



**HAL**  
open science

# Surfaces à courbure moyenne constante via les champs de spineurs

Christophe Desmots

► **To cite this version:**

Christophe Desmots. Surfaces à courbure moyenne constante via les champs de spineurs. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0073 . tel-01751707v2

**HAL Id: tel-01751707**

**<https://hal.science/tel-01751707v2>**

Submitted on 25 Aug 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Surfaces à courbure moyenne constante via les champs de spineurs

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 juin 2015

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

(mention Mathématiques)

par

Christophe DESMONTS

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Harold ROSENBERG	Professeur, IMPA Rio, Brésil
<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel HUMBERT	Professeur, Université de Tours, France
	Sebastián MONTIEL	Professeur, Université de Grenade, Espagne
<i>Examineurs :</i>	Benoît DANIEL	Professeur, Université de Lorraine, France (Directeur de thèse)
	Nicolas GINOUX	PRAG, Université de Lorraine, France
	Laurent HAUSWIRTH	Maître de conférence, Université de Marne la Vallée, France
	Oussama HIJAZI	Professeur, Université de Lorraine, France (Directeur de thèse)



## Remerciements

J'aimerais en premier lieu exprimer toute ma gratitude envers mes deux directeurs de thèse, Benoît Daniel et Oussama Hijazi. J'ai pu profiter dès le Master de leurs connaissances et de leurs qualités pédagogiques, qui m'ont accompagnées tout au long de mon travail de thèse. Leur disponibilité et leur soutien aussi bien mathématique que moral, mais aussi l'autonomie qu'ils ont su me laisser dans mes recherches, m'ont permis de réaliser ce travail dans des conditions idéales. Je tiens également à les remercier chaleureusement pour le soutien qu'ils m'ont toujours apporté dans mes choix et décisions.

Je remercie Emmanuel Humbert et Sebastián Montiel d'avoir accepté la responsabilité d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis également très sensible à l'honneur que me font Nicolas Ginoux, Laurent Hauswirth et Harold Rosenberg en constituant ce jury.

Je suis reconnaissant envers l'ensemble des membres de l'Institut Elie Cartan de Nancy, et en particulier ceux de l'équipe de Géométrie, pour avoir contribué chaque jour à l'atmosphère conviviale de ces lieux. J'ai également une pensée pour les personnes ayant partagé mon bureau pendant ces trois années, principalement Jérémy et Khaled.

Enfin je remercie tous les gens extérieurs aux mathématiques qui m'ont entouré pendant ces années de thèse : l'ensemble de ma famille, et en particulier mes parents pour leur soutien de toujours, ainsi que mes amis.

Je dédie cette thèse à mes grands-parents.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
Présentation des résultats . . . . .	x
<b>Chapitre 1 Constructions d’anneaux minimaux dans <math>\text{Sol}_3</math></b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Le groupe $\text{Sol}_3$ . . . . .	1
1.3 L’application de Gauss . . . . .	3
1.4 Construction des hélicoïdes . . . . .	5
1.5 Caténoïdes dans $\text{Sol}_3$ . . . . .	11
1.6 Limites des caténoïdes . . . . .	18
1.6.1 Le cas $\alpha = 0$ . . . . .	18
1.6.2 Le cas $\alpha = 1$ . . . . .	18
<b>Chapitre 2 Approche spinorielle du Théorème d’Alexandrov généralisé</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Structures spinorielles sur une hypersurface . . . . .	25
2.3 Cas de l’espace euclidien . . . . .	29
2.3.1 Conditions à bord . . . . .	29
2.3.2 Le Théorème d’Alexandrov généralisé . . . . .	30
2.3.3 L’Inégalité de Heintze-Karcher . . . . .	33
2.4 Cas de l’espace hyperbolique . . . . .	35
2.4.1 Opérateur de chiralité et conditions à bord . . . . .	35
2.4.2 Type des spineurs de Killing de $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	37
2.4.3 Le Théorème d’Alexandrov généralisé . . . . .	40
<b>Chapitre 3 Spectre de l’opérateur de Dirac des surfaces de <math>\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)</math> et de <math>\mathbb{S}_b^3(\tau)</math></b>	<b>45</b>
3.1 Introduction . . . . .	45
3.2 Dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	46
3.3 Dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ . . . . .	50

*Table des matières*

---

3.4	Dans les sphères de Berger . . . . .	53
3.4.1	Géométrie et spineurs particuliers . . . . .	53
3.4.2	Majoration dans le cas général . . . . .	55
3.4.3	Egalité pour les surfaces CMC dans le cas général . . . . .	56
3.4.4	Cas $\tau^2 < 1$ . . . . .	60
3.4.5	Cas $\tau^2 > 1$ . . . . .	61
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

# Introduction

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude de certaines hypersurfaces possédant des propriétés géométriques particulières, essentiellement liées à leur courbure. Ils soulignent en particulier le lien naturel entre ces propriétés et la géométrie spinorielle extrinsèque de ces hypersurfaces.

La particularité pour une hypersurface (toujours supposée orientable) d'avoir une courbure moyenne  $H$  constante (CMC  $H$ ) apparaît naturellement dans les problèmes variationnels ; par exemple, une hypersurface compacte à bord dont l'aire est minimale parmi toutes les variétés s'appuyant sur le même bord a une courbure moyenne identiquement nulle. C'est pourquoi on appelle ces surfaces CMC  $H = 0$  des surfaces *minimales* : c'est le cas de l'hélicoïde ou de la caténoïde dans l'espace euclidien. L'étude des surfaces minimales dans les espaces modèles ou dans les variétés homogènes de dimension 3 a engendré un grand nombre de travaux ces dernières années, et permis d'exhiber de nouveaux exemples de telles surfaces.

Le cadre des variétés spinorielles fait naturellement intervenir certains invariants riemanniens lorsque l'on s'intéresse aux obstructions géométriques, voire topologiques, empêchant l'existence de spineurs particuliers sur la variété. Ces spineurs sont les sections d'un fibré vectoriel appelé *fibré des spineurs*. Par exemple, les *spineurs de Killing* réels (respectivement imaginaires), pour lesquels la dérivée covariante est un multiple réel (respectivement imaginaire pur) de la multiplication de Clifford, ne peuvent exister que sur les variétés d'Einstein compactes à courbure scalaire constante strictement positive (respectivement non compactes à courbure scalaire constante strictement négative). Les spineurs *parallèles*, pour lesquels la connexion de Levi-Civita spinorielle est identiquement nulle, ne peuvent quant à eux exister que sur des variétés Ricci-plates : voir [36]. Une classe de spineurs un peu plus répandue est l'ensemble des *spineurs twisteurs*, dont l'existence est indépendante du choix de la métrique dans une classe conforme. Les conditions pour pouvoir trouver de tels spineurs sur une variété spinorielle ont été l'objet de multiples travaux ([11] ou [50], [51] par exemple).

De façon plus générale, le comportement du spectre de l'opérateur de Dirac est intimement lié aux propriétés géométriques des variétés spinorielles. Cet opérateur est un opérateur différentiel elliptique d'ordre un défini sur le fibré des spineurs. Lorsque la variété est compacte sans bord, il est  $L^2$ -autoadjoint, et son spectre est donc réel et discret. L'estimation de sa première valeur propre positive a mené à beaucoup de travaux depuis le résultat de Lichnerowicz ([54]) stipulant que le noyau de l'opérateur de Dirac intrinsèque d'une variété compacte sans bord à



courbure scalaire strictement positive était nécessairement trivial. Associé au théorème de l'indice d'Atiyah-Singer ([6]), ceci fournit une obstruction topologique à l'existence de métriques à courbure scalaire positive sur une variété donnée.

La formule de Schrödinger-Lichnerowicz a également permis à Friedrich ([22]) d'obtenir la minoration suivante de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac  $\mathcal{D}$  sur une variété compacte sans bord de dimension  $n$  dont la courbure scalaire  $\text{Scal}_M$  est positive ou nulle :

$$\lambda_1(\mathcal{D})^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \text{Scal}_M.$$

De plus, l'égalité ne peut être atteinte que lorsque  $M$  est une variété d'Einstein à courbure scalaire constante, et lorsqu'il existe des spineurs de Killing réels sur  $M$ . Contrairement à la minoration de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  obtenue par intégration directe de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, on obtient cette fois une inégalité optimale, où les sphères réalisent l'égalité. Le cas d'égalité caractérise même les sphères en certaines dimensions ([35]).

Dans le cas d'une hypersurface orientable immergée dans une variété spinorielle, celle-ci hérite d'une structure spinorielle par restriction de la structure ambiante, appelée structure *extrinsèque*. Depuis les travaux de Witten ([75]), qui donna une nouvelle preuve du théorème de l'énergie positive basée sur l'utilisation d'un opérateur de Dirac sur le bord d'une variété, l'opérateur de *Dirac-Witten*, le lien entre les propriétés du spectre de l'opérateur de Dirac extrinsèque  $\mathcal{D}$  et les propriétés géométriques de l'hypersurface a donné naissance à beaucoup de travaux. Par exemple, la minoration suivante de la première valeur propre positive  $\lambda_1(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$ , obtenue par Hijazi, Montiel et Zhang ([41]) pour une hypersurface compacte orientable sans bord  $M^n$  plongée dans une variété spinorielle  $\overline{M}^{n+1}$  à courbure scalaire positive ou nulle, dont la courbure moyenne  $H$  est positive ou nulle :

$$\lambda_1(\mathcal{D}) \geq \frac{n}{2} \inf_M H.$$

De plus, le cas d'égalité ne peut se produire que pour certaines hypersurfaces CMC  $H$  dans une variété  $\overline{M}$  Ricci-plate, et les spineurs propres de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  sont alors exactement les restrictions de spineurs parallèles. Dans le cas où  $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ , on en déduit une preuve d'un Théorème classique d'Alexandrov stipulant que toute surface compacte CMC  $H$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  est une sphère ronde. Un travail similaire a été effectué dans  $\mathbb{H}^{n+1}$  par Hijazi, Montiel et Roldán ([40]) à partir des  $\pm i/2$ -spineurs de Killing ambiants.

Ainsi, si la courbure moyenne apparaît naturellement dans la géométrie spinorielle extrinsèque des hypersurfaces dès lors que l'on utilise l'équation de Gauss spinorielle (2.9), le rôle des  $H_r$ -courbures en général (voir définition (2.1)) est moins évident. Elles interviennent néanmoins déjà dans certaines estimations de la première valeur propre positive du Laplacien des hypersurfaces des espaces modèles (voir par exemple [21], [31], [33], [68]), ou d'autres opérateurs elliptiques d'ordre 2 obtenus grâce aux transformations de Newton ([30], [32]). Ces outils ont par exemple permis à Alencar, Do Carmo et Rosenberg de classifier les hypersurfaces  $r$ -stables dans l'espace euclidien ([3]) en les caractérisant en tant que cas limite d'une majoration de la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur l'hypersurface. Il est alors naturel de se demander si un travail similaire peut avoir lieu pour l'opérateur de Dirac, et plus généralement, quel est le rôle des  $H_r$ -courbures dans la géométrie spinorielle extrinsèque d'une hypersurface ?

---

Le Théorème du min-max fournit aisément des majorations de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  lorsque l'on connaît un spineur-test. Ainsi, Bär ([8]) et Ginoux ([27]) ont obtenu des majorations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) dans les espaces modèles  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  et  $\mathbb{S}^{n+1}$  en testant les restrictions des spineurs de Killing ambiants, dont les cas d'égalité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbb{H}^{n+1}$  n'ont été précisément déterminés que très récemment ([38] dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , [29] dans  $\mathbb{H}^{n+1}$ ). De plus, la classification précise des surfaces vérifiant l'égalité dans l'inégalité de Bär dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  reste un problème ouvert (mais à l'inverse des deux autres espaces modèles, on sait cette fois qu'il existe des surfaces CMC autres que des sphères qui vérifient l'égalité).

## Présentation des résultats

Les résultats présentés dans cette thèse sont de deux natures assez différentes. Dans le premier chapitre, dans un cadre purement riemannien, on construit de nouveaux exemples de surfaces minimales dans le groupe de Lie  $\text{Sol}_3$ , qui est une variété homogène de dimension 3 dont le groupe d'isométries est de dimension 3. C'est le modèle qui contient le moins d'isométries parmi les huit géométries de Thurston ([73]), ce qui rend plus délicat la construction de surfaces CMC dans  $\text{Sol}_3$ .

Dans les espaces modèles  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  et  $\mathbb{S}^3$ , dont le groupe d'isométries est de dimension 6, un grand nombre d'outils permet de construire des surfaces CMC. De façon la plus naturelle, l'existence de groupes à un paramètre de rotations isométriques dans ces espaces permet d'obtenir des surfaces CMC de révolution. Ensuite, les formules de représentation de type Weierstrass ([65] pour  $\mathbb{R}^3$  par exemple, page 146) fournissent des exemples variés de surfaces minimales (hélicoïdes, caténoïdes, surfaces de Scherk, d'Enneper, d'Henneberg). Ces formules ont été généralisées au cas d'une courbure moyenne prescrite quelconque ([48]), ou encore au cas de  $\mathbb{H}^3$  ([14] pour les surfaces CMC 1, [49] pour les surfaces minimales). On peut également noter que Friedrich ([24]) a donné une formule de représentation de type Weierstrass pour les surfaces CMC dans  $\mathbb{R}^3$  en terme de spineurs. Les surfaces CMC des différents espaces modèles peuvent être mises en relation grâce à la notion de surfaces *cousines* (correspondance de Lawson, [52]) : ainsi, toute surface minimale simplement connexe de  $\mathbb{S}^3$  est isométrique à une surface CMC 1 simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$ , et toute surface minimale simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  est isométrique à une surface CMC 1 simplement connexe de  $\mathbb{H}^3$ . Enfin, la notion de différentielle de Hopf ([45]) d'une surface, qui est la complexifiée de la partie de trace nulle de la seconde forme fondamentale de l'immersion, a par exemple permis de démontrer que toute sphère CMC  $H$  immergée dans un espace modèle  $\mathbb{M}^3(c)$  est une sphère ronde de rayon  $1/H$ .

Dans les espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  (c'est à dire  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ ,  $\text{Nil}_3$  et les sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ ), dont le groupe d'isométries est de dimension 4, une partie des outils utilisés dans les espaces modèles a pu être généralisée. Berdinskii et Taimanov ([12]) ont donné des formules de représentation de type Weierstrass dans  $\text{Nil}_3$  et  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ . Daniel ([15]) a généralisé le principe de correspondance de Lawson : lorsque  $\kappa_1 - 4\tau_1^2 = \kappa_2 - 4\tau_2^2$  et  $\tau_1^2 + H_1^2 = \tau_2^2 + H_2^2$ , les surfaces CMC  $H_1$  simplement connexes de  $\mathbb{E}(\kappa_1, \tau_1)$  sont en correspondance isométrique avec les surfaces CMC  $H_2$  de  $\mathbb{E}(\kappa_2, \tau_2)$  ; deux surfaces correspondantes sont appelés surfaces *soeurs*. Enfin, la généralisation

par Abresch et Rosenberg ([1], [2]) de la notion de différentielle de Hopf aux espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  a permis d'obtenir un résultat analogue au théorème de Hopf concernant les sphères CMC dans  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ .

Lorsque le nombre d'isométries diminue encore, les outils pour la construction d'exemples se raréfient. Dans  $\text{Sol}_3$ , l'absence de groupe à un paramètre de rotations isométriques rend impossible la construction de surface CMC par révolution. Ensuite, les formules de représentation de Berdinskii et Taimanov ne fournissent qu'un résultat partiel dans le cas de  $\text{Sol}_3$ , et la différentielle d'Abresch-Rosenberg n'est utilisable que lorsque le groupe d'isométries est de dimension supérieure ou égale à 4. Néanmoins, certains exemples explicites de surfaces minimales furent construits ces dix dernières années : Masaltsev ([59]) et Daniel et Mira ([17]) exhibèrent des exemples de graphes minimaux. López et Munteanu ([56], [57], [58]), López ([55]) et Masaltsev ([59]) étudièrent les surfaces de  $\text{Sol}_3$  invariantes par une famille à un paramètre d'isométries ambiantes. Finalement, Menezes ([61]) construisit les analogues aux surfaces de Scherk simplement et doublement périodiques dans  $\text{Nil}_3$  et  $\text{Sol}_3$  et Nguyen ([64]) donna des conditions pour que le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales dans  $\text{Sol}_3$  ait une solution.

La méthode que nous utilisons pour construire nos exemples est inspirée de celle employée par Daniel et Hauswirth dans  $\text{Nil}_3$  ([16]) pour construire des anneaux minimaux plongés : dans un premier temps, on construit une famille à un paramètre de surfaces minimales plongées et feuilletées par des droites, appelées *hélicoïdes*, et on calcule son application de Gauss  $g$ . Un résultat d'Inoguchi et Lee ([47]) permet de savoir que cette application est harmonique pour une certaine métrique sur  $\mathbb{C}$ . On définit alors une autre famille d'applications  $\tilde{g}$  à partir de celles des hélicoïdes par séparation de variables, de telle sorte que la famille  $\tilde{g}$  vérifie toujours l'équation des applications harmoniques. On utilise ensuite une formule de représentation de type Weierstrass donnée par Inoguchi et Lee pour reconstruire une famille à un paramètre de surfaces minimales dont les applications de Gauss sont les  $\tilde{g}$ . Enfin, on démontre que les immersions sont périodiques, et on obtient donc des anneaux minimaux. A la connaissance de l'auteur, ces anneaux sont les premiers exemples de surfaces minimales non simplement connexes de topologie finie (c'est à dire difféomorphes à une surface compacte privée d'un nombre fini de points) dans  $\text{Sol}_3$  :

**Théorème 1** *Il existe une famille à un paramètre  $(C_\alpha)_{\alpha \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}}$  d'anneaux minimaux proprement plongés dans  $\text{Sol}_3$ , appelés caténoïdes, présentant les propriétés suivantes :*

1. *L'intersection de  $C_\alpha$  avec tout plan  $\{x_3 = \lambda\}$  est une courbe convexe plongée fermée non vide ;*
2. *L'anneau  $C_\alpha$  est conformément équivalent à  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ;*
3. *L'anneau  $C_\alpha$  a 3 symétries fixant l'origine : par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $x_3$ , par réflexion par rapport au plan  $\{x_1 = 0\}$  et par réflexion par rapport au plan  $\{x_2 = 0\}$ .*

Les deuxième et troisième chapitres portent quant à eux sur la géométrie spinorielle extrinsèque des hypersurfaces. Comme on l'a vu précédemment, les restrictions de spineurs ambiants particuliers à une hypersurface permettent d'obtenir des informations géométriques sur celle-ci.

---

Après avoir rappelé comment une hypersurface orientable immergée dans une variété spinorielle hérite d'une structure spinorielle intrinsèque et extrinsèque, nous nous penchons sur le Théorème d'Alexandrov et sa généralisation aux  $H_r$ -courbures par Ros ([70]) dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

**Théorème 2** (Alexandrov [4], Ros [70]) *Soit  $M$  une hypersurface compacte plongée dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On suppose qu'il existe  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_r$  soit constante. Alors  $M$  est une sphère ronde.*

Comme expliqué précédemment, le Théorème d'Alexandrov originel pour la courbure moyenne a déjà été établi par des moyens spinoriels en étudiant le cas limite d'une minoration extrinsèque de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  faisant intervenir  $H$ . Ne connaissant pas d'estimation de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  par les  $H_r$ -courbures, la méthode ne s'adapte pas de façon similaire. Ce sont les travaux récents d'Hijazi et Montiel ([37]) qui permettent de conclure. Ces résultats, appelés *principes holographiques*, obtenus grâce à la positivité du terme de bord de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz intégrée sur un domaine compact à bord de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , fournissent un critère d'existence de spineurs parallèles ambiants à partir d'une condition intégrale portant sur le bord. En appliquant ces inégalités à un spineur-test bien choisi, on obtient le Théorème 2 grâce aux inégalités de Gårding (2.2) et aux formules de Minkowski (2.19), qui permettent de faire des liens entre les différentes  $H_r$ -courbures. Enfin, le choix d'un autre spineur-test fournit également une preuve rapide de l'Inégalité de Heintze-Karcher ([34]) suivante :

**Théorème 3** (Heintze-Karcher [34]) *Soit  $\Omega$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et  $M = \partial\Omega$  son bord. On suppose que la courbure moyenne  $H$  de l'hypersurface  $M$  est strictement positive sur  $M$ . Alors*

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geq (n+1) \text{Vol}\Omega,$$

où  $\text{Vol}\Omega$  désigne le volume du compact  $\Omega$ . De plus, on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère ronde.

Cette inégalité a été démontrée sous cette forme par exemple par Ros ([70]) à partir d'une formule intégrale, et elle y était utilisée justement pour démontrer le Théorème d'Alexandrov généralisé dans le cas euclidien.

Le Théorème 2 reste vrai en l'état dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^{n+1}$  (Montiel et Ros, [63]). Là encore, la démonstration pour les  $H_r$ -courbures est différente du cas de la courbure moyenne, et utilise à nouveau un principe holographique établi très récemment par Hijazi, Montiel et Raulot ([39]). Elle diffère du cas euclidien par le fait que les spineurs de Killing sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  sont imaginaires, et donc leur norme n'est pas constante, à l'inverse des spineurs parallèles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Une étude de la fonction norme au carré des spineurs de Killing imaginaires sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  est donc nécessaire au préalable ([10]), et conduira à séparer ces spineurs en deux catégories : les spineurs *de type I* et *de type II*, selon les propriétés de leur norme. C'est l'existence systématique de spineurs de type II sur un fibré de Dirac modifié qui permet alors de conclure. On peut enfin noter que le Théorème

2 n'est pas vrai en l'état dans la sphère  $\mathbb{S}^{n+1}$  : il faut de plus supposer que l'hypersurface est incluse dans un hémisphère ([63]).

Enfin, on cherche dans le troisième chapitre à obtenir des majorations de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  à la manière de Bär mais dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  et dans les sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  grâce aux spineurs particuliers construits par Roth ([72]), et à caractériser précisément l'égalité.

Dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ , l'application du Théorème du min-max fournit deux majorations analogues, dont on sait caractériser le cas d'égalité :

**Théorème 4** *Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ , avec  $\mathbb{S}^2$  munie de son (unique) structure spin et  $\mathbb{S}^1(r)$  munie de sa structure spin triviale. Soit  $\xi$  un champ de vecteurs unitaires tangents aux fibres,  $N$  un vecteur normal à  $M$  unitaire. On pose  $f = \langle \xi, N \rangle$ . Soit  $\lambda_1(\mathcal{D})$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors*

$$\lambda_1(\mathcal{D})^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 \right) dM,$$

où  $\text{Vol}M$  désigne le volume de  $M$ . De plus, on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$  ou un tore plat CMC  $H$  avec  $f = 0$ , i.e.  $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r)$  avec  $r_1^2 = (1 + 4H^2)^{-1}$ .

Noter que l'application  $f$  apparaît également dans les équations de Gauss-Codazzi ([15]).

De même, dans les sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  de paramètre  $\tau \neq 0$  quelconque, la même méthode conduit à une majoration (3.29) de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  dont on ne sait pas caractériser précisément l'égalité. On peut noter que dans le cas  $\tau = 1$ , on retrouve la majoration de Bär (3.2) sur  $\mathbb{S}^3$ . On peut néanmoins caractériser les surfaces CMC  $H$  qui réalisent l'égalité lorsque  $\tau \notin \{0, 1\}$ . Enfin, en distinguant les cas  $\tau^2 > 1$  et  $\tau^2 < 1$ , on donne deux nouvelles majorations (3.36) et (3.39) moins précises que (3.29), qui s'avèrent être des inégalités strictes.

# Chapitre 1

## Constructions d'anneaux minimaux dans $\text{Sol}_3$

### 1.1 Introduction

Ce travail a fait l'objet d'une publication à paraître à Pacific Journal of Mathematics ([19]).

Dans ce chapitre on se propose de construire deux familles à un paramètre d'exemples de surfaces minimales plongées dans le groupe de Lie  $\text{Sol}_3$ , muni de sa métrique standard. Le modèle que nous utiliserons pour décrire  $\text{Sol}_3$  est présenté dans la seconde section. Dans la section suivante, nous présentons la notion d'application de Gauss et en donnons des propriétés dans le cas d'une immersion minimale conforme dans  $\text{Sol}_3$  ([17]). Dans la quatrième section nous construisons la famille d'hélicoïdes  $(\mathcal{H}_K)_{K \in ]-1;1[}$  qui nous permettra, par une sorte d'analogie avec les surfaces conjuguées de  $\mathbb{R}^3$ , d'obtenir dans la section suivante la famille  $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in ]-1;1[\setminus\{0\}}$  d'anneaux minimaux. L'étude de la limite de ces surfaces lorsque le paramètre tend vers ses valeurs limites fournit un autre exemple de surface minimale, qui est un graphe entier. Remarquons qu'aucune de ces surfaces n'est invariante par une famille à un paramètre d'isométries ambiantes.

### 1.2 Le groupe $\text{Sol}_3$

Le groupe de Lie  $\text{Sol}_3$  est l'ensemble  $\mathbb{R}^3$  muni de la multiplication  $*$  définie par

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (y_1 e^{-x_3} + x_1, y_2 e^{x_3} + x_2, x_3 + y_3)$$

pour tous  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . L'élément neutre pour cette loi est 0 et l'élément inverse de  $(x_1, x_2, x_3)$  est  $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1 e^{x_3}, -x_2 e^{-x_3}, -x_3)$ . Ce groupe est non commutatif. La multiplication à gauche  $L_a$  par un élément  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  est donnée pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  par

$$\begin{aligned} L_a(x) = a * x &= (x_1 e^{-a_3} + a_1, x_2 e^{a_3} + a_2, a_3 + x_3) \\ &= a + dL_a x, \end{aligned}$$

avec  $d$  la dérivée de Lie sur  $\text{Sol}_3$ , et

$$dL_a = \begin{pmatrix} e^{-a_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On veut munir  $\text{Sol}_3$  d'une métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  invariante à gauche, c'est à dire telle que les opérateurs  $dL_a$  soient des isométries, ce qui s'écrit encore

$$\langle dL_a X, dL_a Y \rangle_{a*x} = \langle X, Y \rangle_x$$

pour tous  $a, x, X, Y \in \mathbb{R}^3$ . On pose pour cela :

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle dL_{x^{-1}} X, dL_{x^{-1}} Y \rangle_{can}, \quad (1.1)$$

pour tous  $x, X, Y \in \mathbb{R}^3$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{can}$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$ , et  $x^{-1}$  est l'inverse de  $x$  dans  $\text{Sol}_3$ . Si on renomme  $ds^2$  la métrique définie par (1.1), celle-ci se réécrit

$$ds_x^2 = e^{2x_3} dx_1^2 + e^{-2x_3} dx_2^2 + dx_3^2, \quad (1.2)$$

avec  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^3$ . Le fait que les translations soient maintenant toutes des isométries garantit que le groupe des isométries de  $\text{Sol}_3$  agisse transitivement sur  $\text{Sol}_3$ , qui est donc une variété homogène.

**Remarque 1 :** Il existe d'autres métriques invariantes à gauche sur  $\text{Sol}_3$ . Plus précisément, il existe une famille à deux paramètres de métriques invariantes à gauche. Un de ces paramètres est un facteur homothétique, et les métriques qui ne sont pas homothétiques à (1.2) n'admettent pas de réflexions ; voir [60] pour plus de précisions.

