



**HAL**  
open science

# Contribution à la suppression du phénomène stick slip et à la construction d'un observateur de dimension infinie en forage pétrolier

Samir Toumi

## ► To cite this version:

Samir Toumi. Contribution à la suppression du phénomène stick slip et à la construction d'un observateur de dimension infinie en forage pétrolier. Automatique / Robotique. Université Paris-Saclay; Université de Carthage (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017SACLE034 . tel-01761475

**HAL Id: tel-01761475**

**<https://hal.science/tel-01761475v1>**

Submitted on 9 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLE034

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
ET DE

L'UNIVERSITÉ DE CARTHAGE  
PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ D'EVRY VAL D'ESSONNE ET  
L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE TUNISIE

Ecole doctorale n°580  
Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques et informatique

par

**M. SAMIR TOUMI**

Contribution à la suppression du phénomène stick slip et à la  
construction d'un observateur de dimension infinie en forage pétrolier

Thèse présentée et soutenue à "Evry", le 15 décembre 2017.

Composition du Jury :

Mme.	NADIA MAÏZI	Professeur MINES ParisTech, France	(Présidente)
M.	JEAN- MICHEL CORON	Professeur Université Pierre et Marie Curie, France	(Rapporteur)
M.	MOEZ KHENISSI	Professeur Université de Sousse, ESSTHS, Tunisie	(Rapporteur)
M	KAÏS AMMARI	Professeur Université de Monastir, FSM, Tunisie	(Examineur)
M.	JEAN LERBET	Professeur Université d'Evry-Val-d'Essonne/UPSay, France	(Examineur)
M.	AZGAL ABICHOU	Professeur Université de Carthage, EPT, Tunisie	(Directeur de thèse)
M.	LOTFI BEJI	MCF, HDR Université d'Evry-Val-d'Essonne/UPSay, France	(Directeur de thèse)
M.	RHOUMA MLAYEH	Maître assistant Université de Carthage, INSAT, Tunisie	(encadreur)

## Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mes encadreurs, M. Azgal ABICHOU, M. Lotfi BEJI et M. Rhouma MLAYEH. M. ABICHOU, votre oeil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections. Monsieur BEJI, pour l'intérêt et l'enthousiasme toujours incessants dont il fait preuve face aux idées et travaux qui lui sont soumis, pour m'avoir fait confiance, pour ne m'avoir jamais lâché la main, pour m'avoir conseillé sans cesse pendant ces trois (quatre?) ans. Je tiens à témoigner mes sincères gratitude à monsieur Rhouma MLAYEH, qui a orienté mes premiers pas de recherche dans le monde du contrôle, et a pris la charge de mon encadrement en mastère et la transmission du savoir. Merci pour votre temps et votre patience envers mes questions.

Je tiens à remercier le professeur Jean-Michel CORON et le professeur Moez KHENISSI, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Vos questions et commentaires m'ont aidé à améliorer ce manuscrit et m'ont fourni de nouvelles pistes de travail.

Je remercie également le professeur Nadia MAIZI, le professeur Kaïs AMMARI et le professeur Jean LERBET d'avoir pris du temps pour examiner ma thèse.

Je tiens à exprimer mes reconnaissances au professeur Sami LAZAAR (professeur à la Faculté des Sciences de Tunis) pour ses conseils, son soutien constant et également pour ses encouragements.

Je souhaite aussi remercier mes parents mes frères et soeurs, pour leur soutien indéfectible, mes amis, pour tous les moments de détente passés ensemble.

Je remercie de tout coeur L. AYARI, N. ZOGHLAMI, et N. FERCHICHI d'égayer ma vie au quotidien et d'avoir su gérer les moments difficiles de cette thèse avec beaucoup d'amour et de compréhension.

J'exprime ma gratitude à mes amis au sein des deux Laboratoires IBISC & LIM.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Notations et abréviations</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>Partie I : Vibrations de torsion : modèle de dimension infinie (EDP)</b>	<b>17</b>
<b>2 Principe et modélisation d'un système de forage rotary</b>	<b>19</b>
2.1 Système de forage rotary . . . . .	20
2.1.1 Principe de forage rotary . . . . .	20
2.1.2 Extraction des hydrocarbures . . . . .	21
2.2 Phénomène "stick-slip" en forage . . . . .	23
2.2.1 Exemple 1 : la langouste . . . . .	24
2.2.2 Exemple 2 : séismes tectoniques . . . . .	25
2.3 Paramètres de forage . . . . .	25
2.3.1 Facteurs mécaniques . . . . .	26
2.3.2 Facteurs hydrauliques . . . . .	27
2.3.3 Caractéristiques d'un outil de forage . . . . .	28
2.4 Vibrations lors d'un forage . . . . .	29
2.4.1 Vibration type latérale . . . . .	29
2.4.2 Vibration type axiale . . . . .	30
2.4.3 Vibration type torsion . . . . .	30
2.4.4 EDP hyperbolique retenue pour modéliser la torsion . . . . .	30
2.5 Conclusion . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Contribution à la suppression du phénomène dit "stick-slip"</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	37
3.3	Première approche : système $2 \times 2$ d'EDP du premier ordre . . . . .	43
3.3.1	Formulation du problème . . . . .	43
3.3.2	Construction d'un système cible . . . . .	45
3.3.3	Transformation backstepping et équations des noyaux . . . . .	46
3.3.4	Transformation backstepping inverse . . . . .	47
3.3.5	Stabilité du système original et identification d'une commande stabilisante . . . . .	49
3.4	Deuxième approche : modèle d'EDP du second ordre . . . . .	50
3.4.1	Transformation backstepping et système cible . . . . .	51
3.4.2	Étude de la stabilité et construction de la loi de contrôle . . . . .	57
3.5	Résultat de simulation . . . . .	59
3.6	Conclusion . . . . .	62
 <b>Partie II : Modèle couplé décrivant les vibrations de torsion et la dynamique de la boue (EDP-EDO)</b>		<b>63</b>
<b>4</b>	<b>Dynamique de la boue et avance du train de tiges : modèle fini (EDO)</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Stabilisation de la pression aux différents niveaux d'un puits . . . . .	66
4.2.1	Modèle de la boue et avance du train de tiges . . . . .	67
4.2.2	Cas où le débit $q_2 \triangleq q_2(t)$ . . . . .	69
4.2.3	Cas où le débit $q_2 \triangleq q_2(t, \Omega)$ . . . . .	75
4.3	Simulation . . . . .	78
4.4	Conclusion . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Suppression de vibration en présence d'une injection fluidique : couplage EDP-EDO</b>	<b>83</b>
5.1	Introduction . . . . .	83
5.2	Couplage du système de torsion avec le modèle hydraulique . . . . .	84
5.2.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	89
5.3	Stabilisation du système couplé . . . . .	93

5.3.1	Cas où $\lambda = 0$ : système à retard du type neutre couplé . . . . .	94
5.3.2	Techniques classiques résolvant les équations des ondes à coefficients constants non amortis . . . . .	94
5.3.3	Élaboration d'une commande stabilisante . . . . .	96
5.3.4	Cas où $\lambda \neq 0$ : couplage EDP-EDO . . . . .	101
5.4	Simulation : cas où $\lambda = 0$ . . . . .	102
5.5	Conclusion . . . . .	105
<b>Partie III : Vibrations de torsion : estimateur de dimension infinie</b>		<b>107</b>
<b>6</b>	<b>Synthèse d'observateur pour un système de forage rotary</b>	<b>109</b>
6.1	Introduction . . . . .	109
6.2	État non mesurable : conception d'une commande basée observateur . . .	110
6.3	Gain d'injection de sortie . . . . .	117
6.3.1	Système cible . . . . .	118
6.3.2	Technique du backstepping et loi de contrôle . . . . .	119
6.4	Simulation . . . . .	122
6.5	Conclusion . . . . .	124
<b>Conclusion générale</b>		<b>125</b>
<b>Annexe : Outil mathématiques et théorie de Lyapunov</b>		<b>129</b>
1	Espaces fonctionnel . . . . .	129
1.1	Espace $L^p(\Omega)$ . . . . .	129
1.2	Espace de Sobolev . . . . .	130
2	Théorie des opérateurs . . . . .	131
2.1	Opérateur dissipatif . . . . .	131
2.2	Semi-groupes de contractions . . . . .	132
3	Théorie de Lyapunov et stabilité . . . . .	133
3.1	Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	135
3.2	Théorèmes de stabilité . . . . .	135
3.3	Existence et unicité du système de noyaux . . . . .	137
<b>Bibliographie</b>		<b>139</b>





# Table des figures

2.1	Forage pétrolier en mer . . . . .	20
2.2	Forage à la terre manuel . . . . .	21
2.3	Différentes phases pour l'extraction des hydrocarbures . . . . .	22
2.4	Plateforme de forage [1] . . . . .	23
2.5	Le homard épineux . . . . .	24
2.6	Stick-slip peut causer de grands dégâts lors de la génération de tremble- ments de terre . . . . .	25
2.7	Schéma d'une structure de forage rotary [20]. . . . .	26
2.8	Trépan tricône et monobloc . . . . .	29
3.1	Modèle de forage rotary . . . . .	37
3.2	Évolution en fonction du temps de l'état $y_1(t, x)$ . . . . .	60
3.3	Évolution en fonction du temps de l'état $y_2(t, x)$ . . . . .	61
3.4	Évolution temporelle de la loi de contrôle $\Omega(t)$ . . . . .	61
3.5	Stabilisation de la vitesse angulaire en termes de $u_t(t, 0)$ et $w_t(t, 0)$ . . . . .	61
3.6	Évolution de la variable de torsion $u(t, x)$ le long du système de tige de forage. . . . .	62
4.1	Schéma d'un système MPD . . . . .	67
4.2	Évolution temporelle des débits . . . . .	79
4.3	Présentation du comportement de deux vitesses . . . . .	80

---

4.4	Évolution temporelle de la longueur du puits $y(t)$ et de la pression au fond du trou $P_3(t)$ . . . . .	81
5.1	Circulation du fluide . . . . .	88
5.2	Comportement de déplacement angulaire au fond et de débit au niveau de l'outil $q_{outil}(t)$ . . . . .	103
5.3	Évolution en fonction du temps de $\tau_4(t - 1)$ et $z(t)$ . . . . .	104
5.4	Stabilisation des pressions . . . . .	105
6.1	Stabilisation de l'observateur à l'extrémité inférieure . . . . .	123
6.2	Évolution en fonction du temps de l'état $u_t(t, 0)$ . . . . .	123



## Notations et abréviations

EDO	Équation différentielle ordinaire
EDP	Équation aux dérivées partielles
$\mathbb{R}$	Corps des réels.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ .
$\ \cdot\ _n$	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ .
$C^0(E, F)$	Ensemble des fonctions continues de $E$ dans $F$ .
$C^k(E, F)$	Ensemble des fonctions de classe $k$ de $E$ dans $F$ .
$X$ et $Y$	Deux espaces de Banach.
$\ \cdot\ _X, \ \cdot\ _Y$	Normes des espaces $X$ et $Y$ .
$[0, T]$	Intervalle du temps $T > 0$ .
$L^p(\Omega)$	Ensemble des fonctions de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f$ est mesurable et $\int_{\Omega}  f(x) ^p dx < +\infty$ .
$L^p(0, T; X)$	Espace des fonctions $f$ fortement mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans $X$ .
$L^2$	Désigne $L^2([0, 1])$
$\partial_t$	Désigne $\frac{\partial}{\partial t}$ .
$\partial_v$	Désigne $\frac{\partial}{\partial v}$ .
$\partial_v^2$	Désigne $\frac{\partial^2}{\partial v^2}$ .
$\partial_v \partial_x$	Désigne $\frac{\partial^2}{\partial v \partial x}$ .
$\Re$	Partie réelle.
$\Im$	Partie imaginaire.

---

$L$ (m)	Longueur de train de tiges
$I$ (kg.m)	Inertie par unité de longueur
$I_b$ (kg.m <sup>2</sup> )	Inertie de l'outil
$J$ (m <sup>4</sup> )	Moment d'inertie géométrique
$G$ (N.m <sup>-2</sup> )	Module de cisaillement
$c_a$ (Nm.s.rad <sup>-1</sup> )	Coefficient de couple de glissement
$\rho_1$ (kg.m <sup>-3</sup> )	Densité de la boue de forage
$\rho_3$ (kg.m <sup>-3</sup> )	Densité autour de l'espace annulaire
$c_a$ (N.m.s.rad)	Coefficient de couple de glissement
$M$ (kg.m <sup>-4</sup> )	Densité intégrée par section
$\beta$ (bar)	Module de compressibilité de la boue
$V_0$ ( m <sup>3</sup> )	Volume initial dans la couronne
$g$ (ms <sup>-2</sup> )	Direction de la gravité
$S$ (m <sup>2</sup> )	Surface annulaire
$d$	Coefficient d'amortissement autour de l'espace annulaire
$\Omega(t)$	Loi de contrôle
$U(t)$	Loi de contrôle
$c_b$	Coefficient d'amortissement visqueux au niveau de l'outil



# Chapitre 1

## Introduction générale

### Introduction

L'étude de la stabilisation et de la stabilité des systèmes a fait l'objet au cours des derniers siècles d'un très large développement dans la qualité des résultats ainsi que leurs applications [77, 31, 9, 71, 78]. Plusieurs de ces résultats concernent les systèmes à paramètres localisés : systèmes décrits mathématiquement par des équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires ou non linéaires. En réalité, un grand nombre de systèmes sont tels que les variables caractéristiques sont des fonctions de la variable d'espace : ce sont les systèmes à paramètres répartis ou distribués. Sur le plan mathématique, ce type de systèmes est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP) ou intégrales ou intégrodifférentielles. L'étude même de l'existence et de l'unicité des solutions de ces systèmes pose de nombreux problèmes. Par ailleurs, l'étude de la stabilité des systèmes est basée sur leur comportement asymptotique au voisinage de l'infini. D'autre part, la stabilisation est une notion qui consiste à assurer, en boucle fermée, des objectifs de stabilité, de régulation, ... etc.

Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont étudié la stabilité et la stabilisation de systèmes linéaires et non linéaires. En ce qui concerne les systèmes linéaires, de nombreuses approches performantes permettent de construire un tel contrôle. En effet, la stabilité au sens de Lyapunov est bien développée pour les systèmes linéaires. Par contre, la stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires reste encore largement inconnue dans

l'industrie, bien que des méthodes de linéarisation permettent d'obtenir dans certains cas de bons résultats. Dans le domaine des systèmes non linéaires, les outils d'analyse de la stabilité sont relativement peu nombreux. Le plus fameux d'entre eux est la fonction de Lyapunov introduite par le mathématicien russe Alexander Lyapunov au dix-huitième siècle. Autour de cette technique, s'est développée une théorie qui porte aujourd'hui le nom de son illustre fondateur "Théorie de Lyapunov". C'est grâce à ces fonctions de Lyapunov que nous allons mener l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires. Historiquement, les problèmes associés à des systèmes contrôlés n'étaient abordés que sous un aspect asymptotique, c'est-à-dire au bout d'un temps suffisamment important. Nous pouvons également étudier le cas de la convergence exponentielle garantissant un "taux de convergence". Cependant, les conditions d'obtention de la convergence exponentielle sont, en général, difficiles à obtenir pour des systèmes non linéaires. Au vue d'une application, il est important de pouvoir préciser des performances de convergence, c'est à-dire de faire en sorte que le processus physique considéré rejoigne en un temps spécifié une consigne ou une trajectoire souhaitée.

Le présent manuscrit a pour objectif d'étudier le système de forage **rotary**. En effet, dans le cas du forage pétrolier, la tige du forage est soumise à une forte torsion (représentée par une EDP). Par conséquent, des vibrations type "stick-slip" peuvent être ressenties sur la tige et sur le porteur de la tête. Celles-ci engendrent, si elles ne sont pas contrôlées, la perte de la tête et la détérioration de l'ensemble du système. Cette thèse aborde les défis de contrôle au sein du forage pour l'industrie. Le forage comporte certains risques et erreurs qui peuvent avoir des conséquences désastreuses pour les personnes et sur le plan économique. L'automatisation des systèmes de forage permet de percer des trous difficiles (puits) et d'améliorer l'efficacité du forage et de sécurité globale. Les systèmes de forage ont traditionnellement été abordés manuellement. Néanmoins, le potentiel de gain économique incite à l'introduction du contrôle automatique fournissant une amélioration des performances et une réduction du temps de forage. Un exemple de forage automatisé est le contrôle automatique de la pression au fond du trou. Gérer la pression via une glissière est une méthode relative pour le forage nécessitant une régularisation de pression précise.



---

## Contribution de la thèse

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution dans les domaines suivants : stabilisation des équations aux dérivées partielles (EDP), stabilisation des équations différentielles ordinaires (EDO), connexion entre les EDO et les EDP, et enfin stabilisation d'observateur du système EDP. Nous nous intéressons particulièrement au système de forage **rotary** comme application et à l'interconnexion entre ce système et le système de fluide injecté. La dynamique du premier système est régie par une équation aux dérivées partielles. Le deuxième système est décrit par une équation différentielle ordinaire du premier ordre fortement non linéaire. Le travail réalisé a pour but d'étudier le problème généré par la présence des frottements secs connus et que l'on appelle plus fréquemment le phénomène de "stick-slip" ou encore la "collé-glissé". Pour cela, une modélisation, puis des propositions de lois de contrôle atténuant cet effet sont données. La contribution de la thèse comporte alors trois parties importantes :

- i) *Partie I* : Vibrations de torsion : modèle de dimension infinie (EDP) : stabiliser le phénomène dit 'stick-slip' en présence d'un phénomène largement négligé lié à la dynamique du lubrifiant. Le lubrifiant peut entraîner le bouchage au fond du trou par conséquent à l'accroissement des vibrations.
- ii) *Partie II* : Modèle couplé décrivant les vibrations de torsion et la dynamique de la boue : élaborer une commande qui couple le modèle de vibration de torsion et celui du déplacement des trains de tiges.
- iii) *Partie III* : Vibrations de torsion : estimateur de dimension infinie d'observation : construire une loi de contrôle pour l'observateur du système de forage rotary avec une seule mesure aux limites dans le haut de la colonne pour estimer les paramètres de l'outil de forage qui ne sont pas accessibles pour être mesurés.

## Organisation de la thèse

Cette thèse est subdivisée en trois parties. Outre la première partie, le présent chapitre d'introduction générale, les autres chapitres sont organisés de la manière suivante : Le chapitre 2 présente, d'un point de vue général, les différentes caractéristiques du système de forage **rotary**. Nous présentons tous les principes fondamentaux sur lesquels

reposent la synthèse de forage **rotary**, la modélisation et les paramètres du système de forage, la réduction des vibrations, les différents types de vibrations existantes et précisement les vibrations de torsions étant décrites.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilisation d'équations aux dérivées partielles de type ondes avec terme d'amortissement. La synthèse de contrôle permettant d'étudier la stabilité du système de forage rotary par deux méthodes différentes, dont une construite à l'aide de la transformation backstepping et la théorie de Lyapunov.

Le chapitre 4 présente la modélisation du système de forage, à savoir, la partie hydraulique et la partie mécanique et l'étude de la stabilité du système obtenu. Il s'agit de trouver des lois de contrôle qui résolvent le problème de stabilisation posé. D'une part, si la vitesse de rotation est constante, le modèle obtenu est un système d'équations différentielles non linéaires de dimension cinq. D'autre part, si la vitesse de rotation n'est pas constante, le modèle obtenu est un système d'équations différentielles non linéaires de dimension six. En plus du résultat théorique, nous présentons à la fin de ce chapitre une illustration numérique, de l'un de ces deux modèles.

Nous traitons, dans le chapitre 5, une connexion entre le système de forage rotary et le système du fluide. Nous obtenons un système couplé sous la forme Équation aux Dérivées Partielles- Équation Différentielles Ordinaires (EDP-EDO). L'idée principale dans ce chapitre est d'étudier la stabilité. Également nous avons transformé le système couplé à un système neutre avec retard. Nous achevons ce chapitre par le résultat de simulation pour le système de type neutre.

Dans le chapitre 6, nous présentons un modèle d'observateur adaptatif pour une équation aux dérivées partielles de second ordre avec le terme d'amortissement généralement négligé. La conception repose sur la construction d'une fonction de Lyapunov et à l'aide de la technique du backstepping, nous développons un contrôle basé observateur pour cette EDP. Nous montrons la stabilité exponentielle des vibrations du puits partiellement équipé du système de forage. Les résultats de la simulation confirment l'efficacité de contrôle basé observateur de l'EDP proposé.

Une conclusion, les perspectives et quelques annexes contenant des compléments de définitions, et une bibliographie complètent ce document.

---

## Publications associées aux résultats

Les contributions qui vont être détaillées dans ce mémoire ont donné lieu aux publications suivantes.

1. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHO, "*Stability Analysis of the coupled torsional-mud in oilwell drillstring system*," *International Journal of Control*, VOLUME 90, JANUARY, 2017.
2. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHO, "*Stabilization of torsional vibration in oilwell drillstring system*," *EUROPEAN JOURNAL OF CONTROL*, VOLUME 35, MARCH, 2017.
3. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHO, "*Exponential stabilization of torsional vibrations in rotary drilling systems*," in *Proc. of the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, TOULOUSE, FRANCE, 9-14 JULY 2017.
4. R. Mlayeh, **SAMIR TOUMI**, AND L. BEJI, "*Backstepping boundary observer based-control for hyperbolic PDE in rotary drilling system*," ACCEPTED TO *Applied Mathematics and Computation*, NOVEMBER, 2017.
5. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHO, "*Boundary Observer Design for Hyperbolic PDE in rotary drilling systems*," in *Proc. of the 55nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, ARIA RESORT & CASINO, LAS VEGAS, USA, DECEMBER 12-14, 2016.
6. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHO, "*Stabilization of stick-slip oscillations Integrating fluid injection in oilwell drillstring system*," in *Proc. of the 15th European Control Conference (ECC)*, ALBORG, DK JUNE 29, JULY 1, 2016.
7. **SAMIR TOUMI**, R. MLAYEH, L. BEJI, AND A. ABICHO, "*Stability analysis of Oilwell Drilling Torsional Vibrations*," in *Proc. of the IEEE 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, ATHENS, GREECE, JUNE 21-24, 2016.

8. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHOU, "*Torsional Vibration Suppression with Boundary Impulsive Conditions*", *International Conference on Advances in Applied Mathematics*, MONASTIR, TUNISIA, DECEMBER, 19-22, 2016.
9. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHOU, "*Stability analysis of Coupled Stick-slip Oscillations and hydraulic dynamics in Oilwell Drillstrings*", *International Conference on Advances in Applied Mathematics*, HAMMAMET, TUNISIA, DECEMBER, 21-24, 2015.
10. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHOU, "*Torsional vibration suppression in oil well drilling system*", *International Conference on Advances in Applied Mathematics*, HAMMAMET, TUNISIA, DECEMBER, 22-25, 2014.
11. **SAMIR TOUMI**, L. BEJI, R. MLAYEH, AND A. ABICHOU, "*Stabilizing control design for a transformed  $2 \times 2$  first-order PDEs in rotary drilling systems*", *JDEPT'15*, TUNIS, APRIL 22-23, 2015.

Partie I : Vibrations de torsion :  
modèle de dimension infinie (EDP)



## Chapitre 2

# Principe et modélisation d'un système de forage rotary

Au cours des cinquante dernières années, des recherches approfondies ont été menées sur le sujet de vibrations de torsion pour les systèmes de forage pétrolier. Ces vibrations de torsion entraînent une détérioration des performances de la tige de forage. Elles peuvent conduire à une défaillance prématurée des outils, des moteurs et des autres composants coûteux utilisés dans les opérations de forage.

Une des principales raisons des vibrations de torsion est le phénomène de "stick-slip". Le phénomène est caractérisé par des phases bâton "stick", où la rotation vient à un arrêt complet, et des phases de glissement "slip" où la vitesse angulaire de l'outil augmente jusqu'à trois fois sa valeur nominale. Ce mouvement indésirable de l'outil entraînera non seulement une usure indésirable, mais il réduit aussi le taux de pénétration (ROP), ce qui constitue une considération financière importante pour les opérations de forage.



FIGURE 2.1 – Forage pétrolier en mer

## 2.1 Système de forage rotary

Les puits de production de gaz et de pétrole sont réalisés à l'aide d'un système de forage rotary. La rotation, générée depuis la surface par la table de rotation, est transmise jusqu'au fond du puits (pétrole ou gaz) par l'intermédiaire des trains de tiges. Les copeaux générés lors de la destruction de la roche par l'outil sont évacués à la surface par la circulation d'un fluide de forage (boue ou air comprimé).

Les différents types de vibrations des garnitures de forage jouent un rôle important dans les dysfonctionnements des opérations de forage car elles conduisent à la rupture prématurée du train de tige, à l'endommagement de certains de leurs composants (par exemple le trépan) et à la baisse globale des performances de forage. Les vibrations des trains de tiges sont décrites en termes de déplacement entre l'outil (le trépan) et la table de rotation. Il existe trois types de vibrations : vibrations de torsion, vibrations latérales ou de flexion et vibrations axiales.

### 2.1.1 Principe de forage rotary

Afin d'accéder directement à la poche contenant les hydrocarbures tels que le pétrole ou le gaz naturel, les foreurs vont devoir réaliser un trou de forage. Il y a plus de 4000 ans, les Chinois foraient déjà les premiers puits à l'aide d'une tige de bambou : la pointe



cognait la terre et perçait le sol. Cette technique consiste à soulever un outil très lourd et le laisser retomber sur la roche à perforer en chute libre. Elle est utilisée pendant des siècles avec quelques modifications sur les outils (Fig. 2.2).



FIGURE 2.2 – Forage à la terre manuel

Actuellement, la méthode de forage utilisée est celle du Rotary, bien plus rapide et efficace. Cette méthode consiste tout d’abord à mettre en place un appareil de forage. Celui-ci est très cher, coûtant trois millions d’euros en moyenne.

Les procédés de forage rotary sont des mécanismes qui jouent un rôle important dans l’extraction de pétrole ou du gaz. La technique de forage rotary consiste à mettre en rotation un outil (appelé trépan) sur lequel on applique une force orientée dans le sens d’avancement souhaité. Une pompe hydraulique assure la circulation du fluide qui transite par le train de tige, et remonte par l’espace annulaire qui permet l’évacuation des déblais vers la surface.

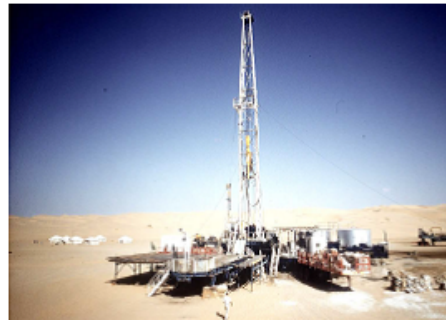
### **2.1.2 Extraction des hydrocarbures**

L’extraction pétrolière ou gazière, que ce soit en mer ou sur terre, nécessite un processus de forage pour extraire la matière et parvenir aux réservoirs d’hydrocarbures. La production pétrolière dans un bassin d’hydrocarbures impose de connecter les réservoirs à la surface par des canaux reliés à des systèmes de pompage comme le montre la figure

(Fig.2.3).



Installation marine (offshore)



Installation sur terre (onshore)



Transfert des hydrocarbures



Système de pompage

FIGURE 2.3 – Différentes phases pour l'extraction des hydrocarbures

L'acheminement de l'exploration des hydrocarbures passe par le fonctionnement d'un processus de forage dont le plus connu dans l'industrie pétrolière ou gazière, s'intitule : "système de forage rotary".

Le système rotary comprend une tête d'injection, une tige d'entraînement qui passe à travers une table de rotation et qui est reliée à un train de tige (ou une colonne de forage) et en bout de colonne un outil de forage (trépan) creusant le sol. La tige d'entraînement, et de fait la colonne de forage, et l'outil de forage, tous subissent une rotation via la table de rotation et une section angulaire de la colonne qui se trouve au niveau de la table, ou bien si la table n'est pas le moyen de rotation de la machine de forage, via la tête d'injection qui sert également à l'entraînement de la colonne (Fig.2.4).

La progression de forage requiert la circulation continue et en boucle fermée d'un fluide dont le but consiste à évacuer les déblais vers la surface. La nécessité de rechercher des gisements d'hydrocarbures dans des milieux de plus en plus profonds conduit à forer des

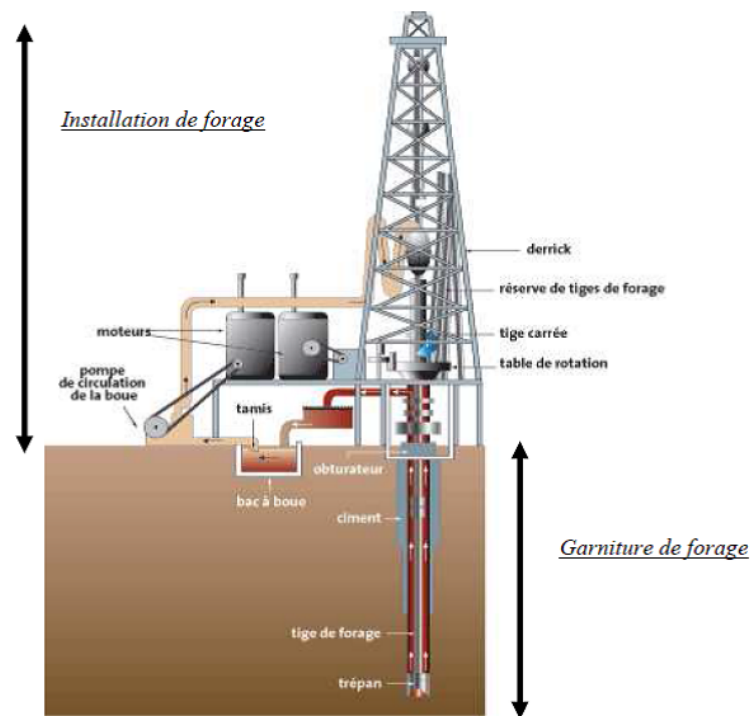


FIGURE 2.4 – Plateforme de forage [1]

puits qui s'étalent sur plus de cinq kilomètres dans le sol. Cela rend graduel le forage durant lequel plusieurs phases, séparées par la remontée à la surface de la garniture, sont nécessaires. Ces étapes ont pour but de favoriser la maintenance du processus et d'effectuer le tubage et la cimentation de la partie forée. Lorsque les poches contenant les hydrocarbures sont atteintes, les gazoducs sont installés afin d'extraire le pétrole ou le gaz vers la surface.

## 2.2 Phénomène "stick-slip" en forage

Stick-slip est un phénomène qui apparaît lorsque deux surfaces glissent en contact l'une avec l'autre, et les surfaces alternent entre collage et glissement. Cela entraînera un changement de la force de frottement, puisque le frottement statique est généralement plus grand que le cinétique. À titre d'exemple, il peut être considéré comme un objet situé sur une surface plane. Si la force appliquée à l'objet est suffisamment grande du fait du frottement statique, la réduction du frottement cinétique peut provoquer un saut brusque

de la vitesse depuis l'arrêt. S'il existe une certaine élasticité entre la source de la force et le point où le frottement agit, le système peut avoir une fréquence spécifique et alterner entre les phénomènes de collage et de glissement.

Le phénomène du stick-slip est présent dans de nombreux différents contextes de notre vie quotidienne ; certains d'entre eux seront présentés ici.

### 2.2.1 Exemple 1 : la langouste

Le phénomène du stick-slip est également présent dans la nature, et la langouste (*Panulirus Argus*) peut-être un tel exemple [64]. Le homard profite du phénomène de stick-slip quand il produit un son fort et un abrasif pour effrayer les prédateurs. En frottant un plectre (une extension basale sur l'antenne du tissu élastique souple) sur des bardeaux microscopiques sur un fichier (situé sous ses yeux), le homard produit des sons à haute fréquence à l'aide du mécanisme de stick-slip. L'énergie est stockée dans le tissu souple et élastique du plectre pendant la phase bâton "stick", puis libérée pendant la phase de glissement, une impulsion sonore est ensuite générée chaque fois que les deux surfaces glissent. Le homard peut efficacement effrayer les prédateurs en utilisant le phénomène du stick-slip pendant le cycle de la mue quand leur exo-squelette est doux.

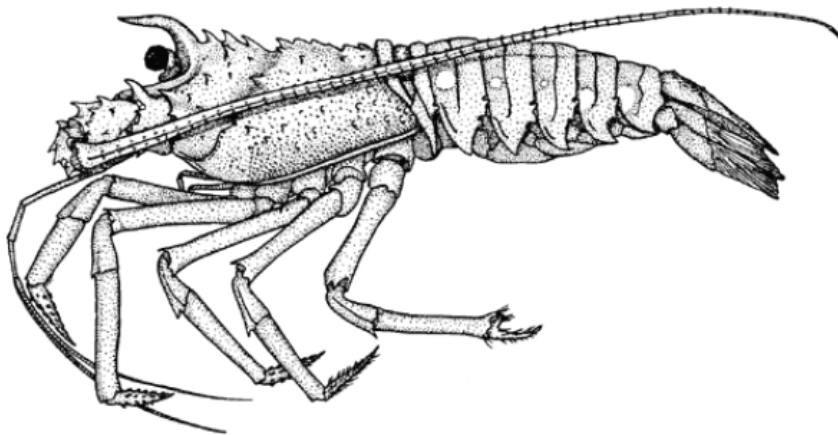


FIGURE 2.5 – Le homard épineux

### 2.2.2 Exemple 2 : séismes tectoniques

Une autre situation dans la nature où les vibrations de stick-slip peuvent être remarquables quand il existe des tremblements de terre. La dure enveloppe externe de la terre est actuellement divisée en huit plaques majeures, et de nombreuses plaques mineures. Un tremblement de terre tectonique est causé par une libération soudaine d'énergie dans la croûte terrestre qui crée des ondes sismiques. L'énergie est libérée à la suite d'un glissement soudain lors d'un contact entre deux plaques. Comme les plaques ont des aspérités le long de leurs limites, elles auront tendance à coller où se bloquer l'un à l'autre comme ils se déplacent. Le mouvement relatif continu entre les plaques entraînera une contrainte croissante et une force accumulée lorsque les plaques se déforment élastiquement. Lorsque la force est suffisante pour que les plaques se détachent, l'énergie stockée est libérée sous forme d'ondes sismiques qui font vibrer le sol. Les plaques finiront par se coller et se bloquer à nouveau dans un comportement stick-slip et encore plus de tremblements de terre se produiront au fil du temps.



