



# CHAÎNES DE MARKOV FLOUES ET ÉVALUATION DES PARAMÈTRES DE PERFORMANCE D'UN RÉSEAU DE FILES D'ATTENTE FLOUES À FORME PRODUIT

Jean Pierre Mukeba

## ► To cite this version:

Jean Pierre Mukeba. CHAÎNES DE MARKOV FLOUES ET ÉVALUATION DES PARAMÈTRES DE PERFORMANCE D'UN RÉSEAU DE FILES D'ATTENTE FLOUES À FORME PRODUIT. Probabilités [math.PR]. Université Pédagogique Nationale (UPN), 2016. Français.  $\langle$ NNT :  $\rangle$ .  $\langle$ tel-01761043 $\rangle$

**HAL Id: tel-01761043**

**<https://hal.science/tel-01761043v1>**

Submitted on 7 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET UNIVERSITAIRE  
UNIVERSITÉ PÉDAGOGIQUE NATIONALE

B.P. 8815 KINSHASA I

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE & INFORMATIQUE

**Thèse de Doctorat N° 055**

Domaine : MATHÉMATIQUE  
Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée et soutenue  
par

*Jean Pierre MUKEBA KANYINDA*  
DES/DEA en Sciences Mathématiques

---

**CHAÎNES DE MARKOV FLOUES ET  
ÉVALUATION DES PARAMÈTRES DE  
PERFORMANCE D'UN RÉSEAU DE  
FILES D'ATTENTE FLOUES À FORME  
PRODUIT**

---

Promoteur : *R. MABELA MAKENGO MATENDO*, P., UNIKIN, RDC.  
Copromoteur : *D. NTANTU IBULA*, P.O., UPN, RDC.

**JURY**

<i>B. ENGOMBE WEDI</i>	: Président	P.O.,	UPN,	RDC.
<i>A. MUSESA LANDA</i>	: Secrétaire	P.,	UNIKIN,	RDC.
<i>R. MABELA MAKENGO MATENDO</i>	: Membre	P.,	UNIKIN,	RDC.
<i>D. NTANTU IBULA</i>	: Membre	P.O.,	UPN,	RDC.
<i>L. MANYA NDJADI</i>	: Membre	P.O.,	UNIKIN,	RDC.
<i>J. SABITI KISETA</i>	: Suppléant	P.,	ISC,	RDC.
<i>A. MATAND TWILENG</i>	: Suppléant	P.,	UPN,	RDC.

Soutenue le 26 Novembre 2016

Année - Académique : 2015 - 2016





ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET UNIVERSITAIRE  
UNIVERSITÉ PÉDAGOGIQUE NATIONALE

B.P. 8815 KINSHASA I

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE & INFORMATIQUE

**Thèse de Doctorat N° 055**

Domaine : MATHÉMATIQUE  
Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée et soutenue  
par

*Jean Pierre MUKEBA KANYINDA*  
DES/DEA en Sciences Mathématiques

---

**CHAÎNES DE MARKOV FLOUES ET  
ÉVALUATION DES PARAMÈTRES DE  
PERFORMANCE D'UN RÉSEAU DE  
FILES D'ATTENTE FLOUES À FORME  
PRODUIT**

---

Promoteur : *R. MABELA MAKENGO MATENDO*, P., UNIKIN, RDC.  
Copromoteur : *D. NTANTU IBULA*, P.O., UPN, RDC.

**JURY**

<i>B. ENGOMBE WEDI</i>	: Président	P.O.,	UPN,	RDC.
<i>A. MUSESA LANDA</i>	: Secrétaire	P.,	UNIKIN,	RDC.
<i>R. MABELA MAKENGO MATENDO</i>	: Membre	P.,	UNIKIN,	RDC.
<i>D. NTANTU IBULA</i>	: Membre	P.O.,	UPN,	RDC.
<i>L. MANYA NDJADI</i>	: Membre	P.O.,	UNIKIN,	RDC.
<i>J. SABITI KISETA</i>	: Suppléant	P.,	ISC,	RDC.
<i>A. MATAND TWILENG</i>	: Suppléant	P.,	UPN,	RDC.

Soutenue le 26 Novembre 2016

Année - Académique : 2015 - 2016

# Identification du Jury

Cette Thèse, présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences, Option : *Mathématique*, Orientation : *Mathématiques Appliquées*, a été soutenue devant le Jury légalement constitué par la décision rectoriale N° 045 / UPN / RECT / 2016 du 09 Septembre 2016, portant désignation des membres du Jury pour la soutenance de la thèse de Doctorat.

## COMPOSITION DU JURY

1. **Président** : Professeur Boniface *ENGOMBE WEDI*, (UPN), RDC.
2. **Secrétaire** : Professeur Alain *MUSESA LANDA*, (UNIKIN), RDC.

### MEMBRES

3. **Professeur** : Rostin *MABELA MAKENGO MATENDO*, (UNIKIN), RDC.  
Promoteur
4. **Professeur** : Donatien *NTANTU IBULA*, (UPN), RDC.  
Copromoteur
5. **Professeur** : Léonard *MANYA NDJADI*, (UNIKIN), RDC.

### MEMBRES SUPPLÉANTS

6. **Professeur** : Jacques *SABITI KISETA*, (ISC), RDC.
7. **Professeur** : Alphonse *MATAND TWILENG*, (UPN), RDC.

*A ma très chère famille.*

# Remerciements

Au terme de ce travail, nous exprimons notre reconnaissance à l'Eternel, pour nous avoir couvert de sa grâce et d'une bonne santé pendant toute la période de notre recherche.

Qu'il nous soit permis en premier lieu d'exprimer notre gratitude aux Professeurs *Rostin Mabela Makengo Matendo*, *Berthold Ulungu Ekunda Lukata* et *Donatien Ntantu Ibula*, pour nous avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie du comité d'encadrement de cette Thèse. Leur encadrement scientifique ainsi que leurs conseils éclairés nous ont permis de monter la barre plus haut, et de produire ce travail sous sa forme actuelle.

Que le Comité de Gestion, les autorités de la Faculté des Sciences ainsi que celles du Département de Mathématique et Informatique de l'Université Pédagogique Nationale de Kinshasa, qui nous ont offert un meilleur cadre pour la préparation et la soutenance de cette Thèse, soient assurés ici de toute notre reconnaissance.

Nous ne pouvons pas nous empêcher de dire grand merci au Professeur *Rajesh Dixit*, Rédacteur en Chef de la revue "*Global Journals*" en Inde ; ses remarques très pertinentes portant sur les derniers résultats de cette recherche, parus dans le journal scientifique "*Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis (JF-SVA)*" nous ont beaucoup aidé dans la rédaction finale de la présente Thèse.

Nos vifs remerciements vont également à la famille du feu Professeur *Kadima Tshimanga*, à Madame *Violette Graça*, à Madame *Yolande Tshibangu Kabedi* et à la compagnie Fedex, pour nous avoir facilité à maintes reprises l'obtention de la documentation pour cette dissertation.

Nous sommes très reconnaissants aux Professeurs *Germain Mulamba Nshindi* de l'Université de Lubumbashi, *Samuel Lumuanga Ngoyi* et *Adrien Munyoka Mwanacyalu* de l'Institut Supérieur Pédagogique de Mbuji-Mayi, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de le relire avec autant d'attention. Leurs remarques nous ont permis d'améliorer la présentation.

Nombreux sont ceux qui nous ont encouragé et soutenu moralement dans le déroulement de cette recherche : Madame *Madeleine Kapinga*, notre épouse ; Professeur *Tshimanga Mulangala* ; Professeur *Kambayi Bwatshia* ; Professeur *Kapenga Kasongo* ; Professeur *Mbaya Ntumbula* ; Professeur *Joseph Cimbela* et bien d'autres ; nous leur témoignons ici toute notre gratitude.

Enfin, grand merci à tous ceux qui, par leurs travaux, leurs idées, leurs présentations, leurs collaborations ou leurs relectures, ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

*Jean Pierre Mukeba Kanyinda.*



# Abstract

This research focuses on the problem of fuzzy product form queueing network performance parameters evaluation. By fuzzy queueing network, we mean a queueing network whose operating parameters are imprecise variables called fuzzy numbers. Such a network is different from those usually treated in conventional models whose parameters are often real numbers.

Since the advent of fuzzy set theory introduced by *Zadeh* in 1965, researchers in this field have striven to develop mathematical models to study simple fuzzy queues and fuzzy queues networks as in classical theory. Unfortunately, these studies which started around 1980 with the work of *Prade*, have so far managed to resolve only the case of simple queues. Several models using the possibility theory, the credibility measure, the fuzzy logic, the simulation, the programming method, ... have been defined for the cause. Among them, the programming method seems to be the basic approach, because it is through it that more than half of scientific articles on the fuzzy queues were analyzed.

As for performance parameters of fuzzy product form queueing networks, nothing concrete regarding a mathematical model has not been made yet in this area. The three studies published respectively by *Chen* in 2006, *Zhang et al* in 2005 and *Luthi and Haring* in 1997 which analyzed particular cases of fuzzy queues networks, were achieved respectively by means of the programming approach, fuzzy logic techniques and mean value algorithms (MVA).

Inspired by a new method called "flexible alpha-cuts method" introduced in this work, the present study conceives a second new mathematical method called "*L-R method*" which permit us to launch for the first time the analysis of fuzzy product form queues network performance parameters. This last method consists in applying L-R fuzzy arithmetic restricted to secant approximations to analytical queues formulas. It is the fruit of a reflection on three observations made about measures evaluated on simple fuzzy queues by the programming approach, namely :

- Performance parameters calculated on simple fuzzy queues are positive fuzzy numbers ; these numbers refer to the number of customers, the waiting time, the flow of the queue , etc. which are usually positive quantities ;
- Instead of membership functions, results of these measures can be described by the knowledge of supports and modal values of fuzzy numbers obtained ;
- To illustrate their approaches, almost all studies conducted on this topic use for operating parameters, triangular or trapezoidal fuzzy numbers, which are part of L-R fuzzy numbers .

These are the results relating to secant approximations on L-R fuzzy arithmetic associated with the above observations, which have allowed us to define this new mathematical model for computing on the first time performance of simple fuzzy queues. The first observation allowed to focus solely on positive L-R fuzzy arithmetic formulas. The second observation reassured us that the results obtained by this new method will be the same as those obtained by the flexible alpha- cuts method. Finally, the last observation puts both methods in the same starting conditions, in order to compare the results and effectiveness relative to the other. By the help of the process built through this new method, we have determined all performance measures of a fuzzy product form queues network usually calculated in classi-

cal model. But before that, the stability network condition which permits the computation of network performance measures, has been reviewed and fixed in this fuzzy environment as in crisp model. Different network performance parameters calculated at steady state are

- the network customers number,
- the station customers number,
- the network customer waiting time,
- the station customer waiting time,
- the network flow,
- the station flow.

Finally, this last introduced method, called L-R method, constitutes the solution to the main question of this research.

**KEY WORDS :** *fuzzy queue, fuzzy queues network, fuzzy product form queues network, performance measures, programming method, flexible alpha-cuts method, secant approximations, L-R method.*

# Résumé

Cette recherche porte sur la problématique de l'évaluation des paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit. Par *réseau de files d'attente floues*, nous sous-entendons un réseau de files d'attente pour lequel certains paramètres de fonctionnement sont des quantités imprécises ou mal connues appelées autrement nombres flous. Un tel réseau est différent de ceux traités habituellement en modèle classique, pour lesquels les paramètres de fonctionnement sont souvent des nombres réels précis.

L'étude d'un réseau de files d'attente se faisant le plus souvent par la connaissance de ses paramètres de performance, les chercheurs de ce domaine se sont évertués depuis l'avènement de la théorie des ensembles flous, à développer des modèles mathématiques de calcul des performances des files d'attente floues simples et de réseaux de files d'attente floues, semblables à ceux développés dans le modèle classique. Fort malheureusement, ces développements n'ont réussi à analyser jusqu'à présent que les performances de files d'attente floues simples. Plusieurs modèles utilisant la théorie de possibilité, la mesure de crédibilité, la logique floue, la simulation, la programmation non linéaire paramétrique, ... ont été définis pour la cause. Parmi eux, celui utilisant la *programmation non linéaire paramétrique* semble être le modèle de base, car c'est par lui que plus de la moitié de travaux scientifiques portant sur les files d'attente floues ont été analysés dans la littérature.

En ce qui concerne les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues, nous n'avons pas réussi à mettre la main sur une étude consacrée à la forme produit, sauf quelques approches particulières de réseaux de files d'attente floues amorcées par *Chen* en 2006, par *Zhang* et *c<sup>ie</sup>* en 2005 et par *Luthi* et *Haring* en 1997, respectivement par la programmation non linéaire paramétrique, par les techniques de la logique floue et par des algorithmes de la valeur moyenne dits "MVA".

S'appuyant sur une nouvelle méthode dénommée "méthode des alpha-coups assouplie (flexible alpha-cuts method)" introduite dans ce travail, la présente étude introduit une deuxième nouvelle méthode dénommée "*méthode L-R*", qui permet de lancer pour la toute première fois l'analyse des paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit. Cette deuxième méthode tire son fondement de l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes. Elle est le fruit d'une réflexion portant sur trois constats faits autour des mesures évaluées à l'aide de la méthode la programmation non linéaire paramétrique, à savoir :

- Les paramètres de performance de files d'attente floues simples sont des nombres flous positifs ; ces nombres désignent le nombre de clients, le temps d'attente, le débit de la file, ... qui sont habituellement des quantités positives ;
- Les résultats de ces paramètres qui pour la plupart de fois sont décrits par les fonctions d'appartenance, peuvent être aussi décrits par les supports et les valeurs modales de nombres flous obtenus ;
- La quasi-totalité d'études menées sur ce thème utilisent d'une part des nombres flous triangulaires ou trapézoïdaux comme paramètres de fonctionnement pour illustrer leurs approches ; et d'autre part, ces deux types de nombres font partie des nombres flous de type L-R.

Les résultats relatifs aux approximations sécantes d'un produit ou d'un quotient de deux nombres flous de type L-R associés à ces constats, nous ont permis de définir cette nouvelle méthode d'évaluation des performances d'abord pour une file d'attente floue simple. Le premier constat ci-haut, nous permet de nous concentrer uniquement sur les formules des nombres flous de type L-R positifs. Le deuxième constat nous rassure que les résultats qui seront obtenus par cette méthode L-R devront être les mêmes que ceux obtenus par la méthode des alpha-coupes assouplie. Et enfin, le dernier constat met les deux méthodes dans les mêmes conditions de départ, afin de comparer les résultats et l'efficacité de l'une par rapport à l'autre.

Par un procédé élaboré à cet effet, nous avons réussi par la même méthode, à déterminer également tous les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit en régime stationnaire comme cela se fait dans la théorie classique. Mais bien avant cela, la condition de stabilité d'un réseau qui ouvre la voie à cette détermination, est redéfinie et fixée dans cet environnement comme en modèle classique. Les différents paramètres de performance calculés sont :

- le nombre de clients au niveau de stations,
- le nombre de clients au niveau du réseau,
- le temps d'attente d'un client dans une station,
- le temps de séjour d'un client dans le réseau,
- le débit du réseau,
- les débits de différentes stations.

En définitive, c'est cette deuxième nouvelle méthode dite Méthode L-R qui constitue une solution à la problématique de cette recherche.

**MOTS-CLÉS :** *file d'attente floue, réseau de files d'attente floues, réseau de files d'attente floues à forme produit, paramètres de performance, méthode de la programmation non linéaire paramétrique, méthode des alpha-coupes assouplie, approximations sécantes, méthode L-R.*

# Liste des abréviations et sigles

N°	ABRÉVIATION	SIGNIFICATION
1.	c <sup>ie</sup>	: compagnie
2.	cf.	: Renvoi à un passage du texte ou à une autre référence
3.	CMC	: Chaîne de Markov classique
4.	CMF	: Chaîne de Markov floue
5.	DEA	: Diplôme d'études approfondies
6.	EFPD	: Ensemble flou propre à droite
7.	ESU	: Enseignement Supérieur et Universitaire
8.	et al	: et alii (et les autres)
9.	FAC	: File d'attente classique
10.	FAF	: File d'attente floue
11.	G/M/1	: File d'attente à un seul serveur dont les temps d'interarrivée et de service sont respectivement généraux et exponentiels.
12.	G/M/c	: File d'attente à $c$ serveurs dont les temps d'interarrivée et de service sont respectivement généraux et exponentiels.
13.	i.i.d.	: Indépendants et identiquement distribués
14.	Inst. Sc.	: Institut Scientifique
15.	ISC	: Institut Supérieur du Commerce
16.	ISP	: Institut Supérieur Pédagogique
17.	JFSVA	: Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis
18.	JPAMAA	: Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications
19.	K-OR	: Kasai - Oriental
20.	L-R	: Left - Right (Gauche-Droite)
21.	L-U	: Lower - Upper (Inférieur-Supérieur)
22.	M/G/1	: File d'attente à 1 seul serveur dont les temps d'interarrivée et de service sont respectivement exponentiels et généraux.
23.	M/G/c	: File d'attente à $c$ serveurs dont les temps d'interarrivée et de service sont respectivement exponentiels et généraux.
24.	M/M/1	: File d'attente classique markovienne à un seul serveur
25.	M/M/c	: File d'attente classique markovienne à $c$ serveurs
26.	M/M/c/N <sub>s</sub>	: File d'attente markovienne à $c$ serveurs de capacité $N_s$
27.	MF/MF/1	: File d'attente floue markovienne à un seul serveur
28.	MF/MF/1-R	: File d'attente floue markovienne à 1 serveur avec rappels
29.	MF/MF/c	: File d'attente floue markovienne à $c$ serveurs
30.	MF/MF/c/N <sub>s</sub>	: File d'attente floue markovienne à $c$ serveurs de capacité $N_s$
31.	MVA	: Mean Value Analysis (Algorithme de la Valeur Moyenne)
32.	P.	: Professeur
33.	pgEFPD	: Plus grand ensemble flou propre à droite
34.	pgVEPF	: Plus grand vecteur propre flou

N°	ABRÉVIATION	SIGNIFICATION
35.	PNLP	: Programmation non linéaire paramétrique
36.	PNLP(s)	: Programme(s) non linéaire(s) paramétrique(s)
37.	P.O.	: Professeur ordinaire
38.	ppEFPD	: Plus petit ensemble flou propre à droite
39.	ppVEPF	: Plus petit vecteur propre flou
40.	PSC	: Processus stochastique classique
41.	PSF	: Processus stochastique flou
42.	PVM	: Processus de vie ou de mort
43.	R.D.C.	: République Démocratique du Congo
44.	R.D. Congo	: République Démocratique du Congo
45.	RECT	: Rectorat
46.	RFAF	: Réseau de files d'attente floues
47.	RFAFFP	: Réseau de files d'attente floues à forme produit
48.	ssi	: Si et seulement si
49.	tq	: Tel(telle) que ou tels(telles) que
50.	UNIKIN	: Université de Kinshasa
51.	UPN	: Université Pédagogique Nationale
52.	VAPF	: Valeur propre floue
53.	VEPF	: Vecteur propre flou

# Table des figures

1.1	Zones des éléments de $\mathbb{R}^2$ selon leur appartenance à $\tilde{A}$ . . . . .	17
1.2	Graphe de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou $\tilde{A}$ . . .	18
1.3	Graphe de la relation floue $\tilde{R}$ définie à l'exemple 1.2. . . . .	26
1.4	Fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire. . . . .	38
1.5	Fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal. . . . .	39
2.1	Graphe des transitions entre états du système. . . . .	75
3.1	Graphe représentatif d'une file d'attente simple $M/M/1$ . . . .	103
3.2	Fonction d'appartenance du nombre de messages en attente dans le système. . . . .	125
3.3	Fonction d'appartenance du temps d'attente d'un message dans le système. . . . .	125
3.4	Fonction d'appartenance du nombre de messages en attente dans la mémoire tampon. . . . .	126
3.5	Fonction d'appartenance du temps d'attente d'un message dans la mémoire tampon. . . . .	126
4.1	Schéma du Réseau défini dans le problème. . . . .	149
4.2	Fonction d'appartenance du nombre moyen de clients $\tilde{N}$ . . . .	155
4.3	Fonction d'appartenance du temps moyen de séjour $\tilde{T}$ . . . . .	156

# Liste des tableaux

2.1	Degrés d'attraction entre états. . . . .	74
3.1	Bornes des $\alpha$ -coupes des temps d'attente et des nombres de messages $0 \leq \alpha \leq 1$ . . . . .	124
4.1	Représentations L-R des taux d'arrivée $\tilde{\lambda}_i$ par station. . . . .	153
4.2	Représentations L-R des taux de service $\tilde{\mu}_i$ par station. . . . .	153
4.3	Représentations L-R des nombres flous de clients par station. . . . .	154
4.4	Représentations L-R des temps d'attente flous par station. . . . .	155
4.5	Supports des nombres flous de clients par station. . . . .	157



# Table des matières

Remerciements	i
Abstract	ii
Résumé	v
Liste des abréviations et sigles	vii
Table des figures	ix
Liste des tableaux	x
Table des matières	x
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
0.1 Choix et intérêt du sujet . . . . .	1
0.2 Problématique du travail . . . . .	3
0.3 Hypothèses du travail . . . . .	4
0.4 État de la question . . . . .	5
0.5 Délimitation du sujet et objectif global . . . . .	7
0.6 Méthodes et techniques utilisées . . . . .	7
0.7 Structure du travail . . . . .	9
<b>1 THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction . . . . .	12
1.2 Sous-ensemble flou . . . . .	13
1.2.1 Historique . . . . .	13
1.2.2 Définition, Remarques et Exemple . . . . .	15
1.2.3 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou . . . . .	18
1.2.4 Normalité et Convexité . . . . .	20
1.2.5 Opérations sur les ensembles flous . . . . .	20

1.2.6	Propriétés des opérations sur les ensembles flous . . .	22
1.2.7	Ensemble flou au sens de <i>Baruah</i> . . . . .	24
1.3	Relation floue . . . . .	25
1.3.1	Définition et représentation . . . . .	25
1.3.2	Réciproque d'une relation floue . . . . .	26
1.3.3	Composition de relations floues . . . . .	27
1.4	Principe d'extension de <i>Zadeh</i> . . . . .	28
1.4.1	Définition du principe . . . . .	28
1.4.2	Compatibilité du principe avec les alpha-coupes . . . .	29
1.5	Nombre flou . . . . .	29
1.5.1	Généralités . . . . .	29
1.5.2	Alpha-coupe d'un nombre flou . . . . .	30
1.5.3	Opérations arithmétiques sur les nombres flous . . . .	32
1.6	Nombres flous triangulaires - Nombres flous trapézoïdaux . .	37
1.6.1	Définitions . . . . .	38
1.6.2	Arithmétique sur les nombres flous triangulaires . . . .	39
1.7	Nombre flou de type L-R . . . . .	42
1.7.1	Première forme de type L-R . . . . .	42
1.7.2	Notations et appellations : . . . . .	42
1.8	Arithmétique des nombres flous de même type L-R . . . . .	43
1.8.1	Addition et soustraction . . . . .	43
1.8.2	Multiplication des nombres flous de type L-R . . . . .	43
1.8.3	Division des nombres flous de type L-R . . . . .	46
1.8.4	Deuxième forme de type L-R . . . . .	49
1.9	Quelques propriétés de nombres flous triangulaires liées au type L-R . . . . .	51
1.9.1	Propositions . . . . .	51
1.10	Conclusion du chapitre . . . . .	54
<b>2</b>	<b>CHAÎNES DE MARKOV FLOUES</b>	<b>56</b>
2.1	Introduction . . . . .	56
2.2	Principaux résultats d'une chaîne de Markov classique . . . .	57
2.2.1	Définition et Matrice de transition . . . . .	57
2.2.2	Equation de <i>Chapman - Kolmogorov</i> . . . . .	58
2.2.3	Propriétés d'une chaîne de Markov classique . . . . .	59
2.3	Matrices floues . . . . .	60
2.3.1	Définition et opérations arithmétiques . . . . .	63
2.3.2	Concepts liés à une matrice floue . . . . .	65

2.3.3	Convergence et Oscillation d'une matrice floue . . . . .	68
2.3.4	Déterminant et matrice adjointe d'une matrice floue . . . . .	68
2.4	Chaînes de Markov floues et leurs propriétés . . . . .	71
2.4.1	Définition d'une chaîne de Markov floue . . . . .	73
2.4.2	Propriétés d'une chaîne de <i>Markov</i> floue . . . . .	79
2.5	Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de <i>Markov</i> floue sous l'opération max-min . . . . .	83
2.5.1	Ensemble flou propre à droite de la matrice de transi- tion d'une chaîne de <i>Markov</i> floue . . . . .	85
2.5.2	Valeur propre et vecteur propre . . . . .	87
2.5.3	Exemple numérique et conclusion de l'étude . . . . .	91
2.6	Conclusion du chapitre . . . . .	93
<b>3</b>	<b>FILES D'ATTENTE ET RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE FLOUES</b>	<b>96</b>
3.1	Introduction . . . . .	96
3.2	Principaux résultats d'une file d'attente en modèle classique . . . . .	100
3.2.1	Description d'une file d'attente classique . . . . .	100
3.2.2	Analyse mathématique d'une file d'attente classique . . . . .	101
3.2.3	Calcul de la distribution stationnaire d'une file d'at- tente classique . . . . .	103
3.2.4	Mesures de performance d'une file d'attente classique . . . . .	103
3.3	Mesures de performance d'une file d'attente floue par la mé- thode des alpha-coupes assouplie . . . . .	104
3.3.1	Modélisation d'une file d'attente floue . . . . .	104
3.3.2	Calcul des performances d'une file d'attente floue par la méthode des alpha-coupes assouplie . . . . .	105
3.4	Exemple d'application de la méthode des alpha-coupes assouplie	108
3.4.1	Problème . . . . .	108
3.4.2	Solution . . . . .	109
3.4.3	Résultats . . . . .	125
3.4.4	Avantages et inconvénients de la méthode des alpha- coupes assouplie . . . . .	127
3.5	Mesures de performance d'une file d'attente floue par la mé- thode L-R . . . . .	128
3.5.1	Conceptualisation de la méthode L-R . . . . .	128
3.5.2	Description de la méthode Left-Right (méthode L-R) . . . . .	129
3.6	Exemple d'application de la méthode L-R . . . . .	131
3.6.1	Problème . . . . .	131

3.6.2	Solution . . . . .	131
3.6.3	Résultats . . . . .	134
3.6.4	Avantages et inconvénients de la méthode L-R . . . . .	134
3.7	Conclusion du chapitre . . . . .	134
<b>4</b>	<b>PERFORMANCES D'UN RÉSEAU DE FILES D'ATTENTE FLOUES A</b>	
	<b>FORME PRODUIT</b>	<b>137</b>
4.1	Introduction . . . . .	137
4.2	Principaux résultats d'un réseau de files d'attente à forme pro-	
	duit en modèle classique . . . . .	140
4.2.1	Les hypothèses . . . . .	140
4.2.2	Stabilité d'un réseau de files d'attente à forme produit	140
4.2.3	Mesures de performance d'un réseau classique à forme	
	produit . . . . .	142
4.3	Modèle flou d'un réseau de files d'attente à forme produit . .	143
4.3.1	Considérations théoriques . . . . .	143
4.3.2	Condition de stabilité en environnement flou . . . . .	144
4.4	Détermination des mesures de performance d'un réseau de	
	files d'attente floues à forme produit par la méthode L-R . . .	145
4.4.1	Choix de la méthode L-R . . . . .	145
4.4.2	Calculs proprement dits par la méthode L-R . . . . .	147
4.5	Application numérique . . . . .	148
4.5.1	Problème . . . . .	148
4.5.2	Données . . . . .	149
4.5.3	Inconnues : . . . . .	150
4.5.4	Résolution . . . . .	150
4.6	Comparaison des résultats du modèle flou à ceux du modèle	
	classique . . . . .	157
4.6.1	Problème . . . . .	157
4.6.2	Résolution . . . . .	157
4.6.3	Constats . . . . .	158
4.7	Conclusion du chapitre . . . . .	158
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>161</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## 0.1 Choix et intérêt du sujet

Plus nos sociétés s'urbanisent et se modernisent, plus le problème de files d'attente dans plusieurs secteurs de la vie se pose avec acuité. Qu'il s'agisse de systèmes visibles tels que les banques, les supermarchés, les aéroports, ou des systèmes invisibles tels que les appels téléphoniques, l'envoi des paquets des données en Informatique, les files d'attente n'ont jamais été désirables. D'une part, elles sont ennuyeuses, car elles font perdre du temps, de l'argent et des ressources. Et d'autre part, elles sont incontournables parce que les services organisés sont incapables de s'occuper de tout le monde à la fois.

Face à ce dilemme, le problème qui s'est posé au cours de l'histoire est de savoir, quelles solutions faut-il envisager à nos demandes des services qui ne cessent d'accroître au jour le jour ?

C'est de la prise de conscience de ce problème et de la recherche des solutions y afférentes que la science est parvenue à introduire *la théorie classique de files d'attente* depuis bientôt un siècle (cf.[24]). Celle-ci est définie comme une technique de la Recherche Opérationnelle, permettant d'étudier le comportement d'un système d'attente dans le temps, afin de proposer aux décideurs les principaux éléments nécessaires à la prise des décisions. A travers diverses études faites par les chercheurs dans ce domaine, cette technique a donné des solutions très satisfaisantes à plusieurs problèmes d'attente qui se posent dans le modèle classique, modèle pour lequel les paramètres qui décrivent les systèmes sont souvent des nombres réels précis. Des modèles mathématiques de ces solutions ont été construits, à partir de files d'attente simples jusqu'aux files d'attente fortement inter-connectées appelées réseaux. Mais tout comme pour les autres domaines de la mathématique à l'époque, tous ces modèles construits ont été incapables d'analyser les mesures de performance de systèmes d'attente dont les paramètres sont des quantités imprécises ou des variables linguistiques.

Il a fallu attendre l'avènement de la théorie des ensembles flous introduite par Zadeh à partir de 1965, pour voir venir peu à peu, des solutions à cette dernière catégorie de problèmes. Avec cette nouvelle donne, les chercheurs du domaine ont eu la possibilité de relancer la problématique de files d'attente en ces nouveaux termes :

Quelles solutions faut-il envisager aux demandes massives des services au cas où les paramètres qui définissent les systèmes seraient mal connus ou imprécis ?

Des recherches menées autour de cette deuxième préoccupation depuis 1980, ont abouti à l'introduction d'une nouvelle théorie dite *théorie de files d'attente floues* (cf.[35]), consacrée à l'étude du comportement d'une file d'attente simple lorsque les paramètres qui la décrivent sont des quantités imprécises appelées nombres flous. Des techniques basées sur la logique floue et l'arithmétique floue, ont été élaborées dans ce cadre pour évaluer les mesures de performance de telles files comme cela se passe dans le modèle classique. Fort malheureusement, toutes ces techniques définies pour la cause, n'ont pas pu pousser suffisamment l'analyse jusqu'au niveau des réseaux de files d'attente floues à forme produit.

Vu de nos jours que la plupart de réseaux de files d'attente, que nous fréquentons au quotidien, sont décrits le plus souvent en langage courant par des paramètres flous, nous avons opté dans le cadre de cette dissertation doctorale, d'orienter notre recherche vers cette piste qui, à notre connaissance, n'a pas encore de trace dans la littérature. Il s'agit bien entendu de « *réseaux de files d'attente floues à forme produit* (RFAFFP) ». Ce sont des réseaux à forme produit dans lesquels des nombres flous sont introduits comme paramètres de fonctionnement. Cette étude est menée dans l'intérêt de :

- Obtenir une méthodologie d'analyse d'un réseau de files d'attente floues à forme produit ;
- Obtenir un document de référence sur les réseaux de files d'attente floues, étant donné qu'il n'en existe que très peu à ce jour ;
- Mettre à la disposition des utilisateurs une méthode pratique d'analyse des caractéristiques d'un réseau de files d'attente floues à forme produit à partir de laquelle, ils peuvent concevoir des projets d'implantation des réseaux de files d'attente dont les paramètres sont décrits en termes imprécis ou linguistiques ;
- Mettre à la disposition des étudiants et des chercheurs des éléments de

base sur les réseaux de files d'attente floues à forme produit dont ils peuvent se servir au cours de leurs recherches dans le domaine.

## 0.2 Problématique du travail

De nos jours, dans plusieurs secteurs de la vie, que ce soit les systèmes informatiques, les systèmes de communication, les systèmes de production ou tout autre système de la vie quotidienne, le monde est à la quête de la meilleure qualité de service et de meilleures performances de systèmes. En ce qui concerne les performances de systèmes, *Bruno Baynat* fait remarquer :

*« qu'il devient inconcevable de construire un système quelconque sans avoir auparavant fait d'analyse de performances. La pression des enjeux économiques est telle actuellement que l'on ne peut aboutir à un système sous-dimensionné et que l'on doit éviter au maximum le surdimensionnement. Construire le système adapté, respectant le plus possible les objectifs du cahier de charges, est une démarche qui passera obligatoirement par une étape de modélisation et d'analyse des performances. [Bruno Baynat [14], p. 11]. »*

Devant une telle prise de position et vu qu'aucun de modèles mathématiques introduits jusqu'à présent en théorie de files d'attente floues pour évaluer les mesures de performance, n'a été consacrée aux réseaux à forme produit, ce travail s'attèle à résoudre le problème fondamental de savoir :

***« Par quelle approche mathématique pouvons-nous obtenir les paramètres de performance d'un tel réseau afin de prévenir des situations inconfortables dans son fonctionnement ? »***

Ainsi, pour résoudre ce problème, nous devrions répondre tout au long de ce travail aux questions suivantes :

- L'approche mathématique de programmation non linéaire paramétrique (PNLP) qui a si bien résolu ce problème sur une file d'attente floue simple, ne peut-elle pas aussi le résoudre sur un RFAFFP ?
- Si ce n'est pas le cas, quels sont les éléments qui faussent la marche à cette approche afin qu'elle ne réponde pas de façon satisfaisante aux RFAFFP ?
- Existe-t-il des moyens scientifiques de contourner ces éléments, permettant d'arriver au but sans dénaturer le savoir ?



- Existe-t-il de nouveaux éléments de calculs qui doivent être pris en compte dans ces moyens permettant de construire un modèle idéal recherché ?
- C'est la recherche d'une solution à ce problème et des réponses à toutes ces questions qui constitue l'essentiel de cette dissertation doctorale.

### 0.3 Hypothèses du travail

En théorie de files d'attente floues, l'approche mathématique la plus utilisée, qui a couvert plusieurs sous-modèles de files d'attente est celle de la *programmation non-linéaire paramétrique (PNLP)*. Cette approche utilise simultanément deux types d'arithmétiques floues pour calculer les mesures de performance, à savoir l'arithmétique floue basée sur le principe d'extension de Zadeh et celle des alpha-coupes et intervalles (cf. [125]). Elle permet d'obtenir des mesures de performance d'une file d'attente floue par la connaissance de leurs fonctions d'appartenance au lieu de valeurs moyennes employées en modèle classique. Des observations faites sur les mesures maintes fois calculées par cette approche, nous sommes parvenus à formuler l'hypothèse fondamentale suivante pour notre travail :

**« Il serait possible de déterminer les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit par la voie de l'arithmétique des nombres flous de type L-R. »**

A cette hypothèse principale, nous pouvons adjoindre les hypothèses secondaires suivantes qui sont des réponses aux préoccupations relevées ci-haut :

- L'approche mathématique de PNLN qui a si bien résolu ce problème sur une file d'attente floue simple pourrait bien aussi le résoudre sur un RFAFFP, mais elle présenterait une faiblesse liée aux calculs très encombrants qu'exige la combinaison de ses deux arithmétiques lorsque le nombre de serveurs est très élevé.
- Les principaux éléments qui affaibliraient cette méthode sur les réseaux seraient le nombre élevé de serveurs dans un réseau et la multiplicité des programmes d'optimisations qui en découleraient.
- L'arithmétique floue dite "arithmétique des nombres flous de type L-R" constituerait un moyen de contourner ces éléments si nous la restreignons

aux approximations dites "approximations sécantes".

– L'élément qu'il faut prendre en compte dans cette arithmétique est que toutes les multiplications et les divisions présentes dans toutes les opérations de calcul nécessaires soient effectuées uniquement sur base des approximations sécantes pour de meilleurs résultats.

## 0.4 État de la question

Cette étude n'est pas la première à s'intéresser aux files d'attente et aux réseaux de files d'attente floues. D'après la littérature, les files d'attente floues ont été introduites en 1980 par *Prade*, le tout premier chercheur à avoir produit un article scientifique appliquant pour la première fois la théorie des ensembles flous aux files d'attente (cf. [152]). Dans cet article, l'auteur s'est concentré uniquement sur la recherche de la distribution de possibilité du temps moyen qu'un client passe dans le système.

Ensuite deux autres articles sur ce thème, produits par *Li* et *Lee* (cf. [116] ; [117]) sont parus successivement en 1988 et 1989. Dans ceux-ci, les auteurs, usant du principe d'extension de *Zadeh*, calculent les mesures de performance usuelles d'une file d'attente lorsque le taux d'arrivée et le taux de départ sont des variables floues.

Toutefois, *Negi* et *Lee* [141], dans leur article intitulé "Analysis and Simulation of Fuzzy Queues" paru en 1992, signalent que les formules utilisées par *Li* et *Lee* paraissent très compliquées et difficiles à évaluer. Ils ont pour cela proposé à leur tour une approche utilisant les alpha-coupes et une simulation à deux variables pour analyser les files d'attente floues, mais celle-ci ne leur a fourni que des résultats non fuzzifiables<sup>1</sup>.

Pour leur part, *Kao* et *c<sup>ie</sup>* [92] ont fait usage de la technique de la programmation paramétrique, pour construire les fonctions d'appartenance de caractéristiques de systèmes pour des files d'attente et les ont appliquées avec succès aux modèles simples F/M/1, M/F/1, F/F/1 et FM/FM/1 ; où F représente le temps flou et FM la distribution exponentielle fuzzifiée.

Au fur et à mesure que les recherches ont évolué, cette technique a été recentrée sur deux types d'arithmétiques floues, à savoir, l'arithmétique floue basée sur le principe d'extension de *Zadeh* et celle des alpha-coupes et intervalles, et est devenue ce que nous appelons dans ce travail méthode "de la programmation non-linéaire paramétrique", dite aussi méthode "des pro-

---

1. voir "fuzzification", p. 36

grammes non linéaires paramétriques (PNLP)". Plusieurs chercheurs l'ont utilisée pour évaluer les mesures de performance de files d'attente dont le nombre de variables floues va jusqu'à 5 (cf. [89]). Avec cette méthode, le nombre de publications sur les files d'attente floues s'est accru et continue à croître. Les études menées portent progressivement sur la presque totalité de sous-modèles couverts par l'approche classique comme nous le verrons au troisième chapitre.

Quant au calcul des mesures de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit, nous osons affirmer au regard de la littérature que notre travail fait œuvre de pionnier. Nous n'avons pas réussi à mettre la main sur une investigation qui analyse ce problème suivant un modèle mathématique. Néanmoins, nous avons pu identifier trois travaux portant sur quelques approches particulières de réseaux de files d'attente floues, notamment :

- L'approche de *Chen* [42], qui calcule les mesures de performance d'un réseau ouvert de files d'attente floues au moyen du principe d'extension de Zadeh et de l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles.
- Celle de *Zhang* et *c<sup>ie</sup>* [211], qui aborde l'étude d'un réseau de files d'attente floues au moyen des techniques de la logique floue.
- Et enfin, celle de *Luthi* et *Haring* [121], qui fait usage de l'arithmétique des intervalles pour étudier les performances des réseaux informatiques et des réseaux de communication à paramètres flous, par le biais des algorithmes de la valeur moyenne dits "MVA".

Pour notre part, notre première contribution dans ce cadre a consisté à enrichir la théorie de FAF d'une nouvelle méthode que nous avons dénommée "*méthode des alpha-coupes assouplie (flexible alpha-cuts method)*" (cf. [131]). Celle-ci base l'analyse d'une FAF sur une seule arithmétique floue au lieu de deux, il s'agit de l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles dont le schéma complet de calcul est expliqué au cours du premier chapitre à la sous-sous-section 1.5.3. Compte tenu de la nature de cette arithmétique, les grands calculs reposent dès lors sur l'arithmétique des intervalles, qui est habituellement reconnue comme étant non floue ; ce qui rend la méthode introduite plus souple et plus abordable que celle de la PNLP. En ce qui concerne le calcul des mesures de performance d'un RFAFFP, cette nouvelle méthode introduite paraît mal adaptée à cause du nombre incalculable

de programmes d'optimisations qu'elle regorge. C'est ainsi qu'à travers nos deux articles [135] et [133], nous avons lancé une deuxième méthode dite "*méthode L-R*", basée sur l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes. Cette dernière, étant dépourvue de programmes d'optimisations, est mieux adaptée à la résolution du problème que les deux premières.

## 0.5 Délimitation du sujet et objectif global

Les réseaux de files d'attente constituent un domaine de recherche très vaste. Dans ce travail, nous nous sommes penchés uniquement sur l'analyse d'un réseau de files d'attente floues à forme produit, avec pour objectif de déterminer toutes ses mesures de performance semblables à celles obtenues dans le modèle classique. Aussi faut-il préciser que nous ne considérerons dans notre étude que des réseaux à forme produit ouverts dits aussi "réseaux de Jackson ouverts", constitués de files markoviennes simples FM/FM/1. Les paramètres d'entrée et de sortie du réseau étant essentiellement des nombres flous positifs, nous supposons au cours de cette analyse que leurs supports ne contiennent pas le réel 0. Cette supposition permet d'ignorer toutes les préoccupations relatives aux résultats absurdes liés aux opérations non internes dans la famille des nombres flous. Le choix de la forme produit n'est pas un fait du hasard. Il est justifié par sa configuration simple, étant donné que nous n'en sommes qu'à une étude introductive.

## 0.6 Méthodes et techniques utilisées

Pour arriver aux résultats escomptés, nous avons utilisé prioritairement la méthode d'*analyse de contenu* avec toutes ses différentes étapes (cf. [140]). Appliquée sur l'ensemble des chapitres, cette méthode nous a permis de déceler des sous-thèmes abordés partiellement dans le domaine et ceux non encore abordés. Nos investigations sur quelques uns de sous-thèmes non abordés ont débouché sur des résultats originaux de cette Thèse qui ont fait l'objet de six publications scientifiques dont une dans les "*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Kinshasa (R.D.C.)*", quatre dans le journal international dénommé "*Journal of Fuzzy Set Valued Analysis (Allemagne)*" et une dans le journal international dénommé "*Journal of Pure and Applied*

*Mathematics : Advances and Applications* (Inde)".

Les différentes étapes de la méthode se sont déroulées particulièrement comme suit :

– *Sélection de documents textuels ou visuels* (livres, articles, conférences, séminaires, vidéo, ...) : avec ou sans Internet.

En ce qui concerne les documents visuels, nous avons recouru à la visualisation des séquences de films sur le fonctionnement de plusieurs systèmes d'attente dans l'usinage sur Youtube.com.

– *Lecture* : sur Internet ou dans des documents écrits ;

– *Classification* : les documents intéressant notre thème sont étiquetés par modules et ont constitué nos relevés thématiques.

– *Interprétation* : réalisée lors de la lecture et la classification.

Les modules qui ont retenu notre attention pour l'ensemble du travail sont les suivants :

- \* L'arithmétique floue,
- \* Les Processus stochastiques flous,
- \* Les paramètres de performance d'une file d'attente floue,
- \* Les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit.

Dans cette approche, l'analyse classique a prévalu sur l'analyse quantitative.

Quant à la méthodologie utilisée dans la résolution spécifique du problème, elle se décrit en trois étapes principales :

– En premier lieu, tout est parti logiquement de la *méthode de la PNLP* qui était jusque là la seule à être adaptée à plusieurs sous-modèles de FAF. Cette méthode étant déjà assez compliquée pour une file d'attente floue simple (cf. [131] ), elle a été rayée de notre liste des prétendantes au traitement des RFAFFP.

– Ensuite, la toute première idée qui nous est venue à l'esprit en amont, de circonscrire l'analyse d'une FAF à une seule arithmétique floue au lieu de deux, avait pour but l'analyse des RFAFFP en aval ; malheureusement, la *méthode des  $\alpha$ -coupes assouplie* qui s'en est dégagée, a montré quelques insuffisances bien que capable de mener à bout cette analyse.

– Enfin, l'idée d'exprimer les mesures de performance à l'aide des supports et des valeurs modales (cf. [135]), et celle de recourir aux approximations

sécantes qui calculent les valeurs exactes ces deux composantes (cf. [134]), nous ont permis d'introduire la *méthode L-R*, qui est encore plus souple et plus expéditive que les deux premières. C'est cette méthode qui nous a permis enfin de résoudre le problème fondamental soulevé par ce travail en un temps raisonnable.

## 0.7 Structure du travail

Outre l'introduction générale et la conclusion générale, ce travail comprend quatre chapitres :

- Les files d'attente et les réseaux de files d'attente floues étant définis sur base des nombres flous, le premier chapitre fait un résumé de la "*théorie des ensembles flous*". Dans ce résumé, un accent particulier est mis sur l'arithmétique des nombres flous de type L-R, qui joue un grand rôle dans la recherche d'une solution au problème posé dans le travail.
- Le deuxième chapitre introduit un cas particulier de processus stochastiques markoviens flous appelés "*chaînes de Markov floues*", qui sont à l'origine de l'étude de files d'attente floues markoviennes. Nous y avons résolu en passant l'épineux problème de calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue par la composition max-min qui, avons-nous estimé, pourrait contribuer à résoudre ultérieurement certains problèmes ouverts dans ce domaine, tels que celui de la recherche d'une condition nécessaire et suffisante de l'ergodicité d'une chaîne de *Markov* floue. En outre, ce chapitre peut aider à la markovisation de files d'attente non markoviennes telles que M/G/1, G/M/1, M/G/c, G/M/c, etc.
- Le troisième chapitre intitulé "*Files d'attente et réseaux de files d'attente floues*" est beaucoup plus consacré aux files d'attente floues qui introduisent les réseaux de files d'attente floues. Partant de la méthode des PNLP, qui a réussi à analyser depuis longtemps les caractéristiques de ces files, ce chapitre propose deux nouveaux procédés de calcul qui permettent d'obtenir les mêmes caractéristiques au moyen de deux types d'arithmétiques respectives : – l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles et – l'arithmétique des nombres flous de type L-R réduite aux approximations sécantes. Le premier est dénommé "*méthode des alpha-coupes assouplie*" et le deuxième "*méthode L-R*". C'est ce deuxième procédé qui, au quatrième chapitre, constituera une solution à la problématique de ce travail.
- Le quatrième et dernier chapitre est intitulé "*Performances d'un réseau de*

*files d'attente floues à forme produit*". Par analogie au modèle classique, ce chapitre analyse et modélise un réseau de files d'attente floues à forme produit par la méthode L-R, en s'appuyant sur les principes d'indépendance et de séparabilité en régime stationnaire que possède un réseau à forme produit. Le problème de supermarché que nous y avons posé et résolu à la section 4.5, montre l'usage pratique et la validité de l'approche présentée.

# PREMIER CHAPITRE



# Chapitre 1

## THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS

### 1.1 Introduction

La modélisation d'un réseau de files d'attente floues à forme produit que nous abordons dans cette recherche, comporte généralement une bonne partie de notions liées à la théorie des sous-ensembles flous. Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base de cette théorie dont nous avons besoin dans la suite. Ces notions sont abordées avec un peu plus des détails car la manipulation des paramètres imprécis sur les systèmes d'attente flous exige une connaissance plus ou moins approfondie de cette théorie.

En termes de contributions originales aux matières de ce chapitre, nous résolvons deux problèmes à la sous-section 1.8.2. Le premier concerne l'élaboration d'une preuve à la proposition longtemps énoncée par *Dubois* et *Prade* dans [57] selon laquelle, le produit de deux nombres flous de même type L-R n'est pas nécessairement de type L-R. Le deuxième concerne la recherche d'une meilleure approximation de ce produit qui nous permettrait d'utiliser régulièrement les formules de type L-R sans trop d'erreurs. Des résultats obtenus aux différents niveaux de la preuve produite au premier problème, nous dégageons une forme d'approximation, équivalente à celle qui a été trouvée par *Hanss* dans [80], dite *approximation sécante*. A l'aide d'un exemple, nous montrons dans [134], pp. 38-39, que cette approximation est meilleure par rapport à l'approximation tangente, longtemps répercutée depuis les travaux de *Dubois* et *Prade*. Cela est justifié par le fait que l'approximation sécante possède le même mode et le même support que le produit alors que l'approximation tangente, bien qu'ayant le même mode que le produit, possède généralement un support différent. Pour plus des détails sur cette meilleure approximation, un lecteur intéressé est prié de se référer à

notre article intitulé « Sur la Multiplication des Nombres Flous de Type L-R », paru dans les *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Kinshasa* en septembre 2014 et référencé [134] dans la bibliographie du présent travail.

Par ailleurs, vu le rôle joué par les nombres flous triangulaires dans les différentes modélisations des systèmes flous, nous proposons et démontrons dans la sous-section 1.6.2 le théorème 1.6 et le corollaire 1.1, qui permettent de démontrer à la section 1.9 que le produit de deux nombres flous triangulaires n'est pas nécessairement triangulaire. De nombreux détails sur toutes ces matières se trouvent dans [191], [169], [35], [168], [118], [119], [80], [32], [213], [67], [25], [58], [154], [57], [115], [114], [204], [203], [94], [202], [201] et [200].

