



HAL
open science

Valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique de fonctions L automorphes

Xuanxuan Xiao

► **To cite this version:**

Xuanxuan Xiao. Valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique de fonctions L automorphes. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0068 . tel-01751699v2

HAL Id: tel-01751699

<https://hal.science/tel-01751699v2>

Submitted on 4 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique de fonctions L automorphes

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques pures

par

Xuanxuan XIAO

Soutenue publiquement le 06 mai 2015 devant le jury composé de

Cécile DARTYGE	Maître de conférences, Université de Lorraine	<i>Examineur</i>
Christophe DELAUNAY	Professeur, Université de Franche-Comté	<i>Rapporteur</i>
Jianya LIU	Professeur, Université de Shandong	<i>Examineur</i>
Guillaume RICOTTA	Maître de conférences, Université de Bordeaux 1	<i>Rapporteur</i>
Gérald TENENBAUM	Professeur, Université de Lorraine	<i>Examineur</i>
Jie WU	Chargé de recherche au CNRS, Université de Lorraine	<i>Directeur de thèse</i>

au vu des rapports de

Christophe DELAUNAY	Professeur, Université de Franche-Comté
Guillaume RICOTTA	Maître de conférences, Université de Bordeaux 1
Kai Man TSANG	Professeur, Université de Hong Kong

Table des matières

Introduction	1
1 Formes modulaires et fonctions L automorphes	11
1.1 Formes modulaires	11
1.1.1 Espace de formes modulaires	11
1.1.2 Opérateurs de Hecke et d’Atkin-Lehner-Li	13
1.1.3 Formes primitives et coefficients de Fourier	15
1.1.4 Formule de trace	16
1.1.5 Polynômes de Tchebychev	18
1.2 Fonctions L	19
1.2.1 Fonctions L automorphes	19
1.2.2 Fonctions L de puissances symétriques	21
1.3 Formes primitives tordues par des caractères	23
1.4 Fonctions L de Rankin-Selberg	24
1.4.1 Prolongement des fonctions L de Rankin-Selberg	25
1.4.2 L’équation Fonctionnelle	27
1.4.3 Fonction L de Rankin-Selberg de $\text{sym}^m f$ et $\text{sym}^m g$	31
2 Moments des valeurs centrales sur les petits intervalles	33
2.1 énoncé du problème et du résultat	33
2.2 Lemmes auxiliaires	38
2.3 Borne supérieure	46
2.3.1 Méthode de grand valeur et une estimation faible	46
2.3.2 Idée de la preuve de la borne supérieure	48
2.3.3 Raffinement de la méthode d’Harper	50
2.4 Borne inférieure	61
2.4.1 Estimations de la borne convexité	62
2.4.2 Compagnon de $J_{T,H}(\sigma)$ et $K_{T,H,N}(\sigma)$	64
2.4.3 Fin de la démonstration de la borne inférieure	66
3 Valeurs de fonctions L de puissances symétriques en $s = 1$ et applications	69
3.1 Introduction	69
3.1.1 Encadrement de $L(1, \text{sym}^m f)$ et leurs valeurs extrêmes	69
3.1.2 Première conjecture de Montgomery-Vaughan	73
3.1.3 Fonctions de répartition pondérées	74

3.1.4	Distribution des valeurs propres de Hecke	75
3.1.5	Théorème de densité en l'aspect de niveau-poids	76
3.2	Bornes des fonctions L de puissance symétrique	77
3.3	Démonstration du Théorème 3.1.5	82
3.4	Moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$	87
3.4.1	Notations et résultat	88
3.4.2	Lemmes intermédiaires	89
3.4.3	Démonstration de la Proposition 3.4.1	93
3.5	Démonstration du Théorème 3.1.1	95
3.5.1	Démonstration du Théorème 3.1.1(i)	95
3.5.2	Démonstration du Théorème 3.1.1(ii)	97
3.6	Inégalité du grand crible et preuve du Théorème 3.1.2	98
3.6.1	Inégalité du grand crible et l'application	98
3.6.2	Démonstration du Théorème 3.1.2(i)	100
3.6.3	Démonstration du Théorème 3.1.2(ii)	103
3.7	Démonstration du Théorème 3.1.3	103
3.8	Démonstration du Théorème 3.1.4	109

Introduction

Les formes modulaires et les fonctions L automorphes sont des objets pertinents à étudier en théorie des nombres. Dans le cadre de leur étude, l'analyse, l'algèbre, la géométrie et l'arithmétique se croisent d'une manière naturelle et surprenante. La preuve du grand théorème de Fermat par A. Wiles est un très bel exemple. Selon le programme de Langlands, on conjecture que les fonctions L automorphes vérifient une équation fonctionnelle (déjà résolue dans certains cas, par exemple, la fonction ζ de Riemann). Après une procédure de normalisation, ces fonctions sont « symétriques » par rapport à la droite critique $\Re s = \frac{1}{2}$ et toutes les mystères de ces fonctions se passent dans la bande critique :

$$\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re s \leq 1\}.$$

La distribution des valeurs des fonctions L automorphes dans la bande critique est loin d'avoir révélé toutes ses facettes et de nombreux phénomènes analytiques méritent que l'on y porte une attention propre, au delà de leur seule signification arithmétique. Autour de ces dernières se sont élaborées de nombreuses conjectures ouvertes, telles que l'hypothèse de Riemann (HR) et l'hypothèse de Lindelöf (HL).

Cette thèse se compose de trois chapitres. Le premier chapitre contient un survol rapide de la théorie des formes modulaires et des fonctions L automorphes qui nous seront nécessaires par la suite. Les chapitres 2 et 3 sont deux parties essentielles de la thèse dans lesquelles nous voulons étudier les deux problèmes ci-dessous par des méthodes de théorie analytique des nombres :

- A. Moments des valeurs centrales (ou valeurs sur la droite critique) des fonctions de Hecke sur les petits intervalles ;
- B. Répartition des valeurs au bord de la bande critique des fonctions automorphes de puissances symétriques sur une famille donnée.

Soient $k \geq 2$ un entier pair et $N \geq 1$ un entier sans facteurs carrés. Désignons par $\mathcal{H}_k^*(N)$ l'ensemble des formes primitives holomorphes de poids k et de niveau N . Il est bien connu que

$$|\mathcal{H}_k^*(N)| = \frac{k-1}{12} \varphi(N) + O((kN)^{2/3}), \tag{I.1}$$

où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler et la constante impliquée est absolue. Pour chaque $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et entier $m \geq 1$, on note $L(s, \text{sym}^m f)$ la fonction de la m -ième puissance symétrique associée à f . En particulier on écrit $L(s, f) = L(s, \text{sym}^1 f)$ (la fonction de Hecke associée à f).

A. Moments des valeurs centrales sur les petits intervalles

Dans le cas de la fonction ζ de Riemann, l'hypothèse de Lindelöf énonce que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \ll_{\varepsilon} (|\tau| + 1)^{\varepsilon} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Bien que cette conjecture reste encore ouverte aujourd'hui, une vérification en moyenne est suffisante dans la plupart des applications arithmétiques. Cela pose un des problèmes centraux en théorie analytique des nombres : chercher des bonnes estimations pour les moments de $\zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)$ de type

$$\mathcal{M}_r(T, H; \zeta) := \int_T^{T+H} |\zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)|^{2r} d\tau \quad (\text{I.2})$$

pour $r > 0$ et $1 \leq H \leq T$. On a conjecturé que

$$\mathcal{M}_r(T, T; \zeta) \sim C_r T (\log T)^{r^2} \quad (T \rightarrow \infty), \quad (\text{I.3})$$

où C_r est une constante positive dépendant de r (voir [45, 10, 9]). Hardy & Littlewood [25] et Ingham [34] ont démontré (I.3) pour $r = 1$ et $r = 2$, respectivement. Heath-Brown [32] a établi la minoration

$$\mathcal{M}_r(T, T; \zeta) \gg_r T (\log T)^{r^2} \quad (\text{I.4})$$

pour tout nombre rationnel $r > 0$. Ramachandra [73] a montré que cette minoration a lieu pour tout nombre réel $r > 0$ sous l'HR. Heath-Brown [32] a aussi montré que

$$\mathcal{M}_r(T, T; \zeta) \ll_r T (\log T)^{r^2}$$

pour $r = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 < r \leq 2$ sous l'hypothèse de Riemann. Radziwiłł [72] a étendu le domaine $0 < r \leq 2$ à $0 < r \leq 2,181$. Dans la publication [85], Soundararajan a fait un grand progrès en montrant que pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ l'HR implique

$$\mathcal{M}_r(T, T; \zeta) \ll_{r,\varepsilon} T (\log T)^{r^2+\varepsilon} \quad (\text{I.5})$$

pour tous $T \geq 2$. Il a introduit une nouvelle idée dans les travaux de Selberg [83, 84] : Approcher $\log |\zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)|$ par un polynôme de Dirichlet de longueur x en le point $\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\log x} + i\tau$ au lieu de $\frac{1}{2} + i\tau$, où x est un paramètre dépendant de T et λ est une constante convenable. Ceci lui permet de montrer que l'effet des zéros de $\zeta(s)$ très proches $\frac{1}{2} + i\tau$ est en fait bénin et d'établir (I.5). Récemment, Harper [28] a réussi à supprimer ε en raffinant la méthode de Soundararajan. Il a introduit un découpage très délicat et établi un lemme similaire à celui de Radziwiłł [72] (voir Lemme 2.2.5 ci-dessous) pour traiter l'intégrale d'un produit de $\cos(\tau \log p)$ sur des nombres premiers. Ainsi il peut estimer les fréquences de grandes valeurs très efficacement et démontrer sa borne supérieure conditionnelle.

Pour le cas de petits intervalles, la formule asymptotique de Heath-Brown [31] pour $\mathcal{M}_2(T, T; \zeta)$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathcal{M}_2(T, H; \zeta) \ll_{\varepsilon} H^{1+\varepsilon}$$

uniformément pour $T \geq 1$ et $T^{7/8} \leq H \leq T$. Dans [36], Iwaniec a réduit l'exposant $\frac{7}{8}$ à $\frac{2}{3}$.

Dans le Chapitre 2, nous voulons considérer les moments des valeurs centrales de $L(s, f)$ sur les petits intervalles, i.e., l'analogue de (I.2) pour $L(s, f)$. Puisque nous nous intéressons seulement en l'aspect de $\tau = \Im m s$, nous pouvons prendre $N = 1$ pour la simplicité de notation. écrivons $\mathcal{H}_k^* := \mathcal{H}_k^*(1)$. Pour $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et $1 \leq H \leq T$, on définit

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) := \int_T^{T+H} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} d\tau.$$

Grâce à Conrey et al. [9, Conjecture 2.5.4], il existe une conjecture similaire à (I.3) pour $\mathcal{M}_r(T, T; f)$. Pour le cas de petits intervalles, il semble naturel de conjecturer que pour tous $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$, on ait

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) \asymp_{f,r,\varepsilon} H(\log T)^{r^2} \tag{I.6}$$

uniformément pour $T \rightarrow \infty$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$. Ici, on écrit $A \asymp B$ si $B \ll A \ll B$.

L'étude de $\mathcal{M}_r(T, H; f)$ a été initialisée par Good [18, 20]. En particulier dans [20], il a établi la formule asymptotique

$$\mathcal{M}_1(T, T; f) = A_1 T \log T + A_2 T + O_f((T \log T)^{2/3})$$

pour tout $T \geq 2$, où les constantes A_1, A_2 et la constante impliquée ne dépendent que de f . Ceci implique immédiatement

$$\mathcal{M}_1(T, H; f) \asymp_f H \log T$$

pour $T \geq 3$ et $T^{2/3}(\log T)^{-1/3} \ll H \leq T$ (voir aussi [40, 41, 97, 98]). Sun et Lü [86] ont prouvé que

$$\mathcal{M}_r(T, T; f) \begin{cases} \gg_{f,r} T(\log T)^{r^2} & \text{si } r = \frac{n}{m} \leq \frac{1}{2}, \\ \ll_{f,r} T(\log T)^{r^2} & \text{si } r = \frac{n}{m} \text{ avec } m \text{ pair (sous l'HRG pour } L(s, f)). \end{cases}$$

Très récemment, Pi [70] et Milinovich & Turnage-Butterbaugh [63] ont considéré les moments de fonctions L de GL_m . Un cas particulier de leurs résultats implique que la minoration ci-dessous

$$T(\log T)^{r^2} \ll_{f,r} \mathcal{M}_r(T, T; f) \ll_{f,r,\varepsilon} T(\log T)^{r^2+\varepsilon} \tag{I.7}$$

a lieu pour tous nombres rationnels $r > 0$ inconditionnellement, et pour tous nombres réels $r > 0$ sous l'hypothèse de Riemann généralisée (HRG) pour $L(s, f)$. La majoration ci-dessus est vraie sous l'HRG pour $L(s, f)$, respectivement.

Le but principal du Chapitre 2 est de démontrer la conjecture (I.6) sous l'HRG pour $L(s, f)$. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème (A). *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, f)$, on a*

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) \asymp_{f,r,\varepsilon} H(\log T)^{r^2}$$

uniformément pour $T \geq T_0(f, r, \varepsilon)$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$, où la constante $T_0(f, r, \varepsilon)$ et les constantes impliquées ne dépendent que de f, r et ε . De plus la minoration ci-dessus a lieu pour tout nombre rationnel $r > 0$ inconditionnellement.

En prenant $H = T$ dans le Théorème (A), nous obtenons une généralisation exacte de la majoration de Harper dans le cas des fonctions L de Hecke, en améliorant la borne supérieure de Milinovich & Turnage-Butterbaugh dans le cas de la fonction de Hecke. Il est à noter que notre résultat est aussi valable pour les petits intervalles.

Notre approche est une adaptation des méthodes de Soundararajan-Harper et de Heath-Brown. Pour la borne supérieure, si nous suivons les arguments de [85, 28], nous devons supposer l'HR pour $\zeta(s)$ et l'HRG pour $L(s, \text{sym}^2 f)$ aussi. Afin de surmonter cette difficulté, nous introduisons une nouvelle idée pour traiter le membre secondaire dans l'approximation de $\log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|$ (voir (2.2.6) ci-dessous). Au lieu d'estimer ce terme individuellement comme dans [28], nous traitons les deux premiers membres simultanément. Ainsi nous pouvons réaliser une deuxième optimisation qui est un des points clés dans notre démonstration.

Il semble que notre méthode puisse être généralisée à améliorer le résultat de Milinovich & Turnage-Butterbaugh [63, Theorem 1.1]. Pour prouver la borne inférieure dans le Théorème(A), nous utilisons la méthode de Heath-Brown [32] en la combinant avec la théorie de Rankin-Selberg.

B. Valeurs en $s = 1$ des fonctions L de puissances symétriques

L'étude sur la distribution des valeurs de fonctions L de Dirichlet associée au caractère quadratique χ_d en $s = 1$ a une longue histoire. On note (désormais) par \log_j l'itération j fois de la fonction. En 1927, Littlewood [58] a montré que sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, \chi_d)$, on a

$$\left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \frac{\zeta(2)}{e^\gamma \log_2 |d|} \leq L(1, \chi_d) \leq \{2 + o(1)\} e^\gamma \log_2 |d| \quad (|d| \rightarrow \infty), \quad (\text{I.8})$$

et il existe une infinité de discriminants fondamentaux $|d|$ tels que, pour $|d| \rightarrow \infty$,

$$L(1, \chi_d) \begin{cases} \geq \{1 + o(1)\} e^\gamma \log_2 |d|, \\ \leq \{1 + o(1)\} \zeta(2) / (e^\gamma \log_2 |d|), \end{cases}$$

respectivement. Le résultat dernier de Littlewood est établi inconditionnellement plus tard par Chowla [6]. En 1999, Montgomery et Vaughan [65] ont proposé trois conjectures concernant la répartition des valeurs extrêmes de $L(1, \chi_d)$. Leur première conjecture s'énonce de la façon suivante.

Conjecture (Montgomery-Vaughan 1). *Il existe trois constantes positives C , c et x_0 telles que l'on ait*

$$e^{-C \log x / \log_2 x} \leq \frac{1}{|\{ |d| \leq x \}|} \sum_{\substack{|d| \leq x \\ L(1, \chi_d) \geq e^\gamma \log_2 |d|}} 1 \leq e^{-c \log x / \log_2 x} \quad (\text{I.9})$$

pour $x \geq x_0$. Le même encadrement reste valable si l'on remplace $L(1, \chi_d) \geq e^\gamma \log_2 |d|$ par $L(1, \chi_d) \leq \zeta(2) / (e^\gamma \log_2 |d|)$.

Dans l'article [23], Granville et Soundararajan ont réussi à résoudre cette conjecture. Leur outil principal est une estimation de la somme courte des caractères de module friable de Graham-Ringrose [22].

Dans le Chapitre 3, nous nous intéressons à la répartition des valeurs des fonctions L de puissance symétrique en $s = 1$ en l'aspect de niveau-poids et celle des valeurs propres de Hecke.

1. Encadrement de $L(1, \text{sym}^m f)$ et leurs valeurs extrêmes

La distribution des valeurs des fonctions L de puissance symétrique en $s = 1$ a attiré l'attention de nombreux auteurs ces dernières vingtaines années [33, 61, 78, 79, 24, 80, 7, 52, 53, 59]. Divers outils et techniques ont été développés et de nombreux résultats intéressants à l'aspect de niveau ou de poids ont été obtenus.

Soient $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et $m = 1, 2$, Hoffstein et Lockhart [33] ont montré que pour tout $N \in \mathbb{N}^+$

$$(\log(kN))^{-1} \ll L(1, \text{sym}^m f) \ll \log(kN), \quad (\text{I.10})$$

où les constantes impliquées sont absolues. Motivé par un problème de décomposition spectrale, Luo [61] a considéré la répartition des valeurs de fonctions L de carré symétrique des formes de Maass. Soient $\{f_j(z)\}$ une base orthonormale de Hecke de l'espace $L_0^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ et $\frac{1}{4} + t_j^2$ ($t_j \geq 0$) la valeur propre du Laplacien de $f_j(z)$. Il a montré que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\{j : t_j \leq T\}|} \sum_{\substack{t_j \leq T \\ L(1, \text{sym}^2 f_j) \leq t}} 1 = F(t)$$

en tout point de continuité d'une fonction de répartition $F(t)$ en calculant les moments entiers positifs

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\{j : t_j \leq T\}|} \sum_{t_j \leq T} L(1, \text{sym}^2 f_j)^{r-1} = M_{\text{sym}^2}^r \quad (\text{I.11})$$

où $M_{\text{sym}^2}^r$ est une constante positive dépendant de r vérifiant $\log M_{\text{sym}^2}^r \ll r \log_2 r$. La difficulté principale est que le produit eulérien de $L(s, \text{sym}^2 f_j)$ est de degré 3 dont les coefficients de Dirichlet ne forment pas une fonction complètement multiplicative. La perte de la multiplicativité complète complique l'analyse combinatoire des moments.

Dans [78], Royer a considéré le cas des formes holomorphes. On dénote par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n avec la convention que $P^-(1) = \infty$. Soit ω_f le poids harmonique dans la formule des traces de Petersson. Il a établi l'analogie de la relation (I.11) :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ P^-(N) \geq N^\varepsilon}} \frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm r} = M_{\text{sym}^2}^{\pm r} \quad (\text{I.12})$$

pour tous les entiers $r \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, et montré que $\log M_{\text{sym}^2}^r = 3r \log_2 r + O(r)$ ($r \rightarrow \infty$). Des interprétations combinatoires pour $M_{\text{sym}^m}^{-r}$ ($m = 1, 2$) et $M_{\text{sym}^m}^r$ ($m = 1$) peuvent être trouvées dans [79] et [24], respectivement. De plus, à l'aide de ces interprétations combinatoires, les auteurs de ces deux articles ont trouvé les formules asymptotiques de $\log M_{\text{sym}^m}^{\pm r}$ pour $m = 1, 2$. Ceci leur permet de déduire que l'ensemble

$$\{L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm 1} : f \in \mathcal{H}_k^*(N)\}$$

n'est pas borné lorsque $N \rightarrow \infty$ avec $P^-(N) \geq N^\varepsilon$.

Pour obtenir une version quantitative de cette affirmation, Royer et Wu [80] ont analysé la dépendance des paramètres N et r . Ceci demande un changement de techniques utilisées dans [78]. Leur résultat énonce comme le suivant : Soit k un nombre entier pair fixé. Il existe une constante absolue c telle que l'on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm r} = M_{\text{sym}^2}^{\pm r} \{1 + O((\log_2 N)^{-1})\} + O_k(N^{-1/13} e^{cr} \sqrt{\log(3N) + cr^2}) \quad (\text{I.13})$$

uniformément pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$ avec $P^-(N) \geq \log N$, où la constante impliquée dépend de k . D'où ils ont déduit qu'il existe $f_{\pm} \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telles que

$$L(1, \text{sym}^2 f_-) \ll_k (\log_2 N)^{-1}, \quad L(1, \text{sym}^2 f_+) \gg_k (\log_2 N)^3. \quad (\text{I.14})$$

De plus, ils ont aussi montré que

$$(\log_2 N)^{-1} \ll_k L(1, \text{sym}^2 f) \ll_k (\log_2 N)^3 \quad (\text{I.15})$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $P^-(N) \geq \log N$ sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, \text{sym}^2 f)$. Par conséquent, (I.14) est optimal concernant l'ordre de magnitude. Pour expliquer la nécessité de la condition de type $P^-(N) \geq \log N$ dans (I.12) et (I.13), ils ont montré que

$$\{L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm 1} : f \in \mathcal{H}_k^*(N_j)\}$$

est borné lorsque $j \rightarrow \infty$, où p_j est le j -ième nombre premier et $N_j = p_1 \cdots p_j$. Cependant, les idées de combinatoire de Royer et al. semblent difficiles à généraliser pour étudier les moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$ avec $m \geq 3$. Pour surmonter cette difficulté, une approche plus conceptuelle a été introduite par Cogdell et Michel [7]. En fournissant une interprétation probabiliste naturelle, ils ont interprété les moments complexes pour les fonctions L de puissance symétrique par l'espérance d'un produit eulérien défini sur l'espace probabilité :

$$M_{\text{sym}^m}^z = \prod_p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \prod_{j=0}^m (1 - e^{i(m-2j)\theta} p^{-1})^z \sin^2 \theta d\theta. \quad (\text{I.16})$$

Grâce à cette nouvelle méthode, Cogdell et Michel ont généralisé et amélioré (I.15) et (I.14) de Royer et Wu : Soient N un nombre premier, $f \in \mathcal{H}_2^*(N)$ et $m = 1, 2, 3, 4$. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, \text{sym}^m f)$, on a

$$\{1 + o(1)\} (2B_m^- \log_2 N)^{-A_m^-} \leq L(1, \text{sym}^m f) \leq \{1 + o(1)\} (2B_m^+ \log_2 N)^{A_m^+} \quad (\text{I.17})$$

pour $N \rightarrow \infty$, où A_m^\pm et B_m^\pm sont des constantes positives définies en (3.4.5) ci-dessous. De plus, ils ont montré qu'il existe $f_m^\pm \in \mathcal{H}_2^*(N)$ telles que

$$L(1, \text{sym}^m f_m^\pm) \gtrsim \{1 + o(1)\} (B_m^\pm \log_2 N)^{\pm A_m^\pm}, \quad (\text{I.18})$$

pour $N \rightarrow \infty$. Les analogues de (I.17) et (I.18) en l'aspect du poids ont été obtenus par Lau et Wu (voir [52, Théorème 2 et 3]).

Nous nous intéressons à la répartition des $L(1, \text{sym}^m f)$ en l'aspect de niveau-poids lorsque f parcourt sur $\mathcal{H}_k^*(N)$. Pour décrire précisément la relation entre les valeurs extrêmes de

$L(1, \text{sym}^m f)$ en l'aspect de niveau-poids et les propriétés arithmétiques de N , nous introduisons un ensemble de niveaux : pour une constante positive $\Xi > 0$ et un entier pair $k \geq 2$, on pose

$$\mathbb{N}_k(\Xi) := \{N \in \mathbb{N} : \mu(N)^2 = 1 \text{ et } P^-(N) \geq \Xi \log(kN) \log_2(kN)\},$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius. En raffinant les méthodes de [80, 7, 52], nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème (B). *Soient Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$.*

(i) *Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, en supposant l'HRG pour $L(s, \text{sym}^m f)$, on a*

$$\{1 + o(1)\} (2B_m^- \log_2(kN))^{-A_m^-} \leq L(1, \text{sym}^m f) \leq \{1 + o(1)\} (2B_m^+ \log_2(kN))^{A_m^+} \quad (\text{I.19})$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

(ii) *Il existe $f_m^\pm \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telles que*

$$L(1, \text{sym}^m f_m^\pm) \gtrless \{1 + o(1)\} (B_m^\pm \log_2(kN))^{\pm A_m^\pm} \quad (\text{I.20})$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Ici A_m^\pm et B_m^\pm sont définis par (3.1.13) (voir aussi (3.4.5) ci-dessous) et les constantes impliquées ne dépendent que de Ξ .

2. Première conjecture de Montgomery-Vaughan

Les trois conjectures de Montgomery-Vaughan décrivent précisément les comportements de la fonction de répartition de $L(1, \chi_d)$ autour de leurs valeurs extrêmes [64]. Dans le cas de $L(1, \text{sym}^m f)$, nous pouvons définir la fonction de répartition par

$$F_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) := \frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ L(1, \text{sym}^m f) \gtrless (B_m^\pm t)^{\pm A_m^\pm}}} 1. \quad (\text{I.21})$$

Au vu du Théorème (B), l'analogie de la première conjecture de Montgomery-Vaughan peut être déclaré de la manière suivante.

Conjecture (C). *Pour toute constante $\Xi > 0$ fixée et $m \in \mathbb{N}^*$, il existe trois constantes positives $c_2 > c_1 > c_0 > 0$ dépendant de Ξ et de m telles que*

$$e^{-c_2(\log(kN)/\log_2(kN))} \leq F_{k,N}^\pm(\log_2(kN), \text{sym}^m) \leq e^{-c_1(\log(kN))/\log_2(kN)} \quad (\text{I.22})$$

pour $kN \geq c_0$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Ce problème a été étudié par Lau et Wu [53]. Ils ont prouvé la majoration dans (I.22) pour $N = 1$ et $1 \leq m \leq 4$:

$$F_{k,1}^\pm(\log_2 k, \text{sym}^m) \leq e^{-c_1(\log k)/\log_2 k} \quad (\text{I.23})$$

pour tout entier pair $k \geq c_0$. Pour la minoration dans (I.22), Liu, Royer et Wu [59] ont obtenu un résultat un peu plus faible pour $m = 1$ et $N = 1$: Il existe trois constantes absolues c_3 , c_4 et c_5 telles que

$$F_{k,1}^{\pm}(\log_2 k - \frac{5}{2} \log_3 k - \log_4 k - c_3, \text{sym}^1) \geq \exp\left(-c_4 \frac{\log(kN)}{(\log_2 k)^{7/2} \log_3 k}\right) \quad (\text{I.24})$$

pour $k \geq c_5$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème (D). *Soient Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes positives c_6 et c_7 dépendant de ε et Ξ telles que l'on a*

$$F_{k,N}^{\pm}(\log_2(kN) + \phi, \text{sym}^m) \leq \exp\left(-c_6(|\phi| + 1) \frac{\log(kN)}{\log_2(kN)}\right)$$

pour $kN \geq c_7$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et $\log \varepsilon \leq \phi \leq 9 \log_2(kN)$.

(ii) *Il existe trois constantes positives c_8 , c_9 et c_{10} dépendant de Ξ telles que l'on a*

$$F_{k,N}^{\pm}(\log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - c_8, \text{sym}^m) \geq \exp\left(-\frac{c_9 \log(kN)}{\log_2^2(kN) \log_3(kN)}\right)$$

pour $kN \geq c_{10}$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Nos résultats généralisent et améliorent (I.23) et (I.24) ci-dessus. Pour démontrer le Théorème (D), nous combinerons les méthodes de Lau-Wu [53] et de Liu-Royer-Wu [59] avec celle de Lamzouri [50].

3. Fonctions de répartition pondérées

Motivés par les travaux de Granville-Soundararajan [23] et de Cogdell-Michel [7] et en tenant compte de la formule de trace de Petersson, Liu, Royer et Wu [59] ont introduit les fonctions de répartition pondérées :

$$\mathcal{F}_{k,N}^{\pm}(t, \text{sym}^m) := \frac{1}{\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ L(1, \text{sym}^m f) \geq (B_m^{\pm} t)^{\pm A_m^{\pm}}}} \omega_f. \quad (\text{I.25})$$

En utilisant la méthode du col, ils ont évalué (I.25) pour $N = m = 1$: il existe trois constantes positives \mathcal{A}_1^{\pm} et C telles que pour $k \rightarrow \infty$, on a

$$\mathcal{F}_{k,1}^{\pm}(t, \text{sym}^1) = \{1 + o(1)\} \exp\left(-\frac{e^{t - \mathcal{A}_1^{\pm}}}{t} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\right), \quad (\text{I.26})$$

uniformément pour $t \leq \log_2 k - \frac{5}{2} \log_3 k - \log_4 k - C$, où la constante impliquée est absolue.

Dans [50], Lamzouri a étudié une classe de produits eulériens aléatoires et établi un résultat général [50, Théorème 1]. Comme un corollaire, pour tout $m \geq 1$ ($1 \leq m \leq 4$ inconditionnellement et $m \geq 5$ sous Hypothèse $\text{sym}^m(N)$ de Cogdell et Michel) avec le signe $+$, $k = 2$ et N premier il a obtenu l'évaluation de (I.25) suivante :

$$\mathcal{F}_{2,N}^+(t, \text{sym}^m) = \{1 + o(1)\} \exp\left(-\frac{e^{t - \mathcal{A}_m^+}}{t} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}\right) \quad (\text{I.27})$$

valable uniformément pour tout *nombre premier* N et $t \leq \log_2 N - \log_3 N - 2 \log_4 N$, où la constante \mathcal{A}_m^\pm dépendant de m . La domaine de validité de t est un peu plus large que celui de (I.26), mais le terme d'erreur est un peu plus faible.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème (E). *Soient Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$. Alors, il existe une constante c_{11} dépendant de Ξ telle que l'on a*

$$\mathcal{F}_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) = \{1 + o(1)\} \exp\left(-\frac{e^{t-\mathcal{A}_m^\pm}}{t} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\right)$$

uniformément pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et

$$t \leq \log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - c_{11},$$

où \mathcal{A}_m^\pm sont des constantes ne dépendant que de m définies comme dans le Lemme 3.7.2 ci-dessous, et les constantes impliquées ne dépendent que de Ξ .

D'une part, le Théorème (E) généralise (I.26) de Liu-Royer-Wu et élargie leur domaine de validité. D'autre part, il complète (I.27) de Lamzouri en montrant un résultat similaire pour le cas du signe « $-$ » et améliore son terme d'erreur.

4. Distribution des valeurs propres de Hecke

Pour chaque $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, désignons par $\lambda_f(n)$ la n -ième valeur propre de Hecke de f normalisée. D'après Deligne, il est bien connu que $|\lambda_f(p)| \leq 2$ pour tous les nombres premiers p . Grâce à Mikio Sato et John Tate [87], il existe deux conjectures bien connues concernant la répartition des valeurs propres de Hecke des formes primitives holomorphes.

Conjecture (Version horizontale de la conjecture de Sato-Tate). *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Pour tout $[u, v] \subset [-2, 2]$, on a*

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x, p \nmid N \\ u \leq \lambda_f(p) \leq v}} 1 \sim \int_u^v \sqrt{4-t^2} \frac{dt}{2\pi} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Cette conjecture de Sato-Tate a été démontrée par Barnet-Lamb, Geraghty, Harris et Taylor [4] en 2011.

Conjecture (Version verticale de la conjecture de Sato-Tate). *Soit $p \nmid N$ un nombre premier fixé. Alors pour tout $[u, v] \subset [-2, 2]$, on a*

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ u \leq \lambda_f(p) \leq v}} 1 \sim \int_u^v \frac{p+1}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - t^2} \sqrt{4-t^2} \frac{dt}{2\pi} \quad (kN \rightarrow \infty).$$

Cette conjecture a été prouvée par Conrey, Duke & Farmer (1997) et par Serre (1997), indépendamment.

En 2006, Lau et Wu [52] ont démontré qu'il n'existe pas de version « diagonale » de la conjecture de Sato-Tate (i.e., p et kN tendent vers l'infinie en même temps). En fait ils ont montré que pour tout $A > 0$, il existe trois formes primitives $f_i \in \mathcal{H}_k^*$ ($i = 1, 2, 3$) telles que presque tous $\{\lambda_{f_i}(p)\}_{p \leq (\log k)^A}$ se trouve autour de $-2, 0, 2$, respectivement, lorsque $k \rightarrow \infty$. Un résultat similaire en l'aspect de niveau a été obtenu par Royer et Wu [81] en 2007.

Comme une application de l'assertion (ii) du Théorème (B), nous pouvons généraliser ces résultats en l'aspect de niveau-poids et obtenir un nouveau point d'accumulation à l'aide de la valeur minimale de $L(1, \text{sym}^4 f)$. Précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème (F). *Soit $\xi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ une fonction vérifiant $\xi(t) \leq \log_3 t$. Soit $\Xi > 0$ une constante. Alors il existe des formes $f_{\pm}, g, h \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telles que pour tout $A > 0$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ |\lambda_{f_{\pm}}(p) \mp 2| \leq \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} &= \log_3(kN) \left\{ 1 + O_{A,\Xi} \left(\frac{1}{\xi(kN)} \right) \right\}, \\ \sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ |\lambda_g(p)| \leq \{\xi(kN)/\log_3(kN)\}^{1/2}}} \frac{1}{p} &= \log_3(kN) \left\{ 1 + O_{A,\Xi} \left(\frac{1}{\xi(kN)} \right) \right\}, \\ \sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ |\lambda_h(p)^2 - \frac{3}{2}| \leq \{\xi(kN)/\log_3(kN)\}^{1/2}}} \frac{1}{p} &= \log_3(kN) \left\{ 1 + O_{A,\Xi} \left(\frac{1}{\xi(kN)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Pour de telles formes f_m^{\pm} , on peut prouver que presque tous les $\{\lambda_{f_m^{\pm}}(p)\}$ se rassemblent autour quelques points mais pas de façon équi-distribués pour $p \leq (\log(kN))^A$ lorsque $kN \rightarrow \infty$. Nos résultats montrent que, pour $x = (\log(kN))^A$, la Conjecture de Sato-Tate ne se vérifie pas lorsque $kN \rightarrow \infty$.

Chapitre 1

Formes modulaires et fonctions L automorphes

1.1 Formes modulaires

Le but des sections suivantes est de rappeler les résultats connus concernant les formes modulaires dont nous aurons besoin dans la suite. La présentation qui est donnée ici peut être trouvée dans [37], [38] et [55].

1.1.1 Espace de formes modulaires

Dans tout ce rapport, \mathbb{H} désigne le demi-plan complexe de Poincaré

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

Comme d'habitude, on note $GL(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices à coefficients entiers d'ordre 2×2 inversibles et on note $SL(2, \mathbb{Z}) \subseteq GL(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe dont les déterminants sont égaux à 1. Pour chaque entier positif N , on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{Z}) : N|c \right\}.$$

Avec cette convention, $\Gamma_0(1) = SL(2, \mathbb{Z})$, et l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans le groupe modulaire est

$$\nu(N) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

et la fonction ν est multiplicative. La groupe $\Gamma_0(N)$ agit sur \mathbb{H} par

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

On appelle *domaine fondamental* de $\Gamma_0(N)$ tout ouvert $\mathcal{D}_0(N)$ connexe de \mathbb{H} tel que :

- pour tout z dans \mathbb{H} , il existe γ dans $\Gamma_0(N)$ tel que γz soit dans $\overline{\mathcal{D}_0(N)}$,

— s'il existe γ dans $\Gamma_0(N)$ tel que $z' = \gamma z$ avec z' et z dans $\mathcal{D}_0(N)$ alors $z = z'$.

Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, on introduit la fonction

$$j_g(z) = cz + d.$$

Il satisfait à la règle en chaîne

$$j_{gh}(z) = j_g(hz)j_h(z).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $g \in GL(2, \mathbb{R})$, l'opérateur 'slash' $|g$ est défini sur les fonctions $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$(f|g)(z) = (\det g)^{k/2} j_g(z)^{-k} f(gz).$$

Définition 1.1.1. Soient $k \geq 2$ un entier, $N \geq 1$ un entier positif et $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un caractère de Dirichlet. On appelle *forme modulaire* de poids k , de niveau N et de caractère ν , toute fonction f holomorphe sur \mathbb{H} vérifiant la relation suivante

$$f|_\gamma(z) = \bar{\nu}(a)f(z)$$

pour tout élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. De plus on dit que f est *parabolique* si la fonction $z \mapsto (\operatorname{Im} z)^{k/2} f(z)$ est bornée sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} .

Remarque 1. En appliquant $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ à la définition de la forme modulaire, on obtient

$$(-1)^k f(z) = \bar{\nu}(-1)f(z).$$

Alors, on peut supposer désormais

$$\nu(-1) = (-1)^k.$$

En particulier, on peut choisir k un nombre pair lorsque ν est un caractère trivial.

D'ores et déjà, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $e(\alpha) = e^{2\pi\alpha i}$. Chaque forme modulaire f est une fonction 1-périodique et holomorphe sur \mathbb{H} . à ce titre, il admet un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz).$$

De plus, si f est une forme parabolique, on a $\widehat{f}(0) = 0$.

On désigne alors par $S_k(N, \nu)$ l'ensemble des formes paraboliques de poids k , de niveau N et de caractère ν . Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie sur lequel on définit un produit hermitien, appelé *produit scalaire de Petersson*, en posant

$$\langle f, g \rangle_N = \int_{\mathcal{D}_0(N)} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2} \quad \text{avec } z = x + iy,$$

où $\mathcal{D}_0(N)$ désigne un domaine fondamental de $\Gamma_0(N)$. La condition de modularité et l'invariance de la mesure $dx dy / y^2$ par homographie permettent de vérifier que cette intégrale ne dépend pas du choix du domaine fondamental.

Soit q^* le conducteur du caractère ν . On prend les entiers positifs q et ℓ tels que $q^* \mid q$ et $\ell q \mid N$ et on désigne par $\nu' \pmod{q}$ le caractère de Dirichlet induit par ν . Alors pour toute forme $f \in S_k(q, \nu')$, il est facile de vérifier que la fonction $z \mapsto f(\ell z)$ est une forme parabolique de poids k , de niveau N et de caractère ν , c'est-à-dire que $f(\ell z) \in S_k(N, \nu)$. De telles formes s'appellent des *formes anciennes* de poids k , de niveau N et de caractère ν . L'espace engendré par de telles formes est appelé l'espace des formes anciennes, noté par $S_k^{\text{a}}(N, \nu)$. Son orthogonal pour le produit scalaire de Petersson est l'espace des *formes nouvelles*, noté par $S_k^{\text{n}}(N, \nu)$. Ainsi nous avons la décomposition

$$S_k(N, \nu) = S_k^{\text{a}}(N, \nu) \oplus S_k^{\text{n}}(N, \nu).$$

1.1.2 Opérateurs de Hecke et d'Atkin-Lehner-Li

Pour tout entier n strictement positif, on définit l'opérateur de Hecke $T_n : S_k(N, \nu) \rightarrow S_k(N, \nu)$ par

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{ad=n} \nu(a) a^k \sum_{b \pmod{d}} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Les opérateurs de Hecke vérifient les propriétés fondamentales suivantes :

i) Les opérateurs de Hecke commutent deux à deux :

$$T_m T_n = T_n T_m$$

pour tous entiers $m, n \geq 1$.

ii) Les opérateurs de Hecke vérifient la relation de multiplicativité :

$$T_m T_n = \sum_{d \mid (m, n)} \nu(d) d^{k-1} T_{mn/d^2} \quad (1.1.1)$$

pour tous entiers $m, n \geq 1$. En particulier, on a

$$T_m T_n = T_{mn} \quad \text{si } (m, n) = 1.$$

iii) Pour $(n, N) = 1$, l'adjoint de T_n est $T_n^* = \bar{\nu}(n) T_n$:

$$\langle T_n f, g \rangle = \nu(n) \langle f, T_n g \rangle,$$

pour tous $f, g \in S_k(N, \nu)$.

iv) Le sous-espace $S_k^{\text{a}}(N, \nu)$ (resp. $S_k^{\text{n}}(N, \nu)$) est stable par rapport aux opérateurs T_n avec $(n, N) = 1$.

Soit Q un diviseur de N tel que $Q \parallel N$. On écrit $\nu = \nu_Q \nu_{N/Q}$ où $\nu_Q, \nu_{N/Q}$ sont caractères modulo $Q, N/Q$ respectivement. On définit l'opérateur d'Atkin-Lehner-Li $W_Q : S_k(N, \nu_Q \nu_{N/Q}) \rightarrow S_k(N, \bar{\nu}_Q \nu_{N/Q})$ par

$$W_Q = \begin{pmatrix} Qa & b \\ Nc & Qd \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \equiv 1 \pmod{N/Q}$, $b \equiv 1 \pmod{Q}$ et $\det W_Q = Q$. Il est facile de voir qu'un tel triplet (a, b, d) existe et la définition de W_Q est indépendante du choix de (a, b, d) . Ces opérateurs sont multiplicatifs : si $Q_1 \parallel N$, $Q_2 \parallel N$ et $(Q_1, Q_2) = 1$, alors

$$W_{Q_1 Q_2} = W_{Q_1} W_{Q_2}.$$

Proposition 1.1.2. *Soit $f \in S_k(N, \nu)$. Q, Q' sont diviseurs de N tels que $(Q, N/Q) = 1$ et $(Q', QN/Q') = 1$. Soit p un nombre premier non divisant N . Alors on a*

1. $f|W_Q \in S_k(N, \bar{\nu}_Q \nu_{N/Q})$ et $f|W_Q|W_Q = \nu_Q(-1)\bar{\nu}_{N/Q}(Q)f$.
2. $f|T_p|W_Q = \nu_Q(p)f|W_Q|T_p$.
3. $f|W_Q|W_{Q'} = \bar{\nu}_{Q'}(Q)f|W_{QQ'}$ et en particulier $f|W_Q|W_{Q'} = \bar{\nu}_{Q'}(Q)\nu_Q(Q')f|W_{Q'}|W_Q$.

