



UNIVERSITÉ PARIS
DIDEROT (Paris 7)
SORBONNE PARIS
CITÉ

UNIVERSITÉ DE
SZEGED



École doctorale « **Savoirs scientifiques :
épistémologie, histoire des sciences et
didactique des disciplines** »
Laboratoire de didactique André Revuz

École doctorale de **mathématiques
et informatique**
Institut Bolyai

Doctorat

Didactique des mathématiques

Katalin GOSZTONYI

Traditions et réformes de l'enseignement des
mathématiques à l'époque des 'mathématiques modernes' :
le cas de la Hongrie et de la France

*Hagyomány és reform a matematikaoktatásban a
'New Math' idején : Magyarország és Franciaország
reformjainak összehasonlítása*

VOLUME 2 : ANNEXES

TABLE DES ANNEXES

ANNEXES DE LA PARTIE I	5
I.1 Notes biographiques sur les mathématiciens hongrois	7
I.2 Tamás Varga	9
ANNEXE DE LA PARTIE II	13
II Remarques concernant la place des conceptions « bourbakiste » et « heuristique » dans l’histoire de la philosophie des mathématiques.....	15
ANNEXES DU CHAPITRE III.2	19
III.2.1 Tableau comparatif des programmes du niveau élémentaire	21
III.2.2 Tableau comparatif des programmes du niveau moyen	33
III.2.3 Extrait de la traduction anglaise du programme hongrois (1974)	34
ANNEXES DU CHAPITRE III.3	37
III.3.1 Exemples de fiches de travail françaises	39
III.3.2 Les onze premières fiches de Varga	45
III.3.3 Eiller : table des matières du livre du maître	51
III.3.4 Eiller : organigramme	52
III.3.5 Eiller : tableaux de répartition annuelle.....	53
III.3.6 Eiller : les leçons analysées	55
III.3.7 ERMEL : le plan du chapitre « correspondance terme à terme ».....	59
III.3.8 ERMEL : transcription de la séance de « distribution ».....	60
III.3.9 Extraits du livre du maître hongrois	63
III.3.10 La préface du livre du maître hongrois.....	66
ANNEXES DU CHAPITRE III.4	67
III.4.1 Extraits du premier manuel de la collection Queyzanne-Revuz.....	69
III.4.2 Monge : propriété d’un rapport de projection orthogonale	73
III.4.3 Monge : exercices pour le théorème de Pythagore.....	74
III.4.4 Dialogue du manuel hongrois : la distance des ensembles de points	75
III.4.5 Dialogue du manuel hongrois : la comparaison des fractions	77
III.4.6 Série de tâches hongrois, théorème de Pythagore	81
ANNEXES DU CHAPITRE III.5	83
III.5.1 Le jeu de soustraction et de probabilités	85
III.5.2 Le jeu avec trois disques.....	87
III.5.3 Arriver à l’école à l’heure.....	89
III.5.4 Une série de problèmes de combinatoire de Varga	91
III.5.5 La construction des tours colorées.....	101
III.5.6 Deux séries de problèmes des manuels hongrois de l’école moyenne	109
III.5.7 ERMEL: La construction des maisons	113

ANNEXES DE LA PARTIE I

I.1 NOTES BIOGRAPHIQUES SUR LES MATHÉMATIENS HONGROIS

László Kalmár (1905-1976) est professeur à l'Université de Szeged, spécialiste de la logique et de la linguistique mathématique, pionnier de la théorie de l'informatique en Hongrie. Il est réputé pour sa culture mathématique vaste, pour son talent d'enseignant, et pour ses lettres mathématiques écrites dans un style intuitif et suggestif, largement diffusées dans la communauté mathématique¹. Il n'a jamais été directement investi dans l'éducation publique, mais de nombreux collègues se souviennent à lui comme d'un personnage ayant exercé une influence décisive sur leur pensée mathématique et pédagogique².

C'est le cas, entre autres, de **Rózsa Péter** (1905-1977), sa camarade à l'Université de Budapest et son amie proche pendant toute leur vie : elle a reconnu Kalmár comme son maître (Péter 1977). Péter est une spécialiste des fonctions récursives. Similairement à Kalmár, elle a commencé sa carrière mathématique en lien avec l'école de Hilbert, s'intéressant aux problèmes de la fondation des mathématiques ; tous les deux ont fait un travail important autour des théorèmes de Gödel, de Church, de Gentzen (Máté 2008).

Rózsa Péter a également eu une expérience dans l'éducation publique : jusqu'à la fin de la seconde guerre mondiale, probablement à cause de son origine juive, elle n'a pas obtenu de poste universitaire, elle a enseigné au niveau secondaire (Császár 1977). Dans son œuvre la plus connue, son livre de vulgarisation publié en 1945 sous le titre *Játék a végtelennel* (*Jeux avec l'infini*), elle fait référence entre autres à ses expériences d'enseignement dans des classes du niveau moyen. Ce livre est devenu très populaire, publié régulièrement jusqu'à aujourd'hui, et traduit dans de nombreuses langues étrangères, dont le français en 1977 et en 2014.

Péter obtient sa nomination universitaire après la guerre, et elle intervient principalement dans la formation des enseignants à Budapest. À partir de 1949, avec le mathématicien T. Gallai et d'autres, elle est l'auteure d'une série de manuels pour les lycées utilisée pendant les années 1950 (Gallai & Péter 1949). Particulièrement intéressée par la littérature, elle défend régulièrement l'importance des liens entre arts et mathématiques (par ex. Péter 2004). Elle soutient très activement le mouvement de Varga dans les années 1960 et 1970, même au prix de conflits et débats violents (entretiens avec L. Pálmay, E. Deák).

Alfréd Rényi (1921-1970) est connu avant tout pour ses recherches sur la théorie des probabilités (Rényi 1966). Mais il a également été très actif dans l'organisation de la vie

¹ Une sélection de ces lettres, ensemble avec d'autres textes de Kalmár, était publié dans (Kalmár 1986).

² Voir par exemple les différentes remémorations dans (Szabó 2008).

scientifique hongroise : avant tout, il est fondateur de l'Institut de Recherche des Mathématiques Appliquées³ en 1950. Il a été l'un des professeurs respectés de l'université ELTE de Budapest. Sans intervenir directement, il était également intéressé par les questions de l'éducation publique, il en a parlé et publié plusieurs fois ; et, par sa position dans la vie scientifique, il était un supporteur efficace du le mouvement de Varga (Katona & Tusnády 1970).

Il est par ailleurs l'auteur de plusieurs œuvres de vulgarisation populaire, écrites dans les années 1960 (Rényi 1973). C'est dans ces textes que sa grande culture littéraire classique peut s'exprimer : il porte l'influence de son grand père, le célèbre philosophe et esthète Bernát Alexander (Rényi 2013 p.13), et il s'était aussi amplement investi dans l'apprentissage du grec, étant lauréat d'une compétition de grec après son baccalauréat (Turán 1970). Les *Dialogues sur les mathématiques* expriment ses pensées sur la nature des mathématiques en forme dialogique, dans le style de Platon et de Galilée ; les *Lettres sur la probabilité* sont des lettres fictives de Pascal adressées à Fermat, dans lesquelles Rényi explique les bases de la théorie des probabilités pour le grand public.

Enfin, quelques mots sur **János Surányi** (1918-2006), disciple de Kalmár à Szeged, spécialiste de la logique, de la combinatoire et de la théorie des nombres : son activité est également importante dans le domaine de l'éducation, surtout concernant l'éducation des élèves doués au niveau secondaire : il a joué un rôle dans la refondation de la revue KÖMAL après la guerre, et dans la fondation de la Société Mathématique János Bolyai (société des mathématiciens et des enseignants de mathématique). C'était en outre lui qui dirigeait le groupe didactique de l'Institut Mathématique, travaillant sur le programme des classes spécialisées. Son activité internationale est également importante, il a été vice-président de l'ICMI et membre du comité scientifique de la revue ZDM, entre autres choses (Szalay & Urbán 1980).

³ L'Institut abandonne le mot appliqué quelques années plus tard. Aujourd'hui, il porte le nom de son fondateur. <http://www.renyi.hu/facts.html> [dernière consultation le 22 mai 2015]

I.2 TAMÁS VARGA

Tamás Varga est né en 1919, à Kunszentmiklós, dans une famille calviniste. Il s'agit d'une famille avec de grandes traditions intellectuelles : on trouve également parmi ses ascendants des mathématiciens, des écrivains, etc. Son père, Tamás Vargha⁴ a aussi étudié les mathématiques, mais a ensuite suivi une carrière de pasteur calviniste. Il joue beaucoup avec ses enfants, des jeux de mots, des jeux logiques, d'échecs entre autres choses, et ceci a un effet pas seulement sur le jeune Tamás, mais aussi sur les autres⁵ : deux frères de T. Varga deviennent également connus, Balázs en tant que linguiste et anthropologue de jeux, Domokos en tant qu'écrivain.

Tamás Varga s'intéresse aux mathématiques depuis son enfance, il participe avec succès aux compétitions de résolution de problèmes du journal KÖMAL. Il suit une formation d'enseignant de mathématiques et de physique à l'Université des Sciences de Budapest. Il est particulièrement intéressé par les langues, il apprend de nombreuses langues étrangères : ces connaissances vont l'aider à suivre une grande diversité de mouvements de réformes internationales dans les années 1960 et 1970. Après l'obtention de son diplôme en 1942, à la recommandation de Lipót Fejér, il passe un an et demi à la Scuola Normale Superiore à Pise (Császár 1993, Szendrei 2007).

Il rejoint la communauté de Sándor Karácsony, dès les années 1930, en tant qu'étudiant, et ses frères le suivent⁶. Varga a peu parlé de l'influence de Karácsony, probablement à cause de sa marginalisation politique pendant l'époque communiste⁷. Cette influence est pourtant profonde et indéniable selon le témoignage des collègues et de la famille⁸. C'est dans la communauté de Karácsony qu'il a pu rencontrer pour la première fois, entre autres choses, l'idée d'une réforme pédagogique, de l'autonomie de l'enfant et de l'éducation indirecte, de l'éducation dans et par la communauté, de la psychologie du développement, du rôle de la visualisation dans l'apprentissage : idées qui sont devenues plus tard des principes importants de sa conception pédagogique.

⁴ Le fils, Tamás Varga a supprimé le « h » de son nom, mais ses frères l'ont gardé.

⁵ Information fournie par les enfants des frères Varga (ou Vargha) lors du séminaire du Magyar Pedagógiai Társaság, ayant pour objet leur héritage pédagogique, le 10 décembre 2013 <http://pedagogiai-tarsasag.hu/?p=3913> [dernière consultation le 20 mai 2015].

⁶ Nous rappelons que Karácsony était un éducateur calviniste très connu pendant les années 1930 (Partie I, §**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) : le lien avec les frères Varga n'est donc pas étonnant. En même temps, selon la famille Varga, ce lien était une source de conflit avec le père Vargha, qui a représenté un courant calviniste plus conservateur que le « réformateur » Karácsony. Les frères ont pourtant cultivé une relation très étroite avec ce dernier (intervention de M. Balogh au séminaire sur les frères Varga le 10 décembre 2013).

⁷ On y trouve quelques références dans sa correspondance de jeunesse (Szabó 2005 p. 393-398).

⁸ L'information est reçue au séminaire mentionné sur les frères Varga, et en outre de Mária Halmos.

Après un service militaire pendant la guerre, il commence à enseigner au lycée en 1945. Mais très tôt, dès 1947, il est invité à participer au développement de l'éducation au niveau national, d'abord au ministère de l'éducation, ensuite à l'Institut Pédagogique : il écrit et édite des manuels scolaires. Après la fermeture de l'Institut en 1950, il est employé, de 1951 jusqu'en 1967, à la Faculté de Sciences de l'Université Eötvös Loránd (ELTE) de Budapest, où il intervient dans la formation des enseignants. Il recommence aussi son activité d'enseignant du secondaire dès 1955 ; à la même époque, il commence à lire de la littérature internationale sur la rénovation de l'enseignement des mathématiques, et il reconnaît que la rénovation doit être commencée à l'école élémentaire (Császár 1993, Szendrei 2007).

Selon plusieurs écrits commémoratifs et résumés des collègues (par ex. Klein 1980 p. 30-31), l'événement qui marque le début de ses expérimentations est une série de conférences de Z. P. Dienes, qui est intervenu au second Congrès Hongrois des Mathématiques en 1960. Varga commence des expérimentations dans une classe de l'école élémentaire l'année suivante, en 1961, mais qui échouent rapidement. En 1962, un Symposium Mathématique International de l'UNESCO est organisé à Budapest, qui lui donne d'une part suffisamment d'inspiration pour relancer ses expérimentations, et qui d'autre part lui apporte une reconnaissance internationale (Szendrei 2007 p. 2). Il est chargé d'éditer les actes du congrès avec le belge Willy Servais (Servais & Varga 1971), et dans les années suivantes, il est invité dans de nombreux pays (Császár 1993).

Les expérimentations dites « Komplex Matematikatanítási Kísérlet » (Expérimentation de l'Enseignement des Mathématiques Complexe) sont lancées au cours de l'année scolaire 1963-1964 dans deux classes de l'école élémentaire du Váci utca, au centre-ville de Budapest. Ce sera la base des expérimentations qui se répandent progressivement les années suivantes. Il abandonne son poste universitaire en 1967, et s'installe dans l'Institut Pédagogique National (OPI, cf. Partie I §**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) pour pouvoir diriger les expérimentations (Szendrei 2007). Son travail, qui devient base du programme officiel dans les années 1970, est de plus en plus reconnu, il obtient plusieurs prix nationaux. Il soutient sa thèse, fondée sur ce travail, en 1975 (Varga 1975).

Il poursuit une activité internationale étendue dès la fin des années 1960. Il devient particulièrement connu pour ses travaux sur l'enseignement de la logique, de la combinatoire et des probabilités. La biographie qu'il fournit à sa thèse liste ses invitations et publications internationales : il est invité, entre autres, en Union Soviétique, en Pologne, en Allemagne de l'Est et de l'Ouest, en France, en Italie, en Espagne, aux États-Unis et au Canada. Ses livres et articles sont publiés en anglais, français, allemand, italien, espagnol, russe, slovaque, polonais

et japonais⁹. Il est membre du comité scientifique de plusieurs revues internationales, y compris la revue *Educational Studies in Mathematics*, et il est vice-président du CIEAEM (Szendrei 2007).

On peut donc dire qu'il est profondément intégré dans la dynamique internationale de la rénovation de l'enseignement des mathématiques : il lit de la littérature internationale dès les années 1960, et s'en inspire pour ses expérimentations ; de l'autre côté, il exerce une certaine influence internationale, surtout dans les années 1970 et 1980. Nous soulignons ici particulièrement ses relations françaises, ce qui justifie l'existence des interactions directes entre le mouvement de réforme hongroise et française. Selon sa biographie de 1975, il est invité à une école d'été à Quimper, en 1970 et 1977, pour donner des cours sur le sujet de l'enseignement des probabilités. Il donne des conférences à l'Université de Bordeaux, de Lyon, de Rouen et à l'Université Paris 7. En outre, selon Josette Adda¹⁰, il était invité à l'Institut Pédagogique National pour travailler sur l'enseignement de la combinatoire et des probabilités. Parmi plusieurs de ses publications françaises, nous soulignons des fiches de travail, accompagnées d'un cahier de commentaires sur l'enseignement de la combinatoire, de la statistique et des probabilités, publié avec Marcel Dumont en 1973, et un livre sur l'enseignement des probabilités, publié avec Maurice Glaymann en 1973¹¹.

Il est par ailleurs engagé aussi pour la diffusion des œuvres et résultats de la scène internationale en Hongrie : pour en donner un exemple, c'est lui qui traduit en hongrois le livre d'André Revuz intitulé *Mathématique moderne, mathématique vivante* (Revuz 1973).

Tamás Varga est mort en 1987. Sa personne et son œuvre restent un point de référence pour la communauté hongroise de l'enseignement des mathématiques, ce qui s'exprime dans de nombreux événements et institutions portant son nom.¹² Les actes des Journées Tamás Varga contiennent régulièrement des commémorations, et insistent sur l'importance et sur l'actualité de l'œuvre de Varga.

⁹ Voir les bibliographies de Varga, de 1975 (manuscrit) et de 1980 (*Matematikai Lapok*).

¹⁰ Information fournie lors d'une discussion avec elle le 20 janvier 2015 ; mais ces séjours ne sont pas mentionnés dans la biographie.

¹¹ Selon sa biographie, les co-auteurs ont fait le travail d'adaptation des matériaux de Varga aux circonstances françaises. Dans une attestation signée par Glaymann le 14 janvier 1977 (manuscrit), le livre était rédigé en français par Glaymann, basé sur les travaux divers de Varga publiés précédemment en anglais ; les paragraphes 1 à 4 du chapitre I et le chapitre II sont essentiellement l'œuvre de Varga, le reste (paragraphe 5 du chapitre I et chapitre III) est celle de Glaymann.

¹² Pour ne signaler que quelques exemples : Compétition Tamás Varga (compétition nationale des mathématiques pour des élèves de 13-14 ans), Journées Tamás Varga (colloque annuel des enseignants de tous les niveaux et des formateurs d'enseignant en mathématique, organisé à l'Université ELTE à Budapest), Prix Tamás Varga (offert chaque année aux enseignants ou formateurs qui transmettent son héritage avec succès). Voir les sites : <http://www.mategye.hu/?pid=vargatamasverseny>, <http://mathdid.elte.hu/html/vtn.html>, http://www.vtamk.hu/magyar/oldalaz_alapitvany/ [dernières consultations le 21 mai 2015]

ANNEXE DE LA PARTIE II

II REMARQUES CONCERNANT LA PLACE DES CONCEPTIONS « BOURBAKISTE » ET « HEURISTIQUE » DANS L'HISTOIRE DE LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

Dans la Partie II, nous avons identifié deux conceptions différentes sur la nature des mathématiques dans l'arrière-plan des réformes de l'époque des « mathématiques modernes », l'une en France et l'autre en Hongrie : nous les avons nommées respectivement « bourbakiste » et « heuristique ». Nous ne sommes pas dans la mesure de situer ces deux conceptions dans l'histoire internationale de la philosophie des mathématiques. Nous pouvons toutefois donner quelques repères, avant tout grâce à un article déjà cité de Corry (2001). Il y compare l'épistémologie de Bourbaki à celle de Hilbert, pour montrer comment la première dérive de la dernière. Il suggère que la conception originale de Hilbert, complexe et parfois ambiguë, permet plusieurs interprétations possibles, et celle de Bourbaki est une version déformée de l'avis original de Hilbert. Selon Corry, grâce à la diffusion large de l'œuvre de Bourbaki, c'est cette interprétation bourbakiste de Hilbert qui est devenue la plus répandue (Corry 2001 p. 28).

Nous avons vu dans la Partie I que plusieurs des mathématiciens hongrois étudiés, notamment Kalmár, Péter et Pólya ont fait des séjours à Göttingen, et les recherches de Kalmár et de Péter rejoignent directement les travaux de l'école de Hilbert. On trouve donc chez Hilbert une source d'inspiration commune pour Bourbaki et pour la communauté hongroise. En même temps, l'interprétation de Kalmár sur la méthode axiomatique de Hilbert, comme il le décrit dans (Kalmár 1942) ressemble beaucoup plus à celle reconstruite par Corry comme l'approche originale de Hilbert qu'à l'interprétation diffusée par Bourbaki.

Hilbert's interest in the axiomatic method was closely connected with his awareness to the constant changes that scientific theories undergo in the course of their historical development. This applies to physical as well to mathematical disciplines. One of the aims of the axiomatic analysis of theories was for Hilbert, the possibility of analyzing whether the adoption of new hypothesis into existing theories would lead to contradiction with the existing body of knowledge, a situation that in his view had been very frequent in the history of science.

[...]

Aware of the power of reflexive mathematical reasoning, Hilbert obviously thought that some meta-questions about mathematics can be solved within the body of mathematical knowledge, definitely endorsing the answers by means of standard mathematical proofs. The formalistic program for the foundations of mathematics, in which he was involved in the 1920s, was based precisely in transforming the very idea of a mathematical proof into an entity susceptible of mathematical study in itself.

[...]

Hilbert did discuss the possibility of solving metamathematical issues inside the body of mathematical knowledge, and more specifically, with the help of the axiomatic method. Hilbert, however, was aware of the limitations of this approach to solving such issues, and on many occasions he also stressed the contextual, historical or sociological, factors that affected the actual answers to questions such as the relative importance of mathematical theories, or the appropriate way to organize mathematical knowledge.

[...]

Hilbert sharply criticized accepted views of mathematics and physics. He explicitly discarded the view that mathematics can be reduced to a formal game played with meaningless symbols according to rules established in advance, while stressing the role of intuition and experience as a source of mathematics. He also discussed the place of conjectural thinking, and the fallibility of mathematical reasoning. (Corry 2001 pp. 13-17)

Corry examine également les critiques récentes de la conception bourbakiste. Selon lui, les premières critiques épistémologiques systématiques émergent à partir des années 1980 ; il se réfère notamment à (Tymoczko 1986) comme premier recueil présentant systématiquement une conception « quasi-empirique » des mathématiques (Corry 2001 p. 42). Ce recueil de Tymoczko accorde une place importante aux textes divers de Lakatos et de Pólya, et insère notamment l'article cité de Lakatos sur la nature « quasi-empirique » des mathématiques (Lakatos 1976). On a vu en effet que l'expression était introduite par Lakatos – suite à une conférence de Kalmár. De plus, Corry remarque que, à part des articles « plus classiques » de Lakatos, les arguments plus récents du livre de Tymoczko sont liés aux nouvelles démonstrations très longues ou faites à l'aide d'ordinateurs ; mais ces arguments viennent surtout de l'extérieure des mathématiques, et les mathématiciens pratiquants n'y adhèrent qu'à partir des années 1990 (Corry 2001 p. 43). En fait, constructeur du premier ordinateur en Hongrie et faisant des recherches sur l'informatique (Kántor-Varga 2006 p. 581), Kalmár fournit des arguments similaires déjà dans son article de 1967.

De ce point de vue, l'impact de « l'école hongroise » semble dépasser les limites d'un épisode isolé de l'histoire de l'enseignement. Il apparaît que l'on peut reconstituer deux fils épistémologiques alternatifs, partant de Hilbert, dont l'un, le bourbakiste est largement diffusé, alors que l'autre est beaucoup moins visible jusqu'aux années 1980. Kalmár apparaît comme un représentant pertinent de ce fil alternatif, dont l'influence rejoint le discours international à travers l'œuvre de Lakatos.

Il serait intéressant d'essayer de reconstituer de façon plus approfondie l'arrière-plan et le contexte international de l'approche « heuristique » dont nous pouvions repérer l'existence en Hongrie au milieu du 20^e siècle : les liens avec les mathématiques allemandes semblent être

particulièrement intéressants. Nous remarquons aussi que cette conception semble être très proche de celle du mathématicien hongrois Fejér (cf. Partie I, §4.1.3), et montre en outre une certaine parenté avec les principes des réformes d'enseignement allemandes et françaises du début du 20^e siècle (cf. Partie I, §2.1).

ANNEXES DU CHAPITRE III.2

III.2.1 TABLEAU COMPARATIF DES PROGRAMMES DU NIVEAU ÉLÉMENTAIRE

	Programme hongrois 1946 "Calcul et mesure"	Programme hongrois 1962 "Calcul et mesure"		Programme hongrois 19781314 "Mathématiques"
Horaires du gr. 1 à 8	5 5 5 5 3 3 3 3	5 6 6 6 5 5 4 4		6 6 5 5 5 5 4 4
gr. 1		préparation: comptage ("számlálgatás") notions de relation: propriétés des objets, orientation dans l'espace et parmi les quantités		
			Ensembles, Logique	Comparer, classifier des objets (personnes, signes, phénomènes) Changement des propriétés Définir des ensembles à partir des propriétés des objets (...)
	nombres jusqu'à 20. Addition, soustraction. Sur objets, exemples concrets puis abstraitement jusqu'à 100. (sans franchissement de 10)	nombres jusqu'à 10 puis jusqu'à 20. addition, soustraction. Problèmes simples (szöveges feladatok= "tâches avec texte"). chiffres romains franchissement de 10=tízésátlépés	Arithmétique, Algèbre	les nombres comme propriétés des ensembles et comme nombres de mesure comparer et ordonner les nombres de 1 à 20. Les signes <, >, =. Créer des phrases arithmétiques vraies et fausses. Addition, soustraction et leur relation. Division en 2, 3 etc. partie égale. Groupement par deux, les nombres paires. Expression des nombres comme résultats des opérations à plusieurs différentes façons résolution des "phrases à trou" (nyitott mondatok) préparation des systèmes numériques: groupements. tâches avec texte (szöveges feladatok) avec dessin, opérations. Créer des tâches avec texte
			Relations, fonctions, séries	relations simples, avec dessin aussi, utilisation des flèches séries simples avec objets, dessins, puis avec nombres jeux de règles (fonctions) avec objets, dessins, nombres expression des règles des fonctions, séries plus simples avec des mots
	argent, longueur, capacité, poids, temps	notions plus/moins longue, lourd, haut etc.	Géométrie, Mesure	comparer, classer, ordonner des quantités; plus, moins, égal

13 Dans le programme de 1978, les horaires sont indiqués par an et non par semaines : semaines sont comptées par an, et 192, 160 ou 128 heures.

14 Le signe * signifie les parties facultatives du programme, pour les classes ou élèves plus avancées.

	estimations et mesures concrets de longueur	mois, jours, heures estimations et mesures concrets mesures et calculs pratiques		construire, modeler des solides de différents matériaux préparer des polygones des différents matériaux, classer selon des nombres des côtés, sommets carrelages lignes ouvertes et fermés, dedans, dehors, au milieu plier un angle droit, décider d'un quadrilatère si rectangle ou pas préparer des figures symétriques, découvrir des symétries
			Combinatoire, probabilités, statistique	exercices combinatoires simples, créer, identifier des possibilités le plus possible notions certain, possible, impossible expérimentations simples, leurs notations, représentations, graphiques
gr. 2			Ensembles, Logique	classer des éléments, objets selon des aspects définis ou reconnus par les élèves sous-ensemble et ensemble complémentaire classification selon 2 ou plusieurs aspects paires constituables des éléments de 2 ensembles
	nombres jusqu'à 100 conversion de 10 4 opération sur objets, exemples concrets puis abstraitement construire progressivement et pratiquer le tableau de multiplication	nombres jusqu'à 100, introduction à l'aide du système décimal addition, soustraction jusqu'à 100 construire des séries des nombres tableaux de multiplication et de division (en ordre croissant) tâches numériques et tâches avec texte	Arithmétique, Algèbre	droite numérique, nombres jusqu'à 100 sur la droite, coup d'œil sur des nombres plus grands et sur des négatifs groupements par 2, 3 etc. le système décimal comme le plus fréquent; notation positionnelle mesures avec différentes unités, relations des unités (2 fois plus grand, tiers etc.) multiplication, division (préparation par additions, groupements des éléments) utilisation des parenthèses découvrir des propriétés fondamentales des opérations substituer aux phrases ouvertes, juger si elles sont vraies ou fausses résoudre, créer des tâches avec texte
			Relations, fonctions, séries	continuation séries, fonctions (jeux de règles) découvrir relations entre nombres, quantités, faire des graphiques constituer des séries arithmétiques et géométriques
	argent, longueur, capacité, poids, temps, plus en détails estimations et mesures concrets pliage de papier, dessin	différentes unités de mesure, suivant l'extension des nombres étudiés estimations et mesures des longueurs, capacités, temps mesure sur balance à deux flèches	Géométrie, Mesure	construire des solides à partir d'imagination, modèles, dessins nombre des faces, arêtes, sommets préparer des figures, solides convexe et concave, les séparer (sans les expressions) carré comme rectangle aux côtés égaux

		mesures et calculs pratiques		<p>pavé droit, cube</p> <p>agrandissement, réduction sur grilles</p> <p>mesures avec différentes unités communs et occasionnelles</p> <p>lignes simples et composés (avec bifurcations), parcours (parcourir un graphe) sur exemples simples</p> <p>localisation sur une ligne à l'aide d'une, et sur le plan à l'aide de deux données</p>
			Combinatoire, probabilités, statistique	<p>nombre des paires construisables des éléments de deux/trois ensembles</p> <p>chercher de plus de possibilités possibles dans autres pbs combinatoriques</p> <p>jeux de probabilité expériences pour les notions certain, pas certain, possible, impossible</p> <p>identifier des évènements, fréquences</p>
gr. 3			Ensembles, Logique	<p>groupement des personnes, objets, mots...</p> <p>ensemble initial, sous-ensemble, ensemble complémentaire. Relation avec la négation.</p> <p>"tout", "il existe", (van, amelyik nem), "aucun" et expressions synonymes</p> <p>union, intersection des ensembles (par activités, dessins), diagrammes</p> <p>*notation avec accolade</p>
	<p>nombres jusqu'à 1000, calcul mental avec les 4 opérations</p> <p>notation positionnelle</p> <p>addition, soustraction écrite</p> <p>pratiquer le tableau de multiplication</p> <p>chiffres romains</p>	<p>nombres jusqu'à 1000</p> <p>4 opérations écrits</p>	Arithmétique, Algèbre	<p>nombres relatifs: thermomètre, dette *opérations simples avec outils</p> <p>nombres jusqu'à 1000, données statistiques. Calcul mental en cas simples</p> <p>estimer des résultats des opérations</p> <p>fractions de l'unité, opérations simples par activité</p> <p>systèmes numéraux, notation positionnelle *opérations dans différents systèmes numéraux</p> <p>préparer la multiplication écrite. Multiplication avec nombres à un chiffre</p> <p>résoudre des phrases ouvertes par essai, approximation</p> <p>phrases ouvertes toujours et jamais vraies</p> <p>chercher des solutions des phrases ouvertes à deux variables, *solution commune de deux phrases ouvertes</p> <p>multiplication de plusieurs facteurs</p> <p>division entière, relation avec des phrases ouvertes</p>

				tâches avec texte avec une ou plusieurs opérations. Créer des tâches numériques à partir des tâches avec texte et à l'inverse. Vérification des résultats. Chercher plusieurs méthodes de résolution. Tâches avec plusieurs et sans solution, transformation à des tâches univoques et résolubles.
			Relations, fonctions, séries	définir des relations graphiquement séries, fonctions (jeux de règles), chercher des règles
	pratiquer des estimations et mesures mesure des surfaces avec unités directions, situations spatiales observation des prismes (?) présentation du cube et du parallélépipède rectangle, et sur cette base, les notions fondamentales liées au carré et au rectangle pliage de papier, dessin	différentes unités de mesure, suivant l'extension des nombres étudiés comparer les côtés des carrés et des rectangles avec mesure angles du carré et du rectangle périmètre du carré et du rectangle droites sécantes, parallèles mesures et calculs pratiques	Géométrie, Mesure	l'angle comme changement de direction lignes fermées simples, points internes, externes. Plusieurs lignes, points dans l'une ou l'autre, dans les deux, dans une des deux, dans aucun (lien avec les ensembles, logique) figures avec et sans trou (combien de découpage) mesure de longueur, surface, volume, angles, autres quantités construire des solides, étude des réseaux des solides agrandissement, réduction sur le plan et dans l'espace. Étirage sur grilles étirés notion intuitive de la similitude et la coïncidence symétrie axiale sur grille découvrir la méthode de mesurer la surface d'un rectangle, volume d'un pavé droit cercle, points d'une distance donnée d'un point défini, chercher des points plus proche, plus loin; construire un cercle par différents moyens, dessins avec compas vue d'ensemble des systèmes de mesure traditionnels
			Combinatoire, probabilités, statistique	exercices combinatoires, représentation avec arbres expérimentations de probabilité, liste des résultats possibles événements probables et moins probables *conjectures et leur comparaison avec l'expérience préparer la notion de la moyenne arithmétique
gr. 4			Ensembles, Logique	ordinogramme (folyamatabra) avec bifurcations union des ensembles qui ont des éléments communs propositions sur ensembles, unions, sections, complémentaires. 'non', 'et', 'ou'. Ensemble vide.
	construire la série des nombres jusqu'à 100 000 puis jusqu'à million; illustrer des grands quantités		Arithmétique, Algèbre	Nombres jusqu'à million. préparation nombres décimales (dans le contexte des unités des mesure)

<p>4 opérations écrites, pratiquer le calcul mental et écrit</p> <p>illustrer et écrire des fractions simples</p>			<p>kerekités</p> <p>opérations écrites (division avec nombres à un chiffre). Division mentale avec nombres à deux chiffres en cas simples</p> <p>utilisation des parenthèses</p> <p>*introduction du signe de puissance</p> <p>*problèmes de divisibilité</p> <p>modèles des nombres relatifs (température, avoir, temps). Nombres relatifs et 0 sur la droite numérique. Opérations avec nombres relatifs.</p> <p>fractions, opérations simples avec outils, dessins; transformations après l'expérience. Leurs lieux sur la droite numérique.</p> <p>résoudre des phrases ouvertes par essai.</p> <p>chercher des phrases ouvertes avec le même ensemble de solutions. phrases ouvertes avec solution pas numérique. Solution commune de deux phrases ouvertes.</p> <p>Résoudre et créer des tâches avec texte. Trouver toutes les solutions. Conditions superflues, contradictoires, manquantes. Comparer plusieurs méthodes de résolution.</p>
		<p>Relations, fonctions, séries</p>	<p>*Représenter des paires des éléments des fonctions dans un système des coordonnées.</p> <p>Écrire avec flèches et plusieurs phrases ouvertes.</p> <p>*Relations parcours-temps et travail-temps (préparation des notions vitesse, puissance).</p> <p>Continuer des séries en deux sens, chercher des éléments manquants.</p> <p>*Chercher le 20e, 100e etc. élément d'une série.</p> <p>Somme des nombres naturels jusqu'à 30, 50 etc. *tâches similaires sur autres séries simples.</p>
<p>pratiquer des estimations et mesures</p> <p>mesure des surfaces avec unités, calcul des surfaces simples</p> <p>mesures sur cube et sur parallélépipède rectangle</p>		<p>Géométrie, Mesure</p>	<p>Mesures avec plusieurs unités, exactitude croissante. Conversion. Unités traditionnelles de mesure.</p> <p>Construire des solides. *Projections orthogonales.</p> <p>Observer, chercher des droites sécantes, parallèles, (kitéřó)</p> <p>mesure des angles avec différents unités</p> <p>*parallélisme, perpendicularité sur grilles</p> <p>réflexion, agrandissement, réduction, étirage. *rotation, réflexion centrale</p> <p>coïncidence, similitude, sa proportion sur un dessin</p> <p>périmètre, aire, surface, volume, leur mesure avec différents unités</p> <p>*mesures sur terrain, faire des plans</p>

				réseaux des lignes (graphes), propriétés, nombre des arêtes d'un sommet *observation du ruban de Möbius
			Combinatoire, probabilités, statistique	Étudier l'ensemble des cas des tâches de combinatoire à l'aide des diagrammes (arbre, chemin) et des tableaux. Nombre des cas. fréquence des évènements aléatoires, fréquence relative chercher des évènements certains, impossibles, possibles. ordonner des évènements: plus et moins probable représenter, lire, ordonner des données statistiques (nombres jusqu'à million). Modus, médiane, moyenne arithmétique.

