HAL
open science

# Ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits

Nabil Anwer

## To cite this version:

Nabil Anwer. Ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2015. tel-01744556

**HAL Id: tel-01744556**

**https://hal.science/tel-01744556**

Submitted on 27 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*ENSC-(n° d'ordre)*

**HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Monsieur Nabil ANWER

Domaine :
**SCIENCES POUR L'INGENIEUR**

# Ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits

***Shape Engineering for Geometrical Product Specification and Verification***

Habilitation présentée et soutenue à Cachan le 17 juin 2015 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Jean-Marc Linarès | Professeur – Aix-Marseille Université | Rapporteur |
| Serge Samper | Professeur – Université de Rennes 1 | Rapporteur |
| François Villeneuve | Professeur – Université Joseph Fourier – Grenoble 1 | Rapporteur |
| Alain Bernard | Professeur – Ecole Centrale de Nantes | Examinateur |
| Jean-Pierre Kruth | Professeur – Katholieke Universiteit Leuven | Examinateur |
| Jean-Claude Paul | Dir. de Recherche – INRIA Nancy - Grand Est | Examinateur |
| Luc Mathieu | Professeur – Université Paris Sud | Examinateur |

Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée
ENS CACHAN / UNIV. PARIS SUD – EA 1385
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

# Préambule

Ce mémoire préparé en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan se veut la synthèse de mes activités de recherche menées au LURPA (EA 1385) à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Les travaux scientifiques, les contributions et les perspectives que j'expose dans ce mémoire sont à la base d'un programme de recherche qui porte sur **l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits** et traite de deux aspects :

- La maîtrise de la **variabilité géométrique** des produits manufacturés : fondements géométriques pour le **tolérancement** ;

- La fusion de données multi-capteurs et le **traitement numérique de la géométrie** pour **la métrologie des formes**

Ce mémoire est organisé en deux parties principales. La première partie présente un dossier scientifique composé du curriculum vitæ, la production scientifique à travers la liste des publications et des communications scientifiques, les encadrements scientifiques effectués et enfin, la participation à l'animation scientifique et les responsabilités administratives et collectives sur le plan national et international.

La deuxième partie est consacrée aux travaux de recherche. Après une brève description des activités de recherche antérieures qui ont porté sur l'automatisation des gammes d'usinage, la conception intégrée et les premiers travaux en tolérancement, le chapitre 1 introduit mon programme de recherche qui porte sur l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits. Les travaux scientifiques, les contributions et les perspectives que j'expose par la suite traitent de deux aspects :

- La maîtrise de la variabilité géométrique des produits manufacturés : fondements géométriques pour le tolérancement (chapitre 2);

- La fusion de données multi-capteurs et le traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes (chapitre 3).

Le bilan et quelques perspectives de ces travaux sont décrits dans le chapitre 4.

# Table des matières

**Préambule** ..... **2**

**Partie 1 – Dossier Scientifique** ..... **6**

**Curriculum Vitae** ..... **7**

**Production scientifique** ..... **10**

1. Chapitres d'ouvrages ..... 10
2. Articles dans des revues à comité de lecture ..... 10
3. Conférences plénières ou invitées ..... 11
4. Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture ..... 11
5. Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture ..... 13
6. Rapports de contrats de recherche ..... 14
7. Mémoires et thèse ..... 14

**Encadrements scientifiques** ..... **14**

1. DEA et Masters encadrés ..... 14
2. Thèses co-encadrées ..... 15
3. Postdocs co-encadrés ..... 15

**Participation à la vie scientifique et responsabilités collectives** ..... **16**

1. Participation à l'animation de la recherche ..... 16
2. Activités à l'international ..... 17
3. Collaborations universitaires ..... 18
4. Collaborations industrielles ..... 18
5. Collaboration avec des organismes de recherche ..... 19
6. Responsabilités administratives et collectives diverses ..... 19

**Partie 2 - Description des travaux de recherche** ..... **21**

**Chapitre 1 - Introduction Générale** ..... **22**

**I. Problématique** ..... **22**

1. Contexte général ..... 22
2. Cadre des travaux ..... 23
3. Objectifs des travaux et contributions ..... 25
4. Organisation du mémoire ..... 26

**II. Synthèse des travaux de recherche antérieurs ..... 26**

1. Automatisation des gammes d'usinage et conception intégrée ..... 26
2. Intégration du tolérancement dans le cycle de vie du produit ..... 29
3. Approches algébriques pour le tolérancement et la modélisation déclarative des ensembles mécaniques ..... 30

**III. Fondements de l'ingénierie des formes ..... 31**

1. Introduction ..... 31
2. Qu'est-ce qu'une forme? ..... 32
3. Représentation des formes ..... 33
4. Géométrie discrète et algorithmique pour l'ingénierie des formes ..... 36
5. Formes complexes et classification des formes ..... 38

**Chapitre 2 - Maîtrise de la variabilité géométrique des produits manufacturés : fondements géométriques pour le tolérancement ..... 41**

**I. Introduction ..... 41**

**II. Spécification géométrique des Produits ..... 42**

1. Une brève histoire du tolérancement ..... 42
2. L'évolution des normes ISO GPS ..... 44
3. L'évolution de la recherche en tolérancement ..... 51
4. Synthèse ..... 53

**III. Conceptualisation du Skin Model ..... 55**

1. Le skin model dans le contexte de la modélisation solide ..... 56
2. Le Skin Model et les défauts de forme ..... 61
3. Le Skin Model et l'analyse statistique des formes ..... 69

**IV. Skin Model Shapes : Représentation et Simulation du Skin Model ..... 72**

1. Introduction ..... 72
2. Cadre des travaux ..... 73
3. Principaux résultats obtenus ..... 74

**V. Modélisation du contact et de la mobilité à base de Skin Model Shapes ..... 84**

1. Introduction ..... 84
2. Cadre des travaux ..... 84
3. Principaux résultats obtenus ..... 87

**VI. Conclusions ..... 93**

**Chapitre 3 - Fusion de données multi-capteurs et traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes ..... 94**

**I. Introduction ..... 94**

**II. Fusion de données multi-capteurs ..... 96**

1. Introduction ..... 96
2. Modélisation de données pour l'intégration multi-capteurs ..... 98
3. Développement d'un système de mesure multi-caméras ..... 101

**III. Traitement géométrique des nuages de points ..... 104**

1. Cadre des travaux ..... 104
2. Reconstruction et approximation par maillage ..... 106
3. Courbures discrètes pour la métrologie des formes. ..... 111
4. Recalage à base de courbures discrètes ..... 124
5. Partitionnement à base de courbures discrètes ..... 134

**IV. Techniques de reconstruction et d'association pour la métrologie des formes ... 142**

1. Algorithmes d'association pour la métrologie des formes ..... 143
2. Déformation de contours actifs de courbes B-Spline ..... 150

**V. Conclusions ..... 159**

**Chapitre 4 - Bilans et perspectives ..... 161**

**I. Conclusions ..... 161**

**II. Perspectives ..... 164**

1. Fondements mathématiques de l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits ..... 164
2. Spécification géométrique des assemblages ..... 165
3. Skin Model Shapes pour la conception robuste et le tolérancement multi-physique 166
4. Ingénierie des formes pour la fabrication additive ..... 167

**Bibliographie ..... 169**

**Annexe – Articles fournis ..... 198**

# Partie 1 – Dossier Scientifique

# Partie 2 - Description des travaux de recherche

# Chapitre 1 - Introduction Générale

## I. Problématique

### 1. Contexte général

L'objectif de la spécification et la vérification géométriques des produits est de maitriser la variabilité géométrique depuis la conception préliminaire jusqu'au contrôle métrologique afin de garantir la fonctionnalité et la conformité des produits manufacturés. La recherche en spécification et vérification géométriques des produits couvre les domaines de recherche en tolérancement et en métrologie dimensionnelle et s'intéresse tout particulièrement à la maitrise de la variabilité géométrique tout le long du cycle de vie du produit.

L'informatique et les sciences du numérique ont largement influencé l'ingénierie mécanique et la pratique du développement des produits manufacturés. La modélisation des pièces et des ensembles mécaniques et leurs représentations géométriques ont bénéficié des développements de l'informatique graphique et de la modélisation géométrique à travers les différentes théories et applications en modélisation des courbes, des surfaces et des solides, sans oublier les traitements numériques des nuages de points issus de l'acquisition des formes par les moyens de mesure.

Avec le développement des sciences du numérique et des outils informatiques, une ubiquité géométrique (et numérique) est observée dans le processus de développement des produits. Les démarches et les méthodologies de conception et de fabrication s'appuient sur un raisonnement géométrique où la forme, la fonction, la structure et le comportement sont inter-reliés [CRS+13] et sont les fondements de la modélisation des produits [KKK+93]. Les activités de rétro-ingénierie ou de rétro-conception s'appuient également sur les dimensions géométriques pour structurer et (re)découvrir les données de produit et de processus [BLA+07]. Les nouveaux usages et les nouvelles technologies de la réalité virtuelle et du prototypage virtuel pour le développement des produits exploitent de plus en plus les contenus géométriques [LSB+99] [NOC+12]. Ainsi, les données et les informations de nature géométrique sont au cœur des systèmes informatiques des entreprises (XAO, PLM, MPM, ERP et MES). Ces systèmes assurent une assistance accrue, et en permanente évolution, dans le contexte de l'entreprise étendue malgré les limites de leur continuité numérique et de leur interopérabilité [XN 09]. Le développement des systèmes cyber-physiques de production

(Cyber-Physical Production Systems) dans le contexte de l'internet des objets et de l'industrie 4.0 permet la convergence du monde numérique et virtuel avec le monde physique et réel des systèmes de production [Mon 14]. De nouveaux systèmes complexes "à cœur" géométrique vont ainsi bénéficier des technologies d'acquisition rapide de grands flots de données géométriques par la mesure (notamment de formes complexes), du traitement embarqué (et fusion) de données multi-capteurs et multi-échelles pour permettre de la fouille et de l'analyse de données plus ou moins structurées qu'elles soient massives (mégadonnées ou big data) ou petites (small data) [RZL+14]. Ces données "intelligentes" (smart data) sont souvent associées aux attributs géométriques de la forme du produit et gardent une "trace" du processus numérique ou physique.

A partir de ces constats et dans le contexte des évolutions futures de l'ingénierie de la conception et de la production, notre programme de recherche a pour objectif de développer *l'ingénierie des formes en ingénierie mécanique* et tout particulièrement *l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits.*

## 2. Cadre des travaux

Les travaux de recherche que je mène ont pour cadre le Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée (LURPA) de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan et de l'université Paris Sud.

Plus précisément, mes travaux initiaux (doctorat et post-doctorat) se sont intégrés dans les activités de recherche de l'équipe Formalisation des Processus de Conception (FPC) dont l'objectif est la formalisation des contraintes et des connaissances technologiques afin d'assister la génération de processus de fabrication et de permettre la prise en compte des contraintes de fabrication lors de la conception d'un produit ou d'un mécanisme. Du fait de l'évolution de sa thématique de recherche, l'équipe FPC s'est regroupée autour d'un projet fédérateur avec l'équipe Géométrie tridimensionnelle des pièces et des mécanismes (Géo3D) dont le principal objectif scientifique est la prise en compte d'une géométrie réaliste et cohérente dans les activités de conception, de fabrication, et de contrôle métrologique.

Mes travaux de thèse ont porté sur l'automatisation des gammes d'usinage en fraisage. Plus particulièrement, j'ai développé une méthodologie d'analyse de raisonnement en gamme d'usinage par classification heuristique. Une contribution majeure de mes travaux a été le développement de nouvelles techniques de reconnaissance d'entités d'usinage à base de graphes et en intégrant une analyse d'usinabilité. Par la suite, j'ai poursuivi mes travaux sur la

thématique dans le cadre d'un post-doc en milieu industriel à Dassault-Systèmes. J'ai ainsi contribué au développement d'un outil d'assistance à l'élaboration de suite ordonnée de posages en fraisage intégré à l'outil CAO CATIA V5. Mes travaux ont permis d'élaborer une fonctionnalité de proposition d'une suite ordonnée de posages (génération) et une fonctionnalité d'analyse de la complétude, de la cohérence et de la performance d'une suite ordonnée de posages (vérification). Enfin, j'ai étendu mes recherches à la conception intégrée à travers la description et la validation de la définition de produits et de processus par des approches formelles à base d'ontologies.

Depuis janvier 2001, j'ai mené des activités de recherche au sein de l'équipe Géo3D sur le thème de l'intégration du tolérancement dans le cycle de vie du produit. Ces travaux m'ont permis de développer de nouvelles activités de recherche sur le thème de la gestion des variations géométriques des produits à travers l'intégration par le tolérancement. En parallèle, je me suis intéressé à de nouveaux outils mathématiques pour le traitement numérique de la géométrie pour l'analyse et la synthèse des tolérances. Mes travaux ont contribué à un modèle de données d'intégration de tolérancement en conception et en fabrication. Ce modèle permet également de partager et de communiquer les informations de tolérancement via le web. Au niveau des outils formels pour le tolérancement, une contribution majeure a été apportée au domaine par l'intermédiaire de l'opérationnalisation des concepts fondamentaux de la spécification géométrique des produits, des traitements numériques de la géométrie pour le Skin Model, et des algèbres géométriques.

Depuis 2005, j'ai développé des activités de recherche sur le thème de la métrologie dimensionnelle multi-capteurs. Cette évolution thématique a été motivée par les travaux en tolérancement à partir de la vision globale de spécification et vérification géométriques de produits et au niveau de mon implication dans les travaux du Groupe de Recherches Concertées (GRC) Assemblage Flexible en collaboration avec EADS Innovation Works. Mes travaux ont ainsi contribué à la fusion de données multi-capteurs, à l'estimation des incertitudes de mesure ainsi qu'au traitement numérique de la géométrie acquise dans le cadre de la mesure de formes complexes.

A la tête du centre Franco-chinois de l'innovation PLM (PLMIC) à l'université de Tsinghua à Pékin depuis Septembre 2006, j'ai développé des projets de recherche avec des partenaires académiques et industriels Chinois ainsi qu'avec le LIAMA (Laboratoire franco-chinois de recherche en informatique, automatique et mathématiques appliquées). Mes travaux ont porté sur les méthodologies de conception de produits et de processus à base d'ontologies, l'analyse des tolérances, la modélisation géométrique de terrain et de structures

géologiques pour l'aide à la conception de barrages, les traitements numériques de la géométrie pour la métrologie des formes et la rétro-ingénierie de simulations d'usinage.

Enfin, depuis 2008, j'ai recentré mes activités autour de l'ingénierie des formes des produits manufacturés. Il s'agit de développer de nouveaux fondements pour la représentation et le traitement numérique de la géométrie ainsi que la maitrise de la variabilité géométrique tout le long du cycle de vie des produits. Deux axes fondamentaux résument ces travaux : la maîtrise de la variabilité géométrique et la métrologie des formes. Les fondements scientifiques de ces recherches relèvent de la modélisation géométrique (représentations géométriques des pièces et des assemblages mécaniques, traitement numérique de la géométrie), de l'ingénierie de produit (tolérancement, systèmes d'information de produit) et de la métrologie des formes (métrologie dimensionnelle, systèmes multi-capteurs, calcul d'incertitudes).

## 3. Objectifs des travaux et contributions

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches a pour objectif d'illustrer de nouveaux fondements géométriques pour un tolérancement intégrant les défauts et les écarts de forme et de nouvelles approches pour le traitement géométrique de nuages de points en métrologie dimensionnelle ou métrologie des formes. Nous entendons ici par "métrologie des formes" la métrologie dimensionnelle des formes complexes dont la caractérisation géométrique est effectuée à partir d'un grand nombre de points.

L'originalité de notre approche est de considérer une représentation discrète des formes et leur analyse statistique ainsi que des traitements numériques issus de la géométrie différentielle discrète. Les contributions majeures de nos travaux en tolérancement sont une "opérationnalisation" du Skin Model qui est un concept fondamental pour la spécification géométrique des produits et le développement de Skin Model Shapes comme représentation discrète du Skin Model permettant de "capturer" la variabilité géométrique tout le long du cycle de vie du produit et de "simuler" le comportement géométrique des assemblages.

Au niveau de la métrologie des formes, nos travaux s'intéressent à la fusion de données multi-capteurs et le traitement des nuages de points en métrologie. Nos principaux résultats sont les améliorations des méthodes et des algorithmes pour le recalage, le partitionnement, la reconstruction et l'association en exploitant de nouveaux indicateurs de courbures discrètes.

### 4. Organisation du mémoire

Après une brève description de mes activités de recherche antérieures qui ont porté sur l'automatisation des gammes d'usinage, la conception intégrée et les premiers travaux en tolérancement et en modélisation géométrique des ensembles mécaniques, ce chapitre introduit mon programme de recherche qui porte sur l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits.

Tout d'abord, je commence par introduire l'ingénierie des formes et définir ses contours à travers la géométrie et la variabilité géométrique. Il nous a paru important de détailler cette partie pour introduire des notions fondamentales pour la modélisation des formes et le traitement numérique de la géométrie en vue de les exploiter ensuite pour la spécification et la vérification géométriques des produits. Par la suite, nos travaux scientifiques et nos contributions majeures sont exposés et traitent de deux aspects :

- La maîtrise de la variabilité géométrique des produits manufacturés et les fondements géométriques pour le tolérancement (chapitre 2);

- La fusion de données multi-capteurs et le traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes (chapitre 3).

Le bilan et quelques perspectives de ces travaux sont décrits dans le chapitre 4.