Démonstration. La proposition peut être vérifiée par un calcul direct. \square

L'involution de Fricke W définie par

$$w = \begin{pmatrix} & -1 \\ N & \end{pmatrix}$$

(cf. [1]), i.e.

$$Wf = (f|w)(z) = N^{-k/2} z^{-k} f(-1/Nz),$$

appartient à la classe dans quel sens des opérateurs d'Atkin-Lehner (voir [1]) et est isométrique, i.e. on a l'égalité

$$\langle Wf, Wg \rangle = \langle f, g \rangle$$

pour $f, g \in S_k(N, \nu)$. De manière à ramener le caractère $\bar{\nu}$ à ν , on compose W avec l'opérateur conjuguaison complexe K définie par

$$(Kf)(z) = \bar{f}(-\bar{z}).$$

Nous définissons

$$\bar{W} = KW.$$

On montre que les fonctions propres de Hecke $f \in S_k(N, \nu)$, sont de même des fonctions propres de l'opérateur d'involution \bar{W} et les valeurs propres associées sont des nombres complexes de module 1.

Enfin, on définit les opérateurs B_d et U_d par

$$\begin{aligned} B_d f &= d^{-k/2} f|B_d, \\ U_d f &= d^{k/2-1} f| \sum_{u \pmod{d}} U_d, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

pour un entier positif d et où on a écrit B_d et U_d les matrices

$$B_d = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_d = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1.3. *Soit M un nombre entier. Si $Q|MN$ et $(Q, MN/Q) = 1$, alors pour $f \in S_k(N, \nu_Q \nu_{N/Q})$, on a*

$$f|B_M|W_Q = \begin{cases} \bar{\nu}_Q(M)f|W_Q|B_M & \text{si } (M, Q) = 1, \\ M^{-k/2} \bar{\nu}_{N/Q}(M)f|W_{Q/M} & \text{si } M|Q. \end{cases}$$

1.1.3 Formes primitives et coefficients de Fourier

On appelle *formes primitives* les fonctions propres de tous les opérateurs de Hecke T_n dans l'espace des formes nouvelles $S_k^{\natural}(N, \nu)$. En effet, grâce à la propriété iv de l'opérateur de Hecke dans la section dernière, les deux espaces $S_k^{\flat}(N, \nu)$ et $S_k^{\natural}(N, \nu)$ ont une base orthonormale se composant des fonctions propres des opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$. Les *formes primitives* sont celle de l'espace $S_k^{\natural}(N, \nu)$. Grâce au principe 'multiplicity-one', on peut ôter la restriction $(n, N) = 1$. On note $\mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ (resp. $\mathcal{H}_k^*(N)$) l'ensemble des formes primitives de poids k , de niveau N et de caractère ν (resp. de caractère trivial).

Par commodité, on dit que deux formes paraboliques sont *équivalentes* s'ils sont fonctions propres des opérateurs de Hecke T_p avec les mêmes valeurs propres pour presque tous les nombres premiers p .

Une forme primitive quelconque $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ est une fonction 1-périodique et holomorphe sur le demi-plan complexe \mathbb{H} et donc admet un développement en série de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz),$$

et pour laquelle on note $\widehat{f}(n) n^{\frac{k-1}{2}}$ la valeur propre associée à l'opérateur T_n .

Pour $(n, N) = 1$ et $f, g \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, on a

$$\langle T_n f, g \rangle = \nu(n) \langle f, T_n g \rangle.$$

En posant $f = g$, on obtiens

$$\lambda_f(n) = \nu(n) \bar{\lambda}_f(n), \quad (n, N) = 1.$$

En particulier, lorsque ν est un caractère trivial, $\lambda_f(n) \in \mathbb{R}$ pour tout $(n, N) = 1$.

On déduit que pour tout entier n non nul,

$$\widehat{f}(n) = \lambda_f(n) \widehat{f}(1).$$

Alors on peut normaliser f en posant $\widehat{f}(1) = 1$. Grâce à l'équation (1.1.1), pour tous entiers $m, n \geq 1$, on a

$$\lambda_f(m) \lambda_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \nu(d) \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad (1.1.3)$$

ou de manière équivalente

$$\lambda_f(mn) = \sum_{d|(m,n)} \nu(d) \mu(d) d^{k-1} \lambda_f(m/d) \lambda_f(n/d).$$

En particulier la fonction $n \mapsto \lambda_f(n)$ est multiplicative :

$$\lambda_f(m) \lambda_f(n) = \lambda_f(mn) \quad \text{si } (m, n) = 1.$$

Par ailleurs, les opérateurs d'Atkin-Lehner-Li préservent les formes primitives de niveau N , c'est à dire que pour chaque diviseur $Q \parallel N$ et une forme primitive normalisée $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, on a

$$f|W_Q = \lambda_Q(f) f' \quad (1.1.4)$$

où $f' \in \mathcal{H}_k^*(N, \bar{\nu}_Q \nu_{N/Q})$ et la constante $\lambda_Q(f)$ est un nombre complexe de module 1. En particulier, on a $f' = f$ lorsque $N = Q$. Faisant rappel à la Proposition 1.1.2, on a

$$\lambda_Q(f)\lambda_Q(f') = \nu_Q(-1)\bar{\nu}_{N/Q}(Q).$$

Et pour toute forme primitive $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, il existe un nombre complexe η_f tel que

$$\bar{W}f = \eta_f f \quad \text{avec} \quad |\eta_f| = 1. \quad (1.1.5)$$

Proposition 1.1.4 (cf.[1, 54]). *Soient $f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz)$ une forme primitive normalisée de poids k , de niveau N et de caractère ν et q un nombre premier divisant N . On a*

- i) $|\lambda_f(q)| = 1$ si ν n'est pas un caractère modulo N/q ;
- ii) si ν est un caractère modulo N/q , $\lambda_f(q)^2 = \nu(q)q^{-1}$ lorsque $q^2 \nmid N$ et $\lambda_f(q) = 0$ sinon.

Proposition 1.1.5 (Deligne(1974)). *Si $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, alors pour chaque nombre premier $p \nmid N$, il existe deux nombres complexes $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$ vérifiant*

$$|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1$$

et

$$\alpha_f(p)\beta_f(p) = \nu(p)$$

tels que pour tout nombre entier $r \geq 0$

$$\lambda_f(p^r) = \alpha_f(p)^r + \alpha_f(p)^{r-1}\beta_f(p) + \cdots + \beta_f(p)^r. \quad (1.1.6)$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$ on a

$$|\lambda_f(n)| \leq \tau(n) \quad (\text{l'inégalité de Deligne}), \quad (1.1.7)$$

où $\tau(n)$ est la fonction « nombre de diviseurs ».

Pour la valeur moyenne de $\lambda_f(n)$, on a l'orthogonalité de Selberg (voir e.g. [77], voir aussi [14])

$$\sum_{p \leq x} \frac{\lambda_f(p)^2}{p} = \log_2 x + O(1) \quad (x \geq 3). \quad (1.1.8)$$

1.1.4 Formule de trace

Les formules de traces évaluent des sommes des valeurs propres d'opérateur de Hecke. Elles jouent un rôle important dans les applications. Elles annoncent les relations 'd'orthogonalité' entre ces valeurs.

On définit le *facteur harmonique* par

$$\hat{w}_f = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1} \|f\|_N^2}$$

et le symbole diagonal $\delta(m, n)$ par

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

La formule de Peterson affirme

Théorème 1.1.6. *Soient $k \geq 2$, $N \geq 1$ et ν un caractère modulo N . Soit $B_k(N, \nu)$ une base orthogonale quelconque des formes paraboliques $S_k(N, \nu)$. Pour des entiers strictement positifs m, n on a*

$$\sum_{f \in B_k(N, \nu)} \hat{w}_f \widehat{f}(m) \overline{\widehat{f}(n)} = \delta(m, n) + 2\pi i^{-k} \sum_{\substack{c > 0 \\ c \equiv 0 \pmod{N}}} c^{-1} S_\nu(m, n; c) J_{k-1} \left(\frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right),$$

où $\delta(m, n)$ dénote le symbole diagonal. Ici, $S_\nu(m, n; c)$ est la somme de Kloosterman avec caractère ν définie par

$$S_\nu(m, n; c) = \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ (d, c) = 1}} \nu(d) e \left(\frac{md + nd}{c} \right)$$

avec $d\bar{d} \equiv 1 \pmod{c}$ et J_{k-1} est la fonction de Bessel d'ordre $k-1$ définie par

$$J_{k-1}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! \Gamma(\ell + k)} \left(\frac{x}{2} \right)^{k-1+2\ell}.$$

Remarque 2.

1. On doit prendre une base orthogonale de toutes les formes de $S_k(N, \nu)$ et pas uniquement des formes nouvelles. On peut également choisir une base orthogonale composée par les fonctions propres des opérateurs de Hecke.
2. La preuve repose sur le fait qu'on peut exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction du produit de Petersson de f contre des séries dites de Poincaré qui engendrent $S_k(N, \nu)$. On trouve les détails dans [37, Section 3.3].

Dans la plupart des cas, nous avons besoin de la somme des coefficients sur les formes primitives. En appliquant Théorème 1.1.6 en cas de ν *trivial*, Iwaniec, Luo et Sarnak [39] montrent

Théorème 1.1.7 (Iwaniec-Luo-Sarnak). *Soient N un entier sans facteurs carrés. Soit m et n deux entiers strictement positifs tels que $(m, N) = 1$ et $(n, N^2) \mid N$. Alors*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \lambda_f(m) \lambda_f(n) = \delta(m, n) + O(k^{-5/6} (mn)^{1/4} \varphi(N)^{-1} (n, N)^{-1/2} \tau^2(N) \tau_3((m, n)) \log 2mnN),$$

où

$$\omega_f = \frac{N}{\varphi(N)} \hat{w}_f = \frac{\Gamma(k-1)N}{(4\pi)^{k-1} \varphi(N) \|f\|_N^2} \quad (1.1.9)$$

et τ et τ_3 sont les fonctions diviseurs et la constante impliquée est absolue.

Remarque 3.

1. En fait, lorsque f est une forme primitive de poids k et de niveau N (sans facteurs carrés) et de caractère trivial, on peut exprimer $\|f\|_N^2$ par

$$\|f\|_N^2 = \frac{(4\pi)^{1-k}\Gamma(k)N}{2\pi^2} L(1, \text{sym}^2 f),$$

où $L(s, \text{sym}^2 f)$ est la fonction L symétrique définie dans la section 1.2.2. Alors, il s'ensuit que

$$\omega_f = \frac{2\pi^2}{(k-1)\varphi(N)L(1, \text{sym}^2 f)}. \quad (1.1.10)$$

2. En appliquant le Théorème (A) avec $m = n = 1$, on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f = 1 + O(k^{-5/6}\varphi(N)^{-1}\tau^2(N) \log 2N).$$

Ils montrent aussi

Théorème 1.1.8. *Soient N un entier sans facteurs carrés et n un entier strictement positif tel que $(n, N^2) \mid N$. Alors*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \lambda_f(n) = \frac{k-1}{12} \frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}} \delta_{(n,N)=1}^{\square} + O((n, N)^{-1/2} n^{1/6} (kN)^{2/3})$$

où le terme $\delta_{(n,N)=1}^{\square} = 1$ si n est un nombre carré et $(n, N) = 1$ et $\delta_{(n,N)=1}^{\square} = 0$ sinon. Ici, la constante impliquée est absolue.

D'où on déduit une formule asymptotique pour le nombre des formes primitives.

Corollaire 1.1.9. *Soient N un entier sans facteurs carrés et k un nombre pair. Alors*

$$|\mathcal{H}_k^*(N)| = \frac{k-1}{12} \varphi(N) + O((kN)^{2/3}).$$

1.1.5 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x,$$

$$2xU_n(x) = U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x).$$

Lorsque $x \in [-1, 1]$, nous pouvons aussi définir les polynômes de Tchebychev par les relations trigonométriques

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

On a en particulier pour les U_ν la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)y^n = (1 - 2xy + y^2)^{-1}.$$

Les polynôme de Tchebychev $U_\nu(x)$ forme une base orthogonale de l'espace $\mathcal{L}^2([0, \pi], \mu_{ST})$ muni par la mesure Sato-Tate

$$\mu_{ST} = 2\pi^{-1}(\sin \theta)^2 d\theta.$$

Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, en faisant appel à (1.1.3) et posant $\lambda_f(p) = 2 \cos \theta$ pour $p \nmid N$ et $\theta \in [0, \pi]$, on obtient

$$\lambda_f(p^n) = U_n \left(\frac{\lambda_f(p)}{2} \right) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}. \quad (1.1.11)$$

1.2 Fonctions L

Dans cette deuxième section on rappelle les résultats connus concernant les fonctions L de formes modulaires dont on aura besoin. Le présentation donnée ici correspond au Chapitre 5 de [38].

Dans toute la suite, $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ désigne une forme primitive normalisée de poids k , de niveau N et de caractère ν avec $\lambda_f(1) = 1$.

1.2.1 Fonctions L automorphes

La fonction L automorphe associée à $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

Elle admet un produit eulérien

$$L(s, f) = \prod_{q|N} (1 - \lambda_f(q)q^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid N} (1 - \alpha_f(p)p^{-s})^{-1} (1 - \beta_f(p)p^{-s})^{-1},$$

où p et q désignent les nombres premiers. Il s'agit d'une fonction L de degré 2 qui se prolonge en une fonction entière et dont la fonction complétée est donnée par

$$\Lambda(s, f) = \left(\frac{\sqrt{N}}{\pi} \right)^s \Gamma \left(\frac{s + \frac{k-1}{2}}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s + \frac{k+1}{2}}{2} \right) L(s, f),$$

ou de la forme

$$\Lambda(s, f) = \left(\frac{2^k}{8\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma \left(s + \frac{k-1}{2} \right) L(s, f),$$

grâce à la formule de duplication de la fonction gamma.

Cette fonction peut être prolongée analytiquement sur \mathbb{C} et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s, f) = \varepsilon_f \overline{\Lambda(1 - \bar{s}, f)} \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (1.2.1)$$

où $|\varepsilon_f| = 1$. On peut calculer ε_f par la relation

$$\varepsilon_f = i^k \bar{\eta}_f,$$

où η_f est la valeur propre de l'opérateur d'involution \bar{W} définie par (1.1.5).

En particulier, si χ est un caractère réel, une forme primitive f a des coefficients de Fourier réels et est une fonction propre de W , autrement dit

$$Wf = \pm i^k f,$$

puis l'équation fonctionnelle (1.2.1) devient

$$\Lambda(s, f) = \pm \Lambda(1 - s, f). \quad (1.2.2)$$

Il apparaît que la fonction $L(s, f)$ s'annule pour tous les nombres de la forme $-n - \frac{k-1}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ces zéros sont appelés *les zéros triviaux*. On appelle *bande critique* la région du plan complexe définie par $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re s < 1\}$. Il existe donc une infinité de zéros dans la bande critique mais, actuellement, on ne sait pas exactement où. l'hypothèse de Riemann généralisée (HRG) affirme qu'ils sont tous de partie réelle 1/2. Bien que ne sachant pas les situer précisément, le principe de l'argument nous permet de les compter. On désigne par $N(T, f)$ le nombre de zéros de $L(s, f)$ dans la bande critique et de partie imaginaire comprise entre 0 et T .

Théorème 1.2.1. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. Tous les zéros ρ de $\Lambda(s, f)$ sont dans la bande critique $0 < \Re s < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{\rho} |\rho|^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. Il existe deux constantes $A = A(f)$ et $B = B(f)$ telles que*

$$\Lambda(s, f) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho},$$

où ρ parcourt tous les zéros de $\Lambda(s, f)$. Alors,

$$-\frac{L'}{L}(s, f) = \log \sqrt{N} - \log(2\pi) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(s + \frac{k-1}{2}\right) - B - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \quad (1.2.3)$$

Démonstration. La première expression est juste une application de Théorème Factorisation de Hadamard pour les fonctions entières d'ordre fini. L'expression (1.2.3) découle en faisant une dérivation logarithme. \square

Théorème 1.2.3. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. On dénote $\rho = \beta + i\gamma$ des zéros de $\Lambda(s, f)$.*

i) Le nombre des zéros vérifiant $|\gamma - T| < 1$, noté par $m(T, f)$, satisfait

$$m(T, f) \ll \log N(|T| + k)$$

avec une constante impliquée absolue.

ii) Pour tout $s = \sigma + i\tau$ dans la bande verticale $-\frac{1}{2} < \sigma < 2$, on a

$$\frac{L'}{L}(s, f) \ll \log(N|\tau| + k + 3) + \sum_{|s-\rho|<1} \frac{1}{s-\rho} + \sum_{|s+\kappa_j|<1} \frac{1}{s+\kappa_j},$$

avec $\kappa_j = \frac{k \pm 1}{2}$, $j = 1, 2$ et une constante impliquée absolue.

iii)

$$N(T, f) = \frac{T}{\pi} \log \frac{NT^2}{(2\pi e)^2} + O(\log N(|T| + k + 3)),$$

où la constante impliquée est absolue.

En utilisant (1.2.1) et la principe de Lindelöf-Phragmén, on peut facilement obtenir la borne de convexité suivante.

Théorème 1.2.4. Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$L(\sigma + i\tau, f) \ll_{\varepsilon} (k^2 N(|\tau|^2 + 1))^{\max\{(1-\sigma)/2, 0\} + \varepsilon}, \quad (\sigma \geq 0),$$

où la constante impliquée ne dépend que de ε .

1.2.2 Fonctions L de puissances symétriques

La construction des fonctions L de puissance symétrique permet d'obtenir des fonctions L de n'importe quel degré $d \geq 2$ à partir d'une forme primitive.

Soit m un entier strictement positif. Soit f une forme primitive de poids k , de niveau N et de caractère ν . On rappelle $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$ sont définis comme à (1.1.6) pour $p \nmid N$. Et on pose $\alpha_f(p) = \lambda_f(p)$ et $\beta_f(p) = 0$ pour $p \mid N$. Alors, la fonction L de puissance symétrique d'ordre m associée à f est définie par

$$L(s, \text{sym}^m f) := \prod_p \prod_{0 \leq j \leq m} (1 - \alpha_f(p)^{m-j} \beta_f(p)^j p^{-s})^{-1}, \quad (1.2.4)$$

pour $\Re s > 1$. Le produit sur les nombres premiers admet une série de Dirichlet : pour $\Re s > 1$,

$$L(s, \text{sym}^m f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\text{sym}^m f}(n) n^{-s},$$

où $\lambda_{\text{sym}^m f}(n)$ est une fonction multiplicative. Et grâce aux définitions des $\alpha_f(n)$ et $\beta_f(n)$, on a pour $n \geq 1$,

$$|\lambda_{\text{sym}^m f}(n)| \leq d_{m+1}(n), \quad (1.2.5)$$

où $d_{m+1}(n)$ est la fonction diviseur dont la série de Dirichlet associée est $\zeta(s)^{m+1}$ ($\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann). Lorsque $m = 1$, c'est l'inégalité de Deligne (1.1.7).

Grâce à [7, Section 3.21], les facteurs gamma de $L(s, \text{sym}^m f)$ sont

$$L_\infty(s, \text{sym}^m f) := \begin{cases} \prod_{u=0}^n \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \left(u + \frac{1}{2}\right)(k-1)\right) & \text{si } m = 2n + 1, \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \delta_{2 \nmid n}) \prod_{u=1}^n \Gamma_{\mathbb{C}}(s + u(k-1)) & \text{si } m = 2n, \end{cases}$$

où

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \quad (1.2.6)$$

et

$$\delta_{2 \nmid n} := \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \nmid n, \\ 0 & \text{si } 2 \mid n. \end{cases}$$

Pour $m = 1, 2, 3, 4$ (voir [37] pour $m = 1$, [17] pour $m = 2$ et [46, 47, 48] pour $m = 3, 4$), la fonction complétée

$$\Lambda(s, \text{sym}^m f) := N^{ms/2} L_\infty(s, \text{sym}^m f) L(s, \text{sym}^m f)$$

se prouve être entière et satisfaire l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, \text{sym}^m f) = \varepsilon_{\text{sym}^m f} \Lambda(1-s, \text{sym}^m f) \quad (1.2.7)$$

avec $|\varepsilon_{\text{sym}^m f}| = 1$.

Alors $L(s, \text{sym}^m f)$ est une fonction L de degré $m + 1$. Pour de plus grandes valeurs de m , nous ne disposons que de résultats partiels.

à l'aide de l'équation fonctionnelle (1.2.7), on peut évaluer la borne de convexité suivante.

Proposition 1.2.5. *Soient $m = 1, 2, 3, 4$ et $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. Pour $0 < \sigma \leq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a*

$$L(s, \text{sym}^m f) \ll_\varepsilon \begin{cases} N^{\frac{m(1-\sigma)}{2} + \varepsilon} (k + |\tau|)^{([m/2]+1)(1-\sigma) + \varepsilon} & \text{si } 2 \nmid m, \\ N^{\frac{m(1-\sigma)}{2} + \varepsilon} (1 + |\tau|)^{(1-\sigma)/2} (k + |\tau|)^{[m/2](1-\sigma) + \varepsilon} & \text{si } 2 \mid m, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

où la constante impliquée ne dépend que ε . $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière.

D'après (1.2.4), on écrit la série Dirichlet de dérivée logarithmique

$$-\frac{L'}{L}(s, \text{sym}^m f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s} \quad (1.2.9)$$

pour $\Re s = \sigma > 1$, où

$$\Lambda_{\text{sym}^m f}(n) = \begin{cases} \alpha_f(p)^{m\nu} \log p & \text{si } n = p^\nu \text{ et } p \mid N, \\ [\alpha_f(p)^{m\nu} + \alpha_f(p)^{(m-2)\nu} + \dots + \alpha_f(p)^{-m\nu}] \log p & \text{si } n = p^\nu \text{ et } p \nmid N, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Il est clair que $|\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)| \leq (m+1) \log n$ pour $n > 1$.

1.3 Formes primitives tordues par des caractères

Soit f une forme primitive de poids k , de niveau N et de caractère ν . Soit χ un caractère primitive de conducteur M . On définit un ‘twist’ de f par

$$f_\chi(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) \chi(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Est-ce que f_χ est une forme primitive? Si M et N sont premiers entre eux, f_χ est une forme primitive de poids k , de niveau NM^2 et de caractère $\nu\chi^2$. Mais ce n’est pas vrai toujours lorsque M n’est pas premier avec N . C’est une question intéressante. Weil [94], Atkin et Lehner [1], et Winnie Li [2, 55] ont fait des études sur ce problème.

Soit q un nombre premier. On dit que Q est q -primaire si Q est une puissance de q . Si $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ n’est pas un twist d’une forme primitive de niveau $N' < N$ par un caractère de conducteur q -primaire, on dit que f est q -primitive.

évidemment, f est q -primitive pour tout $q \nmid N$. Si $q \mid N$ et $\lambda_f(q) \neq 0$, f est q -primitive. De plus, si f est q -primitive de niveau N , $q \mid N$ et $\lambda_f(q) = 0$, tous les twists f_χ de f par les caractères χ de conducteurs q -primaire sont des formes primitives de niveau au moins N .

On note $S_M = \begin{pmatrix} M & 1 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ la translation de $1/M$ et on définit

$$R_\chi(M) = \sum_{u \bmod M} \bar{\chi}(u) S_M^u.$$

Lorsque χ est un caractère de conducteur M , on a

$$f|R_\chi = f|R_\chi(M) = g(\bar{\chi})f_\chi,$$

où $g(\bar{\chi})$ est la somme de Gauss de $\bar{\chi}$ définie par

$$g(\bar{\chi}) = \sum_{a=1}^M \bar{\chi}(a) e^{2\pi i a/M}.$$

Atkin et Li [2] ont fait les études des twists et montré les théorèmes suivants.

Théorème 1.3.1. *Soit $q \mid N$ un nombre premier et $Q \parallel N$ un facteur q -primaire. On écrit $N = QM$. Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$ avec $\text{cond } \nu_Q = q^\alpha$, $\alpha \geq 0$. Soit χ un caractère de conducteur q^β , $\beta \geq 1$. On pose $Q' = \max(Q, q^{\alpha+\beta}, q^{2\beta})$. Alors,*

- Pour chaque $q' \mid M$, f_χ n’est pas de niveau $Q'M/q'$.
- Le niveau exact de f_χ est $Q'M$ à condition que (i) $\max(q^{\alpha+\beta}, q^{2\beta}) < Q$ si $Q' = Q$, ou (ii) $\text{cond } \nu_Q \chi = \max(q^\alpha, q^\beta)$ si $Q' > Q$.

Théorème 1.3.2. *Soit $q \mid N$ un nombre premier et $Q \parallel N$ un facteur q -primaire. écrit $N = QM$. Soit χ un caractère de conducteur égal à une puissance de q . Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$. Alors, il existe une forme primitive $g \in \mathcal{H}_k^*(Q'M, \nu\chi^2)$, où Q' est une puissance de q , telle que*

$$f_\chi = g - g|U_q|B_q.$$

Ici, U_q et B_q sont définis par (1.1.2).

Corollaire 1.3.3. f_χ est une forme primitive si et seulement si $\text{cond } \nu_Q \chi^2 < Q'$ et $q^2 \mid Q'$.

Le twist f_χ est étroitement lié à la coefficient $\lambda_f(q)$. En faisant rappel à la Proposition 1.1.4, pour $\lambda_f(q) \neq 0$, on a les théorèmes suivants.

Théorème 1.3.4. Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, $q \mid N$ un nombre premier et $Q \parallel N$ est un facteur q -primaire. On écrit $N = QM$. Soit χ un caractère non trivial de conducteur q -primaire. Si $Q = q$ et ν_Q est trivial. Alors, f_χ est une forme primitive de niveau $Q'_\chi M$, où

$$Q'_\chi = \max(Q, (\text{cond } \nu_Q)(\text{cond } \chi), (\text{cond } \chi)^2).$$

Théorème 1.3.5. Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N, \nu)$, $q \mid N$ un nombre premier et $Q \parallel N$ est un facteur q -primaire. écrit $N = QM$. Soit χ un caractère de conducteur q -primaire Q'' . Si $\text{cond } \nu_Q = Q$ et $Q'' < Q$. Alors, f_χ est une forme primitive de poids k , de niveau NQ'' et de caractère $\nu\chi^2$.

Pour le cas $\lambda_f(q) = 0$, il est important d'étudier si f est q -primitive. Lorsque f est une forme q -primitive avec $\lambda_f(q) = 0$, la représentation locale admissible irréductible $\pi_q(f)$ correspondante à f à la place q est supercuspidale. Et réciproquement, si $\pi_q(f)$ est supercuspidale, f est un twist d'une forme primitive normalisée.

Théorème 1.3.6. Si $\text{cond } \nu_Q = q^\alpha > \sqrt{Q}$ et $\lambda_f(q) = 0$, f n'est pas q -primitive. De plus, il existe un caractère χ de conducteur Q/q^α et $G \in \mathcal{H}_k^*(q^\alpha M, \nu\bar{\chi}^2)$ tels que $f = G_\chi$.

Corollaire 1.3.7. Si f est q -primitive et $\lambda_f(q) = 0$, on a $\text{cond } \nu_Q \leq \sqrt{Q}$.

Théorème 1.3.8. Si Q n'est pas un carré et $\text{cond } \nu_Q \leq \sqrt{Q}$, f est q -primitive.

1.4 Fonctions L de Rankin-Selberg

On fixe deux formes primitives normalisées

$$f_i(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_{f_i}(n) n^{\frac{k_i-1}{2}} e(nz), \quad i = 1, 2$$

de poids k_i , de niveaux N_i , et de caractères ν_i . Dénote $\varepsilon = \nu_1 \bar{\nu}_2$, qui est un caractère modulo N , le plus petit commun multiple de N_1 et N_2 , autrement dit, $N = [N_1, N_2]$.

En accord avec la théorie de Rankin-Selberg, on considère les séries L convolutées associées à f et g de Rankin-Selberg :

$$L(s, f_1 \times f_2) = L(2s, \varepsilon) \sum_{n \geq 1} \lambda_{f_1}(n) \overline{\lambda_{f_2}(n)} n^{-s}, \quad (1.4.1)$$

où $L(s, \varepsilon)$ est la fonction L de Dirichlet définie par

$$L(s, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon(n) n^{-s} \quad \Re s > 1.$$

On écrit $N = MM'M''$ où M est le conducteur de ε , $q \mid M'$ si et seulement si $q \mid M$ et $(M'', MM') = 1$. On dénote par $\nu_{i,q}, \nu_{i,N_i/Q_i}$ les caractères de module $Q_i, N/Q_i$ respectivement tels que $\nu_i = \nu_{i,q}\nu_{i,N_i/Q_i}$. Alors, $\nu_{1,q} \neq \nu_{2,q}$ si $q \mid M'$; $\nu_{1,q} = \nu_{2,q}$ si $q \mid M''$. Dans le deuxième cas, on dénote le caractère commun par ν_q . Pour $q \mid N$, soit Q, Q', Q_1, Q_2 les facteurs q -primaires de N, M', N_1, N_2 respectivement.

De plus, on suppose que f_1 et f_2 satisfont les conditions suivantes :

- A. Si $q \mid M''$ tel que $Q_1 = Q_2$ et $\lambda_{f_1}(q) = \lambda_{f_2}(q) = 0$, alors f_1 et f_2 sont q -primitives.
- B. Suppose $q \mid M'$. Si $\tilde{f}_i, i = 1, 2$ sont des formes primitives de niveaux \tilde{N}_i qui sont équivalentes (voir la section 1.1.3) à $f_{i,\chi}$ pour un caractère χ d'un conducteur q -primaire, puis $[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2] \geq N$.
- C. Si q divise Q_1, Q_2 et M' tel que $\lambda_{f_1}(q) = \lambda_{f_2}(q) = 0$, puis il n'existe aucune forme primitive normalisée $\tilde{f}_i, i = 1, 2$, de niveaux \tilde{N}_i satisfaisant les conditions suivantes en même temps :
 1. $[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2] = N$;
 2. $f_i = \tilde{f}_{i,\chi}$ pour un caractère χ d'un conducteur q -primaire.
 3. q ne divise pas un de \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 ; ou q divise à la fois \tilde{N}_1 et \tilde{N}_2 , et au moins un de q -ième Fourier coefficients de \tilde{f}_i est non nul.

Le théorème suivant explique la raison pour les suppositions mentionnées au-dessus.

Théorème 1.4.1. *Soit $f'_i, i = 1, 2$ deux formes primitives normalisées. Il existe deux formes primitives normalisées $f_i, i = 1, 2$ satisfaisant les conditions A-C, et un caractère χ tels que*

$$L(s, f'_1 \times f'_2) = L(s, f_{1,\chi} \times f_{2,\chi}).$$

Remarque 4. a. Soit S le conducteur du caractère χ au-dessus. En écrivant sous la forme d'une produit eulérien

$$L(s, f_1 \times f_2) = \prod_q L_q(s, f_1 \times f_2),$$

on a

$$L(s, f'_1 \times f'_2) = L(s, f_{1,\chi} \times f_{2,\chi}) = L(s, f_1 \times f_2) \prod_{q \mid S} L_q(s, f_1 \times f_2)^{-1}.$$

Ainsi, l'équation fonctionnelle de $L(s, f'_1 \times f'_2)$ peut être déduite facilement par celle de $L(s, f_1 \times f_2)$.

- b. Voir [55] pour l'explication représentation-théorétique des supposition A-C et du Théorème 1.4.1.

1.4.1 Prolongement des fonctions L de Rankin-Selberg

On pose $k = (k_1 + k_2)/2$ et $k' = (k_1 - k_2)/2$. Soit $z = x + iy$. Et pour deux formes modulaires f, g de poids k_1, k_2 , on définit

$$\delta(f, g) = f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy.$$

Ainsi, si α est une matrice 2×2 avec déterminant positif, on a

$$j_\alpha(z)^{-1} \delta(f|_{k_1} \alpha, g|_{k_2} \alpha) = \delta(f, g) \circ \alpha.$$

Comme d'habitude, soit

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

On dénote par $D_1(N)$ le domaine fondamental pour $\Gamma_1(N)$ dans la bande $|x| \leq 1/2$.

Comme [68] et [76], on écrit

$$(4\pi)^{-(s+k-1)} \Gamma(s+k-1) \sum_{n \geq 1} \lambda_{f_1}(n) \overline{\lambda_{f_2}(n)} n^{-s} = \int_{|x| \leq 1/2} y^s \delta(f_1, f_2). \quad (1.4.2)$$

En posant, pour un entier d premier à N ,

$$h(z, s, d) = h_{k'}(z, s, d) = \varrho \cdot \sum_{\substack{(mN, n)=1 \\ n \equiv d \pmod{N}}} y^s (mNz + n)^{-(s-k')} (mN\bar{z} + n)^{-(s+k')},$$

où

$$\varrho = \begin{cases} 1/2 & \text{si } N = 1, 2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut écrire le membre de droite de (1.4.2) sous la forme

$$\int_{|x| \leq 1/2} y^s \delta(f_1, f_2) = \frac{1}{\varphi(N)} \int_{D_1(N)} \delta(f_1, f_2) \sum_{d \pmod{N}} \varepsilon(d) h(z, s, d). \quad (1.4.3)$$

De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \varrho^{-1} N^s L(2s, \varepsilon) \sum_{d \pmod{N}} \varepsilon(d) h(z, s, d) \\ &= \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \varepsilon(n) (Ny)^s (mNz + n)^{-(s-k')} (mN\bar{z} + n)^{-(s+k')} \\ &= \sum_{d|M''} \mu(d) \varepsilon'(d) \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \varepsilon'(n) (Ny)^s (mNz + nd)^{-(s-k')} (mN\bar{z} + nd)^{-(s+k')} \\ &= \sum_{d|M''} \mu(d) \varepsilon'(d) d^{-s} E(Nz/d, s, \varepsilon'), \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

où μ est la fonction Möbius, ε' est le caractère primitif induisant ε , et

$$E(z, s, \varepsilon') = E_{k'}(z, s, \varepsilon') = \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \varepsilon'(n) y^s (mz + n)^{-(s-k')} (m\bar{z} + n)^{-(s+k')}$$

est la série d'Eisenstein analytique réelle. En combinant (1.4.2)-(1.4.4), on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_{f_1, f_2}(s) &:= (N/\pi)^s (4\pi)^{-(s+k-1)} \Gamma(s-k') \Gamma(s+k-1) L(s, f_1 \times f_2) \\ &= \varrho \varphi(N)^{-1} \pi^{-s} \Gamma(s-k') \sum_{d|M''} \mu(d) \varepsilon'(d) d^{-s} \int_{D_1(N)} \delta(f_1, f_2) E(Nz/d, s, \varepsilon').\end{aligned}$$

Grâce aux travaux de Petersson [69], Rankin [76] et Selberg [83], on a la continuation analytique de la Série d'Eisenstein ci-dessous.

Proposition 1.4.2. *On pose*

$$\widehat{E}(z, s, \varepsilon') = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \varepsilon'(m) y^s (mz+n)^{-(s-k')} (m\bar{z}+n)^{-(s+k')}.$$

Ainsi définies, les séries d'Eisenstein convergent absolument pour $\Re s > 1$, ont des prolongement analytiques sur \mathbb{C} excepté pour $k' = 0$ et ε' le caractère trivial. Dans le dernier cas, $E(z, s, \varepsilon') = \widehat{E}(z, s, \varepsilon')$ est méromorphe avec un unique pôle simple de résidu π en $s = 1$. En outre, pour tout $d|M''$, $E(Nz/d, s, \varepsilon')$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$M^s \pi^{-s} \Gamma(s-k') E(Nz/d, s, \varepsilon') = g(\varepsilon') \pi^{s-1} \Gamma(1-s-k') \widehat{E}(M'M''z/d, 1-s, \bar{\varepsilon}'),$$

où la somme de Gauss $g(\varepsilon') = 1$ lorsque $M = 1$.

Ainsi, la continuation de $L(s, f_1 \times f_2)$ en découle immédiatement.

Théorème 1.4.3 (Rankin). *La Série L convolutive*

$$L(s, f_1 \times f_2) = L(2s, \varepsilon) \sum_{n=1} \lambda_{f_1}(n) \overline{\lambda_{f_2}(n)} n^{-s}$$

est

- entière si $f_1 \neq f_2$.
- méromorphe avec un pôle simple en $s = 1$ avec résidu

$$\frac{\varrho^{-1} N^{-2} 4^k \pi^{k+1}}{\Gamma(k)} \langle f_1, f_2 \rangle$$

si $f_1 = f_2$ (ainsi $k = k_1 = k_2$), où $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{D_1(N)} \delta(f_1, f_2)$ est le produit scalaire de Petersson de f_1 et f_2 et $D_1(N)$ le domaine fondamental pour $\Gamma_1(N)$.

1.4.2 L'équation Fonctionnelle

Définition 1.4.4. On dit que f_1 est $n(q)$ -proche de f_2 en q si 1) $Q_1 = Q_2$, et 2) $n(q)$ est le plus grand nombre entier m tel que

$$\lambda_q(f_{1,\chi}) \lambda_q(f_{2,\chi})^{-1} = \lambda_q(f_1) \lambda_q(f_2)^{-1} \quad (1.4.5)$$

pour tous caractères χ de conducteurs divisant q^m , où $\lambda_q(f_{i,\chi})$, $\lambda_q(f_i)$ sont définis par (1.1.4). (On dénote $\lambda_Q(f_i)$ (rep. $\lambda_Q(f_{i,\chi})$) par $\lambda_q(f_i)$ (rep. $\lambda_q(f_{i,\chi})$)).

Si la formule (1.4.5) se vérifie pour tous caractères χ des conducteurs q -primaires, on dit que f_1 est ∞ -proche de f_2 en q .

Pour un entier $m \geq 0$, on pose

$$S_q(m, f_1, f_2) = \frac{q}{q-1} \sum_{\chi} \lambda_q(f_{1,\chi}) \overline{\lambda_q(f_{2,\chi})}, \quad (1.4.6)$$

où χ parcourt tous les caractères de conducteurs q^m tels que les niveaux $N_{i,\chi}$ des $f_{i,\chi}$ ont les facteurs q -primaires égaux.

Pour chaque nombre premier q divisant N_1 et N_2 tel que $Q_1 = Q_2$ et f_i ($i = 1, 2$) sont q -primitives avec $\lambda_{f_i}(q) = 0$, on suppose que f_1 est $n(q)$ -proche à f_2 . On suppose que $f_i = \tilde{f}_{i,\omega_i}$ où $\tilde{f}_{i,\omega_i}(z) = \sum_{n \geq 1} \tilde{\lambda}_i(n) e(nz)$ sont formes primitives normalisées de niveaux \tilde{N}_i qui sont q -primitives pour tout nombre premier q , et ω_i sont des caractères. On écrit $N/M = M'M'' = \prod_q q^{r(q)}$ tel que $Q = q^{r(q)}$ si $q \mid M''$ et $Q' = q^{r(q)}$ si $q \mid M'$.

Pour un nombre premier $q \mid M''$, on définit

$$m(q) = \begin{cases} \min(n(q), [r(q)/2]) & \text{si } Q_1 = Q_2 \text{ et } \lambda_{f_1}(q) = \lambda_{f_2}(q) = 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} \theta_q(s) &= \theta_q(s, f_1, f_2) \\ &= \begin{cases} 1 - \varepsilon'(q) \overline{\lambda_{f_1}(q)} \lambda_{f_2}(q) q^{1-s} & \text{si } Q_1 = Q_2 = q \text{ et } \nu_{i,q} \text{ trivial,} \\ 1 - \varepsilon'(q) \overline{\lambda_{f_1}(q)} \lambda_{f_2}(q) q^{-s} & \text{si } Q_1 = Q_2 = \text{cond } \nu_{i,q}, \\ 1 - \varepsilon'(q) q^{-2s} & \text{si } m(q) = [r(q)/2] \text{ et } r(q) \text{ pair,} \\ 1 - \varepsilon'(q) q^{1/2-s} & \text{si } m(q) = [r(q)/2] > 0 \text{ et } r(q) \text{ impair,} \\ 1 & \text{autrement,} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

où ε' est le caractère primitif modulo M se déduisant $\varepsilon = \nu_1 \bar{\nu}_2$ et $\varepsilon'(p)^{1/2}$ est la racine carrée de $\varepsilon'(p)$ telle que $\lambda_q(f_1) = \varepsilon'(q)^{r(q)/2} \lambda_q(f_2)$ pour le cas $r(q)$ impair et $m(q) = [r(q)/2] > 0$.

On pose

$$P = \{q \mid M' : Q_1 = Q_2 \text{ et } \lambda_{f_1}(q) \lambda_{f_2}(q) \neq 0\}$$

et pour $q \in P$

$$\Lambda_q(f_1, f_2) = \lambda_{f_1}(Q') \overline{\lambda_{f_2}(Q')} \lambda_q(f_1) \overline{\lambda_q(f_2)}.$$

On introduit aussi la constante $\Lambda_q(f_1, f_2)$ et le nombre entier Q pour chaque nombre premier $q \mid M'$ et $q \notin P$ selon les cas variés suivants :

I) $Q = Q_1 = Q_2$ et f_i sont q -primitives avec $\lambda_{f_i}(q) = 0$. On définit

$$\begin{aligned} \Lambda_q(f_1, f_2) &= \begin{cases} \sum_{m=0}^{[(r(q)+1)/2]} S_q(m, f_1, f_2) & \text{si } n(q) = [r(q)/2], \\ S_q(r(q) - n(q), f_1, f_2) & \text{sinon,} \end{cases} \\ Q &= \begin{cases} q^{2(r(q)-n(q))} & \text{si } r(q) - n(q) > \frac{1}{2} \text{ord}_q Q_i, \\ Q & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

où $S_q(m, f_1, f_2)$ est définie par (1.4.6).