FIGURE 2.6 – Stick-slip peut causer de grands dégâts lors de la génération de tremblements de terre

## 2.3 Paramètres de forage

Les paramètres de forage sont les différents facteurs mécaniques et hydrauliques (les grandeurs physiques) agissant sur la vitesse de progression «Rate of Penetration» (Le ROP correspond à la profondeur forée par heure (mètres /heures). ). L'optimisation de la

vitesse de progression est un aspect très important dans l'analyse du processus de forage car c'est directement lié au temps passé sur une installation sur terre ou marine.

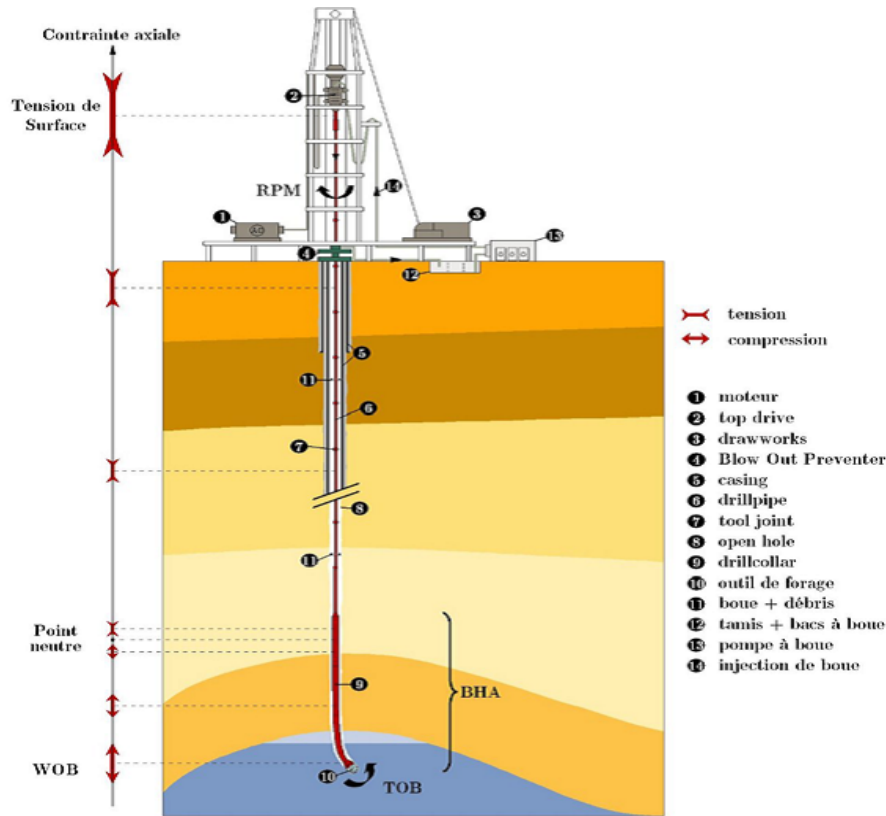


FIGURE 2.7 – Schéma d'une structure de forage rotary [20].

### 2.3.1 Facteurs mécaniques

Les principaux paramètres mécaniques sont : la vitesse de rotation, le poids sur l'outil et le couple exercé sur l'outil.

**La vitesse de rotation.** Le choix de la vitesse de rotation dépend de celle du poids sur l'outil (WOB). En surface, elle peut être contrôlée mais elle peut être différente de la vitesse de rotation de l'outil (trépan).

Les vitesses de rotation usuelles s'étendent entre 60 et 250 (tours/min).

**Le poids sur l'outil WOB (Weight on Bit).** Le WOB désigne la force appliquée par la garniture de forage sur l'outil suivant son axe de rotation. Cette force dépend du poids de la garniture de forage, et de la tension du câble de soutien de la garniture.

Les grandeurs usuelles de WOB s'étendent entre  $10kN$  et  $10^3kN$ .

**Le couple exercé sur l'outil  $T_{TOB}$  (Torque On Bit).** Le couple exercé sur l'outil correspond au couple transmis par la garniture au trépan suivant la révolution de son axe de rotation. Compte tenu des frottements des trains de tiges contre la paroi du puits de gaz ou du pétrole, ce couple est nettement inférieur à celui mesuré en surface. Le couple  $T_{TOB}$  représente les effets combinés du couple réactif et des forces des frottement non linéaires sur la longueur du BHA (Bottom Hole Assembly).

La valeur du couple en surface varie typiquement entre 200 et 3000 Kg.m.

### 2.3.2 Facteurs hydrauliques

L'opération de forage se réalise en présence d'un système de la lubrification se trouvant à la surface et gérer par un système hydraulique.

**Fluide de forage.** Le type de boue de forage est choisi en fonction des performances recherchées et désigne les propriétés physico-chimiques du fluide de forage. Trois types de boues sont souvent employés : la boue à base d'eau, (Water Based Mud), la boue à base d'huile (Oil Based Mud) et la boue synthétique (Synthetic Based Mud). Une boue synthétique est constituée d'un mélange d'additifs chimiques et d'eau.

**Pression et débit hydraulique.** Le problème d'évacuation des déblais ne dépend pas uniquement des propriétés du fluide et du débit qui lui sont imposés, mais la surface de la colonne d'évacuation et les pertes sont d'autres facteurs à prendre en compte. Le fluide (boues ayant une densité et une composition affectée au forage) dans un forage est un élément clé, car il évacue les déblais qui s'accumulent au fond du trou, il stabilise les parois du trou lorsque ce dernier est encore sans cuvelage (protection des constructions situées en sous sol contre les pressions hydrostatiques horizontales) et enfin il peut aussi lubrifier et refroidir l'outil en activité [22].

La perte du fluide mène habituellement à une diminution de la pression, ce qui peut poser des problèmes majeurs au foreur. Nous nous intéressons au fluide en "circulation directe", celui qui descend par les train de tiges. Le fluide en "circulation inverse" est celui qui monte par l'espace annulaire.

La pression et le débit hydraulique représentent les variables physiques qui doivent favo-

riser une bonne évacuation des déblais et éviter des problèmes d'encrassement du trépan ou du puits.

**Densité de la boue  $\rho$ .** L'obtention des informations relatives au puits et particulièrement le contrôle de la pression dans le puits s'effectue à travers la densité de la boue. La boue de forage ramène à la surface les déblais, mais aussi du gaz contenu dans les roches. Cela fournit des indications sur la nature des fluides se situant dans le réservoir et représente un élément important dans le pilotage de la garniture.

### 2.3.3 Caractéristiques d'un outil de forage

L'élément destructeur de la roche (outil de forage) est très important dans la conduite d'un forage. Le choix de l'outil de forage est dicté par les caractéristiques de la formation rocheuse (dureté, nature) et par les conditions économiques de puits.

Une variété des outils (trépans) présentant des géométries spécifiques existent. Les trépans sont conçus pour forer une certaine gamme de roches et sont choisis en fonction des puits à réaliser. Ils se catégorisent en deux grandes familles : les outils tricônes et les outils monobloc de type PDC (Polycristallin Diamond Compact). Les outils tricônes sont principalement composés d'acier ou de carbure de tungstène. Tandis que les monoblocs de type PDC sont composés de diamants, ou de diamants synthétiques. La grande différence entre ces deux familles de trépans réside dans leurs façons d'arracher la roche.

**Outils tricônes.** Les outils tricônes disposent de trois cônes rotatifs qui embarquent des plaquettes de coupe conçues en fonction de la roche à forer. Ils peuvent être en carbure de tungstène, en acier ou en diamant. L'arrachage de la roche s'effectue lorsque les cônes effectuent des rotations autour de l'outil. Le principal mode de destruction de la roche, par les taillant fixés sur les molettes, est le poinçonnement. Il se déroule par la progression verticale du taillant dans la roche sous l'effet d'un effort normal créant un champ de contraintes au voisinage du taillant. Lorsque les limites à la rupture sont atteintes un déblai se produit. Ce type d'outil est particulièrement adapté lorsque les roches à forer présentent une forte dureté.





FIGURE 2.8 – Trépan tricône et monobloc

**Outils monobloc.** La rotation du train de tiges entraîne celle de l'outil (trépan). Ces outils se composent de diamant naturel ou synthétique brasé sur du carbure de tungstène. Ils sont connus sous le nom PDC et détruisent la roche par cisaillement. Le cisaillement caractérise l'opération durant laquelle les taillant pénètrent la roche dans un mouvement parallèle à la surface de la roche et un déblai est obtenu dès que les limites à la rupture sont atteintes. L'emplacement des pastilles dans ce type d'outil est primordial pour son optimisation et présente une influence considérable sur l'équilibre de l'outil, sur la vitesse de pénétration de la garniture ainsi que l'évacuation des déblais.

## 2.4 Vibrations lors d'un forage

Les vibrations d'un train de tiges peuvent être classées en trois catégories : axiales, latérales et de torsion.

### 2.4.1 Vibration type latérale

Ce sont des vibrations pour lesquelles le mouvement se fait perpendiculairement à l'axe des trains de tiges. Le phénomène de "précession" (whirl) peut se déclencher lorsque l'amplitude de ces vibrations devient considérable. Le "whirl" se produit lorsque les tiges voient leur centre s'écarter de l'axe du puits, et qu'en plus de tourner sur elles mêmes (rotation propre), elles tournent autour du puits (précession).

### 2.4.2 Vibration type axiale

Le mouvement se fait selon l'axe des train de tiges. Ces vibrations peuvent dégénérer dans certaines conditions en "rebond de l'outil" (bit bounce). Il s'agit d'un phénomène de rebonds successifs de l'outil de forage avec séparation périodique à l'interface outil-roche. Le phénomène de bit bounce se manifeste préférentiellement lorsqu'il y a accord entre la vitesse de rotation des trains de tiges et une fréquence propre axiale du train de tiges. Le bit bounce peut engendrer le bouncing de surface, c'est à dire, l'entrée en résonance du système de suspension de la garniture en surface provoquant ainsi un mouvement alternatif en translation de forte amplitude.

### 2.4.3 Vibration type torsion

Les vibrations de torsion se manifestent sous la forme d'un phénomène d'adhérence glissement s'appelle "stick-slip". Le phénomène de stick slip associé aux vibrations de torsion provoque des arrêts cycliques de l'outil sur des périodes pouvant représenter jusqu'à cinquante pour cent du temps de forage. Pendant ces périodes d'arrêt, les tiges, entraînées en rotation depuis la surface, sont mises en torsion grâce à leur élasticité propre. L'outil ne redémarrera que lorsque le couple au fond sera supérieur au couple de frottement statique. La détente des tiges provoque alors une forte accélération favorisée par le fait que le couple de frottement dynamique est inférieur au couple statique. La vitesse de rotation instantanée peut atteindre le triple, voire plus, de la vitesse de surface. Ceci permet une relaxation de la garniture. Le couple au fond passe alors en dessous du couple de frottement dynamique, ce qui arrête à nouveau la rotation de l'outil.

### 2.4.4 EDP hyperbolique retenue pour modéliser la torsion

Les équations différentielles régissant le mouvement pour le forage rotary sont dérivées par l'analyse du bilan des forces. Le train de tige de longueur  $L$  est mis en rotation à partir de la partie supérieure ( $\varsigma = 0$ ) et le trépan est situé au fond (partie inférieure) du trou de forage ( $\varsigma = L$ ). L'angle de torsion du train de tiges à la distance  $\varsigma$  à l'instant  $t$  est noté par  $\vartheta(t, \varsigma)$ . Ainsi, la dynamique de la variable de torsion est décrite par l'équation aux

dérivées partielles hyperbolique à coefficients constants suivante [11] :

$$GJ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varsigma^2}(t, \varsigma) - I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, \varsigma) - d \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, \varsigma) = 0, \quad \varsigma \in (0, L), t \in (0, +\infty)$$

à laquelle est associée des conditions aux limites.

On suppose que toutes les conditions aux limites sont situées sur les extrémités du train de tiges et de ce fait, toutes les conditions se calculent à partir des forces qui s'exercent aux frontières. L'assemblage au fond (BHA) représente la partie inférieure de la structure de garniture de forage. Le BHA à l'extrémité inférieure du train de tiges est habituellement modélisé comme une simple inertie  $I_b$ . D'une part, autour de l'axe du train de tiges le BHA est soumis à un couple noté  $T_{outil}$  dû au train de tiges. D'autre part, le BHA est soumis à un couple  $T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$  qui tient compte du frottement causé par l'interaction de l'outil avec le sol. Nous obtenons alors la condition aux limites inférieure traduisant la dynamique de l'outil en  $\varsigma = L$

$$I_b \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, L) = -T_{outil} - T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$$

Comme  $T_{outil} = GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, L)$ , alors on obtient :

$$I_b \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, L) = -GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, L) - T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$$

Le frottement dans le système de forage rotary constitue un phénomène très important. Différentes expressions mathématiques sont présentées dans la littérature pour modéliser ce phénomène qui peut s'avérer complexe [11, 10]. Par exemple, l'expression du modèle  $T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$  peut prendre la forme suivante :

$$T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L)) = c_b \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L) + R(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$$

avec  $R(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$  représente le couple de frottement qui modélise l'interaction entre l'outil et le sol.

On sait que les frottements entre l'outil et le sol dans un système de forage rotary s'ex-

priment par une relation non linéaire entre le couple exercé par l'outil  $T_{outil}$  du à la table en rotation et la réaction du sol. Alors, il existe une variété de conditions aux limites de surface qui diffèrent suivant la complexité du problème et le degré de rigidité du sol. Comme exemples, on peut présenter les deux cas récemment étudiés :

- Saldivar dans [11], étudie le cas où la vitesse non constante  $\Omega$  de la table tournante et le train de forage ne tournent pas exactement à la même vitesse. Par conséquent, le couple est exprimé comme suit :

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, 0) = c_a \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, 0) - \Omega(t) \right) \quad (2.1)$$

- Fridman dans [17], suppose que la variable de torsion  $\vartheta(t, 0)$  à la surface peut être contrôlée directement, soit

$$\vartheta(t, 0) = U(t)$$

ou  $U(t)$  est la commande.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la condition aux limites donnée par (2.1).

Le modèle d'étude dont la dynamique du train de tiges s'écrit :

$$GJ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varsigma^2}(t, \varsigma) - I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, \varsigma) - d \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, \varsigma) = 0, \quad \varsigma \in (0, L), t \in (0, +\infty)$$

dont les conditions aux limites sont de la forme

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, 0) = c_a \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, 0) - \Omega(t) \right) \quad \varsigma = 0$$

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, L) + I_b \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, L) = -T \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L) \right) \quad \varsigma = L$$

C'est une équation aux dérivées partielles hyperbolique de second ordre linéaire. Les conditions aux limites sont du types dynamiques. Notre étude sert à trouver la bonne vitesse de rotation de la tige pour que le système soit stable à l'équilibre et supprimer les vibrations de torsion. En fait, l'instabilité provoquée par les vibrations de torsion provoque

des imprécisions dimensionnelles des trous et peut endommager le système de forage, par conséquent écrouler le puits.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le système de forage rotary : son principe, les éléments qui le composent ainsi que les différentes types de vibrations pouvant se produire lors de la phase de forage. L'étude des instabilités vibratoires est complexe, en particulier dans le cas du phénomène "stick-slip", qui peut se présenter sous plusieurs formes, se produire dans de nombreux contextes de forage et entrer en interaction avec d'autres modes vibratoires. L'ensemble des travaux présenté dans cette thèse ont pour objet d'étudier ce phénomène et ses interactions. Au cours des chapitres suivants nous nous attacherons à :

- la suppression des vibrations de torsion, avec le développement d'une commande qui annule les vibrations de torsion, et permet par conséquent de stabiliser le système.
- l'étude de l'impact du fluide injecté sur le phénomène des vibrations de torsion : le fluide de forage sert à stabiliser la pression au fond de puits pour leur éviter de s'écrouler, et également lubrifier et refroidir les outils.
- l'analyse de paramètres mesurables et non mesurables (problème d'observateur) : dans le modèle du système de forage rotary, il y a certains paramètres qui ne sont pas mesurables. Donc il est utile de construire un observateur de dimension infinie à l'image de dimension du système.



# Chapitre 3

## Contribution à la suppression du phénomène dit "stick-slip"

### 3.1 Introduction

Pour étudier la stabilité des équations aux dérivées partielles (EDP), il existe deux techniques principales : la première est celle de la solution exacte si cette solution est facile d'être établie, la deuxième, qui est beaucoup plus générale, est celle de la théorie de Lyapunov. Une solution exacte peut être obtenue en utilisant la méthode de séparation de variable ou la technique de la transformée de Laplace. Dans la littérature, l'étude de stabilité exponentielle des systèmes hyperboliques est bien décrite. En effet, en dépit du travail fait par Krstic et Smyshlyaev [40], Coron et d'autres [36, 60, 61, 12, 4, 3, 5, 14, 21, 24, 48], l'étude de stabilité des EDP demeure un champ d'investigation ouvert. Dans [60], Coron et ses collaborateurs se sont intéressés au problème de la stabilité aux frontières et à l'estimation d'états pour un système linéaire d'équations hyperboliques  $2 \times 2$  de premier ordre avec coefficients variables. Dans [35], les auteurs ont utilisé l'évolution explicite des invariants de Riemann le long de la courbe caractéristique pour transformer les équations d'ondes en un système quasi linéaire des équations  $2 \times 2$  et aussi pour les systèmes quasi linéaires  $n \times n$  [76]. Nous pouvons nous référer aussi à [18, 19], dans laquelle, existe une étude bien développée concernant le problème de la stabilisation aux frontières et l'estimation d'état pour  $n + 1$  systèmes de premier ordre d'équations hyperboliques

linéaires avec des coefficients variables ; l'étude est similaire à celle qui se trouve dans [60]. Dans le présent chapitre on se restreindra à l'étude de la stabilité de l'équation hyperbolique décrivant la dynamique de torsion.

Au cours du dernier siècle, de nombreuses recherches sur la modélisation et le contrôle des systèmes de forages ont été réalisées. En 1960, Bailey et Finnie, de Shell Développement Company sont les premiers qui ont développé une étude expérimentale et analytique sur les vibrations axiales et celles des torsions [31]. Depuis lors, de nombreuses approches pour la modélisation et le contrôle ont été proposées. La plupart des techniques de contrôles sont les suivantes : système de direction de réaction du couple, système de rotation à couple doux (DOD). Le procédé de forage des puits de pétrole consiste à la création d'un forage de plus de cinq milles mètres de profondeur dans le sol jusqu'à ce qu'on atteigne l'huile et le gaz. Le train de tiges se constitue de l'ensemble de tiges de forage, masses-tiges, et l'outil taille de pierre visée comme outil de forage tourne autour de son axe vertical, pénétrant à travers la roche. Dans la partie supérieure du train de tiges, la table de rotation fournit le couple nécessaire pour mettre le système en mouvement de rotation. Le train de tige est soumis à trois principaux types des vibrations [10, 37, 54, 50] : vibrations verticales, vibrations axiales et vibrations de torsion qui sont distinguées par le nom "oscillation de stick slip". Une description détaillée de chaque mode de vibration est présentée dans le (chapitre 8, [10]).

Dans [11], Saldivar et d'autres ont proposé une fonction d'énergie pour le modèle distribué permettant de trouver une loi de commande qui assure la dissipation d'énergie pendant le forage. Les auteurs de [13] proposent une loi de commande pour éviter les oscillations de torsions indésirables du train de tiges pertinents dans les forages des puits de pétrole. Dans ce chapitre, nous nous préparons à l'étude de stabilité de l'équation décrivant le système de forage rotary.

Notre chapitre est constitué de cinq parties. Dans la Section 3.2 nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution. La Section 3.3 est une première méthode pour étudier la stabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques  $2 \times 2$  du premier ordre. Comme technique, nous allons utiliser les invariants de Riemann, la transformation backstepping et la théorie de Lyapunov. Le principal résultat de cette section est de



trouver la commande qui prouve la stabilité localement exponentielle du système original. La Section 3.4 comporte une deuxième approche sur l'étude de la stabilité d'un système d'EDP de second ordre. Nous utilisons la technique du backstepping et la théorie de Lyapunov pour déterminer la loi de contrôle. Nous testons l'efficacité des lois de contrôle numériquement dans la Section 3.5. L'étude de l'existence et de l'unicité des noyaux est traitée dans l'appendice.

## 3.2 Existence et unicité de la solution

Considérons le système mécanique suivant :

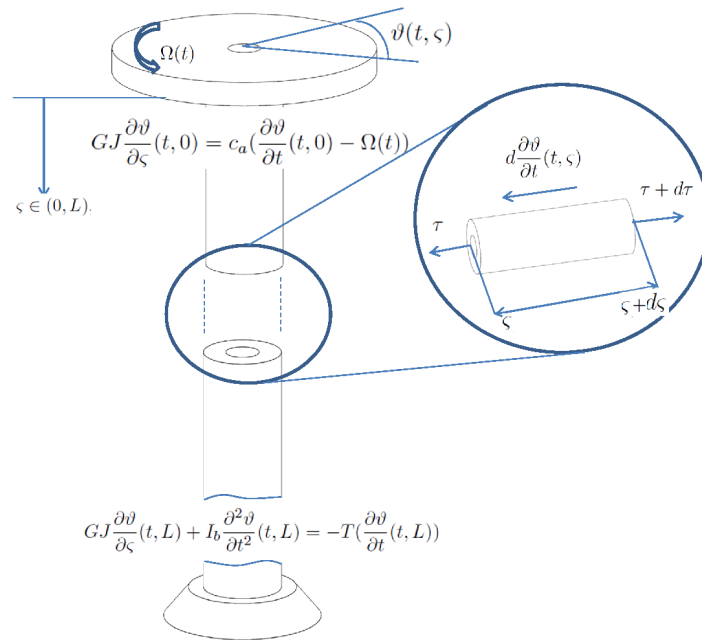


FIGURE 3.1 – Modèle de forage rotary

Ce système est décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$GJ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varsigma^2}(t, \varsigma) - I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, \varsigma) - d \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, \varsigma) = 0, \quad \varsigma \in (0, L), t \in (0, +\infty) \quad (3.1)$$

où les conditions aux limites sont données par :

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta}(t, 0) = c_a \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, 0) - \Omega(t) \right), \quad (3.2)$$

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta}(t, L) + I_b \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, L) = -T \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L) \right), \quad (3.3)$$

avec

- $\vartheta$  : angle de torsion
- $I$  : inertie par unité de longueur
- $G$  : module de cisaillement
- $I_b$  : inertie de la tige de forage
- $J$  : moment géométrique d'inertie
- $d$  : amortissement de la garniture de forage
- $\Omega(t) \in \mathbb{R}$  : loi de contrôle.

Nous utilisons le changement de variable suivant :

$$u(t, x) = \vartheta \left( L \sqrt{\frac{I}{GJ}} t, L(1-x) \right), \quad x \in (0, 1) \quad (3.4)$$

nous obtenons

$$\partial_{tt} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) - \lambda \partial_t u(t, x), \quad x \in (0, 1) \quad (3.5)$$

$$\partial_x u(t, 1) = U(t) \quad (3.6)$$

$$\partial_{tt} u(t, 0) = a \partial_x u(t, 0) + a F(\partial_t u(t, 0)), \quad (3.7)$$

tel que :

$$U(t) = \frac{c_a L}{GJ} \left( \Omega(t) - \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 1) \right), \quad \lambda = dL \sqrt{\frac{1}{IGJ}},$$

$$F(\partial_t u(t, 0)) = -\frac{L}{GJ} T \left( \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0) \right), \quad a = \frac{LI}{I_b}.$$

En raison de la présence d'une relation non linéaire complexe résultant de l'interaction entre l'outil et le sol, l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du système décrivant la dynamique de torsion deviennent plus complexes. Par conséquent, dans ce qui suit, nous traitons cette question en utilisant la théorie de semi-groupe [6].

Soit  $T > 0$ , la solution naturelle du problème de Cauchy est donnée par

$$\partial_{tt}u(t, x) = \partial_{xx}u(t, x) - \lambda\partial_tu(t, x) \quad (3.8)$$

$$\partial_xu(t, 1) = U(t) \quad (3.9)$$

$$\partial_{tt}u(t, 0) = a\partial_xu(t, 0) + aF(\partial_tu(t, 0)) \quad (3.10)$$

$$u(0, x) = \alpha^0(x), \quad u_t(0, x) = \beta^0(x) \quad (3.11)$$

où  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $\alpha^0 \in K$ ,  $\beta^0 \in L^2(0, 1)$ ,  $K := \{u \in H^1(0, 1); u(t, 0) = 0\}$  et  $U(t)$  la loi de contrôle.

L'espace vectoriel  $K$  est muni du produit scalaire suivant

$$\langle \alpha^1, \alpha^2 \rangle_K = a \int_0^1 \alpha_x^1 \alpha_x^2 dx$$

Soit  $Z(t) = (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot), u_t(t, 0))^T$ . Le système (3.8)-(3.11) peut s'écrire de cette façon compacte

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = AZ(t) + H(Z(t)) + BU(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \partial_{xx} & -\lambda & 0 \\ -a\langle \delta'_0(x), \cdot \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(Z(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aF(u_t(t, 0)) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(x-1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } \delta \text{ désigne la fonction de Dirac pour laquelle}$$

$$\langle \delta'_1(x), u(t, x) \rangle = -u_x(t, 1) \text{ et } \langle \delta'_0(x), u(t, x) \rangle = -u_x(t, 0)$$

Tout d'abord, nous considérons la partie linéaire. Soit le Théorème suivant.

**Théorème 3.2.1** *L'opérateur  $A$  génère un  $C_0$  semi-groupe de contractions  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ .*

**Preuve** Soit  $X = K \times L^2([0, 1]) \times \mathbb{R}$

Cet espace vectoriel  $X$  est muni du produit scalaire suivant :

$$\left\langle \begin{pmatrix} u^1(t, \cdot) \\ u_t^1(t, \cdot) \\ u_t^1(t, 0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^2(t, \cdot) \\ u_t^2(t, \cdot) \\ u_t^2(t, 0) \end{pmatrix} \right\rangle_X = a \langle u^1, u^2 \rangle_K + a \langle u_t^1, u_t^2 \rangle_{L^2[0,1]} + \langle u_t^1(t, 0), u_t^2(t, 0) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Notons que  $\| \cdot \|$  est la norme dans  $X$  associé au produit scalaire.

Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  l'opérateur linéaire défini par

$$D(A) = \{Z : u \in H^2(0, 1), u_t \in K, u_t(t, 0) \in \mathbb{R}, u_x(t, 1) = 0\}$$

Nous avons

$$A \begin{pmatrix} u(t, x) \\ u_t(t, x) \\ u_t(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t(t, x) \\ \partial_{xx}u(t, x) - \lambda u_t(t, x) \\ au_x(t, 0) \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} u(t, x) \\ u_t(t, x) \\ u_t(t, 0) \end{pmatrix} \in D(A)$$

De plus

$$\langle AZ, Z \rangle_X = -a\lambda \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0, \quad \forall Z \in D(A)$$

Il reste à montrer que pour tout  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in X$ , il existe  $y \in D(A)$  tel que  $y - Ay = Z$ .

A l'aide de l'approche variationnelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution.

Soit  $Z \in X$ , nous avons

$$y - Ay = Z \iff \begin{cases} y - y_t = z_1 \\ (1 - \lambda)y - y_{xx} = z_2 - \lambda z_1 \\ y(t, 0) - ay_x(t, 0) = z_3 \end{cases}$$

Nous multiplions l'équation vérifiée par  $y$  par une fonction test  $f \in K$ , puis nous intégrons par partie, nous obtenons alors que

$$\int_0^1 y_x f_x dx - y_x(t, 1)f(t, 1) + y_x(t, 0)f(t, 0) + (1 - \lambda) \int_0^1 y f dx = \int_0^1 (z_2 - \lambda z_1) f dx$$

alors

$$\int_0^1 y_x f_x dx + (1 - \lambda) \int_0^1 y f dx = \int_0^1 (z_2 - \lambda z_1) f dx \text{ car } f \in K$$

Le problème variationnel associé consiste donc à déterminer  $y \in K$  tel que :

$$S(y, f) = \int_0^1 y_x f_x dx + (1 - \lambda) \int_0^1 y f dx \text{ et } l(f) = \int_0^1 (z_2 - \lambda z_1) f dx$$

La continuité de  $S(., .)$  et  $l(.)$  est évidente de même que la coercivité de la forme bilinéaire  $S(., .)$ . En effet,

$$\begin{aligned} S(y, y) &= \int_0^1 y_x y_x dx + (1 - \lambda) \int_0^1 y y dx \\ &\geq \frac{1}{a} \|y\|_K^2 \end{aligned}$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont réunies. Il existe donc une solution unique au problème variationnel. Nous vérifions enfin en effectuant les mêmes intégrations par partie que

$$\int_0^1 -y_{xx} f dx + (1 - \lambda) \int_0^1 y f dx + y_x(t, 1)f(t, 1) - y_x(t, 0)f(t, 0) = \int_0^1 (z_2 - \lambda z_1) f dx$$

d'où

$$\begin{cases} -y_{xx} + (1 - \lambda)y = (z_2 - \lambda z_1) p \cdot p \\ y_x(t, 1)f(t, 1) - y_x(t, 0)f(t, 0) = 0, \text{ pour tout } f \end{cases}$$

Alors,  $D(A)$  est dense dans  $X$  et  $A$  est fermé. Ainsi, en utilisant le Théorème du Lumer-Phillips (Théorème A.4 dans [30]),  $A$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions  $S(t)$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , dans  $X$ .

Maintenant, nous allons prouver l'existence et l'unicité du système non linéaire

**Théorème 3.2.2** *Pour toute condition initiale  $Z_0 \in D(A)$ , le problème*

$\dot{Z}(t) = AZ(t) + H(Z)$  admet une unique solution  $Z \in C^1([0, T], X) \cap C^0([0, T], D(A))$ .

De plus la solution est donnée par :  $Z(t) = S(t)Z(0) + \int_0^t S(t-s)H(Z(s))ds$

Pour prouver le Théorème 3.2.2, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.2.1** *L'opérateur non linéaire  $H(Z)$  est dissipatif et localement lipschitzien.*

**Preuve** Rappelons que la fonction non linéaire  $F$  résultante de l'interaction entre l'outil et la roche est donnée par (Chapitre 3, [10])

$$\begin{aligned} F(\partial_t u(t, 0)) &= -\frac{L}{GJ} T \left( \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0) \right), \\ &= -\frac{L}{GJ} \frac{k \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)}{\frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2 + k^2} \end{aligned}$$

avec  $k > 0$ . Après avoir calculé

$$\begin{aligned} \langle H(Z(t)), Z(t) \rangle_X &= F(u_t(t, 0)) u_t(t, 0) \\ &= -\frac{L}{GJ} \frac{k \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2}{\frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2 + k^2} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\langle H(Z(t)), Z(t) \rangle_X \leq 0$$

Cela implique que l'opérateur  $H(Z)$  est dissipatif.

Il est facile de vérifier que  $H(Z)$  est localement lipschitzien. En conséquence, l'opérateur  $H(Z)$  est dissipatif et localement lipschitzien.

**Preuve du Théorème 3.2.2** En appliquant le lemme ci-dessus et à partir des résultats donnés dans (Théorème 4.2 [47], [77, 6, 30]), il est évident de prouver que notre système (3.12) admet une unique solution.

### 3.3 Première approche : système $2 \times 2$ d'EDP du premier ordre

Dans ce paragraphe, en se basant sur la théorie de Lyapunov et la transformation backstepping, nous étudions la stabilité d'un système d'équations hyperboliques du premier ordre. Tout d'abord, nous commençons par linéariser le système d'EDP autour d'une trajectoire de référence puis, nous utilisons les invariants de Riemann pour transformer un EDP de second ordre en deux équations hyperboliques du premier ordre. Finalement, nous montrons la stabilité de l'EDP transformé.

#### 3.3.1 Formulation du problème

Pour linéariser la condition aux limites (3.7), nous utilisons la forme suivante [13] :

$$\bar{u}(t, x) = \frac{\lambda w_r}{2} x^2 - F(w_r)x + w_r t + u_0 \quad (3.13)$$

comme trajectoire de référence, avec

$$\bar{U}(t) = \lambda w_r - F(w_r) \quad (3.14)$$

représente l'entrée de la commande de référence et  $w_r = \bar{u}_t(t, x)$ . Donc le système (3.5)-(3.7) devient

$$\partial_{tt}u(t, x) = \partial_{xx}u(t, x) - \lambda \partial_t u(t, x), \quad (3.15)$$

$$\partial_x u(t, 1) = U(t) \quad (3.16)$$

$$\partial_{tt}u(t, 0) = a \partial_x u(t, 0) + ab \partial_t u(t, 0), \quad (3.17)$$

tel que  $b = \frac{\partial F}{\partial w}(w_r)$  et  $w(t) = u_t(t, 1)$ .

