement (hypothèse d'ergodicité). Ce dernier point est discutable car le pré-facteur inconnu λ devant $N^{-1/D}$ qui est relié à la géométrie de l'attracteur peut ne pas être de l'ordre ^{de} 1. Plus grave encore est le fait que la distance entre proches voisins sur l'attracteur n'est pas une seule fonction de N et D . En effet, si la dimension et l'entropie demeurent inchangées lorsque l'on passe d'une projection (n,p) à (n',p') , la forme et la "surface" de l'attracteur projeté vont évoluer et par la même la distance entre proches voisins sur celui-ci. Le membre de droite de (56) doit alors comporter une fonction de n,p (en fait de T) pour tenir compte de cet effet. A Δt fixé, il existe des valeurs de T au delà desquelles la distance entre proches voisins sera supérieure à la distance entre points sur la même trajectoire. Ceci signifie que la queue existera toujours pour $T \rightarrow \infty$. Les calculs effectués pour de grandes valeurs de T seront légitimes lorsque Δt sera grand ; sinon on privilégiera dans la distribution des distances d_{ij} celles qui correspondent à des points sur la même "boucle" de trajectoire. Pour fixer Δt , nous serons alors obligés de procéder par tâtonnements successifs complétés par une analyse détaillée des courbes $C(r)$.

D - ANALYSE DE SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

D.1 MOTIVATIONS

Comme nous l'avons vu au chapitre I, s'il n'y a pas de singularités, les équations aux dérivées partielles peuvent être considérées comme des équations différentielles dans un espace de champs de dimension infinie. Pour certaines classes d'équations non linéaires et dissipatives, on peut montrer (Temam [5] pour Navier-Stokes) que toutes leurs solutions tendent vers un ensemble d'attracteurs de dimension finie.

De façon pratique, il est légitime de calculer des exposants de Lyapunov pour ces systèmes (fin du chapitre I). Ces calculs, difficiles et coûteux en temps machine ont abouti néanmoins à montrer que les attracteurs étaient bien de dimension finie en utilisant la conjecture de Kaplan et Yorke (chapitre I) : Keefe a effectué une telle étude sur l'équation de Ginzburg-Landau [78] et Manneville sur celle de Kuramoto-Sivashinski sur une grande plage du paramètre [79]. Ces systèmes à haute dimension peuvent alors constituer de bons modèles pour l'étude pratique de la méthode de reconstitution d'espace des phases et de mesure de dimension et d'entropie.

L'autre point de vue est que ces équations ont des solutions où le temps et l'espace sont couplés. On a ici une situation beaucoup moins éloignée de la turbulence classique en Mécanique des Fluides en milieu confiné que celle décrite par une équation différentielle ordinaire. Un écoulement turbulent classique présente un temps de corrélation et une distance de corrélation finis. De même les solutions de K.S. où il y a présence simultanée de désordre spatial et de chaos temporel laissent présager des corrélations finies. Il est donc important d'examiner si on peut déterminer toute la dynamique du système à partir de mesures locales et globales. Ceci permettrait d'accéder à la mesure d'une densité de degrés de liberté [80, 81] que l'on pourrait comparer à l'estimation classique faite par exemple par Landau [3].

Une autre question importante qui se pose est : que deviennent "les degrés de liberté" lorsque la taille de la boîte de convection augmente ? Se produit-il une localisation des oscillateurs hydrodynamiques qui tendrait à restreindre les transferts d'information dans la boîte, comme cela a été observé expérimentalement [12] pour une expérience de convection de Rayleigh-Bénard dans l'eau ($Pr = 3.5$) dans une cellule à grand rapport d'aspect ($9,5 \times 4,6 \times 1$). Dans ce cas, une mesure globale comme celle de l'E.H.D. (début du chapitre IV) n'aurait plus de sens par suite de la précision expérimentale limitée. Il faudrait alors faire plusieurs mesures locales. L'estimation des invariants pour une variable locale et globale du système permettra de trancher si on a ou non dans ce cas particulier une localisation des degrés de liberté.

D.2 LES SYSTEMES

Il s'agit des équations de Ginzburg-Landau (G.L.) et de Kuramoto-Sivashinski (K.S.) ; elles ont été intégrées par Keefe de U.S.C. Los Angeles pour la première et par Manneville de Saclay pour la seconde.

Ces deux équations proviennent très généralement d'un développement en perturbations d'équations aux dérivées partielles du type de celles qui décrivent le problème de Rayleigh-Bénard par exemple. Pour les écrire on suppose que la solution des équations complètes s'écrit sous une certaine forme. Il s'agit donc d'une réduction à un problème moins difficile à traiter qui reste cependant physique dans une certaine plage de valeurs des paramètres.

L'analyse linéaire de stabilité des équations complètes livre le vecteur d'onde le plus instable k_c . On écrit alors la solution $u(x,t)$ sous la forme d'une fonction périodique (k_c) modulée faiblement (déformation de la structure rouleaux dans le cas R.B.) :

$$u(x,t) = \text{Re} \left[W(x,t) e^{ik_c x} \right] \quad (57)$$

En injectant (57) dans les équations originelles et moyennant l'approximation que la variation de w se fait sur des échelles grandes par rapport à $1/k_c$ on obtient l'équation de Ginzburg-Landau dont une forme est :

$$i \frac{\partial W}{\partial t} + (1 - ic_0) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = ic_0 W - (1 + ic_0) |W|^2 W \quad (58)$$

où c_0 est un paramètre.

L'équation de Kuramoto-Sivashinski s'obtient en supposant que la dépendance de W en x se trouve sous la forme d'une phase (déformation des rouleaux d'amplitude donnée et de phase aléatoire)

$$W(x,t) = a(t) e^{i\varphi(x,t)} \quad (59)$$

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (60)$$

Avant d'intégrer ces équations, il faut fixer la taille du volume Ω ou ce qui est équivalent le vecteur d'onde q minimal. Ainsi l'équation G.L. a été intégrée en développant la solution sur une série de Fourier de vecteur d'onde q (méthode pseudo-spectacle) et K.S. par une méthode de pas (différences finies).

D.3 LES RESULTATS

Nous avons rencontré des problèmes de période d'échantillonnage très similaires à ceux que nous avons observé sur le modèle de Franceschini : courbes $C(r)$ courbées et présentant une queue, absence de zones de comportement en loi de puissance. Ainsi pour les solutions de l'équation de K.S., les figures 55 et 56 montrent des courbes $C(r)$ et la loi $\Delta(T)$ que l'on peut en tirer pour la variable locale $\varphi(x,t)$ pour $x = 25$ (milieu de la boîte $L = 50$) pour une période d'échantillonnage $\Delta t = 1$.

Le temps caractéristique T_0 pour ce signal ne peut pas être défini par le spectre de Fourier qui présente une décroissance exponentielle sur toute la gamme des fréquences [82]. En dépit de cela, T_0 peut être assimilé au temps de retour moyen. Ici le choix de la période d'échantillonnage Δt par rapport à T_0 est clairement inadapté.

Pour la variable globale

$$\psi(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x,t) dx \quad (61)$$

les figures 57 et 58 montrent que l'on a sensiblement le même type de variation. On note cependant pour ce signal que les courbes $C(r)$ présentent une allure en S moins marquée que pour le précédent ; l'augmentation $\Delta(T)$ est moins forte sur la figure 58 que sur 56.

Ceci est lié au fait que les variations de la variable locale sont en moyenne plus rapides que pour la variable globale. Ainsi cette dernière présente un comportement basse fréquence qui est en loi de puissance (f^{-4}) [82]. Nous avons alors augmenté de façon systématique la période d'échantillonnage. Dans la pratique, le nombre de points échantillonnés est fixé et on fait varier Δt en prenant un point sur q . Ainsi Δt augmente par sauts et le nombre de points N se réduit (c'est ce qui fait que nous n'avons pas pu atteindre la valeur correcte de Δt pour G.L. et que nous ne présentons pas les résultats qui sont qualitativement identiques à ceux de K.S.). Pour chaque valeur de Δt , on trace un réseau de courbes $C(r)$ pour différentes valeurs de la dimension d'espace des phases et pour $p = 1$, afin de voir si elles présentent une variation en loi de puissance. Il y a parfois des surprises comme sur la figure 59, où les courbes $C(r)$ présentent une zone où la pente vaut en moyenne environ 3 pour des faibles valeurs de r et pour une période d'échantillonnage de 2.