	Programme français 1945 ¹⁵ « Calcul »					Programme français 1970 « Mathématiques »					Programme français 1978 « Mathématiques »				
Horaires du gr. 1 à 9	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
	2	2	3/2,5	3/2		4	4	4	3		3 ?	?	?		
gr 1 (CP)											Manipuler et connaître les objets et les collections d'objets		Reconnaître les propriétés Classer et ranger Mettre en correspondance		
	nombres de 1 à 5 puis, à 10 puis à 20 usage pièces et billets, décimètre nombres de 1 à 100 damier de cent cases, mètre à ruban compter par 2, 10, 5 problèmes concrets d'addition, soustraction multiplication, division par 2 et 5										Connaître le nombre		dégager la notion du nombre: termes «autant que», «plus que», «moins que» ; classer les collections d'objets, y associer des nombres numération décimale écrite et parlée, nombres de un et deux chiffres, égalités du type $27=20+7$ comparer les nombres: signes =, ≠, <, >; suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant		
											Calculer sur les nombres		somme, addition: situations faisant intervenir la somme de 2 puis plusieurs nombres table d'addition; calcul mental; parenthèses technique opératoire de l'addition situations sous la forme $a + . =c$ étudier et traiter des problèmes simples		
										Se situer dans l'espace et organiser		positions relatives d'objets par rapport à différents repères déplacements, itinéraires, parcours repérage, quadrillage, tableaux reconnaître des formes et figures simples: courbes et domaines: intérieur, extérieur; pavages, mosaïques, puzzles organiser : pliage, découpage ; successions			

¹⁵ Les codes-couleurs correspondent aux catégories du programme hongrois de 1978 pour faciliter la comparaison. Nous indiquons par ailleurs les catégories définies par chaque programme.

					régulières, frises ; jeux de constructions, d'emboîtement
gr 2-3 (CE)	<p>formation des nombres de 1 à 20. table d'addition</p> <p>numération de 1 à 100 puis de 1 à 1000</p> <p>compter par milliers en lien avec l'étude des unités usuelles du système métrique : franc, m, cm, km, l, cl, hl, g, kg</p> <p>addition, soustraction</p> <p>addition, soustraction mentale d'un nombre d'un chiffre</p> <p>table de multiplication</p> <p>multiplication et division (deux chiffres ou plus) dans des problèmes simples</p> <p>calcul rapide de la multiplication, division par 2 et 5</p> <p>calcul de la surface d'un rectangle (cm^2, m^2)</p>	Éléments de mathématique	<p>Les nombres naturels : nom et écriture.</p> <p>Somme et différence de deux nombres ; pratique de l'addition et de la soustraction.</p> <p>Produit de deux nombres ; pratique de la multiplication.</p> <p>Quotient exact.</p> <p>Division avec reste : quotient entier.</p> <p>Pratique de la division par un nombre d'un chiffre.</p> <p>Calcul mental.</p>	Ecrire et nommer les nombres	<p>numération écrite et orale des nbs naturels</p> <p>écritures additives, soustractives, multiplicatives ; situations faisant intervenir des écritures ci-dessus</p> <p>sens de l'égalité des écritures différentes</p>
				Comparer les nombres	<p>comparer les nombres écrits dans le système de numération habituel; découvrir et manipuler des règles correspondants</p> <p>ranger des nombres, construire des suites croissantes et décroissantes</p> <p>comparer des nombres écrits sous différentes formes</p>
				Calculer sur les nombres	<p>transformer des écritures additives, soustractives, multiplicatives en utilisant les propriétés des opérations et des parenthèses</p> <p>évaluer l'ordre de grandeur ; encadrements techniques opératoires mentales et écrites</p> <p>relations numériques : reconnaître les fonctions qui associent à un nombre naturel $n+a$ ou $n \times a$ et leurs réciproques</p> <p>analyser et traiter des problèmes</p> <p>reconnaître situations relevant de la division</p>
	mois et jours, heures et minutes mesure des longueurs en m et cm	Exercices pratiques de mesure et de repérage	Usage de la règle graduée, de la balance, du calendrier. Lecture de l'heure...	Repérer et mesurer	<p>repérer les cases ou les nœuds d'un quadrillage ; les utiliser dans des activités</p> <p>classer et ranger des objets divers selon leur longueur ou leur masse</p> <p>procédés de mesurage, unités usuelles du système légal, instruments</p> <p>divers problèmes simples</p>
	étude des figures géométriques simples par tracés, découpages et pliages carré, rectangle, quadrillage, triangle régulier, cercle	Exercices d'observation et travaux sur des objets	Tracés, découpages, pliages. Cube, carré, rectangle, triangle. Quadrillages.	Activités géométriques	<p>manipuler, classer, construire, agencer des solides et des figures planes (lignes ou surfaces) diverses</p> <p>divers instruments de dessin (pliage,</p>

	angle droit et demi-angle droit usage de la règle, double-décimètre, équerre à 45° observation d'un cube	géométriques			découpage, papier quadrillé, papier calque, règle, équerre, compas, bandes de papier) pour étudier, construire, reproduire des figures planes
gr 4-5 (CM)				Situations- problèmes	associer une question qu'on se pose, ou qui est posée, et l'information pertinente qui lui correspond organiser et exploiter cette information communiquer les résultats obtenus et la démarche suivie, et en établir la validité
	Nombres décimaux en liaison avec les unités de monnaies, de longueurs, de distances, de poids et de capacités. Changement d'unités: multiplication et division par 10, 100, 1000 quatre opérations sur les nombres décimaux problèmes de la vie courante, traités oralement ou par écrit divisibilité par 2, 5, 3, 9 ; preuve par 9 ; règle de trois ; utilisation des caractères de divisibilité pour la simplification d'un quotient et d'une règle de trois pourcentages, expressions diverses ; intérêt simple fractions très simples des grandeurs ; additionner, comparer, soustraire	Éléments de mathématique	Nombres naturels et décimaux : nom et écriture. Multiplication, division par 10, 100, 1000 Opérations et leurs propriétés ; suite d'opérations ; pratique des opérations ; preuve par 9 des opérations ; calcul mental. Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9 et 3. Exemples de relations numériques. Proportionnalité. Fractions. Produit de deux fractions.	Écrire, nommer et comparer les nombres naturels	maîtriser des règles de la numération écrite et orale comparer les nombres naturels désignés sous diverses formes situer les nombres, les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne)
				Écrire, nommer et comparer les nombres décimaux	prendre conscience de la nécessité d'introduire des nouveaux nombres: nombres décimaux et fractions simples écrire et reconnaître des nombres décimaux : écriture usuelle, écritures additives multiplicatives, soustractives et fractionnaires comparer les nombres décimaux : les situer les uns par rapport aux autres, intercaler, encadrer un décimal par deux décimaux, et en particulier par deux naturels consécutifs l'étude des décimaux n'est pas achevée à la fin du CM, se prolongera tout au long du collège
			Calculer sur les nombres	reconnaître, analyser et résoudre des situations relevant des diverses opérations ; donner un sens aux opérations sur les décimaux organiser et effectuer un calcul : addition,	

				multiplication, soustraction division des nombres naturels, notions de quotient entier et de reste évaluer l'ordre de grandeur du quotient ; encadrement procédures mentales de calcul sur les nombres naturels et décimaux procédures de calcul approché ; s'assurer de la vraisemblance d'un résultat expliciter et comparer des procédures de résolution
			Représenter et utiliser des fonctions numériques	élaborer et interpréter des descriptions de relations numériques (orales, écrites, graphiques, conventionnelles ou non) fonctions qui à un nombre n (naturel ou décimal) associent $n+a$ ou $n \times a$ et leur réciproques utiliser leurs propriétés (sans formalisation) situations relevant des fonctions numériques
mesure du temps ; pbs simples sur le mouvement uniforme et les placements à court terme unités de longueur ; instruments usuels de mesure unités de surface ; calcul de la surface d'un rectangle	Mesures : exercices pratiques	Longueur, aire, volume. Temps, masse. Expression d'un résultat avec une unité convenablement choisie. Ordre de grandeur. Encadrement.	Mesurer	construire et utiliser les systèmes de mesure utiliser les unités usuelles du système légal utiliser divers instruments de mesure de longueur ou de masse exprimer les résultats reconnaître ou construire un objet de longueur ou de masse donné calculer sur les nbs exprimant des mesures mesurer un intervalle de temps comparer des angles classer et ranger des objets selon leur aire, leur volume relations entre les unités du système légal déterminer l'aire d'un rectangle, d'un triangle ; le volume d'un pavé droit, l'aire ou le volume d'un objet donné utilisant un formulaire

				problèmes simples
	Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques	Bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle. Disque, cercle. Pavé (parallélépipède).	Activités géométriques	reproduire, décrire, représenter, construire différents objets géométriques pour quelques objets géométriques, construire des transformés par des transformations ponctuelles simples choisir et utiliser un instrument utiliser des techniques de reproduction mettre en œuvre des procédés permettant d'identifier et de construire des parallèles, des perpendiculaires reporter une distance, un angle

III.2.2 TABLEAU COMPARATIF DES PROGRAMMES DU NIVEAU MOYEN

III.2.3 EXTRAIT DE LA TRADUCTION ANGLAISE DU PROGRAMME HONGROIS (1974)

1st CLASS

192 lessons in a year

TEACHING MATERIAL

Sets, logic

Comparison of things /persons, signs, phenomena &c./, the classification of them and arranging according to colour, form, situation, sequence of tenses &c.

Observing the change in properties. /What has been changed? What has not?/

Statements relating to sets. /Examples: These here are all red. All the red are here. There is a boy called Stephen in the class. There is no child wearing eyeglasses in the first column./

Producing sets to statements. /Examples: Choose cards, please, but do not choose all the red ones and the triangles. Draw lines, but draw curves, too, among the straight ones!/

Modification of sets /with addition, diminution/, changes carried out in the properties. /Examples: Not each of them is red any longer. It has become more with 1./

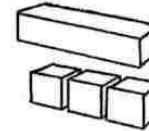
Completion of the open sentence in order to make it be right, not right. /By what a person, a thing, a word is made a logical function be right, by what is it made be false?/

Arranging in order in accordance with the given point of view.

- ² More ways of arranging in order in accordance with two given points of view.

Arithmetic, algebra

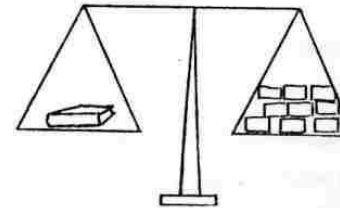
Problems of numbers as sets and as measures. /What is the way of adding them, of pouring them together &c. ?/



1 can be put
in this form
out of three
of this size



5 cups are filled up with water from a pitcher of this size



The book is as weighty as the 9 domino-stones

Comparing, arranging numbers at least up to 20; reading and writing them. The use of the signs $<$, $>$, $=$; laying out right and false sentences, describing them with help of these signs.

The decomposed form of numbers, reading them from laid out sentences, from drawings /according to principles of arranging, the colour, the form &c./.

Example:

\triangle	\triangle	\bullet	$2 + 2 + 2$	/according to the arrangement/
\triangle	\circ	\bullet	$3 + 3$	/according to the arrangement, the colour, the form/
\triangle	\circ	\bullet	$2 + 4$	

Addition, subtraction. Their relation to one another. Striding, stalking on the number line.

Division into two equal parts and laying out couples of things: even and odd numbers. Division into three equal parts and laying out

things by threes &c.

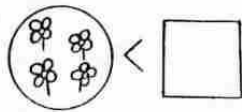
Problems: "What does the picture tell you?" and "What do the two pictures tell you?" /Demonstration before the alteration and after having done the change./

Expressing numbers as produced by arithmetical operations, expressions in several ways.

Shaping right sentences and transforming them into false ones, the false sentences into right ones. /Exercises with numerals and sentences, changing their contents./

The solution of open sentences /completing them in order to make be right/. Completion of them in order to make be unright.

Examples:



$$3 + \triangle > 7$$

$$\triangle + 8 < 7 + 4; 6 \square 2 = 1 + 3;$$

$$5 + 4 \square 2 + 8; \triangle + \triangle = 10 + \triangle$$

$$15 - \square > \square + 2 \text{ \&c.}$$

Preparing the numeral systems; their grouping, the way of writing them.

Drawing and the solution of number stories - exercises given in textual enclosure.

- " Putting down the number stories with calculations.

Producing number stories in a self-reliant way after drawings and numerical examples. Addition of more than two addends. Outlook up about to 100.

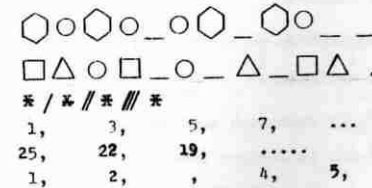
Relation, functions, sequences

Simple relations and demonstrating them in drawing. Use of arrows.

/E. g. signing the direction from the smaller onwards to the bigger one./

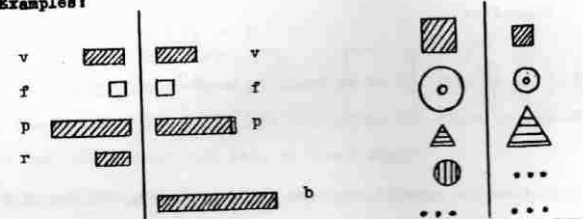
Simple sequences first with objects, followed by drawing, thereafter with numbers too.

Examples:



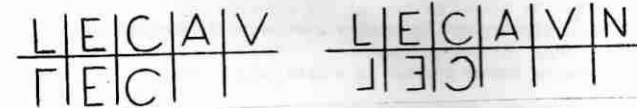
Trying to find connections in schedules first with objects, with drawings, later with numbers too. /Functions, "machines"/.

Examples:



/bar of the same colour/

/change of size: the big gets smaller, the small gets bigger/



/reflected image/

/reflected image/

ANNEXES DU CHAPITRE III.3

III.3.1 EXEMPLES DE FICHES DE TRAVAIL FRANÇAISES

(Eiller gr. 1 1972 fiches 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 17)

6 * Voici les ensembles.

① entoure ...

② entoure ...

③ entoure ...

7 * Appartenance.

① Complète ...

	E
●	X
■	
△	
★	
●	

E = {.....}

② Dessine ...

	P
△	X
●	
★	X
a	X
m	

③ Complète ...

	▲	★	●	■	◇
S					

S = {.....}

④ Dessine ...

	●	r	e	f	□
U	X		X	X	

10 * Autant que ...

① Dessine

② Dessine

③ Dessine ...

Il y a autant de perles blanches que de perles bleues. Ecris : v ou f.

11 * Plus que ... moins que ...

① Plus que ... Ecris : v ou f

② Moins que ...

* Relations. * Classement d'ensembles.

14
15

① «a même forme que...»
Trace les flèches.

② «a une autre forme que...»

③ «a même couleur que...»

④ «a une autre couleur que...»

① Trace les flèches...

② Inscris dans la colonne convenable le nom des ensembles...

A	B	C	E	H										
L	P	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>B</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>								B				
B														
S	U													

* De un à quatre. * De un à cinq.

16
17

① Complète...

□ = trois □ = deux □ = un □ = quatre

① Complète...

* ② Complète

② Complète...

E	P	S	U



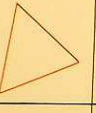





③ Ecris les nombres....

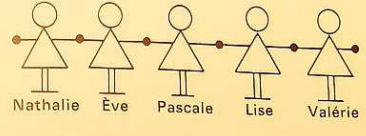
③ Chaque ensemble a un élément de plus que le précédent.

(Picard gr. 1 1970 fiches 8, 9, 16, 17, 28, 29, 30, 31, 32, 33)

A-17

a même forme que →

a même forme que ↙		
	x	
		
		
		
		



donne la main à →

Ève ●

Pascale ●

Valérie ●

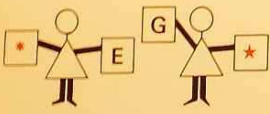
Lise ●

Nathalie ●

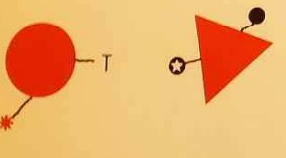
A-27

A-26

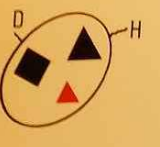
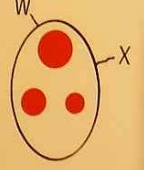
$= \neq$



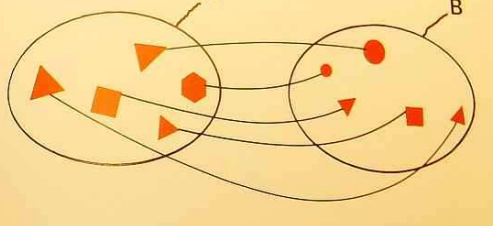
*	=	E
*	≠	E
*		G
G		*



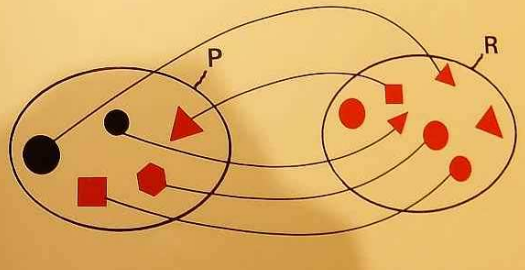
T	*
●	*
T	⊕
⊕	●

H	X
W	X
D	H
D	W



$N(A) = N(B)$



$N(P) \neq N(R)$

A-28

$=$ \neq



$N(\bullet)$

$N(\blacksquare)$

A-29

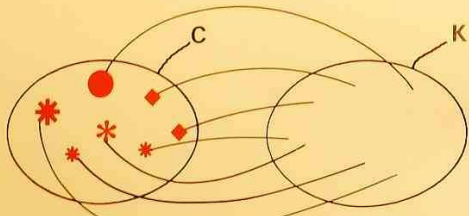
$=$ \neq



$N(\blacksquare)$

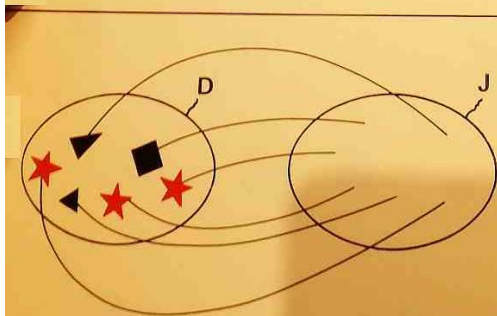
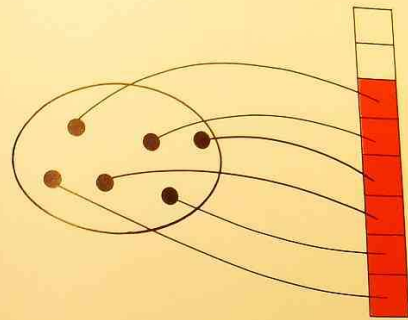
$N(\bullet)$

A-30

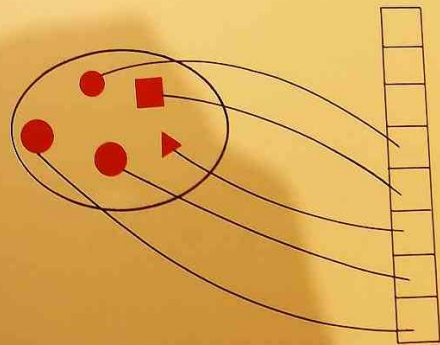


$N(C) \neq N(K)$

A-31



$N(D) = N(J)$



A-33

$= \neq$

→ autant que →

$N(F)$ $N(T)$

A-34

A-35

35

III.3.2 LES ONZE PREMIÈRES FICHES DE VARGA

(Fiches hongrois gr. 1 1978)

E 1115-43

1. 1.

Add oda mindegyik gyereknek, ami az övé!

Folytasd, és színezd is ki!

2. 1

3. 1.

Rajzolj te is mindkét részbe!

Színezd ki a nagyobbikat!






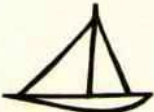
Folytasd, és színezd is ki!

3. 2


4.

Rajzolj a középsőnél

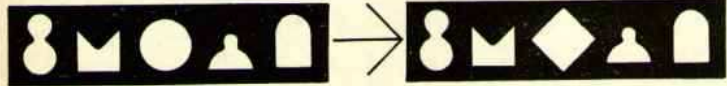
kisebbit! nagyobb!

Színezd ki a legkisebbit!

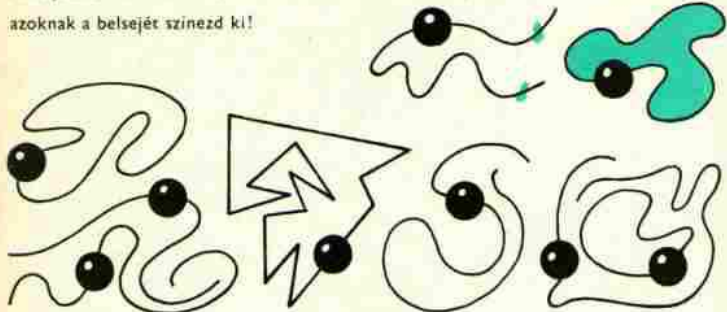


Színezd ki, ami megváltozott!

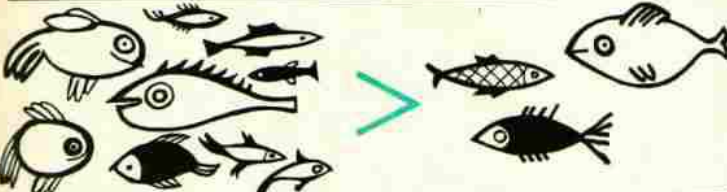
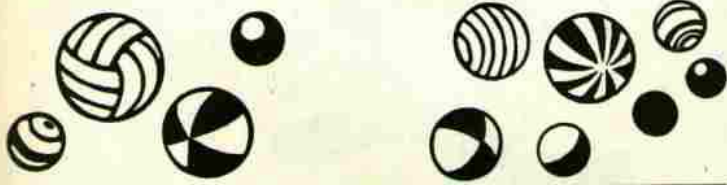
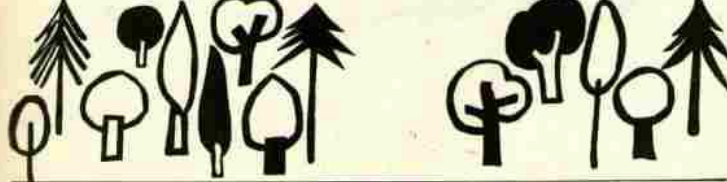


5.

Rajzolj csomót azoknak a szálaknak a végeire, amelyekről leszaladhat a gyöngyszem!
Amelyekről nem szalad le, azoknak a belsejét színezd ki!



Melyik több? Jelöld!

6.

Melyik több? Jelöld!

A kerítésen kívül fű nő. Színezd ki a füves területet!

Színezd ki azt az egeret, amelyiket nem tudja elfogni a macska!

Folytasd! Színezd!

1.

2.

3.

5

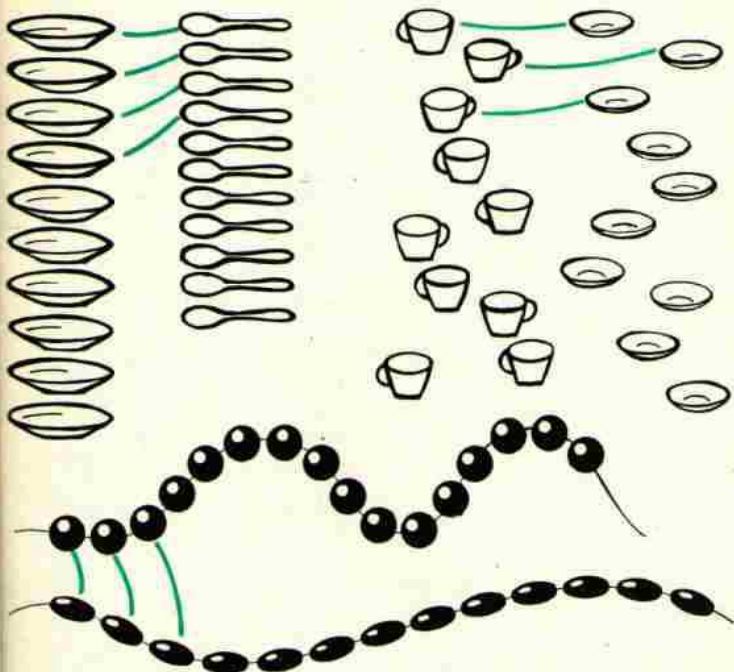
7.

kevesebbet!	Rajzolj a középsőnél	többet!

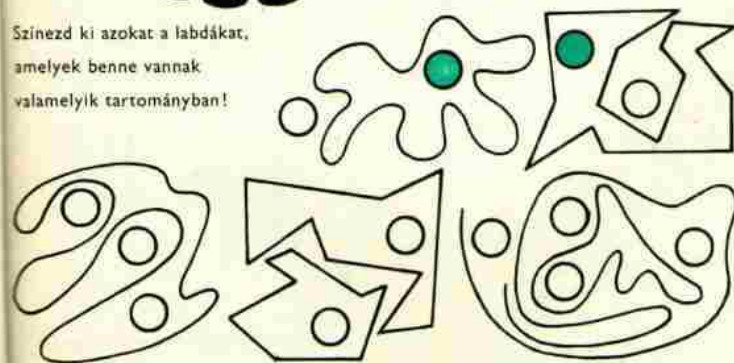
6

8.

Melyik több? Folytasd a párosítást! Kerítsd is körül pirossal azt, amelyik több!



Színezd ki azokat a labdákat, amelyek benne vannak valamelyik tartományban!



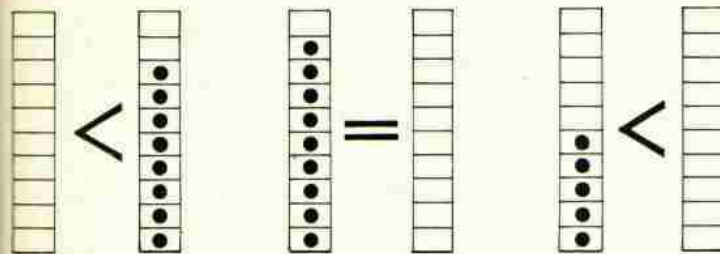
1.

2.

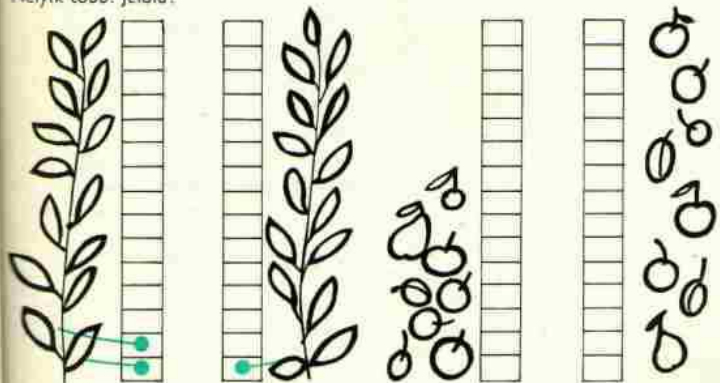
7

9.

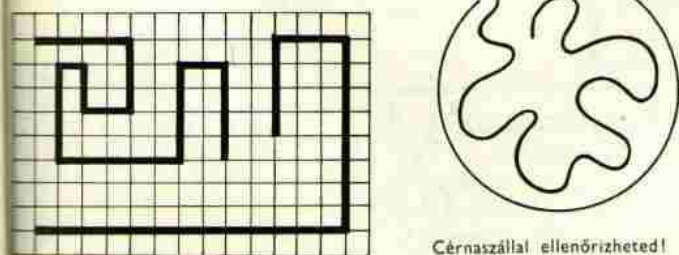
Rajzolj pöttyöket a jelek szerint!



Annyi pöttyöt rajzolj, ahány levél, vagy ahány szem gyümölcs van a képen! Melyik több? Jelöld!



Melyik hosszabb? Arra rajzolj piros gyöngyöt!



Cérszállal ellenőrizheted!

1.

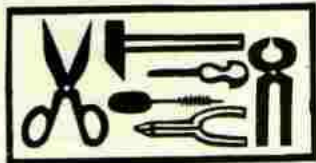
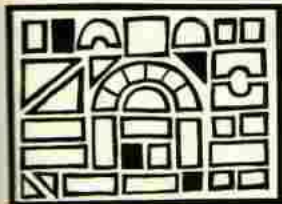
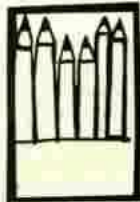
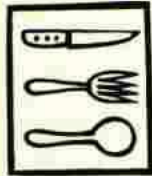
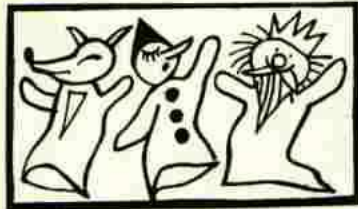
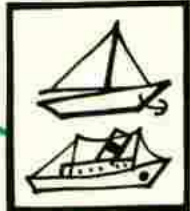
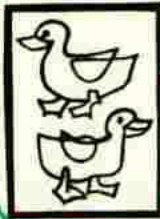
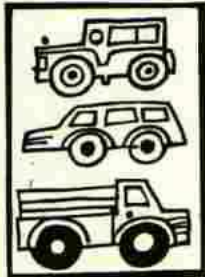
2.

3.

8

10.

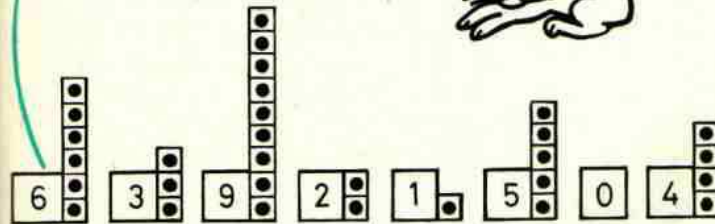
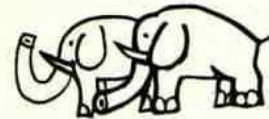
Kösd össze azokat a dobozokat, amelyekben ugyanannyi játék van!
Kerítsd is körül őket!



11.

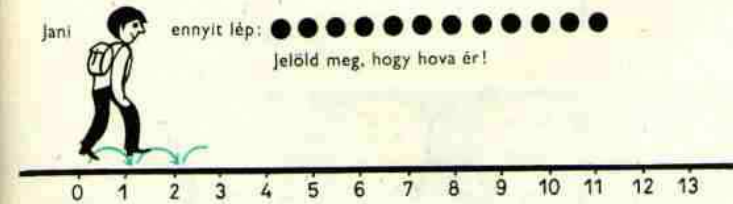
Kösd össze a számokat a megfelelő rajzokkal!

1.



2.

Jani ennyit lép: ●●●●●●●●●●
Jelöld meg, hogy hova ér!