Puisque  $dL_a$  est diagonale, les vecteurs  $\partial_1, \partial_2$  et  $\partial_3$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  sont orthogonaux, et si on pose

$$E_1(x) = dL_x \partial_1 = e^{-x_3} \partial_1, \quad E_2(x) = dL_x \partial_2 = e^{x_3} \partial_2, \quad E_3(x) = dL_x \partial_3 = \partial_3,$$

on obtient une base orthonormale  $(E_1, E_2, E_3)$  de vecteurs invariants à gauche (c'est à dire tels que  $dL_a E_k(x) = E_k(ax)$ ). On a à présent deux bases dans lesquelles exprimer les coordonnées de champs de vecteurs sur  $\text{Sol}_3$  ; on notera entre crochets les coordonnées dans la base  $(E_1, E_2, E_3)$  ; ainsi, si on se place en un point  $x \in \text{Sol}_3$ , on a

$$a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a_3 \partial_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_3} a_1 \\ e^{-x_3} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

On a la propriété suivante ([17]) :

**Proposition 1** *Le groupe d'isotropie de l'origine de  $\text{Sol}_3$  est isomorphe au groupe diédral  $\mathcal{D}_4$  et engendré par les deux isométries*

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, -x_1, -x_3) \quad \text{et} \quad \tau : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, x_3).$$

*Ces isométries renversent l'orientation. L'application  $\sigma$  est d'ordre 4 et  $\tau$  est d'ordre 2.*

Voici précisément l'ensemble des isotropies de  $(0, 0, 0)$  :

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$	Identité.
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma} (x_2, -x_1, -x_3)$	Rotation d'angle $3\pi/2$ autour de $E_3$ composée avec la réflexion par rapport à $\{x_1 = 0\}$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\tau} (-x_1, x_2, x_3)$	Réflexion par rapport à $\{x_1 = 0\}$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma^2} (-x_1, -x_2, x_3)$	Rotation d'angle $\pi$ autour de $E_3$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma^3} (-x_2, x_1, -x_3)$	Rotation d'angle $\pi/2$ autour de $E_3$ composée avec la réflexion par rapport à $\{x_3 = 0\}$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma\tau} (x_2, x_1, -x_3)$	Rotation d'angle $\pi$ autour de l'axe $\{(x_1, x_1, 0)\}$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma^2\tau} (x_1, -x_2, x_3)$	Réflexion par rapport à $\{x_2 = 0\}$ .
$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma^3\tau} (-x_2, -x_1, -x_3)$	Rotation d'angle $\pi$ autour de l'axe $\{(x_1, -x_1, 0)\}$ .

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 5** *Le groupe d'isométries de  $\text{Sol}_3$  est de dimension 3.*

Nous terminons cette section en exprimant la connexion de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  sur  $\text{Sol}_3$  associée à la métrique (1.2) dans la base  $(E_1, E_2, E_3)$ . Dans un premier temps, les crochets de Lie dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sol}_3$  de  $\text{Sol}_3$  sont donnés par

$$[X, Y] = (Y_3X_1 - X_3Y_1, X_3Y_2 - Y_3X_2, 0)$$

pour tous  $X = (X_1, X_2, X_3)$  et  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ . Ainsi, on a

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = E_1, \quad [E_2, E_3] = -E_2.$$

On en déduit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= -E_3, & \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= E_3, & \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= E_1, & \bar{\nabla}_{E_2} E_3 &= -E_2, & \bar{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

### 1.3 L'application de Gauss

Soit  $M$  une surface de Riemann et  $z = u + iv$  un système de coordonnées complexes locales sur  $M$ . Soit  $x : M \rightarrow \text{Sol}_3$  une immersion conforme de  $M$  dans  $\text{Sol}_3$ , c'est à dire telle que  $x_u$  et



$x_v$  soient orthogonaux et de même norme en tout point. On pose

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Un champ de vecteurs normaux unitaires  $N : M \rightarrow TSol_3$  peut être défini par

$$N = \frac{1}{\|x_u\|^2} x_u \wedge x_v := \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}.$$

On définit alors  $\widehat{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  par la formule  $dL_{x^{-1}}N = \widehat{N}$ , c'est à dire

$$\widehat{N} = \begin{pmatrix} e^{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 e^{-x_3} \\ N_2 e^{x_3} \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}.$$

**Définition 1** L'application de Gauss de l'immersion  $x$  est l'application

$$g = \sigma \circ \widehat{N} : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}},$$

où  $\sigma$  est la projection stéréographique par rapport au pôle Nord, i.e.

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2} \begin{bmatrix} 2\Re(g) \\ 2\Im(g) \\ 1 - |g|^2 \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

$$g = \frac{N_1 + iN_2}{1 + N_3}. \quad (1.5)$$

Avant d'énoncer le Théorème d'Inoguchi et Lee, rappelons que sur une variété Riemannienne  $M$  munie d'un système de coordonnées complexes  $z = u + iv$ , pour toute fonction  $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ , on a par définition

$$h_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial u} - i \frac{\partial h}{\partial v} \right) \quad \text{et} \quad h_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial u} + i \frac{\partial h}{\partial v} \right).$$

Voici à présent le Théorème d'Inoguchi et Lee ([47]). Il peut être vu comme un théorème de représentation de type Weierstrass dans  $Sol_3$ .

**Théorème 6** (Inoguchi-Lee [47]) *Soit  $x : M \rightarrow Sol_3$  une immersion minimale conforme et  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  son application de Gauss. Alors en tout point où  $g$  n'est ni réelle ni imaginaire pure,  $g$  n'est pas antiholomorphe (i.e.  $g_z \neq 0$ ), et elle satisfait l'équation elliptique du second ordre suivante :*

$$g_{z\bar{z}} = \frac{2gg_z g_{\bar{z}}}{g^2 - \bar{g}^2}. \quad (1.6)$$

De plus, l'immersion  $x = (x_1, x_2, x_3)$  s'exprime en fonction de  $g$  par la formule de représentation suivante :

$$x_{1z} = e^{-x_3} \frac{(\bar{g}^2 - 1)g_z}{g^2 - \bar{g}^2}, \quad x_{2z} = ie^{x_3} \frac{(\bar{g}^2 + 1)g_z}{g^2 - \bar{g}^2}, \quad x_{3z} = \frac{2\bar{g}g_z}{g^2 - \bar{g}^2} \quad (1.7)$$

en tout point où elle est bien définie.

Réciproquement, étant donnée une application  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  définie sur une surface de Riemann simplement connexe  $M$  satisfaisant l'équation (1.6), alors l'application  $x : M \rightarrow \text{Sol}_3$  donnée par la formule (1.7) est une immersion minimale conforme (avec d'éventuels points de branchement) en tout point où elle est bien définie, dont l'application de Gauss est  $g$ .

**Remarque 2 :** 1. Il existe un résultat similaire pour les surfaces CMC  $H \neq 0$  ([17]).

2. L'équation (1.6) est l'équation des applications harmoniques  $g : M \rightarrow (\overline{\mathbb{C}}, ds^2)$ , où  $ds^2$  est la métrique définie par

$$ds^2 = \frac{|d\omega|^2}{|\omega^2 - \bar{\omega}^2|}.$$

C'est une métrique singulière, non définie sur les axes réels et imaginaires purs : voir [47] pour plus de détails.

3. L'équation (1.6) ne peut être considérée qu'aux points où  $g \neq \infty$ . Néanmoins, on remarque que si  $g$  est une solution de (1.6),  $i/g$  est également solution aux points où  $g \neq 0$ , ce qui permet d'étudier (1.6) sur  $M$  entière.

4. Si  $g$  est solution de (1.6), l'application conjuguée  $\bar{g}$  et toute application  $g \circ \phi$  avec  $\phi$  une fonction holomorphe localement injective sont également solutions. De plus, si  $g$  est une solution nulle part antiholomorphe de (1.6), et que  $x$  est l'immersion minimale conforme induite par  $g$ , alors  $ig$  et  $1/g$  induisent les immersions minimales conformes  $\sigma x$  et  $\tau x$ . Enfin,  $\bar{g}$  est l'application de Gauss de  $\sigma^2 \tau x$  après changement d'orientation.

## 1.4 Construction des hélicoïdes

Passons à la construction des hélicoïdes : on appelle hélicoïde une surface minimale contenant l'axe  $x_3$  dont l'intersection avec tout plan  $\{x_3 = \text{constante}\}$  est une ligne droite, et telle qu'il existe  $T > 0$  tel que la surface soit invariante par multiplication à gauche par  $(0, 0, T)$ . On va montrer le théorème suivant :

**Théorème 7** *Il existe une famille à un paramètre  $(\mathcal{H}_K)_{K \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}}$  d'hélicoïdes proprement plongées dans  $\text{Sol}_3$ . Ces hélicoïdes ont 3 symétries fixant l'origine : la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $x_3$ , la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $(x, x, 0)$ , et la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $(x, -x, 0)$ .*

Soit  $K \in ]-1, 1[$ ; on définit une application  $g : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  par

$$g(z = u + iv) = e^{-u} e^{ib(v)} e^{-i\pi/4},$$

avec  $b$  satisfaisant à l'équation :

$$b' = \sqrt{1 - K \cos(2b)}, \quad b(0) = 0. \quad (1.8)$$

**Proposition 2** *L'application  $b$  est bien définie et a les propriétés suivantes :*

1. La fonction  $b$  est un difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  sur lui même;
2. La fonction  $b$  est impaire;
3. Il existe un réel  $W > 0$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $b(v + W) = b(v) + \pi$ ;
4. La fonction  $b$  vérifie  $b(kW) = k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Puisque  $K \in ]-1, 1[$ , il existe  $r > 0$  tel que  $1 - K \cos(2b) \in ]r, 2[$ ; le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et  $b$  est bien définie. D'après (1.8) on a  $b' > 0$  sur son domaine de définition, et  $\sqrt{r} < b' < \sqrt{2}$ . Donc  $b'$  est bornée par deux constantes positives, donc  $b$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} b(v) = \pm\infty.$$

La fonction  $\widehat{b} : v \mapsto -b(-v)$  satisfait également à (1.8) avec  $\widehat{b}(0) = 0$ ; donc  $\widehat{b} = b$  et  $b$  est impaire. Enfin, il existe  $W > 0$  tel que  $b(W) = \pi$ ; alors la fonction  $\widetilde{b} : v \mapsto b(v + W) - \pi$  vérifie (1.8) avec  $\widetilde{b}(0) = 0$ , donc  $\widetilde{b} = b$ .  $\square$

**Corollaire 1** *On a  $b(kW/2) = k\pi/2$  pour tout  $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ .*

*Démonstration.* On a

$$b\left(\frac{W}{2}\right) = b\left(-\frac{W}{2} + W\right) = -b\left(\frac{W}{2}\right) + \pi,$$

ce qui donne la formule pour  $k = 1$ . On conclut facilement.  $\square$

**Proposition 3** *La fonction  $g$  vérifie  $(g^2 - \overline{g}^2)g_{z\overline{z}} = 2gg_zg_{\overline{z}}$ .*

Ainsi, l'application  $g$  induit une immersion minimale conforme  $x = (x_1, x_2, x_3)$  telle que

$$\begin{cases} x_{1z} = e^{-x_3} \frac{(\overline{g}^2 - 1)g_z}{g^2 - \overline{g}^2} = \frac{[1 + ie^{-2u}e^{-2ib}](1 - b')e^{ib}e^{i\pi/4}}{4e^{-u} \cos(2b)} e^{-x_3} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} x_{2z} = ie^{x_3} \frac{(\overline{g}^2 + 1)g_z}{g^2 - \overline{g}^2} = -\frac{[1 - ie^{-2u}e^{-2ib}]i(1 - b')e^{ib}e^{i\pi/4}}{4e^{-u} \cos(2b)} e^{x_3} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} x_{3z} = \frac{2\overline{g}g_z}{g^2 - \overline{g}^2} = \frac{i(b' - 1)}{2 \cos(2b)}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Cette application est bien une immersion puisque la métrique induite par  $x$  est donnée par

$$dw^2 = \|x_u\|^2 |dz|^2 = \frac{K^2}{(1+b')^2} \cosh^2(u) |dz|^2.$$

On voit de suite que  $x_3$  est une fonction d'une variable vérifiant

$$x'_3(v) = \frac{1-b'(v)}{\cos(2b(v))} = \frac{K}{1+b'(v)}.$$

**Remarque 3 :** Si  $K = 0$ , on a  $x_3 = \text{constante}$ , et l'image de  $x$  est réduite à un point. Ce cas sera toujours exclu par la suite.

En fixant  $x_3(0) = 0$ , on choisit  $x_3$  parmi les primitives. On obtient alors les propriétés suivantes pour  $x_3$  :

- Proposition 4**
1. La fonction  $x_3$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  ;
  2. La fonction  $x_3$  est impaire ;
  3. La fonction  $x_3$  vérifie  $x_3(v+W) = x_3(v) + x_3(W)$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* L'application  $x_3$  est bijective sur  $\mathbb{R}$  puisque c'est la primitive d'une fonction continue ayant le signe de  $K$ . La fonction  $b$  est impaire donc  $b'$  est paire donc  $x'_3$  est paire et  $x_3$  est impaire. Enfin, on a  $x'_3(v+W) = x'_3(v)$  et le résultat s'ensuit.  $\square$

Ensuite, les fonctions

$$\begin{cases} x_1(u+iv) &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos b(v) - \sin b(v)] x'_3 e^{-x_3} \sinh(u) \\ x_2(u+iv) &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos b(v) + \sin b(v)] x'_3 e^{x_3} \sinh(u). \end{cases}$$

satisfont aux équations (1.9) et (1.10).

**Théorème 8** Soit  $K$  un réel tel que  $|K| < 1$  et  $K \neq 0$ , et  $b$  la fonction définie par (1.8). On définit une fonction  $x_3$  par

$$x'_3 = \frac{K}{1+b'}, \quad x_3(0) = 0,$$

Alors l'application

$$x : u + iv \in \mathbb{C} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos b(v) - \sin b(v)] x'_3 e^{-x_3} \sinh(u) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos b(v) + \sin b(v)] x'_3 e^{x_3} \sinh(u) \\ x_3(v) \end{pmatrix}$$

est une immersion minimale conforme dont l'application de Gauss est

$$g : u + iv \in \mathbb{C} \mapsto e^{-u} e^{ib(v)} e^{-i\pi/4}.$$

De plus,

$$(0, 0, 2x_3(W)) * x(u + iv) = x(u + i(v + 2W)) \quad (1.12)$$

pour tous  $u, v \in \mathbb{R}$ . La surface image de  $x$  est appelée hélicoïde de paramètre  $K$  et sera notée  $\mathcal{H}_K$ .

*Démonstration.* L'équation (1.12) montre que l'hélicoïde est invariante par multiplication à gauche par  $(0, 0, 2x_3(W))$ . Rappelons qu'on a

$$x_3(v + 2W) = x_3(v + W) + x_3(W) = x_3(v) + 2x_3(W)$$

pour tout réel  $v$ . On obtient ainsi le résultat pour la troisième coordonnée, et on montre de la même façon que  $e^{-2x_3(W)} x_1(u + iv) = x_1(u + i(v + 2W))$  et  $e^{2x_3(W)} x_2(u + iv) = x_2(u + i(v + 2W))$ .  $\square$

**Remarque 4 :** 1. La surface  $\mathcal{H}_K$  est plongée puisque  $x_3$  est bijective. Il est aisé de voir qu'elle est même proprement plongée.

2. Les surfaces  $\mathcal{H}_K$  et  $\mathcal{H}_{-K}$  sont liées : si on note avec un indice  $K$  (respectivement  $-K$ ) les données décrivant  $\mathcal{H}_K$  (respectivement  $\mathcal{H}_{-K}$ ), on obtient

$$\begin{cases} b_{-K}(v) &= b_K(v + W/2) - \pi/2 \\ x_{3-K}(v) &= -x_{3K}(v + W/2) + x_{3K}(W/2). \end{cases}$$

En particulier,  $x_{3-K}(W) = -x_{3K}(W)$  et donc les deux surfaces ont même période  $|x_{3K}(W)|$ .

Enfin,

$$x_{-K}(u + iv) = (0, 0, x_{3K}(W/2)) * \sigma^3 x_K(u + i(v + W/2)).$$

Ainsi, il existe une isométrie de  $\text{Sol}_3$  qui envoie  $\mathcal{H}_{-K}$  sur  $\mathcal{H}_K$ .

**Proposition 5** Pour tout réel  $T$ , il existe une unique hélicoïde  $\mathcal{H}_K$  (à isométrie près, i.e.  $K \leftrightarrow -K$ ) dont la période est  $T$ .

*Démonstration.* La période  $T_K$  de l'hélicoïde  $\mathcal{H}_K$  de paramètre  $K$  est

$$\begin{aligned} T_K := 2x_3(W) &= 2 \int_0^W \frac{K}{1 + b'(s)} ds \\ &= 2K \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{1 - K \cos(2u)}(1 + \sqrt{1 - K \cos(2u)})} \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables  $u = b(s)$ , avec  $b(W) = \pi$ . En voyant  $T_K$  comme une fonction de  $K$ , on obtient

$$\frac{\partial T_K}{\partial K} = 2 \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - K \cos(2u)}^3} du$$

(valable pour  $K$  dans un compact de la forme  $[0, a] \subset [0, 1[$ , et donc pour  $K \in [0, 1[$ ). Ainsi, la fonction  $K \mapsto T_K$  est injective. De plus, on a  $T_0 = 0$  et

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(2u)}(1 + \sqrt{1 - \cos(2u)})} du \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2} \sin(u)(1 + \sqrt{2} \sin(u))} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1 + t^2}{1 + 2\sqrt{2}t + t^2} dt = +\infty, \end{aligned}$$

donc  $T_K$  est une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]0, +\infty[$ . □

La famille de vecteurs définie par

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{1 + |g|^2} \begin{bmatrix} 2\Re(g) \\ 2\Im(g) \\ 1 - |g|^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh(u)} \begin{bmatrix} \cos(b) + \sin(b) \\ \sin(b) - \cos(b) \\ \sqrt{2} \sinh(u) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

constitue un champ de vecteurs normaux à la surface. On a

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{x_u} N &= -\sin(2b) \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} x_u + \left( \frac{1 + b'}{K \cosh^2(u)} - \cos(2b) \right) x_v, \\ \bar{\nabla}_{x_v} N &= \left( \frac{1 + b'}{K \cosh^2(u)} - \cos(2b) \right) x_u + \sin(2b) \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} x_v, \end{aligned}$$

et la courbure de Gauss est donc donnée par

$$\mathcal{K} = -1 + \frac{1}{\cosh^2(u)} \left( \frac{2(1 + b') \cos(2b)}{K} - \frac{(1 + b')^2}{K^2 \cosh^2(u)} + \sin^2(2b) \right).$$

En particulier, les morceaux fondamentaux des hélicoïdes ont une courbure totale infinie puisque

$$\mathcal{K} dA = \left( -\frac{K^2}{(1 + b')^2} \cosh^2(u) + \frac{2K \cos(2b)}{1 + b'} - \frac{1}{\cosh^2(u)} + \frac{K^2 \sin^2(2b)}{(1 + b')^2} \right) dudv.$$

Pour terminer, regardons les symétries des hélicoïdes. On a déjà

$$x(-u + iv) = \begin{pmatrix} -x_1(u + iv) \\ -x_2(u + iv) \\ x_3(v) \end{pmatrix} = \sigma^2 x(u + iv).$$

Ainsi, l'hélicoïde  $\mathcal{H}_K$  est symétrique par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $x_3$ , lequel est inclus dans l'hélicoïde en tant qu'image de l'axe imaginaire pur de  $\mathbb{C}$  par  $x$ .

Ensuite, notons que la droite  $\{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  est incluse dans l'hélicoïde comme image de l'axe réel de  $\mathbb{R}$  par  $x$ . On a de plus

$$x(u - iv) = \begin{pmatrix} x_2(u + iv) \\ x_1(u + iv) \\ -x_3(v) \end{pmatrix} = \sigma\tau x(u + iv),$$

et donc  $\mathcal{H}_K$  est symétrique par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $\{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

**Remarque 5 :** La droite  $\{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  est une géodésique de l'hélicoïde. C'est même une géodésique de  $Sol_3$ .

Enfin, puisque la fonction  $\sinh$  est impaire, on a

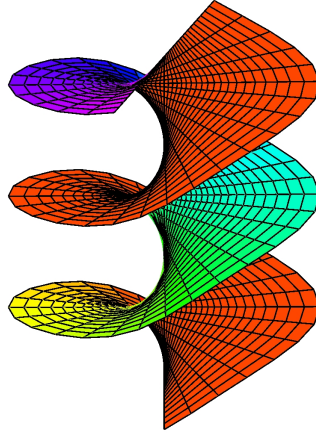
$$x(-u - iv) = \begin{pmatrix} -x_2(u + iv) \\ -x_1(u + iv) \\ -x_3(v) \end{pmatrix} = \sigma^3\tau x(u + iv).$$

Ainsi,  $\mathcal{H}_K$  est symétrique par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $\{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  (mais cet axe n'est cette fois pas inclus dans la surface).

L'hélicoïde  $\mathcal{H}_K$  n'a pas d'autre symétrie fixant l'origine; en effet si elle en avait, il existerait un difféomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $x \circ \phi = \sigma^2 \circ x$  (ici on choisit par exemple  $\sigma^2$  mais la méthode est la même pour tout élément du groupe d'isotropie de  $Sol_3$ ). Alors par composition, la surface posséderait toutes les symétries engendrées par le groupe d'isotropie. On aurait donc en particulier l'existence d'un difféomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $x \circ \phi = \tau x$ . La décomposition  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  mènerait alors à

$$\begin{pmatrix} x_1(\phi_1(u + iv) + i\phi_2(u + iv)) \\ x_2(\phi_1(u + iv) + i\phi_2(u + iv)) \\ x_3(\phi_2(u + iv)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(u + iv) \\ x_2(u + iv) \\ x_3(v) \end{pmatrix}.$$

Mais puisque  $x_3$  est bijective, on aurait  $\phi_2(u + iv) = v$  pour tous  $u, v$ , et donc on aurait simultanément  $\sinh(\phi_1(u + iv)) = \sinh(u)$  et  $\sinh(\phi_1(u + iv)) = -\sinh(u)$ , ce qui est impossible.

FIGURE 1.1 – Hélicoïde de paramètre  $K = 0.4$  avec Scilab®.

## 1.5 Caténoïdes dans $Sol_3$

Passons à présent au coeur du sujet, à savoir la construction d'anneaux minimaux. Soit  $\alpha \in ]-1; 1[$ . On commence par définir une application  $g$  sur  $\mathbb{C}$  par la formule

$$g(z = u + iv) = -ie^{-u-\gamma(v)}e^{i\rho(v)},$$

avec  $\rho$  satisfaisant à l'équation

$$\rho' = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(2\rho)}, \quad \rho(0) = 0 \quad (1.13)$$

et  $\gamma$  définie par

$$\gamma' = -\alpha \sin(2\rho), \quad \gamma(0) = 0. \quad (1.14)$$

**Proposition 6** *L'application  $\rho$  est bien définie et possède les propriétés suivantes :*

1. La fonction  $\rho$  est un difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
2. La fonction  $\rho$  est impaire ;
3. Il existe un réel  $V > 0$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(v + V) = \rho(v) + \pi$  ;
4. La fonction  $\rho$  vérifie  $\rho(kV) = k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\alpha \in ]-1, 1[$ , il existe  $r > 0$  tel que  $1 - \alpha^2 \sin^2(2\rho) \in ]r, 1]$  ; le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et  $\rho$  est bien définie. D'après (1.13) on a  $\rho' > 0$  sur son domaine de définition, et  $\sqrt{r} < \rho' \leq 1$ . Ainsi,  $\rho'$  est bornée par deux constantes positives donc  $\rho$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier et

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \rho(v) = \pm\infty.$$



La fonction  $\widehat{\rho} : v \mapsto -\rho(-v)$  satisfait également à (1.13) avec  $\widehat{\rho}(0) = 0$ ; donc  $\widehat{\rho} = \rho$  et  $\rho$  est impaire. Enfin, il existe  $V > 0$  tel que  $\rho(V) = \pi$ ; alors la fonction  $\widetilde{\rho} : v \mapsto \rho(v + V) - \pi$  vérifie (1.13) avec  $\widetilde{\rho}(0) = 0$ , donc  $\widetilde{\rho} = \rho$ .  $\square$

**Corollaire 2** 1. On a  $\rho(kV/2) = k\pi/2$  pour tout  $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ ;  
2. On a  $\rho(-v + V/2) = -\rho(v) + \frac{\pi}{2}$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* 1. On a

$$\rho\left(\frac{V}{2}\right) = \rho\left(-\frac{V}{2} + V\right) = -\rho\left(\frac{V}{2}\right) + \pi,$$

ce qui donne la formule pour  $k = 1$ . On conclut facilement.

2. Les fonctions  $\rho^* : v \mapsto \pi/2 - \rho(-v + V/2)$  et  $\rho$  satisfont à l'équation (1.13) avec  $\rho^*(0) = \rho(0) = 0$ , donc  $\rho^* = \rho$ .  $\square$

**Remarque 6 :** En particulier,  $\rho(V/4) = \pi/4$  et  $\rho(3V/4) = 3\pi/4$ . En effet, on a

$$\rho(V/4) = \rho^*(V/4) = \frac{\pi}{2} - \rho\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

et le résultat s'ensuit.

**Proposition 7** La fonction  $g$  vérifie  $(g^2 - \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} = 2gg_zg_{\bar{z}}$ .