II) q divise \tilde{N}_1 et \tilde{N}_2 tel que $\tilde{\lambda}_i(q) = 0$ et I) se ne vérifie pas. Alors $Q' \geq \sqrt{Q}$. On pose

$$\begin{aligned}\Lambda_q(f_1, f_2) &= S_q(r(q), f_1, f_2), \\ \mathbf{Q} &= (Q')^2.\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

Remarque 5. a. Sous les suppositions A-C au début de la section, on explique les cas où $\lambda_{f_i}(q) = 0$, $i = 1, 2$ de la façon I et II.

b. Si $Q = Q_1$ et $Q' \geq Q_2$, on a

$$\Lambda_q(f_1, f_2) = \nu_{2,q}(-1)\nu_{1,N/Q}(Q)\bar{\varepsilon}'_{N/Q}(Q')\overline{g(\varepsilon_q)}\lambda_q(f_1)\lambda_q(f_{1,\bar{\nu}_{2,q}})\mathbf{Q}/Q,$$

(cf. [56, Théorème C et D]).

III) $Q = Q_1 > Q_2 \geq q$, $\lambda_{f_1}(q) = 0$ et $\lambda_{f_2}(q) \neq 0$; ou $Q_2 = 1$. On pose

$$\begin{aligned}\Lambda_q(f_1, f_2) &= \nu_{1,q}(-1)\nu_{1,N/Q}(Q)\bar{\varepsilon}'_{N/Q}(Q')\overline{g(\varepsilon_q)}\lambda_q(f_1)\lambda_q(f_{1,\bar{\nu}_{2,q}})(\mathbf{Q}/Q) \times \\ &\quad \times \begin{cases} \lambda_{f_2}(Q_2/Q')(Q_2/Q')^{-1/2} & \text{si } Q' < Q_2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \mathbf{Q} &= \begin{cases} (Q')^2 & \text{si } Q' > \sqrt{Q}, \\ Q & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

IV) $Q = Q_2 > Q_1 \geq q$, $\lambda_{f_2}(q) = 0$ et $\lambda_{f_1}(q) \neq 0$; ou $Q_1 = 1$. On pose

$$\begin{aligned}\Lambda_q(f_1, f_2) &= \nu_{2,q}(-1)\bar{\nu}_{2,N/Q}(Q)\bar{\varepsilon}'_{N/Q}(Q')\overline{g(\varepsilon_q)}\lambda_q(f_2)\lambda_q(f_{2,\bar{\nu}_{1,q}})(\mathbf{Q}/Q) \times \\ &\quad \times \begin{cases} \overline{\lambda_{f_1}(Q_1/Q')}(Q_1/Q')^{-1/2} & \text{si } Q' < Q_1, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \mathbf{Q} &= \begin{cases} (Q')^2 & \text{si } Q' > \sqrt{Q}, \\ Q & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}\tag{1.4.11}$$

Finalement, pour $q \mid M$, $q \nmid M'$, on pose

$$\Lambda_q(f_1, f_2) = \overline{\lambda_{f_1}(Q/Q_2)}\lambda_{f_2}(Q/Q_1)(Q/Q_2)^{-1/2}(Q/Q_1)^{-1/2}\lambda_q(f_1)\overline{\lambda_q(f_2)}.\tag{1.4.12}$$

Théorème 1.4.5 (Wen-Ch'ing Winnie Li). *Soit f_1, f_2 des formes primitives normalisées satisfaisant les suppositions A-C au début de la section et $\theta_q(s)$ est définie par (1.4.7). En supposant $k_1 \leq k_2$, on pose*

$$\Psi_{f_1, f_2}(s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma\left(s - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)\Gamma\left(s + \frac{k_1 + k_2}{2} - 1\right)\prod_{q \mid M''}\theta_q(s)^{-1}L(s, f_1 \times f_2)$$

où $L(s, f_1 \times f_2)$ est définie par (1.4.1). Alors, $L(s, f_1 \times f_2)$ se prolonge sur le plan complexe qui est entière si $f_1 \neq f_2$ ou entière à l'exception des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$ lorsque $f_1 = f_2$. De plus, $L(s, f_1 \times f_2)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Psi_{f_1, f_2}(s) = A(s)\Psi_{\bar{f}_1, \bar{f}_2}(1 - s),$$

où

$$\begin{aligned}
A(s) &= \prod_{q|M''} (\varepsilon'_q(q)q^{1-2s})^{r(q)-m(q)} \prod_{q \in P} g(\varepsilon'_q)\Lambda_q(f_1, f_2)Q^{1-3s}(Q')^s \varepsilon'_{N/Q}(Q^2/Q') \\
&\times \prod_{\substack{q|M' \\ q \notin P}} g(\varepsilon'_q)\Lambda_q(f_1, f_2)(Q/Q')^{1-2s} Q^{-s} \varepsilon'_{N/Q}(QQ/Q') \\
&\times \prod_{\substack{q|M \\ q \nmid M'}} g(\varepsilon'_q)\Lambda_q(f_1, f_2)Q^{1-s}Q_1^{-s}Q_2^{-s} \nu_{1,N/Q}(QQ_1) \bar{\nu}_{2,N/Q}(QQ_2) \\
&:= \varepsilon(f_1 \times f_2) \text{Cond}(f_1, f_2)^{1/2-s},
\end{aligned}$$

avec

$$\text{Cond}(f_1, f_2) = \prod_{q|M''} q^{2(r(q)-m(q))} \prod_{q \in P} Q^3(Q')^{-1} \prod_{\substack{q|M' \\ q \notin P}} Q(Q/Q')^2 \prod_{\substack{q|M \\ q \nmid M'}} QQ_1Q_2$$

et $|\varepsilon(f_1 \times f_2)| = 1$.

Nous allons énumérer quelque exemples suivants, qui sont les cas dont nous avons besoins.

Exemple 1. Soit $f_1 = f_2$ q -primitive pour tout q . Alors, $N_1 = N_2 = N = M'' = \prod_q q^{r(q)}$, et pour $q \mid N$

$$\theta_q(s) = \begin{cases} 1 - q^{-2s} & \text{si } \lambda_f(q) = 0 \text{ et } r(q) \text{ est pair,} \\ 1 - q^{-s} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus,

$$A(s) = \prod_{q|N} q^{(1-2s)[(r(q)+1)/2]}.$$

Exemple 2. Soit ν_1 et ν_2 deux caractères triviaux. $N = l.c.m(N_1, N_2)$. Alors,

$$A(s) = \prod_{q|N} (q^{r(q)-m(q)})^{1-2s},$$

et

$$\text{Cond}(f_1, f_2) = \prod_{q|N} q^{2(r(q)-m(q))}.$$

De plus, si nous supposons en même temps que les N_i sont les nombres entiers sans facteurs carrés. Puis, $m(q) = 0$ et $\text{Cond}(f_1, f_2) = N^2$. Il est facile de voir que $\theta_q(s) = 1 - c_q q^{-s}$ avec

$$c_q = \lambda_{f_1}(q)\lambda_{f_2}(q)q = \pm 1,$$

qui est en accord avec [68, Théorème 6].

1.4.3 Fonction L de Rankin-Selberg de $\text{sym}^m f$ et $\text{sym}^m g$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathcal{H}_k^*(N)$, la fonction L de Rankin-Selberg de $\text{sym}^m f$ et $\text{sym}^m g$ est définie par

$$L(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) := \prod_p \prod_{0 \leq i, j \leq m} (1 - \alpha_f(p)^{m-i} \beta_f(p)^i \alpha_g(p)^{m-j} \beta_g(p)^j p^{-s})^{-1},$$

avec la série Dirichlet (on peut écrire)

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_{\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g}(n) n^{-s},$$

pour $\Re s = \sigma$ assez grand. Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle éventuel en $s = 0, 1$ si et seulement si $f = \bar{g}$. De plus, on a

$$\lambda_{\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g}(p) = \lambda_{\text{sym}^m f}(p) \lambda_{\text{sym}^m g}(p),$$

pour $p \nmid N$. Le conducteur de la fonction L de Rankin-Selberg de $\text{sym}^m f$ et $\text{sym}^m g$ noté par $\text{Cond}(\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)$ satisfait (voir [5])

$$\text{Cond}(\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \leq (\text{Cond}(\text{sym}^m f) \text{Cond}(\text{sym}^m g))^{m+1} = N^{2m(m+1)}.$$

Selon [52], le facteur à la place infinie est

$$\begin{aligned} L_\infty(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \\ = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{\delta_{2|m}} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{[m/2] + \delta_{2 \nmid m}} \prod_{\nu=1}^m \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \nu(k-1))^{m-\nu+1}, \end{aligned}$$

où $\delta_{2|n} := 1 - \delta_{2 \nmid n}$ et $\Gamma_{\mathbb{R}}(s), \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$ sont définis par (1.2.6). La fonction L complétée

$$\begin{aligned} \Lambda(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \\ = \text{Cond}(\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)^{s/2} L_\infty(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) L(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \end{aligned}$$

satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) = \varepsilon_{\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g} \Lambda(1-s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)$$

avec

$$\varepsilon_{\text{sym}^m f \times \text{sym}^m g} = \pm 1.$$

Une fonction L spéciale de Rankin-Selberg est définie par

$$\mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) := \sum_{n \geq 1} \lambda_{\text{sym}^m f}(n) \lambda_{\text{sym}^m g}(n) n^{-s}. \quad (1.4.13)$$

On a les bornes de convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg.

Lemme 1.4.6. *Soit $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$, N sans facteurs carrés et $f, g \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Pour $0 \leq \sigma \leq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a*

$$L(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \ll N^{m(m+1)(1-\sigma)+\varepsilon} (1 + |\tau|)^{(m+1)(1-\sigma)/2} (k + |\tau|)^{m(m+1)(1-\sigma)/2+\varepsilon} \quad (1.4.14)$$

$$\mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \ll N^{m(m+1)(1-\sigma)+\varepsilon} (1 + |\tau|)^{(m+1)(1-\sigma)/2} (k + |\tau|)^{m(m+1)(1-\sigma)/2+\varepsilon} \quad (1.4.15)$$

où les constantes impliquées ne dépendent que de ε .

Chapitre 2

Moments des valeurs centrales sur les petits intervalles

2.1 énoncé du problème et du résultat

L'étude des valeurs centrales des fonctions L est un des problèmes les plus importants en théorie des nombres. L'hypothèse de Lindelöf est un exemple typique. Dans beaucoup d'applications arithmétiques, on ne demande que leurs valeurs en moyennes. Un exemple le plus simple est le $2r$ -ième moment de la fonction ζ de Riemann :

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) := \int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\tau)|^{2r} d\tau \quad (2.1.1)$$

pour $r > 0$ et $T \geq 1$.

Hardy et Littlewood [25] ont établi un premier résultat avec la transformation de Mellin et puis, cinq ans plus tard, ont donné une preuve alternative basée sur l'équation fonctionnelle approchée dans [26]. Leur résultat énonce que

$$\mathcal{M}_1(T; \zeta) \sim T \log T.$$

La formule de l'équation fonctionnelle approchée est utile et a une domination pendant soixante ans. Littlewood [57] a établi une formule asymptotique plus précise de $\mathcal{M}_1(T; \zeta)$:

$$\mathcal{M}_1(T; \zeta) = T \log T - (1 + \log 2\pi - 2\gamma)T + E(T),$$

avec $E(T) \ll_\varepsilon T^{3/4+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ce résultat a été amélioré à $E(T) \ll T^{1/2} \log T$ et à $E(T) \ll T^{5/12} \log^2 T$ par Ingham [34] et Titchmarsh [89], respectivement. L'étude du terme d'erreur $E(T)$ suscite un grand intérêt (voir [3, 29, 35, 92]).

Ingham [34] a étudié la quatrième moment et a démontré

$$\mathcal{M}_2(T; \zeta) = \frac{1}{2\pi^2} T (\log T)^4 + O(T (\log T)^3),$$

à l'aide de l'équation fonctionnelle approchée de $\zeta(s)^2$ dûe à Hardy-Littlewood [27]. Heath-Brown [31] a introduit une équation fonctionnelle approchée nouvelle et a démontré qu'il

existe des constantes $a_1, a_2, a_3, a_4 = (2\pi^2)^{-1}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathcal{M}_2(T; \zeta) = T \sum_{j=0}^4 a_j \log^j T + O_\varepsilon(T^{7/8+\varepsilon}).$$

L'article de Heath-Brown [30] déduit l'estimation pour le douzième moment

$$\mathcal{M}_6(T; \zeta) \ll T^2(\log T)^{17}, \quad (2.1.2)$$

d'une estimation du moment carré pour $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ sur un petit intervalle en combinant la méthode de van der Corput avec l'inégalité de Halász-Montgomery. Ramachandra [75] a prouvé

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \ll T(\log T)^{r^2} \quad (2.1.3)$$

inconditionnellement pour $r = \frac{1}{2}$ et sous l'HR pour $0 < r < 2$. Heath-Brown [32] a montré que la majoration (2.1.3) reste vrai pour $r = 1/n$ avec entier $n \geq 1$. Le domaine de validité de Ramachandra a été étendu à $0 < r \leq 2,181$ par Radziwiłł [72].

Dans l'autre direction, Titchmarsh (voir [91, Theorem 7.19]) a montré que pour tout entier $r > 0$ on a

$$\int_0^\infty |\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^{2r} e^{-\tau/T} d\tau \gg T(\log T)^{r^2}$$

uniformément pour $T \geq 1$. Ramachandra [74] a renforcé ce résultat pour

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \gg_r T(\log T)^{r^2}, \quad (2.1.4)$$

lorsque $2r$ est un nombre entier positif. Ramachandra [73] a montré aussi que

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \gg T(\log T)^{r^2} (\log_2 T)^{-\theta_r}$$

pour tous les réels $r \geq \frac{1}{2}$ avec une constante θ_r dépendant de r au plus, et de plus, sous l'hypothèse de Riemann, $\theta_r = 0$ pour tout réel $r > 0$. Heath-Brown [32] a montré la minoration(2.1.4) pour tout nombre rationnel $r > 0$.

Dans [85], Soundararajan a montré que pour tout $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ l'HR implique

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \ll_{r,\varepsilon} T(\log T)^{r^2+\varepsilon}, \quad T \geq 2.$$

Récemment Harper [28] a réussi à enlever ε en raffinant la méthode de Soundararajan : sous l'HR, on a

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \ll_r T(\log T)^{r^2}. \quad (2.1.5)$$

On conjecture qu'il existe une constante positive C_r telle que

$$\mathcal{M}_r(T; \zeta) \sim C_r T(\log T)^{r^2}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.1.6)$$

Une valeur précise de C_r est conjecturée par Keating et Snaith [45] basée sur la considération des matrices aléatoires. Ensuite, Goldfeld et Hoffstein [10] ont proposé la même conjecture selon une autre approche basée sur la série multiple de Dirichlet. Récemment Conrey et al.

[9] fournissent une conjecture plus précise en identifiant les termes de l'ordre inférieur par une expansion asymptotique pour $\mathcal{M}_r(T; \zeta)$.

Pour le moment sur les petits intervalles, la méthode de Heath-Brown [31] implique

$$\int_T^{T+H} |\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^4 d\tau \ll_{\varepsilon} H^{1+\varepsilon}$$

pour $H = T^{7/8}$. Iwaniec [36] a amélioré ce résultat à $H = T^{2/3}$. La méthode de Iwaniec est la première application de la formule de trace Kuznetsov dans ce problème et a été suivie par de nombreux travaux de Zavorotnyi, Motohashi, Ivić, Jutila et d'autres dans l'étude du quatrième moment. Jutila [42] a aussi montré le résultat de Iwaniec avec une méthode alternative.

Il est naturel de considérer l'analogue de $\mathcal{M}_r(T; \zeta)$ pour les fonctions L automorphes. Par souci de simplicité, pour chaque entier pair $k \geq 2$, on dénote par \mathcal{H}_k^* l'ensemble des formes primitives de poids k pour le groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$.

Toute forme primitive $f \in \mathcal{H}_k^*$ a un développement de Fourier en ∞ :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2\pi i n z} \quad (\text{Im } z > 0),$$

où $\lambda_f(n)$ est le n -ième coefficient de Fourier normalisé de f avec $\lambda_f(1) = 1$. La fonction L automorphe associée à f est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

On écrit implicitement $s = \sigma + i\tau$. La fonction $L(s, f)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s + \frac{1}{2}(k-1)) L(s, f) = i^k (2\pi)^{-(1-s)} \Gamma(1-s + \frac{1}{2}(k-1)) L(1-s, f). \quad (2.1.7)$$

Comme (2.1.1), pour $f \in \mathcal{H}_k^*$ et $r > 0$, on définit

$$\mathcal{M}_r(T; f) := \int_T^{2T} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} d\tau. \quad (2.1.8)$$

Le cas où $r = 1$ a été étudié premièrement par Good [18]. En adaptant la méthode de Titchmarsh [88], il a montré la formule asymptotique

$$\mathcal{M}_1(T; f) \sim 2kA_0T \log T \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty$$

où A_0 est une constante absolue. De plus, grâce à l'équation fonctionnelle approchée qu'il a établi et en utilisant la théorie spectrale, il a précisé dans [19] la formule sous la forme

$$\mathcal{M}_1(T; f) = 2kA_0T \log T + A_1T + E(T, f)$$

où A_1 est une constante absolue et $E(T, f) \ll T^{5/6} \log^{13/6} T$. Et puis dans [20], il a développé sa méthode plus loin, et amélioré le terme d'erreur en

$$E(T, f) \ll (T \log T)^{2/3}. \quad (2.1.9)$$

D'où il en déduit la borne de sous-convexité en l'aspect de τ :

$$L\left(\frac{1}{2} + i\tau, f\right) = O(|\tau|^{1/3}(\log |\tau|)^{5/6}).$$

Le terme d'erreur (2.1.9) implique le moment carré sur les petits intervalles

$$\int_T^{T+H} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^2 d\tau \ll_{f,\varepsilon} H^{1+\varepsilon}$$

pour $H = T^{2/3}$ (voir aussi les travaux de Jutila [40] et [41]).

Comme un analogue de l'estimation (2.1.2), la majoration pour le sixième moment

$$\int_0^T |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^6 d\tau \ll_{f,\varepsilon} T^{2+\varepsilon} \quad (2.1.10)$$

a été établi par Jutila [40] (une preuve alternative est donnée dans [43]).

Avec la méthode de Heath-Brown [32], Sun et Lü [86] ont considéré les moments de puissance fractionnaire et prouvé que

$$\mathcal{M}_r(T; f) \gg T(\log T)^{r^2},$$

pour tout $r = \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}$ avec entiers positifs p et q , et de plus

$$\mathcal{M}_r(T; f) \ll T(\log T)^{r^2}$$

pour un entier positif pair q sous l'hypothèse de Riemann généralisée (HRG) pour $L(s, f)$. Pour plus d'informations sur les moments des fonctions L , on peut consulter le rapport [62].

En considérant les moments décalés associés, Conrey et al. (voir [9, Conjecture 2.5.4]) ont fourni la conjecture sur $\mathcal{M}_r(T; f)$, d'où on peut déduire la conjecture suivante sans considération des coefficients exacts.

Conjecture 1. Soient $f \in \mathcal{H}_k^*$ et $r > 0$. On a

$$\mathcal{M}_r(T; f) \asymp_{f,r} T(\log T)^{r^2},$$

où la constante impliquée dépend de f et r .

Ici, on considère un problème plus général, i.e., les moment positifs de $L(\frac{1}{2} + i\tau, f)$ sur les petits intervalles :

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) := \int_T^{T+H} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} d\tau. \quad (2.1.11)$$

Par conséquent, $\mathcal{M}_r(T; f) = \mathcal{M}_r(T, T; f)$.

Pour ce problème, on démontre le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et ε un nombre positif arbitrairement petit. Supposant l'HRG pour $L(s, f)$, on a*

$$H(\log T)^{r^2} \ll \mathcal{M}_r(T, H; f) \ll H(\log T)^{r^2} \quad (2.1.12)$$

uniformément pour $T \geq T_0(f, r, \varepsilon)$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$, où la constante $T_0(f, r, \varepsilon)$ et les constantes impliquées dépendent de f , r et ε .

Plus précisément, la borne inférieure ci-dessus reste valide pour tout nombre rationnel $r > 0$ sans conditions.

Le cas particulier de Théorème 2.1.1 montre que l'analogie de la borne supérieure de Harper [28] et la borne inférieure de Heath-Brown [32] sur $\mathcal{M}_r(T; \zeta)$ continue de se vérifier pour $\mathcal{M}_r(T; f)$.

Notre approche est une adaptation de [85, 28] pour la borne supérieure et de [32] pour la borne inférieure. Dans [85], Soundararajan a partie de travail de Selberg sur la distribution de $\log \zeta(\frac{1}{2} + i\tau)$. Il a enlevé les effets des zéros proches de $\frac{1}{2} + i\tau$ en trouvant une inégalité et obtenu une borne supérieure pour $\log \zeta(\frac{1}{2} + i\tau)$ (voir [85, Proposition]). En choisissant une longueur appropriée pour le polynôme de Dirichlet, il a étudié la fréquence avec laquelle les grandes valeurs de $\log |\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|$ peuvent se produire et puis déduit une estimation pour le moment de la fonction zêta.

Dans [28], Harper a amélioré la méthode de Soundararajan. Il divise le polynôme de Dirichlet en petits intervalles, choisit une longueur plus longue pour le polynôme et découpe l'intégrale en morceaux selon les grandes valeurs de ces polynômes sur petits intervalles. Avec ce délicat découpage, nous pouvons profiter davantage des informations sur les grandes valeurs. En outre, il n'évalue pas la fréquence des grandes valeurs, mais étudie à travers des objets de type moment. Enfin, en établissant un lemme concernant le produit des $\cos(\tau \log p)$ sur des nombres premiers, il a sauvé le facteur $(\log T)^\varepsilon$.

Nous réussissons à étendre la méthode de Soundararajan et Harper pour les moments des fonctions L automorphes dans les petits intervalles. La différence est que : si nous suivons leurs méthodes, nous devons supposer l'HR pour $\zeta(s)$ et l'HRG pour $L(s, \text{sym}^2 f)$ en même temps. Différent de Harper, notre argument ne tronque pas la deuxième sommation dans (2.2.6) par $\log T$, mais la considère avec la première sommation directement. La contribution de cette partie est également négligeable avec notre méthode. Ceux-ci nous permet d'éviter HR pour $\zeta(s)$ et l'HRG pour $L(s, \text{sym}^2 f)$ et des simplifications pour la méthode de Soundararajan-Harper.

De plus, dans la dernière partie, nous utilisons la méthode de Heath-Brown et appliquons la fonction L de Rankin-Selberg pour prouver la borne inférieure exacte.

Le moment pour les fonctions L automorphes d'ordre plus haut a été étudié par Fomenko [15] et Pi [70]. Dans [15], Fomenko fait les études sur le moment de la fonction L automorphe de carré symétrique

$$\mathcal{M}_r(T; \text{sym}^2 f) := \int_T^{2T} |L(\frac{1}{2} + i\tau, \text{sym}^2 f)|^{2r} d\tau.$$

Basé sur la méthode de Heath-Brown [32], il montre que pour tout $r > 0$ rationnel (pour tout $r > 0$ réel sous l'HRG pour $L(\frac{1}{2} + i\tau, \text{sym}^2 f)$)

$$\mathcal{M}_r(T; \text{sym}^2 f) \gg T(\log T)^{r^2}.$$

Il montre aussi que, pour tout $0 \leq r \leq \frac{2}{3}$, la majoration

$$\mathcal{M}_r(T; \text{sym}^2 f) \ll T(\log T)^{r^2}$$

se vérifie sous l'HRG pour $L(s, \text{sym}^2 f)$.

Ye [96] a fait l'étude du quatrième moment de $L(\frac{1}{2} + it, g)$ sur un petit intervalle pour les formes automorphes holomorphes également formes de Maass g pour $\Gamma_0(N)$. Soit χ un caractère mod \mathcal{Q} avec $N \mid \mathcal{Q}$. Il montre que

$$\int_T^{T+H} |L(\frac{1}{2} + i\tau, g \otimes \chi)|^4 d\tau \ll_{\varepsilon, g, N, \mathcal{Q}} (TH)^{1+\varepsilon}$$

pour $H = T^{103/135+\varepsilon}$ et tout $\varepsilon > 0$. Puis, dans [51] Lau, Liu et Ye ont amélioré le résultat en obtenant $H = T^{1/3+\varepsilon}$.

Soit π une représentation irréductible cuspidale automorphe sur $GL_m(\mathbb{A}_Q)$, $m \geq 2$ et $L(s, \pi)$ la fonction L attachée. Pi [70] considère le moment

$$\mathcal{M}_r(T; \pi) := \int_T^{2T} |L(\frac{1}{2} + i\tau, \pi)|^{2r} d\tau,$$

et montre que sous la conjecture de Ramanujan généralisée (CRG)

$$\mathcal{M}_r(T; \pi) \gg T(\log T)^{r^2}$$

pour tout $r \in \mathbb{Q}$ ($r \in \mathbb{R}$ sous l'HRG pour $L(s, \pi)$). Dans une autre direction, il montre sous CRG et l'HRG

$$\mathcal{M}_r(T; \pi) \ll T(\log T)^{r^2},$$

pour tout $0 \leq r \leq 2/m - \varepsilon$ et tout $\varepsilon > 0$.

Notre méthode est applicable pour les fonctions L automorphes d'ordre supérieur en supposant GRC de plus (GRC pour les fonctions L automorphes de puissance symétrique définies par (1.2.4) se vérifie). La conjecture de orthogonalité de Selberg (voir [84], [60]) est essentielle pour la démonstration.

2.2 Lemmes auxiliaires

Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$. $L(s, f)$ admet un produit eulérien :

$$L(s, f) = \prod_p (1 - \alpha_f(p)p^{-s})^{-1} (1 - \beta_f(p)p^{-s})^{-1} \quad (\sigma > 1),$$

où $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$ sont définis dans la Proposition 1.1.5. Soient $r > 0$. Pour $L(s, f) \neq 0$, on définit $L(s, f)^r$ par

$$L(s, f)^r = \exp(r \log L(s, f)),$$

où $\log L(s, f) = \log |L(s, f)| + \arg L(s, f)$ avec $-\pi < \arg L(s, f) \leq \pi$.

Comme indiqué déjà, l'objectif principal de cette section est de prouver la Proposition 2.2.1 ci-dessous. On commence par citer quelques propriétés sur la dérivée logarithmique de $L(s, f)$ qui seront nécessaires à la preuve de la Proposition 2.2.1. Nous définissons d'abord $b_f(n)$ par la formule :

$$-\frac{L'}{L}(s, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)b_f(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt et $b_f(n)$ est supportée sur les puissances des nombres premiers tel que

$$b_f(p^\nu) = \alpha_f(p)^\nu + \beta_f(p)^\nu \quad (2.2.1)$$

pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$. En particulier, $b_f(p) = \lambda_f(p)$.

- Compte tenu de l'équation fonctionnelle (2.1.7), la dérivée logarithmique $\frac{L'}{L}(s, f)$ a des 'singularités triviales' en points $s = -n - \frac{1}{2}(k-1)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

- En faisant appel au Théorème 1.2.3, pour tout s dans la bande verticale $-\frac{1}{2} < \sigma < 2$ on a

$$\frac{L'}{L}(s, f) \ll_f \log(|\tau| + 3) + \sum_{|s-\rho| < 1} \frac{1}{s-\rho},$$

où ρ désigne les zéros non-triviaux de $L(s, f)$. En écrivant $s = \sigma + iv$, le nombre des zéros ρ avec $|v - \text{Im } \rho| < 1$ est $\ll \log(|v| + 3)$. D'où, en faisant varier v de façon bornée, nous pouvons assurer que

$$|v - \text{Im } \rho| \gg \log^{-1}(|v| + 3). \quad (2.2.2)$$

Avec de tels v , on a pour $-\frac{1}{2} < \sigma < 2$

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(\sigma + iv, f) &\ll_f \log(|v| + 3) + \sum_{|v - \text{Im } \rho| < 1} \log(|v| + 3) \\ &\ll_f \log^2(|v| + 3). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

- Grâce à l'équation fonctionnelle (2.1.7) et la formule de Stirling [90, 4.42] on a pour $\sigma < -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -\frac{L'}{L}(s, f) &= \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(1 - s + \frac{k-1}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(s + \frac{k-1}{2} \right) + O_f(1) \\ &\ll_f \log(|s| + 3). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Le résultat principal de cette section est la proposition suivante, qui est le point de départ de la preuve de la borne supérieure dans le Théorème 2.1.1.

Proposition 2.2.1. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$ et $\varpi_0 = 0.4912\dots$ est unique nombre réel positif satisfaisant*

l'équation $e^{-\varpi_0} = \varpi_0 + \frac{1}{2}\varpi_0^2$. En supposant l'HRG pour $L(s, f)$, on a

$$\log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| \leq \Re \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)b_f(n) \log(x/n)}{n^{1/2+\varpi/\log x+i\tau}(\log n) \log x} + (\varpi + 1) \frac{\log T}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| &\leq \Re \sum_{p \leq x} \frac{b_f(p) \log(x/p)}{p^{1/2+\varpi/\log x+i\tau} \log x} + \frac{1}{2} \Re \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{b_f(p^2) \log(x/p^2)}{p^{1+2\varpi/\log x+i2\tau} \log x} \\ &\quad + (\varpi + 1) \frac{\log T}{\log x} + O(1) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

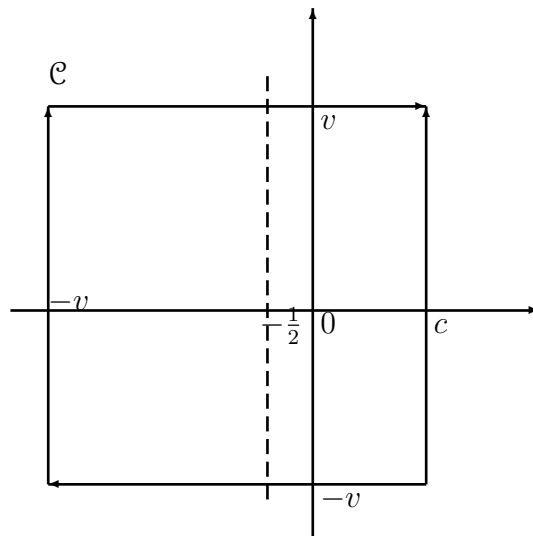
pour $T \geq 2$, $T < \tau \leq 2T$, $2 \leq x \leq T^2$ et $\varpi \geq \varpi_0$, où les constantes impliquées dépendent de f .

Démonstration. On pose $c := \max(1, 2 - \sigma)$. Sous l'HRG, on désigne par $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ les zéros non-triviaux de $L(s, f)$. Par la formule de Perron, on peut écrire

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)b_f(n)}{n^s} \log\left(\frac{x}{n}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iv}^{c+iv} \frac{L'}{L}(s+w, f) \frac{x^w}{w^2} dw + O\left(\frac{x^c \log^2 x}{v^2}\right),$$

où $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$ et $T < \tau \leq 2T$ et $v \geq 3$ est un paramètre tendant vers l'infini, mais satisfaisant (2.2.2).

On déplace le segment de l'intégrale sur le chemin \mathcal{C} consistant en les lignes droites joignant les points $c - iv$, $-v - iv$, $-v + iv$ et $c + iv$.



En rencontrant un pôle d'ordre 2 en $w = 0$, des pôles simples triviaux en $w = n + (k -$

$1)/2 + s$ et des pôles simples non-triviaux en $w = \rho - s$, grâce au théorème résidus, on déduit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)b_f(n)}{n^s} \log\left(\frac{x}{n}\right) &= -\frac{L'}{L}(s, f) \log x - \left(\frac{L'}{L}(s, f)\right)' \\ &\quad - \sum_{n+(k-1)/2+\sigma < v} \frac{x^{-n-(k-1)/2-s}}{(n+(k-1)/2+s)^2} - \sum_{|\gamma-\tau| < v} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{L'}{L}(s+w, f) \frac{x^w}{w^2} dw + O\left(\frac{x^c \log^2 x}{v}\right). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

On applique (2.2.4) et (2.2.3) pour estimer les intégrales sur les segments horizontaux de $-v$ à $-\frac{1}{2}$ et de $-\frac{1}{2}$ à c , respectivement. La contribution de cette partie est

$$\ll \frac{\log(|s| + v)}{v^2 \sqrt{x} \log x} + \frac{x^c \log^2(T + v)}{v^2}.$$

Celle des intégrales des segments verticaux est

$$\ll x^{-v} v^{-1} \log(|s| + v).$$

En insérant les estimations dans (2.2.7), lorsque $v \rightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} -\frac{L'}{L}(s, f) &= \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)b_f(n)}{n^s} \frac{\log(x/n)}{\log x} + \frac{1}{\log x} \left(\frac{L'}{L}(s, f)\right)' \\ &\quad + \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} + \frac{1}{\log x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{-n-(k-1)/2-s}}{(n+(k-1)/2+s)^2}. \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles des deux côtés et en intégrant par rapport à σ sur $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ à ∞ , on obtient

$$\begin{aligned} \log |L(s_0, f)| &= \Re \left\{ \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)b_f(n)}{n^{s_0} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} - \frac{1}{\log x} \frac{L'}{L}(s_0, f) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} d\sigma \right\} + O(x^{-k/2}), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

où $s_0 = \sigma_0 + i\tau$ et la constante impliquée est absolue.

Pour $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$ et $T \leq \tau \leq 2T$, on définit

$$F(s) := \sum_{\rho} \Re \frac{1}{s - \rho} = \sum_{\rho} \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{(\sigma - \frac{1}{2})^2 + (\tau - \gamma)^2} > 0.$$

Selon (1.2.3), on a

$$-\Re \frac{L'}{L}(s, f) = -\log(2\pi) + \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(s + \frac{k-1}{2} \right) - \Re B - \Re \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right),$$

où

$$\Re B = - \sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Ainsi pour $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$ et $T \leq \tau \leq 2T$, on a

$$-\Re \frac{L'}{L}(s, f) = \log T - F(s) + O_k(1), \quad (2.2.9)$$

où on a évalué

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(s + \frac{k-1}{2} \right) = \log T + O_k(1)$$

par la formule de Stirling. Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \left| \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} d\sigma \right| &\leq \sum_{\rho} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{x^{1/2-\sigma}}{|\rho-s_0|^2} d\sigma \\ &= \sum_{\rho} \frac{x^{1/2-\sigma_0}}{|\rho-s_0|^2 \log x} = \frac{x^{1/2-\sigma_0} F(s_0)}{(\sigma_0 - \frac{1}{2}) \log x}, \end{aligned}$$

et des égalités (2.2.8) et (2.2.9), on déduit que

$$\begin{aligned} \log |L(s_0, f)| &\leq \Re \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) b_f(n)}{n^{s_0} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \\ &\quad + \frac{\log T - F(s_0) + O(1)}{\log x} + \frac{x^{1/2-\sigma_0} F(s_0)}{(\sigma_0 - \frac{1}{2})(\log x)^2}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

En intégrant (2.2.9) par rapport à σ de $\frac{1}{2}$ à σ_0 ($> \frac{1}{2}$), on obtient

$$\log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| - \log |L(s_0, f)| = \{\log T + O(1)\}(\sigma_0 - \frac{1}{2}) - \int_{1/2}^{\sigma_0} F(\sigma + i\tau) d\sigma.$$

D'après l'inégalité

$$\log(1+x^2) \geq x^2/(1+x^2),$$

on peut minorer l'intégral de F par

$$\int_{1/2}^{\sigma_0} F(\sigma + i\tau) d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\rho} \log \frac{1}{1 + (\frac{\sigma-1/2}{\tau-\gamma})^2} \geq \frac{1}{2} \sum_{\rho} \frac{(\sigma_0 - 1/2)^2}{(\sigma_0 - 1/2)^2 + (\tau - \gamma)^2} = \frac{1}{2} F(s_0).$$

Alors, il s'ensuit que

$$\log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| - \log |L(s_0, f)| \leq \{\log T - \frac{1}{2} F(s_0) + O(1)\}(\sigma_0 - \frac{1}{2}).$$

En combinant la majoration (2.2.10), on peut écrire

$$\begin{aligned} \log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| &\leq \Re \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) b_f(n)}{n^{s_0} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} + ((\sigma_0 - \frac{1}{2}) \log x + 1) \frac{\log T}{\log x} \\ &\quad + F(s_0) (\sigma_0 - \frac{1}{2})^{-1} (\log x)^{-2} G((\sigma_0 - \frac{1}{2}) \log x) + O((\log x)^{-1} + \sigma_0 - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

où $G(\varpi) := e^{-\varpi} - \varpi - \frac{1}{2}\varpi^2$. On pose $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{\varpi}{\log x}$ avec $\varpi \geq \varpi_0$. Il est facile de voir que $G(\varpi)$ est décroissante et $G(\varpi_0) = 0$. Lorsque $F(s_0) > 0$, on a $F(s_0)G(\varpi) \leq 0$ pour $\varpi \geq \varpi_0$ et donc ce terme peut être omis. Puis (2.2.5) en découle.

L'inégalité (2.2.6) est une conséquence simple de (2.2.5) parce que la contribution de p^ν avec $\nu \geq 3$ à la somme sur le côté droit de (2.2.5) est

$$\sum_{p^\nu \leq x, \nu \geq 3} \frac{b_f(p^\nu)}{p^{\nu/2 + \nu i \tau + \nu \varpi_0 / \log x}} \frac{\log(x/p^\nu)}{\log x} \ll \sum_{p^\nu \leq x, \nu \geq 3} \frac{1}{p^{\nu/2}} \ll 1.$$

Cela achève la démonstration. \square

Enfin, on cite quelques théorèmes de valeur moyenne et un lemme élémentaire, qui seront utiles plus tard. Le premier est une légère variante de [85, Lemma 3]. La preuve est analogue.

Lemme 2.2.2. *Soit ε un nombre positif arbitrairement petit. Pour tous nombres complexes $a(p)$, on a*

$$\int_T^{T+H} \left| \sum_{p \leq x} \frac{a(p)}{p^{1/2 + i\tau}} \right|^{2r} d\tau \ll r! H \left(\sum_{p \leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^r$$

uniformément pour $r \in \mathbb{N}$, $T \geq 2$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $2 \leq x \leq (H/\log H)^{1/r}$, où la constante impliquée dépend de ε .

Démonstration. On écrit

$$\left(\sum_{p \leq x} \frac{a(p)}{p^{1/2 + it}} \right)^r = \sum_{n \leq x^r} \frac{a_{r,x}(n)}{n^{1/2 + it}},$$

où $a_{r,x} = 0$ sauf que n est un produit de r nombres premiers inférieurs à x (pas nécessairement distincts). Dans ce cas, si on écrit $n = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$,

$$a_{r,x}(n) = \binom{r}{\alpha_1, \dots, \alpha_l} \prod_{i=1}^l a(p_i)^{\alpha_i}.$$

Alors, en séparant les termes diagonaux $m = n$ et les termes non-diagonaux $m \neq n$, on a

$$\begin{aligned} \int_T^{T+H} \left| \sum_{p \leq x} \frac{a(p)}{p^{1/2 + it}} \right|^{2r} dt &= \sum_{m, n \leq x^r} \frac{a_{r,x}(m) \overline{a_{r,x}(n)}}{\sqrt{mn}} \int_T^{T+H} \left(\frac{n}{m} \right)^{it} dt \\ &= H \sum_{m, n \leq x^r} \frac{|a_{r,x}(m)|^2}{\sqrt{mn}} + O \left(\sum_{\substack{m, n \leq x^r \\ m \neq n}} \frac{|a_{r,x}(m) a_{r,x}(n)|}{\sqrt{mn} |\log(m/n)|} \right), \end{aligned}$$

Puisqu'on a $x^r \leq H/\log H$ et

$$2 \frac{|a_{r,x}(m) a_{r,x}(n)|}{\sqrt{mn}} \leq \frac{|a_{r,x}(m)|^2}{m} + \frac{|a_{r,x}(n)|^2}{n},$$

les termes non-diagonales donne une contribution

$$\ll \sum_{n \leq x^r} \frac{|a_{r,x}(n)|^2}{n} \sum_{\substack{m, n \leq x^r \\ m \neq n}} \frac{1}{|\log(m/n)|} \ll x^r \log(x^r) \sum_{n \leq x^r} \frac{|a_{r,x}(n)|^2}{n} \ll H \sum_{n \leq x^r} \frac{|a_{r,x}(n)|^2}{n}.$$

Le lemme se découle de la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x^r} \sum_{n \leq x^r} \frac{|a_{r,x}(n)|^2}{n} &= \sum_{p_1 < \dots < p_r} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 1 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = r}} \binom{r}{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{|a(p_1)|^{2\alpha_1} \dots |a(p_r)|^{2\alpha_r}}{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}} \\ &\leq r! \sum_{p_1 < \dots < p_r} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 1 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = r}} \binom{r}{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{|a(p_1)|^{2\alpha_1} \dots |a(p_r)|^{2\alpha_r}}{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}} \\ &= r! \left(\sum_{p \leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^r. \end{aligned}$$

□

Le second lemme est [64, Corollary 3].

Lemme 2.2.3. *Pour toute suite de nombres complexes $\{a_n\}_{n \geq 1}$ vérifiant $\sum_{n \geq 1} n|a_n|^2 < \infty$, on a*

$$\int_0^T \left| \sum_{n \geq 1} a_n n^{-i\tau} \right|^2 d\tau = \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 \{T + O(n)\}$$

uniformément pour $T \geq 2$, où la constante impliquée est absolue.

Le lemme suivant est un corollaire de [16, Theorem 2].

Lemme 2.2.4. *Soit $F(s)$ une fonction régulière dans la bande verticale $\alpha < \sigma < \beta$ et continue pour $\alpha \leq \sigma \leq \beta$. On suppose $F(s) \rightarrow 0$ lorsque $|\tau| \rightarrow \infty$ uniformément pour $\alpha \leq \sigma \leq \beta$. Alors, pour $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ et tout $q > 0$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\gamma + i\tau)|^q d\tau \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\alpha + i\tau)|^q d\tau \right)^{(\beta-\gamma)/(\beta-\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\beta + i\tau)|^q d\tau \right)^{(\gamma-\alpha)/(\beta-\alpha)}.$$

Le lemme suivant est une généralisation simple de [28, Proposition 2].