III.3.3 EILLER : TABLE DES MATIÈRES DU LIVRE DU MAÎTRE

(Eiller livre du maître gr. 1 1972, p. 220)

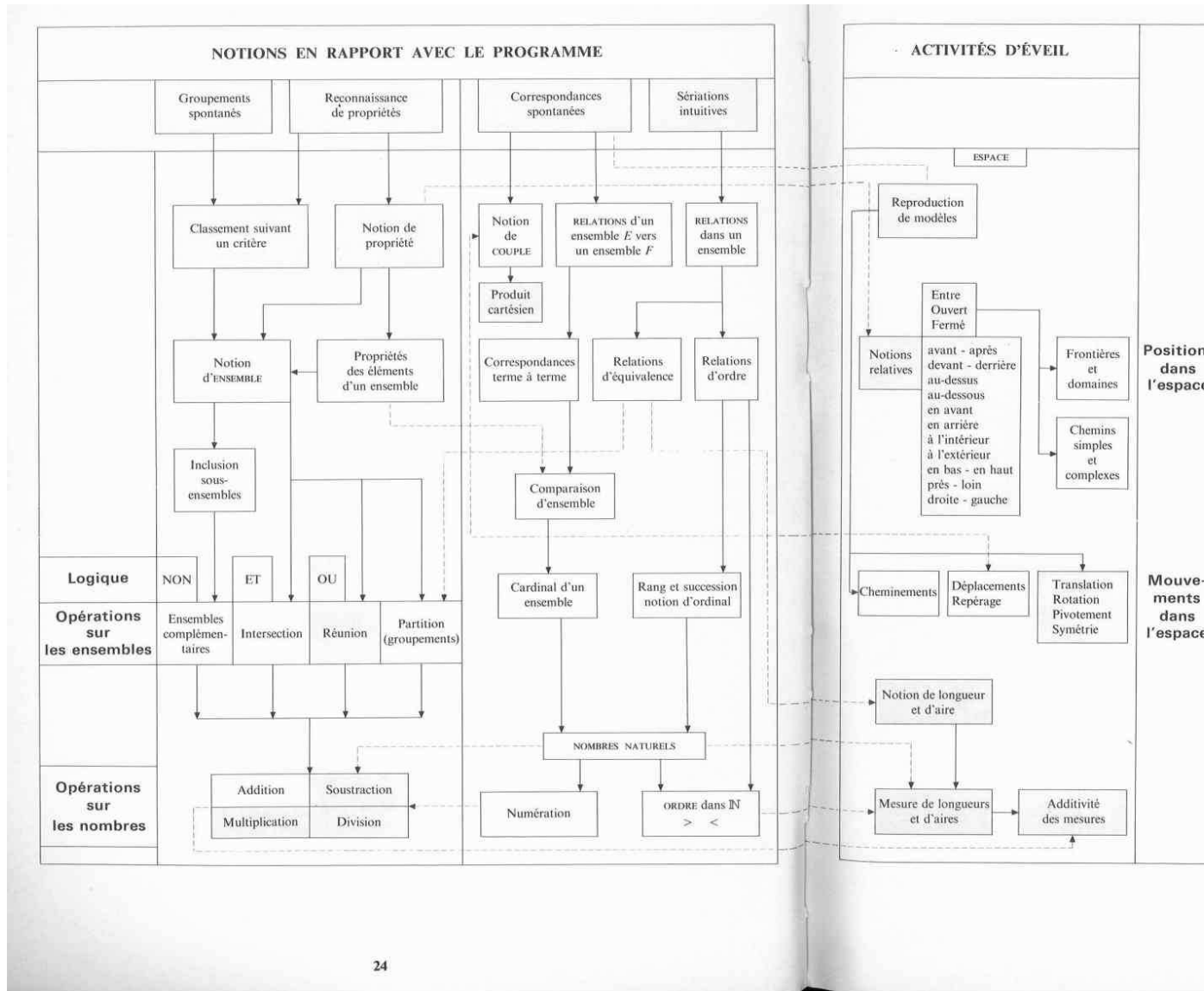
TABLE DES MATIÈRES

	pages
1^{re} partie. Les fondements de la réforme	
Introduction	5
Les raisons du changement.....	7
<i>d'ordre mathématique</i>	7
<i>d'ordre économique et social</i>	8
<i>d'ordre psychologique</i>	9
Psychologie de l'enfant de 5 à 7 ans.....	11
<i>développement physique</i>	11
<i>développement sensori-moteur</i>	13
<i>développement intellectuel</i>	14
<i>évolution psychique et morale</i>	17
2^e partie. La mathématique et ses applications pédagogiques	
Introduction	19
Chapitre 1. Organisation des activités	21
<i>Programme et répartition</i>	22
Progression et répartition mensuelle	26 à 29
Chapitre 2. Exploration et organisation de l'espace (1)	
<i>Indications théoriques</i>	33
<i>Applications pédagogiques</i>	39
Chapitre 3. Logique et ensembles. Opérations sur les ensembles	
<i>Indications théoriques</i>	65
<i>Applications pédagogiques</i>	75
Chapitre 4. Relations. Applications. Bijections	
Relations numériques. Opérateurs	
<i>Indications théoriques</i>	95
<i>Applications pédagogiques</i>	115
Chapitre 5. Les nombres et la numération. Ordre dans \mathbb{N}	
<i>Indications théoriques</i>	135
<i>Applications pédagogiques</i>	145
Chapitre 6. Opérations sur les entiers naturels. Addition	
Soustraction, Multiplication	
<i>Indications théoriques</i>	175
<i>Applications pédagogiques</i>	183
Chapitre 7. Géométrie. Pratique de la mesure	
<i>Indications théoriques</i>	197
<i>Applications pédagogiques</i>	199
Lexique des termes mathématiques et définitions	215

(1) Se reporter à l'index alphabétique pour trouver le renvoi aux principales rubriques.

III.3.4 EILLER : ORGANIGRAMME

(Eiller livre du maître gr. 1 1972, pp. 24-25)



4 Exploitation pédagogique

A Les thèmes

Pour des raisons mathématiques et pédagogiques, les différentes parties du programme ont été regroupées autour de quatre thèmes centraux, et les activités annexes, autour de deux thèmes supplémentaires. A chacun de ces six thèmes, on a affecté un ou plusieurs « indicatifs » que l'on retrouve dans les fiches de contrôle⁽¹⁾.

Thème	Indicatif(s)	Rubriques correspondantes du programme
Exploration et organisation de l'espace	E	
Logique et ensembles	L	① ② ④ ⑤
Relations Applications Opérateurs	R } * C } * O }	① ② ④ ⑤
Les nombres et la numération	N	③
Addition. Problèmes et schémas	A } ** P }	① ⑤
Initiation à la géométrie	G	

* La lettre C se rapporte à l'ordre sur les nombres entiers.

La lettre O se rapporte aux opérateurs numériques ou non.

** La lettre A se rapporte à l'addition.

La lettre P se rapporte aux problèmes.

B Répartition

A l'intérieur de chaque thème, il a été établi une progression correspondant à l'enchaînement des notions qui s'y rapportent⁽¹⁾. Nous verrons par la suite que la progression pédagogique ne peut pas toujours suivre l'ordre de filiation théorique des notions mathématiques.

Ensuite, on ne peut étudier successivement les différents thèmes au cours de l'année, parce qu'il existe des liens entre eux et qu'il faut graduer les difficultés.

C'est pourquoi nous proposons aux maîtresses et aux maîtres du cours préparatoire une progression chronologique leur permettant d'avancer sur tous les « fronts » (page 26).

On pourra bien sûr modifier cette « trame » et éventuellement se restreindre aux thèmes qui se rapportent strictement au programme.

Pour des raisons pratiques nous indiquons :

■ le numéro des pages de ce document qui se rapportent aux leçons,

■ le numéro et la page des fiches de contrôle qui s'y rapportent (livre de l'élève).

(1) Voir le livre de l'élève.

III.3.5 EILLER : TABLEAUX DE RÉPARTITION ANNUELLE

(Eiller livre du maître gr. 1 1972, pp. 26-29)

Mois	Activités mathématiques (Leçons-Exercices)	Ce volume page	Livres de l'élève	
			fiche n°	page
SEPTEMBRE	Topologie :			
	◇ Lignes et points	40	E ₁	1
	◇ Frontières et domaines	41	E ₂	2
	◇ Intérieur. Extérieur	43	E ₃ -E ₄	3-4
	Ensembles et éléments :			
	◇ Symboles et égalité	77	L ₁	5
	◇ Constitution d'ensembles	78	L ₂	6
	◇ Appartenance	79	L ₃	7
	◇ Propriétés et ensembles (jeux de vérité)	79	L ₄	8
	OCTOBRE	Correspondances :		
◇ Correspondances terme à terme : « Autant que... »		116	R ₁ -R ₂	9-10
◇ Correspondances terme à terme : « Plus que... Moins que... »		118	R ₃	11
Relations :				
◇ Relations d'un ensemble E vers un ensemble F		120		
Diagramme sagittal. Relation réciproque		121	R ₄	13
Relations dans un ensemble :				
◇ Activités de classement. Relations d'équivalence		123-147	R ₅ -R ₆	14-40
◇ Activités de rangement. Relations d'ordre		125		
Numération :				
◇ Nommer et écrire un nombre. Les nombres de 1 à 5		154	N ₁ -N ₂	16-17
Idée de rang (ordinal) :				
◇ Les nombres de 1 à 5		149	C ₁	18
Notions de symétrie :				
◇ Découpage et pliage		206	G ₁	19
Situations relatives dans l'espace et dans le plan :				
◇ Devant. Derrière. A côté de	47	E ₅	21	
◇ Gauche. Droite	50	E ₆ à E ₈	22 à 24	
◇ Au-dessus. Au-dessous	56	E ₉	25	
◇ A gauche de... A droite de...	54	E ₁₀	26	
NOVEMBRE	Le nombre zéro	155	N ₃	27
	Codage de cardinaux :			
	◇ Groupements	159	N ₄	28
	◇ Base trois	162	N ₅ -N ₆	29-30
	◇ Base quatre	165	N ₇ -N ₈	31-32
	Échanges :			
	◇ Base trois	163	N ₉	33
	◇ Base cinq	165	N ₁₀	34
	Parties d'un ensemble :			
	◇ Parties complémentaires	82	L ₅ -L ₆	35-36
	Parties complémentaires	85	L ₇ -L ₈	37-38
	Les nombres de 1 à 6 :			
	◇ Le nombre 6	156		
	◇ Le nombre 6	157	N ₁₁	39
	◇ Exercices : nombres de 1 à 6 (relations)	147	R ₇	40
Pratique de la mesure :				
◇ Initiation à la mesure des longueurs	209	G ₂	41	
Ordre dans \mathbb{N} (ensemble des entiers naturels) :				
◇ « Échelles ». Signes <, =, >	168	C ₂	42	
◇ Ordre sur les cardinaux	168	C ₃	43	
◇ Relations d'équivalence. Classes. Exercices en liaison avec la lecture	123	R ₈	44	

Mois	Activités mathématiques (Leçons-Exercices)	Ce volume page	Livres de l'élève	
			fiche n°	page
NOVEMBRE	Repérage dans le plan :			
	◇ Jeux préparatoires : puzzles	200	G ₃ -G ₄	45-46
	Situations relatives dans l'espace :			
◇ A gauche de... A droite de...	54	E ₁₁	47	
◇ Révisions : Au-dessus... Au-dessous... A gauche de... A droite de...	56	E ₁₂	48	
DÉCEMBRE	Opérations sur les ensembles :			
	◇ Propriété commune	88	L ₉	49
	◇ Partie commune (1)	88	L ₁₀	50
	Nombres et numération :			
	◇ Les nombres de 6 à 8	156	N ₁₂	51
	◇ Base sept et base huit	165	N ₁₃	52
	Opérations sur les ensembles :			
	◇ Partie commune (2)	88	L ₁₁	53
	◇ Réunion	91	L ₁₂	54
	Addition dans \mathbb{N} :			
	◇ Ensembles et nombres	184	A ₁	55
	◇ Somme de deux nombres	184	A ₂ -A ₃	56-57
	◇ Le nombre 5 : « décomposition »		A ₄	58
	Nombres et numération :			
	◇ Les nombres de 1 à 9	156	N ₁₄	59
Rangement de cardinaux (nombres de 1 à 9) :				
◇ Rangement de cardinaux (nombres de 1 à 9)	170	C ₄	60	
Notion de symétrie (exercice) :				
◇ Notion de symétrie (exercice)	206	G ₅	61	
Déplacements et itinéraires :				
◇ Déplacements et itinéraires	58	E ₁₃	62	
Repérage et orientation	61	E ₁₄	66	
JANVIER	Notion de couple :			
	◇ Jeu de couleurs	128	R ₉ -R ₁₀	63 à 65
	Repérage :			
	◇ Repérage d'une case par un couple	200	G ₆	67
	Notion de couple :			
	◇ Propriété fondamentale : $(a, b) \neq (b, a)$	128	R ₁₁	68
	Addition dans \mathbb{N} :			
	◇ « Décomposition » du nombre 6	187	A ₅	69
	◇ « Décomposition » du nombre 7	187	A ₆	70
	Ordre dans \mathbb{N} :			
	◇ Comparaison de nombres (« échelles »)	168	C ₅	71
	◇ Ordre sur les cardinaux : de 1 à 9	172	C ₆	72
	Exercices de logique : schémas et tableaux :			
	◇ Arbres et schémas	93	L ₁₃	73
	◇ Jeux de vérité	93	L ₁₄	74
Addition dans \mathbb{N} :				
◇ « Décomposition » du nombre 7 (exercice)	187-188	A ₇	75	
◇ « Décomposition » du nombre 8	187-188	A ₈	76	
Repérage :				
◇ Repérage d'une case par un nœud	202	G ₇ -G ₈	77-78	
Le nombre dix et la base dix :				
◇ Le nombre dix et la base dix	158	N ₁₅	79	
Bases : synthèse :				
◇ Bases : synthèse	165	N ₁₆	80	
Addition dans \mathbb{N} :				
◇ Décomposition du nombre 9	188	A ₉ -A ₁₀	81-82	
Révision : exercices de la latéralisation :				

Mois	Activités mathématiques (Leçons-Exercices)	Ce volume page	Livre de l'élève	
			fiche n°	page
FÉVRIER	Idee de rang : ◇ Du 1 ^{er} au 10 ^e	149	C ₇	83
	Base dix : ◇ Les nombres de 10 à 20	167	N ₁₇	84
	Ordre dans IN : ◇ De 1 à 16	172	C ₈	85
	Addition dans IN : ◇ « Décomposition » du nombre 10	188	A ₁₁ -A ₁₂	86-87
	Idee de rang : ◇ Du 1 ^{er} au 20 ^e	149	C ₉	88
	Exercices de logique (en liaison avec la lecture)	93	L ₁₅ -L ₁₆	89-90
	« Machines » et opérateurs : ◇ « Machines » simples. Changer la forme. Changer la couleur	130	O ₁ -O ₂	91-92
	◇ Opérateurs numériques	133	O ₃ -O ₄	93-94
	Exercices de géométrie : ◇ Figures planes. Relations d'incidences. Polygones. Côtés et sommets. ◇ Classement de polygones (suivant le nombre de côtés)		G ₉	95
			G ₁₀	96
	Addition dans IN. Technique opératoire : ◇ Base six	191	A ₁₃	97
	◇ Base dix (passage de la dizaine)	191	A ₁₄ -A ₁₅	98-99
	Révision : exercices d'orientation.			
MARS	Problèmes et schémas : ◇ Problèmes en liaison avec l'addition	195	P ₁	100
	Exercices de latéralisation et d'orientation : ◇ Jeux du code de la route	60	E ₁₅	101
	Addition dans IN : ◇ « Décomposition » du nombre 11	188	A ₁₆	103
	◇ « Décomposition » du nombre 12	188	A ₁₇	104
	Relation d'ordre dans un ensemble. Diagramme cartésien	125	R ₁₂	105
	Ordre dans IN : ◇ Nombres de 0 à 20	172	C ₁₀	106
	Addition dans IN : ◇ « Décomposition » du nombre 13	188	A ₁₈	107
	◇ « Décomposition » du nombre 14	188	A ₁₉	108
	Numeration : ◇ Échanges en base 10	167	N ₁₈	109
	Ordre dans IN : ◇ Nombres de 0 à 50	172	C ₁₁	110
AVRIL - MAI	Addition et ordre dans IN : ◇ Comparaison de deux sommes	174	C ₁₂	111
	◇ Compatibilité de l'addition et de la relation d'ordre dans IN	174	C ₁₃	112
	Propriétés de l'addition dans IN : ◇ Associativité	190	A ₂₁	114
	Problèmes et schémas : ◇ Problèmes en liaison avec l'associativité	190-195	P ₂ -P ₃	115-116
	Machines et opérateurs : ◇ Machines et « raccourcis »	131	O ₅	117
	◇ Opérateurs numériques (calcul mental)	133	O ₆	118

Mois	Activités mathématiques (Leçons-Exercices)	Ce volume page	Livre de l'élève		
			fiche n°	page	
AVRIL - MAI	Couples et relations : ◇ Exercices. Diagramme sagittal et diagramme cartésien	128	R ₁₂ -R ₁₃	119-120	
	Les nombres de 50 à 70 : ◇ Numeration et ordre		N ₁₉	121	
	Ordre dans IN : ◇ Nombres de 0 à 70		C ₁₄	122	
	Addition dans IN : ◇ Calcul et tableaux : table de Pythagore. Carrés magiques	188	A ₂₂	123	
	◇ Calcul mental : « compter » de 5 en 5, de 10 en 10	188	A ₂₃	124	
	◇ Exercices de logique en liaison avec l'addition		L ₁₇	125	
	Problèmes et schémas : ◇ Somme de plusieurs nombres	195	P ₄	126	
	◇ Groupements successifs (problèmes d'emballage)	195	P ₅	127	
	Numeration. Bases. Nombres à 3 chiffres : ◇ Base deux	165	N ₂₀	128	
	◇ Base trois	165	N ₂₁	129	
	◇ Révision des bases deux, trois, quatre, cinq	165	N ₂₂	130	
	Pratique de la mesure : ◇ Étalons		G ₁₁	131	
	◇ Mesure de longueurs	211-212	G ₁₂ -G ₁₃	133-134	
	JUIN	Relations d'ordre : ◇ Relations d'ordre dans un ensemble. Exercices en liaison avec la logique	125	R ₁₅	135
		Numeration (Base dix) : ◇ Les nombres de 70 à 100 (nommer et écrire des nombres).			
Comparaison de nombres : ◇ De 70 à 100			R ₁₅	136	
Opérateurs numériques : ◇ Opérateurs successifs		134	O ₇	137	
◇ Exercices et diagrammes relatifs aux opérateurs		134	O ₈	138	
Problèmes et schémas : ◇ Problèmes en rapport avec les opérateurs		195	P ₆ -P ₇	139-140	
Addition dans IN: technique opératoire : ◇ Addition avec retenue en base six		191	A ₂₄	141	
◇ Addition avec retenue en base dix		191	A ₂₅	142	
Pratique de la mesure : ◇ Mesure d'aires		213	G ₁₄ -G ₁₅	143-144	
◇ Revisions.					
Problèmes et schémas : ◇ Problèmes en liaison avec l'addition avec retenue : Base quatre		195	P ₈	145	
Base huit		195	P ₉	146	
Numeration : ◇ Les nombres de 1 à 100			N ₃₁	147	
◇ Révision des bases			N ₃₂	148	
Problèmes et schémas : ◇ Problèmes en liaison avec l'addition		195	P ₁₀ -P ₁₁	149-150	
Géométrie : ◇ Translation	208	G ₁₆	151		
◇ Distances et chemins		G ₁₇	152		
◇ Révision générale					

III.3.6 EILLER : LES LEÇONS ANALYSÉES

(Eiller livre du maître gr. 1 1972, pp. 116-117 et 168-171)

CORRESPONDANCES

A CONSIDÉRATION D'ORDRE GÉNÉRAL

■ D'une manière spontanée, l'enfant s'intéresse d'abord aux relations entre objets (et êtres) et non aux relations entre ensembles.

Dans un premier temps, ces relations sont surtout d'ordre affectif, par exemple – l'enfant et sa maman – l'enfant et ses jouets.

Puis, on peut assister aux premières « mises en correspondance » entre objets qui « vont ensemble »,

- par exemple – les tasses et les soucoupes
- les coquetiers et les œufs
- les boîtes et leur couvercle
- les vis et les écrous...

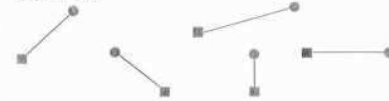
A ce stade, l'enfant accepte encore difficilement d'associer des objets ou des êtres n'ayant aucun lien commun, par exemple des chiens et des boîtes à chaussures...

Ce n'est qu'à un stade ultérieur que l'on pourra faire réaliser des correspondances « terme à terme » entre éléments de deux ensembles quelconques et, à partir de cette comparaison d'ensembles, introduire la notion de nombre.

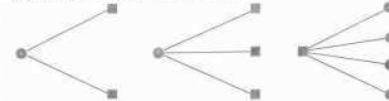
■ En ce qui concerne la réalisation pratique des correspondances terme à terme, les enfants juxtaposent ou superposent les éléments des ensembles à comparer. Mais, dans certaines situations, la mise en correspondance manipulative

n'est pas réalisable (objets qu'on ne peut déplacer). Dans ce cas, les enfants sentent la nécessité de « relier » les objets (par une ficelle ou un autre moyen).

Sur le plan de la représentation, les correspondances sont schématisées à l'aide de « traits », la flèche n'étant pas encore nécessaire ici.



■ Les correspondances « un à un » sont particulièrement intéressantes, mais on peut en envisager bien d'autres, par exemple, les correspondances « deux pour un », « trois pour un », « un pour quatre », etc.



On rencontrera ce type de correspondance lors de l'étude de la numération (échanges).

B AUTANT QUE

1 Intentions pédagogiques

◇ Exploiter la correspondance terme à terme pour faire découvrir la notion de « autant que ».

◇ Montrer que la relation « ... autant que... » est indépendante de la disposition spatiale des éléments des ensembles considérés, ces éléments pouvant être rassemblés, dispersés, et même juxtaposés, ou empilés.

◇ Montrer que la relation « ... autant que... » est indépendante de la couleur, de la forme ou de la grandeur des éléments.

◇ Essayer de faire sentir intuitivement et découvrir que la relation « ... autant que... » est symétrique et transitive. La réflexivité de cette relation est une notion difficile pour les enfants de cours préparatoire et l'étude en est prématurée.

Remarque A ce stade, ne pas employer les mots « réflexive, symétrique et transitive » auprès des élèves. Pour les exercices qui suivent, prendre un assez grand nombre d'objets afin d'éviter le comptage.

2 Matériel

- cerceaux, bâtons
- blocs logiques ou jeu Spira.

3 Exercices types

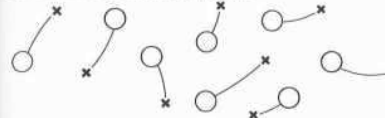
1^{er} EXERCICE

A Motivation

Préparation du jeu des cerceaux. Ce jeu nécessite un cerceau par joueur.

B Déroulement de l'exercice

Les enfants sont dispersés dans la salle d'éducation physique dans laquelle on a placé les cerceaux.

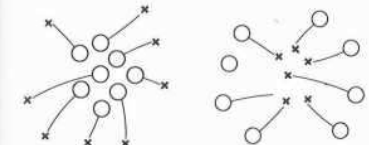
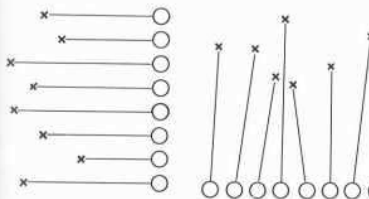
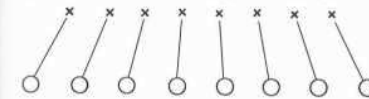


■ Y a-t-il un cerceau pour chaque enfant? Vérifier. Deux façons de procéder :

- ou bien chaque enfant prend un cerceau en main;
 - ou bien un petit camarade peut tracer un trait entre l'enfant et le cerceau.
- S'il y a un cerceau par enfant, on dira qu'il y a *autant* d'enfants que de cerceaux.

2^e EXERCICE (enfants-cerceaux)

On garde les mêmes enfants et les mêmes cerceaux que l'on dispose de différentes manières (figures ci-dessous).



Exploiter ces figures de façon à bien montrer que la relation « ... autant que... » est indépendante de la disposition spatiale des objets. En effet, il y a toujours autant de cerceaux que d'enfants quelles que soient leurs dispositions dans l'espace et dans le plan.

3^e EXERCICE (enfants-cerceaux)

On rappelle qu'il y a autant de cerceaux que d'enfants. Peut-on dire qu'il y a autant d'enfants que de cerceaux? Comment pourrait-on représenter cela?

- Par la double flèche $\begin{matrix} C & \rightleftarrows & E \end{matrix}$

4^e EXERCICE (enfants-cerceaux et bâtons)

On garde les mêmes enfants et les mêmes cerceaux. Il s'agit de trouver, cette fois, s'il y a autant de bâtons que d'enfants.

■ Manipulation

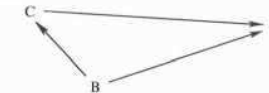
- Y a-t-il autant de bâtons que de cerceaux? (placer un bâton dans chaque cerceau).
- Y a-t-il autant de cerceaux que d'enfants? (chaque enfant se place dans un cerceau).
- Pensez-vous qu'il y a autant de bâtons que d'enfants? (vérifier en prenant un bâton dans la main.)

■ Représentation

On représente l'ensemble des enfants, puis l'ensemble des cerceaux, puis l'ensemble des bâtons.

On fait la correspondance terme à terme.

On constate qu'il y a autant de cerceaux que d'enfants, autant de bâtons que de cerceaux et autant de bâtons que d'enfants.



AUTRES EXERCICES

On place sur la table une collection de blocs rouges, une collection de blocs bleus et une collection de blocs jaunes. Ces trois collections ont le même nombre d'éléments.

- Y a-t-il autant de blocs bleus que de blocs rouges? (faire vérifier).
- Y a-t-il autant de blocs jaunes que de blocs bleus? (faire vérifier).
- Est-il nécessaire de vérifier qu'il y a autant de blocs jaunes que de blocs rouges?
- ◇ Laisser réagir et discuter les élèves.

CONSTRUCTION D'ENSEMBLES

ayant *autant* d'éléments qu'un ensemble donné

■ Phase manipulative

On donne un ensemble A d'objets. Construire (sans dénombrer) un autre ensemble B ayant autant d'objets que l'ensemble A. Pour cela, les enfants doivent réaliser les correspondance terme à terme « manuelles ».

ORDRE DANS \mathbb{N}

Considérations générales

Les enfants connaissent assez tôt l'ordre « naturel » de succession des entiers et au début du cours préparatoire, ils savent généralement « réciter » la suite des dix premiers nombres.

De plus, malgré certaines difficultés, ils apprennent assez rapidement à compter les objets d'une collection lorsque leur nombre ne dépasse pas dix (les difficultés de comptage sont surtout liées à la disposition des objets).

Par contre, il leur est plus difficile de *comparer* deux nombres, par exemple 17 et 19.

En ce qui concerne ces deux nombres, on peut dire :

- « 17 est avant 19 » au sens ordinal
- « 17 est inférieur à 19 » au sens de la comparaison des cardinaux.

Nous nous sommes déjà intéressés au premier aspect des choses (idée de rang).

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'ordre dans \mathbb{N} en partant de la comparaison des ensembles. Par la suite, nous réaliserons la synthèse des deux aspects en étudiant le rangement des cardinaux. Enfin, nous nous intéresserons à la liaison entre l'addition d'ordre dans \mathbb{N} .

A ORDRES SUR LES CARDINAUX SIGNES $<$, $=$

1 Intentions pédagogiques

- ◇ Découverte de la relation d'ordre dans \mathbb{N} à partir de la comparaison d'ensembles.
- ◇ Introduction des signes $>$, $<$, $=$, en ayant recours aux « échelles » (lien avec la mesure).

2 Matériel

- quatre boîtes assez basses, munies d'un couvercle, pour chaque élève.
- éléments variés permettant de constituer des ensembles (blocs logiques de petite taille ou pièces du jeu Spira).
- crayons de couleur; feuilles de papier-carton.
- dix à quinze cubes de même taille.
- deux règles plates.

3 Déroulement de la leçon

1^{re} partie

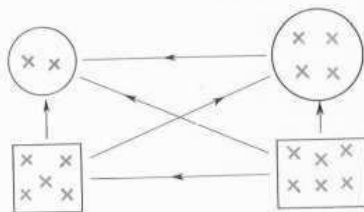
A Découverte de la relation d'ordre dans \mathbb{N}

■ Chaque élève ⁽¹⁾ reçoit quatre boîtes contenant respectivement deux, quatre, cinq ou six objets. Ces boîtes sont ouvertes et disposées de façon quelconque sur une grande feuille de papier-carton.

(1) La manipulation peut se faire en groupe. On peut prendre plus que six objets.

La classe est partagée en deux groupes. Les élèves du premier groupe sont chargés de tracer entre les différentes boîtes les flèches de la relation :

« ... contient plus d'objets que... ».



◇ Dans le second groupe, les élèves sont chargés de tracer entre les différentes boîtes les flèches de la relation :

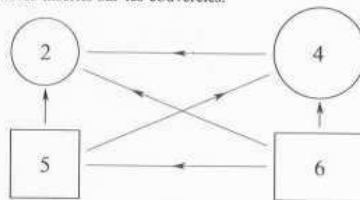
« ... contient moins d'objets que... ».

Si les élèves éprouvent des difficultés, suggérer les correspondances terme à terme.

Questions

- Faut-il changer des flèches lorsqu'on remplace chaque objet d'une boîte par un autre objet?
- Faut-il changer des flèches lorsqu'on intervertit les positions de deux boîtes?
- Comparer le sens des flèches obtenues dans les deux groupes.

■ Les élèves inscrivent sur le couvercle de chaque boîte le nombre d'éléments qu'elle contient. On ferme les boîtes, puis on se propose de comparer deux à deux les différents nombres inscrits sur les couvercles.



Questions

Est-ce que 5 est plus grand que 2 ? - ou plus petit ? - Pourquoi?

Faire expliquer par les élèves. Au besoin, faire ouvrir les boîtes et effectuer les correspondances terme à terme.

◇ Comparer de même 6 et 4, 5 et 6 ...

Demander aux élèves de tracer les flèches de la relation « ... est plus grand que... » entre les nombres inscrits sur les boîtes.

De même, on demandera aux élèves de l'autre groupe de tracer les flèches de la relation « ... est plus petit que... » (On n'a pas effacé les flèches tracées précédemment.)

◇ Faire expliciter oralement les relations, en introduisant si possible les termes « supérieur » et « inférieur ».

Exemples « 2 est inférieur à 5 », « 6 est supérieur à 4 ».

◇ On peut terminer cette phase en demandant par exemple aux élèves de comparer 5 et 7 (recours aux ensembles et à la correspondance terme à terme).

Faire expliciter les deux propositions : « 5 est inférieur à 7 », « 7 est supérieur à 5 ».

EXERCICES DE CONTROLE

(1) Tracer les flèches de la relation : « ... est inférieur à... » dans l'ensemble suivant :



(2) Chaque flèche « signifie » : « ... est supérieur à... ».

Inscrire des nombres convenables, puis tracer les flèches qui manquent.



2^e partie

B Introduction des signes $>$, $=$, $<$

■ Remarques préliminaires

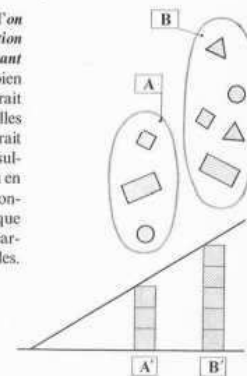
Pour comparer sur le plan numérique deux ensembles A et B, on peut comparer deux ensembles A' et B' respectivement équivalents à A et à B. Cette méthode permet d'introduire les signes relatifs à l'ordre dans \mathbb{N} .

En effet, considérons par exemple deux ensembles A et B de cardinaux respectifs 3 et 5. On peut constituer un ensemble A' équipotent à l'ensemble A en prenant trois cubes. De même, on peut constituer un ensemble B' équipotent à B en prenant cinq cubes (les cubes sont tous de même taille).

La comparaison des cardinaux des ensembles A et B peut être ramenée à la comparaison des « piles » ou des « échelles » associées aux deux ensembles.

La figure ci-dessous indique comment on peut « visualiser » le signe $<$. On opère d'une façon analogue pour introduire le signe $>$ et rappeler le signe $=$.

Il importe de noter que l'on s'est placé dans une situation très particulière faisant appel à la mesure. Il est bien évident que si l'on opérât avec des blocs de tailles différentes, on n'obtiendrait pas du tout les mêmes résultats ⁽¹⁾. En fait, c'est bien en se servant des correspondances terme à terme que l'on peut comparer les cardinaux de deux ensembles.



■ Leçon

⊙ Phase manipulative (collective)

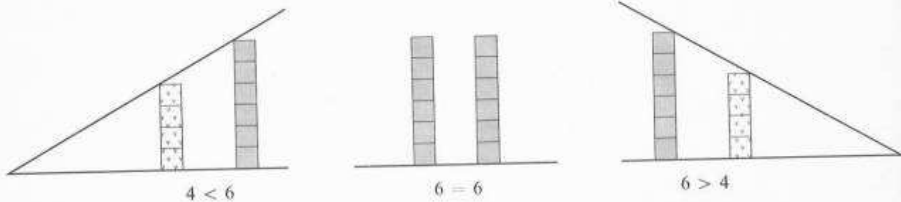
On dispose de deux ensembles d'objets (plus de quatre objets pour chacun d'eux). On veut comparer leurs cardinaux.

◇ Que peut-on faire? On peut effectuer les correspondances terme à terme.

◇ Peut-on comparer les cardinaux des deux ensembles en se servant des cubes? Attendre les suggestions des élèves.

(1) Il faut d'ailleurs faire ce genre d'exercice pour que les enfants se rendent compte de l'aspect particulier de la manipulation qui consiste à empiler des cubes de même taille.

◇ On pourra superposer sur une grande règle plate autant de cubes qu'il y a d'éléments dans le premier ensemble, puis on fera une deuxième pile comprenant autant d'éléments que le second ensemble.



En utilisant une seconde règle plate, on peut aboutir à une « visualisation » signes $<$, $=$, $>$. Voir à ce sujet les figures suivantes :

Phase de contrôle

◇ Les élèves disposent d'une feuille de papier quadrillée. On leur demande de dessiner les « échelles » correspondant à deux nombres, puis de comparer ces nombres. Reprendre plusieurs fois cet exercice.

Autre exercice (1)

Compléter en mettant le signe convenable ($>$, $=$, $<$)
 $6 \dots 3$; $0 \dots 1$; $2 \dots 5$; etc.

4 Exercices de contrôle

- A) Fiche C 2 page 42. Pas de difficultés particulières. On pourra se servir des « échelles » pour comparer deux à deux les nombres de l'exercice ③.
- B) Fiche C 3 page 43. L'ordre sur les nombres est lié à la comparaison des ensembles.
- C) Fiche C 5 page 71. Pas de difficultés particulières : on a recours aux échelles pour comparer les nombres.

B RANGEMENT DE CARDINAUX

1 Intentions pédagogiques

◇ Réaliser la synthèse entre l'ordre naturel de succession des entiers et la comparaison des cardinaux.

2 Matériel

- éléments variés permettant de constituer des ensembles (blocs logiques de petite taille, Matériel Spira).

- une douzaine de boîtes contenant chacune de un à neuf objets.
- une grande bande de carton marquée d'une flèche.



(1) Dans certaines classes, les maîtres ont pu introduire les signes sans recourir aux « échelles » : les enfants ont adopté aisément la règle consistant à « tourner la pointe vers le plus petit nombre ».

3 Déroulement de la leçon

A Phase manipulative et orale

- ◇ On travaille avec un groupe comprenant une douzaine d'enfants. Chaque élève dispose d'une boîte comprenant de un à neuf objets. Il compte le nombre d'objets contenus dans sa boîte et inscrit ce nombre sur le couvercle.
- ◇ Un enfant pose une boîte b sur la bande fléchée comme l'indique la figure ci-dessous (orientation « gauche-droite »).



- ◇ Un autre enfant vient avec sa boîte :
 - ou bien, elle contient autant d'éléments que la boîte b . Dans ce cas, on peut remplacer le contenu de b par celui de la nouvelle boîte ;
 - ou bien, elle contient plus d'éléments que b . Dans ce cas, on la place à droite de b (1) ;
 - ou bien, elle contient moins d'éléments que b . Dans ce cas, on la place à gauche de b .

- ◇ Chaque élève range ainsi sa boîte en obéissant à la consigne suivante :
 - Toute boîte contenant plus d'éléments qu'une boîte donnée est placée à droite de cette dernière.
 - Toute boîte contenant moins d'éléments qu'une boîte donnée est placée à gauche de cette dernière.
 Si une boîte contient autant d'éléments qu'une boîte donnée, on ne la range pas.