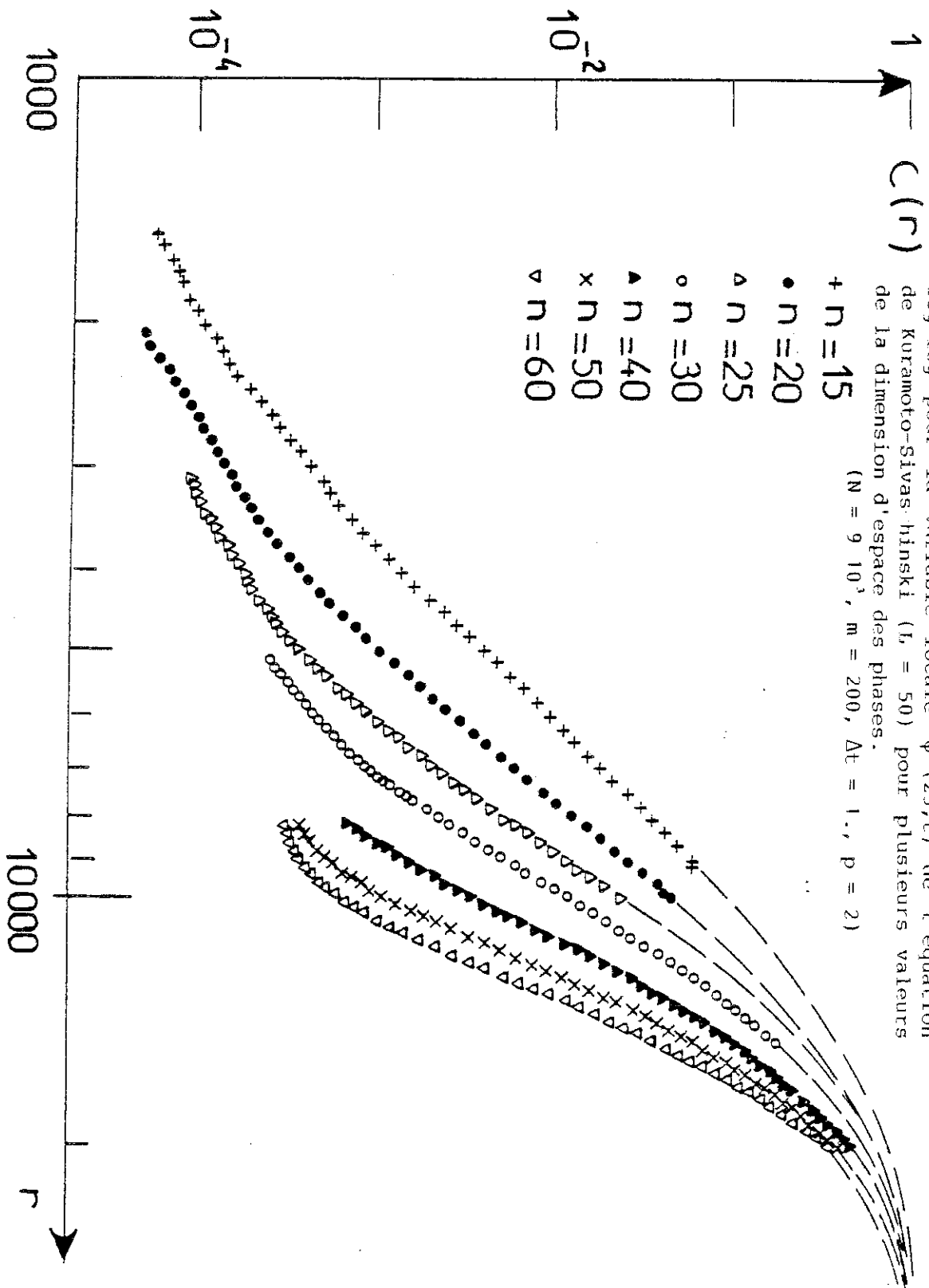
Pour $\Delta t = 4$, cependant la quantité globale $\psi(t)$ donne lieu à des courbes $C(r)$ qui ne présentent plus de queue, qui ont une loi de variation en r^γ où γ est proche de D_{KY} (figure 60) malgré une certaine dérive de $n = 10$ à 20. Une confirmation indirecte du fait que les plages de r considérées sont proches de la zone de comportement en loi de puissance pour $C(r)$ est que les courbes $\log C(r)$ se décalent régulièrement avec n . L'ordre de grandeur de $K(p,n)$ est de 0.2 ce qui est tout à fait consistant avec la somme des exposants de Lyapunov positifs : 0.2 [79].

Pour la quantité locale, il faut doubler la période d'échantillonnage afin d'observer le même type de variation (figure 61). Pour $n = 10$, $C(r)$ présente une zone de variation en r^γ avec $\gamma \simeq D_{KY}$ ($=8.8$). Pour $n = 20$, cette zone n'est plus accessible à cause du décalage introduit par l'entropie (Δt est 2 fois plus grand que pour ψ à résolution fixée).

Figure 55

Réseau de courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable locale $\varphi(25, t)$ de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky ($L = 50$) pour plusieurs valeurs de la dimension d'espace des phases.

($N = 9 \cdot 10^3$, $m = 200$, $\Delta t = 1$, $p = 2$)



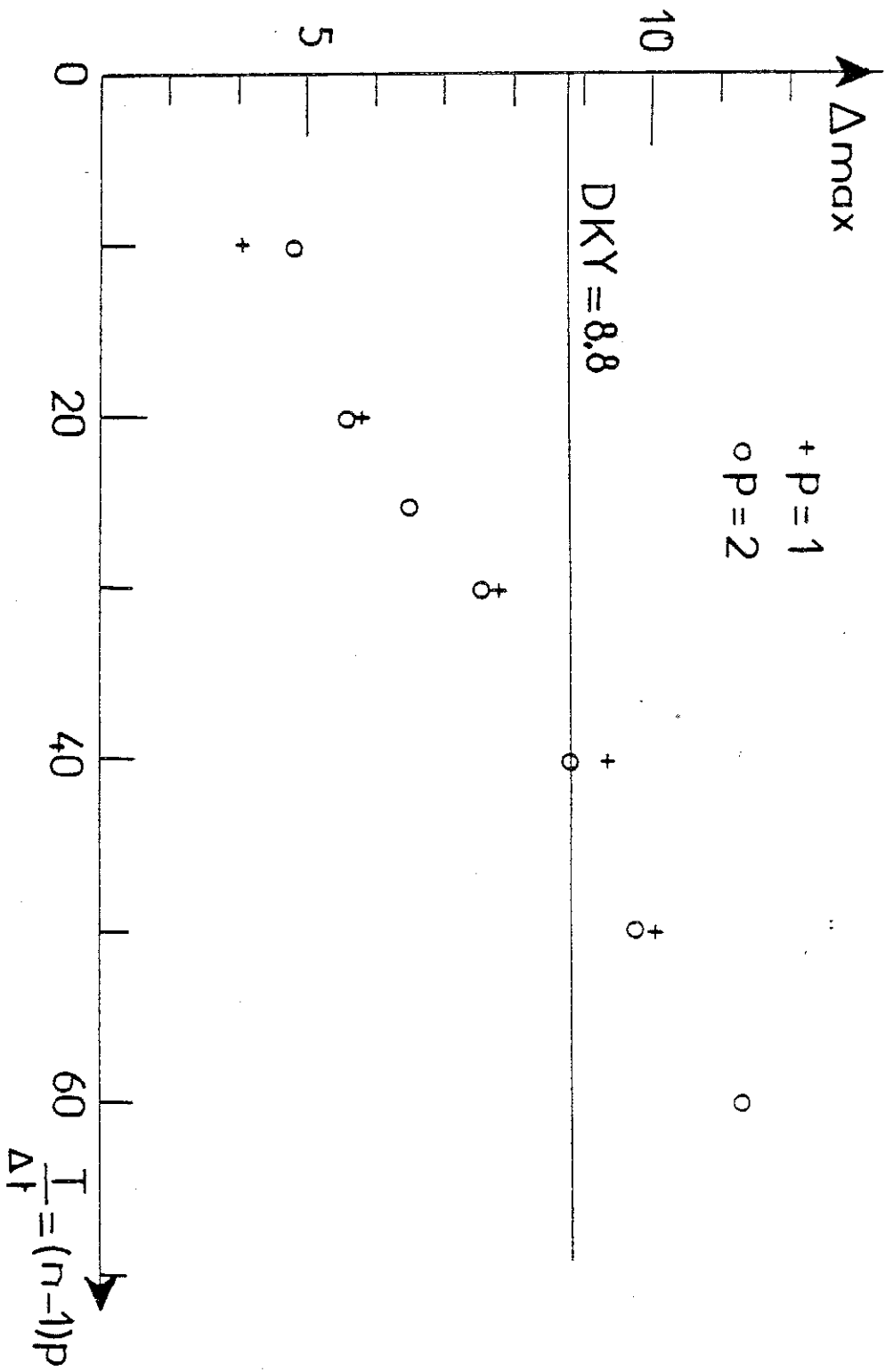


Figure 56

Pente maximum extraite des courbes $C(r)$ de la figure 55 en fonction de $T/\Delta t = (n-1)p$ pour $p = 1$ et 2.