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : La deuxième section rappelle la définition d'un sous-ensemble flou, ses caractéristiques et les opérations algébriques dans la famille des sous-ensembles flous. La troisième rappelle brièvement les relations floues. La quatrième rappelle le principe d'extension de *Zadeh*, qui est un outil très important de la théorie des sous-ensembles flous. La cinquième est consacrée aux nombres flous et à leur arithmétique. La sixième définit les nombres flous triangulaires et trapézoïdaux dont l'usage est très fréquent sur les systèmes d'attente flous. La septième traite de nombres flous de type L-R. La huitième reproduit les formules principales de l'arithmétique des nombres flous de type L-R qui nous seront très utiles au cours de la recherche d'une solution au problème soulevé par ce travail. La neuvième montre l'intérêt qu'un nombre flou triangulaire tire de ses propriétés de type L-R. La dixième et dernière section donne la conclusion du chapitre.

## 1.2 Sous-ensemble flou

### 1.2.1 Historique

La théorie des sous-ensembles flous fut introduite par *Zadeh* [200] en 1965 pendant qu'il était Professeur à l'Université de Californie à Berkeley. Cette théorie a été introduite dans le souci de donner une réponse à plusieurs questions qui se posaient jusque-là entre les recettes de la théorie des ensembles classiques (théorie de *Cantor*) et le monde réel.

Sans être elle-même imprécise, la théorie des sous-ensembles flous est basée sur l'intuition, et tient compte de l'imprécision, de l'incertitude, de

l'incomplétude et de la subjectivité.

Associée à la logique floue et à la théorie de possibilité qui furent créées par le même auteur quelques années plus tard, la théorie des sous-ensembles flous a porté ses premiers fruits aux alentours des années 1974. Dès cette période, plusieurs applications qui se sont inspirées des recherches de *Mamdani* sur le contrôle flou et des articles de *Zadeh* sur l'approche linguistique dans le réglage des systèmes, ont commencé à produire les premiers résultats qui ont éveillé la curiosité du monde industriel et scientifique (cf. [73], p. 43). Mais c'est autour des années 1990 que la théorie est devenue presque une mode pour les chercheurs de différentes disciplines. Dans l'ingénierie, de nouvelles techniques industrielles sont généralisées et ont donné lieu à plusieurs fabrications de divers produits parmi lesquels ceux de ménage, de systèmes automobiles embarqués, etc. Sur le plan scientifique, malgré certaines réticences, le nombre de publications enregistrées à travers le monde a montré l'intérêt que les chercheurs attachaient à la théorie. Rien que dans l'intervalle de vingt-cinq premières années, on comptait déjà au moins 12000 articles, et plus de 150 ouvrages publiés sur le flou (cf. [213], [96]). Cet intérêt est allé grandissant avec l'introduction de cette théorie dans d'autres concepts de la mathématique classique, trouvant aujourd'hui des applications dans divers domaines : ingénierie, business, sciences médicales, sciences naturelles, sciences économiques, robotique, linguistique, intelligence artificielle, informatique, etc. (cf. [88], pp. 1-2).

Le mérite de la théorie des sous-ensembles flous est d'avoir réussi à sortir la théorie ensembliste de sa logique bivalente qui ne correspond pas toujours au raisonnement humain et à la réalité pratique. Pour y parvenir, elle a dû étendre la vision booléenne en introduisant la notion d'*appartenance pondérée* dite aussi *appartenance à plusieurs degrés*. Ces différents degrés sont des nombres réels variant entre 0 et 1, et sont appelés *niveaux d'appartenance*. Au degré 0, l'élément *n'appartient pas* du tout à l'ensemble ; tandis qu'au degré 1, l'élément *appartient absolument* à l'ensemble. Entre 0 et 1, l'élément *appartient partiellement* à l'ensemble. Grâce à cette relativisation, on a su manipuler mathématiquement la grande partie des informations exprimées vaguement en langage naturel, comme en témoignent d'ailleurs les articles de *Zadeh* publiés en 1972 et 1973 (cf. [201], [202]). C'est ainsi que voulant renforcer l'idée de l'utilité et l'opportunité de la théorie, l'un de ses fondateurs, *Arnold Kaufmann*, écrit :

« La théorie des sous-ensembles flous pose le problème épistémolo-

gique suivant : est-il meilleur d'utiliser un modèle certain mais qui représente de trop loin le réel ou un modèle flou qui le représente mieux ? » [Arnold Kaufmann [95]]

Somme toute, la théorie de sous-ensembles flous permet, en toute rigueur mathématique, d'associer l'objectivité quand elle est possible, à la subjectivité contrôlée, pour comprendre et agir face aux divers aspects de l'incertain.

## 1.2.2 Définition, Remarques et Exemple

### Définition 1.1

Soit  $E$  un ensemble de référence ou un univers. Un **sous-ensemble flou**  $A$  de  $E$  ou plus brièvement un **ensemble flou**  $A$  est caractérisé par une fonction réelle, dite *fonction d'appartenance*, notée  $\eta_A$ , de  $E$  dans l'intervalle unité  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ . Lorsque nous parlerons d'un ensemble flou  $A$  dans la suite, il s'agira d'un sous-ensemble flou  $A$  sur un ensemble référentiel  $E$ , caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\eta_A$ , allant de  $E$  vers l'intervalle unité  $[0, 1]$  et définie par :

$$\begin{aligned}\eta_A &: E \longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \eta_A(x)\end{aligned}$$

La famille des sous-ensembles flous définis sur un univers  $E$  sera noté  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

### Remarque(s) 1.1

- 1° Dans le texte de cette dissertation, les termes : *classique*, *traditionnel* ou *ordinaire* se rapportent à la théorie classique des ensembles, tandis que les termes *flou*, *vague*, *imprécis*, *incertain*, *mal connu*, ... désignent ce qui est relatif aux ensembles flous.
- 2° Pour distinguer l'ensemble flou  $A$  (fuzzy set  $A$ ) de l'ensemble non flou  $A$  (crisp set  $A$ ), nous surmonterons désormais l'ensemble flou du symbole tilde " $\sim$ ". Ainsi, le sous-ensemble flou  $A$  sera désigné par  $\tilde{A}$ , et noté par :

$$\tilde{A} = \{(x, \eta_{\tilde{A}}(x)) | x \in E\} \quad (1.1)$$

- 3° Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est souvent noté par :

$$\tilde{A} = \eta_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \dots + \eta_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \eta_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \quad (1.2)$$

où le signe "+" représente l'union des éléments et où le signe "/" joue le rôle de séparateur (cf. [57]).

4° Lorsque  $E$  est infini ou non dénombrable,  $\tilde{A}$  est noté :

$$\tilde{A} = \int_E \eta_{\tilde{A}}(x)/x \quad (1.3)$$

où  $\eta_{\tilde{A}}(x)$  peut être exprimé par son expression algébrique, et où le symbole  $\int_E$  est juste une notation adoptée pour exprimer l'infinité ou la non dénombrabilité de  $E$ , et non le signe habituel d'une mesure sur  $E$  (cf. [57]).

5° Un sous-ensemble classique  $A$  est un cas particulier de sous-ensembles flous ; avec comme fonction d'appartenance sa fonction caractéristique.

6° L'ensemble flou vide est noté  $\tilde{\emptyset}$ , et est défini par :

$$\eta_{\tilde{\emptyset}}(x) = 0, \forall x \in E. \quad (1.4)$$

Aucun élément de  $E$  ne lui appartient ni totalement, ni partiellement. Il est égal à l'ensemble vide classique noté habituellement par  $\emptyset$ .

7° Le plus grand sous-ensemble flou sur  $E$  au sens classique est noté  $\tilde{1}_E$ . Il a pour fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{1}_E}(x) = 1, \forall x \in E. \quad (1.5)$$

Tout élément de  $E$  lui appartient totalement. Il est égal à l'univers  $E$ .

8° Les opérateurs  $\min$  et  $\max$  seront employés au moyen des parenthèses, des accolades ou des crochets.

9° Les fonctions d'appartenance peuvent être de différentes formes selon leurs définitions : triangulaires, trapézoïdales, gaussiennes, sigmoïdales, etc.

10° Généralement, on consolide l'intuition sur un ensemble flou par le graphe de sa fonction d'appartenance à la place de diagramme de Venn utilisé dans la théorie classique.

### Exemple 1.1

Prenons l'univers  $E = \mathbb{R}^2$ . Soit  $\tilde{A}$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des points  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  proches de l'origine d'axes, dont le degré d'appartenance à  $\tilde{A}$  est défini subjectivement par :

$$\eta_{\tilde{A}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \max\left(0, \frac{b - d(x_1, x_2) + 1}{b}\right) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 > a^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels fixes tels que  $1 < a < b$ , et  $d(x_1, x_2)$  la distance euclidienne du point  $(x_1, x_2)$  à l'origine.

Tels que ses éléments sont illustrés sur la figure 1.1 ci-dessous,  $\tilde{A}$  est un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}^2$  auquel :

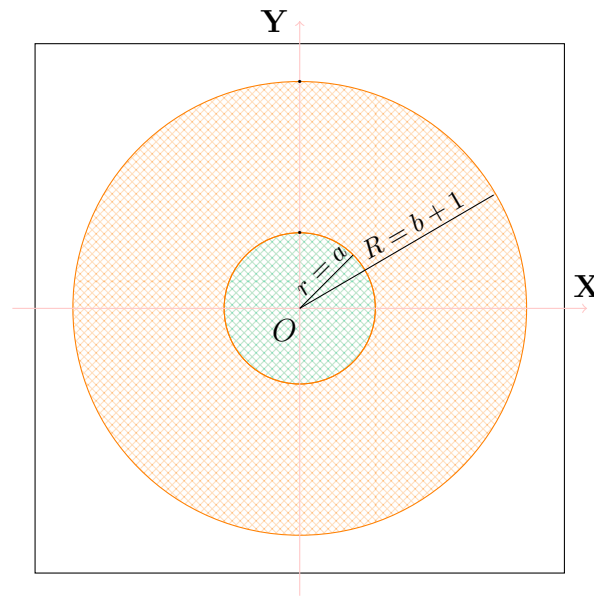


FIGURE 1.1 – Zones des éléments de  $\mathbb{R}^2$  selon leur appartenance à  $\tilde{A}$ .

- Tous les points appartenant au disque fermé centré à l'origine, de rayon  $a$ , appartiennent absolument (points de la zone en bleu ciel sur la figure 1.1) ;
- Tous les points appartenant à la bande ouverte formée par les cercles de rayons respectifs  $a$  et  $b + 1$ , appartiennent partiellement (points de la zone orange) ;
- Le reste des points du plan n'appartiennent pas (points de la zone blanche).

Sur cette figure, tous les éléments de la zone bleue ciel ont le même degré d'appartenance 1 ; ceux de la bande orange ont des degrés différents compris strictement entre 0 et 1, bien que la bande soit uniformément colorée ; et enfin ceux de la zone blanche ont le même degré nul.

Le graphe de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}$  est la surface représentée sur la figure 1.2 ci-dessous. Elle a la forme d'un tronc de cône recouverte à la petite base,

- dont la grande base est centrée à l'origine d'axes XOY,
- dont la hauteur  $h = 1$ ,
- dont le rayon de la grande base est  $R = b + 1$ ,
- dont le rayon de la petite base est  $r = a$ .

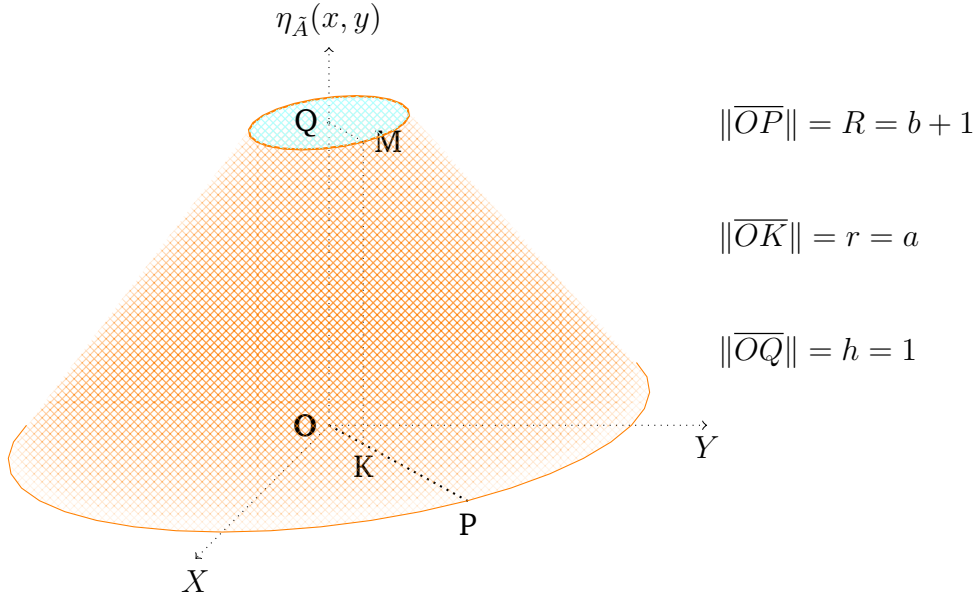


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou  $\tilde{A}$ .

### 1.2.3 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

#### Définition 1.2

Le **support** d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\text{supp}(\tilde{A})$ , est l'ensemble classique défini par :

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (1.7)$$

#### Définition 1.3

Le **noyau** (core or kernel) d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\text{noy}(\tilde{A})$ , est l'ensemble classique défini par :

$$\text{noy}(\tilde{A}) = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) = 1\} \quad (1.8)$$

**Définition 1.4**

La **hauteur** (*height*) d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $h(\tilde{A})$ , est l'ensemble classique défini par :

$$h(\tilde{A}) = \sup\{\eta_{\tilde{A}}(x) \mid x \in E\} \quad (1.9)$$

**Définition 1.5**

On appelle  $\alpha$ -**coupe** ou **coupe de niveau**  $\alpha$  ( $\alpha$ -cut or  $\alpha$ -level ) d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\tilde{A}_\alpha$ , l'ensemble classique défini par :

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (1.10)$$

Cet ensemble  $\tilde{A}_\alpha$  est parfois appelé  $\alpha$ -coupe faible (*weak  $\alpha$ -cut* ) de  $\tilde{A}$  comparativement à l'ensemble  $\tilde{A}^\alpha$  appelé  $\alpha$ -coupe forte (*strong  $\alpha$ -cut*) de  $\tilde{A}$ , défini par :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad (1.11)$$

Il découle de la définition 1.5 que  $\tilde{A}_\alpha$  est une partie classique de  $E$  de fonction caractéristique  $\varphi$  définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

**Théorème 1.1** (*de décomposition*) :

Tout sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  peut-être décomposé sous la forme suivante où apparaissent des produits de sous-ensembles ordinaires par des coefficients  $\alpha_i$  :

$$\tilde{A} = \max_{\substack{0 < \alpha_i \leq 1 \\ i=1,2,\dots,n}} [\alpha_1 \cdot \tilde{A}_{\alpha_1}, \alpha_2 \cdot \tilde{A}_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n \cdot \tilde{A}_{\alpha_n}] \quad (1.13)$$

**Preuve :** (cf. [93], p. 29 ; [90], pp. 16-17).

**Remarque(s) 1.2**

Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou sur  $E$ , si les  $\alpha$ -coupes  $\tilde{A}_\alpha$  sont données pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}$  peut être rétablie pour tout  $x$  de  $E$  à l'aide de la formule suivante (cf. [57], p. 19 ; [114], p. 257) :



$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min \{ \alpha, \eta_{\tilde{A}_\alpha}(x) \} \quad (1.14)$$

où

$$\eta_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{A}_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque fois qu'on est en présence des  $\alpha$ -coupes, on a souvent besoin de cette formule pour retrouver la fonction d'appartenance du nombre flou correspondant.

### 1.2.4 Normalité et Convexité

#### Ensemble flou normalisé

##### Définition 1.6

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est dit **normal** ou **normalisé** s'il est de hauteur 1, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\eta_{\tilde{A}}(x) = 1$ .

#### Ensemble flou convexe

##### Définition 1.7

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est dit **convexe** ssi  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\eta_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min [\eta_{\tilde{A}}(x), \eta_{\tilde{A}}(y)] \quad (1.15)$$

(cf. [200])

### 1.2.5 Opérations sur les ensembles flous

Comme dans le cas de la théorie classique, les notions d'inclusion, d'égalité, de la réunion, de l'intersection, de la différence, de complémentaire et de produit cartésien, ont été introduites dans la théorie des ensembles flous. Supposons que les sous-ensembles flous  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  soient définis sur un même référentiel  $E$ . Les définitions suivantes dans lesquelles  $\max$  et  $\min$  désignent respectivement maximum et minimum ; ont été formulées par Zadeh [200] :

- L'ensemble flou  $\tilde{A}$  est dit **inclus** dans l'ensemble flou  $\tilde{B}$  (en abrégé,  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ) ssi :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) \leq \eta_{\tilde{B}}(x); \forall x \in E \quad (1.16)$$

- L'ensemble flou  $\tilde{A}$  est **égal** à l'ensemble flou  $\tilde{B}$  (en abrégé,  $\tilde{A}=\tilde{B}$ ) ssi :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \eta_{\tilde{B}}(x); \forall x \in E \quad (1.17)$$

- La **réunion** de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  est l'ensemble flou  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ , défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[\eta_{\tilde{A}}(x); \eta_{\tilde{B}}(x)]; \forall x \in E \quad (1.18)$$

- L'**intersection** de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  est l'ensemble flou  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ , défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min[\eta_{\tilde{A}}(x); \eta_{\tilde{B}}(x)]; \forall x \in E \quad (1.19)$$

- La **différence** de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  est l'ensemble flou  $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$ , défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}}(x) = \min[\eta_{\tilde{A}}(x); 1 - \eta_{\tilde{B}}(x)]; \forall x \in E \quad (1.20)$$

La relation (1.20) ne vérifie pas une bonne partie de propriétés de la différence classique. C'est le cas par exemple de propriétés suivantes :

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \implies \tilde{A} \setminus \tilde{B} = \emptyset$$

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \setminus (\tilde{A} \cap \tilde{B})$$

$$(\tilde{B} \subset \tilde{C}) \implies (\tilde{B} \setminus \tilde{A}) \subset (\tilde{C} \setminus \tilde{A})$$

- Le **complémentaire** d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\tilde{A}^c$ , est l'ensemble flou défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance suivante :

$$\eta_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \eta_{\tilde{A}}(x); \forall x \in E \quad (1.21)$$

- Soient  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$  des ensembles flous définis respectivement sur  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Le **produit cartésien** de ces ensembles, noté  $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$ , est le sous-ensemble flou sur  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  défini par la fonction d'appartenance suivante :

$$\eta_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[\eta_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \eta_{\tilde{A}_n}(x_n)]; \forall x \in E \quad (1.22)$$

Si  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  est infini, ce produit s'écrit d'après la relation

(1.3) par :

$$\tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_n = \int_{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n} \min[\eta_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \eta_{\tilde{A}_n}(x_n)] / (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.23)$$

### Remarque(s) 1.3

Toutes ces relations de (1.16) à (1.21) rentrent dans le cas classique lorsque l'ensemble des valeurs de la fonction d'appartenance se réduit à la paire  $\{0, 1\}$ .

**Proposition 1.1** Si  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont deux ensembles flous sur  $E$  et si  $\alpha \in [0, 1]$ , alors

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha \quad (1.24)$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha \quad (1.25)$$

**Preuve.**

– Démontrons d'abord l'égalité (1.24)

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall \alpha \in [0, 1]; x \in (\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha &\iff \eta_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) \geq \alpha \\ &\iff \min[\eta_{\tilde{A}}(x), \eta_{\tilde{B}}(x)] \geq \alpha \\ &\iff \eta_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \text{ et } \eta_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha \\ &\iff x \in \tilde{A}_\alpha \text{ et } x \in \tilde{B}_\alpha \\ &\iff x \in \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha \end{aligned}$$

– L'égalité (1.25) se démontre de façon analogue.

## 1.2.6 Propriétés des opérations sur les ensembles flous

Notons par  $E$  le référentiel ; par  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  la famille des sous-ensembles flous de  $E$  et par  $\mathcal{P}(E)$  la famille des sous-ensembles classiques de  $E$ . Supposons que  $A$ ,  $B$  et  $C$  soient des parties ordinaires de  $E$  et que  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  soient des parties floues de  $E$ .

**Proposition 1.2** Les propriétés classiques de non contradiction ( $A \cap A^c = \emptyset$ ) et du tiers exclus ( $A \cup A^c = E$ ) ne sont pas vérifiées sur les sous-ensembles flous.

**Preuve** (par des contre-exemples)

Considérons l'univers  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$  et  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou de  $E$  donné par  $\tilde{A} = a/0.5 + b/1 + c/0.7 + d/0 + e/0.2 + f/0.5 + g/0.9 + h/0 + i/0 + j/0$ . Les ensembles flous  $\tilde{A}^c$ ,  $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c$  et  $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c$  se déterminent respectivement par les relations (1.21), (1.18) et (1.19) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{A}^c &= a/0.5 + b/0 + c/0.3 + d/1 + e/0.8 + f/0.5 + g/0.1 + h/1 + i/1 + j/1, \\ \tilde{A} \cup \tilde{A}^c &= a/0.5 + b/1 + c/0.7 + d/1 + e/0.8 + f/0.5 + g/0.9 + h/1 + i/1 + j/1, \\ \tilde{A} \cap \tilde{A}^c &= a/0.5 + b/0 + c/0.3 + d/0 + e/0.2 + f/0.5 + g/0.1 + h/0 + i/0 + j/0.\end{aligned}$$

Par comparaison de différents degrés d'appartenance, on constate bien que  $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq E$  et  $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \emptyset$  ■

Le reste de propriétés classiques ci-après sont conservées sur les ensembles flous (cf. [93], pp. 33-34 ; [57], p.15) :

- 1° Involution :  $(\tilde{A}^c)^c = \tilde{A}$  ;
- 2°  $\tilde{\emptyset}^c = E$  ;
- 3°  $E^c = \tilde{\emptyset}$  ;
- 4° Commutativité :  $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$  ;
- 5° Associativité :  $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$  et  $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$  ;
- 6° Idempotence :  $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$  et  $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$  ;
- 7° Distributivité :  $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$  et  $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$  ;
- 8° Les lois de De Morgan :  $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$  et  $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c$  ;
- 9° Les lois d'absorption :  $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$  et  $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$  ;
- 10°  $\tilde{A} \cap \tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$  ;  $\tilde{A} \cup \tilde{E} = \tilde{A}$  ;
- 11° Identité :  $\tilde{A} \cup \tilde{\emptyset} = \tilde{A}$  ;  $\tilde{A} \cap \tilde{E} = \tilde{A}$  ;
- 12° Formule d'équivalence :  $(\tilde{A}^c \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B})$  ;
- 13° Formule de la différence symétrique :  $(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})$  ;
- 14° La famille  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  en tant que treillis pour l'inclusion, conserve toutes les propriétés que possède le treillis  $\mathcal{P}(E)$ , sauf la complémentation.

**Remarque(s) 1.4**

L'invalidité des propriétés énoncées dans la proposition 1.2 ci-dessus, a créé des doutes pendant un certain nombre d'années sur l'affirmation selon laquelle la théorie des ensembles flous généralise celle des ensembles classiques. *Baruah* [12] l'impute à la relation (1.21) qui, d'après ses analyses, ne correspond pas à la logique classique. Pour remédier à la situation, il a proposé une nouvelle présentation d'un ensemble flou en ajoutant à l'idée de *Zadeh* celle de la notion de *fonction de référence*. A l'aide de celle-ci, il a obtenu une nouvelle définition du complémentaire, qui rend les propriétés de *non-contradiction* et du *tiers exclus* valables sur les ensembles flous.

**1.2.7 Ensemble flou au sens de Baruah****Définition 1.8**

Tout sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  d'un univers  $E$  est caractérisé d'après *Baruah* par

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\eta_1, \eta_2) = \{(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) \mid x \in E\} \quad (1.26)$$

où  $\eta_1(x)$  est la fonction d'appartenance floue et  $\eta_2(x)$  une fonction de référence telle que  $\eta_1(x) - \eta_2(x)$  est le degré d'appartenance flou de tout élément  $x$  de  $E$ . En conséquence, tout sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  habituellement caractérisé depuis *Zadeh* par  $\tilde{A} = \{(x, \eta_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in E\}$  est nouvellement caractérisé par :

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\eta_{\tilde{A}}, 0) = \{(x, \eta_{\tilde{A}}(x), 0) \mid x \in E\} \quad (1.27)$$

L'exemple de deux niveaux localisant la couche d'un minerai par rapport au niveau du sol que *Baruah* a évoqué dans [12] pour introduire cette notion, explique bien la présence de  $\eta_2$  à côté de  $\eta_1$ . L'intersection et la réunion pour leur part, sont définies dans cette perspective par :

$$\tilde{A}(\eta_1, \eta_2) \cap \tilde{B}(\eta_3, \eta_4) = \{x, \min(\eta_1, \eta_3), \max(\eta_2, \eta_4); x \in E\} \quad (1.28)$$

$$\tilde{A}(\eta_1, \eta_2) \cup \tilde{B}(\eta_3, \eta_4) = \{x, \max(\eta_1, \eta_3), \min(\eta_2, \eta_4); x \in E\} \quad (1.29)$$

**Définition 1.9 (Le Complémentaire selon Baruah)**

Au finish, le complémentaire d'un ensemble flou  $\tilde{A} = \tilde{A}(\eta_{\tilde{A}}, 0)$  de fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{A}}$  est défini par *Baruah* comme étant le sous-ensemble flou

$$\tilde{A}^c = \tilde{A}(1, \eta_{\tilde{A}}) = \{x, 1, \eta_{\tilde{A}}(x); x \in E\}.$$

Il vérifie bel et bien la *non-contradiction* et le *tiers-exclus*.

## 1.3 Relation floue

La notion de relation floue a été introduite parmi les concepts flous les plus importants dans le but de généraliser celle de relations classiques. Elle met en évidence des liens imprécis ou graduels existant entre éléments d'un ou de plusieurs ensembles. Dans le cas où elle est définie sur un seul ensemble, on y redéfinit les propriétés classiques bien connues qui conduisent à deux types de relations floues intéressants : la relation de similarité, considérée comme l'extension de la relation d'équivalence ; et celle d'ordre flou. L'étude de ces deux dernières a fourni à la science des éléments qui ont permis de résoudre les problèmes de classification et de reconnaissance de formes en Imagerie (cf. [82], [214], [94]).

### 1.3.1 Définition et représentation

#### Définition 1.10

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles référentiels. On appelle **relation floue** entre  $E_1, E_2, \dots$ , et  $E_n$  ; notée  $\tilde{R}$ , un sous-ensemble flou de l'ensemble produit  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  de fonction d'appartenance à  $n$  variables  $\eta_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\tilde{R} = \{((x_1, \dots, x_n), \eta_{\tilde{R}}(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n\} \quad (1.30)$$

Si  $n = 2$  (cas le plus rencontré et le plus intéressant) et si les deux référentiels  $E_1$  et  $E_2$  sont finis, la relation floue  $\tilde{R}$  peut se représenter par une matrice  $M(\tilde{R})$  ou par un graphe visuel (voir figure 1.3), qui mettent en clair les degrés de liaisons imprécises entre les éléments de  $E_1$  et ceux de  $E_2$ . Sur la jonction de la colonne  $y$  et de la ligne  $x$  de cette matrice, se trouve le coefficient  $\eta_{\tilde{R}}(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des éléments respectifs de  $E_1$  et  $E_2$ .

#### Exemple 1.2

Soient  $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $E_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$  deux ensembles d'individus et  $\tilde{R}$  une relation floue définie entre  $E_1$  et  $E_2$  indiquant la force d'intérêt entre les éléments de  $E_1$  envers ceux de  $E_2$  ; c'est-à-dire  $\eta_{\tilde{R}}(a, b)$  est d'autant

plus élevé que  $a$  éprouve un grand intérêt pour  $b$ . Supposons que les différents degrés graduels soient donnés subjectivement par :  $\eta_{\tilde{R}}(x_1, y_1) = 1$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_1, y_2) = 0.9$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_1, y_3) = 0$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_2, y_1) = 0.2$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_2, y_2) = 0.8$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_2, y_3) = 0.6$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_3, y_1) = 1$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_3, y_2) = 0.4$ ,  $\eta_{\tilde{R}}(x_3, y_3) = 0.5$ . Cette relation floue peut être représentée par la matrice suivante :

$$M(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Dans ce cas, le graphe visuel de  $\tilde{R}$  est donné par la figure 1.3 ci-dessous :

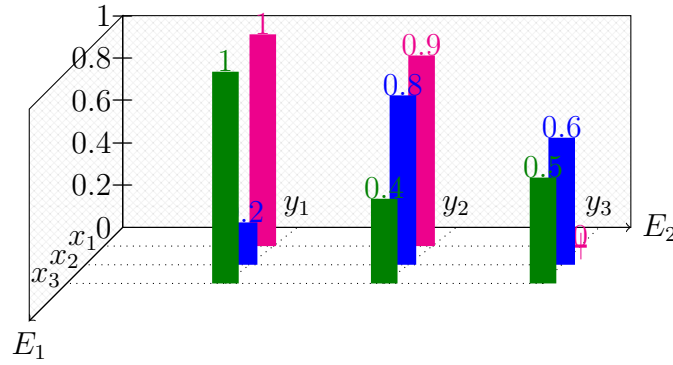


FIGURE 1.3 – Graphe de la relation floue  $\tilde{R}$  définie à l'exemple 1.2.

### 1.3.2 Réciproque d'une relation floue

#### Définition 1.11

Soit  $\tilde{R}$  une relation floue définie entre les référentiels  $E_1$  et  $E_2$ , de fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{R}}$ . On appelle **réciproque** de la relation  $\tilde{R}$ , la relation floue notée  $\tilde{R}^{-1}$  définie entre  $E_2$  et  $E_1$ , dont la fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{R}^{-1}}$  est définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $E_1 \times E_2$  par :

$$\eta_{\tilde{R}^{-1}}(y, x) = \eta_{\tilde{R}}(x, y) \quad (1.32)$$

Au cas où les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sont finis, l'égalité précédente laisse voir que la matrice de la réciproque  $\tilde{R}^{-1}$  est la transposée de celle de la relation  $\tilde{R}$ .

$$M(\tilde{R}^{-1}) = [M(\tilde{R})]^T \quad (1.33)$$

### 1.3.3 Composition de relations floues

A l'instar des opérateurs t-normes et t-conormes des ensembles flous, il existe plusieurs types de composition de relations floues, différents les uns des autres par leurs résultats et par leurs propriétés mathématiques. Nos lecteurs les trouveront dans [213], [57] et [93]. Parmi elles, la composition *max-min* est la mieux connue et la plus utilisée dans la littérature.

**Définition 1.12** (*composition max-min*)

Soient  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$  deux relations floues définies respectivement sur  $E_1 \times E_2$  et  $E_2 \times E_3$ . On appelle **composée max-min** de ces deux relations, la relation floue notée  $\tilde{S} \circ \tilde{R}$ , définie sur  $E_1 \times E_3$ , de fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}$  définie par :

$$\eta_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}(x, z) = \max_{y \in E_2} [\min(\eta_{\tilde{R}}(x, y), \eta_{\tilde{S}}(y, z))] \quad (1.34)$$

Au cas où  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont finis, le calcul de  $\eta_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}$  à partir de  $\eta_{\tilde{R}}$  et  $\eta_{\tilde{S}}$  peut être obtenu par une extension du produit matriciel habituel pour lequel on remplace l'addition par max et le produit par min.

**Remarque(s) 1.5**

1° La **composition min-max** de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$ , notée  $\tilde{S} \diamond \tilde{R}$ , est obtenue en permutant les opérateurs de la composition max-min dans la relation (1.34) :

$$\eta_{\tilde{S} \diamond \tilde{R}}(x, z) = \min_{y \in E_2} [\max(\eta_{\tilde{R}}(x, y), \eta_{\tilde{S}}(y, z))] \quad (1.35)$$

2° En vertu des lois de *De Morgan* sur les ensembles flous, ces deux compositions sont reliées mathématiquement par la relation :

$$\tilde{S} \circ \tilde{R} = \overline{\tilde{S} \diamond \tilde{R}} \quad (1.36)$$

3° Ces opérations sont différentes de la **composition max-produit** notée  $\tilde{S} \odot \tilde{R}$  et définie par :

$$\eta_{\tilde{S} \odot \tilde{R}}(x, z) = \max_{y \in E_2} [\min(\eta_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \eta_{\tilde{S}}(y, z))] \quad (1.37)$$



**Proposition 1.3** *La composition max-min conserve évidemment les deux propriétés classiques suivantes :*

$$(\tilde{S} \circ \tilde{R})^{-1} = \tilde{R}^{-1} \circ \tilde{S}^{-1} \quad (1.38)$$

$$\tilde{T} \circ (\tilde{S} \circ \tilde{R}) = (\tilde{T} \circ \tilde{S}) \circ \tilde{R} \quad (1.39)$$

**Preuve :** cfr. [163].

Pour des détails sur les relations floues, un lecteur intéressé peut consulter [55] et [167].

## 1.4 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension de Zadeh constitue un outil très puissant de la théorie des ensembles flous. Il permet d'exploiter des connaissances classiques dans le cas de données imprécises. Plusieurs chercheurs tels que Zadeh lui-même, Dubois et Prade et les autres, s'en sont servis pour bâtir l'arithmétique floue sur base de l'arithmétique classique comme nous le verrons dans la sous-section 1.5.3 ci-dessous. Introduit sous sa forme élémentaire par Zadeh dans [200] en 1965, ce principe a connu par la suite quelques modifications suggérées par le même auteur successivement dans [205] en 1973 et dans [206] en 1975, et par Jain dans [86] en 1976 (cf. [213], p. 55). Ici, nous présentons sa forme générale proposée par Zadeh dans [205] et Dubois et Prade dans [57].

### 1.4.1 Définition du principe

**Définition 1.13** Soient  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  et  $F$  deux univers et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On appelle **extension de Zadeh** une nouvelle application  $\tilde{f}$ , de  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  dans  $\tilde{\mathcal{P}}(F)$ , associant à tout sous-ensemble flou  $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$  de  $E$ , un sous-ensemble flou  $\tilde{B}$  de  $F$ , dont la fonction d'appartenance est définie  $\forall y \in F$  par :

$$\eta_{\tilde{B}}(y) = \sup_{x \in E | f(x)=y} \left\{ \min \left\{ \eta_{\tilde{A}_1}(x_1), \eta_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \eta_{\tilde{A}_n}(x_n) \right\} \right\} \quad \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

$$\eta_{\tilde{B}}(y) = 0 \quad \text{sinon}$$

où  $f^{-1}(y)$  désigne l'image réciproque du singleton  $\{y\}$  par  $f$ . Sur base de nombres flous et de nombres flous triangulaires que nous introduirons ci-dessous dans les sections 1.5 et 1.6, un lecteur intéressé par ce principe pourra vérifier à titre d'exemple que l'application numérique  $f(x) = -2x$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , peut être étendue via cette extension à l'application floue  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , associant à tout nombre flou triangulaire  $\tilde{A} = (x_1/x_2/x_3)$ , le nombre flou triangulaire  $\tilde{B} = (-2x_3/-2x_2/-2x_1)$ , où  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des nombres flous.

### 1.4.2 Compatibilité du principe avec les alpha-coupes

Au sujet de ce principe, *Nguyen* a montré dans [144] l'équivalence suivante qui confirme sa compatibilité avec les  $\alpha$ -coupes :

$$\begin{aligned} [\tilde{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)]_\alpha &= \tilde{f}(\tilde{A}_{1\alpha}, \tilde{A}_{2\alpha}, \dots, \tilde{A}_{n\alpha}) \\ &\Downarrow \\ \exists(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n \text{ tq } \eta_{\tilde{B}}(y) &= \eta_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \end{aligned}$$

## 1.5 Nombre flou

### 1.5.1 Généralités

#### Définition 1.14

On appelle **quantité floue**, un sous-ensemble flou normalisé  $\tilde{Q}$  dont l'univers  $E$  est l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. On entend par **valeur modale** ou **mode** d'une quantité floue  $\tilde{Q}$ , un réel  $m$  tq  $\eta_{\tilde{Q}}(m) = 1$ .

#### Définition 1.15

Un **intervalle flou**  $\tilde{I}$  est une quantité floue convexe. Il correspond à un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dont les limites sont imprécises. Si sa fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{I}}$  est semi-continue supérieurement (c'est-à-dire, pour tout degré d'appartenance  $\varepsilon$ , l'ensemble des réels  $x$  tq  $\eta_{\tilde{I}}(x) \geq \varepsilon$  est fermé), ses  $\alpha$ -coupes sont des intervalles fermés de  $I$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ .

**Définition 1.16** Un **nombre flou** est un intervalle flou de fonction d'appartenance continue supérieurement et de support borné, admettant une unique valeur modale  $m$  (cf. [57]).

Pour distinguer les autres sous-ensembles flous de  $\mathbb{R}$  de nombres flous, nous désignerons la famille des nombres flous par  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ .

### Remarque(s) 1.6

1° La définition précédente exclut les intervalles flous trapézoïdaux de nombres flous ; mais vu l'intérêt que ces derniers jouent dans de nombreux calculs, plusieurs chercheurs ont modifié cette définition en se passant de l'unicité de la valeur modale ; faisant passer ainsi les intervalles flous trapézoïdaux dans la famille des nombres flous (cf. [213], p. 59 ; [181], p. 347 ; [33], pp. 55-57). Le texte de cette dissertation doctorale s'inscrit dans la logique de cette modification.

2° Un nombre flou  $\tilde{M}$  est dit **positif** (resp. **négatif**) si et seulement si

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = 0, \forall x < 0 \quad (\text{resp. } \eta_{\tilde{M}}(x) = 0, \forall x > 0) \quad (\text{cf. [35]}).$$

3° Si  $\tilde{M}$  est un nombre flou, tout réel  $m$  tel que  $\eta_{\tilde{M}}(m) = 1$  est dit **valeur modale** ou **mode** ou encore **valeur moyenne** de  $\tilde{M}$ . Ainsi,  $\text{Noy}(\tilde{M})$  est l'ensemble des valeurs modales de  $\tilde{M}$ .

4° Nous adoptons dans ce travail l'appellation "nombre flou **unimodal**" pour tout nombre flou  $\tilde{M}$  pour lequel le cardinal du noyau vaut 1.

5° L'appellation "nombre flou **multimodal**" sera réservée à tout nombre flou  $\tilde{M}$  dont le cardinal du noyau est supérieur ou égal à 2.

## 1.5.2 Alpha-coupe d'un nombre flou

La notion des alpha-coupes est très capitale sur la théorie des nombres flous. Avec l'aide du principe d'extension de *Zadeh*, elle a pu faciliter l'introduction de l'arithmétique floue dite "*arithmétique des  $\alpha$ -coupes et intervalles*". Plusieurs théorèmes importants de cette théorie portent sur cette notion, notamment : le stacking theorem, le théorème de caractérisation, le théorème de représentation L-U, le théorème de *Goetschel* et *Voxman*, etc. Tous ces théorèmes décrivent les caractéristiques de fonctions déterminant les coupes de niveau  $\alpha$  d'un nombre flou  $\tilde{A}$ .

**Théorème 1.2** (*Stacking theorem*, Negoita et Ralescu [142]) Si  $\tilde{A}$  est un nombre flou et si  $\tilde{A}_\alpha$  sont ses coupes de niveau  $\alpha$  avec  $\alpha \in [0, 1]$ , alors :

(i)  $\tilde{A}_\alpha$  est un intervalle fermé noté  $\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$  ;

(ii) Si  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ , alors  $\tilde{A}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_1}$  ;

(iii) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers  $\alpha \in (0, 1]$  par des valeurs inférieures à  $\alpha$ , on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{\alpha_n} = \tilde{A}_{\alpha};$$

(iv) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers 0 par des valeurs supérieures à 0, on a

$$cl \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{\alpha_n} \right) = \tilde{A}_0$$

où  $cl$  désigne la fermeture ou l'adhérence.

**Preuve** cf. [16], pp. 55-56.

Le théorème suivant dit "de caractérisation des nombres flous" est réciproque au stacking theorem, énoncé précédemment.

**Théorème 1.3 (Théorème de caractérisation, Negoita et Ralescu [142])**

Si  $\{M_{\alpha} : \alpha \in [0, 1]\}$  est une famille des sous-ensembles vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $M_{\alpha}$  est un intervalle fermé non vide,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ;
- (ii) Si  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ , on a  $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$ ;
- (iii) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers  $\alpha \in (0, 1]$  par des valeurs inférieures à  $\alpha$ , on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_{\alpha};$$

- (iv) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers 0 par des valeurs supérieures à 0, on a

$$cl \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \right) = M_0;$$

Alors, il existe un nombre flou unique  $\tilde{V}$  tel que  $\tilde{V}_{\alpha} = M_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$

**Preuve** cf. [16], pp. 56-58.

**Théorème 1.4 (Théorème de représentation L-U, Goetschel et Voxman [74])**

Si  $\tilde{A}$  est un nombre flou et si  $\tilde{A}_{\alpha} = \{x \mid \eta_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [\tilde{A}_{\alpha}^L, \tilde{A}_{\alpha}^U]$  sont ses  $\alpha$ -coupes pour  $\alpha \in [0, 1]$ ; alors les fonctions  $\tilde{A}^L, \tilde{A}^U : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définissant les bornes des  $\alpha$ -coupes, satisfont les conditions suivantes :

- (i)  $\tilde{A}^L(\alpha) = \tilde{A}_\alpha^L \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, non décroissante, continue à gauche dans  $(0, 1]$  et continue à droite de 0 ;
- (ii)  $\tilde{A}^U(\alpha) = \tilde{A}_\alpha^U \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, non croissante, continue à gauche dans  $(0, 1]$  et continue à droite de 0 ;
- (iii)  $\tilde{A}_1^L \leq \tilde{A}_1^U$ .

**Preuve** cf. [16], pp. 58-59.

**Théorème 1.5 (Théorème de Goetschel-Voxman, Goetschel et Voxman [74])**

Si  $M^L$  et  $M^U$  sont deux fonctions réelles de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , d'une seule variable  $\alpha$ , satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $M^L$  est une fonction bornée croissante sur  $[0, 1]$ ,
- (ii)  $M^U$  est une fonction bornée décroissante sur  $[0, 1]$ ,
- (iii)  $M^L(1) \leq M^U(1)$ ,
- (iv)  $M^L$  et  $M^U$  sont continues à gauche sur  $(0, 1]$  et à droite de 0,

Alors il existe un nombre flou  $\tilde{V}$  tel que  $\tilde{V}_\alpha = [M^L(\alpha), M^U(\alpha)]$ .

**Preuve** cf. [16], p. 59

La définition suivante, formulée par Yang et Liu dans [197] p. 174, définit l'égalité de deux nombres flous sur base de leurs  $\alpha$ -coupes.

**Définition 1.17 (Yang et Liu [197])**

Soient  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  deux nombres flous de  $\alpha$ -coupes respectives  $\tilde{U}_\alpha = [\tilde{U}_\alpha^L, \tilde{U}_\alpha^U]$  et  $\tilde{V}_\alpha = [\tilde{V}_\alpha^L, \tilde{V}_\alpha^U]$ .  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  sont dits égaux si et seulement si  $\tilde{U}^L(\alpha) = \tilde{V}^L(\alpha)$  et  $\tilde{U}^U(\alpha) = \tilde{V}^U(\alpha)$  ;  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

### 1.5.3 Opérations arithmétiques sur les nombres flous

Deux méthodes de base ont été développées pour additionner, soustraire, multiplier et diviser deux nombres flous. La première est basée sur le principe d'extension de Zadeh, et la deuxième sur l'arithmétique des  $\alpha$ -coupes et intervalles.

### 1.5.3.1 Arithmétique floue basée sur le principe d'extension

L'une des techniques qui font la force du principe d'extension de Zadeh est l'arithmétique floue basée sur ce principe. Considéré sur un produit de deux ensembles, ce principe permet d'étendre une loi de composition interne  $*$  définie dans un ensemble quelconque  $E$  à une loi de composition interne floue  $\circledast$  dans la famille des sous-ensembles flous  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Ainsi, cette nouvelle loi est définie  $\forall(\tilde{M}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \times \tilde{\mathcal{P}}(E)$  par :

$$\eta_{\tilde{M} \circledast \tilde{N}}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in E \text{ et } x * y = z \} \quad (1.40)$$

C'est suivant cette égalité (1.40) que les opérations fondamentales :  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\odot$ ,  $\oslash$ ,  $\max$  et  $\min$  ont été respectivement définies dans la famille des nombres flous  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  par Dubois et Prade dans [57] ou par Zimmermann dans [213] comme suit :

$$\eta_{\tilde{M} \oplus \tilde{N}}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x + y = z \} \quad (1.41)$$

$$\eta_{\tilde{M} \ominus \tilde{N}}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x - y = z \} \quad (1.42)$$

$$\eta_{\tilde{M} \odot \tilde{N}}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x \cdot y = z \} \quad (1.43)$$

$$\eta_{\tilde{M} \oslash \tilde{N}}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x / y = z \} \quad (1.44)$$

$$\eta_{\max(\tilde{M}, \tilde{N})}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \max(x, y) = z \} \quad (1.45)$$

$$\eta_{\min(\tilde{M}, \tilde{N})}(z) = \sup \{ \min \{ \eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y) \} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \min(x, y) = z \} \quad (1.46)$$

#### Remarque(s) 1.7

1° Si on pose  $E = \mathbb{R}$  dans la relation (1.40) qui définit l'opération floue  $\circledast$ , on constate que les réels  $z$  du support de  $\tilde{M} \circledast \tilde{N}$  sont obtenus par la composition des réels  $x$  du support de  $\tilde{M}$  et  $y$  du support de  $\tilde{N}$ . Ainsi, les bornes de  $\text{supp}(\tilde{M} \circledast \tilde{N})$  peuvent être connues si on fait attention à la nature de l'opération  $*$ . En principe, aucun problème ne se pose pour une opération  $*$  croissante, car elle conserve les bornes. Mais pour une opération  $*$  décroissante, plusieurs cas sont possibles : les bornes de  $\text{supp}(\tilde{M} \circledast \tilde{N})$  peuvent s'obtenir par une composition parallèle ou par une composition croisée des bornes de  $\text{supp}(\tilde{M})$  et de  $\text{supp}(\tilde{N})$ . Pour plus d'information sur les opérations arithmétiques croissantes et décroissantes, un lecteur intéressé peut se référer à notre article en référence [134], p. 35.

2° En général, la différence standard définie à l'égalité (1.42) ne vérifie pas l'égalité  $\tilde{M} \ominus \tilde{M} = 0$ . Cette situation n'avance pas les choses du point de vue résultats théoriques et applications sur les nombres flous. Afin d'obtenir des opérations donnant lieu à de larges applications, d'autres nouvelles soustractions ont été introduites en dehors de la différence standard ; notamment celles désignées respectivement par  $\ominus_H$ ,  $\ominus_{gH}$  et  $\ominus_g$ .

– La première  $\ominus_H$ , dite "**différence de Hukuhara**", introduite par Hukuhara au moyen d'un espace topologique classique dans [83], est redéfinie par Bede dans [16], p. 73,  $\forall \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$  par :

$$\tilde{M} \ominus_H \tilde{N} = \tilde{P} \iff \tilde{M} = \tilde{N} \oplus \tilde{P}.$$

Remarquons qu'avec cette différence, nous obtenons,  $\forall \tilde{M} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ , l'égalité :

$$\tilde{M} \ominus_H \tilde{M} = 0.$$

Si  $\tilde{M} \ominus_H \tilde{N}$  existe, ses  $\alpha$  – coupes pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  sont selon Bede [16] :

$$\left[ \tilde{M} \ominus_H \tilde{N} \right]_{\alpha} = \left[ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right]$$

– La deuxième  $\ominus_{gH}$ , dite "**différence généralisée de Hukuhara**" ou tout simplement "**gH-différence**" est définie dans l'ensemble des nombres flous par Stefanini dans [178], p. 1571 par  $\forall \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$  :

$$\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} = \tilde{P} \iff \begin{cases} \tilde{M} &= \tilde{N} \oplus \tilde{P} \\ \text{ou } \tilde{N} &= \tilde{M} \oplus (-1)\tilde{P} \end{cases}$$

En plus de la propriété  $\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{M} = 0$ , si  $\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} = \tilde{P}$ , on vérifie que le nombre flou  $\tilde{P}$  est unique. En termes des alpha-coupes, Bede [16] montre que  $\forall \tilde{M}, \tilde{N} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ,

$$\left[ \tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} \right]_{\alpha} = \left[ \min \left\{ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right\}, \max \left\{ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right\} \right]$$

– La dernière  $\ominus_g$ , dite "**différence généralisée**" ou tout simplement "**g-différence**" est définie dans l'ensemble des nombres flous par Bede dans [16], p. 74, par  $\forall \tilde{M}, \tilde{N} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$  :

$$\left[ \tilde{M} \ominus_g \tilde{N} \right]_{\alpha} = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} \left( \tilde{M}_{\beta} \ominus_{gH} \tilde{N}_{\beta} \right), \forall \alpha, \beta \in [0, 1]$$

Contrairement à la différence standard et à la g-différence, les deux différences de Hukuhara ne sont pas des lois internes dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ . Il suffit pour le voir de considérer par exemple le nombre flou trapézoïdal  $\tilde{M} = (2/3/5/6)$  et le nombre flou triangulaire  $\tilde{N} = (0/4/8)$  (voir section 1.6) et de constater que leur H-différence et leur gH-différence n'existent pas ; alors que leur différence standard et leur g-différence existent et appartiennent à  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ . Un lecteur intéressé par ces trois opérations  $\ominus_H$ ,  $\ominus_{gH}$  et  $\ominus_g$  est prié de se référer à [178] et à [16] pour l'étude détaillée des propriétés et de différents contextes dans lesquels elles sont souvent employées.