On peut écrire (3.15) sous cette forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = \partial_x \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $(r, s) = (\partial_x u(t, x), \partial_t u(t, x))$ .

Nous introduisons les invariants de Riemann :

$$y = r - s, \quad z = r + s$$

qui résolvent le système suivant :

$$\partial_t y + \partial_x y = \frac{\lambda}{2}(z - y), \quad (3.18)$$

$$\partial_t z - \partial_x z = -\frac{\lambda}{2}(z - y), \quad (3.19)$$

$$z(t, 1) = 2U(t) - y(t, 1), \quad (3.20)$$

$$\partial_t(z - y)(t, 0) = a(z(t, 0) + y(t, 0)) + ab(z(t, 0) - y(t, 0)), \quad (3.21)$$

Nous introduisons les notations

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right), \quad \psi(x) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x\right)$$

et les deux nouvelles coordonnées

$$y_1(t, x) = \phi(x)y(t, x), \quad y_2(t, x) = \psi(x)z(t, x).$$

Alors le système (3.18)-(3.21) est transformé au système suivant :

$$0 = \partial_t y_1 + \partial_x y_1 - \frac{\lambda\phi}{2\psi}y_2, \quad (3.22)$$

$$0 = \partial_t y_2 - \partial_x y_2 - \frac{\lambda\psi}{2\phi}y_1, \quad (3.23)$$

$$y_2(t, 1) = 2\psi(1)U(t) - \frac{\psi(1)}{\phi(1)}y_1(t, 1), \quad (3.24)$$

$$\partial_t(y_2 - y_1)(t, 0) = a(y_2(t, 0) + y_1(t, 0)) + ab(y_2 - y_1)(t, 0). \quad (3.25)$$



### 3.3.2 Construction d'un système cible

Notre but est de trouver une application qui transforme (3.22)-(3.25) au système suivant :

$$\partial_t \alpha(t, x) = -\partial_x \alpha(t, x), \quad (3.26)$$

$$\partial_t \beta(t, x) = \partial_x \beta(t, x), \quad (3.27)$$

$$\beta(t, 1) = 0, \quad (3.28)$$

$$\partial_t (\beta - \alpha)(t, 0) = a(\beta(t, 0) + \alpha(t, 0)) - ab^2(\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)). \quad (3.29)$$

**Lemme 3.3.1** *Considérons le système (3.26)-(3.29) avec les conditions initiales  $(\alpha_0, \beta_0) \in L^2([0, 1])$ . Alors l'équilibre  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  est localement exponentiellement stable dans  $L^2$ . En outre,  $\beta$  tend vers zéro en temps fini.*

**Preuve** Nous proposons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \int_0^1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (t, x) dx + |\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)|^2,$$

tel que  $P = \begin{pmatrix} Ae^{-\mu x} & 0 \\ 0 & Be^{\mu x} \end{pmatrix}$ .  $A, B$  et  $\mu$  sont des constantes positives tel que  $B \geq 2a \geq A$ .

Nous dérivons  $V$  par rapport au temps, nous intégrons par parties et nous utilisons les conditions aux limites (3.28)-(3.29), nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_0^1 2A\alpha \partial_t \alpha e^{-\mu x} + 2B\beta \partial_t \beta e^{\mu x} dx + 2(\partial_t \beta - \partial_t \alpha)(t, 0)(\beta - \alpha)(t, 0) \\ &= -[Ae^{-\mu x} \alpha^2(t, x)]_0^1 - \int_0^1 \mu Ae^{-\mu x} \alpha^2(t, x) dx + [Be^{\mu x} \beta^2(t, x)]_0^1 - \mu \int_0^1 Be^{\mu x} \beta^2(t, x) dx \\ &\quad + 2 \left[ a(\beta(t, 0) + \alpha(t, 0)) - ab^2(\beta - \alpha)(t, 0) \right] (\beta - \alpha)(t, 0) \\ &= -Ae^{-\mu} \alpha^2(t, 1) - (2a - A)\alpha^2(t, 0) - (B - 2a)\beta^2(t, 0) - 2ab^2(\beta - \alpha)^2(t, 0) - \mu V(t) \\ &\leq -\min(\mu, 2ab^2)V(t). \end{aligned}$$

Cela montre que le système (3.26)-(3.29) est localement exponentiellement stable. En

outre, nous calculons par la méthode de la caractéristique la fonction  $\beta$  telle que la condition initiale  $\beta(0, x) = \beta_0(x)$  [voir [40], chapitre 9], nous obtenons

$$\beta(t, x) = \begin{cases} \beta_0(t+x) & 0 \leq t < 1-x, \\ 0 & t \geq 1-x. \end{cases}$$

Ainsi, nous montrons la stabilité en temps fini de la fonction  $\beta$ .

□

### 3.3.3 Transformation backstepping et équations des noyaux

Pour convertir le système original (3.22)-(3.25) au système cible (3.26)-(3.29), nous considérons la transformation backstepping suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= y_1(t, x) - \int_0^x K^{uu}(x, \xi) y_1(t, \xi) d\xi - \int_0^x K^{uv}(x, \xi) y_2(t, \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2}(b+b^2)e^{-abx}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &= y_2(t, x) - \int_0^x K^{vu}(x, \xi) y_1(t, \xi) d\xi - \int_0^x K^{vv}(x, \xi) y_2(t, \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2}(b+b^2)e^{abx}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considérons les notations :

$$\varepsilon_1(x) = \frac{\lambda\phi(x)}{2\psi(x)}, \quad \varepsilon_2(x) = \frac{\lambda\psi(x)}{2\phi(x)}, \quad w(t, x) = \begin{pmatrix} y_1(t, x) \\ y_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \delta(t, x) = \begin{pmatrix} \alpha(t, x) \\ \beta(t, x) \end{pmatrix},$$

$$K(x, \xi) = \begin{pmatrix} K^{uu}(x, \xi) & K^{uv}(x, \xi) \\ K^{vu}(x, \xi) & K^{vv}(x, \xi) \end{pmatrix}, \quad \Upsilon(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b+b^2)e^{-abx}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) \\ \frac{1}{2}(b+b^2)e^{abx}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons (3.30)-(3.31) sous cette forme

$$\delta(t, x) = w(t, x) - \int_0^x K(x, \xi) w(t, \xi) d\xi + \Upsilon(t, x). \quad (3.32)$$

Nous injectons (3.30)-(3.31) dans (3.26)-(3.27), nous intégrons par parties et nous utilisons les conditions aux limites, nous obtenons le système suivant :

$$-K_x^{uu}(x, \xi) - K_\xi^{uu}(x, \xi) - \varepsilon_2(\xi)K^{uv}(x, \xi) = 0, \quad (3.33)$$

$$-K_x^{uv}(x, \xi) + K_\xi^{uv}(x, \xi) - \varepsilon_1(\xi)K^{uu}(x, \xi) = 0, \quad (3.34)$$

$$K_x^{vu}(x, \xi) - K_\xi^{vu}(x, \xi) - \varepsilon_2(\xi)K^{vv}(x, \xi) = 0, \quad (3.35)$$

$$K_x^{vv}(x, \xi) + K_\xi^{vv}(x, \xi) - \varepsilon_1(\xi)K^{vu}(x, \xi) = 0, \quad (3.36)$$

dont les conditions aux limites sont données par :

$$-K^{uv}(x, 0) = K^{uu}(x, 0) = \frac{1}{2}(b + b^2)ae^{-abx}, \quad (3.37)$$

$$K^{uv}(x, x) = \frac{1}{2}\varepsilon_1(x), \quad (3.38)$$

$$K^{vu}(x, x) = -\frac{1}{2}\varepsilon_2(x), \quad (3.39)$$

$$-K^{vv}(x, 0) = K^{vu}(x, 0) = \frac{1}{2}(b + b^2)ae^{abx}. \quad (3.40)$$

Ces équations sont définies dans le domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ . Par le Théorème 6.1.1, nous montrons l'existence, l'unicité et la continuité de la solution du système (3.33)-(3.36) où les conditions aux limites sont données dans (3.37)-(3.40).

### 3.3.4 Transformation backstepping inverse

Maintenant, nous étudions l'inverse de la transformation (3.30) et (3.31). Nous recherchons une transformation du système cible (3.26)-(3.27) au système original (3.22)-(3.25) comme suit :

$$\begin{aligned} y_1(t, x) &= \alpha(t, x) + \int_0^x L^{\alpha\alpha}(x, \xi)\alpha(t, \xi)d\xi + \int_0^x L^{\alpha\beta}(x, \xi)\beta(t, \xi)d\xi \\ &\quad - \frac{b + b^2}{2}e^{-abx}(\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} y_2(t, x) &= \beta(t, x) + \int_0^x L^{\beta\alpha}(x, \xi)\alpha(t, \xi)d\xi + \int_0^x L^{\beta\beta}(x, \xi)\beta(t, \xi)d\xi \\ &\quad - \frac{b + b^2}{2}e^{abx}(\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Notons que

$$L(x, \xi) = \begin{pmatrix} L^{\alpha\alpha}(x, \xi) & L^{\alpha\beta}(x, \xi) \\ L^{\beta\alpha}(x, \xi) & L^{\beta\beta}(x, \xi) \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t, x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(b + b^2)e^{-abx}(\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)) \\ -\frac{1}{2}(b + b^2)e^{abx}(\beta(t, 0) - \alpha(t, 0)) \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons (3.41)-(3.42) sous cette forme

$$w(t, x) = \delta(t, x) + \int_0^x L(x, \xi)\delta(t, \xi)d\xi + \Lambda(t, x). \quad (3.43)$$

Nous injectons (3.41)-(3.42) dans (3.22)-(3.25). Nous intégrons par parties et nous utilisons les conditions aux limites, nous obtenons les noyaux satisfaisants le système suivant :

$$L_{\xi}^{\alpha\alpha}(x, \xi) + L_x^{\alpha\alpha}(x, \xi) - \varepsilon_1(x)L^{\beta\alpha}(x, \xi) = 0, \quad (3.44)$$

$$-L_{\xi}^{\alpha\beta}(x, \xi) + L_x^{\alpha\beta}(x, \xi) - \varepsilon_1(x)L^{\beta\beta}(x, \xi) = 0, \quad (3.45)$$

$$L_{\xi}^{\beta\alpha}(x, \xi) - L_x^{\beta\alpha}(x, \xi) - \varepsilon_2(x)L^{\alpha\alpha}(x, \xi) = 0, \quad (3.46)$$

$$-L_{\xi}^{\beta\beta}(x, \xi) - L_x^{\beta\beta}(x, \xi) - \varepsilon_2(x)L^{\alpha\beta}(x, \xi) = 0, \quad (3.47)$$

les conditions aux limites sont données par :

$$L^{\alpha\alpha}(x, 0) = L^{\alpha\beta}(x, 0) + a(b + b^2)e^{-abx}, \quad (3.48)$$

$$L^{\alpha\beta}(x, x) = \frac{\varepsilon_1(x)}{2}, \quad (3.49)$$

$$L^{\beta\alpha}(x, x) = -\frac{\varepsilon_2(x)}{2}, \quad (3.50)$$

$$L^{\beta\beta}(x, 0) = L^{\beta\alpha}(x, 0) - a(b + b^2)e^{abx}, \quad (3.51)$$

Pour prouver l'existence, l'unicité et la continuité du système d'équations (3.44)-(3.47), avec les conditions aux limites (3.48)-(3.51), nous utilisons le Théorème 6.1.1.

### 3.3.5 Stabilité du système original et identification d'une commande stabilisante

Dans cette partie, nous étudions le résultat principale de contrôle. Nous introduisons (3.31) dans (3.28) et nous utilisons (3.24) ; nous trouvons

$$\begin{aligned} \beta(t, 1) &= y_2(t, 1) - \int_0^1 K^{vu}(1, \xi) y_1(t, \xi) d\xi - \int_0^1 K^{vv}(1, \xi) y_2(t, \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2}(b + b^2)e^{ab}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2\psi(1)U(t) &- \frac{\psi(1)}{\phi(1)}y_1(t, 1) - \int_0^1 K^{vu}(1, \xi) y_1(t, \xi) d\xi - \int_0^1 K^{vv}(1, \xi) y_2(t, \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2}(b + b^2)e^{ab}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) = 0. \end{aligned}$$

Cela implique que la loi de contrôle est donnée par :

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\phi(1)} y_1(t, 1) + \frac{1}{\psi(1)} \left( \int_0^1 K^{vu}(1, \xi) y_1(t, \xi) d\xi + \int_0^1 K^{vv}(1, \xi) y_2(t, \xi) d\xi \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2}(b + b^2)e^{ab}(y_2(t, 0) - y_1(t, 0)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

**Théorème 3.3.1** *Considérons le système (3.22)-(3.25), avec les conditions initiales  $(y_1^0, y_2^0)$ , la loi de contrôle (3.52) et tels que les noyaux  $K^{vu}$  et  $K^{uv}$  vérifient (3.33)-(3.40) où  $\Lambda, \Upsilon \in L^2([0, 1])$ . Alors l'équilibre  $(y_1, y_2) = (0, 0)$  est localement exponentiellement stable dans  $L^2$ . En outre, l'équilibre  $y_2 = 0$  est stable en temps fini.*

**Preuve** Rappelons que

$$w(t, x) = \delta(t, x) + \int_0^x L(x, \xi) \delta(t, \xi) d\xi + \Lambda(t, x),$$

et

$$\delta(t, x) = w(t, x) - \int_0^x K(x, \xi) w(t, \xi) d\xi + \Upsilon(t, x).$$

Par le Théorème 6.3.5 les deux noyaux  $K$  et  $L$  sont continus.

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} &\leq \|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|\Lambda(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \left\| \int_0^\cdot L(\cdot, \xi) \delta(t, \xi) d\xi \right\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq \|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|\Lambda(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|L\|_\infty \|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq C_1(t) \|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \end{aligned}$$

$$\text{tel que } C_1(t) = \left\{ \frac{\|\Lambda(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}}{\|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}} + 1 + \|L\|_\infty \right\}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} &\leq \|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|\Upsilon(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \left\| \int_0^\cdot K(\cdot, \xi) w(t, \xi) d\xi \right\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq \|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|\Upsilon(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} + \|K\|_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq C_2(t) \|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \end{aligned}$$

$$\text{tel que } C_2(t) = \left\{ \frac{\|\Upsilon(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}}{\|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}} + 1 + \|K\|_\infty \right\}.$$

Si  $t = 0$  alors

$$\|\delta(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \leq C_2(0) \|w(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])},$$

$$\text{tel que } C_2(0) = \left\{ \frac{\|\Upsilon(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])}}{\|w(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])}} + 1 + \|K\|_\infty \right\}.$$

Par le lemme 3.3.1, il existe  $c_0 > 0$  et  $k > 0$  tel que

$$\|\delta(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \leq c_0 \|\delta(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])} e^{-kt}.$$

Ainsi, il existe  $C > 0$  et  $k > 0$  tel que

$$\|w(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \leq C \|w(0, \cdot)\|_{L^2([0,1])} e^{-kt}.$$

Finalement, nous savons que  $\beta$  tend vers zéro en temps fini, alors  $y_2$  tend vers zéro en temps fini. □

### 3.4 Deuxième approche : modèle d'EDP du second ordre

Dans cette section, nous étudions la stabilité exponentielle de l'équation aux dérivées partielles du second ordre décrivant la dynamique des vibrations de torsion. Nous construi-

sons une nouvelle approche pour la résolution de la stabilité du système dynamique.

### 3.4.1 Transformation backstepping et système cible

Rappelons que la dynamique de torsion transformée s'écrit sous cette forme :

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x) - \lambda u_t(t, x) \quad (3.53)$$

$$u_x(t, 1) = U(t) \quad (3.54)$$

$$u_{tt}(t, 0) = au_x(t, 0) + abu_t(t, 0) \quad (3.55)$$

La plupart de recherches et d'analyses des équations qui décrivent le système de forage sont traitées en négligeant le terme d'amortissement en dynamique (3.53). Dans notre étude nous allons tenir compte de ce terme d'amortissement négligé. Notons que les tiges de forage se comportent classiquement de manière élastique sans amortissement interne. Les termes d'amortissement proviennent généralement d'interactions extérieures (frottement visqueux tiges-boue) ou de sous composants destinés à amortir les vibrations (amortisseurs de chocs). Fondamentalement, cela rend notre problème de stabilisation différent. Le principal défi dans cette section, est de trouver une loi de contrôle  $U(t)$  de façon que notre système (3.53)-(3.55) soit exponentiellement stable à l'équilibre. Cette section montre l'importance d'un système cible, la technique du backstepping et les équations du noyau comme outils d'analyse de stabilité. A partir de la transformation backstepping, nous proposons une loi de contrôle qui transforme le système (3.53)-(3.55) au système cible suivant  $(u(t, x) \rightarrow w(t, x))$ ,

$$w_{tt}(t, x) = w_{xx}(t, x) - \lambda w_t(t, x) \quad (3.56)$$

$$w_x(t, 1) = 0 \quad (3.57)$$

$$w_{tt}(t, 0) = ae^{-\alpha}w_x(t, 0) - (2a\epsilon + 1)w_t(t, 0) \quad (3.58)$$

Les deux paramètres  $\alpha$  et  $\epsilon$  seront définis par la suite.

La technique du backstepping est une approche élégante pour la conception de la loi de contrôle pour le système des EDP. Par conséquent, nous allons construire une application

qui transforme notre système original au système cible (3.56)-(3.58).

**Lemme 3.4.1** *Définissons la fonction*

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha}(w_x)^2 + e^{-\alpha}(w_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x}(1-x)w_t w_x \right) dx \right] + \frac{1}{a}(w_t(t, 0))^2$$

avec  $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ ,  $\alpha \leq -\frac{2+\epsilon}{\epsilon(1-x)}$ , tel que  $x \in [0, 1[$  et la norme  $\Theta$  ou

$$\Theta^2(t) = \|w_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|w_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |w_t(t, 0)|^2$$

Alors

$$m_1 \Theta^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \Theta^2(t)$$

avec

$$m_1 = \min\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\} \text{ et } m_2 = \max\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\}$$

**Preuve** En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha}(w_x)^2 + e^{-\alpha}(w_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x}(1-x)w_t w_x \right) dx \right] + \frac{1}{a}(w_t(t, 0))^2 \\ &\geq \frac{e^{-\alpha}}{2} \|w_t\|^2 + \frac{e^{-\alpha}}{2} \|w_x\|^2 + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{2} \int_0^1 |w_t w_x| dx \\ &\geq \left(\frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}\right) (\|w_t\|^2 + \|w_x\|^2) + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 \\ &\geq \min\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\} \Theta^2(t) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha}(w_x)^2 + e^{-\alpha}(w_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x}(1-x)w_t w_x \right) dx + \frac{1}{a}(w_t(t, 0))^2 \right] \\ &\leq \frac{e^{-\alpha}}{2} \|w_t\|^2 + \frac{e^{-\alpha}}{2} \|w_x\|^2 + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{2} \int_0^1 |w_t w_x| dx \\ &\leq \left(\frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}\right) (\|w_t\|^2 + \|w_x\|^2) + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 \\ &\leq \max\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\} \Theta^2(t). \end{aligned}$$

Alors  $m_1 \Theta^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \Theta^2(t)$  avec  $m_1 = \min\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\}$  et  $m_2 = \max\left\{\frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a}\right\}$



$$\left. \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\}.$$

□

**Théorème 3.4.1 (Stabilité du système cible)** *Considérons le système (3.56)-(3.58), avec la condition initiale  $w_0 = w(0, x) \in L^2([0, 1])$ . Alors le système (3.56)-(3.58) est exponentiellement stable à l'équilibre au sens de cette norme*

$$\Theta^2(t) = \|w_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|w_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |w_t(t, 0)|^2$$

**Preuve** Pour prouver la stabilité du système cible, nous introduisons  $L(t)$  comme une fonction de Lyapunov

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (w_x)^2 + e^{-\alpha} (w_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_t w_x \right) dx \right] + \frac{1}{a} (w_t(t, 0))^2$$

Sa dérivation par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= \int_0^1 \left( e^{-\alpha} w_{tx} w_x + e^{-\alpha} w_{tt} w_t + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_{tt} w_x + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_{tx} w_t \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{a} w_{tt}(t, 0) w_t(t, 0) \\ &= -\lambda e^{-\alpha} \int_0^1 w_t^2 + \int_0^1 \left( e^{-\alpha} w_{tx} w_x + e^{-\alpha} w_{xx} w_t + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_{xx} w_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon (1-x) w_{tx} w_t \right) dx + \frac{1}{a} (w_{tt}(t, 0) w_t(t, 0)) - \frac{\lambda \epsilon}{2} \int_0^1 e^{-\alpha x} (1-x) w_t w_x dx \\ &= -e^{-\alpha} w_t(t, 0) w_x(t, 0) - \frac{\epsilon}{4} w_x(t, 0)^2 - \frac{\epsilon}{4} w_t(t, 0)^2 - \int_0^1 \frac{-\epsilon - \alpha \epsilon (1-x)}{2} e^{-\alpha x} \frac{w_x^2}{2} dx \\ &\quad - \frac{2a\epsilon + 1}{a} w_t^2(t, 0) + e^{-\alpha} w_t(t, 0) w_x(t, 0) - \int_0^1 \frac{-\epsilon - \alpha \epsilon (1-x)}{2} e^{-\alpha x} \frac{w_t^2}{2} dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_t w_x dx - \lambda \int_0^1 e^{-\alpha} w_t^2 dx \\ &\leq -e^{-\alpha} \int_0^1 e^{-\alpha} \frac{w_x^2}{2} dx - \frac{1}{a} w_t^2(t, 0) - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) w_t w_x dx - \lambda \int_0^1 e^{-\alpha} w_t^2 dx \\ &\leq -\min(e^{-\alpha}, \lambda, 1) L(t). \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.4.1, nous avons

$$m_1 \Theta^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \Theta^2(t).$$

Par conséquent, il existe  $c > 0$  et  $k \geq 0$  tel que

$$\Theta(t) \leq ce^{-kt}\Theta(0).$$

Ceci implique que le système cible (3.56)-(3.58) est exponentiellement stable à l'équilibre au sens de la norme  $\Theta$ .

□

Afin de convertir le système original au système cible, nous proposons la transformation backstepping suivante

$$\begin{aligned} w(t, x) = & u(t, x) - \int_0^x k(x, \xi)u(t, \xi)d\xi - \varrho(x)u(t, 0) \\ & - \int_0^x p(x, \xi)u_t(t, \xi)d\xi - \int_0^x l(x, \xi)u_\xi(t, \xi)d\xi \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nous introduisons la transformation backstepping (3.59) dans le système cible (3.56)-(3.58). Nous faisons une intégration par parties, nous utilisons les conditions aux limites, nous obtenons les noyaux suivants :

$$l_{\xi\xi}(x, \xi) = l_{xx}(x, \xi), \quad (3.60)$$

$$k_{\xi\xi}(x, \xi) = k_{xx}(x, \xi), \quad (3.61)$$

$$p_{\xi\xi}(x, \xi) = p_{xx}(x, \xi), \quad (3.62)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$l_x(x, x) = 0, \quad k_x(x, x) = 0, \quad p_x(x, x) = 0 \quad (3.63)$$

$$l_\xi(x, 0) = k(x, 0), \quad k_\xi(x, 0) = \varrho''(x), \quad k(0, 0) = -ae^{-\alpha} \quad (3.64)$$

$$p(x, 0) = 0, \quad p_\xi(x, 0) = 0 \quad (3.65)$$

$$l(x, 0) = \varrho(x), \quad l(0, 0) = 0, \quad \rho(0) = 1, \quad (3.66)$$

$$k_\xi(0, 0) = ae^{-\alpha}k(0, 0) + ae^{-\alpha}\varrho'(0) = \varrho'(0) \quad (3.67)$$

Notons que le noyau de la transformation backstepping satisfait un système intéressant des EDP d'onde qui est facilement solvable. Ce système est défini sur un domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ .

À cette étape, nous injectons la transformation (3.59) dans (3.57), nous déduisons la loi de contrôle suivante

$$\begin{aligned}
U(t) &= \frac{1}{1 - l(1, 1)} [k(1, 1)u(t, 1) + \int_0^1 k_x(1, \xi)u(t, \xi)d\xi \\
&+ p(1, 1)u_t(t, 1) + \int_0^1 p_x(1, \xi)u_t(t, \xi)d\xi \\
&+ \int_0^1 l_x(1, \xi)u_\xi(t, \xi)d\xi + \varrho'(1)u(t, 0)]. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

**Remarque** Il est noter que  $l(1, 1) \neq 1$ , en effet :

Pour trouver une solution de l'équation  $l(x, y)$ , nous la transformons d'abord en équation intégrale. Soit le changement de variables suivant  $y = x + \xi$  et  $\eta = x - \xi$ , nous avons

$$l(x, \xi) = G(y, \eta) \tag{3.69}$$

$$l_x = G_y + G_\eta \tag{3.70}$$

$$l_{xx} = G_{yy} + 2G_{y\eta} + G_{\eta\eta} \tag{3.71}$$

$$l_\xi = G_y - G_\eta \tag{3.72}$$

$$l_{\xi\xi} = G_{yy} - 2G_{y\eta} + G_{\eta\eta} \tag{3.73}$$

Ainsi, le noyau  $l$  devient

$$G_{y\eta}(y, \eta) = 0 \tag{3.74}$$

$$G_y(y, 0) = -G_\eta(y, 0) \tag{3.75}$$

$$G(y, y) = \rho(y) \tag{3.76}$$

$$K(y, 0) = G_y(y, y) - G_\eta(y, y) \tag{3.77}$$

$$G(0, 0) = 0, \quad \rho(0) = 1 \tag{3.78}$$

En intégrant (3.74) par rapport à  $\eta$  de 0 à  $\eta$ , nous obtenons

$$G_y(y, \eta) = -G_y(y, 0) \quad (3.79)$$

Ensuite, nous intégrons (3.79) par rapport à  $y$  de  $\eta$  à  $y$  pour obtenir

$$G(y, \eta) = G(\eta, \eta) + G(\eta, 0) - G(y, 0)$$

or  $l(1, 1) = G(2, 0) = G(0, 0) + G(0, 0) - G(2, 0)$  donc  $l(1, 1) = G(0, 0) = 0$

Il reste à étudier le comportement du système original à partir de la transformation inverse ( $w(t, x) \rightarrow u(t, x)$ ). Laissez-nous définir la transformation backstepping inverse du système cible au système original comme suit

$$\begin{aligned} u(t, x) &= w(t, x) + \int_0^x e(x, \xi)w(t, \xi)d\xi + \int_0^x h(x, \xi)w_\xi(t, \xi)d\xi \\ &+ \int_0^x f(x, \xi)w_t(t, \xi)d\xi + \pi(x)w(t, 0). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Nous injectons la transformation backstepping inverse (3.80) dans le système original (3.53)-(3.55), nous trouvons le système de noyaux suivant

$$\begin{aligned} h_{\xi\xi}(x, \xi) &= h_{xx}(x, \xi), \\ e_{\xi\xi}(x, \xi) &= e_{xx}(x, \xi), \\ f_{\xi\xi}(x, \xi) &= f_{xx}(x, \xi), \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} h_x(x, x) &= 0, \quad e_x(x, x) = 0, \quad f_x(x, x) = 0 \\ e(x, 0) &= h_\xi(x, 0), \quad e_\xi(x, 0) = \pi''(x), \quad \pi'(0) = 0 \\ f(x, 0) &= 0, \quad h(x, 0) = \pi(x), \quad f_\xi(x, 0) = 0 \\ e(0, 0) &= h_\xi(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = \pi(0) = -1, \end{aligned}$$

Il est facile à vérifier que ces équations sont définies sur un domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ . Pour obtenir une solution de ce dernier des systèmes des EDP d'onde, nous commençons par le convertir en une équation intégrale et nous introduisons le changement des variables  $y = \xi + x$  et  $\eta = x - \xi$  et finalement nous utilisons la méthode des approximations successives (plus de détails dans [40], chapitre 4).

### 3.4.2 Étude de la stabilité et construction de la loi de contrôle

Maintenant, nous nous intéressons à stabiliser le système (3.53)-(3.55).

**Théorème 3.4.2 (Stabilité du système original)** *Considérons le système (3.53)-(3.55) avec la condition initiale  $u_0 \in L^2([0, 1])$  et la loi de contrôle (3.68) où les noyaux  $k$ ,  $p$ , et  $l$  sont obtenus de (3.60)-(3.67). Alors le système (3.53)-(3.55) est exponentiellement stable à l'équilibre au sens de la norme suivante*

$$\Sigma^2(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + |u_t(t, 0)|^2.$$

**Preuve** Tout d'abord, notons que  $L^2 = L^2([0, 1])$  et laissons introduire les normes suivantes (par exemple) comme suit :  $\varrho_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varrho(x)|$ ,  $k_\infty = \max_{(x,\xi) \in \Delta} \|k(x, \xi)\|_2^2$ , et ainsi de suite pour  $l_\infty$ ,  $(p_{\xi\xi})_\infty$ ,  $p_\infty$ , où  $\|k(x, \xi)\|_2^2$  désigne la norme de l'opérateur classique. Nous allons prouver qu'il existe  $\rho_1 > 0$  et  $\rho_2 > 0$  tel que

$$\rho_1 \Theta(t) \leq \Sigma(t) \leq \rho_2 \Theta(t).$$

Rappelons que  $p_\xi(x, 0) = 0$ ,  $p(x, 0) = 0$ ,  $p_x(x, x) = 0$ ,  $l(x, 0) = \varrho(x)$ . Par conséquent,  $w_t$  est réécrit sous cette forme

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &= u_t(t, x) - \int_0^x k(x, \xi) u_t(t, \xi) d\xi - p(x, x) u_x(t, x) - \int_0^x p_{\xi\xi}(x, \xi) u(t, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^x \lambda p(x, \xi) u_t(t, \xi) d\xi - l(x, x) u_t(t, x) + \int_0^x l_\xi(x, \xi) u_t(t, \xi) d\xi - \varrho(x) u_t(t, 0). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq ((1 + k_\infty + l_\infty + (l_\xi)_\infty + \lambda p_\infty) \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + p_\infty \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + (p_{\xi\xi})_\infty \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \varrho_\infty |u_t(t, 0)|^2) \\ &\leq c_1 \Sigma^2 \end{aligned}$$

tel que  $c_1 = \max\{1 + k_\infty + l_\infty + (l_\xi)_\infty + \lambda p_\infty, (p_{\xi\xi})_\infty, p_\infty, \varrho_\infty\}$ .

Comme  $u(t, 0) = u(t, x) - \int_0^x u_y(t, y) dy$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + k_\infty \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + (k_x)_\infty \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + p_\infty \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (p_x)_\infty \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + l_\infty \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (l_x)_\infty \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \varrho'_\infty \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \varrho'_\infty \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_2 (\|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

avec  $c_2 = \max\{1 + l_\infty + (l_x)_\infty + \varrho'_\infty, k_\infty + (k_x)_\infty + \varrho'_\infty, p_\infty + (p_x)_\infty\}$ .

En outre,  $|w_t(t, 0)|^2 \leq 4 |u_t(t, 0)|^2$ . Par conséquent, il existe  $\rho_1 > 0$  tel que  $\rho_1 \Theta(t) \leq \Sigma(t)$ .

Rappelons que la transformation backstepping inverse est donnée par

$$\begin{aligned} u(t, x) &= w(t, x) + \int_0^x e(x, \xi) w(t, \xi) d\xi + \pi(x) w(t, 0) \\ &\quad + \int_0^x f(x, \xi) w_t(t, \xi) d\xi + \int_0^x h(x, \xi) w_\xi(t, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Comme  $w(t, 0) = w(t, x) - \int_0^x w_y(t, y) dy$ , nous utilisons l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + e_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + f_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + h_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \pi_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \pi_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\leq (c_0(1 + e_\infty) + \pi_\infty(1 + c_0)) \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + f_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + h_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_3 (\|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

où  $c_3 = \max\{c_0(1 + e_\infty) + \pi_\infty(1 + c_0) + h_\infty, f_\infty\} > 0$ ,  $c_0 > 0$ .

En outre, comme  $f(x, 0) = 0$ ,  $h(x, 0) = \pi(x)$ ,  $f_\xi(x, 0) = 0$ ,  $f_x(x, x) = 0$ , nous aurons

$$\begin{aligned}
\|u_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + e_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ f_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + (f_{\xi\xi})_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ \lambda f_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + h_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ (h_\xi)_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\leq (1 + e_\infty + h_\infty + (h_\xi)_\infty + \lambda f_\infty) \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ (f_\infty + c_0(f_{\xi\xi})_\infty) \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\leq c_4(\|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

tel que  $c_4 = \max\{1 + e_\infty + h_\infty + (h_\xi)_\infty + \lambda f_\infty, f_\infty + c_0(f_{\xi\xi})_\infty\} \geq 0$ .

Aussi, comme  $w(t, 0) = w(t, x) - \int_0^x w_y(t, y) dy$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
\|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + e_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ (e_x)_\infty \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + f_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ (f_x)_\infty \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + h_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&+ \pi'_\infty(\|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2) \\
&+ (h_x)_\infty \|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\leq c_5(\|w_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|w_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

tel que  $c_5 = \max\{1 + c_0 e_\infty + c_0 (e_x)_\infty + h_\infty + (h_x)_\infty + \pi'_\infty(1 + c_0), f_\infty + (f_x)_\infty\}$ . Enfin, nous avons  $|u_t(t, 0)|^2 \leq 4 |w_t(t, 0)|^2$ . Par conséquent, il existe  $\rho_2 > 0$  tel que  $\Sigma(t) \leq \rho_2 \Theta(t)$ .