Lemme 2.2.5. *Soit $M = p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}$ et $N = q_1^{\nu_1} \dots q_t^{\nu_t}$, où p_j, q_u sont des nombres premiers distincts, μ_j, ν_u sont des entiers positifs et r, t sont des entiers non négatifs. On a*

$$\int_T^{T+H} \prod_{1 \leq j \leq r} (\cos(2\tau \log p_j))^{\mu_j} \prod_{1 \leq u \leq t} (\cos(\tau \log q_u))^{\nu_u} d\tau = H\Theta(MN) + O(M^2N), \quad (2.2.11)$$

uniformément pour $2 \leq H \leq T$, où

$$\Theta(MN) := \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{1}{2^{\mu_j}} \binom{\mu_j}{\mu_j/2} \prod_{1 \leq u \leq t} \frac{1}{2^{\nu_u}} \binom{\nu_u}{\nu_u/2}.$$

Ici par convention, $\binom{\nu}{\nu/2} = \frac{\nu!}{((\nu/2)!)^2}$ si ν est pair et $\binom{\nu}{\nu/2} = 0$ si ν est impair.

Remarque 6.

1. En prenant $M = 1$ et $H = T$, on obtient la Proposition 2 de Harper [28].
2. L'idée principal est d'exprimer la fonction cosinus par la fonction exponentielle des nombres complexes (voir (2.2.12)) et de développer la puissance. Le premier terme provient du terme diagonal.

Démonstration. On peut écrire

$$(\cos(a\tau))^\nu = \frac{(e^{ia\tau} - e^{-ia\tau})^\nu}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \binom{\nu}{\nu/2} + \sum_{0 \leq \ell \leq \nu, \ell \neq \nu/2} \frac{1}{2^\nu} \binom{\nu}{\ell} e^{i(\nu-2\ell)a\tau}. \quad (2.2.12)$$

Ainsi, l'intégrale sur le coté gauche de (2.2.11) égale $H\Theta(MN) + R$ avec

$$R := \int_T^{T+H} \sum_{(\ell_{11}, \dots, \ell_{1r}, \ell_{21}, \dots, \ell_{2t})} \prod_{1 \leq j \leq r} \prod_{1 \leq u \leq t} \frac{1}{2^{\mu_j + \nu_u}} \binom{\mu_j}{\ell_{1j}} \binom{\nu_j}{\ell_{2u}} e^{i\tau \log(p_1^{2c_1} \dots p_r^{2c_r} q_1^{d_1} \dots q_t^{d_t})} d\tau$$

avec $c_j := \mu_j - 2\ell_{1j}$ et $d_u := \nu_u - 2\ell_{2u}$. Ici $0 \leq \ell_{1j} \leq \mu_j$ et $0 \leq \ell_{2u} \leq \nu_u$ tels que $\sum_j c_j^2 + \sum_u d_u^2 \neq 0$.

Puisque p_j, q_u sont distincts et $|c_j| \leq \mu_j$ et $|d_u| \leq \nu_u$, on a

$$|p_1^{2c_1} \dots p_r^{2c_r} q_1^{d_1} \dots q_t^{d_t} - 1| \geq M^{-2} N^{-1}.$$

Alors

$$|\log(p_1^{2c_1} \dots p_r^{2c_r} q_1^{d_1} \dots q_t^{d_t})| \gg M^{-2} N^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} R &\ll \sum_{(\ell_{11}, \dots, \ell_{1r}, \ell_{21}, \dots, \ell_{2t})} \prod_{1 \leq j \leq r} \prod_{1 \leq u \leq t} \frac{1}{2^{\mu_j + \nu_u}} \binom{\mu_j}{\ell_{1j}} \binom{\nu_j}{\ell_{2u}} \int_T^{T+H} e^{i\tau \log(p_1^{2c_1} \dots p_r^{2c_r} q_1^{d_1} \dots q_t^{d_t})} d\tau \\ &\ll \sum_{(\ell_{11}, \dots, \ell_{1r}, \ell_{21}, \dots, \ell_{2t})} \prod_{1 \leq j \leq r} \prod_{1 \leq u \leq t} \frac{1}{2^{\mu_j + \nu_u}} \binom{\mu_j}{\ell_{1j}} \binom{\nu_j}{\ell_{2u}} \frac{1}{|\log(p_1^{2c_1} \dots p_r^{2c_r} q_1^{d_1} \dots q_t^{d_t})|} \\ &\ll M^2 N \sum_{(\ell_{11}, \dots, \ell_{1r}, \ell_{21}, \dots, \ell_{2t})} \prod_{1 \leq j \leq r} \prod_{1 \leq u \leq t} \frac{1}{2^{\mu_j + \nu_u}} \binom{\mu_j}{\ell_{1j}} \binom{\nu_j}{\ell_{2u}} \\ &\ll M^2 N \prod_{1 \leq j \leq r} \prod_{1 \leq u \leq t} \sum_{\ell_{1j}} \frac{1}{2^{\mu_j}} \binom{\mu_j}{\ell_{1j}} \sum_{\ell_{2u}} \frac{1}{2^{\nu_u}} \binom{\nu_u}{\ell_{2u}} \\ &\ll M^2 N. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

2.3 Borne supérieure

2.3.1 Méthode de grand valeur et une estimation faible

En suivant la méthode mise en œuvre par Soundarajan dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on déduit une estimation faible pour $\mathcal{M}_r(T, H; f)$.

Proposition 2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et soit ε un nombre positif arbitrairement petit. On suppose l'HRG pour $L(s, f)$. Il existe une constante $c_0(r, \varepsilon)$ telle que*

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) \ll_{f, r, \varepsilon} H(\log T)^{c_0(r, \varepsilon)}$$

se vérifie uniformément pour $T \geq 2$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$.

Démonstration. Pour $T \geq 2$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $v \in \mathbb{R}$, définit la mesure de Lebesgue

$$\mathcal{S}_{T, H}(v) := \left| \left\{ \tau \in [T, T + H] : \log |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)| \geq v \right\} \right|.$$

On peut écrire

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) = - \int_{\mathbb{R}} e^{2rv} d\mathcal{S}_{T, H}(v) = 2r \int_{\mathbb{R}} e^{2rv} \mathcal{S}_{T, H}(v) dv. \quad (2.3.1)$$

On définit $x := T^{4/v}$ et $z := T^{4/(v \log_2 T)}$. En bornant la seconde somme à droite de (2.2.6) dans la Proposition 2.2.1 trivialement, et en prenant $\varpi = \frac{1}{2}$, on a

$$\log |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)| \leq S_1(\tau) + S_2(\tau) + \tfrac{1}{2}v + O(\log_3 T)$$

pour $v \geq 10 \log_2 T$ et $T \geq T_0(f, r, \varepsilon)$, où

$$S_1(\tau) := \left| \sum_{p \leq z} \frac{b_f(p)}{p^{1/2+1/(2 \log x)+i\tau}} \frac{\log(x/p)}{\log x} \right|,$$

et

$$S_2(\tau) := \left| \sum_{z < p \leq x} \frac{b_f(p)}{p^{1/2+1/(2 \log x)+i\tau}} \frac{\log(x/p)}{\log x} \right|.$$

Lorsque $\log |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)| \geq v$, on a

$$S_1(\tau) \geq \tfrac{3}{8}v =: v_1 \quad \text{ou} \quad S_2(\tau) \geq \tfrac{1}{8}v =: v_2.$$

Grâce au Lemme 2.2.2, on peut déduire, pour tout entier positif $\ell \leq \log(H/\log H)/\log z$,

$$\left| \left\{ \tau \in [T, T + H] : S_1(\tau) \geq v_1 \right\} \right| \leq \int_T^{T+H} \left(\frac{S_1(\tau)}{v_1} \right)^{2\ell} d\tau \ll \ell! H \left(\sum_{p \leq z} \frac{|b_f(p)|^2}{p} \right)^\ell.$$

En faisant appel à l'équation (1.1.8) et la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ($n \rightarrow \infty$), on a

$$|\{\tau \in [T, T+H] : S_1(\tau) \geq v_1\}| \ll H\sqrt{\ell} \left(\frac{\ell \log_2 T}{ev_1^2} \right)^\ell,$$

puisque $\log_z \leq \log_2 T$.

En posant $\ell = \lceil v_1^2 / \log_2 T \rceil$ si $v \leq \frac{\varepsilon}{2}(\log_2 T)^2$ et $\ell = \lceil 10v \rceil$ si $v > \frac{\varepsilon}{2}(\log_2 T)^2$, on obtient

$$|\{\tau \in [T, T+H] : S_1(\tau) \geq v_1\}| \ll \begin{cases} \frac{Hv}{\sqrt{\log_2 T}} e^{-9v^2/(64\log_2 T)} & \text{si } v \leq \frac{\varepsilon}{2}(\log_2 T)^2, \\ He^{-4v \log v} & \text{si } v > \frac{\varepsilon}{2}(\log_2 T)^2. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

De même, on a

$$|\{\tau \in [T, T+H] : S_2(\tau) \geq v_2\}| \leq \int_T^{T+H} \left| \frac{8S_2(\tau)}{v} \right|^{2\ell} d\tau \ll H\sqrt{\ell} \left(\frac{64\ell \log_2 T}{v^2} \right)^\ell.$$

En posant $\ell = \lceil v\varepsilon/4 - 1 \rceil$ et en utilisant Lemme 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} |\{\tau \in [T, T+H] : S_2(\tau) \geq \frac{1}{8}v\}| &\ll H \exp \left\{ \frac{1}{2} \log \ell + \ell(\log 64 + \log \ell + \log_3 T - 2 \log v) \right\} \\ &\ll H \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{8}v \log v \right\} \end{aligned}$$

en posant $v > \log_2 T$. Avec la majoration (2.3.2), on obtient

$$\mathcal{S}_{T,H}(v) \ll \begin{cases} \frac{Hv}{\sqrt{\log_2 T}} e^{-9v^2/(64\log_2 T)} & \text{si } 10\log_2 T \leq v \leq \frac{1}{2}(\log_2 T) \log_3 T, \\ He^{-\frac{\varepsilon}{33}v \log v} & \text{si } v > \frac{1}{2}(\log_2 T) \log_3 T. \end{cases}$$

Donc, pour $\log_2 T < V \leq \frac{1}{2} \log_2 T \log_3 T$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\log_2 T}^{\log_2 T \log_3 T/2} e^{2rv} H \frac{v}{\sqrt{\log_2 T}} \exp\left(-\frac{9v^2}{64\log_2 T}\right) dv \\ &= H \int_{\sqrt{\log_2 T}}^{\sqrt{\log_2 T} \log_3 T/2} e^{2rV} \sqrt{\log_2 T} V \exp\left(-\frac{9V^2}{64}\right) \sqrt{\log_2 T} dV \\ &\ll H \log_2 T \log_3 T \log^{\frac{64}{9}r^2+\varepsilon} T \int_{\sqrt{\log_2 T}}^{\sqrt{\log_2 T} \log_3 T/2} \exp\left(-\left(\frac{3V}{8} - 8r\sqrt{\log_2 T}\right)^2\right) dV \\ &\ll H \log_2 T \log_3 T \log^{\frac{64}{9}r^2+\varepsilon} T. \end{aligned}$$

De même, pour $V > \frac{1}{2} \log_2 T \log_3 T$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\log_2 T \log_3 T/2}^{\log T} e^{2rv} H \exp\left(-\frac{\varepsilon}{33} V \log V\right) dV \\ &= H \int_{\log_2 T \log_3 T/2}^{\log T} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{33} V \log V + 2rV\right) dV \\ &\ll H \log T. \end{aligned}$$

En utilisant la borne triviale $\mathcal{S}_{T,H}(v) \leq H$ pour $v \leq 10 \log_2 T$, on déduit, pour $10\sqrt{\log_2 T} \leq V \leq \log_2 T$,

$$\int_{10\sqrt{\log_2 T}}^{\log_2 T} e^{2rv} H dV \ll H \log^{2r} T.$$

En combinant ces majorations avec (2.3.1), on peut obtenir l'inégalité souhaitée. \square

Remarque 7. — Ce résultat peut être amélioré en remplaçant la puissance $c_0(r, \varepsilon)$ par $r^2 + \varepsilon$ avec cette méthode et un calcul plus délicat. Quand même, il suffit pour notre usage plus tard.

— Nous avons raffiné ce résultat lors de la sous-section suivante avec la méthode de Harper [28].

2.3.2 Idée de la preuve de la borne supérieure

Cette section contient la preuve de la borne supérieure de (2.1.12). Les preuves des Proposition 2.3.2 et Proposition 2.3.3 seront données dans la section prochaine.

Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit, $r > 0$, $T \geq 100$ et soit $c(\varepsilon)$ une constante positive grande dépendante de ε . On définit la suite $\{\psi_i\}_{i \geq 0}$ et le nombre entier I par

$$\psi_0 := 0, \quad \psi_i := \frac{20^{i-1}}{(\log_2 T)^2} \quad (i \geq 1), \quad (2.3.3)$$

$$I = I_{\varepsilon,r,T} := 1 + \max\{i : \psi_i \leq e^{-c(\varepsilon)r}\} \leq (2/\log 20) \log_3 T. \quad (2.3.4)$$

On définit l'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{r,T,H}$ par

$$\mathcal{T} := \{\tau \in [T, T+H] : |F_i(\tau)| \leq \psi_i^{-3/4} \quad (1 \leq i \leq I)\}, \quad (2.3.5)$$

où $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et

$$F_i(\tau) := \Re \sum_{T^{\psi_{i-1}} < p \leq T^{\psi_i}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_i}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_i \log T)+i\tau} \log T^{\psi_i}}. \quad (2.3.6)$$

Pour $1 \leq i \leq j \leq I$, on définit

$$G_{i,j}(\tau) := \Re \left(\sum_{T^{\psi_{i-1}} < p \leq T^{\psi_i}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} \right). \quad (2.3.7)$$

Et pour $0 \leq j \leq I - 1$, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_j := \{ \tau \in [T, T + H] : |G_{i,\ell}(\tau)| \leq \psi_i^{-3/4} \text{ (} 1 \leq i \leq j \text{ et } i \leq \ell \leq I) \\ \text{mais } |G_{j+1,\ell}(\tau)| > \psi_{j+1}^{-3/4} \text{ pour un certain } j + 1 \leq \ell \leq I \}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Ainsi définis, \mathcal{T} et les \mathcal{S}_j sont disjoints et satisfont

$$[T, T + H] = \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{0 \leq j \leq I-1} \mathcal{S}_j \right).$$

Donc, on peut écrire

$$\mathcal{M}_r(T, H; f) = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1 + \cdots + \mathfrak{L}_{I-1}, \quad (2.3.9)$$

où

$$\mathfrak{L} := \int_{\mathcal{T}} |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} d\tau, \quad \mathfrak{L}_j := \int_{\mathcal{S}_j} |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} d\tau.$$

Proposition 2.3.2. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et ε un nombre positif arbitrairement petit. Avec les notations précédentes, on a*

$$\int_{\mathcal{T}} \exp \left\{ 2r \Re \left(\sum_{p \leq T^{\psi_I}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_I/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right) \right\} d\tau \ll H(\log T)^{r^2},$$

uniformément pour $T \geq 100$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$, où la constante impliquée dépend de f , r et ε .

Proposition 2.3.3. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et soit ε un nombre premier arbitrairement petit. On a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_j} \exp \left\{ 2r \Re \left(\sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_j/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right) \right\} d\tau \\ \ll H(\log T)^{r^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} \right) \end{aligned}$$

uniformément pour $T \geq 100$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $1 \leq j \leq I - 1$, où la constante impliquée dépend de f , r et ε .

On suppose l'HRG pour $L(s, f)$.

D'après le théorème des nombres premiers, on a trivialement

$$\left| \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{b_f(p^2) \log p^2}{p^{1+2/\log x+2i\tau} \log x} \right| \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{4 \log p}{p \log x} \ll 1.$$

En combinant avec (2.2.6) et en posant $\varpi = 1$, on a, pour $(\log T)^{10} \leq x \leq T^2$,

$$\log |L(\tfrac{1}{2} + i\tau, f)| \leq \Re \sum_{p \leq x} \frac{b_f(p) \log(x/p)}{p^{1/2+1/\log x+i\tau} \log x} + \frac{1}{2} \Re \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+i2\tau}} + 2 \frac{\log T}{\log x} + O_f(1), \quad (2.3.10)$$

où pour la deuxième sommation on a utilisé la relation

$$p^{-2/\log x} = e^{-2 \log p / \log x} = 1 + O(\log p / \log x),$$

dont le terme erreur nous donne $O(1)$.

Premièrement, en appliquant (2.3.10) avec $x = T^{\psi_I}$ et avec la Proposition 2.3.2, on déduit immédiatement

$$\mathfrak{L} \ll H(\log T)^{r^2}. \quad (2.3.11)$$

Deuxièmement, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le Lemme 2.3.5 (donné plus tard) et la Proposition 2.3.1 impliquent

$$\mathfrak{L}_0 \leq \left(|\mathcal{S}_0| \int_{\mathcal{S}_0} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{4r} d\tau \right)^{1/2} \ll \left(H e^{-(\log_2 T)^2/10} H(\log T)^{c_0(\varepsilon, r)} \right)^{1/2} \ll H. \quad (2.3.12)$$

Finalement, pour $1 \leq j \leq I - 1$ l'inégalité (2.3.10) avec $x = T^{\psi_j}$ implique que

$$\log |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)| \leq \Re \left(\sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_j/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right) + \frac{2}{\psi_j} + O_f(1).$$

Grâce à la Proposition 2.3.3, il s'ensuit que

$$\mathfrak{L}_j \ll H(\log T)^{r^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} + 4r \psi_j^{-1} \right).$$

En résumant les $1 \leq j \leq I - 1$, on déduit que

$$\mathfrak{L}_1 + \cdots + \mathfrak{L}_{I-1} \ll H(\log T)^{r^2}. \quad (2.3.13)$$

Enfin, en combinant (2.3.11), (2.3.12) et (2.3.13), on obtient la borne supérieure dans le Théorème 2.1.1.

2.3.3 Raffinement de la méthode d'Harper

La méthode de Harper est un raffinement de celle de Soundararajan. A partir de (2.2.6), Harper a découpé la première somme à gauche et considéré la contribution de la deuxième. On suit la méthode de Harper pour la première somme. Le traitement pour la deuxième est un peu différent : on ne tronque pas la somme par $\log T$ (il demande les suppositions additionnelles de l'HR pour $\zeta(s)$ et de l'HRG pour $L(s, \text{sym}^2 f)$), mais la considère avec la première en choisissant les bons paramètres.

Lemme 2.3.4. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et ε un nombre positif arbitrairement petit. Soit \mathcal{T} l'ensemble défini par (2.3.5). On a*

$$\int_{\mathcal{T}} \exp \left(2r \Re \sum_{p \leq T^{\psi_I}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}} \right) d\tau \ll H(\log T)^{r^2}, \quad (2.3.14)$$

uniformément pour $T \geq 100$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$, où la constante impliquée dépend de f , r et ε .

Démonstration. On désigne par \mathfrak{J} l'intégrale à gauche de (2.3.14), on peut écrire

$$\mathfrak{J} = \int_{\tau \in \mathcal{T}} \prod_{1 \leq i \leq I} (\exp\{rF_i(\tau)\})^2 d\tau$$

où $F_i(\tau)$ est défini par (2.3.6).

La fonction exponentielle s'écrit sous la forme

$$e^t = \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{t^j}{j!} + O(e^{-J}) \quad (2.3.15)$$

uniformément pour $J \geq 0$ et $|t| \leq \frac{1}{9}J$, où on a appliqué la formule de Stirling pour écrire

$$e^J \sum_{j > J} \frac{t^j}{j!} \ll \sum_{j > J} \frac{(et)^j}{(j/e)^j \sqrt{j}} \ll \sum_{j > J} \frac{(e^2/9)^j}{\sqrt{j}} \ll 1.$$

D'après la définition de \mathcal{T} , on a $|F_i(\tau)| \leq \psi_i^{-3/4}$ pour $\tau \in \mathcal{T}$ et $1 \leq i \leq I$. En appliquant (2.3.15) sous la forme

$$e^t = \{1 + O(e^{-J})\} \sum_{0 \leq j \leq J} t^j/j!$$

avec $J = [100r\psi_i^{-3/4}]$ et $t = rF_i(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int_{\mathcal{T}} \prod_{1 \leq i \leq I} \left\{ 1 + O\left(e^{-100r\psi_i^{-3/4}}\right) \right\} \left(\sum_{0 \leq j \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(rF_i(\tau))^j}{j!} \right)^2 d\tau \\ &\ll_r \int_T^{T+H} \prod_{1 \leq i \leq I} \left(\sum_{0 \leq j \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(rF_i(\tau))^j}{j!} \right)^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

où on a utilisé l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq I} e^{-100r\psi_i^{-3/4}} &= \sum_{1 \leq i \leq I} e^{-ab^{-i}} \quad (a = 20^{3/4}100r(\log_2 T)^{3/2}, b = 20^{3/4}) \\ &\leq \int_1^{I+1} e^{-ab^{-t}} dt \quad (u = ab^{-t}, dt = -du/(u \log b)) \\ &= \frac{1}{\log b} \int_{100b^{-1}r\psi_I^{-3/4}}^{a/b} \frac{e^{-u}}{u} du \ll_r 1. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

En développant le carré et puis $(rF_i(\tau))^j$, on peut déduire que

$$\mathfrak{J} \ll_r \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} C_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \int_T^{T+H} \prod_{1 \leq i \leq I} \left(\prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} \cos(\tau \log p_i(m)) \cos(\tau \log q_i(n)) \right) d\tau, \quad (2.3.18)$$

où

$$\mathbf{j} := (j_1, j_2, \dots, j_I), \quad \mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_I)$$

avec $0 \leq j_i, u_i \leq 100r\psi_i^{-3/4}$, et

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= (p_1(1), \dots, p_1(j_1); p_2(1), \dots, p_2(j_2); \dots; p_I(1), \dots, p_I(j_I)) \\ \mathbf{q} &:= (q_1(1), \dots, q_1(u_1); q_2(1), \dots, q_2(u_2); \dots; q_I(1), \dots, q_I(u_I)) \end{aligned}$$

avec les nombres premiers $p_i(m)$ et $q_i(n)$ vérifiant

$$T^{\psi_i-1} < p_i(1), \dots, p_i(j_i); q_i(1), \dots, q_i(u_i) \leq T^{\psi_i} \quad (1 \leq i \leq I),$$

et

$$C_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} := \prod_{1 \leq i \leq I} \frac{r^{j_i+u_i}}{j_i! u_i!} \left(\prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} \frac{\lambda_f(p_i(m)) \log(T^{\psi_i}/p_i(m))}{p_i(m)^{1/2+1/(\psi_i \log T)} \log T^{\psi_i}} \frac{\lambda_f(q_i(n)) \log(T^{\psi_i}/q_i(n))}{q_i(n)^{1/2+1/(\psi_i \log T)} \log T^{\psi_i}} \right).$$

Grâce au Lemme 2.2.5 avec $M = 1$, on a

$$\mathfrak{J} \ll_r H \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \quad (2.3.19)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &:= \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} D_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \Theta \left(\prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} p_i(m) q_i(n) \right), \\ \mathfrak{J}_2 &:= \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} D_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} p_i(m) q_i(n), \end{aligned}$$

avec

$$D_{\mathbf{j}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} := \prod_{1 \leq i \leq I} \frac{r^{j_i+u_i}}{j_i! u_i!} \left(\prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} \frac{|\lambda_f(p_i(m)) \lambda_f(q_i(n))|}{\sqrt{p_i(m) q_i(n)}} \right).$$

Comme

$$\prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{\substack{1 \leq m \leq j_i \\ 1 \leq n \leq u_i}} p_i(m) q_i(n) \leq \prod_{1 \leq i \leq I} T^{\psi_i(j_i+u_i)} \leq \prod_{1 \leq i \leq I} T^{200r\psi_i^{1/4}} \leq T^{\varepsilon/10},$$

on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 &\ll T^{\varepsilon/10} \prod_{1 \leq i \leq I} \left\{ \sum_{0 \leq j \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{r^j}{j!} \left(\sum_{T^{\psi_i-1} < p \leq T^{\psi_i}} \frac{|\lambda_f(p)|}{\sqrt{p}} \right)^j \right\}^2 \\ &\ll T^{\varepsilon/10} \prod_{1 \leq i \leq I} T^{200r\psi_i^{1/4}} \left(\sum_{0 \leq j \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{r^j}{j!} \right)^2 \\ &\ll T^{2\varepsilon/10} e^{2rI} \ll_{\varepsilon, r} T^{3\varepsilon/10}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Pour le premier terme à droite de (2.3.19), on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &\leq \prod_{1 \leq i \leq I} \sum_{0 \leq m \leq 200r\psi_i^{-3/4}} \sum_{\substack{j+u=m \\ j, u \geq 0}} \frac{r^m}{j! u!} \sum_{T^{\psi_i-1} < p_1, \dots, p_m \leq T^{\psi_i}} \frac{\Theta(p_1 \cdots p_m) |\lambda_f(p_1) \cdots \lambda_f(p_m)|}{\sqrt{p_1 \cdots p_m}} \\ &\leq \prod_{1 \leq i \leq I} \sum_{0 \leq m \leq 200r\psi_i^{-3/4}} \frac{r^m 2^m}{m!} \sum_{T^{\psi_i-1} < p_1, \dots, p_m \leq T^{\psi_i}} \frac{\Theta(p_1 \cdots p_m) |\lambda_f(p_1) \cdots \lambda_f(p_m)|}{\sqrt{p_1 \cdots p_m}}. \end{aligned}$$

Selon la définition de $\Theta(\cdot)$ dans Lemme 2.2.5, on peut assumer $m = 2n$. Alors,

$$\mathfrak{J}_1 \leq \prod_{1 \leq i \leq I} \sum_{0 \leq n \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(2r)^{2n}}{(2n)!} \sum_{T^{\psi_{i-1}} < p_1, \dots, p_n \leq T^{\psi_i}} \frac{|\lambda_f(p_1) \cdots \lambda_f(p_n)|^2}{p_1 \cdots p_n} \Phi(p_1, \dots, p_n), \quad (2.3.21)$$

où

$$\Phi(p_1, \dots, p_n) := \Theta(p_1^2 \cdots p_n^2) \frac{|\{(q_1, \dots, q_{2n}) : q_1 \cdots q_{2n} = p_1^2 \cdots p_n^2\}|}{|\{(q_1, \dots, q_n) : q_1 \cdots q_n = p_1 \cdots p_n\}|} \quad (2.3.22)$$

avec les nombres premiers $T^{\psi_{i-1}} < q_1, \dots, q_{2n} \leq T^{\psi_i}$. On écrit $p_1^2 \cdots p_n^2 = p_{n_1}^{2\nu_1} \cdots p_{n_\ell}^{2\nu_\ell}$ avec $(p_{n_i}, p_{n_j}) = 1$ pour $i \neq j$. Le calcul direct donne

$$\begin{aligned} \Theta(p_1^2 \cdots p_n^2) &= \frac{1}{2^{2n}} \prod_{1 \leq j \leq \ell} \frac{(2\nu_j)!}{(\nu_j!)^2}, \\ |\{(q_1, \dots, q_{2n}) : q_1 \cdots q_{2n} = (p_1 \cdots p_n)^2\}| &= \frac{(2n)!}{\prod_{1 \leq j \leq \ell} (2\nu_j)!}, \\ |\{(q_1, \dots, q_n) : q_1 \cdots q_n = p_1 \cdots p_n\}| &= \frac{n!}{\prod_{1 \leq j \leq \ell} \nu_j!}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement

$$\Phi(p_1, \dots, p_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! \prod_{1 \leq j \leq \ell} \nu_j!} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}.$$

En combinant (2.3.21), on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &\leq \prod_{1 \leq i \leq I} \sum_{0 \leq n \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{1}{n!} \left(r^2 \sum_{T^{\psi_{i-1}} < p \leq T^{\psi_i}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right)^n \\ &\leq \prod_{1 \leq i \leq I} \exp \left(r^2 \sum_{T^{\psi_{i-1}} < p \leq T^{\psi_i}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right) \\ &\leq \exp \left(r^2 \sum_{p \leq T^{\psi_I}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right). \end{aligned}$$

En rappelant l'orthogonalité de Selberg (1.1.8), on a la majoration

$$\mathfrak{J}_1 \ll_{\varepsilon, r} (\log T)^{r^2}. \quad (2.3.23)$$

La borne souhaitée découle de (2.3.19), (2.3.20) et (2.3.23). \square

On considère de plus l'intégrale sur \mathcal{I} ensemble avec la seconde sommation.

Preuve de la Proposition 2.3.2. Pour $0 \leq m \leq M_T := [\psi_I \log T / \log 4]$ ($2^m \leq T^{\psi_I/2}$), on définit

$$\begin{aligned} P_m(\tau) &:= \Re \left(\frac{1}{2} \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right), \\ \mathcal{P}(m) &:= \left\{ \tau \in \mathcal{I} : |P_m(\tau)| > 2^{-m/10} \text{ mais } |P_j(\tau)| \leq 2^{-j/10} \text{ (} m+1 \leq j \leq M_T \text{)} \right\}. \end{aligned}$$

Si τ n'appartient à aucun de ces ensembles, $|P_j(\tau)| \leq 2^{-j/10}$ pour tout $j \leq M_T$ et

$$\Re\left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_I/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}}\right) \ll 1.$$

On désigne par

$$\mathfrak{J} = \int_{\mathcal{I}} \exp\left\{2r \Re\left(\sum_{p \leq T^{\psi_I}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_I/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}}\right)\right\} d\tau,$$

La contribution de $\tau \notin P_m(\tau)$ pour tout m à \mathfrak{J} est $\ll T^\varepsilon (\log T)^{r^2}$ grâce au Lemme 2.3.4. Soit \mathfrak{J}_m l'intégrale de la même intégrande sur $\mathcal{P}(m)$. Alors

$$\mathfrak{J} \ll H(\log T)^{r^2} + \mathfrak{J}_0 + \cdots + \mathfrak{J}_{M_T}. \quad (2.3.24)$$

Puisque $|P_m(\tau)| \geq 2^{-m/10}$ pour $\tau \in \mathcal{P}(m)$, et en appliquant le Lemme 2.2.5 avec $N = 1$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(m)| &= \int_{\mathcal{P}(m)} d\tau \leq \int_T^{T+H} (2^{m/10} P_m(\tau))^{2n} d\tau \\ &= 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq 2n} \frac{b_f(p_i^2)}{2p_i} \right) \int_T^{T+H} \prod_{1 \leq i \leq 2n} \cos(2\tau \log p_i) d\tau \\ &= 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq 2n} \frac{b_f(p_i^2)}{2p_i} \right) \{H\Theta(p_1 \cdots p_{2n}) + O((p_1 \cdots p_{2n})^2)\}, \end{aligned}$$

où

$$n = n(m) := \begin{cases} \lfloor 2^{3m/4} \rfloor & \text{si } 2^m \leq \log T, \\ c(\varepsilon, r) & \text{si } 2^m > \log T. \end{cases} \quad (2.3.25)$$

Ici $c(\varepsilon, r)$ est une constante positive assez grande et $c(\varepsilon, r) \in [6r^2 + 2r, e^{c(\varepsilon)r} \varepsilon / 700]$. Ainsi, il est facile de montrer que la contribution du terme d'erreur $O((p_1 \cdots p_{2n})^2)$ à $|\mathcal{P}(m)|$ est

$$\ll 2^{mn/5} 2^{5mn} \ll T^{\varepsilon/10},$$

puisque $|b_f(p^2)| \leq 2$.

Pour le terme principal, d'après la définition de $\Theta(\cdot)$, on peut supposer $p_1 \cdots p_{2n} = q_1^2 \cdots q_n^2$. Comme auparavant, on peut borner la contribution du terme principal à $\mathcal{P}(m)$ et écrire, avec la notation (2.3.22),

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(m)| &\ll H 2^{mn/5} \sum_{2^m < q_1, \dots, q_n \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{b_f(q_i^2)^2}{4q_i^2} \right) \Phi(q_1, \dots, q_n) + H^{1/10} \\ &\leq H 2^{mn/5} \left(\sum_{2^m < q \leq 2^{m+1}} \frac{1}{q^2} \right)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} + H^{1/10} \\ &\ll H 2^{-(4/5)mn} n^n + H^{1/10}. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

On utilise l'inégalité de Cauchy, le Lemme 2.3.4 et (2.3.26), puis on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_m &\ll \left\{ \int_{\mathcal{T}} \exp \left(4r \Re \sum_{p \leq T^{\psi_I}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}} \right) d\tau \int_{\mathcal{P}(m)} (\log T)^{2r} d\tau \right\}^{1/2} \\
&\ll \left(H(\log T)^{4r^2} \times (H2^{-(4/5)mn} n^n + H^{1/10})(\log T)^{2r} \right)^{1/2} \\
&\ll H(\log T)^{2r^2+r} 2^{-(2/5)mn} n^{n/2} + H^{3/5}.
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Dès lors, en appliquant la définition de n (2.3.25), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\log_2 T)^2 \leq 2^m \leq T^{\psi_I/2}} \mathfrak{J}_m \\
&\ll H(\log T)^{2r^2+r} \left(\sum_{(\log_2 T)^2 \leq 2^m \leq \log T} 2^{-(1/40)mn} + \sum_{\log T \leq 2^m \leq T^{\psi_I/2}} 2^{-(2/5)mn} \right) + H^{9/10} \\
&\ll H(\log T)^{2r^2+r} (e^{-(\log_2 T)^{3/2}/30} + (\log T)^{-c(\varepsilon,r)/10}) + H^{9/10} \\
&\ll H(\log T)^{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

On va majorer \mathfrak{J}_m lorsque $2^m \leq (\log_2 T)^2$. D'après la définition de $\mathcal{P}(m)$, on a

$$\Re \left(\sum_{p \leq 2^{m+1}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_I/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right) \ll \sum_{p \leq 2^{m+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \right) + 1 \leq c2^{m/2}$$

pour $\tau \in \mathcal{P}(m)$, où $c > 0$ est une constante positive absolue. On introduit la notation

$$F(\tau) := \Re \sum_{2^{m+1} < p \leq T^{\psi_I}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_I}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_I \log T)+i\tau} \log T^{\psi_I}}.$$

Grâce à la définition de \mathcal{T} et $\mathcal{P}(m)$, et comme (2.3.16), on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_m &\ll e^{cr2^{m/2}} \int_{\mathcal{P}(m)} \exp\{2rF(\tau)\} d\tau \\
&\ll e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \int_{\mathcal{T}} P_m(\tau)^{2n} \prod_i \left(\sum_{0 \leq j \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(rF_i(\tau))^j}{j!} \right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

où $F_i(\tau)$ est définie par (2.3.6). Puisque les nombres premiers p dans $P_m(\tau)$ sont différents de ceux de $F(\tau)$, le Lemme 2.2.5 est applicable avec M (produit des nombres premiers de $P_m(\tau)$) et N (produit des nombres premiers de $F(\tau)$). Alors, on peut écrire

$$\mathfrak{J}_m \ll MA + ER,$$

où le terme principal

$$\begin{aligned} MA &= He^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{2^m < p_1, p_2, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \frac{|b_f(p_1^2) \cdots b_f(p_{2n}^2)| \Theta(p_1 \cdots p_{2n})}{p_1 \cdots p_{2n}} \times \mathfrak{J}_1 \\ &\ll He^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, p_2, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \frac{\Theta(p_1 \cdots p_{2n})}{p_1 \cdots p_{2n}} \times \mathfrak{J}_1 \end{aligned}$$

et le terme d'erreur

$$\begin{aligned} ER &= e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{2^m < p_1, p_2, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \frac{|b_f(p_1^2) \cdots b_f(p_{2n}^2)| (p_1 \cdots p_{2n})^2}{p_1 \cdots p_{2n}} \times \mathfrak{J}_2 \\ &\ll e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, p_2, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} (p_1 \cdots p_{2n}) \times \mathfrak{J}_2 \end{aligned}$$

puisque $|b_f(p^2)| < 2$ et $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ sont définis dans (2.3.19).

Pour $2^m \leq (\log_2 T)^2$ et $n = \lfloor 2^{3m/4} \rfloor$, on a

$$e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \ll \exp\left(cr(\log_2 T) \times \frac{2}{5}(\log_2 T)^{3/2} \log_3 T\right) \ll T^{\varepsilon/10},$$

et

$$\sum_{2^m < p_1, p_2, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} (p_1 \cdots p_{2n}) = \left(\sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} p \right)^{2n} \ll 2^{2n} 2^{4mn} \ll T^{\varepsilon/10}.$$

Nous obtenons ainsi

$$ER \ll H^{3/10}$$

au vu de la majoration (2.3.20).

Un argument similaire à (2.3.21) et (2.3.23) nous donne, pour $2^m \leq (\log_2 T)^2$ et $n = \lfloor 2^{3m/4} \rfloor$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_m &\ll He^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \exp\left(r^2 \sum_{2^{m+1} < p \leq T^{\psi_I}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p}\right) \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \frac{\Theta(p_1 \cdots p_{2n})}{p_1 \cdots p_{2n}} + H^{3/10} \\ &\ll H(\log T)^{r^2} e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \left(\sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \frac{1}{p^2} \right)^n + H^{3/10} \\ &\ll H(\log T)^{r^2} e^{cr2^{m/2} - 2^{3m/4}}, \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

qui implique que

$$\sum_{2^m \leq (\log_2 T)^2} \mathfrak{J}_m \ll H(\log T)^{r^2} \sum_{2^m \leq (\log_2 T)^2} e^{cr2^{m/2} - 2^{3m/4}} \ll H(\log T)^{r^2}. \tag{2.3.30}$$

En insérant (2.3.28) et (2.3.30) dans (2.3.24), on en déduit l'inégalité souhaitée. \square

De la même façon que le Lemme 2.3.4, on a le lemme suivant.

Lemme 2.3.5. Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et soit ε un nombre positif arbitrairement petit. Soit \mathcal{S}_j l'ensemble défini par (2.3.8). On a

$$\int_{\mathcal{S}_j} \exp \left(2r\Re \sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} \right) d\tau \ll H(\log T)^{r^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{51} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} \right)$$

uniformément pour $T \geq 100$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $1 \leq j \leq I-1$, où la constante impliquée dépend de f , r et ε . De plus, on a

$$|\mathcal{S}_0| \ll H e^{-(\log_2 T)^2/10}.$$

Démonstration. Puisque la preuve est similaire à celle du Lemme 2.3.4, on esquisse la preuve ici. Pour $1 \leq j < u$, on définit

$$\mathcal{S}_{j,u} := \left\{ \tau \in [T, T+H] : |G_{i,j}(\tau)| \leq \psi_i^{-3/4} \ (1 \leq i \leq j), \text{ mais } |G_{j+1,u}(\tau)| > \psi_{j+1}^{-3/4} \right\},$$

où $G_{i,j}(\tau)$ est défini par (2.3.7). On dénote par \mathfrak{K}_j l'intégrale à borner et par $\mathfrak{K}_{j,u}$ l'intégrale correspondante sur $\mathcal{S}_{j,u}$. Ainsi

$$\mathfrak{K}_j \leq \mathfrak{K}_{j,j+1} + \mathfrak{K}_{j,j+2} + \cdots + \mathfrak{K}_{j,I} \quad (2.3.31)$$

et avec la notation $\ell_\varepsilon := \lceil \varepsilon / (10\psi_{j+1}) \rceil$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{j,u} &= \int_{\mathcal{S}_{j,u}} \prod_{1 \leq i \leq j} (\exp\{rG_{i,j}(\tau)\})^2 d\tau \\ &\ll \int_{\substack{|G_{i,j}(\tau)| \leq \psi_i^{-3/4} \\ (1 \leq i \leq j)}} \prod_{1 \leq i \leq j} (\exp\{rG_{i,j}(\tau)\})^2 (\psi_{j+1}^{3/4} G_{j+1,u}(\tau))^{2\ell_\varepsilon} d\tau \\ &\ll \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} \int_T^{T+H} \prod_{1 \leq i \leq j} \left(\sum_{0 \leq n \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(rG_{i,j}(\tau))^n}{n!} \right)^2 G_{j+1,u}(\tau)^{2\ell_\varepsilon} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Dans l'inégalité dernière, on a utilisé un argument similaire que celui pour la première inégalité de (2.3.18). On développe le carré et la puissance n et $2\ell_\varepsilon$, et suit la preuve du Lemme 2.3.4 et de la Proposition 2.3.2 pour estimer la dernière intégrale. Puis on obtient

$$\mathfrak{K}_{j,u} \ll \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} \left\{ H \exp \left(r^2 \sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right) \left(\frac{\varepsilon \psi_{j+1}^{-1}}{20} \sum_{T^{\psi_j} < p \leq T^{\psi_{j+1}}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right)^{\ell_\varepsilon} + H^{4/5} \right\}$$

pour $j+1 \leq u \leq I$. En insérant dans (2.3.31), il résulte que

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_j &\ll H(I-j) \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} \times \\ &\times \left\{ \exp \left(r^2 \sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right) \left(\frac{\psi_{j+1}^{-1} \varepsilon}{20} \sum_{T^{\psi_j} < p \leq T^{\psi_{j+1}}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right)^{\ell_\varepsilon} + H^{-1/5} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Pour $j = 0$, la partie gauche de (2.3.33) vaut $|\mathcal{S}_0|$ qui est

$$\ll HI\psi_1^{(3/2)[\varepsilon/(10\psi_1)]} \left\{ \left(\frac{\psi_1}{20}\right)^{-[\varepsilon/(10\psi_1)]} + H^{-1/5} \right\} \ll He^{-\varepsilon(\log_2 T)^2/10},$$

grâce à (1.1.8) et puisque $I \ll \log_3 T$ et $\psi_1 = (\log_2 T)^{-2}$.