## II. Synthèse des travaux de recherche antérieurs

### 1. Automatisation des gammes d'usinage et conception intégrée

Les activités de recherche sur ce thème ont concerné l'élaboration d'approches génératives intégrant le concept d'entité (caractéristiques géométriques et sémantiques), la formalisation des connaissances expertes, la reconnaissance automatique de formes à partir de modèles CAO et la génération de données pertinentes pour la FAO. Dans le cadre de mes travaux de thèse [Anw 00a], sous la direction de B. Anselmetti, j'ai tout d'abord amélioré les modèles de description des pièces mécaniques (modèle produit) par l'intégration des connaissances métier du domaine de l'usinage. Dans un deuxième temps, j'ai étudié le problème de la caractérisation de classes génériques d'entités en vue d'une généricité de reconnaissance à base de graphes topologiques. Par la suite, je me suis intéressé aux entités interagissantes aussi bien au niveau de la reconnaissance de celles-ci que pour la

détermination des contraintes d'usinabilité qu'elles introduisent. A partir des résultats obtenus, je me suis intéressé à intégrer mon travail dans une démarche d'élaboration d'une approche générative et générique de gammes d'usinage en fraisage [CA 00].

J'ai mis en œuvre la méthode HERA (Hierarchical Efficient Reasoning Analysis) [AC 99] à partir de constats relatifs à l'activité du gammiste qui, à travers un raisonnement "local", associe des solutions "locales" à des parties de la pièce à fabriquer (approche par entités). Ces solutions sont par la suite affinées par un raisonnement "global" intégrant les contraintes d'interactions entre les solutions "locales" et les contraintes liées à la fabrication. L'approche de modélisation des connaissances dite Classification Heuristique a été exploitée et adaptée afin de modéliser ce raisonnement. La méthode HERA reprend le schéma classique de résolution de problèmes par classification tout en combinant une modélisation des connaissances à base de contraintes souvent utilisée pour la résolution constructive de problèmes. De plus, j'ai décomposé les trois étapes de base de la classification heuristique (abstraction, association et spécialisation) en sept activités (conceptualisation, représentation, classification, validation, association, ordonnancement, optimisation) pour tenir compte de la spécificité de l'élaboration de gammes d'usinage et de son automatisation. La mise en œuvre de la méthode HERA a permis de redéfinir le modèle de description des produits grâce à la formalisation des entités primaires et de leurs interactions en tenant compte de l'environnement de CAO. La formalisation du concept d'entité de forme (caractéristiques liées à la topologie et à la géométrie) m'a permis de décomposer la reconnaissance des entités de forme en extraction (concepts généraux d'usinage liés au modèle CAO comme la convexité des arêtes) et en classification (concepts particuliers liés aux connaissances de processus d'usinage comme les directions d'approche, le type de mouvement de travail d'outil …). La méthode d'extraction des entités de forme proposée améliore et optimise les techniques de reconnaissance à base de graphes tout en proposant des solutions pour les entités interagissantes. Le concept de Graphe d'Adjacence Valué (GAV) que j'ai développé est une contribution aux techniques de reconnaissance à base de graphes. Pour la caractérisation de classes d'entités génériques (classification), j'ai tenu compte des connaissances métier exprimées sous forme de règles heuristiques ou de manière formelle. Par la suite, j'ai traité la répartition des entités considérées dans les classes génériques à l'aide de concepts de la théorie des graphes planaires. Par l'intermédiaire de l'analyse d'usinabilité, de la caractérisation des formes intermédiaires et de la définition par moindre engagement de micro plans, j'ai intégré aux entités primaires des connaissances de processus tout en tenant compte de leurs interactions. A travers la caractérisation des connaissances de

l'environnement pièce et des contraintes sur les outils de coupe et les opérations d'usinage, j'ai traité le problème d'accessibilité outil ainsi que les choix de caractéristiques d'outils de coupe pour les classes génériques d'entités définies au préalable. Ces connaissances exprimées sous forme de contraintes sont reliées à l'entité de forme. La combinaison de l'opération d'usinage et de la forme intermédiaire permet de guider l'affectation des opérations d'usinage aux entités de forme sans se restreindre à garder une forme intermédiaire antérieure unique. Ceci permet également de traiter l'ordonnancement et le regroupement des opérations d'usinage pour les entités de forme interagissantes.

Ces travaux de recherche en automatisation de gammes d'usinage ont été poursuivis dans le cadre d'un contrat de recherche industriel (projet Usiquick) [Anw 00b]. L'objectif initial des travaux a été l'analyse de l'expertise de Dassault Aviation en génération de gammes d'usinage en fraisage pour des pièces aéronautiques. Le projet a eu pour objet l'étude des spécifications et le développement logiciel sous CATIA V5 d'un outil d'assistance à l'élaboration d'une suite ordonnée de posages en fraisage. Cet outil présente une fonctionnalité de proposition d'une suite ordonnée de posages (génération) et une fonctionnalité d'analyse de la complétude, de la cohérence et de la performance d'une suite ordonnée de posages (vérification). Les activités de recherche que j'ai menées ont concerné la spécification ainsi que la formalisation des connaissances pour la définition des posages d'une manière générique, le développement d'opérateurs géométriques pour la caractérisation des difficultés d'usinage, l'intégration des données au niveau de l'atelier Manufacturing de CATIA V5 ainsi que les outils de vérification et de complétude pour les processus et les posages.

L'objectif de mes recherches sur le thème de la conception intégrée est de décrire, à l'aide de méthodes formelles, un modèle de description et de communication, via la géométrie, de pièces mécaniques en phases de conception. Les différents acteurs (concepteurs, fabricants, métrologues) communiquent par/à la géométrie un certain nombre d'actions (modificateurs) représentant leurs points de vue. Il en découle une évolution de la géométrie résultat à travers une succession d'états. Chaque état est décrit par une géométrie résultat ainsi que par des estimateurs de la pertinence de chaque modification. L'approche d'intégration des différentes vues de développement de produit développée s'appuie sur le partage et la communication d'ontologies. Ce travail, en collaboration avec K. Mawussi, a abouti à une approche multi-vues pour la représentation de produit intégrant une modélisation géométrique et une spécification des ressources (outil de coupe) nécessaires à la fabrication [AMK 01]. La modélisation géométrique de produit est réalisée à l'aide des outils et langages

de modélisation pour la spécification d'ontologies (OIL) qui favorisent la vérification de la cohérence des données partagées au niveau des différentes vues. Les contraintes et règles métier propres aux vues conception et fabrication sont représentées à l'aide du formalisme KIF. Le déploiement de scénario de conception intégrée a été élaboré grâce à une modélisation de la communication et de l'échange d'informations à travers le développement du modèle OEMS (Ontologie – Etat – Modificateur - Status).

## 2. Intégration du tolérancement dans le cycle de vie du produit

Le thème de l'intégration du tolérancement dans les systèmes PLM (Product Lifecycle Management) est un enjeu industriel majeur pour la maîtrise de la chaîne complète de développement de produit. Les travaux de recherche au niveau du tolérancement ont permis des avancées considérables dans la traduction des exigences fonctionnelles en spécifications géométriques normalisées. La validation de ces travaux sur des ensembles mécaniques "complexes" et leur intégration dans la maquette numérique tout en garantissant l'interopérabilité avec différents systèmes (CAO, FAO, MAO, PDM, …) reste une étape importante à franchir.

Mes travaux (en collaboration avec L. Mathieu) ont concerné d'une part, la détermination des spécifications géométriques à travers une démarche de tolérancement fonctionnel et d'autre part, les aspects d'intégration de la conception et du tolérancement [DAM 03]. Les travaux réalisés ont permis d'élaborer des modèles de données (intégrant des spécifications normalisées et non normalisées) et de développer des ontologies et des mécanismes de développement intégré autour du tolérancement.

Ces travaux ont permis de formaliser une démarche de tolérancement fonctionnel des pièces mécaniques à travers l'analyse fonctionnelle et géométrique des mécanismes (méthodologie GEOCOM) pour les architectes et les concepteurs du groupe PSA. D'autres travaux (en collaboration avec L. Mathieu) ont porté sur la spécification géométrique des pièces fabriquées à travers la caractérisation et la spécification des états intermédiaires [ARM 03]. L'approche considérée, consiste à prendre en compte d'une part la gamme et d'autre part les spécifications géométriques fonctionnelles de la pièce finie [Rau 02]. Une modélisation des données en UML et une représentation de ces dernières sous forme de graphes ont été mises en œuvre. Pour spécifier la géométrie de la pièce, nous avons défini tout d'abord les états intermédiaires et nous avons recensé les défauts géométriques qui influent sur la géométrie de la pièce ainsi que les éléments engendrant ces défauts. La méthodologie a été

validée sur des exemples industriels en collaboration avec le groupe PSA.

Différents acteurs ont un rôle prépondérant dans la définition et la gestion des données de tolérancement (concepteurs de produit, concepteurs de processus, contrôleurs...). Bien que ces derniers ont des points de vue (objectifs et sémantiques propres) différents et interviennent sur le produit à diverses étapes, il est nécessaire de garantir une bonne communication entre eux. Mes travaux (en collaboration avec L. Mathieu) ont porté sur la traduction des données du tolérancement fonctionnel (issues de la méthodologie GEOCOM) dans un format XML pour leur échange et leur partage via le web [ACM 03]. Une architecture logicielle a été mise en place sur le serveur intranet du LURPA et des interfaces ont été développées pour garantir une utilisation ergonomique [Cid 02]. Des travaux sur la modélisation et la représentation des données pour décrire les spécifications géométriques et dimensionnelles ISO ont été également initiés (en collaboration avec B. Anselmetti et K. Mawussi). Les résultats de ces travaux ont permis de développer un nouveau modèle de description des spécifications géométriques et dimensionnelles [MAA 04].

En s'appuyant sur le langage GeoSpelling qui est un langage déclaratif pour la spécification et la vérification géométriques des produits adopté par l'ISO, j'ai développé, en collaboration avec L. Mathieu, une représentation formelle pour l'échange et le partage des informations pour les activités de conception, de fabrication et de contrôle intégrant la géométrie non-idéale des pièces et des ensembles mécaniques [AME 05]. Une description à base d'ontologies pour GeoSpelling a été développée. Elle constitue une structure fondamentale pour représenter la géométrie avec défauts ainsi que les aspects de modélisations multi-vues.

## 3. Approches algébriques pour le tolérancement et la modélisation déclarative des ensembles mécaniques

Les développements récents des algèbres géométriques (algèbres de Clifford) introduisent un nouveau cadre algébrique pour décrire les entités géométriques (point, vecteur, bi-vecteur, tri-vecteur, …), les opérateurs et les propriétés (addition, multiplication, commutativité, anti-commutativité, associativité, …) ainsi que de nouveaux concepts géométriques (produit géométrique, dualité, …). Ce langage algébrique pour la géométrie présente des avantages considérables pour une écriture concise de relations géométriques tout en s'affranchissant de la définition de repères (coordinate free).

Dans le cadre des travaux de DEA de S. Blanc [Bla 03], je me suis intéressé à traduire les

contraintes SATT (Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement) et les caractéristiques du modèle Geospelling en termes d'éléments de l'algèbre de Clifford ainsi que la définition de quelques contraintes géométriques de contact (point-plan limité, droite limitée-plan limité, …). Ces travaux se sont poursuivis dans le cadre de collaborations avec Ph. Serré (SupMéca) et J. Yang (Beijing University of Technology) où nous avons exploité les algèbres géométriques conformes (Conformal Geometric Algebra) pour modéliser les éléments géométriques et les contraintes des ensembles mécaniques à travers un système de relations algébriques [SAY 11]. Nous avons ainsi implémenté des techniques de résolutions géométriques symboliques et nous avons surtout établi une correspondance entre le produit géométrique dans les algèbres géométriques conformes et le concept d'EGRM (Élément Géométrique de Référence Minimum) ce qui permet une classification algébrique dans le cadre de la théorie des SATT. Des perspectives pour la spécification de la chiralité et de la mobilité dans les systèmes mécaniques ont été établies à la base des algèbres géométriques conformes.

## III. Fondements de l'ingénierie des formes

### 1. Introduction

Le concept de forme a une longue et riche histoire dans le développement des connaissances. Il a été étudié dans différentes disciplines et plus particulièrement en philosophie, psychologie, mathématiques et dans les sciences de l'ingénieur [Ley 01] [Piz 10] [Koe 90]. Les philosophes et les physiologistes ont cherché à comprendre les mécanismes de la perception de la forme et de la structure (principes du Gelstalt [WR 44]) ainsi que le système de perception visuel humain [DP 13]. Les travaux en intelligence artificielle ont cherché à développer des systèmes artificiels à base de calculateurs ou d'ordinateurs pouvant émuler le système de perception visuel humain [DP 13]. Dans le domaine des sciences de l'ingénieur, l'intérêt pour l'étude de la forme est l'exploitation des attributs associés à la forme pour inférer de la connaissance et la prise de décision dans le processus de développement des produits.

L'ingénierie des formes (pour l'ingénierie mécanique) est une discipline émergente à l'interface des activités de développement de produit et des sciences du numérique (modèles, méthodes et outils de la géométrie, des statistiques et du traitement numérique). L'objectif de l'ingénierie des formes est l'étude et la caractérisation des formes représentatives des pièces et

des ensembles mécaniques en vue de modéliser, analyser, prédire, observer et établir leur variabilité et de corréler cette variabilité avec les autres informations de natures fonctionnelles et structurelles.

## 2. Qu'est-ce qu'une forme?

Le concept de forme qui semble intuitivement simple n'est pas facile à définir. Le dictionnaire de L'Académie française, 8ème édition (1932-1935), définit la forme comme suit : " Figure extérieure d'un corps, configuration d'une chose …" ou " Il se dit particulièrement au pluriel des Contours d'un objet ... ". Le Trésor de la langue Française informatisé définit, quant à lui, la forme comme " Ensemble de traits caractéristiques qui permettent à une réalité concrète ou abstraite d'être reconnue" ou " Qualité d'un objet, résultant de son organisation interne, de sa structure, concrétisée par les lignes et les surfaces qui le délimitent, susceptible d'être appréhendée par la vue et le toucher, et permettant de le distinguer des autres objets indépendamment de sa nature et de sa couleur. "

La définition de la forme dans les dictionnaires Anglais semble très similaire. Le Merriam–Webster Dictionary définit la forme (shape) comme : "the visible makeup characteristic of a particular item or kind of item," "a spatial form or contour," and "a standard or universally recognized spatial form."

Les propriétés géométriques des formes ont ainsi suscité le plus d'intérêt. Bien que la géométrie d'Euclide et les solides de Platon ont été les prémisses d'une théorie générale des formes, il a fallu attendre les travaux précurseurs de D'Arcy Thompson pour une caractérisation mathématique des formes [Tho 17]. A la base de ses travaux, Kendall [Ken 77] [Ken 84] a proposé une définition de la forme qui est devenue la référence de facto dans les travaux de recherche en sciences de l'ingénieur, en informatique et en biologie. La forme dans le sens de Kendall [DM 98] est : "shape is all the geometrical information that remains when location, scale, and rotational effects are filtered out from an object. ". A travers cette définition et l'ensemble des travaux qui s'en ont inspiré [Boo 86] [DM 98], la forme peut se réduire à la description géométrique d'un objet invariant par les transformations géométriques de rotation, de translation et d'homothétie. Cette définition permet également de définir la similarité ou l'identité entre les formes qui est à la base des modèles statistiques des formes [DM 98]. Un modèle statistique des formes est une structure mathématique pour la représentation de la variabilité des formes. Ce modèle s'appuie sur des mesures statistiques définies à partir des descriptions géométriques d'échantillons de la population des objets

étudiés.

La description géométrique des formes et la caractérisation de leur variabilité se retrouvent ainsi au cœur des programmes de recherche de la théorie générale des formes. Des avancées majeures dans les domaines de l'anatomie computationnelle ou numérique [GM 98] [Pen 06] [Aya 15], de la morphométrie [Boo97] [ARS 04] et de la morphologie mathématique [Ser 86] [AM 09] ont bénéficié de ce cadre théorique et des développements algorithmiques et numériques.

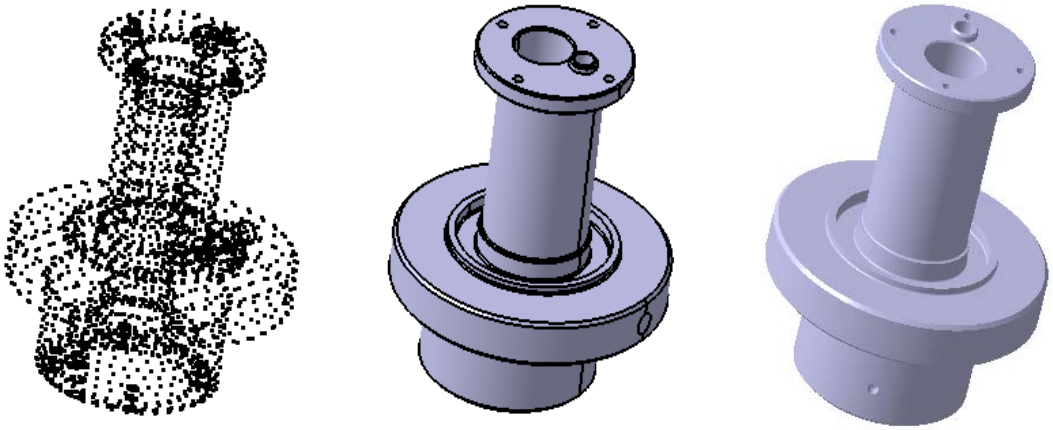
La modélisation géométrique en ingénierie mécanique et le développement de la Conception Géométrique Assistée par Ordinateur (CGAO) ont donné un rôle fondamental à la description géométrique de la forme dans le processus de développement des produits. La forme est surtout exploitée comme un média multidimensionnel principalement caractérisé par sa géométrie ou par son étendue spatiale dans un espace à un, deux, trois dimensions ou plus [BDF+08]. Les travaux de Requicha [Req 80] sur les fondements de la modélisation solide ont mis en évidence le rôle de la représentation de la forme et de sa structuration informatique pour capturer les aspects géométriques et leur exploitation en modélisation et simulation [Rob10].