Ceci implique que le système (3.53)-(3.55) est exponentiellement stable au sens de la norme  $\Theta$ . □

### 3.5 Résultat de simulation

Suite à l'analyse ultérieure, le programme numérique de simulation intègre aussi bien le comportement du système cible que le comportement des vibrations de torsion. La loi de

contrôle en vitesse angulaire assure la stabilité du système, par conséquent, la suppression des vibrations de torsion. Les paramètres physiques utilisés dans la simulation sont donnés dans le tableau suivant

Variable	Valeur	Unité	Description
$L$	2000	$m$	Longueur de la chaîne de forage
$I$	0.095	$kg.m$	Inertie par unité de longueur
$I_b$	311	$kg.m^2$	Inertie au fond du train de tiges,
$J$	$1.19.10^5$	$m^4$	Moment d'inertie géométrique
$G$	$79.3.10^9$	$N.m^{-2}$	Module de cisaillement
$c_a$	2000	$Nm.s.rad$	Coefficient de couple de glissement
$d$	0.009		Coefficient d'amortissement

TABLE 3.1 – Paramètres physiques

Dans la pratique, afin d'optimiser les opérations de forage, l'opérateur de foreur contrôle généralement les paramètres de forage à la surface, tels que la vitesse de rotation du train de tige, le poids sur le trépan et la viscosité du fluide de forage. Nous avons montré que le système de forage (3.1) - (3.3) est équivalent au système (3.22) - (3.25). Il est donc important de tester l'efficacité de la loi de contrôle pour le système (3.22) - (3.25). Les figures (Fig 3.2) et (Fig 3.3), montrent la convergence des états  $y_1(t, x)$  et  $y_2(t, x)$  vers zéro. Comme prévu par les Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2, les vibrations de torsion (stick-slip)

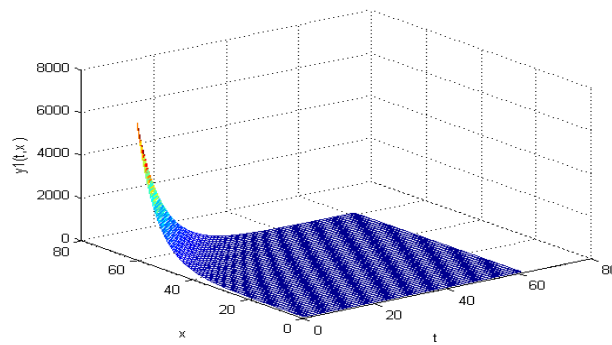
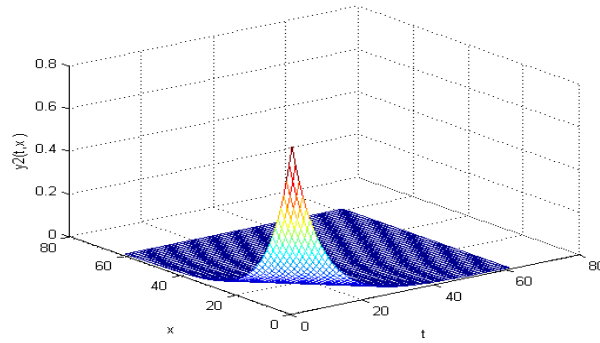


FIGURE 3.2 – Évolution en fonction du temps de l'état  $y_1(t, x)$ .

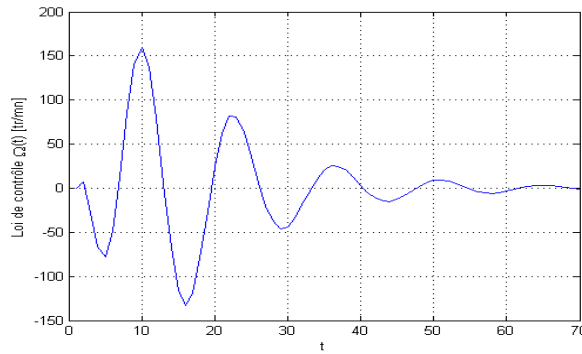
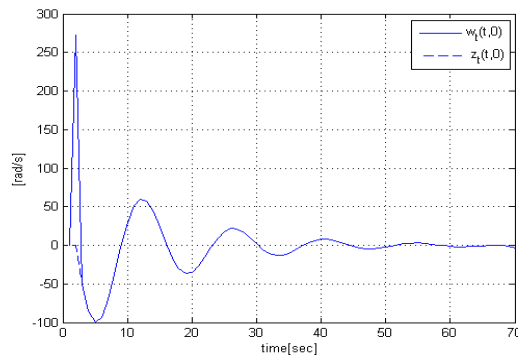
(Fig 3.5 - 3.6) sont réduites par l'application de la loi de contrôle suivante (Fig. 3.4)

$$\Omega(t) = \frac{GJ}{c_a L} U(t) + \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} u_t(t, 1),$$



FIGURE 3.3 – Évolution en fonction du temps de l'état  $y_2(t, x)$ .

où  $U(t)$  est une commande : donnée par (3.68).

FIGURE 3.4 – Évolution temporelle de la loi de contrôle  $\Omega(t)$ .FIGURE 3.5 – Stabilisation de la vitesse angulaire en termes de  $u_t(t, 0)$  et  $w_t(t, 0)$ .

La figure (Fig. 3.5) montre le comportement de la vitesse à l'extrémité inférieure des

systèmes respectivement, original et cible. De deux figures (Fig 3.4) et (3.6), nous remarquons que les vibrations stick-slip sont réduites au moyen de la loi de contrôle  $\Omega$  selon le comportement de la vitesse angulaire à l'extrémité inférieure.

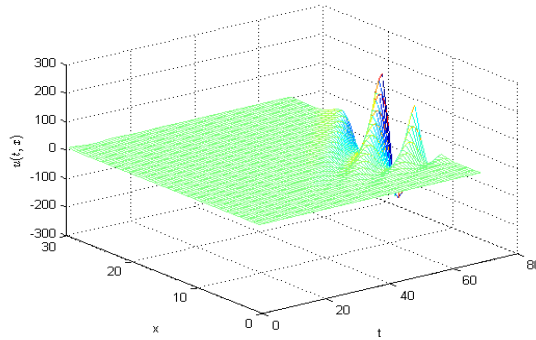


FIGURE 3.6 – Évolution de la variable de torsion  $u(t, x)$  le long du système de tige de forage.

### 3.6 Conclusion

Deux axes principaux sont abordés dans ce chapitre. Le premier axe concerne la stabilité d'un système hyperbolique  $2 \times 2$  du premier ordre en temps et en espace. Le second axe concerne la stabilité d'un système d'équation hyperbolique du second ordre. Comme technique, nous avons utilisé la théorie de Lyapunov et la transformation backstepping. On a élaboré deux commandes qui servent à supprimer le phénomène dit "stick-slip" qui peut se produire dans le système durant toute la phase de forage. Ce phénomène a des effets importants sur la durée de vie de l'outil.

Partie II : Modèle couplé décrivant les  
vibrations de torsion et la dynamique  
de la boue (EDP-EDO)



# Chapitre 4

## Dynamique de la boue et avance du train de tiges : modèle fini (EDO)

### 4.1 Introduction

Au cours des derniers siècles, l'exploration de gaz et de pétrole a fait de grands progrès dans le développement des techniques de forage. Pour la modélisation et le contrôle des systèmes de forage, de nombreuses études de recherche ont été proposées [53, 69, 11, 49, 74]. En outre, dans la littérature, de nombreux auteurs se sont intéressés à la stabilisation du système avec différentes méthodes : backstepping, platitude, etc.

Dans ce travail, nous utilisons la technique du backstepping et la théorie de Lyapunov pour étudier le MPD. La technique du backstepping est développée en 1990 par Kokotovic *et al.* [55, 57] pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. Diverses recherches ont utilisé cette technique et la théorie de Lyapunov pour prouver la stabilité des équations différentielles non linéaires [42, 25, 26, 45, 7]. En ajoutant que, Kristick *et al.* [42] ont introduit une nouvelle méthode pour les systèmes non linéaires munis d'une loi de contrôle. Puis, dans [58], Roger *et al.* ont fourni une analyse des différentes techniques : deux méthodes pour trouver la loi de contrôle sont proposées.

Au cours des opérations des forages, les déblais de fond doivent être transportés hors du trou de forage à travers la couronne. Cela se fait à l'aide d'un système dit "pression géré" (Managed Pressure Drilling, MPD). Un MPD est utilisé pour contrôler la pression annu-

laire à travers le contrôle de la pression au fond du puits et supprimer les afflux continus de formation des fluides à la surface. Par conséquent, les principaux objectifs d'un MPD consistent à contrôler la pression au fond, réguler la pression autour de l'espace annulaire ainsi la vitesse de pénétration (ROP). C'est une nouvelle technique qui a la capacité d'atténuer les risques de débouchage dans un forage, l'augmentation des taux de production et l'amélioration des performances de forages. Dans la littérature, différents aspects de la modélisation d'un MPD ont été proposés [72, 22, 51, 79]. L'estimation et la conception de contrôle MPD a été étudiée par [22]. Divers défis de modélisation des systèmes de forage et d'automatisation sont discutés dans [23, 56]. Dans [51], les auteurs ont proposé un modèle de dimension finie qui décrit les phénomènes du fluide entre la pompe principale jusqu'à la sortie du fluide dans l'espace annulaire. Un système d'observateur réduit, qui adapte à la friction, à la densité, et aux estimations de la pression au fond du trou dans un puits, est présenté dans [52].

Dans ce chapitre nous présentons un modèle hydraulique (MPD) basé sur la loi de masse et la loi de mouvement qui fournit les équations gouvernantes décrivant un MPD. Nous élaborons des commandes qui servent à contrôler : la pression de la pompe au niveau de l'outil, la vitesse de pénétration et également la vitesse de rotation du train de tiges. Les lois de contrôle sont explicitement construites à l'aide de la méthode du backstepping et la théorie de Lyapunov.

## 4.2 Stabilisation de la pression aux différents niveaux d'un puits

Pour tout système contrôlé, la connaissance des points de fonctionnement autour desquels la régulation peut être effectuée, est essentielle. Dans ce manuscrit, on n'entre pas dans les détails de dérivation de la dynamique de la boue, le calcul se base sur les équations fondamentales :

- viscosité : la viscosité d'un fluide est en fonction de la pression et la température
- densité : la densité dépend de la pression et de la température
- conservation de la masse : le bilan des masses appliqué dans la tige et la couronne

- conservation du moment : le bilan des forces selon une direction d'écoulement, ou la deuxième loi de Newton

La dynamique de la boue, qui est aussi un mélange d'un fluide injecté et de déblais dégagé par l'outil, peut être décrite par un modèle de dimension infinie. Or, dans la pratique, l'étude de la pression en tout point n'est pas utile. La localisation de cette pression répond aux critères MPD, par conséquent, un modèle fini est suffisant pour l'analyse de stabilité (Fig. 4.1). Trois points sont essentiels dans l'étude en question. Il s'agit de la pression/débit injectée à la surface, pression/débit au fond et pression/débit à la sortie de la couronne. Le problème posé par un point de contrôle en matière de stabilité entrainera l'instabilité de l'ensemble avec une pression de grandeur entrainant la destruction du système et/ou une mauvaise direction de forage, opération qui peuvent être couteuse pour un industriel.

#### 4.2.1 Modèle de la boue et avance du train de tiges

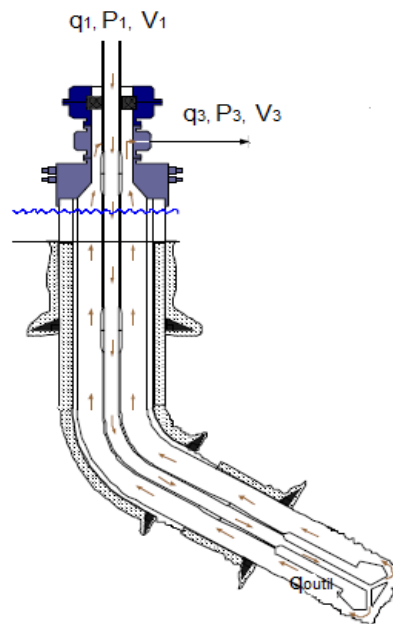


FIGURE 4.1 – Schéma d'un système MPD

Le modèle décrivant le comportement du fluide injecté pour faciliter l'extraction de la

boue est le suivant :

$$M\dot{q}_{outil}(t) = P_1(t) - P_3(t) - F(q_{outil}) + g(\rho_1 L - \rho_3 y(t)) \quad (4.1)$$

$$\frac{V_1}{\beta_1}\dot{P}_1(t) = u_3(t) - q_{outil}(t) \quad (4.2)$$

$$(V_0 + Sy(t))\dot{P}_3(t) = \beta_3 \left[ q_{outil}(t) + q_2(t, \Omega) - q_3(t) - \underbrace{\frac{dV_3}{dt}}_{Sv(t)} \right] \quad (4.3)$$

$$I\dot{\Omega} = u_1(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{v}(t) = u_2(t) \quad (4.6)$$

avec les notations suivantes :

- $y(t) \in [0, L]$  : la coordonnée spatiale le long de la trajectoire d'écoulement, ( $g$  direction de la gravité)
- $V_0$  : volume initiale de la couronne
- $V_3 = V_0 + Sy(t)$  : volume de la couronne (dépend de l'avancement de l'outil)
- $v$  : vitesse pénétration de l'outil (ROP)
- $q_1$  : débit injecté par la pompe
- $q_2$  : débit dû à l'enlèvement de la terre par l'outil
- $S$  : surface de l'espace annulaire
- $q_3$  : débit sortant de la couronne (mélange)
- $V_1$  : volume traversant le train de tiges
- $\beta_1$  et  $\beta_3$  : modules de compressibilité de la boue
- $q_{outil}$  : taux d'écoulement à partir de l'outil
- $M$  : densité intégrée par section,
- $P_1$  : la pression fournie par la pompe à la surface
- $P_3$  : pression au fond du trou
- $I$  : inertie du train de tiges par unité de longueur
- $u_1$  : couple appliqué au train de tiges par la table de rotation
- $u_e$  : vitesse de pénétration



- $u_3$  : commande virtuelle
- $\rho_1$  : densité de la boue de forage dans le train de tiges
- $\rho_3$  : densité d'un mélange boue-déblais

La chute de pression totale due au frottement entre le train de tiges et l'espace annulaire est représentée par  $F(q_{outil})$ . En outre

$$F(q_{outil}) = F_a(q_{outil}) + F_d(q_{outil})$$

avec le frottement dans le train de forage ( $F_d(q_{outil})$ ) et l'annulaire ( $F_a(q_{outil})$ ) sont approximés par les polynômes suivants [28] :

$$\begin{aligned} F_a(q_{outil}) &= \alpha_1 q_{outil} + \beta_1 q_{outil}^2 \\ F_d(q_{outil}) &= \alpha_2 q_{outil} + \beta_2 q_{outil}^2 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des constantes.

Les équations (4.1)- (4.3) représentent la dynamique de la pression dans la partie hydraulique. Concernant cette partie, nous utilisons les lois fondamentales de la mécanique des fluides : le principe de la conservation de la masse, le principe de conservation des moments et la relation de Bernoulli. La dynamique liée à la vitesse de rotation est donnée par (4.4). Les équations (4.5)-(4.6) décrivent la dynamique de déplacement de l'outil. Pour modéliser cette partie mécanique nous utilisons la Loi de Newton.

Pour la détermination du débit  $q_2$  deux cas de figure se présentent.

**Hypothèse.** Le débit  $q_2$  ne dépend pas de la vitesse de pénétration, par conséquent de l'état  $v$ . Ainsi, on considère dans un premier temps que le phénomène de vibration de torsion n'est pas affecté par le système d'injection fluidique.

#### 4.2.2 Cas où le débit $q_2 \triangleq q_2(t)$

Ce cas se présente sous une vitesse de rotation constante  $\Omega$  de l'ensemble train-trépan. Ainsi, le débit  $q_2$  (interaction outil/sol) ne dépend pas de l'état du système. Alors le

système (4.1)-(4.6) est transformé au suivant :

$$\begin{aligned}
M\dot{q}_{outil}(t) &= P_1(t) - P_3(t) - F(q_{outil}) + g(\rho_1 L - \rho_3 y(t)) \\
\frac{V_1}{\beta_1}\dot{P}_1(t) &= u_3(t) - q_{outil}(t) \\
(V_0 + Sy(t))\dot{P}_3(t) &= \beta_3 [q_{outil}(t) + q_2(t) - q_3(t) - Sv(t)] \\
\dot{y}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= u_2(t)
\end{aligned}$$

A partir du changement de variable suivant  $z(t) = \frac{1}{V_0 + Sy(t)}$ , le système donné ci-dessous peut se mettre sous cette forme

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1 P_1(t) - c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z) \quad (4.7)$$

$$\dot{P}_1(t) = cu_3(t) - cq_{outil}(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{P}_3(t) = f(q_{outil}, t)z(t) - \beta_3 z(t)Sv(t) \quad (4.9)$$

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)v(t) \quad (4.10)$$

$$\dot{v}(t) = u_2(t) \quad (4.11)$$

où  $c = \frac{\beta_1}{V_1}$ ,  $h(z) = c_1 g(\rho_1 L - \frac{\rho_3}{S}(\frac{1}{z(t)} - V_0))$ ,  $c_1 = \frac{1}{M}$  et  $f(q_{outil}, t) = \beta_3 [q_{outil}(t) + q_2(t) - q_3(t)]$ .

Il est facile de vérifier que  $(0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S\rho_1 L}, 0)$  est l'équilibre du système (4.7)-(4.11).

L'idée principale de cette partie est l'étude de stabilité de l'équation différentielle ordinaire décrivant le MPD avec  $(u_3, u_2)$  est le vecteur commande. Rappelons que l'objectif est de contrôler la pression/débit injectée par la pompe et la vitesse de pénétration de l'outil.

**Théorème 4.2.1** *Soit  $A < 0$  telle que la quantité  $\beta_3 P_3(t)Sz(t) + Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S\rho_1 L}) + A$  est différente de zéro et le vecteur commande décrit par :*

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S\rho_1 L}) - v(t) + \Phi_2(q_{outil}, P_3, z) \\
&+ \dot{\Phi}_2(P_3, z) + \beta_3 Sz(t)P_3(t) \\
u_3(t) &= -\frac{P_1 - \Phi_1(q_{outil}, P_3, z)}{c} + \frac{c - c_1}{c}q_{outil}(t) + \frac{1}{c}\dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z)
\end{aligned}$$

où

$$\Phi_1(q_{outil}, P_3, z) = P_3 - \left(\frac{1}{c_1}q_{outil} - F(q_{outil})\right) - \frac{1}{c_1}h(z)$$

et

$$\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) = \left(\frac{P_3(t)}{\beta_3 P_3(t) S z(t) + S z^2(t)} + \left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right)^2 + \left(\frac{P_3(t)}{2} + f(q_{outil}, t)z(t)\right)^2\right) + A$$

satisfaisant l'équilibre  $\Phi_2(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) = 0$  et  $\Phi_1(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) = 0$ , alors après avoir injecté les commandes, le système (4.7)-(4.11) en boucle fermé est asymptotiquement stable.

**Preuve** Considérons d'abord le sous-système

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1 P_1(t) - c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z) \quad (4.12)$$

où la variable d'état  $P_1$  est traitée comme étant une commande. On remplace  $P_1$  par la loi de contrôle virtuelle suivante dans (4.12)

$$\Phi_1(q_{outil}, P_3, z) = P_3 - \left(\frac{1}{c_1}q_{outil} - F(q_{outil})\right) - \frac{h(z)}{c_1}$$

avec  $\Phi_1(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) = 0$ . On obtient alors  $\dot{q}_{outil}(t) = -q_{outil}$  pour lequel on peut associer la fonction de Lyapunov  $L_1(t) = \frac{1}{2}q_{outil}^2$  et montrer que (4.7) est asymptotiquement stable à l'équilibre.

Maintenant, considérons la nouvelle variable d'état

$$\zeta_1 = P_1 - \Phi_1(q_{outil}, P_3, z)$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{q}_{outil}(t) &= c_1 \zeta_1(t) - q_{outil}(t) \\ \dot{\zeta}_1(t) &= -\dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z) + c u_3(t) - c q_{outil}(t) \end{aligned}$$

Nous prenons la fonction de Lyapunov

$$L_2(t) = L_1(t) + \frac{1}{2}\zeta_1^2 = \frac{1}{2}(q_{outil}^2 + \zeta_1^2)$$

La dérivé par rapport au temps de  $L_2$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= \dot{q}_{outil}q_{outil} + \dot{\zeta}_1\zeta_1 \\ &= q_{outil}(c_1\dot{\zeta}_1 - \dot{q}_{outil}) + \zeta_1(-\dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z) + cu_3(t) - cq_{outil}(t)) \\ &= -q_{outil}^2 - \zeta_1^2 + \zeta_1(\zeta_1 + (c_1 - c)q_{outil} - \dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z) + cu_3(t)) \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de contrôle s'écrit

$$u_3(t) = -\frac{\zeta_1}{c} + \frac{c - c_1}{c}q_{outil}(t) + \frac{1}{c}\dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z)$$

cela implique que  $\dot{L}_2(t) = -2L_2(t)$ . D'où (4.7)-(4.8) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(q_{outil}, P_1) = (0, 0)$ .

Dans cette étape, nous considérons les dynamiques restantes dans (4.7)-(4.11)

$$\dot{P}_3(t) = f(q_{outil}, t)z(t) - \beta_3z(t)Sv(t) \quad (4.13)$$

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)v(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{v}(t) = u_2(t) \quad (4.15)$$

Commençons par

$$\dot{P}_3(t) = f(q_{outil}, t)z(t) - \beta_3Sz(t)v(t)$$

$$\dot{z} = -Sv(t)z^2(t)$$

où  $f(q_{outil}, t) = \beta_3(q_{outil}(t) + q_2(t) - q_3(t))$ , et nous introduisons la loi de contrôle virtuelle qui satisfait

$$\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) = \frac{P_3^2(t) + (z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + S\rho_1L})^2 + (\frac{1}{2}P_3(t) + f(q_{outil}, t)z(t))^2}{\beta_3P_3(t)Sz(t) + Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + S\rho_1L}) + A}$$

vérifiant  $\Phi_2(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) = 0$ .

Alors nous obtenons le système suivant :

$$\dot{P}_3(t) = f(q_{outil}, t)z(t) - \beta_3 z(t)S\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) \quad (4.16)$$

$$\dot{z} = -Sz^2(t)\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) \quad (4.17)$$

Soit la fonction de Lyapunov associée à cette écriture :

$$L_3(t) = \frac{1}{2}(P_3^2 + (z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})^2)$$

Sa dérivation par rapport au temps, donne

$$\begin{aligned} \dot{L}_3(t) &= \dot{P}_3 P_3 + \dot{z}(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) \\ &= f(q_{outil}, t)z(t)P_3(t) - \beta_3 Sz(t)P_3(t)\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) \\ &\quad - Sz^2(t)(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})\Phi_2(q_{outil}, P_3, z) \end{aligned}$$

Maintenant, à partir de l'hypothèse donnée dans le Théorème 4.2.1 et on remplace

$\Phi_2(q_{outil}, P_3, z)$  par son expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{L}_3(t) &\leq f(q_{outil}, t)z(t)P_3(t) - \left[ P_3^2(t) + (z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})^2 + (\frac{1}{2}P_3(t) + f(q_{outil}, t)z(t))^2 \right] \\ &\leq -P_3^2(t) - (z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})^2 \\ &\leq -2L_3(t) \end{aligned}$$

Ce qui montre que (4.13)-(4.14) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(P, z) = (0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})$ .

À présent, nous proposons l'état virtuel suivant,  $\zeta_2(t) = v(t) - \Phi_2(q_{outil}, P, z)$  pour transformer le système (4.13)-(4.15) sous cette forme

$$\dot{P}_3(t) = f(q_{outil}, t)z(t) - \beta_3 Sz(t)\zeta_2(t) - \beta_3 z(t)S\Phi_2(q_{outil}, P_3, z)$$

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)\zeta_2(t) - Sz^2(t)\Phi_2(q_{outil}, P_3, z)$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = u_2(t) - \dot{\Phi}_2(P_3, z)$$

Le sous-système (4.16)-(4.17) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(P, z) = (0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})$ .

Ainsi, nous proposons la fonction de Lyapunov  $L_4(t) = L_3(t) + \frac{1}{2}\zeta_2^2$ . Cette dernière a pour dérivée,

$$\begin{aligned}
\dot{L}_4(t) &= \dot{P}_3(t)P_3(t) + \dot{z}(t)\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right) + \dot{\zeta}_2(t)\zeta_2(t) \\
&\leq -2L_3 + \dot{\zeta}_2(t)\zeta_2(t) - \beta_3 S z(t)\zeta_2(t)P_3(t) - S z^2(t)\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right)\zeta_2(t) \\
&\leq -2L_3(t) - \zeta_2^2(t) + (\zeta_2(t) + u_2(t) - \dot{\Phi}_2(P_3, z))\zeta_2(t) \\
&\quad - \beta_3 S z(t)\zeta_2(t)P_3(t) - S z^2(t)\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right)\zeta_2(t) \\
&\leq -2L_4(t) + (\zeta_2(t) + u_2(t) - \dot{\Phi}_2(P_3, z) - \beta_3 S z(t)P_3(t) \\
&\quad - S z^2(t)\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right))\zeta_2(t)
\end{aligned}$$

Maintenant, on peut proposer la loi de contrôle en

$$u_2(t) = S z^2(t)\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right) - \zeta_2(t) + \dot{\Phi}_2(P_3, z) + \beta_3 S z(t)P_3(t)$$

traduisant

$$\dot{L}_4(t) \leq -2L_4(t)$$

A ce stade, nous introduisons la fonction de Lyapunov globale pour le système (4.7)-(4.11)

$$\begin{aligned}
\Xi(t) &= \frac{1}{2}\left(q_{outil}^2 + \left(P_1 - \Phi_1(q_{outil}, P_3, z)\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(P_3^2(t) + \left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(v(t) - \Phi_2(q_{outil}, P_3, z)\right)^2
\end{aligned}$$

Il est trivial de vérifier que

$$\dot{\Xi} = \dot{L}_2 + \dot{L}_4 \leq -2(L_2 + L_4) \leq -2\Xi$$

Ce qui assure la stabilité asymptotique de (4.7)-(4.11) à l'équilibre. □

**Remarque** On considère que le phénomène des vibrations de torsion est indépendant du système d'injection, ceci implique que la vitesse de pénétration de l'outil n'est pas

impactée par la pression du fluide injecté. En effet, dans le cas contraire, on aura affaire à un modèle couplant la dynamique de torsion ainsi que le comportement fluide injecté par le système hydraulique à la surface.

### 4.2.3 Cas où le débit $q_2 \triangleq q_2(t, \Omega)$

Ce cas se présente sous une vitesse de rotation  $\Omega$  non constante de l'ensemble train-tiges. Alors, le débit  $q_2$  (interaction outil/sol) dépend de l'état du système. Ainsi, on peut exprimer :

$$\begin{aligned} q_2(t, \Omega) &= \rho_3 S r (\Omega(t) + d(t)) \\ I \dot{\Omega} &= u_1(t) \end{aligned}$$

où  $I$  l'inertie du train de tiges par unité de longueur,  $r$  le rayon de l'espace annulaire et  $u_1$  le couple appliqué au train de tiges par la table de rotation. Comme le débit  $q_2$  ne peut résulter uniquement de la vitesse de rotation  $\Omega(t)$  du train-trépan, c'est-à-dire, que d'autres facteurs peuvent contribuer à la forme de  $q_2$  selon la nature du sol, on procède par le prise en compte un terme de perturbation borné. D'où  $d(t)$  dans l'expression du débit regroupe tout ce qui est identifiable et entraînant une vitesse  $\Omega(t)$  différente de celle développée à la surface. Aux objectifs, traduisant le contrôle du système de pression, se rajoute la vitesse de rotation de tiges. Par conséquent  $(u_1, u_2, u_3)$  se présente comme le vecteur de contrôle associé à l'état  $(\Omega, v, P_1)$ . L'étude se base sur le système suivant

$$\dot{P}_1(t) = c u_3(t) - c q_{outil}(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1 P_1(t) - c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z) \quad (4.19)$$

$$\dot{P}_3(t) = T(q_{outil}, t) z(t) + \beta_3 \rho_3 S r (\Omega(t) + d(t)) z(t) - \beta_3 z(t) S v(t) \quad (4.20)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{I} u_1(t) \quad (4.21)$$

$$\dot{z}(t) = -S z^2(t) v(t) \quad (4.22)$$

$$\dot{v}(t) = u_2(t) \quad (4.23)$$

avec  $T(q_{outil}, t) = \beta_3 [q_{outil} - q_3]$ ,  $u_3$  est l'entrée de commande,  $u_1$  est le couple appliqué au train de tiges par la table de rotation et  $u_2$  agit sur la vitesse de pénétration.

Nos résultats de stabilité sont évoqués dans le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2** *Soient les trois lois de contrôles suivantes*

$$\begin{aligned} u_1(t) &= I \left( -\rho_3 S r \beta_3 P_3(t) z(t) + \dot{\Phi}_3 - \Omega + \Phi_3 \right) \\ u_2 &= -v + \Phi_4 + S z^2 \left( z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L} \right) + \dot{\Phi}_4 \\ u_3(t) &= -\frac{P_1 - \Phi_1(q_{outil}, P_3, z)}{c} + \frac{c - c_1}{c} q_{outil}(t) + \frac{1}{c} \dot{\Phi}_1(q_{outil}, P_3, z) \end{aligned}$$

avec

$$\Phi_1(q_{outil}, P_3, z) = P_3 - \left( \frac{1}{c_1} q_{outil} - F(q_{outil}) \right) - \frac{h(z)}{c_1},$$

$$\Phi_3(P_3, z, v) = \frac{-P_3 - T(q_{outil}, t) z(t) - \rho_3 S r \beta_3 d(t) z(t) + \beta_3 S z(t) v(t)}{\rho_3 S r \beta_3 z(t)} \quad (4.24)$$

$$\Phi_4(z) = \frac{z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L}}{S z^2(t)}$$

satisfaisant l'équilibre  $\Phi_1(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}) = \Phi_3(0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}, 0) = 0$ , et  $0 = \Phi_4(\frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L})$ .

Alors le système (4.18)-(4.23) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(q_{outil}, P_1, P_3, \Omega, z, v) = (0, 0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + S \rho_1 L}, 0)$ .

**Preuve** Rappelons que le sous-système (4.18)-(4.19) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(q_{outil}, P_1) = (0, 0)$  (voir Théorème 4.2.1), par conséquent le sous-système (4.18)-(4.19) est asymptotiquement stable à l'équilibre.

Maintenant, considérons le sous-système

$$\begin{aligned} \dot{P}_3(t) &= T(q_{outil}, t) z(t) + \beta_3 \rho_3 S r (\Omega(t) + d(t)) z(t) - \beta_3 z(t) S v(t) \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{I} u_1(t) \end{aligned}$$



Nous introduisons la loi de contrôle virtuelle donnée par (4.24). Nous proposons  $L_5(t) = \frac{1}{2}P_3^2$ , alors, nous trouvons  $\dot{L}_5(t) \leq -P_3^2$ . Soit  $\xi_3(t) = \Omega(t) - \Phi_3$  l'état de contrôle virtuel, alors nous obtenons le sous-système

$$\begin{aligned}\dot{P}_3(t) &= T(q_{outil}, t)z(t) + \beta_3\rho_3Sr(\xi_3(t) + \Phi_3 + d(t))z(t) - \beta_3z(t)Sv(t) \\ \dot{\xi}_3 &= -\dot{\Phi}_3 + \frac{1}{I}u_1(t)\end{aligned}$$

À présent, nous introduisons la fonction de Lyapunov  $L_6(t) = \frac{1}{2}(P_3^2(t) + \xi_3^2(t))$ . Nous dérivons  $L_6$

$$\begin{aligned}\dot{L}_6(t) &= \dot{P}_3P_3 + \dot{\xi}_3\xi_3 \\ &= P_3(T(q_{outil}, t)z(t) + \beta_3\rho_3Sr z(t)\Phi_3 + \beta_3\rho_3Srd(t)z(t) \\ &\quad - \beta_3Sz(t)v(t)) + \xi_3(t)(P_3(t)\rho_3Sr\beta_3z(t) - \dot{\Phi}_3 + \frac{1}{I}u_1(t))\end{aligned}$$

Nous sélectionnons la loi de contrôle

$$u_1(t) = I\left(-\rho_3Sr\beta_3P_3(t)z(t) + \dot{\Phi}_3 - \xi_3(t)\right)$$

D'où  $\dot{L}_6(t) \leq -2L_6(t)$ . Finalement, soit le dernier sous-système

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -Sz^2(t)v(t) \\ \dot{v}(t) &= u_2(t)\end{aligned}$$

Nous considérons  $\Phi_4 = \frac{z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}}{sz^2(t)}$  comme une loi de contrôle virtuelle et la fonction de Lyapunov  $L_7(t) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}\right)^2$ , nous obtenons  $\dot{L}_7(t) \leq -2L_7$ . Soit  $\xi_4 = v - \Phi_4$  l'état virtuel. Ainsi nous obtenons le sous-système

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -Sz^2(t)\xi_4(t) - Sz^2(t)\Phi_4 \\ \dot{\xi}_4(t) &= -\dot{\Phi}_4 + u_2(t)\end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction de Lyapunov  $L_8(t) = L_7(t) + \frac{1}{2}\xi_4^2(t)$ . Nous Dérivons  $L_8(t)$  par rapport au temps, nous trouvons

$$\begin{aligned}\dot{L}_8(t) &= \dot{L}_7(t) + \xi(t)\dot{\xi}(t) \\ &\leq -2\dot{L}_7(t) + \xi_4(-Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}) - \dot{\Phi}_4 + u_2(t)) \\ &\leq -2\dot{L}_8(t) + \xi_4(\xi_4 - Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}) - \dot{\Phi}_4 + u_2(t))\end{aligned}$$

Alors la loi de contrôle  $u_2$  est donnée par

$$u_2 = -\xi_4 + Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}) + \dot{\Phi}_4$$

Par conséquent, soit la fonction de Lyapunov

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}[q_{outil}^2 + (P_1 - \Phi_1)^2 + P_3^2 + (\Omega - \Phi_3)^2 + (z - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL})^2 + (v - \Phi_4)^2]$$

Alors

$$\begin{aligned}\dot{\mathfrak{L}} &= \dot{L}_2 + \dot{L}_6 + \dot{L}_8 \\ &\leq -2(L_2 + L_6 + L_8) \leq -2\mathfrak{L}\end{aligned}$$

En conclusion la démarche proposée et détaillée ci-dessus prouve que le système (4.18)-(4.23) est asymptotiquement stable à l'équilibre.