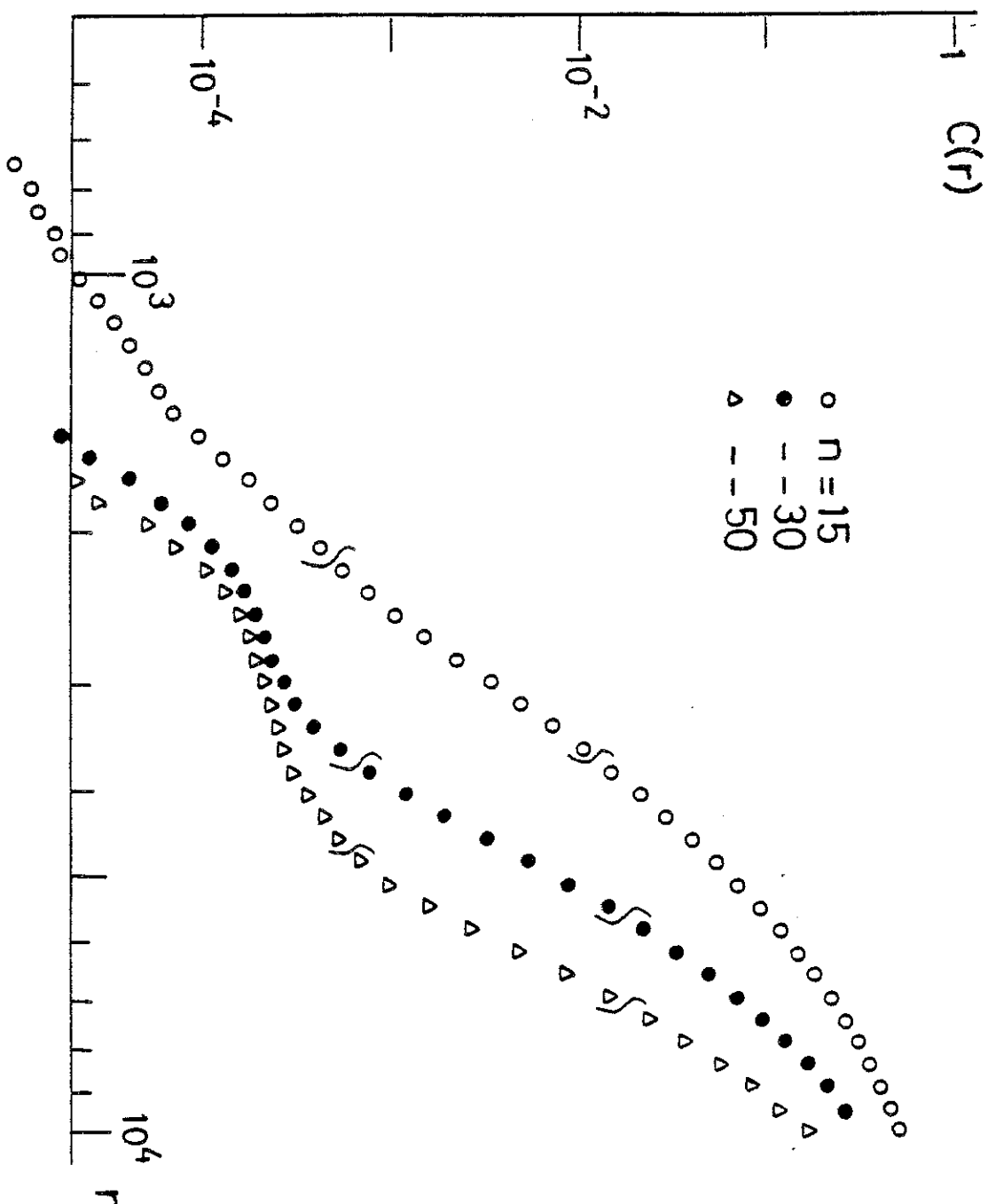


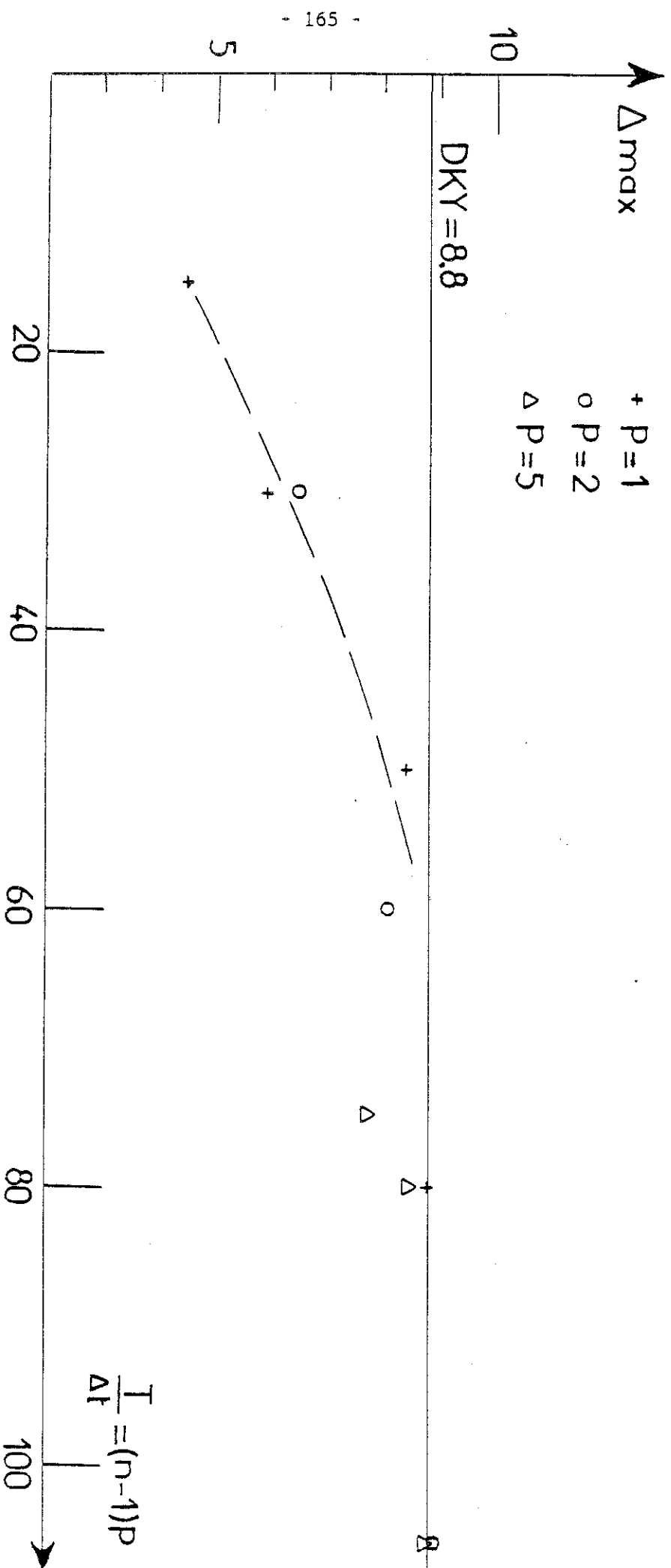
Figure 57

Réseau de courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable globale $W(t)$ de l'équation de Kuramoto-Sivashinski ($L = 50$) pour plusieurs valeurs de la dimension d'espace des phases.

($N = 9 \cdot 10^3$, $m = 200$, $\Delta t = 1$, $p = 2$)

Figure 58

Pente maximum extraite des courbes $C(r)$ de la figure 57
en fonction de $T/\Delta t = (n-1)p$, pour $p = 1, 2$ et 5 .