Ainsi, l'application  $g$  induit une immersion minimale conforme  $x = (x_1, x_2, x_3)$  telle que

$$x_{1z} = e^{-x_3} \frac{(\bar{g}^2 - 1)g_z}{g^2 - \bar{g}^2}, \quad x_{2z} = ie^{x_3} \frac{(\bar{g}^2 + 1)g_z}{g^2 - \bar{g}^2}, \quad x_{3z} = \frac{2\bar{g}g_z}{g^2 - \bar{g}^2}.$$

On a bien une immersion car la métrique induite par  $x$  est donnée par

$$\begin{aligned} dw^2 &= \|x_u\|^2 |dz|^2 \\ &= (F'^2 + \alpha^2) \cosh^2(u + \gamma) |dz|^2 \\ &= \left( \frac{\alpha^4 \sin^2(2\rho)}{(1 + \rho')^2} + \alpha^2 \right) \cosh^2(u + \gamma) |dz|^2 \\ &= \frac{2\alpha^2}{1 + \rho'} \cosh^2(u + \gamma) |dz|^2, \end{aligned}$$

On obtient

$$x_{3z} = \frac{i\rho' - \gamma' - i}{2 \sin(2\rho)},$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{3u} &= 2\Re(x_{3z}) = -\frac{\gamma'}{\sin(2\rho)} = \alpha \\ x_{3v} &= -2\Im(x_{3z}) = \frac{1 - \rho'}{\sin(2\rho)} = \frac{\alpha^2 \sin(2\rho)}{1 + \rho'}. \end{cases}$$

Ainsi

$$x_3(u + iv) = \alpha u + \alpha^2 \int^v \frac{\sin(2\rho(s))}{1 + \rho'(s)} ds.$$

On choisit alors une condition initiale pour  $x_3$ ; on pose

$$F(v) := \alpha^2 \int_0^v \frac{\sin(2\rho(s))}{1 + \rho'(s)} ds$$

et on définit alors

$$x_3(u + iv) := \alpha u + F(v).$$

La fonction  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 8** *La fonction  $F$  est paire et  $V$ -périodique.*

*Démonstration.* La fonction  $F'$  est impaire puisque  $\rho$  est impaire et  $\rho'$  est paire, donc  $F$  est paire. On obtient alors

$$F'(v + V) = \alpha^2 \frac{\sin(2\rho(v) + 2\pi)}{1 + \rho'(v)} = F'(v),$$

donc il existe une constante  $C$  telle que  $F(v + V) = F(v) + C$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ . En évaluant en zéro, on obtient  $C = F(V)$ , i.e.

$$\begin{aligned} C &= \alpha^2 \int_0^V \underbrace{\frac{\sin(2\rho(s))}{1 + \rho'(s)}}_{:=H(s)} ds \\ &= \alpha^2 \left\{ \int_0^{V/4} H(s) ds + \int_{V/4}^{3V/4} H(s) ds + \int_{3V/4}^V H(s) ds \right\} \\ &:= \sum_{k=0}^2 L_k(\alpha). \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable  $u = \sin(2\rho(s))$  dans chaque intégrale  $L_k(\alpha)$ , avec

$$du = 2\rho'(s) \cos(2\rho(s)) ds = 2(-1)^k \sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - u^2)} ds.$$

Ainsi,

$$C = \alpha^2 \int_{-1}^1 \frac{u du}{(1 + \sqrt{1 - \alpha^2 u^2}) \sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - u^2)}} = 0$$

et  $F$  est  $V$ -périodique. □

**Proposition 9** *La fonction  $\gamma$  est paire et  $V$ -périodique.*

*Démonstration.* La démonstration est parfaitement analogue au cas de la fonction  $F$ . □

Les équations obtenues pour  $x_1$  et  $x_2$  se réécrivent

$$\begin{cases} x_{1z} &= e^{-x_3} \frac{(e^{-u-\gamma-i\rho} + e^{u+\gamma+i\rho})(1 - \rho' - i\gamma')}{4 \sin(2\rho)} \\ x_{2z} &= -e^{x_3} \frac{(e^{u+\gamma+i\rho} - e^{-u-\gamma-i\rho})(i - i\rho' + \gamma')}{4 \sin(2\rho)}. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} x_1 &= e^{-\alpha u - F} \left[ \frac{e^{u+\gamma}}{2(1-\alpha)} (\cos(\rho)F' - \alpha \sin(\rho)) - \frac{e^{-u-\gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \sin(\rho) + \cos(\rho)F') \right] \\ x_2 &= e^{\alpha u + F} \left[ \frac{-e^{u+\gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \cos(\rho) + F' \sin(\rho)) + \frac{e^{-u-\gamma}}{2(\alpha-1)} (\alpha \cos(\rho) - F' \sin(\rho)) \right]. \end{cases}$$

**Remarque 7 :** si  $\alpha = 0$ ,  $x(\mathbb{C}) = \{0\}$ . Ce cas sera toujours exclu dans la suite.

**Théorème 9** Soit  $\alpha$  un réel tel que  $|\alpha| < 1$  et  $\alpha \neq 0$ , et  $\rho$  et  $\gamma$  les fonctions définies par les équations (1.13) et (1.14). On définit la fonction  $F$  par

$$F(v) = \alpha^2 \int_0^v \frac{\sin(2\rho(s))}{1 + \rho'(s)} ds.$$

Alors l'application  $x : \mathbb{C} \rightarrow \text{Sol}_3$  définie par

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha u - F} \left[ \frac{e^{u+\gamma}}{2(1-\alpha)} (\cos(\rho)F' - \alpha \sin(\rho)) - \frac{e^{-u-\gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \sin(\rho) + \cos(\rho)F') \right] \\ e^{\alpha u + F} \left[ \frac{-e^{u+\gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \cos(\rho) + F' \sin(\rho)) + \frac{e^{-u-\gamma}}{2(\alpha-1)} (\alpha \cos(\rho) - F' \sin(\rho)) \right] \\ \alpha u + F \end{pmatrix}$$

est une immersion minimale conforme dont l'application de Gauss est

$$g : u + iv \in \mathbb{C} \mapsto -ie^{-u-\gamma(v)} e^{i\rho(v)}.$$

De plus,

$$x(u + i(v + 2V)) = x(u + iv) \tag{1.15}$$

pour tous  $u, v \in \mathbb{R}$ . La surface image de  $x$  est appelée caténoïde de paramètre  $\alpha$  et sera notée  $\mathcal{C}_\alpha$ .

*Démonstration.* La périodicité de  $\mathcal{C}_\alpha$  (c'est à dire la formule (1.15)) est une conséquence des Propositions 6, 8 and 9.  $\square$

**Remarque 8 :** Les surfaces  $\mathcal{C}_\alpha$  et  $\mathcal{C}_{-\alpha}$  sont liées; si on note avec un indice  $\alpha$  (respectivement  $-\alpha$ ) les données décrivant  $\mathcal{C}_\alpha$  (respectivement  $\mathcal{C}_{-\alpha}$ ), on a

$$\begin{cases} \rho_{-\alpha} &= \rho_\alpha \\ F_{-\alpha} &= F_\alpha \\ \gamma_{-\alpha} &= -\gamma_\alpha \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$x_{-\alpha}(-u + iv) = \sigma^2 x_{\alpha}(u + iv).$$

En particulier, il existe une isométrie de  $Sol_3$  fixant l'origine et préservant l'orientation qui envoie  $\mathcal{C}_{\alpha}$  sur  $\mathcal{C}_{-\alpha}$ .

Montrons à présent que les caténoïdes sont plongées :

**Proposition 10** *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'intersection de  $\mathcal{C}_{\alpha}$  avec le plan  $\{x_3 = \lambda\}$  est une courbe convexe plongée fermée non vide.*

*Démonstration.* Déjà, cette intersection est non vide :  $x(\lambda/\alpha + i0) \in \mathcal{C}_{\alpha} \cap \{x_3 = \lambda\}$ . Regardons la courbe dans  $\mathbb{C}$  définie par  $x_3(u + iv) = \alpha u + F(v) = \lambda$ , c'est à dire la courbe

$$c : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( \frac{\lambda - F(t)}{\alpha}, t \right).$$

Son image par  $x$  est

$$c : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( \begin{array}{c} e^{-\lambda} \left[ \frac{e^{\frac{\lambda-F}{\alpha} + \gamma}}{2(1-\alpha)} (\cos(\rho)F' - \alpha \sin(\rho)) - \frac{e^{-\frac{\lambda-F}{\alpha} - \gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \sin(\rho) + \cos(\rho)F') \right] \\ e^{\lambda} \left[ \frac{-e^{\frac{\lambda-F}{\alpha} + \gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \cos(\rho) + F' \sin(\rho)) + \frac{e^{-\frac{\lambda-F}{\alpha} - \gamma}}{2(\alpha-1)} (\alpha \cos(\rho) - F' \sin(\rho)) \right] \\ \lambda \end{array} \right) (t)$$

Le calcul conduit à

$$c'_1(t) = \frac{e^{-\lambda}}{\alpha(1-\alpha^2)} \left[ A(t) \cosh \left( \frac{\lambda - F}{\alpha} + \gamma \right) + B(t) \sinh \left( \frac{\lambda - F}{\alpha} + \gamma \right) \right],$$

avec

$$\begin{cases} A &= -F'^2 \cos(\rho) + \alpha \gamma' F' \cos(\rho) - \alpha^2 \rho' \cos(\rho) + \alpha^2 F' \sin(\rho) - \alpha^3 \gamma' \sin(\rho) + \alpha^2 F'' \cos(\rho) \\ &\quad - \alpha^2 F' \rho' \sin(\rho), \\ B &= \alpha F' \sin(\rho) - \alpha^2 \gamma' \sin(\rho) + \alpha F'' \cos(\rho) - \alpha F' \rho' \sin(\rho) - \alpha F'^2 \cos(\rho) \\ &\quad + \alpha^2 \gamma' F' \cos(\rho) - \alpha^3 \rho' \cos(\rho). \end{cases}$$

Après simplifications, on note que  $B = 0$ , et

$$A(t) = (F'^2(t) + \alpha^2)(\alpha^2 - 1) \cos(\rho(t)).$$

Finalement,

$$c'_1(t) = -\frac{e^{-\lambda}}{\alpha} (F'^2(t) + \alpha^2) \cos(\rho(t)) \cosh \left( \frac{\lambda - F(t)}{\alpha} + \gamma(t) \right).$$

De la même façon, on obtient

$$c'_2(t) = -\frac{e^{-\lambda}}{\alpha} (F'^2(t) + \alpha^2) \sin(\rho(t)) \cosh \left( \frac{\lambda - F(t)}{\alpha} + \gamma(t) \right).$$

Ainsi

$$c_1'^2 + c_2'^2 = \frac{e^{-2\lambda}}{\alpha^2} (F'^2(t) + \alpha^2)^2 \cosh^2 \left( \frac{\lambda - F(t)}{\alpha} + \gamma(t) \right) > 0,$$

donc l'intersection  $\mathcal{C}_\alpha \cap \{x_3 = \lambda\}$  est une courbe régulière; de plus, elle est fermée puisque  $c(t + 2V) = c(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Les plans  $\{x_3 = \lambda\}$  sont plats : en effet, les métriques sur ces plans sont données par  $e^{2\lambda} dx_1^2 + e^{-2\lambda} dx_2^2$ . Ainsi, via un changement affine de coordonnées, on peut se ramener à des coordonnées euclidiennes. La convexité étant préservée par transformation affine, on peut supposer que l'on est en présence de coordonnées euclidiennes.

Pour montrer que  $c$  est convexe et plongée, on considère la partie de  $c$  correspondant à  $t \in (-V/2, V/2)$ . Sur  $(-V/2, V/2)$ , on a  $\cos(\rho(t)) > 0$  d'après la Proposition 6 et le Corollaire 2. Donc  $c_1'(t) < 0$  si  $\alpha > 0$  (et  $c_1'(t) > 0$  si  $\alpha < 0$ ) et  $c_1$  est injective et décroissante  $\alpha > 0$  (et croissante si  $\alpha < 0$ ). On obtient

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \tan(\rho(t)),$$

donc  $\frac{dc_2}{dc_1}$  est une fonction croissante de  $t$ , et donc de  $c_1$  si  $\alpha < 0$  (et une fonction décroissante de la fonction décroissante  $c_1$  si  $\alpha > 0$ ). Dans les deux cas, la courbe est convexe.

Ainsi, la moitié de  $c$  correspondant à  $t \in (-V/2, V/2)$  est convexe et plongée. Puisque  $c(t + V) = -c(t)$ , la courbe entière est convexe et plongée.  $\square$

Les graphiques suivants montrent les sections des caténoïdes avec différents plans  $\{x_3 = \lambda\}$ , tracés avec Scilab $\text{\textcircled{R}}$  :

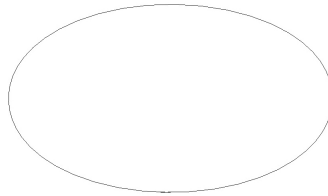


FIGURE 1.2 – Section de  $\mathcal{C}_{0.3}$  avec  $\{x_3 = -0.6\}$ .

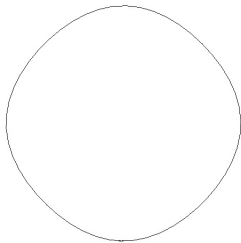


FIGURE 1.3 – Section de  $\mathcal{C}_{0.3}$  avec  $\{x_3 = 0\}$ .



FIGURE 1.4 – Section de  $\mathcal{C}_{0.3}$  avec  $\{x_3 = 0.6\}$ .

**Corollaire 3** La surface  $\mathcal{C}_\alpha$  est proprement plongée pour tout  $\alpha \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ .

**Proposition 11** Pour tout  $\alpha \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ , la surface  $\mathcal{C}_\alpha$  est conformément équivalente à  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Démonstration.* L'application  $\tilde{x} : \mathbb{C}/(2iV\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}_\alpha$  est une paramétrisation conforme bijective de  $\mathcal{C}_\alpha$ .  $\square$

Là encore, terminons par regarder les symétries des caténoïdes; on a

$$x(u + i(v + V)) = \begin{pmatrix} -x_1(u + iv) \\ -x_2(u + iv) \\ x_3(u + iv) \end{pmatrix} = \sigma^2 x(u + iv).$$

Ainsi, la surface  $\mathcal{C}_\alpha$  est symétrique par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $x_3$ .

**Remarque 9 :** L'axe  $x_3$  est contenu dans l'“intérieur” de  $\mathcal{C}_\alpha$  puisque chaque courbe  $\mathcal{C}_\alpha \cap \{x_3 = \lambda\}$  est convexe et symétrique par rapport à cet axe.

On a de même

$$x(u - iv) = \begin{pmatrix} -x_1(u + iv) \\ x_2(u + iv) \\ x_3(u + iv) \end{pmatrix} = \tau x(u + iv),$$

donc la surface  $\mathcal{C}_\alpha$  est symétrique par réflexion par rapport au plan  $\{x_1 = 0\}$ . Enfin, on a aussi

$$x(u + i(-v + V)) = \sigma^2 \tau x(u + iv),$$

donc  $\mathcal{C}_\alpha$  est symétrique par réflexion par rapport au plan  $\{x_2 = 0\}$ . Comme on l'a prouvé pour les hélicoïdes, on montre que les caténoïdes  $\mathcal{C}_\alpha$  n'ont pas d'autre symétrie préservant l'origine.

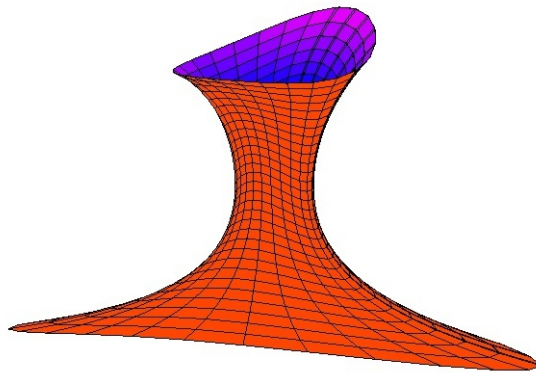


FIGURE 1.5 – Caténoïde pour  $\alpha = -0.6$  avec Scilab $\text{\textcircled{R}}$ .

## 1.6 Limites des caténoïdes

Terminons ce chapitre par l'étude des limites des caténoïdes lorsque le paramètre  $\alpha$  tend vers le bord de son domaine de définition, c'est à dire dans un premier temps quand  $\alpha$  tend vers 0, puis lorsque  $\alpha$  tend vers  $\pm 1$ .

### 1.6.1 Le cas $\alpha = 0$

On effectue le changement de paramètres

$$\begin{cases} u' &= u + \ln(\alpha) \\ v' &= v. \end{cases}$$

Dans ces coordonnées, l'immersion  $x$  donnée au Théorème 9 prend la forme

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha \ln(\alpha) - \alpha u' - F} \left[ \frac{e^{u'+\gamma}}{2\alpha(1-\alpha)} (\cos(\rho)F' - \alpha \sin(\rho)) - \frac{\alpha e^{-u'-\gamma}}{2(1+\alpha)} (\alpha \sin(\rho) + \cos(\rho)F') \right] \\ e^{-\alpha \ln(\alpha) + \alpha u' + F} \left[ \frac{-e^{u'+\gamma}}{2\alpha(1+\alpha)} (\alpha \cos(\rho) + F' \sin(\rho)) + \frac{\alpha e^{-u'-\gamma}}{2(\alpha-1)} (\alpha \cos(\rho) - F' \sin(\rho)) \right] \\ -\alpha \ln(\alpha) + \alpha u' + F \end{pmatrix}$$

En faisant tendre à présent  $\alpha$  vers 0, on obtient

$$\begin{cases} \rho &\rightarrow Id \\ F/\alpha &\rightarrow 0 \\ F'/\alpha &\rightarrow 0 \\ \gamma &\rightarrow 0 \end{cases}$$

et la limite de l'immersion est donc

$$\begin{pmatrix} -\frac{e^{u'}}{2} \sin(v') \\ -\frac{e^{u'}}{2} \cos(v') \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc une paramétrisation du plan  $\{x_3 = 0\}$ , qui est donc la surface limite de la famille de surfaces  $(C_\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0.

### 1.6.2 Le cas $\alpha = 1$

On étudie maintenant la limite lorsque  $\alpha$  tend vers 1, le cas où  $\alpha$  tend vers  $-1$  étant analogue. On montre que la surface limite est alors un graphe minimal entier :

**Proposition 12** Soit  $\mathbf{x} : \mathbb{C} \rightarrow \text{Sol}_3$  l'application définie par

$$\mathbf{x}(u + iv) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tanh(v)}{2} (1 + e^{-2u}) \\ \frac{e^{2u}}{4} - \frac{u}{2} - \frac{\cosh(2v)}{4} \\ u + \ln(\cosh(v)) \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathbf{x}$  est une immersion minimale et son image, notée  $\mathcal{S}$ , est la limite des surfaces  $C_\alpha$  lorsque  $\alpha$  tend vers 1 (à une translation près). De plus, il existe une fonction analytique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\mathcal{S}$  soit le  $\mathbf{x}_2$ -graphe de  $f$  donné par  $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$ .

*Démonstration.* Pour  $\alpha = 1$ , l'application de Gauss est toujours donnée par  $g(z = u + iv) = -ie^{-u-\gamma(v)}e^{i\rho(v)}$ , avec  $\rho$  satisfaisant cette fois à l'équation :

$$\rho' = \cos(2\rho), \quad \rho(0) = 0, \quad (1.16)$$

et  $\gamma$  vérifiant toujours

$$\gamma' = -\sin(2\rho), \quad \gamma(0) = 0. \quad (1.17)$$

On a des expressions explicites de ces fonctions :

$$\begin{cases} \rho(v) &= \arctan(e^{2v}) - \pi/4 = \arctan(\tanh(v)) \\ \gamma(v) &= -\frac{1}{2}\ln(\cosh(2v)). \end{cases}$$

Ainsi en posant

$$F(v) = \int_0^v \frac{\sin(2\rho(s))}{1 + \cos(2\rho(s))} ds,$$

on obtient  $F(v) = \ln(\cosh(v))$ . L'immersion  $x$  est alors donnée par

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2u}}{2} \tanh(v) + \frac{e^{-v}}{2 \cosh(v)} \\ \frac{e^{2u}}{4} - \frac{u}{2} - \frac{\cosh(2v)}{4} \\ u + \ln(\cosh(v)) \end{pmatrix}.$$

Un champ de vecteurs normaux à  $\mathcal{S}$  est donné par

$$N = \frac{1}{1 + e^{-2u} \cosh(2v)} \begin{bmatrix} 2 \sinh(v)e^{-u} \\ -2 \cosh(v)e^{-u} \\ 1 - e^{-2u} \cosh(2v) \end{bmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$g(u + iv) = -ie^{-u}(\cosh(v) + i \sinh(v))$$

qui satisfait bien à l'équation des applications harmoniques (1.6). La métrique induite par cette immersion sur la surface est

$$ds^2 = (e^{-4u} \tanh^2(v) + e^{2u} \sinh^2(u) + 1)|dz|^2.$$

La surface image de  $x$  est symétrique par réflexion par rapport à  $\{x_1 = 1/2\}$  puisque

$$x(u + iv) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\tanh(v)}{2}(1 + e^{-2u}) \\ \frac{e^{2u}}{4} - \frac{u}{2} - \frac{\cosh(2v)}{4} \\ u + \ln(\cosh(v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \widetilde{x}_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix},$$



et donc

$$x(u - iv) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \widetilde{x}_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix}.$$

Il est équivalent de dire que la surface translatée  $(-1/2, 0, 0) * x(u + iv)$  est symétrique par rapport à  $\{x_1 = 0\}$ . Cette surface translatée, notée  $\mathcal{S}$ , est l'image de l'immersion minimale  $\mathbf{x}$  définie par

$$\mathbf{x}(u + iv) = (-1/2, 0, 0) * x(u + iv) = \begin{pmatrix} -\frac{\tanh(v)}{2}(1 + e^{-2u}) \\ \frac{e^{2u}}{4} - \frac{u}{2} - \frac{\cosh(2v)}{4} \\ u + \ln(\cosh(v)) \end{pmatrix}.$$

Cette surface est analytique (comme toute surface minimale dans  $\text{Sol}_3$ ), donc elle est localement un  $\mathbf{x}_2$ -graphe au voisinage de chaque point où  $\partial_2$  n'appartient pas au plan tangent, i.e.  $\langle N, \partial_2 \rangle \neq 0$ . Mais

$$\langle N, \partial_2 \rangle = 0 \iff \cosh(v)e^{-u} = 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi,  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbf{x}_2$ -graphe analytique au voisinage de chaque point. Considérons à présent des sections de  $\mathcal{S}$  avec les plans  $\{\mathbf{x}_3 = \text{constante}\}$  : sur le plan  $\{\mathbf{x}_3 = \lambda\}$ , on obtient la courbe

$$c_\lambda(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\tanh(t)}{2}(1 + e^{-2\lambda} \cosh^2(t)) \\ \frac{e^{2\lambda}}{4 \cosh^2(t)} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\ln(\cosh(t))}{2} - \frac{\cosh(2t)}{4} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1\lambda}(t) \\ \mathbf{x}_{2\lambda}(t) \end{pmatrix}.$$

Ces courbes sont représentées graphiquement à la page suivante. Ainsi,

$$\mathbf{x}_{1\lambda}'(t) = \frac{\tanh^2(t) - 1}{2} - \frac{e^{-2\lambda}}{2}(\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) < 0$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Les courbes étant injectives, la surface  $\mathcal{S}$  est plongée. De plus, on déduit du théorème des fonctions implicites que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction  $f_\lambda$  telle que  $\mathbf{x}_{2\lambda} = f_\lambda(\mathbf{x}_{1\lambda})$ . Puisque la fonction  $\mathbf{x}_{1\lambda}$  est un difféomorphisme décroissant de  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f_\lambda$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Le calcul étant valable pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$ .

Finalement, cette fonction  $f$  coïncide au voisinage de tout point avec la fonction analytique locale donnant les graphes locaux, donc  $f$  est analytique.  $\square$

Notons pour terminer que pour tout  $\mathbf{x}_3$  fixé, on a les comportements asymptotiques suivants :

- ▷ Lorsque  $\mathbf{x}_1 \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbf{x}_2 \approx -\mathbf{x}_1 e^{2\mathbf{x}_3}$  ;
- ▷ Lorsque  $\mathbf{x}_1 \rightarrow -\infty$ ,  $\mathbf{x}_2 \approx \mathbf{x}_1 e^{2\mathbf{x}_3}$ .

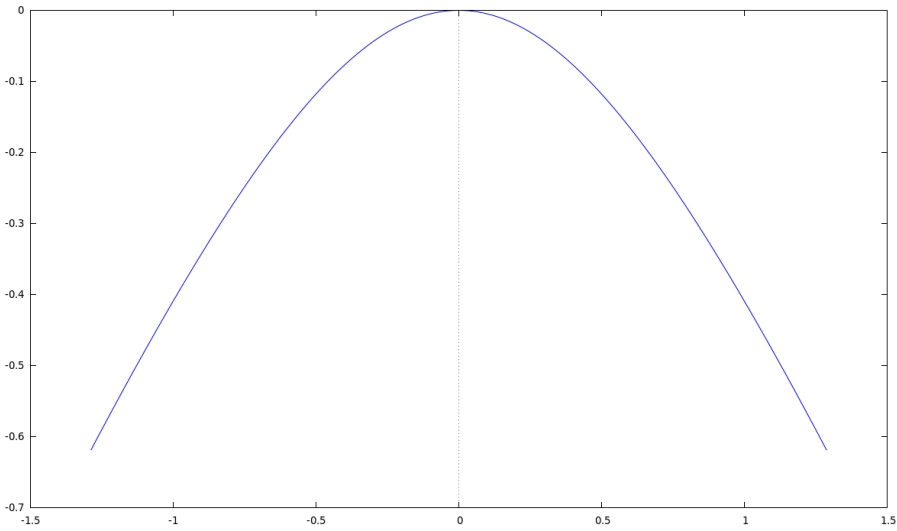


FIGURE 1.6 – Section avec  $\{x_3 = 0\}$ .

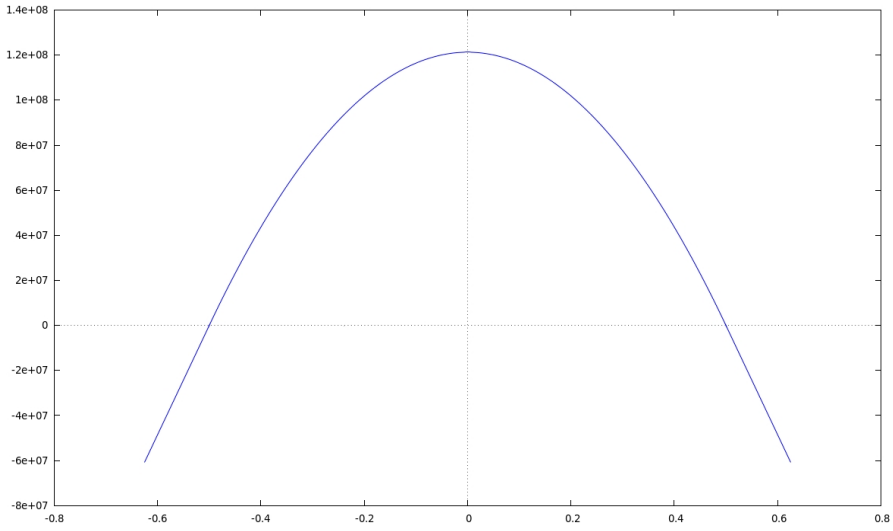


FIGURE 1.7 – Section avec  $\{x_3 = 10\}$ .

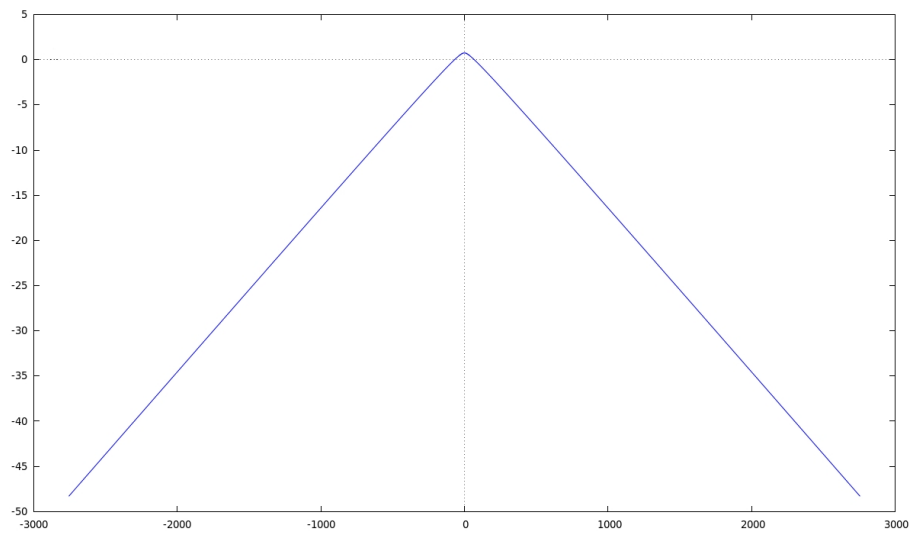


FIGURE 1.8 – Section avec  $\{x_3 = -2\}$ .