### 4.3 Simulation

Les paramètres physiques utilisés dans la simulation sont donnés dans la table 4.1. Le fluide dans un forage est un élément clé, car il évacue les déblais qui s'accumulent au fond du trou, il stabilise les parois du trou lorsque ce dernier est encore sans cuvelage et enfin il peut aussi lubrifier et refroidir l'outil en activité. Une "perte de fluide" indique habituellement la présence des fractures ou autres vides dans les terrains traversés. La perte de fluide mène habituellement à une diminution de la pression, ce qui peut poser des problèmes majeurs durant l'opération. On s'intéresse au fluide en "circulation directe"

Variable	Valeur	Unité	Description
$L$	2000	$m$	Longueur de la chaîne de forage
$I$	0.095	$kg.m$	Inertie par unité de longueur
$\rho_1 = \rho_3$	1250	$kg.m^{-3}$	Densité de la boue de forage
$\rho_3$	1250	$kg.m^{-3}$	Densité annulaire
$M$	8300	$kg.m^{-4}$	Densité intégrée par section
$\beta_1 = \beta_3$	24750	$bar$	Module de la compressibilité de la boue
$V_0$	110	$m^3$	Volume initial dans la couronne
$g$	9.81	$m.s^{-2}$	Gravité
$S$	$\pi \times (0.25)^2$	$m^2$	Surface annulaire
$c_d$	0.61		
$F_a$	$0.003.10^6$	$bar.s^2.m^{-6}$	Coefficient de frottement
$d(t)$	$sin(t)$		Perturbation

TABLE 4.1 – Paramètres physiques [52]

(celui qui descend par le train de tiges) et au fluide en "circulation inverse" (celui qui monte par l'espace annulaire). En l'absence d'un système de mesure autour de la couronne, on peut reconstituer le débit dû à la boue sortant à partir des autres dynamiques, données par (4.18)- (4.23)

$$q_3 = c_d S \sqrt{\frac{2}{\rho_3} (P_{fond} - P_3 + \rho_3 \frac{g}{S} (\frac{1}{z} - V_0))}$$

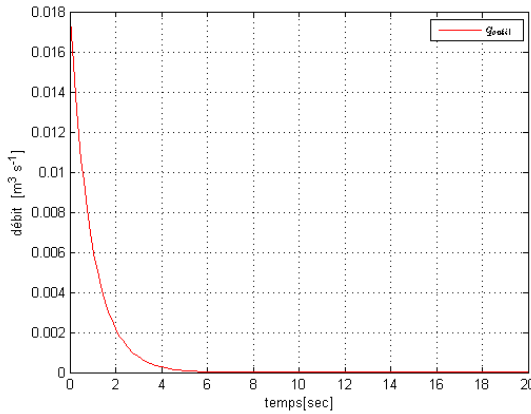
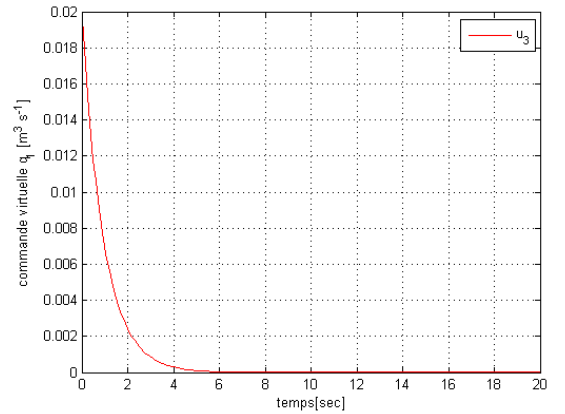
(a) Débit à travers l'outil de forage  $q_{outil}$ (b) Débit injecté par la pompe  $q_1(t) \triangleq u_3(t)$ 

FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des débits

Comme prévu par les théorèmes 4.2.1 et 4.2.2, les lois de contrôle proposées stabilisent toutes les variables de forage y compris la pression au fond du puits (Fig. 4.2- 4.4).

Le déplacement de l'outil permet de construire la pression au fond du trou. La pression au fond du trou peut être décrite par la pression  $P_3$  à travers l'espace de la couronne. En appliquant la relation de Bernoulli à travers l'espace annulaire, on peut reconstituer la pression au fond du puits :

$$P_{fond} = P_3 - \frac{\rho_3 g}{S} \left( \frac{1}{z} - V_0 \right) + F_a q_{outil}^2$$

où  $F_a$  désigne le coefficient de frottement dans l'espace annulaire. Nous remarquons que toutes les simulations impliquent une convergence suffisante des variables du système à leurs valeurs attendues (Fig. 4.2- 4.4). Par exemple, notons que la hauteur du puits  $y$  converge vers  $\frac{\rho_1 L}{\rho_3} = 2000m$  (Fig. 4.4, (a)). En appliquant les deux lois de contrôle (agissant par la vitesse de rotation du train de tiges  $\Omega(t)$  et la vitesse de pénétration  $v(t)$ , Fig. 4.3), l'équilibre est montré asymptotiquement stable.

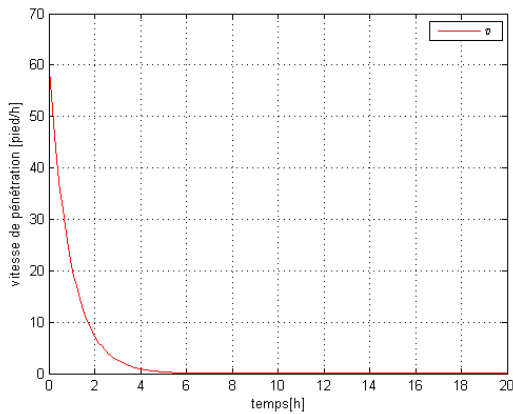
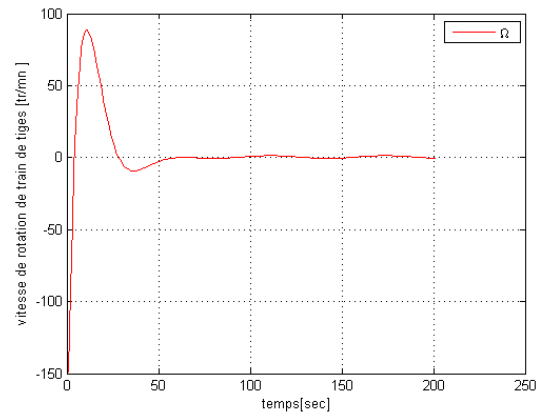
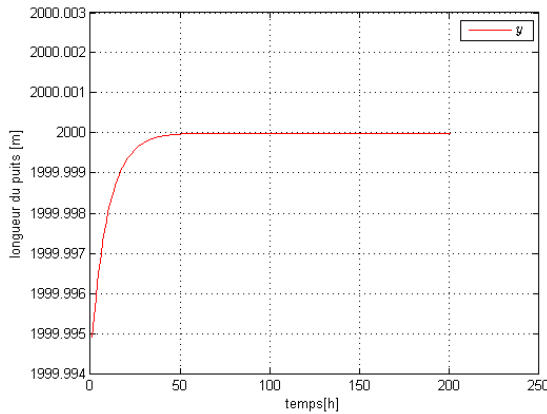
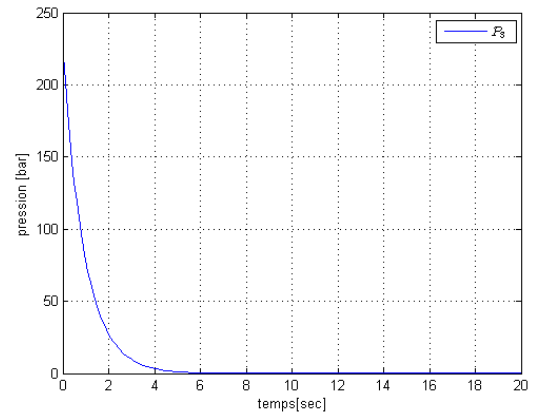
(a) Vitesse de pénétration  $v(t)$ (b) Vitesse de rotation du train de tiges  $\Omega(t)$ 

FIGURE 4.3 – Présentation du comportement de deux vitesses

(a) Longueur du puits  $y(t)$ (b) Pression au fond du trou  $P_3(t)$ FIGURE 4.4 – Évolution temporelle de la longueur du puits  $y(t)$  et de la pression au fond du trou  $P_3(t)$ 

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au développement d'un modèle MPD qui sert à étudier le processus de lubrification au cours du forage. En effet, ce procédé consiste à injecter un fluide (boue, eau, ...) par le derrick le long du train de tiges. Ceci permet de remonter les déblais en surface et de refroidir l'outil. À savoir aussi que la vitesse optimale de remontée des déblais augmente avec l'augmentation de la taille des cuttings et de ROP. Comme perspective, il existe certains paramètres qui ne sont pas mesurables dans notre modèle. Donc il est utile de construire un observateur de dimension finie à l'image de dimension du système.



# Chapitre 5

## Suppression de vibration en présence d'une injection fluïdique : couplage EDP-EDO

### 5.1 Introduction

L'extraction du pétrole consiste à la création d'un forage de plusieurs centaines de mètres de profondeur dans le sol jusqu'à ce qu'on atteigne le pétrole et le gaz. Le système de forage rotary comprend une tête d'injection, une tige d'entraînement qui passe à travers une table de rotation et qui est reliée au train de tiges et en bout de la colonne un outil de forage (appelé trépan) creusant le sol. La tige d'entraînement et l'outil de forage, tous, subissent une rotation via la table de rotation. Au dernier siècle, de nombreux efforts de recherches sur la modélisation et le contrôle des systèmes forages ont été proposés. Malgré le développement d'une vaste approche pour éliminer les vibrations de forage : axiales, latérales et de torsions, de nos jours de nombreux problèmes restent ouverts (plus de détails dans [37]).

La dynamique de torsion du train de tiges est décrite par une équation d'onde avec un terme d'amortissement. Au cours des opérations de forages, la tige de forage dépend d'un système de boue liquide qui doit être injecté. Il est nommé la pression de forage gérée (Managed Pressure Drilling, MPD) [52]. En fait, la raison principale de ce système est de

réguler la pression au-dessus des pores du réservoir. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à stabiliser le MPD de différentes façons [51, 22]. La dérivation d'un modèle hydraulique est décrite par les lois fondamentales suivantes [27] : la viscosité du fluide, la conservation de la masse, la conservation du moment et la conservation de l'énergie. Le défi principal de ce travail, est d'étudier le système MPD dans l'industrie de pétrole couplé avec la dynamique de vibration de torsion.

La théorie de Lyapunov et l'approche du backstepping sont l'une des plus connues techniques utilisées pour trouver la stabilité des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles [78, 71, 59, 33, 34, 39, 41, 55, 40, 58] ... etc. Par conséquent, ces dernières techniques sont utilisées pour prouver la stabilité du système couplé torsion-boue.

Ce chapitre est structuré comme suit : dans la section 5.2, nous rappelons l'équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites qui permettent de décrire la dynamique de vibration de torsion (EDP) et nous présentons la dynamique de la boue et avance du train de tiges (EDO). On commence par introduire le système couplé pour lequel on étudiera, en détails, l'existence et l'unicité de la solution puis, on montre la stabilité du système couplé à l'aide de théorie de Lyapunov. Dans la section 5.3, à l'aide de la transformation d'Alembert, le modèle de torsion-boue couplé est transformé en un système d'équations différentielles ordinaires à retard du type neutre. Les résultats de simulation, la conclusion et les perspectives font l'objectif de la section 5.4.

## **5.2 Couplage du système de torsion avec le modèle hydraulique**

Le problème de l'endommagement des réservoirs par les fluides de forage et de son impact sur la production des puits pétroliers est souvent évoqué par différents intervenants. Depuis 1990, des dizaines de puits horizontaux ont été forés, avec comme objectifs la caractérisation complète du réservoir d'une part, et d'autre part, le développement des interzones et des autres niveaux réservoir. Cependant, l'inconvénient des puits horizontaux est lié au déclin rapide de production, enregistré avec un taux annuel plus de 15



% [8]. L'endommagement des drains traversés par filtration du fluide de forage ne peut être totalement évité à cause de la surpression nécessaire que doit exercer la colonne de boue sur le réservoir. Notre approche tentera non seulement d'appréhender l'impact des fluides de forage et des méthodes d'étude des processus d'endommagement des roches réservoirs, mais également l'incidence de cet endommagement sur la production pétrolière. Ce phénomène est étroitement lié à la nature de la roche et aux interactions fluides de forage-roche.

Rappelons que la propagation des ondes de torsion  $\vartheta(t, \varsigma)$  le long d'une tige de longueur  $L$  est décrite par l'équation hyperbolique suivante :

$$GJ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varsigma^2}(t, \varsigma) - I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, \varsigma) - d \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, \varsigma) = 0 \quad (5.1)$$

$\varsigma \in (0, L), t \in (0, +\infty)$ , dans laquelle les conditions aux limites sont données par :

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, 0) = c_a \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, 0) - \Omega(t) \right) \quad (5.2)$$

$$GJ \frac{\partial \vartheta}{\partial \varsigma}(t, L) - I_b \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(t, L) = -T \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L) \right) \quad (5.3)$$

où l'inertie et le module de cisaillement sont désignés par  $I$  et  $G$ . L'extrémité ( $\varsigma = L$ ) est soumis à un couple sur l'outil  $T(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(t, L))$  qui tient compte du frottement causé par l'interaction de l'outil avec le sol,  $I_b$  l'inertie de l'outil,  $J$  le moment d'inertie,  $d$  l'amortissement du train de tiges, et  $\Omega$  l'entrée de contrôle (vitesse angulaire due à la table de rotation). On propose le changement de variable suivant [13] :

$$u(t, x) = \vartheta \left( L \sqrt{\frac{I}{GJ}} t, L(1-x) \right), \quad x \in (0, 1), \quad (5.4)$$

nous obtenons

$$\partial_{tt} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) - \lambda \partial_t u(t, x), \quad x \in (0, 1) \quad (5.5)$$

$$\partial_x u(t, 1) = \tau_1(t) \quad (5.6)$$

$$\partial_{tt} u(t, 0) = a \partial_x u(t, 0) + aF(\partial_t u(t, 0)) \quad (5.7)$$

où

$$\tau_1(t) = \frac{c_a L}{GJ} \left( \Omega(t) - \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 1) \right), \lambda = dL \sqrt{\frac{1}{IGJ}},$$

$$F(\partial_t u(t, 0)) = -\frac{L}{GJ} T \left( \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0) \right) \text{ et } a = \frac{LI}{I_b}.$$

Il est possible de linéariser la condition aux limites (5.7) autour de la trajectoire de référence comme dans [13]

$$\bar{u}(t, x) = \frac{\lambda w_r}{2} x^2 - F(w_r)x + w_r t + u_0 \quad (5.8)$$

tel que  $w_r = \partial_t \bar{u}(t, x)$ . Nous obtenons un nouveau système

$$\partial_{tt} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) - \lambda \partial_t u(t, x) \quad (5.9)$$

$$\partial_x u(t, 1) = \tau_1(t) \quad (5.10)$$

$$\partial_{tt} u(t, 0) = a \partial_x u(t, 0) + ab \partial_t u(t, 0) \quad (5.11)$$

tel que  $b = \frac{\partial F}{\partial w}(w_r)$  et  $w(t) = \partial_t u(t, 1)$ .

Au cours du forage, les déblais "cuttings" doivent être enlevés rapidement que possible pour empêcher l'obstruction annulaire. Cela peut devenir plus compliqué dans le cas du puits dévié où les déblais ont tendance à former un lit de copeaux sur le côté bas du trou. Plus loin, les copeaux produits dans quelques formations ont tendance à être réactifs dans les fluides à base d'eau. Ils peuvent se dégrader chimiquement, mécaniquement ou s'y disperser en fonction du temps et font changer par conséquent les propriétés de la boue. Les fluides de forage sont composés de matières solides en suspension dans une solution. Il est impératif que ces particules qui composent la phase solide restent suspendues pour que la boue ne perde pas ses caractéristiques. Si les particules se déposent, plusieurs problèmes peuvent se produire et les conséquences peuvent être coûteuses. La stabilité de la garniture de forage dépend d'un système de boue du fluide qui doit injecté. La pression du fluide au fond peut endommager l'ensemble du système. Il est important d'intégrer la dynamique de la pression dans cette étude sous la forme : EDP-EDO.

Rappelons que le modèle de la dynamique de la boue et avance de train de tiges est décrit

par :

$$\begin{aligned}
M\dot{q}_{outil}(t) &= P_1(t) - P_3(t) - F(q_{outil}) + g(\rho_1 L - \rho_3 y(t)) \\
\frac{V_1}{\beta_1}\dot{P}_1(t) &= q_1(t) - q_{outil}(t) \\
(V_0 + Sy(t))\dot{P}_3(t) &= \beta_3 [q_{outil}(t) + q_2(t) - q_3(t) - Sv(t)] \\
\dot{y}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= \tau_3(t)
\end{aligned}$$

À partir du changement de variable suivant  $z(t) = \frac{1}{V_0 + Sy(t)}$ , le système donné ci-dessous s'écrit sous cette forme

$$\begin{aligned}
\dot{q}_{outil}(t) &= c_1 P_1(t) - c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z) \\
\dot{P}_1(t) &= c\tau_2(t) - cq_{outil}(t) \\
\dot{P}_3(t) &= \beta_3 [q_{outil}(t) + q_2(t) - q_3(t)]z(t) - \beta_3 z(t)Sv(t) \\
\dot{z}(t) &= -Sz^2(t)v(t) \\
\dot{v}(t) &= \tau_3(t)
\end{aligned}$$

avec  $c_1 = \frac{1}{M}$ ,  $c = \frac{\beta_1}{V_1}$ ,  $h(z) = c_1 g(\rho_1 L - \frac{\rho_3}{S}(\frac{1}{z(t)} - V_0))$ .

Le flux  $q_2$  décrivant la quantité d'écoulement à travers la surface de contrôle (outil/sol) dans le système de forage rotary s'écrit comme suit

$$q_2 = \rho_3 Sr \partial_t \vartheta(L \sqrt{\frac{I}{GJ}} t, L) = \epsilon \partial_t u(t, 0)$$

avec  $\epsilon = \frac{\rho_3 Sr}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}}$  et  $r$  le rayon de l'espace annulaire (Fig. 5.1). Il est à noter que ce flux dépend de la variation de l'angle de torsion en fonction du temps, ce qui assure le couplage entre le deux systèmes. Alors, nous obtenons le système couplé EDP-EDO suivant :

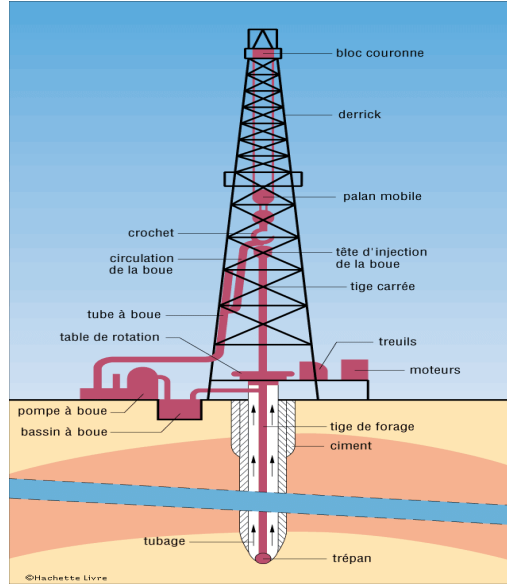


FIGURE 5.1 – Circulation du fluide

$$\partial_{tt}u(t, x) = \partial_{xx}u(t, x) - \lambda\partial_t u(t, x) \quad (5.12)$$

$$\partial_x u(t, 1) = \tau_1(t) \quad (5.13)$$

$$\partial_{tt}u(t, 0) = a\partial_x u(t, 0) + ab\partial_t u(t, 0) \quad (5.14)$$

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1 P_1(t) - c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z)$$

$$\dot{P}_1(t) = c\tau_2(t) - cq_{outil}(t)$$

$$\dot{P}_3(t) = \beta_3(q_{outil}(t) - q_3)z(t) + \beta_3\epsilon\partial_t u(t, 0)z(t) - \beta_3 z(t)sv(t)$$

$$\dot{z}(t) = -S z^2(t)v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \tau_3(t). \quad (5.15)$$

Le challenge dans cette section, est l'étude de stabilité des équations couplées EDP-EDO obtenues en considérant  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  comme étant le vecteur commande. Il s'agit par conséquent d'élaborer les entrées de commande adéquates permettant d'atténuer/ supprimer les vibrations de torsion en agissant sur les pressions aux différents niveaux du système. La première question qui se pose : le problème, mathématiquement décrit ci-dessus est-il bien posé ?

### 5.2.1 Existence et unicité de la solution

Le but de cette section est de prouver l'existence et l'unicité de la solution du système couplé de torsion-boue contrôlé à l'aide du théorème de Lumer-Phillips' et de la théorie des opérateurs (voir [6], [30]). Soit  $T > 0$ , la solution du problème de Cauchy est écrite comme suit

$$\partial_{tt}u(t, x) = \partial_{xx}u(t, x) - \lambda\partial_tu(t, x) \quad (5.16)$$

$$\partial_xu(t, 1) = \tau_1(t) \quad (5.17)$$

$$\partial_{tt}u(t, 0) = a\partial_xu(t, 0) + aF(\partial_tu(t, 0)) \quad (5.18)$$

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1R(q_{outil}) + h(z)$$

$$\dot{P}_1(t) = c\tau_2(t) - cq_{outil}(t)$$

$$\dot{P}_3(t) = \beta_3(q_{outil}(t) - q_3)z(t) + \beta_3\epsilon\partial_tu(t, 0)z(t) - \beta_3Sz(t)v(t)$$

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \tau_3(t) \quad (5.19)$$

$$u(0, x) = \alpha(x), \quad u_t(0, x) = \beta(x), \quad q_{outil}(0) = q_{outil}^0,$$

$$P_1(0) = P_1^0, P_3(0) = P_3^0, z(0) = z^0, v(0) = v^0 \quad (5.20)$$

tel que  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $\alpha \in K := \{u \in H^1(0, 1), u(t, 0) = 0\}$ ,  $\beta \in L^2(0, 1)$ .  $\tau_i(t)$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont les lois de contrôles. Les variables  $q_{outil}^0, P_1^0, P_3^0, z^0, v^0$  sont les valeurs imposées à la solution à  $t = 0$ . Considérons l'espace vectoriel  $K$  qui est muni du produit scalaire  $\langle u^1, u^2 \rangle_K = a \int_0^1 u_x^1 u_x^2 dx$ . Il est évident que  $K$  est un espace de Hilbert.

Nous introduisons  $Z = (u(t, x), u_t(t, x), u_t(t, 0), q_{outil}(t), P_1(t), P_3(t), z(t), v(t))^T$ . Le système (5.16)-(5.20) est réécrit de façon compacte

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + H(Z(t)) + f(t) \quad (5.21)$$

$$Z(0) = Z_0 \quad (5.22)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{xx} & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H(Z(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aF(u_t(t,0)) \\ -c_1 R(q_{outil}) + h(z) \\ 0 \\ \beta_3 q_{outil} z - \beta_3 S z v + \beta_3 \epsilon z u_t(t,0) \\ -S z^2 v \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(x-1)\tau_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ c\tau_2 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

où  $k_1 = -a \langle \delta'_0(x), \cdot \rangle$  et tel que  $\delta$  désigne la fonction de Dirac,  $\langle \delta'_1(x), u(t,x) \rangle = -u_x(t,1)$  et  $\langle \delta'_0(x), u(t,x) \rangle = -u_x(t,0)$ .

Tout d'abord, considérons la partie linéaire du problème (5.21)-(5.22), nous proposons le théorème suivant.

**Théorème 5.2.1** *L'opérateur  $A$  génère un  $C_0$  semi-groupe de contractions  $e^{At}$ ,  $t \geq 0$ .*

**Preuve** Soit  $X = \{Z : u \in K, u_t \in L^2([0,1]), u_t(t,0) \in \mathbb{R}, q_{outil} \in \mathbb{R}, P_1 \in \mathbb{R}, P_3 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ .

Pour montrer que  $A$  génère un  $C_0$  semi-groupe des contractions sur  $X$ , il est équivalent à prouver que l'opérateur  $A$  est dissipatif et  $(I - A)$  est surjectif. Nous définissons

$$Z^1 = (u^1(t,x), u_t^1(t,x), u_t^1(t,0), q_{outil}^1(t), P_1^1(t), P_3^1(t), z^1(t), v^1(t))^T$$

et

$$Z^2 = (u^2(t, x), u_t^2(t, x), u_t^2(t, 0), q_{outil}^2(t), P_1^2(t), P_3^2(t), z^2(t), v^2(t))^T$$

L'espace vectoriel  $X$  est muni du produit scalaire suivant

$$\begin{aligned} \langle Z^1, Z^2 \rangle_X &= a \langle u^1, u^2 \rangle_K + a \langle u_t^1, u_t^2 \rangle_{L^2[0,1]} + \langle u_t^1(t, 0), u_t^2(t, 0) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &+ \langle q_{outil}^1, q_{outil}^2(t) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle P_1^1(t), P_1^2(t) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle P_3^1(t), P_3^2(t) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle z_1^1(t), z_1^2(t) \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Notons par  $\| \cdot \|$  la norme dans  $X$  associée au produit scalaire.

Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  l'opérateur linéaire défini par  $D(A) = \{Z \in X, u \in H^2(0, 1), u_t \in K, u_x(t, 1) = 0, u_t(t, 0) \in \mathbb{R}, q_{outil} \in \mathbb{R}, P_1 \in \mathbb{R}, P_3 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$

Nous avons

$$A \begin{pmatrix} u(t, x) \\ u_t(t, x) \\ u_t(t, 0) \\ q_{outil}^1(t) \\ P_1^1(t) \\ P_3^1(t) \\ z^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t(t, x) \\ \partial_{xx}u(t, x) - \lambda u_t(t, x) \\ au_x(t, 0) \\ c_1 P_1(t) - c_1 P_3 \\ -cq_{outil} \\ -\beta_3 q_3(t) z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall Z \in D(A)$$

L'opérateur  $A$  satisfait

$$\langle AZ, Z \rangle_X = -a\lambda \int_0^1 u_t^2 dx + (c_1 - c)P_1(t)q_{outil} - c_1 P_3 q_{outil} - \beta_3 q_3(t)z(t)P_3$$

Physiquement  $c_1 \leq c$ , alors  $\langle AZ, Z \rangle_X \leq 0$ . Cela implique que  $A$  est dissipatif.

Il est facile de vérifier que pour tout  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8) \in X$ , il existe  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8) \in D(A)$  tel que  $w - Aw = m$ . Alors,  $D(A)$  est dense dans  $X$  et  $A$  est fermé. Par conséquent, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips,  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions  $S(t)$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , sur  $X$ .

□

**Remarque** Dans ce cas, pour chaque  $Z_0 \in D(A)$ , le problème de Cauchy

$$\dot{Z}(t) = AZ(t), Z(0) = Z_0$$

admet une unique solution

$$Z \in C^1([0, T], X) \cap C^0([0, T], D(A))$$

Maintenant, nous allons prouver l'existence et l'unicité du système (5.21)-(5.22) en tenant en compte la partie non linéaire.

**Théorème 5.2.2** *Pour toute condition initiale  $Z_0 \in D(A)$ , le problème  $\dot{Z}(t) = AZ(t) + H(Z) + f(t)$  admet une unique solution*

$$Z \in C^1([0, T], X) \cap C^0([0, T], D(A))$$

Pour prouver le théorème 5.2.2, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.2.1** *l'opérateur non linéaire  $H(Z)$  est dissipatif et localement Lipschitzien.*

**Preuve** Au début, il est évident que  $H(Z)$  est localement Lipschitzien. Par la suite, nous allons prouver que  $H(Z)$  est dissipatif. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle H(Z(t)), Z(t) \rangle_X &= aF(u_t(t, 0))u_t(t, 0) - c_1R(q_{outil})q_{outil} + h(z)q_{outil} + \beta_3q_{outil}zP_3 \\ &- \beta_3szvP_3 + \beta_3\epsilon zu_t(t, 0)P_3 - Sz^3v \\ &= F(u_t(t, 0))u_t(t, 0) - q_{outil}(c_1R(q_{outil}) - h(z) - \beta_3zP_3) - Sz^3v \\ &- \beta_3zP_3(Sv - \epsilon u_t(t, 0)) \end{aligned} \tag{5.23}$$



Rappelons que la fonction non linéaire  $F$  résultante de l'interaction entre l'outil et le sol est donnée par (Chapitre 3, [10])

$$\begin{aligned} F(\partial_t u(t, 0)) &= -\frac{L}{GJ} T \left( \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0) \right), \\ &= -\frac{L}{GJ} \frac{k \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)}{\frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2 + k^2} \end{aligned}$$

avec  $k > 0$ . Nous avons

$$F(u_t(t, 0))u_t(t, 0) = -\frac{L}{GJ} \frac{k \frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2}{\frac{1}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \partial_t u(t, 0)^2 + k^2}$$

Ainsi,  $F(\partial_t u(t, 0))\partial_t u(t, 0) \leq 0$ .

Comme  $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$ , nous choisissons  $v$  tel que  $\frac{sv_{\min}}{\epsilon} \geq u_t(t, 0)$  pour garantir la négativité du dernier terme dans (5.23). De plus, la pression au niveau de l'espace annulaire au fond du trou vérifie  $P_3 \leq \frac{1}{\beta_3 z} [c_1 R(q_{outil}) - h(z)]$ . Selon ces hypothèses, pour une vitesse de pénétration minimum et un comportement connu de la pression de l'espace annulaire  $P_3$  par rapport au débit  $q_{outil}$  et le déplacement de l'outil  $z(t)$ , nous pouvons garantir que l'opérateur  $H(Z)$  est dissipatif. De plus,  $H(Z)$  est localement Lipschitzien.  $\square$

**Preuve du Théorème 5.2.2** En appliquant le lemme ci-dessus et à partir des résultats donnés dans (Théorème 4.2 [47], [77, 6, 30]), on montre que notre système (5.21)-(5.22) admet une unique solution.

### 5.3 Stabilisation du système couplé

Dans cette section, on va proposer deux manières différentes d'aborder le problème de stabilité d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique de second ordre sans et avec coefficient d'amortissement couplé à un système d'équations différentielles ordinaires.

### 5.3.1 Cas où $\lambda = 0$ : système à retard du type neutre couplé

Il est très difficile de transformer un système d'équations aux dérivés partielles hyperboliques avec coefficient d'amortissement en un système d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, nous supposons que le terme d'amortissement  $\lambda$  est égal à zéro dans l'équation (5.12). Par conséquent, on peut utiliser la transformation d'Alembert pour transformer le modèle de paramètre distribué (5.12)-(5.14) en un modèle d'équations différentielles à retard du type neutre. Le résultat de stabilité a été établi en se basant sur la théorie de Lyapunov et la technique du backstepping.