## 3. Représentation des formes

A la base des travaux de Requicha [Req 80], la modélisation des formes en ingénierie mécanique a évolué avec les modèles mathématiques et informatiques pour les courbes, les surfaces et les solides. A travers l'abstraction de l'objet réel, Requicha a défini trois niveaux d'abstraction ou univers. Le premier niveau permet de définir et de de clarifier l'objet à modéliser (univers physique) ; le deuxième niveau permet de formuler mathématiquement l'objet étudié et ses propriétés (univers mathématique) ; le troisième niveau permet de définir des schémas de discrétisation des objets mathématiques (univers de représentation). Un quatrième univers a été proposé par plusieurs auteurs pour traduire l'univers de représentation en des structures et des éléments de langages informatiques (univers d'implémentation).

La représentation des formes a bénéficié des aspects théoriques et des développements algorithmiques issus des différentes branches des mathématiques pures et appliquées et des sciences du numérique. Sans être exhaustif, nous avons catégorisé la représentation des formes en ingénierie mécanique. Nous avons tout d'abord distingué les représentations discrètes et les représentations continues et considéré les structures élémentaires de ses représentations (point, courbe/surface, volume) (figure 1-1). Les représentations des formes

sont par la suite classées en quatre catégories : Enumératives, complexes cellulaires, fonctionnelles et constructives (figure 1.2).



(a) point-based (b) surface-based (3) volume-based

Figure1-1 : Structures élémentaires de representation des formes [Zha 11]

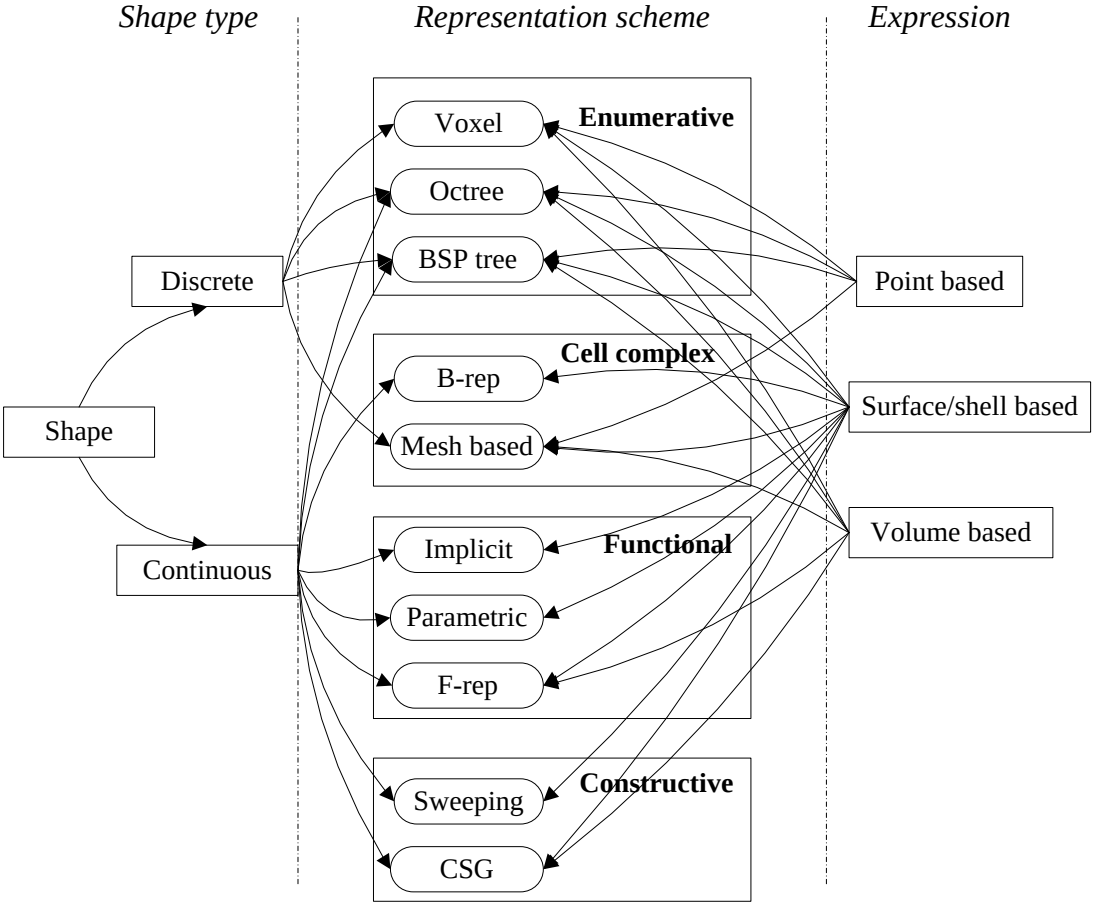



Figure 1-2 : Taxonomie de représentation des formes [Zha 11]

Malgré leur grande popularité en ingénierie, les méthodes de représentation des formes

sont de plus en plus remplacées par les méthodes de description des formes qui ont bénéficié ces dernières années d'une grande intensité de recherche de la part des communautés scientifiques en traitements d'image et vision, en informatique graphique et en imagerie médicale. La distinction entre la représentation et la description peut être exprimée comme suit : une représentation d'objet contient suffisamment d'informations pour reconstruire une approximation de l'objet, tandis qu'une description contient uniquement les informations suffisantes pour identifier un objet en tant que membre d'une classe [NP 85] [BDF+08].

La description de la forme, qui simplifie ainsi la représentation de la forme, comporte une bonne partie des informations de la forme et facilite la modélisation et le traitement numérique. Divers descripteurs de forme ont été développés dans la littérature et sont en général classés en deux catégories [Pav 78] [Lon 98] [ZL 04] (figure 1-3). Les premiers sont basés sur l'utilisation des points de la frontière ou de la peau alors que les autres exploitent entièrement la forme. Deux approches différentes ont été également considérées : une approche globale (continue) et une autre approche structurelle (discrète). Cette distinction est basée sur le fait que l'objet est représenté soit comme un tout ou par des primitives.

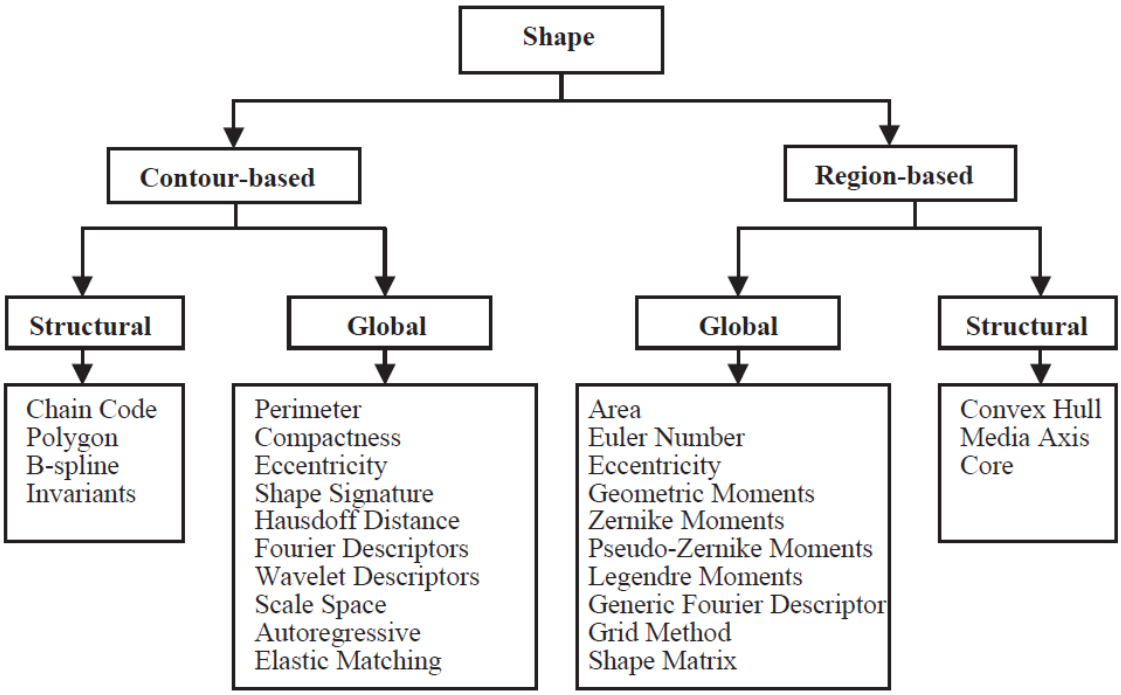



Figure 1-3 : Classification des descripteurs de forme [ZL 04]

## 4. Géométrie discrète et algorithmique pour l'ingénierie des formes

La géométrie discrète est la branche de la géométrie qui s'intéresse à la représentation des objets discrets manipulables par l'outil informatique (ensemble de points, maillages triangulaires, …). La géométrie discrète et la géométrie algorithmique, apparue récemment sous l'impulsion de l'informatique et des sciences du numérique, présentent un grand nombre de recouvrements. En effet, le terme "discret" concorde bien avec le terme "algorithmique" ou "numérique" dans la mesure que les éléments géométriques doivent être discrétisés en préparation de tout traitement numérique à base d'algorithmes [DO 11]. Par extension et dans le cadre de nos travaux, nous ne distinguons pas la géométrie discrète, de la géométrie algorithmique ou numérique.

Les thèmes de recherche de la géométrie discrète en ingénierie mécanique couvrent l'ensemble de la chaine de traitement numérique de la géométrie et impliquent l'étude des transitions entre le monde physique (réel), le monde mathématique (abstrait) et le monde discret (numérique) pour la représentation, la manipulation et le traitement des formes simples et complexes [Lev 08] [All 09] [BKP+ 10].

Ces thèmes de recherche traitent ainsi, dans le contexte de l'ingénierie mécanique, les aspects relatifs à :

### *4.a* L'acquisition

Les moyens de mesure modernes permettent d'acquérir et de caractériser les données spatiales des objets mesurés dans un espace 2D ou 3D. Toutefois la représentation discrétisée et l'évaluation des caractéristiques sont entachées d'incertitudes de mesure dont la maîtrise est essentielle pour vérifier la conformité de produits manufacturés. Les moyens de mesure à base de systèmes optiques ont connu un développement considérable ces dernières années. Ils permettent d'acquérir de grands nuages de points sur des pièces de formes complexes dans un temps relativement court. Les caractéristiques métrologiques de ces systèmes, en nette évolution, bénéficient des améliorations considérables en termes d'exactitude de mesurage. Cependant, le mesurage de produits de grandes dimensions, les problèmes d'environnement de mesure, la complexité des formes géométriques à acquérir et l'échelle géométrique considérée (nano, micro et macro) nécessitent la combinaison de différents systèmes de mesure. Le développement de systèmes multi-capteurs et la fusion de données de mesure massives, hétérogènes et incertaines à partir de plusieurs capteurs a engendré de nouvelles

problématiques de recherche.

### *4.b Le recalage*

Les données de numérisation sont définies dans différents repères et doivent être transformées et représentées dans un repère unique. Les techniques de recalage rigide sont les plus utilisées à ce niveau. Elles suivent en général deux phases. La première phase permet l'alignement grossier des données et exploite des marqueurs artificiels ou naturels des pièces. Cette phase permet l'initialisation de la phase suivante appelée recalage fin qui calcule la transformation rigide optimale pour aligner les données. En général, le recalage est effectué entre deux nuages de points dont l'un sert de référence ou peut s'appuyer sur la représentation numérique de la pièce comme référence globale. De nouveaux travaux de recherche considèrent des transformations non rigides (recalage non rigide) pour la compensation des erreurs d'étalonnage, la prise en compte du bruit de mesure et les problèmes de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage.

### *4.c La reconstruction*

La reconstruction de surfaces est un sujet d'actualité traité par plusieurs communautés scientifiques notamment en informatique graphique, en rétro-conception et en métrologie. La reconstruction permet de déterminer une approximation de la forme d'un objet à partir de nuages de points. Ce nuage de points est un échantillonnage de la forme réelle. De ce fait, le problème de reconstruction est d'une part un problème inverse et un problème mal posé car il peut exister plusieurs surfaces approximant l'objet. Les nuages de points numérisés présentent souvent des densités de points non uniformes, des trous de numérisation et des bruits de mesure. Le problème de reconstruction doit également garantir l'équivalence et préserver la topologie de l'objet réel. Dans le cadre de la métrologie dimensionnelle, cette reconstruction est souvent équivalente à l'opération d'association qui est décrite dans les normes ISO GPS. L'association est l'opération utilisée pour associer un élément idéal (ou modèle) à un élément non idéal (le nuage de points) selon un critère d'association (tel que les moindres carrés) qui correspond à une optimisation avec ou sans contraintes. En général, l'élément non idéal est décrit par une formulation mathématique, que ce soit à travers un modèle explicite, implicite ou paramétrique. Les cas des formes complexes nécessitent des modèles discrets (nuages de points théoriques ou maillages théoriques), ou des modèles numériques CAO de référence.

### *4.d L'analyse*

Pour exploiter efficacement les données de numérisation, il est indispensable de réaliser des traitements numériques de la géométrie tels que la caractérisation de la topologie, la segmentation ou le partitionnement, l'identification et la reconnaissance de formes caractéristiques et l'estimation des normales et des courbures ainsi que d'autres propriétés différentielles.

### *4.e Le pré-traitement*

Les données brutes de numérisation sont bruitées, non structurées et peuvent présenter des trous de numérisation, des densités non homogènes et une répartition spatiale non uniforme des points. La préparation des données pour des opérations de traitement ultérieures nécessitent un certain nombre d'opérations parmi lesquelles on peut citer : le débruitage, le lissage, la réduction, l'idéalisation, la réparation et la paramétrisation.
D'autres thèmes de recherche ont été traités dans la littérature comme la visualisation et le rendu [ABC+ 03], l'édition [Bot 05], la transmission et le stockage [AG 05], la protection et le tatouage numérique [WLD+08], l'indexation, la navigation et la recherche de contenu [FKM+ 05] [IJL+05] et la fouille des formes [GS14].

## 5. Formes complexes et classification des formes

Les formes complexes sont intuitivement caractérisées par une complexité intrinsèque due à la variation et au caractère non régulier de la forme et une complexité structurelle due aux éléments géométriques qui composent cette forme [SJ14]. La classification géométrique des formes est également un moyen de distinguer les formes simples des formes complexes.

### *5.a Classification et invariance : apports de la géométrie "moderne"*

Le programme d'Erlangen du mathématicien allemand Félix Klein [Kle 93] est une vision unifiée de la géométrie du 19ème siècle (géométrie affine, géométrie projective, géométrie euclidienne et géométries non euclidiennes) qui consiste à fonder la géométrie sur les notions d'actions de groupe et d'invariants. Dans la même logique, les travaux de Lie et Poincaré sur l'importance de la théorie des groupes en géométrie ont réduit la géométrie à l'étude de certains groupes de transformations.

Cette vision moderne de la géométrie a été à la base de la classification des surfaces par leurs propriétés d'invariance sous l'action des déplacements rigides en théorie des mécanismes par Hervé [Her 94] [Her 99] qui ont inspiré les travaux de Clément [CRS+97] et de de Srinivasan [Sri 99] pour la classification des surfaces pour le tolérancement et le dimensionnement géométrique qui a été adoptée par les normes ISO GPS [CLV 07]. Ainsi 7 classes d'invariance ont été proposées : Plane, Sphérique, Cylindrique, Hélicoïdale, Prismatique, Révolution et Complexe. La classe complexe caractérise ainsi les formes n'ayant pas de degré d'invariance par translation et/ou par rotation.

### *5.b Classification et invariance : apports de la topologie et de la géométrie différentielle*

Du point de vue de la topologie et de la géométrie différentielle, une surface est une variété topologique de dimension 2 de $R^3$ (2-manifold) ce qui correspond à la notion intuitive qu'en tout point de la surface il existe un petit voisinage qui "ressemble" à une région plane. La notion de variété (manifold) est un concept issu de la topologie pour définir des objets équivalents aux notions intuitives de courbes et de surfaces et munis de métriques pour effectuer des calculs différentiels et tensoriels. Le théorème de classification des surfaces stipule que toute surface compacte et orientable est homéomorphe à une sphère, à un tore ou à la somme connexe de plusieurs tores.

La géométrie différentielle apporte également des éléments pour la classification locale des surfaces. Les courbures principales caractérisent la forme locale des surfaces à l'ordre 2. Les signes des courbures Gaussiennes et Moyennes permettent une classification des surfaces [BJ86]. Toutefois, cette classification ne permet pas une compréhension intuitive de la forme. Il a fallu attendre les travaux de Koenderink et Doorn [KD92] qui se sont intéressés à la perception de la forme pour définir un autre paramètre appelé indice de forme (Shape index) qui permet de distinguer 9 formes locales non planaires de surfaces.