■ Démarche pédagogique

Laisser les enfants découvrir par tâtonnements. Accepter leurs suggestions et vérifier si leurs propositions sont correctes.
 ◇ Supposons que le premier enfant ait placé la boîte contenant quatre objets. Comment son camarade placera-t-il sa boîte qui contient six objets ? Si ce dernier éprouve des diffi-

cultés, on peut lui suggérer de sortir les jetons des boîtes et effectuer la correspondance terme à terme.

◇ Utiliser un processus analogue pour placer les boîtes contenant 3, 7, 8, 9... objets. De proche en proche, on obtient le rangement suivant :

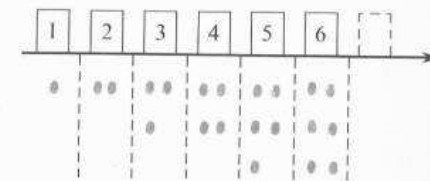
◇ Soit alors à ranger la boîte contenant cinq éléments. Où doit-on la placer ? Entre la boîte marquée 4 et la boîte marquée 6. Pourquoi ? Faire vérifier que la boîte marquée 5 contient plus d'objets que la boîte marquée 4 et moins d'objets que la boîte marquée 6.



On peut demander aux élèves où il faudrait placer la boîte marquée 0.

B Phase représentative

◇ Sur leur cahier, les élèves représentent le rangement ainsi effectué ainsi qu'un ensemble correspondant à chacun des cardinaux.



◇ Puis, on peut leur faire ranger par ordre croissant ou décroissant des nombres pris au hasard, par exemple : 4, 1, 6, 9, 7, 5.

4 Exercices de contrôle

Fiche C 4 page 60

Exercice (1) Il s'agit de tracer le diagramme sagittal de la relation : « ... à moins d'éléments que... » entre les différents ensembles.

Ensuite, il faut écrire la suite des ensembles, en les rangeant de celui qui a le moins d'éléments à celui qui en a le plus. Enfin, on note les cardinaux correspondants en mettant les signes convenables.

Exercice (2) Pour comparer les ensembles, on effectue les correspondances terme à terme. Puis on opère comme dans l'exercice (1).

(1) Il s'agit de la droite et de la gauche d'un observateur placé « face » à la flèche.

III.3.7 ERMEL : LE PLAN DU CHAPITRE « CORRESPONDANCE TERME À TERME »

(ERMEL gr. 1 1977, pp. 158-159)

Chapitre 6. Correspondance terme à terme

BUTS

A ce stade de la progression, commence véritablement le travail de **construction du nombre**. La correspondance terme à terme est un **outil de comparaison** des collections qui va permettre de les répartir en classes de collections équipotentes.

On se propose donc de familiariser les enfants avec :

- La correspondance terme à terme comme outil permettant de définir un pré-ordre sur plusieurs ensembles.
- La notion d'équipotence de deux ensembles finis.
- La comparaison de plusieurs ensembles (transitivité de l'équipotence).

Remarque : Ce travail comporte de nombreuses difficultés pédagogiques dans la mesure où il s'appuie sur des pratiques **implicites** de comparaison de collections qui existent très tôt chez l'enfant. Elles peuvent prendre l'aspect de la correspondance terme à terme (par exemple : mettre la table, c'est-à-dire effectuer la correspondance 1 personne - 1 assiette) ou de la comparaison approximative de collections d'objets considérées comme des « tas » et non comme des ensembles d'unités individualisables.

D'autre part, le langage par lequel l'enfant exprime ces comparaisons n'est qu'**apparemment proche** de celui des adultes. Les expressions « autant que », « pareil » sont souvent comprises et employées comme « au moins autant que ».

Il est donc important, dès le début de l'année, d'observer avec précision les comportements et le langage des enfants dans les activités où les comparaisons de collections (et les correspondances terme à terme) peuvent être mises en jeu. Partant de ces pratiques de la vie courante, on **construira** petit à petit et par correction progressive :

- un apprentissage conduisant à envisager une collection comme ensemble d'**unités individualisables** ;
- une technique correcte de **correspondance terme à terme** ;
- la notion d'**équipotence** acceptée comme indépendante des conditions particulières de sa vérification dans des exemples concrets (des techniques différentes doivent donner le même résultat).

PLAN

I. Activités occasionnelles de correspondance terme à terme

I. 1. Buts

I. 2. Activités

I. 2. 1. Distributions dans la classe.

I. 2. 2. Appariements d'objets.

I. 2. 3. Situations diverses de comparaisons de quantités.

II. Histogrammes

II. 1. Buts

II. 2. Activités

II. 2. 1. Histogramme des absents.

II. 2. 2. Histogramme des animaux.

II. 2. 3. Autres histogrammes.

III. Activités spécifiques de distributions

III. 1. Buts

III. 2. Activités

Distribution de cubes par petits groupes.

IV. Correspondance terme à terme

IV. 1. Buts

IV. 2. Activités

IV. 2. 1. Vérifier que deux collections sont équipotentes.

IV. 2. 2. Vérification de l'équipotence de deux collections importantes par correspondance « paquet à paquet ».

IV. 2. 3. Réalisation d'une équipotence.

IV. 2. 4. Comparaison de plusieurs collections.

IV. 2. 4. 1. Buts

IV. 2. 4. 2. Déroulement

a. Vers l'utilisation de la transitivité.

b. Comparaison de plusieurs collections.

III.3.8 ERMEL : TRANSCRIPTION DE LA SÉANCE DE « DISTRIBUTION »

(ERMEL gr. 1 1977, pp. 270-275)

Activités de distribution

INTRODUCTION

Rappelons le but de cette séquence : il s'agit de faire découvrir à la classe, qu'une activité courante que les enfants savent déjà effectuer (ex. : distribuer les cahiers) peut dans certaines conditions devenir une procédure rigoureuse pendant l'activité de correspondance terme à terme par laquelle l'enfant accède à la notion d'équipotence.

Les travaux de psychologie génétique peuvent laisser supposer que la notion d'équipotence n'est accessible à l'enfant que lorsqu'il possède la « conservation des quantités », c'est-à-dire lorsqu'il peut percevoir intellectuellement que le cardinal d'une collection reste inchangé quelles que soient les transformations qui affectent ses autres propriétés (disposition spatiale, fractionnement, etc.).

L'observation nous a montré que, dans ce domaine, causes et conséquences ne sont pas facilement déterminables et qu'un entraînement à des activités de comparaison de quantités discontinues (comparaison de collections) lié à une verbalisation précise de celles-ci peut avoir des effets heureux sinon sur l'accès à la « conservation des quantités » du moins sur l'appréhension de la notion d'équipotence (cf. chapitre : Correspondance terme à terme).

Il suffit d'être particulièrement attentif à l'activité et au langage des enfants.

Pour faire une distribution en parts égales, il est nécessaire :

- d'appréhender la collection comme ensemble d'unités individualisables,
- d'établir une règle du type « un à chacun » réitérable jusqu'à épuisement de la collection (ce qui suppose un ordre précis de distribution),
- de prendre conscience de l'équipotence entre l'ensemble des participants et l'ensemble des éléments distribués pendant un tour.

Ce qui suppose, en particulier que l'on puisse prévoir qu'avec un reste inférieur au nombre des participants on ne pourra terminer le tour...

Ce sont ces prises de conscience successives qui apparaissent dans la classe 1.

On voit en particulier comment les enfants remettent successivement en question l'évidence (pour eux) de l'équipotence qu'ils pensent avoir réalisé.

Le comptage est en ce sens un premier moyen de vérification, mais la classe 1 ne le maîtrise pas encore et doit se donner des moyens plus sûrs. Ce tâtonnement autour de la vérification est particulièrement intéressant.

La classe 1 propose une technique de comparaison originale qui consiste à construire avec la partie de collection une figure, si on peut la reproduire avec une autre partie les deux parties seront... « pareilles ». On sent bien ici que la notion d'équipotence est encore à naître et que l'enfant se contente d'une comparaison qualitative, « figurale ».

Petit à petit pourtant, on accède à terme à une correspondance par des actions d'individualisation d'objets (on sort, ensemble, un objet à la fois du tas). Mais si l'on recommençait ? On n'est pas sûr du résultat.

270

Pour la classe 2, au contraire, l'accès à cette conscience de l'équipotence semble plus difficile et l'enseignante a choisi de décrire une séance pendant laquelle elle tente de surmonter les difficultés précédemment rencontrées. Pour cela, elle a modifié les données de la progression : elle augmente le cardinal des parts en jouant avec toute la classe (on ne dira jamais assez que le travail en petit groupe n'est une technique de classe satisfaisante que si et seulement si le type de tâche proposé est imposé ou facilité par cette organisation).

La découverte de l'équipotence entre l'ensemble des participants et celui des objets distribués pendant un tour, si elle peut sembler évidente aux yeux de quelques enfants, n'est perçue que très progressivement pour tous les autres et passe longtemps par une vérification empirique : quel que soit le point de départ de la distribution, la correspondance terme à terme se réalise.

Les enfants ont redécouvert là un exemple célèbre d'« étonnement mathématique » souvent cité par J. Piaget.

CLASSE 1

Organisation de la classe

Je travaille avec un groupe de 4 enfants, les autres étant occupés à une autre activité. Chaque groupe travaillera successivement avec moi. Les séances s'étaleront sur plusieurs jours.

Déroulement de plusieurs séances avec les quatre mêmes enfants.

CHRONIQUE

Un gros tas de cubes de différentes couleurs. Après des jeux individuels de construction, de décoration, je propose qu'on donne des cubes à chacun.

G. prend l'initiative et distribue par poignée. Chaque enfant reçoit une, deux ou trois poignées de cubes.

— *Moi j'en n'ai pas beaucoup.*

G. cherche de nouveaux cubes dans le matériel pour donner une poignée de plus au mécontent. N. refuse la distribution de G, rassemble tous les cubes distribués et recommence. Il donne des petits tas de cubes. Chacun recevra trois petits tas.

COMMENTAIRES

Jeu libre puis consigne imprécise de distribution.

D'un seul coup d'œil, on peut constater les parts inégales.

Apparition de l'exigence d'équité.

271

– *Maintenant on en a pareil.*

- Tu crois ? comment le sais-tu ?
- *J'en ai donné deux fois à tout le monde.*
- Comment peux-tu être sûr que tu as donné à tous, le même nombre de cubes ?
- *Ya qu'à les compter.*

Chacun compte ses cubes.

- 10.
- 24.
- 11.
- 25.
- *Ah ! j'comprends plus.*
- *Il faut en donner un peu ou beaucoup.*
- *Moi je vais en donner pareil.*

I. rassemble tous les cubes et décide de les distribuer un à un. Elle prend un cube dans le tas, puis le donne.

Grande application.

Elle ne se soucie pas de la technique de la distribution mais elle surveille les résultats : que tous les tas soient équipotents.

Echec assez rapide, car au-delà de six cubes, elle ne peut plus contrôler les tas.

On recommence.

S. essaie de les distribuer par couleur :

- à elle tous les rouges,
- à N. tous les jaunes,
- à G. tous les bleus,
- à I. tous les autres.

– *Ça fait rien la couleur.*

Chacun essaiera, mais de façons différentes : N. pratique dans l'ordre, il se sert, sert son voisin de droite et continue en tournant toujours dans le même sens.

G. distribue selon un ordre :



mais il varie et le sens et la première personne servie à chaque tour de distribution.

Il lui arrive de s'oublier, ou d'oublier quelqu'un. Pour contrôler la réussite les enfants comptent leurs cubes après distribution.

S. réussira à respecter et la première personne servie et le sens, mais distribuera jusqu'à épuisement de tous les cubes.

L'équité n'est pas encore équipotence.
N. ne tient pas compte des cubes, mais des poignées que N. a données.

Le comptage apparaît comme moyen de vérification de l'équité (peut-être de l'équipotence).
Étonnement devant la contradiction entre une technique de distribution qui paraissait équitable et son résultat.

Apparition d'une nouvelle technique de distribution qui est en même temps une individualisation des éléments de la collection.

S. provoque une régression passagère dans la recherche du groupe.

Tâtonnements autour de la recherche d'une technique de distribution qui assure l'équipotence des parts.

Conflit entre technique de distribution et comptage.

Constatant les échecs, je demande aux enfants, pourquoi on n'y parvient pas :

- *C'est simple, il faut compter à chaque fois.*
- S. passe à l'exécution : elle distribue sans respecter le choix du point de départ, mais de temps en temps elle remarque :
- *T'en as cinq toi, et pas lui, alors voilà.*
- S. dénombre les parts et réajuste sa distribution en en reprenant, en en redonnant...

- Tout le monde ne sait pas parfaitement compter, il faut trouver une autre idée.

On remarquera qu'il faut toujours commencer par la même personne, distribuer toujours dans le même sens.

On recommence. Les enfants ne se lassent pas. Il y a comme un plaisir et un souci de perfectionnement.

Au dernier tour, il reste deux cubes.

N. n'en tient pas compte et les distribue.

– *Ah non, moi je ne les ai pas eu ceux-là, y en a pas assez.*

- Comment faire ?

- *Il en faut quatre en plus.*
- *Non deux seulement, un pour moi, un pour toi.*

Je leur explique qu'ils doivent se débrouiller, sans reprendre de cubes dans la réserve de matériel.

N. reprend les deux cubes.

- *Ce sera la pioche.*
- *Ça y est, tout le monde est content.*

- Et si on vérifiait ? Je voudrais, moi, être certaine que vous avez le même nombre de cubes.

Ils comptent, l'un d'entre eux ne sait pas bien la comptine.

S. de nouveau, compte combien elle a de rouges, de bleus... Les autres refusent ses dénombremments et lui expliquent qu'elle doit tout compter.

- Comment faire ?

S. propose qu'on fasse le même dessin qu'elle. Son dessin est déjà exécuté.

Echec des autres qui se repèrent mal.

- *Il faut faire comme moi, c'est moi qui fais le dessin.*

et elle place cube après cube.

Tentative pour aiguiller le groupe hors de la solution du comptage qui n'est pas assez maîtrisée. La technique de distribution commence à s'affirmer et à s'explicitier : les enfants la verbalisent.

Problème du reste.

Exigence de l'adulte : peut-on être sûr de l'équipotence des parts ?

Cette solution (S) est à la fois primitive et très intéressante. Elle montre que l'individualisation des objets de la collection n'est pas encore complètement détachée de la configuration spatiale d'ensemble de celle-ci. On voit comment l'équipotence entre les parts tient ici au fait que la collection est faite d'objets de forme identique.

N. propose autre chose.

Il regroupe sa part de cubes et dit :

– *A chaque fois que je pose un cube vous faites pareil.*

Les enfants essaient, mais se trompent car il faut regarder et faire...

– *Ça va trop vite.*

Aussi, quand il sort un cube, il le frappe sur la table.

– *Ça va.*

● Pourquoi dites-vous que ça va ?

– *Parce qu'on a fini tous ensemble.*

Une autre idée d'enfant :

I. aligne tous ses cubes et demande aux autres de venir les emboîter sur les siens.

● Et si on recommence, est-ce que vous en aurez pareil ?

– *J'sais pas.*

G. regroupe tous les cubes et refait la distribution. Au dernier tour il éprouvera le besoin d'essayer de distribuer les trois derniers cubes.

Il constate que ce n'est pas possible. Il les remettra à la pioche.

● Est-ce que quelqu'un sait distribuer en allant plus vite ?

G. accélère ses mouvements.

N. prend une poignée et distribue un à un les cubes de sa poignée et ne revient pas aussi souvent au gros tas.

I. distribue les cubes par trois. Au dernier tour, elle oublie qu'elle doit en donner trois à chacun.

Il en reste un, celui-là, elle ne le distribue pas.

– *Ça ne va pas, parce que nous, on n'en a pas eu au dernier tour.*

Ils remettent à la pioche les cubes en trop (à la pioche il y a 10 cubes).

La solution de N. se rapproche de la correspondance terme à terme qui porte ici sur le geste (ou son résultat, le bruit) par lequel on individualise l'objet de la collection.

Cette question permet de savoir si les enfants peuvent prévoir un résultat, c'est-à-dire, ici, avoir conscience de la nécessité de l'équipotence lorsqu'il y a une correspondance terme à terme.

Jamais ils n'anticiperont, en prévoyant un reste.

Je ne suis pas comprise (la consigne n'est pas assez explicite : je voudrais, en fait, les amener à faire des correspondances non plus unité à unité, mais paquet à paquet).

Rien n'est encore bien assuré.

● Que va-t-on faire de ces cubes ?

– *On les laisse.*

– *On peut les redonner.*

Et ils essaient de les redonner par trois !!! Echec.

Il les distribueront par un en laissant deux cubes à la pioche, mais ne seront pas certains d'en avoir le même nombre chacun. (On a changé la donne... par 3, puis par un).

Ils vérifieront en les comptant.

Je remarque que dans chaque groupe, après des touches successives, ils savent qu'il peut y avoir un reste mais ils ne le prévoient pas. Ils tentent la distribution, puis en remettent à la pioche.

CLASSE 2

Organisation de la classe

Plusieurs séances en groupes de 3 ou 4 enfants ont eu lieu. Les difficultés rencontrées, les réflexions des enfants sont les mêmes que celles des autres classes.

Pour aider les enfants à surmonter ces difficultés, j'organise une séance collective mais elle ne doit surtout pas se placer au début du travail de distribution.

Déroulement des séances

CHRONIQUE

Séance collective.

Les enfants sont assis par terre, en rond. Au milieu, 160 à 170 cubes. Je suis dans le cercle avec les enfants.

Je choisis Farida pour la distribution ayant remarqué qu'elle ne dominait pas du tout cette situation. Elle multipliait les oublis, les retours en arrière, se donnait deux cubes, etc.

Les autres lui expliquent :

– *Tu mets 1 à chacun et tu recommences toujours pareil. Commence par toi.*

– *Farida : Non, par Mohamed.*

Farida commence la distribution, mais multiplie les erreurs.

Tous :

– *Tu te trompes !*

– *Pas à toi !*

– *Tu oublies la matresse !*

– *Pas à Nathalie, tu viens de lui en donner !*

– *Tu oublies Christophe !*

– *J'en ai 6 et lui 7, ça va pas, etc.*

COMMENTAIRES

Très bon. Elle vient de prendre elle-même la décision de choisir son point de départ.

Elle rectifie à chaque fois, guidée par les autres. Je n'ai pas à intervenir.

III.3.9 EXTRAITS DU LIVRE DU MAÎTRE HONGROIS

Première partie (Livre du maître h. gr. 1 1978, pp. 108-113)

108 HASONLITSUK ÖSSZE A HALMAZOKAT!

Összehasonlítás, párosítás, elemszám

Számok és halmazok

A természetes számok külön-külön véges halmazok számságát fejezik ki. Fordítva is megfogalmazható: minden véges halmaz számságát egy-egy természetes számmal lehet kimondani és leírni. Együtt mondván a kettőt: a természetes számok pontosan a véges halmazok számságai:

Két különböző természetes szám közül az egyik kisebb, a másik nagyobb. Ezt a relációt jelöljük a $<$, illetve megfordítva, a $>$ jellel. A természetes számoknak olyan tulajdonságaival is megismerkednek a gyerekek, hogy van köztük legkisebb, de nincs legnagyobb; hogy mindegyiknek vannak szomszédai: az elsőnek egy, a többinek kettő; és így tovább. Ezek a tulajdonságok magától értetődőnek tűnnek, és a gyerekek akkor értik meg, hogy mégsem azok, amikor megismerkednek ellenpéldákkal: az összes egész szám közt nincs legkisebb; a számoknak nincsenek szomszédai; az „óraszám-tanban”, ahol például a 12 után megint 1 következik, minden számnak két szomszédja van, de a szomszédos számok között tíz-tíz szám van; és így tovább.

Halmazok összehasonlítása

Keressenek a gyerekek olyan állításokat, amelyek két halmazra egyaránt igazak! Olyanokat is, amelyek csak az egyikre igazak. Összehasonlításaik során rábukkannak arra a tulajdonságra, amit

109 TÖBB, KEVESEBB

halmazok számságának mondunk és egy-egy természetes számmal jellemzünk.

Hasonlítsuk össze a következő két halmazt!

A következő halmazokat is:

Az összehasonlítás során — itt is, mint a mennyiségeknel — egyszerűbb dolog a különbözőséget észrevenni, mint az egyezést. Amíg „szemek” hasonlítanak össze a gyerekek, kezdetben olyan halmazok szerepeljenek, amelyek közül az egyikben lényegesen több elem van, mint a másikban. Ilyen esetekre hamar megsejtik a több, kevesebb fogalmát.

A nagyobb, kisebb jelölésre mutatott $>$, $<$ jeleket itt is szoktuk használni. Jó, ha a mennyiségek összehasonlításánál bevezetett jelölést néhány órán még csak a mennyiségek körében használjuk, és csak ezután vezetjük be a halmazok összehasonlítására.

Az összehasonlításokat, a $<$, $>$ jelek beírását kövesse adottnál több, kevesebb tárgy kirakása, rajz készítése. Ennek egy formája a *nyitott mondat*, ahol valamelyik halmazt a gyerekeknek kell megalkotniuk a másik halmazhoz és a megkötött jelhez.

Pl.:

110 NYITOTT MONDATOK

● Már kezdetben adjunk olyan nyitott mondatokat is, amelyeket nem lehet megoldani!

Pl.:

111 TÉVES ÁLLÍTÁSOK JAVÍTÁSA

Próbálkozzanak, és hagyjuk nyitva, miért nem tudják a két vagy három feltételt egyszerre teljesíteni!

Hibás rajzot is javítsanak! (Ezt felhasználhatjuk majd a munkalapok önellenőrzésénél is.)

Például a következő állítás van a táblán:

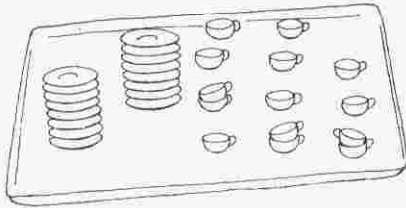
Kérjük a gyerekeket, javítsanak rajta, hogy igaz legyen! Javíthatnak úgy is, hogy a bal oldali körbe rajzolnak még, úgy is, hogy a jobb oldaliból letörölnek (3, 4 vagy 5) labdát, és úgy is, hogy a jelet fordítják meg.

Néha tehetünk valamilyen kikötést is. Pl. csak a jelen szabad változtatni. Vagy éppen a jelnek kell ugyanúgy maradnia. Egy-egy javítás után újra „rontsuk el” a mondat igazságát (törléssel vagy hozzárajzolással), amit aztán a gyerekek tetszésük szerint vagy a kikötésnek megfelelően javíthatnak.

A becslésszerű összehasonlításokat — második lépésként — itt is „nehéz”, „becsapós” esetek kövessék, amelyeken megérlelődhet az igény az összemérésre.

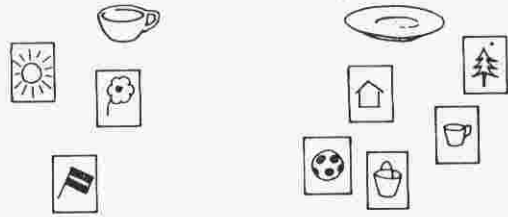
Párosítás

- Vigyünk egy tálcán például csészéket és csészealjkat (poharakat és kistányérokat; kanalat és villát; fogmosó poharat és fogkefét, esetleg a hasonló témájú környezetismereti órához kapcsolódva, amikor a fogmosás helyes módjával ismerkednek; stb.)! Legyen mindegyikből elég sok ahhoz, hogy akár szemre, akár számlálással ne dönthessenek könnyen. A tányérokat 1 vagy 2 oszlopba feltoronyozhatjuk, a csészéket pedig — ahogy természetes is — külön-külön vagy kettőt-kettőt egymásba téve tehetjük a tálcára.



Ismét kérdezzük meg a gyerekeket, mit gondolnak, miből van kevesebb (több): csészeből vagy kistányérból. Fontos, hogy mindenki állást foglaljon. Sorra elmondják, mit gondolnak, vagy felállnak, akik szerint a tányér kevesebb, vagy a mágneses táblára rajzolt csésze vagy tányér alá kiteszik a jelüket* aszerint, melyiket látják kevesebbnek:

* Később is többször használhatók azok a fémlappal ellátott kártyák, amelyeken a gyerekek jele (később pl. sorszáma, neve, monogramja) látható.



Vagy „titkos szavazással” azt rajzolják le, amiből, úgy gondolják, több van.

Míntha nem is lenne köze az előbbi probléma eldöntéséhez, kérjünk valakit, terítsen meg az asztalon úgy, hogy minden tányérra legyen 1—1 csészét. A gyerekek csodálkozni vagy örülni fognak, amikor látják, hogy pl. 2 tányérra nem jutott csésze, és önkéntelenül is megfogalmazzák a most már igazolt kapcsolatot: „Jé, mégis a tányér több?!”

A párosításban találják meg a módszert, hogyan lehet eldönteni, melyik halmaznak van több, kevesebb eleme.

Döntsék el, fiú jár-e több az osztályukba vagy lány. Szőke hajú vagy sötétebb hajú. Napközis vagy nem napközis. Szemüveges vagy nem szemüveges. Miből van kevesebb a készletünkben: piros vagy sárga rúdból, fehérből vagy rózsaszínből. A logikai készletben zöldből vagy sárgából, pirosból vagy nem pirosból; lyukasból vagy almából, körből vagy szögletesből. Az osztályukban több-e az ablak, mint a lámpa; a tábla vagy a kép; a virág vagy a gyerek. Minden esetben becsüljék meg, aztán döntsenek párosítással!

A munkalapokon sok helyen és sokáig szerepel a gondolat: kössék össze az egyik halmaz minden elemét a másik halmaz más-más elemével, úgy állapítsák meg, milyen jelet kell közéjük írni. Hasonló feladatokat táblán is végezzenek a gyerekek!

Progression annuelle par semaines (Livre du maître h. gr. 1 1978, pp. 279-280)

	3. hét	4. hét	5. hét	6. hét
H Á Nym	Szétválogatás. Sorozatba rendezés. Nyitott mondatok. Tulajdonságok változása. 4. ml/3.	Ismerkedés más logikai készletekkel, a munkalap-sorozat gyerekkártyáival. Szétválogatások. Igaz és nem igaz állítások tárgyról, személyekről, halmazokról. Nyitott mondatok.	Halmazokról igaz és nem igaz állítások. Nyitott mondatok: egy és két változósok.	Szétválogatások saját szempont szerint és adott tulajdonságok alapján. Változások megfigyelése. 13. ml/1.; 14. ml/2.
R F S	Kapcsolat egy halmaz elemei közt. Kisebb, nagyobb, legkisebb, legnagyobb (különbféle mennyiségek összehasonlítása alapján): hosszúság, tömeg, űrtartalom, idő). Sorozatok. 4. ml/1., 2.; 6. ml/3.	Kapcsolatok jelölése összekötéssel, nyíllal, <, > jelekkel, párba állítással. Sorozatok folytatása. Ugyanolyan széles, ugyanolyan alakú, ugyanabban az utcában lakik, ... relációk.	Kapcsolatok. Párok összekötése vonalakkal, nyíllal. Legtöbb, legkevesebb. Sorozatok. 12. ml/2.	Adott kapcsolathoz párok keresése a színes rudakkal, logikai lapokkal, a gyerekkártyákkal. Gépjátékok. Ugyanolyan színű, alakú, nagyságú, állású, ugyanolyan a nevének kezdőbetűje; illetve különbözők a színük, az alakjuk, ...
Sz	Összehasonlítások, összemérések; kisebb, nagyobb, ugyanakkora.	Kisebb, nagyobb, ugyanakkora mennyiségek előállítás, a kapcsolat megállapítása.	Mérés egységgel. Több, kevesebb, ugyanannyi; párosítás. Számok: mérőszám. Halmazok tulajdonsága. Legtöbb, legkevesebb. Csoportosítások. 10. ml; 11. ml; 12. ml/2.	Halmazokhoz, mennyiségekhez szám hozzákapcsolása. Számokról kirakások, rajzok készítése, mennyiségek előállítása. Számjelek olvasása. Lépések a számegyenesen. 13. ml/2., 3.; 14. ml/1.; 15. ml.
M	Több, kevesebb. Jelölés: <, >. 5. ml/2.; 6. ml/1.	Több, kevesebb, ugyanannyi — párosítással. 7. ml; 8. ml/1.; 9. ml. 1/C felmérő lap.	Rajzok, mozdulatok, tárgyak egyeztetése, megkülönböztetése állás, alak szerint — utánzás mozgással, kirakással, szöges táblán. 12. ml/3.	Papír nyírása: lyukas (1-, 2-, ... lyukú) és nem lyukas lapok előállítása, szétválogatása különböző szempontok szerint. Építés színes rudakkal szabadon és modellről.
G	Nyitott, zárt vonalak. 5. ml/1.; 6. ml/2.	Nyitott, zárt vonalak. 8. ml/2.		
K V St	Adatok gyűjtése a gyerekek életéből.	Adatok gyűjtése; grafikonépítés, grafikonolvasás. Egyezések és eltérések leolvasása grafikonokból.		

Tableau d'organisation (Livre du maître h. gr. 1 1978, annexes)

	HALMAZ	ÁLLÁS	NYITOTT MONDAT	RELÁCIÓ	FÜGGVÉNY	SOROZAT
1.	Tárgyak, személyek tulajdonságainak megfigyelése, összehasonlítása. Szétválogatásuk tulajdonságok alapján.		Nyitott mondatok, kérdések	Kapcsolat két halmaz elemei között		Ciklikus sorozatok
2.						
3.			"... nehezebb, mint ..." (kisebb, magasabb, kevesebb) és "A reád..." (mint az autód...) jellegű nyitott mondatok	Kapcsolatok kifejezése nyíllal, összekötéssel egy halmaz elemei közt és két halmaz elemei között. Rendezési és ekvivalenciarelációk	Tapasztalati függvények, grafikonépítés, gépjátékok szám-fogalom előkészítéséhez, kirakásokhoz, logikai lapokkal, halmazokkal	
4.	Halmazok jellemzése állításokkal					
5.						
6.						
7.						
8.						Szám-sorozatok — mérésből, számtáblából kiindulva
9.	Részhalmaz	Tagadás	Nyitott mondatok számokkal is (próbálgatás)			
10.	Tulajdonságok jelölése					
11.						
12.						
13.	Rendezés. Különbség-játék	Néma barokobba, ritmizálás, különféle barokobok		Keressük a kapcsolatot. Relációk számok között	Gépjátékok, sorozatok, kapcsolat (szabály) keresése	
14.			"0" számok keresése (próbálgatás)			
15.						
16.						

SZÁM	MŰVELET	GEOMETRIA	KOMBINATORIKA	VALÓSZÍNŰSÉG	STATISZTIKA
1.		Tárgyak, lapok geometriai tulajdonságainak megfigyelése (helyzet, állás, irány, alak, lyukaság, görbület)			
2.	Mennyiségek összehasonlítása, összemérése; nagyobb, kisebb, egyenlő				Adatok gyűjtése, grafikon
3.					
4.		Halmazok összehasonlítása: több, kevesebb (>, <). Párosítás: ugyanannyi (=)			
5.	Mérés egységgel				
6.					
7.	Számok	Nyitott, zárt vonal; külső, belső pontok, tartományok, tartományok száma, szomszédosság. Előtagzások vonalakon			
8.	A számoknak sok neve van. Számegyenes. Mit mond a kép? Mit mond a két kép? Bontott alak (összegelek, különbségelek)				Kirakások adott felület szerint
9.					
10.					
11.		Egyesítés, összetétel	Síkdomok, testek előállítása; szimmetria		
12.	Számok rendezése; számegyenes; sorszám				
13.		Hozzátevés	Elvétel		
14.		... -vel több	... -vel kevesebb		
15.	1-gyel, 2-vel, ... nagyobb (több), kisebb (kevesebb). Mennyivel nagyobb, mennyivel kisebb?				
16.		Egyesítés megfordítása			

III.3.10 LA PRÉFACE DU LIVRE DU MAÎTRE HONGROIS

(Livre du maître h. gr. 1. 1978, p. 5. Ma traduction.)

Ce livre est la version remaniée du guide publié pour le programme provisoire de mathématiques de la première année. Le contenu du programme de la première année ne change pas par rapport au programme provisoire ; les deux livres sont par conséquent identiques quant au contenu mathématique et didactique. Nous avons gardé toutes les descriptions d'activités, de jeux et de tâches qui se sont avérés bons, utilisables, et on n'a abandonné que des tâches qui avaient pour but principal d'ouvrir des perspectives. Il y a peu de tâches nouvelles par rapport au livre précédent.

La structure du livre a subi des changements plus importants ; nous avons essayé de la rendre plus transparente et ainsi plus facilement utilisable.

Nous avons structuré notre propos en deux parties. Dans la première, nous donnons une sorte de description didactique du contenu du programme de l'année ; la deuxième contient des documents auxiliaires.

La description didactique du contenu du programme offre un résumé du contenu mathématique *par thèmes*, et montre aussi des exemples d'activités, de tâches. À l'intérieur de chaque thème, l'ordre des tâches peut en général être suivi dans l'enseignement. Là où c'est possible, nous avons essayé de proposer suffisamment d'activités concrètes pour toute l'année. Dans d'autres cas (par ex. fonctions, phrases avec trous sur les nombres) nous proposons des types de tâches, des formes qui permettent aux collègues de créer facilement des tâches similaires.

En outre, un *titre* est donné à certaines tâches, à celles qui peuvent être reprises plusieurs fois au début de l'année (éventuellement même plus tard).

Un rond plein (●) désigne, sur la marge, les tâches, jeux. Les variations d'une idée de base sont désignées par un rond vide (○). Dans certains cas, des tâches très étroitement liées sont réunies par un seul rond.

Par la formulation des tâches, nous essayons de fournir un modèle au langage concis, simple, parfois volontairement flou que nous suggérons d'utiliser dans l'enseignement élémentaire.

ANNEXES DU CHAPITRE III.4

III.4.1 EXTRAITS DU PREMIER MANUEL DE LA COLLECTION QUEYZANNE-REVUZ

Extrait du premier chapitre (Queyzanne-Revuz, gr.6 1969, pp. 6-9)

6

MATHÉMATIQUE 6^e

1

Ensembles et éléments

1 UN PEU DE VOCABULAIRE

Voici quelques expressions qui vous sont familières :

un amas de feuilles, une assemblée de notables, une collection de timbres, un corps de sapeurs-pompiers, un ensemble de qualités, une famille de plantes, une société de pêcheurs à la ligne, un tas de cailloux ...