### 5.3.2 Techniques classiques résolvant les équations des ondes à coefficients constants non amortis

Il est facile de vérifier que  $u(t, x) = \mu(\sigma) + \nu(\gamma)$  est la solution générale de l'équation d'onde unidimensionnelle (5.12) avec  $\sigma = t + x$  et  $\gamma = t - x$ . Nous définissons

$$\dot{H}(t) = \partial_t u(t, 0) = \dot{\mu}(t) + \dot{\nu}(t), \quad (5.24)$$

comme étant la vitesse angulaire à l'extrémité inférieure du train de tiges de forage. Nous introduisons cette vitesse dans les conditions aux limites (5.13)-(5.14), cela implique

$$\dot{\mu}(t+1) - \dot{\nu}(t-1) = \tau_4(t) \quad (5.25)$$

$$\ddot{\mu}(t) + \ddot{\nu}(t) = a(\dot{\mu}(t) - \dot{\nu}(t)) + ab(\dot{\mu}(t) + \dot{\nu}(t)) \quad (5.26)$$

Nous pouvons écrire (5.24) sous cette forme

$$\dot{\mu}(t) = \dot{H}(t) - \dot{\nu}(t). \quad (5.27)$$

Nous injectons (5.27) dans (5.26), nous obtenons

$$\dot{\nu}(t) = \frac{1+b}{2}\dot{H}(t) - \frac{1}{2a}\ddot{H}(t). \quad (5.28)$$

Nous introduisons (5.28) dans (5.27), nous trouvons

$$\dot{\mu}(t) = \frac{1-b}{2}\dot{H}(t) + \frac{1}{2a}\ddot{H}(t). \quad (5.29)$$

Nous présentons à la fois les deux expressions de  $\mu$  et  $\nu$  dans (5.25), nous obtenons une équation du type neutre du modèle du train de tiges :

$$\frac{1-b}{2}\dot{H}(t+1) + \frac{1}{2a}\ddot{H}(t+1) - \frac{1+b}{2}\dot{H}(t-1) + \frac{1}{2a}\ddot{H}(t-1) = \tau_4(t).$$

Par conséquent, nous trouvons une expression de type neutre avec retard pour le comportement du train de tiges en bas :

$$\ddot{H}(t) = a(b-1)\dot{H}(t) + a(1+b)\dot{H}(t-2) - \ddot{H}(t-2) + 2a\tau_4(t-1).$$

Ainsi, l'étude de stabilité du système de torsion-boue couplé du type neutre avec retard est l'objectif de cette section :

$$\begin{aligned} \ddot{H}(t) &= a(b-1)\dot{H}(t) + a(1+b)\dot{H}(t-2) - \ddot{H}(t-2) + 2a\tau_4(t-1) \\ \dot{q}_{outil}(t) &= c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z) \\ \dot{P}_1(t) &= c\tau_5(t) - cq_{outil}(t) \\ \dot{P}_3(t) &= \beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3\dot{H}(t)z(t) - \beta_3Sz(t)v(t) \\ \dot{z}(t) &= -Sz^2(t)v(t) \\ \dot{v}(t) &= \tau_6(t). \end{aligned}$$

Nous introduisons  $x_1 = H$ ,  $x_2 = \dot{H}$ . Ensuite, nous avons :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.30)$$

$$\dot{x}_2(t) = a(b-1)x_2(t) + a(1+b)x_2(t-2) - \dot{x}_2(t-2) + 2a\tau_4(t-1) \quad (5.31)$$

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z) \quad (5.32)$$

$$\dot{P}_1(t) = c\tau_5(t) - cq_{outil}(t) \quad (5.33)$$

$$\dot{P}_3(t) = \beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3x_2(t)z(t) - \beta_3Sz(t)v(t) \quad (5.34)$$

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)v(t) \quad (5.35)$$

$$\dot{v}(t) = \tau_6(t). \quad (5.36)$$

Il est facile de vérifier que  $(0, 0, 0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}, 0)$  est un point d'équilibre du système (5.30)-(5.36). Pour éviter une augmentation forte de pression qui peut conduire à un phénomène branchant, le problème de stabilisation du modèle torsion-boue couplé est résumé en contrôlant simultanément la pression au fond du puits, la vitesse de pénétration de l'outil et la vitesse de rotation du train de tiges.

### 5.3.3 Élaboration d'une commande stabilisante

Les motivations envers les choix des modèles ont déjà été clarifiées. Nous nous intéressons ainsi aux systèmes dynamiques contrôlés décrits par une équation différentielle à retard du type neutre.

**Théorème 5.3.1** *Considérons le système (5.30)-(5.36) et les trois lois de contrôle données par :*

$$\begin{aligned} \tau_4(t-1) &= \frac{1}{2a} \left[ -x_1(t) - \epsilon\beta_3P_3(t)z(t) + aK + \dot{K} - abx_2(t) \right. \\ &\quad \left. - a(1+b)x_2(t-2) + \dot{x}_2(t-2) \right] \\ \tau_5(t) &= -\frac{1}{c}(x_2(t) - K_1(q_{outil}, P_3, z)) + \frac{c-c_1}{c}q_{outil}(t) + \frac{1}{c}\dot{K}_1(q_{outil}, P_3, z) \\ \tau_6(t) &= Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}) + K_2 - v(t) + \dot{K}_2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

dans lequel, pour  $x = 0$ , nous avons cette condition

$u(t, 0) = u(0, 0) - x_1(0) - \epsilon\beta_3 P_3(t)z(t) + B$ , avec

$$\begin{aligned} K(x_1, q_{outil}, P_3, z, v) &= \frac{1}{(x_1(t) + \epsilon\beta_3 P_3(t)z(t))} [-s_0 x_1^2(t) - s_1 P_3^2(t) \\ &\quad - P_3(t)(\beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) - \beta_3 z(t)sv(t))] \\ K_1(q_{outil}, P_3, z) &= P_3(t) - \left(\frac{1}{c_1} q_{outil}(t) - F(q_{outil})\right) - \frac{h(z)}{c_1} \end{aligned}$$

$$K_2(z) = \frac{\left(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}\right)}{S z^2(t)}$$

avec  $K(0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}, 0) = 0$ ,  $K_1(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) = 0$ ,  $K_2(\frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) = 0$ ,  $B$  est une constante différente de zéro et  $s_i$  est une constante positive pour  $i = 0, 1$ . Alors (5.30)-(5.36) est asymptotiquement stable.

**Preuve** Pour démontrer ce théorème, nous utilisons la technique du backstepping. D'abord, considérons le sous-système suivant

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.38)$$

$$\dot{P}_3(t) = \beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3 x_2(t)z(t) - \beta_3 S z(t)v(t) \quad (5.39)$$

$$\dot{x}_2(t) = a(b-1)x_2(t) + a(1+b)x_2(t-2) - \dot{x}_2(t-2) + 2a\tau_4(t-1). \quad (5.40)$$

Nous définissons  $K(x_1, q_{outil}, P_3, z, v)$  comme une loi de contrôle virtuelle pour le système (5.38)-(5.39). Puis, nous proposons la fonction de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + P_3^2)$ . Sa dérivée par rapport au temps est donnée

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}_1 x_1 + \dot{P}_3 P_3 \\ &\leq -s_0 x_1^2 - s_1 P_3^2 + s_0 x_1^2 + (x_1 + \epsilon\beta_3 P_3 z)x_2 + s_1 P_3^2 \\ &\quad + P_3(\beta_3(q_{outil} - q_3)z - \beta_3 z S v). \end{aligned}$$

Par conséquent, soit la loi de contrôle virtuelle

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(x_1(t) + \epsilon\beta_3 P_3(t)z(t))} [-s_0 x_1^2(t) - s_1 P_3^2(t) \\ &\quad - P_3(t)(\beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) - \beta_3 S z(t)v(t))]. \end{aligned}$$

Maintenant, nous introduisons la variable d'état virtuelle  $\chi = x_2 - K$  dans (5.38)-(5.40), nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\chi + K) \\ \dot{P}_3(t) &= \beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3(\chi + K)z(t) - \beta_3Sz(t)v(t) \\ \dot{\chi}(t) &= -\dot{K} + a(b-1)(\chi + K) + a(1+b)x_2(t-2) \\ &\quad - \dot{x}_2(t-2) + 2a\tau_4(t-1).\end{aligned}$$

Ici, nous proposons la fonction de Lyapunov suivante  $V_1 = V + \frac{1}{2}\chi^2$ , où la dérivée par rapport au temps est comme suite :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \dot{V} + \chi\dot{\chi} \\ &\leq -\min(s_0, s_1)V - a\chi^2 + \chi\left(x_1 + \epsilon\beta_3P_3z - \dot{K} \right. \\ &\quad \left. + ab\chi + a(b-1)K + a(1+b)x_2(t-2) \right. \\ &\quad \left. - \dot{x}_2(t-2) + 2a\tau_4(t-1)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de contrôle s'écrit

$$\begin{aligned}\tau_4(t-1) &= \frac{1}{2a}\left[-\beta_3\epsilon P_3z - a(b-1)K - ab(x_2 - K) \right. \\ &\quad \left. + \dot{K} - a(1+b)x_2(t-2) + \dot{x}_2(t-2) - x_1\right].\end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons  $\dot{V}_1 \leq -\min(s_0, s_1, a)V_1$ .

Par ailleurs, considérons le deuxième sous-système

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z) \quad (5.41)$$

$$\dot{P}_1(t) = c\tau_5(t) - cq_{outil}(t). \quad (5.42)$$

Comme précédemment, commençons par l'équation suivante

$$\dot{q}_{outil}(t) = c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z)$$

et nous introduisons une loi de contrôle virtuelle qui satisfait  $K_1(q_{outil}, P_3, z) = P_3 - (\frac{1}{c_1}q_{outil} - F(q_{outil})) - \frac{h(z)}{c_1}$  vérifiant  $K_1(0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) = 0$ . Également, nous obtenons  $\dot{q}_{outil} = -q_{outil}$ . Nous proposons la fonction de Lyapunov  $V_2 = \frac{1}{2}q_{outil}^2$ , alors  $\dot{V}_2 = -2V_2$ . Cela prouve que (5.41) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $q_{outil} = 0$ .

Maintenant, soit la variable d'état virtuelle  $\chi_1(t) = P_1(t) - K_1(q_{outil}, P_3, z)$ . Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{q}_{outil}(t) &= c_1\chi_1(t) - q_{outil}(t) \\ \dot{\chi}_1(t) &= -\dot{K}_1(q_{outil}, P_3, z) + c\tau_5(t) - cq_{outil}(t).\end{aligned}$$

Nous choisissons la fonction de Lyapunov suivante  $V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\chi_1^2 = \frac{1}{2}(q_{outil}^2 + \chi_1^2)$ . Sa dérivations par rapport au temps est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= \dot{q}_{outil}q_{outil} + \dot{\chi}_1\chi_1 \\ &= -q_{outil}^2 - \chi_1^2 + \chi_1(\chi_1 + (c_1 - c)q_{outil} - \dot{K}_1(q_{outil}, P_3, z) + c\tau_5).\end{aligned}$$

Ainsi, prenons

$$\tau_5(t) = -\frac{1}{c}\chi_1(t) + \frac{c - c_1}{c}q_{outil}(t) + \frac{1}{c}\dot{K}_1(q_{outil}, P_3, z).$$

Cela implique que  $\dot{V}_3 = -2V_3$ . Alors le système (5.41)-(5.42) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(q_{outil}, P_1) = (0, 0)$ .

Finalement, nous considérons le dernier sous-système

$$\dot{z}(t) = -Sz^2(t)v(t) \tag{5.43}$$

$$\dot{v}(t) = \tau_6(t). \tag{5.44}$$

Nous définissons une loi de contrôle virtuelle pour le système d'équations (5.43), donnée par  $K_2(z) = \frac{(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL})}{S^2 z^2(t)}$  pour lequel  $K_2(\frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) = 0$ .

Nous introduisons  $\chi_2 = v - K_2$  comme état de contrôle virtuel. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -Sz^2(t)\chi_2(t) - Sz^2(t)K_2(z) \\ \dot{\chi}_2(t) &= \tau_6(t) - \dot{K}_2(z).\end{aligned}$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_4(P_3, z) = \frac{1}{2}(\chi_2^2 + (z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL})^2).$$

Sa dérivation donne

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &= \dot{z}(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) + \dot{\chi}_2 \chi_2 \\ &= -Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL})K_2(z) + \chi_2(-\dot{K}_2 + \tau_6) \\ &\leq -(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL})^2 - \chi_2^2 \\ &+ \chi_2(-Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) + \chi_2 - \dot{K}_2 + \tau_6).\end{aligned}$$

Maintenant, on peut définir la loi de contrôle

$$\begin{aligned}\tau_6 &= Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) - \chi_2 + \dot{K}_2 \\ &= Sz^2(z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}) + K_2 - v + \dot{K}_2.\end{aligned}$$

Alors  $\dot{V}_4 \leq -2V_4$ .

Ici, nous introduisons la fonction de Lyapunov global suivante

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}(x_1^2 + P_3^2 + (x_2 - K)^2 + q_{outil}^2 + (P_1 - K_1)^2 \\ &+ (v - K_2)^2 + (z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL})^2).\end{aligned}$$

Alors  $\dot{L} \leq -2(V_1 + V_3 + V_4) \leq -2L$ . Cela prouve que le système (5.30)-(5.36) est asymptotiquement stable à l'équilibre  $(0, 0, 0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 SL}, 0)$ .



### 5.3.4 Cas où $\lambda \neq 0$ : couplage EDP-EDO

Cette partie sert à étudier la stabilité d'un système couplé formulé par deux modèles non linéaires traduisant les comportements de la dynamique des vibrations de torsion et celle de la boue et avance du train de tiges.

**Proposition 5.3.1** *Considérons le système (5.12)-(5.15) et les trois lois de contrôles suivantes*

$$\begin{aligned}\tau_1(t) &= \frac{1}{\partial_t u(t, 1)} [(1-a)\partial_t u(t, 0)\partial_x u(t, 0) - ab\partial_t u(t, 0)^2 \\ &\quad - P_3(\beta_3(q_{outil}(t) - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3\partial_t u(t, 0)z(t)) \\ &\quad - q_{outil}(-c_1 P_3(t) - c_1 F(q_{outil}) + h(z))] \\ \tau_2(t) &= \frac{c - c_1}{c} q_{outil}(t) \\ \tau_3(t) &= \beta_3 S P_3(t) z(t) + S z^2(t) (z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L}).\end{aligned}$$

Alors le système (5.12)-(5.15) est stable à l'équilibre  $(0, 0, 0, 0, \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L}, 0)$ .

**Preuve** Pour prouver la stabilité du système couplé, nous introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( (\partial_x u)^2 + (\partial_t u)^2 \right) dx + (\partial_t u(t, 0))^2 + q_{outil}^2 + P_1^2 + P_3^2 + \left( z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L} \right)^2 + v^2 \right]$$

Nous dérivons  $L$  par rapport au temps et nous utilisons les conditions aux limites (5.13)-(5.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= \int_0^1 \partial_{tx} u \partial_x u + \partial_t u \partial_{tt} u dx + \partial_t u(t, 0) \partial_{tt} u(t, 0) + \dot{q}_{outil} q_{outil} + \dot{P}_1 P_1 + \dot{P}_3 P_3 \\ &\quad + \dot{z} \left( z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L} \right) + \dot{v} v \\ &= \int_0^1 \partial_{tx} u \partial_x u + \partial_t u (\partial_{xx} u - \lambda \partial_t u) dx + \partial_t u(t, 0) \partial_{tt} u(t, 0) + \dot{q}_{outil} q_{outil} \\ &\quad + \dot{P}_1 P_1 + \dot{P}_3 P_3 + \dot{z} \left( z - \frac{\rho_3}{\rho_3 V_0 + \rho_1 S L} \right) + \dot{v} v \\ &= -\lambda \int_0^1 (\partial_t u)^2 dx + \partial_t u(t, 1) \tau_1(t) - (1-a)\partial_t u(t, 0)\partial_x u(t, 0) + ab\partial_t u(t, 0)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{outil}(t)(c_1P_1(t) - c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z)) + P_1(t)(c\tau_2(t) - cq_{outil}(t)) + P_3(t)(\beta_3(q_{outil}(t) \\
& - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3\partial_t u(t,0)z(t) - \beta_3z(t)sv(t)) - Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL})v(t)) + v(t)\tau_3(t) \\
& = -\lambda \int_0^1 (\partial_t u)^2 dx + \partial_t u(t,1)\tau_1(t) - (1-a)\partial_t u(t,0)\partial_x u(t,0) + ab\partial_t u(t,0)^2 \\
& + q_{outil}(t)(-c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z)) + P_1(t)(c_1q_{outil}(t) + c\tau_2(t) - cq_{outil}(t)) + P_3(t)(\beta_3(q_{outil}(t) \\
& - q_3(t))z(t) + \epsilon\beta_3\partial_t u(t,0)z(t)) + v(t)(-\beta_3SP_3z(t) - Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL})) + \tau_3(t)).
\end{aligned}$$

Pour assurer la stabilité du système (5.12)-(5.15), nous choisissons les trois lois de contrôle suivantes

$$\begin{aligned}
\tau_1(t) & = \frac{1}{\partial_t u(t,1)} [(1-a)\partial_t u(t,0)\partial_x u(t,0) - ab\partial_t u(t,0)^2 - P_3(\beta_3(q_{outil}(t) - q_3)z(t) \\
& + \epsilon\beta_3\partial_t u(t,0)z(t)) - q_{outil}(-c_1P_3(t) - c_1F(q_{outil}) + h(z))] \\
\tau_2(t) & = \frac{(c - c_1)}{c} q_{outil}(t) \\
\tau_3(t) & = \beta_3SP_3z(t) + Sz^2(t)(z(t) - \frac{\rho_3}{\rho_3V_0 + \rho_1SL}).
\end{aligned}$$

Alors, nous trouvons

$$\dot{L}(t) \leq -\lambda \int_0^1 (\partial_t u)^2 dx$$

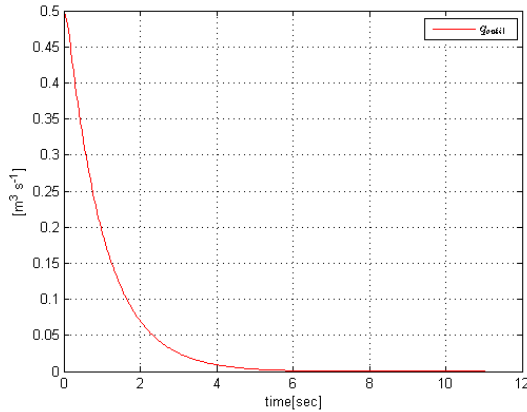
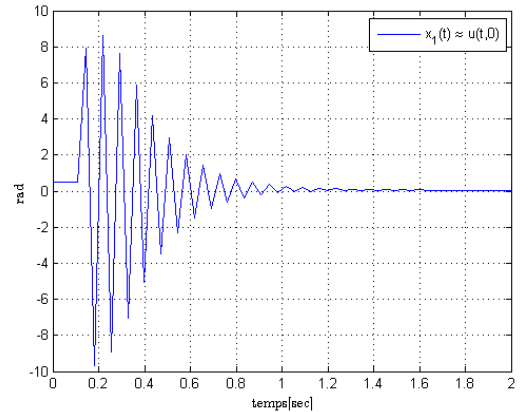
Ceci a établi la stabilité du système (5.12)-(5.15). □

## 5.4 Simulation : cas où $\lambda = 0$

Les paramètres physiques utilisés dans la simulation sont donnés dans la table 5.4. Le contrôle de la dynamique du fluide joue un rôle important dans la suppression/atténuation des vibrations de torsion. En effet, si on considère que le système du fluide n'est pas contrôlé (on prend, par exemple,  $\tau_5 = \text{constante}$  et  $\tau_6 = 0$ ), on remarque que l'état de la dynamique de torsion se déstabilise et par suite on ne peut pas supprimer les vibrations de torsion. Donc, il est utile de contrôler la pression injectée par la pompe dans le derrick. Ici, nous présentons des stratégies efficaces pour réduire le phénomène du stick slip et étudier l'impact du système du fluide injecté (Fig. 5.2-5.4). Pour éviter que le trou ne se rebouche au fur et à mesure du forage, il faut nettoyer le fond du puits et enlever les

Variable	Valeur	Unité	Description
$L$	2000	$m$	Longueur de la chaîne de forage
$I$	0.095	$kg.m$	Inertie par unité de longueur
$I_b$	311	$kg.m^2$	Inertie au fond des train de tiges
$J$	$1.19.10^5$	$m^4$	Moment d'inertie géométrique
$G$	$79.3.10^9$	$N.m^{-2}$	Module de cisaillement
$c_a$	2000	$N.m.s.rad$	Coefficient de couple de glissement
$\rho_1$	1250	$kg.m^{-3}$	Densité de la boue de forage
$\rho_3$	1250	$kg.m^{-3}$	Densité annulaire
$M$	8300	$kg.m^{-4}$	Densité intégrée par section
$\beta_1 = \beta_3$	24750	$bar$	Module de la compressibilité de la boue
$V_0$	110	$m^3$	Volume initial dans la couronne
$g$	9.81	$m.s^{-2}$	Gravité
$S$	$\pi \times (0.25)^2$	$m^2$	Surface annulaire
$d$	0.009		Coefficient d'amortissement

TABLE 5.1 – Paramètres physique

(a) Évolution temporelle de débit  $q_{outil}(t)$ (b) Évolution de déplacement angulaire au fond du trou  $x_1(t)$ FIGURE 5.2 – Comportement de déplacement angulaire au fond et de débit au niveau de l'outil  $q_{outil}(t)$ 

débris de roche. Pour cela, des fluides de forage sont injectés en continu dans le trépan afin d'emporter les débris de roche, de refroidir et lubrifier le trépan et de stabiliser la pression sur les bords du puits pour leur éviter de s'écrouler. La composition des boues de forage varie selon la nature de la roche forée, la pression, la profondeur et la température.

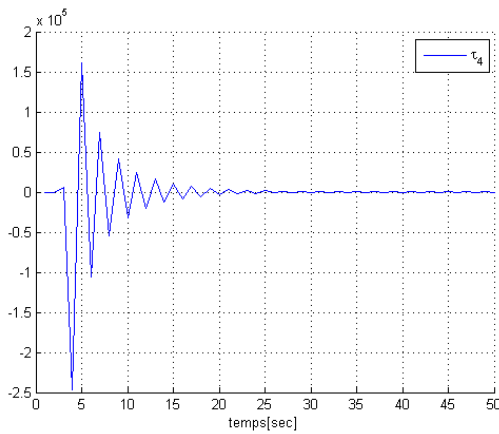
Dans [70], le débit du à la boue sortant par l'anneau ouvert est donné par :

$$q_3 = c_d s \sqrt{\frac{2}{\rho_3} (P_{dh} - P_3 + \frac{g}{S} (\frac{1}{z} - V_0))}.$$

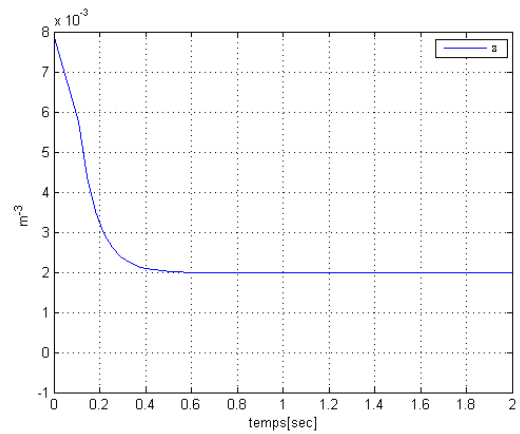
La pression au fond du puits est donnée par :

$$P_{dh} = P_3 - \frac{\rho_3 g}{S} (\frac{1}{z} - V_0) + F_a q_{outil}^2$$

où  $F_a$  désigne le coefficient de frottement dans l'espace annulaire. Les résultats de stabi-



(a) Schéma de la loi de contrôle  $\tau_4(t-1)$



(b) Évolution temporelle de l'état  $z(t)$

FIGURE 5.3 – Évolution en fonction du temps de  $\tau_4(t-1)$  et  $z(t)$

lisation sont représentés par les figures 5.2, 5.3 et 5.4.

Il est clair que toutes les simulations impliquent une convergence vers l'équilibre des variables du système. En effet, les deux courbes (Fig. 5.2, (a)) et (Fig. 5.2, (b)) représentent le comportement de déplacement angulaire au fond du trou ainsi que le comportement de débit au niveau de l'outil  $q_{outil}$ . En outre, les courbes (Fig. 5.4, (a)) et (Fig. 5.4, (b)) montrent la stabilité de la pression. Durant l'opération de forage, le dispositif de soulèvement artificiel de l'outil au fond du trou crée une pression négative de telle sorte que des fluides de puits de forage sont transportés de la zone inférieure à la zone supérieure (Fig. 5.4). De plus, la pression de la boue à l'intérieur de la garniture de forage atténue la propagation des vibrations provenant de l'outil (trépan). Il en de même quand la viscosité

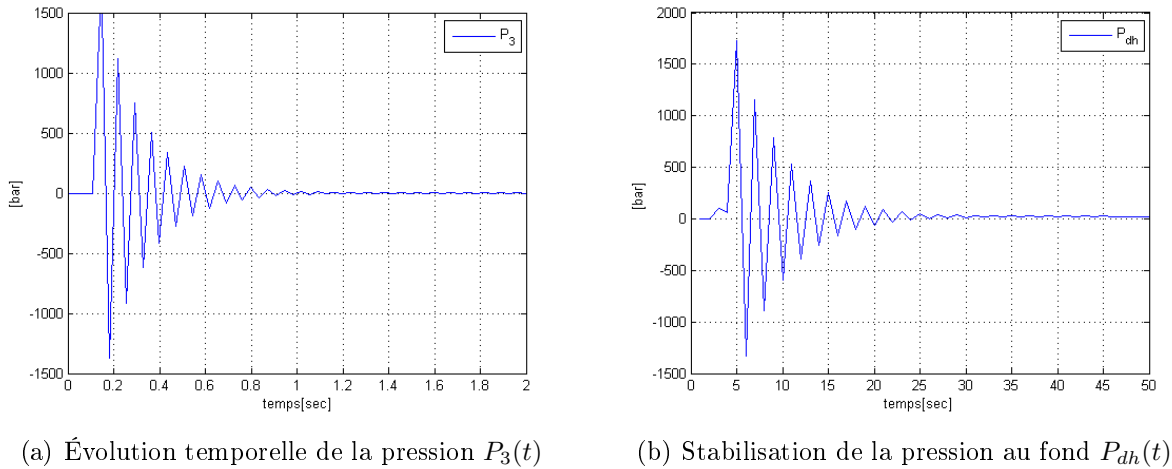


FIGURE 5.4 – Stabilisation des pressions

et la densité sont élevées ou quand le trou est mal nettoyé. Ainsi, la boue joue le rôle d'un amortisseur. Ajoutons aussi, que les auteurs de [75] ont observé que la présence du fluide change la réponse dynamique du système, en particulier la vibration latérale de la structure. L'amplitude des vibrations axiales et de torsion est peu affectée, mais la fréquence auto-excitée du système (qui est liée aux premières fréquences naturelles de torsion) change lorsque le fluide est pris en compte.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude d'un système couplé entre la dynamique de la boue et avance de trépan du train de tiges (EDO) et celle de torsion (EDP) au cours du forage des puits de pétrole. Nous avons présenté des résultats théoriques pour les systèmes bouclés avec et sans coefficients d'amortissement. Puisque on s'attaque à un modèle complexe, couplé et non linéaires, le problème de stabilité qu'on a pu résoudre dans ce travail est complètement différent de celui posé dans la littérature. À partir de la théorie de Lyapunov et l'approche du backstepping, nous avons trouvé les lois de contrôle pour la vitesse de rotation du train de tiges, la vitesse de pénétration de l'outil et la pression/débit injecté par la pompe. En outre, pour la performance des applications de forage automatique, il est nécessaire de connaître certaines variables telle que la pression au fond doit être estimée.



Partie III : Vibrations de torsion :  
estimateur de dimension infinie





# Chapitre 6

## Synthèse d'observateur pour un système de forage rotary

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif principal est de contrôler la vitesse de l'outil, seulement cette grandeur n'est pas mesurable. On construit alors un observateur pour l'estimation de cette vitesse. Fondamentalement, dans nos conceptions de la loi de contrôle, nous utilisons la technique du backstepping (plus de détails dans [40, 62, 63]) et la théorie de Lyapunov pour étudier la stabilité. Historiquement, en 1990, l'approche du backstepping est bien connue pour l'étude de stabilité des équations différentielles ordinaires (EDO). Elle est développée par Petar V. Kokotovic *et al.* [55, 57] pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. Puis, autour de 2000, cette technique devient un outil utile pour étudier la stabilité des EDP contrôlées [40]. En ajoutant que la contribution principale, dans ce chapitre, est l'investigation de stabilité d'observateur pour une équation hyperbolique du second ordre avec une mesure dans le sommet c'est-à-dire la tête de la tige. Ainsi, le principal défi est de construire une commande pour l'observateur du système d'EDP avec une mesure au frontière dans le haut de la colonne de forage (i.e  $u(t, 1)$  est mesurable) pour estimer la vitesse de l'outil au fond du trou.

Ce chapitre est organis comme suit, dans la Section 6.2, nous rappelons l'EDP avec les conditions aux limites décrivant le problème des vibrations de torsion. Afin d'apporter une

étude de stabilité, nous utilisons la transformation backstepping et la théorie de Lyapunov. La section 6.3 est consacrée à l'étude de convergence de l'erreur d'observateur du système vers l'équilibre. Dans cette partie, nous proposons un gain dit "par injection de sortie" qui permet d'assurer une solution convergente du système. A la section 6.4, on procède par une analyse des résultats obtenus en simulation.

## 6.2 État non mesurable : conception d'une commande basée observateur

En terme d'application pratique, la mise en oeuvre des commandes proposées sur la machine peuvent être impraticables. En effet, les variables au fond ne sont pas disponibles à la mesure durant l'opération du forage. A noter qu'un observateur pour un système donné est un système dynamique qui produit une estimation de l'état actuel du système donné en fonction des états mesurables.

Rappelons que le système linéarisé de la dynamique de torsion s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= u_{xx}(t, x) - \lambda u_t(t, x) \\ u_x(t, 1) &= U(t) \\ u_{tt}(t, 0) &= au_x(t, 0) + abu_t(t, 0) \end{aligned}$$

avec  $b = \frac{\partial F(w_r)}{\partial w}$  et  $w(t) = u_t(t, 1)$ .

L'automatisation des processus de forage de puits de pétrole augmente avec la nécessité d'atteindre des puits plus profonds et moins accessibles et d'améliorer la sécurité et l'efficacité des opérations de forage. Une des principales contributions au cours de l'opération de forage réside dans la mauvaise connaissance des conditions au fond de puits (conditions de pression et de température, le gaz et les ratios de pétrole). En fait, dans ce travail, nous proposons une méthode pour estimer les paramètres inconnus lors de forage de puits de pétrole. Le principal défi dans cette étude, est l'analyse de stabilité de l'EDP basée observateur qui décrit la dynamique de torsion. Ainsi, nous partons du fait que la mesure  $u(t, x)$  à la condition au limite  $x = 1$ . Considérons par la suite la notation ' $\wedge$ ' associée à

l'état estimé, et nous proposons d'étudier la stabilité de l'observateur suivant :

$$\widehat{u}_{tt}(t, x) = \widehat{u}_{xx}(t, x) - \lambda \widehat{u}_t(t, x) \quad (6.1)$$

$$\widehat{u}_x(t, 1) = U(t) + G(u(t, 1) - \widehat{u}(t, 1)) \quad (6.2)$$

$$\widehat{u}_{tt}(t, 0) = a\widehat{u}_x(t, 0) + ab\widehat{u}_t(t, 0) \quad (6.3)$$

où  $G$  est le gain d'injection de sortie.

Dans la suite on s'intéresse à l'importance de l'observateur du système cible, la technique du backstepping et la théorie de Lyapunov, fournissant ainsi une analyse utile pour la stabilité du système de forage de puits de pétrole. A l'aide de la technique du backstepping basée observateur, nous construisons une loi de contrôle qui transforme l'observateur du système original (6.1)-(6.3) vers l'observateur du système cible,

$$\widehat{w}_{tt}(t, x) = \widehat{w}_{xx}(t, x) - \lambda \widehat{w}_t(t, x) \quad (6.4)$$

$$\widehat{w}_x(t, 1) = 0 \quad (6.5)$$

$$\widehat{w}_{tt}(t, 0) = ae^{-\alpha} \widehat{w}_x(t, 0) - (2a\epsilon + 1) \widehat{w}_t(t, 0) \quad (6.6)$$

Les deux paramètres  $\alpha$  et  $\epsilon$  seront définis par le lemme suivant.

**Lemme 6.2.1** *Introduisons la fonction suivante*

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (\widehat{w}_x)^2 + e^{-\alpha} (\widehat{w}_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x \right) dx \right] + \frac{1}{a} (\widehat{w}_t(t, 0))^2,$$

avec  $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ ,  $\alpha \leq -\frac{2+\epsilon}{\epsilon(1-x)}$ , tel que  $x \in [0, 1[$ , et la norme  $\widehat{\Theta}$  où

$$\widehat{\Theta}^2(t) = \|\widehat{w}_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\widehat{w}_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |\widehat{w}_t(t, 0)|^2.$$

Alors

$$m_1 \widehat{\Theta}^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \widehat{\Theta}^2(t)$$

où

$$m_1 = \min \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\} \text{ et } m_2 = \max \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\}$$

**Preuve** En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
L(t) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (\widehat{w}_x)^2 + e^{-\alpha} (\widehat{w}_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x \right) dx \right] + \frac{1}{a} (\widehat{w}_t(t, 0))^2 \\
&\geq \frac{e^{-\alpha}}{2} \|\widehat{w}_t\|^2 + \frac{e^{-\alpha}}{2} \|\widehat{w}_x\|^2 + \frac{1}{a} |\widehat{w}_t(t, 0)|^2 - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{2} \int_0^1 |\widehat{w}_t \widehat{w}_x| dx \\
&\geq \left( \frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4} \right) (\|\widehat{w}_t\|^2 + \|\widehat{w}_x\|^2) + \frac{1}{a} |\widehat{w}_t(t, 0)|^2 \\
&\geq \min \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\} \widehat{\Theta}^2(t)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
L(t) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (\widehat{w}_x)^2 + e^{-\alpha} (\widehat{w}_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x \right) dx + \frac{1}{a} (\widehat{w}_t(t, 0))^2 \right] \\
&\leq \frac{e^{-\alpha}}{2} \|\widehat{w}_t\|^2 + \frac{e^{-\alpha}}{2} \|\widehat{w}_x\|^2 + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{2} \int_0^1 |\widehat{w}_t \widehat{w}_x| dx \\
&\leq \left( \frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4} \right) (\|\widehat{w}_t\|^2 + \|\widehat{w}_x\|^2) + \frac{1}{a} |w_t(t, 0)|^2 \\
&\leq \max \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\} \widehat{\Theta}^2(t).
\end{aligned}$$

Alors

$$m_1 \widehat{\Theta}^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \widehat{\Theta}^2(t)$$

avec  $m_1 = \min \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\}$  et  $m_2 = \max \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{a} \right\}$ .