### *5.c Classification de Savio*

Dans un article de référence en métrologie dimensionnelle des pièces de formes complexes, Savio et al. [SDS 07] ont proposé une classification des formes à partir de leur complexité géométrique et de critères liés à leur fabrication (tolérance relative ou ratio entre la tolérance de forme/profil et la caractéristique dimensionnelle principale de la pièce) et à leur mesure (incertitudes de mesure). Trois niveaux de complexité géométrique ont été

introduits : le niveau bas pour les formes pseudo planes, asphériques ou ayant un faible changement de courbures ; le niveau moyen pour les formes à multi-facettes présentant des changements de courbures modérés ou grands ; et le niveau haut pour les formes présentant des contre-dépouilles, des caractéristiques géométriques internes ou limitées en termes d'accessibilité et de visibilité. Le tableau suivant (table 1-1) illustre quelques catégories de pièces industrielles, leur complexité géométrique et quelques caractéristiques dimensionnelles et de tolérances relatives.

| | **Airplane parts** | **Auto body parts** | **Haptic interfaces** | **Turbine blades/blisks** | **Optical parts** |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Part dimensions* (m)** | | | | | |
| large ($10^0 - 10^2$ ) | ×× | | | × | × |
| medium ($10^{-1} - 10^0$) | × | ×× | | ×× | ×× |
| small ($10^{-3} - 10^{-2}$) | | | ×× | | ×× |
| micro ($10^{-3}$) | | | × | | × |
| ***Shape complexity*** | | | | | |
| low | ×× | | | | ×× |
| medium | × | ×× | ×× | × | × |
| high | | | × | ×× | |
| ***Relative tolerance*** | | | | | |
| medium ($10^{-4} - 10^{-3}$) | ×× | ×× | | ×× | |
| fine ($10^{-5} - 10^{-4}$) | | | ×× | × | ×× |
| ultra-fine ($< 10^{-5}$) | | | | | ×× |

Table1-1 Classification des formes selon Savio et al. [SDS 07]

# Chapitre 2 - Maîtrise de la variabilité géométrique des produits manufacturés : fondements géométriques pour le tolérancement

## I. Introduction

Le développement des produits manufacturés s'appuie de plus en plus sur des outils numériques supports des activités de conception et d'ingénierie, de simulation et de fabrication, de contrôle qualité et de vérification métrologique couvrant ainsi tout le cycle de vie des produits. Bien que plusieurs modèles de produit aient été développés dans les domaines de la conception et de la fabrication, ils restent néanmoins limités. La forme, la position, le contact et la mobilité des pièces dans un ensemble mécanique doivent tenir compte des écarts géométriques par rapport à la géométrie nominale idéalisée. La planification et l'allocation de ressources pour la production et le contrôle de la qualité doivent intégrer les variations géométriques dues à l'imprécision des processus de fabrication et les incertitudes de mesure. Tous ces éléments contribuent à la variabilité géométrique tout le long du cycle de vie du produit.

La maitrise de la variabilité géométrique est au cœur de nouveaux défis industriels et scientifiques du 21ème siècle. En particulier pour le développement de nouveaux produits ayant des géométries plus complexes : composants optiques de nouvelles générations, moteurs à réaction à haut rendement énergétique, structures aéronautiques allégées, implants et prothèses optimisés, …

Sans des outils adaptés de spécification, d'optimisation et de vérification de la variabilité géométrique, la capacité de développer à coûts réduits ces nouveaux produits devient limitée. Une vision globale pour la maîtrise de la variabilité géométrique des produits doit considérer non seulement le processus complet de tolérancement et son intégration, la modélisation et la représentation des tolérances mais aussi les modèles géométriques les plus adaptés et les techniques de traitement numériques de la géométrie les plus appropriées.

Nos travaux de recherche portent sur les modèles géométriques et numériques pour la spécification géométrique des produits. Ces travaux s'appuient sur le concept de Skin Model et le langage GeoSpelling issus de travaux antérieurs développés au LURPA et s'intègrent

aussi dans les thématiques du comité technique TC 213 de l'ISO.

Les normes ISO GPS (Geometrical Product Specifications) s'appuient sur un modèle/langage de description de la forme réelle des pièces mécaniques et d'un ensemble d'opérations permettant de spécifier géométriquement des contraintes et des exigences de conception, de fabrication et de contrôle métrologique. Bien que ces normes aient abouti à des non ambiguïtés de description et à une meilleure communication entre les différents acteurs de cycle de vie de produit, les outils numériques de modélisation et de simulation ne permettent pas à ce jour une représentation géométrique fidèle de la forme réelle des pièces mécaniques contribuant ainsi à des études très restrictives voire incomplètes du comportement réel des systèmes mécaniques complexes.

GeoSpelling, à la base des normes ISO GPS, offre un langage non ambigu et un cadre complet pour la modélisation et la description de la variabilité géométrique tout le long du cycle de vie de produit. GeoSpelling s'appuie sur un ensemble de concepts fondamentaux (opérations, éléments idéaux et non-idéaux, caractéristiques et conditions) dont celui du "Skin Model". Cependant, l'«opérationnalisation» de GeoSpelling n'a pas été réalisée et peu de recherches ont porté sur la génération du Skin Model.

L'objectif de mes travaux est de développer d'une part les fondements théoriques de la spécification géométrique des produits et d'autre part une opérationnalisation du Skin Model et de GeoSpelling pour l'élaboration de modèles génériques intégrant les défauts géométriques. Ces travaux ont été développés durant la période 2008-2015 et en collaboration avec L. Mathieu (LURPA), A. Ballu (Université de Bordeaux), S. Wartzack (University of Erlangen-Nuremberg, Germany) et L. Qiao (Beihang University, China).

Une partie de ces travaux est présentée dans ce chapitre et couvre les sujets suivants :

- Conceptualisation du Skin Model ;
- Représentation du Skin Model ;
- Modélisation du contact et de la mobilité à base de Skin Model Shapes.

## II. Spécification géométrique des Produits

### 1. Une brève histoire du tolérancement

Le développement du tolérancement remonte à la fin du 19$^{ème}$ siècle et eu début du 20$^{ème}$

siècle à travers le besoin industriel d'interchangeabilité et d'assemblage des pièces mécaniques [Dur 94] [Buc 21] [Gra 25] [Ran 46]. Le « principe de Taylor » ou « exigence de l'enveloppe » à base de calibre d'ajustement a permis dès 1905 de développer une approche orientée fonction pour l'assemblage permettant ainsi de poser les fondements d'une démarche scientifique pour le tolérancement [Tay 05]. Par la suite, et vers la fin de la deuxième guerre mondiale, le secteur de la construction navale militaire au Royaume-Uni a favorisé le développement de normes pour les ajustements, la sous-traitance de pièces mécaniques et la considération des contraintes de fabrication et de contrôle métrologique dans les pratiques des bureaux d'étude [Gla 45]. Un modèle géométrique pour le tolérancement a été élaboré par S. Parker en 1938 à travers le développement des notions de tolérance géométrique de position et de zone de tolérance [Par 40]. Les travaux de Parker sont considérés comme les fondements du tolérancement géométrique et ont ouvert la voie à de nouveaux concepts comme le principe de la condition au maximum de matière développé par Chevrolet en 1940 [Chevrolet 40]. En parallèle, les efforts de normalisation de symbolisme graphique du tolérancement pour le dessin technique ont abouti au système GD&T (Geometric Dimensioning and Tolerancing) à travers le développement des normes américaines MIL-STD-8 (1949), ASA-Y14.5 (1957), USASI Y14.5 (1966), ANSI Y14.5 (1973), ANSI Y14.5M (1982), ASME Y14.5M (1994) et ASME Y14.5 (2009) et leur mathématisation par le sous-comité technique Y14.5.1.

D'une façon équivalente, les normes internationales (ISO) pour le tolérancement ont également évolué depuis le système de tolérances et d'ajustements ISO/R 286 (1962) et le système ISO de tolérancement géométrique ISO/R 1101 (1969) vers le système de normes de spécification géométrique de produits (GPS) décrits par le schéma directeur du rapport technique de l'ISO/TR14638:1995 et les principes fondamentaux spécifiés dans l'ISO 8015:2011.

Il est à souligner que le système GD&T s'est développé comme une norme unique pour le dimensionnement et le tolérancement avec une considération forte de la macro-géométrie et une volonté de mathématisation des principes de dimensionnement et de tolérancement. Le système GPS, compte tenu de son développement, a hérité de nombreuses normes, visant à décrire et à caractériser la plus grande diversité de cas, plutôt que le développement d'une norme unique. L'idée du système GPS est de garantir et d'assurer des propriétés de produit mécanique en termes de fonctionnalité (functionality), de sécurité (safety), de fiabilité (dependability), et d'interchangeabilité (interchangeability).

## 2. L'évolution des normes ISO GPS

Le comité ISO/TC 213 a été créé en 1996 par la fusion de trois comités techniques : le comité technique ISO/TC 3 (Ajustements), l'ISO/TC 10 (Dessins techniques, définition de produits et documentation) à travers le sous-comité SC 5 (Cotation et tolérancement), et l'ISO/TC 57 (Métrologie et propriétés des surfaces). L'objectif étant de regrouper la spécification et la vérification des normes dans le même comité technique, favorisant ainsi le dialogue entre ceux qui spécifient la géométrie, ceux qui la fabriquent et ceux qui la mesurent. Les travaux de ce comité, dans un souci de développement de fondements scientifiques solides des normes futures, vont au-delà de la macro-géométrie et s'intéressent également à la micro-géométrie et les propriétés des surfaces ainsi qu'aux moyens de mesure et leur étalonnage intégrant ainsi les incertitudes de mesure [Hum 09] [Nie 13]. Les activités de ce comité couvrent également les principes de base du tolérancement, la syntaxe et la sémantique des indications techniques sur le dessin (symboles) et leurs définitions.

### *2.a La matrice GPS*

Les premiers travaux d'harmonisation des normes ISO GPS existantes ont abouti à un schéma directeur (masterplan) ou modèle de matrice pour la spécification géométrique des produits ISO/TR 14638:1995 et ISO 14638:2015. Ce schéma directeur permet de regrouper l'ensemble des normes et de créer une chaîne ininterrompue de la spécification à la vérification permettant ainsi une non ambiguïté de spécification et une traçabilité du résultat de mesurage.

Une structure matricielle a alors été adoptée pour regrouper l'ensemble des normes relatives aux produits mécaniques (figure 2-1). Cette structure regroupe les normes en trois catégories : les normes ISO GPS fondamentales, les normes ISO GPS générales et les normes ISO GPS complémentaires. Les lignes de la matrice ISO GPS correspondent à neuf propriétés géométriques (taille, distance, forme, orientation, position, battement, état de surface du profil, état de surface surfacique et défauts de surface) et les colonnes de la matrice ISO GPS correspondent à des maillons. Un maillon comprend toutes les normes ISO GPS générales qui traitent d'une fonction particulière dans la spécification ou la vérification d'une propriété géométrique, comme les symboles à utiliser, ou le mesurage de la propriété géométrique. Il existe actuellement sept maillons désignés par des lettres (A : Symboles et indications, B : Exigences de l'élément, C : Propriétés des éléments, D : Conformité et non-conformité, E : Mesurage, F : Équipement de mesure et G : Étalonnage).

| | Maillons | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G |
| | Symboles et indications | Exigences de l'élément | Propriétés de l'élément | Conformité et non-conformité | Mesurage | Équipement de mesure | Étalonnage |
| Taille | | | | | | | |
| Distance | | | | | | | |
| Forme | | | | | | | |
| Orientation | | | | | | | |
| Position | | | | | | | |
| Battement | | | | | | | |
| État de surface du profil | | | | | | | |
| État de surface surfacique | | | | | | | |
| Défauts de surface | | | | | | | |

Figure 2-1: Structure de la matrice GPS [ISO 14638:2015]

### *2.b Le principe de dualité*

Les normes ISO GPS définissent des procédures pour la caractérisation des grandeurs de natures dimensionnelles et géométriques associées aux fonctions de produits et les méthodes de mesure pour établir la conformité liée à ces grandeurs. Dans un souci de maîtriser et de limiter les causes d'incertitudes, d'absence ou de manque d'informations sur toute la chaîne de la spécification à la vérification, des opérateurs ont été introduits par les normes ISO GPS. Ces opérateurs enrichissent la spécification et la vérification géométriques de produits par des opérations ou des procédures de traitement s'apparentant à du mesurage virtuel (pour la spécification) ou réel (pour la vérification).

L'opérateur de spécification est défini comme un ensemble ordonné d'opérations qui servent à émuler une exigence fonctionnelle limitant ainsi les risques de l'ambiguïté de description de la fonction à spécifier. De plus, cet opérateur permet de définir d'une manière détaillée et précise la grandeur à mesurer (mesurande) et élimine ainsi l'ambiguïté de spécification.

L'opérateur de vérification permet la mise en œuvre de l'opérateur de spécification dans le cadre de la mesure. Dans l'idéal, cet opérateur devrait inclure le même ensemble ordonné d'opérations de spécification contribuant ainsi à réduire voire annuler les incertitudes de méthode.

Les normes ISO-GPS introduisent ainsi un principe de dualité à la base de ces deux opérateurs de spécification et de vérification. Ce principe établit que l'opérateur de spécification est indépendant de toute procédure de mesure et de tout système de mesure et que l'opérateur de spécification est réalisé à travers un opérateur de vérification qui est indépendant de l'opérateur de spécification mais qui le reflète.

### *2.c La variabilité et le concept d'incertitude*

Un produit réel est en général pensé à partir d'un objet géométrique idéalisé. Cependant, la réalisation et la caractérisation de ce produit n'aboutissent qu'à un objet géométriquement approché et sujet à des variations. Les normes ISO GPS distinguent trois espaces associés au produit. Dans l'espace de conception, le produit est spécifié comme imaginé par le concepteur. Dans sa démarche de conception, le concepteur adopte un raisonnement "au nominal" en considérant des formes et des caractéristiques nominales et les écarts associés qui répondent à des exigences fonctionnelles du produit. Dans l'espace de la production, le produit est alors fabriqué en respectant les limites des écarts imposés. Dans le monde de la vérification, le produit est mesuré pour établir la conformité avec la spécification. Le métrologue adopte un raisonnement "écart-erreur-incertitude" en cherchant à évaluer les écarts, à corriger les erreurs de mesure et à maîtriser les incertitudes de mesure, associés à des formes et à des caractéristiques nominales. Une variabilité géométrique est ainsi inhérente au produit et omniprésente tout le long des activités de développement et du cycle de vie. Cette variabilité géométrique a été axiomatisée et formalisée dans [Mat 07] et [Sri 07]. L'axiome de variabilité en production (ou d'imprécision en production) spécifie que les procédés et les technologies de fabrication sont imprécis et ne permettent ni de réaliser des formes idéales ou parfaites ni de réaliser des formes parfaitement identiques. L'axiome d'incertitude en métrologie (ou d'incertitude en mesure) précise qu'aucun mesurage ne peut donner la valeur vraie de la grandeur mesurée et que plusieurs mesurages d'une même grandeur ne peuvent donner des valeurs identiques. Il est à noter que ces deux axiomes sont indépendants.

Le développement de nouveaux produits à l'échelle de la micro-géométrie a montré que les surfaces et les interfaces jouent un rôle plus important qu'à l'échelle macro-géométrique. De nombreux travaux en métrologie dimensionnelle des états de surface et en tolérancement au niveau de la micro-géométrie ont soulevé le point fondamental de la corrélation de la fonction et de la spécification allant jusqu'à la qualité de perception de cette fonction. La spécification au niveau micro-géométrique doit intégrer de nouvelles fonctions qui ne relèvent

pas uniquement de l'assemblage mais aussi du fonctionnement et de l'usage à une échelle micrométrique voire nanométrique.

Le système des normes ISO-GPS a introduit également le concept important d'incertitude. Il faut entendre par "incertitude" une généralisation du concept classique introduit dans le domaine de la métrologie et de la mesure à savoir la vérification. Ce concept d'incertitude a été élargi pour intégrer tout manque d'information aux différentes étapes du cycle de vie du produit.

En effet, l'incertitude a été étendue au niveau de la spécification et les normes ISO GPS distinguent trois types d'incertitude [ISO17450-2:2012].

Les incertitudes de corrélation mesurent et quantifient l'adéquation des spécifications à traduire les exigences fonctionnelles. Elles intègrent ainsi les incertitudes de traduction des exigences ou conditions fonctionnelles géométriques en spécifications. Ces incertitudes sont de la responsabilité du concepteur et dépendent de sa connaissance des phénomènes physiques, des modèles ainsi que des approximations et des simplifications de ces modèles. Ces incertitudes sont également appelées ambiguïtés de la description fonctionnelle.

Les incertitudes de spécification mesurent l'interprétation de la spécification par la production et la métrologie. Il s'agit de vérifier la conformité et la complétude des spécifications et qu'elles sont en adéquation avec les normes ISO GPS.

Les incertitudes de mesure décrivent aussi bien les incertitudes de la méthode que les incertitudes inhérentes au processus de mesure comme décrites dans le GUM [ISO/IEC Guide 98-3:2008].

Ces incertitudes décrites par les normes ISO GPS correspondent également à de nouveaux besoins pour la qualité de perception de la fonction qui viendrait compléter les deux boucles du contrôle qualité à savoir la qualité de la conception (quality of design) et la qualité de la conformité (quality of conformance) [DMB 03] [JW 12a] [Whi 12] [WH 13].

Les nouvelles normes 17450-2:2012 complètent les définitions précédentes à travers l'opérateur fonctionnel, les différents opérateurs de spécification et les différents opérateurs de vérification. De nouveaux termes liés aux incertitudes ont été introduits (ambiguïté de spécification, ambiguïté de description de la fonction, incertitude de méthode, incertitude de mise en œuvre) (figure 2-2).