Pour $1 \leq j \leq I - 1$, la contribution de $H^{-1/5}$ à droite de (2.3.33) à \mathfrak{K}_j est

$$\ll (I - j)\psi_{j+1}^{(3/2)[\varepsilon/(10\psi_{j+1})]} H^{4/5} \ll H \exp\left(-\frac{\varepsilon}{51}\psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1}\right)$$

puisque $I \leq \log_3 T$. En remarquant que $I - j = \log(\psi_I/\psi_j)/\log 20 \leq \frac{\log \psi_{j+1}^{-1}}{\log 20}$, et

$$\sum_{T^{\psi_j} < p \leq T^{\psi_{j+1}}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \leq 4 \sum_{T^{\psi_j} < p \leq T^{\psi_{j+1}}} \frac{1}{p} \leq 40,$$

la contribution du premier terme à droite de (2.3.33) à \mathfrak{K}_j est

$$\ll H(\log T)^{r^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{51}\psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1}\right),$$

d'après (1.1.8). Cela achève la démonstration. \square

De la même manière que pour la Proposition 2.3.2, en remplaçant le Lemme 2.3.4 par Lemme 2.3.5, on peut déduire la Proposition 2.3.3.

Preuve de la Proposition 2.3.3. Pour $0 \leq m \leq M_{jT} := [\psi_j \log T / \log 4]$ ($2^m \leq T^{\psi_j/2}$), on définit

$$Q_m(\tau) := \Re\left(\frac{1}{2} \sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}}\right),$$

et

$$\mathcal{Q}(m) := \left\{ \tau \in \mathcal{S}_j : |Q_m(\tau)| > 2^{-m/10} \text{ mais } |Q_j(\tau)| \leq 2^{-j/10} \text{ (} m+1 \leq j \leq M_{jT} \text{)} \right\}.$$

Si τ n'appartient à aucun de ces ensembles, $|Q_j(\tau)| \leq 2^{-j/10}$ pour tout $j \leq M_T$ et

$$\Re\left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_j/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}}\right) \ll 1.$$

On dénote par \mathfrak{J}_j l'intégrale à estimer. La contribution de cette partie de τ à \mathfrak{J}_j est $\ll T^\varepsilon(\log T)^{r^2}$ grâce au Lemme 2.3.4. Soit $\mathfrak{J}_{j,m}$ l'intégrale de la même intégrande sur $\mathcal{Q}(m)$. Alors

$$\mathfrak{J}_j \ll H(\log T)^{r^2} + \mathfrak{J}_{j,0} + \cdots + \mathfrak{J}_{j,M_{jT}}. \quad (2.3.34)$$

Puisque $|Q_m(\tau)| \geq 2^{-m/10}$ pour $\tau \in \mathcal{Q}(m)$, et en appliquant le Lemme 2.2.5 avec $N = 1$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}(m)| &= \int_{\mathcal{Q}(m)} d\tau \leq \int_T^{T+H} (2^{m/10} Q_m(\tau))^{2n} d\tau \\ &= 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq 2n} \frac{b_f(p_i^2)}{2p_i} \right) \int_T^{T+H} \prod_{1 \leq i \leq 2n} \cos(2\tau \log p_i) d\tau \\ &= 2^{mn/5} \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq 2n} \frac{b_f(p_i^2)}{2p_i} \right) \{H\Theta(p_1 \cdots p_{2n}) + O((p_1 \cdots p_{2n})^2)\}, \end{aligned}$$

où

$$n = n(m) := \begin{cases} \lceil 2^{3m/4} \rceil & \text{si } 2^m \leq \log T, \\ c(\varepsilon, r) & \text{si } 2^m > \log T. \end{cases} \quad (2.3.35)$$

Ici $c(\varepsilon, r)$ est une constante positive assez grande et $c(\varepsilon, r) \in [6r^2 + 2r, e^{c(\varepsilon)r} \varepsilon / 700]$. Ainsi, il est facile de trouver que la contribution du terme d'erreur $O((p_1 \cdots p_{2n})^2)$ à $|\mathcal{Q}(m)|$ est

$$\ll 2^{mn/5} 2^{5mn} \ll T^{\varepsilon/10},$$

puisque $|b_f(p^2)| \leq 2$.

Pour le terme principal, d'après la définition de $\Theta(\cdot)$, on peut assumer $p_1 \cdots p_{2n} = q_1^2 \cdots q_n^2$. Comme auparavant, on peut borner la contribution du terme principal à $|\mathcal{Q}(m)|$ et écrire, avec la notation (2.3.22),

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}(m)| &\ll H 2^{mn/5} \sum_{2^m < q_1, \dots, q_n \leq 2^{m+1}} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{b_f(q_i^2)^2}{4q_i^2} \right) \Phi(q_1, \dots, q_n) + H^{1/10} \\ &\leq H 2^{mn/5} \left(\sum_{2^m < q \leq 2^{m+1}} \frac{1}{q^2} \right)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} + H^{1/10} \\ &\ll H 2^{-(4/5)mn} n^n + H^{1/10}. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

On utilise l'inégalité de Cauchy, le Lemme 2.3.5 et (2.3.36), puis on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{j,m} &\ll \left\{ \int_{\mathcal{S}_j} \exp \left(4r \Re \sum_{p \leq T^{\psi_j}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} \right) d\tau \int_{\mathcal{Q}(m)} (\log T)^{2r} d\tau \right\}^{1/2} \\ &\ll \left(H (\log T)^{4r^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{51} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} \right) \times (H 2^{-(4/5)mn} n^n + H^{1/10}) (\log T)^{2r} \right)^{1/2} \\ &\ll H (\log T)^{2r^2+r} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} \right) 2^{-(2/5)mn} n^{n/2} + H^{3/5}. \end{aligned}$$

Dès lors, en appliquant la définition de n (2.3.35), on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{(\log_2 T)^2 \leq 2^m \leq T^{\psi_j/2}} \mathfrak{J}_{j,m} \\
& \ll H(\log T)^{2r^2+r} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1}\right) \times \\
& \quad \times \left(\sum_{(\log_2 T)^2 \leq 2^m \leq \log T} 2^{-(1/40)mn} + \sum_{\log T \leq 2^m \leq T^{\psi_j/2}} 2^{-(2/5)mn} \right) + H^{9/10} \\
& \ll H(\log T)^{2r^2+r} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1}\right) \left(e^{-(\log_2 T)^{3/2}/30} + (\log T)^{-c(\varepsilon,r)/10} \right) + H^{9/10} \\
& \ll H(\log T)^{r^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

On majore $\mathfrak{J}_{j,m}$ lorsque $2^m \leq (\log_2 T)^2$. D'après la définition de $\mathcal{Q}(m)$, on a

$$\begin{aligned}
& \Re \left(\sum_{p \leq 2^{m+1}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq T^{\psi_j/2}} \frac{b_f(p^2)}{p^{1+2i\tau}} \right) \\
& \ll \sum_{p \leq 2^{m+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \right) + 1 \leq c2^{m/2}
\end{aligned}$$

pour $\tau \in \mathcal{Q}(m)$, où $c > 0$ est une constante positive absolue. On introduit la notation

$$\hat{F}_j(\tau) := \Re \sum_{2^{m+1} < p \leq T^{\psi_j}} \frac{\lambda_f(p) \log(T^{\psi_j}/p)}{p^{1/2+1/(\psi_j \log T)+i\tau} \log T^{\psi_j}}.$$

Grâce à la définition de \mathcal{I}_j et $\mathcal{Q}(m)$, et comme (2.3.32), on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_{j,m} & \ll e^{cr2^{m/2}} \int_{\mathcal{Q}(m)} \exp\{2r\hat{F}_j(\tau)\} d\tau \\
& \ll e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \int_{\mathcal{I}_j} Q_m(\tau)^{2n} \prod_{1 \leq i \leq j} \left(\sum_{0 \leq u \leq 100r\psi_i^{-3/4}} \frac{(rG_{i,j}(\tau))^u}{u!} \right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

où $G_{i,j}(\tau)$ est définie par (2.3.7). Lorsque les nombres premiers p dans $Q_m(\tau)$ sont différentes de ceux de $\hat{F}_j(\tau)$, le Lemme 2.2.5 est applicable avec M (produit des nombres premiers de $Q_m(\tau)$) et N (produit des nombres premiers de $G_{i,j}(\tau)$).

Un argument similaire à (2.3.33) nous donne, pour $2^m \leq (\log_2 T)^2$ et $n = [2^{3m/4}]$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{j,m} &\ll H(I-j) \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \left\{ \exp \left(r^2 \sum_{2^{m+1} < p \leq T^{\psi_j}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\varepsilon \psi_{j+1}^{-1}}{20} \sum_{T^{\psi_j} < p \leq T^{\psi_{j+1}}} \frac{|\lambda_f(p)|^2}{p} \right)^{\ell_\varepsilon} \sum_{2^m < p_1, \dots, p_{2n} \leq 2^{m+1}} \frac{\Theta(p_1 \cdots p_{2n})}{p_1 \cdots p_{2n}} + H^{-1/10} \right\} \\ &\ll H(I-j) (\log T)^{r^2} \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} e^{cr2^{m/2}} 2^{mn/5} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \left(\sum_{2^m < p \leq 2^{m+1}} \frac{1}{p^2} \right)^n \\ &\ll H(I-j) (\log T)^{r^2} \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} e^{cr2^{m/2} - 2^{3m/4}}, \end{aligned}$$

qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq (\log_2 T)^2} \mathfrak{J}_{j,m} &\ll H(I-j) (\log T)^{r^2} \psi_{j+1}^{(3/2)\ell_\varepsilon} \sum_{2^m \leq (\log_2 T)^2} e^{cr2^{m/2} - 2^{3m/4}} \\ &\ll H(I-j) (\log T)^{r^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{102} \psi_{j+1}^{-1} \log \psi_{j+1}^{-1} \right). \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

En insérant (2.3.37) et (2.3.38) dans (2.3.34), on en déduit l'inégalité souhaitée. \square

2.4 Borne inférieure

Dans cette section, en suivant la méthode mise en œuvre par Heath-Brown [32], on prouve la borne inférieure dans le Théorème 2.1.1.

Comme indiqué dans l'introduction, pour obtenir l'ordre correct de $\mathcal{M}_r(T, H; f)$, on applique la théorie de Rankin-Selberg.

On définit $\lambda_{f,r}(n)$ par la formule

$$L(s, f)^r = \sum_{n \geq 1} \lambda_{f,r}(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1). \tag{2.4.1}$$

Il est facile de voir que $\lambda_{f,r}(n)$ est multiplicative, et pour tous entiers positifs j et n on a

$$\lambda_{f,rj}(n) = \sum_{n=n_1 n_2 \cdots n_j} \lambda_{f,r}(n_1) \lambda_{f,r}(n_2) \cdots \lambda_{f,r}(n_j). \tag{2.4.2}$$

En particulier, on a

$$\lambda_{f,r}(p) = r \lambda_f(p) \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 : \lambda_{f,r}(n) \ll_{r,\varepsilon} n^\varepsilon \tag{2.4.3}$$

pour tous nombres premiers p et entiers n .

Par la suite, on écrit $r = u/v$. Ici, $v = 1$ et u est un nombre réel positif arbitraire si l'HRG se vérifie pour $L(s, f)$; sinon, u et v sont des entiers positifs premiers entre eux.

2.4.1 Estimations de la borne convexité

Pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$ et $2 \leq H \leq T$, on définit

$$J_{T,H}(\sigma) := \int_{\mathbb{R}} |L(\sigma + i\tau, f)|^{2r} w_{T,H}(\tau) d\tau$$

avec

$$w_{T,H}(\tau) := \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-2r(\tau-t)^2} dt,$$

où $\Delta_1 = T + H^{1/4}$ et $\Delta_2 = T + H - H^{1/4}$.

A partir du Lemme 2.2.4, on peut prouver la convexité suivante.

Lemme 2.4.1. *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$. Alors, on a*

$$J_{T,H}(\frac{1}{2}) \ll T^{r(2\sigma-1)} J_{T,H}(\sigma) + e^{-rT^2/20} \quad (2.4.4)$$

et

$$J_{T,H}(\sigma) \ll H^{\sigma-1/2} J_{T,H}(\frac{1}{2})^{3/2-\sigma} \quad (2.4.5)$$

uniformément pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$, $T \geq 2$ et $T^\varepsilon \leq H \leq T$, où la constante impliquée dépend de f , r et ε .

Démonstration. Grâce à l'équation fonctionnelle (2.1.7) et la formule de Stirling, on a

$$|L(1 - \sigma + i\tau, f)| \ll_f |L(\sigma + i\tau, f)|(1 + |\tau|)^{2\sigma-1}.$$

On pose $F(s) = L(s, f)e^{(s-it)^2}$. Alors il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} |F(1 - \sigma + i\tau)|^{2r} d\tau \ll \int_{\mathbb{R}} |L(\sigma + i\tau, f)|^{2r} (1 + |\tau|)^{2r(2\sigma-1)} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau.$$

Au vu de la borne convexité pour $L(\sigma + i\tau, f)$, pour $\Delta_1 \leq t \leq \Delta_2$, la contribution des parties $(-\infty, t/2] \cup [3t/2, \infty)$ à la dernière intégrale est

$$\ll \left(\int_{-\infty}^{t/2} + \int_{3t/2}^{\infty} \right) (1 + |\tau|)^{2r} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau \ll t^{2r} e^{-rt^2/2} \ll e^{-rt^2/3}.$$

Dès lors, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |F(1 - \sigma + i\tau)|^{2r} d\tau \ll e^{-rt^2/3} + t^{2r(2\sigma-1)} \int_{\mathbb{R}} |L(\sigma + i\tau, f)|^{2r} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau.$$

En appliquant le Lemme 2.2.4 à la fonction $F(s)$ avec $(\alpha, \gamma, \beta) = (1 - \sigma, \frac{1}{2}, \sigma)$ et $q = 2r$ où $t \geq 2$ est un paramètre, et en utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau \ll e^{-rt^2/8} + t^{r(2\sigma-1)} \int_{\mathbb{R}} |L(\sigma + i\tau, f)|^{2r} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau.$$

Par conséquent, on peut en déduire (2.4.4) en intégrant sur $\Delta_1 \leq t \leq \Delta_2$.

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F(\sigma + i\tau)|^{2r} d\tau &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\frac{1}{2} + i\tau)|^{2r} d\tau \right)^{3/2-\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\frac{3}{2} + i\tau)|^{2r} d\tau \right)^{\sigma-1/2} \\ &\ll \left(\int_{\mathbb{R}} |L(\frac{1}{2} + i\tau, f)|^{2r} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau \right)^{3/2-\sigma}, \end{aligned}$$

comme $\int_{\mathbb{R}} |F(\frac{3}{2} + i\tau)|^{2r} d\tau \ll 1$. Enfin, en intégrant sur $\Delta_1 \leq t \leq \Delta_2$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient (2.4.5). \square

Pour $N \geq 2$, $r = u/v$ et $\sigma \geq \frac{1}{2}$, on définit

$$S_{f,r}(s; N) := \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n) n^{-s}, \quad g_{f,r}(s; N) := L(s, f)^u - S_{f,r}(s; N)^v, \quad (2.4.6)$$

où $\lambda_{f,r}(n)$ est défini par (2.4.1). On définit ensuite

$$K_{T,H,N}(\sigma) := \int_{\mathbb{R}} |g_{f,r}(\sigma + i\tau; N)|^{2/v} w_{T,H}(\tau) d\tau.$$

Lemme 2.4.2. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$, $r > 0$ et ε un nombre positif arbitrairement petit. On a*

$$K_{T,H,N}(\sigma) \ll_{f,r,\varepsilon} K_{T,H,N}(\frac{1}{2})^{3/2-\sigma} (HN^{-2/v+\varepsilon})^{\sigma-1/2}$$

uniformément pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$, $T \geq 2$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $T^{\varepsilon/2} \leq N \leq H$.

Démonstration. En appliquant le Lemme 2.2.4 à la fonction $F(s) = g_{f,r}(s; N)e^{u(s-it)^2}$ avec $(\alpha, \gamma, \beta) = (\frac{1}{2}, \sigma, \frac{3}{2})$ et $q = 2/v$ où $t \geq 2$ est un paramètre, on a pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\sigma + i\tau)|^{2/v} d\tau \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\frac{1}{2} + i\tau)|^{2/v} d\tau \right)^{3/2-\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\frac{3}{2} + i\tau)|^{2/v} d\tau \right)^{\sigma-1/2}.$$

En intégrant sur $\Delta_1 \leq t \leq \Delta_2$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$K_{T,H,N}(\sigma) \leq K_{T,H,N}(\frac{1}{2})^{3/2-\sigma} K_{T,H,N}(\frac{3}{2})^{\sigma-1/2}. \quad (2.4.7)$$

En notant $S_{f,r}(s; N) \ll N \ll T^\varepsilon$ pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $L(\frac{3}{2} + i\tau, f) \ll 1$ ($\tau \in \mathbb{R}$), on conclut $g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N) \ll T^{v\varepsilon}$ ($\tau \in \mathbb{R}$). Dès lors

$$\begin{aligned} K_{T,H,N}(\frac{3}{2}) &\ll \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \int_{t-t^\varepsilon}^{T+H} \frac{|g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^{2/v}}{e^{2r(\tau-t)^2}} d\tau dt + \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \left(\int_{-\infty}^{t-t^\varepsilon} + \int_{T+H}^{\infty} \right) \frac{T^{2\varepsilon} d\tau dt}{e^{2r(\tau-t)^2}} \\ &\ll \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \int_{t-t^\varepsilon}^{T+H} |g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^{2/v} e^{-2r(\tau-t)^2} d\tau dt + e^{-rT^{2\varepsilon}} \\ &\ll \int_{T-3H}^{T+3H} |g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^{2/v} w_{T,H}(\tau) d\tau + e^{-rT^{2\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Comme v est un entier toujours positif, d'après (2.4.2), on peut écrire

$$g_{f,r}(s; N) = L(s, f)^{rv} - S_{f,r}(s; N)^v = \sum_{n>N} a_n n^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

où $a_n \ll n^\varepsilon$ ($n \geq 1$) pour tout $\varepsilon > 0$ grâce à (2.4.3). Ainsi, le Lemme 2.2.3 implique que

$$\int_{T-3H}^{T+3H} |g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^2 d\tau \ll H \sum_{n \geq N} |a_n|^2 n^{-3} + \sum_{n \geq N} |a_n|^2 n^{-2} \ll HN^{-2+\varepsilon},$$

puisque $N \leq H$. Donc on a

$$\begin{aligned} \int_{T-3H}^{T+3H} |g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^{2/v} d\tau &\ll \left(\int_{T-3H}^{T+3H} |g_{f,r}(\frac{3}{2} + i\tau; N)|^2 d\tau \right)^{1/v} H^{1-1/v} \\ &\ll (HN^{-2+\varepsilon})^{1/v} H^{1-1/v} \ll HN^{-2/v+\varepsilon}. \end{aligned}$$

En insérant dans (2.4.8) et puis dans (2.4.7), et en notant que le terme $e^{-rT^{2\varepsilon}}$ peut être intégré par le terme $HN^{-2/v+\varepsilon}$, on peut déduire l'inégalité souhaitée. \square

2.4.2 Compagnon de $J_{T,H}(\sigma)$ et $K_{T,H,N}(\sigma)$

On applique la théorie de Rankin-Selberg pour prouver le Lemme 2.4.3 suivant, qui consistera l'outil principal dans cette partie.

Pour $f \in \mathcal{H}_k^*$, la fonction L de Rankin-Selberg est définie par

$$L(s, f \times f) := \prod_p (1 - \alpha_f(p)^2 p^{-s})^{-1} (1 - \beta_f(p)^2 p^{-s})^{-1} (1 - p^{-s})^{-2} \quad (\sigma > 1), \quad (2.4.9)$$

où $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$ sont les paramètres locaux de f .

Grâce à la théorie de Rankin-Selberg, il est bien connu que $L(s, f \times f)$ a un pôle simple en $s = 1$ (voir e.g. [37]). Alors, il existe deux constantes positives A_f et B_f telles que

$$A_f \leq (s-1)L(s, f \times f) \leq B_f \quad (1 < s \leq 2). \quad (2.4.10)$$

Lemme 2.4.3. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*$ et $r > 0$. Il existe deux constantes positives $C_{f,r}^*$ et $N_{f,r}$ telles que*

$$S_{f,r}^*(2\sigma; N) := \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} \asymp (\sigma - \frac{1}{2})^{-r^2} \quad (2.4.11)$$

uniformément pour

$$N \geq N_{f,r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{C_{f,r}^*}{\log N} \leq \sigma \leq 1.$$

De plus, pour $N \geq N_{f,r}$ on a

$$S_{f,r}^*(1; N) \asymp (\log N)^{r^2}. \quad (2.4.12)$$

Ici, les constantes impliquées dépendent de f et r .

Démonstration. On écrit $\sigma = \frac{1}{2} + \delta$ avec $\delta > 0$. On désigne par $\mu(n)$ la fonction de Möbius. Donc

$$\begin{aligned} S_{f,r}^*(2\sigma; N) &\geq \sum_{n \geq 1} \lambda_{f,r}(n)^2 \mu(n)^2 n^{-1-2\delta} \\ &\geq \sum_{n \geq 1} \lambda_{f,r}(n)^2 \mu(n)^2 n^{-1-2\delta} \{1 - (n/N)^\delta\} \\ &= G_f(1 + 2\delta) - N^{-\delta} G_f(1 + \delta), \end{aligned}$$

où

$$G_f(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{f,r}(n)^2 \mu(n)^2}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{r^2 \lambda_f(p)^2}{p^s}\right) \quad (2.4.13)$$

pour les réels $s > 1$ après (2.4.3).

On écrit $H_f(s) := L(s, f \times f)^{-r^2} G_f(s)$. Comme $H_f(s) > 0$ pour $s > 1$, on peut définir $h_f(s) := \log H_f(s)$ pour cette partie de s . En utilisant (2.4.9) et (2.4.13), pour $s > 1$ on a

$$h_f(s) = \sum_p \left(\log(1 + r^2 \lambda_f(p)^2 p^{-s}) - r^2 \log \left\{ (1 - \alpha_f(p)^2 p^{-s})(1 - \beta_f(p)^2 p^{-s})(1 - p^{-s})^2 \right\} \right).$$

Puisque $\alpha_f(p)^2 + \beta_f(p)^2 + 2 = \lambda_f(p)^2$, la série à droite est convergente absolument pour $s > \frac{1}{2}$. Ainsi, $H_f(s) \neq 0$ pour $\frac{1}{2} < s \leq 2$. Donc, grâce à (2.4.10) et au vu de la continuité de $H(s)$ sur $(\frac{1}{2}, 2]$, il existe deux constantes positives $C_{f,r}$ et $D_{f,r}$ telles que

$$C_{f,r} \leq H_f(s) \leq D_{f,r} \quad (1 \leq s \leq 2). \quad (2.4.14)$$

Ensuite, on a

$$S_{f,r}^*(2\sigma; N) \geq (A_f/2\delta)^{r^2} C_{f,r} - N^{-\delta} (B_f/\delta)^{r^2} D_{f,r} \geq \frac{1}{2} (A_f/2)^{r^2} C_{f,r} \delta^{-r^2},$$

à condition que $C_{f,r}^*$ est assez grand tel que $N^\delta \geq e^{C_{f,r}^*} \geq 2(2B_f/A_f)^{r^2} D_{f,r}/C_{f,r}$. Il en résulte la borne inférieure de (2.4.11).

Comme $\lambda_{f,r}(n)$ est multiplicative et $\lambda_{f,r}(n) \ll n^\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} S_{f,r}^*(2\sigma; N) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} \\ &\leq \prod_p \{1 + r^2 \lambda_{f,r}(p)^2 p^{-2\sigma} + O(p^{-4\sigma+\varepsilon})\} \\ &= L(2\sigma, f \times f)^{r^2} H_f(2\sigma) \prod_p \{1 + O(p^{-4\sigma+\varepsilon})\}. \end{aligned}$$

Puis la borne supérieure de (2.4.11) découle de (2.4.10) et (2.4.14). On prend $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{C_{f,r}^*}{\log N}$ en (2.4.11) et on a $n^{-2\sigma} \asymp n^{-1}$ pour $1 \leq n \leq N$. Puis (2.4.12) découle immédiatement de (2.4.11). \square

Soit $S_{f,r}(s; N)$ défini en (2.4.6) et $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$, $T \geq 2$, $T^\varepsilon \leq H \leq T$ et $T^{\varepsilon/2} \leq N \leq H^{1-\varepsilon}$, on définit

$$L_{T,H,N}(\sigma) := \int_{\mathbb{R}} |S_{f,r}(\sigma + i\tau; N)|^2 w_{T,H}(\tau) d\tau.$$

Puisque $w_{T,H}(\tau) \gg 1$ pour $\Delta_1 + \frac{1}{2}H^{1/4} \leq \tau \leq \Delta_2 - \frac{1}{2}H^{1/4}$, on peut appliquer le Lemme 2.2.3 pour écrire

$$\begin{aligned} L_{T,H,N}(\sigma) &\gg \int_{\Delta_1 + \frac{1}{2}H^{1/4}}^{\Delta_2 - \frac{1}{2}H^{1/4}} |S_{f,r}(\sigma + i\tau; N)|^2 d\tau \\ &\gg \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} \{H + O(n)\} \\ &\gg H \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} + O(N^{1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $w_{T,H}(\tau) \ll 1$ pour tout τ et $w_{T,H}(\tau) \ll \exp\{-r(T^2 + \tau^2)/19\}$ pour $\tau \leq \Delta_1 - \frac{1}{2}H^{1/4}$ ou $\tau \geq \Delta_2 + \frac{1}{2}H^{1/4}$. Il implique que

$$\begin{aligned} L_{T,H,N}(\sigma) &\ll \int_{\Delta_1 - \frac{1}{2}H^{1/4}}^{\Delta_2 + \frac{1}{2}H^{1/4}} |S_{f,r}(\sigma + i\tau; N)|^2 d\tau + O(1) \\ &\ll \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} \{H + O(n)\} + O(1) \\ &\ll H \sum_{n \leq N} \lambda_{f,r}(n)^2 n^{-2\sigma} + O(N^{1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (2.4.11) du Lemme 2.4.3, on obtient

$$L_{T,H,N}(\sigma) \asymp_{f,r,\varepsilon} H(\sigma - \frac{1}{2})^{-r^2} \quad (2.4.15)$$

pour

$$T \geq T_0(f, r, \varepsilon), \quad T^\varepsilon \leq H \leq T, \quad T^{\varepsilon/2} \leq N \leq H^{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{C_{f,r}^*}{\log N} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}.$$

Et d'après (2.4.12) du Lemme 2.4.3, on a

$$L_{T,H,N}(\frac{1}{2}) \asymp_{f,r,\varepsilon} H(\log T)^{r^2}, \quad (2.4.16)$$

pour

$$T \geq T_0(f, r, \varepsilon), \quad T^\varepsilon \leq H \leq T \quad \text{et} \quad T^{\varepsilon/2} \leq N \leq H^{1-\varepsilon}.$$

2.4.3 Fin de la démonstration de la borne inférieure

Trivialement, on a

$$|S_{f,r}(s; N)^v|^{2/v} = |L(s, f)^u - g_{f,r}(s; N)|^{2/v} \ll |L(s, f)|^{2r} + |g_{f,r}(s; N)|^{2/v}.$$

Il s'ensuit que

$$L_{T,H,N}(\sigma) \ll J_{T,H}(\sigma) + K_{T,H,N}(\sigma). \quad (2.4.17)$$

Similairement,

$$J_{T,H}(\sigma) \ll L_{T,H,N}(\sigma) + K_{T,H,N}(\sigma) \quad (2.4.18)$$

et

$$K_{T,H,N}(\frac{1}{2}) \ll L_{T,H,N}(\frac{1}{2}) + J_{T,H}(\frac{1}{2}) \quad (2.4.19)$$

pour

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}, \quad T \geq T_0(f, r, \varepsilon), \quad T^\varepsilon \leq H \leq T \text{ et } T^{\varepsilon/2} \leq N \leq T^\varepsilon,$$

où $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ et $T_0(f, r, \varepsilon)$ est une constante dépendant de f, r, ε .

Si $K_{T,H,N}(\frac{1}{2}) \leq H$, (2.4.16) et (2.4.17) impliquent que

$$J_{T,H}(\frac{1}{2}) \gg H(\log T)^{r^2}. \quad (2.4.20)$$

Si $K_{T,H,N}(\frac{1}{2}) \geq H$, le Lemme 2.4.2 donne

$$K_{T,H,N}(\sigma) \ll K_{T,H,N}(\frac{1}{2})N^{-(2/v-\varepsilon)(\sigma-1/2)}. \quad (2.4.21)$$

On prend $N = T^{\varepsilon/2}$ et $\sigma = \sigma_0 := \frac{1}{2} + \frac{2C_{f,r,\varepsilon}^*}{\log T}$, où $C_{f,r,\varepsilon}^*$ est une constante large dépendant de f, r et ε . Puis (2.4.17), (2.4.21) et (2.4.19) fournissent

$$\begin{aligned} L_{T,H,N}(\sigma_0) &\ll_r J_{T,H}(\sigma_0) + \left(L_{T,H,N}(\frac{1}{2}) + J_{T,H}(\frac{1}{2})\right)T^{-\varepsilon(1/v-\varepsilon)(\sigma_0-1/2)} \\ &\ll_r J_{T,H}(\sigma_0) + J_{T,H}(\frac{1}{2})e^{-2C_{f,r,\varepsilon}^*(1/v-\varepsilon)\varepsilon} + L_{T,H,N}(\frac{1}{2})e^{-2C_{f,r,\varepsilon}^*(1/v-\varepsilon)\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir de (2.4.16) et (2.4.15), il existe une constante $C_0(f, r, \varepsilon)$ telle que

$$\begin{aligned} L_{T,H,N}(\frac{1}{2})e^{-2C_{f,r,\varepsilon}^*(1/v-\varepsilon)\varepsilon} &\leq C_0(f, r, \varepsilon)e^{-2C_{f,r,\varepsilon}^*(1/v-\varepsilon)\varepsilon}H(\log T)^{r^2}, \\ L_{T,H,N}(\sigma_0) &\geq C_0(f, r, \varepsilon)(2C_{f,r,\varepsilon}^*)^{-r^2}H(\log T)^{r^2}. \end{aligned}$$

En combinant avec l'inégalité précédente, on peut déduire que

$$L_{T,H,N}(\sigma_0) \ll J_{T,H}(\sigma_0) + J_{T,H}(\frac{1}{2})e^{-2C_{f,r,\varepsilon}^*(1/v-\varepsilon)\varepsilon}.$$

En combinant Lemme 2.4.1 et (2.4.15) encore, on a

$$H(\log T)^{r^2} \ll L_{T,H,N}(\sigma_0) \ll J_{T,H}(\frac{1}{2})^{3/2-\sigma_0} + J_{T,H}(\frac{1}{2}) \ll J_{T,H}(\frac{1}{2}),$$

où la constante impliquée dépend de f, r et ε . Ainsi, on peut conclure que (2.4.20) se vérifie peu importe $K_{T,H,N}(\frac{1}{2}) \leq T$. Puisque $w_{T,H}(\tau) \ll 1$ pour tout τ , on a

$$\begin{aligned} J_{T,H}(\frac{1}{2}) &\ll \mathcal{M}_r(T, H; f) + \left(\int_{-\infty}^T + \int_{T+H}^{\infty}\right) w_{T,H}(\tau) d\tau \\ &\ll \mathcal{M}_r(T, H; f) + O(1). \end{aligned}$$

Dès lors, la borne inférieure découle de (2.4.20).

Chapitre 3

Valeurs de fonctions L de puissances symétriques en $s = 1$ et applications

3.1 Introduction

Les valeurs des fonctions L au bord de la bande critique contiennent des informations arithmétiques intéressantes. Dans le cas de la fonction ζ de Riemann, il est bien connu que le théorème des nombres premiers est équivalent à la non annulation de $\zeta(1 + i\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$. L'étude sur la distribution des valeurs des fonctions L de Dirichlet associées aux caractères quadratiques χ_d en $s = 1$ a une longue et riche histoire. On se reporte au travail excellent de Granville et Soundararajan [23] pour une description historique détaillée. En particulier, ils [23, Theorem 1] ont prouvé une conjecture profonde de Montgomery et Vaughan concernant la distribution des valeurs extrêmes de $L(1, \chi_d)$ (voir [64, Conjecture 1]) à l'aide d'une estimation de Graham-Ringrose pour la somme courte des caractères de module friable [22].

Dans ce chapitre, on note $\mathcal{H}_k^*(N)$ l'ensemble des formes primitives normalisées de poids k pair, de niveau N sans facteurs carrés. Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, on note $L(s, \text{sym}^m f)$ la fonction L de la m -ème puissance symétrique associée à f et $\{\lambda_f(n)\}$ la suite de ses coefficients de Fourier normalisés. Le but de ce chapitre est d'étudier la distribution des valeurs $L(1, \text{sym}^m f)$ lorsque f parcourt $\mathcal{H}_k^*(N)$ et de considérer quelques applications pour $\lambda_f(p)$.

3.1.1 Encadrement de $L(1, \text{sym}^m f)$ et leurs valeurs extrêmes

La distribution des valeurs des fonctions L de puissance symétrique en $s = 1$ a attiré l'attention de nombreux auteurs depuis vingt ans [33, 61, 78, 79, 24, 80, 7, 52, 53, 59]. Divers outils et techniques ont été développés et des grands progrès grand ont été accomplis.

Soient $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et $m = 1, 2$, Hoffstein et Lockhart [33] ont montré que

$$(\log(kN))^{-1} \ll L(1, \text{sym}^m f) \ll \log(kN), \quad (3.1.1)$$

où la constante impliquée est absolue.

Luo [61] a considéré le cas des formes de Maass. Soit $\{f_j(z)\}$ une base de Hecke ortho-normale de $L_0^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ et $\frac{1}{4} + t_j^2$ ($t_j \geq 0$) la valeur propre du laplacien de $f_j(z)$. Il a montré

que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\{j : t_j \leq T\}|} \sum_{t_j \leq T} L(1, \text{sym}^2 f_j)^{r-1} = M_{\text{sym}^2}^r \quad (3.1.2)$$

pour tous nombres entiers $r \geq 1$, où $M_{\text{sym}^2}^r$ est une constante positive dépendant de r et vérifiant $\log M_{\text{sym}^2}^r \ll r \log_2 r$ (Voir (3.4.8) ci-dessous pour une expression explicite pour $M_{\text{sym}^2}^r$). Comme une conséquence immédiate de (3.1.2), il a énoncé la corollaire ci-dessous :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\{j : t_j \leq T\}|} \sum_{\substack{t_j \leq T \\ L(1, \text{sym}^2 f_j) \leq t}} 1 = F(t) \quad (3.1.3)$$

en chaque point de continuité d'une fonction de répartition $F(t)$.

Dans [78], Royer a considéré le cas des formes holomorphes. On désigne par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n avec la convention $P^-(1) = \infty$. Soit ω_f le poids harmonique se produisant dans la formule des traces de Petersson défini par (1.1.9) et (1.1.10). Il a établi l'analogie de (3.1.2) pour les formes primitives :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ P^-(N) \geq \log N}} \frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm r} = M_{\text{sym}^2}^{\pm r} \quad (3.1.4)$$

pour tout entier $r \geq 1$, et montré que

$$\log M_{\text{sym}^2}^r = 3r \log_2 r + O(r) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Une interprétation combinatoire pour $M_{\text{sym}^m}^{-r}$ et $M_{\text{sym}^m}^r$ ($m = 1, 2$) peut être trouvée dans [79] et [24], respectivement. De plus, les auteurs des articles ont montré, à l'aide de l'interprétation combinatoire, que

$$\log M_{\text{sym}^1}^{-r} = 2r \log_2 r + 2(\gamma - 2 \log \zeta(2))r + O(r/\log r), \quad (3.1.5)$$

$$\log M_{\text{sym}^2}^{-r} = r \log_2 r + (\gamma - 2 \log \zeta(2))r + O(r/\log r), \quad (3.1.6)$$

$$\log M_{\text{sym}^m}^r = (m+1)r \log_2 r + (m+1)\gamma r + O(r/\log r) \quad (m = 1, 2), \quad (3.1.7)$$

pour $r \rightarrow \infty$, où γ est la constante d'Euler. On peut déduire immédiatement de (3.1.4), (3.1.6) et (3.1.7) avec $m = 2$ que l'ensemble

$$\{L(1, \text{sym}^2 f), L(1, \text{sym}^2 f)^{-1} : f \in \mathcal{H}_k^*(N)\}$$

n'est pas borné lorsque $N \rightarrow \infty$ avec $P^-(N) \geq \log N$.

Pour obtenir une version quantitative pour cette assertion, Royer et Wu [80] ont analysé la dépendance des paramètres N et r . Cette analyse demande un changement de technique utilisé dans [78]. Ils ont affiné (3.1.4) comme suit : Soit k un nombre entier pair fixé. Il existe une constante absolue c telle que

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f L(1, \text{sym}^2 f)^{\pm r} = M_{\text{sym}^2}^{\pm r} \{1 + O((\log_2 N)^{-1})\} + O_k(N^{-1/13} e^{cr\sqrt{\log(3N)+cr^2}}) \quad (3.1.8)$$

uniformément pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$ avec $P^-(N) \geq \log N$, où la constante impliquée dépend de k .

à partir d'ici, on peut déduire facilement qu'il existe une $f_{\pm} \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telle que

$$L(1, \text{sym}^2 f_-) \ll_k (\log_2 N)^{-1}, \quad L(1, \text{sym}^2 f_+) \gg_k (\log_2 N)^3 \quad (3.1.9)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $P^-(N) \geq \log N$. De plus, ils montrent également que

$$(\log_2 N)^{-1} \ll_k L(1, \text{sym}^2 f) \ll_k (\log_2 N)^3 \quad (3.1.10)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $P^-(N) \geq \log N$ et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, \text{sym}^2 f)$. Par conséquent, (3.1.9) est optimal concernant l'ordre de grandeur. En outre, ils ont montré que l'ensemble

$$\{L(1, \text{sym}^2 f), L(1, \text{sym}^2 f)^{-1} : f \in \mathcal{H}_k^*(N_j)\}$$

est borné lorsque $j \rightarrow \infty$, où p_j est le j -ième nombre premier et $N_j = p_1 \cdots p_j$. Dès lors, la condition de type $P^-(N) \geq \log N$ est indispensable.

Dans [7], Cogdell et Michel ont introduit une approche plus conceptuelle. En fournissant une interprétation probabiliste naturelle, ils ont interprété les moments complexes pour les fonctions L de puissance symétrique par l'espérance d'un produit eulérien défini sur l'espace probabilité :

$$M_{\text{sym}^m}^z = \prod_p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \prod_{j=0}^m (1 - e^{i(m-2j)\theta} p^{-1})^z \sin^2 \theta d\theta. \quad (3.1.11)$$

La nouvelle méthode a deux avantages : d'une part, on peut calculer les moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$ pour tout nombre entier $m \geq 1$ (inconditionnellement pour $1 \leq m \leq 4$ et sous leur hypothèse $\text{sym}^m(N)$ pour $m \geq 5$: pour tout $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $L(s, \text{sym}^m f)$ est automorphe); d'autre part, à l'aide de la formule (3.1.11), on peut évaluer $M_{\text{sym}^m}^r$ aisément pour tout nombre réel r (en évitant l'analyse combinatoire compliquée dans [79, 24]). Grâce à cette nouvelle méthode, Cogdell et Michel ont généralisé et amélioré les résultats de Royer et Wu (3.1.9) et (3.1.10) : Soit N un nombre premier et $f \in \mathcal{H}_2^*(N)$. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(s, \text{sym}^m f)$, on a

$$\{1 + o(1)\}(2B_m^- \log_2 N)^{-A_m^-} \leq L(1, \text{sym}^m f) \leq \{1 + o(1)\}(2B_m^+ \log_2 N)^{A_m^+} \quad (3.1.12)$$

pour $N \rightarrow \infty$, où A_m^\pm et B_m^\pm sont constantes positives définies par (3.4.5) ci-dessous. On a

$$\begin{cases} A_m^+ = m + 1, & B_m^+ = e^\gamma & (m \in \mathbb{N}), \\ A_m^- = m + 1, & B_m^- = e^\gamma \zeta(2)^{-1} & (2 \nmid m), \\ A_2^- = 1, & B_2^- = e^\gamma \zeta(2)^{-2}, \\ A_4^- = \frac{5}{4}, & B_4^- = e^\gamma B_{4,*}^-, \end{cases} \quad (3.1.13)$$

et $B_{4,*}^-$ est une constante absolue donnée dans [52, Théorème 3]. De plus, ils ont montré qu'il existe $f_m^\pm \in \mathcal{H}_2^*(N)$ telle que

$$\begin{aligned} L(1, \text{sym}^m f_m^+) &\geq \{1 + o(1)\}(B_m^+ \log_2 N)^{+A_m^+}, \\ L(1, \text{sym}^m f_m^-) &\leq \{1 + o(1)\}(B_m^- \log_2 N)^{-A_m^-}, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

pour tout nombre premier $N \rightarrow \infty$.

Lau et Wu ont obtenu l'analogie de (3.1.12) et (3.1.14) en l'aspect du poids (voir [52, Théorème 2 et 3]). Pour prouver ces résultats, ils ont montré que pour $f, g \in \mathcal{H}_k^*(1)$, le facteur gamma de la fonction L Rankin-Selberg $L(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)$ est

$$L_\infty(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{\delta_{2|m}} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{[m/2] + \delta_{2 \nmid m}} \prod_{1 \leq \nu \leq m} \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \nu(k-1))^{m-\nu+1}$$

et établi un théorème de densité des zéros de $L(s, \text{sym}^m f)$ en l'aspect du poids (voir [52, Proposition 2.1 et Théorème 1]).