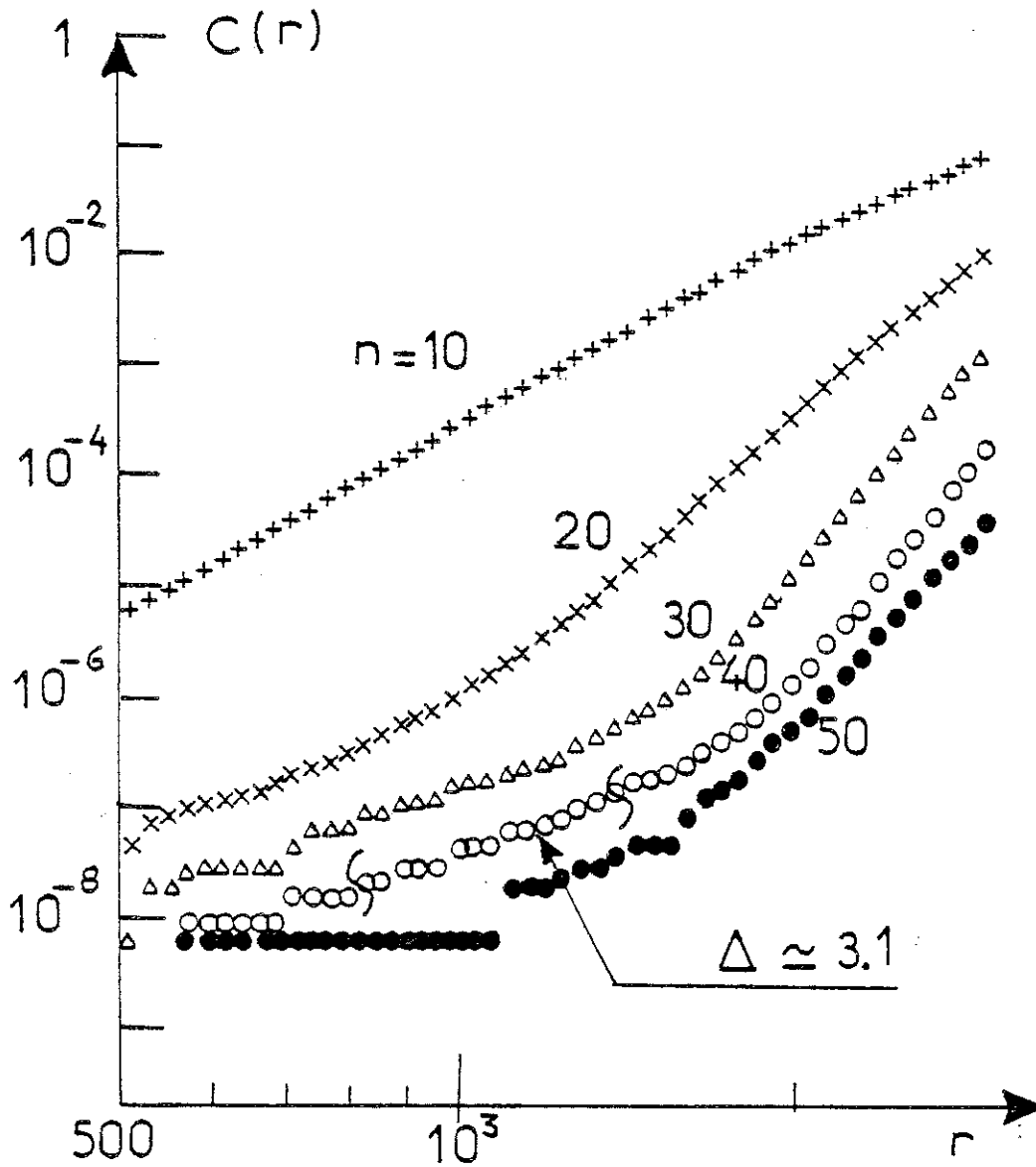


Figure 59

Réseau de courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable globale $\Psi(t)$ de l'équation de Kuramoto-Sivashinski ($L = 50$) pour plusieurs valeurs de la dimension d'espace des phases ($N = 62 \cdot 10^3$, $m = 10^4$, $\Delta t = 2$, $p = 1$)

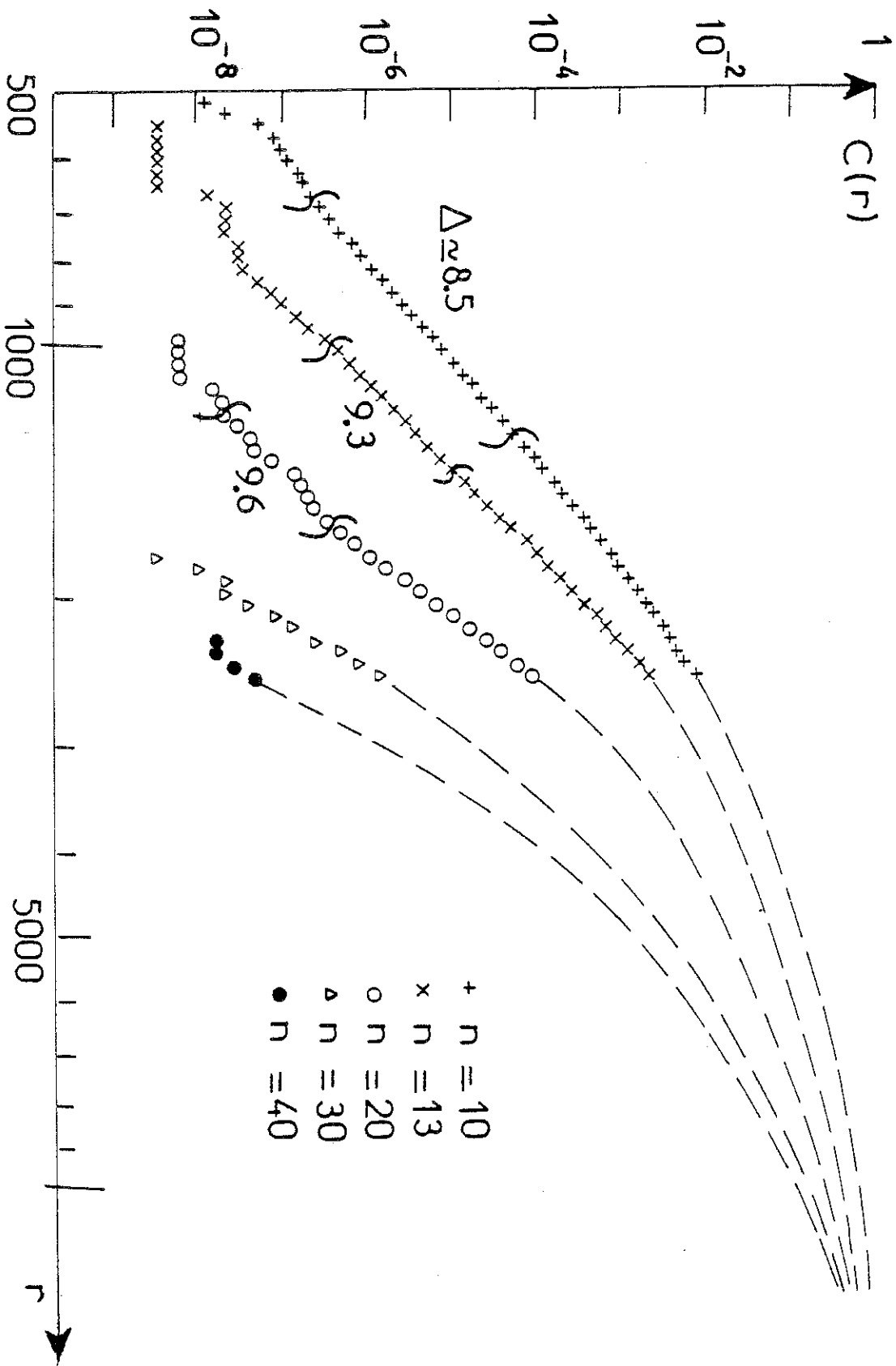
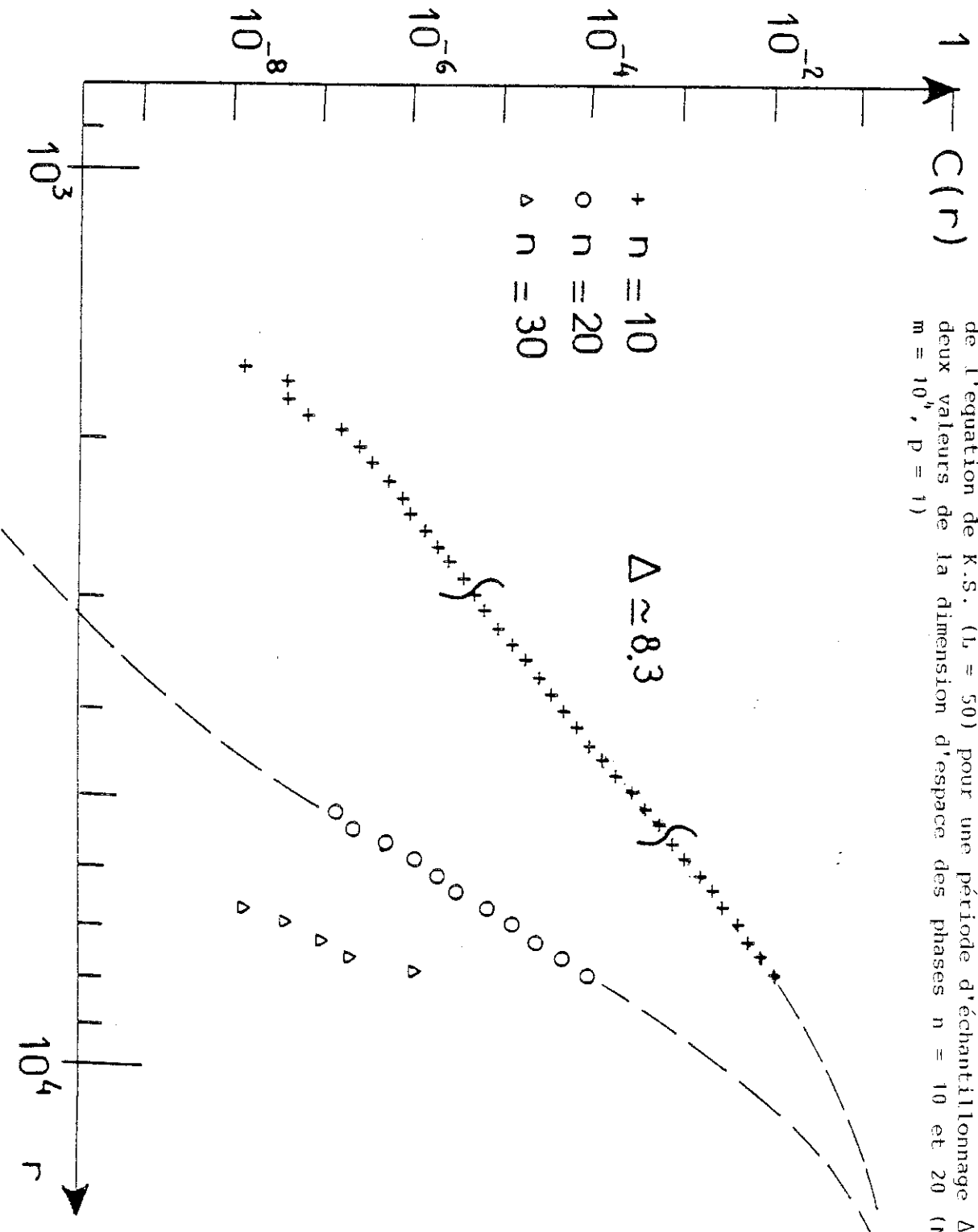