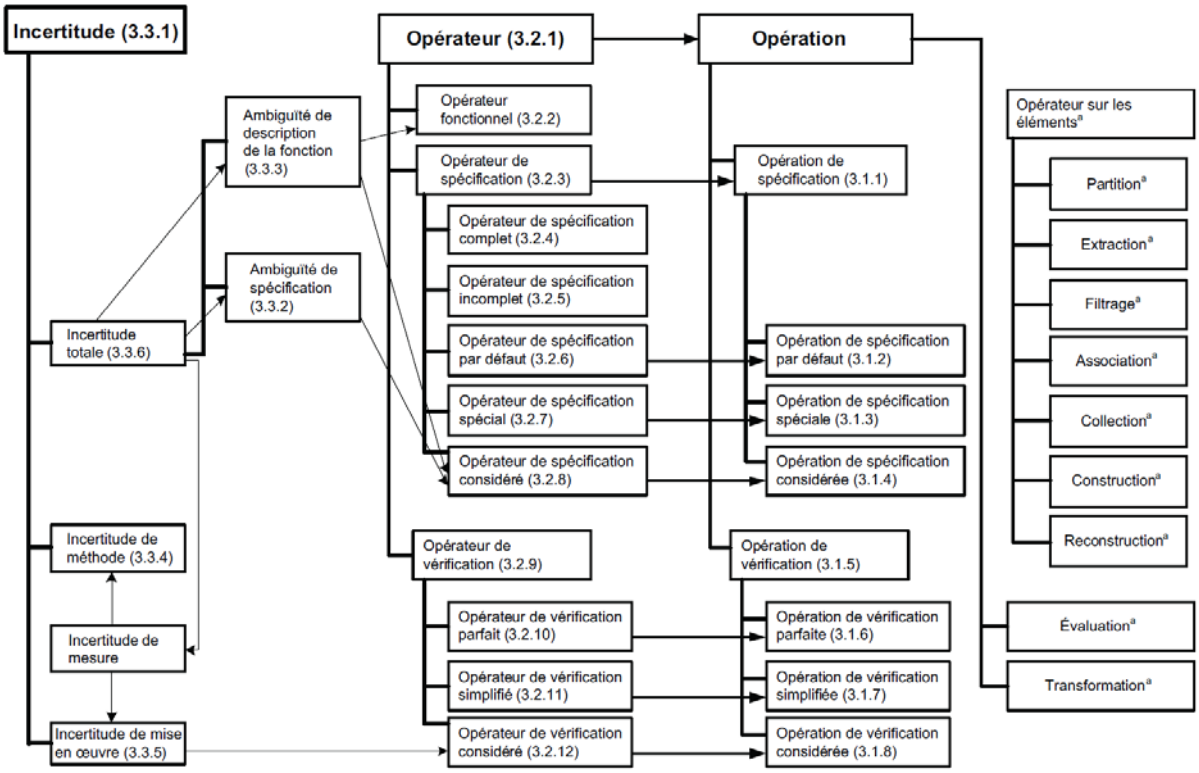



Figure 2-2: Diagramme de concept pour les opérations, les opérateurs et les incertitudes [ISO17450-2 :2012]

### *2.d GeoSpelling : un langage déclaratif pour la spécification et la vérification géométriques des produits*

Le langage GeoSpelling développé par Ballu et Mathieu [Bal 93] [BM 93] [BM 95] est un langage déclaratif pour l'expression des spécifications géométriques des produits qui a servi de base et a été par la suite adopté par le comité ISO TC 213. Ce langage commun pour la description des propriétés qualitatives et quantitatives du nominal, de la spécification et de la vérification a permis une avancée considérable au niveau des normes ISO GPS et du tolérancement.

Les fondements de GeoSpelling reposent sur la distinction entre des objets issus du monde "idéal" et ceux issus du monde "non-idéal". Le concept abstrait de Skin model est le premier niveau de description de la forme réelle du produit (surface réelle de la pièce) comme imaginée par le concepteur et intégrant ainsi l'ensemble des défauts macro-géométriques et micro-géométriques.

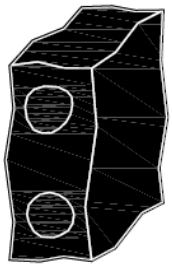
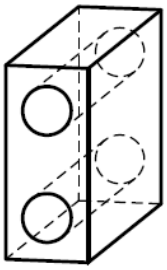
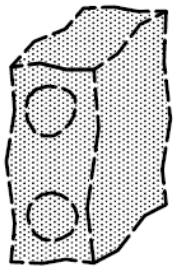
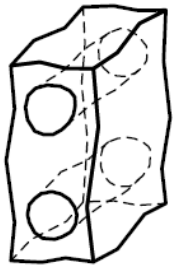
| Origine | Surface réelle de la pièce | Modèle de surface | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Modèle nominal | Modèle non idéal de la surface non idéale | |
| Illustration |  |  |  |  |
| Élément intégral | Élément réel | Élément intégral nominal | Exemple: élément intégral extrait | Élément intégral associé |
| Élément dérivé | | Élément dérivé nominal | Exemple: élément extrait dérivé | Élément dérivé associé |
| Qualificatif | Réel | Nominal | Exemple: extrait, filtré, reconstruit | Associé |
| Type d'élément géométrique | Non idéal | Idéal | Non idéal | Idéal |

Figure 2-3: Exemples de surface réelle d'une pièce et de ses modèles [ISO 22432:2011]

Ce modèle de peau interface de la pièce réelle avec son environnement est par la suite transformé en éléments géométriques non-idéaux et en éléments géométriques idéaux à travers l'application d'opérations définies dans GeoSpelling.

Les éléments géométriques sont définis dans trois "mondes" [ISO 22432:2011] :

- le monde de la définition nominale, où une représentation idéale de la pièce est définie par le concepteur;
- le monde de la spécification, où le concepteur a plusieurs représentations de la pièce à l'esprit;
- le monde de la vérification, où une ou plusieurs représentations d'une pièce sont identifiées dans l'application de la procédure ou des procédures de mesurage.

Il est ainsi possible de décrire des spécifications géométriques par zone, par dimension ou par état virtuel ou gabarit uniquement par un enchainement des opérations depuis le Skin model et à travers la définition de conditions mathématiques (égalités ou inégalités) portant sur des caractéristiques géométriques (distances et angles) entre des éléments géométriques idéaux et non-idéaux (figure ) [MB 05]. Ainsi, une spécification consiste à exprimer et limiter les écarts tolérés d'une caractéristique de pièce.

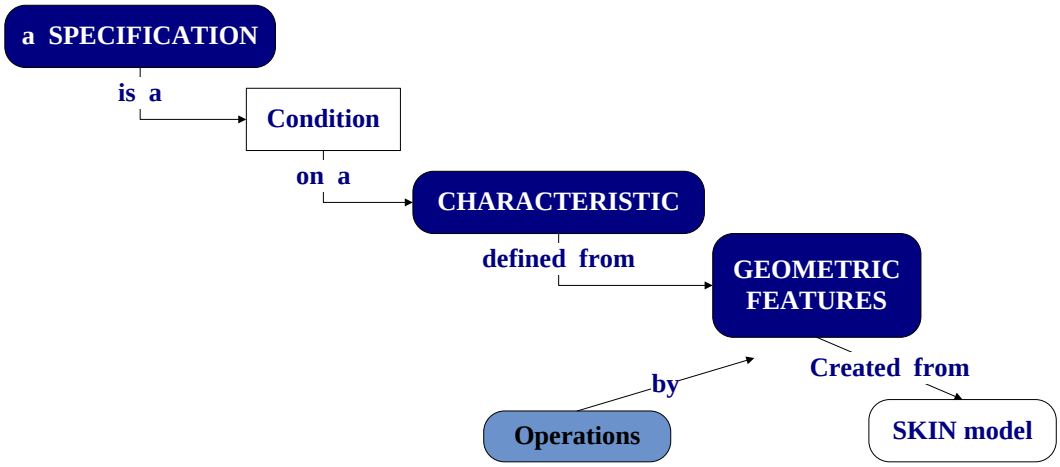



Figure 2-4 : Représentation des concepts de GeoSpelling

Des opérations spécifiques sont requises pour obtenir des éléments idéaux ou non idéaux. Initialement, six opérations ont été définies dans le cadre de GeoSpelling [MB 05] et ont été reprises par les normes ISO GPS (figure) [ISO 17450-1:2011].

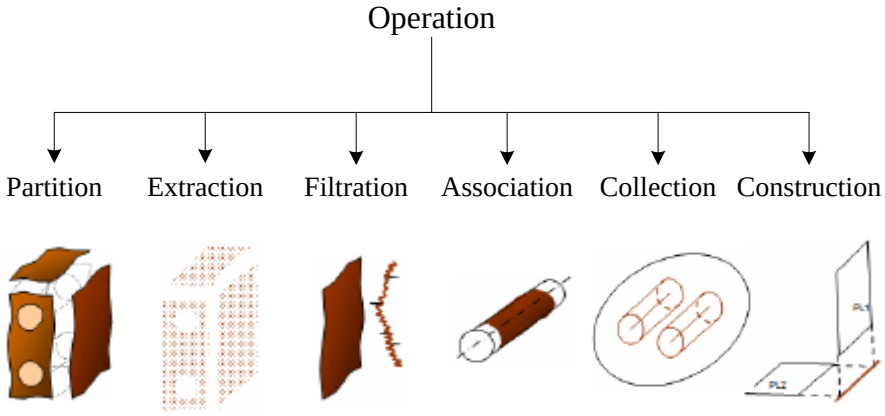



Figure 2-5 : Classification des opérations

Ces opérations sont décrites brièvement comme suit :

**Partition** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération est utilisée pour obtenir, à partir du modèle non idéal de la surface ou de la surface réelle, des éléments non idéaux correspondant à des éléments nominaux (on fait ici l'hypothèse que pour chaque élément non idéal, il existe un élément idéal correspondant). L'opération de partition est également utilisée pour obtenir des éléments limités.

**Extraction** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération est utilisée pour identifier un nombre fini de points à partir d'un élément géométrique, à l'aide de techniques d'échantillonnage. Cette opération permet ainsi d'obtenir des éléments géométriques primaires permettant une représentation approximative du « skin modèle ».

**Filtrage** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération consiste à créer un élément non idéal en réduisant le niveau d'information d'une entité non idéale par filtrage. Cette opération est souvent utilisée pour distinguer la rugosité, l'ondulation, la structure et la forme, etc..

**Association** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération permet d'établir des éléments géométriques idéaux à partir d'éléments géométriques non idéaux, conformément à des critères spécifiques. Le critère d'association donne un objectif sur une caractéristique et peut fixer des contraintes. Ces contraintes fixent la valeur des caractéristiques ou fixent des limites à la caractéristique.

**Collection** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : C'est une opération permettant de former un élément géométrique à partir de plusieurs autres éléments géométriques. Le nombre d'éléments qui rentrent dans la collection peut être fini ou infini. Cette opération est également utilisée pour identifier plusieurs éléments géométriques qui conjointement remplissent un rôle fonctionnel.

**Construction** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : C'est une opération permettant de construire un ou plusieurs éléments idéaux, à partir d'autres éléments idéaux, selon des contraintes géométriques.

**Reconstruction** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération est utilisée pour créer un élément géométrique continu (fermé ou non) à partir d'un élément non continu. Sans ce type d'opération, il n'est pas possible de définir une intersection entre un élément non idéal et un élément idéal (cette intersection pourrait être vide).

**Réduction** [ISO 17450-1:2011] [Cha 14] : Cette opération est utilisée pour établir un élément dérivé d'un élément géométrique par une méthode de calcul (dérivation/réduction de l'axe d'un cylindre).

D'autres opérations ont été ajoutées afin d'identifier des valeurs de caractéristiques (**évaluation**) ou de représenter les variations de caractéristiques locales évoluant le long de l'élément géométrique considéré (**transformation**) [ISO 17450-1:2011].

## 3. L'évolution de la recherche en tolérancement

L'intérêt de la communauté scientifique pour le tolérancement s'est accru à la fin des années 80. En 1988, l'ASME (American Society of Mechanical Engineering) et la NSF (National Science Foundation) ont organisé un premier séminaire sur le tolérancement qui a réuni un groupe international d'experts pour discuter de l'état de l'art et identifier les

opportunités de recherche [CP 91]. En 1989, R.D. Weill a organisé le premier séminaire du CIRP (Collège International pour la Recherche en Productique) sur le thème du tolérancement ouvrant ainsi la voie à 13 séminaires et conférences CIRP CAT durant ces 25 dernières années [RAM+14]. Les séminaires et conférences du CIRP et de l'ASME (DETC/CIE) ont permis l'échange et la diffusion des travaux de recherche sur le tolérancement.

La recherche en tolérancement couvre les thèmes suivants [HC 02] [MB 07] [VM 10] [Dan 14] [RAM+14] [AFM 15] :

**La spécification des tolérances** (Tolerance Specification) : l'objectif de cette activité est de définir des modèles génériques de produit intégrant les défauts et la variabilité géométriques, dans le but d'exprimer les limites acceptables des variations des caractéristiques géométriques durant le cycle de développement des produits. Cette activité est souvent réalisée en conformité avec les normes en vigueur et couvre les domaines de la spécification géométrique des fonctions des pièces et des assemblages ainsi que la détermination des spécifications de fabrication à partir des spécifications fonctionnelles des pièces.

**La modélisation des tolérances** (Tolerance Modeling) : le but de cette activité est de définir et de représenter les tolérances, les écarts géométriques et la variabilité géométrique à la base de modèles mathématiques ou numériques.

**La simulation des tolérances** (Tolerance Simulation) : cette activité couvre les modèles et les méthodes de calcul, d'optimisation et de transfert des tolérances pour l'étude des comportements géométriques des assemblages et des processus de fabrication. Deux types de problèmes sont souvent considérés ici : l'analyse des tolérances qui consiste à évaluer les effets et les conséquences des tolérances sur les conditions fonctionnelles et l'assemblabilité, et la synthèse des tolérances qui, à l'inverse de l'analyse des tolérances, vise à allouer et à optimiser les tolérances à partir des données quantitatives des conditions fonctionnelles en termes de qualité, de robustesse et de coût.

**La vérification des tolérances** (Tolerance Verification) : cette activité à caractère métrologique couvre les aspects liés aux choix des moyens matériel de mesure, la définition des processus de mesure, les traitements numériques et algorithmiques, et l'évaluation des incertitudes de mesure en vue d'établir la conformité des produits vis-à-vis des spécifications.

Parmi ces thèmes de recherche, la modélisation et la simulation des tolérances, à travers l'analyse des tolérances, ont été les plus investiguées.

Plusieurs articles de référence ont dressé un état de l'art sur l'analyse des tolérances [HC 02a] [SAS+05] [ASG 11] [Pol 12] [BYW+13] [YLZ 13]. Les travaux qui ont été reportés ont couvert différents aspects comme la dimensionnalité du problème (1D ou 3D), les méthodes de calcul au pire des cas ou statistiques, les techniques d'accumulation et de déplacement/propagation, les modèles pour la représentation des écarts, tolérances et interfaces (modèles paramétriques, modèles vectoriels, torseurs de petits déplacements, méthodes des domaines et polytopes, méthode des T-Map), les solutions à base de modèles mathématiques ou par simulation, l'intégration dans les modeleurs géométriques et les systèmes CAO, ainsi que le développement de systèmes CAT (Computer-Aided Tolerancing).

Les modèles utilisés pour la représentation des tolérances ont évolué depuis les modèles à offset de Requicha [Req 83]. Les petits déplacements des surfaces à l'intérieur des zones de tolérance et aux interfaces entre pièces ont abouti à une représentation des pièces par surfaces de substitution. Les surfaces de substitution permettent de considérer les dimensions et les tolérances d'orientation et de position tout en respectant les normes ISO GPS. Cependant, les tolérances de forme sont souvent négligées ou simplifiées.

## 4. Synthèse

La spécification géométrique des produits vise à maitriser la variabilité géométrique depuis la conception préliminaire jusqu'à la fabrication et le contrôle métrologique afin de garantir la fonctionnalité et la conformité des produits manufacturés. Le cadre normatif ISO GPS donne à la spécification géométrique des produits les fondements conceptuels et la dimension du cycle de vie du produit. La recherche en spécification géométrique des produits englobe les activités de recherche en tolérancement et bénéficie des travaux de la communauté scientifique qui a contribué au développement de GeoSpelling et du Skin Model.

Le caractère non-idéal et réel des surfaces qui est un thème central de la spécification géométrique des produits n'est pas intégré dans les approches actuelles en modélisation et simulation des tolérances. GeoSpelling présente un ensemble de concepts et un langage pour lever les ambiguïtés de spécification et vérifications géométriques des produits tout en explicitant le symbolisme graphique ou langage graphique GD&T de tolérancement. Ce langage est souvent considéré comme un ensemble d'annotations pour l'enrichissement sémantique de la maquette numérique [QRP+12] [FJF 13]. Cependant, l'écriture, l'interprétation et la vérification sémantique et syntaxique relèvent de l'expertise humaine. La représentation sémantique du symbolisme GD&T est une étape importante pour l'élaboration

d’un système d’aide à la spécification géométrique des produits. Les différentes parties de ce système peuvent être liées à des formalismes logiques d’aide au raisonnement à travers des ontologies [SRR 14] ou des théories issus de l’informatique théorique comme la théorie des catégories [XXJ+10] [QSJ+14].

L’opérationnalisation de GeoSpelling et du Skin Model ouvrent de nouvelles voies de recherche pour la maitrise de la variabilité géométrique des produits manufacturés et de nouveaux fondements géométriques pour le tolérancement. C’est dans ce cadre que nous avons développé notre programme de recherche autour de la formalisation des concepts fondamentaux de GeoSpelling à travers la conceptualisation et la représentation du Skin Model par des considérations mathématiques et géométriques à base de l’ingénierie des formes.

## III. Conceptualisation du Skin Model

Les prémices du concept de surface réelle ou forme réelle de pièce datent des travaux de Requicha sur les théories du tolérancement géométrique [Req 83]. Requicha définit une spécification de tolérance comme une instance d'une classe variationnelle représentant un ensemble d'objets interchangeables et fonctionnellement équivalents. La sémantique de la spécification est décrite par un ensemble de règles mathématiques correspondant à une procédure "théorique" ou virtuelle de contrôle métrologique. Cette démarche d'expérience de pensée (Gedankenexperiment) a été décrite par Srinivasan comme une avancée théorique majeure et la première formalisation pour la définition de la sémantique des langages pour le GPS [Sri 01].