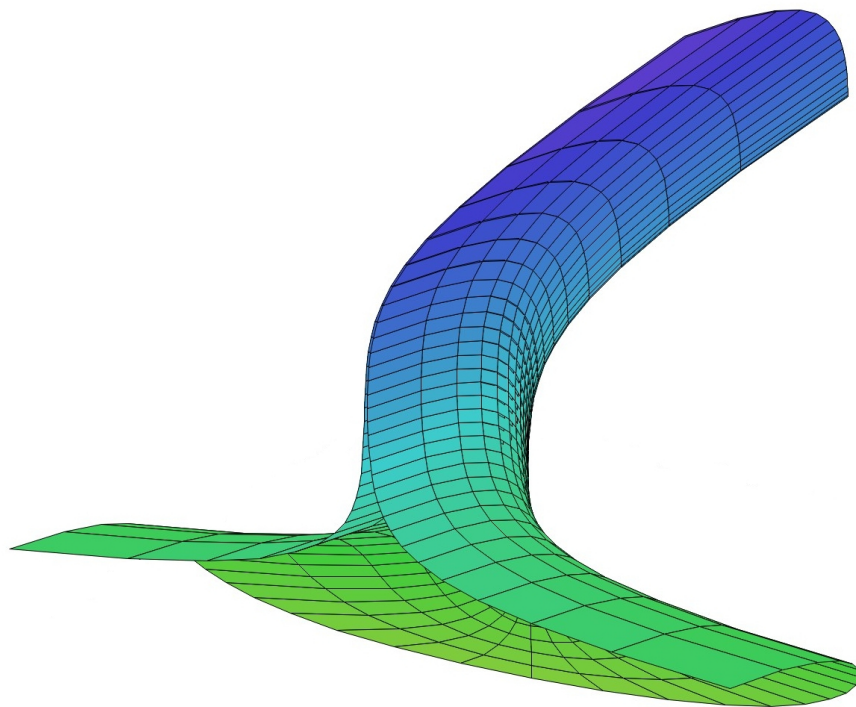


FIGURE 1.9 – La surface  $\mathcal{S}$  avec Maxima<sup>®</sup>.

## Chapitre 2

# Approche spinorielle du Théorème d'Alexandrov généralisé

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'utiliser des outils spinoriels pour donner une nouvelle preuve du Théorème 2 énoncé en introduction, ainsi que son équivalent dans  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Dans le cas euclidien, Hsiung ([46]) prouva en 1954 le Théorème 2 pour tout  $r$  pour des hypersurfaces immergées et étoilées. En particulier, le cas de la courbure de Gauss ( $r = n$ ) du Théorème 2 se déduit de ses travaux par l'utilisation du Théorème d'Hadamard, stipulant que toute hypersurface immergée dont la courbure de Gauss est constante est strictement convexe. En 1956, Alexandrov énonça le premier le Théorème dans le cas de la courbure moyenne ( $r = 1$ ), et le prouva en utilisant un principe de réflexion ([4]). Une autre preuve du cas  $r = 1$  est due à Reilly ([67]). Ros ([71]) résolut le cas de la courbure scalaire ( $r = 2$ ) en adaptant la méthode de Reilly. Par la suite, ce dernier étendit son propre résultat à toutes les  $H_r$ -courbures ([70]) en utilisant les formules de Minkowski (voir équation (2.19)) et l'Inégalité de Heintze-Karcher. Une autre preuve fut donnée quasi simultanément par Korevaar dans un appendice à [71].

Ce résultat fut ensuite également établi dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^{n+1}$  et dans la sphère  $\mathbb{S}^{n+1}$  (avec l'hypothèse supplémentaire que l'hypersurface soit plongée dans un hémisphère de  $\mathbb{S}^{n+1}$ ) par Montiel et Ros [63] par une méthode similaire à celle utilisée par Ros dans le cas euclidien.

Si la géométrie spinorielle a déjà permis de démontrer le Théorème 2 dans le cas de la courbure moyenne  $H$  ( $r = 1$ ), la méthode utilisée ne s'étend pas de façon évidente pour  $r \geq 2$ . En effet, la courbure moyenne joue un rôle privilégié par rapport aux autres  $H_r$ -courbures par l'intermédiaire de la formule de Gauss (voir (2.10)). Nous utiliserons les résultats suivants :

**Théorème 10** (Hijazi-Montiel [37]) *Soit  $(\overline{M}, g)$  une variété Riemannienne connexe de dimension  $(n + 1)$  munie d'une structure spinorielle, et  $\Omega$  un domaine compact connexe de  $\overline{M}$  ayant*

un bord  $M = \partial\Omega$  lisse. On suppose de plus que la courbure scalaire  $\bar{R}$  de  $\bar{M}$  est positive ou nulle, et que la courbure moyenne  $H$  de  $M$  par rapport à la normale entrante est strictement positive. Alors pour tout champ de spineurs extrinsèque  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Z}M)$ , on a :

$$\int_M \frac{1}{H} |\mathcal{D}\psi|^2 dM \geq \frac{n^2}{4} \int_M H |\psi|^2 dM.$$

De plus, l’égalité a lieu si et seulement si il existe deux champs de spineurs parallèles  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sur  $\Omega$  tels que  $P_+\Psi_1 = P_+\psi$  et  $P_-\Psi_2 = P_-\psi$  sur  $M$ .

**Théorème 11** (Hijazi-Montiel-Raulot [39]) *Soit  $(\bar{M}, g)$  une variété Riemannienne connexe de dimension  $(n + 1)$  munie d’une structure spinorielle, et  $\Omega$  un domaine compact connexe de  $\bar{M}$  ayant un bord  $M = \partial\Omega$  lisse. On suppose de plus que la courbure scalaire  $\bar{R}$  de  $\bar{M}$  vérifie  $\bar{R} \geq -n(n + 1)$ , et que la courbure moyenne  $H$  de  $M$  par rapport à la normale entrante est strictement positive. Alors pour tout champ de spineurs extrinsèque  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Z}M)$ , on a :*

$$\int_M \frac{1}{H} |\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}}\psi|^2 dM \geq \frac{n^2}{4} \int_M H |\psi|^2 dM.$$

Il y a égalité si et seulement si il existe deux  $+i/2$ -spineurs de Killing  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sur  $\Omega$  tels que  $P_+\Psi_1 = P_+\psi$  et  $P_-\Psi_2 = P_-\psi$ .

Dans le cas hyperbolique, l’opérateur  $\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}}$  est un opérateur de Dirac modifié à l’ordre 0, défini en (2.27) sur un fibré modifié  $\mathcal{Z}M$  introduit par les équations (2.24), (2.25) et (2.26). Les opérateurs  $P_{\pm}$  sont des projections sur le fibré des spineurs extrinsèque, qui fournissent de bonnes conditions à bord pour l’opérateur de Dirac (voir (2.18) pour le cas euclidien, (2.37) pour le cas hyperbolique).

Nous allons traiter les cas des espaces euclidien et hyperbolique séparément. Dans un premier temps nous rappellerons comment une hypersurface orientable d’une variété spinorielle hérite d’une structure spinorielle induite, puis pour chacun des espaces  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbb{H}^{n+1}$  nous introduirons les projections  $P_{\pm}$  apparaissant dans les Théorèmes 10 et 11, avant de nous pencher sur la preuve du Théorème 2. Nous utiliserons également le Théorème 10 pour démontrer l’Inégalité de Heintze-Karcher (Théorème 3, [34]) dans l’espace euclidien. Mais avant de distinguer les cas, rappelons la définition des  $H_r$ -courbures : soient  $k_1, \dots, k_n$  les courbures principales sur  $M$  ; on pose

$$H_r := \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r}, \quad (2.1)$$

pour  $1 \leq r \leq n$  (et  $H_0 = 1$  par convention). La fonction  $H_r$  est appelée  $H_r$ -courbure (ou  $r$ -courbure) pour tout  $r = 1, \dots, n$ . On peut remarquer que  $H_1 = H$  (courbure moyenne) et  $n(n - 1)H_2 = \text{Scal}_M$ , où  $\text{Scal}_M$  désigne la courbure scalaire de  $M$ , et  $H_n = K_M$  la courbure de Gauss.

Enfin, la proposition suivante ([63]) utilise les résultats de Gårding ([25]) et est valable à la fois dans l’espace euclidien et dans l’espace hyperbolique :

**Proposition 13** (Gårding ([25]), Montiel-Ros [63]) *Soit  $x : M \rightarrow \overline{M}$  une immersion isométrique entre deux variétés riemanniennes de dimensions respectives  $n$  et  $(n + 1)$ . On suppose que  $M$  est connexe et qu'il existe un point elliptique sur  $M$  (c'est à dire où les courbures principales sont toutes strictement positives par rapport à la normale entrante). Alors s'il existe un  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_r > 0$  sur  $M$ , on a*

$$H \geq H_2^{1/2} \geq \dots \geq H_r^{1/r} \text{ sur } M. \quad (2.2)$$

*Si  $r \geq 2$ , on a égalité seulement en les points ombilicux (c'est à dire où toutes les courbures principales sont égales).*

## 2.2 Structures spinorielles sur une hypersurface

On rappelle ici comment une hypersurface d'une variété spinorielle hérite à son tour d'une structure spinorielle, comme cela est fait dans [37], [38], [41], [42] ou encore [43], où de façon plus détaillée dans [13] ou [53].

Une *structure spinorielle* sur une variété riemannienne  $(M^n, g)$  de dimension  $n$  est un couple  $(\text{Spin}M, \eta)$  où  $\text{Spin}M$  est un fibré  $\text{Spin}_n$ -principal sur  $M$  et  $\eta$  un revêtement à deux feuilletés du fibré  $\text{SO}_n$ -principal  $\text{SOM}$  de  $M$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}M \times \text{Spin}_n & \longrightarrow & \text{Spin}M \\ \downarrow \eta \times \text{Ad} & & \downarrow \eta \\ \text{SOM} \times \text{SO}_n & \longrightarrow & \text{SOM} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi \\ \searrow \pi \\ M \end{array}$$

les flèches horizontales représentant les actions des groupes  $\text{Spin}_n$  et  $\text{SO}_n$  sur les fibrés principaux  $\text{Spin}M$  et  $\text{SOM}$ . En particulier, on a  $\eta(\kappa a) = \eta(\kappa)\text{Ad}(a)$  pour tous  $\kappa \in \text{Spin}M$  et  $a \in \text{Spin}_n$ .

**Remarque 10 :** Toutes les variétés riemanniennes ne peuvent pas être munies d'une telle structure : par exemple, l'espace projectif complexe de dimension complexe paire  $\mathbb{C}P^{2m}$  n'est pas spinoriel. En cas d'existence d'une telle structure, elle n'est pas nécessairement unique : ainsi, la sphère  $\mathbb{S}^1$  peut être munie de deux structures spinorielles non équivalentes (par contre il existe une unique structure spinorielle sur les sphères  $\mathbb{S}^n$  lorsque  $n \geq 2$ ) : voir [9].

Le *fibré des spineurs*  $\Sigma M$  d'une variété spinorielle est alors le fibré vectoriel associé à  $\text{Spin}M$  par une représentation irréductible  $\rho : \text{Spin}_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ , où  $\Sigma_n$  est un espace vectoriel de dimension complexe  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  :

$$\Sigma M := \text{Spin}M \times_{\rho} \Sigma_n.$$

Soit à présent  $(\overline{M}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  une variété riemannienne spinorielle orientée de dimension  $(n+1)$ . On note  $(\text{Spin}\overline{M}, \eta)$  sa structure spinorielle. Soit  $M$  une hypersurface orientable de  $\overline{M}$ . Déjà,

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle|_M)$  est une variété riemannienne; on notera encore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la restriction du produit scalaire à  $M$ . Comme  $M$  est orientable, on peut choisir un champ de vecteurs normaux unitaires global, noté  $N$ , et définir l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \text{SOM} &\longrightarrow \text{SOM} \\ \{e_1, \dots, e_n\} &\longmapsto \{e_1, \dots, e_n, N\}. \end{aligned}$$

Alors  $\Pi$  étant un difféomorphisme sur son image,  $\text{SOM}$  s'identifie à un sous-fibré de la restriction à  $M$  de  $\text{SOM}$ , notée  $\text{SOM}|_M = \cup_{m \in M} \{m\} \times \{\text{bases orthonormées directes de } T_m \overline{M}\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbb{C}l_n$  l'algèbre de Clifford complexe de dimension  $n$ , et  $\mathbb{C}l_n^0$  sa partie paire. On désignera également par " $\cdot$ " la multiplication de Clifford sur  $\mathbb{C}l_n$ . Rappelons que le morphisme d'algèbres  $\Upsilon$  de  $\mathbb{C}l_n$  sur  $\mathbb{C}l_{n+1}^0$  défini pour tout  $w \in \mathbb{R}^n$  par

$$\Upsilon(w) = w \cdot N$$

(où  $N$  est ici le dernier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ) est un isomorphisme. En restreignant  $\Upsilon$  à  $\text{Spin}_n$ , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}_n & \xrightarrow{\Upsilon} & \text{Spin}_{n+1} \\ \downarrow \text{Ad}^n & & \downarrow \text{Ad}^{n+1} \\ \text{SO}_n & \xrightarrow{\subset} & \text{SO}_{n+1} \end{array} ,$$

où  $\text{Ad}^k$  est la représentation adjointe de  $\text{Spin}_k$  définie par

$$\begin{aligned} \text{Ad}^k : \text{Spin}_k &\longrightarrow \text{SO}_k \\ a &\longmapsto \left[ \text{Ad}_a^k : w \in \mathbb{R}^k \mapsto a \cdot w \cdot a^{-1} \right], \end{aligned}$$

et l'inclusion de  $\text{SO}_n$  dans  $\text{SO}_{n+1}$  est celle qui consiste à fixer le dernier vecteur de base sous l'action de  $\text{SO}_{n+1}$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ensuite, le revêtement à deux feuillets  $\eta$  de  $\text{SOM}$ , lorsqu'il est restreint à  $\text{Spin}\overline{M}|_M$ , est à valeurs dans  $\text{SOM}|_M$ , et on pose

$$\text{Spin}M := \eta^{-1}(\Pi(\text{SOM})),$$

qui est un sous-fibré de  $\text{Spin}\overline{M}|_M$ . Si on note  $\overline{\pi} : \text{Spin}\overline{M} \longrightarrow \overline{M}$  la projection du fibré  $\text{Spin}\overline{M}$  sur  $\overline{M}$ , on pose

$$\pi := \overline{\pi}|_{\text{Spin}M}$$

et

$$\eta' := \Pi^{-1} \circ \eta|_{\text{Spin}M}.$$

Avec ces définitions, on obtient que  $\text{Spin}M$  est un fibré  $\text{Spin}_n$ -principal sur  $M$  et que  $\eta' : \text{Spin}M \rightarrow \text{SOM}$  est un revêtement à deux feuillets. De plus, on voit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}M \times \text{Spin}_n & \longrightarrow & \text{Spin}M \\
 \downarrow \eta' \times \text{Ad}^n & & \downarrow \eta' \\
 \text{SOM} \times \text{SO}_n & \longrightarrow & \text{SOM}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \pi \\
 \searrow \pi \\
 M,
 \end{array}$$

commute. Le couple  $(\text{Spin}M, \eta')$  définit donc bien une structure spinorielle sur  $M$ . Le fibré des spineurs associé est appelé fibré des spineurs *intrinsèque*, noté  $\Sigma M$ . Maintenant on voudrait établir un lien entre les spineurs sur  $\overline{M}$  et les spineurs sur  $M$ . Soit donc  $U$  un ouvert de  $\overline{M}$  et  $\Psi \in \Gamma_U(\Sigma \overline{M})$  une section de  $\Sigma \overline{M}$ , c'est à dire un *champ de spineurs*. Le spineur  $\Psi$  est donc une classe d'équivalence de la forme  $\Psi = [\sigma, s]$ , avec  $\sigma \in \Gamma_U(\text{Spin} \overline{M})$  et  $s : U \rightarrow \Sigma_{n+1}$  une fonction, la classe d'équivalence étant définie par

$$(u, v) \sim (ua, \rho(a)^{-1}v), \quad a \in \text{Spin}_{n+1},$$

où  $ua$  désigne l'image de  $u$  par action à droite de  $\text{Spin}_{n+1}$  sur les fibres de  $\text{Spin} \overline{M}$ . Avec les notations précédentes,  $\eta(\sigma)$  est une section locale de  $\text{SOM}$ , et quitte à changer de représentants pour  $\Psi$ , on peut supposer qu'elle a  $N$  comme dernier vecteur de base. En effet, si on change  $\sigma$  par  $\sigma a$  pour  $a \in \text{Spin}_{n+1}$ , alors  $\eta(\sigma)$  devient  $\eta(\sigma) \text{Ad}_a^{n+1}$ , et on choisit  $a$  pour que  $\text{Ad}_a^{n+1}$  soit la bonne isométrie. Alors

$$\Psi|_M = [\sigma|_{U \cap M}, s|_{U \cap M}],$$

où la classe d'équivalence est prise pour la représentation  $\rho_{n+1} \circ \Upsilon$  et sur les éléments de  $\text{Spin}_n$  (puisque les éléments  $a$  de  $\text{Spin}_{n+1}$  tels que  $\text{Ad}_a^{n+1}$  préserve  $N$  sont exactement les  $\Upsilon(b)$  pour  $b \in \text{Spin}_n$ ). Le *fibré des spineurs extrinsèque*  $\mathcal{Z}M$  est la restriction à  $M$  du fibré des spineurs complexe de  $\overline{M}$ , c'est à dire  $\mathcal{Z}M = \Sigma \overline{M}|_M = \text{Spin}M \times_{\rho_{n+1} \circ \Upsilon} \Sigma_{n+1}$ .

Rappelons que le fibré tangent  $TM$  d'une variété spinorielle  $M^n$  est isomorphe à  $\text{Spin}M \times_{\text{Ad}} \mathbb{R}^n$ . On peut donc écrire tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$  sous la forme  $X = [\sigma, \chi]$ , avec  $\sigma \in \Gamma(\text{Spin}M)$  et  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La multiplication de Clifford intrinsèque est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 \gamma^M : TM &\longrightarrow \text{End}(\Sigma M) \\
 X = [\sigma, \chi] &\longmapsto \left[ \gamma(X) : \psi = [\sigma, s] \mapsto [\sigma, \rho(\chi)(s)] \right],
 \end{aligned}$$

avec  $\rho$  la représentation spinorielle complexe pour la structure spinorielle de  $M$ , et elle s'étend au fibré de Clifford de  $M$ . Ainsi, si  $X = [\sigma, \chi] \in \Gamma(TM)$ , on pose  $\overline{X} = [\overline{\sigma}, \overline{\chi}]$  une extension lisse de  $X$  au voisinage d'un point de  $M$ ; soit également  $\psi = [\sigma, s] \in \Gamma(\mathcal{Z}M)$  tel que  $\psi = \Psi|_M$ , avec  $\Psi = [\overline{\sigma}, \overline{s}] \in \Gamma(\Sigma \overline{M})$ . La multiplication de Clifford de  $\psi$  par  $X$  pour la structure spinorielle extrinsèque est un élément de  $\Gamma_{U \cap M}(\mathcal{Z}M)$  défini sur  $M$  par

$$\gamma(X)\psi = [\sigma, \rho_{n+1}(\underbrace{\Upsilon(\overline{X})}_{\overline{\chi} \cdot N})(s)] = (\overline{\gamma}(\overline{X})\overline{\gamma}(N)\Psi)|_M, \quad (2.3)$$



où  $\bar{\gamma}$  est la multiplication de Clifford sur  $\bar{M}$ . Cette définition a du sens car la multiplication de Clifford sur  $\bar{M}$  ne fait intervenir que les valeurs ponctuelles de  $\bar{X}$  et  $\Psi$  au point voulu. Dans la suite on notera de la même façon les éléments définis sur  $\bar{M}$  et leurs restrictions à  $M$ .

On désigne par le même symbole  $\bar{\nabla}$  les connexions de Levi-Civita riemannienne et spinorielle sur  $\bar{M}$ , agissant respectivement sur les champs de vecteurs  $X \in \Gamma(T\bar{M})$  et sur les champs de spineurs  $\Psi \in \Gamma(\Sigma\bar{M})$ . Il existe une métrique hermitienne  $\Sigma\bar{M}$  (voir [53]) telle que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tous  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$  et  $\Psi, \Phi \in \Gamma(\Sigma\bar{M})$  :

$$\langle \bar{\gamma}(X)\Psi, \bar{\gamma}(X)\Phi \rangle = |X|^2 \langle \Psi, \Phi \rangle \quad (2.4)$$

$$\langle \bar{\gamma}(X)\Psi, \bar{\gamma}(Y)\Psi \rangle = \langle X, Y \rangle |\Psi|^2 \quad (2.5)$$

$$X(\langle \Psi, \Phi \rangle) = \langle \bar{\nabla}_X \Psi, \Phi \rangle + \langle \Psi, \bar{\nabla}_X \Phi \rangle \quad (2.6)$$

$$\bar{\nabla}_X(\bar{\gamma}(Y)\Psi) = \bar{\gamma}(\bar{\nabla}_X Y)\Psi + \bar{\gamma}(Y)\bar{\nabla}_X \Psi. \quad (2.7)$$

La notation  $X(f)$  désigne la dérivée de Lie de  $f \in C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R})$  dans la direction de  $X \in \Gamma(T\bar{M})$ . Lorsque ces quatre propriétés sont satisfaites, on dit que  $(\Sigma\bar{M}, \bar{\gamma}, \bar{\nabla})$  est un *fibré de Dirac*. La connexion de Levi-Civita riemannienne  $\bar{\nabla}$  sur  $M$  pour la structure riemannienne induite est donnée par la formule de Gauss suivante : pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle AX, Y \rangle N \quad \text{sur } M, \quad (2.8)$$

où  $A$  est la seconde forme fondamentale de l'immersion de  $M$  dans  $\bar{M}$ . Il existe alors une unique connexion sur  $\Sigma M$  telle que les propriétés (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) soient vérifiées pour la restriction du produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $M$  et la multiplication de Clifford  $\bar{\gamma}$  définie en (2.3) : cette connexion de Levi-Civita extrinsèque est également notée  $\bar{\nabla}$  et satisfait à la formule de Gauss spinorielle suivante : pour tous  $X \in \Gamma(TM)$  et  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ ,

$$\bar{\nabla}_X \psi = \bar{\nabla}_X \psi - \frac{1}{2} \bar{\gamma}(AX)\psi = \bar{\nabla}_X \psi - \frac{1}{2} \bar{\gamma}(AX)\bar{\gamma}(N)\psi \quad \text{sur } M. \quad (2.9)$$

L'opérateur de Dirac sur un fibré de Dirac d'une variété spinorielle est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1 défini par composition de la multiplication de Clifford avec la connexion de Levi-Civita spinorielle. Il est formellement  $L^2$ -autoadjoint lorsque la variété est compacte sans bord. Sur  $\bar{M}$ , si  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  est une base orthonormée locale du fibré tangent, on a localement pour tout  $\Psi \in \Gamma(\Sigma\bar{M})$  :

$$\bar{\mathcal{D}}\Psi = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\gamma}(e_i)\bar{\nabla}_{e_i}\Psi.$$

De même, l'opérateur de Dirac extrinsèque  $\mathcal{D}$  sur  $M$  est donné d'après (2.9) par

$$\mathcal{D}\psi := \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(e_i)\bar{\nabla}_{e_i}\psi = \frac{nH}{2}\psi - \bar{\gamma}(N)\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(e_i)\bar{\nabla}_{e_i}\psi \quad (2.10)$$

pour tout  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ . On remarque que pour tout  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ , on a  $\mathcal{D}(\bar{\gamma}(N)\psi) = -\bar{\gamma}(N)\mathcal{D}\psi$ . Le spectre de  $\mathcal{D}$  est donc toujours symétrique par rapport à 0.

On a donc à présent une structure spinorielle intrinsèque  $(\Sigma M, \nabla^M, \gamma^M, \mathcal{D}^M)$  et une extrinsèque  $(\mathcal{S}M, \mathcal{A}, \gamma, \mathcal{D})$  sur  $M$ . En fonction de la parité de la dimension, ces structures peuvent être ou ne pas être isomorphes :

▷ Si  $n = \dim M$  est pair, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{S}M, \gamma, \mathcal{D}) \equiv (\Sigma M, \gamma^M, \mathcal{D}). \quad (2.11)$$

▷ Si  $n$  est impair, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{S}M, \gamma, \mathcal{D}) \equiv (\Sigma M \oplus \Sigma M, \gamma^M \oplus -\gamma^M, \mathcal{D} \oplus -\mathcal{D}). \quad (2.12)$$

On voit donc qu'il est équivalent d'étudier le spectre de  $\mathcal{D}$  ou celui de  $\mathcal{D}$ .

## 2.3 Cas de l'espace euclidien

### 2.3.1 Conditions à bord

Soit  $M$  une hypersurface orientable d'une variété spinorielle  $\overline{M}^{n+1}$  telle que  $M = \partial\Omega$ , où  $\Omega$  est un domaine compact de  $\overline{M}$ . Dans ce paragraphe (voir [37]), on cherche des projections orthogonales  $P_{\pm} : \Gamma(\mathcal{S}M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}M)$  qui soient compatibles avec l'opérateur de Dirac extrinsèque au sens suivant :

$$\mathcal{D}P_{\pm} = P_{\mp}\mathcal{D}, \quad (2.13)$$

et qui fournissent de bonnes conditions à bord au sens suivant : pour tout spineur  $\Psi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$  et tout  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S}M)$ , il existe un unique  $\psi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{D}}\psi &= \Psi & \text{sur } \Omega \\ P_+\psi &= P_+\varphi & \text{sur } M \end{cases} \quad (2.14)$$

(et de même pour  $P_-$ ). Comme on l'a vu à l'instant, la parité de la dimension joue un rôle dans le comportement de la structure spinorielle extrinsèque ; distinguons donc les cas :

▷ Lorsque  $(n+1)$  est pair, l'élément de volume complexe  $\omega_{n+1}^{\mathbb{C}} := i^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_{n+1}$  sur  $\overline{M}$  définit une involution  $\omega := \overline{\gamma}(\omega_{n+1}^{\mathbb{C}})$ . Ainsi, ses espaces propres  $\Sigma\overline{M}^{\pm}$  associés aux valeurs propres  $\pm 1$  sont isométriques et orthogonaux : on a donc une décomposition orthogonale

$$\Sigma\overline{M} = \Sigma\overline{M}^+ \oplus \Sigma\overline{M}^-,$$

et donc par restriction

$$\mathcal{S}M = \mathcal{S}M_+ \oplus \mathcal{S}M_- \quad (2.15)$$

avec  $\mathcal{S}M_{\pm} := (\Sigma\overline{M}^{\pm})|_M$ .