Figure 60

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable globale de l'équation de K.S. ($L = 50$) pour une période d'échantillonnage $\Delta t = 4$, pour trois valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 10, 13$ et 20 ($N = 31 \cdot 10^3$, $m = 5 \cdot 10^3$, $p = 1$).

Figure 61

Courbes $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour la variable locale de l'équation de K.S. ($L = 50$) pour une période d'échantillonnage $\Delta t = 8$, pour deux valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 10$ et 20 ($N = 15 \cdot 10^3$, $m = 10^4$, $p = 1$)



Les résultats que nous obtenons sur l'équation de K.S. sont tout à fait cohérents avec les théorèmes du chapitre I ; il est possible de projeter sur R^n l'attracteur qui se trouve dans un espace fonctionnel. Dans ce cas les projections de l'attracteur sous-tendues par les variables locales et globales possèdent les mêmes dimensions (et entropies ?). Pour cette valeur du paramètre ($L = 50$) le système est très fortement couplé et on n'observe pas de localisation des oscillateurs. Il semble que ceci soit aussi le cas pour le système de convection de Rayleigh-Bénard dans le régime que nous avons analysé. La question de ce qui se passe pour des valeurs beaucoup plus grandes du paramètre et de la taille de la boîte reste ouverte (rôle des défauts dans les conditions aux limites et du bruit).

E - POSSIBILITES DE LA METHODE : DISCUSSION

Nous avons vu qu'il est possible de caractériser un attracteur de la dimension 9 et même d'estimer l'entropie qui lui est associée. Cependant ceci a nécessité la compréhension de toutes les limitations associées au principe proposé par Grassberger et Procaccia. Celles-ci ne sont pas toutes spécifiques à la méthode des décalages. Par exemple lorsque l'on "vectorise" des observables scalaires $R^n \ni \vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t) \dots X_n(t))$ comme le fait Lafon sur des composantes de vitesse pour une simulation numérique bi-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes on peut aussi observer des courbes $C(r)$ qui présentent une "queue". Les valeurs de la pente estimées sur de telles courbes peuvent alors ne refléter en rien la dimension de l'attracteur. De la même façon, il sera nécessaire de considérer les parties des courbes $C(r)$ pour r très faible si on veut trouver une variation en loi de puissance où l'exposant soit une constante. Ces deux limitations existent quelle que soit la méthode de projection de l'attracteur dans R^n .

L'enseignement principal que l'on peut tirer de cette étude est qu'il n'y a pas de méthode automatique qui permette de donner à tout coup la dimension associée à un signal expérimental. D'une part, il y a une grande dépendance par rapport au système : la zone de variation

en r peut être plus ou moins étendue suivant la géométrie du système. Ainsi nous n'avons pas du tout envisagé le cas de signaux présentant des comportements très intermittents. Aussi il est important de faire varier de façon indépendante tous les paramètres. L'analyse globale des réseaux de courbes $C(r)$ est impérative pour l'obtention d'une conclusion objective.

Compte tenu de l'expérience empirique que nous avons acquis, nous proposons la procédure suivante qui doit être assortie de précautions inspirées par les remarques précédentes :

- . détermination du temps caractéristique T_0 (soit par le spectre de Fourier soit par une estimation de temps de retour)

- . échantillonner le signal à $\Delta t = T_0/q$ et $2 \leq q \leq 7$

- . pour le premier calcul de $C(r)$ choisir un certain nombre N d'échantillons ($\sim 10^4$) et d'origines m ($\geq 10^2$ par exemple) et vérifier l'indépendance de $C(r)$ par rapport à N et m (chapitre II)

- . calculer alors $C(r)$ pour $p = 1$ et plusieurs valeurs de n croissantes et examiner les courbes pour voir si on a atteint la zone de variation en loi de puissance ; si ce n'est pas le cas, prendre des valeurs plus importantes de N et m .

Une question très importante qui se pose au physicien qui veut caractériser des attracteurs étranges associés à un signal expérimental est de savoir quelles sont les possibilités de la méthode. Par exemple, pourra-t-on caractériser un attracteur de dimension 100 et d'entropie 0.5 ? La réponse à ce type de question est essentielle si on veut confirmer ou infirmer, le sens physique des bornes établies par Ruelle et d'autres auteurs [83, 84] sur l'évolution des invariants en fonction du paramètre d'instabilité pour les équations de Navier-Stokes. Il n'y a pas de réponse précise actuellement ; c'est pourquoi nous introduisons maintenant quelques exemples qui illustrent la difficulté de la situation.

E.1 ETUDE D'UN TORE T_{20}

Alors afin d'acquérir une certaine confiance dans les résultats pour les systèmes expérimentaux à très haute dimension, nous avons analysé un signal numérique à très haute dimension très simple : il s'agit d'un tore à 20 fréquences.