Chacune de ces expressions associe deux noms désignant chacun un objet. Nous employons ici, pour désigner ce dont nous parlons (des humains, des animaux, des choses, des qualités, ...) le mot **objet**, parce qu'il est suffisamment neutre, et sans lui attribuer aucun sens mathématique.

Les objets que désigne le second nom de chaque expression sont :
des feuilles, ..., des qualités, ..., des cailloux.

Quant aux objets désignés par le premier nom, que la grammaire appelle **nom collectif**, ils rappellent tous l'idée de **groupement**, de **rassemblement** :

un amas, ..., une collection, ..., un tas.

Trouvez d'autres expressions exprimant la même idée :

une ... de parents d'élèves, un bouquet de ..., une ... de perdreaux, un conseil de ..., une ... d'avions, une foule de ..., un ... de badauds, un troupeau de ..., etc...

L'usage, ou certaine nuance supplémentaire de leur sens, fait que certains de ces mots ne sont pas interchangeables.

Diriez-vous, par exemple : *un chapelet d'abeilles, un essaim de saucisses, une meute de navires, une escadre de chiens?*

D'autres, au contraire, *collection, ensemble, groupe, rassemblement, ...*, n'expriment guère que la seule idée de **rassemblement** et peuvent s'appliquer à des objets très divers.

Montrez-le :

une collection de timbres, de tableaux, de ..., de ..., un ensemble de ..., de ..., de ..., un rassemblement de curieux, de ..., de ..., etc.

CHAPITRE 1

7

2 ENSEMBLES ET ÉLÉMENTS

Parmi ces derniers noms, les mathématiciens ont choisi, pour exprimer l'idée de groupement, l'un des plus neutres : le mot **ensemble**.

Et ils ont décidé d'appeler **éléments** les objets qui sont rassemblés dans cet ensemble.

Si vous dites à votre ami Pierre que vous avez vu, dans la cour, *un élément*, il ne saura pas ce que vous voulez dire. Par contre, si vous lui déclarez avoir vu *un élément de l'ensemble des élèves de la sixième B*, vous lui apportez une information valable, même s'il se moque de votre façon compliquée de dire cette chose si simple : vous avez vu *un élève de sixième B*.

Réciproquement, vous ne renseignez guère en déclarant avoir trouvé, au bout de l'allée, *un ensemble*. Il vous faut, pour devenir clair, préciser les éléments qui constituent cet ensemble : *un ensemble de traces de pas*, par exemple.

Ainsi, les mots **ensemble** et **élément** s'éclairent l'un l'autre. Employé isolément, le mot *élément* n'a pas grande signification. Quant au mot *ensemble*, il n'est tout à fait précis que si l'on sait de quels éléments cet ensemble est constitué.

3 SOYEZ FIDÈLE A UN LANGAGE PRÉCIS

Dès votre inscription parmi les Eclaireurs, adoptant leur langage, vous êtes devenu un *louveteau* de votre *meute*. Vous vous comprenez entre initiés sans risque de confusion.

Pour vous, un louveteau est un garçon inscrit parmi les Eclaireurs. Votre *meute comprend* un certain nombre de louveteaux dont vous pourriez dresser la liste. Vous savez que votre ami Roger Durand **appartient** à votre meute, mais que votre sœur n'y appartient pas, ni Jacques Dupont, qui est d'une autre meute, ni Louis Dubois, qui n'est pas Eclaireur. Votre tente non plus n'appartient pas à votre meute, car, en mathématique, **l'appartenance** n'est pas une question de possession : votre meute ne comprend que ses louveteaux et non pas leur équipement.

Alors, puisque vous voilà devenu un modeste mathématicien, adoptez, entre mathématiciens, *le langage des mathématiciens*, et employez-le avec *précision et fidélité*.

Dans ce langage, dites si Blanchette appartient à l'ensemble des chèvres de M. Seguin. Et la vieille Renaude (avant que le loup ne l'ait mangée)? et M. Seguin lui-même? et sa grange? et Médor? et Noiraude, la chèvre de Maître Cornille?

4 UNE ÉCRITURE COMMODE

Vous écririez :

Blanchette \in Ensemble des chèvres de M. Seguin,
le signe (ou **symbole**) \in étant une simple abréviation que vous lirez :
... **est élément de** ...

ou à la rigueur : ... *appartient à* ...

mais à condition de n'y voir aucune relation de chose possédée à son propriétaire.

Continuant d'abrégier, vous pourrez remplacer Blanchette par bl , ou même par b . Remplaçant l'ensemble des chèvres de M. Seguin par Ch , ou même par C , vous écririez :

$$bl \in Ch \quad \text{ou} \quad b \in C$$

Rien ne vous empêche de choisir, pour désigner Blanchette, n'importe quelle lettre, a par exemple (de préférence des minuscules pour les éléments). De même, vous pourrez désigner l'ensemble des chèvres de M. Seguin par E (de préférence des majuscules pour les ensembles).

Vous écrivez alors :

$$a \in E$$

Choisissez b pour Renaude, c pour M. Seguin, d pour sa grange, ... à votre gré, mais à la condition qu'une même lettre ne désigne jamais plus d'un élément dans l'étude d'une même question. Car si vous utilisez la même lettre pour deux objets, vous ne sauriez plus, en l'écrivant, duquel de ces deux objets vous voulez parler.

Vous indiquerez alors que ces objets appartiennent ou n'appartiennent pas à E en écrivant :

b	\in	E		c	\notin	E
			qu'on lit :			
b	est élément de	E		c	n'est pas élément de	E

etc., etc., ou, ce qui revient au même, mais qu'on écrit plus rarement :

E	\ni	b		E	$\not\ni$	c
			qu'on lit :			
E	comprend	b		E	ne comprend pas	c

Et naturellement vous utiliserez avec fidélité une écriture aussi commode.

Reprenez l'exemple de votre meute M . Choisissez, pour chacun des objets qui y sont cités, une lettre différente a, b, \dots , et indiquez, pour chacun d'eux, s'il est ou non élément de M , en employant le signe qui convient (\in ou \notin).

Vous pouvez dire de n'importe quel objet (vous-même, Roger Durand, votre tente, cette pomme, ...) s'il appartient ou non à votre meute M . Seguin peut dire de n'importe quel objet, ou, comme on dit pour être plus précis, **de tout objet**, s'il est ou non élément de l'ensemble de ses chèvres.

Ces deux ensembles sont donc parfaitement connus, ou, comme on dit, parfaitement **définis**.

Un ensemble E est **défini** si, pour tout objet a , on peut répondre par *oui* ou par *non* à la question :

$$a \text{ est-il élément de } E ?$$

et donc si l'on sait, des deux affirmations :

$$a \in E \quad a \notin E$$

laquelle on a le droit d'écrire

5 COMMENT ÉCRIRE UN ENSEMBLE

1^o Le moyen le plus simple d'écrire un ensemble sera de dresser la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des voyelles de notre alphabet s'écrira :

$$\{ a, e, i, o, u, y \}$$

en convenant de toujours enfermer ces éléments entre deux accolades :

$$\{ \dots \dots \dots \}$$

Cette énumération permet aux mathématiciens de former des ensembles comprenant des éléments très divers, qui pourraient même n'avoir qu'une seule propriété commune, celle d'appartenir au même ensemble.

Ainsi, il arrive à Marie-Pierre, qui n'est pas très ordonnée, de jeter une de ses sandales dans son coffre à jouets. Il n'est donc pas impossible qu'un certain jour, l'ensemble des objets enfermés dans ce coffre doive s'écrire :

{ la poupée blonde de Marie-Pierre, sa poupée brune, sa corde à sauter, son ballon, sa sandale droite }.

Une telle liste serait évidemment fort longue s'il s'agissait de l'ensemble des Parisiens, ou des Français. Il serait même impossible de dresser la liste des nombres entiers, puisqu'elle est illimitée.

2^o Chacun des ensembles dont nous avons parlé au début de cette leçon était formé d'éléments qui avaient quelque chose de commun : ces éléments étaient tous des timbres, ou tous des louveteaux, ou tous des chèvres, ... Et il suffisait de préciser de quels timbres, de quels louveteaux, de quelles chèvres, ... il était question pour que l'ensemble soit parfaitement connu, soit défini.

Le plus souvent, on peut ainsi définir un ensemble en indiquant une qualité *commune à tous ses éléments* et à *eux seuls*, ou, comme on dit, une **propriété caractéristique** de ses éléments.

C'est ainsi que sont parfaitement définis :

l'ensemble des doigts de votre main gauche,

l'ensemble des lettres de l'alphabet français,

l'ensemble des élèves de votre classe qui portent, à l'instant présent, des lunettes.

Il va de soi que cette propriété doit être indiscutable. Ainsi, un élève très blond trouvera trois ou quatre chevelures blondes dans la classe, tandis qu'un brun croira en distinguer une dizaine : la nuance *blond* est trop vague pour servir de propriété caractéristique, et donc pour définir un ensemble.

6 UN DESSIN QUI PARLE

Dessinez les cinq objets contenus dans le coffre de Marie-Pierre, d'après l'inventaire qui en est fait au n^o 5. Entourez ensuite ce dessin d'un trait, sorte de *corde* qui indiquera que tous ces objets sont *éléments de l'ensemble* (des objets alors contenus dans ce coffre).

Si vous voulez montrer que la raquette de Marie-Pierre, ou sa sandale gauche, n'appartient pas à cet ensemble (n'est pas dans le coffre), vous pourrez la dessiner, mais à l'extérieur de la corde (fig. 1).

16 |

Longueur des segments d'une droite

1 LA MESURE

Pour effectuer la mesure d'un seau, Pierre a utilisé la mesure en fer-blanc d'un litre : la mesure (de la capacité) de ce seau est 9 litres.

Ne prenez pas cette phrase pour modèle : le nom **mesure** y a trois sens différents, bien qu'ils aient une certaine parenté :

- 1^o Mesure exprime d'abord l'action de mesurer, le *mesurage*.
- 2^o La mesure en fer-blanc est plus exactement un instrument de mesure.
- 3^o 9 litres est le résultat du mesurage effectué.

Pour ce dernier résultat, 9 litres, vous devez préciser qu'il s'agit de la capacité du seau : 20 cm est aussi la mesure (du diamètre du fond) du seau, comme 500 g est la mesure de son poids (à vide), et 7 F la mesure de son prix.

C'est pourquoi vous dites plus clairement : la capacité de ce seau est 9 l; la longueur de son diamètre est 20 cm; son poids à vide est 500 g et son prix 7 F.

Remarquez que tous ces résultats s'expriment de la même façon : par un nombre suivi du nom de l'unité.

Mais ils ont d'autres propriétés communes importantes. C'est parce qu'ils s'intéressent d'abord à ces propriétés communes que les mathématiciens mettent plus particulièrement l'accent sur le troisième sens du mot *mesure*: résultat d'un mesurage.

2 CONFECTION D'UNE GRADUATION

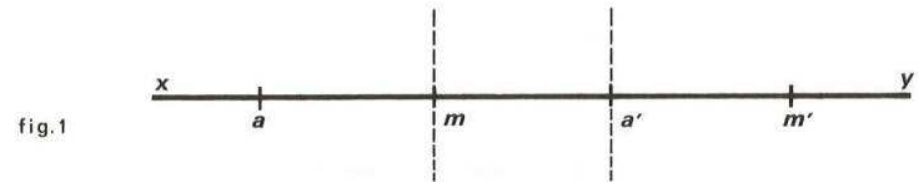
Il s'agit simplement ici de graduer une droite tracée sur une feuille de papier.

Tracez sur votre feuille une droite xy sur laquelle vous marquerez deux points a et m .

Pliez votre feuille de manière que le pli passe par m et que les demi-droites mx et my se recouvrent exactement. Percez d'une pointe, au point a , les deux épaisseurs de papier ainsi superposées.

Ouvrez votre feuille bien à plat et marquez a' au second trou, qui correspondait au point a lors de votre pliage (fig. 1).

$[am]$ et $[ma']$ sont deux segments de la droite xy ; leur intersection est le singleton $\{m\}$.



Recommencez l'opération précédente en faisant passer le pli par a' , de telle sorte que les demi-droites $a'x$ et $a'y$ se recouvrent, et en perçant les deux épaisseurs de papier au point m . Vous obtenez un nouveau point m' .

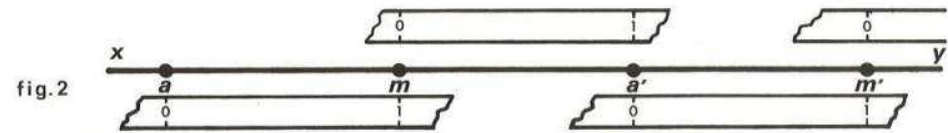
Vous avez ainsi un moyen de réaliser expérimentalement une graduation dont les repères a, m, a', m', \dots sont régulièrement espacés.

Il y a bien d'autres procédés pour réaliser la même graduation :

Placez une pointe de votre compas pointes sèches en m , l'autre en a . Faites tourner autour de m . Quel point de la demi-droite my atteint la pointe qui était en a ?

Faites maintenant tourner votre compas autour de a' . Quel est le nouveau point obtenu?

Une bandelette de papier, sur le bord de laquelle vous aurez repéré par 0 et par 1 les points a et m vous donnerait le même résultat : il vous suffirait de déplacer cette bandelette le long de xy , son repère 0 au point m de xy et de marquer a' sur xy à l'endroit où arrive le repère 1, etc. (fig. 2).



Si vous remplacez a, m, a', m', \dots par 0, 1, 2, 3, \dots , vous retrouvez la graduation de la demi-droite que nous avons déjà utilisée (n^o 7, p. 100).

3 UTILISATION DE LA GRADUATION

La figure 3 représente une graduation dont les repères sont régulièrement espacés. A combien d'intervalles correspond le segment $[ab]$? le segment $[cd]$? le segment $[mn]$?

Vous venez de *mesurer* le segment $[mn]$: la **longueur** du segment $[mn]$ est 6 (6 intervalles), et vous écrivez, l'unité de longueur étant l'intervalle de cette graduation :

$$\text{long. } [ab] = 4 \qquad \text{long. } [cd] = 2 \qquad \text{long. } [mn] = 6$$

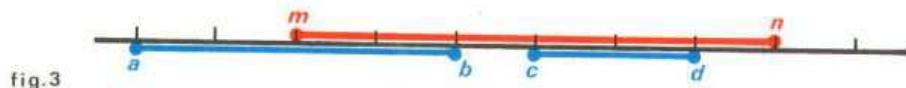


fig.3

Bien entendu, si vous comptiez en binaire, vous auriez écrit :
 $\text{long. } [ab] = 100$ $\text{long. } [cd] = 10$ $\text{long. } [mn] = 110$
 puisque 4 (décimal) et 100 (binaire) ne sont que deux façons d'écrire le même nombre.

Ainsi, l'unité de mesure étant choisie, la *longueur d'un segment* dont les extrémités correspondent à deux repères de la graduation est un **cardinal** (un nombre d'intervalles).

Remarquez que le choix préalable de l'unité est indispensable à toute mesure, comme vous le montre la figure 4 :

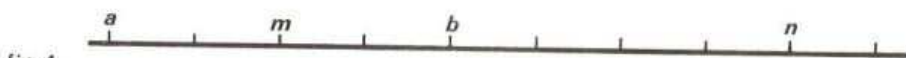


fig.4

En utilisant la graduation rouge, comment écrivez-vous :
 la longueur du segment $[ab]$? $\text{long. } [ab] =$
 la longueur du segment $[mn]$? $\text{long. } [mn] =$

4 LONGUEUR DE LA RÉUNION DE DEUX SEGMENTS

Sur chaque droite graduée de la figure 5 sont représentés deux segments dont les extrémités correspondent à des repères de la graduation. On peut envisager quatre cas de figure :

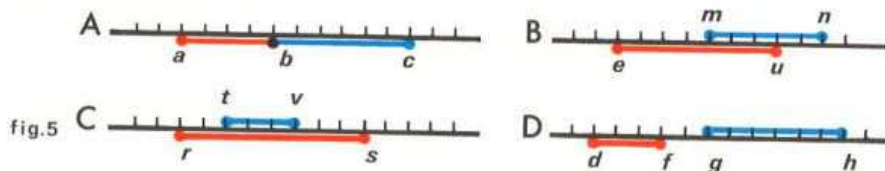


fig.5

Ayant choisi comme unité de longueur l'intervalle de la graduation, remplissez d'abord les trois premières lignes du tableau suivant :

	long. des segments rouge	bleu	somme de ces longueurs	long. de la réunion des segments	long. de l'intersection des segments	somme des 2 colonnes précédentes
A			+ =	long. $[ac]$ =	long. $[b]$ =	+ =
B			+ =	=	=	+ =
C			+ =	=	=	+ =
D			+ =	=	=	+ =

Dans les cas A, B et C, comparez la 3^e colonne (*somme des longueurs des deux segments*), avec la dernière colonne (*long. de la réunion des segments + long. de l'intersection des segments*). Que remarquez-vous ?

Dans le cas D, quelle longueur est-il normal de donner à la réunion des deux segments ? à leur intersection ?

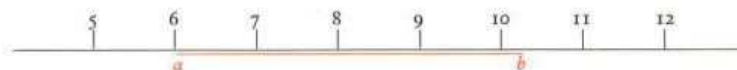
Ainsi, dans tous ces cas, si, pour simplifier, on désigne deux segments par A et B, on peut écrire :

$$\text{long. } A + \text{long. } B = \text{long. } (A \cup B) + \text{long. } (A \cap B)$$

Cette égalité ne vous rappelle-t-elle pas celle du n° 6, p. 123 ? Cette ressemblance est-elle surprenante ?

5 GRADUATION PLUS FINE

Le plus souvent, les extrémités du segment $[ab]$ à mesurer ne coïncideront pas avec deux repères de la graduation. Même si l'on établit cette graduation à partir d'un premier repère situé en a , l'extrémité b du segment se trouvera entre deux repères consécutifs



Nous avons vu qu'on peut alors repérer le point b en le situant entre les repères 10 et 11. Comptant les intervalles, on pourra de même *encadrer* la longueur du segment $[ab]$ par les nombres 4 et 5, ce que l'on écrira :

$$4 < \text{long. } [ab] < 5$$

4 (par défaut) et 5 (par excès) sont les *valeurs approchées* de $\text{long. } [ab]$ à 1 intervalle près.

Pour obtenir une meilleure approximation, on aura recours à une graduation plus fine.

Dans la pratique, on obtient une graduation plus fine, à partir de la graduation initiale, en établissant des sous-graduations successives (n° 3, p. 105).

III.4.2 MONGE : PROPRIÉTÉ D'UN RAPPORT DE PROJECTION ORTHOGONALE

(Monge gr. 9 1972, pp. 177-178)

13. PLAN EUCLIDIEN

Axiome de symétrie.

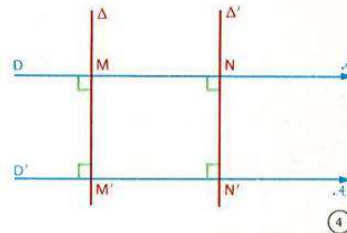
- 8 L'étude expérimentale nous conduit à imposer au plan P de vérifier la propriété suivante appelée axiome de symétrie du rapport de projection orthogonale :

AXIOME DE SYMÉTRIE : Quels que soient les axes \mathcal{A} et \mathcal{A}' , on a : $c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = c(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Propriété d'un rapport de projection orthogonale.

Considérons un axe \mathcal{A} de support D et un axe \mathcal{A}' de support D'. Distinguons trois cas :

- 9 **Premier cas :** $D \perp D'$.
Nous avons l'équivalence logique : $(D \perp D') \iff (c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = 0)$.
- 10 **Deuxième cas :** $D \parallel D'$.
Soient M et N deux points distincts de D, M' et N' leurs projections orthogonales respectives sur D'.
M' est l'intersection de D' et de la droite Δ qui passe par M et qui est perpendiculaire à D'. Les droites D et D' sont parallèles; la droite Δ est donc perpendiculaire à D, et M est la projection orthogonale de M' sur D (fig. 4).
De même, N est la projection orthogonale de N' sur D.
Nous avons donc les égalités :
 $\overline{M'N'} = c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \overline{MN}$ et $\overline{MN} = c(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \overline{M'N'}$. (1)
D'après l'axiome de symétrie, nous avons :
 $c(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$. (2)
Des égalités (1) et (2), nous déduisons : $[c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')]^2 = 1$.
Il en résulte : $|c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')| = 1$.
- 11 **Troisième cas :** D n'est ni perpendiculaire ni parallèle à D'.
Soient B le point d'intersection de D et de D', C un point de D distinct de B, et A la projection orthogonale de C sur D'.



177

13. PLAN EUCLIDIEN

Les droites D et D' ne sont pas perpendiculaires; A est donc distinct de B (fig. 5).

Soit H la projection orthogonale de A sur D. Nous avons les égalités : $\overline{BA} = c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \overline{BC}$ et $\overline{BH} = c(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \overline{BA}$.

Posons : $c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = k$; d'après l'axiome de symétrie, nous avons : $c(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = k$.

Des égalités : $\overline{BA} = k \overline{BC}$ et $\overline{BH} = k \overline{BA}$, nous déduisons : $\overline{BH} = k^2 \overline{BC}$. (1)

Désignons par \mathcal{A}'' un axe de support (CA); posons : $c(\mathcal{A}, \mathcal{A}'') = k'$.

Nous avons, de la même façon : $\overline{CH} = k'^2 \overline{CB}$, ou encore :

$\overline{HC} = k'^2 \overline{BC}$. (2)

Des égalités (1) et (2), nous déduisons :

$\overline{BH} + \overline{HC} = k^2 \overline{BC} + k'^2 \overline{BC}$, puis : $\overline{BC} = (k^2 + k'^2) \overline{BC}$.

Le réel \overline{BC} n'est pas nul; il en résulte : $k^2 + k'^2 = 1$,

ou encore : $[c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')]^2 + [c(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')]^2 = 1$. (3)

Les supports de \mathcal{A} et de \mathcal{A}'' ne sont pas perpendiculaires; nous avons donc : $[c(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')]^2 > 0$.

De l'égalité (3), nous déduisons alors :

$[c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')]^2 < 1$, puis : $|c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')| < 1$.

- 12 En résumé, nous avons démontré le théorème :

THÉORÈME : Quels que soient l'axe \mathcal{A} de support D et l'axe \mathcal{A}' de support D', on a l'inégalité : $|c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')| \leq 1$.

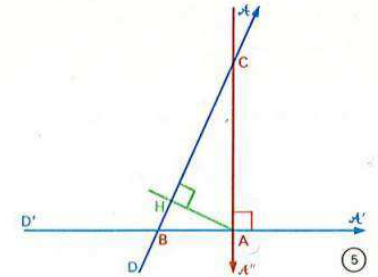
L'égalité : $|c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')| = 1$ a lieu si et seulement si D est parallèle à D'.

Axes de supports parallèles.

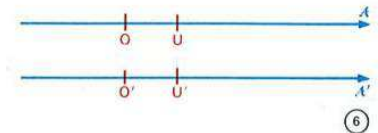
- 13 Considérons deux axes \mathcal{A} et \mathcal{A}' dont les supports sont parallèles. On dit aussi que les axes \mathcal{A} et \mathcal{A}' ont la même direction.

Du théorème précédent, il résulte : $|c(\mathcal{A}, \mathcal{A}')| = 1$,

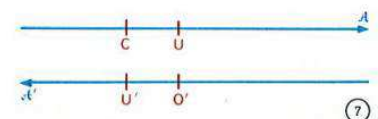
c'est-à-dire : $c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = 1$ (fig. 6) ou $c(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = -1$ (fig. 7).



5



6



7

178

III.4.3 MONGE : EXERCICES POUR LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

(Monge gr. 9 1972, pp. 177-178)

13. PLAN EUCLIDIEN

EXERCICES

Inégalités triangulaires.

- 1 On considère un triangle (A, B, C), un point A' de [B, C], un point B' de [C, A], un point C' de [A, B].
Démontrer l'inégalité :
 $B'C' + C'A' + A'B' \leq BC + CA + AB$.
- 2 Soient (A, B, C) un triangle et M un point du côté [B, C].
1° Comparer les réels AB et AM + BM, puis les réels AC et AM + CM.
2° Démontrer les inégalités :
 $AB + AC - BC < 2AM < AB + AC + BC$.
- 3 On considère une droite Δ, un segment [A, B] inclus dans Δ et un point O de Δ qui n'appartient pas à [A, B].
Soit D une droite, distincte de Δ, qui passe par O.
Démontrer que, pour tout point M de D, on a l'inégalité :
 $|MA - MB| \leq |OA - OB|$.
- 4 On considère un triangle (A, B, C), un point A' de [B, C] et un point M de [A, A'].
1° Démontrer les inégalités :
 $MA + MB \leq AA' + BA' \leq AC + BC$.
2° Démontrer les inégalités :
 $\frac{1}{2}(BC + CA + AB) \leq MA + MB + MC \leq BC + CA + AB$.
- 5 On considère un triangle (A, B, C). Soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés [B, C], [C, A], [A, B].
1° Démontrer l'inégalité :
 $\frac{1}{2}(BC + CA + AB) < AA' + BB' + CC'$.
2° Démontrer l'inégalité : $2AA' < AB + AC$.
3° Démontrer l'inégalité : $AA' + BB' + CC' < BC + CA + AB$.

- 6 On considère deux droites Δ et Δ' sécantes en un point O. Soient A et B deux points de Δ et A' et B' deux points de Δ'.
Démontrer l'inégalité :
 $AB + A'B' \leq AA' + A'B + BB' + B'A$.

Triangle rectangle.

- 7 On considère un triangle (A, B, C) rectangle en A. Soit H la projection orthogonale de A sur (BC).

- 1° Démontrer l'égalité : $AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{BC^2}$.
2° Démontrer l'égalité : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

◆ Dans chacun des exercices suivants (n° 8 à 11), on considère un triangle (A, B, C) rectangle en A et la projection orthogonale H de A sur (BC). On pose :
 $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$; $HA = h$; $HB = b'$; $HC = c'$.
Soit x un réel positif.
Dans ces exercices, on pourra utiliser le résultat obtenu dans l'exercice n° 7.

- 8 Calculer a, h, b', c' dans chacun des cas suivants :
1° $b = x$ et $c = 2x$; 2° $b = 3x$ et $c = 4x$;
3° $b = 2x$ et $c = \frac{x}{2}$; 4° $b = \frac{3x}{2}$ et $c = \frac{5x}{2}$.
- 9 Calculer b, h, b', c' dans chacun des cas suivants :
1° $a = 5x$ et $c = 3x$; 2° $a = 4x$ et $c = 2x$;
3° $a = x$ et $c = \frac{x}{3}$; 4° $a = \frac{5x}{2}$ et $c = \frac{3x}{2}$.

13. PLAN EUCLIDIEN

- 10 Calculer a, b, b', c' dans chacun des cas suivants :
1° $c = 2x$ et $h = x$; 2° $c = x\sqrt{3}$ et $h = x$;
3° $c = \frac{3x}{2}$ et $h = x$; 4° $c = 3x$ et $h = \frac{12x}{5}$.

- 11 Calculer a, h, b, c dans chacun des cas suivants :
1° $b' = x$ et $c' = 2x$; 2° $b' = 2x$ et $c' = 2x$.
3° $b' = \frac{x}{3}$ et $c' = \frac{3x}{4}$; 4° $b' = \frac{3x}{4}$ et $c' = x$.

- 12 Soient (A, B, C) un triangle rectangle en A, H la projection orthogonale de A sur (BC). On suppose que l'on a :
 $AB = 6$ et $BH = 2$.
1° Calculer $BC + CA + AB$.
2° Calculer AH.
3° Soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés [B, C], [C, A], [A, B]. Calculer $AA' + BB' + CC'$.

- 13 Soient (A, B, C) un triangle rectangle en A, H la projection orthogonale de A sur (BC), M la projection orthogonale de H sur (AB) et N la projection orthogonale de H sur (AC).
1° Démontrer les égalités :
 $BH^2 + CH^2 = BC^2 - 2AH^2$ et
 $MH^2 + NH^2 = AH^2$.
2° En déduire l'égalité :
 $MB^2 + NC^2 + 3AH^2 = BC^2$.

- 14 On considère un triangle (A, B, C). Soient O le milieu de [B, C], H la projection orthogonale de A sur (BC), et un axe de support (BC). Démontrer les égalités :

1° $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \frac{1}{2}BC^2$;
2° $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{OH}$.

- 15 On considère trois points A, B, C d'une droite Δ, un point M et la projection orthogonale H de M sur Δ. Soit Δ' un axe de support Δ.

1° Démontrer les égalités :
 $MA^2 = MC^2 + CA^2 - 2\overline{CA} \cdot \overline{CH}$,
 $MB^2 = MC^2 + CB^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{CH}$.
2° En déduire l'égalité :
 $MA^2 \overline{BC} + MB^2 \overline{CA} + MC^2 \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$.

- 16 On considère deux points distincts A et B, Δ la perpendiculaire à (AB) qui passe par A, Δ' la perpendiculaire à (AB) qui passe par B.
Soient M le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1, et E un point de Δ distinct de A.
La droite (EM) coupe Δ' en F. La perpendiculaire à (EM) qui passe par M coupe les droites Δ et Δ' en G et en H.
On pose : $AB = 3a$ et $AE = x$.
1° Exprimer AM et BM à l'aide de a.
2° Exprimer à l'aide de a et de x les distances EH et FG.
3° Calculer EH et FG pour $x = a\sqrt{2}$.
4° Déterminer l'ensemble des réels x tels que : $EH = FG$.

III.4.4 DIALOGUE DU MANUEL HONGROIS : LA DISTANCE DES ENSEMBLES DE POINTS

(Manuel h. gr. 5 1979, pp. 215-218)

LA DISTANCE DES ENSEMBLES DE POINTS

Quelle est la distance du fauteuil de la table ?

Les enfants ont utilisé un mètre à ruban pour mesurer.

Zsuzsi: Mais qui a raison ? Il y a autant de résultats que de personnes qui ont mesuré. Comment savoir à quel point de la table et du fauteuil il faut mettre le mètre à ruban ?

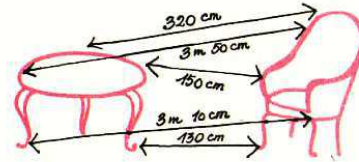
Robi: Faisons un tas de mesures et appelons leur moyenne la distance du fauteuil à la table.

Csaba: Disons que le plus grand de tous les résultats soit la distance ! Ou bien, nous pourrions nous mettre d'accord pour accepter le plus petit résultat pour distance du fauteuil et de la table.

Zsuzsi: À mon avis, peu importe quelle proposition on accepte – l'essentiel est que tout le monde sache à quoi on pense quand on parle de la distance du fauteuil et de la table, donc que *notre accord soit univoque*.

Les enfants se sont mis d'accord pour appeler distance la longueur du plus grand segment. Bien que mesurer tous les segments possibles soit impossible, il en existe sans doute parmi eux un (ou plusieurs) qui soient le ou les plus long(s). Sur cette base, ils ont mesuré 3 m 50 cm pour la distance du fauteuil et de la table.

PONTHALMAZOK TÁVOLSÁGA



Milyen messze van a fotel az asztaltól?

A gyerekek mérőszalaggal mérték.



Zsuzsi: Most kinek van igaza? Ahányan mérünk, annyi eredményt kapunk. Honnan tudjam, hogy az asztal, illetve a szék melyik pontjához tegyem a mérőszalagot?



Robi: Végezzünk egy csomó mérést, és ezek átlagát nevezzük az asztal és a szék távolságának!

Csaba: Mondjuk azt, hogy a sok mérési eredmény közül a legnagyobb jelenti a távolságot! Vagy akár abban is megállapodhatnánk, hogy a legkisebb mérési eredményt fogadjuk el az asztal és a szék távolságának.



Zsuzsi: Szerintem mindegy, melyik javaslatot fogadjuk el, az a lényeg, hogy ha a szék és az asztal távolságáról beszélünk, mindenki tudja, mire gondolunk, vagyis megállapodásunk egyértelmű legyen.

A gyerekek megállapodtak abban, hogy a legnagyobb szakasz hosszát nevezik távolságnak! Bár minden lehetséges szakaszt megmérni nem lehet, de biztosan van közöttük leghosszabb (esetleg több is).

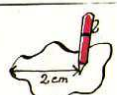
Az asztal és a szék távolságát ennek alapján 3 m 50 cm-nek mérték.

Milyen messze van a tollhegy a tintapacnitól?



Zsuzsi: Megint nagyon sokféleképpen mérhetnénk, de az előbb abban állapodtunk meg, hogy a lehető legnagyobb szakasz hosszát vesszük. Ezért a piros vonal mentén kell mérni. A tollhegy és a pacni távolsága 8 cm.

Azért ez még sincs egészen rendben, mondta Gergő, mert ha a tollhegy rajta van a pacán, akkor is azt mondd, hogy a tollhegy és a paca távolsága 2 cm?

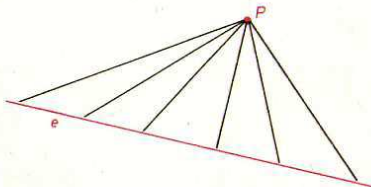


Itt



valóban 2 cm-nek mérem, de ha rajta van a pacán, akkor nyilván sokkal közelebb van hozzá.

Milyen messze van a P pont az e egyenestől?



Most már én is bajban vagyok, mondta Zsuzsi. Nem tudom megtalálni az egyenes legtávolabbi pontját, hiszen akármeddig is rajzolhatnánk az e egyenest, sohase lenne vége. Akármelyik szakasz mentén mérnénk is, mindig lehetne egy még hosszabb szakaszt találni. Azt mégse mondhatjuk, hogy a pont az egyenestől akár 100 m-nél is messzebb van, hiszen látjuk, hogy elég közel van hozzá.

Robi: Márpedig ha ragaszkodsz az előbbi megállapodáshoz, azt kell mondanod, hogy a pontnak és az egyenesnek akármilyen nagy is lehet a távolsága. Csak úgy segíthetünk a dolgon, ha másképp állapodunk meg. Nevezzük távolságnak a legrövidebb szakasz hosszát. A legrövidebb szakaszt ki lehet választani

À quelle distance est le bec de plume de la tâche d'encre ?

Zsuzsi: On pourrait mesurer à nouveau de beaucoup différents façons, mais on s'est mis d'accord tout à l'heure pour prendre la longueur du plus grand segment possible. Il faut donc mesurer sur la ligne rouge. La distance du bec de plume et de la tâche est 8 cm.