### 1.5.3.2 Arithmétique floue par alpha-coupes et intervalles

La proposition suivante, énoncée par *Ritha* et *Menon* dans [161], p. 76, décrit les propriétés des  $\alpha$ -coupes au cours d'une opération arithmétique floue. Elle joue un grand rôle dans l'arithmétique des  $\alpha$ -coupes et intervalles.

**Proposition 1.4** Soient  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{Q}'$  deux nombres flous de  $\alpha$ -coupes respectives  $\tilde{Q}_\alpha$  et  $\tilde{Q}'_\alpha$ , avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Les opérations  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\odot$  et  $\oslash$  s'effectuent sur  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{Q}'$  par passage à leurs  $\alpha$ -coupes de la manière suivante :

$$(\tilde{Q} \oplus \tilde{Q}')_\alpha = \tilde{Q}_\alpha + \tilde{Q}'_\alpha \quad (1.47)$$

$$(\tilde{Q} \ominus \tilde{Q}')_\alpha = \tilde{Q}_\alpha - \tilde{Q}'_\alpha \quad (1.48)$$

$$(\tilde{Q} \odot \tilde{Q}')_\alpha = \tilde{Q}_\alpha \cdot \tilde{Q}'_\alpha \quad (1.49)$$

$$(\tilde{Q} \oslash \tilde{Q}')_\alpha = \frac{\tilde{Q}_\alpha}{\tilde{Q}'_\alpha} \quad (1.50)$$

Ces quatre égalités précédentes sont résumées dans la proposition générale énoncée par *Hanss* dans [80], p. 76, pour une opération arithmétique floue quelconque  $\circledast$  de la manière suivante :

$$(\tilde{Q} \circledast \tilde{Q}')_\alpha = \tilde{Q}_\alpha \circledast \tilde{Q}'_\alpha \quad \forall \tilde{Q}, \tilde{Q}' \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \quad (1.51)$$

où  $\circledast$  est une opération arithmétique définie dans la famille des intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  par  $\forall [a_1, b_1], [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}$  :

$$[a_1, b_1] \circledast [a_2, b_2] = [\min G; \max G] \quad (1.52)$$

avec  $G = \{a_1 \circledast a_2, a_1 \circledast b_2, b_1 \circledast a_2, b_1 \circledast b_2\}$ .



Le procédé exposé ci-après, indique comment appliquer concrètement ces différentes formules ci-haut.

### Procédé de calcul

Supposons qu'on ait à effectuer l'une de 4 opérations arithmétiques  $\oplus, \ominus, \odot$  et  $\oslash$  sur deux nombres flous  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  par l'approche des alpha-coupes et intervalles.

- Le procédé commence par écrire les  $\alpha$ -coupes de ces nombres sous forme d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . *C'est la phase de la défuzzification*<sup>1</sup>.
- Ensuite on porte l'opération sur ces intervalles de  $\mathbb{R}$  par l'utilisation de la formule (1.52) ci-dessus. *C'est la phase des calculs ordinaires*.
- Le résultat obtenu étant une  $\alpha$ -coupe, il faut rechercher le nombre flou qui lui correspond par la relation (1.14). *C'est la phase de la fuzzification*<sup>2</sup>.

Ce nombre flou obtenu en trois temps, est le résultat de l'opération effectuée. Puisque ce procédé nécessite une arithmétique propre aux intervalles fermés de  $\mathbb{R}$ , il est important de rappeler comment celle-ci est définie.

### Opérations arithmétiques sur les intervalles de $\mathbb{R}$

$\forall * \in \{+, -, \times, \div\}$ , on définit l'opération arithmétique  $*$  sur deux intervalles ordinaires fermés  $[a_1, b_1]$  et  $[a_2, b_2]$  de  $\mathbb{R}$  par la relation suivante :

$$[a_1, b_1] * [a_2, b_2] = \{a * b \mid a_1 \leq a \leq b_1 \text{ et } a_2 \leq b \leq b_2\} \quad (1.53)$$

où la division n'a de sens que si zéro n'appartient pas à  $[a_2, b_2]$  (cf. [32]). L'égalité (1.53) à son tour, est souvent simplifiée dans les cas des opérations  $+, -, \times, \div$  comme suit :

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \quad (1.54)$$

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2] \quad (1.55)$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [\min(a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2); \max(a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2)] \quad (1.56)$$

$$\frac{[a_1, b_1]}{[a_2, b_2]} = \left[ \min\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}\right); \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}\right) \right] \quad (1.57)$$

La multiplication et la division sont encore plus simplifiées si l'informa-

1. Opération par laquelle un ensemble flou est rendu non flou, c.-à-d. classique (cf. [93], p. 328)

2. Action par laquelle un ensemble classique est rendu flou. A cette action, est associé souvent le verbe **fuzzifier** qui signifie dans ce contexte : **rendre flou** (cf. [93], p. 328)

tion sur les signes de bornes est disponible.

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a_1 a_2, b_1 b_2]; \quad \text{si } a_1 \geq 0 \text{ et } a_2 \geq 0 \quad (1.58)$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a_1 b_2, a_2 b_1]; \quad \text{si } b_1 < 0 \text{ et } a_2 \geq 0 \quad (1.59)$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [b_1 b_2, a_1 a_2]; \quad \text{si } b_1 < 0 \text{ et } b_2 < 0 \quad (1.60)$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a_2 b_1, b_2 a_1]; \quad \text{si } a_1 \geq 0 \text{ et } b_2 < 0 \quad (1.61)$$

En résumé, l'arithmétique floue basée sur les  $\alpha$ -coupes et intervalles se fait en trois étapes :

- 1° **La déffuzification** : On transforme les nombres flous donnés en ensembles classiques ( $\alpha$ -coupes) avec  $\alpha \in [0, 1]$  ; et ensuite on porte l'opération sur ces  $\alpha$ -coupes par la formule (1.53).
- 2° **Le calcul ordinaire** : C'est l'étape des calculs ordinaires portant sur les éléments des intervalles de  $\mathbb{R}$ , le résultat de ces calculs est une  $\alpha$ -coupe.
- 3° **La fuzzification** : c'est la recherche du nombre flou correspondant à l'alpha-coupe trouvée ; la relation (1.14) est utile dans ce cas.

Remarquons que dans la 2<sup>e</sup> phase concernant le calcul ordinaire, on est appelé à résoudre un certain nombre des programmes mathématiques d'optimisation dûs aux présences de min et max dans le produit et le quotient de deux intervalles, comme le montrent les deux égalités (1.56) et (1.57).

## 1.6 Nombres flous triangulaires - Nombres flous trapézoïdaux

En général, les nombres flous triangulaires et trapézoïdaux jouent un grand rôle en mathématique floue et en particulier sur l'analyse des systèmes d'attente flous. Dans le traitement de ces systèmes, ces nombres servent à modéliser des paramètres imprécis tels que le taux d'arrivée des clients aux systèmes, les taux de service aux différents serveurs, le taux de rappel de clients en orbite, les taux de panne de serveurs, les taux de réparation de serveurs, ou encore les différents coûts intervenant dans les systèmes. L'intérêt qu'ils présentent est qu'ils sont intuitifs et faciles à manipuler dans les calculs par rapport aux autres. En attendant d'y revenir à la section 1.9, nous proposons et démontrons dans la présente section le théorème 1.6 et son corollaire (corollaire 1.1), qui permettent de reconnaître un nombre flou

triangulaire. Au cours de la section 1.9, ce théorème et ce corollaire nous aideront à démontrer la proposition 1.6 selon laquelle, le produit de deux nombres flous triangulaires n'est pas nécessairement triangulaire.

### 1.6.1 Définitions

**Définition 1.18** Un nombre flou  $\tilde{M}$ , de fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{M}}$ , est dit **triangulaire** s'il existe trois réels  $a < b < c$  tq (cf. [213]) :

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.62)$$

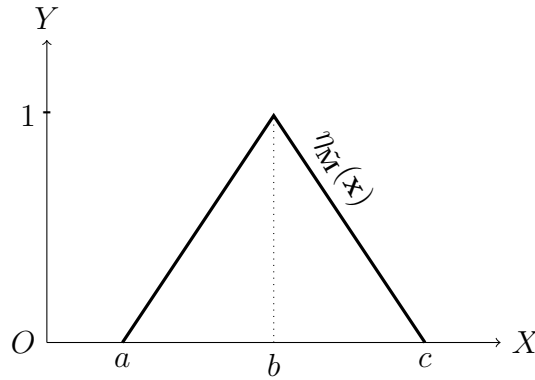


FIGURE 1.4 – Fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire.

De cette définition, il découle évidemment les propriétés suivantes :

- $b$  est l'unique valeur modale de  $\tilde{M}$ .
- Les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans l'ordre de grandeur croissante.
- Le graphe de  $\eta_{\tilde{M}}(x)$  est constitué de deux segments de droite formant avec l'axe des abscisses le triangle dont les sommets sont les points  $(a, 0)$ ,  $(b, 1)$  et  $(c, 0)$ . (voir figure 1.4)

Un tel nombre flou sera noté  $\tilde{M} = (a/b/c)$  ou  $\tilde{M} = (a, b, c)$ . L'ensemble des nombres flous triangulaires sera désigné par  $\mathbb{F}_{TRI}(\mathbb{R})$ .

**Définition 1.19** Un nombre flou  $\tilde{M}$ , de fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{M}}$ , est dit **trapézoïdal** s'il existe quatre réels  $a < b < c < d$  tq (cf. [213]) :

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.63)$$

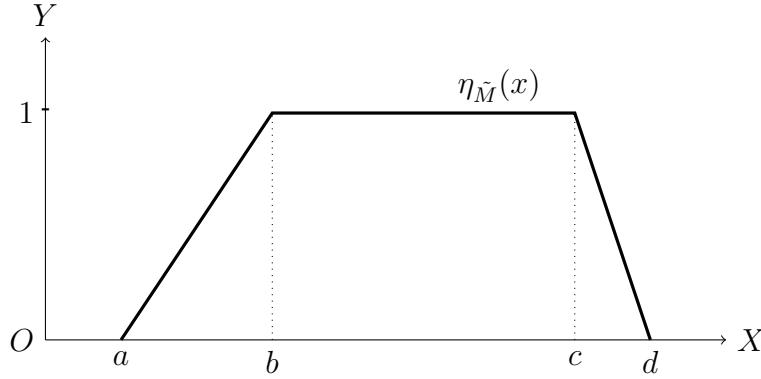


FIGURE 1.5 – Fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal.

De cette définition, découlent évidemment les propriétés suivantes :

- Les réels appartenant à  $[b, c]$  sont des valeurs modales de  $\tilde{M}$ .
- Les nombres réels  $a, b, c$  et  $d$  sont dans l'ordre de grandeur croissante.
- Le graphe de  $\eta_{\tilde{M}}(x)$  est constitué de trois segments de droite formant avec l'axe des abscisses le trapèze dont les sommets sont les points  $(a, 0)$ ,  $(b, 1)$ ,  $(c, 1)$  et  $(d, 0)$  (voir figure 1.5).

Un tel nombre flou sera noté  $\tilde{M} = (a/b/c/d)$  ou  $\tilde{M} = (a, b, c, d)$ . L'ensemble des nombres flous trapézoïdaux se dénote  $\mathbb{F}_{TRA}(\mathbb{R})$ .

### 1.6.2 Arithmétique sur les nombres flous triangulaires

Pour effectuer l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux nombres flous triangulaires  $\tilde{M} = (a/b/c)$  et  $\tilde{N} = (d/e/f)$  par l'arithmétique des alpha-coupes, il suffit de trouver leurs  $\alpha$ -coupes  $\tilde{M}_\alpha$  et  $\tilde{N}_\alpha$ , et d'appliquer les formules allant de (1.54) à (1.57).

$\tilde{M}_\alpha$  et  $\tilde{N}_\alpha$  étant respectivement des ensembles des réels  $x$  tels que  $\eta_{\tilde{M}}(x) \geq \alpha$  et  $\eta_{\tilde{N}}(x) \geq \alpha$ , on a :

$$\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha] \quad (1.64)$$

et

$$\tilde{N}_\alpha = [\tilde{N}^L(\alpha), \tilde{N}^U(\alpha)] = [d + (e - d)\alpha, f + (e - f)\alpha] \quad (1.65)$$

L'usage des formules (1.54) et (1.55) de l'arithmétique floue par  $\alpha$ -coupes et intervalles sur  $\tilde{M}_\alpha$  et  $\tilde{N}_\alpha$  donne les deux résultats suivants qui sont encore des nombres flous triangulaires :

L'addition

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (a + d/b + e/c + f) \quad (1.66)$$

La soustraction

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = (a + d/b - e/c + f) \quad (1.67)$$

**Théorème 1.6** (de reconnaissance d'un nombre flou triangulaire) Soit un nombre flou  $\tilde{M}$  de  $\alpha$ -coupe  $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)]$ .  $\tilde{M}$  est triangulaire ssi il existe trois réels  $u < v < w$  tq  $\forall \alpha \in [0, 1]$  :

$$\tilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u \quad (1.68)$$

et

$$\tilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w \quad (1.69)$$

**Preuve**

**Condition nécessaire :** Soit un nombre flou  $\tilde{M}$  dont la coupe de niveau  $\alpha$  est donnée par  $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)]$ . Supposons dans un premier temps que ce nombre soit triangulaire. Dans ce cas, d'après la définition 1.18 et l'égalité (1.64), il existe trois réels  $a < b < c$  pour lesquels la coupe de  $\tilde{M}$  de niveau  $\alpha$  est donnée par

$$\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha].$$

En prenant  $a = u, b = v, c = w$ , cette coupe devient :

$$\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)] = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w]$$

avec  $u < v < w$ .

Ce qui implique finalement :

$$\tilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$$

et

$$\tilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w.$$

Donc, si un nombre flou  $\tilde{M}$  est triangulaire, il existe trois nombres réels  $u, v$  et  $w$  tq  $u < v < w$ ,  $\tilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$  et  $\tilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

**Condition suffisante :** Soit un nombre flou  $\tilde{M}$  dont la coupe de niveau  $\alpha$  est donnée par  $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)]$ . Montrons que s'il existe trois nombres réels  $u < v < w$  tq  $\tilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$  et  $\tilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , alors  $\tilde{M}$  est triangulaire.

En effet, la coupe de  $\tilde{M}$  de niveau  $\alpha$  étant connue pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ , l'égalité (1.14) permet de reconstruire la fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{M}}$ , sans perdre de vue que  $\tilde{M}^L$  et  $\tilde{M}^U$  sont des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\tilde{M}_\alpha = \eta_{\tilde{M}}^{-1}([\alpha, 1])$ . Notons que si  $\alpha$  parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $\tilde{M}_\alpha$  recouvre le support de  $\tilde{M}$ .

L'hypothèse  $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)] = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w]$  laisse voir déjà que  $\text{supp}(\tilde{M}) = ]u, w[$  et que la valeur modale de  $\tilde{M}$  est  $v$ . D'après le théorème 1.5 de Goetschel et Voxmam,  $\tilde{M}^L$  est continue et croissante sur  $[u, v]$  et  $\tilde{M}^U$  est continue et décroissante sur  $[v, w]$ . Nous déduisons que  $\eta_{\tilde{M}}$  est une fonction réelle définie par trois fonctions différentes. La 1ère est la réciproque de  $\tilde{M}^L$  sur  $[u, v]$ , la seconde est la réciproque de  $\tilde{M}^U$  sur  $[v, w]$  et la dernière est nulle sur  $\mathbb{R} \setminus ([u, v] \cup [v, w])$ . Ces deux fonctions réciproques sont respectivement  $(\tilde{M}^L)^{-1}(x) = \frac{1}{v-u}(x - u)$  et  $(\tilde{M}^U)^{-1}(x) = \frac{1}{v-w}(x - w)$ .

La fonction d'appartenance  $\eta_{\tilde{M}}(x)$  est donc définie par :

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{v-u}(x - u) & \text{si } u \leq x \leq v \\ \frac{1}{v-w}(x - w) & \text{si } v < x \leq w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.70)$$

Ainsi, les trois réels  $u, v$  et  $w$  de l'égalité (1.70) satisfont la définition 1.18 d'un nombre flou triangulaire. Donc,  $\tilde{M}$  est triangulaire ■

**Corollaire 1.1** Soit un nombre flou  $\tilde{M}$  triangulaire. Si  $\tilde{M}$  a pour support  $]u, w[$ , et pour valeur modale  $v$ ; alors la coupe de  $\tilde{M}$  de niveau  $\alpha$  est l'inter-

valle fermé :

$$\tilde{M}_\alpha = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w].$$

## 1.7 Nombre flou de type L-R

### 1.7.1 Première forme de type L-R

#### Définition 1.20

Un nombre flou  $\tilde{M}$  est dit de **type L-R** si et seulement si il existe trois réels  $m, a > 0, b > 0$  et deux fonctions positives, continues et décroissantes  $L$  et  $R$  de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle unité  $[0, 1]$  tels que :

$$L(0) = R(0) = 1 \quad (1.71)$$

$$L(1) = 0 \text{ ou } L(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0 \quad (1.72)$$

$$R(1) = 0 \text{ ou } R(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \quad (1.73)$$

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right) & \text{si } x \in [m-a, m] \\ R\left(\frac{x-m}{b}\right) & \text{si } x \in [m, m+b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.74)$$

### 1.7.2 Notations et appellations :

- (i)  $m$  est la **valeur modale** ou le **mode** de  $\tilde{M}$ .
- (ii)  $a$  et  $b$  sont appelés respectivement **étalement gauche** ou **écart gauche** et **étalement droit** ou **écart droit** de  $\tilde{M}$ .
- (iii) Symboliquement  $\tilde{M}$  se note  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$ .
- (iv) La notation  $\langle m, a, b \rangle_{LR}$  est appelée la **représentation L-R** ou l'**écriture L-R** ou encore la **forme L-R** de  $\tilde{M}$ .
- (v) Par convention  $\langle m, 0, 0 \rangle_{LR}$  est le nombre réel ordinaire  $m$ , appelé aussi **singleton flou**.
- (vi) La famille des nombres flous de type L-R sera notée  $\mathbb{F}_{LR}(\mathbb{R})$ .
- (vii) D'après la définition de  $\eta_{\tilde{M}}$  en (1.74), le support de  $\tilde{M}$  est déterminé par l'intervalle ouvert :

$$\text{supp}(\tilde{M}) = ]m-a, m] \cup [m, m+b[ = ]m-a, m+b[ \quad (1.75)$$

- (viii) Si  $L$  et  $R$  sont égales, le nombre  $\tilde{M}$  est dit **semi-symétrique**. Un nombre semi-symétrique dont les étalements sont égaux, est dit **symétrique** (cf. [80], p. 54).
- (ix) Les fonctions  $L$  et  $R$  répondant à ces conditions sont multiples ; *Zimmermann* [213] donne par exemple pour  $p > 0$  les fonctions :

$$L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x^p) \quad (1.76)$$

$$L(x) = R(x) = \exp(-x) \quad (1.77)$$

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1 + x^p} \quad (1.78)$$

## 1.8 Arithmétique des nombres flous de même type L-R

### 1.8.1 Addition et soustraction

Utilisant la relation (1.40), *Dubois* et *Prade* ont montré dans [57] que si  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  sont deux nombres flous de même type L-R, leur somme et leur différence sont des nombres flous de type L-R donnés respectivement par :

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = \langle m + n, a + c, b + d \rangle_{LR} \quad (1.79)$$

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = \langle m - n, a + d, b + c \rangle_{LR} \quad (1.80)$$

La multiplication des nombres flous de type L-R à laquelle la sous-section suivante est entièrement consacrée, fait partie des contributions majeures de cette Thèse à la théorie des nombres flous. Cette sous-section étudie deux problématiques dont l'une est liée à la recherche d'une preuve à la proposition énoncée par *Dubois* et *Prade* dans [57], d'après laquelle le produit de deux nombres flous de même type L-R n'est pas de type L-R ; et l'autre, à l'examen d'une meilleure approximation de ce produit.

### 1.8.2 Multiplication des nombres flous de type L-R

Récemment, les nombres flous sont largement utilisés sur l'analyse des systèmes de files d'attente, dans l'analyse des données, dans l'intelligence ar-



tificielle et dans les prises de décisions [41]. Dans tous ces domaines où ils interviennent, nous sentons le besoin d'effectuer des calculs arithmétiques semblables à ceux effectués habituellement en mathématiques classiques. C'est ainsi que *Dubois* et *Prade* [57], se servant du principe d'extension de *Zadeh*, ont pourvu l'ensemble des nombres flous de quatre opérations fondamentales : l'addition  $\oplus$ , la soustraction  $\ominus$ , la multiplication  $\odot$  et la division  $\oslash$ , telles que définies ci-dessus aux égalités allant de (1.41) à (1.44). Ces opérations étant relativement difficiles à effectuer (cf. [200], [41]), une classe particulière des nombres flous dits de type L-R a été introduite dans le but de les rendre souples et pratiques. Il s'agit des nombres flous dont les fonctions d'appartenance sont définies à l'aide de deux fonctions réelles positives  $L$  et  $R$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ , vérifiant les conditions énumérées ci-haut à la définition 1.20. Dans la littérature, plusieurs études ont été réalisées sur l'arithmétique des nombres flous de type L-R dans divers sens ; mais parmi elles, une infime partie seulement, s'est intéressée à la multiplication (cf. [100]). La référence [57] prouve que l'addition et la soustraction de ces nombres donnent des nombres flous de même type. Quant au produit, elle s'est limitée à affirmer qu'il n'est pas généralement de type L-R, tout en proposant sous certaines conditions son approximation suivant les signes de facteurs. Vu que la plupart de travaux publiés après elle, ne se soient pas préoccupés à prouver cette affirmation (cf. [25], [84], [15], [138], [179], [139], [1], [213]), nous nous sommes proposés de revenir sur cette question, et d'y apporter notre petite contribution. Celle-ci est formulée sous forme de deux problèmes que nous nous sommes faits le devoir de résoudre dans [134].

- **Problème 1** : Comment pourvoir l'affirmation susmentionnée d'une démonstration mathématique en bonne et due forme ?
- **Problème 2** : Etant donné que le produit des nombres flous de type L-R n'est pas généralement de type L-R, quelle est la meilleure approximation de ce produit, parmi celles existantes, qui peut nous garantir une utilisation des formules arithmétiques fournies par la forme L-R sans trop d'écarts ?

### 1.8.2.1 Problème 1

Le problème 1 tel qu'il est posé dans [134] consiste à prouver la proposition suivante énoncée par *Dubois* et *Prade* dans [57], que nous reformulons comme étant le théorème 1.7.

**Théorème 1.7** *Le produit de nombres flous de type L-R n'est pas généralement de type L-R.*

**Preuve** : cf. [134]

### 1.8.2.2 Problème 2

Le deuxième problème posé dans [134] concerne l'approximation L-R du produit. Cette approximation permet l'usage permanent des formules acquises sur le type L-R en cas des calculs ayant plusieurs étapes. L'idéal est que le nombre L-R approximatif trouvé soit le plus proche possible du produit.

## 1. Approximation de Dubois et Prade ou approximation tangente

Historiquement, les valeurs floues L-R approximatives les plus connues et les plus répercutées par les autres chercheurs, sont celles obtenues par *Dubois* et *Prade* [57] dans le cas où les étalements de deux facteurs sont plus petits devant leurs valeurs modales. Elles sont présentées dans [134], p. 38.

## 2. Meilleure approximation ou approximation sécante

D'après notre analyse, le produit  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  n'étant pas un nombre de type L-R, le nombre flou de type L-R le plus proche de  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  est logiquement le nombre flou  $\tilde{V}$ , de même type L-R que  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ , possédant le même mode et le même support que  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ . D'après [134], p. 38,  $\tilde{V}$  se présente de la manière suivante :

**1er cas** :  $\tilde{M} > 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, mc + na - ac, md + nb + bd \rangle_{LR} \quad (1.81)$$

**2e cas :**  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} < 0$ .

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, -md - nb - bd, -mc - an + ac \rangle_{LR} \quad (1.82)$$

**3e cas :**  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, -md + na + ad, -mc + nb - bc \rangle_{LR} \quad (1.83)$$

Ces trois valeurs de  $\tilde{V}$  confirment celles trouvées par *Hanss* dans [80]. Elles constituent ce qu'il a appelé *approximations sécantes* (cf. [80], p. 58).

### 1.8.3 Division des nombres flous de type L-R

Tout comme pour le produit des nombres flous de type L-R, *Hanss* énonce sans démontrer dans [80] p. 60, que le quotient de deux nombres flous de même type L-R n'est pas de type L-R. Il propose néanmoins les formules ci-après qui permettent d'obtenir des **approximations tangentes** dans le cas de deux nombres flous  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  où  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  :

Si  $\tilde{M} > 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(md + na)}{n^2}, \frac{(mc + nb)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.84)$$

Si  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} < 0$

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(mc - nb)}{n^2}, \frac{(md - na)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.85)$$

Si  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(na - mc)}{n^2}, \frac{(nb - md)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.86)$$

Si  $\tilde{M} > 0$  et  $\tilde{N} < 0$

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(md - nb)}{n^2}, \frac{(mc - na)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.87)$$

**Définition 1.21**

L'approximation sécante de l'inverse d'un nombre flou positif de type L-R  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  définie dans [80], p. 61 par

$$\tilde{N}^{-1} \approx \left\langle \frac{1}{n}, \frac{d}{n(n+d)}, \frac{c}{n(n-c)} \right\rangle_{LR}, \quad (1.88)$$

nous permet de définir l'**approximation sécante du quotient de deux nombres flous positifs de même type L-R**  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  par la formule suivante :

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{md}{n(n+d)} + \frac{a}{n} - \frac{ad}{n(n+d)}, \frac{mc}{n(n-c)} + \frac{b}{n} + \frac{bc}{n(n-c)} \right\rangle_{LR} \quad (1.89)$$

On voit bien que l'approximation sécante du quotient de  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  par  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  est un nombre flou de type L-R dont le noyau est

$$\text{noy} \left( \frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} \right) = \left\{ \frac{m}{n} \right\}, \quad (1.90)$$

et dont le support est

$$\text{supp} \left( \frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} \right) = \left[ \frac{m-a}{n+d}, \frac{m+b}{n-c} \right] \quad (1.91)$$

Le théorème suivant, que nous énonçons dans le cas spécifique de nombres flous de type L-R triangulaire, montre que le noyau et le support du quotient  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}$  obtenus par l'approximation sécante, sont exactement les mêmes que ceux obtenus par l'approche usuelle des  $\alpha$ -coupes.

**Théorème 1.8** Si  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  sont deux nombres flous de type L-R triangulaire, alors le noyau et le support de leur quotient obtenus par l'arithmétique des  $\alpha$ -coupes, sont ceux obtenus par l'approximation sécante.

**Preuve :** Soient  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  deux nombres flous de type L-R triangulaire. Sous la forme triangulaire, les nombres  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  s'écrivent :  $\tilde{M} = (m - a/m/m + b)$  et  $\tilde{N} = (n - c/n/n + d)$ . Comme décrit dans le procédé proposé à la page 36, le calcul du quotient  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}$  par l'arithmétique usuelle des alpha-coupes et intervalles se fait en trois étapes en utilisant successivement les relations (1.10), (1.50), (1.57) et (1.14) :

1° **Défuzzification** de  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ 

D'après le corollaire 1.1, p. 41, les  $\alpha$ -coupes de  $\tilde{M}$  et de  $\tilde{N}$  s'écrivent :

$$\tilde{M}_\alpha = [a\alpha + m - a, -b\alpha + m + b]$$

et

$$\tilde{N}_\alpha = [c\alpha + n - c, -d\alpha + n + d]$$

2° **Calculs ordinaires ou classiques**

$$\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_\alpha = \frac{\tilde{M}_\alpha}{\tilde{N}_\alpha} = \frac{[a\alpha + m - a, -b\alpha + m + b]}{[c\alpha + n - c, -d\alpha + n + d]} = [\min K(\alpha), \max K(\alpha)]$$

où  $\min K(\alpha)$  et  $\max K(\alpha)$  s'obtiennent par la formule (1.57) en résolvant les deux programmes non linéaires paramétriques (PNLPs) ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min K(\alpha) & = ? \\ K(\alpha) & = \{k_1(\alpha), k_2(\alpha), k_3(\alpha), k_4(\alpha)\} \\ k_1(\alpha) & = \frac{a\alpha + m - a}{c\alpha + n - c} \\ k_2(\alpha) & = \frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d} \\ k_3(\alpha) & = \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c} \\ k_4(\alpha) & = \frac{-b\alpha + m + b}{-d\alpha + n + d} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max K(\alpha) & = ? \\ K(\alpha) & = \{k_1(\alpha), k_2(\alpha), k_3(\alpha), k_4(\alpha)\} \\ k_1(\alpha) & = \frac{a\alpha + m - a}{c\alpha + n - c} \\ k_2(\alpha) & = \frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d} \\ k_3(\alpha) & = \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c} \\ k_4(\alpha) & = \frac{-b\alpha + m + b}{-d\alpha + n + d} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

Les réels  $a, b, c$  et  $d$  étant des écarts de nombres flous de type L-R, ils sont tous strictement positifs. Cette information permet de résoudre ces deux programmes dont les solutions sont :  $\min K(\alpha) = k_2(\alpha)$  et

$\max K(\alpha) = k_3(\alpha)$ . D'où :

$$\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_\alpha = \left[\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_\alpha^L, \left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_\alpha^U\right] = \left[\frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d}, \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c}\right].$$

### 3° Fuzzification

De cette coupe de niveau  $\alpha$ , nous pouvons obtenir le nombre flou quotient  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}$  en déduisant son noyau pour  $\alpha = 1$ , son support pour  $\alpha = 0$  et éventuellement sa fonction d'appartenance.

Ainsi donc,

$$\text{noy}\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right) = \left\{\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_1^L\right\} = \left\{\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_1^U\right\} = \left\{\frac{m}{n}\right\}$$

et

$$\text{supp}\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right) = \left[\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_0^L, \left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}\right)_0^U\right] = \left[\frac{m - a}{n + d}, \frac{m + b}{n - c}\right].$$

On voit bien que le noyau et le support que nous venons d'obtenir par l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles sont exactement les mêmes que ceux obtenus par l'approximation sécante aux égalités (1.90) et (1.91) ■

Ce théorème que nous venons de démontrer dans un cas très restreint de type L-R triangulaire, est vrai pour tous les types L-R. Il stipule que le mode et le support d'un quotient de deux nombres flous de même type L-R peuvent être calculés par deux voies :

- par l'arithmétique des  $\alpha$ -coupes et intervalles,
- par les formules des approximations sécantes de l'arithmétique des nombres flous de type L-R.

## 1.8.4 Deuxième forme de type L-R

On définit aussi un nombre flou de type L-R de la deuxième forme dans le cas des nombre flous multimodaux.

On dit qu'un tel nombre flou est de type L-R si et seulement si il existe des nombres réels  $m, m', a > 0, b > 0$  ; et deux fonctions positives décroissantes et continues  $L$  et  $R$  allant de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle unité  $[0, 1]$  tq :

$L$  et  $R$  vérifient les relations (1.71), (1.72) et (1.73) ;

et

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{a}) & \text{si } x \in [m-a, m[ \\ 1 & \text{si } x \in [m, m'] \\ R(\frac{x-m'}{b}) & \text{si } x \in ]m', m'+b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Notation et appellation :** La représentation L-R de  $\tilde{M}$  dans ce cas se note  $\langle m, m', a, b \rangle_{LR}$ . L'arithmétique de ces nombres est semblable à celle de nombres de type L-R de la première forme vue précédemment aux sous-sections 1.8.1, 1.8.2 et 1.8.3.

Pour plus de détails sur ce type de nombres flous, un lecteur intéressé est prié de se référer à [213], [25] et [26].

### Remarque(s) 1.8

- (i) Un nombre flou de type L-R est complètement déterminé par la connaissance de son(ses) mode(s), de son support et des fonctions de référence  $L$  et  $R$  qui déterminent le graphe de sa fonction d'appartenance.
- (ii) Les approximations sécantes obtenues en (1.81) et (1.89), ne diffèrent légèrement de leurs produits et de leurs quotients que par les formes de leurs fonctions d'appartenance. Quant aux modes et supports, ils sont exactement les mêmes. Au troisième et quatrième chapitres, ces modes et ces supports joueront un grand rôle dans la recherche d'une solution au problème d'évaluation des mesures de performance posé dans ce travail.

### Remarque(s) 1.9

D'une manière générale, l'arithmétique floue de type L-R n'est pas très employée dans la littérature à cause des trois inconvénients qu'elle présente (cf. [80], p. 61) :

- (i) Les opérations élémentaires sont ouvertes et exigent des approximations qui font perdre certaines informations significatives.
- (ii) Les opérations sont applicables seulement aux nombres flous de même type L-R ; elles ne sont pas définies pour des types L-R différents.
- (iii) Les opérations sont définies uniquement pour des nombres flous qui sont soit positifs, soit négatifs ; et non pour des nombres flous dont les supports comprennent zéro.

Malgré ces inconvénients, retenons que les valeurs exactes de modes et supports obtenues par le biais des approximations sécantes, constituent un atout majeur que nous exploiterons à fond dans la suite de ce travail.

## 1.9 Quelques propriétés de nombres flous triangulaires liées au type L-R

### 1.9.1 Propositions

**Proposition 1.5** *Un nombre flou triangulaire est un nombre flou de type L-R. En d'autres termes  $\mathbb{F}_{TRI}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{F}_{LR}(\mathbb{R})$ .*

**Preuve :** Soit  $\tilde{M} = (a/b/c)$  un nombre flou triangulaire. Sa fonction d'appartenance est donnée à la relation (1.62). Comme  $b$  est une valeur modale de  $\tilde{M}$ , on pose  $m = b$ . Les nombres  $\lambda = b - a$  et  $\mu = c - b$  sont positifs et constituent évidemment les étalements gauche et droit de  $\tilde{M}$ . Ils permettent de définir la fonction d'appartenance de  $\tilde{M}$  à l'aide de deux fonctions positives  $L$  et  $R$  (avec  $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$ ) de la manière suivante :

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\lambda}) = \frac{x-m+\lambda}{\lambda} & \text{si } a \leq x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\mu}) = \frac{-x+m+\mu}{\mu} & \text{si } m < x \leq c \end{cases} \quad (1.92)$$

Comme il existe trois nombres réels  $m, \lambda > 0, \mu > \lambda$  vérifiant l'égalité (1.74) de la définition 1.20, nous pouvons conclure que  $\tilde{M}$  est un nombre flou de type L-R. Il s'écrit  $\tilde{M} = \langle b, \lambda, \mu \rangle_{LR} = \langle b, b-a, c-b \rangle_{LR}$  ■

**Proposition 1.6** *Le produit de deux nombres flous triangulaires n'est pas nécessairement triangulaire.*

**Preuve :** Soient  $\tilde{M} = (a/b/c)$  et  $\tilde{N} = (d/e/f)$  deux nombres flous triangulaires. D'après la proposition 1.5, ces nombres sont de type L-R, et ils peuvent s'écrire

$$\tilde{M} = \langle b, b-a, c-b \rangle_{LR}$$

et

$$\tilde{N} = \langle e, e-d, f-e \rangle_{LR}.$$



Simplifions les écritures en posant :  $b - a = \lambda$ ,  $c - b = \theta$ ,  $e - d = \delta$ ,  $f - e = \gamma$ ,  $b = m$  et  $e = n$ . Les fonctions d'appartenance de  $\tilde{M}$  et de  $\tilde{N}$  s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\lambda}) = \frac{x-m+\lambda}{\lambda} & \text{si } m-\lambda \leq x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\theta}) = \frac{-x+m+\theta}{\theta} & \text{si } m < x \leq m+\theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.93)$$

et

$$\eta_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} L(\frac{n-x}{\delta}) = \frac{x-n+\delta}{\delta} & \text{si } n-\delta \leq x \leq n \\ R(\frac{x-n}{\gamma}) = \frac{-x+n+\gamma}{\gamma} & \text{si } n < x \leq n+\gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.94)$$

Les  $\alpha$ -coupes de  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  peuvent s'obtenir par la résolution de leurs systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} \frac{\lambda - m + x}{\theta + m - x} \geq \alpha \\ \frac{\lambda}{\theta} \geq \alpha \end{cases} \quad (1.95)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta - n + x}{\gamma + n - x} \geq \alpha \\ \frac{\delta}{\gamma} \geq \alpha \end{cases} \quad (1.96)$$

dont les ensembles des solutions sont respectivement :

$$\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha)] = [\lambda\alpha + m - \lambda, \theta + m - \theta\alpha] \quad (1.97)$$

et

$$\tilde{N}_\alpha = [\tilde{N}^L(\alpha), \tilde{N}^U(\alpha)] = [\delta\alpha + n - \delta, \gamma + n - \gamma\alpha] \quad (1.98)$$

Comme  $m$  et  $n$  sont des valeurs modales respectives de  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ , leur produit  $m.n$  est une valeur modale de  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ , par définition de la multiplication floue reprise à l'égalité (1.43). Plusieurs cas sont à considérer pour le calcul du produit de  $\tilde{M}_\alpha$  par  $\tilde{N}_\alpha$  :

1er cas :  $\tilde{M} \geq 0$  et  $\tilde{N} \geq 0$

2e cas :  $\tilde{M} \geq 0$  et  $\tilde{N} < 0$  ou  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} \geq 0$

3e cas :  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} < 0$

4e cas :  $\text{supp}(\tilde{M}) \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$  et  $\text{supp}(\tilde{M}) \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$  ou  $\text{supp}(\tilde{N}) \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$  et  $\text{supp}(\tilde{N}) \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$ .

Dans tous ces différents cas,  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  peut être calculé par l'arithmétique des  $\alpha$  - coupes et intervalles suivant la formule (1.56).

Nous démontrons la proposition dans le seul 1er cas, les autres cas pouvant être traités de la même manière.

En effet,

Supposons que le produit  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  soit triangulaire. L'alpha-coupe  $(\tilde{M} \odot \tilde{N})_\alpha$  s'obtient en appliquant la formule (1.58) aux intervalles (1.97) et (1.98) ; et on a :

$$(\tilde{M} \odot \tilde{N})_\alpha = [f_1(\alpha), g_1(\alpha)] \quad (1.99)$$

où

$$f_1(\alpha) = \lambda\delta\alpha^2 + (n\lambda - 2\lambda\delta + m\delta)\alpha + m.n - m\gamma - n\lambda - \lambda\delta;$$

et

$$g_1(\alpha) = \theta\gamma\alpha^2 - (n\theta + \theta\gamma + m\gamma + 2\theta\gamma)\alpha + m.n + m\gamma + n\theta + \theta\gamma$$

De (1.99), on déduit le support de  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  :

$$\text{supp}(\tilde{M} \odot \tilde{N}) = ]mn - m\gamma - n\lambda - \lambda\delta, mn + m\gamma + n\theta + \theta.\gamma[ \quad (1.100)$$

Puisque  $m.n$  est la valeur modale de  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  et que

$$\text{supp}(\tilde{M} \odot \tilde{N}) = ]mn - m\gamma - n\lambda - \lambda\delta, mn + m\gamma + n\theta + \theta.\gamma[,$$

alors le corollaire 1.1 permet d'affirmer que :

$$(\tilde{M} \odot \tilde{N})_\alpha = [f_2(\alpha), g_2(\alpha)] \quad (1.101)$$

où

$$f_2(\alpha) = (m\gamma + n\lambda + \lambda\delta).\alpha + mn - m\gamma - n\lambda - \lambda\delta$$

et

$$g_2(\alpha) = (-m\gamma - n\theta - \theta.\gamma).\alpha + m.n + m.\gamma + n.\theta + \theta.\gamma$$

D'après la définition 1.17, relative à l'égalité de deux nombres flous exprimés en  $\alpha$ -coupes, les coupes en (1.99) et en (1.101) ne sont égales que si l'un au moins de réels  $\lambda$  et  $\delta$ , et l'un au moins de réels  $\theta$  et  $\gamma$  sont nuls. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  sont des réels strictement positifs. D'où la supposition selon laquelle  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  est triangulaire est fausse. Il est donc vrai que le nombre flou  $\tilde{M} \odot \tilde{N}$  n'est pas triangulaire ■

## 1.10 Conclusion du chapitre

Ce chapitre vient de rappeler les éléments essentiels sur la théorie des ensembles flous, permettant d'aborder l'analyse du problème posé dans ce travail, à savoir la détermination des performances d'un réseau de files d'attente floues à forme produit. Dans le cadre de l'arithmétique des nombres flous de type L-R, **nous y avons montré pour la première fois que le produit de deux nombres flous de type L-R n'est pas nécessairement de type L-R**. Cette arithmétique reconnue pour ses inconvénients dans les calculs des produits et des quotients, devient intéressante pour les mêmes calculs lorsqu'elle est cadrée aux approximations sécantes. **Nous avons montré dans ce cas qu'elle produit exactement les mêmes résultats que l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles en ce qui concerne les valeurs modales et les supports**. C'est cet avantage particulier qu'elle tire des approximations sécantes, qui nous a permis de la prendre en compte dans la recherche d'une approche mathématique de calcul des performances de files d'attente et de réseaux de files d'attente floues aux troisième et quatrième chapitres.

## DEUXIÈME CHAPITRE

# Chapitre 2

## CHAÎNES DE MARKOV FLOUES

### 2.1 Introduction

Dans l'étude générale des phénomènes aléatoires, les processus stochastiques classiques (*PSC*) dits " de vie ou de mort " sont à l'origine de la modélisation d'un bon nombre des systèmes parmi lesquels figurent les files d'attente et les réseaux de files d'attente. Ces processus, qui ne sont autres que des chaînes de Markov classiques (*CMC*), constituent une solution pour plusieurs problèmes de prise des décisions tels que le contrôle des systèmes complexes en intelligence artificielle, la gestion des stocks, la gestion des réseaux automobiles, la gestion des communications téléphoniques, l'étude des investissements, la maintenance du matériel, les systèmes d'usinage, etc. (cf. [3]).

Au cours de traitement des *CMC*, les probabilités manipulées sont souvent précises et considérées comme parfaitement déterminables. Or dans la situation réelle vécue au quotidien, certains problèmes qui se posent en économie, en ingénierie, en géologie, en environnement, en sciences sociales, en sciences médicales, et même sur les files d'attente qui font l'objet de cette dissertation, sont parfois difficilement appréhendés par une connaissance précise des probabilités en jeu ; et par conséquent difficilement modélisables par des *CMC*. De tels problèmes nécessitent l'introduction d'une nouvelle forme de processus qui prend en compte deux aspects d'incertitude : l'incertitude probabiliste et l'incertitude floue (cf. [171] ). C'est la raison pour laquelle nous introduisons dans ce deuxième chapitre un processus stochastique flou (*PSF*) appelé " chaîne de Markov floue (*CMF*) ", qui dispose des outils appropriés à ce type de modélisation.

Dès leur conception, les *PSF* utilisent simultanément des paramètres flous

et des paramètres ordinaires ; et les matrices de transition qui y entrent en action sont dites " matrices floues ". Vu le rôle joué par les matrices au cours des transitions de systèmes, nous avons jugé utile de leur réserver une section entière avant d'aborder la théorie proprement dite des CMF.

Notre contribution originale sur ce chapitre est coulée en une section entière qui est la section 2.5. Elle consiste en l'introduction pour la première fois, de la théorie du calcul de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue sous l'opération max-min. Un lecteur intéressé par cette théorie peut trouver son intégralité dans notre article sous la référence [137], intitulé « *Fuzzy Eigenvalues and Fuzzy Eigenvectors of Fuzzy Markov Chain Transition Matrix under Max-min Composition* » ; publié le 31 Janvier 2015 dans le journal international "Journal of Fuzzy Set Valued Analysis" (cf. [http : //www.ispacs. com/jour – nals/jfsva/2015/jfsva – 00209/](http://www.ispacs.com/journals/jfsva/2015/jfsva-00209/)).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : La deuxième section rappelle les principaux résultats d'une chaîne de Markov classique. La troisième étudie les matrices floues, les différentes opérations arithmétiques dans la famille des matrices floues et les différents concepts liés aux matrices floues. La quatrième section est consacrée aux chaînes de Markov floues et à leurs propriétés. La cinquième traite de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue par l'approche max-min. La sixième et dernière section donne la conclusion du chapitre.

## 2.2 Principaux résultats d'une chaîne de Markov classique

### 2.2.1 Définition et Matrice de transition

L'étude détaillée d'une CMC figure dans de nombreux manuels. Le présent rappel est conçu en référence à [127] et [132].

**Définition 2.1** Une chaîne de Markov classique (CMC) sur un espace de probabilité discret  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est un processus stochastique ordinaire (PSC)  $X = \{X_n\}_{n \in T}$  avec  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ , d'un nombre d'états  $k$  vérifiant l'équation suivante :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \quad (2.1)$$

où  $T$  est l'espace de temps ;  $1 \leq i, j \leq k$  ; et  $X_n$  une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des états  $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}$ .

Si  $\Omega$  est fini, on parle d'une CMC finie ; et s'il est infini, on parle d'une CMC infinie.

### Matrice de transition

Les probabilités  $p_{ij}$ , dites de transition, constituent une matrice carrée stochastique  $M$  d'ordre  $k$  dite matrice de transition ou matrice de probabilité. C'est une matrice caractérisée par le fait que chacune de ses lignes est un vecteur de probabilité ; c'est-à-dire un vecteur de composantes positives dont la somme vaut 1.

$$M = (p_{ij}) \quad (2.2)$$

En désignant par  $p_{ij}^{(n)}$  la probabilité d'atteindre l'état  $j$  en  $n$  transitions, partant d'un état  $i$ , la matrice de transition à la  $n$ -ième étape notée  $M^{(n)}$  est donnée par :

$$M^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Equation de Chapman - Kolmogorov

Si la distribution des probabilités à l'état initial du processus notée  $p^{(0)}$  avec  $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)})$  et la matrice de la CMC notée  $M = (p_{ij})$  sont connues, il y a lieu de déterminer la distribution  $p^{(n)}$  de la chaîne au bout de  $n$  transitions au moyen de la formule de Chapman-Kolmogorov qui s'écrit :

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot M \quad (2.4)$$

ou encore

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot M^n \quad (2.5)$$

De l'égalité (2.4) et du produit de deux matrices, l'équation suivante peut être déduite quel que soit  $j \in \Omega$  :

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{i=1}^k p_i^{(n)} \cdot p_{ij} \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Propriétés d'une chaîne de Markov classique

Une CMC sur un espace dénombrable, de matrice de transition  $M = (p_{ij})$ , est dite :

- *homogène* si et seulement si  $\forall \theta, n_i, n_j \in T; p_{ij}(\theta + n_i, \theta + n_j) = p_{ij}(n_i, n_j)$ .
- *régulière* si et seulement si  $M^s > 0$  pour un certain naturel non nul  $s$ ; c'est-à-dire  $p_{ij}^{(s)} > 0, \forall i, j \in \Omega$ . Ce qui veut dire en d'autres termes qu'il est toujours possible d'aller d'un état quelconque  $i$  à un état  $j$  en  $s$  pas.
- *absorbante* si et seulement si elle contient au moins un état absorbant  $i$  et si à partir d'un état non absorbant, il est possible d'atteindre au moins un état absorbant en un nombre fini d'étapes (cf. [32]).
- *irréductible* si et seulement si chacun de ses états est accessible à partir de n'importe quel autre.
- *stationnaire* si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{(n)} \geq 0 \quad (2.7)$$

- *ergodique* si et seulement si

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{(n)} > 0$$

et  $u$  est indépendant de  $p^{(0)}$ .

Si une CMC de matrice de transition  $M$  est stationnaire, le vecteur

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{(n)}$$

est un vecteur de probabilité dit "*distribution de probabilité stationnaire*". Il vérifie l'équation :

$$u.M = u \quad (2.8)$$



**Remarque(s) 2.1**

Pour toute CMC finie de matrice de transition  $M$ , on a les deux propriétés suivantes :

- 1° Si une CMC est stationnaire, alors elle possède toujours une distribution de probabilité stationnaire  $u$ .
- 2° Cette distribution stationnaire  $u$  est unique si et seulement si la valeur propre 1 de la matrice  $M$  est simple, et si toute autre valeur propre de  $M$  a une valeur absolue inférieure à 1.

Si ces deux propositions sont satisfaites, la suite des puissances de la matrice  $M$  est convergente vers une matrice  $M^*$  telle que chacune de ses lignes est égale au vecteur de probabilité  $u$ . Dans ces conditions, la matrice de probabilité peut être facilement utilisée dans des buts prévisionnels.

Pour ce qui est des états d'une CMC homogène à espace dénombrable, ils sont transitoires ou récurrents selon que la probabilité que le temps de retour dans ces états soit fini, est strictement inférieure à 1 ou non. Chaque état récurrent peut ensuite être classé comme étant *nul* ou *positif*. On dit qu'un état récurrent est *nul* si la probabilité de retour dans cet état en  $n$  transitions tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, et *positif* sinon. Si la CMC est irréductible, c'est-à-dire si tous les états communiquent, alors ils ont la même classification. La notion de classification figure dans les deux références indiquées au début de cette section. La section suivante est consacrée aux matrices floues dont on aura besoin dans le développement de chaînes de Markov floues.

**2.3 Matrices floues**

La présence persistante de l'imprécision dans les formulations des données de certaines sciences et technologies, et le rôle joué par les matrices dans l'étude de nombreux phénomènes naturels, ont poussé les mathématiciens à introduire la théorie des matrices floues dans plusieurs modélisations des phénomènes aléatoires.

A peine introduite, cette théorie a été suffisamment développée à travers plusieurs travaux à l'issue desquels d'importants résultats ont été obtenus. Des opérations arithmétiques ainsi que des notions traditionnelles liées aux matrices telles que la transposée, le déterminant, la matrice adjointe, les

systèmes d'équations linéaires ; etc., ont été redéfinies et développées dans ce domaine comme dans l'approche classique.