▷ Lorsque  $(n+1)$  est impair, alors  $n$  est pair et l'élément de volume complexe  $\omega_n^{\mathbb{C}}$  sur  $M$  s'identifie à  $iN$  et fournit une involution  $\omega := \overline{\gamma}(iN)$  sur  $\mathcal{S}M$ . On a un isomorphisme

$$(\mathcal{S}M, \gamma, \mathcal{D}) \equiv (\Sigma M, \gamma^M, \mathcal{D}^M), \quad (2.16)$$

ainsi qu'une décomposition orthogonale

$$\mathcal{S}M = \mathcal{S}M^+ \oplus \mathcal{S}M^-, \quad (2.17)$$

avec

$$\mathcal{S}M^\pm := \{\psi \in \mathcal{S}M \mid i\bar{\gamma}(N)\psi = \pm\psi\}.$$

On définit enfin deux projections

$$P_\pm := \frac{1}{2}(\text{Id}_{\mathcal{S}M} \pm i\bar{\gamma}(N)) : \mathcal{S}M \longrightarrow \mathcal{S}M. \quad (2.18)$$

Ces projections sont les projections orthogonales sur  $\mathcal{S}M^\pm$  lorsque  $n$  est pair, et sur  $\mathcal{S}M_\pm$  lorsque  $n$  est impair. Elles sont orthogonales l'une à l'autre et autoadjointes pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De plus, elles vérifient clairement la propriété de compatibilité (2.13), et on a le résultat suivant :

**Théorème 12** (Hijazi-Montiel [37]) *Soit  $\Omega$  un domaine compact d'une variété spinorielle  $\bar{M}$  et  $M = \partial\Omega$ . Alors pour tout spineur  $\Psi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$  et tout  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S}M)$ , il existe un unique  $\psi \in \Gamma(\Sigma\Omega)$  tel que*

$$\begin{cases} \bar{D}\psi &= \Psi & \text{sur } \Omega \\ P_+\psi &= P_+\varphi & \text{sur } M. \end{cases}$$

Ce Théorème reste bien entendu vrai pour  $P_-$ . Ce sont ces projections qui apparaissent dans le Théorème 10.

### 2.3.2 Le Théorème d'Alexandrov généralisé

Cette section a fait l'objet d'une publication [18]. Commençons par un résultat intégral qui nous sera très utile :

**Proposition 14** (Formules de Minkowski [62]) *Soit  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion d'une hypersurface compacte orientable  $M$ . Pour tout  $r \in \{1, \dots, n\}$ , on a*

$$\int_M [H_{r-1} + H_r \langle x, N \rangle] dM = 0. \quad (2.19)$$

Ce résultat a été obtenu initialement par Minkowski en 1903 dans le cas de  $\mathbb{R}^3$ . Pour une preuve dans le cas général, voir [46].

On suppose donc que  $M$  est une variété compacte bordant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , et qu'il existe un  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_r$  soit constante. Puisque  $M$  est compacte sans bord,  $M$  contient un point elliptique (on peut choisir par exemple le point de  $M$  le plus éloigné d'un point fixé de  $\Omega$ ). Ainsi, la constante  $H_r$  est strictement positive, et  $H$  l'est donc également d'après (2.2).

Soit  $\psi_0$  un spineur parallèle sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  ; on définit le champ de spineurs  $\varphi := \bar{\gamma}(H_r^{1/r}x + N)\psi_0$  sur  $M$ . D'après (2.10), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\varphi &= \frac{nH}{2}\varphi + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(e_i)\bar{\gamma}(N)\bar{\gamma}(H_r^{1/r}e_i - Ae_i)\psi_0 \\ &= \frac{nH}{2}\varphi + n(H_r^{1/r} - H)\bar{\gamma}(N)\psi_0,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}\varphi|^2 &= \frac{n^2H^2}{4}|\varphi|^2 + n^2(H_r^{1/r} - H)^2|\psi_0|^2 + n^2H(H_r^{1/r} - H)(1 + H_r^{1/r}\langle x, N \rangle)|\psi_0|^2 \\ &= \frac{n^2H^2}{4}|\varphi|^2 + [n^2H_r^{2/r} - n^2H_r^{1/r}H + n^2HH_r^{1/r}(H_r^{1/r} - H)\langle x, N \rangle]|\psi_0|^2.\end{aligned}$$

Puisque  $\psi_0$  est la restriction à  $M$  d'un spineur parallèle, sa norme est constante, et donc

$$\begin{aligned}\int_M \frac{1}{H}|\mathcal{D}\varphi|^2 dM &= \frac{n^2}{4} \int_M H|\varphi|^2 dM \\ &\quad + n^2H_r^{1/r}|\psi_0|^2 \left\{ \int_M \left( \frac{H_r^{1/r}}{H} - 1 \right) dM + \int_M (H_r^{1/r} - H)\langle x, N \rangle dM \right\} \\ &:= \frac{n^2}{4} \int_M H|\varphi|^2 dM + \Theta.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Examinons à présent le signe de  $\Theta$ .

**Lemme 1** *Soit  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_r$  soit constante. Alors*

$$\int_M (H_r^{1/r} - H)\langle x, N \rangle dM \leq 0.$$

*Si  $r \geq 2$ , on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère (si  $r = 1$ , le membre de gauche de l'inégalité est nul).*

*Démonstration.* D'après les formules de Minkowski (2.19),

$$\int_M H_{r-1} dM = - \int_M H_r \langle x, N \rangle dM.$$

Si  $\Delta$  désigne le Laplacien sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on a  $\Delta|x|^2 = 2(n+1)$  sur  $M$ . Par le théorème de la divergence (avec  $N$  le vecteur normal entrant), on a

$$\int_M \langle x, N \rangle dM = -(n+1)\text{Vol}\Omega,\tag{2.21}$$

et donc (puisque  $H_r$  est constante)

$$\int_M H_{r-1} dM = (n+1)H_r \text{Vol}\Omega.$$

Alors d'après (2.2),

$$\int_M H_{r-1} dM \geq \int_M H_r^{(r-1)/r} dM = H_r^{(r-1)/r} \text{Vol}M,$$

où  $\text{Vol}M$  désigne le volume de  $M$ . Ainsi,

$$(n+1)H_r \text{Vol}\Omega \geq H_r^{(r-1)/r} \text{Vol}M,$$

c'est à dire

$$\text{Vol}M - (n+1)H_r^{1/r} \text{Vol}\Omega \leq 0,$$

et finalement

$$\int_M (H_r^{1/r} - H) \langle x, N \rangle dM \leq 0$$

d'après les formules de Minkowski. Pour  $r \geq 2$ , on a égalité si et seulement si  $H_{r-1} = H_r^{(r-1)/r}$  sur  $M$ . Ceci est équivalent à ce que  $M$  soit totalement ombilicale, c'est à dire que  $M$  soit une sphère (puisque  $M$  est compacte sans bord).  $\square$

De plus, puisque

$$\int_M \left( \frac{H_r^{1/r}}{H} - 1 \right) dM \leq 0$$

d'après (2.2), on a  $\Theta \leq 0$ , et donc d'après (2.20) :

$$\int_M \frac{1}{H} |\mathcal{D}\varphi|^2 dM \leq \frac{n^2}{4} \int_M H |\varphi|^2 dM.$$

En appliquant le Théorème 10, on en déduit que

$$\int_M \frac{1}{H} |\mathcal{D}\varphi|^2 dM = \frac{n^2}{4} \int_M H |\varphi|^2 dM.$$

Ainsi, on a nécessairement  $\Theta = 0$ . Puisque les deux termes apparaissant dans l'expression de  $\Theta$  sont négatifs, les deux sont nuls : pour  $r \geq 2$ , le premier est nul si et seulement si  $H_r^{1/r} = H$  sur  $M$ , ce qui est équivalent à ce que  $M$  soit une sphère ; le second est nul lorsque l'égalité a lieu dans le Lemme 1, i.e. lorsque  $M$  est une sphère, ce qui achève la preuve.

**Remarque 11 :** La conclusion est différente lorsque  $r = 1$  (Théorème d'Alexandrov) : en effet, si  $H$  est constante, le champ de spineurs  $\varphi = \bar{\gamma}(Hx + N)\psi_0$  vérifie

$$\mathcal{D}\varphi = \frac{nH}{2} \varphi.$$

Ainsi, on est dans le cas d'égalité du Théorème 10 : il existe deux champs de spineurs parallèles  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sur  $\Omega$  tels que  $\varphi = P_+ \Psi_1 + P_- \Psi_2$  sur  $M$ , donc

$$\mathcal{D}\varphi = \frac{nH}{2} (P_- \Psi_1 + P_+ \Psi_2).$$

Ainsi on a nécessairement  $P_+\Psi_1 = P_+\Psi_2$  et  $P_-\Psi_1 = P_-\Psi_2$ , c'est à dire  $\Psi_1 = \Psi_2$  et  $\varphi$  est la restriction à  $M$  d'un champ de spineurs parallèle sur  $\Omega$ , donc pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ , on a sur  $M$  :

$$\bar{\nabla}_X \varphi = \bar{\gamma}(HX - AX)\psi_0 = 0.$$

Ainsi on a  $A = H \text{ Id}$  et  $M$  est une sphère.

### 2.3.3 L'Inégalité de Heintze-Karcher

Terminons cette section avec la preuve du Théorème 3. Supposons donc que  $H > 0$  sur  $M$ . Si  $\psi_0$  est un champ de spineurs parallèle sur  $\Omega$ , nous allons appliquer le Théorème 10 au champ de spineurs  $\varphi := \bar{\gamma}(x)\psi_0$  sur  $M$  ; pour un tel  $\varphi$ , on a d'après (2.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi &= \frac{nH}{2}\varphi + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(e_i)\bar{\gamma}(N)\bar{\gamma}(e_i)\psi_0 \\ &= \frac{nH}{2}\varphi + n\bar{\gamma}(N)\psi_0, \end{aligned}$$

et

$$|\mathcal{D}\varphi|^2 = \frac{n^2 H^2}{4}|\varphi|^2 + n^2(1 + H\langle x, N \rangle)|\psi_0|^2.$$

Ainsi, puisque  $|\psi_0|^2$  est constante, on a

$$\int_M \frac{1}{H} |\mathcal{D}\varphi|^2 dM = \frac{n^2}{4} \int_M H |\varphi|^2 dM + n^2 |\psi_0|^2 \left[ \int_M \frac{1}{H} dM + \int_M \langle x, N \rangle dM \right].$$

On applique à présent le Théorème 10 pour obtenir

$$\int_M \frac{1}{H} dM + \int_M \langle x, N \rangle dM \geq 0.$$

et finalement grâce à (2.21),

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geq (n+1) \text{Vol}\Omega.$$

On a égalité si et seulement si on a égalité dans le Théorème 10 : dans ce cas, il existe deux spineurs parallèles  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sur  $\Omega$  tels que  $P_+\Psi_1 = P_+\varphi$  et  $P_-\Psi_2 = P_-\varphi$  sur  $M$ . On a donc  $\varphi = P_+\Psi_1 + P_-\Psi_2$ , et

$$\mathcal{D}\varphi = \frac{nH}{2}(P_-\Psi_1 + P_+\Psi_2),$$

On en déduit que

$$\frac{2}{nH}\mathcal{D}\varphi + \varphi = \Psi_1 + \Psi_2 := \Psi_3,$$

c'est à dire

$$\frac{2}{nH} \left( n\bar{\gamma}(N)\psi_0 + \frac{nH}{2}\varphi \right) + \varphi = \Psi_3,$$

et finalement

$$\bar{\gamma} \left( x + \frac{1}{H}N \right) \psi_0 = \frac{1}{2}\Psi_3.$$

Le champ de spineurs  $\Psi_3$  est parallèle puisque  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  le sont, donc le champ de spineurs

$$\bar{\gamma} \left( x + \frac{1}{H} N \right) \psi_0$$

est la restriction à  $M$  d'un champ de spineurs parallèle, et puisque  $\psi_0$  est parallèle, on a pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  :

$$H\bar{\gamma}(X)\psi_0 - \bar{\gamma}(AX)\psi_0 - \frac{1}{H}X(H)\bar{\gamma}(N)\psi_0 = 0,$$

où  $X(H)$  désigne la dérivée de Lie de la fonction  $H$  dans la direction de  $X$ . On choisit à présent  $X = X_i \in \Gamma(TM)$ , où  $X_i$  est une direction principale de courbure pour la courbure principale  $\mu_i$ . En prenant le produit scalaire de l'identité précédente avec le champ de spineurs  $\bar{\gamma}(X_i)\psi_0$ , on obtient :

$$(H - \mu_i)|X_i|^2|\psi_0|^2 = 0.$$

Puisque  $\psi_0$  est parallèle, sa longueur est constante donc  $|\psi_0|$  ne s'annule pas sur  $M$ , et en tout point  $m \in M$  on peut choisir une base  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $T_m M$  constituée de directions principales de courbures. On en déduit que  $\mu_i = H$  sur  $M$  pour tout  $i$ , donc  $A = H \text{ Id}$ , et  $M$  est une sphère (puisque tout point est ombilical et  $H > 0$  sur  $M$ ).

Enfin, notons que Ros utilisa l'Inégalité de Heintze-Karcher pour prouver le Théorème 2 : voir [70] : si  $H_r$  est constante pour un certain  $r \in \{1, \dots, n\}$ , rappelons que nécessairement  $H_r > 0$ , et  $H > 0$  d'après (2.2). Soit  $\psi_0$  un spineur parallèle sur  $\Omega$  et soit  $\varphi := \bar{\gamma}(H_r^{1/r} x + N)\psi_0$  (déjà défini précédemment). Dans un premier temps, l'Inégalité de Heintze-Karcher fournit

$$\begin{aligned} \int_M \langle \bar{\gamma}(N)\psi_0, \varphi \rangle dM &= H_r^{1/r} |\psi_0|^2 \int_M \langle x, N \rangle dM + \text{Vol}M |\psi_0|^2 \\ &= -(n+1)H_r^{1/r} |\psi_0|^2 \text{Vol}\Omega + \text{Vol}M |\psi_0|^2 \\ &\geq -|\psi_0|^2 \int_M \frac{H_r^{1/r}}{H} dM + \text{Vol}M |\psi_0|^2 \\ &= \int_M \left( 1 - \frac{H_r^{1/r}}{H} \right) |\psi_0|^2 dM \geq 0. \end{aligned}$$

Ensuite, par le Lemme 1 :

$$\begin{aligned} \int_M \langle \bar{\gamma}(N)\psi_0, \varphi \rangle dM &= \left( \text{Vol}M - (n+1)H_r^{1/r} \text{Vol}\Omega \right) |\psi_0|^2 \\ &= |\psi_0|^2 \int_M (H_r^{1/r} - H) \langle x, N \rangle dM \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\int_M \langle \bar{\gamma}(N)\psi, \varphi \rangle dM = 0.$$

Ainsi, si  $r \geq 2$ , on a égalité dans le Lemme 1, donc  $M$  est une sphère. Pour  $r = 1$ , le champ de spineurs  $\varphi = \bar{\gamma}(Hx + N)\psi_0$  vérifie

$$\int_M \langle \bar{\gamma}(N)\psi_0, \varphi \rangle dM = |\psi_0|^2 \int_M (1 + H \langle x, N \rangle) dM = 0.$$

Mais puisque  $H$  est constante, on a

$$\int_M \langle \bar{\gamma}(N)\psi_0, \varphi \rangle dM = |\psi_0|^2 (\text{Vol}M - (n+1)H\text{Vol}\Omega),$$

donc  $\text{Vol}M = (n+1)H\text{Vol}\Omega$ , et on est dans le cas d'égalité de l'Inégalité de Heintze-Karcher, donc  $M$  est une sphère.

## 2.4 Cas de l'espace hyperbolique

### 2.4.1 Opérateur de chiralité et conditions à bord

Le contenu de cette section est extrait de [39].

On revient au cas général d'une hypersurface orientable  $M$  d'une variété spinorielle  $\bar{M}^{n+1}$  bordant un domaine compact  $\Omega \subset \bar{M}$ , et munie d'une structure spinorielle intrinsèque  $(\Sigma M, \nabla^M, \gamma^M)$  et d'une structure extrinsèque  $(\mathcal{S}M, \mathcal{X}, \gamma)$  sur  $M$ . Comme dans le paragraphe 2.3.1, on va expliciter des projections satisfaisant les propriétés (2.13) et (2.14), mais pour des opérateurs de Dirac modifiés à l'ordre 0 que nous définirons plus tard. Nous allons avoir besoin pour cela de la notion d'*opérateur de chiralité* : un opérateur de chiralité sur un fibré de Dirac  $(\mathcal{E}\bar{M}, \tilde{\gamma}, \tilde{\nabla})$  (muni d'un produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) est un endomorphisme  $\omega : \Gamma(\mathcal{E}\bar{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}\bar{M})$  tel que pour tous  $X \in \Gamma(T\bar{M})$  et  $\Psi, \Phi \in \Gamma(\mathcal{E}\bar{M})$  :

$$\omega^2 = \text{Id}, \quad \langle \omega\Psi, \omega\Phi \rangle = \langle \Psi, \Phi \rangle, \quad (2.22)$$

$$\omega(\tilde{\gamma}(X)\Psi) = -\tilde{\gamma}(X)\omega\Psi, \quad \tilde{\nabla}_X(\omega\Psi) = \omega(\tilde{\nabla}_X\Psi). \quad (2.23)$$

Nous allons à présent définir un nouveau fibré de Dirac muni d'un opérateur de chiralité de façon à unifier les cas selon la parité de  $n$ . Soit ainsi le fibré vectoriel

$$\mathcal{E}\bar{M} = \begin{cases} \Sigma\bar{M} & \text{si } (n+1) = 2m, \\ \Sigma\bar{M} \oplus \Sigma\bar{M} & \text{si } (n+1) = 2m+1, \end{cases} \quad (2.24)$$

muni de la multiplication de Clifford  $\tilde{\gamma}$  définie par

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \bar{\gamma} & \text{si } (n+1) = 2m, \\ \bar{\gamma} \oplus -\bar{\gamma} & \text{si } (n+1) = 2m+1, \end{cases} \quad (2.25)$$

et de la connexion de Levi-Civita

$$\tilde{\nabla} = \begin{cases} \bar{\nabla} & \text{si } (n+1) = 2m, \\ \bar{\nabla} \oplus \bar{\nabla} & \text{si } (n+1) = 2m+1. \end{cases} \quad (2.26)$$

On note encore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit hermitien sur  $\mathcal{E}\bar{M}$ , donné par le produit hermitien sur  $\Sigma\bar{M}$  lorsque  $(n+1)$  est pair, et par la somme de ces produits hermitiens sur chaque copie de  $\Sigma\bar{M}$  lorsque  $(n+1)$  est impair. On vérifie aisément que le fibré  $(\mathcal{E}\bar{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\gamma})$  ainsi construit est un fibré de Dirac. Voyons à présent les propriétés de ce fibré et de sa restriction  $(\mathcal{E}M, \mathcal{X}^\mathcal{E}, \gamma^\mathcal{E})$  à  $M$ , en fonction de la dimension.



▷ Si  $(n + 1)$  est pair, l'opérateur  $\omega := \bar{\gamma}(\omega_{n+1}^{\mathbb{C}})$  est un opérateur de chiralité sur  $\Sigma\bar{M}$ , avec  $\omega_{n+1}^{\mathbb{C}} := i^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_{n+1}$  l'élément de volume complexe, et comme on l'a déjà vu, on a des décompositions

$$\mathcal{E}\bar{M} = \mathcal{E}\bar{M}^+ \oplus \mathcal{E}\bar{M}^-,$$

et par restriction

$$\mathcal{E}M = \mathcal{E}_+M \oplus \mathcal{E}_-M,$$

avec  $\mathcal{E}_{\pm}M = \mathcal{Z}M = \mathcal{E}^{\pm}\bar{M}|_M$ .

▷ Si  $(n + 1)$  est impair, on a un opérateur de chiralité sur  $\mathcal{E}\bar{M} = \Sigma\bar{M} \oplus \Sigma\bar{M}$  donné par

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(\mathcal{E}\bar{M}) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}\bar{M}) \\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par restriction, on a

$$\mathcal{E}M = \mathcal{Z}M \oplus \mathcal{Z}M,$$

qui est donc isomorphe à deux copies du fibré intrinsèque  $\Sigma M$  d'après (2.11).

Terminons en définissant les opérateurs de Dirac modifiés sur  $\mathcal{E}\bar{M}$  et  $\mathcal{E}M$  mentionnés plus haut :

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\mathcal{E}} := \mathcal{D}^{\mathcal{E}} \mp i \frac{n}{2} \tilde{\gamma}(N) \quad (2.27)$$

et

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\pm} := \tilde{\mathcal{D}} \pm i \frac{(n+1)}{2} \text{Id}_{\mathcal{E}\bar{M}}, \quad (2.28)$$

où  $\tilde{\mathcal{D}}$  est l'opérateur de Dirac du fibré  $(\mathcal{E}\bar{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\gamma})$ . Ces définitions sont motivées par le fait que si  $\bar{M}$  admet un  $\pm i/2$ -spineur de Killing  $\psi_{\pm} \in \Gamma(\mathcal{E}\Omega)$ , c'est à dire un spineur vérifiant

$$\tilde{\nabla}_X \psi_{\pm} = \pm \frac{i}{2} \tilde{\gamma}(X) \psi_{\pm}, \quad (2.29)$$

pour tout  $X \in \Gamma(T\Omega)$ , alors on a

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\pm} \psi_{\pm} = 0 \quad (2.30)$$

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\mathcal{E}} \psi_{\pm} = \frac{nH}{2} \psi_{\pm}. \quad (2.31)$$

**Remarque 12 :** On sait que l'espace  $\mathbb{H}^{n+1}$  admet des  $\pm i/2$ -spineurs de Killing sur  $\Sigma\mathbb{H}^{n+1}$ , mais il en a également sur  $\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1}$ . En effet, c'est trivial si  $(n + 1)$  est pair, et si  $(n + 1)$  est impair et que  $\phi \in \Gamma(\Sigma\mathbb{H}^{n+1})$  est un  $\pm i/2$ -spineur de Killing, alors  $\Phi^+ = (\phi, 0)$  et  $\Phi^- = (0, \phi)$  sont respectivement des  $\pm i/2$  et  $\mp i/2$ -spineurs de Killing de  $\Gamma(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1})$ . De plus,  $|\Phi^{\pm}|^2 = |\phi|^2$ . Voir [39], Remarque 6.

**Proposition 15** (Hijazi-Montiel-Raulot [39]) *Le fibré  $(\mathcal{E}\bar{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{\gamma})$  est un fibré de Dirac muni d'un opérateur de chiralité  $\omega$ . La restriction  $(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\mathcal{E}}, \gamma^{\mathcal{E}})$  est également un fibré de Dirac sur lequel la formule de Gauss spinorielle*

$$\mathcal{D}_X^{\mathcal{E}} \psi = \tilde{\nabla}_X \psi - \frac{1}{2} \gamma^{\mathcal{E}}(AX) \psi \quad (2.32)$$

est valable pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  et tout  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E}M)$ . On a également les formules

$$\mathcal{D}^{\mathcal{E}}\psi = \frac{nH}{2}\psi - \tilde{\gamma}(N)\tilde{\mathcal{D}}\psi - \tilde{\nabla}_N\psi \quad (2.33)$$

et

$$\mathcal{D}^{\mathcal{E}}(\tilde{\gamma}(N)\psi) = -\tilde{\gamma}(N)\mathcal{D}^{\mathcal{E}}\psi. \quad (2.34)$$

Enfin, les opérateurs  $\mathcal{D}_{\pm}^{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{E}M$  sont des opérateurs elliptiques d'ordre 1 dépendant uniquement des structures riemannienne et spinorielle de  $M$ .

Dans la suite on ne s'intéressera qu'aux opérateurs  $\mathcal{D}_{+}^{\mathcal{E}}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}_{+}$  puisqu'on aura besoin que de ceux là. On définit à présent l'opérateur

$$G := \tilde{\gamma}(N)\omega : \Gamma(\mathcal{E}M) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}M). \quad (2.35)$$

Cet endomorphisme est une involution, autoadjointe pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On a donc une décomposition orthogonale

$$\mathcal{E}M = \mathcal{Y}M^{+} \oplus \mathcal{Y}M^{-}, \quad (2.36)$$

avec  $\mathcal{Y}M^{\pm}$  l'espace propre de  $G$  associé à la valeur propre  $\pm 1$ . On note  $P_{\pm}$  les projections associées, i.e.

$$P_{\pm} := \frac{1}{2}(\text{Id}_{\mathcal{E}M} \pm \tilde{\gamma}(N)\omega) : \Gamma(\mathcal{E}M) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}M). \quad (2.37)$$

Ces projections sont orthogonales l'une à l'autre et autoadjointes pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et on a

$$\mathcal{D}_{+}^{\mathcal{E}}P_{\pm} = P_{\mp}\mathcal{D}_{+}^{\mathcal{E}}. \quad (2.38)$$

Enfin, le Théorème suivant assure que les projections précédentes fournissent de bonnes conditions à bord :

**Théorème 13** (Hijazi-Montiel-Raulot [39]) *Soit  $\Omega$  un domaine compact d'une variété spinorielle  $\bar{M}$  et  $M = \partial\Omega$ . Alors pour tout  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E}M)$ , il existe un unique  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E}\Omega)$  tel que*

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{D}}_{+}\psi = 0 & \text{sur } \Omega \\ P_{+}\psi = P_{+}\varphi & \text{sur } M. \end{cases} \quad (2.39)$$

Ce Théorème reste bien entendu vrai pour  $P_{-}$ . Ce sont ces projections qui apparaissent dans le Théorème 11.

## 2.4.2 Type des spineurs de Killing de $\mathbb{H}^{n+1}$

Le modèle utilisé pour  $\mathbb{H}^{n+1}$  est le suivant :

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 \geq 1\},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est la métrique lorentzienne sur  $\mathbb{R}^{n+2}$  donnée par

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_{n+1}y_{n+1}.$$

On note  $\bar{x} : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  le vecteur position de  $\mathbb{H}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Pour adapter la méthode utilisée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nous sommes confrontés à une différence cruciale entre les spineurs parallèles sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  et les  $\pm i/2$ -spineurs de Killing sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  : contrairement aux premiers nommés, la norme des seconds n’est pas constante (par contre elle ne s’annule jamais). Helga Baum ([10]) a étudié en détails la norme des spineurs de Killing imaginaires sur une variété spinorielle, et en a déduit une classification de telles variétés. Selon le comportement de leur norme, les spineurs de Killing se séparent en deux catégories, que nous allons maintenant présenter. On se donne un spineur de Killing imaginaire  $\psi$  sur un fibré de Dirac quelconque  $(\mathcal{F}\mathbb{H}^{n+1}, \widehat{\nabla}, \widehat{\gamma})$  et on note  $f := |\psi|^2$  sa fonction norme au carré. La Proposition suivante va nous permettre d’énoncer la définition du *type* d’un spineur :

**Proposition 16** (Baum [10]) *La fonction  $q_\psi$  définie par*

$$q_\psi := f^2 - |\overline{\nabla} f|^2 \tag{2.40}$$

*est une constante positive ou nulle, avec  $\overline{\nabla} f$  désignant le gradient de  $f$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$ .*

**Définition 2** Le spineur  $\psi$  est dit *de type I* si  $q_\psi = 0$ , *de type II* si  $q_\psi > 0$ .

**Proposition 17** (Baum [10]) *1. Lorsque l’on choisit comme fibré de Dirac  $(\mathcal{F}\mathbb{H}^{n+1}, \widehat{\nabla}, \widehat{\gamma}) = (\Sigma\mathbb{H}^{n+1}, \overline{\nabla}, \overline{\gamma})$ , il existe des spineurs de Killing de type I et de type II sur  $\Sigma\mathbb{H}^{n+1}$ , sauf si  $(n+1) \in \{3, 5\}$ , où tous les spineurs de Killing sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  sont de type I.*

*2. Un spineur de Killing est de type I si et seulement si il existe un champ de vecteurs unitaires  $Z \in T\mathbb{H}^{n+1}$  tel que  $\widehat{\gamma}(Z)\psi = i\psi$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$ .*

*3. Si  $\psi$  est un spineur de type II, sa norme est minorée par la constante  $\sqrt{q_\psi} > 0$ .*

On va commencer par montrer qu’il existe toujours des spineurs de type II sur le fibré de Dirac  $(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{\gamma})$  défini à la section précédente. Déjà, d’après la Remarque 12, il existe des spineurs de Killing imaginaires sur le fibré  $\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1}$ . Dans le cas où  $(n+1)$  est pair, on a clairement des spineurs de type II d’après la Proposition 17 puisque  $\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1} = \Sigma\mathbb{H}^{n+1}$ . Dans le cas  $(n+1)$  impair, on a  $\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1} = \Sigma\mathbb{H}^{n+1} \oplus \Sigma\mathbb{H}^{n+1}$ . Soient  $\psi_\pm \in \Gamma(\Sigma\mathbb{H}^{n+1})$  des  $\pm i/2$  spineurs de Killing de type I sur  $\Sigma\mathbb{H}^{n+1}$  (existent toujours) : il existe donc des champs de vecteurs  $Z_\pm \in \Gamma(T\mathbb{H}^{n+1})$  tel que  $i\psi_\pm = \overline{\gamma}(Z_\pm)\psi_\pm$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$ . On définit alors

$$\psi^0 := (\psi_-, \psi_+) \in \Gamma(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1}). \tag{2.41}$$

On pose enfin  $f = |\psi^0|^2$  et  $f_\pm = |\psi_\pm|^2$ .