Nous avons généré ce système comme au chapitre III en calculant :

$$Y(t) = E [16\,350 (X(t) + 1)]$$

$$X(t) = 0.05 \left[\sum_{i=1}^{20} \sin(2\pi f_i t) \right]$$

Pour avoir un échantillonnage adapté en prenant $\Delta t = 1$, il faut que les sinusoïdes ne donnent pas lieu à des battements de fréquence trop petite, ceci a guidé le choix des f_i . Celles-ci sont équi-réparties entre 0 et 1 tout en étant irrationnelles (14 chiffres significatifs). La figure 62 montre les courbes $C(r)$ en fonction de r ; pour $n = 50$ et 100 elles semblent présenter un comportement en r^γ (γ indépendant de n) bien identifié dans une certaine région de r . L'exposant estimé vaut environ 20 (figure 62). Il est donc possible de caractériser un tore T_n $n \leq 20$ (sous certaines conditions d'échantillonnage et de dynamique homogène).

Ce résultat peut sembler encourageant pour l'étude d'attracteurs à très haute dimension, cependant il ne faut pas oublier l'entropie qui dans ce cas n'est pas nulle et va décaler les courbes $C(r)$ vers les basses valeurs de $C(r)$. Enfin, plus la dimension sera élevée et plus la plage en r sur laquelle on pourra l'observer sera petite (à résolution donnée). Nous voyons aussi sur cet exemple qu'il faut porter n et Δt à de très grandes valeurs pour permettre la caractérisation d'attracteurs de grande dimension. Ceci diminuera alors la plage de valeurs de $C(r)$ intéressantes.

Dans le cas de signaux expérimentaux à haute dimension la situation peut être très délicate comme le montre l'exemple suivant.

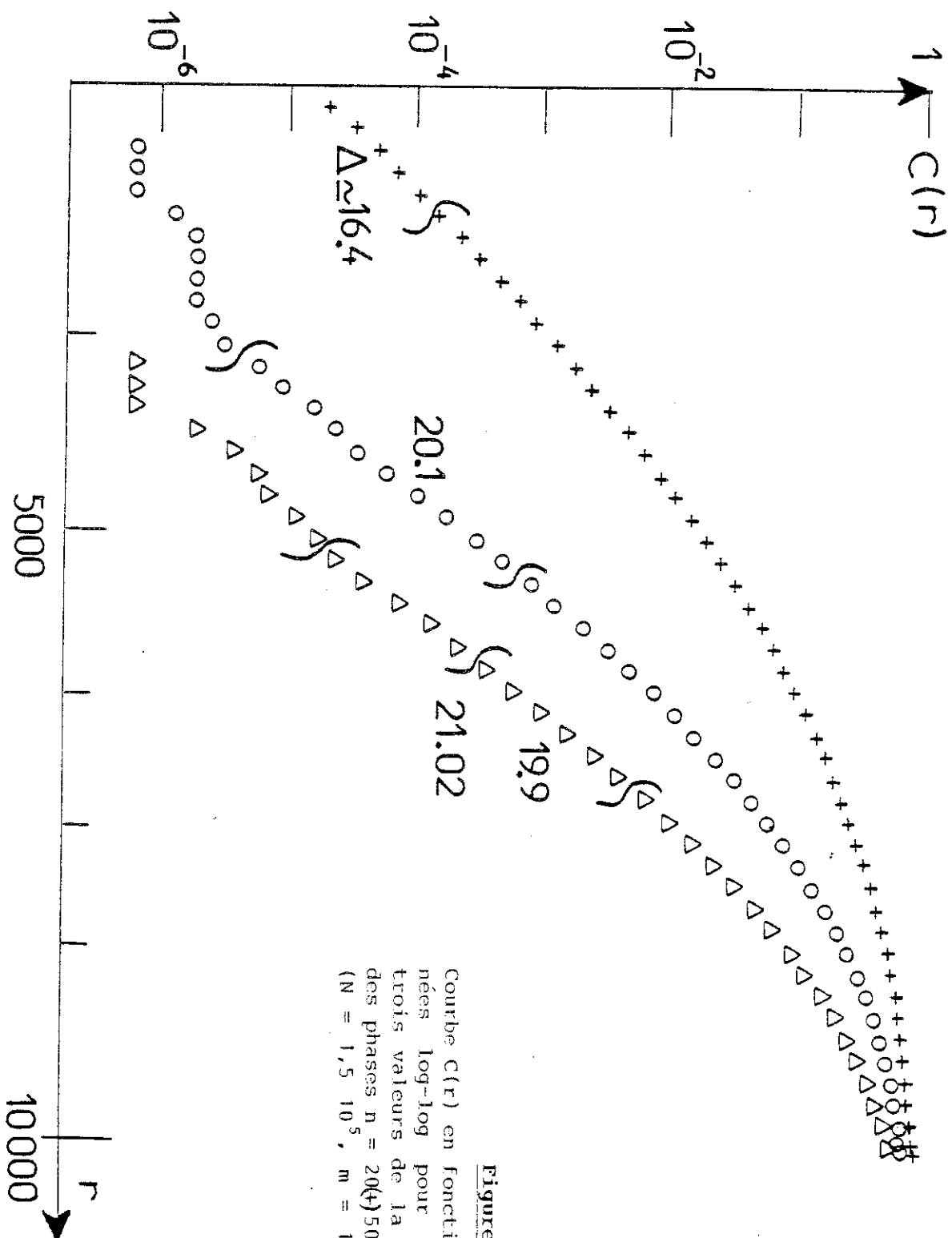


Figure 62

Courbe $C(r)$ en fonction de r en coordonnées log-log pour un tore T_{20}^{20} pour trois valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 20(+)$, $50(o)$ et $100(\Delta)$.
 ($N = 1,5 \cdot 10^5$, $m = 10$, $\Delta t = 1$, $p = 1$)

E.2 L'E.H.D. RE-EXAMINEE

Nous avons repris le signal de la figure 47.a mais nous l'avons échantillonné à $\Delta t (\simeq T_0/3)$. La figure 63 montre les courbes $C(r)$ obtenues pour de très grandes valeurs de la dimension d'espace des phases $n = 50$ à 150 ; elles ne présentent plus de "queue" et pour $n = 100$ à 150 , il y a une zone pour $C(r) \gg 10^2 N \times m$ où l'allure des courbes en coordonnées log-log est grossièrement linéaire et les pentes valent environ 30. Il ne faut cependant rien conclure de définitif à la vue de ces courbes car nous ne sommes pas dans la zone de variation en loi de puissance. On doit alors augmenter la résolution $N \times m$. Ceci conduira à des tailles d'échantillons incompatibles avec la stabilité du système expérimental compte tenu de rapport de la période d'échantillonnage au temps caractéristique. Mentionnons aussi les problèmes de taille de la mémoire et de temps de calcul prohibitifs.

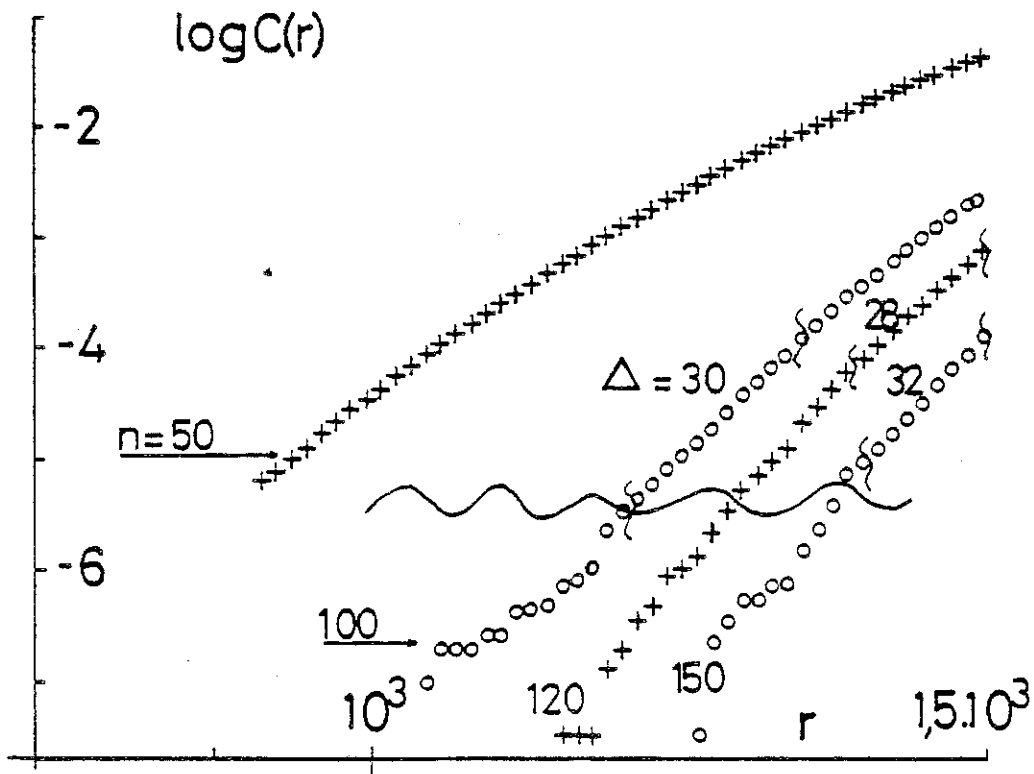


Figure 63

Courbe $\log C(r)$ en fonction de $\log r$ pour le signal E.H.D. (figure 47) échantillonné à $\Delta t (\approx T_0/3)$ pour $n = 50$ à 150 et $p = 1$ ($N = 15 \cdot 10^3$, $m = 10^3$).