Depuis environ quatre décennies, les matrices floues constituent l'un de thèmes les plus étudiés en mathématiques floues. Le tout premier article sur ce thème a été produit en 1977 par *Thomason* [183]. Cet article, ainsi que la plupart de ceux qui ont été produits plus tard dans ce domaine, s'est beaucoup penché sur la convergence des puissances max-min d'une matrice floue. L'auteur y montre qu'il n'existe que deux comportements des puissances d'une matrice floue qui sont mutuellement exclusifs : la convergence vers une matrice idempotente et l'oscillation périodique de période finie. Comme résultat fondamental, *Thomason* a mis au point quelques critères de convergence d'une matrice floue ; lesquels, sont établis en supposant compacte<sup>1</sup> la matrice floue sous examen. Six ans plus tard, *Hashimoto* [81] étudia lui aussi la convergence et établit que les puissances max-min d'une matrice floue oscillent périodiquement avec une période finie lorsque la matrice est transitive<sup>2</sup>. D'autres résultats concernant la convergence des puissances max-min ont été élaborés par plusieurs chercheurs tels que *Zhu* [212], *Kolodziejczyk* [110], *Xin* [196], *Kandel* [91], *Fan* et *Liu* ([64] et [65]) ; *Buckley* [30], *Duan* [56], *Lur* et al. [120], *Pradhan* et *Pal* [153], etc. Il faut signaler dans ce cadre que *Bourke* et *Fisher* [27] ont aussi mené la même étude, mais cette fois-ci en utilisant les puissances max-produit ; alors que *Chiao* [45] l'a également développé sous la composition générale max-T.

Pour sa part *Kim* dans [103] et [106], a introduit et défini la notion de déterminant d'une matrice floue carrée ; notion qui a beaucoup contribué aux côtés de ses autres travaux [104] et [105] ; à l'élaboration de la théorie de déterminant d'une matrice floue carrée. C'est lui qui a développé pour la première fois avec *Roush* en 1980, la théorie générale des matrices floues, semblable à celle des matrices booléennes (cf. [107]). Récemment, sur base d'une fonction de référence, cette notion de déterminant a été revue et redéfinie autrement par *Dhar* [52].

La notion de la matrice adjointe d'une matrice floue fut introduite et étudiée par *Thomason* [183] et *Kim* [106].

Le concept de matrice floue d'intervalles (matrice dont les coefficients sont des sous-intervalles de  $[0,1]$ ) comme une généralisation des matrices floues, a été introduite et développée par *Shyamal* et *Pal* [173]. S'inspirant

1. Ce concept est défini dans la sous-sous-section 2.3.2.6, p. 67.

2. voir la définition d'une matrice transitive à la sous-sous-section 2.3.2.6, p. 67.

de nombres flous triangulaires, ces derniers ont introduit ensuite le concept de matrices floues triangulaires dans [171] (matrices dont les coefficients sont des nombres flous triangulaires) ; qui leur a permis de définir la trace, le déterminant flou triangulaire et l'adjointe d'une matrice floue triangulaire. Leur expertise a été poussée loin jusqu'à la définition des matrices floues triangulaires particulières et à l'étude de leurs propriétés.

Partant de la notion des ensembles flous de type-2<sup>3</sup>, *Dinagar* et *Latha* [54] ont introduit les matrices floues triangulaires de type-2 et proposé quelques unes de leurs propriétés.

Basant la représentation d'une matrice floue sur la fonction de référence introduite par *Baruah* [12], *Dhar* [53] a récemment étudié sous un autre angle, la notion de complément d'une matrice floue ; notion définie et étudiée au sens usuel neuf ans plutôt par *Shyamal* et *Pal* dans [172]. Soulignons que cette notion est capitale lorsqu'il s'agit d'analyser la nature complémentaire d'un système.

Exploitant la notion d'ensemble flou intuitionniste introduite par *Atanassov* [9], *Pal* et *c<sup>ie</sup>* [148] ont introduit le concept de la matrice floue intuitionniste qui continue à être enrichi jusqu'à ce jour par de nombreux travaux tels que ceux de *Khan* et *Pal* ([101], [102]), *Pal* et *Khan* [147], *Sriram* et *Murugadas* [177], *Chetia* et *Das* [44], *Adak* et *c<sup>ie</sup>* [2], *Mondal* et *Pal* [130], *Gandhimathi* [68], etc.

S'appuyant sur les travaux de *Molodtsov* [128], *Maji* et al. ([122], [123]) et *Majumdar* et al. [124], portant sur les ensembles soft et les ensembles soft flous intuitionnistes ; et sur ceux de *Yang* et *Ji* [199], *Borah* et al. [20] et *Neog* et *Sut* [143], consacrés aux matrices soft et matrices soft floues ; *Chetia* et *Das* [44] ont proposé la théorie des matrices soft floues intuitionnistes, que *Rajarajeswari* et *Dhanalakshmi* [155] ont redéfinie et étendue plus tard à quelques développements très intéressants dans le domaine médical ; précisément lorsqu'il s'agit d'élaborer les diagnostics sur les malades (cf. [156]).

Sur base des solutions symétriques maximales et minimales de systèmes d'équations linéaires floues complets introduites par *Allahviranloo* et al. [5] ; *Salahshour* et al. [164] ont introduit et étudié le problème de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice floue ; lequel problème, n'a été résolu que pour des matrices floues restreintes jusqu'à ce jour.

Dans l'objectif de résoudre ce problème de manière beaucoup plus glo-

---

3. Ensembles flous dont les valeurs des fonctions d'appartenance sont aussi des ensembles flous ; c'est-à-dire des ensembles flous des ensembles flous.

bale, ce travail revient sur cette question à la cinquième section de ce chapitre, et apporte une nouvelle approche complète basée sur la composition max-min. Les résultats obtenus par cette approche n'ont aucune condition restrictive et s'appliquent à toutes les matrices floues dont les coefficients sont des degrés d'appartenance (cf. [137]).

Avant d'entrer en détail de tous ces éléments, voyons d'abord au cours de la section suivante, comment se définissent une matrice floue et les opérations arithmétiques dans l'ensemble des matrices floues.

### 2.3.1 Définition et opérations arithmétiques

#### Définition 2.2

D'une manière générale, une *matrice floue* est définie comme celle dont les coefficients sont des nombres flous (cf. [164], [129], [8]). Mais selon les besoins de différentes théories développées autour d'elle, elle est présentée sous deux formes principales que nous rappelons aux sous-sous-sections 2.3.1.1 et 2.3.1.3.

##### 2.3.1.1 Première forme

Proposée originellement pour représenter les relations floues en théorie des ensembles flous, une matrice floue notée  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ , est présentée comme celle dont les coefficients  $a_{ij}$  sont des réels appartenant à l'intervalle unité  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$  (cf. [174]). Nous désignerons l'ensemble des matrices floues  $m \times n$  par le symbole  $\tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}$ .

Dans ces conditions, retenons que :

- les  $a_{ij}$  sont des degrés d'appartenance à la relation floue associée (cf. section 1.3, chapitre 1).
- la matrice  $(a_{ij})_{m \times n}$  admet une représentation 3D comme l'indique la figure 1.3, section 1.3, chapitre 1, page 26.
- Si tous les coefficients de la matrice floue  $\tilde{M} = (a_{ij})_{m \times n}$  sont nuls,  $\tilde{M}$  est dite matrice floue nulle, et se note  $\tilde{O}$ .
- Si  $\tilde{M} = (a_{ij})_{m \times n}$  est une matrice floue telle que  $a_{ii} \neq 0$  et  $a_{ij} = 0$  quels que soient  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ; où  $\overline{1, m} = \{1, 2, \dots, m\}$  et  $\overline{1, n} =$

$\{1, 2, \dots, n\}$ ; alors  $\tilde{M}$  est dite matrice floue diagonale.

- Si  $\tilde{M} = (a_{ij})_{m \times n}$  est une matrice floue telle que  $a_{ii} = \alpha$  ( $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\alpha$  fixe) et  $a_{ij} = 0 \quad \forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n}$ , alors  $\tilde{M}$  est dite matrice floue scalaire.
- Une matrice floue scalaire dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 est dite matrice floue unité. Elle se note  $\tilde{I}_n$ .
- Si  $m = n$ , la matrice  $\tilde{M}$  se note  $\tilde{M} = (a_{ij})_{n \times n}$ , et est appelée matrice floue carrée d'ordre  $n$ .
- Les matrices floues triangulaires supérieures et inférieures se définissent comme dans le cas classique.

### 2.3.1.2 Opérations arithmétiques

Présentée sous la forme précédente, une matrice floue  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  ressemble parfaitement à une matrice ordinaire. Cependant, retenons que malgré cette ressemblance, les opérations arithmétiques définies dans  $\tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}$  ne sont pas soumises à l'algèbre classique, mais plutôt à une algèbre spéciale propre aux matrices floues. Ces opérations ont été définies dans  $\tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}$  à l'aide des opérateurs logiques  $\min$  et  $\max$  de manière à conserver la fermeture de  $\tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}$ . Cette fermeture permet de définir certaines propriétés algébriques et d'en tirer des avantages pour des études menées dans d'autres domaines. Ainsi, ces différentes opérations arithmétiques sont définies par un grand nombre d'auteurs de la manière suivante (cf. [174]) :

#### Addition

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (c_{ij})_{m \times n} \text{ où } c_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \quad \forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n} \quad (2.9)$$

$$\forall \tilde{A} = (a_{ij}), \tilde{B} = (b_{ij}) \in \tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}.$$

#### Multiplication (produit max-min)

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = (c_{ik})_{m \times p} \text{ où } c_{ik} = \max_{1 \leq j \leq n} \{\min(a_{ij}, b_{jk}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p\} \quad (2.10)$$

$$\forall \tilde{A} = (a_{ij}) \in \tilde{M}_{m \times n}, \tilde{B} = (b_{jk}) \in \tilde{M}_{n \times p}.$$

### Puissance d'une matrice floue carrée

$$\tilde{A}^k = \tilde{A}^{k-1} \cdot \tilde{A} \quad (2.11)$$

$$\forall \tilde{A} = (a_{ij}) \in \tilde{M}_{n \times n}.$$

### Multiplication par un scalaire

$$k \cdot \tilde{A} = (c_{ij})_{m \times n} \text{ où } c_{ij} = \min(k, a_{ij}) \quad (2.12)$$

$$\forall \tilde{A} = (a_{ij}) \in \tilde{M}_{m \times n}; \forall k \in [0, 1]$$

Quelques propriétés et concepts liés aux matrices floues sont présentés ci-dessous à la sous-section 2.3.2.

#### 2.3.1.3 Deuxième forme

Une deuxième présentation d'une matrice floue est celle qui utilise des nombres flous comme coefficients. Cette présentation est très utilisée dans la littérature dans les cas de calculs complexes comme ceux relatifs à :

- la résolution des systèmes d'équations linéaires floues,
- la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice floue, etc.

Signalons pour ce cas, que les coefficients étant des nombres flous, l'arithmétique la plus utilisée dans ce cadre est l'arithmétique floue vue au premier chapitre.

### 2.3.2 Concepts liés à une matrice floue

Les concepts dont il est question au cours de cette sous-section, seront définis par rapport à la première forme d'une matrice floue définie ci-haut à la sous-section 2.3.1, p. 63.

### 2.3.2.1 Transposée d'une matrice floue

La **transposée** d'une matrice floue  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  est une matrice floue notée  $\tilde{A}^T$  définie par :

$$\tilde{A}^T = (a_{ji})_{n \times m} \quad (2.13)$$

### 2.3.2.2 Complément d'une matrice floue au sens usuel

*Shyamal* et *Pal* [172] ont défini le **complément**  $\tilde{A}^c$  d'une matrice floue  $\tilde{A}$  suivant la logique de la relation (1.21) du complément d'un ensemble flou (page 21, chap. 1). D'après cette logique, Si  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $\tilde{A}^c$  est définie comme étant une matrice floue  $m \times n$  donnée par :

$$\tilde{A}^c = (c_{ij})_{m \times n} \text{ où } c_{ij} = 1 - a_{ij} \quad (2.14)$$

$$\forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n}.$$

### 2.3.2.3 Complément d'une matrice floue au sens de Dhar

*Dhar* [51] a défini le **complément**  $\tilde{A}^c = (c_{ij})_{m \times n}$  d'une matrice floue  $\tilde{A}$  suivant la logique basée sur la définition 1.9 introduite par *Baruah* au chapitre 1, sous-sous-sections 1.2.2.6 et 1.2.2.7 ; page 24. D'après cette logique, le complément d'une matrice floue  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  est donné par :

$$\tilde{A}^c = (c_{ij})_{m \times n} \text{ où } c_{ij} = (1, a_{ij}) \quad (2.15)$$

Sous cette voie, il faut noter qu'avant de passer à la recherche du complément, la matrice  $\tilde{A}$  elle-même doit prendre la nouvelle présentation suivante (cf. [51]) :

$$\tilde{A} = (c_{ij})_{m \times n} \text{ où } c_{ij} = (a_{ij}, 0) \quad (2.16)$$

### 2.3.2.4 Section d'une matrice floue

On appelle **section**  $\alpha$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) d'une matrice floue  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ , une matrice booléenne notée  $\tilde{A}^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})_{m \times n}$  (cf. [174]) ; où

$$a_{ij}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij}^{(\alpha)} \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

**Remarque(s) 2.2** Cette section  $\tilde{A}^{(\alpha)}$  est ce que Shyamal et Pal [172] ont dénommée l'alpha-coupe supérieure de  $\tilde{A}$  dans leur étude. Ils ont de même défini l'alpha-coupe inférieure  $\tilde{A}_{(\alpha)}$  de  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  par :

$$\tilde{A}_{(\alpha)} = (a_{ij(\alpha)})_{m \times n} \text{ où } a_{ij(\alpha)} = \begin{cases} a_{ij(\alpha)} & \text{si } a_{ij(\alpha)} \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.3.2.5 Matrice floue régulière et g-inverse d'une matrice floue

Une matrice floue  $\tilde{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  est dite **régulière** ssi il existe une matrice floue  $\tilde{X} = (x_{ji})_{n \times m}$  telle que  $\tilde{A} \cdot \tilde{X} \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$  (cf. [126]). Dans ces conditions, la matrice floue  $\tilde{X}$  se note  $\tilde{A}^{-1}$ , et est appelée l'**inverse généralisée** de la matrice floue  $\tilde{A}$  ou tout simplement un **g-inverse** de  $\tilde{A}$ .

### 2.3.2.6 Relation " $\leq$ ", idempotence, compacité, transitivité, circularité

La relation " $\leq$ " est définie dans  $\tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}$  par :

$$\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a_{ij} \leq b_{ij} \quad (2.19)$$

$$\forall \tilde{A} = (a_{ij}), \tilde{B} = (b_{ij}) \in \tilde{\mathbb{M}}_{m \times n}; \forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n}.$$

Une matrice floue carrée  $\tilde{A}$  d'ordre  $n$  est dite :

– **idempotente** ssi :

$$\tilde{A}^2 = \tilde{A} \quad (2.20)$$

– **compacte** ssi :

$$\tilde{A}^2 \leq \tilde{A} \quad (2.21)$$

– **transitive** ssi :

$$\tilde{A}^2 \geq \tilde{A} \quad (2.22)$$

– **circulaire** ssi :

$$(\tilde{A}^2)^T \leq \tilde{A} \quad (2.23)$$



### 2.3.2.7 Propriétés relatives à la relation floue associée

Relativement à la relation floue associée, une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  est dite :

- *réflexive* ssi  $a_{ii} = 1 \quad \forall i \in \overline{1, n}$ ;
- *alpha-réflexive* ssi  $a_{ii} \geq \alpha \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall \alpha \in [0, 1]$ ;
- *faiblement réflexive* ssi  $a_{ii} \geq a_{ij} \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall j \in \overline{1, n}$ ;
- *antiréflexive* ssi  $a_{ii} = 0 \quad \forall i \in \overline{1, n}$ ;
- *alpha-antiréflexive* ssi  $a_{ii} \leq \alpha \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall \alpha \in [0, 1]$ ;
- *fortement antiréflexive* ssi  $a_{ii} \leq a_{ij} \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall j \in \overline{1, n}$ ;
- *symétrique* ssi  $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall j \in \overline{1, n}$ ;
- *antisymétrique* ssi  $\tilde{A} \wedge \tilde{A}^T \leq \tilde{I}_n$ ; où  $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$  désigne la matrice  $\tilde{C} = (c_{ij})$  avec  $c_{ij} = \min(a_{ij}, b_{ij}) \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{M}_{n \times n}$ .

Les références [174] et [55] proposent un si grand nombre de théorèmes et propositions relatives à toutes ces définitions ainsi que leurs démonstrations.

### 2.3.3 Convergence et Oscillation d'une matrice floue

Comme décrit ci-haut, la convergence et l'oscillation font partie des tous premiers concepts qui ont été traités suffisamment sur les matrices floues. Nous verrons à la section 2.4 qu'elles sont d'une grande importance sur les chaînes de Markov floues prévisionnelles. Nous reviendrons sur ces deux concepts à la section précitée.

### 2.3.4 Déterminant et matrice adjointe d'une matrice floue

Les notions de déterminant et de matrice adjointe d'une matrice floue carrée sont abordées sous deux approches dans la littérature. La première approche que nous considérons comme l'approche usuelle, est celle proposée par Kim dans [106] ; et la seconde est celle introduite récemment par Dhar dans [51]. Dans toutes ces deux approches, ces notions sont définies par des procédés semblables à ceux utilisés dans le cas classique, à quelques exceptions près.

### 2.3.4.1 L'Approche de Kim

L'approche de *Kim* est basée sur les définitions usuelles de la théorie des ensembles flous. Sous cette approche, le **déterminant** d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ , a été défini comme dans le cas classique, à l'exception des faits suivants :

- Dans la formule générale de calcul d'un déterminant, les signes "–" provenant de signatures des permutations ont été changés en signes "+".
- L'addition et la multiplication des éléments de  $\tilde{A}$  s'opèrent respectivement par les formules :

$$a_{ij} + a_{kl} = \max(a_{ij}, a_{kl}) \quad (2.24)$$

$$a_{ij} \cdot a_{kl} = \min(a_{ij}, a_{kl}) \quad (2.25)$$

Ainsi, cette approche associée à la formule *max – min* de Gani et al.[70], permet d'obtenir le déterminant d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ , noté " $\det(\tilde{A})$ ", dont le calcul peut être fait par la formule générale suivante :

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\sigma \in S(I)} (a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S(I)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (2.26)$$

où  $S(I)$  est le groupe symétrique de l'ensemble  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

La **matrice adjointe** d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij})$  d'ordre  $n$ , est définie pour sa part, comme étant une matrice floue carrée du même ordre, notée  $Adj(\tilde{A})$ , et donnée par :

$$Adj(\tilde{A}) = (m_{ij})_{n \times n} \quad (2.27)$$

où le coefficient  $m_{ij}$  est le déterminant du  $ij$ -ème mineur (au sens classique) de  $\tilde{A}$ .

### 2.3.4.2 L'Approche de *Dhar*

L'approche de *Dhar* comme nous l'avons signalé ci-haut, tire son origine de la nouvelle forme d'un ensemble flou proposée par *Baruah*. Cette approche utilise les notations données aux relations (2.15) et (2.16) pour définir le déterminant et l'adjointe d'une matrice floue carrée.

Les éléments de  $\tilde{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  et ceux de son complément étant présentés sous forme des couples dans cette approche (voir (2.15) et (2.16)) ; l'addition et la multiplication de ceux-ci ont été préalablement définies comme suit, avant d'aborder les calculs proprement dits d'un déterminant :

$$(a_{ij}, a_{kl}) + (a_{ts}, a_{uv}) = (\max(a_{ij}, a_{ts}), \min(a_{kl}, a_{uv})) \quad (2.28)$$

$$(a_{ij}, a_{kl}) \cdot (a_{ts}, a_{uv}) = (\min(a_{ij}, a_{ts}), \max(a_{kl}, a_{uv})) \quad (2.29)$$

Sous cette approche, le déterminant d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij}, 0)_{n \times n}$  est également défini comme dans le cas classique ; avec les mêmes exceptions évoquées dans la première approche ; mais cette fois-ci, en prenant pour addition et multiplication, les opérations définies en (2.28) et (2.29) au lieu de celles définies en (2.24) et (2.25).

Bien que *Dhar* ait circonscrit son étude autour des matrices d'ordre 3, nous pouvons généraliser le calcul d'un déterminant de cette approche par la formule générale suivante :

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\sigma \in S(I)} (a_{1\sigma(1)}, 0) \cdot (a_{2\sigma(2)}, 0) \dots (a_{n\sigma(n)}, 0) = \sum_{\sigma \in S(I)} \prod_{i=1}^n (a_{i\sigma(i)}, 0) \quad (2.30)$$

où  $S(I)$  est le groupe symétrique de l'ensemble  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Remarque(s) 2.3

En ce qui concerne cette approche, il est nécessaire de montrer également comment se calcule le déterminant du complément d'une matrice floue carrée ; étant donné que celui-ci possède une forme quelque peu différente de celle de la matrice floue originale.

En effet, *Dhar* a, dans le même ordre d'idées, défini pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , le déterminant du complément d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij}, 0)_{n \times n}$ ; que nous généralisons par la formule suivante :

$$\det(\tilde{A}^c) = \sum_{\sigma \in S(I)} (1, a_{1\sigma(1)}) \cdot (1, a_{2\sigma(2)}) \cdots (1, a_{n\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S(I)} \prod_{i=1}^n (1, a_{i\sigma(i)}) \quad (2.31)$$

où  $S(I)$  est le groupe symétrique de l'ensemble  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

La matrice adjointe d'une matrice floue carrée  $\tilde{A} = (a_{ij})$  d'ordre  $n$  est définie dans ce cas, comme étant une matrice floue carrée du même ordre, notée  $Adj(\tilde{A})$ , et donnée par :

$$Adj(\tilde{A}) = ((m_{ij}, 0))_{n \times n} \quad (2.32)$$

où le coefficient  $(m_{ij}, 0)$  est le déterminant du  $ij$ -ième mineur (au sens classique) de  $\tilde{A}$ .

## 2.4 Chaînes de Markov floues et leurs propriétés

La théorie de chaînes de Markov floues a vu le jour lorsqu'il s'est agi de modéliser des processus stochastiques dont certains paramètres sont mal connus ou imprécis.

La première réflexion sur cette forme de modélisation a été faite bien longtemps, d'abord par *Bellman* et *Zadeh* [17] dans leur article intitulé « Decision-making in fuzzy environment »; et ensuite par *Esogbue* et *Bellman* [62] dans leur étude sur la programmation dynamique floue et ses extensions. Au fil de cette réflexion est venue l'idée d'associer la théorie des ensembles flous aux CMC pour produire des CMF.

Depuis leur apparition, les CMF n'ont connu que très peu de publications (cf. [34] et [180]) parmi lesquelles nous retenons les suivantes :

Dans [111], *Kruse* et al. se sont attelés aux PSC en introduisant les CMF comme une perception de CMC basée sur les probabilités floues. Ils ont ensuite construit dans [112] et [113] les CMF par le biais d'une mesure de possibilité.

*Avrachenkov* et al. [10] ont formulé pour la première fois une définition générale d'une CMF sur un espace d'états fini et introduit ensuite les concepts

de moyenne de Cesaro et de  $\alpha$ -potentiel.

Abordant les CMF basées sur la théorie de possibilité, Buckley, Feuring et Hayashi [36] ont présenté des résultats sur les CMF absorbantes, et sur l'horizon infini de modèles flous markoviens.

Sur base d'une multiplication restreinte, Buckley et Eslami [34] ont examiné les propriétés des CMF régulières et absorbantes.

Introduisant les CMF par l'approche des probabilités floues provenant des intervalles de confiance, Buckley [32] a obtenu des propriétés qui montrent que les CMC constituent un cas particulier des CMF.

Depuis que ces bases ont été jetées, plusieurs autres chercheurs, sont revenus ces deux dernières décennies à la charge soit pour mettre les points sur les i, soit pour appliquer cette notion à d'autres études, dont les plus remarquables ont été produites en Imagerie (cf. [39], [151], [166]) et, en Fiabilité des Systèmes (cf. [59], [176]).

D'aucuns pourraient se demander d'où vient l'imprécision sur les paramètres d'un processus stochastique ?

En effet, comme on le sait, les transitions d'états d'une CMC comme celle dont la matrice est reprise à l'équation (2.2) ci-dessus, se concrétisent mathématiquement sur base des nombres réels  $p_{ij}$ , appelés probabilités de transition. Pour ce modèle classique, ces nombres doivent être connus exactement ; et en principe, ils sont estimés ou fournis par des experts. Mais la précision n'étant pas toujours de mise (cf. [186]), et suite à certains facteurs incontrôlables, il peut arriver qu'une partie de ces probabilités soient mal connues ou imprécises, et qu'on veuille modéliser cette imprécision en utilisant des nombres flous. C'est alors qu'à chaque quantité imprécise  $p_{ij}$ , on associe généralement une valeur subjective floue  $\tilde{p}_{ij}$ . Ce qui conduit donc à une matrice notée  $\tilde{M}$ , dite matrice de transition floue, dont la chaîne résultante est appelée "*chaîne de Markov floue*". Dans cette démarche, il est sous-entendu (cf. [32]) que les  $p_{ij}$  non flous sont considérées comme un cas particulier des nombres flous, et peuvent être traités ainsi comme tels.

$$\tilde{M} = (\tilde{p}_{ij}) \quad (2.33)$$

La principale question que l'on peut se poser généralement à ce niveau est comment obtenir ces valeurs floues  $\tilde{p}_{ij}$  ?

En réponse à cette question, deux voies sont indiquées dans la littérature. La première montre qu'elles peuvent être obtenues à partir de l'estimation des intervalles de confiance (cf. [32], p. 21) tandis que la deuxième recom-

mande de se remettre aux estimations individuelles ou collectives des experts (cf. [32], p. 27).

En ce qui concerne cette dernière voie, si on voudrait par exemple obtenir une valeur floue  $\tilde{p}_{ij}$  de forme triangulaire, les experts fournissent en principe trois valeurs réelles : une valeur  $a$  jugée pessimiste, une valeur  $b$  jugée plus probable et une valeur  $c$  jugée optimiste. Ce sont ces valeurs qui constituent le nombre flou triangulaire  $\tilde{p}_{ij} = (a/b/c)$  de valeur modale  $b$ . Il est sous-entendu ici que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des moyennes respectives des  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  en cas d'estimations collectives.

Selon que les informations imprécises se focalisent sur les états ou sur les probabilités de transition, on distingue deux types de CMF dans la littérature d'après Chergui [43] et Villacorta [188] : celles à états flous et probabilités singulières, et celles à états non-flous et probabilités de transition floues.

Cette quatrième section est constituée de deux sous-sections. La première donne les différentes définitions d'une CMF, et la seconde est consacrée aux différentes propriétés d'une CMF, dont les plus intéressantes sont la stationnarité et l'ergodicité. En vue d'explicitier la définition d'une CMF à états flous et les différents concepts formulés par *Avrachenkov* et *Sanchez* [10], nous avons donné au cours de la sous-section 2.4.1, un exemple illustratif simple. Dans le développement de cet exemple, la convergence et l'oscillation périodique de période finie d'une matrice floue évoquées ci-haut à la page 68 sont également explicitées.

## 2.4.1 Définition d'une chaîne de Markov floue

La définition d'une CMF varie logiquement suivant la nature des paramètres imprécis. Nous en proposons deux ci-dessous : celle formulée par *Avrachenkov* et *Sanchez* [10], basée sur des états flous ; et celle proposée par *Buckley* [32], qui fait usage des probabilités floues.

### 2.4.1.1 Définition d'*Avrachenkov* et *Sanchez*

#### Définition 2.3

Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  un univers d'états d'un système en transition à chaque instant  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Tout sous-ensemble flou (ou distribution floue) de  $\Omega$  peut être représenté par un vecteur  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_i$  représente le degré d'appartenance de  $i$  à  $\tilde{x}$ . En désignant l'ensemble des sous-ensembles flous de  $\Omega$  par  $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ , l'état du système est décrit à l'instant  $t$  par

$\tilde{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}) \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ ; où  $x_i^{(t)}$  est le degré d'appartenance de  $i$  à  $\tilde{x}^{(t)}$ . Soit  $\tilde{R}$  une relation floue définie sur  $\Omega^2$  de matrice floue  $(r_{ij})_{n \times n}$ . La loi de transition d'une chaîne de Markov floue est définie par la relation suivante (cf. [10], p. 144) :

$$x_j^{(t+1)} = \max_{i \in \Omega} (x_i^{(t)} \wedge r_{ij}), j \in \Omega \quad (2.34)$$

où le symbole " $\wedge$ " entre deux réels  $a$  et  $b$ , représente " $\min(a, b)$ " et où  $\tilde{x}^{(0)}$  représente la distribution initiale.

La relation (2.34) a une forme très similaire à la relation classique (2.6) de *Chapman-Kolmogorov*, bien que les deux représentent deux concepts différents, à savoir : des degrés d'appartenance pour la première, et des probabilités ordinaires pour la deuxième.

#### 2.4.1.2 Exemple

##### Exemple 2.1

Un système en transition aléatoire sur 5 états numérotés de 1 à 5, change d'états à chaque unité de temps  $\delta$  de façon imprécise. Des observations faites par un expert, il ressort que les transitions du système se font suivant des degrés d'attraction approximatifs entre les différents états. Selon qu'une transition s'opère en ordre croissant ou décroissant d'état, les différents degrés d'attraction entre états sont exprimés en termes linguistiques repris sur la table 2.1 ci-dessous :

	Modèle de transition	Degré d'attraction
1	Une unité en croissance	Excellent = $EX$
2	Une unité en décroissance	Très Bon = $TB$
3	Deux unités en croissance	Bon = $BO$
4	Deux unités en décroissance	Assez Bon = $AB$
5	Trois unités en croissance	Médiocre = $ME$
6	Reste au même état	Mauvais = $MA$
7	Autres unités de transition	Nul = $NL$

TABLE 2.1 – Degrés d'attraction entre états.

Sachant que la modélisation de la plupart de systèmes est souvent facilitée par des modèles markoviens, nous pouvons nous poser la question de savoir si le système décrit dans ce tableau peut être markovisé ?

Pour répondre à cette question, il faut remarquer d'entrée de jeu, que ces degrés d'attraction définis entre les différents états du système, définissent à leur tour une relation floue entre les éléments de l'ensemble des états  $\Omega$  où  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . D'après le tableau présenté, ces degrés sont d'autant élevés que les états sont différents et rapprochés. A l'instar des CMC, la transition floue d'un état  $i$  vers un état  $j$  en une seule unité de temps, ne dépend pas de la connaissance de la trajectoire du système avant d'atteindre  $i$ , mais seulement de l'état  $i$  qui a précédé immédiatement l'état  $j$ . Si nous attribuons subjectivement un degré d'appartenance à chacun de termes linguistiques ci-dessus ; par exemple :  $EX = 0.9$ ,  $TB = 0.7$ ,  $BO = 0.6$ ,  $AB = 0.4$ ,  $ME = 0.3$ ,  $MA = 0.1$  et  $NL = 0$  ; le processus du système peut être représenté par le graphe repris sur la figure 2.1 ci-dessous.

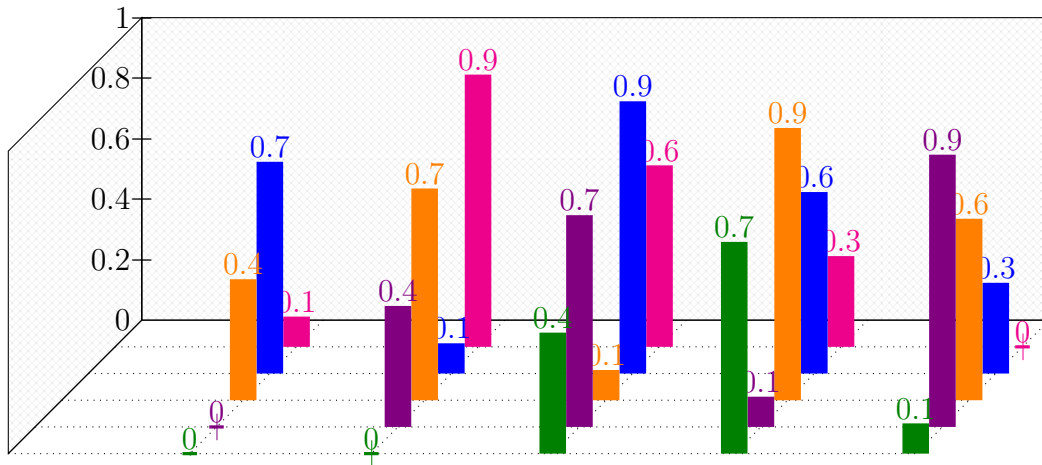


FIGURE 2.1 – Graphe des transitions entre états du système.

Tous les éléments sont réunis pour que la loi de transition floue soit définie. Ainsi, le processus de ce système est une CMF dont la matrice de transition  $\tilde{M}$  est la matrice floue associée à la relation floue d'attraction. Cette matrice est donnée d'après la description des transitions floues sur la figure 2.1 par :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.7 & 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.9 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$



La matrice  $\tilde{M}$  n'est pas une matrice stochastique. Mais il existe bien des relations floues qui conduisent à des matrices floues stochastiques dont l'importance dans l'environnement non flou n'est plus à démontrer.

Sa puissance max-min d'ordre 2 est obtenue en appliquant à  $\tilde{M}$  les opérations habituelles de la puissance d'une matrice, pour lesquelles la multiplication est remplacée par  $\min$  et l'addition par  $\max$ . Ainsi, on a :

$$\tilde{M}^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.9 & 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.7 & 0.6 & 0.9 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Comparativement aux équations (2.21) et (2.22), cette puissance révèle que la matrice  $\tilde{M}$  n'est ni compacte, ni transitive. La convergence de la suite  $(\tilde{M}^n)$ , s'examine alors dans ce cas d'une manière générale ; et on vérifie que pour  $n \geq 7$  :

$$\tilde{M}^n = \begin{cases} \tilde{M}_1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \tilde{M}_2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (2.37)$$

avec

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

et

$$\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Comme on peut le constater, cette limite laisse voir que la suite  $(\tilde{M}^n)$  ne converge pas, mais elle oscille périodiquement à partir de  $n = 7$ , avec une période finie  $p = 2$ .

Si nous supposons par exemple que le processus du système démarre plausiblement dans l'état numéro 2, l'une des formes de la distribution floue initiale est  $\tilde{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 0, 0)$ . On vérifie de même à l'aide de l'équation (2.34), que la distribution floue limite  $\tilde{x}^{(n)}$  de la CMF oscille aussi périodiquement entre les deux vecteurs  $(0.6, 0.7, 0.6, 0.7, 0.6)$  et  $(0.7, 0.6, 0.7, 0.6, 0.7)$  à partir de  $n = 4$ .

### 2.4.1.3 Définition de *Buckley*

#### Définition 2.4

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité fini. Considérons sur cet espace une CMF pour laquelle les probabilités de transition  $p_{ij}$  sont mal connues ou imprécises. *Buckley* ([32], pp. 35-43) remplace ces probabilités imprécises par des nombres flous  $\tilde{p}_{ij}$  provenant des intervalles de confiance ; qui lui ont permis enfin de définir une CMF comme étant la chaîne dont la matrice de transition est déterminée par les probabilités floues  $\tilde{p}_{ij}$ .

Voici la procédure que *Buckley* a usée pour obtenir ces nombres flous  $\tilde{p}_{ij}$ .

Supposons que chaque transition se réalise dans un intervalle de temps  $\delta$ , et que le processus est observé pendant  $N$  périodes au cours desquelles il s'est produit  $n$  transitions. Désignons par  $p_{k(k+i)}$  la probabilité qu'il y ait  $i$  transitions pendant une période de temps  $\delta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . On peut se décider de commencer l'estimation de ces intervalles à partir de la valeur moyenne de  $p_{k(k+i)}$  ; et dans ce cas, notre point d'estimation est naturellement le nombre  $\frac{n}{N}$ . Par la théorie d'estimation d'intervalles de confiance, on peut estimer l'intervalle de confiance  $(1 - \beta)100\%$  de  $p_{k(k+i)}$  pour tout  $\beta$  tq  $0.01 \leq \beta < 1$ .

Notons ces intervalles par :

$$[p_{k(k+i)_1}(\beta), p_{k(k+i)_2}(\beta)] \quad (2.40)$$

où  $[\frac{n}{N}, \frac{n}{N}]$  est pris comme l'intervalle de confiance à 0%.

Ces intervalles se présentant sous forme des segments emboîtés, on peut les placer successivement les uns sur les autres de façon à produire un nombre flou  $\tilde{p}_{k(k+1)}$  de forme triangulaire, dont la coupe de niveau  $\alpha$  est constituée des intervalles de confiance de la forme :

$$(\tilde{p}_{k(k+1)})_\alpha = [p_{k(k+i)_1}(\alpha), p_{k(k+i)_2}(\alpha)] \quad (2.41)$$

pour  $0.01 \leq \alpha \leq 1$  (cf. [32], p. 22) .

Plus bas, sur le graphe de la fonction d'appartenance de  $\tilde{p}_{k(k+1)}$ , au voisinage de l'axe des abscisses, Buckley propose de couper le graphe de  $\tilde{p}_{k(k+1)}$  pour compléter ses  $\alpha$  – coupes afin d'avoir un nombre flou complet ; et on a :

$$(\tilde{p}_{k(k+1)})_\alpha = [p_{k(k+i)_1}(0.01), p_{k(k+i)_2}(0.01)] \quad (2.42)$$

pour  $0.01 \leq \alpha \leq 1$ .

Sous cette voie, on puise beaucoup plus d'informations dans  $\tilde{p}_{k(k+1)}$  que celles qu'on aurait pu obtenir par un seul point d'estimation ou un simple intervalle d'estimation ([37], pp. 22-24). L'étude détaillée de la théorie de probabilité floue se trouve dans [31] et celle d'intervalles de confiance dans [6].

#### 2.4.1.4 Remarques

##### Remarque(s) 2.4

- Les intervalles de confiance ne constituent pas la seule voie par laquelle on étudie les probabilités imprécises dans la littérature.

En effet, d'autres auteurs ont considéré le problème d'imprécision d'une probabilité à l'aide de densités de probabilités [47] ; d'enveloppes de probabilités [18] ; de probabilités imprécises [48] ; de nombres flous (cf. [38], [182], [175], [165]) ; de densité floue [28] ; ou de fonctions de croyance [78].

- En tant que mesures, les probabilités floues ont été conçues par Talasova et Pavlacka [181] comme des applications mathématiques remplissant deux fonctions. La première étant celle d'étendre l'espace de probabilité classique  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  à celui incluant des événements aléatoires flous ; et la seconde, celle de permettre une modélisation mathématique adéquate de l'ensemble des probabilités incertaines différemment rencontrées. Selon la première fonction, l'espace classique de probabilité  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  est étendu à l'espace de probabilités flou  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_B(\mathbb{R}^n), \tilde{\mathbb{P}})$  ;

où  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$  sont respectivement la  $\sigma$ -algèbre de Borel de  $\mathbb{R}^n$  et la famille de tous les sous-ensembles flous de  $\mathbb{R}^n$  dont les fonctions d'appartenance sont Borel-mesurables<sup>4</sup> et tels que  $\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ ;

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\tilde{A}}(x) d\tilde{\mathbb{P}}(x) \quad (2.43)$$

Suivant *Negoita et Ralescu* [142], l'application  $\tilde{\mathbb{P}}$  de (2.43) vérifie tous les axiomes d'une mesure de probabilité classique.

Les éléments de  $\mathcal{B}$  pouvant être considérés comme des sous-ensembles flous de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}$  :

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) = \tilde{\mathbb{P}}(A) \quad (2.44)$$

Sous cette voie, il y a lieu de trouver la probabilité d'un événement flou  $\tilde{A}$  à l'aide d'un calcul non flou par la relation :

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) = \int_0^1 \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}_\alpha) d\alpha \quad (2.45)$$

où  $\tilde{A}_\alpha$  est la coupe de niveau  $\alpha$  de  $\tilde{A}$ .

## 2.4.2 Propriétés d'une chaîne de Markov floue

Jusqu'à présent, les propriétés d'une chaîne de Markov floue les plus étudiées sont la convergence, la stationnarité, l'ergodicité et la robustesse.

### 2.4.2.1 Convergence d'une chaîne de Markov floue

De *Thomason* [183] à *Pradhan et Pal* [153], la convergence des puissances d'une matrice floue a été examinée par plusieurs chercheurs. Les résultats obtenus ont permis d'établir des propriétés très intéressantes sur les chaînes de Markov floues, dont les plus répercutées concernent la stationnarité, l'ergodicité et la robustesse. Le théorème suivant, donne les deux formes de convergence de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue.

4. Une fonction  $f : (E_1, \mathcal{B}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{B}_2)$  entre deux espaces topologiques  $E_1$  et  $E_2$ , de tribus boréliennes respectives  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , est dite **Borel-mesurable** si et seulement si elle est  $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2)$  mesurable; c'est-à-dire  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1, \forall A \in \mathcal{B}_2$ .

**Théorème 2.1**

La suite des puissances de la matrice de transition  $\tilde{M} = (p_{ij})_{n \times n}$  d'une CMF est soit convergente vers une matrice floue idempotente  $\tilde{M}^\tau$  où  $\tau$  est un naturel fini ; soit oscillante avec une période finie  $p$  à partir d'un certain nombre des puissances fini.

**Preuve :** cf. [10], p. 145.

**Remarque(s) 2.5**

- Ce théorème donne la différence très remarquable qui existe entre une CMC et une CMF. En effet, la suite des puissances de la matrice de transition d'une CMC converge, si c'est le cas, après un nombre infini d'étapes, vers une matrice dont toutes les lignes sont égales, alors que celle des puissances de la matrice de transition d'une CMF converge si possible après un nombre fini d'étapes, vers une matrice floue dont les lignes ne sont pas nécessairement égales. Dans le modèle classique, cette égalité de lignes possède une interprétation purement probabiliste. Elle signifie qu'à long terme, la probabilité que la chaîne demeure dans un état donné ne dépend pas de l'état initial.
- A ce niveau, la question suivante mérite d'être soulevée : Ce résultat concernant la convergence d'une CMF, reste-t-il le même au cas où la matrice de transition serait stochastique ? La réponse est oui ; car le fait que la matrice d'une CMF soit stochastique n'a aucune influence sur la convergence en cas du produit max-min. La stochasticité<sup>5</sup> dans ce cas ne conserve pas les quelques propriétés acquises sur le modèle classique.

**2.4.2.2 Stationnarité d'une chaîne de Markov floue**

Une CMF est dite **stationnaire** si la suite des puissances de sa matrice de transition est convergente.

Mais retenons que cette convergence est toujours de deux types : Les puissances de la matrice de transition peuvent converger vers une matrice idempotente dont les vecteurs-lignes sont différents ; ou vers une matrice idempotente dont les vecteurs-lignes sont égaux.

Par analogie à l'ergodicité d'une CMC, Avrachenkov et Sanchez [10] se sont appuyés sur ce deuxième type de convergence et sur l'interprétation

5. Mot employé dans ce texte pour exprimer le fait qu'une matrice soit stochastique.

que l'on fait de l'égalité de vecteurs-lignes de la matrice-limite dans le modèle classique, pour définir enfin l'ergodicité d'une CMF comme dans la sous-section suivante.

#### 2.4.2.3 Ergodicité d'une chaîne de Markov floue

Une CMF est dite *ergodique* si et seulement si elle est apériodique et si la suite des puissances de sa matrice de transition  $\tilde{M}$  converge vers une matrice floue  $\tilde{M}^\tau$  dont toutes les lignes sont égales à une même distribution floue.

**Exemple 2.2** La CMF définie par la matrice de transition suivante est ergodique.

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

**Preuve :** On peut vérifier facilement que pour  $\tau \geq 4$ ; la puissance de  $\tilde{M}$  d'ordre  $\tau$  est :

$$\tilde{M}^\tau = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Ceci veut dire que  $\tilde{M}$  converge vers la matrice  $\tilde{M}^\tau$  dont tous les vecteurs-lignes sont égaux au vecteur flou  $\tilde{v} = (0.8 \ 0.8 \ 0.9)$ ; et on peut également vérifier que ceci est vrai quel que soit l'état par lequel la chaîne démarre son processus.

#### 2.4.2.4 Robustesse d'une chaîne de Markov floue

L'exemple suivant révèle que les CMF sont des systèmes robustes respectant les moindres perturbations dans leurs matrices de transition par rapport aux CMC.

**Exemple 2.3**

(i) Considérons une CMC de matrice de transition  $\tilde{M}$  donnée par

$$\tilde{M}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

où  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) est un paramètre indiquant une petite perturbation.

Si  $\varepsilon = 0$ , alors

$$\tilde{M}^*(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Par ailleurs, si  $\varepsilon$  est arbitrairement petit mais strictement positif, alors

$$\tilde{M}^*(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \neq \tilde{M}^*(0) \quad (2.50)$$

Les relations (2.49) et (2.50) laissent voir qu'une petite erreur arbitraire dans la matrice de transition peut entacher les caractéristiques du système des faux résultats à long terme.

(ii) Soulignons que ceci n'est pas le cas lorsque nous utilisons le modèle flou. En effet, si nous prenons la même matrice donnée à la relation (2.48) comme matrice de transition d'une CMF, et que nous calculions progressivement les puissances max-min de celle-ci pour  $\varepsilon$  petit et  $\varepsilon \leq 1 - \varepsilon$ ; on obtient :

$$\tilde{M}^n(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} = \tilde{M}(\varepsilon) \quad (2.51)$$

pour tout  $n \geq 2$ .

La matrice limite dans ce cas coïncide avec la matrice originale. Ce qui veut dire qu'à long terme,

$$\tilde{M}^*(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(\varepsilon) = \tilde{M}^*(0) \quad (2.52)$$

Contrairement aux CMC, on constate ici que de petites erreurs dans la matrice de transition ont de petits effets sur la matrice limite.

Tous les résultats de la robustesse d'une CMF peuvent se résumer dans

la proposition suivante dont la preuve donnée par *Avrachenkov* dans [10], utilise les notions de la moyenne de Cesaro et de  $\alpha$ -potentiel que nous n'évoquerons pas dans ce cadre.

### Proposition 2.1

Soit  $\tilde{M}(\varepsilon)$  une matrice de transition perturbée d'une CMF dont les éléments sont des fonctions continues de  $\varepsilon$  ; telle que si  $\varepsilon = 0$ , on retrouve la matrice de transition originale non perturbée  $\tilde{M}(0)$ .

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(\varepsilon) = \tilde{M}^*(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(0) = \tilde{M}^*(0)$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{M}^*(\varepsilon) = \tilde{M}^*(0).$$

Les matrices  $\tilde{M}^*(\varepsilon)$  et  $\tilde{M}^*(0)$  sont appelées limites de Cesaro de la matrice perturbée et de celle originale respectivement.

Comme nous l'avions déjà signalé dans l'introduction de ce chapitre, la section suivante est consacrée à l'étude des valeurs propres floues et vecteurs propres flous de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue. C'est elle qui reprend notre contribution originale aux différentes théories liées à ce chapitre. Elle aborde ces deux notions sous une nouvelle approche basée sur la composition max-min.

## 2.5 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue sous l'opération max-min

Le problème de calcul des valeurs propres et vecteurs propres survient dans beaucoup d'applications de la presque totalité de branches de la science. Qu'il s'agisse de systèmes physiques ou des systèmes d'ingénierie, la question ayant trait à la stabilité s'examine très souvent en passant par ces deux paramètres.

Dans le cadre de chaînes de *Markov*, ce problème a une solution complète du moins pour les chaînes de *Markov* classiques. En ce qui concerne les chaînes de *Markov* floues, nous n'avons pas réussi à mettre la main sur un



travail qui résout ce problème de façon complète. Le peu de travaux existants sur ce thème, donnent des solutions partielles dans un cadre très restrictif, où les matrices floues considérées sont sujettes à plusieurs contraintes (cf. [35], pp. 199-228 ; [164]). Aussi faut-il souligner que tous ces travaux ne portent que sur les matrices floues dont les coefficients sont présentés par la deuxième forme (cf. sous-section 2.3.1, p. 65), et calculés par l'arithmétique des  $\alpha$ -coupes et intervalles. *Chiao* [46] a défini ce problème par l'équation suivante, qu'il a résolue sous quatre contraintes formulées autour des matrices  $A$  et  $B$  :

$$A.X = \lambda.B.X \quad (2.53)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées de même ordre, et où  $\lambda$  et  $X$  sont respectivement une valeur propre floue (VAPF) et un vecteur propre flou (VEPF) de la matrice  $A$ .

Bien avant lui, *Buckley* [29], abordant ce problème par l'approche des  $\alpha$ -coupes, avait montré que les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices floues irréductibles et non négatives, sont respectivement des nombres flous et des vecteurs flous.

Sur base des solutions symétriques maximales et minimales d'un système d'équations linéaires floues complet, étudiées par *Allahviranloo* et al. [5] ; *Salahshour* et al. [164] ont étudié les VAPF et les VEPF par la même arithmétique que *Buckley* [29].

Partant de la définition d'une CMF formulée par *Avrachenkov* et *Sanchez* [10] (cf. définition 2.4, p. 77), il nous est venu à l'esprit de nous poser le même problème, mais cette fois-ci dans le contexte où les matrices floues ont la 1ère forme c'est-à-dire celle utilisée par [10], et pour lesquelles le produit est défini par l'opération max-min. Nous résolvons ce problème en introduisant la nouvelle notion "*d'ensemble flou propre à droite d'une matrice floue*", en abrégé "EFPD". Celle-ci nous est inspirée par le concept "*d'ensemble flou propre d'une relation floue*" introduit par *Sanchez* dans [167].