**Proposition 18** *Le spineur  $\psi_-^0 \in \Gamma(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1})$  est un  $-i/2$ -spineur de Killing, et les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le spineur  $\psi_-^0$  est de type I ;*
2. *On a  $Z_+ = -Z_-$  ;*
3. *Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f_+ = \lambda f_-$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $\psi_-^0$  soit un  $-i/2$ -spineur de Killing est immédiat à partir des définitions (2.24), (2.25) et (2.26). De plus,  $f = f_+ + f_-$ , et puisque  $\psi_\pm$  sont de type I, on a

$$\begin{aligned} q_{\psi_-^0} &= f^2 - |\bar{\nabla}f|^2 \\ &= 2f_+f_- - 2\langle \bar{\nabla}f_+, \bar{\nabla}f_- \rangle = \text{constante} \end{aligned}$$

Or par le calcul on voit que

$$\bar{\nabla}f_\pm = \mp f_\pm Z_\pm \text{ sur } \mathbb{H}^{n+1}. \quad (2.42)$$

Supposons donc que  $q_{\psi_-^0} = 0$ , i.e. que  $\psi_-^0$  est de type I. Alors

$$f_+f_- = -\langle Z_+, Z_- \rangle f_+f_-,$$

d'où nécessairement  $Z_+ = -Z_-$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  car les spineurs de Killing sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  ne s'annulent pas.

Ensuite, si  $Z_+ = -Z_-$ , les vecteurs  $\bar{\nabla}f_+$  et  $\bar{\nabla}f_-$  sont colinéaires en tout point : il existe  $\lambda : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\bar{\nabla}f_+ = \lambda \bar{\nabla}f_-$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$ , ce qui se réécrit d'après (2.42)

$$-f_+Z_+ = \lambda f_-Z_- = -\lambda f_-Z_+,$$

d'où

$$f_+ = \lambda f_-.$$

En différenciant cette équation et en prenant le gradient, on voit que nécessairement  $\bar{\nabla}\lambda = 0$ , i.e.  $\lambda$  est une constante. Enfin, il est clair que si  $f_+ = \lambda f_-$ , alors  $\psi_-^0$  est de type I.  $\square$

Ensuite, notons que l'ensemble des  $-i/2$ -spineurs de Killing (respectivement des  $+i/2$ -spineurs de Killing) d'un type donné sur un fibré de Dirac donné ne constitue pas un espace vectoriel en général. Néanmoins, sur le fibré des spineurs  $\Sigma\mathbb{H}^{n+1}$ ,

- ▷ lorsque  $(n+1) \in \{3, 5\}$ , tous les spineurs sont de type I : les  $-i/2$ -spineurs de Killing de type I (respectivement les  $+i/2$ -spineurs de Killing de type I) constituent donc un espace vectoriel complexe de dimension  $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$  ;
- ▷ lorsque  $(n+1) \notin \{3, 5\}$ , il existe des sous-espaces vectoriels complexes de  $\Gamma(\Sigma\mathbb{H}^{n+1})$  de dimension  $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$  de  $-i/2$ -spineurs de Killing de type I (respectivement de  $+i/2$ -spineurs de Killing de type I).

Ainsi, on a toujours une droite vectorielle complexe de  $-i/2$ -spineurs de Killing de type I (respectivement de  $+i/2$ -spineurs de Killing de type I), donc un plan vectoriel réel de tels spineurs. On peut donc choisir  $\psi_\pm$  dans (2.41) tels que leurs fonctions normes au carré ne soient pas proportionnelles, et alors  $\psi_-^0$  est de type II.

On a donc toujours l’existence d’un spineur de type II sur  $\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1}$ , donc on peut choisir  $\psi_-^0 \in \Gamma(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1})$  un  $-i/2$ -spineur de Killing de type II. Quitte à le multiplier par une constante, on peut supposer que  $q_{\psi_-^0} = 1$ . On note toujours  $f = |\psi_-^0|^2$ .

**Proposition 19** (Baum [10]) *La fonction  $f$  atteint son minimum 1 en un seul et unique point  $b \in \mathbb{H}^{n+1}$ , et on a*

$$f(m) = \cosh(d(m, b)) \quad (2.43)$$

pour tout  $m \in \mathbb{H}^{n+1}$ , avec  $d$  la distance géodésique sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  entre  $m$  et  $b$ .

Or la distance géodésique de  $m$  à  $b$  dans ce modèle de l’espace hyperbolique est (voir par exemple [69])

$$d(m, b) = \cosh^{-1}(-\langle \bar{x}(m), \bar{x}(b) \rangle).$$

Ainsi, si on définit  $a \in \mathbb{R}^{n+2}$  tel que  $\bar{x}(b) = -a$ , on a

$$|\psi_-^0|^2 = \langle \bar{x}, a \rangle. \quad (2.44)$$

Cette dernière équation relie la norme du spineur ambiant et une grandeur purement riemannienne. Cette relation va nous permettre d’utiliser des formules de type Minkowski, comme dans le cas euclidien.

### 2.4.3 Le Théorème d’Alexandrov généralisé

Rappelons que dans le modèle de l’espace hyperbolique que nous avons choisi, la courbure sectionnelle de  $\mathbb{H}^{n+1}$  est constante égale à  $-1$ , et sa courbure scalaire est constante égale à  $\bar{R} = -n(n+1)$ . Comme dans le cas euclidien, commençons par énoncer un analogue aux formules de Minkowski :

**Proposition 20** (Montiel-Ros [63]) *Soit  $x : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  une immersion d’une hypersurface compacte orientée dans l’espace hyperbolique  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Pour tout  $r \in \{1, \dots, n\}$  et  $a \in \mathbb{R}^{n+2}$  constant, on a*

$$\int_M [H_{r-1}\langle x, a \rangle + H_r\langle N, a \rangle] dM = 0. \quad (2.45)$$

On considère donc à présent une hypersurface compacte  $M$  bordant un domaine compact  $\Omega \subset \mathbb{H}^{n+1}$ , et plongée dans  $\mathbb{H}^{n+1}$  par  $x : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , telle que  $H_r$  soit constante pour un certain  $r \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $\psi_-^0 \in \Gamma(\mathcal{E}\mathbb{H}^{n+1})$  le  $-i/2$ -spineur de Killing de type II défini précédemment. On définit le spineur

$$\varphi_+ := (H_r^{1/r} - i\tilde{\gamma}(N))\psi_-^0. \quad (2.46)$$

On a alors

$$\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}}\varphi_+ = \frac{nH}{2}\varphi_+ + in(H - H_r^{1/r})\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0,$$

ainsi que

$$|\mathcal{D}_+^\varepsilon \varphi_+|^2 = \frac{n^2 H^2}{4} |\varphi_+|^2 + n^2 (H - H_r^{1/r})^2 |\psi_-^0|^2 + n^2 H (H - H_r^{1/r}) \Re \langle \varphi_+, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle.$$

Alors avec

$$\langle \varphi_+, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle = \langle (H_r^{1/r} - i\tilde{\gamma}(N))\psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle = H_r^{1/r} \langle \psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle - |\psi_-^0|^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_+^\varepsilon \varphi_+|^2 &= \frac{n^2 H^2}{4} |\varphi_+|^2 + n^2 H H_r^{1/r} \left( \frac{H_r^{1/r}}{H} - 1 \right) |\psi_-^0|^2 \\ &+ n^2 H H_r^{1/r} (H - H_r^{1/r}) \langle \psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.47)$$

(noter que le produit scalaire qui apparaît est réel). Puisque  $M$  est compacte, il existe un point où toutes les courbures principales de  $M$  sont strictement plus grandes que 1. Ainsi, la constante  $H_r$  est strictement plus grande que 1, et d'après (2.2) on a donc  $H \geq H_r^{1/r} > 1$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_M \frac{|\mathcal{D}_+^\varepsilon \varphi_+|^2}{H} dM &= \frac{n^2}{4} \int_M H |\varphi_+|^2 + \underbrace{n^2 H_r^{1/r} \int_M \left( \frac{H_r^{1/r}}{H} - 1 \right) |\psi_-^0|^2 dM}_{:=\Theta_1} \\ &+ \underbrace{n^2 H_r^{1/r} \int_M (H - H_r^{1/r}) \langle \psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle dM}_{:=\Theta_2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

D'après les inégalités de Gårding (2.2), et puisque  $|\psi_-^0|^2 > 0$  sur  $M$ , on a directement que

$$\Theta_1 \leq 0, \quad (2.49)$$

et si  $r \geq 2$ , on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère totalement ombilicale.

**Lemme 2** Soit  $a \in \mathbb{R}^{n+2}$  tel que  $\langle x, a \rangle > 0$  sur  $M$ , et supposons que  $H_r$  est constante. Alors

$$\int_M (H - H_r^{1/r}) \langle N, a \rangle dM \geq 0. \quad (2.50)$$

Lorsque  $r \geq 2$ , on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère totalement ombilicale.

**Remarque 13 :** L'inégalité reste vraie si on suppose seulement que  $a$  vérifie  $\langle x, a \rangle \geq 0$  sur  $M$  mais l'égalité peut alors inclure d'autres surfaces a priori.

*Démonstration.* On a dans un premier temps d'après (2.45) :

$$- \int_M H \langle N, a \rangle dM = \int_M \langle x, a \rangle dM. \quad (2.51)$$

Ensuite, puisque  $\langle x, a \rangle > 0$ , on a toujours d'après (2.45) et les inégalités de Gårding (2.2) :

$$-\int_M H_r \langle N, a \rangle dM = \int_M H_{r-1} \langle x, a \rangle dM \geq \int_M H_r^{(r-1)/r} \langle x, a \rangle dM.$$

Puisque  $H_r$  est constante, cette dernière équation donne

$$-H_r^{1/r} \int_M \langle N, a \rangle dM \geq \int_M \langle x, a \rangle dM,$$

ce qui d'après (2.51) conduit finalement à

$$-H_r^{1/r} \int_M \langle N, a \rangle dM \geq -\int_M H \langle N, a \rangle dM.$$

□

Soit  $a$  défini à la Proposition 19 et satisfaisant la relation (2.44). Sur  $M$ , on a  $\langle \bar{x}, a \rangle = \langle x, a \rangle$ , donc on a  $\langle x, a \rangle = |\psi_-^0|^2$  sur  $M$ . En particulier,  $\langle x, a \rangle \geq 1$  sur  $M$ , et donc le Lemme 2 est valable pour ce  $a$ . En prenant la dérivée le long du champ  $N$  sur  $M$ , on obtient

$$-\langle \psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle = \langle N, a \rangle, \quad (2.52)$$

et alors d'après (2.48) et (2.50) :

$$\Theta_2 = n^2 H_r^{1/r} \int_M (H - H_r^{1/r}) \langle \psi_-^0, i\tilde{\gamma}(N)\psi_-^0 \rangle dM \leq 0, \quad (2.53)$$

et si  $r \geq 2$  on a égalité si et seulement si on a égalité dans le Lemme 2, si et seulement si  $M$  est une sphère totalement ombilicale.

Finalement, d'après (2.48), on a

$$\int_M \frac{|\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}} \varphi_+|^2}{H} dM \leq \frac{n^2}{4} \int_M H |\varphi_+|^2 dM,$$

et si  $r \geq 2$  on a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère totalement ombilicale. D'après le Théorème 11, si  $r \geq 2$ ,  $M$  est donc une sphère totalement ombilicale.

Reste le cas où  $r = 1$ ; dans ce cas on a

$$\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}} \varphi_+ = \frac{nH}{2} \varphi_+,$$

et donc  $\varphi_+$  vérifie l'égalité dans le Théorème 11, donc il existe deux  $+i/2$ -spineurs de Killing  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sur  $\Omega$  tels que  $P_+ \Psi_1 = P_+ \varphi_+$  et  $P_- \Psi_2 = P_- \varphi_+$ . On a alors

$$\mathcal{D}_+^{\mathcal{E}} \varphi_+ = \frac{nH}{2} (P_- \Psi_1 + P_+ \Psi_2).$$

Ainsi on a nécessairement  $P_+ \Psi_1 = P_+ \Psi_2$  et  $P_- \Psi_1 = P_- \Psi_2$ , c'est à dire  $\Psi_1 = \Psi_2$  et  $\varphi_+$  est la restriction à  $M$  d'un  $+i/2$ -spineur de Killing sur  $\Omega$ , donc pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ , on a sur  $M$  :

$$\tilde{\nabla}_X \varphi_+ = +\frac{i}{2} \tilde{\gamma}(X) \varphi_+.$$

Or par définition de  $\varphi_+$ , on a

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \varphi_+ &= i\tilde{\gamma}(AX)\psi_-^0 + (H - i\tilde{\gamma}(N)) \left( -\frac{i}{2}\tilde{\gamma}(X)\psi_-^0 \right) \\ &= +\frac{i}{2}\tilde{\gamma}(X)\varphi_+ + i\tilde{\gamma}(AX - HX)\psi_-^0.\end{aligned}$$

Ainsi on a  $A = H \text{ Id}$  et  $M$  est une sphère totalement ombilicale.

Terminons par regarder ce qui se passe dans le cas de  $\mathbb{S}^{n+1}$ , la sphère unité de courbure sectionnelle constante égale à 1 et de courbure scalaire constante égale à  $\bar{R} = n(n+1)$ . Le Théorème 2 s'y énonce ainsi :

**Théorème 14** (Montiel-Ros [63]) *Soit  $M$  une hypersurface compacte plongée dans la sphère  $\mathbb{S}^{n+1}$  telle que  $M$  soit incluse dans un hémisphère de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . On suppose qu'il existe  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_r$  soit constante. Alors  $M$  est une sphère géodésique.*

Par analogie avec les cas euclidien et hyperbolique, on peut regarder l'action de l'opérateur de Dirac ambiant  $\bar{\mathcal{D}}$  (respectivement de l'opérateur de Dirac extrinsèque  $\mathcal{D}$  sur  $M$ ) sur les spineurs de Killing de  $\mathbb{S}^{n+1}$  (respectivement sur leurs restrictions à  $M$ ). Les spineurs de Killing sur  $\mathbb{S}^{n+1}$  sont des spineurs de Killing réels, donc de longueur constante, satisfaisant à l'équation

$$\bar{\nabla}_X \psi_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\bar{\gamma}(X)\psi_{\pm} \quad (2.54)$$

pour tout  $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^{n+1})$ . Pour un  $+1/2$ -spineur de Killing  $\psi_+ \in \Gamma(\Sigma\mathbb{S}^{n+1})$ , on obtient

$$\bar{\mathcal{D}}\psi_+ = -\frac{(n+1)}{2}\psi_+ \quad (2.55)$$

ainsi que

$$\mathcal{D}\psi_+ = \frac{nH}{2}\psi_+ + \frac{n}{2}\bar{\gamma}(N)\psi_+. \quad (2.56)$$

Comme dans le cas de l'espace hyperbolique, on peut poser  $\mathcal{D}_+ := \mathcal{D} - \frac{n}{2}\bar{\gamma}(N)$ , mais cette fois ceci définit un opérateur qui n'est pas  $L^2$ -autoadjoint. Cette propriété de symétrie étant essentielle dans les preuves des Théorèmes 10 et 11, on n'a pas d'équivalent manifeste de ces Théorèmes dans  $\mathbb{S}^{n+1}$ . On peut néanmoins noter que si  $\psi_-^0$  est un  $-1/2$ -spineur de Killing sur  $\mathbb{S}^{n+1}$ , et que l'on suppose que  $H_r$  est constante, le spineur défini par

$$\varphi_+ := (H_r^{1/r} - \bar{\gamma}(N))\psi_-^0 \quad (2.57)$$

est la restriction à  $M$  d'un  $+1/2$ -spineur de Killing si et seulement si  $M$  est une sphère totalement ombilicale. De plus, sa norme est constante égale à  $(H_r^{2/r} + 1)|\psi_-^0|^2$ . Il pourrait donc constituer un bon spineur-test, mais contrairement aux cas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , on ne sait pas si les restrictions à  $M$  des  $+1/2$ -spineurs de Killing constituent exactement l'ensemble des spineurs propres de la



plus petite valeur propre positive d'un opérateur de type Dirac. On peut remarquer que le spineur  $\varphi_+$  vérifie les identités suivantes :

$$|\mathcal{D}\varphi_+|^2 = \frac{n^2}{4}(H^2 + 1)|\varphi_+|^2 \quad (2.58)$$

$$\mathcal{D}_+\varphi_+ = \frac{nH}{2}\varphi_+ + n(H - H_r^{1/r})\bar{\gamma}(N)\psi_-^0 \quad (2.59)$$

$$|\mathcal{D}_+\varphi_+|^2 = \frac{n^2H^2}{4}|\varphi_+|^2 + n^2H(H_r^{1/r} - H)|\psi_-^0|^2. \quad (2.60)$$

Lorsque  $M$  est incluse dans un hémisphère de  $\mathbb{S}^{n+1}$ , il existe nécessairement un point où toutes les courbures principales sont strictement positives. Par les inégalités de Gårding (2.2), on a alors  $H \geq H_r^{1/r} > 0$  sur  $M$ , et donc

$$|\mathcal{D}_+\varphi_+|^2 \leq \frac{n^2H^2}{4}|\varphi_+|^2, \quad (2.61)$$

avec égalité si et seulement si  $M$  est totalement ombilicale. Remarquer que l'égalité (2.58) est réalisée quelle que soit la  $H_r$ -courbure supposée constante initialement, ce qui n'a pas lieu dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

## Chapitre 3

# Spectre de l'opérateur de Dirac des surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ et de $\mathbb{S}_b^3(\tau)$

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne des majorations de la première valeur propre positive ou nulle de l'opérateur de Dirac extrinsèque  $\mathcal{D}$  d'une hypersurface dans certaines variétés homogènes de dimension 3, grâce au Théorème du min-max suivant :

**Proposition 21** (Théorème du min-max) *Soit  $\lambda_1^2$  la plus petite valeur propre (positive ou nulle) de  $\mathcal{D}^2$ . Alors pour tout spineur  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ , on a*

$$\int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM \geq \lambda_1^2 \int_M |\psi|^2 dM.$$

De plus, on a égalité si et seulement si  $\psi$  vérifie  $\mathcal{D}^2\psi = \lambda_1^2\psi$ .

En testant l'inégalité précédente sur les restrictions des spineurs de Killing ambiants, Bär ([8]) a obtenu les majorations suivantes dans les espaces modèles :

▷ Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\lambda_1^2 \leq \frac{n^2}{4\text{Vol}M} \int_M H^2 dM. \quad (3.1)$$

▷ Dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  :

$$\lambda_1^2 \leq \frac{n^2}{4\text{Vol}M} \int_M (H^2 + 1) dM. \quad (3.2)$$

▷ Dans  $\mathbb{H}^{n+1}$  :

$$\lambda_1^2 < \frac{n^2}{4} \sup_M (H^2 + 1). \quad (3.3)$$

Ici  $\text{Vol}M$  désigne le volume de  $M$ . Le cas d'égalité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  n'a été caractérisé que très récemment par Hijazi et Montiel ([38]), qui ont établi que seules les sphères rondes réalisaient l'égalité.

La majoration obtenue par Bär dans  $\mathbb{H}^{n+1}$  n'est pas optimale, et l'apparition de la borne supérieure est due au fait que les spineurs de Killing imaginaires sur  $\mathbb{H}^{n+1}$  ne sont pas de longueur constante. Cette majoration a été améliorée par Ginoux ([27]) :

$$\lambda_1^2 \leq \frac{n^2}{4} \sup_M (H^2 - 1), \quad (3.4)$$

et le cas d'égalité a été caractérisé par Ginoux, Habib et Raulot ([29]) d'une manière analogue à Hijazi et Montiel ; là encore, seules les sphères ombilicales réalisent le cas d'égalité. Enfin, la caractérisation de l'égalité dans la majoration de Bär dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  reste un problème ouvert, mais on sait néanmoins que les sphères ombilicales et certains tores vérifient l'égalité.

Les spineurs les plus naturels sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (respectivement sur les sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ ) ont été construits par Roth par identification du fibré des spineurs de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  avec le fibré  $\Sigma\mathbb{S}^2 \oplus \mathbb{R}$ , et en utilisant les spineurs de Killing réels sur  $\mathbb{S}^2$  (respectivement à partir d'une section constante du fibré des spineurs de la structure spinorielle triviale de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ ). Ce sont les restrictions de ces spineurs à une hypersurface que nous allons tester dans le Théorème du min-max, puis nous étudierons les cas d'égalité.

Ce travail a pour motivation de compléter la classification des surfaces stables dans certaines variétés homogènes de dimension 3, qui est partielle pour certaines valeurs de  $r$  dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  et pour certaines valeurs de  $\tau$  dans  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  ([74]). Rappelons que si  $M$  est une surface CMC  $H$  dans une variété spinorielle  $\overline{M}$  de dimension 3, elle est dite *stable* si on a

$$\int_M |\nabla h|^2 dM \geq \int_M (\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2) h^2 dM$$

pour toute fonction  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  telle que  $\int_M h dM = 0$ . Ici,  $\nabla h$  désigne le gradient de  $h$ ,  $\overline{\text{Ric}}$  est le tenseur de Ricci de  $\overline{M}$  et  $A$  est la première forme fondamentale de l'immersion de  $M$  dans  $\overline{M}$ . L'objectif est de faire apparaître les surfaces stables comme cas limite d'une majoration optimale de  $\lambda_1(\mathcal{D})$  grâce à l'hypothèse ci-dessus de stabilité, de la même façon que le firent Alencar, Do Carmo et Rosenberg dans [3] pour classifier les surfaces  $r$ -stables dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  en les caractérisant comme cas limite d'une majoration optimale de la première valeur propre positive d'un opérateur elliptique d'ordre 2.

### 3.2 Dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , soit  $N$  un vecteur normal, et soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée locale de  $M$ . On note  $\overline{\nabla}$  la connexion de Levi-Civita sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\overline{\gamma}$  sa multiplication de Clifford, et  $\mathcal{D}, \mathcal{X}, \gamma$  l'opérateur de Dirac, la connexion de Levi-Civita et la multiplication de Clifford extrinsèques de  $M$ . On pose  $\omega = e_1 \cdot e_2$  (où “ $\cdot$ ” est la multiplication sur le fibré de Clifford de  $M$ ) l'élément de volume réel de  $M$ . Si  $\xi$  est un champ de vecteurs unitaires tangents aux fibres, on pose  $\xi = T + fN$ , avec  $T \in \Gamma(TM)$ . On a alors les formules suivantes :

$$\mathcal{X}_X T = fAX \quad (3.5)$$

$$X(f) = -\langle AX, T \rangle, \quad (3.6)$$

où  $X(f)$  est la dérivée de Lie de la fonction  $f$  dans la direction du champ  $X$ .

**Remarque 14 :** Dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , le vecteur  $T$  peut être identiquement nul, mais pas  $f$ , car sinon on a une surface du type {courbe}  $\times \mathbb{R}$ , non compacte.

**Proposition 22** Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  telle que  $f$  soit constante; alors  $f = \pm 1$  et  $M = \mathbb{S}^2 \times \{c\}$  pour un  $c \in \mathbb{R}$  (sphère minimale).

*Démonstration.* Puisque  $M$  est compacte, il existe un point de  $M$  en lequel la coordonnée selon  $\mathbb{R}$  est maximale. En ce point, le plan tangent est donc horizontal, i.e.  $\xi = \pm N$ , donc  $f = \pm 1$ . et  $T = 0$ , ce qui correspond à une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$ .  $\square$

**Remarque 15 :** Une classification complète des surfaces de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  avec  $f$  constante est effectuée dans [20]. Ces surfaces sont appelées *surfaces à angle constant*, car l'angle effectué par la normale à la surface avec le vecteur  $\xi$  est alors constant.

Dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , Roth ([72]) a construit des spineurs de longueur constante qui vérifient

$$\mathcal{X}_X \psi = \eta \gamma(X) \gamma(T) \psi + \eta f \gamma(X) \psi + \eta \langle X, T \rangle \psi - \frac{1}{2} \gamma(AX) \psi \quad (3.7)$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ , avec  $\eta = \pm 1/2$ , et donc

$$\mathcal{D} \psi = (H - 2\eta f) \psi - \eta \gamma(T) \psi. \quad (3.8)$$

Ainsi on obtient

$$|\mathcal{D} \psi|^2 = \left( H^2 + f^2 + \frac{|T|^2}{4} - 4\eta H f \right) |\psi|^2,$$

et donc

$$\int_M |\mathcal{D} \psi|^2 dM = \int_M \left( H^2 - 4\eta H f + f^2 + \frac{|T|^2}{4} \right) |\psi|^2 dM.$$

Or

$$\operatorname{div}(T) = 2Hf,$$

donc puisque  $\partial M = \emptyset$ , on a  $\int_M Hf dM = 0$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_M |\mathcal{D} \psi|^2 dM &= \int_M \left( H^2 + f^2 + \frac{|T|^2}{4} \right) |\psi|^2 dM \\ &= \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{\operatorname{Vol} M} \int_M \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 \right) dM \right] \int_M |\psi|^2 dM. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Grâce au Théorème du min-max, on a donc :

**Théorème 15** Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors

$$\lambda_1^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 \right) dM. \quad (3.10)$$

On a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$ .