Les travaux de Ballu et Mathieu s'inscrivent dans cette même logique conceptuelle. Mais vont au-delà à travers la proposition du concept de Skin Model (ou modèle de peau de la pièce) comme élément central du langage GeoSpelling. Ces travaux ont été adoptés par l'ISO TC 213 pour définir les concepts généraux du GPS.

Le Skin Model désigne l'interface, ou la peau de la pièce qui sépare la matière de la pièce de son environnement. Ce Skin Model véhicule l'idée que se fait le concepteur lorsqu'il imagine l'ensemble des défauts possibles à partir de la géométrie nominale. Ce modèle de surface de géométrie non idéale, qui ne peut être qu'imaginé, n'est pas unique et peut prendre une infinité de formes et de représentations. Il est également considéré comme une surface continue constituée d'un nombre infini de points [ISO 22432 :2011].

Les travaux développés dans le cadre de la thèse de Min Zhang [Zha 11] se sont intéressés à l'opérationnalisation des concepts de GeoSpelling à travers des développements informatiques et numériques dans un environnement numérique de CAO. Nous avons montré un parallèle entre les opérations de GeoSpelling et les travaux développés en géométrie algorithmique et numérique. Le concept de Skin Model a été également étudié à la lumière des travaux sur la représentation des formes, l'étude de leur variabilité et la modélisation des écarts de forme.

A la base de ces travaux initiaux et à travers une étude approfondie à l'interface de la modélisation solide, la modélisation des défauts de forme, la représentation des formes et l'étude de leur variabilité statistique nous avons conceptualisé le Skin Model pour une meilleure compréhension en vue de son opérationnalisation.

Les résultats présentés dans cette partie ont été esquissés dans l'article suivant :

***[A-1] Anwer, N., Ballu, A., Mathieu, L., The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 62(1), 143-146, 2013***

## 1. Le skin model dans le contexte de la modélisation solide

A la lumière des concepts développés pour la modélisation solide, nous nous sommes intéressés aux fondements géométriques et numériques du Skin Model. Nous avons cherché dans un premier temps à vérifier les propriétés de modélisation solide par rapport à notre vision du Skin Model.

### *1.a La modélisation solide*

La modélisation solide couvre l'ensemble de principes mathématiques et informatiques pour la représentation numérique de la forme d'objets rigides tridimensionnels [Req 80] [RV 83]. La modélisation solide a évolué depuis les trente dernières années et a largement contribué aux modeleurs solides de systèmes CAO offrant ainsi des solutions informatiques pour la conception, la manipulation, la visualisation, l'échange et le stockage de pièces et d'assemblages.

Les thématiques principales de la modélisation solide sont les fondements théoriques, les représentations de la géométrie et de la topologie, les algorithmes, les systèmes et les applications. Cependant, elle se distingue des autres domaines de la modélisation géométrique et du traitement numérique de la géométrie en mettant plus l'accent sur la complétude, la fidélité à l'objet physique et l'universalité des représentations et des algorithmes [Sha 02]. Ainsi, dans la modélisation solide, toute représentation doit être non-ambigüe, correspondre à des objets physiques et réels et surtout permettre des requêtes et des traitements géométriques pouvant être appliqués à l'objet physique correspondant.

Les bases théoriques de la modélisation solide ont été établies par Requicha dans les années 80 [Req 80]. A travers l'abstraction de l'objet réel, Requicha a défini trois niveaux d'abstraction ou univers : le premier niveau permet de définir et de de clarifier l'objet à modéliser (univers physique) ; le deuxième niveau permet de formuler mathématiquement l'objet étudié et ses propriétés (univers mathématique) ; le troisième niveau permet de définir des schémas de discrétisation des objets mathématiques (univers de représentation). Un quatrième univers a été proposé par plusieurs auteurs pour traduire l'univers de représentation

en des structures et des éléments de langages informatiques (univers d'implémentation).

Requicha a fourni un ensemble de propriétés de validation d'un modèle solide : (1) la rigidité ou l'invariance par transformation rigide de la géométrie de l'objet ; (2) l'homogénéité dimensionnelle ou la capacité à distinguer l'intérieur, l'extérieur et la surface d'un objet 3D ; (3) la description de la frontière de l'objet doit être déterministe et non ambigüe; (4) la finitude ou l'occupation d'une zone de l'espace ; (5) la fermeture ou la préservation de la validité du modèle : l'application de transformations rigides et d'opérations booléennes à des solides produit des solides ; (6) la description finie ou la capacité de décrire un solide par un ensemble fini d'éléments pour pouvoir le représenter informatiquement.

Les paradigmes introduits par Requicha ont permis de développer les schémas de représentation des solides : la représentation CSG (Constructive Solid Geometry) et la représentation BRep (Boundary Representation) qui ont largement influencé les systèmes CAO ainsi que les représentations cellulaires et à énumérations spatiales. Les critères de ces schémas de représentation ont également été formalisés en termes de domaine, validité, non ambiguïté, unicité, concision, applicabilité, et facilité de mise en œuvre.

La modélisation solide repose sur la théorie des ensembles réguliers (r-sets) de l'espace Euclidien $E^3$ qui définit un objet solide comme un sous ensemble borné, fermé, régulier et semi-analytique de l'espace Euclidien $E^3$. Cette modélisation présente des limites car elle suppose que la frontière du solide est suffisamment dense en points pour permettre des opérations topologiques "exactes" ce qui n'est pas réaliste car la modélisation, l'échange et la traduction des modèles géométriques impliquent des approximations et des imprécisions numériques [EL02] [QS06]. Plusieurs travaux ont permis de nouvelles approches pour le calcul géométrique non exact en géométrie algorithmique et numérique. Guibas et al. [GSS 89] ont introduit la "géométrie des epsilons" ou ε-geometry qui permet de caractériser un point par un disque de rayon ε. D'autres travaux ont considéré des intervalles de tolérances autour des coordonnées du point considéré [OJ 05] ou dans un sens plus large des régions convexes autour du point considéré comme les λ–geometry [DMS+ 15]. A la base des travaux de Guibas, Qi et Shapiro ont développé le concept de ε-solidity pour généraliser les théories classiques de la modélisation solide [QS 06]. D'autres travaux se sont intéressés à la calculabilité en modélisation solide en développant de nouveaux espaces topologiques comme le domaine solide [EL 02] ou au développement de modèles sémantiques [QSS06]. De nouveaux travaux présentés récemment par Hoffmann, Shapiro et Srinivasan [HSS 14] sur l'interopérabilité géométrique suggèrent le développement d'un modèle intermédiaire de référence (proxy) et un ensemble de requêtes (query) intégrant les précisions numériques.

### *1.b La description du Skin Model*

Le Skin Model ne peut pas avoir une description finie. La considération de tous les types de variations et défauts géométriques qu'ils soient de position ou d'orientation, de forme ou d'états de surfaces et textures impose un nombre important voire infini de paramètres de description. Dans le cas contraire, le Skin Model serait dégradé et ne capturerait pas toute la variabilité géométrique au niveau conceptuel.

A partir de ces constats, le Skin Model ne peut pas être représenté informatiquement ou par n'importe quel autre support ou média. Cependant, pour des besoins d'applications, il est possible de définir des instances ou des représentations de Skin Model. La visualisation de pièces avec défauts, la simulation d'assemblage ou l'analyse de tolérances seraient des domaines d'utilisation d'instances de Skin Model pour une meilleure considération des défauts géométriques.

### *1.c La représentation du Skin Model*

Le Skin Model est considéré comme une surface continue constituée d'un nombre infini de points [ISO 22432 :2011]. Cependant les défauts géométriques à intégrer sont à différentes échelles d'observation. Il faudrait considérer aussi bien l'échelle de la macro géométrie que l'échelle de la micro géométrie. Le choix entre un modèle discret ou continu pour représenter des systèmes et des phénomènes physiques et le niveau d'information souhaité ne peut ignorer l'échelle d'observation [Les 07].

Le Skin Model peut être décrit à l'échelle microscopique par un grand nombre d'éléments distincts en considérant la structure discrète du matériau constitué de molécules et d'atomes. Le trop grand nombre d'éléments et les degrés de liberté associés à cette description discrète, ne permettent pas d'appréhender le Skin Model sans considérer les complexités calculatoires ou numériques associées et la difficulté de passage à l'échelle macroscopique. Même si le paradigme d'approximation de milieu continu, les procédures d'homogénéisation, ou le passage d'un comportement individuel aléatoire à des descriptions globales continues permettent de mieux appréhender l'échelle macroscopique par une description continue, la réduction du modèle continu en un modèle discret s'impose dans un cadre d'implémentation pour la simulation et les traitements numériques.

Pour avoir une vision holistique de la variabilité géométrique à travers le Skin Model, il faudrait le décrire par un modèle emboité à différentes échelles et de différentes natures

intégrant aussi bien le discret et le continu que le déterministe et l'aléatoire. La géométrie fractale qui est une représentation hybride du discret et du continu est une piste à ne pas négliger [SW 97].

Les modèles continus sont très utilisés en conception et les formalismes mathématiques sous-jacents sont bien adaptés à travers les modèles de courbes et de surfaces paramétriques et les courbes et surfaces associées à des classes d'invariances (groupe de déplacement de corps rigides) à forte sémantique. Pour une analyse qualitative du Skin Model, un modèle continu est le plus adapté dans la mesure où il permet une expression plus simple des spécifications géométriques.

Une représentation discrète quant à elle permet de mieux appréhender la forme réelle de pièces par la mesure ou la simulation et à différentes échelles. D'autant plus que cette représentation est facilement associée aux traitements numériques de la géométrie. Pour une analyse quantitative et la représentation numérique du Skin Model, un modèle discret est le plus adéquat.

### *1.d La classification du Skin Model*

D'un point de vue formel, une surface est une variété topologique de dimension 2 de $R^3$ (2-manifold) ce qui correspond à la notion intuitive qu'en tout point de la surface il existe un petit voisinage qui "ressemble" à une région plane. La notion de variété (manifold) est un concept issu de la topologie pour définir des objets équivalents aux notions intuitives de courbes et de surfaces et munis de métriques pour effectuer des calculs différentiels et tensoriels. Dans notre vision du Skin Model, cette surface doit être fermée, bornée, connexe et orientable. Ces propriétés sont également des propriétés topologiques permettant de donner un cadre théorique à la classification et au maillage (triangulations) du Skin Model.

D'un point de vue topologique, le Skin Model est une surface compacte et orientable. Toutefois, il a la propriété d'être non unique et ayant une description infinie permettant ainsi de tenir compte de tous les défauts géométriques imaginés par le concepteur et à différentes échelles (micro et macro). Pour réduire le nombre d'instances ou de représentant de Skin Model, la classification ou la catégorisation est une approche permettant de mesurer les similarités entre des instances de Skin Model et surtout de trouver des éléments communs pour établir des classes de Skin Model.

Le théorème de classification des surfaces stipule que toute surface compacte et orientable est homéomorphe à une sphère, à un tore ou à la somme connexe de plusieurs tores. Le Skin Model est ainsi homéomorphe à une sphère ou à un ensemble fini d'union de tores. La similarité et la classification de Skin Model peut être basée uniquement sur le genre topologique (ou le nombre de trous).

Une autre propriété topologique importante des variétés topologique de dimension 2 est leur description combinatoire par des points, arêtes et triangles. Il a été ainsi prouvé que toute surface est triangulable et donc remplie à l'aide de triangles disjoints [GX13]. Dans une représentation discrète, le Skin Model pourrait être décrit par un assemblage de triangles.

D'autres approches de classification des surfaces peuvent être appliquées au Skin Model. La connaissance de la géométrie nominale et des surfaces idéales permet de décrire le Skin Model par un ensemble d'invariants de transformation ou déplacement rigide. Cette description n'est pas globale mais permet à l'échelle de la surface nominale de catégoriser les surfaces en fonction de leur invariance. Le groupe de transformation rigide appliqué aux surfaces distingue 7 classes d'invariances [CRS+97] [Her 99][Sri 99].

La géométrie différentielle apporte également des éléments pour la classification locale des surfaces. Les courbures principales caractérisent la forme locale des surfaces à l'ordre 2. Les courbures principales d'une surface en un point sont les valeurs minimale et maximale des courbures normales en ce point obtenues en faisant l'intersection du plan perpendiculaire au plan normal à la surface et passant par le point considéré avec la surface. Les signes des courbures Gaussiennes et Moyennes permettent de distinguer localement les formes [BJ86]. Un autre paramètre appelé indice de forme (Shape index) permet de distinguer 9 formes locales non planaires de surfaces [KD92].

### *1.e Synthèse*

Dans l'objectif de formaliser le concept de Skin Model, nous nous sommes intéressés aux fondements du Skin Model. A partir des travaux de Ballu et Mathieu pour la proposition du Skin Model et son adoption par l'ISO TC 213 comme base conceptuelle et langage pour le GPS, nous avons établi les limites de la conceptualisation du Skin Model. La modélisation solide qui est à la base des modeleurs géométriques en CAO est un cadre naturel pour vérifier les propriétés de description et de représentation du Skin Model. Il s'avère que les aspects de non unicité et d'infinité de description caractérisent le Skin Model et ne permettent pas sa représentation informatique. Les différentes échelles d'observation du Skin Model pour

considérer les niveaux macro et micro géométriques sont également des contraintes pour l'opérationnalisation et le traitement numérique du Skin Model et sont liés au modèle continu sous-jacent.

Une représentation discrète ou une discrétisation du Skin Model s'impose. Un autre point de vue fondamental issu des théories de la géométrie et de la topologie des variétés nous a orienté à poursuivre la piste de la représentation discrète par triangulation du Skin Model.

## 2. Le Skin Model et les défauts de forme

### *2.a Caractérisation des défauts de forme*

La caractérisation des défauts géométriques des surfaces repose sur une décomposition en composantes élémentaires répondant à des exigences fonctionnelles. Ces composantes sont caractérisées par différentes formes et échelles de dimensions (macro et micro) ainsi que des distributions spatiales distinctes. Ces défauts géométriques ont pour sources les traces et les irrégularités d'enlèvement de matière et les vibrations de la pièce lors de l'interaction entre l'outil et la pièce lors de l'usinage, les défauts des guidages des axes de machines et des rotations de broche ainsi que les dilatations thermiques. La combinaison de ces différents phénomènes résulte en une topographie complexe des surfaces. La topographie de la surface peut-être ainsi représentée comme la superposition de différentes structures géométriques à différentes échelles.

La forme, ou les écarts de forme, intervient à l'échelle macro-géométrique. Elle fait partie des trois principales sources de variabilité dans les assemblages : dimensions et ajustements, forme, contact et mouvement relatif entre les pièces. La variabilité de la forme a une faible magnitude par rapport aux variations dimensionnelles. Cependant le cumul et la propagation de cette variabilité peut avoir un effet considérable sur l'assemblabilité et le fonctionnement des assemblages.

La rugosité, ou les structures géométriques les plus fines de la surface, caractérisent l'échelle micro-géométrique. A l'interface entre ces deux échelles, se manifeste l'ondulation, ou la composante périodique à l'échelle méso-géométrique.

Il devient ainsi difficile de caractériser les écarts de forme. Les normes actuelles ne permettent pas de définir des frontières ou des limites claires entre la forme (échelle macro-géométrique), l'ondulation (à la frontière des échelles macro-géométrique et micro-

géométrique, appelée aussi échelle méso-géométrique) et la rugosité (échelle micro-géométrique).

En se plaçant dans le domaine fréquentiel, il est possible de séparer la forme de l'ondulation et de la rugosité. La norme ISO 4287 définit des longueurs d'onde pour effectuer ces séparations [ISO4287:1997]. Les écarts de forme sont alors caractérisés par de faibles fréquences ou grandes longueurs d'onde correspondant aux premières harmoniques. Il est à noter aussi le caractère global de cette modélisation vu qu'on s'intéresse à la surface dans sa globalité (échelle macro-géométrique).

Les normes VDI/VDE 2601 [VDI/VDE 2601] proposent également une classification géométrique adimensionnelle basée sur le rapport entre une caractéristique dimensionnelle de l'étendue et une caractéristique géométrique de l'altitude de ces écarts. Là aussi, la distinction entre les différentes caractéristiques de séparation n'est pas claire [Ges 11].

La séparation des composantes de la topographie des surfaces s'effectue par la mesure. Les défauts de forme sont en général mesurés à l'aide des outils de métrologie dimensionnelle sur toute l'étendue de l'élément considéré alors que les paramètres d'ondulation et de rugosité sont mesurés à l'aide des techniques de métrologie des états de surface dans des zones ou portions de l'élément considéré. S'il est aisé de déterminer les paramètres de la rugosité car les longueurs d'ondes caractéristiques sont connues à travers l'instrument de mesure comme le diamètre d'un palpeur sphérique, la caractérisation de grandes longueurs d'onde ne peut s'appuyer que sur la forme idéale sous-jacente et la détermination des longueurs d'onde intermédiaires (ondulation) se fait à travers la combinaison de courtes longueurs d'onde et de portions de la surface considérée.

Les écarts de forme sont établis à partir de formes élémentaires ou éléments géométriques idéaux : droite, cercle, plan, cylindre, ligne et surface complexes. Les tolérances de forme sont définies à partir de zones de tolérance délimitées par deux courbes ou surfaces parallèles ou offset de l'élément géométrique idéal. Cette zone de tolérance n'est pas contrainte en orientation ou en position. L'évaluation des écarts de forme s'effectue par la méthode de la zone minimum comme défini dans la norme ISO 1101.