Pour le reste, cette section est planifiée de la façon suivante : La sous-section 2.5.1 introduit la notion d'EFPD. La sous-section 2.5.2 aborde le calcul de VAPF et de VEPF de la matrice d'une CMF sous l'opération max-min.

La sous-section 2.5.3 montre l'applicabilité de la théorie présentée par un exemple numérique et présente enfin les résultats de cet apport.

### 2.5.1 Ensemble flou propre à droite de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue

Comme indiqué ci-haut, nous nous sommes inspirés de la notion "d'ensemble flou propre d'une relation floue" introduite dans [167], pour définir cette nouvelle notion "d'ensemble flou propre à droite de la matrice de transition d'une CMF". Notons que de nombreux détails sur l'ensemble flou propre d'une relation floue se trouvent dans [10] et [55]. Par ailleurs, ne sachant pas déterminer en extension l'ensemble des EFPD de toute matrice floue donnée, cette sous-section se propose de trouver néanmoins l'intervalle dans lequel logent ces éléments, en déterminant le plus grand et le plus petit élément parmi eux. Malheureusement, nous montrerons que seul, le plus grand élément existe. Le plus petit élément n'est pas toujours défini pour l'opération considérée.

#### 2.5.2.1 Conceptualisation d'un ensemble flou propre à droite

##### Définition 2.5

Soit  $\Omega$  un univers de cardinal  $n$ , et  $\tilde{K} = (r_{ij})$  la matrice de transition d'une CMF à  $n$  états, associée à une relation floue  $\tilde{R} = (r_{ij})$  définie sur  $\Omega^2$ . Une distribution floue non nulle  $\tilde{A} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T$  de  $\Omega$ , est dite **ensemble flou propre à droite** (EFPD) de la matrice  $\tilde{K}$  si et seulement si :

$$\tilde{K} \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \quad (2.54)$$

où la multiplication définie entre  $\tilde{K}$  et  $\tilde{A}$  désigne l'opération "max-min" définie à l'égalité (2.10). Nous désignerons la famille de tous les EFPD d'une matrice floue  $\tilde{K}$  par  $\mathbb{E}(\tilde{K})$ . Il est évident que  $\mathbb{E}(\tilde{K}) \subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ .

##### Proposition 2.2

Supposons que toutes les distributions floues de  $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$  soient représentées sous forme des matrices-colonnes ;

- La relation " $\leq$ " définie à l'égalité (2.19) est un ordre partiel dans  $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$  ;
- $(\tilde{\mathcal{P}}(\Omega), \leq)$  possède la structure d'un treillis.

**Preuve :** (cf. [137], p. 28)

La sous sous-section suivante cherche à établir l'existence du plus petit et plus grand élément dans  $\mathbb{E}(\tilde{K})$  suivant l'ordre induit de la relation (2.19).

### 2.5.2.2 Éléments remarquables de la structure $(\mathbb{E}(\tilde{K}), \leq)$

#### Proposition 2.3

Si le  $i$ -ème vecteur-ligne de la matrice  $\tilde{K} = (r_{ij})$  d'une CMF est nul, alors la  $i$ -ème composante de tout EFPD de cette matrice est nulle.

**Preuve :** (cf. [137], p. 29)

#### Proposition 2.4

Si  $\tilde{K} = (r_{ij})$  est une matrice de transition d'une CMF à  $n$  états,  $\mathbb{E}(\tilde{K})$  est bornée supérieurement par l'élément  $\tilde{G} = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n)^T$  de  $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ , où chaque  $g_k$  est le plus grand des coefficients du  $k$ -ième vecteur-ligne de la matrice  $\tilde{K}$ .

**Preuve :** (cf. [137], p. 29)

### 2.5.2.3 Plus grand ensemble flou propre à droite (pgEFPD)

#### Remarque(s) 2.6

La distribution floue  $\tilde{G}$  définie dans la proposition 2.4 précédente, est un majorant de  $\mathbb{E}(\tilde{K})$ . Elle nous donne une idée sur le plus grand élément de  $\mathbb{E}(\tilde{K})$  que nous appelons **plus grand ensemble flou propre à droite de  $\tilde{K}$** , noté en abrégé "**pgEFPD**".

- (i) Si  $\tilde{G} \in \mathbb{E}(\tilde{K})$ ,  $\tilde{G}$  est d'office le pgEFPD de  $\tilde{K}$ .
- (ii) Si  $\tilde{G} \notin \mathbb{E}(\tilde{K})$ , on pose  $\tilde{G} = \tilde{G}_1$ , et on construit la suite décroissante  $(\tilde{G}_n)_n$  par la formule :

$$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{K} \cdot \tilde{G}_n \quad (2.55)$$

La première distribution floue  $\tilde{G}_n$  obtenue dans la construction, vérifiant l'égalité  $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{K} \cdot \tilde{G}_n$  est un EFPD ; et c'est le pgEFPD de  $\tilde{K}$ .

Nous avons conçu le procédé suivant pour la détermination d'un pgEFPD de la matrice de transition d'une CMF :

### 2.5.2.4 Procédé de calcul d'un pgEFPD

#### DEBUT

Étape 1 : Trouver le sous-ensemble  $\tilde{G}_1 = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n)^T$  de  $\Omega$  où

$$g_i = \max_{1 \leq j \leq n} (r_{ij}), \quad \forall i, 1 \leq i \leq n;$$

Étape 2 : Fixer  $n = 1$  ;

Étape 3 : Calculer par l'opération max-min :  $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{K} \cdot \tilde{G}_n$  ;

Étape 4 : Vérifier si  $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_n$  ?

- Si oui, stopper les opérations, écrire  $pgEFPD = \tilde{G}_n$ , aller à la Fin.
- Si non ; prendre  $n = n + 1$ , aller à l'Étape 3.

#### FIN

Par ce processus, les différents  $\tilde{G}_i$  forment suivant l'ordre défini à la relation (2.19), une suite décroissante allant de  $\tilde{G}_1$  au pgEFPD de  $\tilde{K}$ , qui est  $\tilde{G}_n$ .

### 2.5.2.5 Plus petit ensemble flou propre à droite (ppEFPD)

#### Proposition 2.5

$\mathbb{E}(\tilde{K})$  ne possède pas toujours un ppEFPD pour l'ordre défini à la relation (2.19).

**Preuve** : (cf. [137], p. 30)

La section suivante aborde la problématique de "valeur propre floue (VAPF)" et "vecteur propre flou (VEPF)" en prenant appui sur les notions d'EFPD introduites précédemment.

## 2.5.2 Valeur propre et vecteur propre

### 2.5.3.1 Conceptualisation de VAPF et VEPF

Le rôle joué par les valeurs propres et les vecteurs propres dans l'étude de la stabilité des systèmes n'est plus à démontrer. Dans cette sous-section, nous

définissons une VAPF et un VEPF de la matrice de transition d'une CMF. Tous les efforts conjugués sur cette partie ont pour finalité la détermination de ces deux paramètres. On y montre que le nombre des VAPF d'une matrice floue carrée d'ordre  $n$  n'est pas inférieur ou égal à  $n$  comme dans le cas classique, mais qu'il est généralement infini. On montre également que les VEPF d'une matrice floue se regroupent en deux grandes catégories : ceux qui sont en même temps des EFPD de cette matrice, et ceux qui ne le sont pas.

### 2.5.3.2 Définition d'une VAPF et d'un VEPF

#### Définition 2.6

Soit  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  un univers de  $n$  états, et  $\tilde{K} = (r_{ij})_{n \times n}$  la matrice de transition d'une CMF de ces  $n$  états. On dit qu'un réel  $\lambda \in (0, 1]$  et une distribution floue  $\tilde{X} = (x_1 x_2 \dots x_n)^T$  de  $\Omega$  de degrés d'appartenance  $x_i$  non tous nuls, sont respectivement une **valeur propre floue** et un **vecteur propre flou** de cette matrice ssi :

$$\tilde{K}.\tilde{X} = \lambda.\tilde{X} \quad (2.56)$$

où les deux multiplications sont respectivement celles définies aux égalités (2.10) et (2.12). Nous désignerons la famille de tous les VEPF d'une matrice floue  $\tilde{K}$  par  $\mathbb{V}(\tilde{K})$ . Il en résulte que  $\mathbb{V}(\tilde{K}) \subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ .

#### Remarque(s) 2.7

L'égalité (2.56) donne lieu aux observations intuitives suivantes :

- (i) Le nombre de VAPF d'une matrice floue  $\tilde{K}$  d'ordre  $n$ , est généralement quelconque, contrairement au cas classique où ce nombre est inférieur ou égal à  $n$ .
- (ii) Tout EFPD d'une matrice floue  $\tilde{K}$  d'ordre  $n$  est un VEPF associé à la VAPF 1.
- (iii) Il se dégage deux catégories de VEPF pour toute matrice floue  $\tilde{K}$  : celle pour laquelle le second membre est la matrice-colonne  $\tilde{X}$ , et celle pour laquelle le second membre est une matrice-colonne différente de  $\tilde{X}$ . La première est constituée des VEPF appartenant à  $\mathbb{E}(\tilde{K})$ , tandis que la deuxième regroupe tous les VEPF n'appartenant pas à  $\mathbb{E}(\tilde{K})$ .

(iv) Il est pratiquement difficile de déterminer tous les VEPF d'une matrice floue  $\tilde{K}$  d'ordre  $n$  ; car les VAPF leur associées sont en nombre infini.

Maintenant, on peut se poser la question de savoir si les VEPF de la deuxième catégorie citée précédemment dans la remarque (iii) existent ; et s'il en est ainsi, à quoi ressemblent-ils ?

La réponse est oui. En effet, il suffit de considérer la matrice floue  $\tilde{K}$  suivante :

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

et de constater que la distribution floue  $\tilde{X} = (0.7 \ 0.9)^T$  est un VEPF de  $\tilde{K}$  associé la VAPF  $\lambda = 0.4$  ; mais n'est pas un EFPD de  $\tilde{K}$ . Une préoccupation résiduelle serait de déterminer une procédure pour générer les VEPF de cette catégorie. Cette question reste opérationnelle pour des travaux ultérieurs. Les deux propositions suivantes, donnent les VAPF auxquelles les EFPD de la première catégorie sont associés.

### Proposition 2.6

Pour toute matrice floue  $\tilde{K}$  d'ordre  $n$ ,  $\lambda = 1$  est toujours une VAPF dont les VEPF associés sont tous les EFPD de  $\tilde{K}$ . En d'autres termes,  $\mathbb{E}(\tilde{K}) \subseteq \mathbb{V}(\tilde{K})$ .

**Preuve :**

La démonstration est évidente car, si  $\lambda = 1$ , le second membre de l'équation (2.56) se réduit à l'équation :

$$\tilde{K}.\tilde{X} = \tilde{X}; \quad (2.58)$$

qui génère tous les EFPD de  $\tilde{K}$  ■

**Proposition 2.7**

Pour toute matrice floue  $\tilde{K} = (r_{ij})$  d'ordre  $n$ , tout nombre réel  $\lambda$  tel que :

$$\lambda \geq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (r_{ij}) \quad (2.59)$$

est une VAPF dont les VEPF associés sont également tous les EFPD de  $\tilde{K}$ .

**Preuve :**

D'après la proposition 2.4, si  $\tilde{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  est un EFPD de  $\tilde{K} = (r_{ij})$ , alors

$$x_i \leq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (r_{ij}) \leq \lambda \quad \text{quel que soit } i \in \overline{1, n}.$$

Un tel  $\lambda$  réduit également l'équation (2.56) à l'équation (2.58), qui génère encore une fois tous les EFPD de  $\tilde{K}$  ■

**2.5.3.3 Plus petit VEPF et plus grand VEPF (ppVEPF et pgVEPF)**

De la même manière qu'on a examiné les éléments remarquables de  $\mathbb{E}(\tilde{K})$  de la sous-sous-section 2.5.2.2 à la sous-sous-section 2.5.2.5, examinons également si  $\mathbb{V}(\tilde{K})$  possède un plus petit et un plus grand élément pour l'ordre défini à la relation (2.19).

**A. Recherche du ppVEPF**

$\mathbb{E}(\tilde{K})$  étant inclus dans  $\mathbb{V}(\tilde{K})$ , comme le plus petit élément de  $(\mathbb{E}(\tilde{K}), \leq)$  n'est pas toujours défini pour l'opération max-min, nous concluons que le plus petit élément de  $(\mathbb{V}(\tilde{K}), \leq)$  pour le même ordre, ne l'est pas aussi.

**B. Recherche du pgVEPF**

En reconsidérant la matrice définie en (2.57), la distribution floue  $\tilde{X}$  définie par  $\tilde{X} = (1 \ 1)^T$  est un pgVEPF associé la VAPF  $\lambda = 0.4$ . Mais nous ne saurons pas généraliser ce résultat étant donné que ce plus grand élément est obtenu pour une matrice floue particulière. Un examen approfondi de la question est vivement conseillé, avant de tirer une conclusion.

Afin d'illustrer les nouvelles notions introduites dans les sections 2.5.1 et 2.5.2 précédentes, nous présentons un exemple didactique dans la sous-section suivante.

### 2.5.3 Exemple numérique et conclusion de l'étude

La matrice de transition d'une chaîne de Markov floue à 4 états est donnée par :

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

**Questions :**

- 1° Quel est le pgEFPD de cette matrice ?
- 2°  $\lambda = 0.5$  est-il une VAPF de  $\tilde{K}$  ?
- 3° Trouver un VEPF de  $\tilde{K}$  associé à la VAPF  $\lambda = 0.5$
- 4° Trouver un VEPF  $\tilde{X}$  de  $\tilde{K}$  de la 2e catégorie ; c'est-à-dire un VEPF  $\tilde{X}$  de  $\tilde{K}$  tel que  $\tilde{X} \in \mathbb{V}(\tilde{K}) \setminus \mathbb{E}(\tilde{K})$ .

**Résolution**

- 1° Par le procédé de calcul d'un pgEFPD proposé à la sous-sous-section 2.5.2.4, nous calculons les différents vecteurs de la suite décroissante  $(\tilde{G}_n)_n$ , en commençant par  $\tilde{G}_1$ , jusqu'à atteindre le pgEFPD  $\tilde{G}_n$  ; avec  $\tilde{G}_1 = (g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4)^T$  où  $g_i = \max_{1 \leq j \leq 4}(r_{ij}) \ \forall i \in \overline{1,4}$ .

**Étape 1.** Détermination de  $\tilde{G}_1$

- $g_1 = \max(r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}) = 0.9$
- $g_2 = \max(r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}) = 0.7$
- $g_3 = \max(r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}) = 0.8$
- $g_4 = \max(r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}) = 0.5$

D'où  $\tilde{G}_1 = (0.9 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.5)^T$

**Étape 2.** Fixer  $n = 1$

**Étape 3.** Calculer successivement  $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{K} \cdot \tilde{G}_n$  jusqu'à ce qu'on ait :  $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_n$ .



- $\tilde{G}_2 = \tilde{K}.\tilde{G}_1 = (0.8 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.5)^T$
- $\tilde{G}_3 = \tilde{K}.\tilde{G}_2 = (0.7 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.5)^T$
- $\tilde{G}_4 = \tilde{K}.\tilde{G}_3 = (0.7 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.5)^T$

On arrête les calculs à ce niveau car  $\tilde{G}_4 = \tilde{G}_3$ .

Donc,  $\tilde{G}_3 = (0.7 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.5)^T$  est le pgEFPD de  $\tilde{K}$ .

2° Soit  $\Omega$  l'ensemble des états de la CMF dont la matrice de transition est donnée à l'égalité (2.60).  $\lambda = 0.5$  est une VAPF de cette matrice si et seulement si il existe un vecteur flou non nul  $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$  tq :

$$\tilde{K}.\tilde{X} = 0.5\tilde{X} \quad (2.61)$$

Si l'équation (2.61) possède au moins une solution, alors  $\lambda = 0.5$  est une VAPF de  $\tilde{K}$  ; sinon,  $\lambda = 0.5$  n'est pas une VAPF de  $\tilde{K}$ .

Mais pour ce cas précis,  $\lambda = 0.5$  est bel et bien une VAPF de cette matrice, car  $\tilde{X} = (0.5 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4)^T$  est bien une solution de (2.61) ;  $\tilde{X} = (0.5 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4)^T$  est donc l'un des VEPF de  $\tilde{K}$  associés à  $\lambda = 0.5$ .

3° Il est question de contrôler s'il existe un vecteur flou non nul de  $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$  noté  $\tilde{X} = (a \quad b \quad c \quad d)^T$ , vérifiant l'équation (2.61). Par un simple calcul, on vérifie que  $\tilde{X} = (0.8 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4)^T$  est bien une solution de (2.61). Il est donc un VEPF de  $\tilde{K}$  associé à la VAPF  $\lambda = 0.5$ .

4° On peut facilement vérifier que le VEPF  $\tilde{X} = (0.8 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4)^T$  trouvé à l'étape précédente n'est pas un EFPD. Par conséquent, ce vecteur flou  $\tilde{X} = (0.8 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4)^T$  est un VEPF de  $\tilde{K}$  de la 2e catégorie ; c.-à-d.  $\tilde{X} \in \mathbb{V}(\tilde{K}) \setminus \mathbb{E}(\tilde{K})$ .

En résumé, avec l'aide du nouveau concept "d'ensemble flou propre à droite" défini dans cette section, nous venons d'introduire une nouvelle approche de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue par la composition max-min. Bien que des algorithmes appropriés pour les calculs ne soient pas encore mis au point, il y a lieu d'obtenir ces deux paramètres en procédant par la résolution des

systèmes d'équations max-min. Toute la théorie développée autour de cette approche se résume en deux résultats :

- Les valeurs propres floues de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue, traitées sous la composition max-min, sont des réels non nuls appartenant à l'intervalle unité  $[0,1]$ . Leur nombre est généralement indéterminé.
- Les vecteurs propres flous sont de deux catégories : ceux qui sont des ensembles flous propres à droite ; et ceux qui ne le sont pas.

Aussi, il est apparu que l'existence d'un plus petit ensemble flou propre à droite de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue, n'est pas acquise. Il conviendrait d'examiner les conditions nécessaires et/ou suffisantes de cette existence.

Par ailleurs, cette étude peut être conciliée avec celle des chaînes de *Markov* floues, afin de pouvoir déduire des propriétés intéressantes, semblables à celles obtenues dans le modèle classique. On pourrait également étudier si les valeurs propres floues et les vecteurs propres flous peuvent aider à trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'ergodicité d'une chaîne de *Markov* floue, qui, d'après les propos de *Guu* [79] tenus sur le sujet en 2013, demeure un problème ouvert en Recherche opérationnelle.

## 2.6 Conclusion du chapitre

Au cours de ce deuxième chapitre, nous avons traité le processus stochastique flou appelé "chaîne de *Markov* floue". Ce processus se distingue d'un processus de *Markov* classique, par le fait qu'il traite simultanément des informations précises et imprécises.

En dehors de tous les développements faits en science sur les matières de ce chapitre, nous venons d'**introduire pour la première fois la théorie de valeurs propres floues et de vecteurs propres flous de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue par l'approche max-min**. Deux résultats importants sont obtenus au terme de cette étude :

- Les valeurs propres floues de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue, traitées sous la composition max-min, sont des réels non nuls appartenant à l'intervalle unité  $[0, 1]$ , dont le nombre est généralement indéterminé.
- Les vecteurs propres flous de la matrice de transition d'une chaîne de *Markov* floue sont de deux catégories : ceux qui sont des ensembles flous propres à droite et, ceux qui ne le sont pas.

La différence remarquable entre cette approche et celles qui l'ont précédées est que les résultats obtenus n'ont aucune condition restrictive, et s'appliquent à toutes les matrices floues ayant la première forme définie ci-haut à la page 63. Par ailleurs, cette étude constitue un jalon posé, qui dans l'avenir, peut permettre de revisiter certains problèmes non encore résolus en Recherche opérationnelle.

## TROISIÈME CHAPITRE

## Chapitre 3

# FILES D'ATTENTE ET RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE FLOUES

### 3.1 Introduction

Les files d'attente et les réseaux de files d'attente constituent un problème permanent dans la vie de l'homme dès que l'on cherche à satisfaire aux demandes massives des services. De recherches autour de ce problème, sont nés les premiers modèles mathématiques de files d'attente à la suite de la publication du tout premier article scientifique sur le sujet en 1909 par l'ingénieur danois *Erlang*, dont le titre a été *The theory of probabilities and telephone conversations* (cf. [61]).

Introduits en premier lieu en télécommunication, ces modèles se sont vite étendus à plusieurs domaines tels que les systèmes informatiques, les systèmes de transport, les systèmes de production, etc. Avec l'évolution de la technologie et l'automatisation des systèmes techniques, ces modèles s'appliquent aujourd'hui à plusieurs files d'attente interconnectées appelées réseaux et sont devenus des outils de prédilection pour la modélisation de systèmes logistiques et de communication.

D'aucuns peuvent se demander qu'est-ce que la théorie de files d'attente ? *Chedom Fotso* et *Pauline Fotso* définissent la théorie de files d'attente dans [66] comme « *une technique de la Recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions* »

D'après cette définition, qui est d'ailleurs plus proche de celles données par plusieurs auteurs, il revient de comprendre qu'une étude théorique de

files d'attente permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble du système, d'identifier les éléments critiques, ou encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement du système.

Depuis leur introduction en science en tant que modèles mathématiques jusqu'à ce jour, les files d'attente ont effectué un long parcours que *Boucherie* et *Van Dijk* [24] résument en trois étapes, auxquelles nous ajouterons une quatrième.

La première est celle de l'introduction de la théorie en 1909, marquée par la publication de l'article scientifique d'Erlang susmentionné.

La seconde est celle de l'analyse de files d'attente en réseaux de files d'attente ; motivée par l'introduction de premiers réseaux de files d'attente par *J.R. Jackson* aux alentours de 1957 et par les travaux de *R.R.P. Jackson* en 1954 et de *Koenigsberg* en 1958 et 1959. C'est au cours de cette analyse que l'on a découvert que les longueurs de files au niveau de noeuds d'un réseau, où le client quitte une station vers une autre station à la fin du service en période d'équilibre, peuvent être vues comme des variables aléatoires indépendantes. Cette propriété a permis en modèle classique, d'évaluer facilement les mesures de performance d'un réseau à forme produit en répartissant les calculs par isolations. Nous nous en servirons également dans ce travail lorsqu'il s'agira de reprendre les mêmes calculs en modèle flou.

La troisième étape est celle inspirée par le rapide développement de systèmes informatiques qui a mis l'accent sur les disciplines de service telles que le Processor Sharing introduite par *Kleinrock* en 1967. Au cours de cette étape, les réseaux de files d'attente ont gagné leur place en théorie et en pratique. Des réseaux multiserveurs plus complexes ayant plusieurs noeuds et plusieurs disciplines de services sont largement étudiés par de nombreux chercheurs et ont abouti à des résultats très intéressants. Des méthodes efficaces ont été développées pour leur analyse lorsque les paramètres tels que le taux d'arrivée de clients et le taux de service sont des nombres réels précis. Plusieurs études ont permis d'examiner leur comportement qualitatif : existence de régimes stationnaires, caractérisation du comportement à l'équilibre, étude asymptotique du comportement transitoire et des régimes critiques (saturation), etc. Durant toutes ces trois premières étapes, les processus mathématiques qui ont servi à modéliser tous ces systèmes sont des CMC et les outils de base utilisés pour étudier le comportement du processus jusqu'à l'horizon infini sont la théorie classique des probabilités et la programmation dynamique (cf. [211]). Dans la présente Thèse, nous qualifions

toutes les files d'attente traitées dans ce cadre, de files d'attente classiques (FAC).

Enfin vient la quatrième étape, qui pour nous, démarre aux alentours de 1980 avec la parution du tout premier article scientifique produit par *Prade* [152], faisant mention de l'utilisation des nombres flous dans la modélisation d'une file d'attente. A partir de ce moment, les chercheurs de ce domaine ont eu la possibilité d'introduire une nouvelle forme de files d'attente, plus réalistes et plus adaptées au langage courant et au raisonnement humain, dites files d'attente floues (FAF). Ce sont des files d'attente dont certains paramètres intervenant dans le processus sont des nombres flous.

A la question de savoir comment en est-on arrivé aux files d'attente floues ? Il sied de rappeler que dans la théorie de FAC, les paramètres tels que le temps d'inter-arrivées et celui de service sont caractérisés par des variables aléatoires. Pour déterminer les fonctions de distribution de celles-ci, on a besoin des données statistiques. Or dans beaucoup de cas réels de files d'attente, il est tellement difficile, voire impossible d'obtenir ces données (cf. [145]) ; ou encore elles peuvent être obtenues, mais alors avec des marges d'erreurs très prononcées. Par contre, la description de ces mêmes paramètres en termes linguistiques est très fréquente dans le langage courant. C'est ainsi qu'à l'aide des ensembles flous, on a eu l'opportunité d'exprimer ces termes par des nombres flous, et de parler ainsi de files d'attente floues (FAF). Les FAF constituent un thème qui a beaucoup d'applications dans la vie courante quoiqu'elles n'aient connu jusque là que très peu de publications scientifiques comparativement aux FAC (cf. [11]). Les pionniers dans le domaine essayent de réexaminer les théories étudiées sur les FAC et de trouver de nouveaux résultats dans l'environnement flou au moyen de la théorie des ensembles flous introduite par *Zadeh*. Ces résultats portent progressivement sur la presque totalité de sous-modèles couverts par l'approche classique. Parmi eux, nous pouvons citer :

- Des files d'attente floues de capacité finie ou infinie (cf. [145], [161], [192]) ;
- Des files d'attente floues à un seul serveur (cf. [11], [87]) ;
- Des files d'attente floues multi-serveurs (cf. [208], [209]) ;
- Des files d'attente floues en tandem (cf. [207]) ;
- Des files d'attente floues avec classes prioritaires de clients (cf. [189], [160], [193], [194], [50], [149]) ;

- Des files d'attente floues avec vacances (cf. [89], [158]);
- Des files d'attente floues à serveurs amovibles (cf. [210], [162]);
- Des files d'attente floues avec orbite (cf. [159], [97], [146]);
- Des files d'attente floues avec orbite et vacances dues aux pannes et réparations de serveurs (cf. [89]; [158], [170]);
- Des files d'attente floues à arrivées massives et traitements par lots (cf. [69], [185], [184], [150]);
- et nous nous en passons.

Sous cet environnement, le dénominateur commun est la description des mesures de performance par des fonctions d'appartenance au lieu des valeurs moyennes obtenues par l'approche classique. Pour obtenir ces fonctions, plusieurs méthodes ont été mises au point. Parmi elles, celle des "programmes non linéaires paramétriques" nommée aussi "approche des alpha-coupes" est la plus utilisée. Cette méthode combine deux arithmétiques floues pour atteindre les résultats : l'arithmétique floue basée sur le principe d'extension de Zadeh et l'arithmétique floue des alpha-coupes et intervalles.

Pour notre part, nous apportons à travers ce chapitre deux contributions majeures.

La première propose une nouvelle approche que nous dénommons ici "**méthode des alpha-coupes assouplie** (flexible alpha-cuts method)", différente de l'approche des PNL(s) par le fait qu'elle ne recourt qu'à une seule arithmétique (arithmétique des alpha-coupes et intervalles) au lieu de deux. Sous cette nouvelle approche, les grands calculs sont non flous et ne se basent surtout que sur l'arithmétique des intervalles. Le fait que ces calculs soient non flous rend l'approche plus souple par rapport à l'approche des programmes non linéaires paramétriques comme d'aucuns pourraient le remarquer à travers notre article en référence [131].

La deuxième est une autre nouvelle méthode de calcul des mesures de performance d'une file d'attente floue dite "**méthode L-R**", basée essentiellement sur l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes. Cette dernière est conçue sur base de deux idées : l'idée d'exprimer les mesures de performance à l'aide des supports et des valeurs modales, et celle de recourir aux approximations sécantes qui donnent les valeurs exactes de ces deux composantes. Elle est courte et très efficace lorsque les variables floues qui définissent la file sont des nombres flous de même type L-R ; desquels font partie naturellement les nombres flous trian-



gulaires et trapézoïdaux, les plus utilisés sur ce genre d'études. Pour plus des détails sur cette 2<sup>e</sup> nouvelle méthode, un lecteur intéressé est prié de consulter nos articles [135] et [133], parus respectivement dans les journaux JFSVA et JPAMAA.

Quant aux réseaux de files d'attente floues, le domaine est encore presque vierge. En dehors des travaux de *Chen* [42], de *Zhang et cie* [211] et de *Luthi et Haring* [121] cités dans l'introduction générale, nous n'avons pas réussi à mettre la main sur une autre publication du genre dans le domaine.

Ce chapitre est planifié de la manière suivante : La deuxième section rappelle quelques résultats importants sur la modélisation d'une file d'attente classique. La troisième section introduit l'évaluation des mesures de performance d'une file d'attente floue par la méthode des alpha-coupes assouplie, qui nous a été inspirée par celle des PNLP. La quatrième section traite d'un exemple numérique suivant cette méthode. La cinquième section introduit la deuxième nouvelle méthode dite " méthode L-R ". La sixième section traite du même exemple numérique de la quatrième section par cette deuxième nouvelle méthode afin de montrer les avantages qu'apporte celle-ci par rapport à la première. La septième section donne la conclusion du chapitre.

## 3.2 Principaux résultats d'une file d'attente en modèle classique

### 3.2.1 Description d'une file d'attente classique

Mathématiquement, une FAC peut être décrite comme étant la donnée d'une ou de plusieurs unités de service où arrivent des clients qui demandent une certaine durée d'utilisation de cette unité. Quand les clients ne peuvent accéder à cette unité de service, ils patientent dans une file d'attente en attendant d'être servis. La file d'attente ne peut éventuellement accepter qu'un nombre fini de clients. Dans ce cas les clients trouvant la file pleine à leur arrivée sont rejetés par le système. Un client est servi suivant une certaine discipline et pendant une certaine période, puis libéré par le serveur. Les principales disciplines de service les plus utilisées sont : *FIFO* (First In First Out) ; *LIFO* (Last In First Out) ; *PS* (Processor Sharing ou partage égalitaire) et *PR* (Prioritaire avec ou sans préemption). La théorie de phénomènes d'attente emploie des outils mathématiques pour prédire le comportement d'une file d'attente. En vue de faciliter cette théorie, il est souvent supposé qu'une file

d'attente se déroule en un processus stochastique de vie ou de mort (PVM). La prédiction du comportement vise la probabilité d'avoir  $N$  clients dans la file (la longueur moyenne de la file), le temps moyen d'attente, le débit de la file, etc. Dans ce cadre, une file d'attente est déterminée par un flux d'arrivée de clients, une salle d'attente, et un serveur. Pour modéliser une telle file, nous avons besoin des éléments  $A/S/c/N_s/N_p/Z$ , énumérés ainsi selon la nomenclature de *Kendall*.

(i)  $A$  : est relatif à la loi des arrivées de clients, ses principales valeurs sont :

- 1°  $G$  (Général) : interarrivées stationnaires complètement générales.
- 2°  $GI$  (Général Indépendant) : la suite des interarrivées  $(t_{n+1} - t_n)$  est i.i.d. (suite de variables indépendantes identiquement distribuées).
- 3°  $M$  (Markov) : les  $t_{n+1} - t_n$  sont indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de même paramètre. Le processus d'arrivée est alors un processus de Poisson.
- 4°  $D$  (Déterministe) :  $t_{n+1} - t_n = C$  (constante) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les arrivées périodiques.

(ii)  $S$  : est relatif à la distribution de la durée de service par client. Ses valeurs sont les mêmes que précédemment, sauf que  $t_{n+1} - t_n$  est remplacé dans ce cas par  $\mu_n$  la durée du service du  $n$ -ième client.

(iii)  $c$  : est le nombre de serveurs à l'unité de service ;

(iv)  $N_s$  : la taille du système ;

(v)  $N_p$  : la taille de la population source ;

(vi)  $Z$  : la discipline de service.

Lorsqu'il n'existe aucune donnée pour ces trois derniers paramètres, on suppose toujours que  $N_s = \infty$ ,  $N_p = \infty$  et  $Z$  est FIFO.

### 3.2.2 Analyse mathématique d'une file d'attente classique

Pour le rappel concernant cette sous-section, nous nous sommes plus référés à [14] et [132].

L'étude mathématique d'une FAC se fait le plus souvent par l'introduction d'un PSC (processus stochastique classique) défini de façon appropriée. Dans un premier temps, on s'intéresse au nombre  $X(t)$  de clients se trouvant dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ) ; et en fonction de différentes grandeurs dont on a besoin, on cherche à calculer dans un premier temps :

- les probabilités d'état

$$p_n(t) = \mathbb{P}[X(t) = n],$$

qui définissent le régime transitoire du PSC  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Il va de soi que les fonctions  $p_n(t)$  dépendent de l'état initial du processus.

- les probabilités d'état en régime permanent ou stationnaire du processus définies par :

$$p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[X(t) = n];$$

avec  $n = 0, 1, 2, \dots$

C'est à partir de la distribution stationnaire du processus que nous pourrions obtenir d'autres paramètres d'exploitation du système tels que :

- (i) Le temps moyen d'attente d'un client dans la file :  $T_f$
- (ii) Le temps moyen de séjour d'un client dans le système ;  $T_s$
- (iii) Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :  $N_f$
- (iv) Le nombre moyen de clients dans le système :  $N_s$
- (v) Le taux d'utilisation des serveurs :  $U$
- (vi) L'intensité de trafic  $\rho$  , définie par :

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu};$$

où  $c$  est le nombre de serveurs et  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement, le taux d'arrivée et le taux de service ; en supposant bien entendu que les serveurs ont des distributions i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées).

Ce sont ces paramètres qu'on appelle généralement les mesures de performance d'une file d'attente. Parmi les processus stochastiques markoviens, ceux qui constituent le modèle de base pour les systèmes d'attente en gé-

néral sont des CMC continues dans le temps et discrètes dans l'espace des états.

### 3.2.3 Calcul de la distribution stationnaire d'une file d'attente classique

En représentant un état d'un tel système à un instant  $t$  comme le nombre de clients présents dans le système au temps  $t$ , le graphe des transitions possibles entre ses différents états correspond à la figure 3.1 ci-dessous :

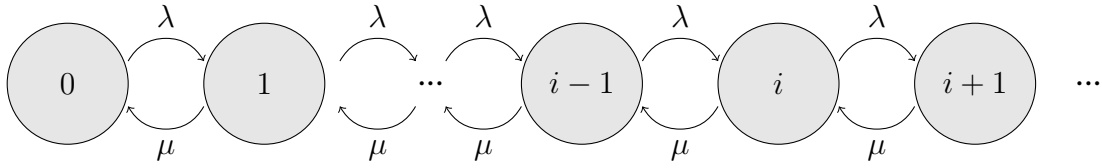


FIGURE 3.1 – Graphe représentatif d'une file d'attente simple  $M/M/1$ .

Il suffit de :

- constater qu'avec le taux d'arrivée  $\lambda$  et le taux de service  $\mu$ , ce modèle est assimilable donc à un P.V.M. homogène (processus de vie ou de mort homogène) de paramètres  $\lambda_n = \lambda > 0$  et  $\mu_n = \mu > 0$
- déterminer les équations algébriques de ce P.V.M. en régime permanent (cf. [132]) :

$$\begin{cases} \mu \cdot p_{n+1} + \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + \mu) \cdot p_n = 0 & \text{si } n \geq 1 \\ \mu \cdot p_1 - \lambda \cdot p_0 = 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

- résoudre ce système.

D'après [132], la résolution du système donne la distribution stationnaire :

$$p_n = \begin{cases} \rho^n (1 - \rho) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 - \rho & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

### 3.2.4 Mesures de performance d'une file d'attente classique

Pour chaque modèle de file d'attente, il existe un certain nombre des mesures qui la caractérisent à l'état stationnaire telles qu'énumérées à la sous-section 3.2.2. Plusieurs études menées dans la théorie classique montrent

comment obtenir ces mesures. De nombreux résultats sur ce genre d'études se trouvent dans la littérature sur plusieurs modèles de files d'attente allant des plus simples aux plus complexes. Ce sont ces résultats qui ont permis aux chercheurs de bâtir les différents modèles flous auxquels nous nous intéressons aujourd'hui dans la présente Thèse.

### 3.3 Mesures de performance d'une file d'attente floue par la méthode des alpha-coupes assouplie

#### 3.3.1 Modélisation d'une file d'attente floue

Une file d'attente floue est une CMC pour laquelle le système change d'états suivant un P.V.M. dont les paramètres  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  sont des quantités imprécises. Ces quantités dont la plupart de fois sont exprimées en termes linguistiques, correspondent en théorie des ensembles flous aux nombres flous. Dans ce cas, en disant par exemple que le taux de natalité  $\lambda_n$  ou le taux de mortalité  $\mu_n$  est d'environ 10 par unité de temps ; ceci signifie beaucoup des choses au cas où nous nous référons à la théorie de possibilité.

Il faudrait connaître par exemple la valeur minimale  $a$  de ce taux, et sa valeur maximale  $c$ , afin de l'exprimer par exemple par le nombre flou triangulaire  $(a/10/c)$ . De toutes les façons, ces deux valeurs  $a$  et  $c$  transparaissent toujours à travers les données statistiques.

Si nous acceptons de noter ces paramètres par des symboles appropriés aux nombres flous, nous noterions le taux de natalité par  $\tilde{\lambda}_n$  et celui de mortalité par  $\tilde{\mu}_n$ . En terminologie de files d'attente markoviennes simples, ces paramètres représentent respectivement le taux d'arrivées et le taux de service (ou taux de départ).

Il est pratiquement difficile d'étudier une telle file par la méthodologie classique qui a toujours appliqué l'arithmétique ordinaire à ces paramètres ; car sinon on devrait appliquer cette arithmétique de manière interminable pour chaque valeur possible autour de 10. Par conséquent, une nouvelle méthodologie s'impose, qui prend en compte toutes ces valeurs mal connues à

la fois ; sans toutefois perdre de vue que la considération d'après laquelle tous les processus en jeu sont i.i.d. demeure.

Parmi les modèles mathématiques d'analyse d'une telle file, la méthode des PNLN se serait avérée plus générale. Cette méthode applique simultanément deux types d'arithmétiques pour déterminer les différentes mesures de performance d'une file d'attente floue : l'arithmétique basée sur le principe d'extension de *Zadeh* et l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles. Comme ces différentes mesures sont des fonctions de ces paramètres en modèles classiques, leurs correspondantes en modèles flous sont des fonctions des variables floues, dont les résultantes sont également des nombres flous.

### 3.3.2 Calcul des performances d'une file d'attente floue par la méthode des alpha-coupes assouplie

Comme nous venons de le signifier à la fin de la sous-section précédente, la méthode des PNLN est celle qui, dans beaucoup de cas, a permis aux chercheurs du domaine, de calculer avec succès les mesures de performance de files d'attente floues de différentes formes. Par cette méthode, les mesures de performance de plusieurs modèles de files d'attente, allant de deux à cinq variables floues, ont été obtenues par différents auteurs tels que [159], [89], [161], [189], [125] et [157].

Pour bien comprendre la nouvelle méthode que nous voulons introduire, remarquons avant tout que physiquement parlant, il n'y a plus de différence entre une file d'attente classique et une file d'attente floue. La seule différence entre ces deux ne réside que dans les informations qui les accompagnent. Pour la première, l'information est précise ; tandis que pour la deuxième, elle est imprécise. Ainsi, une même file d'attente peut être traitée suivant ces deux approches selon les informations disponibles.

#### 3.3.2.1 Procédé de la méthode des alpha-coupes assouplie

Supposons que nous ayons une file d'attente floue dont les paramètres sont des nombres flous  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$  ; et que la mesure de performance que nous voulons calculer soit désignée par  $\tilde{\psi}$ . Supposons ensuite qu'en modèle classique, cette mesure et ces paramètres soient notés respectivement par  $\psi$  et  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

La formule de  $\psi$  en modèle classique est souvent donnée par

$$\psi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (3.1)$$

où  $f$  est une fonction à  $n$  variables réelles définie à l'aide des opérations fondamentales " $+$ ", " $-$ ", " $\times$ " et " $\div$ " dans  $\mathbb{R}$ ; tandis qu'en modèle flou, cette même formule s'écrit :

$$\tilde{\psi} = \tilde{f}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n), \quad (3.2)$$

où  $\tilde{f}$  est fonction à  $n$  variables floues; définie à l'aide des opérations " $\oplus$ ", " $\ominus$ ", " $\odot$ " et " $\oslash$ " dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , où  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  représente l'ensemble des nombres flous.

Sachant que les deux types d'arithmétiques floues utilisées par l'approche des PNLp sont compatibles (cf. sous-section 1.4.2, p. 29), et après observation attentive de plusieurs travaux portant sur cette approche, nous sommes parvenus à dégager le procédé suivant qui permet de calculer n'importe quelle mesure de performance  $\tilde{\psi}$  (cf. [131]) :

1° Déterminer d'abord l'expression générale de la coupe de niveau  $\alpha$  de  $\tilde{\psi}$  en utilisant la proposition 1.4 vue au 1er chapitre, p. 35. Cette coupe exige que l'on détermine les coupes de niveau  $\alpha$  des nombres flous  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$ ; notées respectivement par :  $\tilde{\xi}_{1\alpha}, \tilde{\xi}_{2\alpha}, \dots, \tilde{\xi}_{n\alpha}$ . Dans ce cas, l'égalité (3.2) devient :

$$\tilde{\psi}_\alpha = \tilde{f}(\tilde{\xi}_{1\alpha}, \tilde{\xi}_{2\alpha}, \dots, \tilde{\xi}_{n\alpha}) \quad (3.3)$$

2° Dans (3.3), chaque  $\tilde{\xi}_{i\alpha}$  est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  dont les bornes sont des fonctions réelles de variable  $\alpha$ . En d'autres mots, chaque  $\tilde{\xi}_{i\alpha}$  s'écrit :

$$\tilde{\xi}_{i\alpha} = [\varphi_i(\alpha), \omega_i(\alpha)]; \quad (3.4)$$

où  $\varphi_i$  et  $\omega_i$  sont des fonctions réelles de variable  $\alpha$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Porter ainsi (3.4) dans (3.3) pour avoir :

$$\tilde{\psi}_\alpha = \tilde{f}([\varphi_1(\alpha), \omega_1(\alpha)], [\varphi_2(\alpha), \omega_2(\alpha)], \dots, [\varphi_n(\alpha), \omega_n(\alpha)]) \quad (3.5)$$

3° Effectuer les opérations arithmétiques contenues dans (3.5) par l'utilisation de "l'arithmétique des intervalles" vue au premier chapitre, pp. 35 - 37. Ces opérations nous contraignent à résoudre au moins deux programmes non linéaires paramétriques (PNLPs) pour chaque multiplication et chaque division des intervalles présentes dans (3.5).

4° La coupe finale obtenue est de la forme :

$$\tilde{\psi}_\alpha = [\tilde{\psi}^L(\alpha), \tilde{\psi}^U(\alpha)]; \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.6)$$

où  $\tilde{\psi}^L$  et  $\tilde{\psi}^U$  sont des fonctions réelles de variable  $\alpha$ . On a trouvé ainsi la coupe de niveau  $\alpha$  recherchée tout au long de ce procédé. Ce qui veut dire que la mesure de performance  $\tilde{\psi}$  est un nombre flou, dont l'expression générale de la coupe de niveau  $\alpha$  est celle trouvée en (3.6). L'essentiel à retenir ici est que : d'une file d'attente floue caractérisée par une mesure floue en (3.2), la méthode des alpha-coupes assouplie nous a amené à des files d'attente classiques dont les mesures non floues sont en (3.6). Ainsi, tout comme la méthode des PNL, celle des alpha-coupes assouplie transforme aussi une FAF en une famille des FAC en utilisant l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles, pour laquelle presque tous les calculs sont non flous.

5° Fuzzifier le résultat trouvé à l'équation (3.6) par reconstruction de la fonction d'appartenance de  $\tilde{\psi}$ . Cette reconstruction se fait par usage de la remarque 1.2 donnée au premier chapitre, p. 19. Cette fonction est définie par les réciproques de fonctions  $\tilde{\psi}^L$  et  $\tilde{\psi}^U$  de l'alpha-coupe en (3.6) :

$$\eta_{\tilde{\psi}}(x) = \begin{cases} \left(\tilde{\psi}^L\right)^{-1}(x) & \text{si } \tilde{\psi}^L(0) \leq x \leq \tilde{\psi}^L(1) \\ \left(\tilde{\psi}^U\right)^{-1}(x) & \text{si } \tilde{\psi}^U(1) < x \leq \tilde{\psi}^U(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

6° L'alpha-coupe de  $\tilde{\psi}$  en (3.6) nous donne le support et la valeur modale du nombre flou  $\tilde{\psi}$ . Le support est la coupe de niveau zero notée

$$\tilde{\psi}_0 = ]\tilde{\psi}^L(0), \tilde{\psi}^U(0)[,$$

tandis que la valeur modale est la valeur réelle commune des fonctions  $\tilde{\psi}^L(\alpha)$  et  $\tilde{\psi}^U(\alpha)$ , obtenue pour  $\alpha = 1$  (cas des nombres flous uni-modaux). En cas des nombres flous multi-modaux, le noyau est un intervalle réel fermé.

### 3.3.2.2 Interprétation des résultats

Les deux bornes  $\tilde{\psi}^L(0)$  et  $\tilde{\psi}^U(0)$  du support indiquent deux nombres réels entre lesquels la valeur réelle de la mesure recherchée est approximativement comprise. Cette mesure ne peut excéder  $\tilde{\psi}^U(0)$  ni aller en deçà de  $\tilde{\psi}^L(0)$ . La valeur modale  $\tilde{\psi}^L(1) = \tilde{\psi}^U(1)$  est la valeur la plus possible de cette me-



sure.

En vue d'expliciter le processus de la méthode que nous venons d'exposer, montrons à la section suivante, comment celle-ci s'applique sur un problème concret du domaine d'Informatique, tiré de [159].

## 3.4 Exemple d'application de la méthode des alpha-coupes assouplie

### 3.4.1 Problème

Dans un réseau de commutation de paquets, nous avons considéré un réseau informatique dans lequel il existe un groupe d'ordinateurs hôtes, connectés aux processeurs de messages d'interface. Les messages arrivent sur l'ordinateur hôte suivant un processus de Poisson. Si l'ordinateur hôte souhaite transmettre le message à un autre ordinateur hôte, il doit envoyer le message et l'adresse finale au processeur auquel il est associé. Si le processeur est libre, le message est accepté. Autrement, le message revient à l'ordinateur hôte et est stocké dans une mémoire tampon pour être transmis après un certain temps plus tard. La mémoire tampon de l'ordinateur hôte, le processeur de messages et la politique de transmission ; correspondent respectivement à l'orbite, au serveur et à la discipline de rappel en terminologie de files d'attente. Préoccupé par l'efficacité du système, le gestionnaire veut obtenir les caractéristiques du système. On suppose que le taux d'arrivée de messages vers le système informatique noté  $\tilde{\lambda}$  est d'environ 16 par heure, le taux de rappel de messages dans la mémoire tampon noté  $\tilde{\theta}$  est d'environ 8 par heure et le taux de traitement de messages dans le système noté  $\tilde{\mu}$  est d'environ 21 par heure. On signale par ailleurs que ces trois nombres flous sont triangulaires et sont donnés respectivement par :

$$\tilde{\lambda} = (15/16/18),$$

$$\tilde{\theta} = (1/8/22),$$

$$\tilde{\mu} = (19/21/22).$$

### 3.4.2 Solution

En analysant le problème, nous nous rendons compte qu'il s'agit d'une file d'attente floue markovienne avec orbite à clients patients. Les caractéristiques d'une telle file sont d'après [77], [19], [198], [63], [4] et [7] :

- le nombre moyen de clients dans le système noté  $N_s$ ,
- le temps moyen de séjour d'un client dans le système noté  $T_s$ ,
- le nombre moyen de clients dans l'orbite noté  $N_o$ ,
- le temps moyen de séjour d'un client dans l'orbite noté  $T_o$ .

En modèle classique, *Bolch et cie* [19] pp 300-302 et *Gross et cie* [77] p. 162 donnent les formules de toutes ces caractéristiques au cas où  $\lambda$ ,  $\theta$  et  $\mu$  désigneraient respectivement, le taux d'arrivée, le taux de rappel en orbite et le taux de service pour une file  $M/M/1 - R$  (notation d'une file d'attente  $M/M/1$  avec orbite) comme suit :

$$N_s = f_1(\lambda, \theta, \mu) = \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) = \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\theta(\mu - \lambda)} \quad (3.8)$$

$$T_s = f_2(\lambda, \theta, \mu) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \rho} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) = \frac{\lambda + \theta}{\theta(\mu - \lambda)} \quad (3.9)$$

$$N_o = f_3(\lambda, \theta, \mu) = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \left(1 + \frac{\mu}{\theta}\right) = \frac{\lambda^2(\mu + \theta)}{\theta\mu(\mu - \lambda)} \quad (3.10)$$

$$T_o = f_4(\lambda, \theta, \mu) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \left(1 + \frac{\mu}{\theta}\right) = \frac{\lambda(\mu + \theta)}{\theta\mu(\mu - \lambda)} \quad (3.11)$$

Remarquons que lorsque  $\theta$  tend vers l'infini, le client ne passe pas beaucoup de temps dans l'orbite ; la file se comporte exactement comme si elle était une file markovienne standard  $M/M/1$  dont les caractéristiques sont bien connues. Dans ce cas,  $N_s$  et  $T_s$  tendent respectivement vers les quantités  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$  et  $\frac{1}{\mu - \lambda}$  qui caractérisent ce modèle en régime permanent.