Il y a quand même quelque chose qui ne va pas, dit Gergő, parce que même si le bec de plume est sur la tâche, tu vas dire que leur distance est 2 cm ?

Ici, je mesure effectivement 2 cm, mais s'il est sur la tâche, il est sans doute plus proche.

Quelle est la distance du point P à la droite e ?

Là, je suis déjà troublée moi aussi, dit Zsuzsi. Je ne peux pas trouver le point le plus éloigné de la droite, car on pourrait dessiner la droite jusqu'à n'importe où, elle ne se terminerait jamais. Quel que soit le segment qu'on mesure, on peut toujours trouver un segment plus long. On ne peut quand même pas dire que le point est plus loin de 100 m de la droite, car on voit bien qu'il est assez proche à elle.

Robi: Or si tu tiens à l'accord de tout à l'heure, tu dois dire que la distance du point et de la droite peut être de n'importe quelle grandeur. La seule chose qu'on peut faire est de se mettre d'accord différemment. Appelons distance la longueur du segment le plus court. On peut choisir le plus court segment

ici: ici aussi:

et ici aussi:

Ici, c'est justement le segment perpendiculaire qui est le plus court.

Et même Gergő a raison, la distance du bec de plume et de la tache est cette fois 0 cm. Ça ne signifie pas, bien sûr, qu'ils n'y ait pas de distance entre eux, car le 0 est aussi un des nombres.

Déterminons la distance de deux ensembles de points.

Attachons les points rouges aux points noirs de toutes les façons possibles.



► Combien obtient-on de segments ?

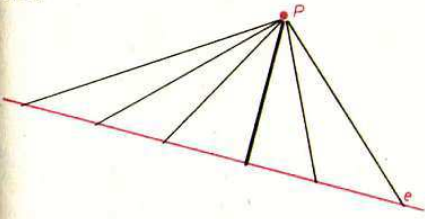
On mesure tous les segments.

On appelle **la distance de deux ensembles de points** la longueur du plus court segment parmi tous les segments attachant les points d'un ensemble aux points de l'autre.

On a mesuré la distance des ensembles de points ici, ici, ici


et ici aussi.

itt is:  itt is: 


és itt is: 

Itt éppen a merőleges szakasz a legrövidebb.

Sőt még Gergőnek is igaza van, a tollhegy és a paca távolsága most 0 cm.

 Ez persze nem azt jelenti, hogy nincs távolsága, hiszen a 0 is a számok egyike.

Állapítsuk meg a két ponthalmaz távolságát!






A piros pontokat kössük össze a fekete pontokkal minden lehetséges módon.

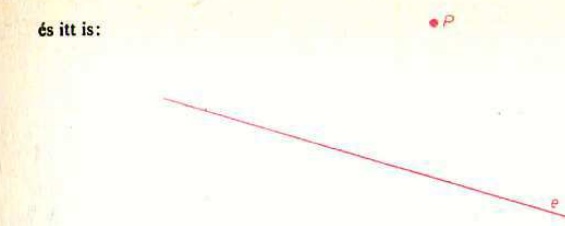
► Hány szakaszt kapunk?

Mindegyiket megmérjük.

A két ponthalmaz pontjait egymással összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hosszát nevezzük a két ponthalmaz távolságának

Ponthalmazok távolságát mértük itt is:  itt is: 

itt is: 

és itt is: 

217

III.4.5 DIALOGUE DU MANUEL HONGROIS : LA COMPARAISON DES FRACTIONS

(Manuel h. gr. 5 1979, pp. 31-35)

L'ADDITION DES FRACTIONS

Lequel est plus grand, $\frac{7}{2}$ ou $\frac{17}{3}$?


STOP

Il est sûr que chacun des deux nombres sont plus grands qu'une unité, dit Péter, $\frac{7}{2}$ est même, par exemple, plus grand que 3.

Quel nombre tombe entre les deux autres selon leur grandeur ?

En général, comment comparer les fractions ?


Remarque que toutes les trois sont construites des parties égales, des cinquièmes. Par conséquent, il suffit de regarder combien il y a de cinquièmes dans chaque nombre, dit Zsuzsa.



Keressétek meg ezen a számgégyenesen $\frac{1}{7}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{3}{7}$ helyét!

Törték összehasonlítása

Melyik nagyobb: $\frac{7}{2}$ vagy $\frac{17}{3}$?



Az biztos, hogy mindkét szám nagyobb 1 egérsznel, mondta Péter, a $\frac{7}{2}$ például még 3-nál is nagyobb.

$$\frac{7}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2},$$

$$\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3},$$

tehát $\frac{17}{3} > \frac{7}{2}.$

Melyik az a szám, amelyik nagyság szerint a másik kettő közé esik?

$$\frac{2}{5}; \frac{9}{5}; \frac{6}{5}$$

Egyáltalán, hogyan hasonlítuk össze a törtéket?

Figyeld meg, hogy mindhárom tört egyforma részekből, ötödökből áll. Ezzel elég azt néznünk, hogy hány darab ötöd van az egyes számokban, mondta Zsuzsa.

$$\frac{2}{5} < \frac{6}{5} < \frac{9}{5}$$

tehát a $\frac{6}{5}$ van középen.

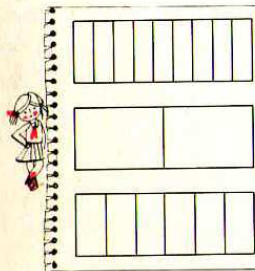


Karcsi: Én más módszerrel állapítottam meg a növekedő sorrendet. Arra gondoltam, hogy 2-nek, 9-nek és 6-nak az ötödrésze közül biztosan 2-é a legkisebb, 9-é a legnagyobb.

Így persze könnyű volt, hogy csupa egyforma részt kellett összehasonlítani, kötekedett Gábor, de ha a részek nem egyenlők, vagyis a nevezők különbözőek, akkor is el tudjátok dönteni a sorrendet?

Állítsuk növekvő sorrendbe a számokat! $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{9}$.

STOP



Zsuzska nem jött zavarba: Nyilván több csokit eszel, ha ugyanabból a táblából 9 helyett csak ketten esztek, sőt még akkor is több jut neked, ha 9 helyett 6-an eszitek meg.

A kettődrészek nagyobbak, mint a hatodik, a hatodik meg nagyobbak, mint a kilencedek. A te feladatodban, Gábor, a különböző nagyságú részekből mindig 5-öt kell venni.

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{9} < \frac{5}{6} < \frac{5}{2}$$

Balázs: Én is ezt a sorrendet kaptam. Úgy okoskodtam, hogy ugyanazt a számot kell 2-vel, 9-cel, illetve 6-tal osztani. A hányados akkor lesz nagyobb, ha az osztó kisebb.



Donc $\frac{6}{5}$ est au milieu.

Karcsi: J'ai suivi une autre méthode pour déterminer l'ordre croissant. Je me suis dit que parmi le cinquième de 2, 9 et 6, sans doute celui de 2 est le plus petit et celui de 9 est le plus grand.

Mais oui, c'était facile comme ça puisqu'il fallait comparer des parties égales, chicane Gábor, mais pouvez-vous déterminer l'ordre même si les parties ne sont pas égales, donc les dénominateurs sont différents ?

Mettons les nombres suivants en ordre croissant.

STOP

Zsuzska n'est pas troublée: évidemment, tu manges plus de chocolat si de la même tablette vous mangez deux au lieu de 9, il te reste plus même si vous mangez 6 au lieu de 9.

Les demis sont plus grands que les sixièmes et les sixièmes sont plus grands que les neuvièmes. Dans ta tâche, Gábor, il faut prendre toujours 5 des parties de grandeurs différentes.

Balázs: J'ai obtenu le même ordre. Je me suis dit qu'il faut diviser le même nombre par 2, 9 et 6. Le quotient sera plus grand quand le diviseur est plus petit.

J'énonce trois nombres dont les numérateurs et les dénominateurs sont différents aussi. Peux-tu déterminer l'ordre ? – dit Gábor pour compliquer encore la chose.

C'est plus difficile en effet, dit Zsuzsa, mais je vais le dessiner. Je choisis une unité sur la droite numérique qui permet de trouver facilement la place de tes nombres. 12 côtés de carré conviendront bien pour l'unité.

Pour la résolution de nombreuses tâches, cela aide si on écrit une fraction sous une autre forme. Chaque fraction peut être décomposée en plus petites parties.

Par exemple, si on divise chaque quart en cinq parties égales,

on reçoit des vingtièmes. D'autres égalités peuvent être lues aussi sur la figure.

On construit le nombre de plusieurs parties égales, on l'*élargit*¹⁶.

Chaque fraction peut être *élargie* de beaucoup de différentes façons. Les fractions – plus précisément les quotients désignés – peuvent être *élargies*, bien sûr, même si on utilise un autre signe de division, pas celui des fractions.

Mondok három olyan számot, amelyeknek a számlálói és a nevezői is különbözők. Most állapítsd meg a növekedő sorrendet! – bonyolította tovább Gábor.

$$\frac{2}{3}; \frac{7}{12}; \frac{5}{6}$$

Hát ez tényleg nehezebb, mondta Zsuzsa, de majd én lerajzolom. Olyan egységet választok a számegyenesen, hogy a számok helyét könnyen megtaláljam. 12 négyzetoldal éppen jó lesz egységnek.

$$\frac{7}{12} < \frac{8}{12} < \frac{10}{12}$$

$$\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$$

Sok feladat megoldásában segít, ha egy törtet más alakban is felírunk. Bármely törtre további kisebb részekre bontható.

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Ha például a negyedeket öt-öt egyenlő részre osztjuk,

huszadrészeket kapunk. A rajzról több egyenlőséget leolvashatunk.

A számot több egyenlő részből raktuk össze, a törtet bővítettük.

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{75}{100}$$

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{20}{20}$$

$$125 : 5 = 250 : 10$$

$$3 : 4 = 75 : 100$$

Minden törtet sokféleképpen lehet bővíteni. A törtet – vagyis kijelölt hányadosokat – akkor is bővíthetjük persze, ha nem törtvonalat, hanem valami más osztásjelet használunk.

103 Matematika 5 33

¹⁶ Néologisme pour traduire une expression courante en hongrois, le contraire de simplifier une fraction.

Vannak olyan törtek, például $\frac{4}{8}$; $\frac{6}{18}$; $\frac{3}{15}$ stb., amelyeket nagyobb törtrészekből (kisebb nevezetű törtekből) is elő tudunk állítani.

A törteket egyszerűsítjük, ha nagyobb törtrészekből állítjuk elő.

Most sem számít, hogy milyen osztásjelet használunk.
A margón levő egyenlőségekből leolvashatjuk, hogy a $\frac{3}{4}$ törteket $\frac{75}{100}$ alakban is felírhatjuk. $\frac{75}{100}$ -ot másképpen 75%-nak írjuk, és így mondjuk: 75 százalék.

A %-jel századrészt jelent.

Az $\frac{1}{4}$ törteket is kifejezhetjük századrészekben.
A $\frac{25}{100}$ törteket 25% alakban is írhatjuk.

- ▶ Írd tört alakba! 70%, 4%, 100%, 115%.
- ▶ Írd százalék alakba! $\frac{2}{25}$, $\frac{5}{10}$, 1, $\frac{3}{2}$.

Ábrázoljuk egy számegyenesen az $\frac{1}{3}$ és az $\frac{5}{7}$ törtszámokat!

STOP

Zsolt: Annyi négyzetoldal vegyünk egységnek, hogy a harmadokat és a hetedeket is könnyen be tudjuk jelölni. Olyan számot keressék, amelynek a harmadrésze és a hetedrésze is egész szám.

34

Il existe certaines fractions, par exemple $\frac{4}{8}$; $\frac{6}{18}$; $\frac{3}{15}$ etc. qu'on peut recomposer de parties plus grandes (des fractions de plus petits dénominateurs).

On simplifie une fraction si on la recompose de parties plus grandes.

De nouveau, il n'est pas important de savoir quel signe de division on utilise.

On peut voir des égalités de la marge que la fraction $\frac{3}{4}$ peut aussi

être écrite sous forme $\frac{75}{100}$. $\frac{75}{100}$ s'écrit autrement comme 75%, et

dit 75 pour cent.

Le signe % signifie des centièmes.

La fraction $\frac{1}{4}$ peut être aussi exprimée en centièmes.

La fraction $\frac{25}{100}$ peut être écrite sous forme 25% aussi.

▶ Écris en forme de fraction ! 70%, 4%, 100%, 115%

▶ Écris en forme de pourcentage ! $\frac{2}{25}$, $\frac{5}{10}$, 1, $\frac{3}{2}$

Représentons les nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{7}$ sur une droite numérique !

STOP

Zsolt: Prenons pour unité autant de côtés d'un carré, de façon à ce que les tiers et les septièmes soient également faciles à marquer. Je cherche un nombre dont le tiers et le septième sont des nombres entiers.

Les multiples de 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...

Les multiples de 7 : 7, 14, 21, ...

Le 21 convient !

▶ Quels sont les nombres dont les places sont marquées par le signe × ?

ADDITION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS

A 3 többszörösei: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...
A 7 többszörösei: 7, 14, 21, ...
A 21 jó lesz!

$\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$

▶ Mely számok helyét jelöltük még meg × jellel?

Törtek összeadása és kivonása

Térjünk vissza kedvelt „édes” témánkhoz, a tortaevéshez! Gergő születésnapjára 24 szeletet volt. Gergő 3 szeletet, nővére 2 szeletet, kishúga 1 szeletet evett belőle. A torta mekkora részét ették meg hárman?

$\frac{3}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{6}{24}$

$\frac{6}{24}$ azaz $\frac{1}{4}$ részét.

Nem annyira egyszerű a dolog, ha a gyerekek nem ugyanakkora szeleteket esznek.

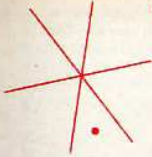
Gergő a hatodrészt, nővére a nyolcadrészt, kishúga a tizenkettedét ette meg.

35

III.4.6 SÉRIE DE TÂCHES HONGROIS, THÉORÈME DE PYTHAGORE

(Manuel h. gr. 7 1981 pp. 256-257)

110. Adott egy háromszög három szögfelező egyenese és egyik oldalának egy pontja. Szerkeszd meg a háromszöget!



111. Egy háromszög egyik hegyesszöge 60° -os. A háromszög magasságpontja a szög száraitól $1,6$ cm és $2,2$ cm távolságra van. Szerkeszd meg a háromszöget!

112. Szerkeszd háromszöget, ha adott mindegyik oldalának a felezőpontja!

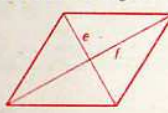
113. Egy háromszög leghosszabb oldala 5 cm. Szögeinek aránya $2:3:4$. Szerkeszd meg a háromszöget!

114. Egy derékszögű háromszög két befogója 4 cm és 7 cm. Mekkora az átfogó?

115. Egy derékszögű háromszög átfogója 11 cm, egyik befogója 4 cm. Mekkora a másik befogó?

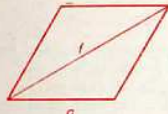
116. Egy derékszögű háromszög két oldala 2 cm, illetve 3 cm hosszú. Mennyi lehet a harmadik oldal?

117. Határozd meg a rombusz oldalait!



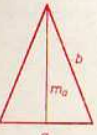
a) $e = 8$ cm, $f = 6$ cm; b) $e = 10$ cm, $f = 24$ cm; c) $e = 16$ cm, $f = 30$ cm.

118. Határozd meg a rombusz hiányzó átlóját!



a) $a = 17$ cm, $f = 16$ cm; b) $a = 25$ cm, $f = 14$ cm.

119. Határozd meg az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát, ha



a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; b) $a = 16$ cm, $b = 17$ cm.

114. Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit mesurent 4 cm et 7 cm. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

115. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 11 cm, un des côtés de l'angle droit mesure 4 cm. Quelle est la longueur de l'autre côté ?

116. Dans un triangle rectangle, deux côtés mesurent 2 cm et 3 cm. Combien peut mesurer le troisième côté ?

117. Détermine le côté du losange. a) $e = 8$ cm, $f = 6$ cm ; b) $e = 10$ cm, $f = 24$ cm ; c) $e = 16$ cm, $f = 30$ cm.

118. Détermine la diagonale manquante du losange. a) $a = 17$ cm, $f = 16$ cm; b) $a = 25$ cm, $f = 14$ cm.

119. Détermine la hauteur du triangle isocèle si a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; b) $a = 16$ cm, $b = 17$ cm.

120. Kati a dessiné deux triangles rectangles non isométriques. Dans chacun des deux, il y a un côté mesurant 3 cm et un autre mesurant 4 cm. Combien sont les périmètres et les aires de ces deux triangles ?

121. On a désigné les côtés de l'angle droit des triangles rectangles avec a et b , et leur hypoténuse avec c . Remplis le tableau.

122. Les triples de nombres ci-dessous sont chacun les mesures des côtés d'un triangle. Quels sont parmi eux les mesures des côtés d'un triangle rectangle ?

123. Trouve parmi les triples de nombres ceux qui déterminent un triangle rectangle, acutangle et obtusangle.

124. Quelle est la distance du point $P(3;4)$ de l'origine du repère orthogonal ?

125. Quelle est la distance du point $P(5;-12)$ de l'origine du repère orthogonal ?

126. Quelle est la distance du point $P(-6;-8)$ de l'origine du repère orthogonal ?

127. Quelle est la distance de l'origine du repère orthogonal du point dont la distance d'un axe est 3 et de l'autre axe est 4 unités ? Combien existe-t-il de tels points ?

128. Quelle est la distance entre les points $A(3;6)$ et $B(3;11)$?

129. Quelle est la distance entre les points $A(4;9)$ et $B(11;9)$?

130. Quelle est la distance entre les points $A(2;1)$ et $B(6;4)$?

131. Quelle est la distance entre les points $A(-1;-1)$ et $B(3;2)$?

132. Quelle est la distance entre les points $A(-3;-2)$ et $B(9;3)$?

133. Les coordonnées du point A sont $(x_1; y_1)$, du B sont $(x_2; y_2)$. Cherche une formule qui permet de calculer la distance entre deux points.

134. Dessine un triangle, et divise chaque côté en a) 3 parties égales; b) 5 parties égales; c) des parties dont la proportion est de 2 à 3 .

135. Construis un triangle dont le périmètre est donné, et dont on sait que la proportion de ces côtés est $3:4:5$.

136. Il est donné un triangle et un segment. Construis un triangle semblable à celui qui est donné, et dont l'un des côtés soit égal au segment donné.

120. Kati két nem egybevágó derékszögű háromszöget rajzolt. Mindkettőben volt egy 3 cm és egy 4 cm hosszúságú oldal. Mennyi a megrajzolt két háromszög kerülete, illetve területe?

121. A derékszögű háromszögek befogóit a -val, illetve b -vel, átfogóját c -vel jelöltük. Pótold a táblázat hiányzó számait!

a	3	5	6		8	10	9
b	4			7		24	
c		13	10	25	17		41

122. A megadott számhármások egy-egy háromszög oldalainak mérőszámai.

- a) (4; 5; 7); b) (3; 4; 5); c) (6; 7; 8);
 d) (6; 8; 10); e) (5; 11; 12); f) (12; 13; 15);
 g) (12; 16; 20); h) (10; 12; 13).

Melyek ezek közül derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai?

123. Válaszd ki a megadott számhármások közül azokat, amelyek derékszögű, hegyesszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg!

- a) (2; 2; 3); b) (4; 6; 7); c) (3; 6; 6);
 d) (9; 12; 15); e) (6; 8; 10); f) (10; 12; 15);
 g) (5; 12; 13); h) (6; 8; 9).

124. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $P(3; 4)$ pont?

125. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $P(5; -12)$ pont?

126. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $P(-6; -8)$ pont?

127. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától az A pont, melynek az egyik tengelytől való távolsága 3 , a másiktól pedig 4 hosszúságú egység? Hány ilyen pont van?

128. Milyen messze van egymástól az $A(3; 6)$ és $B(3; 11)$ pont?

129. Milyen messze van egymástól az $A(4; 9)$ és $B(11; 9)$ pont?

130. Milyen messze van egymástól az $A(2; 1)$ és $B(6; 4)$ pont?

131. Milyen messze van egymástól az $A(-1; -1)$ és $B(3; 2)$ pont?

132. Milyen messze van egymástól az $A(-3; -2)$ és $B(9; 3)$ pont?

133. Az A pont jelzőszámai $(x_1; y_1)$, a B ponté $(x_2; y_2)$. Keress képletet, amellyel kiszámíthatod a két pont távolságát!

134. Rajzolj háromszöget és mindegyik oldalát oszd fel

- a) 3 egyenlő részre;
 b) 5 egyenlő részre;
 c) $2:3$ arányú részekre!

135. Szerkeszd háromszöget, ha adott a kerülete és tudjuk, hogy oldalainak aránya $3:4:5$!

136. Adott egy háromszög és egy szakasz. Szerkeszd a háromszöghöz hasonlót úgy, hogy egyik oldala a megadott szakasszal legyen egyenlő!

ANNEXES DU CHAPITRE III.5

III.5.1 LE JEU DE SOUSTRACTION ET DE PROBABILITÉS

(Varga 1982 p. 27-29)

8. Subtraction, probability, strategy-planning

Finding the operation you need (with what numbers? in what order?) is more important than performing the operation. Many people say this, but I think they are only partially correct. The argument usually goes this way: no calculator or computer can make you find out the operation, but they do help you to perform them -- actually they do perform them for you, more quickly and more accurately than you ever could.

This is a half truth. First, because mental arithmetic with simple numbers (integers, decimals, even fractions) is and remains a powerful promoter of number awareness. Second, because with some practice most people are able to perform simple mental calculations more quickly and more accurately than by punching them into a machine (say, 0.8×0.5 or 1000×0.01 or $1000 - 993$) and reading the result. Third, because mental arithmetic complemented (coupled) with skill in rounding and estimating is a protection against punch-in or read-

off errors.

The conclusion (my personal conclusion) is that skill in multiplication tables, mental addition and subtraction of two-digit numbers and that sort of thing is to stay with us and belong to the elementary school mathematics of the twenty-first century.

So what is new about this? Conscientious and judicious teachers never neglected developing such skills. The novelty may be in the drills, not the skills. Paralyzed limbs may need specific exercises of specific muscles for rehabilitation, but healthy persons are better served by activities which engage a multitude of muscles, activities such as swimming or basketball. In other words, the answer is again integration. To be specific, here is a drill, different from the usual, to practice the subtraction of two-digit numbers and a lot else.

Each kid draws boxes for the digits the way they are used in writing subtractions.



The goal is to make the difference as great as possible. They can fill the boxes in any order, but only with random numbers produced by rolling dice. After a number is given by the dice, children write it into one of the boxes which is still empty and cannot change it. After filling the third box they have no choice for the fourth random number. Those with the largest difference get three points, those with the second largest get two, those with the next get one and the others none. Then they start again.

Many nine-, ten-, and eleven-year olds develop efficient strategies to maximize their scores in the long run. They soon realize that

six at the first throw should go here — $\begin{array}{r} \square \square \\ \hline \end{array}$
 and one at the first throw should go here — $\begin{array}{r} \square \square \\ \hline \end{array}$

but they are more hesitant about a five or a two. They realize that a six may follow the five and then chances are better for those who kept the upper left box free. Or a one (an ace) may follow the two, and then again they would regret not having left the lower left box open. Filling them with a six or a one, respectively, will never be regretted, not even if they are followed by another six or another one, respectively.

But can the players ever avoid being sorry in after-thought about the way they filled the boxes? A few rounds they actually play (and maybe a few more they play mentally) should convince the players that they cannot avoid that. In other words, there is no fail-safe strategy, though there are better and worse strategies. No matter where they write the first number, if it is a five or a two (or for that matter, a four and a three), in some cases they may regret that subsequently. The question is, how often and to what extent they have to regret their choices in the long run. This is where discussion with nine-, ten-, and eleven-year olds comes in (after playing the game a couple of times). Their intuitions lead them to different strategies which are then tested at further games. At a somewhat higher level, still in the elementary school, the strategies can be formulated more precisely, incorporated into computer programs and tested more precisely in a great number of trials. At a much higher level calculating the expected values related to specific strategies and finding the best strategy may be the subject of a research for undergraduates.

III.5.2 LE JEU AVEC TROIS DISQUES

(Varga 1970 p. 424-427)

- 424 -

PROBABILITY THROUGH GAMES

A sample of three games

T. VARGA
Budapest

1. A game with three disks

Three apparently identical disks are put into a box. However, one of them has a cross on each side, one is blank on both sides, and one has a cross on one side and nothing on the other.

I draw a disk at random and show you one of its faces at random. This latter is as essential as the first. I would fake the whole situation by looking at the disk after drawing it and deciding myself which face to show you, if the faces are different. Try to guess the other face. We repeat this experiment several times. You can never be sure. Still say each time what you think most likely.

Table 1 shows the course of a set of ten games.

Six hits out of the ten possible is not bad. Would somebody else try his hand? Maybe all of you at the same time. Has everybody written his guess? May I turn it round? Record the faces and your hits.

Is there anybody with ten hits? With nine? With eight? Seven? The others are interested in the strategy you applied. Would you say something about it?

A number of possible strategies are listed on the blackboard (Table 2) I suggest that each of these should be adopted by somebody. Then after each set of ten games, we will write the numbers of hits into one of these columns.

Which strategy has proved to be the most successful in the long run? Who would explain why?

That's right. If I mix the disks thoroughly, then about twice out of three occasions I draw a disk which is the same on the other face, and only

- 425 -

once the one which is different on the other side. That is the reason why K turns out to be so good a strategy and L so poor. None of the other strategies listed above can raise the chances of winning above $1/2$ or sink it below $1/2$. This is true even if you have had sometimes spectacular successes with them. These are as little excluded as failures with K. But both are relatively rare.

Table 3 gives numerical data about what we can expect from various strategies. Data are calculated from the binominal expansions of $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})^{10}$ and $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$, and are rounded to two decimals. Because of the rounding, probabilities do not everywhere add up exactly to unity as they should without rounding.

Anyone who has more than five hits in a set of ten games is said to have won that set. Those with less than five hits have lost. With five hits the game is a draw. The table shows that players using strategy K can expect to win about eight sets out of ten (since $.23+.26+.20+.09+.02 \approx .8$) and lose only once (since $.06+.02 \approx .1$). For those using strategy L the contrary is true: their chances of winning and losing are about one in ten and eight in ten, respectively. With any other strategy mentioned, (and with many other strategies, except those combined of K or L and something else) the expectations are to win in about four and lose about four sets out of each ten.

Remark 1. The explanation given above of the fact that strategy K gives a $2/3$ probability for a hit is essentially correct. More precisely, one should add that for each of the three possible ways of drawing a disk there are two possible ways of showing a face and these six outcomes are all equally likely. With strategy K one has a hit in four of these outcomes, with strategy L in two.

Remark 2. Take care that both the crossed and the uncrossed faces are really indistinguishable at first sight. Otherwise children may develop strategies far more efficient than K.

Face shown	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	Strategy used : X and O alternately
Guess for the other face	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	
Other face	X	X	O	X	X	O	X	O	X	X	
Hits	✓			✓	✓	✓	✓	✓			

Table 1 : Recording a set of ten games (O = blank face)

A	X, O, X, O ...										
B	O, X, O, X ...										
C	X, X, O,O, X,X, O,O, etc.										
D	X always										
E	O always										
F	Random										
G	Other face last time										
H	Opposite of that										
I	Face shown last time										
J	Opposite of that										
K	Face shown this time										
L	Opposite of that										
M	X until I win, change when I lose, keep when I win ...										

Table 2 : Recording the number of hits in consecutive sets for various strategies.

Probabilities of this number of hits in 10 games :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
With these strategies											
K	.00	.00	.00	.02	.06	.14	.23	.26	.20	.09	.02
L	.02	.09	.20	.26	.23	.14	.06	.02	.00	.00	.00
Other strategies listed	.00	.01	.04	.12	.21	.24	.21	.12	.04	.01	.00

Table 3

III.5.3 ARRIVER À L'ÉCOLE À L'HEURE

(Varga 1982 p. 31-33)

10. Estimations, just estimations

A calculation or measurement should be preceded by estimation (if only by a vague feeling about the result), but an estimation need not be followed by a calculation or measurement. Again I give an example about probability which I consider to be an important component of elementary school mathematics.

The question posed contains no hint to probability. It is simply about the number of minutes you need to arrive at school. Everybody writes his personal estimation: 12 minutes, 17 minutes, 35 minutes. . . (It should be made clear what you mean by arriving in time: when the bell rings, or 10 minutes before, as is usually required.)

The next question is: if you leave your house using the time you have written, are you certain you will not arrive late?

All of a sudden probability enters the scene. It usually does when you scratch the surface of a real life problem. In this case the discussion which follows reveals that several things may happen. An unexpected traffic jam. An empty gas tank. The car breaks down. You fall ill. An earthquake destroys the road. Some of these events are extremely unlikely. What does it mean, extremely unlikely? Try to express each of these by a number! 0.001? 0.0000001? (What do these numbers mean?) Anyway, they are not zero.

Next step: modify your estimation. How many minutes do you need (and consequently at what time do you have to leave) in order to be absolutely certain you will not be late?

Hours? Days? Whatever the safety margin, you can never reach absolute certainty. (You may die. Insurance companies have reliable estimations about the probability of that relative to age, health conditions, etc.)

If the probability of 1 of not being late cannot be achieved, then let us lower the level to 0.99. In other words, let us allow 0.01 probability for being late. Estimate the number of minutes you need under such a condition. You may be late once in twenty weeks. Does your estimation correspond to this level or do you want to modify it?

What if we lower the level to 0.1? Once in two weeks you may be late.

Being late half of the time isn't good, but how many minutes do you need if you set this as your goal?

How many minutes give you a chance of only 0.1 or 0.01 to arrive on time? (Once in two weeks, once in twenty weeks.)

How many minutes do not give you any chance?

Be careful and allow for such unlikely events as a helicopter picking you up when you leave and dropping you off at school. (Exclude Superman.)

Even so, 0 time certainty gives you no chance. That would mean infinite speed which is impossible. So probability 1 cannot be achieved, yet probability

0 can. After a few other estimated input and output values you will be ready to plot the function: number of minutes against the probability of arriving in time.

III.5.4 UNE SÉRIE DE PROBLÈMES DE COMBINATOIRE DE VARGA

(Livre du maître, gr. 1, 1978 p. 243-258, Ma traduction)

Combinatoire, probabilités, statistique

Combinatoire

Quels types de questions sont traités par la combinatoire ?

La combinatoire traite des questions comme par exemple combien de sortes de drapeaux peuvent être faits en utilisant des couleurs rouge, jaune et vert ; de combien de façons peut-on enfiler un sautoir de perles si on en a 2 rouges, 2 bleus, 2 jaune et 2 vert ; combien de mélodies peuvent être composées de 3 sons donnés ; combien de duels entre deux équipes doit-on composer pour que 5 équipes se rencontrent sur un tour de match ; etc. Elle cherche le nombre de possibilités en fonction de certaines conditions données.

Jeux, tâches

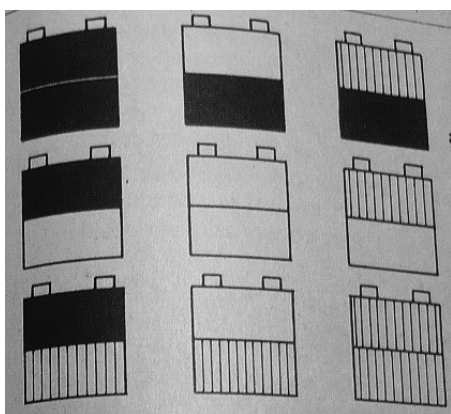
- *Construction de tours.* On met devant les enfants des pièces d'un jeu de construction de trois couleurs différentes (par ex. du matériel 'Gabi', des cubes en bois, des éléments de construction de tours etc.). Soient les trois couleurs le rouge, le blanc et le bleu. Au départ, on les laisse simplement construire des tours avec les pièces données. Pour les élèves de l'école maternelle et du début du primaire cette activité constitue elle-même une tâche. Par ailleurs c'est bien, car elle développe l'autonomie, s'ils se fixent des buts eux-mêmes. Le plus souvent ils tendent à construire des tours les plus hautes possibles. Cela met en jeu l'habileté manuelle.
- Une prochaine fois, proposons une tâche « mathématique ». Posons une tour devant eux, par ex. de deux éléments, et demandons de construire des tours de la même hauteur. Ainsi on oriente différemment leur attention : le but n'est plus de construire des tours les plus hautes possibles. Ils construisent avec plaisir le plus de tours possibles similaires à celle qui est donnée ; en outre ils commencent à découvrir que ces tours peuvent être différentes selon leurs couleurs. Ces deux idées jettent les bases des futurs problèmes de combinatoire réels : en somme, combien de tours (différentes) peuvent être construites d'une hauteur et de couleurs données.

Au départ, c'est bien de préparer similairement chaque tâche combinatoire : on donne une partie des conditions seulement plus tard, et progressivement.

- Quand les élèves auront découvert que les tours *ne sont pas toutes pareilles*, on peut augmenter les conditions à nouveau : que *chaque tour soit différente*. Qui peut construire le plus de tours comme ça ? Ce n'est toujours pas le problème définitif. A la fin, on s'intéressera à toutes les différentes tours possibles et à leur nombre. Dans les cas très simples, les élèves en première année en sont déjà capables, mais pour la majorité des problèmes, il suffit en première année, de construire autant de *différentes* tours qu'ils peuvent. Car le rassemblement de tous les cas possibles suppose d'apercevoir qu'il n'y a pas d'autre variante possible.

Regardons quelles sont les tours possibles selon les conditions données. (Nous mettons les cas possibles dans une structure systématique, pour une meilleure transparence. Mais en première et deuxième année, on n'attend pas cela des enfants, même en troisième et quatrième année, on oriente seulement leur activité pour qu'ils cherchent un ordre quelconque. C'est à ce moment-là que le problème définitif prend un sens : préparer toutes les tours possibles.)