**Théorème 6.2.1** (Stabilité de l'observateur du système cible) *Considérons le système (6.4)-(6.6), avec la condition initiale  $\widehat{w}_0 = \widehat{w}(0, x) \in L^2([0, 1])$ . Alors, l'équilibre du système (6.4)-(6.6) est  $L^2$  exponentiellement stable au sens de la norme suivante*

$$\widehat{\Theta}^2(t) = \|\widehat{w}_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\widehat{w}_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |\widehat{w}_t(t, 0)|^2$$

**Preuve** Pour prouver la stabilité de l'observateur du système cible, nous proposons  $L(t)$  comme une fonction de Lyapunov,

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (\widehat{w}_x)^2 + e^{-\alpha} (\widehat{w}_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x \right) dx \right] + \frac{1}{a} (\widehat{w}_t(t, 0))^2$$

Nous dérivons  $L$  par rapport au temps,

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= \int_0^1 \left( e^{-\alpha} \widehat{w}_{tx} \widehat{w}_x + e^{-\alpha} \widehat{w}_{tt} \widehat{w}_t + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_{tt} \widehat{w}_x + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_{tx} \widehat{w}_t \right) dx \\
&+ \frac{1}{a} \widehat{w}_{tt}(t,0) \widehat{w}_t(t,0) \\
&= -\lambda e^{-\alpha} \int_0^1 \widehat{w}_t^2 + \int_0^1 \left( e^{-\alpha} \widehat{w}_{tx} \widehat{w}_x + e^{-\alpha} \widehat{w}_{xx} \widehat{w}_t + \frac{1}{2} \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_{xx} \widehat{w}_x \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \epsilon (1-x) \widehat{w}_{tx} \widehat{w}_t \right) dx + \frac{1}{a} (\widehat{w}_{tt}(t,0) \widehat{w}_t(t,0)) - \frac{\lambda \epsilon}{2} \int_0^1 e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x dx \\
&= -e^{-\alpha} \widehat{w}_t(t,0) \widehat{w}_x(t,0) - \frac{\epsilon}{4} \widehat{w}_x(t,0)^2 - \frac{\epsilon}{4} \widehat{w}_t(t,0)^2 - \int_0^1 \frac{-\epsilon - \alpha \epsilon (1-x)}{2} e^{-\alpha x} \frac{\widehat{w}_x^2}{2} dx \\
&- \frac{2a\epsilon + 1}{a} \widehat{w}_t^2(t,0) + e^{-\alpha} \widehat{w}_t(t,0) \widehat{w}_x(t,0) - \int_0^1 \frac{-\epsilon - \alpha \epsilon (1-x)}{2} e^{-\alpha x} \frac{\widehat{w}_t^2}{2} dx \\
&- \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x dx - \lambda \int_0^1 e^{-\alpha} \widehat{w}_t^2 dx \\
&\leq -e^{-\alpha} \int_0^1 e^{-\alpha} \frac{\widehat{w}_x^2}{2} dx - \frac{1}{a} \widehat{w}_t^2(t,0) - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \widehat{w}_t \widehat{w}_x dx - \lambda \int_0^1 e^{-\alpha} \widehat{w}_t^2 dx \\
&\leq -\min(e^{-\alpha}, \lambda, 1) L(t)
\end{aligned}$$

Par le Lemme 6.2.1, nous avons

$$m_1 \widehat{\Theta}^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \widehat{\Theta}^2(t).$$

Par conséquent, il existe  $c > 0$  et  $k \geq 0$  tel que

$$\widehat{\Theta}(t) \leq c e^{-kt} \widehat{\Theta}(0).$$

Ceci implique que le système (6.4)-(6.6) est  $L^2$  exponentiellement stable à l'équilibre au sens de la norme  $\widehat{\Theta}$ .

Pour convertir l'observateur du système original à l'observateur du système cible, nous proposons l'observateur de la transformation backstepping suivante

$$\begin{aligned}
\widehat{w}(t,x) &= \widehat{u}(t,x) - \int_0^x K(x,\xi) \widehat{u}(t,\xi) d\xi - \varrho(x) \widehat{u}(t,0) \\
&- \int_0^x P(x,\xi) \widehat{u}_t(t,\xi) d\xi - \int_0^x L(x,\xi) \widehat{u}_\xi(t,\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Nous injectons l'observateur de la transformation backstepping (6.7) dans l'observateur du système cible (6.4)-(6.6). En intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites, nous obtenons les noyaux sous la forme EDP suivante :

$$L_{\xi\xi}(x, \xi) = L_{xx}(x, \xi), \quad (6.8)$$

$$K_{\xi\xi}(x, \xi) = K_{xx}(x, \xi), \quad (6.9)$$

$$P_{\xi\xi}(x, \xi) = P_{xx}(x, \xi), \quad (6.10)$$

dont les conditions aux limites sont

$$L_x(x, x) = 0, \quad K_x(x, x) = 0, \quad P_x(x, x) = 0 \quad (6.11)$$

$$L_\xi(x, 0) = K(x, 0), \quad K_\xi(x, 0) = \varrho''(x) \quad (6.12)$$

$$P(x, 0) = 0, \quad P_\xi(x, 0) = 0 \quad (6.13)$$

$$L(x, 0) = \varrho(x), \quad L(0, 0) = 0, \quad \varrho(0) = 1 \quad (6.14)$$

$$K_\xi(0, 0) = ae^{-\alpha}K(0, 0) + ae^{-\alpha}\varrho'(0) = \varrho''(0) \quad (6.15)$$

Notons que le noyau d'observateur de la transformation backstepping satisfait un système intéressant des EDP d'onde qui est facilement solvable. Ce système d'équations est définie sur un domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ .

À cette étape, nous introduisons l'observateur de la transformation backstepping (6.7) dans (6.5), nous déduisons la loi de contrôle suivante

$$\begin{aligned} U(t) &= K(1, 1)\widehat{u}(t, 1) + \int_0^1 K_x(1, \xi)\widehat{u}(t, \xi)d\xi + P(1, 1)\widehat{u}_t(t, 1) \\ &+ \int_0^1 P_x(1, \xi)\widehat{u}_t(t, \xi)d\xi + \int_0^1 L_x(1, \xi)\widehat{u}_\xi(t, \xi)d\xi + \varrho'(1)\widehat{u}(t, 0) \\ &- G(u(t, 1) - \widehat{u}(t, 1)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Il reste à étudier le comportement de l'observateur du système original à partir de l'observateur de la transformation backstepping inverse ( $\widehat{w}(t, x) \rightarrow \widehat{u}(t, x)$ ) et les conditions de stabilité en vertu de la loi de contrôle (6.16). Définissons l'observateur de la transformation

backstepping inverse de la manière suivante

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t, x) &= \widehat{w}(t, x) + \int_0^x E(x, \xi) \widehat{w}(t, \xi) d\xi + \int_0^x F(x, \xi) \widehat{w}_t(t, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^x H(x, \xi) \widehat{w}_\xi(t, \xi) d\xi + \pi(x) \widehat{w}(t, 0)\end{aligned}\quad (6.17)$$

Nous introduisons (6.17) dans (6.1)-(6.3), nous trouvons les noyaux suivants

$$\begin{aligned}H_{\xi\xi}(x, \xi) &= H_{xx}(x, \xi), \\ E_{\xi\xi}(x, \xi) &= E_{xx}(x, \xi), \\ F_{\xi\xi}(x, \xi) &= F_{xx}(x, \xi),\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}H_x(x, x) &= 0, \quad E_x(x, x) = 0, \quad F_x(x, x) = 0 \\ E(x, 0) &= H_\xi(x, 0), \quad E_\xi(x, 0) = \pi''(x), \quad \pi'(0) = 0 \\ F(x, 0) &= 0, \quad H(x, 0) = \pi(x), \quad F_\xi(x, 0) = 0 \\ E(0, 0) &= H_\xi(0, 0) = 0, \quad H(0, 0) = \pi(0) = -1,\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ces équations sont définies sur le domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ . Pour obtenir une solution de l'une de ces dernières équations des EDP d'onde, nous commençons par le convertir en une équation intégrale puis nous introduisons le changement de variables  $y = \xi + x$  et  $\eta = x - \xi$  et finalement nous utilisons la méthode des approximations successives (plus en détail dans [40], chapitre 4).

**Théorème 6.2.2** (*Stabilité de l'observateur du système original*) *Considérons le système (6.1)-(6.3) avec la condition initiale  $u_0 \in L^2([0, 1])$  et la loi de contrôle (6.16) où les noyaux  $K$ ,  $P$ , et  $L$  sont obtenus de (6.8)-(6.15). Alors le système (6.1)-(6.3) est exponentiellement stable à l'équilibre au sens de la norme suivante*

$$\widehat{\Sigma}^2(t) = \|\widehat{u}(t, \cdot)\|_{L^2([0, 1])}^2 + \|\widehat{u}_t(t, \cdot)\|_{L^2([0, 1])}^2 + \|\widehat{u}_x(t, \cdot)\|_{L^2([0, 1])}^2 + |\widehat{u}_t(t, 0)|^2$$

**Preuve** Tout d'abord, nous introduisons les normes suivantes (par exemple) comme suit :  $\varrho_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varrho(x)|$ ,  $K_\infty = \max_{(x,\xi) \in \Delta} \|K(x,\xi)\|_2^2$ ; de même pour  $L_\infty$ ,  $(P_{\xi\xi})_\infty$ ,  $P_\infty$ , où  $\|K(x,\xi)\|_2^2$  désigne la norme de l'opérateur classique. Nous allons prouver qu'il existe  $\rho_1 > 0$  et  $\rho_2 > 0$  tel que

$$\rho_1 \widehat{\Theta}(t) \leq \widehat{\Sigma}(t) \leq \rho_2 \widehat{\Theta}(t).$$

Rappelons que  $P_\xi(x,0) = 0$ ,  $P(x,0) = 0$ ,  $P_x(x,x) = 0$ ,  $L(x,0) = \varrho(x)$ . Par conséquent,  $\widehat{w}_t$  est réécrit sous cette forme

$$\begin{aligned} \widehat{w}_t(t,x) &= \widehat{u}_t(t,x) - \int_0^x K(x,\xi) \widehat{u}_t(t,\xi) d\xi - P(x,x) \widehat{u}_x(t,x) - \int_0^x P_{\xi\xi}(x,\xi) \widehat{u}(t,\xi) d\xi \\ &+ \int_0^x \lambda P(x,\xi) \widehat{u}_t(t,\xi) d\xi - L(x,x) \widehat{u}_t(t,x) + \int_0^x L_\xi(x,\xi) \widehat{u}_t(t,\xi) d\xi - \varrho(x) \widehat{u}_t(t,0) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, nous pouvons montrer

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &\leq (1 + K_\infty + L_\infty + (L_\xi)_\infty + \lambda P_\infty) \|\widehat{u}_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\ &+ P_\infty \|\widehat{u}_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + ((P_{\xi\xi})_\infty \|\widehat{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \varrho_\infty |\widehat{u}_t(t,0)|^2) \\ &\leq c_1 \widehat{\Sigma}^2 \end{aligned}$$

où  $c_1 = \max\{1 + K_\infty + L_\infty + (L_\xi)_\infty + \lambda P_\infty, (P_{\xi\xi})_\infty, P_\infty, \varrho_\infty\}$

Comme  $\widehat{u}(t,0) = \widehat{u}(t,x) - \int_0^x \widehat{u}_y(t,y) dy$ , nous aurons

$$\|\widehat{w}_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_2 (\|\widehat{u}_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\widehat{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\widehat{u}_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2)$$

où  $c_2 = \max\{1 + L_\infty + (L_x)_\infty + \varrho'_\infty, K_\infty + (K_x)_\infty + \varrho'_\infty, P_\infty + (P_x)_\infty\}$ .

En outre, nous avons  $|\widehat{w}_t(t,0)|^2 \leq 4 |\widehat{u}_t(t,0)|^2$ . Par conséquent, il existe  $\rho_1 > 0$  tel que  $\rho_1 \widehat{\Theta}(t) \leq \widehat{\Sigma}(t)$ .

Rappelons que l'observateur de la transformation backstepping inverse est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t,x) &= \widehat{w}(t,x) + \int_0^x E(x,\xi) \widehat{w}(t,\xi) d\xi + \pi(x) \widehat{w}(t,0) \\ &+ \int_0^x F(x,\xi) \widehat{w}_t(t,\xi) d\xi + \int_0^x H(x,\xi) \widehat{w}_\xi(t,\xi) d\xi \end{aligned}$$



Comme  $\widehat{w}(t, 0) = \widehat{w}(t, x) - \int_0^x \widehat{w}_y(t, y) dy$ , en utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\| \widehat{u}(t, \cdot) \|_{L^2}^2 \leq c_3 (\| \widehat{w}_x(t, \cdot) \|_{L^2}^2 + \| \widehat{w}_t(t, \cdot) \|_{L^2}^2),$$

où  $c_3 = \max\{c_0(1 + E_\infty) + \pi_\infty(1 + c_0) + H_\infty, F_\infty\} > 0$ ,  $c_0 > 0$ . En outre, comme

$$F(x, 0) = 0, H(x, 0) = \pi(x), F_\xi(x, 0) = 0, F_x(x, x) = 0$$

nous avons

$$\| \widehat{u}_t(t, \cdot) \|_{L^2}^2 \leq c_4 (\| \widehat{w}_t(t, \cdot) \|_{L^2}^2 + \| \widehat{w}_x(t, \cdot) \|_{L^2}^2),$$

où  $c_4 = \max\{1 + E_\infty + H_\infty + (H_\xi)_\infty + \lambda F_\infty, F_\infty + c_0(F_{\xi\xi})_\infty\} \geq 0$ . De plus, comme  $\widehat{w}(t, 0) = \widehat{w}(t, x) - \int_0^x \widehat{w}_y(t, y) dy$  nous trouvons

$$\| \widehat{u}_x(t, \cdot) \|_{L^2}^2 \leq c_5 (\| \widehat{w}_x(t, \cdot) \|_{L^2}^2 + \| \widehat{w}_t(t, \cdot) \|_{L^2}^2),$$

où  $c_5 = \max\{1 + c_0 E_\infty + c_0 (E_x)_\infty + H_\infty + (H_x)_\infty + \pi'_\infty(1 + c_0), F_\infty + (F_x)_\infty\}$ . Enfin, nous avons

$$| \widehat{u}_t(t, 0) |^2 \leq 4 | \widehat{w}_t(t, 0) |^2$$

Par conséquent, il existe  $\rho_2 > 0$  tel que

$$\widehat{\Sigma}(t) \leq \rho_2 \widehat{\Theta}(t)$$

Ceci implique que le système (6.1) - (6.3) est exponentiellement stable au sens de la norme  $\widehat{\Theta}$ .

□

### 6.3 Gain d'injection de sortie

Ayant à notre disposition, la loi de contrôle trouvée dans la section précédente implique la convergence exponentielle du système d'observateur. Maintenant, nous pouvons combiner les résultats de la section 6.2 et cette section pour assurer la convergence du

l'erreur d'observateur du système.

### 6.3.1 Système cible

Rappelons le système d'observateur suivant

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{tt}(t, x) &= \widehat{u}_{xx}(t, x) - \lambda \widehat{u}_t(t, x) \\ \widehat{u}_x(t, 1) &= U(t) + G(u(t, 1) - \widehat{u}(t, 1)) \\ \widehat{u}_{tt}(t, 0) &= a\widehat{u}_x(t, 0) + ab\widehat{u}_t(t, 0)\end{aligned}$$

Pour féconder le contrôle basé observateur (6.16), il est important de déterminer le gain d'injection de sortie  $G$ . L'analyse prend en compte l'erreur estimée  $\tilde{u} = u - \widehat{u}$  tel que

$$\tilde{u}_{tt}(t, x) = \tilde{u}_{xx}(t, x) - \lambda \tilde{u}_t(t, x) \quad (6.18)$$

$$\tilde{u}_x(t, 1) = -G\tilde{u}(t, 1) \quad (6.19)$$

$$\tilde{u}_{tt}(t, 0) = a\tilde{u}_x(t, 0) + ab\tilde{u}_t(t, 0) \quad (6.20)$$

Afin d'obtenir le gain d'injection de sortie  $G$  qui assure la convergence du système d'erreur à zéro, nous considérons un estimateur d'erreur de la transformation backstepping pour transformer le système d'erreur à celui d'erreur cible suivant

$$\tilde{w}_{tt}(t, x) = \tilde{w}_{xx}(t, x) - \lambda \tilde{w}_t(t, x) \quad (6.21)$$

$$\tilde{w}_x(t, 1) = 0 \quad (6.22)$$

$$\tilde{w}_{tt}(t, 0) = ae^{-\alpha} \tilde{w}_x(t, 0) - (2a\epsilon + 1)\tilde{w}_t(t, 0) \quad (6.23)$$

L'estimation d'erreur de la transformation backstepping est donné par

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, x) &= \tilde{w}(t, x) - \int_x^1 A(x, \xi) \tilde{w}(t, \xi) d\xi \\ &\quad - \int_x^1 B(x, \xi) \tilde{w}_t(t, \xi) d\xi - \int_x^1 C(x, \xi) \tilde{w}_\xi(t, \xi) d\xi.\end{aligned} \quad (6.24)$$

**Lemme 6.3.1** *Définissons la fonction*

$$L = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \left( e^{-\alpha} (\tilde{w}_x)^2 + e^{-\alpha} (\tilde{w}_t)^2 + \epsilon e^{-\alpha x} (1-x) \tilde{w}_t \tilde{w}_x \right) dx + \frac{1}{a} (\tilde{w}_t(t, 0))^2 \right]$$

avec  $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ ,  $\alpha \leq -\frac{2+\epsilon}{\epsilon(1-x)}$ , dans lequel  $x \in [0, 1[$ , et la norme  $\tilde{\Theta}$  où

$$\tilde{\Theta}^2(t) = \|\tilde{w}_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\tilde{w}_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |\tilde{w}_t(t, 0)|^2$$

Alors

$$m_1 \tilde{\Theta}^2(t) \leq L(t) \leq m_2 \tilde{\Theta}^2(t)$$

où

$$m_1 = \min \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} - \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{2a} \right\} \text{ et } m_2 = \max \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{2} + \frac{\epsilon e^{-\alpha}}{4}, \frac{1}{2a} \right\}$$

**Preuve** Cette preuve est la même que celle du lemme 6.2.1.

□

**Théorème 6.3.1** *(Stabilité du système d'erreur cible) Considérons le système (6.21)-(6.23), avec la condition initiale  $\tilde{w}_0 = \tilde{w}(0, x) \in L^2([0, 1])$ . Alors l'équilibre du système (6.21) - (6.23) est exponentiellement stable au sens de la norme suivante*

$$\tilde{\Theta}^2(t) = \|\tilde{w}_t\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\tilde{w}_x\|_{L^2([0,1])}^2 + |\tilde{w}_t(t, 0)|^2$$

**Preuve** La preuve est similaire à celle du Théorème 6.2.1.

□

### 6.3.2 Technique du backstepping et loi de contrôle

Pour obtenir le gain d'injection de sortie  $G$  qui garantit que l'erreur d'observateur du système converge à zéro, nous utilisons un estimateur d'erreur de la transformation backstepping. Alors, nous injectons (6.24) dans (6.18)-(6.20), nous obtenons les noyaux

satisfaisants les équations aux dérivées partielles suivantes

$$\begin{aligned} C_{xx} &= C_{\xi\xi}, \\ A_{xx} &= A_{\xi\xi}, \\ B_{xx} &= B_{\xi\xi}, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} C_x(x, x) &= 0 \quad A_x(x, x) = 0, \quad B_x(x, x) = 0 \\ A_\xi(x, 1) &= B_\xi(x, 1) = C(x, 1) = 0 \\ B(1, 1) &= B(0, 0) = A(0, 0) = 0, \\ A_{\xi\xi}(0, \xi) &= (\lambda + ab)B_{\xi\xi}(0, \xi) + aA_x(0, \xi) \\ C_{\xi\xi}(0, \xi) &= aC_x(0, \xi), \quad C(0, 0) = -1 \\ B_{\xi\xi}(0, \xi) &= (\lambda + ab)A(0, \xi) - (\lambda + ab)C_\xi(0, \xi) \\ &\quad + aB_x(0, \xi) - (\lambda^2 + \lambda ab)B(0, \xi) \end{aligned}$$

Nous introduisons (6.24) dans (6.19), nous trouvons le gain d'injection de sortie  $G = -A(1, 1)$ . Il est facile de vérifier que  $C(x, \xi)$ ,  $A(x, \xi)$  et  $B(x, \xi)$  satisfait, chacune, une EDP d'onde dans laquelle la solution générale est donnée par  $F(x, \xi) = \Psi(x - \xi) + \Phi(x + \xi)$ . Ensuite, ces équations sont définies sur un domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ .

L'estimation d'erreur backstepping devrait être inversible. Par conséquent, pour convertir (6.18)-(6.20) dans (6.21)-(6.23), nous introduisons l'estimation d'erreur backstepping inverse suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t, x) &= \tilde{u}(t, x) + \int_x^1 M(x, \xi) \tilde{u}(t, \xi) d\xi \\ &\quad + \int_x^1 N(x, \xi) \tilde{u}_t(t, \xi) d\xi + \int_x^1 J(x, \xi) \tilde{u}_\xi(t, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Nous injectons (6.25) dans (6.21)-(6.23), nous obtenons les noyaux suivants

$$\begin{aligned} M_{\xi\xi}(x, \xi) &= M_{xx}(x, \xi), \\ N_{\xi\xi}(x, \xi) &= N_{xx}(x, \xi), \\ J_{\xi\xi}(x, \xi) &= J_{xx}(x, \xi), \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= M_x(x, x), \quad J_x(x, x) = 0 \quad N_x(x, x) = 0 \\ 0 &= M(x, 1) - J_\xi(x, 1), \quad 0 = N(x, 1) = J(x, 1) \\ 0 &= M_\xi(x, 1), \quad N_\xi(x, 1) = 0 \\ 1 &= J(0, 0), M(0, 0) = 0, N(0, 0) = 0 \\ 0 &= (2a\epsilon + 1 - \lambda)N_{\xi\xi}(0, \xi) + M_{\xi\xi}(0, \xi) - ae^{-\alpha}M_x(0, \xi) \\ 0 &= -ae^{-\alpha}N_x(0, \xi) + (\lambda - (2a\epsilon + 1))J_\xi(0, \xi) + N_{\xi\xi}(0, \xi) + (2a\epsilon + 1 - \lambda)M(0, \xi) \\ &\quad + (\lambda^2 - (2a\epsilon + 1)\lambda)N(0, \xi) \\ 0 &= -ae^{-\alpha}J_x(0, \xi) + J_{\xi\xi}(0, \xi) \end{aligned}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution des noyaux, nous pouvons trouver explicitement la solution parce que la solution de toute EDP d'onde est donnée sous la forme suivante  $k(x, \xi) = \phi(x + \xi) + \psi(x - \xi)$ . Ensuite, ces équations sont définies sur un domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ .

**Théorème 6.3.2** (*Stabilité du système d'erreur original*) *Considérons le système (6.18)-(6.20) dont le gain d'injection de sortie est donné par  $G$ . Alors l'équilibre  $\tilde{u} = 0$  est exponentiellement stable au sens de la norme suivante*

$$\tilde{\Sigma}^2(t) = \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\tilde{u}_t(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + \|\tilde{u}_x(t, \cdot)\|_{L^2([0,1])}^2 + |\tilde{u}_t(t, 0)|^2$$

**Preuve** Nous allons prouver qu'il existe  $\rho_1 > 0$  et  $\rho_2 > 0$  tel que  $\rho_1\tilde{\Theta}(t) \leq \tilde{\Sigma}(t) \leq \rho_2\tilde{\Theta}(t)$ . La preuve de ce théorème est similaire au cas de la conception d'observateur (Théorème

6.2.2).

□

En combinant les résultats de deux sections, nous proposons la loi de contrôle basée observateur suivante :

$$\begin{aligned}
 U(t) = & K(1, 1)\widehat{u}(t, 1) + \int_0^1 K_x(1, \xi)\widehat{u}(t, \xi)d\xi + P(1, 1)\widehat{u}_t(t, 1) + \int_0^1 P_x(1, \xi)\widehat{u}_t(t, \xi)d\xi \\
 & + \int_0^1 L_x(1, \xi)\widehat{u}_\xi(t, \xi)d\xi + \varrho'(1)\widehat{u}(t, 0) + A(1, 1)(u(t, 1) - \widehat{u}(t, 1)). \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

C'est une équation intégrale de Volterra. En pratique, il est impossible d'utiliser cette loi de contrôle pour un système de forage. Le calcul des grandeurs de contrôle implique le calcul de l'intégrale des états angulaires le long de toute la forêt qui n'est pas possible dans la pratique. Afin de l'implémenter sur une chaîne de forage réel, il faut concevoir un observateur en utilisant uniquement des mesures dans l'assemblage au fond (BHA). Les observateurs pour des systèmes similaires sont dérivés dans Smyshlyaev et Krstic [43, 44]

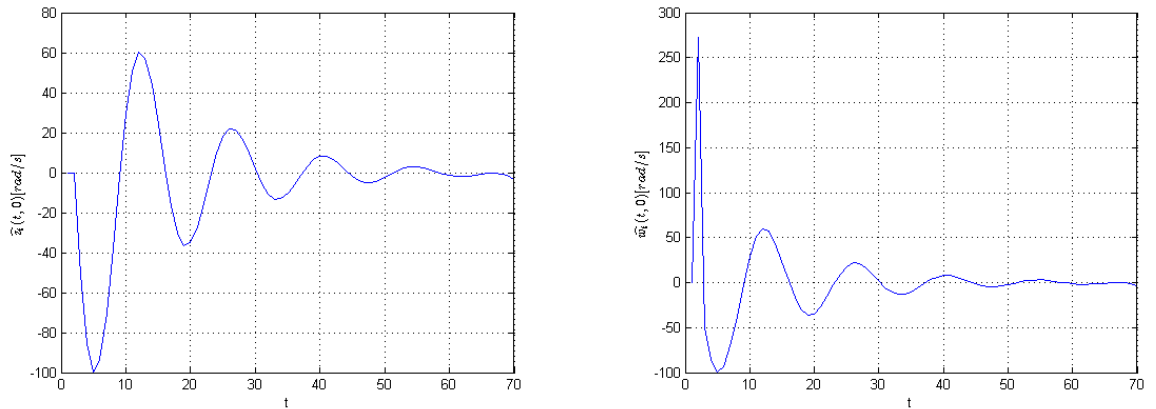
## 6.4 Simulation

Pour procéder au rejet de la vibration de torsion dans un système de forage rotary, l'idée principale est de contrôler la vitesse de rotation de l'outil (trépan), seulement cette grandeur est difficilement mesurable voir non mesurable. Pour la mise en place de la loi de contrôle, une estimation de la vitesse angulaire est nécessaire moyennant un observateur/constructeur d'état non mesurable. Nos simulations numériques prennent en considération les paramètres physiques suivants :

Variable	Valeur	Unité	Description
$L$	2000	$m$	Longueur de la chaîne de forage
$I$	0.095	$kg.m$	Inertie par unité de longueur
$I_b$	311	$kg.m^2$	Inertie au fond du train de tiges,
$J$	$1.19.10^5$	$m^4$	Moment d'inertie géométrique
$G$	$79.3.10^9$	$N.m^{-2}$	Module de cisaillement
$c_a$	2000	$Nm.s.rad^{-1}$	Coefficient de couple de glissement
$d$	0.009		Coefficient d'amortissement
$G$	$-A(1, 1)$		Gain d'injection de sortie

TABLE 6.1 – Paramètres physiques

Les résultats de simulation sont représentés graphiquement sur (Fig. 6.1). Deux observateurs sont construits et tendent vers zéro (convergence exponentielle) quand le temps tend vers l'infini (Fig. 6.1). Le résultat de stabilisation à travers la loi de contrôle basée



(a) Évolution en fonction du temps de l'état  $\hat{u}_t(t,0)$  (b) Évolution en fonction du temps de l'état  $\hat{w}_t(t,0)$

FIGURE 6.1 – Stabilisation de l'observateur à l'extrémité inférieure

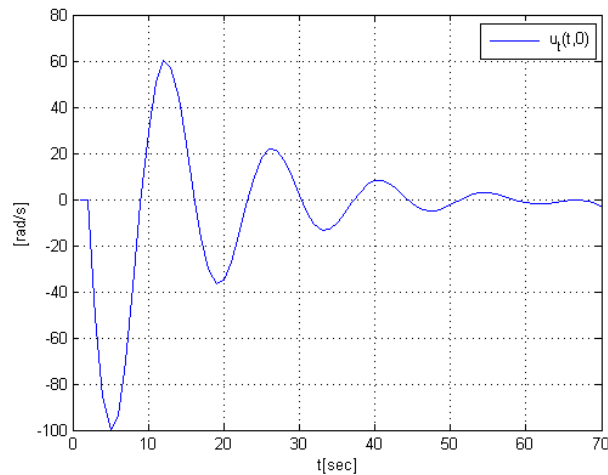


FIGURE 6.2 – Évolution en fonction du temps de l'état  $u_t(t,0)$

observateur est présenté dans les figures (Fig. 6.1-6.2). Il est clair que les simulations impliquent une convergence suffisante des variables du système et leurs estimés (Fig. 6.1, (a)-Fig. 6.2)). Par conséquent, l'équilibre est atteint exponentiellement. La figure (Fig. 6.1) montre le comportement de la vitesse à l'extrémité inférieure respectivement, de l'obser-

vateur du système original et l'observateur du système cible. L'observation de la variation des paramètres de fonctionnement des machines de forage permet souvent d'avoir une idée assez précise de la position des transitions des couches de sols ou de roches de natures différentes.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un observateur de dimension infinie, sous la forme d'EDP, pour un système décrivant la dynamique de torsion. Nous avons montré la convergence exponentielle de l'observateur. En effet, la loi de contrôle basée observateur est construite de telle sorte que l'observateur du système cible soit exponentiellement stable, par conséquent la stabilité exponentielle du système original. En outre, le gain d'injection de sortie conduit à une stabilité exponentielle de l'estimation d'erreur. Il reste à intégrer d'autres facteurs de forage telle que l'estimation de l'interaction entre le train de tiges et le système du fluide.



# Conclusion générale

Depuis plusieurs années, la recherche dans le domaine du contrôle des systèmes à paramètres distribués représente un champ d'investigation ouvert. Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires ou non linéaires, éventuellement couplées avec des équations différentielles ordinaires (EDO). D'autre part, depuis plusieurs décennies, la technologie des systèmes de forage pétrolier ne cesse d'évoluer à tel point qu'il devient accessible de développer des solutions de systèmes complexes issus de la mécanique des fluides. D'un point de vue mathématique, ce sont des systèmes gouvernés par un ensemble d'EDP, d'EDO ou d'EDP couplés avec des EDO.

Les vibrations dans la garniture influent le fonctionnement des opérations de forage et peuvent conduire, à la rupture prématurée du train de tiges, à l'endommagement de certains de leurs composants (par exemple le trépan) et la diminution de la performance de forage et donc, au coût de forage. L'apparition des vibrations de torsion en présence du frottement non linéaire entre la garniture et le puits donnent le phénomène dite de "stick-slip". Il se traduit par des phases d'accélération intenses de l'outil alternant avec des phases de blocage complet. En plus de son rôle de lubrification et refroidissement de l'outil, la boue influe le coefficient de frottement entre le trépan et la roche. Le phénomène du "stick-slip" peut conduire à des conséquences majeures et à l'endommagement ou l'usure prématurée de l'outil.

Le travail réalisé dans cette thèse a donc pour but d'apporter une réponse générée par la présence du phénomène dite "stick-slip" lors d'une opération de forage de type rotary. Par conséquent, une modélisation puis des propositions des lois de contrôles sont suggérées. En outre, la boue de forage est pompée dans la colonne et s'est écoulée à travers le trépan

au fond des puits de pétrole. La boue coule jusqu'à l'annulaire portant des boutures en haut de puits. Pendant le processus de forage une quantité d'argent est dépensée pour les problèmes techniques de la machine de forage, y compris la perte de circulation et le coût de la boue excessive. Par conséquent, pour supprimer l'effondrement des puits de forage, les fracturation, ou les afflux de fluides entourant le puit, il est important de contrôler la pression dans la partie ouverte de l'espace annulaire.

Le manuscrit de cette thèse est fondé autour de trois grandes idées :

- suppression des vibrations de torsion
- interaction entre le système de forage et le système de fluide
- étude de l'observation pour le phénomène de vibrations de torsion.

Il contient six chapitres. Une introduction générale et les outils mathématiques qui représentent la fondation et une conclusion générale matérialisant la toiture de cette contribution scientifique. Pour la réussite de l'œuvre, la modélisation, la loi de contrôle, et l'étude de stabilité sont requises.