En modèle flou où  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\mu}$  sont des variables floues, ces mesures deviennent des nombres flous  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$  donnés par :

$$\tilde{N}_s = \tilde{f}_1(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} + \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.12)$$

$$\tilde{T}_s = \tilde{f}_2(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.13)$$

$$\tilde{N}_o = \tilde{f}_3(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda}^2(\tilde{\mu} + \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.14)$$

et

$$\tilde{T}_o = \tilde{f}_4(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{\mu} + \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.15)$$

A ce niveau, on souhaite que  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\mu}$  soient des nombres flous triangulaires ou trapézoïdaux pour lesquels l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles est manuellement applicable.

Pour déterminer les nombres  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$  définis en (3.12), (3.13), (3.14) et (3.15), la méthode des alpha-coupes assouplie passe par la détermination des coupes de niveau  $\alpha$  de ces nombres. Ces dernières sont des expressions classiques, pour lesquelles il est facile d'utiliser toutes les techniques de calculs non flous. Plus explicitement, pour trouver  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$ , il suffit de :

1° Transformer les 4 égalités précédentes en  $\alpha$  - coupes par application de la proposition 1.4, p. 35. Celles-ci deviennent :

$$(\tilde{N}_s)_\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_\alpha(\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \quad (3.16)$$

$$(\tilde{T}_s)_\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha}{\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \quad (3.17)$$

$$(\tilde{N}_o)_\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_\alpha^2(\tilde{\mu}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\mu}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \quad (3.18)$$

$$(\tilde{T}_o)_\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\mu}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \quad (3.19)$$

2° Calculer les  $\alpha$  - coupes  $\tilde{\lambda}_\alpha$ ,  $\tilde{\theta}_\alpha$  et  $\tilde{\mu}_\alpha$ , qui sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

3° Remplacer ces  $\alpha$  - coupes dans (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) et appliquer les formules de (1.54) à (1.57) de l'arithmétique des intervalles vues au premier chapitre. Les résultats seront des intervalles de  $\mathbb{R}$ , mais dont les bornes sont des fonctions réelles de variable  $\alpha$ . Cette étape requiert la résolution des programmes non linéaires paramétriques (PNLPs) provenant des produits ou des quotients de deux intervalles. Pour ce cas précis, nous devrions en résoudre 28, dont 6 pour  $(\tilde{N}_s)_\alpha$ , 4 pour  $(\tilde{T}_s)_\alpha$ , 10 pour  $(\tilde{N}_o)_\alpha$  et 8

pour  $(\tilde{T}_o)_\alpha$ .

4° Après avoir obtenu les  $\alpha$  – coupes de  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$ , il y a moyen de reconstruire les fonctions d'appartenance de ces nombres flous en appliquant la remarque 1.2, p. 19. Pour cela, un petit tableau reprenant les bornes trouvées à l'étape précédente peut être dressé pour des valeurs de  $\alpha$  allant de 0 à 1 afin d'avoir une idée sur l'allure des courbes représentatives de fonctions d'appartenance obtenues. La représentation graphique de ces fonctions d'appartenance détermine les solutions au problème.

### I. Première étape : Calculs des alpha-coupes $\tilde{\lambda}_\alpha$ , $\tilde{\theta}_\alpha$ et $\tilde{\mu}_\alpha$

Les différents calculs donnent les coupes suivantes d'après le corollaire 1.1, p. 41 :

$$\tilde{\lambda}_\alpha = [\alpha + 15, -2\alpha + 18],$$

$$\tilde{\theta}_\alpha = [7\alpha + 1, -14\alpha + 22]$$

et

$$\tilde{\mu}_\alpha = [2\alpha + 19, -\alpha + 22].$$

**II. Deuxième étape :** Après avoir introduit ces coupes dans les formules (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), on applique les formules de (1.54) à (1.57) de l'arithmétique des intervalles afin d'obtenir les alpha-coupes  $(\tilde{N}_s)_\alpha$ ,  $(\tilde{T}_s)_\alpha$ ,  $(\tilde{N}_o)_\alpha$  et  $(\tilde{T}_o)_\alpha$  de la manière suivante :

#### (i) Calcul de $(\tilde{N}_s)_\alpha$

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_s)_\alpha &= \frac{\tilde{\lambda}_\alpha(\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \\ &= \frac{[\alpha + 15, -2\alpha + 18][\alpha + 15 + 7\alpha + 1, -2\alpha + 18 - 14\alpha + 22]}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][2\alpha + 19 + 2\alpha - 18, -\alpha + 22 - \alpha - 15]} \\ &= \frac{[\alpha + 15, -2\alpha + 18][8\alpha + 16, -16\alpha + 40]}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][4\alpha + 1, -2\alpha + 7]} \\ &= \frac{[\min F(\alpha), \max F(\alpha)]}{[\min G(\alpha), \max G(\alpha)]} \end{aligned}$$

où  $\min F(\alpha)$ ,  $\max F(\alpha)$ ,  $\min G(\alpha)$  et  $\max G(\alpha)$  se déterminent en résolvant les quatre PNLPS suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min F(\alpha) & = & ? \\ F(\alpha) & = & \{f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), f_4(\alpha)\} \\ f_1(\alpha) & = & (\alpha + 15)(8\alpha + 16) \\ f_2(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-16\alpha + 40) \\ f_3(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(8\alpha + 16) \\ f_4(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40) \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max F(\alpha) & = & ? \\ F(\alpha) & = & \{f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), f_4(\alpha)\} \\ f_1(\alpha) & = & (\alpha + 15)(8\alpha + 16) \\ f_2(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-16\alpha + 40) \\ f_3(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(8\alpha + 16) \\ f_4(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40) \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min G(\alpha) & = & ? \\ G(\alpha) & = & \{g_1(\alpha), g_2(\alpha), g_3(\alpha), g_4(\alpha)\} \\ g_1(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ g_2(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ g_3(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ g_4(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max G(\alpha) & = & ? \\ G(\alpha) & = & \{g_1(\alpha), g_2(\alpha), g_3(\alpha), g_4(\alpha)\} \\ g_1(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ g_2(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ g_3(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ g_4(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

La résolution de ces PNLPS donne

$$\min F(\alpha) = f_1(\alpha),$$

$$\max F(\alpha) = f_4(\alpha),$$

$$\min G(\alpha) = g_1(\alpha)$$

et

$$\max G(\alpha) = g_4(\alpha)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_s)_\alpha &= \frac{[(\alpha + 15)(8\alpha + 16), (-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)]}{[(7\alpha + 1)(4\alpha + 1), (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)]} \\ &= [\min H(\alpha), \max H(\alpha)] \end{aligned}$$

où  $\min H(\alpha)$ ,  $\max H(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min H(\alpha) &= ? \\ H(\alpha) &= \{h_1(\alpha), h_2(\alpha), h_3(\alpha), h_4(\alpha)\} \\ h_1(\alpha) &= \frac{(\alpha + 15)(8\alpha + 16)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ h_2(\alpha) &= \frac{(\alpha + 15)(8\alpha + 16)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ h_3(\alpha) &= \frac{(-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ h_4(\alpha) &= \frac{(-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max H(\alpha) &= ? \\ H(\alpha) &= \{h_1(\alpha), h_2(\alpha), h_3(\alpha), h_4(\alpha)\} \\ h_1(\alpha) &= \frac{(\alpha + 15)(8\alpha + 16)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ h_2(\alpha) &= \frac{(\alpha + 15)(8\alpha + 16)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ h_3(\alpha) &= \frac{(-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ h_4(\alpha) &= \frac{(-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

La résolution de ces deux PNLPS liés à  $H(\alpha)$  donne :

$$\min H(\alpha) = h_2(\alpha)$$

et

$$\max H(\alpha) = h_3(\alpha).$$

Finalement,

$$(\tilde{N}_s)_\alpha = \left[ \frac{(\alpha + 15)(8\alpha + 16)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)}, \frac{(-2\alpha + 18)(-16\alpha + 40)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \right] \quad (3.20)$$

**(ii) Calcul de  $(\tilde{T}_s)_\alpha$**

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_s)_\alpha &= \frac{\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha}{\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \\ &= \frac{[\alpha + 15 + 7\alpha + 1, -2\alpha + 18 - 14\alpha + 22]}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][2\alpha + 19 + 2\alpha - 18, -\alpha + 22 - \alpha - 15]} \\ &= \frac{[8\alpha + 16, -16\alpha + 40]}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][4\alpha + 1, -2\alpha + 7]} \\ &= \frac{[8\alpha + 16, -16\alpha + 40]}{[\min D(\alpha), \max D(\alpha)]}; \end{aligned}$$

où  $\min D(\alpha)$  et  $\max D(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPS suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min D(\alpha) & = & ? \\ D(\alpha) & = & \{d_1(\alpha), d_2(\alpha), d_3(\alpha), d_4(\alpha)\} \\ d_1(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ d_2(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ d_3(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ d_4(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max D(\alpha) & = & ? \\ D(\alpha) & = & \{d_1(\alpha), d_2(\alpha), d_3(\alpha), d_4(\alpha)\} \\ d_1(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ d_2(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ d_3(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ d_4(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

La résolution de ces deux PNLPs donne

$$\min D(\alpha) = d_1(\alpha)$$

et

$$\max D(\alpha) = d_4(\alpha)$$

.

D'où

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_s)_\alpha &= \frac{[8\alpha + 16, -16\alpha + 40]}{[(7\alpha + 1)(4\alpha + 1), (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)]} \\ &= [\min E(\alpha), \max E(\alpha)] \end{aligned}$$

où  $\min E(\alpha)$  et  $\max E(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min E(\alpha) & = & ? \\ E(\alpha) & = & \{e_1(\alpha), e_2(\alpha), e_3(\alpha), e_4(\alpha)\} \\ e_1(\alpha) & = & \frac{8\alpha + 16}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ e_2(\alpha) & = & \frac{8\alpha + 16}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ e_3(\alpha) & = & \frac{-16\alpha + 40}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ e_4(\alpha) & = & \frac{-16\alpha + 40}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et



$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max E(\alpha) & = & ? \\ E(\alpha) & = & \{e_1(\alpha), e_2(\alpha), e_3(\alpha), e_4(\alpha)\} \\ e_1(\alpha) & = & \frac{8\alpha + 16}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ e_2(\alpha) & = & \frac{8\alpha + 16}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ e_3(\alpha) & = & \frac{-16\alpha + 40}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \\ e_4(\alpha) & = & \frac{-16\alpha + 40}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

La résolution de ces PNLPs liés à  $E(\alpha)$  donne

$$\min E(\alpha) = e_2(\alpha)$$

et

$$\max E(\alpha) = e_3(\alpha)$$

Finalement,

$$(\tilde{T}_s)_\alpha = \left[ \frac{8\alpha + 16}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)}, \frac{-16\alpha + 40}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)} \right] \quad (3.21)$$

### (iii) Calcul de $(\tilde{N}_o)_\alpha$

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_o)_\alpha &= \frac{\tilde{\lambda}_\alpha^2(\tilde{\mu}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha \tilde{\mu}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \\ &= \frac{[\alpha + 15, -2\alpha + 18]^2([2\alpha + 19, -\alpha + 22] + [7\alpha + 1, -14\alpha + 22])}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][2\alpha + 19, -\alpha + 22]([2\alpha + 19, -\alpha + 22] - [\alpha + 15, -2\alpha + 18])} \\ &= \frac{[\min F_1(\alpha), \max F_1(\alpha)][9\alpha + 20, -15\alpha + 44]}{[\min G_1(\alpha), \max G_1(\alpha)][4\alpha + 1, -2\alpha + 7]} \end{aligned}$$

où  $\min F_1(\alpha)$ ,  $\max F_1(\alpha)$ ,  $\min G_1(\alpha)$  et  $\max G_1(\alpha)$  se déterminent en résolvant les quatre PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min F_1(\alpha) & = & ? \\ F_1(\alpha) & = & \{f_{11}(\alpha), f_{12}(\alpha), f_{13}(\alpha), f_{14}(\alpha)\} \\ f_{11}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(\alpha + 15) \\ f_{12}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-2\alpha + 18) \\ f_{13}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(\alpha + 15) \\ f_{14}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max F_1(\alpha) & = & ? \\ F_1(\alpha) & = & \{f_{11}(\alpha), f_{12}(\alpha), f_{13}(\alpha), f_{14}(\alpha)\} \\ f_{11}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(\alpha + 15) \\ f_{12}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-2\alpha + 18) \\ f_{13}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(\alpha + 15) \\ f_{14}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min G_1(\alpha) & = & ? \\ G_1(\alpha) & = & \{g_{11}(\alpha), g_{12}(\alpha), g_{13}(\alpha), g_{14}(\alpha)\} \\ g_{11}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(2\alpha + 19) \\ g_{12}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-\alpha + 22) \\ g_{13}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(2\alpha + 19) \\ g_{14}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max G_1(\alpha) & = & ? \\ G_1(\alpha) & = & \{g_{11}(\alpha), g_{12}(\alpha), g_{13}(\alpha), g_{14}(\alpha)\} \\ g_{11}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(2\alpha + 19) \\ g_{12}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-\alpha + 22) \\ g_{13}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(2\alpha + 19) \\ g_{14}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

La résolution de ces PNLPs liés à  $F_1(\alpha)$  et  $G_1(\alpha)$  donne

$$\min F_1(\alpha) = f_{11}(\alpha),$$

$$\max F_1(\alpha) = f_{14}(\alpha),$$

,

$$\min G_1(\alpha) = g_{11}(\alpha),$$

$$\max G_1(\alpha) = g_{14}(\alpha),$$

Dès lors,  $(\tilde{N}_o)_\alpha$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_o)_\alpha &= \frac{[(\alpha + 15)(\alpha + 15), (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)][9\alpha + 20, -15\alpha + 44]}{[(7\alpha + 1)(2\alpha + 19), (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)][4\alpha + 1, -2\alpha + 7]} \\ &= \frac{[\min F_2(\alpha), \max F_2(\alpha)]}{[\min G_2(\alpha), \max G_2(\alpha)]} \end{aligned}$$

où  $\min F_2(\alpha)$ ,  $\max F_2(\alpha)$ ,  $\min G_2(\alpha)$  et  $\max G_2(\alpha)$  se déterminent en résolvant les quatre PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min F_2(\alpha) &= ? \\ F_2(\alpha) &= \{f_{21}(\alpha), f_{22}(\alpha), f_{23}(\alpha), f_{24}(\alpha)\} \\ f_{21}(\alpha) &= (\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ f_{22}(\alpha) &= (\alpha + 15)(\alpha + 15)(-15\alpha + 44) \\ f_{23}(\alpha) &= (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(9\alpha + 20) \\ f_{24}(\alpha) &= (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max F_2(\alpha) &= ? \\ F_2(\alpha) &= \{f_{21}(\alpha), f_{22}(\alpha), f_{23}(\alpha), f_{24}(\alpha)\} \\ f_{21}(\alpha) &= (\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ f_{22}(\alpha) &= (\alpha + 15)(\alpha + 15)(-15\alpha + 44) \\ f_{23}(\alpha) &= (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(9\alpha + 20) \\ f_{24}(\alpha) &= (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min G_2(\alpha) &= ? \\ G_2(\alpha) &= \{g_{21}(\alpha), g_{22}(\alpha), g_{23}(\alpha), g_{24}(\alpha)\} \\ g_{21}(\alpha) &= (7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1) \\ g_{22}(\alpha) &= (7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(-2\alpha + 7) \\ g_{23}(\alpha) &= (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ g_{24}(\alpha) &= (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max G_2(\alpha) & = & ? \\ G_2(\alpha) & = & \{g_{21}(\alpha), g_{22}(\alpha), g_{23}(\alpha), g_{24}(\alpha)\} \\ g_{21}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1) \\ g_{22}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(-2\alpha + 7) \\ g_{23}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ g_{24}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

Après résolution de ces PNLPs, on obtient :

$$\begin{aligned} \min F_2(\alpha) &= f_{21}(\alpha) = (\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ \max F_2(\alpha) &= f_{24}(\alpha) = (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ \min G_2(\alpha) &= g_{21}(\alpha) = (7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1) \\ \max G_2(\alpha) &= g_{24}(\alpha) = (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \end{aligned}$$

$(\tilde{N}_o)_\alpha$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_o)_\alpha &= \frac{[(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20), (-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)]}{[(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1), (-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)]} \\ &= [\min F_3(\alpha), \max F_3(\alpha)] \end{aligned}$$

où  $\min F_3(\alpha)$  et  $\max F_3(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min F_3(\alpha) & = & ? \\ F_3(\alpha) & = & \{f_{31}(\alpha), f_{32}(\alpha), f_{33}(\alpha), f_{34}(\alpha)\} \\ f_{31}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1)} \\ f_{32}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ f_{33}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1)} \\ f_{34}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max F_3(\alpha) & = & ? \\ F_3(\alpha) & = & \{f_{31}(\alpha), f_{32}(\alpha), f_{33}(\alpha), f_{34}(\alpha)\} \\ f_{31}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1)} \\ f_{32}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ f_{33}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1)} \\ f_{34}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

Après résolution de ces deux PNLPs,

$$\begin{aligned} \min F_3(\alpha) &= f_{32}(\alpha) = \frac{(\alpha + 15)(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-\alpha + 22)(-2\alpha + 7)} \\ \max F_3(\alpha) &= f_{33}(\alpha) = \frac{(-2\alpha + 18)(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(2\alpha + 19)(4\alpha + 1)} \end{aligned}$$

D'où  $(\tilde{N}_o)_\alpha$  s'écrit :

$$(\tilde{N}_o)_\alpha = [f_{32}(\alpha), f_{33}(\alpha)] \quad (3.22)$$

#### (iv) Calcul de $(\tilde{T}_o)_\alpha$

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_o)_\alpha &= \frac{\tilde{\lambda}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha + \tilde{\theta}_\alpha)}{\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\mu}_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha)} \\ &= \frac{[\alpha + 15, -2\alpha + 18]([2\alpha + 19, -\alpha + 22] + [7\alpha + 1, -14\alpha + 22])}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][2\alpha + 19, -\alpha + 22]([2\alpha + 19, -\alpha + 22] - [\alpha + 15, -2\alpha + 18])} \\ &= \frac{[\alpha + 15, -2\alpha + 18][9\alpha + 20, -15\alpha + 44]}{[7\alpha + 1, -14\alpha + 22][4\alpha + 1, -2\alpha + 7][2\alpha + 19, -\alpha + 22]} \\ &= \frac{[\min H_1(\alpha), \max H_1(\alpha)]}{[\min H_2(\alpha), \max H_2(\alpha)][2\alpha + 19, -\alpha + 22]} \end{aligned}$$

où  $\min H_1(\alpha)$ ,  $\max H_1(\alpha)$ ,  $\min H_2(\alpha)$  et  $\max H_2(\alpha)$  se déterminent en résolvant les quatre PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min H_1(\alpha) & = & ? \\ H_1(\alpha) & = & \{h_{11}(\alpha), h_{12}(\alpha), h_{13}(\alpha), h_{14}(\alpha)\} \\ h_{11}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ h_{12}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-15\alpha + 44) \\ h_{13}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(9\alpha + 20) \\ h_{14}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max H_1(\alpha) & = & ? \\ H_1(\alpha) & = & \{h_{11}(\alpha), h_{12}(\alpha), h_{13}(\alpha), h_{14}(\alpha)\} \\ h_{11}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ h_{12}(\alpha) & = & (\alpha + 15)(-15\alpha + 44) \\ h_{13}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(9\alpha + 20) \\ h_{14}(\alpha) & = & (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min H_2(\alpha) & = & ? \\ H_2(\alpha) & = & \{h_{21}(\alpha), h_{22}(\alpha), h_{23}(\alpha), h_{24}(\alpha)\} \\ h_{21}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ h_{22}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ h_{23}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ h_{24}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max H_2(\alpha) & = & ? \\ H_2(\alpha) & = & \{h_{21}(\alpha), h_{22}(\alpha), h_{23}(\alpha), h_{24}(\alpha)\} \\ h_{21}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ h_{22}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(-2\alpha + 7) \\ h_{23}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(4\alpha + 1) \\ h_{24}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

La résolution de ces PNLs liés à  $H_1(\alpha)$  et  $H_2(\alpha)$  donne

$$\begin{aligned} \min H_1(\alpha) &= h_{11}(\alpha) = (\alpha + 15)(9\alpha + 20) \\ \max H_1(\alpha) &= h_{14}(\alpha) = (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44) \\ \min H_2(\alpha) &= h_{21}(\alpha) = (7\alpha + 1)(4\alpha + 1) \\ \max H_2(\alpha) &= h_{24}(\alpha) = (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7) \end{aligned}$$

Dès lors,  $(\tilde{T}_o)_\alpha$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_o)_\alpha &= \frac{[(\alpha + 15)(9\alpha + 20), (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)]}{[(7\alpha + 1)(4\alpha + 1), (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)][2\alpha + 19, -\alpha + 22]} \\ &= \frac{[(\alpha + 15)(9\alpha + 20), (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)]}{[\min H_3(\alpha), \max H_3(\alpha)]} \end{aligned}$$

où  $\min H_3(\alpha)$  et  $\max H_3(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min H_3(\alpha) & = & ? \\ H_3(\alpha) & = & \{h_{31}(\alpha), h_{32}(\alpha), h_{33}(\alpha), h_{34}(\alpha)\} \\ h_{31}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19) \\ h_{32}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(-\alpha + 22) \\ h_{33}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(2\alpha + 19) \\ h_{34}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max H_3(\alpha) & = & ? \\ H_3(\alpha) & = & \{h_{31}(\alpha), h_{32}(\alpha), h_{33}(\alpha), h_{34}(\alpha)\} \\ h_{31}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19) \\ h_{32}(\alpha) & = & (7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(-\alpha + 22) \\ h_{33}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(2\alpha + 19) \\ h_{34}(\alpha) & = & (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22) \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

Après résolution de ces deux PNLPs, on obtient

$$\begin{aligned} \min H_3(\alpha) &= h_{31}(\alpha) = (7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19) \\ \max H_3(\alpha) &= h_{34}(\alpha) = (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_o)_\alpha &= \frac{[(\alpha + 15)(9\alpha + 20), (-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)]}{[(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19), (-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)]} \\ &= [\min H_4(\alpha), \max H_4(\alpha)] \end{aligned}$$

où  $\min H_4(\alpha)$  et  $\max H_4(\alpha)$  se déterminent en résolvant les deux PNLPs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min H_4(\alpha) & = & ? \\ H_4(\alpha) & = & \{h_{41}(\alpha), h_{42}(\alpha), h_{43}(\alpha), h_{44}(\alpha)\} \\ h_{41}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19)} \\ h_{42}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)} \\ h_{43}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19)} \\ h_{44}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max H_4(\alpha) & = & ? \\ H_4(\alpha) & = & \{h_{41}(\alpha), h_{42}(\alpha), h_{43}(\alpha), h_{44}(\alpha)\} \\ h_{41}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19)} \\ h_{42}(\alpha) & = & \frac{(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)} \\ h_{43}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19)} \\ h_{44}(\alpha) & = & \frac{(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)} \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

La résolution de ces deux PNLPs donne :

$$\begin{aligned} \min H_4(\alpha) &= h_{42}(\alpha) = \frac{(\alpha + 15)(9\alpha + 20)}{(-14\alpha + 22)(-2\alpha + 7)(-\alpha + 22)} \\ \max H_4(\alpha) &= h_{43}(\alpha) = \frac{(-2\alpha + 18)(-15\alpha + 44)}{(7\alpha + 1)(4\alpha + 1)(2\alpha + 19)} \end{aligned}$$

D'où,

$$(\tilde{T}_o)_\alpha = [h_{42}(\alpha), h_{43}(\alpha)] \quad (3.23)$$

**III. Troisième et dernière étape :** Reconstruction des fonctions d'appartenance de  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$  à partir de leurs alpha-coupes trouvées

Les coupes fortes de niveau zéro en (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) nous donnent les supports de  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$  :

$$(\tilde{N}_s)_0 = \text{supp}(\tilde{N}_s) = ]1.558, 720[,$$

$$(\tilde{T}_s)_0 = \text{supp}(\tilde{T}_s) = ]0.103, 40[,$$

$$(\tilde{N}_o)_0 = \text{supp}(\tilde{N}_o) = ]1.328, 750[,$$



$$(\tilde{T}_o)_0 = \text{supp}(\tilde{T}_o) = ]0.088, 41.6[,$$

Pour représenter les fonctions d'appartenance de  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$  comme sur les figures 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 ci-dessous, on a besoin des bornes enregistrées sur les alpha-coupes comme l'indique la table 3.1 ci-dessous.

$\alpha$	$(\tilde{N}_s)_\alpha^L$	$(\tilde{N}_s)_\alpha^U$	$(\tilde{T}_s)_\alpha^L$	$(\tilde{T}_s)_\alpha^U$	$(\tilde{N}_o)_\alpha^L$	$(\tilde{N}_o)_\alpha^U$	$(\tilde{T}_o)_\alpha^L$	$(\tilde{T}_o)_\alpha^U$
0	1.55	720	0.10	40	1.32	750	0.08	41.60
0.1	1.81	287.19	0.11	16.13	1.55	294.68	0.10	16.55
0.2	2.11	149.92	0.13	8.51	1.82	151.53	0.11	8.6
0.3	2.47	89.8	0.16	5.16	2.14	89.46	0.14	5.47
0.4	2.90	58.49	0.19	3.40	2.54	57.46	0.16	3.34
0.5	3.44	40.29	0.22	2.37	3.04	39.06	0.19	2.29
0.6	4.11	28.88	0.26	1.71	3.66	27.66	0.23	1.64
0.7	4.96	21.32	0.31	1.28	4.04	20.18	0.28	1.21
0.8	6.06	16.09	0.38	0.98	5.38	15.07	0.34	0.91
0.9	7.54	12.35	0.47	0.76	6.85	11.46	0.43	0.70
1.0	9.60	9.60	0.60	0.60	8.83	8.83	0.55	0.55

TABLE 3.1 – Bornes des  $\alpha$ -coupes des temps d'attente et des nombres de messages  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Mais au lieu d'une telle table, on peut s'en passer en utilisant les égalités en (3.6) et (3.7) ci-haut, et on a :

**Pour la fonction d'appartenance de  $\tilde{N}_s$ , au regard de l'égalité (3.20) :**

$$\eta_{\tilde{N}_s}(x) = \begin{cases} h_2^{-1}(x) & \text{si } h_2(0) \leq x \leq h_2(1) \\ h_3^{-1}(x) & \text{si } h_3(1) < x \leq h_3(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\text{où } h_2(x) = \frac{(x+15)(8x+16)}{(-14x+22)(-2x+7)} \text{ et } h_3(x) = \frac{(-2x+18)(-16x+40)}{(7x+1)(4x+1)}$$

**Pour la fonction d'appartenance de  $\tilde{T}_s$ , au regard de l'égalité (3.21) :**

$$\eta_{\tilde{T}_s}(x) = \begin{cases} e_2^{-1}(x) & \text{si } e_2(0) \leq x \leq e_2(1) \\ e_3^{-1}(x) & \text{si } e_3(1) < x \leq e_3(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{où } e_2(x) = \frac{8x+16}{(-14x+22)(-2x+7)} \text{ et } e_3(x) = \frac{-16x+40}{(7x+1)(4x+1)}$$

Et ainsi de suite.

### 3.4.3 Résultats

- 1° En nous référant à la figure 3.2 représentant la fonction d'appartenance du nombre flou  $\tilde{N}_s$ , nous constatons que  $\text{supp}(\tilde{N}_s)$  est l'ensemble des réels compris approximativement entre 1.558 et 720. Cela veut dire que le nombre moyen de messages dans le système est compris approximativement entre 1 et 720. Ce nombre ne peut tomber en dessous de 1, ni aller au delà de 720. Sa valeur la plus possible est 9.

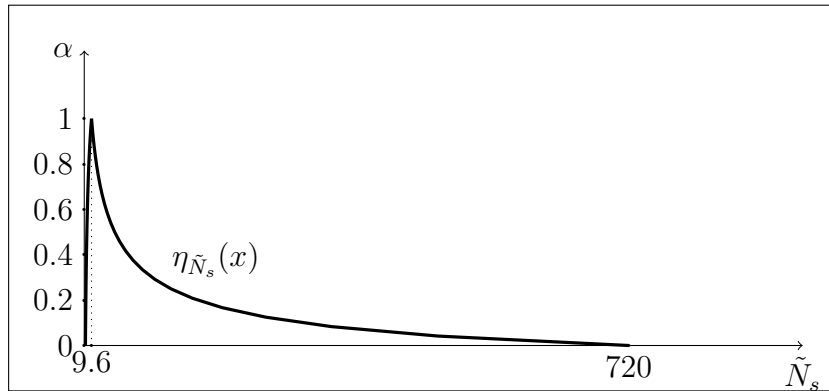


FIGURE 3.2 – Fonction d'appartenance du nombre de messages en attente dans le système.

- 2° De même, la figure 3.3 montre que le temps moyen d'attente d'un message dans le système varie approximativement entre 0.103 et 40 heures ; soit entre 6 et 2400 minutes. Ce temps ne peut excéder 2400 minutes, ni tomber en deçà de 6 minutes. Sa valeur la plus possible est 0.6 heure, soit 36 minutes.

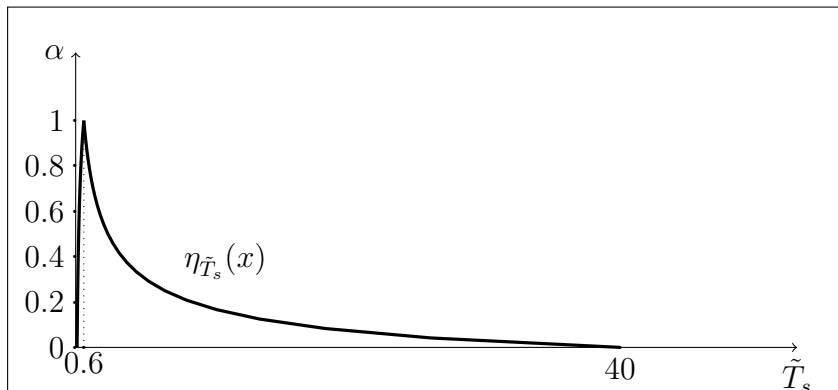


FIGURE 3.3 – Fonction d'appartenance du temps d'attente d'un message dans le système.

3° La figure 3.4 montre que le nombre moyen de messages dans la mémoire tampon est un nombre flou compris approximativement entre 1 et 750. La valeur la plus possible de ce nombre est 8.

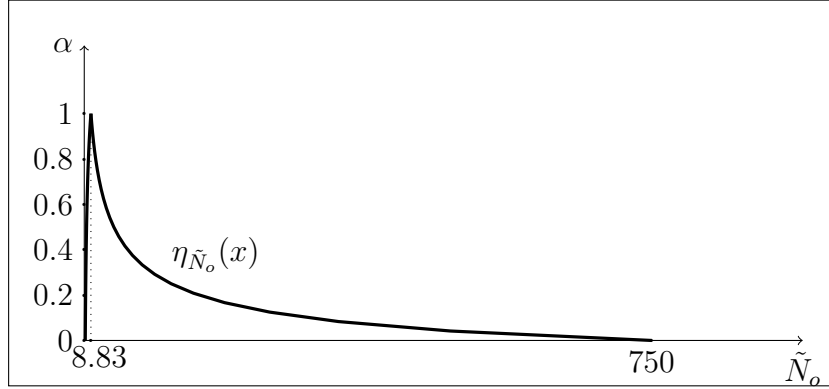


FIGURE 3.4 – Fonction d'appartenance du nombre de messages en attente dans la mémoire tampon.

4° Enfin, la figure 3.5 montre que le temps d'attente d'un message dans la mémoire tampon est approximativement compris entre 0.088 et 41.6 heures ; soit entre 5 et 2496 minutes. Sa valeur la plus possible est de 33 minutes.

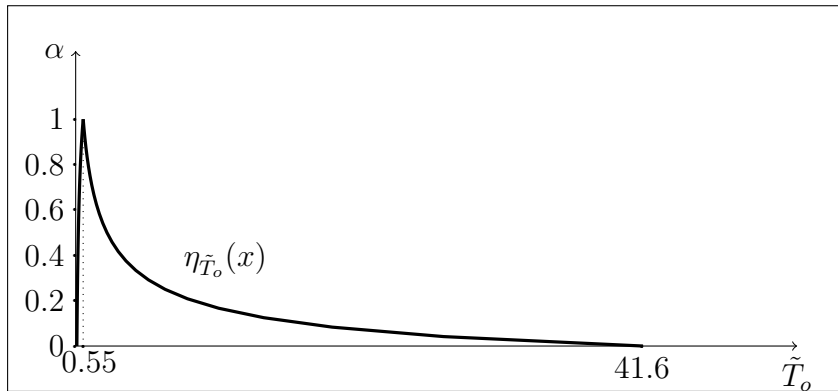


FIGURE 3.5 – Fonction d'appartenance du temps d'attente d'un message dans la mémoire tampon.

**Remarque(s) 3.1** Une façon de diminuer ce nombre de programmes d'optimisation consiste à exprimer quelques mesures de performance en fonction des autres. Par exemple, en exprimant  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{N}_s$  en fonction de  $\tilde{T}_o$  et  $\tilde{T}_s$  respectivement, les formules (3.13), (3.12), (3.15) et (3.14) s'écrivent de la façon suivante :

$$\tilde{T}_s = \tilde{f}_2(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.26)$$

$$\tilde{N}_s = \tilde{\lambda}\tilde{T}_o \quad (3.27)$$

$$\tilde{T}_o = \tilde{f}_4(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{\mu} + \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})} \quad (3.28)$$

et

$$\tilde{N}_o = \tilde{\lambda}\tilde{T}_s \quad (3.29)$$

Ainsi, ces formules comprimées permettent de réduire le nombre de PNLs à 16 au lieu de 28 si elles sont utilisées dans la résolution du problème qui vient d'être traité au cours de cette section.

**Remarque(s) 3.2** Si par exemple l'égalité (3.9) était la formule non simplifiée  $T_s = \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\lambda\theta(\mu - \lambda)}$  avec ( $\lambda \neq 0$ ), le temps d'attente de messages dans le système  $\tilde{T}_s$  aurait une toute petite modification. Son support serait  $\text{supp}(\tilde{T}_s) = ]0.086, 48[$  au lieu de  $\text{supp}(\tilde{T}_s) = ]0.103, 40[$  (cf. [133]), alors que sa valeur modale serait la même valeur 0.6. En d'autres termes, on dirait que l'on obtient presque le même nombre flou, mais pour lequel le support est un peu large. Ceci est dû au fait qu'un nombre flou n'est pas nécessairement simplifiable pour la multiplication dans  $F(\mathbb{R})$ . Ainsi, toute simplification de la formule classique réduit le support du résultat en modèle flou. En conséquence, pour des résultats plus crédibles, nous conseillons de ne pas simplifier les formules classiques avant d'appliquer l'arithmétique floue.

### 3.4.4 Avantages et inconvénients de la méthode des alpha-coupes assouplie

#### Avantages

- La méthode est conçue pour toute sorte des nombres flous,
- Les courbes de fonction d'appartenance ont des tracés exacts.

#### Inconvénients

- Très longue et difficile à appliquer si les paramètres flous de la file donnée ne sont pas triangulaires ou trapézoïdaux,
- Son arithmétique fait recours à la résolution de plusieurs programmes non linéaires paramétriques, susceptibles d'encombrer la résolution lorsqu'on dispose de plusieurs serveurs ou de plusieurs paramètres flous.

**Remarque(s) 3.3**

Pour des systèmes d'attente constitués de plusieurs serveurs ou de plusieurs paramètres flous, il est une nécessité d'introduire une nouvelle méthode de calcul. Ceci constitue une tâche à laquelle la section suivante s'attèle.

## **3.5 Mesures de performance d'une file d'attente floue par la méthode L-R**

Comme nous venons de l'annoncer vers la fin de la section précédente, au niveau de la remarque 3.3, l'idée d'introduire une nouvelle méthode de calcul des performances d'une file d'attente floue est motivée par l'abondance de PNLs à résoudre lorsqu'il s'agit d'évaluer les performances d'une file ayant plusieurs serveurs ou plusieurs paramètres. Ce sera le cas avec les réseaux de files d'attente floues (RFAF) que nous aborderons au chapitre suivant. Dans ce cas bien précis, c'est la multiplicité de serveurs dans un réseau, à laquelle est consécutive la multiplicité de paramètres et de programmes d'optimisation à résoudre, qui constitue la cause principale de la difficulté rencontrée par la méthode des alpha-coups assouplie.

### **3.5.1 Conceptualisation de la méthode L-R**

Puisque le nombre élevé de serveurs et consécutivement celui de programmes d'optimisations à résoudre sont identifiés comme des éléments principaux qui alourdissent les opérations de la méthode des alpha-coups assouplie sur les systèmes d'attente flous multi-serveurs, une analyse sommaire montre qu'il n'est pas possible de contourner le premier élément (nombre élevé de serveurs) ; mais que par contre, nous pouvons éviter ces innombrables optimisations en introduisant une autre forme d'arithmétique qui est l'arithmétique des nombres flous de type L-R.

En recourant à cette arithmétique, la première question qui nous est venue à l'esprit est comment celle-ci peut nous être utile, vu ses inconvénients énumérés aux remarques 1.9, p. 50 ; notamment ceux relatifs au(x) :

- résultats approximatifs faisant perdre certaines informations ;

- cadre plus restreint de nombres flous auxquels elle s'applique.

C'est ainsi qu'après une longue réflexion, nous avons abouti au raisonnement suivant :

- Devant le premier inconvénient, la deuxième de remarques 1.9 énoncée au premier chapitre, p. 50, nous rassure que si nous nous limitons à l'utilisation des formules des approximations sécantes sur les produits et les quotients, les calculs donnent les mêmes résultats que les 2 premières méthode en ce qui concerne les valeurs modales et les supports (cf. conclusion du chapitre 1). Cette exception accorde à cette arithmétique un nouveau crédit dans ce cadre bien précis car, la plupart des résultats de mesures de performance obtenus sur les files d'attente floues sont souvent exprimables en fonction des valeurs modales et des supports.
- Pour le deuxième inconvénient, nous avons été réconfortés d'un côté par le fait que la quasi-totalité des nombres flous utilisés pour illustrer ce thème dans la littérature sont, soit triangulaires, soit trapézoïdaux ; et de l'autre côté, par le fait que ces deux types de nombres flous constituent des sous-familles des nombres flous de type L-R.

Eu égard à ces deux éléments de taille, nous sommes parvenus à déduire que si l'on a besoin des résultats de mesures de performance exprimés en termes des valeurs modales et supports, *l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes* joue un rôle équivalent à celui de *l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles*. C'est cette raison qui nous a poussé à l'introduire dans ce cadre pour modéliser une file d'attente floue.

### 3.5.2 Description de la méthode Left-Right (méthode L-R)

Supposons que nous ayons une file d'attente floue dont les paramètres sont des nombres flous de même type L-R notés :  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$  ; et que la mesure de performance que nous voulons calculer soit désignée par  $\tilde{\psi}$ . Supposons ensuite qu'en modèle classique, cette mesure et ces paramètres soient notés respectivement par  $\psi$  et  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

La formule de  $\psi$  en modèle classique est souvent donnée par

$$\psi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (3.30)$$

où  $f$  est une fonction à  $n$  variables réelles définie à l'aide des opérations fondamentales " $+$ ", " $-$ ", " $\times$ " et " $\div$ " dans  $\mathbb{R}$ ; tandis qu'en modèle flou, cette même formule s'écrit :

$$\tilde{\psi} = \tilde{f}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n), \quad (3.31)$$

où  $\tilde{f}$  est fonction à  $n$  variables floues; définie à l'aide des opérations " $\oplus$ ", " $\ominus$ ", " $\odot$ " et " $\oslash$ " dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ .

Pour déterminer  $\tilde{\psi}$ , la *méthode L-R* procède comme suit :

### Procédé

- 1° Déterminer les écritures L-R de tous les paramètres flous, et les substituer dans (3.31).
- 2° Appliquer l'arithmétique des nombres flous de type L-R à l'expression trouvée à l'étape précédente. Dans ce cas, seules les formules choisies convenablement parmi les relations en (1.79), (1.80), (1.81) et (1.89) nous aident. En ce qui concerne les formules relatives à la multiplication et à la division, nous n'avons uniquement besoin que de celles provenant des approximations sécantes, qui conduisent aux valeurs modales et supports exacts de mesures recherchées d'après [135].
- 3° D'après cette arithmétique, l'expression finale à obtenir, est un nombre flou approximativement égal au nombre flou de type L-R, donné par

$$\tilde{\psi} = \langle m, \varphi, \omega \rangle_{LR} \quad (3.32)$$

où  $m$  est la valeur modale de  $\tilde{\psi}$ , et où  $\varphi$  et  $\omega$  représentent respectivement son écart gauche et son écart droit. Le support de  $\tilde{\psi}$  dans ce cas est l'intervalle :

$$\text{supp}(\tilde{\psi}) = ]m - \varphi, m + \omega[ \quad (3.33)$$

- 4° *Résultat final* : La mesure de performance recherchée est un nombre flou dont le support est l'intervalle ouvert de bornes  $m - \varphi$  et  $m + \omega$ ; et

de valeur modale  $m$ . En d'autres termes, cette mesure est approximativement comprise entre  $m - \varphi$  et  $m + \omega$ . Sa valeur la plus possible est le mode  $m$ .

La sous-section suivante donne un exemple d'application de cette approche. Nous avons préféré reprendre le même exemple traité précédemment dans la section 3.4 par la méthode des alpha-coupes assouplie, afin de montrer clairement les avantages qu'apportent cette nouvelle méthode.

## 3.6 Exemple d'application de la méthode L-R

### 3.6.1 Problème

Reprenons le problème posé dans la section 3.4 et proposons-nous de le résoudre par cette nouvelle méthode. Dans ce problème, il s'agissait d'un réseau d'ordinateurs appelés ordinateurs hôtes, monté dans le but de traitement des informations ou des messages qui leur sont envoyés. Chaque fois qu'un message envoyé par un ordinateur A vers un ordinateur B trouve le processeur occupé, le message retourne dans A, et entre dans la mémoire tampon appelée ici "orbite" en attendant d'essayer des rappels plus tard. On nous a signalé que les arrivées des messages au système sont poissonniennes de taux  $\tilde{\lambda}$  d'environ 16 messages par heure, le taux de rappel d'un message en mémoire tampon  $\tilde{\theta}$  est d'environ 8 messages par heure ; et le taux de service  $\tilde{\mu}$  est d'environ 21 messages par heure. On a supposé en plus que ces différents taux sont respectivement donnés par des nombres flous triangulaires :  $\tilde{\lambda} = (15/16/18)$ ,  $\tilde{\theta} = (1/8/22)$  et  $\tilde{\mu} = (19/21/22)$ . Il est demandé de déterminer les caractéristiques du système ; c'est-à-dire le nombre moyen de messages en orbite et dans le système, le temps moyen que passe un message en orbite et dans le système en régime permanent.

### 3.6.2 Solution

Représentons respectivement par  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_o$  et  $\tilde{T}_o$ , le nombre de messages en file, le temps d'attente d'un message en file, le nombre de messages dans la mémoire tampon et le temps approximatif que passe un message en mémoire tampon en régime stationnaire. Les formules mathématiques qui définissent ces quatre mesures en modèle classique sont données par [77] en (3.8), (3.9), (3.10) et (3.11). En modèle flou, elles sont reprises de façon



simplifiée aux égalités (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29).

Pour déterminer ces mesures par la méthode L-R, nous procédons comme suit :

- 1° Déterminer les représentations L-R de taux  $\tilde{\lambda} = (15/16/18)$ ,  
 $\tilde{\theta} = (1/8/22)$  et  $\tilde{\mu} = (19/21/22)$ .

On a :

$$\tilde{\lambda} = \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \quad (3.34)$$

$$\tilde{\theta} = \langle 8, 7, 14 \rangle_{LR} \quad (3.35)$$

et

$$\tilde{\mu} = \langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} \quad (3.36)$$

- 2° Remplacer ces représentations L-R dans (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29) pour obtenir les égalités suivantes :

$$\tilde{T}_s = \frac{\langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} + \langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}}{\langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} - \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR})} \quad (3.37)$$

$$\tilde{N}_s = \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \tilde{T}_s \quad (3.38)$$

$$\tilde{T}_o = \frac{\langle 16, 1, 2 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} + \langle 8, 7, 14 \rangle_{LR})}{\langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} - \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR})} \quad (3.39)$$

et

$$\tilde{N}_o = \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \tilde{T}_o \quad (3.40)$$

- 3° Appliquer à (3.37), (3.38), (3.39) et (3.40) les formules de l'arithmétique des nombres flous de type L-R, choisies convenablement parmi les formules en (1.79), (1.80), (1.81) et (1.89) ; on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_s &= \frac{\langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} + \langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}}{\langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} - \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR})} \\
&= \frac{\langle 24, 8, 16 \rangle_{LR}}{(\langle 8, 7, 14 \rangle_{LR})(\langle 5, 4, 2 \rangle_{LR})} \\
&= \frac{\langle 24, 8, 16 \rangle_{LR}}{\langle 40, 39, 114 \rangle_{LR}} \\
&= \langle \frac{3}{5}, \frac{382}{770}, \frac{1576}{40} \rangle_{LR} \\
&= \langle 0.6, 0.4961, 39.4 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_s &= \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \tilde{T}_s \\
&= \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \langle \frac{3}{5}, \frac{382}{770}, \frac{1576}{40} \rangle_{LR} \\
&= \langle \frac{48}{5}, \frac{3096}{385}, \frac{3552}{5} \rangle_{LR} \\
&= \langle 9.6, 8.0415, 710.4 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_o &= \frac{\langle 16, 1, 2 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} + \langle 8, 7, 14 \rangle_{LR})}{\langle 8, 7, 14 \rangle_{LR}\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR}(\langle 21, 2, 1 \rangle_{LR} - \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR})} \\
&= \frac{\langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \langle 29, 9, 15 \rangle_{LR}}{\langle 168, 16 + 147 - 14, 8 + 294 + 14 \rangle_{LR} \cdot \langle 5, 4, 2 \rangle_{LR}} \\
&= \frac{\langle 464, 144 + 29 - 9, 240 + 58 + 30 \rangle_{LR}}{\langle 840, 672 + 745 - 596, 336 + 1580 + 632 \rangle_{LR}} \\
&= \frac{\langle 464, 164, 328 \rangle_{LR}}{\langle 840, 821, 2548 \rangle_{LR}} \\
&= \langle 0.552, 0.464, 41.131 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_o &= \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \tilde{T}_o \\
&= \langle 16, 1, 2 \rangle_{LR} \cdot \langle 0.552, 0.464, 41.131 \rangle_{LR} \\
&= \langle 8.832, 7.424 + 0.552 - 0.464, 658.096 + 1.104 + 82.262 \rangle_{LR} \\
&= \langle 8.832, 7.512, 741.462 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les modes de  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_o$  et  $\tilde{N}_o$  sont respectivement 0.6, 9.6, 0.55 et 8.83. D'après la définition 1.20, leurs supports sont les in-

tervalles ouverts suivants :

$$\begin{aligned} \text{supp}(\tilde{T}_s) &= ]0.6 - 0.4961, 0.6 + 39.4[ = ]0.103, 40[, \\ \text{supp}(\tilde{N}_s) &= ]9.6 - 8.0415, 9.6 + 710.4[ = ]1.558, 720[, \\ \text{supp}(\tilde{T}_o) &= ]0.552 - 0.464, 0.552 + 41.131[ = ]0.088, 41.6[, \\ \text{supp}(\tilde{N}_o) &= ]8.83 - 7.51, 8.83 + 741.46[ = ]1.32, 750[. \end{aligned}$$

### 3.6.3 Résultats

En examinant attentivement ces valeurs modales et ces supports de nombres flous  $\tilde{T}_s$ ,  $\tilde{N}_s$ ,  $\tilde{T}_o$  et  $\tilde{N}_o$ , nous constatons qu'on a exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par la voie des alpha-coupes assouplie à la section 3.4 (voir les résultats repris sur la table 3.1, p. 124).

### 3.6.4 Avantages et inconvénients de la méthode L-R

#### Avantages

- La méthode L-R n'exige la résolution d'aucun programme non linéaire paramétrique dans son application.
- Cela la rend **courte**, **souple** et **directe** par rapport à la méthode des alpha-coupes assouplie. A titre illustratif, remarquons que la résolution du problème posé dans la section 3.6 par cette méthode ne nous a coûté que trois pages, alors qu'elle nous en a coûté environ seize par l'approche des alpha-coupes assouplie dans la section 3.4 .

#### Inconvénients

- La méthode L-R n'est applicable que si les paramètres de la file sont des nombres flous de même type L-R. Autrement, elle est limitée.
- Les courbes de fonctions d'appartenance n'ont pas des tracés exacts, mais plutôt approximatifs.

## 3.7 Conclusion du chapitre

En dehors de tous les développements faits jusqu'à présent autour des caractéristiques mathématiques d'une file d'attente floue par la méthode de la programmation non linéaire paramétrique, ce chapitre vient de présenter

des éléments nouveaux suivants :

- Une mise au point d'une nouvelle méthode dite "*méthode des alpha-coupes assouplie*", qui détermine les mêmes caractéristiques que la méthode des PNLP(s) en n'utilisant qu'un seul type d'arithmétique floue, à savoir, l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles (cf. section 3.3) ;
- Une mise au point d'une autre nouvelle méthode dite "*méthode L-R*", qui détermine les mêmes caractéristiques que les deux précédentes au cas où les paramètres de la file seraient des nombres flous de même type L-R (cf. section 3.5) ;
- Une mise au point des procédés de calcul qui accompagnent ces deux nouvelles méthodes ;
- Des applications numériques qui montrent la validité et l'usage pratique de ces méthodes (cf. section 3.6).