Dans cette section, on étudie la distribution de $L(1, \text{sym}^m f)$ en l'aspect de niveau-poids en raffinant les méthodes de [80, 7, 52]. L'énoncé de nos résultats est restreint aux première, deuxième, troisième et quatrième puissances symétriques qui sont prouvées être automorphes et cuspidales (pour les niveaux N sans facteurs carrés et les caractères triviaux). Cependant, la méthode est applicable pour les puissances plus hautes pour lesquelles les automorphies et cuspidalités seront connues. Parce qu'on considère les aspects de niveau et de poids simultanément, la situation sera plus compliquée. Pour décrire précisément la relation entre les valeurs extrême de $L(1, \text{sym}^m f)$ en l'aspect de niveau-poids et les propriétés arithmétiques de N , pour un entier positif $\Xi > 0$ et un entier pair $k \geq 2$, on pose un ensemble de niveaux :

$$\mathbb{N}_k(\Xi) := \{N \in \mathbb{N} : \mu(N)^2 = 1 \text{ et } P^-(N) \geq \Xi \log(kN) \log_2(kN)\}, \quad (3.1.15)$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius.

Notre premier résultat est comme suit.

Théorème 3.1.1. *Soit Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$.*

(i) *Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, en supposant HRG pour $L(s, \text{sym}^m f)$, on a*

$$\{1 + o(1)\} (2B_m^- \log_2(kN))^{-A_m^-} \leq L(1, \text{sym}^m f) \leq \{1 + o(1)\} (2B_m^+ \log_2(kN))^{A_m^+} \quad (3.1.16)$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

(ii) *Il existe $f_m^\pm \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telles que*

$$L(1, \text{sym}^m f_m^\pm) \gtrsim \{1 + o(1)\} (B_m^\pm \log_2(kN))^{\pm A_m^\pm} \quad (3.1.17)$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Ici A_m^\pm et B_m^\pm sont définis par (3.1.13) (voir aussi (3.4.5) ci-dessous) et les constantes impliquées ne dépendent que de Ξ .

Remarque 8.

1. En posant $k = 2$ dans le Théorème 3.1.1, on obtient une généralisation des résultats de Codgell-Michel (3.1.12) et (3.1.14), puisque $\mathbb{N}_2(\Xi)$ contient tous les nombres premiers pour quelque constante positive appropriée.
2. En posant $N = 1$ dans le Théorème 3.1.1, on peut obtenir les résultats correspondants de Lau-Wu (voir [52, Théorèmes 2 et 3]), puisque $1 \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ pour tous entiers pairs $k \geq 2$ et tous les constantes Ξ .
3. Comme dans le [52, Théorème 3(i)], on peut prouver que les bornes

$$(\log_2(kN))^{-A_m^-} \ll L(1, \text{sym}^m f) \ll (\log_2(kN))^{A_m^+} \quad (3.1.18)$$

se vérifient inconditionnellement pour presque tout $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et $1 \leq m \leq 4$.

3.1.2 Première conjecture de Montgomery-Vaughan

Les trois conjectures de Montgomery-Vaughan décrivent précisément les comportements des fonctions de distribution de $L(1, \chi_d)$ autour de leurs valeurs extrêmes [64]. Dans cette sous-section, on considère l'analogie de la première conjecture de Montgomery-Vaughan pour $L(1, \text{sym}^m f)$. Pour un entier m fixé, on considère la fonction de répartition

$$F_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) := \frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ L(1, \text{sym}^m f) \underset{\geq}{\asymp} (B_m^\pm t)^{\pm A_m^\pm}}} 1. \quad (3.1.19)$$

Au vu du Théorème 3.1.1, l'analogie de la première conjecture de Montgomery-Vaughan pour les fonctions L automorphes de puissance symétrique peut être énoncé comme suit : *Pour toute constante $\Xi > 0$ fixée, il existe des constantes positives $c_2 > c_1$ et $c_0 > 0$ dépendant de Ξ telles que*

$$e^{-c_2(\log(kN)/\log_2(kN))} \leq F_{k,N}^\pm(\log_2(kN), \text{sym}^m) \leq e^{-c_1(\log(kN)/\log_2(kN))} \quad (3.1.20)$$

pour $kN \geq c_0$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Ce problème a été étudié par Lau et Wu [53]. Ils ont prouvé la part de la borne supérieure de (3.1.20) lorsque $N = 1$ et $1 \leq m \leq 4$:

$$F_{k,1}^\pm(\log_2 k, \text{sym}^m) \leq e^{-c_1(\log k)/\log_2 k} \quad (3.1.21)$$

pour tout entier pair $k \geq c_0$. Il est remarquable que, malgré les difficultés pour traiter les formes modulaires, le résultat est aussi bon que celui de Granville et Soundararajan [23] (de plus, ils ont utilisé une méthode différente en points cruciaux, où l'outil comme la borne Graham-Ringrose pour les sommations courtes des caractères de module extrêmement composé est indisponible). L'outil principal est leur inégalité du grand crible (voir [53, Théorème 1] ou Lemme 3.6.1 ci-dessous). Pour la part de la borne inférieure de la conjecture de Montgomery-Vaughan (3.1.20), Liu, Royer et Wu [59] ont obtenu un résultat un peu faible pour $m = 1$ et $N = 1$: il existe trois constantes absolues c_3, c_4 et c_5 telles que

$$F_{k,1}^\pm(\log_2 k - \frac{5}{2} \log_3 k - \log_4 k - c_3, \text{sym}^1) \geq \exp\left(-c_4 \frac{\log(kN)}{(\log_2 k)^{7/2} \log_3 k}\right) \quad (3.1.22)$$

pour $k \geq c_5$.

On généralise (3.1.21) et (3.1.22) comme suit.

Théorème 3.1.2. *Soit Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes positives c_6 et c_7 dépendant de ε et Ξ telles que*

$$F_{k,N}^\pm(\log_2(kN) + \phi, \text{sym}^m) \leq \exp\left(-c_6(|\phi| + 1) \frac{\log(kN)}{\log_2(kN)}\right)$$

pour $kN \geq c_7$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et $\log \varepsilon \leq \phi \leq 9 \log_2(kN)$.

(ii) *Il existe trois constantes positives c_8, c_9 et c_{10} dépendant de Ξ telles que*

$$F_{k,N}^\pm(\log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - c_8, \text{sym}^m) \geq \exp\left(-\frac{c_9 \log(kN)}{\log_2^2(kN) \log_3(kN)}\right)$$

pour $kN \geq c_{10}$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$.

Remarque 9.

1. Posant $\phi = 0$ dans le Théorème 3.1.2(i), on obtient la part de la borne supérieure de la première conjecture de Montgomery-Vaughan (3.1.20) en l'aspect de niveau-poids.
2. Le Théorème 3.1.2(ii) peut être regardé comme une version faible de la part de la borne inférieure de la première conjecture de Montgomery-Vaughan (3.1.20).
3. Puisque $1 \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ pour tout entier pair $k \geq 2$ et pour toute constante positive Ξ , il est aisé de voir que le Théorème 3.1.2(i) et (ii) généralisent et améliorent (3.1.21) de Lau-Wu et/ou (3.1.22) de Liu-Royer-Wu, respectivement.

3.1.3 Fonctions de répartition pondérées

Motivé par les travaux de Granville-Soundararajan [23] et de Cogdell-Michel [7] et au vu de la formule de trace de Petersson, Liu, Royer et Wu [59] ont introduit les fonctions pondérées de distribution :

$$\mathcal{F}_{k,N}^{\pm}(t, \text{sym}^m) := \frac{1}{\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ L(1, \text{sym}^m f) \underset{\leq}{\underset{\geq}{\approx}} (B_m^{\pm} t)^{\pm A_m^{\pm}}} \omega_f. \quad (3.1.23)$$

En utilisant la méthode de point col, ils ont évalué (3.1.23) pour $N = m = 1$: il existe trois constantes positives \mathcal{A}_1^{\pm} et C telles que pour $k \rightarrow \infty$, on a

$$\mathcal{F}_{k,1}^{\pm}(t, \text{sym}^1) = \{1 + o(1)\} \exp \left(- \frac{e^{t - \mathcal{A}_1^{\pm}}}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\} \right), \quad (3.1.24)$$

uniformément pour $t \leq \log_2 k - \frac{5}{2} \log_3 k - \log_4 k - C$, où la constante impliquée est absolue. Comme ils ont noté, la méthode est applicable pour les fonctions L de puissance symétrique. Dans [50], Lamzouri a étudié une classe grande des produits eulériens aléatoires et trouvé un résultat général [50, Théorème 1]. Comme un corollaire, il a obtenu l'évaluation de (3.1.23) avec signe $+$ et $k = 2$ en l'aspect *niveau premier* :

$$\mathcal{F}_{2,N}^+(t, \text{sym}^m) = \{1 + o(1)\} \exp \left(- \frac{e^{t - \mathcal{A}_m^+}}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right\} \right) \quad (3.1.25)$$

uniformément pour tout *nombre premier* N et $t \leq \log_2 N - \log_3 N - 2 \log_4 N$. On voit que le domaine de validité de t est un peu plus large que celui de (3.1.24), mais le terme d'erreur est un peu moins bon.

En raffinant la méthode de Lamzouri [50], on montre le résultat suivant.

Théorème 3.1.3. *Soit Ξ une constante positive et $m = 1, 2, 3, 4$. Alors, il existe une constante c_{11} dépendant de Ξ telle que*

$$\mathcal{F}_{k,N}^{\pm}(t, \text{sym}^m) = \{1 + o(1)\} \exp \left(- \frac{e^{t - \mathcal{A}_m^{\pm}}}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\} \right)$$

uniformément pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et

$$t \leq \log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - c_{11},$$

où \mathcal{A}_m^\pm sont des constantes ne dépendant que de m définies comme dans le Lemme 3.7.2 ci-dessous. Ici, la constante impliquée ne dépend que de Ξ .

Remarque 10.

1. Le Théorème 3.1.3 généralise et améliore (3.1.24) de Liu-Royer-Wu et (3.1.25) de Lamzouri.
2. Le Théorème 3.1.3 également complète (3.1.25) de Lamzouri en montrant un résultat similaire pour le cas du signe « $-$ ».

3.1.4 Distribution des valeurs propres de Hecke

Pour chaque $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, désignons par $\lambda_f(n)$ la n -ème valeur propre de Hecke de f normalisée. D'après Deligne, il est bien connu que $|\lambda_f(p)| \leq 2$ pour tous les nombres premiers p . Grâce à Mikio Sato et John Tate [87], il existe deux conjectures bien connues concernant la répartition des valeurs propres de Hecke des formes primitives holomorphes.

Conjecture (Version horizontale de la conjecture de Sato-Tate). *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Pour tout $[u, v] \subset [-2, 2]$, on a*

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x, p \nmid N \\ u \leq \lambda_f(p) \leq v}} 1 \sim \int_u^v \sqrt{4-t^2} \frac{dt}{2\pi} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Cette conjecture de Sato-Tate a été démontrée par Barnet-Lamb, Geraghty, Harris et Taylor [4] en 2011.

Conjecture (Version verticale de la conjecture de Sato-Tate). *Soit $p \nmid N$ un nombre premier fixé. Alors pour tout $[u, v] \subset [-2, 2]$, on a*

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_k^*(N)|} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ u \leq \lambda_f(p) \leq v}} 1 \sim \int_u^v \frac{p+1}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - t^2} \sqrt{4-t^2} \frac{dt}{2\pi} \quad (kN \rightarrow \infty).$$

Cette conjecture a été prouvée par Conrey, Duke & Farmer (1997) et par Serre (1997), indépendamment.

En 2006, Lau et Wu [52] ont démontré qu'il n'existe pas une version « diagonale » de la conjecture de Sato-Tate (i.e., p et kN tendent vers l'infinie en même temps). En fait ils ont montré que pour tout $A > 0$, il existe trois formes primitives $f_i \in \mathcal{H}_k^*$ ($i = 1, 2, 3$) telles que presque tous $\{\lambda_{f_i}(p)\}_{p \leq (\log k)^A}$ se trouve autour de $-2, 0, 2$, respectivement, lorsque $k \rightarrow \infty$. Un résultat similaire en l'aspect de niveau a été obtenu par Royer et Wu [81] en 2007.

Comme une application du Théorème 3.1.1(ii), nous pouvons généraliser ces résultats en l'aspect de niveau-poids et obtenir un nouveau point d'accumulation à l'aide de la valeur minimale de $L(1, \text{sym}^4 f)$. Précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.1.4. Soient $\xi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ une fonction vérifiant $\xi(t) \leq \log_3 t$ et $\Xi > 0$ une constante. Alors il existe des formes $f_{\pm}, g, h \in \mathcal{H}_k^*(N)$ telles que pour tout $A > 0$ on a

$$\sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ \lambda_{f_{\pm}}(p) \geq \pm 2\mp \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} = \log_3(kN) \{1 + O_{A,\Xi}(\xi(kN)^{-1})\}, \quad (3.1.26)$$

$$\sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ |\lambda_g(p)| \leq \{\xi(kN)/\log_3(kN)\}^{1/2}}} \frac{1}{p} = \log_3(kN) \{1 + O_{A,\Xi}(\xi(kN)^{-1})\}, \quad (3.1.27)$$

$$\sum_{\substack{p \leq (\log(kN))^A, p \nmid N \\ |\lambda_h(p)^2 - \frac{3}{2}| \leq \{\xi(kN)/\log_3(kN)\}^{1/2}}} \frac{1}{p} = \log_3(kN) \{1 + O_{A,\Xi}(\xi(kN)^{-1})\}, \quad (3.1.28)$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathcal{N}_k(\Xi)$.

Remarque 11.

1. Pour de telles formes f_m^{\pm} , on peut trouver que presque tous les $\{\lambda_{f_m^{\pm}}(p)\}$ se rassemblent autour quelques points mais pas de façon équi-distribués pour $p \leq (\log(kN))^A$ lorsque $kN \rightarrow \infty$.
2. Nos résultats montrent que, pour $x = (\log(kN))^A$, la Conjecture de Sato-Tate ne se vérifie pas lorsque $kN \rightarrow \infty$.

3.1.5 Théorème de densité en l'aspect de niveau-poids

Dans les méthodes de [80, 7, 52], le théorème de densité des zéros joue un rôle important. Un théorème de densité général pour les fonctions L automorphes en l'aspect niveau est établi par Kowalski et Michel [49, Théorème 2] et utilisé dans [80, 7]. Un théorème de densité similaire en l'aspect du poids a été obtenu par Lau et Wu [52, Théorème 1]. Pour prouver notre Théorème 3.1.1, on a besoin d'établir un théorème de densité en l'aspect de niveau-poids. On dénote $N(\alpha, T, \text{sym}^m f)$ le nombre des zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s, \text{sym}^m f)$ avec $\beta \geq \alpha$ et $0 \leq \gamma \leq T$. Notre théorème de densité est comme suit.

Théorème 3.1.5. Soit $\alpha > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq m \leq 4$, $r > 0$, $E_{m,r} = (m+1)(m+r) + 8$ et $E'_{m,r} = (2m+r)(m+1) + m + 12$. Alors, on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} N(\alpha, T, \text{sym}^m f) \ll_{\alpha, \varepsilon, r} T^{1+1/r} k^{E_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)+\varepsilon} N^{E'_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)+\varepsilon},$$

uniformément pour $2 \mid k$, N sans facteurs carrés et $T \geq 2$, où la constante impliquée ne dépendant que de α , ε et r .

Notre théorème de densité montre que, en moyenne, il y a peu de forme primitive qui possède des zéros dans la région critique avec la partie réelle proche de ligne $\Re s = 1$. Le

théorème est utile seulement si α est proche de 1 et l'aspect T est essentiellement hors de propos. Pour $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, on définit

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k^+(N; \eta, m) &:= \{f \in \mathcal{H}_k^*(N) : L(s, \text{sym}^m f) \neq 0, s \in \mathcal{S}\}, \\ \mathcal{H}_k^-(N; \eta, m) &:= \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m),\end{aligned}\tag{3.1.29}$$

où

$$\mathcal{S} := \{s : 1 - \eta \leq \sigma < 1, |\tau| \leq 100(kN)^\eta\} \cup \{s : \sigma \geq 1\}.$$

En utilisant le Théorème 3.1.5 avec $r = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k^-(N; \eta, m) &\leq \sum_{f \in \mathcal{H}_k^-(N; \eta, m)} N(1 - \eta, 100(kN)^\eta, \text{sym}^m f) \\ &\leq \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} N(1 - \eta, 100(kN)^\eta, \text{sym}^m f) \ll_\eta (kN)^{65\eta}.\end{aligned}\tag{3.1.30}$$

Pour $\eta < \frac{1}{65}$, on a

$$|\mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)| \sim |\mathcal{H}_k^*(N)|.\tag{3.1.31}$$

Puisque $\mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$ est presque de la même taille que $\mathcal{H}_k^*(N)$, on peut remplacer $\mathcal{H}_k^*(N)$ par $\mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$ dans les applications et le théorème de densité joue partiellement le rôle de l'HRG.

3.2 Bornes des fonctions L de puissance symétrique

L'objet de cette partie est d'introduire des propositions nécessaires pour les bornes des fonctions L de puissance symétrique.

Lemme 3.2.1. *Pour $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$, N sans facteurs carré et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, on a*

$$L(s, \text{sym}^m f) \ll \log^{m+1}(N(k + |s| + 2))$$

uniformément pour $\Re s \geq 1 - 1/\log(N(k + |s| + 2))$.

Démonstration. Il suffit de considérer $\frac{3}{2} \geq \Re s \geq 1 - 1/\log(N(k + |s| + 2))$. Grâce à la formule de Perron, et (1.2.8), on a pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s} e^{-n/Y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} L(u + s, \text{sym}^m f) Y^u \Gamma(u) du \\ &= L(s, \text{sym}^m f) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\frac{1}{2} - \Re s)} L(u + s, \text{sym}^m f) \Gamma(u) Y^u du \\ &= L(s, \text{sym}^m f) + O(N^{m/4 + \varepsilon} (|s| + k)^{(m+1)/4 + \varepsilon} Y^{1/2 - \Re s}).\end{aligned}$$

En posant $Y = N^{m/2+1}(|s| + k)^{(m+1)/2+1}$ et en utilisant (1.2.5), on déduit le résultat de la borne de la fonction zêta près de la droite $\Re s = 1$. \square

Pour $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$, où $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, on obtient le logarithme $\log L(s, \text{sym}^m f)$ de l'intégrale de la dérivée logarithmique (1.2.9) puisqu'il est holomorphe et n'a aucun zéro dans la région \mathcal{S} définie dans (3.1.29),

$$\log L(s, \text{sym}^m f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s \log n} \quad (\sigma > 1). \quad (3.2.1)$$

Immédiatement, on a la borne simple pour $\log L(s, \text{sym}^m f)$,

$$|\log L(s, \text{sym}^m f)| \leq (m+1)\zeta(\sigma) \ll_m (\sigma-1)^{-1} \quad (\sigma > 1). \quad (3.2.2)$$

On écrit $\sigma_0 = 1 - \eta$. Au vu de la borne de convexité, on a pour $0 \leq \sigma < \sigma_0$ et $|\tau| \leq 100(kN)^\eta$

$$\Re \log L(s, \text{sym}^m f) = \log |L(s, \text{sym}^m f)| \leq C \log(kN),$$

pour certaine constante $C > 0$.

On considère les cercles avec le centre $2 + i\tau$ et les rayon $r := 2 - \sigma < R := 2 - \sigma_0$. Alors, grâce au théorème de Borel-Carathéodory et au vu du Lemme 3.2.1, on a pour $\sigma > \sigma_0$ et $|\tau| \leq 100(kN)^\eta$,

$$\begin{aligned} \log L(s, \text{sym}^m f) &\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-2-it|=R} \Re \log L(s, \text{sym}^m f) + \frac{R+r}{R-r} |\log L(2+it, \chi)| \\ &\ll \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \log(kN) + \frac{1}{\sigma - \sigma_0}. \end{aligned}$$

Alors, on a la majoration

$$\log L(s, \text{sym}^m f) \ll \frac{\log(kN)}{\sigma - \sigma_0}. \quad (3.2.3)$$

Sous l'HRG, on majore $\log L(s, \text{sym}^m f)$ de la manière suivante.

Lemme 3.2.2. *Soit $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$, N sans facteurs carrés et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Sous l'HRG pour $L(s, \text{sym}^m f)$, on a pour $\varepsilon > 0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$,*

$$\log L(s, \text{sym}^m f) \ll_{\varepsilon, \alpha} [\log(N(k + |s| + 3))]^{2(1-\sigma)+\varepsilon}$$

uniformément pour $\alpha \leq \sigma \leq 1$ et $\tau \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On pose $F(s) := \log L(s, \text{sym}^m f)$. Sous l'HRG pour $L(s, \text{sym}^m f)$, $F(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$. Avec la borne de convexité de (1.2.8), on a

$$\Re \log L(s, \text{sym}^m f) \leq C \log(N(k + |\tau| + 3)) \quad (\sigma > \frac{1}{2}).$$

En appliquant le théorème Borel-Carathéodory, on prend $s' = 2 + i\tau$, $R' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\delta$ et $r' = \frac{3}{2} - \delta$, où $0 < \delta < 1$ sera donné plus tard. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \max_{|s-s'|=r'} |F(s)| &\leq \frac{2r'}{R'-r'} \max_{|s-s'|=R'} \Re F(s) + \frac{R'+r'}{R'-r'} |F(s')| \\ &\leq (6/\delta - 4)C \log N(k + |\tau| + 3) + (6/\delta - 3)C \\ &\leq C\delta^{-1} \log(N(k + |\tau| + 3)). \end{aligned}$$

Puis pour $\delta + \frac{1}{2} \leq \Re s \leq \frac{7}{2} - \delta$, on obtient

$$|F(s)| \leq C\delta^{-1} \log(N(k + |\tau| + 3)). \quad (3.2.4)$$

On note $M(r) := \max_{|s-s_0|=r} |F(s)|$.

En appliquant le théorème des trois cercles de Hadamard avec le centre $s_0 = \sigma_1 + i\tau$ ($1 < \sigma_1 \leq N(k + |\tau| + 3)$) et $r_1 = \sigma_1 - 1 - \delta$, $r_2 = \sigma_1 - \sigma$, $r_3 = \sigma_1 - \frac{1}{2} - \delta$, on a

$$M(r_2) \leq M(r_1)^{1-a} M(r_3)^a \quad \text{avec} \quad a = \frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} = 2(1 - \sigma) + O(\delta + 1/\sigma_1).$$

Grâce à (3.2.4), on a $M(r_3) \leq C\delta^{-1} \log(N(k + |\tau| + 3))$ et $M(r_1) \leq C\delta^{-1}$. Donc on obtient

$$|\log L(s, \text{sym}^m f)| \leq (C\delta^{-1})^{1-a} (C\delta^{-1} \log(N(k + |\tau| + 3)))^a.$$

En posant $\sigma_1 = \frac{1}{8} = \log_2 N(k + |\tau| + 3)$, on déduit notre résultat. \square

Pour $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$, on a la borne comme suit.

Lemme 3.2.3. *Soit $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ fixé, $\sigma_0 = 1 - \eta$, $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$ et N sans facteurs carrés. On a pour $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$,*

$$\log L(s, \text{sym}^m f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s \log n} e^{-n/T} + R \quad (3.2.5)$$

uniformément pour $3 \leq T \leq (kN)^\eta$, $\sigma_0 < \sigma \leq 3/2$ et $|\tau| \leq T$, où

$$R \ll_{\eta} T^{-(\sigma-\sigma_0)/2} (\log(kN)) / (\sigma - \sigma_0)^2. \quad (3.2.6)$$

De plus, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, sous l'HRG pour $L(s, \text{sym}^m f)$ où $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, la formule (3.2.5) se vérifie uniformément pour $\alpha \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ et $T \geq 1$, avec

$$R \ll_{\varepsilon, \alpha} T^{-(\sigma-\alpha)} (\log(kN))^{2(1-\alpha)+\varepsilon}.$$

Démonstration. Partant de la relation

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s \log n} e^{-n/T} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z-s) \log L(z, \text{sym}^m f) T^{z-s} dz,$$

et en déplaçant la droite d'intégration en \mathcal{C} consistant en lignes droites joignant

$$\kappa - i\infty, \quad \kappa - 2iT, \quad \sigma_1 - 2iT, \quad \sigma_1 + 2iT, \quad \kappa + 2iT, \quad \kappa + i\infty,$$

où $\kappa = 1 + 1/\log T$ et $\sigma_1 = (\sigma + \sigma_0)/2$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^s \log n} e^{-n/T} = \log L(s, \text{sym}^m f) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \Gamma(z-s) \log L(z, \text{sym}^m f) T^{z-s} dz.$$

D'après (3.2.2) et (3.2.3), la dernière intégrale est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{T^{\sigma_1 - \sigma} \log(kN)}{\sigma - \sigma_0} \int_{|y| \leq 3T} |\Gamma(\sigma_1 - \sigma + iy)| dy \\ &\quad + \frac{\log(kN)}{\sigma - \sigma_0} \int_{\sigma_1}^{\kappa} T^{x - \sigma} |\Gamma(x - \sigma + i(T - \tau))| dx + T^{1 - \sigma + \varepsilon} \int_{|y| \geq T} |\Gamma(\kappa - \sigma + iy)| dy. \end{aligned}$$

On peut déduire (3.2.5) et (3.2.6) de la formule de Stirling de la forme : pour des constantes fixées $c_i > 0$, ($i = 1, 2, 3$),

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| = \sqrt{2\pi} |\tau|^{\sigma - 1/2} e^{-\pi|\tau|/2} (1 + O(|\tau|^{-1})) \quad (3.2.7)$$

pour $-c_1 \leq \sigma \leq c_2$ et $\tau \geq 3$. $|\Gamma(w)| \ll |w|^{-1}$ lorsque $-1/2 \leq \Re w \leq c_2$ et $|\Im w| \leq c_3$.

Sous l'HRG, on utilise la même méthode et on déplace la droite d'intégration en $\Re z = \alpha' = \alpha - \varepsilon' > \frac{1}{2}$ où $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min(\varepsilon, \alpha - \frac{1}{2})$. La dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} \Gamma(z - s) \log L(z, \text{sym}^m f) T^{z-s} dz \\ &\ll_{\varepsilon, \alpha} T^{\alpha' - \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\alpha' - \sigma + iy)| (\log N(k + |y| + 3))^{2(1 - \alpha') + \varepsilon} dy \\ &\ll_{\varepsilon, \alpha} T^{-(\sigma - \alpha)} (\log(kN))^{2(1 - \alpha) + 2\varepsilon}, \end{aligned}$$

grâce au Lemme 3.2.2. □

Lemme 3.2.4. Soit $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ fixé, $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$ et N sans facteurs carrés. Pour tout $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$, on a

$$\log L(s, \text{sym}^m f) \ll_{\eta} \frac{(\log(kN))^{4\alpha/\eta} - 1}{\alpha \log_2(kN)} + \log_3(10kN),$$

uniformément pour $\sigma \geq 1 - \alpha > 1 - \frac{1}{2}\eta$ et $|\tau| \leq (\log(kN))^{4/\eta}$.

Démonstration. On pose $T = (\log(kN))^{4/\eta}$ dans le Lemme 3.2.3. Ainsi, le terme d'erreur est $O(1)$. Pour la sommation, on a la majoration

$$\ll \sum_p \frac{1}{p^{\sigma} e^{p/T}} + O(1).$$

On sépare la sommation en deux part

$$\sum_p \frac{1}{p^{\sigma} e^{p/T}} \leq \sum_{p \leq T} \frac{1}{p^{\sigma}} + \sum_{p > T} \frac{1}{p^{\sigma} e^{p/T}}.$$

Pour la première somme, on a la majoration

$$\ll \sum_{p \leq T} \frac{1}{p^{1 - \alpha}} \ll_{\eta} \frac{(\log(kN))^{4\alpha/\eta} - 1}{\alpha \log_2(kN)} + \log_3(10kN).$$

Ici, on a utilisé le fait que pour $1/2 \leq \sigma \leq 1$ et $y \geq 3$

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p^\sigma} \ll \frac{y^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma) \log y} + \log_2 y.$$

Pour l'autre sommation, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p > T} \frac{1}{p^\sigma e^{p/T}} &\ll \int_T^\infty e^{-t/T} d\left(\sum_{p \leq t} p^{-\sigma}\right) \\ &\ll \frac{T^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma) \log T} + \log_2 T + \frac{1}{T} \int_T^\infty \left(e^{-t/T} \frac{t^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma) \log t} + e^{-t/T} \log_2 t \right) dt \\ &\ll_\eta \frac{(\log(kN))^{4\alpha/\eta} - 1}{\alpha \log_2(kN)} + \log_3(10kN). \end{aligned}$$

D'où on déduit notre résultat. □

Partant de la borne ci-dessus, on écrit la logarithme des fonctions L de puissance symétrique sous la forme de série Dirichlet suivante.

Lemme 3.2.5. *Soit $\eta \in (0, \frac{1}{65})$, $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$ et N sans facteurs carrés. On pose $x = \exp\{\sqrt{\log(kN)/7(m+4)}\}$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \log L(1, \text{sym}^m f) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \nmid N}} \sum_{0 \leq j \leq m} \log (1 - \alpha_f(p)^{m-2j} p^{-1})^{-1} \\ &\quad + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \mid N}} \log (1 - \alpha_f(p)^m p^{-1})^{-1} + O(\log^{-1/2}(kN)), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

pour $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$. La constante impliquée dépend que η et m .

Démonstration. On pose $T = (\log(kN))^{4/\eta}$. Au vu de (3.2.1), la formule de Perron nous donne

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\log x - iT}^{1/\log x + iT} \log L(s+1, \text{sym}^m f) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{\log(Tx)}{T} + \frac{1}{x}\right).$$

Déplaçant la droite d'intégration en $\sigma = -\frac{1}{4}\eta$ et en estimant $\log L(s, \text{sym}^m f)$ par le Lemme 3.2.4 (avec $\alpha = \frac{1}{4}\eta$), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} &= \log L(1, \text{sym}^m f) + O\left(\frac{\log(kNTx)}{T} + \frac{\log(kN) \log T}{x^{\eta/4}}\right) \\ &= \log L(1, \text{sym}^m f) + O((\log(kN))^{-4/\eta+1}). \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

D'autre part, (1.2.10) nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} &= \sum_{p \leq x} \sum_{\nu \leq \log x / \log p} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(p^\nu)}{p^\nu \log p^\nu} \\
&= \sum_{\substack{p \leq x \\ p|N}} \sum_{\nu \leq \log x / \log p} \frac{\alpha_f(p)^{m\nu}}{\nu p^\nu} + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \nmid N}} \sum_{\nu \leq \log x / \log p} \sum_{0 \leq j \leq m} \frac{\alpha_f(p)^{\nu(m-2j)}}{\nu p^\nu} \\
&= \sum_{\substack{p \leq x \\ p|N}} \left\{ \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^m}{p} \right)^{-1} + O \left(\frac{\log p}{x^{3/2} \log x} \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \nmid N}} \sum_{0 \leq j \leq m} \left\{ \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{p} \right)^{-1} + O \left(\frac{\log p}{x \log x} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

On déduit notre résultat de (3.2.9) grâce au théorème des nombres premiers. \square

3.3 Démonstration du Théorème 3.1.5

Comme dans [52, Theorem 1], on va suivre la méthode de Montgomery [66]. D'abord, on donne une factorisation de la fonction L de puissance symétrique. On fixe un paramètre réel $z \geq 1$ (choisi explicitement plus tard). On note $P(z) = \prod_{p \leq z} p$.

Lemme 3.3.1. *Soit $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m \in \mathbb{N}$ et $z > (m+1)^2$. Pour $\sigma > 1$, on a la factorisation*

$$L(s, \text{sym}^m f)^{-1} = G_f(s) L^{\flat}(s, \text{sym}^m f)$$

avec

$$L^{\flat}(s, \text{sym}^m f) := \sum_{(n, P(z))=1} \lambda_{\text{sym}^m f}(n) \mu(n) n^{-s},$$

où $G_f(s)$ est holomorphe et elle n'a ni zéro ni pôle lorsque $\sigma > \frac{1}{2}$ et $G_f(s) \ll_{z, \varepsilon} 1$ uniformément pour $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Démonstration. On peut écrire $L^{\flat}(s, \text{sym}^m f)$ de la forme

$$L^{\flat}(s, \text{sym}^m f) = \prod_{p > z} (1 - \lambda_{\text{sym}^m f}(p) p^{-s}) \quad \sigma > 1.$$

Par (1.2.5), on a

$$\lambda_{\text{sym}^m f}(p) \leq m + 1.$$

Alors, $1 - \lambda_{\text{sym}^m f}(p)p^{-s} \neq 0$ pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$ et $p > z$. Ainsi, on a

$$G_f(s) := \prod_{p \leq z} \prod_{j=0}^m (1 - \alpha_f(p)^{m-2j} p^{-s}) \\ \times \prod_{p > z} \left((1 - \lambda_{\text{sym}^m f}(p)p^{-s})^{-1} \prod_{j=0}^m (1 - \alpha_f(p)^{m-2j} p^{-s}) \right).$$

Lorsque $p \geq z$, le facteur local en p de $G_f(s)$ est de la forme $1 + O(p^{-2\sigma})$, d'où on obtient le résultat. \square

Le deuxième lemme est une égalité du grand crible sur des valeurs propres de Hecke dans l'aspect niveau-poids. Les résultats similaires dans l'aspect niveau et l'aspect poids ont été obtenus par Duke et Kowalski [13] et Lau et Wu [52], respectivement. La démonstration est très similaire. La différence unique est de remplacer la borne de sous-convexité de $L(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)$ dans l'aspect niveau ou l'aspect poids par notre borne de convexité en l'aspect de niveau-poids (dans le Lemme 1.4.6).

Lemme 3.3.2. *Soient $1 \leq m \leq 4$, $L \geq 1$ et $\{a_\ell\}_{\ell \leq L}$ une suite de nombres complexes. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\ell \leq L} a_\ell \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \right|^2 \ll_\varepsilon (kN)^\varepsilon (L + (kN^2)^{D_m} L^{1/2+\varepsilon}) \sum_{\ell \leq L} |a_\ell|^2,$$

où $D_m = m(m+1)/4 + 1$ et la constante impliquée ne dépend que de ε .

Démonstration. Il suffit de prouver

$$\sum_{\ell \leq L} \left| \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} b_f \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \right|^2 \ll_\varepsilon (kN)^\varepsilon (L + (kN^2)^{D_m} L^{1/2+\varepsilon}) \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} |b_f|^2$$

pour toute suite complexes $\{b_f\}_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)}$. La somme de gauche est

$$\ll \sum_{\ell \geq 1} \left| \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} b_f \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \right|^2 e^{-\ell/L},$$

qui s'écrit de la forme

$$\sum_{f, g \in \mathcal{H}_k^*(N)} b_f \bar{b}_g \sum_{\ell \geq 1} \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \lambda_{\text{sym}^m g}(\ell) e^{-\ell/L}. \quad (3.3.1)$$

Au vu de la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(w) y^w dw = e^{-1/y} \quad \text{pour } c > 0,$$

on a

$$\sum_{\ell \geq 1} \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \lambda_{\text{sym}^m g}(\ell) e^{-\ell/L} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \Gamma(s) L^s ds, \quad (3.3.2)$$

où $\mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g)$ est définie par (1.4.13).

On déplace alors la droite d'intégration en $\Re s = 1/2 + \varepsilon$ en croisant un pôle simple en $s = 0$ si et seulement si $f = g$ avec le résidu

$$\text{Res}_{s=1} \mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \Gamma(s) L^s = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \Gamma(s) L^s.$$

Grâce à la borne de convexité, on a

$$\text{Res}_{s=1} \mathcal{L}(s, \text{sym}^m f \times \text{sym}^m g) \ll_{\varepsilon} (kN)^{\varepsilon}.$$

Alors, la contribution du résidu en $s = 1$

$$\ll \delta_{f,g} (kN)^{\varepsilon} L,$$

avec

$$\delta_{f,g} := \begin{cases} 1 & \text{si } f = g, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant la borne de convexité (Lemme 1.4.6) et la formule de Stirling pour la fonction Gamma, l'intégrale sur la droite $\Re s = 1/2 + \varepsilon$ donne une contribution

$$\ll N^{m(m+1)/2+\varepsilon} k^{m(m+1)/4+\varepsilon} L^{1/2+\varepsilon}.$$

Il en découle que l'intégrale dans (3.3.2) est

$$\begin{aligned} &\ll (kN)^{\varepsilon} \delta_{f,g} L + N^{m(m+1)/2+\varepsilon} k^{m(m+1)/4+\varepsilon} L^{1/2+\varepsilon} \\ &\ll (kN)^{\varepsilon} (\delta_{f,g} L + (kN^2)^{m(m+1)/4} L^{1/2+\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En insérant la majoration (3.3.3) dans (3.3.1), on obtient

$$\sum_{\ell \leq L} \left| \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} b_f \lambda_{\text{sym}^m f}(\ell) \right|^2 e^{-\ell/L} \ll_{\varepsilon} (kN)^{\varepsilon} (L + (kN^2)^{D_m} L^{1/2+\varepsilon}) \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} |b_f|^2.$$

Notre résultat découle d'une principale de dualité. \square

On va calculer le nombre des zéros de la fonction L de puissance symétrique. D'abord, par le Théorème 1.2.3, on a

$$N(\tfrac{1}{2}, j, \text{sym}^m f) - N(\tfrac{1}{2}, j-1, \text{sym}^m f) \ll \log(kNj).$$

Donc le Théorème 3.1.5 découle immédiatement lorsque $T \geq (kN)^r$. On peut déduire aussi la majoration pour $1 \leq T \leq \log^3(kN)$. Alors, on suppose

$$\log^3(kN) \leq T \leq (kN)^r.$$

On coupe le rectangle $\alpha \leq \sigma \leq 1$ et $0 \leq \tau \leq T$ en boîtes de la longueur $2 \log^2(kN)$. Il y a au plus $O(\log^3(kN))$ zéros dans chaque boîte $\alpha \leq \sigma \leq 1$ et $2\ell(\log kN)^2 \leq \tau \leq 2(\ell+1)(\log kN)^2$ avec $1 \leq \ell \leq T/2(\log T)^2$. On désigne $n_{\text{sym}^m f}$ le nombre des boîtes qui contiennent au moins un zéro ρ de $L(s, \text{sym}^m f)$. Alors

$$N(\alpha, T, \text{sym}^m f) \ll n_{\text{sym}^m f} \log^3(kN). \quad (3.3.4)$$

Donc il suffit de montrer

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} n_{\text{sym}^m f} \ll_{r, \varepsilon} T k^{E_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)+\varepsilon} N^{E'_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)+\varepsilon}.$$

Soient $\alpha \geq \frac{1}{2} + 2\varepsilon$, $x, y \in [1, (kN)^{20m^2(1+r)}]$ et on définit

$$M_x(s, \text{sym}^m f) = G_f(s) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} \lambda_{\text{sym}^m f}(n) \mu(n) n^{-s},$$

où $G_f(s)$ et $P(z)$ sont définis dans le Lemme 3.3.1.

On note $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta \geq \alpha$ ($> \frac{1}{2} + \varepsilon$), $0 \leq \gamma \leq T$ un zéro de $L(s, \text{sym}^m f)$ et $\kappa = 1/\log(kN)$, $\kappa_1 = 1 - \beta + \kappa$ (> 0), $\kappa_2 = \frac{1}{2} - \beta + \varepsilon$ (< 0). Alors

$$\begin{aligned} e^{-1/y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\kappa_1)} (1 - L(\rho + w, \text{sym}^m f) M_x(\rho + w, \text{sym}^m f)) \Gamma(w) y^w dw \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\kappa_1)} L(\rho + w, \text{sym}^m f) M_x(\rho + w, \text{sym}^m f) \Gamma(w) y^w dw. \end{aligned}$$

Le zéro de $L(s, \text{sym}^m f)$ annule le pôle de $\Gamma(w)$ en $w = 0$. Donc on peut déplacer la ligne d'intégration de la seconde intégrale en $\Re w = \kappa_2$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} e^{-1/y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\kappa_1)} (1 - L(\rho + w, \text{sym}^m f)) M_x(\rho + w, \text{sym}^m f) \Gamma(w) y^w dw \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\kappa_2)} L(\rho + w, \text{sym}^m f) M_x(\rho + w, \text{sym}^m f) \Gamma(w) y^w dw. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Pour $\Re w = \kappa_2 = \frac{1}{2} - \beta + \varepsilon$, la borne de convexité (1.2.8), (1.2.5) et le Lemme 3.3.1 impliquent

$$\begin{aligned} L(\rho + w, \text{sym}^m f) &\ll N^{m/4+\varepsilon} (k + T + |\text{Im } w|)^{(m+2)/4+\varepsilon}, \\ M_x(\rho + w, \text{sym}^m f) &\ll_{\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi, la contribution de $|\text{Im } w| \geq \log^2(kN)$ à la seconde intégrale de (3.3.5) est

$$\begin{aligned} &\ll x^{1/2+\varepsilon} y^{1/2-\alpha} \int_{|\text{Im } w| \geq \log^2(kN)} N^{m/4+\varepsilon} (k + T + |\text{Im } w|)^{(m+2)/4+\varepsilon} |\Gamma(w)| |dw| \\ &\ll_{\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon} y^{1/2-\alpha} N^{m/4+\varepsilon} (k + T)^{(m+2)/4+\varepsilon} e^{-\log^2(kN)} \ll_{\varepsilon, r} \frac{1}{kN}, \end{aligned}$$

avec $T \leq (kN)^r$.

D'après (1.2.5), on a $L(s, \text{sym}^m f) \leq \zeta(s)^{m+1}$ pour $\Re s > 1$. Donc pour $\Re w = \kappa_1 = 1 - \beta + \kappa$, on a

$$\begin{aligned} & 1 - L(\rho + w, \text{sym}^m f) M_x(\rho + w, \text{sym}^m f) \\ &= L(\rho + w, \text{sym}^m f) G_f(\rho + w) \sum_{\substack{n > x \\ (n, P(z))=1}} \frac{\mu(n) \lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^{-\rho-w}} \ll (kN)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi la contribution de $|\text{Im } w| \geq \log^2(kN)$ à la première intégrale de (3.3.5) est

$$\ll_\varepsilon (kN)^\varepsilon y^{1-\alpha+\kappa} e^{-\log^2(kN)} \ll_\varepsilon \frac{1}{kN}.$$

Pour $a > 0$, $b > 0$ et $c \geq 1$ satisfaisant $1 \leq C(a+b)$, on a $1 \leq 4C^2(a^2+b)$ (il suffit de prouver le cas $a < 1$ et $b < 1$).