CONCLUSION

Les travaux présentés dans ce mémoire comportent deux aspects : la caractérisation d'attracteurs étranges associés à des écoulements réels et l'analyse détaillée de la méthode utilisée. Ils s'inscrivent à la suite des travaux de Ruelle et Takens en 1971 et plus généralement dans le domaine (qui a connu un regain d'intérêt récent) des systèmes dynamiques.

En 1983, Grassberger et Procaccia ont proposé une nouvelle méthode qui en théorie permettait à partir de la reconstruction d'un espace des phases d'obtenir la dimension et l'entropie des attracteurs associés à un signal donné. Aucune condition d'applicabilité n'avait été fixée ; pour éviter de commettre des erreurs, il fallait donc déterminer quelle doit être la façon d'opérer lors de la mise en oeuvre pratique de cette méthode.

Le rôle de tous les paramètres intervenant dans la reconstruction d'espaces des phases par toutes les techniques envisageables a pu être mis en lumière. Nous avons montré que lorsque l'intervalle de temps total sur lequel on prend des valeurs du signal pour la reconstruction d'un vecteur dans l'espace des phases augmentait, l'estimation de la dimension devait être faite pour des échelles de distance de plus en plus petites. Pour des systèmes de dimension excédant 4 ou 5, la période d'échantillonnage doit être suffisamment grande afin de permettre la détermination et d'éviter des erreurs.

Cette compréhension des conditions de bonne utilisation de la méthode permet alors d'envisager l'exploration d'attracteurs de dimension plus élevée. De manière générale, il semble bien que cette technique sera amenée à être un outil indispensable à la caractérisation de signaux chaotiques quelconques, et pourrait jouer le même rôle dans la dynamique chaotique que la transformée de Fourier dans les régimes quasi périodiques.

Du point de vue de la description des écoulements turbulents, nous avons confirmé les idées de Ruelle et Takens en montrant de façon indiscutable qu'un régime de convection chaotique de Rayleigh-Bénard était décrit par un attracteur de faible dimension. Grâce à une adaptation originale de la méthode existante, et une étude parallèle sur le système de Lorenz, nous avons pu estimer son entropie. En outre, l'étude de solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinski pour une valeur intermédiaire du paramètre a donné la même information pour une mesure locale et globale, ce qui indique que les "modes" ne sont pas localisés et sont fortement couplés.

Le prolongement de notre travail se situe d'abord dans une étude d'écoulements convectifs. Il est important de faire varier le paramètre d'instabilité afin de voir comment évoluent la dimension et l'entropie. Parallèlement, il serait intéressant de déterminer comment varient les couplages des "modes" du système et de voir si on observe une localisation des degrés de liberté.

Mentionnons enfin que jusqu'à présent seuls des écoulements dans un domaine fini ont été étudiés expérimentalement de ce point de vue. La situation des écoulements ouverts -comme par exemple celui observé derrière un cylindre ou un jet- est beaucoup plus complexe. L'application des méthodes précédentes, en particulier celle où on reconstruit l'espace des phases par la méthode des décalages n'est pas transposable à ces systèmes. En effet, une mesure locale reflète autant la structure spatiale du système que sa dynamique temporelle. De plus le cadre mathématique construit pour le cas à volume fini n'existe pas. Une voie d'approche phénoménologique pourrait être de suivre l'écoulement comme le suggère une étude récente, réalisée par Deissler de Los Alamos qui montre ce que l'on peut interpréter comme une advection du chaos par le courant moyen de l'écoulement.

* * * * *

BIBLIOGRAPHIE

- 1.a A.J. Chorin Comm. Math. Phys. 83 p. 517-535 (1982)
- b E.D. Siggia et A. Pumir Phys. Rev. Lett. 55 n° 17 p. 1749-1752 (1985)
2. U. Frisch "Où en est la turbulence développée" Physica Scripta Vol T9 p. 137-146 (1985)
3. L. Landau et E. Lifchitz Cours de Mécanique des Fluides Editions Mir, Moscou p. 128 (1971)
4. R. Temam "Generic properties of Navier-Stokes equations" 1977 p. 361-370
5. R. Temam Physica 124 A p. 577-586 (1984)
6. J. Guckenheimer et P. Holmes "Non-linear oscillations, Dynamical Systems and bifurcations of vector fields" Springer-Verlag Applied Math. Sciences 42 (1983)
7. D. Ruelle et F. Takens Comm. Math. Phys. 20 p. 167-192 (1971) et 23 p. 343-344 (1971)
8. G. Iooss Pre-print, Université de Nice (1985)
9. S. Newhouse, D. Ruelle, et F. Takens Comm. Math. Phys. 64 35-40 (1978)
10. V. Arnold "Chapitres Supplémentaires à la théorie des équations différentielles ordinaires" Editions Mir Moscou p. 112 (1978)
11. C. Grebogi, E. Ott et J.A. Yorke Phys. Rev. Lett. 51 n° 5 (1983) p. 339-342 et Physica 15 D p. 354-373 (1985)
12. R.W. Walden, P. Kolodner, A. Passner et C.M. Surko Phys. Rev. Lett. 53 p. 242 (1984)

13. R.K. Tavakol et A.S. Tworkowski Physics. Lett. III n° 7 p. 317-320
BI (30 sep. 1985)
14. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan et J.A. Yorke Physica 13 D p. 261-
268 (1984)
15. L. Auslander et R. Mackenzie "Introduction to Differentiable
Manifolds" Dover 1977
16. Henri Cartan "Calcul différentiel" Herman p. 130 (1967)
17. E. Lorenz J. atm. Sciences 20 p. 130-141 (1963)
18. A. Politi, G.L. Oppo et R. Badii dans "Advances in Non Linear
Dynamics and Stockastic precesses". Conférence organisée par
R. Livi et A. Politi. World Scientific Publishing Co. Singapore
(1985)
- 19.a V. Arnold et A. Avez "Problèmes ergodiques de la Mécanique clas-
sique" Gauthier-Villars Paris (1967)
b O. Lanford III Cours des Houches (1981)
c J.P. Eckmann et D. Ruelle Rev. of Mod. Phys. 57 n° 3 (juillet 1985)
20. R. Lozi J. Phys. (Paris) 39 (Coll. C5) 9-10 (1978)
21. P. Collet et Y. Levy Comm. Math. Phys. 93 p. 461-481 (1984)
22. J. Sinai et E. Vul Physica 2D (1981) p. 3-7
23. M. Henon Comm. Math. Phys. 50 p. 69-77 (1976)
24. W. Rudin Real and Complex Analysis Mc Graw Hill 1982 p. 17
25. D. Farmer, E. Ott et J. Yorke Physica 7D (1983) p. 153-180
- 26.a P. Grassberger Phys. Lett. 97A (1983) p. 227
b G. Hentchell et I. Procaccia Physica 8D (1983) p. 435