Pour les élèves de l'école maternelle et du début du primaire, il est souvent difficile de juger si les tours construites sont toutes différentes ou non. Ils les construisent l'une après l'autre, sans système, et ils ont aussi du mal à mettre en ordre des tours déjà construites pour voir s'il y en a qui sont identiques. Et s'ils ont un critère quelconque, ils l'oublient entre-temps, ils se mettent à se concentrer sur autre chose. Un critère peut être par exemple la couleur des pièces du dessus. Ils les comparent selon ce critère, ils rassemblent les tours qui ont la même couleur pour la pièce du dessus. Un autre critère peut être la couleur de la pièce du dessous. Il est possible aussi qu'ils séparent les uni- et multicolores. Évitions de donner des idées nous-mêmes : chacun va créer son système au fur et à mesure.



la pièce du dessus
est rouge blanche bleue

la pièce du
dessous est rouge

la pièce du
dessous est
blanche

la pièce du
dessous est bleue

Comme en première année, on n'attend pas la solution complète des problèmes de combinatoire, même dans cette forme très concrète, les tâches avec beaucoup plus de cas ne sont pas plus difficiles : car l'enfant trouve autant de cas qu'il ou elle a le temps et la patience d'inventer. Il faut par contre garder une graduation dans le nombre des restrictions pour les tâches de la même nature. C'est-à-dire, ils construisent d'abord le plus de tours, chaînes, mots etc. qu'ils peuvent, plus tard le plus d'objets différents, ensuite, plutôt seulement en deuxième, troisième ou quatrième année, ils cherchent tous les cas possibles.

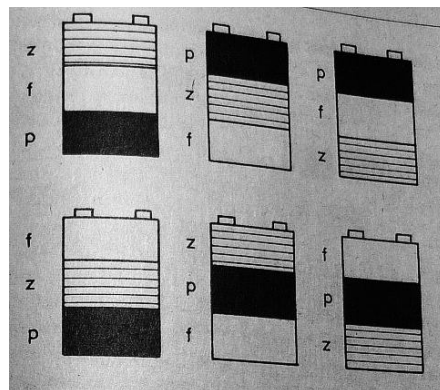
Nous détaillons quelques tâches ci-dessous. Nous soulevons seulement d'autres problèmes et encore d'autres pourront être inventés par les collègues selon les besoins.

Combien de tâches de ce genre sont à traiter pendant l'année ? On n'y peut donner que des points de repère approximatifs : une partie des tâches décrites ci-dessous peuvent être transmises en classes supérieures, mais elles peuvent aussi être complétées par d'autres si cela est jugé intéressant. Nous proposons de traiter ce genre d'idées 10 ou 15 fois dans la première année. (Les problèmes décrits dépassent largement le temps indiqué ; le reste peut être donné en classes supérieures ou aux élèves particulièrement intéressés. Mais il est recommandé de proposer au moins un ou deux de problèmes de chaque type.)

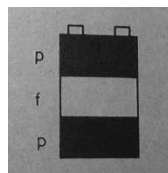
Au départ, les enfants peuvent effectivement construire des pièces données. Plus tard, on peut traiter des problèmes où les constructions sont remplacées par des colorisations, cartes de signes, écriture des signes. Dans ce sens, nous proposons de suivre l'ordre des tâches décrites ci-dessous.

- On donne des pièces de trois couleurs aux enfants : des cubes, des éléments du matériel 'Gabi', des boules colorées avec des ficelles, éventuellement, s'il n'y a pas de matériel de ce genre, des réglottes blanches, roses et bleues claires, du matériel Cuisenaire. Un élève reçoit entre 8 et 10 pièces de chaque couleur. S'il n'y en a pas pour toute la classe, ne faisons travailler dessus qu'un petit groupe à la fois ; les autres le feront à leur tour à une autre occasion. Dans le cas de l'enfilage de perles, donnons 9 ou 10 ficelles à chaque élève.

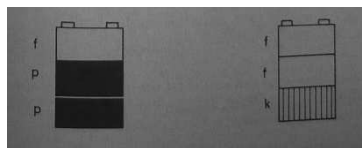
- a) *Construis des tours.* (Enfile des perles.) (Similairement à la tâche présentée, on n'a pas d'autre contrainte au départ que les limites du matériel donné : ils ne peuvent utiliser que trois couleurs différentes.)
- b) *Construis des tours de cette hauteur.* (Enfile des perles de cette longueur.) (On met une tour de deux étages devant les enfants.) Le b) peut être la tâche d'une autre séance que le a).
- c) *Construis des tours différentes.* Elles doivent être toutes de cette hauteur (2 éléments). *Qui peut faire le plus de tours différentes ?* Cette tâche peut être donnée directement après la b) si on voit qu'ils commencent à distinguer les constructions différentes.
- d) *Construis des tours de cette hauteur (3 éléments).* Chacune doit contenir des couleurs rouge, blanc et vert aussi. (Un problème complètement nouveau, il peut être indépendant des précédents.) La nouvelle contrainte exclut beaucoup de possibilités. Chaque tour doit être composée des éléments de couleurs toutes différentes. Si les éléments de couleur identique étaient autorisés, ils pourraient construire 27 tours possibles, mais ainsi il ne reste que 6 possibilités :



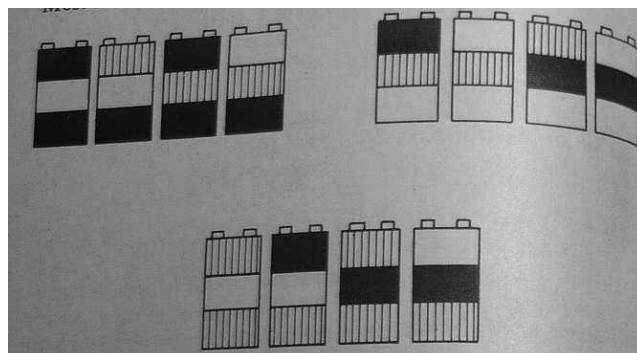
- e) *Cette fois-ci, tu as 3 couleurs (bleu, blanc, rouge), et tu peux construire des tours de cette hauteur (3). Tu as le droit d'utiliser deux fois la même couleur mais seulement comme ça :*



Tu ne peux pas les mettre l'une directement sur l'autre, c'est-à-dire ceci ne convient pas : et cela non plus :



Dans ce cas, voici toutes les possibilités :

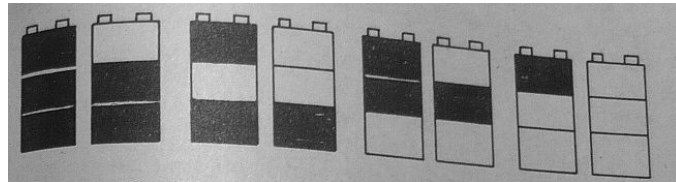


- f) *Construis des tours de cette hauteur (3 éléments). Au milieu, il faut toujours mettre un blanc.* On peut facilement retrouver toutes les possibilités si en ignorant les éléments blancs du milieu, on imagine construire des tours de deux éléments : c'est ce qu'on a déjà fait dans l'exemple. Le nombre des possibilités ne change pas si on intègre un blanc au milieu de chacune. Ceci signifie donc 9 éléments à nouveau.

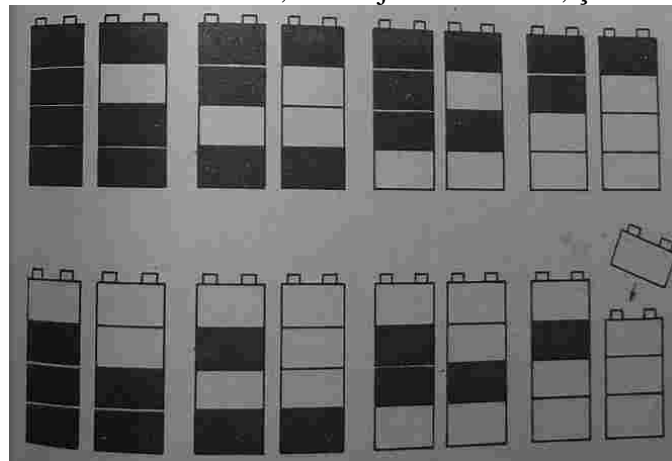
Répétons certaines de ces tâches en ne changeant que les couleurs des éléments. (Par ex. les tâches *d*), *f*), *c*.) Pour les petits enfants, la tâche apparaît souvent nouvelle même si on modifie seulement une propriété qui ne concerne pas l'essentiel. C'est-à-dire, énonçons par ex. la tâche *d*) avec du matériel jaune, vert et blanc au lieu de rouge, blanc et bleu. Ou, après le matériel 'Gabi', donnons d'autre matériel de construction et énonçons une tâche déjà traitée avec ce nouveau matériel.

Plus tard, nous décrirons davantage de tâches pour lesquelles il est possible de montrer qu'elles ne diffèrent que dans les aspects insignifiants des tâches présentées ci-dessus, mais pour les enfants, elles signifient chaque fois un nouveau problème – une nouvelle occasion donc pour enrichir leurs expériences. La diversité de l'intuition (la forme variée du même problème) est une des bases principales du processus d'abstraction.

- Variations aussi certaines conditions mathématiquement importantes : le nombre des couleurs, (2 au lieu de 3), la hauteur des tours, les contraintes. Par exemple en construisant toutes les tours possibles de 3 éléments, ils peuvent trouver 8 tours différentes :



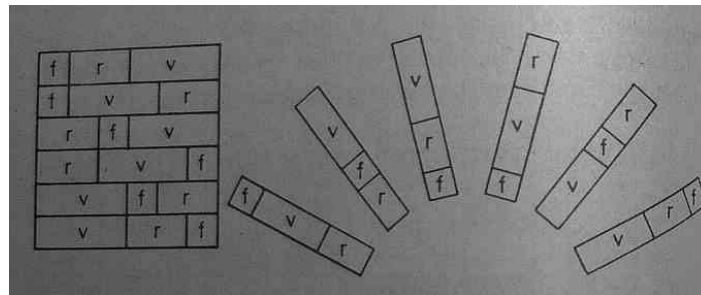
- Ils peuvent aussi essayer de construire des tours de 2 couleurs et 4 étages. Il y a 16 possibilités. On a vu qu'on pouvait construire 8 tours de 2 couleurs, par ex. de rouge et blanc, si on pouvait mettre 3 éléments l'un sur l'autre. Si on ajoute sur chaque tour ainsi construite un élément rouge, ça fait 8 tours différentes, si on ajoute un blanc, ça fait 8 nouvelles :



- *Construction avec le matériel Cuisenaire.* Les enfants peuvent construire des chemins des réglettes Cuisenaire suivant des règles différents. Par exemple :
 - a) *Combien de chemins différents peuvent être construits avec une réglette blanche, rose et bleue ?*

Comme dans la tâche *d*) ci-dessus, il faut mettre en ordre 3 éléments. Du point de vue mathématique cela ne fait aucune différence, bien sûr, si on les met verticalement (l'un sur l'autre) ou horizontalement (l'un après l'autre). Il n'est pas non plus important qu'ils soient de longueur identique, et ils sont différents ici. Tout cela ne change pas le nombre de cas qui reste 6.

Pour les enfants c'est pourtant un problème complètement différent. Pour eux même la direction des chemins fait une différence (s'ils vont dans des directions différentes ou s'ils sont l'un à côté de l'autre en formant « un tapis »).

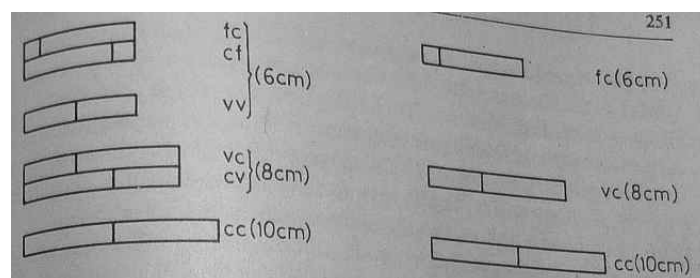
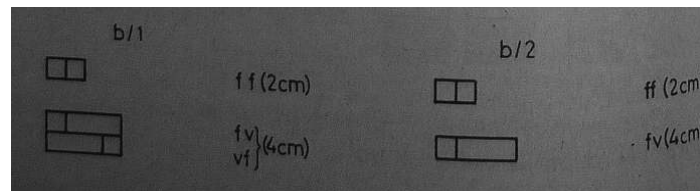


- b) Un chemin ne peut être construit que de 2 réglettes. Utilisez des réglettes blanches, bleues clair et jaunes. Combien de chemins pouvez-vous construire ?

Deux différentes interprétations possibles de la tâche :

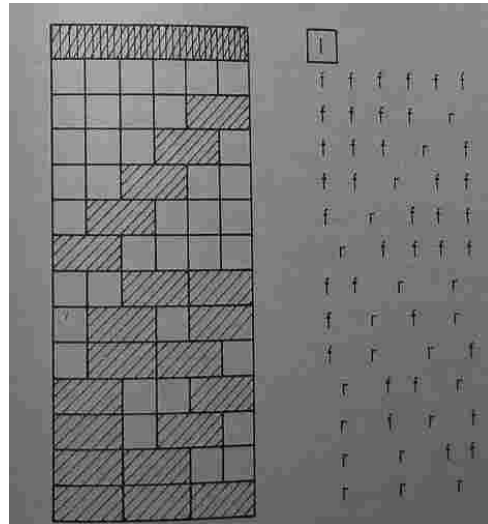
- 1. Comme avant, on distingue deux chemins si les réglettes se suivent dans un ordre différent ;
- 2. seulement la longueur des chemins compte.

Leur solution :



- c) Faites des chemins de la longueur de la réglette violette, mais vous ne pouvez utiliser que des réglettes blanches et roses. (Les chemins de la longueur de la réglette jaune, rouge, bleue claire et puis la noire peuvent être construites avec la même contrainte. Plus tard, en troisième ou quatrième année il sera intéressant de reprendre ces tâches et comparer le nombre de constructions d'une longueur donnée.)

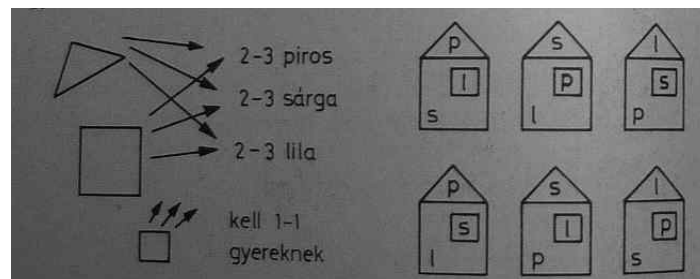
Les constructions de la longueur de la violette (6 cm), en utilisant des réglettes blanches et roses (1 et 2 cm) :



Coloriages. Donnons aux enfants des crayons de trois couleurs différentes et demandons-leur de faire des drapeaux.

- a) Au départ il n'y a pas de contrainte. Ils peuvent les colorier avec une couleur, ils peuvent en créer avec deux, trois ou quatre bandes, avec des bandes horizontales ou verticales.
- b) Faisons-les dessiner des drapeaux de trois couleurs (sans mélanger des couleurs). En général, les enfants acceptent sans accord explicite que cela signifie : deux bandes d'une même couleur ne peuvent pas être l'une à côté de l'autre, car ça ne laisserait voir que deux bandes, une plus et une moins large. (Ou le drapeau serait unicolore s'ils dessinaient les trois bandes avec la même couleur.) Cette tâche correspond ainsi à la tâche *e*) de la *Construction des tours*.
- c) Faisons-les construire aussi des drapeaux de deux bandes. Ils peuvent utiliser trois (ou quatre) couleurs.
- d) Ils font des drapeaux de trois bandes, chaque drapeau doit contenir toutes les trois couleurs données par ex. rouge, jaune, vert. (Ce problème correspond à la tâche *d*) de la *Construction des tours*.)
- e) Les enfants colorient des maisons composées de trois parties différentes, chaque partie de différentes couleurs. Au lieu de coloriage, ils peuvent aussi coller des pièces de papier en couleur.

Par exemple le mur correspond à une couleur, la fenêtre à une autre et le toit à une troisième. Les enfants disposent de triangles et de carrés petits et grands découpés dans du papier, 2 ou 3 de chaque couleur et forme pour chaque enfant. Ils en construisent des maisons :



Quand ils ont colorié des drapeaux, l'ordre bien défini a facilité la solution. Cette fois-ci, ils ne regardent pas l'ordre, mais la couleur de chaque élément : si le mur, la fenêtre ou le toit est rouge, jaune ou violet. Si on précise que chacun doit être de couleurs différentes, ceci correspond aussi à la tâche *d*) de la *Construction des tours*.

- *Mots, mélodies.* a) Les enfants peuvent aussi créer des groupes de mots en utilisant des lettres données. Par exemple en utilisant 3 lettres, ils écrivent des groupes de 2 ou 3 lettres (des monogrammes). Plus tard, on peut faire la contrainte que deux lettres identiques ne peuvent pas paraître l'une à côté de l'autre. (Parmi les groupes de lettres, il peut y avoir des mots mais leur majorité ne constitue pas de mot qui ait du sens.)¹⁷

- Par exemple on donne les lettres suivantes :

é, r, v

On demande des enfants d'écrire tous les groupes de 2 lettres sans contrainte ou avec la contrainte que deux lettres identiques ne peuvent pas apparaître dans le même groupe de deux mots :

ér, év, ré, rv, vé, vr.

- Ou ils cherchent tous les groupes de 3 lettres, par exemple avec la contrainte que deux lettres identiques ne peuvent pas apparaître dans le même groupe. L'ensemble des possibilités est le suivant :

éré, érv, évé, évr, rér, rév, rvr,rvé, vér,vév, vré, vrv.

On trouve l'analogie de cette tâche aussi parmi les précédentes.

- b) La suivante est similaire. Trois enfants, Robi, Gabi et Feri font une compétition : qui court plus vite. Comment leur ordre peut être constitué ?

Visons à faire chercher la méthode de solution aux enfants eux-mêmes. Il y a essentiellement deux différentes méthodes possibles : soit ils attachent les noms (ou les initiales) à l'ordre à plusieurs différentes façons, et ils rassemblent alors tous les ordres possibles des lettres, soit ils fixent les trois noms d'enfants et ils y attachent les différents « classements » possibles. Dans ce dernier cas, ils cherchent tous les ordres possibles des trois chiffres.

1 ^{ère} méthode :			2 ^e méthode		
1 ^e	2 ^e	3 ^e	R.	G.	F.
R.	G.	F.	1 ^e	2 ^e	3 ^e
R.	F.	G.	1 ^e	3 ^e	2 ^e
G.	R.	F.	2 ^e	1 ^e	3 ^e
G.	F.	R.	2 ^e	3 ^e	1 ^e
F.	R.	G.	3 ^e	1 ^e	2 ^e
F.	G.	R.	3 ^e	2 ^e	1 ^e

- c) En utilisant trois notes de solmisation, les élèves peuvent aussi composer des mélodies, de trois notes par exemple. Ils peuvent aussi chanter leurs mélodies. Par exemple, soient les trois notes le *mi*, le *sol* et le *la*. Avec eux – sans contrainte – on peut composer 27 différentes mélodies, si on ne varie pas le rythme.

<i>mi-mi-mi ;</i>	<i>sol-mi-mi ;</i>	<i>la-mi-mi ;</i>
<i>mi-mi-sol ;</i>	<i>sol-mi-sol ;</i>	<i>la-mi-sol ;</i>
<i>mi-mi-la ;</i>	<i>sol-mi-la ;</i>	<i>la-mi-la ;</i>
<i>mi-sol-mi ;</i>	<i>sol-sol-mi ;</i>	<i>la-sol-mi ;</i>
<i>mi-sol-sol ;</i>	<i>sol-sol-sol ;</i>	<i>la-sol-sol ;</i>
<i>mi-sol-la ;</i>	<i>sol-sol-la ;</i>	<i>la-sol-la ;</i>
<i>mi-la-mi ;</i>	<i>sol-la-mi ;</i>	<i>la-la-mi ;</i>
<i>mi-la-sol ;</i>	<i>sol-la-sol ;</i>	<i>la-la-sol ;</i>
<i>mi-la-la ;</i>	<i>sol-la-la ;</i>	<i>la-la-la.</i>

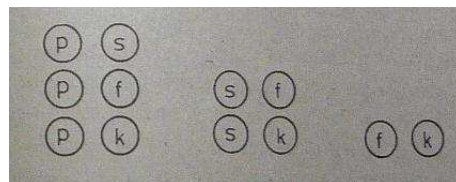
¹⁷ En hongrois, il existe beaucoup de mots de 2 et 3 lettres. Parmi les groupes de lettres suivants, ér, év, ré, érv, rév, vér ont du sens.

- Plus tard, on peut donner cette tâche avec la contrainte qu'il ne peut pas y avoir trois sons identiques dans la même mélodie ; ou que la mélodie doit être constituée de trois différentes notes ; ou qu'il ne peut pas y avoir deux notes identiques l'une à côté de l'autre. Mais donnons cette tâche d'abord sans contrainte, pour faire sentir la multiplicité des possibilités. Une autre fois, ils peuvent aussi construire des mélodies de 2 ou 4 notes avec des contraintes quelconques.

L'ordre ne compte pas. Dans les tâches précédentes, la mise en ordre des éléments a toujours joué un rôle. Dans les tâches suivantes, l'ordre sera indifférent.

- a) On met quatre boules 'Babylon' dans une boîte ou un sachet opaque. Les enfants en tirent deux boules. Combien de paires différentes de boules peuvent être tirées ? Par exemple les couleurs sont le rouge, le jaune, le blanc et le bleu. Donnons de telles boîtes avec 4 boules à chaque enfant si possible, pour que chacun joue au tirage des boules. Si on ne peut pas assurer autant de matériel, alors ils peuvent travailler en groupe de quatre et tout le monde tire l'un après l'autre. Ils peuvent noter les paires tirées de plusieurs façons différentes. Le mieux est par ex. qu'ils dessinent avec des couleurs dans leur cahier ce qu'ils ont tiré, et qu'ils encadrent ultérieurement les résultats différents. Bien évidemment, à cause des tirages aléatoires, il y aura plusieurs cas identiques : ce n'est pas grave, au contraire, c'est utile pour pratiquer l'identification des cas identiques et différents. Les répétitions seront de plus en plus fréquentes avec le temps, et ils vont arriver au point où il n'y aura plus de possibilité nouvelle. Les enfants conjecturent qu'on ne peut plus tirer d'autre paire de boules. Ils vont peut-être dire trop tôt qu'il n'y en a plus. Mais même s'ils ont raison, on ne peut accepter cette proposition qu'en tant qu'une conjecture. On les demande d'expliquer pourquoi ils pensent que les boules ne peuvent pas sortir différemment. Même les enfants de la première année du primaire peuvent « démontrer », justifier à leur niveau. Par exemple ils énumèrent que chaque couleur était déjà en paire avec chaque autre.

L'ensemble des paires possibles est le suivant :



(Comme ils tirent les deux boules en même temps, on ne distingue pas les cas rouge-jaune et jaune-rouge, mais il faut suivre un ordre quelconque dans la notation.)

- b) Les enfants peuvent jouer le même jeu avec 5 boules de différentes couleurs (ou avec des bâtonnets, gommes etc.).

S'ils tirent des paires parmi 5, alors 10 cas différents sont possibles. Par exemple, soient les cinq boules : les quatre précédentes et une verte. Désignons les couleurs par leurs lettres initiales¹⁸. Les possibilités sont :

r-j	r-bc	r-bu	r-v
	j-bc	j-bu	j-v
		bc-bu	bc-v
			bu-v

- c) Le nombre de boules mises dans le sachet n'est pas le seul variable qu'on peut varier, le nombre de boules tirées peut changer également. C'est-à-dire, au lieu de 2 ils tirent 3 boules

¹⁸ Dans la traduction française, puisque le 'blanc' et le 'bleu' ont la même lettre initiale, nous les désignons respectivement avec 'bc' et 'bu'.

en même temps (ou 1 ou 4 etc.). S'ils tirent chaque fois 3 parmi 4 boules, alors les possibilités sont:

rouge-jaune-blanc,	rouge-jaune-bleu,
rouge-blanc-bleu,	jaune-blanc-bleu.

Pourquoi existe-t-il quatre cas exactement ? Il y aura peut-être quelqu'un qui le découvrira : une boule reste chaque fois dans le sachet, soit la bleue,

soit la blanche,
soit la jaune,
soit la rouge.

- S'ils en choisissent 3 parmi 5, alors – comme dans le cas du tirage des paires – 10 cas sont possibles. (Les deux donnent le même résultat parce que si on en tire trois alors il en reste 2, et ceci a 10 cas :

<i>On tire :</i>	<i>Il reste :</i>	<i>On tire :</i>	<i>Il reste :</i>
bu bc v	– r j	r bc v	– j bu
bu j v	– r bc	bu bc r	– j v
bu bc j	– r v	r j v	– bc bu
j bc v	– r bu	bu j r	– bc v
bu r v	– j bc	r bc j	– bu v

Il est visible qu'on pouvait construire autant de paires de 5 couleurs que de triples.)

- *d)* Il y a un troisième facteur qui peut modifier le nombre des cas. (Les deux premiers étaient le nombre de l'ensemble des boules et le nombre de boules tirées.) Ce facteur est-ce qu'une couleur peut apparaître plusieurs fois dans un tirage ou non. Jusqu'ici c'était impossible, car il y avait des couleurs toutes différentes dans le sachet. Mais soient, parmi les cinq boules, 2 jaunes, 2 bleues et 1 verte. Ainsi, les possibilités sont, si on en tire deux :

j-j	j-b	j-v
	b-b	b-v

Si on joue avec trois jaunes et deux bleues, il y aura encore moins de possibilités :

j-j	j-b	b-b
-----	-----	-----

Si seulement deux boules ont un couleur identique, les autres sont tous différents, par ex. 2 rouges, & jaune, 1 blanc et 1 vert, alors 7 cas sont possibles :

r-r	r-j	r-b	r-v
		j-b	j-v
			b-v

(En première année, on ne joue qu'un problème de chaque type, et on ne vise même pas leur solution complète : il suffit si les enfants arrivent à rassembler autant de cas qu'ils peuvent.)

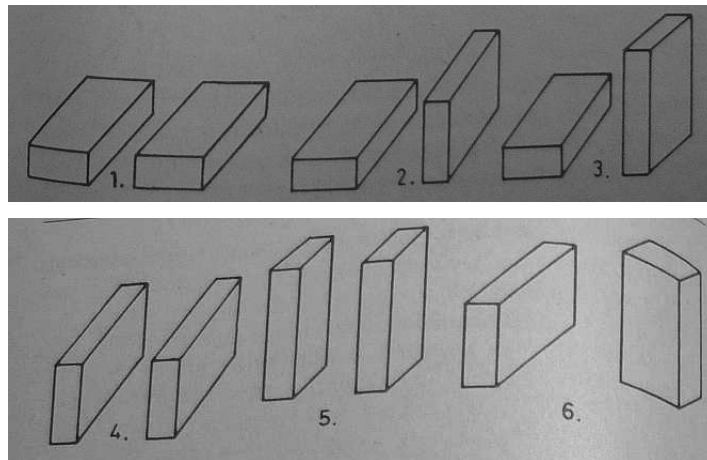
Autres jeux. Nous mentionnons encore quelques jeux dont un des rôles est de faire miroiter des problèmes combinatoires, le rassemblement des cas. Leur autre rôle est de soulever des idées de probabilités ; nous référerons à ce rôle plus tard.

- On lance 2, 3 ou plusieurs pièces de monnaie (ou des disques), combien de façon peuvent-elles tomber ?

Par exemple, en cas de 3 pièces : 3 piles ; 2 faces et 1 pile ; 2 piles et 1 face ; 3 faces. Si les pièces sont différentes, alors il a de sens de distinguer, pour le cas de 2 piles et une face, si la

face apparaît par ex. sur la pièce de 5 Forint ou de 2 Forint ou de 1 Forint, quand les deux autres sont des piles.

- On peut aussi lancer deux dés, deux boîtes d'allumettes ou d'autres boîtes. Le problème combinatoire du nombre des cas différents peut se soulever ici aussi.



Si on ne distingue pas les faces opposées des boîtes d'allumettes, alors, en cas de deux boîtes, il y a 6 possibilités.

- Si on distingue les deux boîtes d'allumettes, alors il y a trois cas de plus.
- Si on lance deux dés, il y a 21 ou 36 cas suivant si l'on a distingué les dés ou non.

Dans cette classe, notre objectif est seulement d'orienter l'attention vers les problèmes combinatoires, et former l'habitude pour les enfants de rassembler autant de possibilités qu'ils peuvent dans différentes conditions et contraintes et qu'ils reconnaissent les cas identiques ou différents. On ne demande ainsi rien d'impossible ni des enfants, ni de nous-mêmes. Il ne faut pas prévoir trop dans la quantité, ni dans le niveau de difficulté qui doit être accessible aux enfants de la première année dans le traitement de ces problèmes. Mais il faut provoquer des occasions pour qu'ils puissent acquérir de l'expérience dans ce domaine aussi.

III.5.5 LA CONSTRUCTION DES TOURS COLORÉES

(Varga 1982 p. 15-27)

3. Building coloured towers and asking the right question

The problem with "in how many ways can you. . ." in the previous section is that it is too adultish for a fifth grader, too much smelling of a textbook. Getting dolls dressed is different for second graders because it is an activity enjoyed by kids: they see the three caps and the two coats, they fit them together, they may even discuss which ones suit better, and this kind of activity becomes a fundamental paradigm of multiplication. The question about the number of possible cases is preceded by other questions or suggestions such as these:

Choose a cap and a coat and dress the doll with them,

Do it in a different way,

Do it in still another way,

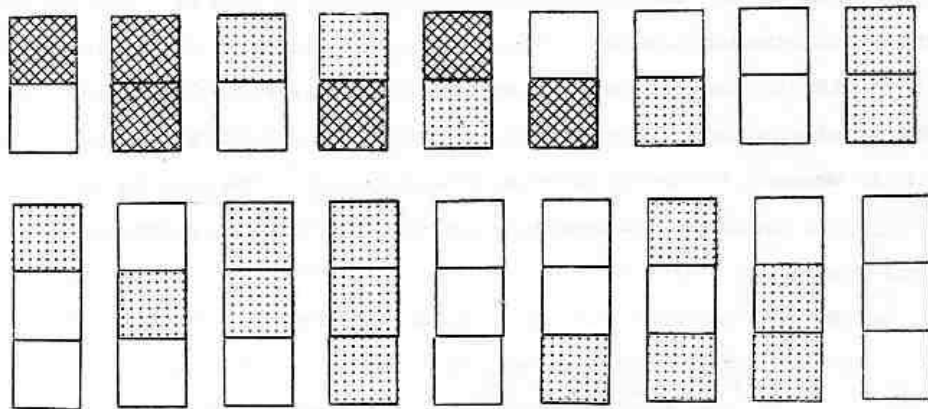
Do it in as many different ways as you can.

Only then comes the question about the number. Then they do the same with maybe two caps and three coats or other garments or quite different embodiments

of the "direct product" idea.

With numbers as small as in this example, some or even all intermediate questions may be skipped on occasion, depending on the kids' past experience. but the teacher should be aware that they may be needed as stepping stones on other occasions.

An activity at a slightly higher level is this: Two teams of kids build towers of centimeter cubes or other colored building blocks. ("Tower" here means a building you build only upward. It consists of floors, like a house.) The teams have different assignments. One team has blocks of two different colors, and they build three-floor towers. The other team has blocks of three different colors, and they build two-floor towers. At first they build just one, then more, then as many different ones as they can and then comes the question of how many different towers they could build. They they compare the buildings, they discuss the results, maybe they change roles (using other colors this time). There is something unexpected about the result.



The unexpectedness has its roots in the previous type of activity. There it did not make a difference whether there were three caps and two coats or the other way around. Therefore kids (some, at least) would expect that here too there should be a ninth row of the second kind. But whatever they try will be the same as one of the eight they have already built.

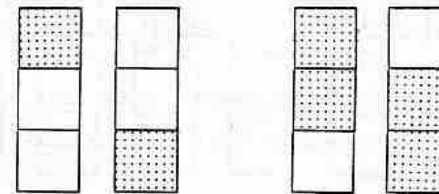
Just as putting clothes on dolls is a fundamental paradigm about multiplication, building towers of colored blocks is a most important paradigm about powers. Whether or not they introduce the notation at this point, what surprises them is the fact that $2^3 \neq 3^2$, which will, much later, be an instance of the non-commutativity of the fifth operation, raising to power.

How about two colors and four floors on the one hand, four colors and two floors on the other?

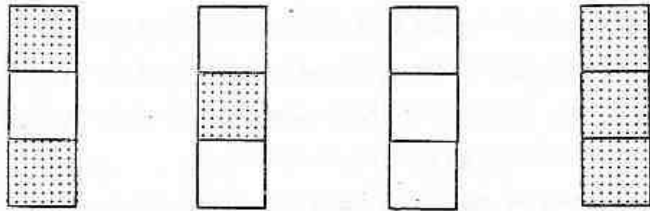
Deep questions of logic are lurking below the surface. No hurry to make them explicit. Kids are just gathering experience about these issues.

4. Looking for a law

The sequence of assignments from building one tower of a certain kind to several to as many as you can to every possible such tower makes a big jump from the first result made to the last. Every possible means that it is not just me, it is not just us who have not found more than 8 or 9 or 16 different towers of the given kind, but nobody ever will. Kids can come to this conclusion without overestimating their predicting power by discovering a structure. I would rather say by constructing a structure. This can be a stepwise process and can be achieved in various ways. A first attempt may be forming pairs of towers such as these:

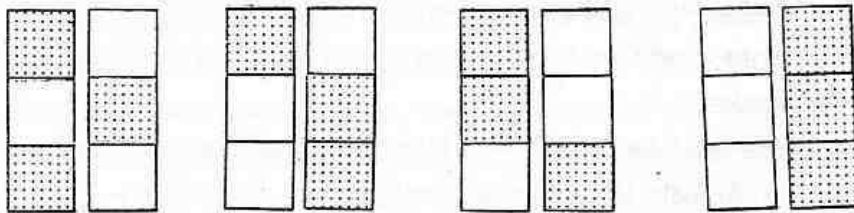


Others can be paired using the same principle:



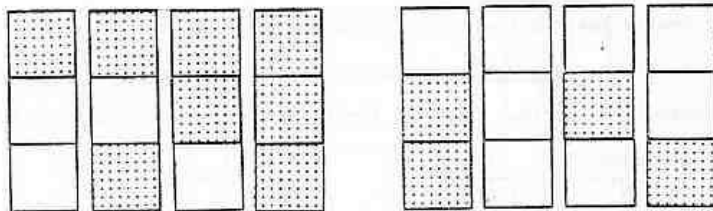
This structure may not be good enough to justify the number 8.