D'où on obtient

$$\begin{aligned} & 1 \ll_\varepsilon (kN)^\varepsilon y^{2(1-\alpha)} \\ & \times \int_{-\log^2(kN)}^{\log^2(kN)} |1 - L(1 + \kappa + i(\gamma + v), \text{sym}^m f) M_x(1 + \kappa + i(\gamma + v), \text{sym}^m f)|^2 dv \\ & + y^{1/2-\alpha} \int_{-\log^2(kN)}^{\log^2(kN)} |L(\tfrac{1}{2} + \varepsilon + i(\gamma + v), \text{sym}^m f) M_x(\tfrac{1}{2} + \varepsilon + i(\gamma + v), \text{sym}^m f)| dv. \end{aligned}$$

On sépare les boîtes en deux groupes selon la parité de ℓ . Ainsi, deux zéros du même groupe ont une distance $2 \log^2(kN)$ au moins. En sommant l'intégrale sur les zéros de deux groupes respectivement, on obtient

$$n_{\text{sym}^m f} \ll (kN)^\varepsilon y^{2(1-\alpha)} I_1 + y^{1/2-\alpha} I_2, \quad (3.3.6)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^{2T} |1 - L(1 + \kappa + iv, \text{sym}^m f) M_x(1 + \kappa + iv, \text{sym}^m f)|^2 dv, \\ I_2 &:= \int_0^{2T} |L(\tfrac{1}{2} + \varepsilon + iv, \text{sym}^m f) M_x(\tfrac{1}{2} + \varepsilon + iv, \text{sym}^m f)| dv. \end{aligned}$$

Pour $T \leq (kN)^r$, on a

$$\begin{aligned} I_2 &\ll_\varepsilon \int_0^{2T} N^{m/4+\varepsilon} (k+v)^{(m+1)/4+\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon} dv \\ &\ll_\varepsilon T x^{1/2+\varepsilon} k^{r(m+1)/4+r\varepsilon} N^{(mr+m+r)/4+r\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pour I_1 , on a

$$1 - L(1 + \kappa + iv, \text{sym}^m f) M_x(1 + \kappa + iv, \text{sym}^m f) \\ \ll_{\varepsilon} (kN)^{\varepsilon} \left| \sum_{\substack{x < n \leq X \\ (n, P(z))=1}} \frac{\mu(n) \lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^{1+\kappa+iv}} \right| + (kN)^{\varepsilon} \sum_{n > X} \frac{d_{m+1}(n)}{n^{1+\kappa}}, \quad (3.3.8)$$

où $X = e^{4 \log^2(kN)}$.

La seconde somme de (3.3.8) est $\ll (kN)^{-1}$.

Avec le Lemme 3.3.2, la contribution de la première somme dans (3.3.8) est

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\substack{L < n \leq 2L \\ (n, P(z))=1}} \frac{\mu(n) \lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^{1+\kappa+iv}} \right|^2 \ll (kN)^{\varepsilon} (L + (kN^2)^{D_m} L^{1/2+\varepsilon}) L^{-1-2\kappa}.$$

Séparant $x < n \leq X$ en intervalles dyadiques, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\substack{x < n \leq X \\ (n, P(z))=1}} \frac{\mu(n) \lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^{1+\kappa+iv}} \right|^2 \ll (kN^2)^{D_m+\varepsilon} x^{-1/2+\varepsilon} + 1.$$

Ainsi on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} I_1 \ll (kN)^{\varepsilon} \int_0^{2T} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\substack{x < n \leq X \\ (n, P(z))=1}} \frac{\mu(n) \lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n^{1+\kappa+iv}} \right|^2 dv + T \\ \ll (kN^2)^{\varepsilon} T \left((kN^2)^{D_m} x^{-1/2+\varepsilon} + 1 \right). \quad (3.3.9)$$

Grâce à (3.3.6), (3.3.7) et (3.3.9), on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} n_{\text{sym}^m f} \ll_{r,\varepsilon} T x^{\varepsilon} (kN)^{2r\varepsilon} \\ \times \left[y^{2(1-\alpha)} \left(1 + (kN^2)^{D_m} x^{-1/2} \right) + y^{1/2-\alpha} x^{1/2} k^{r(m+1)/4+1} N^{(mr+m+r)/4+1} \right].$$

En posant $x = (kN^2)^{2D_m}$ et $y = k^{E_{m,r}/(2(3-2\alpha))} N^{E'_{m,r}/(2(3-2\alpha))}$, nous obtenons

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} n_{\text{sym}^m f} \ll_{r,\varepsilon} T k^{E_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)+\varepsilon} N^{E'_{m,r}(1-\alpha)/(3-2\alpha)}.$$

Ce qui implique le Théorème 3.1.5 par (3.3.4).

3.4 Moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$

L'objet de cette section est de compter les moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$ en l'aspect de niveau-poids.

3.4.1 Notations et résultat

D'abord on introduit des notations qui sont un peu lourdes mais effectuent l'interprétation dans la théorie de la représentation. On peut trouver les détails dans [7]. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $|x| < 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on note

$$\begin{aligned} g(\theta) &:= \text{diag}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}], \\ \text{sym}^m[g(\theta)] &:= \text{diag}[e^{im\theta}, e^{i(m-2)\theta}, \dots, e^{-im\theta}], \\ D(x, \text{sym}^m[g(\theta)]) &:= \det(I - x \cdot \text{sym}^m[g(\theta)])^{-1} = \prod_{0 \leq j \leq m} (1 - e^{i(m-2j)\theta} x)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Et pour $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\nu \geq 0$, on définit $\lambda_m^{z,\nu}[g(\theta)]$ par

$$D(x, \text{sym}^m[g(\theta)])^z = \sum_{\nu \geq 0} \lambda_m^{z,\nu}[g(\theta)] x^\nu, \quad (|x| < 1).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \lambda_m^{1,1}[g(\theta)] &= \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)]) = \frac{\sin[(m+1)\theta]}{\sin \theta}, \\ \log D(x, \text{sym}^m[g(\theta)]) &= \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])x + O(x^2) \quad (|x| < 1). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Selon la Proposition 1.1.5, pour $p \nmid N$, on peut écrire $\alpha_f(p) = e^{i\theta_f(p)}$ où $\theta_f(p) \in [0, \pi]$. Alors

$$\lambda_f(p^m) = \frac{\sin[(m+1)\theta_f(p)]}{\sin \theta_f(p)} = \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta_f(p))]) = \lambda_m^{1,1}[g(\theta_f(p))]. \quad (3.4.3)$$

Par (1.2.4), on a

$$L(s, \text{sym}^m f)^z = \prod_{p|N} (1 - \varepsilon_f^m(p) p^{-(m/2+s)})^{-z} \prod_{p \nmid N} D(p^{-s}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))])^z,$$

et ce qui permet d'écrire la série de Dirichlet

$$L(s, \text{sym}^m f)^z = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m f}^z(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Donc $\lambda_{\text{sym}^m f}^z(n)$ est multiplicative et on a pour un entier positif ν

$$\lambda_{\text{sym}^m f}^z(p^\nu) = \begin{cases} \lambda_m^{z,\nu}[g(\theta_f(p))] & \text{si } p \nmid N, \\ d_z(p^\nu) \lambda_f(p^{m\nu}) & \text{si } p | N, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

où $d_z(n)$ est une fonction multiplicative définie par $\sum_{n=1}^{\infty} d_z(n) n^{-s} = \zeta(s)^z$ pour $\Re s > 1$.

On pose aussi

$$\begin{cases} A_m^\pm := \max_{\theta \in [0, \pi]} \pm \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)]) = \pm \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta_m^\pm)]), \\ B_m^\pm := \exp \left\{ \varpi_0 + (A_m^\pm)^{-1} \sum_p (\pm \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^\pm)]) - A_m^\pm p^{-1}) \right\}. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Ici ϖ_0 est défini par la relation

$$\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} = \log_2 t + \varpi_0 + O\left(\frac{1}{\log t}\right)$$

et $\theta_{m,p}^\pm \in [0, \pi]$ définis par

$$\begin{cases} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^+)]) = \max_{\theta \in [0, \pi]} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)]) \\ D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) = \min_{\theta \in [0, \pi]} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)]) \end{cases} \quad (3.4.6)$$

sont calculés dans [52].

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous écrivons $n = n_N n^{(N)}$ avec $p \mid n_N \Rightarrow p \mid N$ et $(n_N, n^{(N)}) = 1$. Nous posons

$$M_{\text{sym}^m}^z(N) := \sum_{n \geq 1} \frac{\square_N(n^m) d_z(n)}{n^{1+m/2}} \prod_{p \nmid N} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^z \sin^2 \theta \, d\theta, \quad (3.4.7)$$

où $\square_N(n)$ est défini par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\square_N(n)}{n^s} := \zeta_N(2s) := \prod_{p \mid N} \frac{1}{1 - p^{2s}}.$$

On pose aussi

$$M_{\text{sym}^m}^z := M_{\text{sym}^m}^z(1) = \prod_p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^z \sin^2 \theta \, d\theta. \quad (3.4.8)$$

Sur les moments complexes de $L(1, \text{sym}^m f)$, on a le résultat suivant, qui joue un rôle important dans les démonstrations des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.3.

Proposition 3.4.1. *Soient $\eta \in (0, \frac{1}{65})$ fixé, $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$ et N sans facteurs carrés. Alors il y a deux constantes positives $\delta = \delta(\eta)$ et $c = c(\eta)$ telles que*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^z = M_{\text{sym}^m}^z(N) + O_\eta(e^{-\delta \log(kN)/\log_2(kN)})$$

uniformément pour $|z| \leq c \log(kN)/\log_2(10kN) \log_3(10kN)$.

3.4.2 Lemmes intermédiaires

Lemme 3.4.2. *Soient $2 \mid k$ et N sans facteurs carrés, $m \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $p \nmid N$ et un entier $\nu > 0$, on a*

$$\lambda_{\text{sym}^m f}^z(p^\nu) = \sum_{0 \leq \nu' \leq m\nu} \mu_{m, \nu'}^{z, \nu} \lambda_f(p^{\nu'}), \quad (3.4.9)$$

où

$$\mu_{m,\nu'}^{z,\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lambda_m^{z,\nu}[g(\theta)] \sin[(\nu' + 1)\theta] \sin \theta \, d\theta.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mu_{m,\nu'}^{z,1} &= z\delta(m, \nu') \quad (0 \leq \nu' \leq m), \\ |\mu_{m,\nu'}^{z,\nu}| &\leq d_{(m+1)|z|}(p^\nu) \quad (0 \leq \nu' \leq m\nu), \\ \sum_{0 \leq \nu' \leq m\nu} |\mu_{m,\nu'}^{z,\nu}| &\leq d_{(m+1)|z|}(p^\nu), \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

où $\delta(a, b)$ est 1 si $a = b$ et 0 sinon.

Démonstration. La démonstration est semblable à [52, Lemma 6.1] et (3.4.10) suit [81, Proposition 2]. \square

Lemme 3.4.3. Soient $2 \mid k$ et N sans facteur carré, $m, n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \lambda_{\text{sym}^m}^z f(n) = \lambda_{\text{sym}^m}^z(n) + O_m(k^{-5/6} N^{-1+\varepsilon} n^{m/4} \log(2n) r_m^z(n)), \tag{3.4.11}$$

où $\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)$ est la fonction multiplicative définie par

$$\lambda_{\text{sym}^m}^z(p^\nu) := \begin{cases} \mu_{m,0}^{z,\nu} & \text{si } p \nmid N, \\ d_z(p^\nu) \square(p^{m\nu}) / \sqrt{p^{m\nu}} & \text{si } p \mid N. \end{cases}$$

Ici $\square(n) = 1$ si n est carré, et $\square(n) = 0$ sinon, et $r_m^z(n)$ est la fonction multiplicative définie par

$$r_m^z(p^\nu) := \begin{cases} d_{(m+1)|z|}(p^\nu) & \text{si } p \nmid N, \\ d_{|z|}(p^\nu) / p^{m\nu/2} & \text{si } p \mid N. \end{cases} \tag{3.4.12}$$

Démonstration. On écrit $n = q_1^{\bar{\nu}_1} \cdots q_h^{\bar{\nu}_h} p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ où $q_i \mid N$ pour $1 \leq i \leq h$ et $p_j \nmid N$ pour $1 \leq j \leq r$. D'après (3.4.9), on a

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \lambda_{\text{sym}^m}^z f(n) &= d_z(q_1^{\bar{\nu}_1} \cdots q_h^{\bar{\nu}_h}) \sum_{\nu_1=0}^{m\nu_1} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{m\nu_r} \left(\prod_{j=1}^r \mu_{m,\nu_j}^{z,\nu_j} \right) \\ &\quad \times \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \lambda_f(q_1^{m\bar{\nu}_1} \cdots q_h^{m\bar{\nu}_h} p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}). \end{aligned}$$

Si on écrit $q_1^{m\bar{\nu}_1} \cdots q_h^{m\bar{\nu}_h} = g^2 q$, par la Proposition 1.1.4 et en utilisant la formule des traces du Théorème 1.1.7, on peut obtenir le terme principal $\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)$, et le terme d'erreur est

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\nu_1}^{m\nu_1} \cdots \sum_{\nu_r}^{m\nu_r} \left(\prod_{j=1}^r \nu_{m,\nu_j}^{z,\nu_j} \right) \frac{d_z(n_N) (qp_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r})^{1/4} \tau^2(N) \log(2qp_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r} N)}{gk^{5/6} q^{1/2} \varphi(N)} \\ &\ll N^{-1+\varepsilon} k^{-5/6} n^{m/4} \log(2n) \frac{d_z(q_1^{\bar{\nu}_1} \cdots q_h^{\bar{\nu}_h})}{gq^{1/2}} \prod_{j=1}^r \sum_{\nu_j=0}^{m\nu_j} |\mu_{m,\nu_j}^{z,\nu_j}|, \end{aligned}$$

qui implique (3.4.11) immédiatement par (3.4.10). \square

On définit

$$\omega_{\text{sym}^m f}^z(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m f}^z(n)}{n} e^{-n/x}.$$

Lemme 3.4.4. *Soient $2 \mid k$, N sans facteurs carrés, $m \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} e^{-n/x} + O_m(k^{-5/6} N^{-1+\varepsilon} x^{m/4} [(z_m + 1) \log x]^{z_m}),$$

où $z_m = (m + 1)|z| + 1$.

Démonstration. Par la définition de $\omega_{\text{sym}^m f}^z(x)$ et (3.4.11), on a

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n/x}}{n} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \lambda_{\text{sym}^m f}^z(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} e^{-n/x} + O\left(k^{-5/6} N^{-1+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/4-1} \log(2n) e^{-n/x} r_m^z(n)\right). \end{aligned}$$

Selon (3.4.12), on a $r_m^z(n) \leq d_{(m+1)|z|}(n)$. De plus on a la propriété de $d_\ell(n)$,

$$\sum_{n \leq X} \frac{d_\ell(n)}{n} \leq \left(\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \right)^\ell \leq (\log 3X)^\ell.$$

Donc la somme dans le terme d'erreur est

$$= \int_1^\infty \log(2t) t^{m/4} e^{-t/x} d\left(\sum_{n \leq t} r_m^z(n) n^{-1} \right) \ll_m x^{m/4} [(z_m + 1) \log x]^{z_m}.$$

Ceci termine la démonstration. \square

On peut trouver la démonstration du lemme suivant dans [52].

Lemme 3.4.5. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et on définit $z'_m := (m + 1)|z| + 3$. Alors il existe une constante $c = c(m) > 0$ telle que*

$$\sum_{(n, N)=1} \frac{|\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)|}{n^\sigma} \leq \exp \left\{ cz'_m \left(\log_2 z'_m + \frac{z'_m (1-\sigma)/\sigma - 1}{(1-\sigma) \log z'_m} \right) \right\}$$

pour tout $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$. De plus, on a

$$\sum_{(n, N)=1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} = \prod_{p \nmid N} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^z \sin^2 \theta d\theta.$$

Lemme 3.4.6. Soient $m \in \mathbb{N}$, $\sigma \in [0, 1/3)$, $x \geq 3$ et $z \in \mathbb{C}$. Il existe une constante $c = c(m)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} e^{-n/x} = M_{\text{sym}^m}^z(N) + O\left(x^{-\sigma} \exp\left\{cz'_m \left(\log_2 z'_m + \frac{z'_m{}^{\sigma/(1-\sigma)} - 1}{\sigma \log z'_m}\right)\right\}\right).$$

La constante impliquée ne dépend que de m .

Démonstration. Au vu de la définition de $\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)$, on écrit $n = n_N n^{(N)}$, où $n_N \mid N^\infty$ et $(n^{(N)}, N) = 1$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} e^{-n/x} &= \sum_{n_N=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n_N)}{n_N} \sum_{(n^{(N)}, N)=1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})}{n^{(N)}} e^{-n_N n^{(N)}/x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n) \square_N(n^m)}{n^{m/2+1}} \sum_{(n^{(N)}, N)=1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})}{n^{(N)}} e^{-n_N n^{(N)}/x}. \end{aligned}$$

On écrit

$$\sum_{(n^{(N)}, N)=1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})}{n^{(N)}} e^{-n_N n^{(N)}/x} = \sum_{(n^{(N)}, N)=1} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})}{n^{(N)}} + O(R_1 + R_2),$$

où

$$R_1 := \sum_{\substack{(n^{(N)}, N)=1 \\ n^{(N)} > x/n_N}} \frac{|\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})|}{n^{(N)}}, \quad R_2 := \sum_{\substack{(n^{(N)}, N)=1 \\ n^{(N)} \leq x/n_N}} \frac{|\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})|}{n^{(N)}} |e^{-n_N n^{(N)}/x} - 1|.$$

Pour tout $\sigma \in [0, \frac{1}{3})$, on a

$$(n/x)^\sigma \gg \begin{cases} 1 & \text{si } n > x, \\ |e^{-n/x} - 1| & \text{si } n \leq x. \end{cases}$$

Donc d'après le Lemme 3.4.5, on a

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &\ll \sum_{(n^{(N)}, N)=1} \frac{|\lambda_{\text{sym}^m}^z(n^{(N)})|}{n^{(N)}} \left(\frac{n_N n^{(N)}}{x}\right)^\sigma \\ &\ll \left(\frac{n_N}{x}\right)^\sigma \exp\left\{cz'_m \left(\log_2 z'_m + \frac{z'_m{}^{\sigma/(1-\sigma)} - 1}{\sigma \log z'_m}\right)\right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^m}^z(n)}{n} e^{-n/x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n) \square_N(n^m)}{n^{m/2+1}} \left[\prod_{p \mid N} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^z \sin^2 \theta \, d\theta \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\frac{n_N}{x}\right)^\sigma \exp\left\{cz'_m \left(\log_2 z'_m + \frac{z'_m{}^{\sigma/(1-\sigma)} - 1}{\sigma \log z'_m}\right)\right\}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Par la définition de $d_z(n)$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n) \square_N(n^m)}{n^{m/2+1-\sigma}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n)}{n^{m/2+1-\sigma}} \ll e^{c|z|}.$$

On complète la démonstration en rapportant cette majoration dans (3.4.13). \square

Lemme 3.4.7. *Soient $\eta \in (0, \frac{1}{65})$ fixé, $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$, N sans facteurs carrés et $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$. Alors on a*

$$L(1, \text{sym}^m f)^z = \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) + O\left(\left(x^{-1/\log_2(kN)} + x^{c|z|} e^{-\log^2(kN)}\right) e^{c|z| \log_3(10kN)}\right)$$

uniformément pour $x > 3$ et $z \in \mathbb{C}$, où la constante $c = c(\eta)$ et la constante impliquée ne dépendent que de η .

Démonstration. On commence la démonstration par l'égalité

$$\omega_{\text{sym}^m f}^z(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} L(s+1, \text{sym}^m f)^z \Gamma(s) x^s ds.$$

On déplace l'intégrale sur le chemin \mathcal{C} qui consiste aux lignes droites passant les points

$$\kappa_1 - i\infty, \quad \kappa_1 - iT, \quad -\kappa_2 - iT, \quad -\kappa_2 + iT, \quad \kappa_1 + iT, \quad \kappa_1 + i\infty,$$

où $\kappa_1 = 1/\log x$, $\kappa_2 = 1/\log_2(kN)$ et $T = \log^2(kN)$. Alors on a

$$\omega_{\text{sym}^m f}^z(x) = L(1, \text{sym}^m f)^z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} L(s+1, \text{sym}^m f)^z \Gamma(s) x^s ds.$$

D'après (3.2.2) et la Proposition 3.2.4 on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} L(s+1, \text{sym}^m f)^z \Gamma(s) x^s ds \ll_{\eta} x^{-\kappa_2} e^{c|z| \log_3(10kN)} \int_{|y| \leq T} |\Gamma(1 - \kappa_2 + iy)| dy + \\ & + e^{c|z| \log_3(10kN)} \int_{-\kappa_2}^{\kappa_1} |\Gamma(1 + \alpha + iT)| d\alpha + e^{c|z| \log x} \int_{|y| \geq T} |\Gamma(1 + \kappa_1 + iy)| dy \\ & \ll \left(x^{-1/\log_2(kN)} + x^{c|z|} e^{-\log^2(kN)} \right) e^{c|z| \log_3(10kN)}, \end{aligned}$$

grâce à la formule de Stirling. \square

3.4.3 Démonstration de la Proposition 3.4.1

Par le Lemme 3.4.7, on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^z = \sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) + O_{\eta}(R_1), \quad (3.4.14)$$

où

$$R_1 = \sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f (x^{-1/\log_2(kN)} + x^{c|z|} e^{-\log^2(kN)}) e^{c|z| \log_3(10kN)}.$$

Alors par la formule des traces du Théorème 1.1.7, on a

$$R_1 \ll (x^{-1/\log_2(kN)} + x^{c|z|} e^{-\log^2(kN)}) e^{c|z| \log_3(10kN)}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ qui est une constante donnée plus tard et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, on a

$$\omega_{\text{sym}^m f}^z(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varepsilon)} L(s+1, \text{sym}^m f)^z \Gamma(s) x^s ds \ll \zeta(1+\varepsilon)^{(m+1)|\Re z|} x^\varepsilon.$$

Alors en considérant la somme sur $\mathcal{H}_k^-(N; \eta, m)$ et avec l'estimation

$$(\log(kN))^{-1} \leq L(1, \text{sym}^2 f) \leq \log(kN),$$

on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^-(N; \eta, m)} \omega_f \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) \ll_\eta \zeta(1+\varepsilon)^{(m+1)|\Re z|} x^\varepsilon (kN)^{65\eta-1}.$$

Avec (3.4.14), on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^z = \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f \omega_{\text{sym}^m f}^z(x) + O_\eta(R_2),$$

où

$$R_2 = R_1 + \zeta(1+\varepsilon)^{(m+1)|\Re z|} x^\varepsilon (kN)^{65\eta-1}.$$

Avec les Lemmes 3.4.4 et 3.4.6, on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^z = M_{\text{sym}^m}^z(N) + O_\eta(R_3),$$

où

$$R_3 = x^{-\sigma} \exp \left\{ c z'_m \left(\log_2 z'_m + \frac{z'_m{}^{\sigma/(1-\sigma)} - 1}{\sigma \log z'_m} \right) \right\} + k^{-5/6} N^{-1+\varepsilon} x^{m/4} [(z_m + 1) \log x]^{z_m} \\ + (x^{-1/\log_2(kN)} + x^{c|z|} e^{-\log^2(kN)}) e^{c|z| \log_3(10kN)} + \zeta(1+\varepsilon)^{(m+1)|\Re z|} x^\varepsilon (kN)^{65\eta-1}.$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{500m}$, $x = (kN)^{\frac{1}{10m}}$ et $\sigma = \frac{1}{\log(|z|+8)}$, on obtient les constantes positives c_0 et δ dépendant de η telles que

$$R_3 \ll e^{-\delta \log(kN)/\log_2(kN)},$$

uniformément pour $|z| \ll c_0 \log(kN)/\log_2(10kN) \log_3(10kN)$.

3.5 Démonstration du Théorème 3.1.1

3.5.1 Démonstration du Théorème 3.1.1(i)

Dans le Lemme 3.2.3, lorsque $s = 1$, $T = \log^{4/\eta}(kN)$ et $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$, on peut obtenir

$$\log L(1, \text{sym}^m f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} e^{-n/T} + O_{\eta} \left(\frac{1}{\log(kN)} \right).$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(p^\nu)}{p^\nu \log p^\nu} (e^{-p^\nu/T} - e^{-\nu p/T}) \rightarrow 0,$$

pour $kN \rightarrow \infty$ avec $2 \mid k$ et $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$. Donc on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} e^{-n/T} &= \sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(p^\nu)}{p^\nu \log p^\nu} e^{-p^\nu/T} \\ &= \sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(p^\nu)}{p^\nu \log p^\nu} e^{-\nu p/T} + o(1). \end{aligned}$$

Comme $P^-(N) \rightarrow \infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$, on a

$$\sum_{p \nmid N} \sum_{\nu \geq 1} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(p^\nu)}{p^\nu \log p^\nu} e^{-\nu p/T} = o(1) \quad (N \rightarrow \infty).$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\text{sym}^m f}(n)}{n \log n} e^{-n/T} &= \sum_{p \nmid N} \sum_{\nu \geq 1} \sum_{0 \leq j \leq m} \frac{\alpha_f(p)^{(m-2j)\nu}}{\nu p^\nu} e^{-\nu p/T} + o(1) \\ &= \sum_{p \nmid N} \sum_{0 \leq j \leq m} \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{e^{p/T} p} \right)^{-1} + o(1) \\ &= \sum_{p \nmid N} \log D(e^{-p/T} p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))]) + o(1), \end{aligned}$$

d'après (3.4.1) avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\alpha_f(p) = e^{i\theta_f(p)}$. Par (3.4.2) et (3.4.5), on a

$$\left| \sum_{\substack{p > T \\ (p, N) = 1}} \log D(e^{-p/T} p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))]) \right| \ll \sum_{p > T} e^{-p/T} p^{-1} \ll (\log T)^{-1} \rightarrow 0,$$

et

$$\left| \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N) = 1}} \log \left(\frac{D(e^{-p/T} p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))])}{D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))])} \right) \right| \ll \sum_{p \leq T} \frac{1 - e^{-p/T}}{p} \ll (\log T)^{-1} \rightarrow 0.$$

Donc on a

$$\log L(1, \text{sym}^m f) = \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N)=1}} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_f(p))]) + o(1). \quad (3.5.1)$$

D'après (3.5.1) et la notation dans (3.4.6), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N)=1}} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^+)]) + o(1) &\geq \log L(1, \text{sym}^m f) \\ &\geq \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N)=1}} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^-)]) + o(1). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

D'une part, d'après (3.4.2) et (3.4.5), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \mp \log \left(\frac{D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)])}{D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)])} \right) &= \mp \frac{\pm A_m^\pm - \text{tr}(\text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)])}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ &= -\frac{A_m^\pm \mp \text{tr}(\text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)])}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, $A_m^\pm \mp \text{tr}(\text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]) \geq 0$, on a

$$\frac{A_m^\pm \mp \text{tr}(\text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)])}{p} \ll \frac{1}{p^2}.$$

D'après la relation

$$\log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]) - \text{tr}(\text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]) p^{-1} \ll \frac{1}{p^2}$$

et avec (3.4.2), on a

$$\pm \log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]) - \frac{A_m^\pm}{p} \ll \frac{1}{p^2}. \quad (3.5.3)$$

Par conséquent

$$\sum_{\substack{p > T \\ (p, N)=1}} \left(\pm \log D(p^{-1}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]) - \frac{A_m^\pm}{p} \right) \ll \frac{1}{T \log T}.$$

Puis on voit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, T)=1}} \log D\left(\frac{1}{p}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]\right) &\leq \pm \sum_p \left(\pm \log D\left(\frac{1}{p}, \text{sym}^m [g(\theta_{m,p}^\pm)]\right) - \frac{A_m^\pm}{p} \right) \\ &\pm \sum_{p \leq T} \frac{A_m^\pm}{p} + O\left(\sum_{p \geq P^-(N)} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{T \log T} + \sum_{\substack{p \leq T \\ p|N}} \frac{1}{p} \right). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Par (3.4.5), on a

$$\sum_p \left(\pm \log D\left(\frac{1}{p}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^\pm)]\right) - \frac{A_m^\pm}{p} \right) = \log A_m^\pm (B_m^\pm - \varpi_0).$$

Lorsque $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$, on a la majoration pour le terme d'erreur

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq P^-(N)} \frac{1}{p^2} &\ll \frac{1}{P^-(N)} \ll \frac{1}{\log(kN) \log_2(kN)}, \\ \sum_{\substack{p \leq T \\ p|N}} \frac{1}{p} &\ll \frac{\omega(N)}{P^-(N)} \ll \frac{1}{\log_2 N}, \end{aligned}$$

où $\omega(N)$ est la fonction de nombre de facteurs premiers distincts vérifiant

$$\omega(N) \ll \log N / \log_2 N$$

pour N sans facteurs carrés.

De plus, on a

$$\sum_{p \leq T} \frac{A_m^\pm}{p} = A_m^\pm \left(\log_2 T + \varpi_0 + O\left(\frac{1}{\log T}\right) \right),$$

D'où on déduit

$$\sum_{\substack{p \leq T \\ (p,T)=1}} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^\pm)]) \lesssim \pm A_m^\pm \log(B_m^\pm \log T) + o(1).$$

Au vu de la relation (3.5.2), la borne (3.1.18) en découle.

Sous l'hypothèse de Riemann généralisée, on pose $s = 1, \alpha = \frac{3}{4}$ et $T = (\log(kN))^{2+20\varepsilon}$, alors on peut obtenir (3.1.16) de la même façon.

3.5.2 Démonstration du Théorème 3.1.1(ii)

On utilise la Proposition 3.4.1 pour prouver le Théorème 3.1.1(ii). Grâce à la proposition, pour kN suffisamment grand avec

$$2 \mid k, N \in \mathbb{N}_k(\Xi) \text{ et } r \ll \log(kN) / \log_2(10kN) \log_3(10kN),$$

on a

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^{\pm r} \geq \frac{1}{2} M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N).$$

Comme

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)} \omega_f \leq \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f = 1 + O(k^{-5/6} N^{-1+\varepsilon}),$$

il existe $f_m^\pm \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$ telles que

$$L(1, \text{sym}^m f_m^\pm)^{\pm r} \geq \frac{1}{2} M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N).$$

Lemme 3.5.1. Pour $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et $r \ll \frac{\log(kN)}{\log_2(10kN) \log_3(10kN)}$, on a

$$M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N) = M_{\text{sym}^m}^{\pm r} \exp \left\{ O \left(\frac{r}{\log^3 r} \right) \right\}. \quad (3.5.5)$$

Démonstration. Selon la définition de $M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N)$ dans (3.4.7), on a

$$M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N) = M_{\text{sym}^m}^{\pm r} \sum_{n \geq 1} \frac{\square_N(n^m) d_r(n)}{n^{1+m/2}} \left(\prod_{p|N} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^r \sin^2 \theta \, d\theta \right)^{-1}.$$

Et par les définitions de $\square_N(\cdot)$ et $d_r(\cdot)$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\square_N(n^m) d_r(n)}{n^{1+m/2}} = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{\square(p^m)}{p^{m/2+1}} \right)^{-r} = \exp \left(O \left(\sum_{p|N} \frac{r}{p^{m/2+1}} \right) \right).$$

Grâce au Lemme 3.4.2, on peut obtenir

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^r \sin^2 \theta \, d\theta = \sum_{\nu \geq 0} \frac{\mu_{m,0}^{r,\nu}}{p^\nu} = 1 + O \left(\frac{\mu_{m,0}^{r,2}}{p^2} \right).$$

Comme $|\mu_{m,0}^{r,2}| \ll r^2$, on a

$$M_{\text{sym}^m}^{\pm r}(N) = M_{\text{sym}^m}^{\pm r} \exp \left(O \left(\sum_{p|N} \frac{r}{p^{m/2+1}} + \frac{r^2}{p^2} \right) \right).$$

Donc lorsque $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$, le terme O en découle. □

Par [81], lorsque $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et $r \ll \frac{c \log(kN)}{\log_2(10kN) \log_3(10kN)}$, on a

$$\log M_{\text{sym}^m}^{\pm r} = A_m^\pm r \log(B_m^\pm \log(A_m^\pm r)) + O \left(\frac{r}{\log r} \right), \quad (3.5.6)$$

où A_m^\pm et B_m^\pm sont les constantes positives définies dans (3.4.5) ci-dessus.

En posant $r = c \log(kN) / \log_2(10kN) \log_3(10kN)$, on obtient (3.1.17).

3.6 Inégalité du grand crible et preuve du Théorème 3.1.2

3.6.1 Inégalité du grand crible et l'application

L'inégalité du grand crible suivante est due à Lau et Wu [53, Theorem 1], qui joue un rôle important dans la démonstration du Théorème 3.1.2.

Lemme 3.6.1. *Soit $\nu \geq 1$ un entier fixé. On a*

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\substack{P < p \leq Q \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^\nu)}{p} \right|^{2j} \ll_{\nu} k \varphi(N) \left(\frac{96(\nu+1)^{2j}}{P \log P} \right)^j + (kN)^{10/11} \left(\frac{10Q^{\nu/10}}{\log P} \right)^{2j}$$

uniformément pour

$$j \geq 1, \quad 2 \mid k, \quad N \text{ (sans facteurs carrés)}, \quad 2 \leq P < Q \leq 2P.$$

Ici la constante impliquée ne dépend que de ν .

Démonstration. Il suffit de prendre le choix $b_p = 1$ pour tout p dans le Théorème 1 dans [53]. \square

Lemme 3.6.2. *Soient $\nu \in \mathbb{N}$, $2 \mid k$ et N un entier sans facteurs carrés.*

(i) *Désignons*

$$\mathfrak{P}_\nu^1(P, Q) := \left\{ f \in \mathcal{H}_k^*(N) : \left| \sum_{\substack{P < p \leq Q \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^\nu)}{p} \right| > \frac{10(\nu+1)}{(\log(kN))(\log P)} \right\}. \quad (3.6.1)$$

Alors on a

$$|\mathfrak{P}_\nu^1(P, Q)| \ll_{\nu} (kN)^{1-1/(250\nu)},$$

pour

$$\log^{10}(kN) \leq P \leq Q \leq 2P \leq \exp\{\sqrt{\log(kN)}\}. \quad (3.6.2)$$

La constante impliquée ne dépend que de ν .

(ii) *Soit $0 < \varepsilon < 1$ une constante arbitraire. Désignons*

$$\mathfrak{P}_\nu^2(P, Q; z) := \left\{ f \in \mathcal{H}_k^*(N) : \left| \sum_{\substack{P < p \leq Q \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^\nu)}{p} \right| > \left(\frac{96(\nu+1)^2 z}{\log_2^2(kN) P} \right)^{1/2} \right\}. \quad (3.6.3)$$

Alors on a

$$|\mathfrak{P}_\nu^2(P, Q; z)| \ll_{\varepsilon, \nu} kN \exp \left\{ -c_0(\varepsilon, \nu) \frac{\log(kN)}{\log_2(kN)} \log \left(\frac{2z}{\varepsilon \log(kN)} \right) \right\},$$

pour une constante positive $c_0(\varepsilon, \nu)$ et

$$\varepsilon \log(kN) \leq z \leq P \leq Q \leq 2P \leq \log^{10}(kN). \quad (3.6.4)$$

La constante impliquée dépend de ε et ν .

Démonstration. Dans le Lemme 3.6.1, on choisit $j = \lfloor \frac{\log(kN)}{100\nu \log P} \rfloor$ et $j = \lfloor \frac{\varepsilon \log(kN)}{100\nu \log_2(kN)} \rfloor$ respectivement dans les démonstrations de (i) et (ii). Par la définition de $\mathfrak{P}_\nu^1(P, Q)$, on a

$$|\mathfrak{P}_\nu^1(P, Q)| \ll \left(\frac{(\log(kN)) \log P}{10(\nu+1)} \right)^{2j} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \left| \sum_{\substack{P < p \leq Q \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^\nu)}{p} \right|^{2j}.$$

Alors par l'inégalité du grand crible dans le Lemme 3.6.1 et (3.6.2), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_\nu^1(P, Q)| &\ll \left(\frac{\log(kN) \log P}{10(\nu+1)} \right)^{2j} \left[k\varphi(N) \left(\frac{96(\nu+1)^{2j}}{P \log P} \right)^j + (kN)^{10/11} \left(\frac{10Q^{\nu/10}}{\log P} \right)^{2j} \right] \\ &\ll kN \left(\left(\frac{j(\log P) \log^2(kN)}{P} \right)^j + \frac{Q^{2\nu j}}{(kN)^{1/11}} \right) \\ &\ll (kN)^{1-1/250\nu}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_\nu^2(P, Q; z)| &\ll \left(\frac{P \log_2^2(kN)}{96(\nu+1)^2 z} \right)^j \left[k\varphi(N) \left(\frac{96(\nu+1)^{2j}}{P \log P} \right)^j + (kN)^{10/11} \left(\frac{10Q^{\nu/10}}{\log P} \right)^{2j} \right] \\ &\ll (kN) \left(\left(\frac{j \log_2(kN)}{z} \right)^j + \frac{Q^{2\nu j}}{(kN)^{1/11}} \right) \\ &\ll (kN) \exp \left\{ -\frac{\varepsilon \log(kN)}{101\nu \log_2(kN)} \log \left(\frac{2z}{\varepsilon \log(kN)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

pour $\log P \geq \frac{1}{2} \log_2(kN)$ et $z \geq \log_2^2(kN)$. □

3.6.2 Démonstration du Théorème 3.1.2(i)

Pour prouver le Théorème 3.1.2(i), on demande une variante du Lemme 3.2.5.

Lemme 3.6.3. *Soient $1 \leq m \leq 4$, $2 \mid k$, N un entier sans facteurs carrés et $0 < \varepsilon < 1$. Alors pour $\varepsilon \log(kN) \leq z \leq \log^{10}(kN)$, il existe une constante $c_0 = c_0(\varepsilon)$, telle que*

$$L(1, \text{sym}^m f) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \mid N}} \left(1 - \frac{\lambda_f(p)^m}{p} \right)^{-1} \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid N}} \prod_{0 \leq j \leq m} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{p} \right)^{-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log_2(kN)} \right) \right\}$$

pour toutes, sauf $O_\varepsilon((kN)^{1-c_0(\log[2z/(\varepsilon \log(kN))])/\log_2(kN)})$, les formes primitives $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. La constante impliquée est absolue.