**Remarque 16 :** Si on pose  $\varphi := f\psi + \gamma(T)\psi$ , on a  $|\psi|^2 = |\varphi|^2$  et

$$\mathcal{D}\varphi = -H\varphi - \eta f\varphi - \eta\psi,$$

et alors on a

$$|\mathcal{D}\varphi|^2 = \left[ \frac{1}{4} + \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 + 4\eta Hf \right) \right] |\varphi|^2,$$

d'où d'après (3.9)

$$\int_M |\mathcal{D}\varphi|^2 dM = \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM = \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 \right) dM \right] \int_M |\varphi|^2 dM. \quad (3.11)$$

*Preuve du Théorème 15.* Si on a égalité, d'après (3.11) et le cas d'égalité du Théorème du min-max on a

$$\mathcal{D}^2\psi = \lambda_1^2\psi \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^2\varphi = \lambda_1^2\varphi.$$

Par le calcul, on obtient

▷ Pour  $\psi$ ,

$$\mathcal{D}^2\psi = [H^2 - 2\eta Hf + f^2 + \eta^2|T|^2] \psi + 2\eta^2 f\gamma(T)\psi + \gamma(\nabla H - \eta\nabla f)\psi. \quad (3.12)$$

▷ Pour  $\varphi$ ,

$$\mathcal{D}^2\varphi = [H^2 + 2\eta Hf + \eta^2 f^2 + \eta^2] \varphi + 2\eta^2 f\psi - \gamma(\nabla H + \eta\nabla f)\varphi. \quad (3.13)$$

En projetant (3.12) sur  $\psi$  et (3.13) sur  $\varphi$ , on obtient les deux équations

$$H^2 - 2\eta Hf + f^2 + \eta^2|T|^2 = \lambda_1^2 = \text{constante} \quad (3.14)$$

$$H^2 + 2\eta Hf + \eta^2 f^2 + \eta^2 + 2\eta^2 f^2 = \lambda_1^2 = \text{constante}. \quad (3.15)$$

Mais l'équation (3.15) se réécrit

$$H^2 + 2\eta Hf + f^2 + \eta^2|T|^2 = \lambda_1^2 = \text{constante},$$

et donc nécessairement  $Hf = 0$ . Projetons alors (3.12) sur  $\gamma(\nabla H - \eta\nabla f)\psi$ , et prenons la partie réelle :

$$\begin{aligned} \Re\langle \mathcal{D}^2\psi, \gamma(\nabla H - \eta\nabla f)\psi \rangle &= \lambda_1^2 \Re\langle \psi, \gamma(\nabla H - \eta\nabla f)\psi \rangle = 0 \\ &= 2\eta^2 f \langle T, \nabla H - \eta\nabla f \rangle |\psi|^2 + |\nabla H - \eta\nabla f|^2 |\psi|^2. \end{aligned}$$

On multiplie alors de part et d'autre par  $H$ , et puisque  $Hf = 0$ , on obtient

$$H|\nabla H - \eta\nabla f|^2 = 0.$$

De même, en projetant (3.13) sur  $\gamma(\nabla H + \eta\nabla f)\varphi$ , on obtient

$$H|\nabla H + \eta\nabla f|^2 = 0.$$

Par somme,

$$H(|\nabla H|^2 + \eta^2|\nabla f|^2) = 0. \quad (3.16)$$

D'après (3.16), il n'y a que deux possibilités :

- ▷ Soit  $H = 0$ , et alors d'après (3.15)  $f$  est constante. D'après la Proposition 22, on a  $M = \mathbb{S}^2 \times \{c\}$  ;
- ▷ Soit  $H$  est une constante non nulle et alors  $f$  est constante, nécessairement nulle puisque  $Hf = 0$ , ce qui est absurde.

Réciproquement, les sphères  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$  vérifient bien  $\lambda_1^2 = 1$  d'après l'inégalité de Bär ([7]) :

$$\lambda_1^2 \geq \frac{4\pi}{\text{Vol}M}. \quad (3.17)$$

□

**Remarque 17 :** L'inégalité de Bär (3.17) est valable pour toute surface (donc de dimension 2) de genre 0 dans une variété spinorielle de dimension 3, avec égalité si et seulement si la surface a une courbure de Gauss constante. Noter que pour  $n \geq 2$ , les sphères admettent une unique structure spinorielle. L'inégalité de Bär assure en particulier qu'il n'y a jamais de spineur harmonique sur une sphère de dimension 2 (en plus dans ce cas, il n'y a qu'une classe conforme de métriques, et la dimension des spineurs harmoniques est indépendante de la métrique conforme, [44]). A l'inverse, toute surface fermée de genre au moins 1 admet une structure spinorielle et une métrique telles que 0 soit valeur propre de son opérateur de Dirac ([5]). Enfin, l'inégalité de Bär ne s'étend pas à la dimension supérieure, comme on le verra avec les sphères de Berger.

Si on reprend l'inégalité (3.10) en remplaçant  $f^2$  par  $1 - |T|^2$  et en utilisant que  $|T|^2 \geq 0$ , on obtient :

**Théorème 16** *Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors*

$$\lambda_1^2 \leq 1 + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M H^2 dM. \quad (3.18)$$

*On a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$ .*

*Démonstration.* Le Théorème du min-max donne tout de suite l'inégalité (3.18), et l'égalité implique  $T = 0$ , c'est à dire que  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$ , où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante. On a déjà vérifié que l'égalité avait alors bien lieu. On peut remarquer que la majoration (3.18) est identique à la majoration obtenue par Bär dans  $\mathbb{S}^{n+1}$ .  $\square$

### 3.3 Dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$

Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ , où  $\mathbb{S}^1(r)$  est la sphère de dimension 1 et de rayon  $r$ . On garde les mêmes notations que dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Les formules (3.5) et (3.6) restent valables. Rappelons que  $\mathbb{S}^1(r)$  a deux structures spinorielles non équivalentes, une triviale et une non triviale (voir [9]). On la munit de sa structure triviale. D'après [28], on a alors des  $(0, \eta)$ -spineurs de Killing transversaux sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  (avec  $\eta = \pm 1/2$ ). On a donc un champ de spineurs  $\psi$  non trivial tel que

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_X \psi &= \eta \bar{\gamma}(\xi) \bar{\gamma}(X) \psi, & X \in T\mathbb{S}^2 \\ \bar{\nabla}_\xi \psi &= 0. \end{cases}$$

Soit  $X \in TM$ , que l'on décompose toujours sous la forme  $X = \tilde{X} + x\xi$ , avec  $x = \langle X, T \rangle$  et

$$\tilde{X} = X - \langle X, T \rangle \xi = X - \langle X, T \rangle T - f \langle X, T \rangle N \in T\mathbb{S}^2.$$

Alors par la formule de Gauss,

$$\begin{aligned} \not{\nabla}_X \psi &= \bar{\nabla}_X \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \psi + x \bar{\nabla}_\xi \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= \eta \bar{\gamma}(\xi) \bar{\gamma}(\tilde{X}) \psi + 0 \langle X, T \rangle - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= -\eta \bar{\gamma}(\tilde{X}) \bar{\gamma}(\xi) \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= -\eta \bar{\gamma}(X) \bar{\gamma}(\xi) \psi - \eta \langle X, T \rangle \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= -\eta \bar{\gamma}(X) \bar{\gamma}(T) \psi \mp \frac{1}{2} f \bar{\gamma}(X) \bar{\gamma}(N) \psi - \eta \langle X, T \rangle \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi \\ &= -\eta \not{\gamma}(X) \not{\gamma}(T) \psi - \eta f \not{\gamma}(X) \psi - \eta \langle X, T \rangle \psi - \frac{1}{2} \not{\gamma}(AX) \psi. \end{aligned}$$

On remarque qu'on obtient les mêmes spineurs que Roth ([72]) dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Par le Théorème du min-max, on obtient donc les mêmes majorations (3.10) et (3.18) que dans les Théorèmes 15 et 16 pour  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ , en prenant en compte le fait que cette fois  $f$  peut être identiquement nulle et donner un tore plat CMC. Ces Théorèmes s'énoncent donc ainsi :

**Théorème 17** *Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\not{\mathcal{D}}$ . Alors*

$$\lambda_1^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left( H^2 + \frac{3}{4} f^2 \right) dM. \quad (3.19)$$

On a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$  ou un tore plat CMC  $H$  avec  $f = 0$ .

**Théorème 18** Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors

$$\lambda_1^2 \leq 1 + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M H^2 dM. \quad (3.20)$$

On a égalité si et seulement si  $M$  est une sphère minimale  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$ .

Comme pour  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , on voit que les sphères  $\mathbb{S}^2 \times \{c\}$  vérifient effectivement l'égalité dans (3.19) et (3.20). Reste à voir si les tores CMC  $H$  avec  $f = 0$  vérifient l'égalité dans (3.19), en l'occurrence  $\lambda_1^2 = 1/4 + H^2$  :

**Proposition 23** Les tores plats CMC  $H$  tels que  $f = 0$  sont de la forme  $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r)$ , avec  $0 < r_1 \leq 1$ , et vérifient

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{4} + H^2.$$

*Démonstration.* On a une immersion

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r) \\ (t, s) &\longmapsto \left( \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_1 \sin t \\ \sqrt{1 - r_1^2} \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} \right) := (\phi_1(t), \phi_2(s)) \end{aligned}$$

dont l'image est  $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ . Ici  $\mathbb{S}^1(r_1)$  est vu comme un parallèle de  $\mathbb{S}^2$ , de rayon  $r_1$ . On calcule

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t = r_1 \left( \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) := (\phi_t^1, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \phi_s = r \left( 0, \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \right) := (0, \phi_s^1).$$

Les métriques rondes sur les sphères  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  étant données par restriction de la métrique canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et puisque la métrique sur un produit de variétés riemanniennes est donnée par la somme des métriques, si on note  $g$  la métrique sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ , on a

$$\begin{cases} g(\phi_t, \phi_t) &= r_1^2 \\ g(\phi_s, \phi_s) &= r^2 \\ g(\phi_t, \phi_s) &= 0 \end{cases}$$

La métrique  $\tilde{g}$  induite par  $g$  et  $\phi$  sur le tore  $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r)$  est donc donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$



Ainsi, le tore peut être vu comme  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ , où  $\Lambda$  est le réseau engendré par les vecteurs  $2\pi v_1$  et  $2\pi v_2$ , avec  $v_1 = (r_1, 0)$  et  $v_2 = (0, r)$ . On obtient que le réseau dual  $\Lambda^*$  est engendré par les vecteurs

$$v_1^* = \left(\frac{1}{r_1}, 0\right) \quad \text{et} \quad v_2^* = \left(0, \frac{1}{r}\right).$$

On utilise alors le résultat de Friedrich ([23]) suivant, qui donne la liste des valeurs propres de l'opérateur de Dirac au carré d'un tore plat de dimension  $n$  en fonction de sa structure spinorielle. Pour un tel tore, il existe  $2^n$  structures spinorielles non équivalentes, représentées par les  $n$ -uplets  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ , la structure triviale correspondant à  $\varepsilon_k = 0$  pour tout  $k$ .

**Théorème 19** (Friedrich [23]) *Soit  $\Lambda$  un réseau dans  $\mathbb{R}^n$  de base  $(v_1, \dots, v_n)$  et de base duale  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ ,  $T^n = \mathbb{R}^n/\Lambda$  le tore associé. On munit  $T^n$  de la structure spinorielle décrite par le  $n$ -uplet  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . Alors l'ensemble des valeurs propres du carré de l'opérateur de Dirac de  $T^n$  est exactement l'ensemble*

$$\left\{ \left| \left( m + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) v_1^* + \left( n + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) v_2^* \right|^2, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On peut noter que l'opérateur de Dirac a un noyau non trivial si et seulement si la structure spinorielle sur le tore est triviale. Ici on obtient donc

$$\text{Sp}(\mathcal{D}^2) = \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left( m + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( n + \frac{\varepsilon_2}{2} \right)^2, m, n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (3.21)$$

La connexion de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  sur le produit  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  est donnée par la formule suivante : pour tous  $X_1, X_2 \in T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r))$  avec  $X_i = (Y_i, Z_i)$ ,  $Y_i \in T\mathbb{S}^2$  et  $Z_i \in T\mathbb{S}^1(r)$ , on a

$$\bar{\nabla}_{X_1} X_2 = \left( \nabla_{Y_1}^{\mathbb{S}^2} Y_2, \nabla_{Z_1}^{\mathbb{S}^1(r)} Z_2 \right).$$

Un vecteur normal à  $\phi_t$  et  $\phi_s$  au point  $\phi(t, s)$  est donné par

$$N = \left( \begin{pmatrix} \sqrt{1-r_1^2} \cos t \\ \sqrt{1-r_1^2} \sin t \\ -r_1 \end{pmatrix}, 0 \right) := (N_1, N_2).$$

On veut calculer à présent  $\bar{\nabla}_{\phi_t} N$  et  $\bar{\nabla}_{\phi_s} N$ . D'après la formule de Gauss, puisque le morphisme de Weingarten vaut  $(1/r)$  Id pour l'immersion d'une sphère de rayon  $r$  dans l'espace euclidien, on obtient (au point  $\phi(t, s)$ )

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\phi_t} N &= \left( \nabla_{\phi_t^1}^{\mathbb{S}^2} N_1, \nabla_0^{\mathbb{S}^1(r)} 0 \right) \\ &= \left( \nabla_{\phi_t^1}^{\mathbb{R}^3} N_1 - \underbrace{\langle \phi_t^1, N_1 \rangle}_{=0} \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_1 \sin t \\ \sqrt{1-r_1^2} \end{pmatrix}, 0 \right), \end{aligned}$$

le vecteur normal à la sphère  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  au point  $\phi_1(t)$  étant  $\phi_1(t)$ . Ainsi,

$$\nabla_{\phi_t^1}^{\mathbb{S}^2} N_1 = \nabla_{\phi_t^1}^{\mathbb{R}^3} N_1 = \frac{\partial N_1 \circ \phi_1}{\partial t} = \sqrt{1-r_1^2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

et finalement

$$\bar{\nabla}_{\phi_t} N = \frac{\sqrt{1-r_1^2}}{r_1} \phi_t^1.$$

De même, on obtient

$$\bar{\nabla}_{\phi_s} N = 0.$$

La matrice de la seconde forme fondamentale de l'immersion  $\phi$  est donc donnée par

$$A = -\frac{\sqrt{1-r_1^2}}{r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$H = -\frac{\sqrt{1-r_1^2}}{2r_1},$$

soit encore

$$r_1^2 = \frac{1}{1+4H^2}.$$

En remplaçant dans (3.21), on obtient

$$\text{Sp}(\mathcal{P}^2) = \left\{ (1+4H^2) \left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Or d'après l'équation (3.12), le spineur-test  $\psi$  est spineur propre de  $\mathcal{P}^2$  pour la valeur propre  $H^2 + 1/4$  pour les tores CMC  $H$  avec  $f = 0$ . Or à  $r$  fixé, on voit que  $H^2 + 1/4$  n'est valeur propre que si  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 0)$  (pour le choix  $m = n = 0$ ), sauf éventuellement pour un nombre dénombrable de valeurs de  $H$ . Néanmoins, un argument de continuité permet d'être assuré que tous les tores doivent avoir la même structure spinorielle  $(1, 0)$ . La plus petite valeur propre est alors clairement  $H^2 + 1/4$ . Ainsi, les tores plats CMC  $H$  avec  $f = 0$  vérifient l'égalité dans (3.19).  $\square$

Pour conclure sur la stabilité, la classification des surfaces stables de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  est connue pour  $r \geq 1$  ([74]) : ce sont exactement les sphères CMC  $H$  avec  $H \geq H_0 \approx 0.18$ , ainsi que le tore géodésique  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  lorsque  $r = 1$ . Malheureusement, ces sphères n'apparaissent pas dans le cas d'égalité du Théorème 4 (excepté pour  $H = 0$ ).

De plus, lorsque  $r < 1$ , les tores plats  $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r)$  avec  $0 < r_1 \leq 1$  sont stables si et seulement si  $r_1 \geq r$ . Ainsi, seule une partie des tores plats apparaissant dans la caractérisation de l'égalité du Théorème 4 sont stables lorsque  $r < 1$ .

## 3.4 Dans les sphères de Berger

### 3.4.1 Géométrie et spineurs particuliers

Les sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  représentent une des huit géométries de Thurston, correspondant à l'espace  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  avec  $\kappa > 0$  et  $\tau \neq 0$  tels que  $\kappa \neq 4\tau^2$ . Rappelons que  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  est une fibration riemannienne (ici, par des cercles) d'une variété de dimension 2 simplement connexe

de courbure constante égale à  $\kappa$  (ici  $\mathbb{S}^2$ ), telle que les fibres sont des géodésiques. On note  $\xi$  un vecteur unitaire tangent aux fibres. Par convention, on considère souvent que les sphères de Berger correspondent précisément au cas  $\kappa = 4$ . Si on note  $\bar{R}$  la courbure scalaire de la sphère de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$ , on a ([74])

$$\bar{R} = 2(\kappa - \tau^2). \quad (3.22)$$

En particulier,  $\bar{R}$  est constante.

**Remarque 18 :** Dans la suite on prendra toujours  $\kappa = 4$ , et on notera  $\mathbb{S}_b^3(4, \tau) = \mathbb{S}_b^3(\tau)$ ; cela va conduire à distinguer la position de  $\tau^2$  par rapport à 1. Dans le cas général, cela revient à distinguer la position de  $\tau^2$  par rapport à  $\kappa/4$ .

Soit  $M$  une surface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ , soit  $N$  un vecteur normal unitaire, et soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée locale de  $M$ . On note  $\bar{\nabla}$  la connexion de Levi-Civita sur  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  et  $\bar{\gamma}$  sa multiplication de Clifford, et  $\mathcal{D}, \mathcal{X}, \gamma$  l'opérateur de Dirac, la connexion de Levi-Civita et la multiplication de Clifford extrinsèques de  $M$ . On pose  $\omega = e_1 \cdot e_2$  l'élément de volume réel de  $M$  (noter que  $\omega^2 = -1$ ). On a alors pour tout  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$  :

$$\mathcal{D}(\gamma(\omega)\psi) = -\gamma(\omega)\mathcal{D}\psi. \quad (3.23)$$

On pose également  $\alpha = 2(\tau - 1/\tau)$ , et enfin  $\xi = T + fN$ , avec  $T \in \Gamma(TM)$  et  $f = \langle \xi, N \rangle$ . On a les formules suivantes :

$$\mathcal{X}_X T = f(AX - \tau JX) \quad (3.24)$$

$$X(f) = -\langle AX - \tau JX, T \rangle \quad (3.25)$$

$$\nabla f = -AT - \tau JT, \quad (3.26)$$

où  $J$  est l'endomorphisme de  $TM$  de rotation d'angle  $\pi/2$ .

Les sphères de Berger sont des sphères munies d'une certaine métrique, appelée métrique de Berger. Pour  $n \geq 2$ , il n'existe qu'une seule structure spinorielle sur les sphères de dimension  $n$ , la structure triviale. Noter qu'en fonction du paramètre  $\tau$ , on peut avoir, ou non, des spineurs harmoniques sur les sphères de Berger (en particulier, on peut avoir une structure spinorielle triviale sans spineur harmonique). D'après [72], il existe des spineurs particuliers sur les surfaces de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  vérifiant

$$\mathcal{X}_X \psi = -\frac{\tau}{2}\gamma(X)\gamma(\omega)\psi + \frac{\alpha}{2}\langle X, T \rangle \gamma(T)\gamma(\omega)\psi - \frac{\alpha}{2}f\langle X, T \rangle \gamma(\omega)\psi - \frac{1}{2}\gamma(AX)\psi. \quad (3.27)$$

Ainsi, on a également

$$\mathcal{D}\psi = H\psi + \left(\tau - \frac{\alpha}{2}|T|^2\right)\gamma(\omega)\psi - \frac{\alpha}{2}f\gamma(T)\gamma(\omega)\psi. \quad (3.28)$$

De plus, ces spineurs sont de longueur constante.

### 3.4.2 Majoration dans le cas général

En remarquant que les trois produits scalaires  $\langle \psi, \gamma(\omega)\psi \rangle$ ,  $\langle \gamma(\omega)\psi, \gamma(T)\gamma(\omega)\psi \rangle$  et  $\langle \psi, \gamma(T)\gamma(\omega)\psi \rangle$  sont imaginaires purs (pour le dernier, remarquer que  $\gamma(T)\gamma(\omega) = -\gamma(JT)$ ), on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}\psi|^2 &= H^2|\psi|^2 + \left(\tau - \frac{\alpha}{2}|T|^2\right)^2 |\psi|^2 + \frac{\alpha^2}{4}f^2|T|^2|\psi|^2 \\ &= \left(H^2 + \frac{|T|^2}{\tau^2} + \tau^2 f^2\right) |\psi|^2. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat :

**Théorème 20** *Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_\tau^3$ , avec  $\tau \neq 0$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors*

$$\lambda_1^2 \leq \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left(H^2 + \left(\tau^2 - \frac{1}{\tau^2}\right) f^2\right) dM, \quad (3.29)$$

où  $\text{Vol}M$  désigne le volume de  $M$ .

**Remarque 19 :** Cette inégalité (3.29) est vraie dans tous les espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  sous la forme :

$$\lambda_1^2 \leq \frac{\kappa^2}{16\tau^2} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \left(H^2 + \left(\tau^2 - \frac{\kappa^2}{16\tau^2}\right) f^2\right) dM.$$

Si on a égalité dans (3.29), par le Théorème du min-max on a

$$\mathcal{D}^2\psi = \lambda_1^2\psi.$$

Par le calcul on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2\psi &= \left[H^2 + (2 - \tau^2)f^2 + \frac{|T|^2}{\tau^2}\right] \psi - \alpha H f \gamma(T)\gamma(\omega)\psi \\ &\quad + \alpha H f^2 \gamma(\omega)\psi + \gamma(\nabla H)\psi + \frac{\alpha}{2} f \gamma(\nabla f)\gamma(\omega)\psi - \frac{\alpha}{2} \gamma(\nabla f)\gamma(T)\gamma(\omega)\psi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En projetant (3.30) sur  $\psi$ , on obtient :

$$H^2 + (2 - \tau^2)f^2 + \frac{|T|^2}{\tau^2} - \frac{\alpha}{2} \langle \nabla f, JT \rangle = \lambda_1^2 = \text{constante}. \quad (3.31)$$

Projetons maintenant (3.30) sur  $\gamma(T)\psi$  :

$$\langle \nabla H - \frac{\alpha}{2} f J(\nabla f), T \rangle = 0.$$

On projette maintenant (3.30) sur  $\gamma(\omega)\psi$  :

$$\alpha H f^2 + \frac{\alpha}{2} \langle T, \nabla f \rangle = 0,$$

et enfin en projetant sur  $\gamma(T)\gamma(\omega)\psi$  :

$$-\alpha H f |T|^2 - \langle \nabla H, JT \rangle + \frac{\alpha}{2} f \langle \nabla f, T \rangle = 0.$$

En les points où  $T \neq 0$ , on obtient le système de conditions nécessaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 = H^2 + (2 - \tau^2)f^2 + \frac{|T|^2}{\tau^2} - \frac{\alpha}{2} \langle \nabla f, JT \rangle \\ \nabla H - \frac{\alpha}{2} f J(\nabla f) = -\alpha H f JT \\ \langle \nabla H, JT \rangle = -\alpha H f \\ \alpha \langle \nabla f, T \rangle = -2\alpha H f^2. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

**Remarque 20 :** 1. Comme dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , si on définit  $\varphi := f\psi + \gamma(T)\psi$ , on a  $|\varphi|^2 = |\psi|^2 =$  constante, et en testant  $\varphi$  dans le Théorème du min-max, on obtient la même estimation, ainsi que le même système de conditions nécessaires pour le cas d'égalité.

2. Les calculs sont aussi valables dans le cas où  $\tau = 1$  ; dans ce cas,  $\alpha = 0$  et le système (3.32) se réduit à :  $H =$  constante. Le Théorème 20 est alors juste l'estimation de Bär (3.2) pour l'opérateur de Dirac extrinsèque d'une hypersurface de  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{E}(4, 1)$ .

Si on ne peut pas vraiment déduire de propriétés géométriques claires à partir de ces équations dans le cas général, on peut néanmoins en dire quelque chose si on suppose que  $M$  est une surface à courbure moyenne constante qui vérifie l'égalité dans (3.29) (et qu'on suppose  $\tau \neq 1$ , i.e.  $\alpha \neq 0$ ).

### 3.4.3 Egalité pour les surfaces CMC dans le cas général

On va démontrer la Proposition suivante :

**Proposition 24** *Si  $\tau \notin \{0, 1\}$ , alors :*

- ▷ Si  $\tau^2 < 1$ , aucune surface CMC ne vérifie l'égalité dans (3.29).
- ▷ Si  $3 \geq \tau^2 > 1$ , les seules surfaces CMC vérifiant l'égalité dans (3.29) sont les tores plats CMC  $H$  avec  $f = 0$ .
- ▷ Si  $\tau^2 > 3$ , les seules surfaces CMC vérifiant l'égalité dans (3.29) sont les tores plats CMC  $H$  avec  $f = 0$  et

$$H^2 \leq \frac{(\tau^2 + 3)^2}{8(\tau^2 - 3)\tau^2}.$$

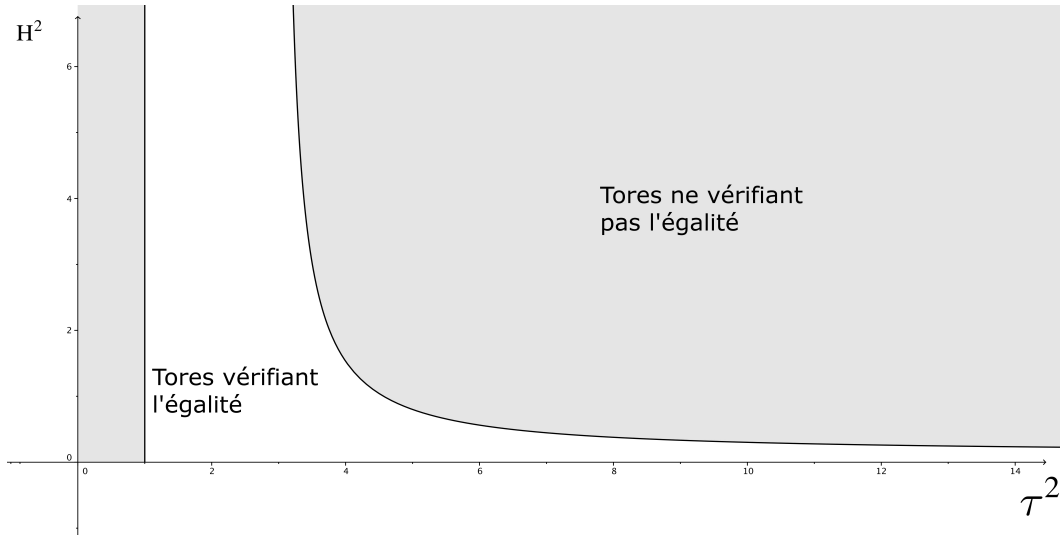


FIGURE 3.1 – Tores vérifiant l'égalité dans (3.29).

**Remarque 21 :** Pour tout  $H \geq 0$ , il existe une unique sphère CMC  $H$  et un unique tore plat CMC  $H$  (à isométrie près) dans  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ . Noter que les tores sont tous plongés, mais pas les sphères ([74]).