### *2.b Modélisation des défauts de forme : approches par décomposition*

Les travaux en modélisation des défauts de forme ont adopté essentiellement des schémas de décomposition ou de séparation développés dans le paragraphe précèdent.

Les premiers travaux ont exploité les modèles issus des théories du traitement de signal. Les techniques fréquentielles ou spectrales sont largement utilisées pour la représentation multi-résolution des surfaces ainsi que pour le filtrage. Le passage entre le domaine spatial et le domaine fréquentiel s'effectue par des inversions de transformations. Les méthodes spectrales comme la transformée en cosinus discrète et la transformée de Fourier discrète utilisent la décomposition d'un signal dans des bases décrites par des fonctions (fonctions de base orthogonales). En s'appuyant sur des géométries simples (rectangulaires, circulaires ou sphériques), les méthodes spectrales ont permis la représentation des défauts de forme par les premiers modes de variation de la décomposition spectrale [HC 02b] [HLC+14]. Pour intégrer les caractéristiques non périodiques et les grandes longueurs d'onde, certains travaux ont combiné des représentations polynomiales (Lagrange, Chebyshev) avec les séries de Fourier pour modéliser les défauts de forme pour les géométries cylindriques [WZ13] [HSB+99].

Les travaux de Samper et al. [SF07] sur la Décomposition Modale Discrète (DMD) sont issus de la dynamique des milieux continus pour la résolution d'un problème de vibration de surface [Sam08]. Les fonctions de base appelées également modes propres (ou naturels) de vibrations sont calculées à partir de la méthode des éléments finis. Les écarts de forme sont exprimés par les amplitudes des premiers modes de la base. La combinaison linéaire de plusieurs modes peut être nécessaire pour constituer une base permettant d'identifier des modes technologiques caractéristiques des procédés d'obtention et réduisant ainsi le nombre de variables nécessaires pour décrire les écarts de forme.

Malgré le succès des méthodes spectrales pour la modélisation des défauts de forme, elles se sont limitées à des géométries simples et ont cherché à établir des correspondances avec des "formes technologiques" [ZZW+05] ou des "signatures de fabrication" [PM 15] sans établir des fonctions de base "technologiques".

Dans un article de référence, Taubin [Tau 95a] a montré que les méthodes spectrales et le formalisme du traitement du signal peuvent être appliqués à des éléments géométriques et Vallet et Levy [Val 08] [VL 08] ont généralisé ces travaux aux variétés topologiques. La difficulté majeure a été de définir un ensemble de fonctions de base orthogonales associées à une géométrie quelconque. Les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami (opérateur Laplacien généralisé sur les variétés) ou harmoniques variétés ont apporté des solutions à ce problème [VL08].

L'opérateur de Laplace-Beltrami (Laplace-Beltrami Operator ou LBO) caractérise la non-linéarité et l'irrégularité d'une fonction. Les lois fondamentales de la physique

impliquent souvent le Laplacien : diffusion de la chaleur, propagation des ondes, … Une propriété importante de l'opérateur de Laplace-Beltrami est qu'il est invariant aux déformations isométriques et est ainsi un opérateur intrinsèque de la surface [WMK+07]. Dans le cas continu, les fonctions propres de LBO peuvent s'appliquer sur n'importe quelle géométrie (ou variété) pour former une base propre d'analyse. Dans le cas général, il n'est pas toujours possible de trouver une solution analytique pour le problème des fonctions propres. Le passage à une version discrète ou la discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un maillage est alors nécessaire pour traiter des cas pratiques en informatique graphique et en simulation numérique [Val 08]. Une première approche de discrétisation exploite le Laplacien combinatoire qui est défini par la connectivité du maillage. Les limitations de cette discrétisation est l'hypothèse de l'uniformité d'échantillonnage de la surface du maillage et la non sensibilité à la géométrie du maillage : différents maillages de la même surface auront des fonctions propres différentes et deux maillages qui ont la même connectivité sur des formes géométriques différente auront les mêmes fonctions propres [Lev06] [RWP06]. Une deuxième approche de discrétisation appelée Laplacien géométrique intègre la géométrie du maillage dans la définition du Laplacien discret. Des poids basés sur les cotangentes des angles opposés à une même arête ont été introduits par Meyer [MDS+03] et améliorés par le couplage à l'aire de la cellule duale de chaque sommet [CLP+12]. La méthode des éléments finis [WMK+ 07] [RWP05] et le calcul extérieur discret [VAL 2008] sont également les approches les plus développées dans la mesure où elles garantissent la convergence et l'indépendance du maillage sous certaines conditions [Xu 04].

Les travaux de Samper et al. [SF07] sur la Décomposition Modale Discrète (DMD) s'apparentent à l'utilisation d'un Laplacien géométrique en dynamique des milieux continus pour la résolution d'un problème de vibration de surface [Sam08].

### *2.c Modélisation des défauts de forme : approches par déformation*

D'autres travaux pour la modélisation des défauts de forme sont à mentionner. Les représentations paramétriques ou implicites des surfaces ont été exploitées pour garantir une base commune avec les techniques de modélisation géométrique et CAO en ingénierie mécanique. L'idée est de réaliser une déformation ou morphing de surfaces pour représenter les défauts de forme. La déformation peut suivre une loi physique (déformation élastique, masses-ressorts, système de particules, …) ou géométrique. Le morphing consiste à prédéfinir un ensemble de formes de bases (espace de forme). Une déformation est alors définie comme

une interpolation dans cet espace de forme.

La modélisation à base de B-Splines ou NURBS est facile à mettre en place. Cependant, elle ne permet pas de résoudre efficacement la représentation de formes déformées surtout s'il s'agit d'assembler un ensemble de carreaux de surfaces avec des conditions géométriques explicites de raccords et de connectivités même s'il est possible d'avoir un contrôle local de la forme à travers les points de contrôle. La représentation par surfaces implicites est une bonne alternative pour la modélisation des formes déformées. Cependant, le choix du modèle implicite n'est pas évident et très peu de systèmes CAO exploitent directement des représentations implicites. Un autre problème majeur est l'identification des voisins à un point de la surface implicite.

Les représentations paramétriques à base de maillages triangulaires ou par la triangulation des surfaces présentent plusieurs avantages. Il s'agit de la forme la plus simple pour représenter toute surface et de modéliser les variétés topologiques. Il est également possible de représenter les détails les plus fins de la surface en adaptant l'échantillonnage. L'inconvénient majeur est que la surface discrétisée n'est pas lisse. Elle est continue et présente des arêtes vives. Le maillage triangulaire permet de reconstruire la topologie sous-jacente et il est également possible d'estimer des normales et des courbures discrètes sur des maillages triangulaires. De nombreuses structures de données et plusieurs formats supportent les représentations triangulaires permettant ainsi de représenter des solides B-Rep.

Les travaux en traitement numérique des maillages triangulaires ont souligné l'adéquation de ces représentations pour la déformation et le morphing à travers des méthodes géométriques ou physiques pour la déformation locale ou globale du maillage. Plusieurs techniques de déformation ont été reportées dans la littérature [BS 08] [MDA 01]. Parmi les approches les plus populaires en informatique graphique, on peut mentionner les déformations de formes libres (Free-Form Deformations ou FFD) [GB08] [Raf13] qui sont exploitées par la plupart des logiciels graphiques. Ces techniques nécessitent néanmoins une forte interaction avec l'utilisateur et ne permettent pas d'imposer des contraintes géométriques comme l'appartenance à une zone surfacique ou volumique. D'autres techniques définissent des fonctions de déplacements des points du maillage à partir d'un champ de vecteurs sur le maillage [XZ09] et font intervenir la discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Les modèles de déformations obtenus correspondent en général à des fonctionnelles de minimisation d'énergie permettant de conserver des détails de maillage [SCL+ 04], de préserver la rigidité [SA 07] et d'intégrer les propriétés de matériau [PJS 06]. Ainsi différentes méthodes ont été utilisées pour la déformation de maillages come les méthodes

des éléments Finis [BJ05] en théorie de l'élasticité, les méthodes variationnelles [BS08], les méthodes spectrales [DRW12], et les méthodes à base des normes Lp [GZL12].

Les modèles de déformation de maillages ont largement influencé les travaux en tolérancement de pièces non rigides. La prise en compte des défauts géométriques dans les pièces et les liaisons et la propagation de ces défauts dans les gammes d'assemblage et pour l'analyse des tolérances ont exploité les techniques de déformation de formes libres [FGP 11] ou de déplacements des points du maillage à partir de méthodes d'éléments finis [LH 97] [CS 97] [Mer 98]. Merkley [Mer 98] a démontré la nécessité de corréler, à travers des covariances, les déplacements de points à ceux des points voisins de manière à ce que les défauts géométriques générés soient réalistes. Il a ainsi introduit la covariance géométrique pour décrire la corrélation entre les déplacements d'un point et ceux de ses points voisins assurant une continuité géométrique, alors que la covariance matériau décrit l'interdépendance entre les points du maillage de la pièce résultant de la nature du matériau (couplage des déplacements des nœuds de maillage à travers la matrice de rigidité) [Bih 99].

### *2.d Modélisation des défauts de forme : approches statistiques*

Les travaux présentés ci-dessus se sont intéressés à établir des modèles déterministes pour la modélisation des défauts géométriques de forme. Ces modèles sont par leur nature limités car ils ne peuvent pas intégrer tous les phénomènes physiques et tous les paramètres de description des défauts géométriques qu'ils soient liés à la connaissance des procédés de fabrication et de mesurage ou issus de l'acquisition par la mesure de la forme réelle des pièces.

Même s'il est possible d'améliorer ces modèles en introduisant des aspects stochastiques ou aléatoires dans les formulations mathématiques, les modèles obtenus ne permettront qu'une simple amélioration de la prédiction des défauts de forme.

L'analyse de la forme mesurée de la peau d'une pièce permet de caractériser les écarts géométriques par rapport à une représentation nominale. Les résidus de l'association à un modèle mathématique ou la variabilité géométrique observée sur un ensemble de formes mises en correspondance caractérisent également des éléments quantitatifs pour l'analyse des écarts géométriques. Les méthodes et modèles issus des statistiques sont parfaitement adaptés à ces analyses. Ils ont été largement exploités pour le développement de modèles de reconstruction par régression pouvant également servir comme modèles de prédiction, la caractérisation des signatures de fabrication, la réduction de la dimensionnalité ou l'analyse

statistique des formes.

Dans les modèles statistiques de défauts de forme, il est très important d'identifier les caractères systématiques et aléatoires des écarts géométriques observés [YM 95] [HSB+99] [DFY 03]. Les écarts de natures systématiques (écarts systématiques) sont de nature déterministe, prédictible et reproductible correspondant à un biais. Les écarts de natures aléatoires (écarts aléatoires) correspondent à des variations sans caractéristiques "connaissables".

Les modèles d'écarts systématiques considérés dans les modèles statistiques de forme peuvent s'appuyer sur les modèles déterministes présentés précédemment et ne seront pas abordés par la suite. Dans un cadre purement statistique, l'aspect déterministe peut être modélisé à l'aide des statistiques spatiales [YJ 00]. Les modèles de processus Gaussiens [DGT+97] [XDW08] et les méthodes de Krigeage [YJ 00] ont ainsi été exploités pour représenter les erreurs systématiques en fabrication et en mesure.

Les modèles d'écarts aléatoires pour les modèles statistiques de forme s'appuient sur des modèles "à priori" ou de prédiction à partir d'hypothèses statistiques sur des variables aléatoires explicatives. Les techniques de régression ou d'association sont bien adaptées à ces approches et peuvent tenir compte des corrélations entre les variables. Dans le cas le plus simple, les modèles de régression linéaire par critère de moindre carré orthogonal font l'hypothèse d'écarts aléatoires indépendants et identiquement distribués (i.i.d ou homoscédasticité). Des modèles plus complexes à base de signature de fabrication se veulent plus proches du réel. La considération des défauts des procédés de fabrication et des caractéristiques de la mesure (échantillonnage, incertitudes de mesure) induisent des modèles d'auto-régression spatiale (SARX) comme ceux développés par Colosimo et al. [CPS 08] [CMP 10] pour les défauts de circularité et de cylindricité en tournage.

D'autres techniques pour l'analyse de la variabilité exploitent un ensemble de données de mesures qu'il est possible de transformer en un ensemble réduit (réduction de la dimensionnalité) d'éléments indépendants. Ces transformations conservent des propriétés importantes des données initiales et n'altèrent pas la variabilité. Parmi ces techniques, figurent l'Analyse en Composantes Principales (ACP) [Pea 01] [Hot 33a] [Hot 33b], les méthodes non linéaires issues de la géométrie différentielle [TSL 00], les méthodes à base de Laplacien [BN 02] ou les méthodes ACP à noyau (Kernel PCA) [SSM 98].

Colosimo et Pacella [CP 07] ont montré les avantages de l'ACP par rapport aux méthodes de régression dans le cadre de la modélisation des défauts de formes sans avoir

recours à un modèle analytique à priori. L'ACP a également trouvé un champ d'utilisation important dans le domaine de l'assemblage de pièces non rigides. Hu et al. [HW 92] ont utilisé l'ACP pour identifier les sources de variations dimensionnelles pour l'assemblage de pièces de carrosserie. Camelio et al. [CHM 04] ont combiné l'ACP avec la méthode des éléments finis pour l'estimation de la contribution des pièces non rigides dans l'analyse des variations des assemblages. L'ACP a été ainsi exploitée pour extraire des motifs de déformation à partir de données de mesure en production. Pour capturer des aspects de corrélation et de continuité dans la description des écarts géométriques de pièces non rigides, Matuszyk et al. [MCR 10] ont proposé un modèle statistique de formes intégrant la variabilité des formes par la réduction de la dimensionnalité d'un ensemble de données multivariées. Les travaux de l'équipe de R. Söderberg à l'université de Chalmers ont exploité l'ACP pour représenter les données en simulation des variations d'assemblages non rigides [LLA+13]. Ils ont également démontré que les techniques à base de l'ACP permettent de réduire considérablement les temps de simulation [LWL+14].

### *2.e Synthèse*

La modélisation des défauts de forme est à la base de l'opérationnalisation du Skin Model. Les travaux de recherche sur la caractérisation et la modélisation des défauts et des écarts de forme font ressortir aussi bien les aspects déterministes que les aspects aléatoires des modèles développés et deux approches ont influencé ces travaux. Les approches à base de décomposition issues du traitement de signal illustrent le rôle central de l'opérateur de Laplace-Beltrami, sur les variétés, à définir des modes géométriques. Les statistiques sur les variétés à travers l'analyse statistique des formes permettent aussi une décomposition de la forme et l'identification des modes de variabilité à partir d'une population de formes simulées ou mesurées. Les approches à base de déformation reposent sur des modèles géométriques ou physiques permettant de définir la direction et la magnitude des écarts géométriques tout en tenant compte des contraintes géométriques de voisinage et des corrélations de nature stochastiques. Les représentations à base de maillages triangulaires et les représentations à base de points sont parfaitement adaptées aux approches décrites précédemment et permettent également de considérer le caractère global et local de la modélisation des défauts de forme.

## 3. Le Skin Model et l'analyse statistique des formes

### *3.a L'analyse statistique des formes*

L'analyse statistique des formes (Statistical Shape Analysis) s'est développée dans les années 80 grâce aux travaux de Kendall [Ken 84] et Bookstein [Boo 86]. Le concept de forme au sens de Kendall correspond à un ensemble d'informations géométriques invariant par toute transformation du groupe des similitudes (rotation, translation et changement d'échelle) dans l'espace Euclidien. Cette définition s'inscrit bien dans le cadre de la géométrie au sens de Klein [Kle 93] (invariance de transformation dans un espace) et enrichit la géométrie par une analyse statistique sur un "espace des formes". Ce nouveau cadre géométrique et statistique a permis de nouvelles représentations des formes et l'étude de leurs variations statistiques à partir d'une population de formes. En dehors de considérations purement théoriques comme le développement du calcul statistique sur les variétés Riemanniennes (variétés possédant une métrique), l'analyse statistique des formes a trouvé des applications importantes dans les domaines de la biologie et du diagnostic médical ainsi qu'en analyse d'images et vision par ordinateur.

L'étude de la variabilité des formes met en exergue la grande dimensionnalité et la non linéarité des variables de modélisation dans l'espace des formes. Si les approches de réduction de dimensionnalité sont particulièrement adaptées ici comme les analyses en composantes principales, le caractère de non linéarité est une limite pour toute analyse statistique. Des solutions ont été apportées par la géométrie différentielle et les propriétés Euclidiennes des espaces tangents aux espaces de formes.

En vue d'exploiter l'analyse statistique des formes à partir de données mesurables, il est important de définir un cadre de traitement numérique adapté. La forme est ainsi réduite à un ensemble fini de points appelés points caractéristiques de la forme [DM 98]. Ces points permettent la mise en correspondance de l'ensemble de formes appartenant à une même population. Une étape de "référencement" est souvent nécessaire pour éliminer les transformations géométriques de rotation, translation et éventuels changement d'échelle ou déformations entre les formes tout en minimisant les distances entre les points caractéristiques. Les techniques de recalage, de superposition Procustéenne ou à base de projection dans les espaces tangents figurent parmi les approches les plus utilisées pour la mise en correspondance [DM 98]. Une fois les formes mises en correspondance, l'analyse statistique peut être effectuée à l'aide d'un modèle statistique des formes.