Another idea of pairing the towers is to form pairs (of the last four and also the previous ones, but in a different way):



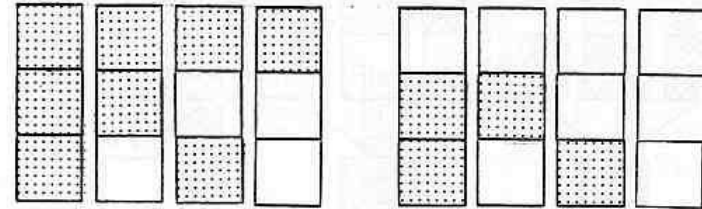
(Children of course, may mix these two structures with each other and make different ones.) The fact that each as exactly one pair corroborates the guess that no single one is missing -- but why should it not be that two are missing?

Still another approach to developing a structure is grouping together those with say, blue on the top and those with the other color, yellow on the top.



Further grouping can be based on the color of the block in the middle or the one on the bottom. Suggestions "can you make it nicer" are usually

enough to improve the order up to the point when it becomes alphabetical, i.e. blue comes before yellow on the top, in the middle, and on the bottom, and groupings are as below.

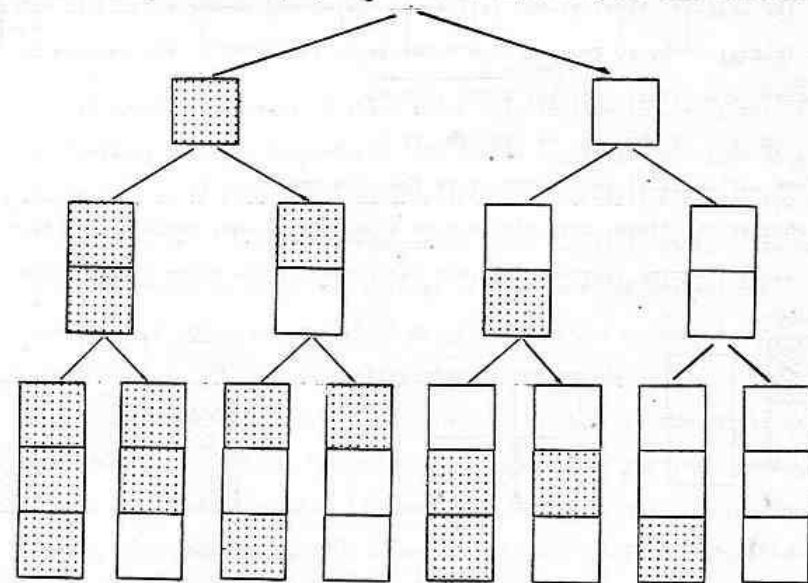


alphabetical order:

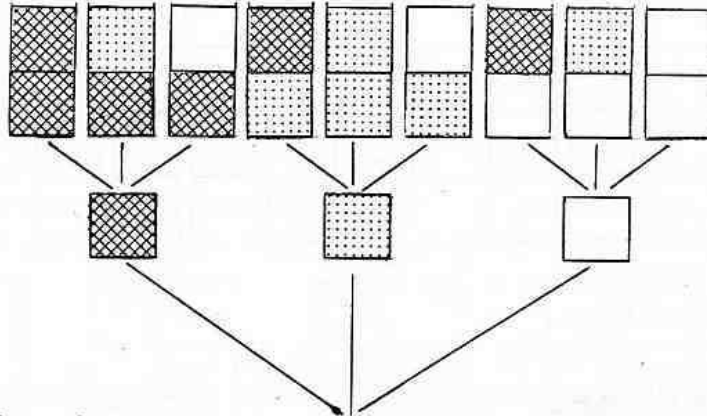
bbb bby byb byy ybb yby yyb yyy

For kids this is not a natural order. Looking up a name in a directory or a word in a dictionary remains a trial-and-error activity. The reason is clear: their math education did not include ordering sets of towers!

Tree diagrams are a graphical means of expressing the same structure.



This time building the more natural order would be for both the towers and for the tree to be built (to grow) upward. Using three colors and two stories the tree could look like this.



Symbolically, read upward, the order is again visibly alphabetical.

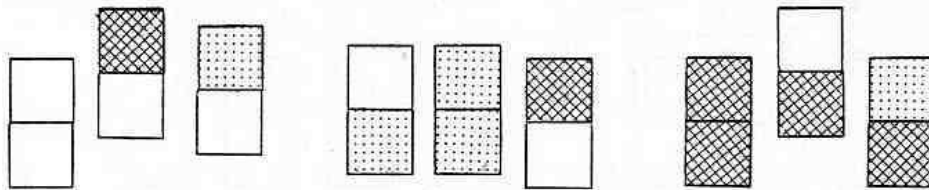
bb bg by gb gg gy yb yg yy

(We used an artificial means in getting the alphabetic order: Choosing the order of the colors: blue, green, yellow, to correspond to the alphabetic order of their initials: b, g, and y. In a wider sense the order of the letters in the alphabet is a casual one, and a row such as

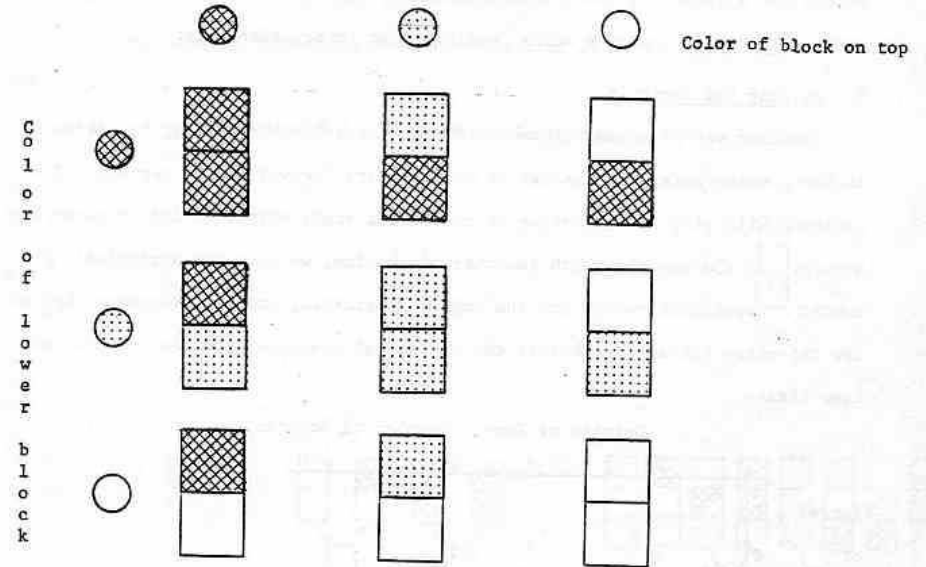
gg gb gy bg bb by yg yb yy

is not less alphabetical in its structure than the one above.)

Yet another structure, this time not an alphabetical one, would again start with initially towering unstructured sets determined by the color of, say, the lowest block.



Further structuring leads to forming rows and columns and rearranging the towers so that the dimensions "color of the lower block" and "color of the top block" have both their spatial equivalents.



A similar structure of the 8 tower example (two colors, three levels) can be realized in three dimensions: the towers are on the vertices of a cube. It is hard to go on with this kind of spatial representation to the fourth and further dimensions, but the tree representation lends itself flexibly to go on and on. The representation gives full account of the number of probabilities. The tree diagram is a proof, a non-verbal one, that there are exactly 8 (or 9, or 16, etc.) probabilities. The law is implicit in the tree structure.

Proofs are abstractions, and of a high level, even the intuitive (as opposed to formal) ones. Towers built of colored blocks, on the other hand, are very concrete, palpable, movable. Drawings and written symbols representing the towers, like those above, are somewhere between. There is an interesting point

here: it is easier to reach the abstract level of a proof, if the starting point is as concrete as the building blocks. As movable objects, they lend themselves more easily to step-by-step structuration. Only for the mathematically mature person can a graphical (let alone a symbolic) representation be a good starting point. (S)he replaces the actual action by an interiorized one.

5. Varying the variable

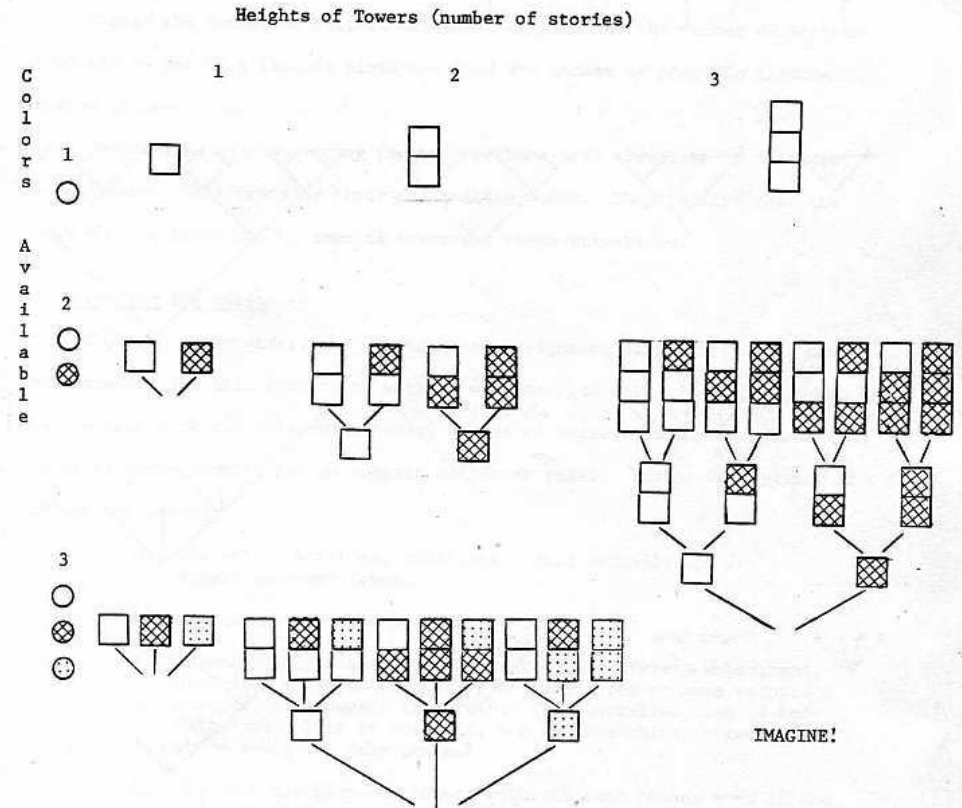
Another way of coming close to combinatorial laws is looking for patterns in the numbers obtained, whether or not they are "proved" to be correct. The patterns will give the guideline to reassuring their being correct or revealing errors. In the example which is under discussion, we have two variables: the number of available colors and the number of stories, and this suggests that we use two-entry tables to tabulate the numbers of possible outcomes. So far we have these:

		Heights of Towers (Number of Stories)					
		1	2	3	4	5	6
Number of Colors Avail- able	1						
	2			8	16		
	3		9				
	4		16				
	5						
	6						
	7						
	8						

A combination of individual, small group and "frontal" (total class) activities can follow. The table with these numbers is hung or drawn on the chalkboard, visible for the class. The goal is to fill the empty spaces. Individuals or groups of two or three may decide which cells they want to take charge of; they write their initials into the cells and start working out the

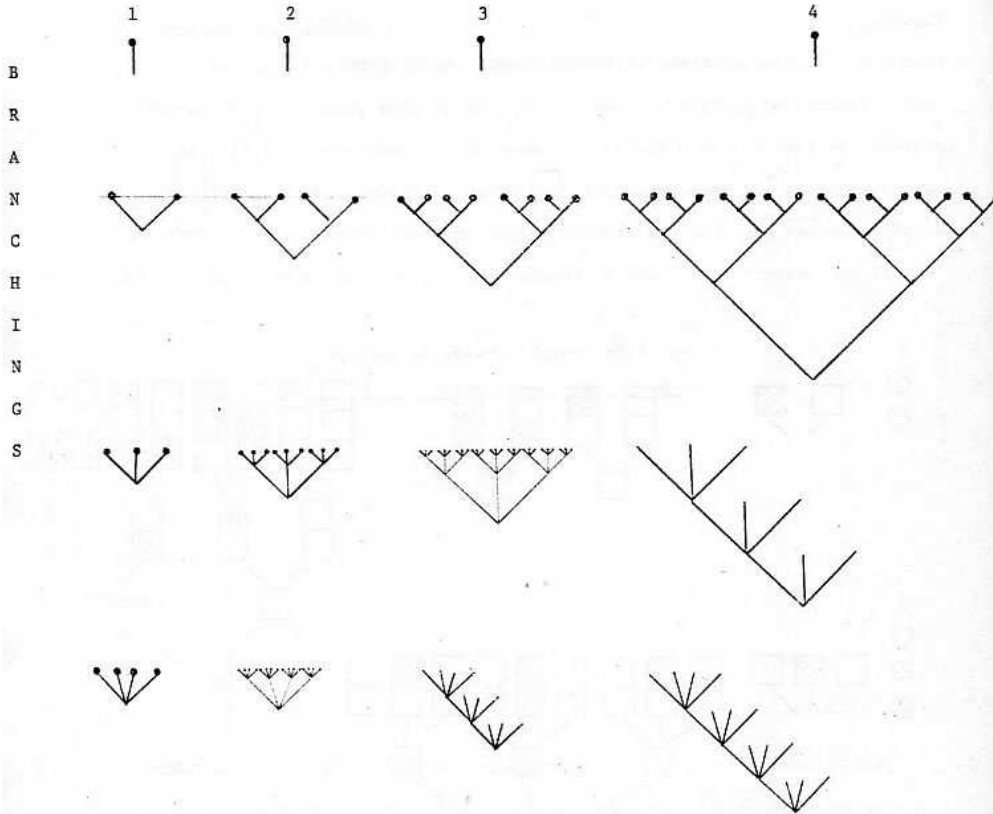
which go there. When they find a number, they write it in and choose another cell. Everybody is entitled -- or some may be charged with -- looking at the patterns in the table and putting in question marks to numbers they believe do not fit.

The two kinds of activities can be synthesized as suggested by this figure.



Another representation shows only trees and leaves the towers to the imagination (just as the missing parts of the trees).

L E V E L S

6. Changing the embodiment

In a mini-country license plates consist of three letters, no numbers, and the letters can only be A or B or both. How many different license plates can be given out in this country? Design all plates!

Now change all plates to allow A, B and C. If the license plates consist of two letters and no numbers, how many plates are possible?

Change the number of letters which can be used and the number of letters that can be put on a license plate and find the number of possible license plates in each case.

Children enjoy discovering the same mathematical structure in different embodiments. This enhances their abstracting power. They realize that the same sort of trees can be used to represent these situations.

7. Changing the rules

Students often understand the original assignment differently from how it was intended and this amounts to working with another rule. Let them do so, or let us come back to their rules later, or let us suggest to them to change the rule, or quite simply let us suggest different rules. Either way, plenty of things may happen:

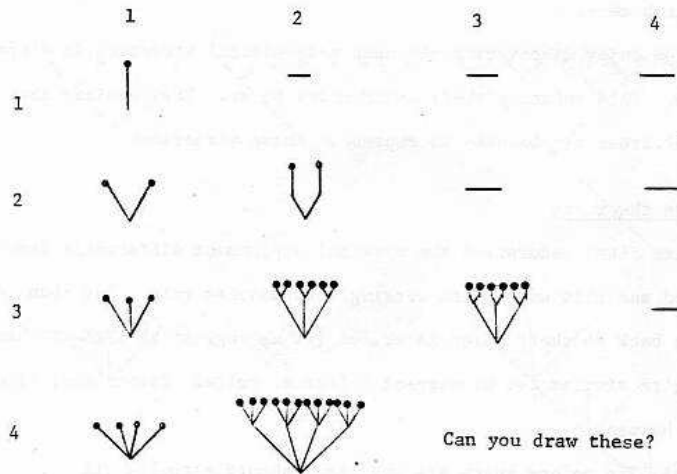
- The colors which are available should actually all appear on every tower.
- Colors on a tower must be all different.
- Adjacent colors must be different. (A different embodiment, designing flags which consist of two, three or more colored stripes, may suggest this rule. The Australian flag is red-white-red. This is possible, but red-red-white or red-white-white would not make sense.)
- You must not have two towers with the same colors even if the order is different.

Take b) and work out the numbers in a 4 x 4 table. The result is shown below.

Heights of towers (length of 'words')

	1	2	3	4
Number	1	0	0	0
of	2	2	0	0
colors	3	6	6	0
(letters)	4	12	24	24
avail- able				

The trees look like this



As the trees grow, at every higher level they push up less and less new branches - one branch less at each consecutive level. The reason is that the number of colors you can use is one less each time, since the colors used cannot be used again. (The actual construction of the towers conforming the new rule make this quite clear!) If you examine any row of trees, say row No. 3, you find that it can grow to be just one level with three branches: it can continue

growing to be two levels, six branches; each of them still can push out one branch upward, and they will be six again; but then it is finished. This rule produces trees which do not grow up to the sky, while the earlier rule allowed trees to grow infinitely.

The previous rule, the one which let trees grow infinitely, can be described by the concise mathematical expression C^h where C is the number of colors available and h the height of towers. The present rule can be packed into the less widely known but useful formula $(C)h$ which means take the whole number C , multiply it by the next smaller whole number, and so on, using h factors:

$$\frac{C(C-1)(C-2)\dots}{h \text{ factors}}$$

e.g. $(4)_3 = 4 \times 3 \times 2$

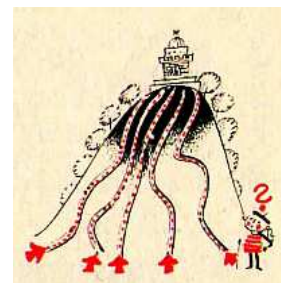
This is the number of permutations of four different objects, three of these each time.

III.5.6 DEUX SÉRIES DE PROBLÈMES DES MANUELS HONGROIS DE L'ÉCOLE MOYENNE

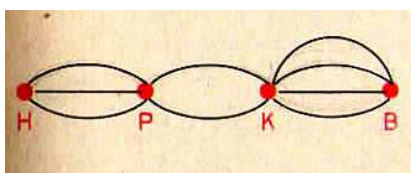
Première année (Manuel h. gr. 5. 1979, p. 5. Ma traduction.)

COMBIEN DE CAS Y A-T-IL ?

- I. Pour arriver au sommet d'une montagne, il y a 5 chemins. Combien de trajets aller/retour peuvent être choisis par un touriste qui monte au sommet de la montagne et redescend ? Combien de possibilités a-t-il s'il ne veut pas descendre avec le même chemin qu'à la montée ?

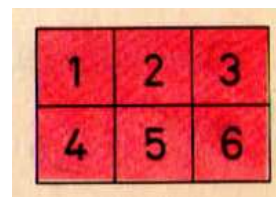


II.



Trois chemins passent de Hencida à Piripócs. De Piripócs à Kukutyin il y en a 2, de là à Boncida il y en a 4. De combien de façons peut-on accéder de Hencida à Boncida en passant par Piripócs et Kukutyin ?¹⁹

- III. De combien de dictionnaires a-t-on besoin pour pouvoir traduire des mots directement de n'importe quelle langue à n'importe quelle autre parmi le russe, l'anglais, le français, l'italien ?²⁰
- IV. Deux associations sportives envoient chacune cinq escrimeurs²¹ à une compétition. Dans chaque équipe de cinq escrimeurs, un escrimeur rencontre un adversaire de l'autre équipe.
- Combien de possibilités existent ainsi pour choisir un adversaire ?
 - Et si 20 escrimeurs composent chaque équipe ?
- V. Zsuzsi a ramassé des fleurs, 6 marguerites et 4 barbeaux.
- De combien de façons peut-elle arranger les fleurs dans deux vases si on permet aussi qu'une vase reste vide ? (On ne distingue pas les mêmes sortes de fleurs.)
 - Combien a Zsuzsi de possibilités si elle a ramassé en plus 5 tulipes ?
- VI. Il y a trois équipes de pionniers dans une classe²², de 12, 9 et 10 membres. La classe choisit une délégation de trois personnes pour le parlement des pionniers, un enfant de chaque équipe. De combien de façons peuvent-ils construire la délégation si tout le monde est éligible ?
- VII. A Nullepart, un billet de tramway ressemble à ceci :



Combien de différents compostages sont possibles, si on sait que la machine poste trois numéros au plus, mais un au moins ?

¹⁹ Noms des villages ou d'autres territoires existants, mais connus plutôt des blagues, proverbes et contes folkloriques ; la majorité des hongrois les considère comme des noms fictifs et humoristiques.

²⁰ La liste des langues représente les langues les plus fréquemment apprises à l'école (le russe était obligatoire à l'époque).

²¹ L'escrime est un sport dans lequel la Hongrie a des grandes traditions et obtient des médailles d'or à presque chaque Jeux Olympiques.

²² Être pionnier/-ère n'était pas obligatoire, mais fort recommandé à l'époque : la plus grande majorité des élèves ont participé dans le mouvement.

HÁNYFÉLEKÉPPEN?

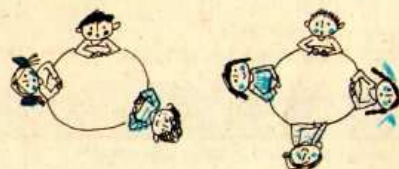
I. Gyerekeket ültetünk egymás mellé egy hosszú padra. Hány különböző sorrendben ültethetünk le két gyereket? Hát hármat? És négyet?



Töltsd ki a táblázatot!

Gyerekek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ültetések száma										

II. Gyerekeket ültetünk egy kerek asztal köré. Hány különböző sorrendben ültethetünk le három gyereket? És négyet?



Ez a két ültetés



de ez a kettő



Töltsd ki a táblázatot!

Gyerekek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ültetések száma										

COMBIEN DE FAÇON ?

I. On assoit des enfants l'un à côté de l'autre sur un long banc. De combien de façons deux enfants peuvent-ils être assis ? Et trois ? Et quatre ?

Remplis le tableau.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de leur ordre										

II. On assoit des enfants autour d'une table ronde. De combien de façons trois enfants peuvent-ils être assis ? Et quatre ?

Ces deux ordres

mais ces deux

comptent comme identiques

sont différents

Remplis le tableau.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de leur ordre										

I. On crée des nombres à l'aide des cartes de nombres. Sur les cartes, on trouve des nombres à un chiffre. Pour chaque nombre, il faut utiliser chaque carte mais seulement une fois. Un nombre peut être commencé aussi avec 0. Sur chaque carte, il y a des nombres différents. Remplis le tableau.

D'autant de cartes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
autant de nombres peuvent être créés										

II. On crée des nombres à nouveau, à l'aide des cartes de nombres. Parmi les cartes, il y en a maintenant toujours deux identiques. Il faut les utiliser tous. Remplis le tableau.

D'autant de pièces cartes (dont 2 identiques)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
autant de nombres peuvent être créés									

III. Il y a maintenant trois cartes identiques. Remplis le tableau.

D'autant de pièces cartes (dont 3 identiques)	3	4	5	6	7	8	9	10
autant de nombres peuvent être créés								

IV. Il y a deux fois deux cartes identiques. Remplis le tableau.

D'autant de pièces cartes (dont deux fois 2 identiques)	4	5	6	7	8	9	10
autant de nombres peuvent être créés							

III. Számkártyákból számokat készítünk. A kártyákon az egyjegyű számok vannak. Minden számhoz valamennyi számkártyát fel kell használni, de csak egyszer. Egy szám 0-val is kezdődhet. A számkártyák mindegyikén más-más szám van. Töltsd ki a táblázatot!

Ennyi számkártyából	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ennyi különböző szám készíthető										

IV. A számkártyákból ismét számokat készítünk. A számkártyák között most mindig van két egyforma. Ezeket is fel kell használni. Töltsd ki a táblázatot!

Ennyi darab számkártyából (amelyek közül 2 egyforma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ennyi különböző szám készíthető									

V. A számkártyák között most három egyforma van. Töltsd ki a táblázatot!

Ennyi darab számkártyából (amelyek közül 3 egyforma)	3	4	5	6	7	8	9	10
ennyi különböző szám készíthető								

VI. A számkártyák között két-két egyforma van. Töltsd ki a táblázatot!

Ennyi darab számkártyából (amelyek közül 2-2 egyforma)	4	5	6	7	8	9	10
ennyi különböző szám készíthető							

III.5.7 ERMEL: LA CONSTRUCTION DES MAISONS

(ERMEL gr. 1 1977, pp. 153-157)

II. Ordre sur un ensemble d'objets pluridimensionnels

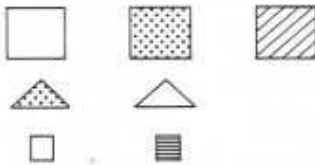
II. 1. Construction d'un matériel

Buts

Recherche et représentation de tous les objets à 3 composantes, ces composantes étant choisies parmi les éléments de 3 ensembles donnés.

Activités

On met à la disposition des enfants les blocs logiques suivants :



Après une phase de manipulation libre, l'enseignant propose aux enfants de construire avec ces blocs logiques des maisons toutes différentes formées d'un toit, d'un mur et d'une porte.

En ne donnant qu'un exemplaire de chaque bloc logique, l'enseignant respecte l'unicité de chaque élément d'un ensemble et favorise la représentation écrite des éléments obtenus. En effet, pour construire de nouvelles maisons, on est amené à démolir les précédentes.

Par exemple, les enfants étant par groupes, on peut désigner un secrétaire par groupe qui, en dessinant sur une feuille les maisons obtenues, en garde la trace.

II. 2. Classement et ordre sur ce matériel par observation et discussion

But : ordre sur le matériel.

Activité

Suite de l'activité précédente.

Au bout d'un certain temps, les enfants ne construisent que des maisons qu'ils ont déjà obtenues. Ils peuvent se demander alors s'ils ont réellement construit toutes les maisons possibles.

A partir de ce moment-là, et pour résoudre ce problème, se posent des questions de classement. Pour cela, on peut découper les maisons dessinées pour les ranger plus facilement.

153

L'enseignant accepte tous les rangements proposés en demandant de les expliciter dans la synthèse collective. Certains s'apercevront alors éventuellement qu'il leur restait des maisons à trouver.

Exemple d'une séance

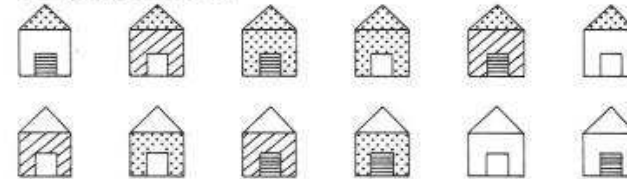
Consigne : « découpez les maisons de façon à avoir une maison par étiquette, et trouvez un moyen qui vous permettra de voir si vous avez trouvé toutes les maisons possibles ».

Les enfants recherchent par groupe et au bout d'un moment, on voit apparaître différents rangements qui leur permettent éventuellement de compléter leur collection de maisons.

Au cours de la synthèse collective, chaque groupe présente son travail et au cours de la discussion ceux qui n'avaient pas terminé complètent avec l'aide des autres.

Exemple de classements obtenus

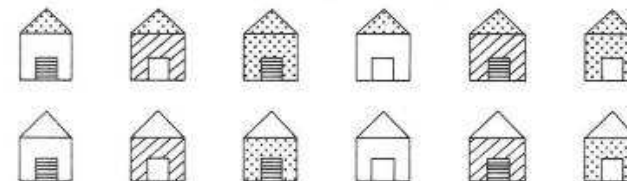
1. D'après la couleur du toit



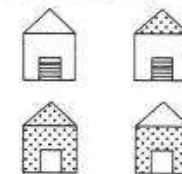
2. D'après la couleur du toit et en mettant l'une sous l'autre les maisons ne différant que par le toit.

3. D'après la couleur du toit ; d'abord les murs d'une couleur, puis les murs de la deuxième couleur, puis les murs de la troisième couleur.

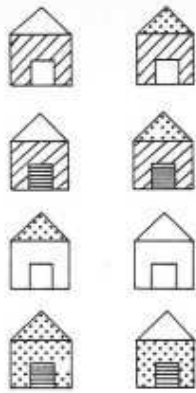
4. Éventuellement en plus, les portes apparaissent toujours dans le même ordre.



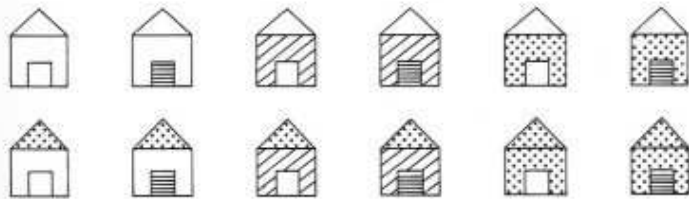
5. D'après la paire (couleur mur, couleur porte).



154



6. Classement totalement ordonné



Il y aura beaucoup de tâtonnements. Peu d'enfants, sans doute, arriveront au classement totalement ordonné.

II. 3. Activités de renforcement des acquisitions

But

1. Expliciter la manière dont sont faits les classements.
2. Amener les enfants à les affiner.

Activités

Certains rangements ont permis de construire des maisons oubliées ; on peut maintenant proposer sur les rangements faits par les enfants, une série de devinettes ou exercices :

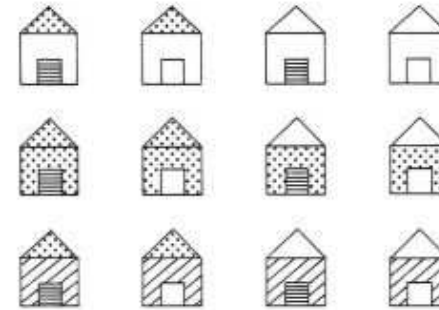
1. chercher la maison qui vient d'être enlevée
2. dessiner dans les trous les maisons manquantes
3. on enlève des maisons; on supprime les trous; ré-intercaler les éléments ôtés.

Pour chaque exercice, faire **expliciter** ce qui permet de trouver la réponse. Cela peut conduire à affiner le classement sur lequel on travaille. Par exemple, cela peut permettre de passer du rangement (1) au rangement (4), etc.

Remarques

1. En particulier, il serait bon, dans l'optique de l'ordre sur les nombres écrits dans un système de numération, d'insister sur les différents classements totalement ordonnés de type (6).

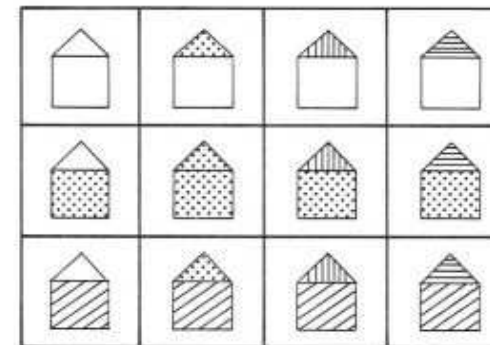
2. On peut aussi arriver à des tableaux comme :



en colonnes : les paires (toit, porte)
en ligne : les murs

3. Dans les deux cas, l'enseignant peut, comme nouvel exercice, ranger lui-même les éléments et demander aux enfants de trouver comment il a fait, de continuer un rangement commencé, ou rectifier une interversion entre 2 éléments, etc.

4. En partant de la situation des maisons, on peut aussi limiter le nombre des composantes en ne s'intéressant par exemple qu'aux maisons qui ont la même porte. L'enseignant demande aux enfants de **bien** ranger ces maisons avec comme but l'obtention du tableau cartésien où chaque ligne et chaque colonne correspondent à un élément



en colonnes : les toits
en lignes : les murs

5. Les différents exercices proposés peuvent ne pas être tous faits sur les maisons, mais sur d'autres situations. Il semble d'ailleurs nécessaire de travailler sur au moins une autre situation analogue.

Exemples de situations

- Constructions et rangements d'un ensemble de masques de chats de 3 couleurs différentes, aux yeux ronds ou oblongs, aux moustaches frisées ou raides.

- Vases de 3 formes différentes, de 2 couleurs différentes.

- Équipement sportif : 3 casquettes différentes
2 shorts différents
2 maillots différents

- etc.

TITRE :

Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des « mathématiques modernes » : le cas de la Hongrie et de la France

AUTEUR :

Katalin Gosztonyi

RÉSUMÉ :

Malgré la valeur et la pertinence que la communauté hongroise de l'enseignement des mathématiques lui accorde, la réforme hongroise mise en place par Tamás Varga et ses collègues dans les années 1960 et 1970 a été très peu étudiée jusqu'ici. La même chose peut être dite de façon plus générale sur la tradition d'enseignement dans laquelle cette réforme s'inscrit : elle est réputée en Hongrie et au niveau international en tant que « typiquement hongroise », centrée sur les démarches d'investigation, et visant à « faire découvrir des mathématiques » aux élèves à travers la résolution des problèmes ; mais il manque des analyses historiques et didactiques détaillées. Un des objectifs principaux de ma recherche est d'essayer de contribuer à la caractérisation de cette tradition.

Dans ma thèse, je compare la réforme de Varga à la réforme française dite des « mathématiques modernes ». Après l'étude de leur contexte historique et de leur arrière-plan épistémologique, je caractérise les réformes à l'aide de divers outils théoriques de la didactique : la structure et le contenu de leur programme à l'aide de l'approche écologique et la notion de paradigmes, les pratiques pédagogiques envisagées par les concepteurs des réformes à l'aide de la Théorie des Situations Didactiques.

L'analyse des deux réformes révèle quelques points communs pouvant découler des échanges internationaux de l'époque, mais montre également des différences importantes. Je propose d'interpréter les deux réformes comme les réalisations, chaque fois particulièrement cohérentes, de deux épistémologies mathématiques différentes : « bourbakiste » dans le cas français et « heuristique » dans le cas hongrois, proche des conceptions de Pólya et de Lakatos.

La comparaison des projets d'enseignement de Brousseau, dans les années 1970, et de Varga en utilisant les termes de la TSD contribue à une meilleure caractérisation de la conception d'enseignement de Varga, mais amène aussi à poser des questions sur la transmissibilité des théories didactiques d'un contexte à l'autre.

MOTS- CLÉS :

didactique des mathématiques; histoire de l'enseignement des mathématiques; épistémologie des mathématiques; réforme des mathématiques modernes; analyse comparative France et Hongrie; théorème de Pythagore; combinatoire; probabilités; programmes; manuels scolaires; découverte guidée; séries de problèmes

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: F. Vandebrouck

IREM de Paris 7 – Case 7018

Université Paris Diderot

75205 Paris cedex 13

Dépôt légal : 2017

ISBN : 978-2-86612-385-7