Au lieu des valeurs moyennes obtenues par les FAC ou des fonctions d'appartenance obtenues par les méthodes des PNLP et des alpha-coupes assouplie pour exprimer les mesures de performance, la méthode L-R les exprime par leurs représentations L-R. Le même exemple d'application traité suivant les deux nouvelles méthodes aux sections 3.4 et 3.6 a révélé que la nouvelle méthode L-R est courte, souple, directe et n'a pas besoin de résoudre des programmes d'optimisations pour arriver aux résultats. Ce tout dernier avantage est très bénéfique dans le cas où l'on se trouverait en présence d'un système ayant un grand nombre de serveurs, pour lesquels on voudrait déterminer les caractéristiques. Tel sera le cas, pour les réseaux de files d'attente floues à forme produit que nous abordons au chapitre suivant.

## QUATRIÈME CHAPITRE

## Chapitre 4

# PERFORMANCES D'UN RÉSEAU DE FILES D'ATTENTE FLOUES A FORME PRODUIT

### 4.1 Introduction

Les réseaux de files d'attente, appelés aussi réseaux stochastiques, constituent un domaine qui a connu d'intenses recherches ces six dernières décennies. La base de ces recherches est la théorie classique de files d'attente, qui s'intéresse elle, principalement aux systèmes d'attente ayant une seule file. Tous les efforts conjugués par les chercheurs de ce domaine ont amené à l'existence d'une théorie classique de réseaux de files d'attente, bien développée et accompagnée d'un ensemble des problèmes ouverts, provenant directement des applications et des considérations théoriques. La plupart de ces problèmes sont facilement formulés et pris dans un cadre théorique ; mais ils requièrent des techniques plus complexes fondées sur une base solide ou sur des méthodes mathématiques suffisamment élaborées (cf. [49]). Le plus souvent, ces différentes méthodes sont combinées afin de trouver des solutions aux problèmes qui se posent.

Comme nous l'avons annoncé au chapitre précédent, le développement d'une théorie classique de réseaux de files d'attente, qui a pourvu aux applications munies des solutions, formules et algorithmes, a commencé vers les années 50 en Recherche Opérationnelle, avec un penchant remarquable vers la gestion de la production, la gestion de stocks et le transport. Les premiers travaux à l'origine de cette théorie furent ceux de *Jackson* [85], *Gordon et Newell* [75], *Baskett et cie* [13], *Kelly* [98] et *Kleinrock* ([108], [109]). A

ceux-ci, nous pouvons ajouter les meilleurs livres qui ont beaucoup contribué à l'avancement de la théorie tels que ceux de *Kelly* [99], *Walrand* [190], *van Dijk* [187], *Whittle* [195], *El-Taha* et *c<sup>ie</sup>* [60], etc.

L'analyse d'un réseau de files d'attente consiste à évaluer l'ensemble des mesures de performance telles que le taux d'utilisation des ressources, le débit, la longueur de files devant les stations ou dans le réseau tout entier, le temps de réponse aux clients, etc. Cette analyse peut se faire par simulation ou par les méthodes analytiques. La simulation est une technique générale d'une application très étendue, mais son grand défaut réside dans le volume insupportable des développements et des calculs qui mènent aux résultats exacts. Quant aux méthodes analytiques, elles partent d'un ensemble d'hypothèses et contraintes que doivent satisfaire les modèles ; et sont basées sur des relations mathématiques qui caractérisent le comportement du système.

Pour être rassuré d'un modèle, il faudrait un bon bilan entre l'exactitude des mesures obtenues et l'efficience dans l'évaluation et l'analyse du modèle. C'est ici que les réseaux à forme produit jouent leur grand rôle. En effet, les réseaux à forme produit ont une forme de distribution stationnaire très simple, qui permet de définir des algorithmes efficaces d'évaluation des mesures de performance. Ils sont définis en théorie classique comme étant ceux dont la distribution stationnaire des probabilités vaut le produit des distributions marginales de stations qui les constituent. Presque tous les modèles et résultats développés sur les réseaux de files d'attente classiques l'ont été, grâce aux principes de séparabilité et de la forme produit à l'équilibre comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction du chapitre précédent (cf. [49]).

En ce qui concerne l'analyse des mesures de performance d'un réseau à forme produit, qui nous intéresse au premier plan dans ce travail, soulignons que celle-ci a été largement étudiée dans son contexte classique dans plusieurs travaux tels que [85], [76], [13], [71], [21], [22], [23], [14], [40], [72], [24],[132]. De nombreux résultats de cette analyse existent dans la littérature.

Mais pour ce qui est de l'approche floue, nos investigations ne nous ont pas mené à un travail dans ce sens, à part ceux de *Chen*, de *Zhang* et *c<sup>ie</sup>* et de *Luthi* et *Haring*, cités dans l'introduction du chapitre précédent, qui abordent des approches particulières de réseaux de files d'attente floues, respectivement par la méthode des alpha-coupes, par l'approche de la logique floue et par les algorithmes de la valeur moyenne (MVA).

Sur base de la nouvelle méthode L-R introduite au chapitre précédent, nous abordons au cours de ce dernier chapitre et pour la toute première fois, l'analyse d'un réseau de files d'attente floues à forme produit (RFAFFP), avec l'objectif de déterminer les mesures de performance qui le caractérisent. Les principes de séparabilité et d'indépendance à l'équilibre d'un réseau à forme produit vont nous permettre d'obtenir les mesures de performance au niveau de stations d'abord, et ensuite dans l'ensemble du système. La condition de stabilité d'un réseau qui permet de passer au calcul de ces mesures en régime stationnaire est déterminée et le procédé dudit calcul est proposé. Le lecteur intéressé par les détails de cette analyse est prié de se référer également à notre article en référence [136], intitulé « *Performance Measures of a Product Form Queueing Network with Fuzzy Parameters* », publié le 31 Mars 2015 dans le journal international "Journal of Fuzzy Set Valued Analysis" (cf. [http : //www.ispacs. com/journals/jfsva/2015/jfsva – 00228/](http://www.ispacs.com/journals/jfsva/2015/jfsva-00228/)).

Afin d'arriver à bien agencer toutes ces notions, ce chapitre est subdivisé en 7 sections de la manière suivante :

La deuxième section résume les principaux résultats sur les performances d'un réseau de files d'attente classiques à forme produit. La troisième section présente les considérations théoriques d'un réseau de files d'attente floues à forme produit et la condition principale de sa stabilité. La quatrième section justifie en premier lieu le choix que nous portons sur la méthode L-R dans la détermination des mesures de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit et termine enfin par le calcul proprement dit de ces mesures. La cinquième section traite d'une application numérique de l'approche sur base d'un exemple formulé à partir des considérations théoriques. La sixième compare les résultats obtenus à ceux du modèle classique en se référant au même exemple traité à la cinquième section. La septième et dernière section donne la conclusion du chapitre.

Comme on peut le remarquer, l'entièreté de ce chapitre fait partie de notre contribution originale à la théorie de réseaux de files d'attente floues.



## 4.2 Principaux résultats d'un réseau de files d'attente à forme produit en modèle classique

### 4.2.1 Les hypothèses

Supposons qu'on ait un réseau de files d'attente à forme produit (appelé aussi réseau de Jackson ouvert) ayant  $k$  stations M/M/1, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Arrivées au réseau : poissonniennes de taux  $\lambda$  ;
- Entrées dans une station  $i$  : poissonniennes de taux  $\lambda_i$ , où  $1 \leq i \leq k$  ;
- Service à une station  $i$  : exponentiel de taux  $\mu_i$  avec  $1 \leq i \leq k$  ;
- Taux de visite d'une station  $i$  :  $\tau_i$  avec  $1 \leq i \leq k$  ;
- Taille de la population source : infinie ;
- Discipline de service au niveau de chaque station : FIFO ;
- Nombre de classes de clients : 1 ;
- A la fin de service à une station  $i$ , un client a la latitude de rechercher un autre service à une autre station  $j$  avec la probabilité  $r_{ij}$ , ou de quitter le système avec la probabilité  $r_{i0}$  ;
- La circulation ou le routage d'un client dans le système se fait suivant un modèle probabiliste, et pour simplifier les choses, nous supposons que les choix de destinations opérés par les clients sont équiprobables ;
- Tous les processus de service dans le réseau sont i.i.d., c'est-à-dire indépendants et identiquement distribués.

#### Remarque(s) 4.1

Dans beaucoup de cas réels,  $\lambda$  et les  $\mu_i$  proviennent de données statistiques que l'on récolte sur le système. Les paramètres  $\tau_i$  et  $\lambda_i$  sont des fonctions liées par la relation suivante (cf. [14]) :

$$\lambda_i = \lambda \cdot \tau_i \quad (4.1)$$

### 4.2.2 Stabilité d'un réseau de files d'attente à forme produit

Dans les conditions ci-haut énumérées, Baynat [14] montre qu'un tel réseau est stable si et seulement si chacune de ses stations l'est. C'est-à-dire :  $\forall i \in \overline{1, k}$ , avec  $\overline{1, k} = \{1, 2, \dots, k\}$  ; on a :

$$\lambda_i \leq \mu_i \quad (4.2)$$

Les différents taux de visite sont fonctions des probabilités de routage et sont reliés à celles-ci par la formule  $\forall i \in \overline{1, k}$  (cf. [132], p.85) :

$$\tau_i = r_{0i} + \sum_{j=1}^k \tau_j \cdot r_{ji} \quad (4.3)$$

Lorsque le réseau est stable, le théorème de *Jackson* est d'une grande importance. D'après [14], ce théorème stipule ce qui suit :

- Les nombres de clients  $N_i$  dans les différentes stations,  $i = 1, 2, \dots, k$ , sont indépendants.
- Chaque station  $i$  se comporte comme si le flux d'arrivée  $\lambda_i$  était poissonien.
- Le réseau se comporte comme s'il était composé de  $k$  stations indépendantes M/M/1.
- Cette indépendance équivaut à dire que la probabilité à l'état stationnaire égale au produit des probabilités marginales :

$$p(N) = p_1(N_1) \dots p_k(N_k) = \prod_{i=1}^k p_i(N_i); \quad (4.4)$$

avec  $p_i(N_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{N_i}$  ; où  $p(N)$ ,  $p_i(N_i)$  et  $\rho_i$  représentent respectivement : la probabilité d'avoir  $N$  clients au réseau à l'état stationnaire, la probabilité d'avoir  $N_i$  clients dans la station  $i$  et le taux d'utilisation du serveur  $i$ .

- S'il arrivait qu'il y ait beaucoup de clients dans l'une des stations, cela n'implique rien en ce qui concerne le nombre de clients dans d'autres stations.

### 4.2.3 Mesures de performance d'un réseau classique à forme produit

Dans un réseau à forme produit, les mesures de performance les plus recherchées en modèles classiques à l'état stationnaire sont (cf. [132]) :

(i)  $d_i$  : le débit d'une station  $i$  :

$$d_i = \lambda_i = \lambda \cdot \tau_i \quad (4.5)$$

(ii)  $d$  : le débit du réseau :

$$d = \lambda \quad (4.6)$$

(iii)  $N_i$  : le nombre moyen de clients dans une station  $i$  :

$$N_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} \quad (4.7)$$

(iv)  $N$  : le nombre moyen de clients dans le réseau :

$$N = \sum_{i=1}^k N_i \quad (4.8)$$

(v)  $T_i$  : le temps moyen d'attente d'un client dans une station  $i$  :

$$T_i = \frac{N_i}{d_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \quad (4.9)$$

(vi)  $T$  : le temps moyen de séjour d'un client dans le réseau :

$$T = \frac{N}{d} = \frac{N}{\lambda} \quad (4.10)$$

#### Remarque(s) 4.2

Au cas où la condition en (4.2) est satisfaite ; c'est-à-dire si le réseau est stable, il est important de connaître la procédure de calculs qui nous mènent à ces mesures. La variable  $\lambda_i$  présente dans les formules en (4.5) et (4.7) est calculée à partir de deux systèmes d'équations ordinaires en (4.1) et (4.3). Le système en (4.3) requiert la connaissance de la matrice de routages  $R = (r_{ij})$  du réseau pour sa résolution. Cette matrice est celle qui décrit la circulation de clients dans le réseau. Elle est stochastique d'ordre  $k + 1$ , où  $k$  représente  $k$  états symbolisant les  $k$  stations, et où le  $(k + 1)^{\text{ième}}$  état, noté souvent 0,

représente "l'extérieur". D'après [132], elle se présente comme suit :

$$R = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0k} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k0} & r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

L'épineuse question à laquelle il faut faire face à ce niveau est celle de déterminer les différents taux de visite  $\tau_i$  à l'aide de cette matrice. Ces taux se déterminent en résolvant le système ordinaire de  $k$  équations à  $k$  inconnues donné par la relation (4.3) ci-haut. Au terme de cette résolution, toutes les données sont réunies pour déterminer les différentes mesures de performance du réseau en modèle classique. Le remplacement des valeurs de  $\tau_i$  dans le système (4.1) donne les valeurs de  $\lambda_i$ . Le remplacement des valeurs de  $\lambda_i$  et  $\lambda$  dans (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10) donnent  $N_i$ ,  $N$ ,  $T_i$  et  $T$ ; sans oublier que  $d$  et  $d_i$  valent respectivement  $\lambda$  et  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ .

### 4.3 Modèle flou d'un réseau de files d'attente à forme produit

#### 4.3.1 Considérations théoriques

Reconsidérons le réseau à forme produit défini ci-haut à la sous-section 4.2.1, et supposons cette fois-ci que le taux d'arrivée au réseau noté  $\tilde{\lambda}$  et le taux de service à chaque station  $i$  noté  $\tilde{\mu}_i$  soient des nombres flous. Notons par  $\tilde{\psi}$  la mesure de performance du réseau que nous voulons calculer. Comme dans le cas de file d'attente simple, supposons que cette mesure se note  $\psi$  en modèle classique.

La mesure

$$\psi = f(\lambda, \lambda_i, \mu_i) \quad (4.12)$$

est fonction réelle à  $2k + 1$  variables  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k$ .

Par conséquent, en modèle flou,

$$\tilde{\psi} = \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i) \quad (4.13)$$

est une fonction à  $2k + 1$  variables floues  $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$  ; allant de  $\mathbb{F}(\mathbb{R})^{2k+1}$  dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ .

Dans cet environnement flou, le système d'équations (4.1) qui relie  $\lambda_i$  à  $\tau_i$  s'écrit :

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda} \cdot \tau_i; \quad 1 \leq i \leq k; \quad (4.14)$$

et les mesures de performance reprises de (4.7) à (4.10) s'écrivent :

$$\tilde{N}_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\mu}_i - \tilde{\lambda}_i} \quad (4.15)$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i \quad (4.16)$$

$$\tilde{T}_i = \frac{\tilde{N}_i}{\tilde{d}_i} = \frac{1}{\tilde{\mu}_i - \tilde{\lambda}_i} \quad (4.17)$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{d}} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Condition de stabilité en environnement flou

Tout comme dans le modèle classique, il faut trouver la condition de stabilité en modèle flou, qui permet de passer au calcul des mesures de performance en régime stationnaire. Bien que  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$  soient des quantités imprécises, l'esprit et le sens de la stabilité restent les mêmes qu'en modèle classique. Nous admettrons qu'un réseau de files d'attente floues à  $k$  stations est stable ssi chaque station l'est ; c'est-à-dire si pour tout naturel  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ , on a :

$$\sup_{i \in \overline{1, k}} \{supp(\tilde{\lambda}_i)\} < \inf_{i \in \overline{1, k}} \{supp(\tilde{\mu}_i)\}$$

où  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$  sont respectivement le taux d'arrivée et le taux de service de chaque station  $i$ .

## 4.4 Détermination des mesures de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit par la méthode L-R

### 4.4.1 Choix de la méthode L-R

Dès l'entame de cette sous-section, notre curiosité était de savoir s'il est possible de modéliser un réseau de files d'attente floues à forme produit par les deux nouvelles méthodes qui viennent d'être introduites par ce travail au chapitre précédent ; notamment :

- la méthode des alpha-coupes assouplie à la section 3.3,
- la méthode L-R à la section 3.5.

En nous référant à leurs descriptions telles qu'elles sont présentées au chapitre précédent et dans les références [131] et [135], nous avons découvert que seule la deuxième méthode est adaptée en temps et en espace à cette modélisation. La première, bien que pouvant mener aussi aux mêmes résultats, est manuellement inappropriée à ce contexte, à cause de deux raisons :

- le nombre élevé de serveurs dans un réseau,
- le passage à la résolution d'un nombre inquiétant de PNLs qu'exige la méthode en cas de plusieurs serveurs.

En effet,

Déterminer une mesure de performance  $\tilde{\psi}$  comme celle donnée à l'égalité (4.13) ci-dessus par la méthode des alpha-coupes assouplie, revient à appliquer l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles à cette égalité. Selon le procédé de cette méthode décrit à la sous-section 3.3.2 du chapitre précédent, toutes les opérations concourant au calcul de  $\tilde{\psi}$  peuvent se dérouler suivant le procédé ci-après :

- 1° Constituer la matrice des routages  $R$ , qui va nous permettre d'aborder le calcul des taux de visite  $\tau_i$  de différents serveurs.
- 2° Déterminer tous les  $\tau_i$  en résolvant le système d'équations en (4.3).
- 3° Porter ces valeurs de  $\tau_i$  dans (4.14) et déterminer ensuite celles de  $\tilde{\lambda}_i$  par résolution des équations obtenues.
- 4° A la fin de l'étape précédente, tous les paramètres flous intervenant dans le processus de calcul sont connus. Si le réseau est stable, le calcul proprement dit de  $\tilde{\psi}$  peut alors commencer. Dans l'expression de  $\tilde{\psi}$ , nous avons affaire à  $2k + 1$  nombres flous sur lesquels porteront les

quatre opérations fondamentales " $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ ". De toutes les façons, la composition exacte de cette expression n'est pas connue au préalable. Elle dépend de l'expression analytique de la mesure  $\tilde{\psi}$ .

- 5° Déterminer les coupes de niveau  $\alpha$  de ces  $2k + 1$  nombres flous  $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$ ; notées respectivement par :  $\tilde{\lambda}_\alpha, \tilde{\lambda}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\lambda}_{k\alpha}, \tilde{\mu}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\mu}_{k\alpha}$ .

Par conséquent, l'égalité (4.13) devient :

$$\tilde{\psi}_\alpha = \tilde{f}(\tilde{\lambda}_\alpha, \tilde{\lambda}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\lambda}_{k\alpha}, \tilde{\mu}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\mu}_{k\alpha}) \quad (4.19)$$

- 6° Déterminer la coupe de niveau  $\alpha$  de  $\tilde{\psi}$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Cette détermination se fait en appliquant à l'égalité (4.19) deux types de formules. D'abord les formules (1.47), (1.48), (1.49), (1.50), relatives aux alpha-coupes d'un nombre flou ; et ensuite les formules (1.54), (1.55), (1.56), (1.57), relatives aux opérations arithmétiques sur les intervalles réels. Au bout de la résolution de tous les PNLPS contenus dans cette démarche, la mesure recherchée est le nombre flou  $\tilde{\psi}$  dont la coupe générale de niveau  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) est celle qui aura été trouvée. D'après la relation (1.14) vue au premier chapitre, p. 20, cette alpha-coupe permet de construire la fonction d'appartenance de  $\tilde{\psi}$ .

C'est à cette sixième étape du procédé que les opérations deviennent très fastidieuses. A titre d'exemple, pour calculer la mesure de performance  $\tilde{N}$  reprise à l'égalité (4.16) ci-dessus par la méthode des alpha-coupes assouplie, il faut commencer par résoudre pour chacun de  $\tilde{N}_i$  deux PNLPS liés à la présence de la division dans la formule en (4.15) (cf. [135], p. 63 ; section 3.4, chap. 3). Cela signifie que pour l'ensemble de  $k$  stations du réseau, le calcul de  $\tilde{N}$  nécessitera la résolution de  $2k$  PNLPS. A ce point, on comprend que pour un réseau de 10 serveurs comme celui que nous analysons ci-dessous au niveau de l'exemple numérique à la section 4.5, il faudra prévoir la résolution de 20 PNLPS au calcul de l'unique mesure de performance  $\tilde{N}$ . Et si nous devrions reprendre les mêmes calculs pour les autres mesures  $\tilde{N}_i, \tilde{T}_i$  et  $\tilde{T}$  ci-dessus, les PNLPS à résoudre se multiplieront davantage et les opérations deviendront excessivement encombrantes et par conséquent, moins convenables au calcul manuel. Dès lors, on se rend compte que la méthode des alpha-coupes assouplie sur les réseaux de files d'attente floues à forme produit nous coûte, non seulement du temps, mais également de l'espace. Pédagogiquement, elle ne réunit pas toutes les conditions permettant d'éva-

luer efficacement un enseignement en un temps record. C'est la raison pour laquelle nous avons porté notre choix sur la nouvelle méthode L-R dans ce chapitre pour évaluer les mesures de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit.

#### 4.4.2 Calculs proprement dits par la méthode L-R

Supposons que nous ayons un réseau de files d'attente floues à forme produit réalisant toutes les considérations théoriques données à la sous-section 4.3.1 et la condition de stabilité définie à la sous-section 4.3.2. Il y a lieu de passer au calcul de chacune des mesures de performance reprises aux égalités allant de (4.15) à (4.18) par la méthode L-R. Suivant l'esprit de la description de cette méthode proposée dans [135], p. 60, la mesure de performance  $\tilde{\psi}$  définie à l'égalité (4.13) peut être calculée suivant le procédé ci-après :

**Procédé :**

- 1° Constituer la matrice des routages  $R$ .
- 2° Déterminer tous les taux de visite de stations  $\tau_i$  en résolvant le système d'équations en (4.3).
- 3° Porter ces valeurs de  $\tau_i$  dans (4.14) pour déduire celles de  $\tilde{\lambda}_i$ . En nous basant sur le principe d'extension de Zadeh et sur la relation (1.40) à la page 33, il serait plus facile de déduire ces valeurs par la formule L-R suivante :

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda} \cdot \tau_i = \langle m\tau_i, a\tau_i, b\tau_i \rangle_{LR}; \quad \text{avec } 1 \leq i \leq k \quad (4.20)$$

si la représentation L-R de  $\tilde{\lambda}$  est  $\langle m, a, b \rangle_{LR}$ .

- 4° Contrôler si le réseau est stable afin de passer au calcul des mesures de performance.
- 5° Si oui, mettre  $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$  sous leurs représentations L-R.
- 6° Remplacer chaque nombre flou par sa représentation L-R dans (4.13) et calculer  $\tilde{\psi}$ , en appliquant l'arithmétique des nombres flous de type L-R par usage des formules convenables choisies parmi les formules (1.79), (1.80), (1.81) et (1.89). On gardera à l'esprit que par la méthode L-R,



les produits et les quotients ne se calculent qu'en utilisant les approximations sécantes comme il est recommandé dans [135], p.60. A ce niveau d'opérations, nous conseillons à nos lecteurs de profiter de la recopie de la feuille Excel de Microsoft Excel pour des calculs rapides au niveau de stations du réseau.

7° Le résultat obtenu est un nombre flou de type L-R de la forme

$$\tilde{\psi} = \langle \varepsilon, \alpha, \beta \rangle_{LR};$$

de valeur modale  $\varepsilon$  et de support  $supp(\tilde{\psi}) = ]\varepsilon - \alpha, \varepsilon + \beta[$ .

8° Finalement, la mesure recherchée est un nombre flou approximativement égal au nombre flou de type L-R  $\tilde{\psi}$ . Sa valeur réelle ne peut aller au delà de  $\varepsilon + \beta$ , ni en deçà de  $\varepsilon - \alpha$ . Sa valeur la plus possible est  $\varepsilon$ .

Au cours de la section suivante, nous proposons une application numérique de cette théorie à un problème formulé à partir des considérations théoriques que l'on peut rencontrer dans la conception ou l'évaluation d'un projet. Ce problème est intégralement le même que celui formulé dans notre article en référence [136], pp. 74-75, à l'exception de la série des questions qui s'y rapportent.

## 4.5 Application numérique

### 4.5.1 Problème

Dans un endroit où l'étude a montré, qu'il arrive entre 31 et 33 clients par heure suivant un processus de Poisson pour faire du shopping, on voudrait monter un supermarché à trois entrées et quatre sorties. Le supermarché doit posséder 10 guichets de service numérotés ; parmi lesquels 1, 5 et 8 sont des guichets de facturation ; 2, 6 et 9 sont des caisses ; 3, 4, 7 et 10 sont des points de livraison. Chaque guichet  $i$  est un serveur qui offre aux clients un service exponentiel de taux flou  $\tilde{\mu}_i$ , indépendamment des autres guichets avec  $1 \leq i \leq 10$ . La circulation de clients dans le système suit l'ordre normal d'un service de vente ; à savoir "arrivée  $\rightarrow$  facturation  $\rightarrow$  caisse  $\rightarrow$  livraison  $\rightarrow$  départ" et doit se faire suivant les sens des flèches indiquées sur la figure 4.1 ci-dessous. Un client qui termine un service à un guichet  $i$ , a la liberté d'aller chercher un autre service à un guichet  $j$  de son choix avec la probabilité  $r_{ij}$ , ou de quitter le système avec la probabilité  $r_{i0}$ . On suppose que

les choix opérés par un client pour ses différentes destinations sont équiprobables. Le personnel devant servir au guichet  $i$  a été testé auparavant, et est à mesure de fournir par heure un service de taux flou équivalent au nombre flou triangulaire  $\mu_i = (a - 1/a/a + 1)$  repris à côté de chaque guichet  $i$  sur la figure 4.1, où  $a$  est un entier naturel.

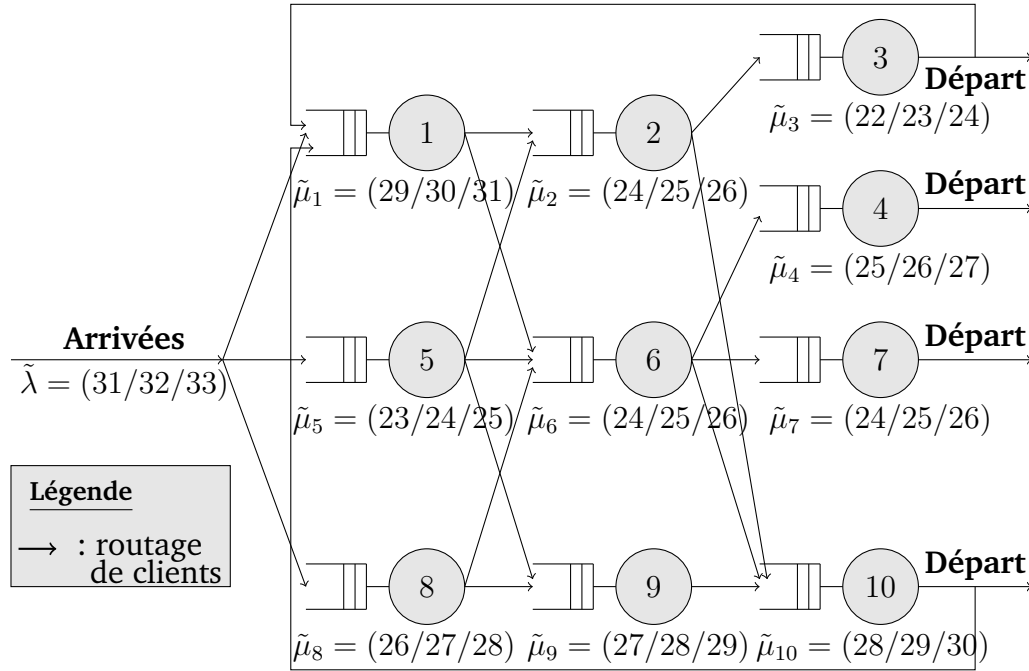


FIGURE 4.1 – Schéma du Réseau défini dans le problème.

- 1° Calculer les mesures de performance du système au régime stationnaire.
- 2° Combien de places d'attente assises peut-on prévoir au minimum à chaque guichet, de telle sorte que tous les clients qui attendent soient assis, à l'exception de ceux qui sont en train d'être servis ?

#### 4.5.2 Données

- 1° Le taux d'arrivée au réseau : un nombre flou  $\tilde{\lambda}$  qu'on peut supposer être un nombre flou triangulaire  $\tilde{\lambda} = (31/32/33)$  ;
- 2° Les taux de service  $\tilde{\mu}_i$  aux différentes stations  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) sont des nombres flous triangulaires donnés par :  $\tilde{\mu}_1 = (29/30/31)$ ,  $\tilde{\mu}_2 = (24/25/26)$ ,  $\tilde{\mu}_3 = (22/23/24)$ ,  $\tilde{\mu}_4 = (25/26/27)$ ,  $\tilde{\mu}_5 = (23/24/25)$ ,  $\tilde{\mu}_6 = (24/25/26)$ ,  $\tilde{\mu}_7 = (24/25/26)$ ,  $\tilde{\mu}_8 = (26/27/28)$ ,  $\tilde{\mu}_9 = (27/28/29)$ ,  $\tilde{\mu}_{10} = (28/29/30)$ .

- 3° Les routages de clients sont équiprobables et sont indiqués par les sens de flèches sur la figure 4.1.

### 4.5.3 Inconnues :

- Les mesures de performance du supermarché,
- Le nombre de places d'attente assises à prévoir à chaque guichet.

### 4.5.4 Résolution

#### 4.5.2.1 Calcul des mesures de performance du supermarché

Les données en 1° et 2° étant imprécises, il est difficile d'aborder ce problème par l'approche classique. Les paramètres flous du système étant des nombres flous triangulaires, donc de type L-R, nous pouvons recourir au modèle flou que nous venons d'introduire ci-dessus pour répondre à ces questions. Les probabilités de routages qui sont déterminées par la circulation de clients dans le supermarché, sont à calculer suivant le principe d'équiprobabilité. Elles déterminent la matrice des routages  $R = (r_{ij})_{11 \times 11}$  sur les 10 états du système, auxquels nous adjoignons l'extérieur noté 0 comme le onzième état.

D'après la formulation du problème, le réseau est évidemment à forme produit parcequ'il est ouvert, et constitué des files simples MF/MF/1. Mais pour ce qui est de sa stabilité, nous avons besoin de comparer d'abord les différents taux d'arrivée à tous les guichets aux taux de service fournis par ces guichets pour pouvoir nous lancer dans les calculs des mesures de performance. Ces taux d'arrivée aux différents guichets sont fonctions du taux d'arrivée principal  $\tilde{\lambda}$  et des taux de visite aux différents guichets  $\tau_i$ . L'utilisation successive du système d'équations donné en (4.3) et de la relation en (4.14) ou (4.15), nous permet d'obtenir les taux de visite de chaque guichet  $i$ , et ensuite le taux d'arrivée  $\tilde{\lambda}_i$  à chaque guichet  $i$  pour  $1 \leq i \leq 10$ . Toute la procédure se déroule en suivant le procédé ci-haut à la sous-section 4.4.2.

#### 1° Détermination de la matrice des routages

Le système en (4.3) a besoin de la matrice de routages  $R = (r_{ij})_{11 \times 11}$  pour sa résolution. D'après les sens de circulation de clients indiqués par les flèches dans le système, cette matrice se présente comme suit :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

### 2° Détermination des taux de visites de guichets

Le système d'équations provenant de (4.3) se présente de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tau_1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\tau_3 & = & 0 \\ \tau_2 - \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_5 & = & 0 \\ \tau_3 - \tau_2 & = & 0 \\ \tau_4 - \frac{1}{3}\tau_6 & = & 0 \\ \tau_5 - \frac{1}{3} & = & 0 \\ \tau_6 - \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_8 & = & 0 \\ \tau_7 - \frac{1}{3}\tau_6 & = & 0 \\ \tau_8 - \frac{1}{3} & = & 0 \\ \tau_9 - \frac{1}{2}\tau_5 - \frac{1}{2}\tau_8 & = & 0 \\ \tau_{10} - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{3}\tau_6 - \tau_9 & = & 0 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Sa solution est d'après [136] :  $\tau_1 = \frac{5}{9}$ ,  $\tau_2 = \tau_3 = \tau_6 = \frac{4}{9}$ ,  $\tau_4 = \tau_7 = \frac{4}{27}$ ,  $\tau_5 = \tau_8 = \tau_9 = \frac{1}{3}$  et  $\tau_{10} = \frac{19}{27}$ .

### 3° Détermination des taux d'arrivée à tous les guichets

Comme la représentation L-R de  $\tilde{\lambda}$  est  $\tilde{\lambda} = \langle 31, 32, 33 \rangle_{LR}$ , le système d'équations en (4.15) nous permet de calculer à présent les différents taux d'arrivée

aux différents guichets de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_1 &= (31\tau_1/32\tau_1/33\tau_1) = \left(\frac{155}{9}/\frac{160}{9}/\frac{55}{3}\right) \\
 \tilde{\lambda}_2 &= (31\tau_2/32\tau_2/33\tau_2) = \left(\frac{124}{9}/\frac{128}{9}/\frac{44}{3}\right) \\
 \tilde{\lambda}_3 &= (31\tau_3/32\tau_3/33\tau_3) = \left(\frac{124}{9}/\frac{128}{9}/\frac{44}{3}\right) \\
 \tilde{\lambda}_4 &= (31\tau_4/32\tau_4/33\tau_4) = \left(\frac{124}{27}/\frac{128}{27}/\frac{44}{9}\right) \\
 \tilde{\lambda}_5 &= (31\tau_5/32\tau_5/33\tau_5) = \left(\frac{31}{3}/\frac{32}{3}/11\right) \\
 \tilde{\lambda}_6 &= (31\tau_6/32\tau_6/33\tau_6) = \left(\frac{124}{9}/\frac{128}{9}/\frac{44}{3}\right) \\
 \tilde{\lambda}_7 &= (31\tau_7/32\tau_7/33\tau_7) = \left(\frac{124}{27}/\frac{128}{27}/\frac{44}{9}\right) \\
 \tilde{\lambda}_8 &= (31\tau_8/32\tau_8/33\tau_8) = \left(\frac{31}{3}/\frac{32}{3}/11\right) \\
 \tilde{\lambda}_9 &= (31\tau_9/32\tau_9/33\tau_9) = \left(\frac{31}{3}/\frac{32}{3}/11\right) \\
 \tilde{\lambda}_{10} &= (31\tau_{10}/32\tau_{10}/33\tau_{10}) = \left(\frac{589}{27}/\frac{608}{27}/\frac{209}{9}\right)
 \end{aligned}$$

#### 4° Vérification de la stabilité du réseau

En comparant ces taux d'arrivée  $\tilde{\lambda}_i$  à ceux de service  $\tilde{\mu}_i$  ci-haut pour  $1 \leq i \leq 10$ , nous constatons bien qu'ils vérifient la condition de stabilité

$$\sup_{i \in \{1,10\}} \{supp(\tilde{\lambda}_i)\} < \inf_{i \in \{1,10\}} \{supp(\tilde{\mu}_i)\}.$$

Ainsi, il est normal que nous puissions passer aux calculs des mesures de performance du réseau.

#### 5° Détermination des représentations L-R de $\tilde{\lambda}$ , $\tilde{\lambda}_i$ et $\tilde{\mu}_i$

– Pour  $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \langle 32, 1, 1 \rangle_{LR}. \quad (4.23)$$

– Pour les  $\tilde{\lambda}_i$  (voir la table 4.1 ci-dessous).

– Pour les  $\tilde{\mu}_i$  (voir la table 4.2 ci-dessous).

$i$	Taux d'arrivée $\tilde{\lambda}_i$	Représentation L-R du taux d'arrivée $\tilde{\lambda}_i$
1	$\tilde{\lambda}_1$	$\langle \frac{160}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9} \rangle_{LR} = \langle 17.77, 0.555, 0.555 \rangle_{LR}$
2	$\tilde{\lambda}_2$	$\langle \frac{128}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9} \rangle_{LR} = \langle 14.22, 0.444, 0.444 \rangle_{LR}$
3	$\tilde{\lambda}_3$	$\langle \frac{128}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9} \rangle_{LR} = \langle 14.22, 0.444, 0.444 \rangle_{LR}$
4	$\tilde{\lambda}_4$	$\langle \frac{128}{27}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27} \rangle_{LR} = \langle 4.74, 0.148, 0.148 \rangle_{LR}$
5	$\tilde{\lambda}_5$	$\langle \frac{32}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle_{LR} = \langle 10.66, 0.333, 0.333 \rangle_{LR}$
6	$\tilde{\lambda}_6$	$\langle \frac{128}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9} \rangle_{LR} = \langle 14.22, 0.444, 0.444 \rangle_{LR}$
7	$\tilde{\lambda}_7$	$\langle \frac{128}{27}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27} \rangle_{LR} = \langle 4.74, 0.148, 0.148 \rangle_{LR}$
8	$\tilde{\lambda}_8$	$\langle \frac{32}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle_{LR} = \langle 10.66, 0.333, 0.333 \rangle_{LR}$
9	$\tilde{\lambda}_9$	$\langle \frac{32}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle_{LR} = \langle 10.66, 0.333, 0.333 \rangle_{LR}$
10	$\tilde{\lambda}_{10}$	$\langle \frac{608}{27}, \frac{19}{27}, \frac{19}{27} \rangle_{LR} = \langle 22.51, 0.703, 0.703 \rangle_{LR}$

TABLE 4.1 – Représentations L-R des taux d'arrivée  $\tilde{\lambda}_i$  par station.

$i$	Taux de service $\tilde{\mu}_i$	Représentation L-R du taux de service $\tilde{\mu}_i$
1	$\tilde{\mu}_1$	$\langle 30, 1, 1 \rangle_{LR}$
2	$\tilde{\mu}_2$	$\langle 25, 1, 1 \rangle_{LR}$
3	$\tilde{\mu}_3$	$\langle 23, 1, 1 \rangle_{LR}$
4	$\tilde{\mu}_4$	$\langle 26, 1, 1 \rangle_{LR}$
5	$\tilde{\mu}_5$	$\langle 24, 1, 1 \rangle_{LR}$
6	$\tilde{\mu}_6$	$\langle 25, 1, 1 \rangle_{LR}$
7	$\tilde{\mu}_7$	$\langle 25, 1, 1 \rangle_{LR}$
8	$\tilde{\mu}_8$	$\langle 27, 1, 1 \rangle_{LR}$
9	$\tilde{\mu}_9$	$\langle 28, 1, 1 \rangle_{LR}$
10	$\tilde{\mu}_{10}$	$\langle 29, 1, 1 \rangle_{LR}$

TABLE 4.2 – Représentations L-R des taux de service  $\tilde{\mu}_i$  par station.

#### 6° Calculs de $\tilde{d}$ , $\tilde{d}_i$ , $\tilde{N}$ , $\tilde{N}_i$ , $\tilde{T}_i$ et $\tilde{T}$

Tenant compte de la forme générale d'une mesure de performance en modèle flou en (4.13), les formules de mesures classiques en (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10) peuvent s'écrire :

$$\tilde{d}_i = \lambda_i = \lambda \cdot \tau_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \quad (4.24)$$

$$\tilde{d} = \tilde{\lambda} = \langle 32, 1, 1 \rangle_{LR} \quad (4.25)$$

$$\tilde{N}_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\mu}_i - \tilde{\lambda}_i} \quad (4.26)$$

$$\tilde{T}_i = \frac{\tilde{N}_i}{\tilde{\lambda}_i} \quad (4.27)$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i \quad (4.28)$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i}{\langle 32, 1, 1 \rangle_{LR}} \quad (4.29)$$

$i$	Nombre flou $\tilde{N}_i$	Représentation L-R du nombre flou $\tilde{N}_i$
1	$\tilde{N}_1$	$\langle 1.45455, 0.20455, 0.26420 \rangle_{LR}$
2	$\tilde{N}_2$	$\langle 1.31959, 0.19231, 0.25184 \rangle_{LR}$
3	$\tilde{N}_3$	$\langle 1.62025, 0.27243, 0.37975 \rangle_{LR}$
4	$\tilde{N}_4$	$\langle 0.22300, 0.01804, 0.02010 \rangle_{LR}$
5	$\tilde{N}_5$	$\langle 0.80000, 0.09545, 0.11667 \rangle_{LR}$
6	$\tilde{N}_6$	$\langle 1.31959, 0.19231, 0.25184 \rangle_{LR}$
7	$\tilde{N}_7$	$\langle 0.23400, 0.01947, 0.02181 \rangle_{LR}$
8	$\tilde{N}_8$	$\langle 0.65306, 0.06816, 0.08027 \rangle_{LR}$
9	$\tilde{N}_9$	$\langle 0.61538, 0.06181, 0.07212 \rangle_{LR}$
10	$\tilde{N}_{10}$	$\langle 3.47429, 0.80913, 1.38618 \rangle_{LR}$

TABLE 4.3 – Représentations L-R des nombres flous de clients par station.

Dans chacune de relations de (4.26) à (4.29), on remplace chaque variable par sa représentation L-R, et on effectue les calculs en choisissant les formules convenables parmi les relations (1.79), (1.80), (1.81) et (1.89), pour obtenir :

- (i) les valeurs de  $\tilde{N}_i$  : voir la table 4.3 ci-dessus.
- (ii) les valeurs de  $\tilde{T}_i$  : voir la table 4.4 ci-dessous.
- (iii) la valeur de  $\tilde{N}$  :

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{10} \tilde{N}_i = \langle 11.71370, 1.93366, 2.84477 \rangle_{LR} \quad (4.30)$$

La valeur modale de  $\tilde{N}$  est 11.7137 ; et son support est

$$\text{supp}(\tilde{N}) = ]9.783, 14.562[$$

- (iv) la valeur de  $\tilde{T}$  :

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} = \langle 0.36605, 0.06969, 0.10357 \rangle_{LR} \quad (4.31)$$

La valeur modale de  $\tilde{T}$  est 0.36605 ; et son support est :

$$\text{supp}(\tilde{T}) = ]0.296, 0.470[$$

$i$	Nombre flou $\tilde{T}_i$	Représentation L-R du nombre flou $\tilde{T}_i$
1	$\tilde{T}_1$	$\langle 0.08182, 0.01364, 0.01798 \rangle_{LR}$
2	$\tilde{T}_2$	$\langle 0.09278, 0.01592, 0.02127 \rangle_{LR}$
3	$\tilde{T}_3$	$\langle 0.11392, 0.02203, 0.03124 \rangle_{LR}$
4	$\tilde{T}_4$	$\langle 0.04704, 0.00511, 0.00589 \rangle_{LR}$
5	$\tilde{T}_5$	$\langle 0.07500, 0.01095, 0.01371 \rangle_{LR}$
6	$\tilde{T}_6$	$\langle 0.09278, 0.19231, 0.25184 \rangle_{LR}$
7	$\tilde{T}_7$	$\langle 0.04936, 0.00548, 0.00634 \rangle_{LR}$
8	$\tilde{T}_8$	$\langle 0.06122, 0.00805, 0.00974 \rangle_{LR}$
9	$\tilde{T}_9$	$\langle 0.05764, 0.00737, 0.00884 \rangle_{LR}$
10	$\tilde{T}_{10}$	$\langle 0.15429, 0.03952, 0.06852 \rangle_{LR}$

TABLE 4.4 – Représentations L-R des temps d'attente flous par station.

Sans connaître exactement les formes qu'ont leurs courbes, les graphes de fonctions d'appartenance de  $\tilde{N}$  et  $\tilde{T}$  se placent approximativement au dessus de ces supports comme représentés respectivement sur les figures 4.2 et 4.3 ci-dessous.

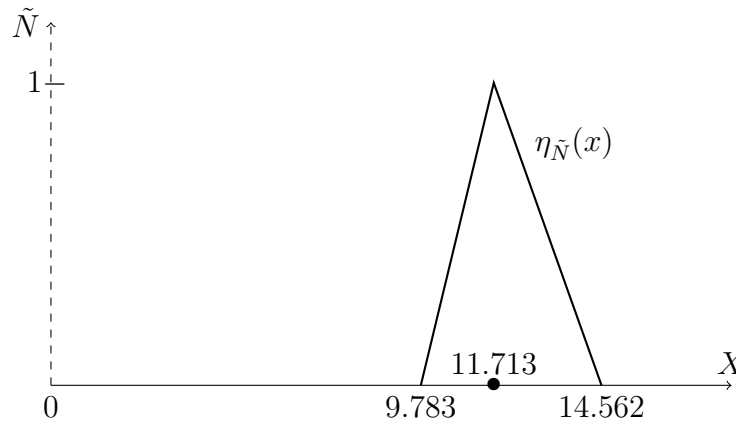
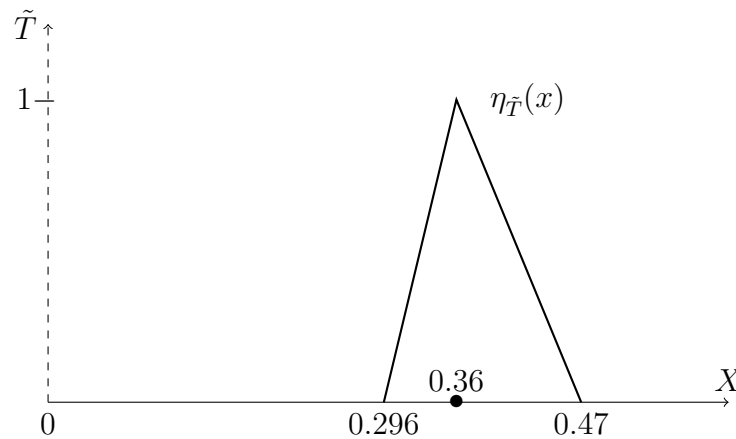


FIGURE 4.2 – Fonction d'appartenance du nombre moyen de clients  $\tilde{N}$ .

En conclusion, les mesures de performance du réseau sont des nombres flous obtenus ci-dessus. Le débit  $\tilde{d}$  du réseau et les débits  $\tilde{d}_i$  de guichets sont donnés respectivement en (4.25) et sur la table 4.1. Le nombre de clients à



FIGURE 4.3 – Fonction d'appartenance du temps moyen de séjour  $\tilde{T}$ .

chaque guichet  $i$  noté  $\tilde{N}_i$  est un nombre flou repris sur la table 4.3. Le temps d'attente d'un client à un guichet  $i$  noté  $\tilde{T}_i$  est sur la table 4.4. Le nombre total de clients au réseau en régime stationnaire est approximativement le nombre flou de type L-R repris à l'égalité (4.30). Cette égalité signifie que le nombre de clients qui attendent le service au réseau est compris entre 9 et 15 ; et que le nombre le plus possible est 12. De même, le temps de séjour d'un client au réseau en régime stationnaire est le nombre donné en (4.31) ; il est compris approximativement entre 0.297 et 0.469 heure. Sa valeur la plus possible est de 0.366 heure, soit 21 min 57 sec.

#### 4.5.2.2 Calcul de nombres de places assises à chaque guichet

Les bornes du support du nombre flou  $\tilde{N}_i$  indiquent les limites du nombre de clients qui fréquentent le guichet  $i$ . La borne supérieure diminuée d'une unité, équivaut au nombre de places assises minimum qu'il faut prévoir à chaque guichet, si l'on voudrait que tous les clients en attente soient assis excepté celui qui est dans le serveur. Ainsi, vu les résultats sur la table 4.3, les différents supports de tous les nombres  $\tilde{N}_i$  sont donnés par la table 4.5 ci-dessous :

D'après cette table, les guichets qui reçoivent plus d'un client sont : 1, 2, 3, 6 et 10. Les guichets 1, 2, 3 et 6 reçoivent tout au plus deux clients tandis que le guichet 10 en reçoit tout au plus 5.

En conclusion, il faut prévoir 1 place assise aux guichets 1, 2, 3, 6 ; et 4 places assises au guichet 10.

	Nombre flou $\tilde{N}_i$	Support du nombre flou $\tilde{N}_i$
1	$\tilde{N}_1$	]1.25, 1.72[
2	$\tilde{N}_2$	]1.13, 1.57[
3	$\tilde{N}_3$	]1.35, 2[
4	$\tilde{N}_4$	]0.2, 0.24[
5	$\tilde{N}_5$	]0.7, 0.92[
6	$\tilde{N}_6$	]1.13, 1.57[
7	$\tilde{N}_7$	]0.21, 0.26[
8	$\tilde{N}_8$	]0.58, 0.73[
9	$\tilde{N}_9$	]0.55, 0.69[
10	$\tilde{N}_{10}$	]2.67, 4.86[

TABLE 4.5 – Supports des nombres flous de clients par station.

## 4.6 Comparaison des résultats du modèle flou à ceux du modèle classique

### 4.6.1 Problème

A quelles mesures de performance ce problème de supermarché aurait-il mené dans le modèle classique au cas où les paramètres du réseau seraient des nombres réels égaux aux valeurs modales respectives de  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}_i$ , pour  $1 \leq i \leq 10$  ?

### 4.6.2 Résolution

- 1° En notant par  $\lambda$  et  $\mu_i$  ces nouveaux paramètres, la matrice des routages  $R$  et les différents taux de visite  $\tau_i$  restent les mêmes pour  $1 \leq i \leq 10$ .
- 2° Les différents taux d'arrivée aux stations notés  $\lambda_i$ , sont des réels égaux aux valeurs modales de nombres flous respectifs repris sur la table 4.1 ; pour  $1 \leq i \leq 10$ .
- 3° Comparés aux différents taux de service  $\mu_i$  dans les différentes stations, il y a lieu de constater que chaque  $\lambda_i$  est strictement inférieur à  $\mu_i$  ; pour  $1 \leq i \leq 10$ . Ce qui veut dire que le système est stable et ainsi, les calculs des mesures de performance peuvent commencer.
- 4° Les calculs des nombres de clients au niveau de stations par le système d'équations en (4.7) donnent des valeurs égales aux valeurs modales respectives reprises sur la table 4.3 pour chaque  $N_i$  ; pour  $1 \leq i \leq 10$ .