Cette thèse a été alors pour nous l'occasion de découvrir le monde de la théorie de contrôle. De la modélisation physique, l'étude théorique et au traitement des résultats numériques, ce travail nous a permis de comprendre et de saisir toute la complexité tant théorique que numérique que ce type de problème revêt. La résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) nécessite à la fois un bagage mathématique théorique solide conséquent mais aussi de bonnes connaissances algorithmiques. Nous avons bien sûr rencontré divers difficultés, en particulier au niveau de l'étude théorique et la programmation du système trouvé et surtout pour le couplage entre EDP et EDO. Une compréhension plus profonde du système couplé a été nécessaire pour résoudre ces difficultés. De même, un tel travail nécessite, de par sa taille, une architecture et une organisation mathématique que nous n'avions pas l'habitude de rencontrer. Il nous a donc fallu apprendre à évoluer dans une telle complexité et, plus d'une fois, il nous a fallu se plonger en profondeur dans la théorie des opérateurs, la théorie de Lyapunov, les algorithmes et dans le fonctionnement de Matlab pour résoudre les problèmes rencontrés. Les contributions de cette thèse ont donc été nombreux et riches. Par exemple, il nous a permis de faire le lien entre les équations aux dérivées partielles EDP que nous avons abordée au troisième chapitre et les

---

équations différentielles ordinaires sous la forme d'un couplage EDP-EDO. Physiquement, nous avons étudié le couplage entre les vibrations de torsion, le déplacement de l'outil, la pression/débit injectée à la surface, pression/débit au fond et pression/débit à la sortie de la couronne. La conception consiste à connecter un système d'équations différentielles ordinaires décrivant le comportement de fluide et le modèle de vibration de torsion du train de tiges de forage qui est décrit par une équation aux dérivées partielles (EDP). D'ailleurs en présence d'amortissement dans l'équation d'onde, nous montrons seulement la stabilité d'un système sous la forme EDP-EDO. Bien que sans amortissement, l'équation d'onde soit réduite à un modèle d'équation différentielles ordinaires à retard et les lois de contrôles conduisent à une stabilité asymptotique de la variable de torsion, de la pression au fond du trou et de la pression de l'espace annulaire. D'un point de vue informatique, ce travail nous a permis d'acquérir une connaissance assez globale du logiciel Matlab et d'approfondir notre pratique de la méthodes des différences finis qui nous avons découverte tout au long due ces trois années de recherche.

Bien sûr, le monde de la résolution des EDP étant tellement très vaste et complexe, nous n'avons qu'effleuré ce dernier et bien d'autres aspects auraient pu se révéler intéressants à développer. Par exemple, nous avons choisi de nous restreindre plus à la résolution effective théorique et numérique du système plutôt que de se pencher sur l'implémentation pour ce problème.

Nous visons, dans les futures recherches, à traiter les points suivants :

- En pratique, il est impossible d'utiliser un tel contrôleur pour un système de forage. Le calcul des grandeurs de contrôle implique le calcul de l'intégrale des états angulaires le long de toute la forêt qui n'est pas possible dans la pratique. Donc, il est important d'étudier la robustesse des lois de commande élaborées.
- Étudier le phénomène d'impulsion au bord (non étudié dans la littérature), car une telle étude s'avère utile traduisant l'impact impulsif de l'outil avec le sol. Donc, c'est une condition qui apparaît au bord et de point de vu mathématique, la stabilité d'une EDP excitée par une condition dite impulsive au bord est un challenge.
- Pour la performance des applications de forage automatique, il est nécessaire de connaître certaines variables telles que la pression au fond qui doit être estimée.

Enfin, en terme de résultats, le travail effectué tout au long de ces trois années de recherche a pu favoriser notre présence et celle du laboratoire dans des conférences internationales renommées (CDC, ECC, IFAC WC, ...) et dans trois revues scientifiques de grande qualité (IJC, EJCON et AMC).

# Annexe : Outil mathématiques et théorie de Lyapunov

Nous allons donner dans ce chapitre tous les résultats mathématiques utilisés dans ce mémoire.

## 1 Espaces fonctionnel

### 1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Nous désignons par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$ .

Posons

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition 6.1.1** Soit  $p \in [1, +\infty[$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Nous vérifions que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

est une norme dans  $L^p(\Omega)$ .

**Proposition 6.1.1** L'espace  $L^p(\Omega)$  avec  $1 \leq p < +\infty$  muni de la norme (1) est complet.

Dans le cas particulier pour  $p = 2$ , la relation

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \forall f, g \in L^2(\Omega) \quad (2)$$

définit un produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , tel que la norme associée n'est autre que la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  défini dans (2).

**Définition 6.1.2** Pour  $p = \infty$ ; l'espace de Banach  $L^\infty(\Omega)$  tel que

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p} \right\}$$

est muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C, |f(x)| \leq C \text{ p.p} \right\}.$$

**Définition 6.1.3** L'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact inclus dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est noté  $D(\Omega)$  (espace des fonctions test). Nous dirons qu'une suite de fonctions  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $D(\Omega)$  si :

1. Il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  contenant les supports de toutes les fonctions pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha u_n(x) - D^\alpha u(x)| = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $\alpha$  tout a multi-indices.

## 1.2 Espace de Sobolev

**Définition 6.1.4** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous posons

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dans  $H^1(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dans  $L^2(\Omega)$  telles que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \phi dx \quad \forall \phi \in D(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx\end{aligned}$$

Pour la topologie induite par cette norme, une suite  $(u_n)_n$  de  $H^1(\Omega)$  converge vers  $u \in H^1(\Omega)$  si  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$  dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . La norme de  $H^1(\Omega)$  est issue d'un produit scalaire noté  $(u, v)_{H^1(\Omega)}$  et défini par :

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx\end{aligned}$$

**Proposition 6.1.2 (Inégalité de Poincaré)** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que*

$$\forall u \in H_1^0(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

## 2 Théorie des opérateurs

### 2.1 Opérateur dissipatif

**Définition 6.2.1** *Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur.*

*On dit que  $A$  est dissipatif sur  $H$  si*

$$\forall x \in D(A) \quad \operatorname{Re} \langle x, Ax \rangle \leq 0$$

*on dit que  $A$  est maximal dissipatif si  $I - A$  est surjectif de  $D(A)$  dans  $H$ .*

**Proposition 6.2.1** *Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- i)  $A$  est dissipatif*

ii)  $A$  satisfait

$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \quad \|x\|_{D(A)} \leq \frac{1}{\lambda} \|\lambda x - Ax\|_H$$

iii)  $A$  satisfait

$$\forall x \in D(A) \quad \forall \lambda > 0 \in \mathbb{C}, \quad \|x\|_{D(A)} \leq \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) \|\lambda x - Ax\|_H,$$

tel que  $\mathbb{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) > 0\}$ .

Cette proposition donne une caractérisation des opérateurs dissipatifs qui est utilisée pour démontrer de nombreux résultats concernant les opérateurs maximaux dissipatifs.

**Proposition 6.2.2** *Si  $A$  est un opérateur dissipatif alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) l'opérateur  $A$  est maximal dissipatif.

ii) Il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\mathfrak{S}(\lambda_0 I - A) = H$ .

iii) Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda I - A$  est inversible, d'inverse borné dans  $L(H)$  et  $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq \lambda^{-1}$ .

iv) Pour tout  $\lambda > 0 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda I - A$  est inversible, d'inverse borné dans  $L(H)$  et  $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq \Re(\lambda^{-1})$ .

On établit maintenant une propriété importante des opérateurs maximaux dissipatifs.

**Proposition 6.2.3** *Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est un opérateur maximal dissipatif alors*

i)  $D(A)$  est dense dans  $H$

ii)  $A$  est fermé c'est à dire  $gr(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$  est fermé dans  $H \times H$ .

## 2.2 Semi-groupes de contractions

Soit  $(H, \|\cdot\|_H)$  un espace de Hilbert.

**Définition 6.2.2** *Une famille d'opérateurs  $S(t)_{t \geq 0}$  linéaires bornés définis sur  $H$  est dit semi groupe si :*



1.  $S(0) = I$  ( $I$  est l'opérateur d'identité).

2.  $S(t+s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall s, t \geq 0$ .

avec la propriété

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x, \quad \forall x \in H, t \geq 0. \quad (3)$$

Le semi-groupe est fortement continu (ou de classe  $C^0$ ), ou plus simplement  $C^0$ -semi-groupes.

Si en remplace (3) par :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - I\| = 0, \quad t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

On appelle générateur d'un semi-groupe de contractions ( $S(t)$ ) l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  défini par :

i)  $D(A) = \{x \in H, \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } H\}$

ii)  $\forall x \in D(A), \quad Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$

L'importance des opérateurs maximaux dissipatifs se mesure dans le théorème suivant.

**Théorème 6.2.1 (Lumer-Phillips)** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur alors

i)  $A$  est maximal dissipatif si, et seulement si,  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$

ii) Dans ce cas, pour tout  $f_0 \in D(A)$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) = Af(t) \\ f(0) = f_0. \end{cases} \quad (4)$$

admet une unique solution  $f \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, H)$ . De plus  $f(t) = S(t)f_0$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[$ .

### 3 Théorie de Lyapunov et stabilité

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats généraux pour que ce manuscrit puisse être lu avec une certaine autonomie et qui sont utilisé dans cette thèse.

Un système contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in U, \quad u(\cdot) \in V_u \quad (5)$$

En général le vecteur des états  $x(t)$  appartient à un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ , et les contrôles  $u(t)$  appartiennent à un ensemble de contrôle admissibles  $V_u$  qui est un ensemble de fonctions localement intégrable définies sur  $[0, +\infty[$  à valeur dans  $V_u \subset \mathbb{R}^n$ .

De nombreuses méthodes ont été développées pour étudier la notion de stabilité au sens de Lyapunov. Il existe différents critères pour décider si un système non commandé est asymptotiquement stable (linéarisation, formes normales de Poincaré, variété centre, ...). L'ouvrage de Khalil [29] présente des panoramas complets de ces méthodes.

Considérons le système non commandé

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t, 0) = 0.$$

Si l'application  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire pour les systèmes de la forme,

$$\dot{x} = f(x), \quad (7)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f(0) = 0$ , le système est dit stationnaire.

**Définition 6.3.1 (Stabilité uniforme au sens de Lyapunov)** *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (6) est dit uniformément stable (au sens de Lyapunov) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_0 \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \forall x(\cdot, x_0, t_0), \forall t \geq t_0, |x(t, x_0, t_0)| < \epsilon.$$

### 3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On lui associe le système indépendant du temps dit autonome

$$\dot{x} = f(x). \quad (8)$$

Pour  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, on lui associe le système dit non autonome

$$\dot{x} = f(t, x(t)). \quad (9)$$

On désigne par  $x(t, t_0, x_0)$  la solution  $x(t)$  du système (8), ou bien du système (9) telle que  $x(t_0) = x_0$ .

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Peano, donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution de (8) ou (9).

**Théorème 6.3.1 (Peano [15])** *Considérons le système (9). Alors, par tout point  $(t_0, x_0) \in I \times U$  passe au moins une solution maximale  $x(t, t_0, x_0)$  définie sur un intervalle  $J$  contenu dans  $I$ .*

Dans la suite, nous donnons le théorème de Cauchy-Lipschitz. Nous commençons d'abord par rappeler les fonctions localement lipschitziennes.

**Définition 6.3.2** *Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que  $f \in \text{Lip}_x(I \times U)$  si pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$ , il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  et une constante  $c > 0$  tels que*

$$\forall ((t, x), (t, x')) \in V, \quad |f(t, x) - f(t, x')| \leq c|x - x'|.$$

### 3.2 Théorèmes de stabilité

**Théorème 6.3.2 (Théorème de Lyapunov autonome [38])** *Soit 0 un point d'équilibre de (8). S'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 et une fonction*

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

de classe  $C^1$  telles que :

1.  $V$  soit définie positive (i.e.  $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{V}$  et  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ).
2. La dérivée  $\dot{V}$  pour (8) soit négative alors 0 est stable. La fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov.

Si de plus la dérivée  $\dot{V}$  pour (8) est définie négative alors 0 est asymptotiquement stable (dans ce cas la fonction  $V$  est dite fonction stricte de Lyapunov).

**Théorème 6.3.3 (Théorème de Lyapunov non autonome [38])** Soit 0 un point d'équilibre de (9), s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

de classe  $C^1$  telle que

1.  $V$  soit définie positive.
2. La dérivée  $\dot{V}$  pour (9) soit négative (respectivement définie négative).  
Alors 0 est stable. Si de plus, on a :
3.  $V$  est décroissante<sup>1</sup> alors l'équilibre 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).
4. Si  $U = \mathbb{R}^n$  et  $V$  est radialement non bornée<sup>2</sup> alors l'équilibre 0 est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).

Maintenant, nous allons introduire la notion de la stabilité exponentielle et quelques propriétés.

**Définition 6.3.3 ([2])** L'origine du système dynamique (8) est dit localement exponentiellement stable s'il existe des constantes  $\omega < 0$ ,  $M > 0$  et  $r > 0$  telles que pour  $x_0 \in B(0, r)$ , la solution  $x(\cdot)$  de (8) issue de  $x_0$  en  $t = 0$  est définie sur  $[0, +\infty[$  et vérifie :

$$|x(t)| \leq M |x_0| e^{\omega t}.$$

- 
1. Une fonction  $v : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est décroissante si  $\lim_{|y| \rightarrow 0} v(t, y) = 0$ .
  2.  $v : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est radialement non bornée si  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} v(t, y) = +\infty$

Le réel  $\omega < 0$  est dit vitesse de la convergence ou exposant de la stabilisation.

L'origine du système dynamique (8) est dit globalement exponentiellement stable, si l'inégalité précédente est vraie pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Rappelons que, si  $A$  est une matrice de Hurwitz,<sup>3</sup> alors, l'origine du système linéaire  $\dot{x} = Ax$  est asymptotiquement stable et le système non linéaire (8) est localement asymptotiquement stable. Même, la solution décroît avec le temps de façon exponentielle.

Le théorème suivant donne un résultat de stabilité asymptotique si le système est exponentiellement stable.

**Théorème 6.3.4 ([2])** *Si le système (8) est exponentiellement stable, alors il est asymptotiquement stable.*

La réciproque de ce théorème est fausse.

**Exemple :**  $\dot{x} = -x^3$  est asymptotiquement stable mais n'est pas exponentiellement stable.

### 3.3 Existence et unicité du système de noyaux

L'étude de l'existence, de l'unicité et de la continuité de la solution du système (3.33)-(3.36) ( respectivement (3.44)-(3.47)), avec les conditions aux limites (3.37)-(3.40) ( respectivement (3.48)-(3.51)), est similaire.

Considérons le "problème de Goursat généralisé" dont les équations de noyau direct et inverse sont un cas particulier. Nous définissons pour  $i = 1, \dots, 4$  le système d'équations

---

3. c'est à dire les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $A$ , solutions de  $\det(\lambda I - A) = 0$  sont à partie réelle strictement négatives

suisant :

$$c_1(x)F_x^1(x, \xi) + c_1(\xi)F_\xi^1(x, \xi) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_{1i}(x, \xi)F^i(x, \xi) + g_1(x, \xi), \quad (10)$$

$$c_1(x)F_x^2(x, \xi) - c_2(\xi)F_\xi^2(x, \xi) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_{2i}(x, \xi)F^i(x, \xi) + g_2(x, \xi), \quad (11)$$

$$c_2(x)F_x^3(x, \xi) - c_1(\xi)F_\xi^3(x, \xi) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_{3i}(x, \xi)F^i(x, \xi) + g_3(x, \xi) \quad (12)$$

$$c_2(x)F_x^4(x, \xi) + c_2(\xi)F_\xi^4(x, \xi) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_{4i}(x, \xi)F^i(x, \xi) + g_4(x, \xi), \quad (13)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$F^1(x, 0) = q_1(x)F^2(x, 0) + q_2(x)F^3(x, 0) + h_1(x), \quad (14)$$

$$F^2(x, x) = h_2(x), \quad (15)$$

$$F^3(x, x) = h_3(x), \quad (16)$$

$$F^4(x, 0) = q_3(x)F^2(x, 0) + q_4(x)F^3(x, 0) + h_4(x). \quad (17)$$

Ce système est défini dans le domaine triangulaire  $\Delta = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$ .

Nous utilisons la méthode de la caractéristique pour montrer l'existence et l'unicité de ce système d'équations. Ainsi, nous préférons d'utiliser ce théorème :

**Théorème 6.3.5 ([36])** *Considérons le système (10)-(13), avec les conditions aux limites (14)-(17) tel que  $h_i, q_i \in C^N([0, 1])$ ,  $g_i, \varepsilon_{ij} \in C^N(\Delta)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  et  $c_1, c_2 \in C^N([0, 1])$  avec  $c_1(x), c_2(x) > 0$ . Alors il existe une unique solution  $F^i \in C^N(\Delta)$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

# Bibliographie

- [1] A. Abdoulaye BA, *Contribution à la surveillance d'un processus de forage pétrolier*, thèse de doctorat Paris Tech, 2010.
- [2] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory, Communications and Control Engineering*, Springer-Verlag, 2nd Edition, Berlin, 2005.
- [3] A. Diagne, G. Bastin and J.-M. Coron, *Lyapunov exponential stability of linear hyperbolic systems of balance laws*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, 2011.
- [4] A. Smyshlyaev, E. Cerpa and M. Krstic, *Boundary stabilization of a 1-D wave equation with in-domain antidamping*, SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 48, pp. 4014-4031, 2010.
- [5] A. Smyshlyaev and M. Krstic, *Boundary control of an antistable wave equation with anti-damping on the uncontrolled boundary*, American Control Conference, pp. 1511-1516, june 2009.
- [6] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Science & Business Media, vol 44, 2012.
- [7] A. P. Dowling, *The dynamics of towed flexible cylinders Part 1. Neutrally buoyant elements*, Journal Fluid Mech, vol. 187, pp. 507-532, 1988.
- [8] B. Achi. *A Preliminary Assessment of Production Performance & Decline of Horizontal Wells in Hassi Messaoud Reservoir*, Forum des puits Horizontaux, 6- 7 Avril, Hassi M essaoud, Algérie, 2004.
- [9] B. Saldivar, T. Knuppel, F. Woittennek, I. Boussaada, H. Mounier, and S.I. Niculescu, *Flatness-based Control of Torsional-Axial Coupled Drilling Vibrations*, IFAC 19th World Congress, Cape Town, South Africa, August 24-29, 2014.

- 
- [10] B. Saldivar, I. Boussaada, H. Mounier, and J. Iulian Niculescu, *Analysis and Control of Oilwell Drilling Vibrations, A Time- Delay Systems Approach*, Springer, 2015.
- [11] B. Saldivar, S. Mondie, J. J. Loiseau, and V. Rasvan, *Stick-Slip Oscillations in Oilwell Drillstrings : Distributed Parameter and Neutral Type Retarded Model Approaches*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, vol. 18, pp. 284-289, 2011.
- [12] B-Z. Guo and Ch-Zh. Xu, *The Stabilization of a One-Dimensional Wave Equation by Boundary Feedback With Noncollocated Observation*, IEEE Transactions on Automatic Control, February 2007, vol. 52, no. 2.
- [13] C. Sagert, F. Di Meglio, M. Krstic, and P. Rouchon, *Backstepping and flatness approaches for stabilization of the stick-slip phenomenon for drilling*, 5th Symposium on System Structure and Control, Grenoble France, pp. 779-784, 2013.
- [14] C. Z. Xu and G. Sallet, *Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems*, ESAIM : Control, Optim. Calculus Variat., vol. 7, pp. 421-442, 2002.
- [15] C. Zuily and H. Queffelec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1996.
- [16] E. M. Navarro-Lopez and R. Suarez, *Modelling and Analysis of Stick -Slip Behaviour in a Drillstring Under Dry Friction*, Congress of the Mexican Association of Automatic Control, pp. 330-335. 2004.
- [17] E. Fridman, S. Mondie, and B. Saldivar, *Bounds on the response of a drilling pipe model*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 27, no. 4, pp. 513-526, 2010.
- [18] F. Di Meglio, R. Vazquez, and M. Krstic, *Stabilization of a System of  $n + 1$  Coupled First-Order Hyperbolic Linear PDEs With a Single Boundary Input*, IEEE, transactions on automatic control, vol. 58, no. 12, December 2013.
- [19] F. Di Meglio, R. Vazquez, M. Krstic, and N. Petit, *Backstepping stabilization of an underactuated  $3 \times 3$  linear hyperbolic system of fluid flow transport equations*, Amer. Control Conf., Montreal, QC, Canada, 2012.
- [20] G. Pelfrene, *Rôle du processus de forabilité des roches dans les vibrations de torsion*



- 
- des systèmes de forage pétrolier*, Géologie appliquée, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010.
- [21] G. Bastin and J. M. Coron, *Further Results on boundary feedback stabilisation of  $2 \times 2$  hyperbolic systems over a bounded interval*, Proc. of 8th NOLCOS, pp. 1081-1085, 2010.
- [22] G. O. Kaasa, O. N. Stamnes, O. M. Aamo, and L. S. Imsland, *Simplified hydraulics model used for intelligent estimation of downhole pressure for a managed-pressure-drilling control system*, SPE Drilling and Completion, vol. 27, no. 1, pp. 127-138, 2012.
- [23] G. Downton, *Challenges of modeling drilling systems for the purposes of automation and control*, IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production, Trondheim, Norway, vol. 1, pp. 201-210, June 2012.
- [24] G. Triantafyllou, and C. Chrysostomidis, *The dynamics of towed arrays*, Proc. Int. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symp. 7th, 1988.
- [25] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, third edition, 2002.
- [26] H. J. Marquez, *Nonlinear Control, Systems Analysis and Design*, Wiley, 2003.
- [27] H. Merritt, *Hydraulic Control Systems*, John Wiley & Sons, 1967.
- [28] H. Mahdianfar, A. Pavlov, and O-M. Aamo, *Joint Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation in Managed Pressure Drilling*, 2013 European Control Conference (ECC) July 17-19, 2013, Zurich, Switzerland.
- [29] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.
- [30] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society, vol. 136, 2007.
- [31] J. J. Bailey, and Finnie, *An analytical study of drillstring vibration*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 82, no. 2, pp. 122- 128, 1960.
- [32] J. D. Jansen and L. van den Steen, *Active damping of self-excited torsional vibrations in oil well drillstrings*, Journal of Sound and Vibration, vol. 179, no. 4, pp. 647-668, 1995.

- 
- [33] J. M. Coron, B. d'Andrea-Novel and G. Bastin, *A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, pp. 2-11, 2006.
- [34] J. Rauch and M. Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana Univ. Math. J., vol. 24, pp. 79-86, 1975.
- [35] J. M. Greenberg, and T. Li, *The effect of boundary damping for the quasilinear wave equations*, Journal of Differential Equations, vol. 52, pp. 66-75, 1984.
- [36] J. Coron, R. Vazquez, M. Krstic, and G. Bastin, *Local exponential  $H^2$  stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 51, no. 3, pp. 2005-2035, 2013.
- [37] J. D. Jansen, *Nonlinear dynamics of oilwell drillstrings*, PhD thesis, Delft University of Technology, the Netherlands, 1993.
- [38] J. J. Slotine and L. Weiping, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ : prentice-Hall, vol. 199, no. 1, 1991.
- [39] M. Krstic, *Adaptive control of an anti-stable wave pde*, American Control Conference, pp. 1505 -1510, 2009.
- [40] M. Krstic, and A. Smyshlyaev, *Backstepping boundary control for first order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays*, System and Control Letters, vol. 57, pp. 750-758, 2008.
- [41] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkhauser Boston, 2009.
- [42] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley-Interscience, 1995.
- [43] M. Krstic and A. Smyshlyaev, *Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays*, Systems & Control Letters, 57(9) : 750-758, 2008. ISSN 0167-6911.
- [44] M. Krstic, *Compensating a string pde in the actuation or sensing path of an unstable ode*, In American Control Conference, 2009. ACC'09., pages 4097-4102, june 2009.

- 
- [45] M. T. Alrifai Joe, H. Chow and D. A. Torrey, *A Backstepping Nonlinear Control Approach to Switched Reluctance*, Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control Tampa, Florida USA, December 1998.
- [46] M. W. Harris, B. Acikmese and E.V. Ort, *Lmi based control of stick-slip oscillations in drilling*, Proceedings of the ASME 2014 Dynamic Systems and Control Conference, San Antonio, TX, USA, October 22-24, 2014.
- [47] M. Slemrod, *Feedback Stabilization of a linear control system in Hilbert space with a priori bounded control*, Math. Contr. Sig. Syst, vol. 2, pp. 265-285, 1989.
- [48] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph, *Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod*, Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, vol. 2, pp. 2046-2051, December 13-1, 1995.
- [49] N. D. Manring, *Hydraulic Control System*, John Wiley, 2005.
- [50] N. Lopez, E. M., and D. Cortes, *Avoiding Harmful Oscillations in a Drillstring through Dynamical Analysis*, Journal of Sound and Vibration, vol 307, pp. 152- 171, 2007.
- [51] N. Zoghlami, K. Latrach, and L. Beji, *Bottomhole pressure stabilizing observer-based controller in tunnel drilling system*, 3 rd International Conference on control, Engineering & Information Technology, Tlemcen, Algeria 25 – 27, May, 2015.
- [52] O. N. Starnes, J. Zhou, G. O. Kaasa, and O. M. Aamo, *Adaptive Observer Design for the Bottomhole Pressure of a Managed Pressure Drilling System*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- [53] P. Rouchon, *Flatness and stick-slip stabilization*, Technical Report 492. France : Ecole des Mines de Paris, 1998.
- [54] P. Poleletto and F. Miranda, *Seismic While Drilling : Fundamentals of Drill-bit Seismic for Exploration, ser Handbok of Geophysical Exploration : Seismic Exploration*, Elsevier, vol. 35, 2004.
- [55] P. V. Kokotovic. *The joy of feedback : nonlinear and adaptive*, Control Systems Magazine, vol. 12, no. 3, pp. 7-17, 1992.

- 
- [56] R. Maglione, G. Gallino, G. Robotti, R. Romagnoli, and R. Rommetveit, *A drilling well as viscometer : Studying the effects of well pressure and temperature on the rheology of the drilling fluids*, In European Petroleum Conference, 1996.
- [57] R. Lozano, B. Brogliato, *Adaptive control of robot manipulators with flexible joints*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, no. 2, pp. 174-181, 1992.
- [58] R. Skjetne and T I. Fossen, *On Integral Control in Backstepping Analysis of Different Techniques*, Proceeding of the American Control Conference Boston, Massachusettes June 30- July 2, 2004.
- [59] R. M. Kennedy, *Transverse motion response of a cable-towed system*, Part I. Theory. US, J. Underwater Acoust, vol. 30, pp. 97- 108, 1980.
- [60] R. Vazquez, M. Krstic, and J. M. Coron, *Backstepping boundary stabilization and state estimation of a  $2 \times 2$  linear hyperbolic system*, IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, USA, pp. 4937-4942, 2011.
- [61] R. Vazquez, M. Krstic, J.-M. Coron, and G. Bastin, *Local exponential stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping*, Pro. 50th Conf. Decision Control, Orlando, FL, USA, 2011.
- [62] R. Vazquez and M. Krstic, *Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities*, Automatica, vol. 44, pp. 2778-2790, 2008.
- [63] R. Vazquez and M. Krstic, *Control of Turbulent and Magnetohydrodynamic Channel Flow*, Birkhauser, 2008.
- [64] S. N. Patek, *Spiny Lobsters Stick and Slip to Make Sound*, Nature, vol. 411, no. 6834, pp. 153- 154, 2001.
- [65] S. Toumi, L. Beji, R. Mlayeh and A. Abichou, *Stability analysis of coupled torsional vibration and pressure in oilwell drillstring system*, International Journal of Control, vol. 90, January, 2017.
- [66] S. Toumi, L. Beji, R. Mlayeh and A. Abichou, *Stabilization of torsional vibration in oilwell drillstring system*, European Journal of Control, vol. 35, March, 2017.

- 
- [67] S. Toumi, L. Beji, R. Mlayeh and A. Abichou, *Exponential Stabilization of Torsional Vibrations in Rotary Drilling Systems*, 20th IFAC World Congress, Toulouse, France 2017.
- [68] S. Toumi, L. Beji, R. Mlayeh and A. Abichou, *Boundary Observer Design for Hyperbolic PDE in rotary drilling systems*, Proc. of the 55nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Aria Resort & Casino, Las Vegas, USA, pp. 2128-2133, December 12-14, 2016.
- [69] S. Toumi, L. Beji, R. Mlayeh and A. Abichou, *Stabilization of stick-slip oscillations Integrating fluid injection in Oil well drillstring system*, Proc. of the European Control Conference, Alborg, DK, pp. 352-357, June 29, July 1, 2016.
- [70] S. Toumi, R. Mlayeh, L. Beji and A. Abichou, *Stability Analysis of Oilwell Drilling Torsional Vibrations*, Proc. of the IEEE 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Athens, Greece, pp. 677-682, June 21-24, 2016.
- [71] S. Amin, F. M. Hante, and A. M. Bayen, *Exponential stability of switched linear hyperbolic initial-boundary value problems*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 57, no. 2, pp. 291-301, Feb. 2012.
- [72] S. Landet, H. Mahdianfar, U. J. F. Aarsnes, A. Pavlov, and O. M. Aamo, *Modeling for mpd operations with experimental validation*, IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition, no. SPE-150461. San Diego, California : Society of Petroleum Engineers, March 2012.
- [73] S. Gonnord and N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle : Thèmes d'analyse pour l'agrégation*, Ellipses, 1998.
- [74] Schlumberger, *Introduction to Drilling fluids, OilWell Drilling*, CD Training Techno-media International INC, vol. 3, 1997.
- [75] T.G. Ritto, R. Sampaio, and Christian Soize, *Drill-string nonlinear dynamics accounting for the drilling fluid*, ABCM. 30 CILAMCE-Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Nov 2009, Arma,cao dos Buzios, RJ, Brazil. pp.1-25, 2009.
- [76] T. Li, *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems*, Wiley, 1994.

- [77] T. D. Nguyen and O. Egeland, *Observer Design for a Towed Seismic Cable*, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts, June 30 - July 2, 2004.
- [78] V. Perrollaz, and L. Rosier, *Finite-time stabilization of systems of conservation law on networks*, Siam J. control optim, vol. 52, no. 1, pp. 143-163, 2014.
- [79] Y. N. Stamnes, *Nonlinear Estimation with Application to Drilling*, Thesis for the degree of Philosophiae Doctor, NTNU Norwegian Universty Science of Technology, Trondheim, April 2011.

**Titre :** Contribution à la suppression du phénomène stick slip et à la construction d'un observateur de dimension infinie en forage pétrolier

**Mots clefs :** Stabilisation, équation aux dérivées partielles, système rotary, équation différentielle ordinaire

**Résumé :** Les différents types de vibrations des garnitures de forage jouent un rôle important dans le dysfonctionnement des opérations de forage car celles-ci conduisent à la rupture prématurée des trains de tiges, par conséquent, à la perte de l'outil au fond du trou et aussi à l'endommagement de la machine. En s'intéressant au forage de type rotary, cette thèse étudie le phénomène des vibrations de torsion de point de vu, modélisation par une EDP (modèle distribué) dont on établit les conditions aux limites adéquats. Une large partie de notre analyse dans ce mémoire concerne la commande du phénomène de vibration de torsion conduisant à une vitesse de rotation contrôlée sur le bord. La modélisation du phénomène de torsion affectant le train de tiges lors d'un forage pétrolier a été représentée par une équation aux dérivées partielles (1D) d'ordre deux: type linéaire intégrant le phénomène de frottement. Deux entrées apparaissent dans les condi-

tions aux limites en termes de vitesse de rotation du train et de la réaction avec le sol. Il s'agit donc de désigner la commande en vitesse qui assure la rotation adéquate pour le forage et qui n'excite pas le phénomène du torsion en tenant en compte l'interaction de la formation avec le sol. La stabilité de la garniture de forage dépend d'un système de boue du fluide qui doit être injecté. Nous traitons une connexion entre le système de forage rotary et le système du fluide. Nous obtenons un système couplé sous la forme EDP-EDO. Également nous avons transformé le système couplé à un système neutre avec retard. Nous achevons ce mémoire par la construction d'une loi de contrôle pour l'observateur du système de forage rotary avec une seule mesure aux limites dans le haut de la colonne pour estimer les paramètres de l'outil de forage qui ne sont pas accessibles à mesurer.

**Title :** Control of torsional vibrations in an oil platform

**Keywords :** Stabilization, partial differential equation, ordinary differential equation, drilling system

**Abstract :** The different types of drilling vibrations play an important role in the malfunctioning of the drilling operations because they lead to the premature rupture of the trains, consequently, to the loss of the tool at the bottom hole and also damage to the machine. Much of our analysis in this specification relates to the control of the phenomenon of vibration of twisting leading to a controlled rotational speed on the edge. The mathematical aspects and simulation results will be detailed. The modeling of the torsion phenomenon affecting the drill string during was represented by a second order partial differential equation: linear type integrating the phenomenon of friction. Two entries appear in the boundary conditions in terms of the speed of the train and the reac-

tion with the soil. It is therefore a matter of designating the speed which ensures adequate rotation for drilling and which avoid the torsional phenomenon of twist taking into account the interaction of formation with the soil. The dynamic of the drill string stability depends on a system of fluid which should be injected to bring cuttings out of the well bore and amplify the torsional vibrations phenomena. To suppress fracturing collapse or influx of fluids surrounding the well, it is important to integrate the dynamic of the pressure in this study: PDE-ODE control problem. Finally, we are concerned with the problem of boundary observer stabilization for a system of hyperbolic PDEs which describes the drilling systems. The design relies on the top boundary measurements only.