Déjà, d'après le système (3.32), si  $H$  est constante on voit que nécessairement  $Hf = 0$  et  $\nabla f = 0$ . Ceci implique nécessairement  $f = 0$  d'après les résultats suivants :

**Proposition 25** (Reeb [66]) *Soit  $M$  une surface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  avec  $\tau \neq 0$ . Alors  $f$  s'annule sur  $M$ , autrement dit il n'existe pas de surface compacte sans bord orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  qui soit transverse à  $\xi$  en tout point.*

**Corollaire 4** *Soit  $M$  une surface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  avec  $\tau \neq 0$  telle que  $f$  soit constante ; alors  $f = 0$  et  $M$  est un tore plat CMC  $H$  construit par relèvement d'une courbe de  $\mathbb{S}^2$  parallèlement aux fibres.*

Ainsi, seuls les tores plats CMC avec  $f = 0$  peuvent vérifier l'égalité dans (3.29). Reste à vérifier quand c'est le cas. La Proposition 24 est une conséquence de la Proposition suivante :

**Proposition 26** *Soit  $\mathcal{T}(H)$  un tore plat CMC  $H$  avec  $f = 0$  de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ . Alors la valeur de  $\lambda_1^2$  est donnée suivant les valeurs de  $\tau$  et de  $H$  par le tableau suivant :*

$\tau^2 < 1$	$H^2$ quelconque	$\lambda_1^2 = 1 + H^2$
$3 \geq \tau^2 > 1$	$H^2$ quelconque	$\lambda_1^2 = \frac{1}{\tau^2} + H^2$
$\tau^2 > 3$	$H^2 \leq \frac{(\tau^2 + 3)^2}{8(\tau^2 - 3)\tau^2}$	$\lambda_1^2 = \frac{1}{\tau^2} + H^2$
	$H^2 \geq \frac{(\tau^2 + 3)^2}{8(\tau^2 - 3)\tau^2}$	$\lambda_1^2 = \frac{4}{\tau^2} + (2H - \sqrt{1 + H^2})^2$

*Démonstration.* Les tores plats CMC  $H \geq 0$  avec  $f = 0$  de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  sont caractérisés dans [74] : ce sont les

$$\mathcal{T}(H) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 = r_1^2, |w|^2 = r_2^2\},$$

avec

$$\begin{cases} r_1^2 &= \frac{1}{2} + \frac{H}{2\sqrt{1+H^2}} \\ r_2^2 &= 1 - r_1^2. \end{cases}$$

Tout tore plat est isométrique à un tore  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  de l'espace euclidien, où  $\Lambda$  est le réseau engendré par les vecteurs  $2\pi(v_1, v_2)$  définis par

$$\langle v_i, v_j \rangle_{eucl} = \tilde{g}_{ij}, \quad (3.33)$$

où  $\tilde{g}$  est la métrique sur le tore, que l'on va déterminer à présent. La sphère de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  peut être vue comme la 3-sphère  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  munie de la métrique

$$g_\tau(X, Y) := g(X, Y) + (\tau^2 - 1)g(X, V)g(Y, V), \quad (3.34)$$

où  $g$  est la métrique ronde sur  $\mathbb{S}^3$  (c'est à dire la restriction à  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^4$ ), et  $V$  est le vecteur  $V_{(z,w)} = (iz, iw)$ . Alors si on considère l'immersion

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}_b^3(\tau) \\ (t, s) &\longmapsto (r_1 e^{it}, r_2 e^{is}), \end{aligned}$$

alors  $\phi(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T}(H)$ , et la matrice de la métrique induite sur le tore est donnée dans la base  $(\phi_t, \phi_s)$  par

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} r_1^2(r_2^2 + \tau^2) & r_1^2 r_2^2(\tau^2 - 1) \\ r_1^2 r_2^2(\tau^2 - 1) & r_2^2(r_1^2 + \tau^2) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Ainsi la résolution de l'équation (3.33) amène à

$$v_1 = r_1(\tau r_1, r_2) \quad \text{et} \quad v_2 = r_2(\tau r_2, -r_1).$$

Le réseau dual est donné par les vecteurs

$$v_1^* = \left( \frac{1}{\tau}, \frac{r_2}{r_1} \right) \quad \text{et} \quad v_2^* = \left( \frac{1}{\tau}, -\frac{r_1}{r_2} \right).$$

Ainsi, en remplaçant  $v_1^*$  et  $v_2^*$  dans le Théorème 19, on obtient

$$\text{Sp}(\mathcal{D}^2) = \left\{ \frac{\left(m + n + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)^2}{\tau^2} + \left[ \left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \frac{r_2}{r_1} - \left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \frac{r_1}{r_2} \right]^2, m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

où  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  représente la structure spinorielle extrinsèque de  $\mathcal{T}(H)$ . On voit dans cette expression que seul le premier carré apparaissant dans la somme fait intervenir  $\tau$ . Ensuite, d'après (3.30), si  $H$  est constante et que  $f = 0$ , on voit que  $H^2 + 1/\tau^2$  est valeur propre, donc il doit y avoir un couple  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$m + n + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \left[ \left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \frac{r_2}{r_1} - \left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \frac{r_1}{r_2} \right]^2 = H^2.$$

La première équation montre que nécessairement la structure spinorielle est donnée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$  (structure triviale) ou  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$ . Or le calcul montre que si  $H \neq 0$ , on n'a pas de solution pour  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$ , alors que si  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$ ,  $m = n = 0$  convient. De même, si  $H = 0$ , on a  $r_1 = r_2$  et le fait que  $1/\tau^2$  soit valeur propre impose  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$ . Ainsi, la structure spinorielle sur le tore est donnée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$  (par un argument de continuité identique au cas de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ ). En particulier, le noyau de l'opérateur de Dirac extrinsèque est trivial. En  $m = 0$  et  $n = -1$ , on obtient que  $1 + H^2$  est valeur propre de  $\mathcal{D}^2$ ; lorsque  $\tau^2 < 1$ , cette valeur propre est strictement inférieure à  $1/\tau^2 + H^2$ , donc les tores ne vérifient pas l'égalité.

Lorsque  $\tau^2 > 1$  à présent, on peut représenter le réseau de  $\mathbb{R}^2$  engendré par  $(v_1^*, v_2^*)$  de la façon suivante :

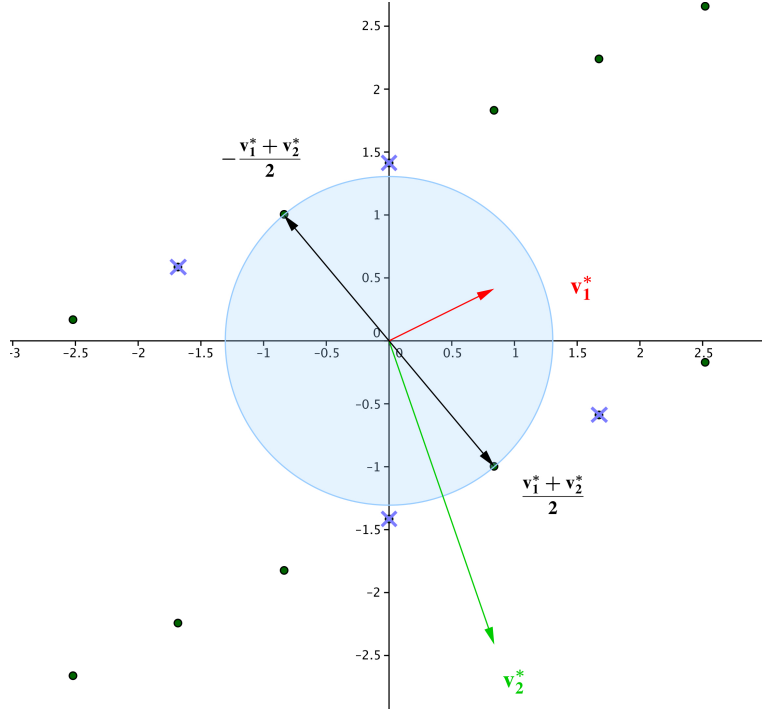


FIGURE 3.2 – Réseau dans  $\mathbb{R}^2$  engendré par  $(v_1^*, v_2^*)$ .



Le cercle bleu désigne le cercle de centre l'origine et dont  $(v_1^* + v_2^*)/2$  est un rayon, i.e. le cercle de rayon  $1/\tau^2 + H^2$ . On veut savoir s'il est possible que des éléments du réseau entrent dans ce cercle. Il est clair que si cela arrive, le premier élément du réseau à entrer dans le cercle sera l'un des points bleus sur le dessin. Ces points correspondent à  $(m, n) = (1, 0)$  (et son opposé pour  $(m, n) = (-2, -1)$ ) et  $(m, n) = (-1, 0)$  (et son opposé pour  $(m, n) = (0, -1)$ ). Or on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{3v_1^* + v_2^*}{2} \right|^2 &= \frac{4}{\tau^2} + (2H - \sqrt{1 + H^2})^2 \\ \left| \frac{v_1^* - v_2^*}{2} \right|^2 &= 1 + H^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\tau^2 > 1$ , on a :

$$\left[ \lambda_1(\mathcal{D})^2 = \frac{1}{\tau^2} + H^2 \right] \iff \left[ \frac{1}{\tau^2} + H^2 \leq \frac{4}{\tau^2} + (2H - \sqrt{1 + H^2})^2 \right].$$

On en déduit la Proposition 26, et donc la Proposition 24.  $\square$

**Remarque 22 :** Lorsque  $\tau = 1$ , on voit que ces tores vérifient le cas d'égalité dans l'inégalité de Bär (3.2), comme cela a déjà été démontré par Ginoux dans [26].

Le fait que  $0 \leq f^2 \leq 1$  permet d'obtenir deux autres majorations de  $\lambda_1^2$  ne faisant intervenir que la courbure moyenne  $H$  :

#### 3.4.4 Cas $\tau^2 < 1$

**Corollaire 5** Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ , avec  $\tau \neq 0$  et  $\tau^2 < 1$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors

$$\lambda_1^2 < \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M H^2 dM. \quad (3.36)$$

En effet, si  $\tau^2 < 1$ , on a  $\tau^2 - 1/\tau^2 < 0$  donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}\psi|^2 &= \left( H^2 + \frac{|T|^2}{\tau^2} + \tau^2 f^2 \right) |\psi|^2 \\ &= \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} + \left( \tau^2 - \frac{1}{\tau^2} \right) f^2 \right) |\psi|^2 \\ &\leq \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) |\psi|^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec égalité si et seulement si  $f = 0$  sur  $M$ , d'où l'inégalité au sens large. Si on a égalité dans (3.36), alors d'après le Théorème du min-max

$$\begin{aligned} \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM &= \int_M \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} + \left( \tau^2 - \frac{1}{\tau^2} \right) f^2 \right) |\psi|^2 dM \\ &\geq \lambda_1^2 \int_M |\psi|^2 dM = \int_M \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) |\psi|^2 dM. \end{aligned}$$

Or d'après (3.37),

$$\int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM \leq \int_M \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) |\psi|^2 dM,$$

avec égalité si et seulement si  $f = 0$ . Ainsi, l'égalité dans le théorème implique  $f = 0$ , et alors les spineurs-test construits par Roth vérifient

$$\int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM = \int_M \left( H^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) |\psi|^2 dM = \lambda_1^2 \int_M |\psi|^2 dM,$$

ils vérifient donc l'égalité dans le Théorème du min-max, donc on doit avoir  $\mathcal{D}^2\psi = \lambda_1^2\psi$ . Par le calcul, en utilisant l'équation (3.30), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2\psi &= \gamma(\nabla H)\psi + H\mathcal{D}\psi - \frac{1}{\tau}\gamma(\omega)\mathcal{D}\psi \\ &= \gamma(\nabla H)\psi + H \left[ H\psi + \frac{1}{\tau}\gamma(\omega)\psi \right] - \frac{1}{\tau}\gamma(\omega) \left[ H\psi + \frac{1}{\tau}\gamma(\omega)\psi \right] \\ &= \gamma(\nabla H)\psi + H^2\psi + \frac{1}{\tau^2}\psi. \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire avec  $\psi$ , on voit que  $H$  doit être constante, et

$$\lambda_1^2 = H^2 + \frac{1}{\tau^2}.$$

Ainsi seuls les tores plats CMC  $H$  avec  $f = 0$  peuvent vérifier l'égalité dans (3.36), et alors  $\lambda_1^2 = H^2 + 1/\tau^2$ . Mais d'après la Proposition 24, ce n'est pas le cas puisque  $\tau^2 < 1$ . On a donc bien une inégalité stricte dans le Corollaire 5.

### 3.4.5 Cas $\tau^2 > 1$

Si  $\tau^2 > 1$ , on a  $1/\tau^2 - \tau^2 < 0$  donc

$$\begin{aligned} \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 dM &= \int_M \left( H^2 + \tau^2 + \left( \frac{1}{\tau^2} - \tau^2 \right) |T|^2 \right) |\psi|^2 dM \\ &\leq \int_M (H^2 + \tau^2) |\psi|^2 dM, \end{aligned} \tag{3.38}$$

avec égalité si et seulement si  $T = 0$  sur  $M$ . On en déduit le résultat suivant :

**Corollaire 6** *Soit  $M$  une hypersurface compacte sans bord et orientable de  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ , avec  $\tau^2 > 1$ . Soit  $\lambda_1$  la première valeur propre positive ou nulle de  $\mathcal{D}$ . Alors*

$$\lambda_1^2 < \tau^2 + \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M H^2 dM. \tag{3.39}$$

En effet, si une surface  $M$  vérifie l'égalité, comme dans le cas  $\tau^2 < 1$  on en déduit que nécessairement  $T = 0$ , ce qui est impossible d'après l'équation (3.24) puisqu'on aurait alors  $A = J$ , ce qui est absurde car  $J$  n'est pas diagonalisable.

Là encore, terminons par une remarque sur la stabilité. Des trois majorations (3.29), (3.36) et (3.39), seule (3.29) est optimale (au moins lorsque  $\tau^2 > 1$ ). La classification ([74]) des surfaces CMC stables est complète uniquement pour  $1/3 \leq \tau^2 < 1$ . Mais on a aucune inégalité optimale pour  $\tau^2 < 1/3$ , et les tores plats CMC réalisant l'égalité lorsque  $\tau^2 > 1$  de la Proposition 24 sont tous instables ([74] toujours).

# Bibliographie

- [1] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  and  $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ . *Acta Math.*, 193(2) :141–174, 2004.
- [2] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, 28 :1–28, 2005.
- [3] Hilário Alencar, Manfredo do Carmo, and Harold Rosenberg. Erratum to : “On the first eigenvalue of the linearized operator of the  $r$ th mean curvature of a hypersurface” [Ann. Global Anal. Geom. **11** (1993), no. 4, 387–395; MR1246197 (94m :53086)]. *Ann. Global Anal. Geom.*, 13(1) :99–100, 1995.
- [4] Aleksandr Danilovich Alexandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large i. *Vestnik Leningrad Univ.*, 11 :5–17, 1956.
- [5] Bernd Ammann and Christian Bär. Dirac eigenvalue estimates on surfaces. *Math. Z.*, 240(2) :423–449, 2002.
- [6] Michael Francis Atiyah and Isadore Singer. The index of elliptic operators. V. *Ann. of Math. (2)*, 93 :139–149, 1971.
- [7] Christian Bär. Lower eigenvalue estimates for Dirac operators. *Math. Ann.*, 293(1) :39–46, 1992.
- [8] Christian Bär. Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator. *Ann. Global Anal. Geom.*, 16(6) :573–596, 1998.
- [9] Christian Bär. Dependence of the Dirac spectrum on the Spin structure. In *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, volume 4 of *Sémin. Congr.*, pages 17–33. Soc. Math. France, Paris, 2000.
- [10] Helga Baum. Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors. *Ann. Global Anal. Geom.*, 7(3) :205–226, 1989.
- [11] Helga Baum, Thomas Friedrich, Ralf Grunewald, and Ines Kath. *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*, volume 124 of *Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1991. With German, French and Russian summaries.
- [12] Dmitry Aleksandrovich Berdinskiĭ and Iskander Asanovich Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 46(6) :1248–1264, 2005.

- [13] Jean-Pierre Bourguignon, Oussama Hijazi, Jean-Louis Milhorat, Andrei Moroianu, and Sergiu Moroianu. A spinorial approach to riemannian and conformal geometry. To appear in *Mono- graphs in Mathematics, European Mathematical Society*, 2014.
- [14] Robert L. Bryant. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Astérisque*, (154-155) :12, 321–347, 353 (1988), 1987. Théorie des variétés minimales et applications (Palaiseau, 1983–1984).
- [15] Benoît Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82(1) :87–131, 2007.
- [16] Benoît Daniel and Laurent Hauswirth. Half-space theorem, minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 98(2) :445–470, 2009.
- [17] Benoît Daniel and Pablo Mira. Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in  $\text{Sol}_3$ . *J. Reine Angew. Math.*, 685 :1–32, 2013.
- [18] Christophe Desmonts. Spinorial proofs of the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures in  $\mathbb{R}^{n+1}$  and the Heintze-Karcher inequality. *Differential Geom. Appl.*, 37 :44–53, 2014.
- [19] Christophe Desmonts. Constructions of periodic minimal surfaces and minimal annuli in  $\text{Sol}_3$ . To appear in *Pacific Journal of Mathematics*, 2015.
- [20] Franki Dillen, Johan Fastenakels, Joeri Van der Veken, and Luc Vrancken. Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . *Monatsh. Math.*, 152(2) :89–96, 2007.
- [21] Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Une inégalité du type “Reilly” pour les sous-variétés de l’espace hyperbolique. *Comment. Math. Helv.*, 67(2) :167–181, 1992.
- [22] Thomas Friedrich. Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung. *Math. Nachr.*, 97 :117–146, 1980.
- [23] Thomas Friedrich. Zur Abhängigkeit des Dirac-operators von der Spin-Struktur. *Colloq. Math.*, 48(1) :57–62, 1984.
- [24] Thomas Friedrich. On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space. *J. Geom. Phys.*, 28(1-2) :143–157, 1998.
- [25] Lars Gårding. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 8 :957–965, 1959.
- [26] Nicolas Ginoux. Remarques sur le spectre de l’opérateur de Dirac. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(1) :53–56, 2003.
- [27] Nicolas Ginoux. Une nouvelle estimation extrinsèque du spectre de l’opérateur de Dirac. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(10) :829–832, 2003.
- [28] Nicolas Ginoux and Georges Habib. Geometric aspects of transversal Killing spinors on Riemannian flows. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 78(1) :69–90, 2008.
- [29] Nicolas Ginoux, Georges Habib, and Simon Raulot. A new upper bound for the Dirac operator on hypersurfaces. To appear in *Pacific Journal of Mathematics*, 2015.
- [30] Jean-François Grosjean. A Reilly inequality for some natural elliptic operators on hypersurfaces. *Differential Geom. Appl.*, 13(3) :267–276, 2000.

- 
- [31] Jean-François Grosjean. Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact submanifolds. *Pacific J. Math.*, 206(1) :93–112, 2002.
- [32] Jean-François Grosjean. Extrinsic upper bounds for the first eigenvalue of elliptic operators. *Hokkaido Math. J.*, 33(2) :319–339, 2004.
- [33] Ernst Heintze. Extrinsic upper bounds for  $\lambda_1$ . *Math. Ann.*, 280(3) :389–402, 1988.
- [34] Ernst Heintze and Hermann Karcher. A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 11(4) :451–470, 1978.
- [35] Oussama Hijazi. Caractérisation de la sphère par les premières valeurs propres de l’opérateur de Dirac en dimensions 3, 4, 7 et 8. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(9) :417–419, 1986.
- [36] Oussama Hijazi. A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :151–162, 1986.
- [37] Oussama Hijazi and Sebastián Montiel. A holographic principle for the existence of parallel spinor fields and an inequality of Shi-Tam type. *Asian Journal of Mathematics*, 2013.
- [38] Oussama Hijazi and Sebastián Montiel. A spinorial characterization of hyperspheres. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 48(3-4) :527–544, 2013.
- [39] Oussama Hijazi, Sebastián Montiel, and Simon Raulot. A holographic principle for the existence of imaginary Killing spinors. To appear in *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, 2015.
- [40] Oussama Hijazi, Sebastián Montiel, and Antonio Roldán. Dirac operators on hypersurfaces of manifolds with negative scalar curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, 23(3) :247–264, 2003.
- [41] Oussama Hijazi, Sebastián Montiel, and Xiao Zhang. Dirac operator on embedded hypersurfaces. *Math. Res. Lett.*, 8(1-2) :195–208, 2001.
- [42] Oussama Hijazi, Sebastián Montiel, and Xiao Zhang. Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary. *Comm. Math. Phys.*, 221(2) :255–265, 2001.
- [43] Oussama Hijazi, Sebastián Montiel, and Xiao Zhang. Conformal lower bounds for the Dirac operator of embedded hypersurfaces. *Asian J. Math.*, 6(1) :23–36, 2002.
- [44] Nigel Hitchin. Harmonic spinors. *Advances in Math.*, 14 :1–55, 1974.
- [45] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1989. Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss.
- [46] Chuan-Chih Hsiung. Some integral formulas for closed hypersurfaces. *Math. Scand.*, 2 :286–294, 1954.
- [47] Jun-ichi Inoguchi and Sungwook Lee. A Weierstrass type representation for minimal surfaces in Sol. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(6) :2209–2216, 2008.
- [48] Katsuei Kenmotsu. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. *Math. Ann.*, 245(2) :89–99, 1979.

- [49] Masatoshi Kokubu. Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space. *Tohoku Math. J. (2)*, 49(3) :367–377, 1997.
- [50] Wolfgang Kühnel and Hans-Bert Rademacher. Twistor spinors with zeros. *Internat. J. Math.*, 5(6) :877–895, 1994.
- [51] Wolfgang Kühnel and Hans-Bert Rademacher. Twistor spinors on conformally flat manifolds. *Illinois J. Math.*, 41(3) :495–503, 1997.
- [52] Herbert Blaine Lawson, Jr. Complete minimal surfaces in  $S^3$ . *Ann. of Math. (2)*, 92 :335–374, 1970.
- [53] Herbert Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [54] André Lichnerowicz. Spineurs harmoniques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 257 :7–9, 1963.
- [55] Rafael López. Invariant surfaces in  $Sol_3$  with constant mean curvature and their computer graphics. *Adv. Geom.*, 14(1) :31–48, 2014.
- [56] Rafael López and Marian Ioan Munteanu. Surfaces with constant mean curvature in Sol geometry. *Differential Geom. Appl.*, 29(suppl. 1) :S238–S245, 2011.
- [57] Rafael López and Marian Ioan Munteanu. Minimal translation surfaces in  $Sol_3$ . *J. Math. Soc. Japan*, 64(3) :985–1003, 2012.
- [58] Rafael López and Marian Ioan Munteanu. Invariant surfaces in the homogeneous space Sol with constant curvature. *Math. Nachr.*, 287(8-9) :1013–1024, 2014.
- [59] Leonid A. Masaltsev. Minimal surfaces in standard three-dimensional geometry  $Sol^3$ . *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 2(1) :104–110, 113, 2006.
- [60] William H. Meeks, III and Joaquín Pérez. Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups. In *Geometric analysis : partial differential equations and surfaces*, volume 570 of *Contemp. Math.*, pages 25–110. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [61] Ana Menezes. Periodic minimal surfaces in semidirect products. *J. Aust. Math. Soc.*, 96(1) :127–144, 2014.
- [62] Hermann Minkowski. Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.*, 57(4) :447–495, 1903.
- [63] Sebastián Montiel and Antonio Ros. Compact hypersurfaces : the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. In *Differential geometry*, volume 52 of *Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.*, pages 279–296. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.
- [64] Minh Hoang Nguyen. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in  $Sol_3$  with possible infinite boundary data. arXiv :1312.6194, 2014.
- [65] Johannes C. C. Nitsche. *Lectures on minimal surfaces. Vol. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems, Translated from the German by Jerry M. Feinberg, With a German foreword.
- [66] Georges Reeb. Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques. *Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. Coll. in 8°*, 27(9) :64, 1952.

- 
- [67] Robert C. Reilly. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(3) :459–472, 1977.
- [68] Robert C. Reilly. On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space. *Comment. Math. Helv.*, 52(4) :525–533, 1977.
- [69] Guyan Robertson. Crofton formulae and geodesic distance in hyperbolic spaces. *J. Lie Theory*, 8(1) :163–172, 1998.
- [70] Antonio Ros. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 3(3-4) :447–453, 1987.
- [71] Antonio Ros. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. *J. Differential Geom.*, 27(2) :215–223, 1988. With an appendix by Nicholas J. Korevaar.
- [72] Julien Roth. Spinorial characterizations of surfaces into three-dimensional homogeneous manifolds. *J. Geom. Phys.*, 60(6-8) :1045–1061, 2010.
- [73] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [74] Francisco Torralbo and Francisco Urbano. Compact stable constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 61(3) :1129–1156, 2012.
- [75] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Comm. Math. Phys.*, 80(3) :381–402, 1981.





## Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur le rôle que peuvent jouer les différentes courbures extrinsèques d'une hypersurface dans l'étude de sa géométrie, en particulier dans le cas des variétés spinorielles. Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas de la courbure moyenne et construisons une nouvelle famille de surfaces minimales non simplement connexes dans le groupe de Lie  $\text{Sol}_3$ , en adaptant une méthode déjà utilisée par Daniel et Hauswirth dans  $\text{Nil}_3$  et utilisant les propriétés de l'application de Gauss d'une surface. Ensuite, nous démontrons le Théorème d'Alexandrov généralisé aux  $H_r$ -courbures dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$  et dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^{n+1}$  en testant un spineur adéquat dans des inégalités de type holographiques établies récemment par Hijazi, Montiel et Raulot. Grâce à ces inégalités, nous démontrons également l'Inégalité de Heintze-Karcher dans l'espace euclidien. Enfin, nous donnons des majorations extrinsèques de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac des surfaces de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  et des sphères de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$  grâce aux restrictions de spineurs ambiants construits par Roth, et nous en caractérisons les cas d'égalité.

**Mots-clés:** géométrie riemannienne, géométrie spinorielle, hypersurfaces, surfaces minimales,  $H_r$ -courbure, opérateur de Dirac, spectre, Théorème d'Alexandrov

## Abstract

In this thesis we are interested in the role played by the extrinsic curvatures of a hypersurface in the study of its geometry, especially in the case of spin manifolds. First, we focus our attention on the mean curvature and construct a new family of non simply connected minimal surfaces in the Lie group  $\text{Sol}_3$ , by adapting a method used by Daniel and Hauswirth in  $\text{Nil}_3$  based on the properties of the Gauss map of a surface. Then we give a new spinorial proof of the Alexandrov Theorem extended to all  $H_r$ -curvatures in the euclidean space  $\mathbb{R}^{n+1}$  and in the hyperbolic space  $\mathbb{H}^{n+1}$ , using a well-chosen test-spinor in the holographic inequalities recently obtained by Hijazi, Montiel and Raulot. These inequalities lead to a new proof of the Heintze-Karcher Inequality as well. Finally we use restrictions of particular ambient spinor fields constructed by Roth to give some extrinsic upper bounds for the first nonnegative eigenvalue of the Dirac operator of surfaces immersed into  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$  and into the Berger spheres  $\mathbb{S}_b^3(\tau)$ , and we describe the equality cases.

**Keywords:** Riemannian geometry, spin geometry, hypersurfaces, minimal surfaces,  $H_r$ -curvature, Dirac operator, spectrum, Alexandrov Theorem