5° Les calculs des temps d'attente de clients au niveau de stations par le système d'équations en (4.9) donnent des réels égaux aux valeurs modales respectives reprises sur la table 4.4 pour chaque  $T_i$  ; pour  $1 \leq i \leq 10$ .

6° Le nombre moyen de clients en attente dans le réseau à l'état d'équilibre est :

$$N = \sum_{i=1}^{10} N_i \approx 11.73$$

7° Le temps moyen de séjour d'un client dans le réseau à l'état stationnaire est :

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{11.73}{32} \approx 0.366$$

### 4.6.3 Constats

- Tous les chiffres manipulés dans le modèle classique se retrouvent dans le modèle flou. Ainsi, le modèle classique apparaît comme un sous-modèle du modèle flou.
- Le modèle classique décrit une mesure de performance par sa valeur moyenne ; alors que le modèle flou la décrit par un intervalle dans lequel elle est comprise, tout en présentant la valeur moyenne de l'approche classique comme la valeur ayant la mesure de possibilité la plus élevée.

Ces constats permettent de conclure que le modèle flou est plus réaliste et plus informatif que le modèle classique.

## 4.7 Conclusion du chapitre

Par cette étude, nous venons d'introduire la théorie des ensembles flous dans l'analyse de réseaux de files d'attente à forme produit pour la toute première fois, en vue d'évaluer les paramètres de performance. L'outil clé sur lequel nous nous sommes appuyés est la "méthode L-R" que nous venons d'introduire dans ce travail à partir du troisième chapitre. Cette méthode est basée sur l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes. Les principes de séparabilité et d'indépendance à l'équilibre d'un réseau à forme produit nous ont permis d'effectuer les calculs dans des stations isolées d'abord, et ensuite dans tout le réseau. A l'exception

de la distribution stationnaire, toutes les mesures de performance semblables à celles calculées en modèle classique ont été obtenues et un procédé qui permet de les calculer est proposé. Les différentes mesures de performance sont des nombres flous approximatifs, obtenus sous la représentation L-R. L'état flou de ces mesures montre qu'un réseau à forme produit, dans lequel on introduit des informations imprécises, garde cette imprécision durant tout son processus. Comparés à ceux obtenus en modèle classique, les résultats obtenus en modèle flou sont plus informatifs et plus réalistes.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Tout au long de ce travail, le problème principal que nous cherchions à résoudre était de trouver une méthode de calcul des performances d'un réseau de files d'attente à forme produit, lorsque les paramètres d'opération qui le décrivent sont des nombres flous. Ces performances sont des indicateurs des éléments à réajuster dans le réseau lorsqu'on veut éviter des situations explosives ou chaotiques dans le processus de son fonctionnement.

En réponse à ce problème, nous venons d'introduire au moyen de l'arithmétique de nombres flous de type L-R, une première méthode de calcul de ces performances que nous avons dénommée *méthode L-R*. Celle-ci calcule tous les paramètres caractéristiques d'un réseau de files d'attente floues à forme produit pareils à ceux calculés dans le modèle classique.

Pour y arriver, nous avons rappelé au premier chapitre, la théorie des ensembles flous, qui rend possible l'analyse des files d'attente et des réseaux de files d'attente floues. Au cours de ce chapitre, nous nous sommes beaucoup appesantis sur les nombres flous de type L-R et sur leur arithmétique, auxquels nous avons apporté deux contributions :

- Premièrement, nous avons proposé dans [134] une démonstration à la proposition selon laquelle *le produit de deux nombres flous de même type L-R n'est pas nécessairement de type L-R*, proposition longtemps énoncée dans la littérature sans démonstration (cf. sous-section 1.8.2 problème 1).

- Ensuite, sur base des éléments de cette démonstration, nous avons développé dans cette même référence une forme d'approximation identique à celle trouvée bien avant par Hanss, dite *approximation sécante*, qui donne les valeurs exactes de ce produit en ce qui concerne la valeur modale et le support (cf. sous-section 1.8.2 problème 2).

Cette propriété caractéristique de l'approximation sécante étant aussi valable pour le quotient de deux nombres flous de type L-R, nous avons conclu que

l'arithmétique des nombres flous de type L-R, pour laquelle les produits et les quotients sont calculés par leurs approximations sécantes, conduit aux mêmes résultats que l'arithmétique usuelle des alpha-coupes et intervalles au cas où l'on ne s'intéressait qu'aux valeurs modales et supports de nombres flous obtenus. C'est cet important résultat qui nous a permis d'introduire au troisième et quatrième chapitres, le calcul des performances par l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes.

Le deuxième chapitre a traité de chaînes de Markov floues, qui sont à l'origine de l'étude d'un bon nombre de files d'attente floues. En effet, certaines files d'attente se déroulant en modèle classique comme des chaînes de Markov à temps discret, il suffit tout simplement d'introduire quelques imprécisions au niveau des paramètres de ces chaînes pour que ces files deviennent des files d'attente floues. Par ailleurs, les chaînes de Markov floues étant caractérisées par des matrices floues, nous avons proposé une contribution importante liée à ces deux concepts. Il s'agit d'une nouvelle approche de calcul de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue par la composition max-min (cf. section 2.5). Cette nouvelle approche est obtenue par l'introduction du nouveau concept " *d'ensemble flou propre à droite* " d'une matrice floue, qui nous est inspiré par celui " *d'ensemble flou propre* " d'une relation floue longtemps introduit par Sanchez. Au terme de cette étude, deux résultats majeurs sont obtenus, à savoir :

- Les valeurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue, traitées sous la composition max-min, sont des nombres réels non nuls appartenant à l'intervalle unité  $[0,1]$ , dont le nombre est généralement indéterminé (cf. sous-section 2.5.2).
- Les vecteurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov floue sont de deux catégories : ceux qui sont des ensembles flous propres à droite de la matrice de transition et ceux qui ne le sont pas (cf. sous-section 2.5.2).

Le troisième chapitre a abordé la question des paramètres de performance de files d'attente floues. Partant de la méthode des PNL $P(s)$  qui calcule bien ces paramètres dans la littérature, nos contributions ont consisté à :

- concevoir pour ces mêmes paramètres deux nouvelles méthodes conduisant pratiquement aux mêmes résultats. Il s'agit de la méthode des alpha-

coupes assouplie (flexible alpha-cuts method), qui ne fait usage que d'une seule arithmétique floue (cf. section 3.5), et de la méthode L-R (L-R method), qui fait usage de l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes (cf. section 3.5),

- proposer à la sous-section 3.3.2 un procédé de calcul en vue d'une bonne application de la méthode des alpha-coupes assouplie,
- proposer à la sous-section 3.5.2 un procédé de calcul en vue d'une bonne application de la méthode L-R,
- montrer la validité et la praticabilité de ces méthodes par un exemple numérique provenant d'un système d'attente du domaine d'Informatique (cf. sections 3.4 et 3.6).

La comparaison de ces deux méthodes a révélé que la deuxième prend un certain avantage sur la première par le fait qu'elle soit courte, pratique, facile à appliquer et dépourvue de programmes mathématiques d'optimisation.

Au quatrième et dernier chapitre, nous avons utilisé les résultats obtenus au troisième chapitre pour mettre au point une première approche mathématique de calcul des paramètres de performance d'un réseau de files d'attente à forme produit lorsque les paramètres de fonctionnement du réseau sont des nombres flous de même type L-R.

Ainsi,

- Par les principes de séparabilité et d'indépendance à l'état d'équilibre reconnus à un réseau de files d'attente à forme produit, nous avons appliqué la méthode L-R d'abord à chacune de stations du réseau isolée, et enfin au réseau tout entier afin de trouver les différents paramètres ;
- La condition de stabilité d'un réseau qui ouvre la voie au calcul de ces paramètres en régime permanent telle que définie en modèle classique, a été revue et réajustée à l'environnement flou (cf. sous-section 4.3.2) ;
- En fonction des formules analytiques de différents paramètres de performance, nous avons élaboré un procédé qui permet de calculer n'importe quel paramètre de performance du réseau par les formules L-R (cf. sous-section 4.4.2) ;
- Le problème de supermarché que nous avons conçu et résolu dans le cadre d'une application numérique, prouve à suffisance que la méthode L-R est une approche mathématique pratique, applicable aux problèmes réels liés aux performances de réseaux de files d'attente floues à forme produit de notre environnement (cf. section 4.5).



De plus, plusieurs résultats obtenus au niveau de ce dernier chapitre permettent d'affirmer les hypothèses émises en introduction générale.

- La sous-section 4.4.1 montre que la méthode des alpha-coupes assouplie (considérée en quelque sorte comme la méthode des PNLP(s) abrégée) qui analyse bien les paramètres de performance d'une file d'attente floue simple, peut aussi aider à calculer ceux d'un réseau de files d'attente floues à forme produit, mais que sa faiblesse réside dans la multiplicité de programmes d'optimisations à résoudre, programmes dûs au nombre élevé de serveurs et de paramètres de fonctionnement dans un réseau.
- La sous-section 4.4.2 présente l'arithmétique des nombres flous de type L-R comme un moyen scientifique de contourner cette faiblesse et d'arriver directement au but. L'unique élément qui doit être pris en compte dans l'application de cette arithmétique est que les multiplications et les divisions soient opérées uniquement par leurs formules d'approximations sécantes pour de meilleurs résultats.
- Enfin, la section 4.5 et la sous-section 4.4.2 confirment que la méthode L-R est bel et bien une approche mathématique qui calcule les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente à forme produit lorsque ses paramètres de fonctionnement sont des nombres flous de même type L-R.

Cette première méthode introduite sur les réseaux de files d'attente floues à forme produit, dite méthode L-R, constitue du reste une solution au problème fondamental qui nous a poussé à entreprendre cette recherche. Elle est scientifiquement valable et consolide les résultats obtenus auparavant par la méthode usuelle des PNLP(s) qui l'a longtemps précédée et qui a déjà fait ses preuves sur les files d'attente floues simples. Nous venons de montrer qu'elle s'applique à tous les réseaux de files d'attente floues à forme produit dont les paramètres de fonctionnement sont des nombres flous de même type L-R. Les principaux paramètres de performance qu'elle calcule sur un tel réseau sont :

- le débit du réseau ;
- le débit de chaque station ;
- le temps de séjour d'un client dans le réseau ;
- le temps d'attente d'un client dans chacune de stations ;
- la longueur de la file d'attente dans le réseau en période d'équilibre ;
- la longueur de la file d'attente dans chacune de stations en régime per-

manent.

Tous ces paramètres sont des nombres flous au lieu des nombres réels obtenus en modèle classique. Ils caractérisent généralement les performances d'un réseau ouvert de files d'attente floues à forme produit de quelque type qu'il soit. Le fait qu'ils soient des nombres flous, signifie qu'un réseau à forme produit conserve l'imprécision des informations introduites à travers ses paramètres durant tout son processus.

Ce faisant, nous avons atteint l'objectif global que nous nous étions assignés au cours de cette dissertation à savoir, celui de trouver une approche mathématique d'analyse des performances d'un réseau de files d'attente floues à forme produit. Toutefois, malgré l'exactitude de résultats auxquels nous sommes parvenus par cette approche, soulignons néanmoins qu'elle a des limites :

- Jusqu'à ce niveau d'étude, elle est encore incapable de calculer les paramètres de performance d'un réseau de files d'attente floues à forme produit dont les paramètres de fonctionnement sont des nombres flous quelconques ou des nombres flous de types L-R différents,
- Les graphes de fonctions d'appartenance de paramètres calculés sont souvent approximatifs et non exacts.

Par conséquent, cette étude, qui est de toute évidence la première du genre dans ce domaine, ouvre une porte à de nombreuses perspectives de recherche, notamment :

- Existe-t-il une possibilité d'appliquer cette méthode L-R aux réseaux de files d'attente floues à forme produit dont les paramètres de fonctionnement sont de types L-R différents ou ne sont pas de type L-R ?
- Est-il possible de réaliser la même étude dans un réseau où les stations sont des files simples  $FM/FM/c$  ou  $FM/FM/c/N_s$  ?
- Puisque nous venons de traiter la question des performances de réseaux à

forme produit ouverts, dits aussi de Jackson, y a-t-il moyen d'entreprendre la même étude dans des réseaux à forme produit fermés dits, de Gordon-Newell ou dans des réseaux à forme produit multiclassés dits, de BCMP (Baskett-Chandy-Muntz-Palacios) ?

– Peut-on envisager une étude similaire dans le contexte où les routages de clients constituent un processus stochastique flou ?

La liste est longue tant et si bien que l'on n'ait pas encore abordé en modèle flou les principaux problèmes d'un réseau de files d'attente résolu en modèle classique.

# Bibliographie

- [1] Abramovich F. Wagenknecht M. and Khurgin Y.I. **Solution of L-R type Fuzzy Systems of Linear Algebraic Equations**. [Online], Available : [http ://www.polytech.univ-savoie.fr/...autres.../35\\_18.pdf](http://www.polytech.univ-savoie.fr/...autres.../35_18.pdf) (September 14, 2014).
- [2] Adak A.K., Bhowmik M. and Pal M. **Intuitionistic Fuzzy Block Matrix and its Some Properties**. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 1(1) : 13-31, 2012.
- [3] Ahmed S.I. **Fuzzifying Markov Decision Process**. PhD thesis in Mathematics, Osmania University, May 2005.
- [4] Aissani A. and Artalejo J.R. **On the Single Sever Retrial Queue Subject to Breakdowns**. *Queueing Systems*, 30 :309–321, 1998.
- [5] Allahviranloo T., Salahshour S. and Khezerloo M. **Maximal and Minimal Symmetric Solutions of Fully Fuzzy Linear Systems**. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages 4652–4662, 2011.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.05.009](http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.05.009).
- [6] Allen A.O. **Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications**. ACADEMIC PRESS, INC., New York, second edition, 1990.
- [7] Artalejo J.R. and Corral A.G. **Retrial Queueing Systems, A Computational Approach**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] Asan U., Asan S.S. and Soyer A. **Alternative Methods for Calculating the Fuzzy Limit Matrix in the Analytic Network Process**. In *Proceedings of the 41st International Conference on Computers and Industrial Engineering*, pages 68–73, 2013.
- [9] Atanassov K.T. **Intuitionistic Fuzzy Sets**. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 : 87 – 96, 1986.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3).

- [10] Avrachenkov K.E. and Sanchez E. **Fuzzy Markov Chains and Decision Making**. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(2) :143–159, 2002.  
*http : //dx.doi.org/10.1023/A : 1015729400380.*
- [11] Barak S. and Fallahnezhad M.S. **Cost Analysis of Fuzzy Queueing Systems**. *International journal of Applied Operation Research*, 12, 2012.
- [12] Baruah H.K. **Towards Forming a Field of Fuzzy Sets**. *International Journal of Energy, Information and Communications*, 2(1) : 16–20, Feb 2011.
- [13] Baskett F., Chandy M., Muntz R. and Palacios F.G. **Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers**. *J. of the ACM*, 22 : 248–260, March 1975.
- [14] Baynat B. *Théorie des Files d’Attente : Des Chaînes de Markov aux Réseaux à Forme Produit*. Hermès Science Europe, Paris, 2000.
- [15] Bede B. **Product Type Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology**. *Acta Polytechnica Hungarica*, 3 : 123 – 139, 2006.
- [16] Bede B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.  
*http : //dx.doi.org/10.1007/978 – 3 – 642 – 35221 – 8.*
- [17] Bellman R.E and Zadeh L.A. **Decision-making in a Fuzzy Environment**. *Management Science*, 17 :141–164, 1970.
- [18] Berleant D. and Zhang J. **Bounding the Times to Failure of 2-component Systems**. *Transactions on Reliability*, 53(4) :542–550, 2004.
- [19] Bolch G. , Greiner S., De-Meer H. and Trivedi K. S. *Queueing Networks and Markov Chains*. John Wiley & Sons, New Jersey, second edition, 2006.
- [20] Borah M.J., Neog T.J. and Sut D.K. **Fuzzy Soft Matrix Theory and Its Decision Making**. *International Journal of Modern Engineering Research*, 2 :121–127, 2012.
- [21] Boucherie R.J. and van Dijk N. M. **Product Forms for Queueing Networks with State Dependent Multiple Job Transitions**. *Adv. Appl. Prob.*, pages 152–187, 1991.
- [22] Boucherie R.J. and van Dijk N. M. **Local Balance in Queueing Networks with Positive and Negative Customers**. *Serie Research Memoranda*, Vrije Universiteit - Amsterdam, pages 1–32, 1992.

- [23] Boucherie R.J. and van Dijk N. M. **On the Arrival Theorem for Product Form Queueing Networks with Blocking.** *Performance Evaluation*, 29 :155–176, 1997.
- [24] Boucherie R.J. and van Dijk N. M. **Queueing Networks, A Fundamental Approach.** Springer Science+Business Media, New York, 2011.
- [25] Bouchon-Meunier B. **La Logique Floue et Ses Applications.** Addison-Wesley France, Paris, 1995.
- [26] Bouchon-Meunier B., Foulloy L. and Ramdani M. **Logique Floue, Exercices Corrigés et Exemples d'Applications.** Cépaduès-Editions, Toulouse, 1998.
- [27] Bourke M.M. and Fisher D.G. **Convergence, Eigen Fuzzy Sets and Stability Analysis of Relational Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 81 :227–234, 1996.
- [28] Bruni A., Boughanem M. and Dubois D. **Réseaux Possibilistes pour un Modèle de Recherche d'Information.** In *Conférence francophone en Recherche d'information et Applications*, Lyon, Mars 2006.
- [29] Buckley J.J. **Fuzzy Eigenvalues and Input-Output Analysis.** *Fuzzy Sets and Systems*, 34 :187–195, 1990.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/0165 – 0114\(90\)90157 – 3](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(90)90157-3).
- [30] Buckley J.J. **Note on Convergence of Powers of a Fuzzy Matrix.** *Fuzzy Sets and Systems*, 121 :363–364, 2001.
- [31] Buckley J.J. **Fuzzy Probabilities, New Approach and Applications.** Physica –Verlag, Heidelberg, 2003.
- [32] Buckley J.J. **Fuzzy Probabilities and Fuzzy Sets for Web Planing.** Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [33] Buckley J.J. and Eslami E. **An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets.** Springer –Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [34] Buckley J.J. and Eslami E. **Fuzzy Markov Chains : Uncertain Probabilities.** *Mathware Soft Computing*, 9 :33–41, 2002.
- [35] Buckley J.J., Eslami E. and Feuring T. **Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering.** Physica-verlag, Heidelberg, 2010.
- [36] Buckley J.J., Feuring T. and Hayashi Y. **Fuzzy Markov Chains.** In *Proc. 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, pages 2708–2711, 2001.

- [37] Buckley J.J. and Jowers L.J. ***Simulating Continuous Fuzzy Systems***. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [38] Cai K. **System Failure Engineering and Fuzzy Methodology : An Introductory Overview**. *Fuzzy Sets and Systems*, 83 :113–133, 1996.
- [39] Caillot H., Hillion A. and Pieczynski. **Fuzzy Random Markov Fields and Unsupervised Image Segmentation**. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 4 :801–810, 1993.
- [40] Chao X., Miyazawa M. and Pincdo M. **Queueing Networks-Customers, Signals, and Product Form Solutions**. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 14(4) :421–426, 2001.
- [41] Chen S.H., Wang S.T. and Shang S.M. **Some Properties of Graded Mean Integration Representation of L-R Type Fuzzy Numbers**. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 22(2) :185– 208, 2006.
- [42] Chen S.P. **Performance Evaluation of Open Queueing Networks with Fuzzy Parameters**. *Cybernetics and Systems*, 37(8) :861– 878, 2006.
- [43] Chergui L. **Diagnostic des Défaillances et Optimisation des Architectures des Systèmes Instrumentés de Sécurité : Apport de la Logique Floue**. Master's thesis in Mathematics, Université El-Hadj Lakhdar-Batna, Algérie, 2010.
- [44] Chetia B. and Das P.K. **Some Results of Intuitionistic Fuzzy Soft Matrix Theory**. *Advances in Applied Science Research*, 3(1) :412–423, 2012.
- [45] Chiao K.-P. **Convergence and Oscillation of Fuzzy Matrices under SUP-T Composition**. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 13 :17–29, 1998.
- [46] Chiao K.-P. **Generalized Fuzzy Eigenvalue Problems**. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 14 :31–37, 1998.
- [47] Coit D., Jin T. and Wattanapongsakorn N. **System Optimization with Component Reliability Estimation Uncertainty : A Multicriteria Approach**. *IEEE Transactions on Reliability*, 53(3) :369–380, 2004.
- [48] Coolen F. and Utkin L. **Imprecise Reliability : A Concise Overview**. *European Safety and Reliability Conference ; Risk, Reliability and Societal Safety*, pages 1959–1966, 2007.
- [49] Daduna H. **Queueing Networks- Customers, Signals, and Product form Solutions by X. Chao, M. Miyazawa, and M. Pincdo ; and Introduction to Stochastic Networks by R.F. Scrfozo : a Book Review**.

- Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 14(4) : 421 – 426, 2001.
- [50] Devaraj J. and Jayalakshmi D. **A Fuzzy Approach to Non-Preempted Priority Queues.** *International Journal of Mathematical Archive*, 3(7) : 2704 – 2712, 2012.
- [51] Dhar M. **A Note on Determinant and Adjoint of Fuzzy Square Matrix.** *I.J. Intelligent Systems and Applications*, 05 :58–67, 2013.
- [52] Dhar M. **A Note on Determinant of Square Fuzzy Matrix.** *I.J. Information Engineering and Electronic Business*, 1 :26–32, 2013.
- [53] Dhar M. **Representation of Fuzzy Matrices Based on Reference Function.** *I.J. Intelligent Systems and Applications*, 2 :84–90, 2013.  
[http : //dx.doi.org/10.5815/ijisa.2013.02.10](http://dx.doi.org/10.5815/ijisa.2013.02.10).
- [54] Dinagar S. and Latha K. **Some Types of Type-2 Triangular Fuzzy Matrices.** *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 82(1) : 21 – 32, 2013.
- [55] Drewniak J. and Sitek A. **Eigen Subspace for Fuzzy Relation.** In *Polish Symposium on Fuzzy Sets and Interval Mathematics*, pages 1–8, Poznan, September 1989.
- [56] Duan J.-S. **The Transitive Closure, Convergence of Powers and Adjoint of Generalized Fuzzy Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 145 : 301 – 311, 2004.
- [57] Dubois D. and Prade H. **Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications.** Academic Press, New York, 1980.
- [58] Dubois D., Prade H. and Yager R.R. **Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems.** Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo (California), 1993.
- [59] Dunyak J. **A Theory of Independent Fuzzy Probability for System Reliability.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7 :286–294, 1999.
- [60] El-Taha M. and Stidham J.S. **Sample-Path Analysis of Queueing Systems.** Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.
- [61] Erlang A.K. **The Theory of Probabilities and Telephone Conversations.** *Nyt Tidsskrift Matematik B*, 20 :33–39, 1909.
- [62] Esogbue A.O. and Bellman R.E. **Fuzzy Dynamic Programming and its Extensions.** *TIMS/ Studies in the Management Sciences*, 20 :147–167, 1984.



- [63] Falin G.I. and Templeton J.G.C. **Retrials Queues**. Springer-Sciences + Business MEDIA, London, 1997.
- [64] Fan Z.-T. and Liu D.-F. **Convergence of the Power Sequence of a Nearly Monotone Increasing Fuzzy Matrix**. *Fuzzy Sets and Systems*, 88 :363–372, 1997.
- [65] Fan Z.-T. and Liu D.-F. **On the Oscillating Power Sequence of a Fuzzy Matrix**. *Fuzzy Sets and Systems*, 93 :75–85, 1998.
- [66] Fotso C. and Fotso L.P. **Phénomène d’Attente dans un Système Bancaire ; Approximations des Mesures des Performances des Files d’Attente**. *Université de Yaoundé I*, Yaoundé, 2006.
- [67] Gacôgne L. **Eléments de Logique Floue**. Hermès, Paris, 1997.
- [68] Gandhimathi T. **Characterization of Various G-Inverses of Intuitionistic Fuzzy Matrices**. *Global Journal of Mathematical Sciences : Theory and Practical*, 4(4) :389–396, 2012.
- [69] Gani A.N. and Kumar V. A. **A Bulk Arrival Queuing Model with Fuzzy Parameters and Fuzzy varying Batch Sizes**. *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, 2(3) :1–8, August 2013.
- [70] Gani A.N. and Manikandan A.R. **On Fuzzy Det-norm Matrix**. *J. Math. Comput. Sci.*, 3 :233–241, 2013.
- [71] Gelenbe E. **Product Form Queueing Networks with Positive and Negative Customers**. *Adv. Appl. Prob.*, 28 :656–663, 1991.
- [72] Gelenbe E. **Special issue on G-Networks and their Applications**. *Performance Evaluation*, 67 :415–416, 2010.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/S0166-5316\(10\)00029-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-5316(10)00029-5).
- [73] Godjevac J. **Idées Nettes sur la Logique Floue**. P.P.U.R., Lausanne, 1999.
- [74] Goetschel R. and Voxman W. **Elementary Fuzzy Calculus**. *Fuzzy Sets and Systems*, 18 :31–43, 1986.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/0165-0114\(86\)90026-6](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(86)90026-6).
- [75] Gordon W.J. and Newell G.F. **Closed Queueing Networks with Exponential Servers**. *Ops. Res.*, 8 :252–267, 1967.
- [76] Gordon W.J. and Newell G.F. **Cyclic Queueing Networks with Exponential Servers**. *Operations Research*, 15(2) :254–265, 1967.
- [77] Gross D., Shortie J.F. Thompson J.M. and Harris C.M. **Fundamentals of Queueing Theory, Fourth Edition**. Wiley, New Jersey, USA, 2008.

- [78] Guo L. **Software Quality and Reliability Prediction using Dempster-Shafer Theory**. PhD thesis in Mathematical Sciences, West Virginia University, Virginia, 2004.
- [79] Guu S.-M. **Fuzzy Matrices and Fuzzy Markov Chains**. Chang Gung University, pages 1–43, 2013. [www.zccfe.uzh.ch / pastevents / workshop2013 / program / guu - zurichpresentation.pdf](http://www.zccfe.uzh.ch/pastevents/workshop2013/program/guu-zurichpresentation.pdf).
- [80] Hanss M. **Applied Fuzzy Arithmetic, An Introduction with Engineering Applications**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [81] Hashimoto H. **Convergence of Powers of a Fuzzy Transitive Matrix**. *Fuzzy Sets and Systems*, 9 : 153–160, 1983.
- [82] Henriet L. and Perny P. **Méthodes Multicritères Non Compensatoires pour la Classification Floue d'Objets**. In *Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications*, pages 9–15. Nancy, 1996.
- [83] Hukuhara M. **Intégration des Applications Mesurables dont la Valeur est un Compact Convexe**. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10 :205–223, 1967.
- [84] Hung W-L. and Yang M-S. **Fuzzy Clustering on LR-Type Fuzzy Numbers with Application in Taiwanese Tea Evaluation**. *Fuzzy Sets and systems*, 150 :561–577, 2005.
- [85] Jackson J.R. **Networks of Waiting Lines**. *University of California*, pages 518–521, 1957.
- [86] Jain R. **Tolerance Analysis Using Fuzzy Sets**. *Int. J. Syst. Sci.*, 7(12) : 1393–1401, 1976.
- [87] Jeeva M. and Rathnakumari E. **Fuzzy Cost Computations of M/M/1 and M/G/1 Queueing Models**. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(1) :120–132, 2014.
- [88] Kahraman C. **Fuzzy Applications in Industrial Engineering**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [89] Kalayanaraman R., Thillaigovindan N. and Kannadasan G. **A Single Server Fuzzy Queue with Unreliable Server**. *International Journal of Computational Cognition*, 8(1) :1–4, March 2010.
- [90] Kampempe J.D. **Sur la Prise en Compte de l'Imprécision et de l'Incertitude en Programmation Mathématique Multiobjectif**. Thèse de Doctorat en Sciences Mathématiques, Université de Kinshasa, R.D.Congo, 2013.

- [91] Kandel A. **Fuzzy mathematical Techniques with Application**. Addison-Wesley Publishing Company, Tokyo, 1996.
- [92] Kao C., Li C.C. and Chen S.P. **Parametric Programming to the Analysis of Fuzzy Queues**. *Fuzzy Sets and Systems*, 107 :93–100, 1999.  
[http : /dx.doi.org/10.1016/S0165 – 0114\(97\)00295 – 9](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00295-9).
- [93] Kaufmann A. **Introduction à la théorie des sous-ensembles flous (Fuzzy sets theory) ; 1. Eléments théoriques de base**. Masson et Cie, Paris, 1973.
- [94] Kaufmann A. **Introduction à la théorie des sous-ensembles flous (Fuzzy sets theory), 2. Applications à la linguistique, à la logique et à la sémantique**. Masson et Cie, Paris, 1975.
- [95] Kaufmann A. **Initiation Élémentaire aux Sous-Ensembles Flous à l’Usage des Débutants**. CPIT, EPFL, 1992.
- [96] Kaufmann A. **Introduction à la Logique**. *Techniques de l’ingénieur*, A120, 64(2) :1–9, 1992.
- [97] Ke J.-C., Huang H.-I. and Lin C.-H. **On Retrial Queuing Model with Fuzzy Parameters**. *Physica A*, 374 :272–280, 2007.
- [98] Kelly F. **Networks of Queues**. *Adv. of Appl. Prob.*, 8 :416–432, 1976.
- [99] Kelly F.P. **Reversibility and Stochastic Networks**. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [100] Keresztfalvi T. **T-norm Based Product of L-R Fuzzy Numbers**. In *Computer Center of L. Eotvos University, pages 1–6, Budapest*.  
[www.polytech.univ – savoie.fr /...autres.../49\\_03.pdf](http://www.polytech.univ-savoie.fr/~autres.../49_03.pdf).
- [101] Khan S.K. and Pal A. **The Generalised Inverse of Intuitionistic Fuzzy Matrices**. *Journal of Physical Sciences*, 11 :62–67, 2007.
- [102] Khan S.K. and Pal M. **Some Operations on Intuitionistic Fuzzy Matrices**. In *International Conference on Analysis and Discrete Structures*, India Institute of Technology, Kharagpur, India, December 2002.
- [103] Kim J.B. **Determinant Theory for Fuzzy and Boolean Matrices**. In *Congressus Numerantium Utilitatis Mathematica Pub*, pages 273–276, 1980.
- [104] Kim J.B. **Inverse of Boolean Matrices**. *Bull. Inst. Math. Acad., Sciences*, 12(2) :125–128, 1984.
- [105] Kim J.B. **Idempotent and Inverse in Fuzzy Matrices**. *Malayasian Math.*, 6(2) :57–61, 1988.

- [106] Kim J.B. and Baartmans A. **Determinant Theory for Fuzzy Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 29 :349–356, 1989.
- [107] Kim K.H. and Roush F.W. **Generalized Fuzzy Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 4 :293–315, 1980.
- [108] Kleinrock L. **Queueing Theory, volume I.** John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [109] Kleinrock L. **Queueing Theory, volume II.** John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [110] Kolodziejczyk W. **Convergence of Powers of S-Transitive Fuzzy Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 26 :127–130, 1988.
- [111] Kruse R., Buck-Emden R. and Cordes R. **Processor Power Considerations – An Application of Fuzzy Markov Chains.** *Fuzzy Sets and Systems*, 21 :289–299, 1987.
- [112] Kurano M., Yasuda M., Nakagami J. and Yoshida Y. **A limit Theorem in Some Fuzzy Dynamic Systems.** *Fuzzy Sets and Systems*, 51 :83–88, 1992.
- [113] Kurano M., Yasuda M., Nakagami J. and Yoshida Y. **Markov Type Fuzzy Decision Processes with a Discounted Reward on a Closed Interval.** *European Journal of Operational research*, 92 :649–652, 1996.
- [114] Kwakernaak H. **Fuzzy Random Variables – I. Definitions and Theorems.** *Information Sciences*, 15 :1–29, 1978.
- [115] Kwakernaak H. **Fuzzy Random Variables – II. Algorithms and Examples for the Discrete Case.** *Information Sciences*, 17 :253–278, 1979.
- [116] Li R.J. and Lee E.S. **Analysis of Fuzzy Queues.** *Proc. NAFIPS 1998*, pages 158–162, June 8-10, 1988.
- [117] Li R.J. and Lee E.S. **Analysis of Fuzzy Queues.** *Computers and Mathematics with Applications*, 17 :1143–1147, 1989.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/0898 – 1221\(89\)90044 – 8.](http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221(89)90044-8)
- [118] Liu B. **Theory and Practice of Uncertain Programming.** Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2009.
- [119] Liu B. **Theory and Practice of Uncertain Programming.** Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 2009.
- [120] Lur Y.-Y., Wu Y.-K. and Guu S.-M. **Convergence of Max-Arithmetic Mean Powers of a Fuzzy Matrix.** *Fuzzy Sets and Systems*, 158 : 2516 – 2522, 2007.

- [121] Luthi J. and Haring G. **Fuzzy Queueing Network Models of Computing Systems**. [http : //www.ani.univie.ac.at](http://www.ani.univie.ac.at), pages 1–15, 1997.
- [122] Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R. **Fuzzy Soft Set**. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9 :589–602, 2001.
- [123] Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R. **Intuitionistic Fuzzy Soft Sets**. *Journal of Fuzzy mathematics*, 12 :669–683, 2004.
- [124] Majumdar P. and Samantha S.K. **Generalised Fuzzy Soft Sets**. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 :1425–1432, 2010.
- [125] Mary K.J. R., Monica P. and Mythili S. **Performance Measures of FM/FM/1 Queueing System with N-Policy**. *International Journal of Physics and Mathematical Sciences*, 4(3) :5–10, September 2014.
- [126] Meenakshi A.R. and Kaliraja M. **g-Inverses of Interval Valued Fuzzy Matrices**. *J. Math. Fund. Sci.*, 45(1) :83–92, 2013.
- [127] Meyn and Tweedie R.L. **Markov Chains and Stochastic Stability**. Springer - Verlag, London, 3rd edition, 1996.
- [128] Molodtsov D. **Soft Set Theory – First Result**. *Computers and Mathematics with Applications*, 37 :19–31, 1999.
- [129] Moloudzadeh S., Darabi P. and Khandani H. **The Pseudo Inverse Matrices to Solve General Fully Fuzzy Linear Systems**. *Journal of Soft Computing and Applications*, 2013 :1–11, 2013.
- [130] Mondal S. and Pal M. **Intuitionistic Fuzzy Incline Matrix Determinant**. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, pages 1–14, 2013.
- [131] Mukeba J.P. **Analysis of Fuzzy Queue Characteristics by Flexible Alpha-cuts Method**. Accepted for publication in *Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis*, pages 1-12, 2016.
- [132] Mukeba J.P. **Analyse des Paramètres de Performances de Réseaux de Files d'Attente à Forme Produit**. Mémoire de DEA en Sciences Mathématiques, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 30 Novembre 2012.
- [133] Mukeba J.P. **Application of L-R Method to Single Server Fuzzy Retrieval Queue with Patient Customers**. *Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications*, 16(1) : 43 - 59, August 2016.  
[http : //dx.doi.org/10.18642/jpamaa\\_7100121698](http://dx.doi.org/10.18642/jpamaa_7100121698)
- [134] Mukeba J.P., Mabela R. et Ulungu B. **Sur la Multiplication des Nombres Flous de Type L-R**. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Kinshasa*, 1 :33–40, Septembre 2014.

- [135] Mukeba J.P., Mabela R. and Ulungu B. **Computing Fuzzy Queueing Performance Measures by L-R Method.** *Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis*, 2015(1) : 57–67, 31 March 2015.  
[http : //dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva – 00226](http://dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva-00226).
- [136] Mukeba J.P., Mabela R. and Ulungu B. **Performance Measures of a Product Form Queueing Network with Fuzzy Parameters.** *Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis*, 2015(1) : 68–77, 31 March 2015.  
[http : //dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva – 00228](http://dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva-00228).
- [137] Mukeba J.P., Mabela R., Ulungu B. and Ntantu D. **Fuzzy Eigenvalues and Fuzzy Eigenvectors of Fuzzy Markov Chain Transition Matrix under Max-Min Composition.** *Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis*, 2015(1) : 25–35, 31 January 2015.  
[http : //dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva – 00209](http://dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva-00209).
- [138] Nasser H. **Fuzzy Numbers : Positive and Nonnegative.** *International Mathematical Forum*, 36 :1777 – 1780, 2008.
- [139] Nasser S.H., Taleshian F., Alizadeh Z. and Vahidi J. **A New Method for Ordering LR Fuzzy Number.** *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(3) :283 – 294, 2012.
- [140] Ndandula D. **Traitement Qualitatif des Données d’une Recherche.** *Forum Doctoral*, Université Pédagogique Nationale de Kinshasa, Avril 2013.
- [141] Negi D.S. and Lee E.S. **Analysis and simulation of Fuzzy Queues.** *Fuzzy Sets and Systems*, 46 :321–330, 1992.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/0165 – 0114\(92\)90370 – J](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(92)90370-J).
- [142] Negoita C.V. and Ralescu D. **Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis.** Wiley, New York, 1975.
- [143] Neog T.J. and Sut D.K. **An Application of Fuzzy Soft Sets in Decision Making Problems using Fuzzy Soft Matrices.** *International Journal of Mathematical Archive*, 2 :2258–2263, 2012.
- [144] Nguyen H.T. **A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets.** *Journ. Math. Anal. Appl.*, pages 369–380, 1978.
- [145] Ning Y. and Zhao R. **Analysis on Random Fuzzy Queueing Systems with Finite Capacity.** *In The 9th International Conference on Electronic Business*, pages 1–7, Macau, November 30 - December 04, 2009.

- [146] Noora A.A., Jahanshahloo G.R., Rashidi S.F. and Godarzi M.M. **A Study of Discrete - Time Multi Server Retrial Queue with Finite Population and Fuzzy Parameters.** *African Journal of Business Management*, 5(6) :2426–2431, March 2011.
- [147] Pal M. and Khan S.K. **Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Matrices.** *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 11(1) :16–27, 2005.
- [148] Pal M., Khan S.K. and Shyamal A.K. **Intuitionistic Fuzzy Matrices.** *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 8(2) :51–62, 2002.
- [149] Palpandi B. and Geetharamani G. **Computing Performance Measures of Fuzzy Non-Preemptive Priority Queues Using Robust Ranking Technique.** *Applied Mathematical Sciences*, 7(102) :5095– 5102, 2013.
- [150] Palpandi B. and Geetharamani G. **Evaluation of Performance Measures of Bulk Arrival Queue with Fuzzy Parameters Using Robust Ranking Technique.** *International Journal of Computational Engineering Research*, 3(10) :53–57, October 2013.
- [151] Pieczynski W. **Markov Models in Image Processing.** *Traitement du Signal*, 20(3) :255 – 278, 2003.
- [152] Prade H.M., Wang P.P. and Chang S.K. (eds), **An Outline of Fuzzy or Possibilistic Models for Queueing Systems.** *Fuzzy Sets*, Plenum Press, pages 147–153, 1980.
- [153] Pradhan R. and Pal M. **Convergence of Maxarithmic Mean - Minarithmic Mean Powers of Intuitionistic Fuzzy Matrices.** *Journal of Mathematical Archive*, 2 :58–69, 2013.
- [154] Puri M.L. and Ralescu D. **Fuzzy Random Variables.** *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 114 :409–422, 1986.
- [155] Rajarajeswari P. and Dhanalakshmi P. **Intuitionistic Fuzzy Soft Matrix Theory and its Applications in Decision Making.** *International Journal of Engineering Research and Technology*, 2013. Accepté pour publication en septembre 2013.
- [156] Rajarajeswari P. and Dhanalakshmi P. **Intuitionistic Fuzzy Soft Matrix Theory and its Applications in Medical Diagnosis.** *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, x :1–8, 2013.
- [157] Rajarajeswari P. and Sangeetha M. **Fuzzy Intuitionistic on Queuing System.** *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 3(10) : 105 – 119, 2014.

- [158] Ramesh R. and Ghuru S.K. **Analysis of Performance Measures of Fuzzy Queuing Model with an Unreliable Server using Ranking Function Method.** *International Journal of Advances in Computer Science and Technology*, 4(1) :441–445, 2014.
- [159] Rita W. and Robert L. **Application of Fuzzy Set Theory to Retrial Queues.** *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, 2(4) :9–18, November 2009.
- [160] Rita W. and Robert L. **Fuzzy Queues with Priority Discipline.** *Applied Mathematical Sciences*, 4(12) :575–582, November 2010.
- [161] Ritha W. and Menon S.B. **Fuzzy N Policy Queues with Infinite Capacity.** *Journal of Physical Sciences*, 15 :73–82, December 2011.
- [162] Ritha W. and Menon S.B. **Analysis of a Fuzzy Queueing System with a Removable and Non-Reliable Server.** *Journal of Computing Technologies*, 1 :1–4, June 2012.
- [163] Rosenfeld. **A Fuzzy Graph.** in *Zadeh et al.*, pages 77–96, 1975.
- [164] Salahshour S., Lopez R.R., Karimi F. and Kumar A. **Computing the Eigenvalues and Eigenvectors of a Fuzzy Matrix.** *Journal of Set Valued Analysis*, pages 1–18, 2012.  
[http : //dx.doi.org/10.5899/2012/j.f.sva-00120](http://dx.doi.org/10.5899/2012/j.f.sva-00120).
- [165] Sallak M., Simon C. and Aubry J.-F. **A Fuzzy Probabilistic Approach for Determining Safety Integrity Level.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(1) :239–248, 2008.
- [166] Salzenstein F., Collet C. and Petremand M. **Fuzzy Markov Random Fields for Multispectral Images.** *Traitement du Signal*, 21(1) :37–55, 2004.
- [167] Sanchez E. **Eigen Fuzzy Sets and Fuzzy Relations.** *J. Math. Anal. Appl.*, 81 :399–421, 1981.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(81\)90073-1](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(81)90073-1).
- [168] Shapiro A.F. **Fuzzy Random Variables.** *Insurance : Mathematics and Economics*, 44 :307–314, 2009.
- [169] Shapiro A.F. **Implementing Fuzzy Random Variables – Some Preliminary Observations.** *ARCH 2013 Proceedings*, pages 1–15, August 2012.
- [170] Shekhar C., Jain M. and Bhatia S. **Fuzzy Analysis of Machine Repair Problem with Switching Failure and Reboot.** *Journal of Reliability and Statistical Studies*, 7 :41–55, 2014.



- [171] Shyamal A.K. and Pal M. **Triangular Fuzzy Matrices**. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 4(1) :75–87, 2007.
- [172] Shyamal A.K. and Pal M. **Two New Operators on Fuzzy Matrices**. *J. Appl. Math. Computing*, 4(1-2) :91 – 107, 2004.
- [173] Shyamal A.K. and Pal M. **Interval-Valued Fuzzy Matrices**. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 14(3) :583–604, 2006.
- [174] Sidky F.I. and Emam E.G. **Some Remarks on Sections of a Fuzzy Matrix**. *Journal of King Abdulaziz University*, 4 :145–155, 1992.
- [175] Singer D. **A Fuzzy Set Approach to Fault Tree and Reliability Analysis**. *Fuzzy Sets and Systems*, 34 :145–155, 1990.
- [176] Siontorou F.A. **A Theory of Independent Fuzzy Probability for System Reliability**. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 53 :301–310, 2003.
- [177] Sriram S. and Murugadas P. **On Semiring of Intuitionistic Fuzzy Matrices**. *Applied Mathematical Sciences*, 4(23) :1099–1105, 2010.
- [178] Stefanini L. **A Generalization of Hukuhara Difference and Division for Interval and Fuzzy Arithmetic**. *Fuzzy Sets and Systems*, 161 : 1564 – 1584, 2010.
- [179] Stefanini L. and Sorini L. **Fuzzy Arithmetic with Parametric LR Fuzzy Numbers**. *ISFA-EUSFLAT*, page 600 – 605, 2009.
- [180] Sujatha R., Praba B. and Rajalaxmi T.M. **Long Term Behavior of Cyclic Non-Homogeneous Fuzzy Markov Chain**. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(22) :1077–1089, 2010.
- [181] Talasova J. and Pavlacka O. **Fuzzy Probability Spaces and Their Applications in Decision Making**. *Australian Journal of Statistics*, 35(2) : 347 – 356, 2006.
- [182] Tanaka H., Fan L., Lai F. and Toguchi K. **Fault Tree Analysis by Fuzzy Probability**. *IEEE Transactions on Reliability*, 32(5) :453–457, 1983.
- [183] Thomason M.G. **Convergence of Powers of a Fuzzy Matrix**. *Journ. Math. Anal. Appl.*, 57 :476–480, 1977.
- [184] Tyagi A. and Singh T.P. **Trapezoidal Fuzzy Queue Model to an Interdependent Communication Network with Bulk Arrivals**. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 2(4) :459–466, 2012.

- [185] Upadhyaya S. **Bernoulli Vacation Policy for a Bulk Retrial Queue with Fuzzy Parameters.** *International Journal of Applied Operational Research*, 3(3) :1–14, 2013.
- [186] Utkin L. and Coolen F. **New Metaheuristics, Neural and Fuzzy Techniques in Reliability.** *Computational intelligence in reliability engineering*, 2 :261–306, 2007.
- [187] Van Dijk N.M. **Queueing Networks and Product Forms - A Systems Approach.** John Wiley and Sons, Chichester, 1993.
- [188] Villacorta P.J., Verdegay J.L. and Pelta D.A. **Towards Fuzzy Linguistic Markov Chains.** In *8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2013)*, pages 707–713. Atlantis Press, 2013.
- [189] Vincent G.S. and Bhuvaneswari S. **On Fuzzy Retrial Queue with Priority Subscribers.** *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, 4(1) :9–20, February 2011.
- [190] Walrand J. **An Introduction to Queueing Networks.** Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, 1988.
- [191] Wang S. and Watada J. **Fuzzy Random Optimization : Theory, Models and Algorithms.** Springer Sciences+Business Media, New York, 2012.
- [192] Wang T.-Y., Yang D.-Y. and Li M.-J. **Fuzzy Analysis for the N Policy Queues with Infinite Capacity.** *International Journal of Information and Management Sciences*, 21 :41–45, 2010.
- [193] Wang Y.-C., Wang J.-S. and Tsai F.-H. **Space Priority Queue with Fuzzy Set Threshold.** *Computer Communications*, 30(2007) : 2301 – 2310, 2007.
- [194] Wang Y.-C., Wang J.-S. and Tsai F.-H. **Analysis of Discrete-time Space Priority Queue with Fuzzy Threshold.** *Journal of Industrial and Management Optimization*, 5(3) : 467–479, August 2009.
- [195] Whittle P. **Systems in Stochastic Equilibrium.** Wiley, Chichester, 1994.
- [196] Xin L.J. **Convergence of Powers Controllable Fuzzy Matrices.** *Fuzzy Sets and Systems*, 62 :83–88, 1994.
- [197] Yang M.-S. and Liu M.-C. **On Possibilistic Analysis of Fuzzy Data.** *Fuzzy Sets and Systems*, 94 :171–183, 1998.
- [198] Yang T. and Templeton J.G.C. **A Survey on Retrial Queues.** *Queueing Systems*, 2 :201–203, 1987.

- 
- [199] Yang Y. and Ji C. **Fuzzy Soft Matrices and their Applications**. *Lecture Notes in Computers Science*, 7002 :618–627, 2011.
- [200] Zadeh L.A. **Fuzzy Sets**. *Information and Control*. *Information and control*, 8 :338–353, 1965.  
[http : //dx.doi.org/10.1016/S0019 – 9958\(65\)90241 – X](http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- [201] Zadeh L.A. **A Fuzzy-Set-Theoretical Interpretation of Linguistics Hedges**. *Journal of Cybernetics*, 2 :4–34, 1972.
- [202] Zadeh L.A. **Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems**. *Man and Cybernetics*, 3 :28–44, 1973.
- [203] Zadeh L.A. **A Meaning Representation Language for Natural Language**. *Int. J. Man-Machine Studies*, 10 :395–460, 1978.
- [204] Zadeh L.A. **Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility**. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3–28, 1978.
- [205] Zadeh L.A. **The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning**. *Memorandum ERL-M 411*, October 1973.
- [206] Zadeh L.A., Fu K.S. Tanaka M. and Shimura. **Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes**. Springer Sciences + Business Media, New York, London, 1975.
- [207] Zhang R. and Phillis Y. A. **Fuzzy Control of Arrivals to Tandem Queues with Two Stations**. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(3) :361–367, June 1999.
- [208] Zhang R. and Phillis Y. A. **Fuzzy Routing of Queueing Systems with Heterogeneous Servers**. *Proceedings of the 1997 IEEE; International Conference on Robotics and Automation*, pages 2340–2345, April 1997.
- [209] Zhang R. and Phillis Y. A. **Fuzzy Admission Control and Scheduling of Production Systems**. *Proceedings of the 1999 IEEE; International Conference on Robotics and Automation*, pages 1508–1513, May 1999.
- [210] Zhang R., Phillis Y. A. and Zhu X. **Fuzzy Control of Queuing Systems with Removable Servers**. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pages 2160–2165, 1998.
- [211] Zhang R., Phillis Y. A. and Kouikoglou V.S. **Fuzzy Control of Queuing Systems**. Springer-Verlag, London, 2005.
- [212] Zhu R. **Convergence of Powers of a Fuzzy Symmetric Matrix**. *Fuzzy Mathematics*, 3 :45–49, 1984.

- 
- [213] Zimmermann H. –J. ***Fuzzy Set Theory and its Applications***. Springer Science + Business Media, New-York, fourth edition, 2001.  
*http : //dx.doi.org/10.1007/978 – 94 – 010 – 0646 – 0.*
- [214] Zouhal L.M. and Denoeux T. **Reconnaissance de Formes Floues par la Théorie de Dempster et Shafer**. In *Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications*, pages 1–8. Nancy, 1996.