- 27.a P. Grassberger Phys. Lett. 107A n° 3 p. 101-105 (1985)
- b T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia et B. Schraiman Phys. Rev. A 33 n° 2 (1986) p. 1141-1151
- 28. I.P. Cornfeld, S.V. Fomin et Ya. G. Sinai "Ergodic Theory" Springer Verlag 1982
- 29. P. Grassberger et I. Procaccia Physica 13D (1984) p. 34-54
- 30. F. Ledrappier et L.S. Young Bull. of the American Mathematical Society Vol II n° 2 Oct. 1984
- 31. Ces méthodes ont été proposées en particulier par :
S. Blacher et J. Perdang Physica 3D, p. 512-529 (1981). Elles ont été appliquées à du signal expérimental par :
A. Lafon, A. Rossi et C. Vidal J. Physique 44, p. 505-512 (1983)
- 32.a B. Malraison et P. Atten Phys. Rev. Lett. 49 p. 723-726 (1982)
- b B. Malraison Thèse de Doctorat d'Etat Université de Grenoble (Décembre 1984)
- 33. U. Frisch et R. Morf Phys. Rev. A. 23 p. 2673-2705 (1981)
- 34. J. Max Méthodes et techniques de traitement du signal Masson (1972)
- 35. D. Ruelle C.R.A.S. t. 296 Série I. p. 191 (31 janvier 1983)
- 36. J.D. Crawford et J. Cary Physica (6D) (1983) p. 223-232
- 37. D. Ruelle Phys. Rev. Lett. 56 n° 5 pp. 405-407 (3 février 1986)
- 38. Y. Aizawa Progr. Theor. Phys. 68 p. 64 (1982)
- 39. Yu. N. Belyaev, A.A. Monakhov, S.A. Scherbakov et I.M. Yavorskaya J.E.T.P. Lett. Vol 29 n° 6 (20 mars 1979)
- 40. R. Mañe dans "Dynamical Systems and Turbulence Warwick 1980" p. 230-242
Lecture notes in Math. 898, Springer, New-York (1981)

41. J. Guckenheimer et G. Buzyna Phys. Rev. Lett 51 p. 1438-1441 (1983)
42. F. Takens dans "Dynamical Systems and Turbulence Warwick 1980"
p. 366-381
Lecture notes in Math. 898, Springer, New-York (1981)
43. F. Takens dans "Non-linear Dynamics and Turbulence" p. 314-332
Edité par G.I. Barenblatt, G. Loos et D.D. Joseph Pitman - Londres
1985
44. A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney et J.A. Vastano Physica 16D
(1985) p. 285-317
45. M. Sano et Y. Sawada Phys. Rev. Lett. 55, p. 1082 (1985)
46. J.A. Vastano et E.H. Kostelich dans "Dimensions and Entropies
in chaotic systems" Edité par G. Mayer-Kress Springer-Verlag
pp. 100-108 (1986)
47. H.S. Greenside, A. Wolf, J. Swift et T. Pignataro Phys. Rev. A
25 n° 6 p. 3453-3456 (juin 1982)
- 48.a N.H. Packard, J.P. Grutchfield, J.D. Farmer et R.S. Shaw Phys.
Rev. Lett. 45 n° 9 p. 712-716 (1er septembre 1980)
b H. Froehling, J.P. Grutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packard et
R. Shaw Physica 3D p. 605-617 (1981)
49. J.C. Roux, R.H. Simoyi et H.L. Swinney Physica 8D p. 257 (1983)
50. H.G.E. Hentschell et I. Procaccia Physica 8D p. 435-444 (1983)
51. P. Grassberger et I. Procaccia Phys. Rev. Lett. 50 p. 346 (1983)
52. Y. Termonia Phys. Rev. A. 29 n° 3 (mars 1984)
53. G. Paladin et A. Vulpiani Lettere al Nuovo Cimento Vol 41 n° 3
p. 82 (1984)

- 54. Y. Termonia et Z. Alexandrowicz Phys. Rev. Lett. 51 n° 14 (3 octobre 1983)
- 55. M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia et J. Stavans Phys. Rev. Lett. Vol 55 n° 25 p. 2798-2801 (16 décembre 1985)
- 56. R. Badii et A. Politi J. Stat. Physics Vol 40 n° 5-6 p. 725-750 (Sep. 1985)
- 57. K. Lott Rapport de D.E.A. Probabilités, Université de Grenoble 1985 et C. Lausberg Communication personnelle
- 58.a R. Badii et A. Politi Phys. Lett. Vol 104 A n° 6,7 p. 303-305 (10 septembre 1984)
b L.A. Smith, J.D. Fournier et E.A. Spiegel "Lacunarity and Intermittency in Fluid Turbulence" pre-print
- 59. F. Takens "On the numerical determination of the dimension of an attractor" pre-print
- 60. D.S. Broomhead et G. King "Extracting qualitative dynamics from experimental data" Soumis à Physica D (1985)
- 61. Hugues Chaté Rapport de D.E.A. (1985) Université Pierre et Marie Curie, Paris
- 62. J.D. Crawford et S. Omohundro Physica 13D p. 161-180 (1984)
- 63. B. Malraison, P. Atten, P. Bergé et M. Dubois C.R.A.S. Vol 297 II p. 209 (1983) et J. Physique Lett. 44 p. L897-L902 (1983)
- 64. P. Atten, J.G. Caputo, B. Malraison et Y. Gagne Numéro spécial du Journal de Mécanique, "Bifurcations et comportements chaotiques" 1985
- 65. J.G. Caputo dans "Advances in Non linear Dynamics and stochastic processes" Conférence organisée par R. Livi et A. Politi Florence (1985) World Scientific Publishing Co. Singapore (1985)

- 66. J.C. Lacroix "Instabilité hydrodynamiques et électroconvection lors d'injection d'ions dans les liquides isolants isotropes" Thèse d'Etat de Grenoble 1976
- 67. B. Malraison et P. Atten dans "Symmetries and Broken Symmetries" Editeur N. Boccara (IDSET Paris) p. 439 (1981)
- 68. J.G. Caputo Rapport de D.E.A. "Matière et Rayonnement" Université de Grenoble (1983)
- 69. A. Cohen et I. Procaccia, Phys. Rev. A 31A p. 1872 (1985)
- 70. P. Grassberger et K. Kantz pre-print (1985)
- 71. P. Grassberger et I. Procaccia Phys. Rev. A 28 n° 4 (Oct. 1983)
- 72. F. Takens "Invariants related to dimension and entropy" Actes du 13ème "Coloquio Brasileiro de Matematica" non publié
- 73. J.G. Caputo et P. Atten "Metric Entropy : an experimental tool for characterizing and quantifying chaos" à paraître
- 74. P. Bergé, M. Dubois et V. Croquette J. Phys. Lett, 43 L295 (1982)
- 75. J.G. Caputo, B. Malraison et P. Atten "Determination of Attractor Dimension and Entropy for various flows : an experimentalist's viewpoint", texte paru dans "Dimensions and Entropies for Chaotic Systems" Editeur G. Mayer-Kress Springer-Verlag (1986)
- 76. W. Franceschini Physica, 6D p. 285 (1983)
- 77. R.K. Tavakol et A.S. Tworkovski, Physics Letters 102A p. 273 (1984)
- 78. L. Keefe "Dynamics of perturbed wavetrain solutions to the Ginzburg-Landau Equation" Ph. D. University of Southern California (décembre 1984)

- 79. P. Manneville Comm. in Math. Phys. (soumis)
- 80. D. Ruelle Comm. Math. Phys. 87 p. 287-302 (1982)
- 81. Y. Pomeau C.R.A.S. Paris t. 300 série II n° 7 (1985)
- 82. P. Manneville Phys. Lett. 84a n° 3 p. 129-132 (20 juillet 1981)
- 83. D. Ruelle Comm. Math. Phys. 93 p. 285-300 (1984)
- 84. P. Constantin, C. Foias, O.P. Manley et R. Temam Journal of Fluid Mechanics 150 p. 427-440 (1985)

RESUME

A la suite de la manière nouvelle d'aborder la turbulence donnée par Ruelle et Takens en 1971, de nombreux travaux ont montré que l'on atteint un régime chaotique d'écoulement du fluide à la suite d'un petit nombre d'étapes.

Nous nous intéressons à la caractérisation de ces régimes chaotiques par la détermination de la dimension et de l'entropie des attracteurs étranges.

Pour cela nous mettons en oeuvre et adaptons la méthode de Grassberger et Procaccia (1983) de façon parallèle sur des systèmes numériques connus et sur des signaux expérimentaux. Nous montrons ainsi de façon indiscutable qu'un régime chaotique de convection de Rayleigh-Bénard est décrit par un attracteur pour lequel nous avons déterminé la dimension (~ 3) et l'entropie. En vue de caractériser des attracteurs de dimension plus élevée, nous avons mis en lumière les conditions dans lesquelles il faut opérer pour obtenir des résultats corrects, sur des exemples précis. Enfin nous envisageons le problème de savoir quelle dimension on peut raisonnablement espérer caractériser.

* * * * *

Mots clefs

Systèmes dynamiques

Turbulence

Attracteurs étranges

Dimensions fractales

Entropie d'information

* * *