Démonstration. Nous posons

$$x = \exp\left(\sqrt{\frac{\log(kN)}{7(m+1)}}\right), \quad y_1 = \log^{10}(kN), \quad y_2 = \varepsilon \log(kN).$$

On sépare la sommation dans (3.2.8) en trois parties : $p \leq z$, $z < p \leq y_1$ et $y_1 < p \leq x$. Au

vue de la Proposition 1.1.5, la contribution de la dernière partie nous donne

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \nmid N}} \sum_{0 \leq j \leq m} \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{p} \right)^{-1} + \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \mid N}} \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^m}{p} \right)^{-1} \\
&= \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} + \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \mid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} + O(y_1^{-1}) \\
&=: I_{31} + I_{32} + O(y_1^{-1}).
\end{aligned}$$

Par la méthode dyadique, on peut écrire

$$I_{31} = \sum_{1 \leq \ell \leq \frac{\log(x/y_1)}{\log 2}} \sum_{\substack{2^{\ell-1} y_1 < p \leq 2^\ell y_1 \\ p \nmid N}} \lambda_f(p^m) p^{-1}.$$

Désignons

$$\mathfrak{P}_m^0 := \mathcal{H}_k^-(N; \eta, m) \cup \bigcup_{\ell} \mathfrak{P}_m^1(2^{\ell-1} y_1, 2^\ell y_1) \quad \text{pour} \quad \ell \leq \frac{\log(x/y_1)}{\log 2},$$

où $\mathfrak{P}_m^1(P, Q)$ est défini par (3.6.1). Alors le Lemme 3.6.2 implique

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{P}_m^0| &\ll (kN)^{65\eta} + \sum_{\ell} |\mathfrak{P}_m^1(2^{\ell-1} y_1, 2^\ell y_1)| \\
&\ll (kN)^{65\eta} + (kN)^{1-1/(250m)} \sqrt{\log(kN)}.
\end{aligned}$$

Donc pour $\eta \in (0, \frac{1}{100}]$, on a

$$|\mathfrak{P}_m^0| \ll (kN)^{1-1/(250m)+\varepsilon}.$$

Puisque $f \in \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathfrak{P}_m^0$, par la définition de $\mathfrak{P}_m^1(P, Q)$, on a

$$\begin{aligned}
I_{31} &\ll \sum_{1 \leq \ell \leq \frac{\log(x/y_1)}{\log 2}} \left| \sum_{\substack{2^{\ell-1} y_1 < p \leq 2^\ell y_1 \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} \right| \\
&\ll \sum_{1 \leq \ell \leq \frac{\log(x/y_1)}{\log 2}} \frac{10(m+1)}{(\log(kN)) \log(2^{\ell-1} y_1)} \ll \frac{\log_2(kN)}{\log(kN)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons estimer I_{32} directement de la manière

$$I_{32} = \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \mid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} \ll \sum_{\substack{y_1 \leq p \leq x \\ p \mid N}} \frac{1}{p^{3/2}} \ll \frac{1}{\log^5(kN)},$$

par la Proposition 1.1.4. Donc on a

$$I_3 \ll \frac{\log_2(kN)}{\log(kN)}. \quad (3.6.5)$$

On dénote I_2 la contribution de $z \leq p \leq y_1$. Comme précédemment, on peut écrire

$$I_2 = \sum_{\substack{z \leq p \leq y_1 \\ p \nmid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} + \sum_{\substack{z \leq p \leq y_1 \\ p \mid N}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} + O(z^{-1}) =: I_{21} + I_{22} + O(z^{-1}).$$

Pour I_{21} , par la méthode dyadique, on peut écrire

$$I_{21} = \sum_{1 \leq \ell \leq \frac{\log(y_1/z)}{\log 2}} \sum_{\substack{2^{\ell-1}z < p \leq 2^\ell z \\ p \nmid N}} \lambda_f(p^m) p^{-1}.$$

Désignons

$$\mathfrak{P}_m^1(z) = \mathfrak{P}_m^0 \cup \bigcup_{\ell} \mathfrak{P}_m^2(2^{\ell-1}z, 2^\ell z; z) \quad \text{pour} \quad \ell \leq \frac{\log(y_1/z)}{\log 2}$$

où $\mathfrak{P}_m^2(P, Q; z)$ est défini par (3.6.3). Alors le Lemme 3.6.2 implique

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}_m^1(z)| &\ll_{\varepsilon} (kN)^{1-1/(251m)} + \log_2(kN) kN \exp \left\{ -c_0(\varepsilon, m) \frac{\log(kN)}{\log_2(kN)} \log\left(\frac{2z}{\varepsilon \log(kN)}\right) \right\} \\ &\ll_{\varepsilon} (kN)^{1-c_1 \{\log(2z/\varepsilon \log(kN))/\log_2(kN)\}}, \end{aligned}$$

où $c_1 = c_1(\varepsilon, m)$ est une constante positive dépendante de ε et m . Donc lorsque $f \in \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathfrak{P}_m^1(z)$, par la définition de $\mathfrak{P}_m^2(P, Q; z)$, on a

$$\begin{aligned} I_{21} &\ll \sum_{\ell} \frac{\sqrt{z}}{\log_2(kN) \cdot \sqrt{2^{\ell-1}z}} \ll \frac{1}{\log_2(kN)}, \\ I_{22} &= \sum_{\substack{z \leq p \leq y_1 \\ p \mid N}} \frac{\lambda_f(p^\nu)}{p} \ll \frac{1}{\sqrt{z}} \ll \frac{1}{\log_2(kN)}. \end{aligned}$$

Donc on a $I_2 \ll \log_2^{-1}(kN)$. Avec (3.6.5), on obtient

$$\begin{aligned} \log L(1, \text{sym}^m f) &= \sum_{\substack{p \leq z \\ p \nmid N}} \sum_{0 \leq j \leq m} \log \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{p} \right)^{-1} \\ &\quad + \sum_{\substack{p \leq z \\ p \mid N}} \log \left(1 - \frac{\lambda_f(p)^m}{p} \right)^{-1} + O\left(\frac{1}{\log_2(kN)}\right), \end{aligned}$$

pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathfrak{P}_m^1(z)$. Il implique le résultat immédiatement. \square

On va prouver le Théorème 3.1.2(i). D'après le Lemme 3.6.3, il y a des constantes $c_0 = c_0(\varepsilon)$, $k_0 = k_0(\varepsilon)$ et $N_0 = N_0(\varepsilon)$, telles que pour $k \geq k_0$, $N \geq N_0$ et $\varepsilon \log(kN) \leq z \leq \log^{10}(kN)$, on peut trouver un sous-ensemble $\mathfrak{P}_{k,N}^*(z) \subset \mathcal{H}_k^*(N)$, avec

$$|\mathfrak{P}_{k,N}^*(z)| \ll kN \exp \left\{ -c_0 \log \left(\frac{2z}{\varepsilon \log(kN)} \right) \frac{\log(kN)}{\log_2(kN)} \right\},$$

tel que pour toute $f \in \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathfrak{P}_{k,N}^*(z)$, le Lemme 3.6.3 se vérifie.

Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N) \setminus \mathfrak{P}_{k,N}^*(z)$, lorsque $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$, on a

$$\begin{aligned} L(1, \text{sym}^m f) &\leq \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log_2(kN)}\right) \right\} \prod_{p \leq z, p|N} \left(1 - \frac{\lambda_f(p)^m}{p}\right)^{-1} \prod_{p \leq z, p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(m+1)} \\ &\leq \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log_2(kN)}\right) \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{\omega(N)}{P^-(N)}\right) \right\} (e^\gamma \log z)^{m+1} \\ &\leq (B_m^+(\log z + C_0))^{A_m^+}, \end{aligned}$$

où $\omega(N) \ll \log(2N)/\log_2(3N)$ est le nombre des facteurs premiers de N .

On a similairement

$$\begin{aligned} L(1, \text{sym}^m f) &= \left\{ 1 + O(\log_2^{-1}(kN)) \right\} \prod_{p \leq z, p \nmid N} \prod_{0 \leq j \leq m} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{m-2j}}{p}\right)^{-1} \\ &\geq \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log_2(kN)}\right) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{A_m^-} \sum_{p \leq z} \left(-\log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) - \frac{A_m^-}{p} \right) - \sum_{p \leq z} \frac{A_m^-}{p} \right\} \\ &\geq (B_m^-(\log z + C_0))^{-A_m^-}. \end{aligned}$$

Donc, en posant $z = \exp\{\log_2(kN) + r - C_0\}$, on peut compléter la démonstration du Théorème 3.1.2(i).

3.6.3 Démonstration du Théorème 3.1.2(ii)

Grâce à (3.1.1), il est facile de voir que

$$\mathcal{F}_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) / \log(kN) \ll F_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) \ll \mathcal{F}_{k,N}^\pm(t, \text{sym}^m) \log(kN) \quad (3.6.6)$$

pour tout entier pair $k \geq 2$, entier N sans facteurs carrés et tout nombre $t > 0$, où les constantes impliquées sont absolues. à partir du Théorème 3.1.3, on déduit immédiatement le Théorème 3.1.2(ii).

3.7 Démonstration du Théorème 3.1.3

Dans cette section, on va affiner l'argument de Lamzouri [50] et appliquer un peu plus techniques de [59] à la démonstration du Théorème 3.1.3. On considère le cas du signe $-$, et on peut traiter l'autre cas de la même façon. D'abord, il faut améliorer l'estimation de (3.5.6) en donnant un terme d'erreur plus précis. Alors le lemme suivant est un analogue de [50, Lemma 1.1].

Lemme 3.7.1. *On pose*

$$h_m^-(x) := \begin{cases} \log \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left(-\frac{\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{m+1} x \right) \sin^2 \theta \, d\theta \right) & \text{si } x < 1, \\ \log \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left(-\frac{\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{m+1} x \right) \sin^2 \theta \, d\theta \right) - \frac{A_m^-}{m+1} x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Alors nous avons

$$h_m^-(x) = \begin{cases} O(x^2) & (x < 1), \\ O(\log x + 1) & (x \geq 1). \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est presque la même que [50, Lemma 1.1]. Lorsque $x < 1$, on a

$$\exp \left(-\frac{\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{m+1} x \right) = 1 - \frac{\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{m+1} x + O(x^2).$$

En notant le fait que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)]) \sin^2 \theta \, d\theta = 0$$

et que

$$\log(1 + O(x^2)) = O(x^2),$$

on peut obtenir l'estimation pour le premier cas aisément. Lorsque $x \geq 1$, étant donnée l'égalité suivante

$$\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)]) = -A_m^- + c_m(\theta - \theta_m^-)^2 + O((\theta - \theta_m^-)^3)$$

pour une constante positive c_m et θ_m^- est définies par (3.4.5), on a

$$\begin{aligned} h_m^-(x) &= \log \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left(-\frac{\text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{m+1} x \right) \sin^2 \theta \, d\theta \right) - \frac{A_m^-}{m+1} x \\ &= \log \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left(-\frac{c_m(\theta - \theta_m^-)^2 + O((\theta - \theta_m^-)^3)}{m+1} x \right) \sin^2 \theta \, d\theta \right) \\ &\geq \log \left(\frac{2}{\pi} \int_{\theta_m^- - \epsilon}^{\theta_m^- + \epsilon} \exp \left(-\frac{c_m(\theta - \theta_m^-)^2 + O((\theta - \theta_m^-)^3)}{m+1} x \right) \sin^2 \theta \, d\theta \right) \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

où $\epsilon = \frac{1}{x}$. Ainsi, on en déduit la deuxième estimation immédiatement. □

Le lemme suivant est une amélioration de (3.5.6).

Lemme 3.7.2. *Soient m un entier positif et $M_{\text{sym}^m}^{\pm r}$ défini par (3.4.8). Alors on a*

$$\log M_{\text{sym}^m}^{\pm r} = A_m^\pm r \log(B_m^\pm \log(A_m^\pm r)) + \frac{A_m^\pm r}{\log(A_m^\pm r)} \left\{ \mathcal{A}_m^\pm - 1 + \frac{\mathcal{B}_m^\pm}{\log A_m^\pm r} + O\left(\frac{1}{(\log r)^2}\right) \right\}$$

lorsque $r \rightarrow \infty$, où A_m^\pm et B_m^\pm sont des constantes définies par (3.4.5) ci-dessus, \mathcal{A}_m^+ et \mathcal{B}_m^+ sont donnés par (3.7.2) et (3.7.3) et

$$\mathcal{A}_m^- = \mathcal{D}_m^- + \log \frac{m+1}{A_m^-}, \quad \mathcal{B}_m^- = \mathcal{K}_m^- - \frac{1}{2} \left(\log \frac{m+1}{A_m^-} \right)^2.$$

Ici, \mathcal{D}_m^- , \mathcal{K}_m^- sont définis par (3.7.6).

Démonstration. Pour $+r$, une petite variante de la démonstration de [50, Proposition 1.2] donne

$$\mathcal{A}_m^+ = 1 + \int_0^1 \frac{h_m^+(t)}{t^2} dt + \int_1^\infty \frac{h_m^+(t) - t}{t^2} dt \quad (3.7.2)$$

$$\mathcal{B}_m^+ = \int_0^1 \frac{h_m^+(t)}{t^2} \log t dt + \int_1^\infty \frac{h_m^+(t) - t}{t^2} \log t dt \quad (3.7.3)$$

où

$$h_m^+(t) = \log \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left(\frac{t}{m+1} \sum_{j=0}^m \cos(\theta(m-2j)) \right) \sin^2 \theta d\theta \right).$$

Pour $-r$, nous rappelons que

$$M_{\text{sym}^m}^{-r} = \prod_p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^{-r} \sin^2 \theta d\theta =: \prod_p \mathcal{E}_p^{-r}.$$

Pour $p \leq \sqrt{(m+1)r}$, $|\theta - \theta_{m,p}^-| < \delta$, nous écrivons

$$\begin{aligned} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)]) &= D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) \\ &\quad + \frac{1}{2} D''(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])(\theta - \theta_{m,p}^-)^2 + O((\theta - \theta_{m,p}^-)^3), \end{aligned}$$

où δ est un petit paramètre choisi plus tard. Alors

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_p^{-r} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])^r \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{m,p}^- - \delta}^{\theta_{m,p}^- + \delta} \left(\frac{D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])}{D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])} \right)^{-r} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{m,p}^- - \delta}^{\theta_{m,p}^- + \delta} \left\{ 1 + \frac{D''(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])}{2D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])} (\theta - \theta_{m,p}^-)^2 + O((\theta - \theta_{m,p}^-)^3) \right\}^{-r} \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Puisque $D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)]) \geq (1 + p^{-1})^{-(m+1)}$ et

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)]) \ll_m \frac{1}{p}, \quad \frac{d}{d\theta} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) = 0,$$

on peut écrire

$$\mathcal{E}_p^{-r} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)])^r \geq \left\{ 1 + O\left(\frac{\delta^2}{p} + \delta^3\right) \right\}^{-r} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{m,p}^- - \delta}^{\theta_{m,p}^- + \delta} \sin^2 \theta d\theta.$$

Comme

$$\left| \log \left(\frac{2}{\pi} \int_{\theta_{m,p}^- - \delta}^{\theta_{m,p}^- + \delta} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \right| \ll -\log \delta + 1,$$

on choisit $\delta \leq p/r^c$ pour une constante $c > 0$ assez grande, alors on a

$$\log \mathcal{E}_p^{-r} = -r \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) + O_m(\log r). \quad (3.7.4)$$

Pour $p > \sqrt{(m+1)r}$, on a

$$\begin{aligned} D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta)])^{-r} &= \prod_{j=0}^m \left(1 - \frac{2 \cos(m-2j)\theta}{p} + \frac{1}{p^2} \right)^{r/2} \\ &= \exp \left\{ -\frac{r \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{p} + O_m \left(\frac{r}{p^2} \right) \right\} \\ &= \exp \left(-\frac{r \text{tr}(\text{sym}^m[g(\theta)])}{p} \right) \left\{ 1 + O_m \left(\frac{r}{p^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

étant donné (3.5.3) et (3.7.4), on a

$$\begin{aligned} \log M_{\text{sym}^m}^{-r} &= -r \sum_{p \leq (m+1)r} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) \\ &\quad + \sum_{p > \sqrt{(m+1)r}} h_m^-((m+1)r/p) + O_m(r^{1/2}) =: S_1 + S_2 + O_m(r^{1/2}). \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

D'abord on évalue S_1 . D'après (3.5.3) et (3.4.5), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_1 &= r \sum_{p \leq (m+1)r} \left(-\log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_{m,p}^-)]) - A_m^- p^{-1} \right) + r \sum_{p \leq (m+1)r} A_m^- p^{-1} \\ &= A_m^- r \log(B_m^- \log(A_m^- r)) + \frac{A_m^- r \log((m+1)/A_m^-)}{\log(A_m^- r)} \\ &\quad - \frac{A_m^- r (\log(A_m^-/(m+1)))^2}{2(\log(A_m^- r))^2} + O \left(\frac{r}{(\log r)^3} \right). \end{aligned}$$

Par la méthode de Lamzouri (voir [50, 1.5-1.9]) avec un peu plus d'effort pour préciser le coefficient du terme $1/\log^2 r$, on peut obtenir

$$S_2 = \frac{A_m^- r}{\log(A_m^- r)} \left(\mathcal{D}_m^- - 1 + \frac{\mathcal{K}_m^-}{\log(A_m^- r)} + O \left(\frac{1}{\log^2(A_m^- r)} \right) \right),$$

où

$$\mathcal{D}_m^- = 1 + \int_0^\infty \frac{h_m^-(u)}{u^2} \, du, \quad \mathcal{K}_m^- = \int_0^\infty \frac{h_m^-(u)}{u^2} \log u \, du. \quad (3.7.6)$$

On peut compléter la démonstration pour $-r$ en rapportant ces deux égalités dans (3.7.5). \square

Remarque 12. Nous écrivons $\mathcal{A}_m^\pm - 1$ pour la commodité seulement plus tard.

Maintenant nous prouvons le Théorème 3.1.3.

Pour $1 \leq m \leq 4$. On pose

$$\mathfrak{F}_{k,N}^\pm(t) := \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^*(N) \\ L(1, \text{sym}^m f) \underset{\geq}{\asymp} (B_m^\pm t)^{\pm A_m^\pm}}} \omega_f, \quad \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) := \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m) \\ L(1, \text{sym}^m f) \underset{\geq}{\asymp} (B_m^\pm t)^{\pm A_m^\pm}}} \omega_f.$$

Par (1.1.10) et (3.1.30), on a

$$\mathfrak{F}_{k,N}^\pm(t) = \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) + O((kN)^{-4/5}). \quad (3.7.7)$$

Nous considérons le cas du signe $-$ seulement. D'abord nous écrivons

$$\begin{aligned} A_m^- r \int_0^\infty \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt &= A_m^- r \int_0^\infty t^{A_m^- r - 1} \sum_{\substack{f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m) \\ L(1, \text{sym}^m f) \leq (B_m^- t)^{-A_m^-}}} \omega_f dt \\ &= (B_m^-)^{-A_m^- r} \sum_{f \in \mathcal{H}_k^+(N, \eta, m)} \omega_f L(1, \text{sym}^m f)^{-r}. \end{aligned}$$

Avec la Proposition 3.4.1, uniformément pour $|r| \leq c \log(kN) / \log_2(10kN) \log_3(10kN)$, on a

$$A_m^- r \int_0^\infty \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt = (B_m^-)^{-A_m^- r} M_{\text{sym}^m}^r(N) + O(e^{-c' \log(kN) / \log_2(kN)}).$$

Grâce à (3.5.5) et le Lemme 3.7.2, on peut déduire

$$\begin{aligned} &A_m^- r \int_0^\infty \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \\ &= (\log A_m^- r)^{A_m^- r} \exp \left(\frac{A_m^- r}{\log(A_m^- r)} \left\{ \mathcal{A}_m^- - 1 + \frac{\mathcal{B}_m^-}{\log A_m^- r} + O \left(\frac{1}{(\log r)^2} \right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

Soient ϖ un petit paramètre choisi plus tard, $\tau = \log(A_m^- r) + \mathcal{A}_m^-$ et $R = re^\varpi$. Alors en substituant R à r dans (3.7.8), on a

$$\begin{aligned} &A_m^- r \int_{\tau+\varpi}^\infty \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \leq (\tau + \varpi)^{A_m^- (r-R)} \int_0^\infty \mathfrak{F}_{k,N}^{\pm,*}(t) t^{A_m^- R - 1} dt \\ &= \Upsilon \exp \left(\frac{A_m^- R}{\log(A_m^- R)} \left\{ \mathcal{A}_m^- - 1 + \frac{\mathcal{B}_m^-}{\log A_m^- r} + O \left(\frac{1}{(\log r)^2} \right) \right\} \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (\tau + \varpi)^{A_m^- (r-R)} (\log A_m^- R)^{A_m^- R} = (\log(A_m^- r) + \mathcal{A}_m^- + \varpi)^{A_m^- r} \left(1 - \frac{\mathcal{A}_m^-}{\tau + \varpi} \right)^{A_m^- R} \\ &= (\log(A_m^- r))^{A_m^- r} \exp \left\{ \frac{A_m^- r}{\log(A_m^- r)} \left[(\mathcal{A}_m^- + \varpi - e^\varpi \mathcal{A}_m^-) - \frac{\mathcal{A}_m^{-2} (1 - e^\varpi)}{2 \log(A_m^- r)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2e^\varpi \varpi \mathcal{A}_m^- - 2\varpi \mathcal{A}_m^- - \varpi^2}{2 \log(A_m^- r)} + O \left(\frac{1}{(\log r)^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$\frac{A_m^- R}{\log(A_m^- R)} = \frac{A_m^- r e^\varpi}{\log(A_m^- r) + \varpi} = \frac{A_m^- r e^\varpi}{\log(A_m^- r)} \left\{ 1 - \frac{\varpi}{\log A_m^- r} + O\left(\frac{\varpi^2}{(\log r)^2}\right) \right\}.$$

En rapportant les formules à l'inégalité précédente et lorsque $\varpi = c/\log A_m^- r$ pour une constante c assez grande, on a

$$\begin{aligned} & A_m^- r \int_{\tau+\varpi}^{\infty} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \\ & \leq (\log(A_m^- r))^{A_m^- r} \exp \left\{ \frac{A_m^- r}{\log(A_m^- r)} \left[\mathcal{A}_m^- + \varpi - e^\varpi + \frac{\mathcal{B}_m^-}{\log r} + O\left(\frac{1}{(\log r)^2}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

qui implique (pour grande c)

$$A_m^- r \int_{\tau+\varpi}^{\infty} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \leq \left(\int_0^{\infty} \mathfrak{F}_{k,N}^-(t) t^{A_m^- r - 1} dt \right) \exp\left(-\frac{r}{(\log r)^3}\right). \quad (3.7.9)$$

Similairement, on peut obtenir

$$A_m^- r \int_0^{\tau-\varpi} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \leq \left(\int_0^{\infty} \mathfrak{F}_{k,N}^-(t) t^{A_m^- r - 1} dt \right) \exp\left(-\frac{r}{(\log r)^3}\right). \quad (3.7.10)$$

Ainsi, on peut déduire à partir de (3.7.8)-(3.7.10) que

$$A_m^- r \int_{\tau-\varpi}^{\tau+\varpi} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt = (\log A_m^- r)^{A_m^- r} \exp\left(\frac{A_m^- r}{\log(A_m^- r)} \left\{ \mathcal{A}_m^- - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right) \right\}\right). \quad (3.7.11)$$

Comme $\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t)$ est une fonction non croissante, on a

$$\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau + \varpi) \tau^{A_m^- r} \exp\{O(\varpi r/\tau)\} \leq \int_{\tau-\varpi}^{\tau+\varpi} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\tau-\varpi}^{\tau+\varpi} \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) t^{A_m^- r - 1} dt \leq \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau - \varpi) \tau^{A_m^- r} \exp\{O(\varpi r/\tau)\}.$$

étant donné les deux inégalités avec (3.7.11), on obtient

$$\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau + \varpi) \leq \exp\left(-\frac{e^{\tau - \mathcal{A}_m^-}}{\tau} \{1 + O(\varpi)\}\right) \leq \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau - \varpi),$$

pour $kN \rightarrow \infty$, $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ et $\tau \leq \log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - \frac{1}{2}c_{11}$, où $c_{11} := 2(-\log(cA_m^-) - \mathcal{A}_m^-)$ est une constante positive.

Pour tout $t \leq \log_2(kN) - \log_3(kN) - \log_4(kN) - c_{11}$, on utilise la relation au-dessus avec $\tau_1 = t - \varpi$ et $\tau_2 = t + \varpi$ pour écrire

$$\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) = \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau_1 + \varpi_1) \leq \exp\left(-\frac{e^{t-\varpi_1-\mathcal{A}_m^-}}{t-\varpi_1}\{1+O(\varpi_1)\}\right) = \exp\left(-\frac{e^{t-\mathcal{A}_m^-}}{t}\{1+O(\varpi_1)\}\right),$$

$$\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) = \mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(\tau_2 - \varpi_2) \geq \exp\left(-\frac{e^{t+\varpi_2-\mathcal{A}_m^-}}{t+\varpi_2}\{1+O(\varpi_2)\}\right) = \exp\left(-\frac{e^{t-\mathcal{A}_m^-}}{t}\{1+O(\varpi_2)\}\right).$$

Il s'ensuit

$$\mathfrak{F}_{k,N}^{-,*}(t) = \exp\left(-\frac{e^{t-\mathcal{A}_m^-}}{t}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\right).$$

Avec (3.7.7) et l'égalité suivante

$$\sum_{f \in \mathcal{H}_k^*(N)} \omega_f = 1 + O(k^{-5/6}N^{-1+\varepsilon}),$$

on peut obtenir l'estimation de $\mathcal{F}_{k,N}^-(t, \text{sym}^m)$.

3.8 Démonstration du Théorème 3.1.4

En posant $s = 1$ et $T = (\log(kN))^{4/\eta}$ dans le (3.5.1), on obtient

$$\log L(1, \text{sym}^m f) = \sum_{\substack{p \leq T \\ (p,N)=1}} \log D(p^{-1}, \text{sym}^m[g(\theta_f(p))]) + o(1) \quad (3.8.1)$$

pour toute $f \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$. De (3.4.2) et (3.4.3), on peut déduire

$$\begin{aligned} \log L(1, \text{sym}^m f) &= \sum_{\substack{p \leq T \\ (p,N)=1}} \frac{\lambda_m^{1,1}[g(\theta_f(p))]}{p} + O_\eta(1) \\ &= \sum_{\substack{p \leq T \\ (p,N)=1}} \frac{\lambda_f(p^m)}{p} + O(1). \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

D'après le Théorème 3.1.1(ii), il existe $f = f_m^- \in \mathcal{H}_k^+(N; \eta, m)$ telle que

$$\sum_{\substack{p \leq T \\ (p,N)=1}} \frac{\lambda_{f_m^-}(p^m)}{p} = \log L(1, \text{sym}^m f_m^-) + O(1) \leq -A_m^- \log_3(kN) + O(1).$$

Alors on a

$$0 \leq \sum_{\substack{p \leq T \\ (p,N)=1}} \frac{A_m^- + \lambda_{f_m^-}(p^m)}{p} \ll 1,$$

puisque $A_m^- + \lambda_{f_m^-}(p^m) \geq 0$ grâce à (3.4.3) et (3.4.5). D'où, pour toute fonction $\xi(kN) \rightarrow \infty$ quand $kN \rightarrow \infty$ satisfaisant $\xi(kN) \leq \log_3(kN)$, on a

$$\sum_{\substack{p \leq T, (p, N) = 1 \\ \lambda_{f_m^-}(p^m) \geq -A_m^- + \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} \leq \frac{\log_3(kN)}{\xi(kN)} \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N) = 1}} \frac{A_m^- + \lambda_{f_m^-}(p^m)}{p} \ll \frac{\log_3(kN)}{\xi(kN)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq T, (p, N) = 1 \\ \lambda_{f_m^-}(p^m) < -A_m^- + \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} &= \sum_{\substack{p \leq T \\ (p, N) = 1}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leq T, (p, N) = 1 \\ \lambda_{f_m^-}(p^m) \leq A_m^- - \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} \\ &= \log_3(kN) + O_\eta \left(\frac{\log_3(kN)}{\xi(kN)} \right), \end{aligned}$$

où nous avons déjà utilisé la condition $N \in \mathbb{N}_k(\Xi)$ pour estimer

$$\sum_{\substack{p \leq T \\ p|N}} \frac{1}{p} \ll \frac{\omega(N)}{P^-(N)} \ll \frac{1}{\log_2(kN) \log_2 N}.$$

En tenant compte de la relation (1.1.11) et en utilisant le fait

$$\sum_{T < p \leq (\log kN)^A} \frac{1}{p} \ll 1,$$

il suit que

$$\sum_{\substack{p \leq (\log kN)^A, p \nmid N \\ \lambda_{f_m^-}(p^m) < -A_m^- + \xi(kN)/\log_3(kN)}} \frac{1}{p} = \log_3(kN) + O_\eta \left(\frac{\log_3(kN)}{\xi(kN)} \right). \quad (3.8.3)$$

En prenant $m = 1$, on obtient (3.1.26) avec le signe « $-$ ».

En prenant $m = 2$ et en remarquant que $\lambda_{f_2^-}(p)^2 = \lambda_{f_2^-}(p^2) + 1$ et $A_2^- = 1$, on voit que (3.8.3) avec $m = 2$ est équivalent à (3.1.27).

En prenant $m = 4$ et en remarquant que

$$(\lambda_{f_4^-}(p)^2 - \frac{3}{2})^2 = (\lambda_{f_4^-}(p^2) - \frac{1}{2})^2 = |\lambda_{f_4^-}(p^2)^2 - \lambda_{f_4^-}(p^2) + \frac{1}{4}| = \lambda_{f_4^-}(p^4) + A_4^-,$$

la formule asymptotique (3.1.28) découle immédiatement de (3.8.3) avec $m = 4$.

Le cas avec le signe « $+$ » peut être traité similairement. Cela achève la démonstration.

Bibliographie

- [1] A. O. L. Atkin and J. Lehner. Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. *Math. Ann.*, 185 :134–160, 1970.
- [2] A. O. L. Atkin and Wen Ch'ing Winnie Li. Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W -operators. *Invent. Math.*, 48(3) :221–243, 1978.
- [3] F. V. Atkinson. The mean-value of the Riemann zeta function. *Acta Math.*, 81 :353–376, 1949.
- [4] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, and R. Taylor. A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 47(1) :29–98, 2011.
- [5] C. J. Bushnell and G. Henniart. An upper bound on conductors for pairs. *J. Number Theory*, 65(2) :183–196, 1997.
- [6] S. Chowla. Improvement of a theorem of Linnik and Walfisz. *Proc. London Math. Soc.* (2), 50 :423–429, 1949.
- [7] J. Cogdell and P. Michel. On the complex moments of symmetric power L -functions at $s = 1$. *Int. Math. Res. Not.*, (31) :1561–1617, 2004.
- [8] J. B. Conrey and D. W. Farmer. Mean values of L -functions and symmetry. *Internat. Math. Res. Notices*, (17) :883–908, 2000.
- [9] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, and N. C. Snaith. Integral moments of L -functions. *Proc. London Math. Soc.* (3), 91(1) :33–104, 2005.
- [10] A. Diaconu, D. Goldfeld, and J. Hoffstein. Multiple Dirichlet series and moments of zeta and L -functions. *Compositio Math.*, 139(3) :297–360, 2003.
- [11] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [12] W. Duke, J. Friedlander, and H. Iwaniec. Bounds for automorphic L -functions. *Invent. Math.*, 112(1) :1–8, 1993.
- [13] W. Duke and E. Kowalski. A problem of Linnik for elliptic curves and mean-value estimates for automorphic representations. *Invent. Math.*, 139(1) :1–39, 2000. With an appendix by Dinakar Ramakrishnan.
- [14] O. M. Fomenko. Fourier coefficients of parabolic forms, and automorphic L -functions. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 237(Anal. Teor. Chisel i Teor. Funkts. 14) :194–226, 231, 1997.
- [15] O. M. Fomenko. Fractional moments of automorphic L -functions. *Algebra i Analiz*, 22(2) :204–224, 2010.

- [16] R. M. Gabriel. Some Results Concerning the Integrals of Moduli of Regular Functions Along Certain Curves. *J. London Math. Soc.*, S1-2(2) :112–117.
- [17] S. Gelbart and H. Jacquet. A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 11(4) :471–542, 1978.
- [18] A. Good. Ein Mittelwertsatz für Dirichletreihen, die Modulformen assoziiert sind. *Comment. Math. Helv.*, 49 :35–47, 1974.
- [19] A. Good. Beiträge zur Theorie der Dirichletreihen, die Spitzenformen zugeordnet sind. *J. Number Theory*, 13(1) :18–65, 1981.
- [20] A. Good. The square mean of Dirichlet series associated with cusp forms. *Mathematika*, 29(2) :278–295 (1983), 1982.
- [21] A. Good. The convolution method for Dirichlet series. In *The Selberg trace formula and related topics (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 53 of *Contemp. Math.*, pages 207–214. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [22] S. W. Graham and C. J. Ringrose. Lower bounds for least quadratic nonresidues. 85 :269–309, 1990.
- [23] A. Granville and K. Soundararajan. The distribution of values of $L(1, \chi_d)$. *Geom. Funct. Anal.*, 13(5) :992–1028, 2003.
- [24] L. Habsieger and E. Royer. L -functions of automorphic forms and combinatorics : Dyck paths. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(7) :2105–2141, 2004.
- [25] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Contributions to the theory of the riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Math.*, 41(1) :119–196, 1916.
- [26] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The Approximate Functional Equation in the Theory of the Zeta-Function, with Applications to the Divisor-Problems of Dirichlet and Piltz. *Proc. London Math. Soc.*, S2-21(1) :39–74, 1923.
- [27] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The Approximate Functional Equations for zeta(s) and zeta2(s). *Proc. London Math. Soc.*, S2-29(1) :81, 1929.
- [28] Adam J. Harper. Sharp conditional bounds for moments of the riemann zeta-function. *Preprint available on-line at <http://arxiv.org/abs/1305.4618>*, 2013.
- [29] D. R. Heath-Brown. The mean value theorem for the Riemann zeta-function. *Mathematika*, 25(2) :177–184, 1978.
- [30] D. R. Heath-Brown. The twelfth power moment of the Riemann-function. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 29(116) :443–462, 1978.
- [31] D. R. Heath-Brown. The fourth power moment of the Riemann zeta function. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 38(3) :385–422, 1979.
- [32] D. R. Heath-Brown. Fractional moments of the Riemann zeta function. *J. London Math. Soc. (2)*, 24(1) :65–78, 1981.
- [33] J. Hoffstein and P. Lockhart. Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. *Ann. of Math. (2)*, 140(1) :161–181, 1994. With an appendix by Dorian Goldfeld, Hoffstein and Daniel Lieman.

- [34] A. E. Ingham. Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function. *Proc. London Math. Soc.*, S2-27(1) :273, 1926.
- [35] A. Ivić. Large values of the error term in the divisor problem. *Invent. Math.*, 71(3) :513–520, 1983.
- [36] H. Iwaniec. Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann zeta-function. In *Seminar on Number Theory, 1979–1980 (French)*, pages Exp. No. 18, 36. Univ. Bordeaux I, Talence, 1980.
- [37] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [38] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [39] H. Iwaniec, W.Z. Luo, and P. Sarnak. Low lying zeros of families of L -functions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (91) :55–131 (2001), 2000.
- [40] M. Jutila. *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, volume 80 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; by Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [41] M. Jutila. Mean value estimates for exponential sums. In *Number theory (Ulm, 1987)*, volume 1380 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–136. Springer, New York, 1989.
- [42] M. Jutila. The fourth power moment of the Riemann zeta-function over a short interval. In *Number theory, Vol. I (Budapest, 1987)*, volume 51 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 221–244. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [43] M. Jutila. Mean value estimates for exponential sums. II. *Arch. Math. (Basel)*, 55(3) :267–274, 1990.
- [44] Anatolij A. Karatsuba. *Basic analytic number theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Translated from the second (1983) Russian edition and with a preface by Melvyn B. Nathanson.
- [45] J. P. Keating and N. C. Snaith. Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$. *Comm. Math. Phys.*, 214(1) :57–89, 2000.
- [46] Henry H. Kim. Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 . *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :139–183, 2003. With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.
- [47] Henry H. Kim and F. Shahidi. Cuspidality of symmetric powers with applications. *Duke Math. J.*, 112(1) :177–197, 2002.
- [48] Henry H. Kim and F. Shahidi. Functorial products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2 . *Ann. of Math. (2)*, 155(3) :837–893, 2002. With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart.
- [49] E. Kowalski and P. Michel. Zeros of families of automorphic L -functions close to 1. *Pacific J. Math.*, 207(2) :411–431, 2002.
- [50] Y. Lamzouri. Distribution of values of L -functions at the edge of the critical strip. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(3) :835–863, 2010.

- [51] Y.-K. Lau, J.Y. Liu, and Y.B. Ye. A new bound $k^{2/3+\epsilon}$ for Rankin-Selberg L -functions for Hecke congruence subgroups. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, pages Art. ID 35090, 78, 2006.
- [52] Y.-K. Lau and J. Wu. A density theorem on automorphic L -functions and some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(1) :441–472 (electronic), 2006.
- [53] Y.-K. Lau and J. Wu. A large sieve inequality of Elliott-Montgomery-Vaughan type for automorphic forms and two applications. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5) :Art. ID rnm 162, 35, 2008.
- [54] Wen Ch'ing Winnie Li. Newforms and functional equations. *Math. Ann.*, 212 :285–315, 1975.
- [55] Wen Ch'ing Winnie Li. L -series of Rankin type and their functional equations. *Math. Ann.*, 244(2) :135–166, 1979.
- [56] Wen Ch'ing Winnie Li. On the representations of $GL(2)$. I. ε -factors and n -closeness. *J. Reine Angew. Math.*, 313 :27–42, 1980.
- [57] J. E. Littlewood. Researches in the theory of the riemann ζ -function. *Proc. London Math. Soc.*, 20(2) :xxii–xxviii, 1922.
- [58] J. E. Littlewood. On the Class-Number of the Corpus $P(\text{surd-}k)$. *Proc. London Math. Soc.*, S2-27(1) :358, 1928.
- [59] J.Y. Liu, E. Royer, and J. Wu. On a conjecture of Montgomery-Vaughan on extreme values of automorphic L -functions at 1. In *Anatomy of integers*, volume 46 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 217–245. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [60] J.Y. Liu, Y.H. Wang, and Y.B. Ye. A proof of Selberg's orthogonality for automorphic L -functions. *Manuscripta Math.*, 118(2) :135–149, 2005.
- [61] W.Z. Luo. Values of symmetric square L -functions at 1. *J. Reine Angew. Math.*, 506 :215–235, 1999.
- [62] K. Matsumoto. Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions. In *Number theory*, Trends Math., pages 241–286. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [63] Micah B. Milinovich and Caroline L. Turnage-Butterbaugh. Moments of products of automorphic L -functions. *J. Number Theory*, 139 :175–204, 2014.
- [64] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. Hilbert's inequality. *J. London Math. Soc. (2)*, 8 :73–82, 1974.
- [65] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. Extreme values of Dirichlet L -functions at 1. In *Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, pages 1039–1052. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [66] Hugh L. Montgomery. *Topics in multiplicative number theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [67] Hugh L. Montgomery and Andrew M. Odlyzko. Large deviations of sums of independent random variables. *Acta Arith.*, 49(4) :427–434, 1988.
- [68] A. P. Ogg. On a convolution of L -series. *Invent. Math.*, 7 :297–312, 1969.

- [69] H. Petersson. Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen. *Comment. Math. Helv.*, 22 :168–199, 1949.
- [70] Q.H. Pi. Fractional moments of automorphic L -functions on $GL(m)$. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 32(4) :631–642, 2011.
- [71] M. Radziwiłł. Large deviations in selberg’s central limit theorem. *Preprint available online at <http://arxiv.org/abs/1108.5092>*, 2011.
- [72] M. Radziwiłł. The 4.36th moment of the Riemann zeta-function. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18) :4245–4259, 2012.
- [73] K. Ramachandra. Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series. I. *Hardy-Ramanujan J.*, 1 :15, 1978.
- [74] K. Ramachandra. Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series. II. *Hardy-Ramanujan J.*, 3 :1–24, 1980.
- [75] K. Ramachandra. Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series. III. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 5(1) :145–158, 1980.
- [76] R. A. Rankin. Contributions to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 35 :357–372, 1939.
- [77] R. A. Rankin. Sums of powers of cusp form coefficients. *Math. Ann.*, 263(2) :227–236, 1983.
- [78] E. Royer. Statistique de la variable aléatoire $L(\text{sym}^2 f, 1)$. *Math. Ann.*, 321(3) :667–687, 2001.
- [79] E. Royer. Interprétation combinatoire des moments négatifs des valeurs de fonctions L au bord de la bande critique. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(4) :601–620, 2003.
- [80] E. Royer and J. Wu. Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 21(1) :263–312, 2005.
- [81] E. Royer and J. Wu. Special values of symmetric power L -functions and Hecke eigenvalues. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 19(3) :703–753, 2007.
- [82] Z. Rudnick and K. Soundararajan. Lower bounds for moments of L -functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102(19) :6837–6838, 2005.
- [83] A. Selberg. Contribution to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 35 :357–372, 1939.
- [84] A. Selberg. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series. In *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)*, pages 367–385. Univ. Salerno, Salerno, 1992.
- [85] K. Soundararajan. Moments of the Riemann zeta function. *Ann. of Math. (2)*, 170(2) :981–993, 2009.
- [86] H.W. Sun and G.S. Lü. On fractional power moments of L -functions associated with certain cusp forms. *Acta Appl. Math.*, 109(2) :653–667, 2010.
- [87] John T. Tate. Algebraic cycles and poles of zeta functions. In *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 93–110. Harper & Row, New York, 1965.

- [88] E. C. Titchmarsh. The mean-value of the zeta-function on the critical line. *Proc. London Math. Soc.*, s2-27(1) :137–150, 1928.
- [89] E. C. Titchmarsh. On van der corput's method and the zeta-function of riemann (v). *Quarterly Journal of Mathematics*, os-5(1) :195–210, 1934.
- [90] E. C. Titchmarsh. *Theory of Functions*. Oxford University Press, second edition, 1976.
- [91] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [92] K. M. Tsang. Higher-power moments of $\Delta(x)$, $E(t)$ and $P(x)$. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 65(1) :65–84, 1992.
- [93] R. C. Vaughan. Small values of Dirichlet L -functions at 1. In *Analytic number theory, Vol. 2 (Allerton Park, IL, 1995)*, volume 139 of *Progr. Math.*, pages 755–766. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [94] A. Weil. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, 168 :149–156, 1967.
- [95] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.
- [96] Y.B. Ye. The fourth power moment of automorphic L -functions for $GL(2)$ over a short interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(5) :2259–2268 (electronic), 2006.
- [97] Q. Zhang. Integral mean values of modular L -functions. *J. Number Theory*, 115(1) :100–122, 2005.
- [98] Q. Zhang. Integral mean values of Maass L -functions. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 41417, 19, 2006.

Résumé. Cette thèse, constitué en trois parties, est consacrée à l'étude des valeurs spéciales de fonctions L automorphes. La première partie contient un survol rapide de la théorie des formes modulaires et des fonctions L de puissance symétrique associées qui est nécessaire dans la suite. Dans la seconde partie, nous nous concentrons sur les valeurs centrales, par l'étude des moments intégraux dans petit intervalle, pour les fonctions L automorphes. On prouve la conjecture de Conrey et al. et donne l'ordre exact pour les moments sous l'hypothèse de Riemann généralisée. La troisième partie présente des travaux sur les valeurs en $s = 1$ de la fonctions L de puissance symétrique en l'aspect de niveau-poids. On généralisent et/ou améliorent les résultats sur l'encadrement de la fonction L de puissance symétrique, la conjecture de Montgomery-Vaughan et également la fonction de répartition. Une application des valeurs extrêmes sur la distribution des coefficients des formes primitives concernant la conjecture de Sato-Tate est donnée.

Mots clés. Fonctions L , Formes modulaires, Moments, Conjecture de Montgomery-Vaughan, Valeurs extrêmes

Central Values and Values At the Edge of the Critical Strip of Automorphic L -functions

Abstract. Special values of automorphic L -functions are considered in this work in three parts. In the first part, elementary information about automorphic forms and associated symmetric power L -functions, which will be very useful in the following parts, is introduced. In the second part, we study the central values, in the form of higher moment in short interval, of automorphic L -functions and give a proof for the conjecture of Conrey et al. to get the sharp bound for the moment under Generalized Riemann Hypothesis. In the last part, values of automorphic L -functions at $s = 1$ are considered in level-weight aspect. We generalize and/or improve related early results about the bounds of values at $s = 1$, the Montgomery-Vaughan's conjecture and distribution functions. As an application of our results on extreme values, the distribution of coefficients of newforms concerning the Sato-Tate conjecture is studied.

Keywords. L -functions, Automorphic forms, Moments, Montgomery-Vaughan's Conjecture, Extreme values