Le modèle de distribution de points (Point Distribution Model ou PDM) introduit par Cootes et al. [COO 92] [CT 01] est à la base des modèles statistiques des formes et a inspiré les Modèles de Formes Actifs (ASM) [CTC 95] et les Modèles d'Apparence Actifs (AAM) [CET 98] intégrant la texture. Ce modèle permet de décrire une forme comme la combinaison linéaire d'une forme moyenne et de formes principales qui correspondent aux principaux modes de variation dans l'espace des formes. Une analyse en composantes principales permet l'extraction des modes principaux de variation. Chaque forme peut ainsi s'écrire comme la somme de la forme moyenne et d'une combinaison linéaire pondérée de vecteurs propres de l'espace de formes. Les coefficients ou poids associés à chaque forme (coordonnées dans la base de vecteurs propres) correspondent à des paramètres de forme et peuvent être utilisés à des fins de prédiction ou de classification.

La combinaison du modèle PDM et de l'estimation par noyau (KDE-PDM) a permis d'améliorer le modèle PDM original en s'affranchissant de l'hypothèse de distribution Gaussienne multivariée des paramètres de forme [CT 99]. Les limites de linéarité dans les modèles PDM ont également été soulevées et de nouvelles techniques d'ACP non linéaires ou à noyau ont été utilisées en analyse statistique des formes [RGP 99] [SSM 98]. Cependant, les modes de variation qui découlent de ces analyses ne sont pas nécessairement interprétables en des phénomènes explicatifs de la nature ou de l'origine de la variabilité.

### *3.b Applications*

Les modèles géométriques et statistiques des formes ont contribué à de nouveaux développements théoriques et numériques pour l'étude de la variabilité des formes biologiques et anatomiques, en traitement de l'image et en vision par ordinateur. A l'inverse, dans le domaine de l'ingénierie mécanique très peu de travaux sont à mentionner.

Del Castillo et al. [DC11] [Del11] ont développé de nouvelles techniques statistiques pour l'étude de la variabilité des écarts de forme de circularité en usinage d'alliages de Titane. L'originalité de leur approche est de considérer les formes géométriques des profils mesurés, sur MMT, comme réponse de plans d'expériences. Une analyse de la variance des formes a été développée à partir de l'analyse statistique des profils mesurés. La mise en correspondance des points caractéristiques a été effectuée à l'aide d'un algorithme de superposition Procustéenne généralisée et l'analyse en composantes principales a été réalisée dans l'espace tangent.

Matuszyk et al. [MCR 10] ont combiné le modèle PDM et l'estimation par noyau (KDE-PDM) pour développer une représentation statistique multivariée des formes de pièces non rigides. Le modèle élaboré a permis de représenter des distributions non normales et de capturer des modes de variation corrélés caractérisant ainsi avec précision la covariance géométrique des pièces et des assemblages. Lindau et al. [LLA+13] mentionnent dans leurs travaux l'analyse statistique des formes qu'ils réduisent uniquement en analyse en composantes principales pour représenter les données en simulation des variations d'assemblages non rigides.

L'analyse statistique des formes permet de capturer et de dériver des informations à partir d'une population de formes. Dans le contexte du Skin Model, la capitalisation de l'ensemble des informations relatives à la forme que ce soit par prédiction, simulation ou par mesurage est un moyen d'enrichir notre connaissance sur le Skin Model et surtout la possibilité d'établir un modèle de Skin Model qui reflète le modèle moyen de référence dans le cadre du raisonnement humain [Ros 77].

# IV. Skin Model Shapes : Représentation et Simulation du Skin Model

## 1. Introduction

Nos travaux sur la représentation et la simulation du Skin Model s'inscrivent dans le cadre de la modélisation et de la représentation des défauts de forme. Les travaux de thèse de M. Zhang [Zha 11] ont porté sur le développement de modèles de défauts de forme intégrant les aspects déterministes et aléatoires (écarts systématiques et écarts aléatoires) et tenant compte des caractéristiques locales et globales des surfaces. Une procédure de génération d'instances géométriques et numériques de Skin Model a été développée à partir du modèle nominal de CAO. Après une discrétisation des surfaces en maillages triangulaires, les points de maillages sont décalés par l'addition des écarts systématiques et aléatoires et contraints dans la zone de tolérance considérée. Des techniques de visualisation de champs d'écarts ont été mises en œuvre afin de permettre une représentation visuelle des défauts de forme. Ces travaux se sont également intéressés à l'analyse statistique des formes appliquée au Skin Model à travers le modèle de distribution de points et l'analyse en composantes principales.

Dans la continuité des travaux de M. Zhang, les travaux de master et de thèse de B. Schleich [Sch 12] ont contribué au développement d'une vision globale pour la modélisation de la variabilité géométrique (à base de modèle de défauts de forme) et la simulation du Skin Model. Ainsi, deux stades de simulation d'instances de Skin Model, appelés par la suite Skin Model Shapes, ont été considérés : le stade de prédiction et le stade d'observation. Le stade de prédiction correspond à des connaissances et à des modèles "à priori" des écarts géométriques et se situe très tôt dans les phases de conception détaillée. Le stade d'observation se situe dans les phases avancées de conception détaillée et repose sur des résultats de simulation mécanique et géométrique de procédés de fabrication ou des données de mesurage de pièces prototypes. La variabilité géométrique des résultats de simulation ou de mesurage permet de construire un modèle statistique de Skin Model Shape qui servira également à l'identification de modèle et l'enrichissement de connaissances pour le stade de prédiction.

Cette partie présente le concept de Skin Model Shape comme instance géométrique et numérique du Skin Model et démontre sa pertinence pour :

- la représentation et la visualisation de Skin Model discret à base de maillages triangulaires ;
- la simulation de Skin Model dans les étapes de conception (stade de prédiction et stade d'observation).

## 2. Cadre des travaux

Notre modélisation du Skin Model s'inscrit dans le cadre des approches de représentation à base de maillages triangulaires. Nous avons démontré dans les chapitres précédents la pertinence de cette discrétisation ainsi que la maturité des fondements théoriques et des outils de traitement numérique de la géométrie discrète.

Les propriétés recherchées à travers cette représentation nous ont permis de développer des modèles "du deuxième ordre". En effet, la représentation par maillages triangulaires permet de construire la topologie des surfaces sous-jacentes par une approximation du premier ordre, mais ne permet pas de refléter les courbures principales et l'anisotropie des formes pour traduire les défauts de forme qui sont de nature du deuxième ordre [KA 05]. Nous avons également démontré l'utilité d'intégrer des éléments de la géométrie différentielle à travers l'opérateur de Laplace-Beltrami et les courbures pour synthétiser les formes et les défauts de forme. Il s'agit là de définir un espace de modélisation pouvant traduire et représenter les courbures et se limitant ainsi à une description locale de la forme au niveau de l'élément géométrique point (cette partie est décrite en détail dans le Chapitre 3).

Dans cette logique, la description à base de point et l'association d'un repère de Darboux augmenté [FLW 93] [SFS 03] permet de capturer, localement, l'ensemble des informations géométriques du second ordre à savoir : la normale estimée ; les deux directions principales de courbure ; et les deux courbures principales. En se plaçant dans ce repère, et localement, la forme considérée est décrite par une formulation algébrique du deuxième ordre correspondant à une surface quadrique.

La description des formes à base de surfaces quadriques et leur extension à des surfaces super-quadriques est très populaire en modélisation géométrique par surfaces implicites et dans le domaine de la vision par ordinateur [SB90] [HM95]. Les surfaces quadriques sont très présentes en ingénierie mécanique et illustrent bien les aspects non planaires, courbes et symétriques des formes de base. Il est également possible de décrire des formes complexes comme un assemblage de surfaces quadriques [FHP83] [BM97]. La nature algébrique et polynomiale des surfaces quadriques facilite leur traitement numérique et leur association à

des représentations à base de maillages triangulaires [Pet02] [AS14]. Vu que toute surface d'ordre deux est réductible à une surface quadrique par transformation du groupe des similitudes (rotation, translation et changement d'échelle), nous avons adopté une description polynomiale d'ordre deux pour la représentation "globale" de la forme. Nous avons ainsi un espace homogène (à l'échelle locale et globale) d'ordre deux pour décrire le caractère géométrique du Skin Model. Au niveau de la modélisation statistique, les descriptions d'ordre deux sont représentées par les covariances qu'on retrouve dans l'analyse en composantes principales et pour décrire la corrélation entre les variables aléatoires. Les statistiques d'ordre deux sont également adoptées ici pour le décrire le caractère stochastique du Skin Model.

## 3. Principaux résultats obtenus

L'objectif de cette partie est de présenter les contributions majeures de nos travaux sur les Skin Model Shapes. Les résultats présentés dans cette partie ont été publiés dans les articles suivants :

***[A-1] Anwer, N., Ballu, A., Mathieu, L., The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 62(1), 143-146, 2013***

***[A-2] Zhang, M., Anwer, N., Stockinger, A., Mathieu, L., Wartzack, S., Discrete shape modeling for skin model representation, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part B, Journal of Engineering Manufacture, 227 (5), 672-680, 2013***

***[A-3] Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., Wartzack, S., Skin Model Shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical engineering, Computer-Aided Design, 50, 1-15, 2014***

### *3.a Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade de prédiction : discrétisation du modèle nominal*

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes limités aux spécifications géométriques et aux surfaces planes et cylindriques. Toutefois, les principes développés peuvent s'appliquer à des spécifications dimensionnelles et à tout type des surfaces.

Dans cette étape, nous nous intéressons à échantillonner les surfaces continues de la pièce issues de la CAO et à garantir que le maillage triangulaire des surfaces présente des garanties topologiques et une répartition spatiale conforme au défaut de forme spécifié. La discrétisation est réalisée à l'aide des outils de tessellation des logiciels CAO.

Les techniques de tessellation ont été développées en informatique graphique pour des besoins de visualisation et de rendu réaliste. Elles sont ainsi limitées pour la représentation discrète du Skin Model notamment au niveau de la discrétisation des arêtes de la CAO. Conscients de ces limitations, nous avons laissé des possibilités de modification (ajout et suppression de points) et de remaillage des surfaces considérées. Cependant, de nouveaux développements sont apparus ces dernières années et permettent de générer des maillages offrant une approximation optimale de la surface [ADM+15].

La discrétisation et le maillage obtenus sont stockés dans une représentation permettant de construire un modèle BRep à facettes. La structure de données de demi-arêtes (Half-Edge Data Structure) est exploitée ici car elle permet de représenter toute variété orientable de dimension 2 [Ket99]. Différents formats de stockage et d'échange sont utilisés ici comme le format STL (STereoLithography format ou Standard Tessellation Language) ou le format OFF (Object File Format).

### *3.b Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade de prédiction : déformation de maillage*

La déformation de maillage est une étape importante car elle permet d'intégrer les défauts de forme par l'addition des écarts géométriques systématiques et aléatoires aux points du maillage (points du nominal). Comme présenté précédemment, les écarts géométriques de forme sont modélisés à partir d'une formulation analytique du deuxième ordre.

Les points du maillage sont tout d'abord translatés dans des directions calculées pour correspondre à des points de la surface quadrique cible (écarts systématiques). Nous avons ainsi développé un ensemble de formules analytiques pour déformer des maillages "nominalement" plans ou cylindriques en des maillages "nominalement" quadriques [Zha 11].

Les écarts aléatoires sont ensuite rajoutés aux points obtenus. Ces écarts sont définis comme des variables aléatoires dans des directions calculées. Dans le cas le plus simple, la direction calculée correspond à la normale au point considéré. Le calcul de la normale au point de maillage a été développé dans le cadre de nos travaux (voir chapitre 3). L'approche que nous avons développée estime cette normale comme une combinaison linéaire pondérée des triangles voisins du point considéré. La pondération proposée est robuste à la qualité du maillage triangulaire. La magnitude de l'écart dans la direction de la normale a été modélisée par une distribution Gaussienne. Pour intégrer des corrélations entre la magnitude de l'écart au point et les magnitudes des points voisins, nous avons utilisé des champs aléatoires

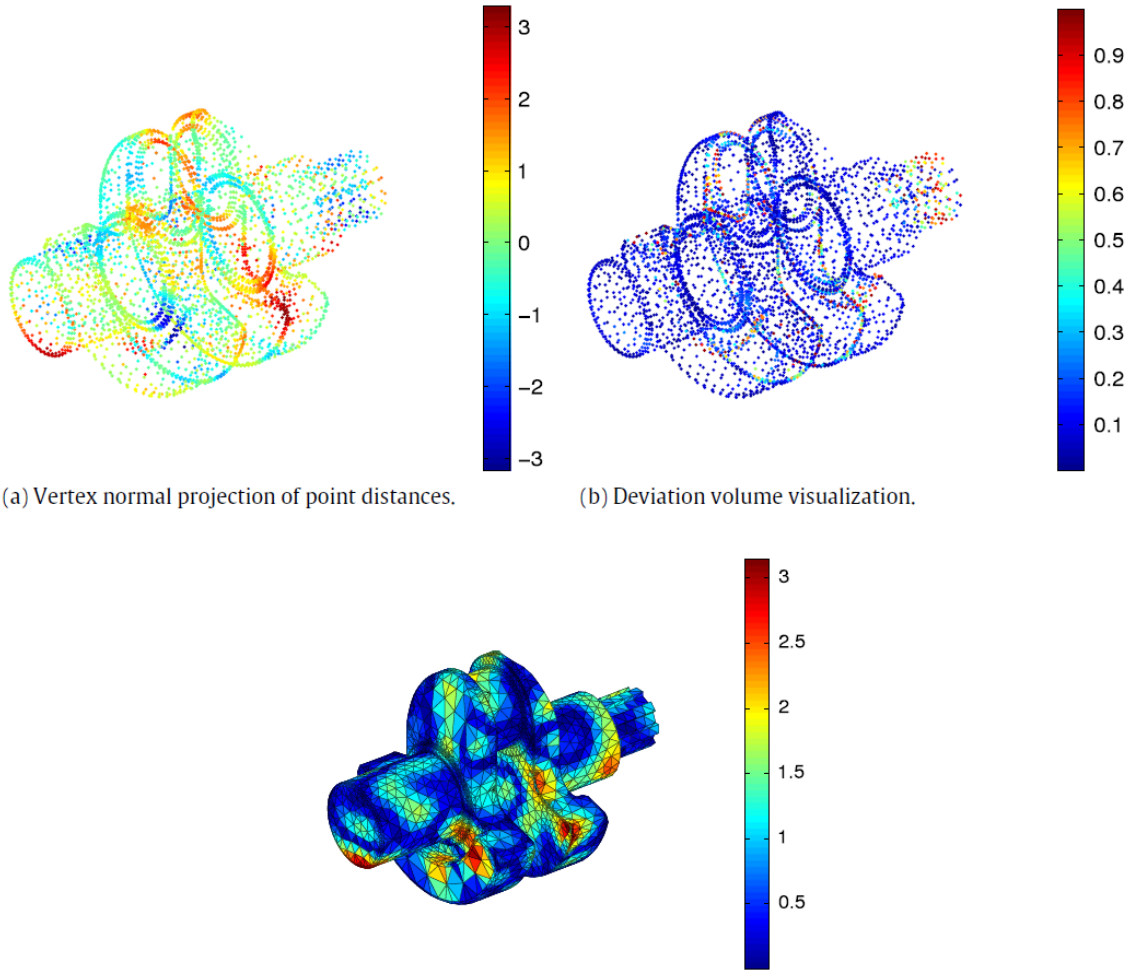
Gaussiens discrétisés [AT 07] [LK 93]. Nous avons également expérimenté des modèles d'écarts aléatoires multi-Gaussiens dans les directions des vecteurs principaux de la forme (à partir d'une analyse par composantes principales) et testé la performance des méthodes Monte Carlo par chaînes de Markov (méthode de Gibbs) pour construire des distributions Gaussiennes et multi-Gaussiennes contraintes [GG 84] [GRS 96].

Par la suite, il faut vérifier que les écarts géométriques de forme additionnés contraignent le maillage déformé à appartenir à la zone de tolérance spécifiée. Nous avons adopté une méthode de génération (à base de tirage aléatoire) puis de test qui aboutit à des solutions rapides. Nous avons également évalué les approches Monte Carlo par chaînes de Markov qui sont moins rapides mais présentent l'avantage de construire des distributions de défauts de forme mois éparses.

### *3.c Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade de prédiction : visualisation du Skin Model Shape*

La visualisation de données géométriques revêt une importance capitale dans les démarches de modélisation, de simulation et de perception de la qualité géométrique impliquant l'utilisateur [MLP+10]. Dans le domaine de la visualisation des variations géométriques, la visualisation des données de tolérances géométriques a été exploitée dans les travaux de l'équipe de Söderberg [FS 09] et la visualisation des défauts de forme, par des voxels, a été développée à l'université d'Erlangen Nuremberg [PWW 08].

Le Skin Model Shape capture la variabilité géométrique et à travers sa représentation discrète, il est possible de visualiser les écarts ou les défauts de forme. Comme ces défauts sont à une échelle beaucoup plus petite que la taille des éléments géométriques de la forme représentés, nous avons adopté une visualisation des champs d'écarts par une échelle de couleurs. Cette visualisation est également adaptée aux maillages triangulaires pour le rendu et le plaquage de textures. Nous avons ainsi représenté et visualisé trois champs d'écarts (figure 2-7) : les écarts dans une direction donnée (adapté à la visualisation des écarts aléatoires) et les écarts correspondant au volume élémentaire de déformation (adapté à la visualisation des écarts systématiques). Un autre champ d'écarts de centres de maillages a été introduit. Nos travaux peuvent être aussi étendus à des visualisations globales par la combinaison de différentes instances de Skin Model Shapes.




(a) Vertex normal projection of point distances.

(b) Deviation volume visualization.

(c) Mesh-based visualization.

Figure 2-6: Visualisation de Skin Model Shapes

Le schéma global du processus de simulation de Skin Model Shapes en stade de prédiction est présenté dans la figure 2-7.

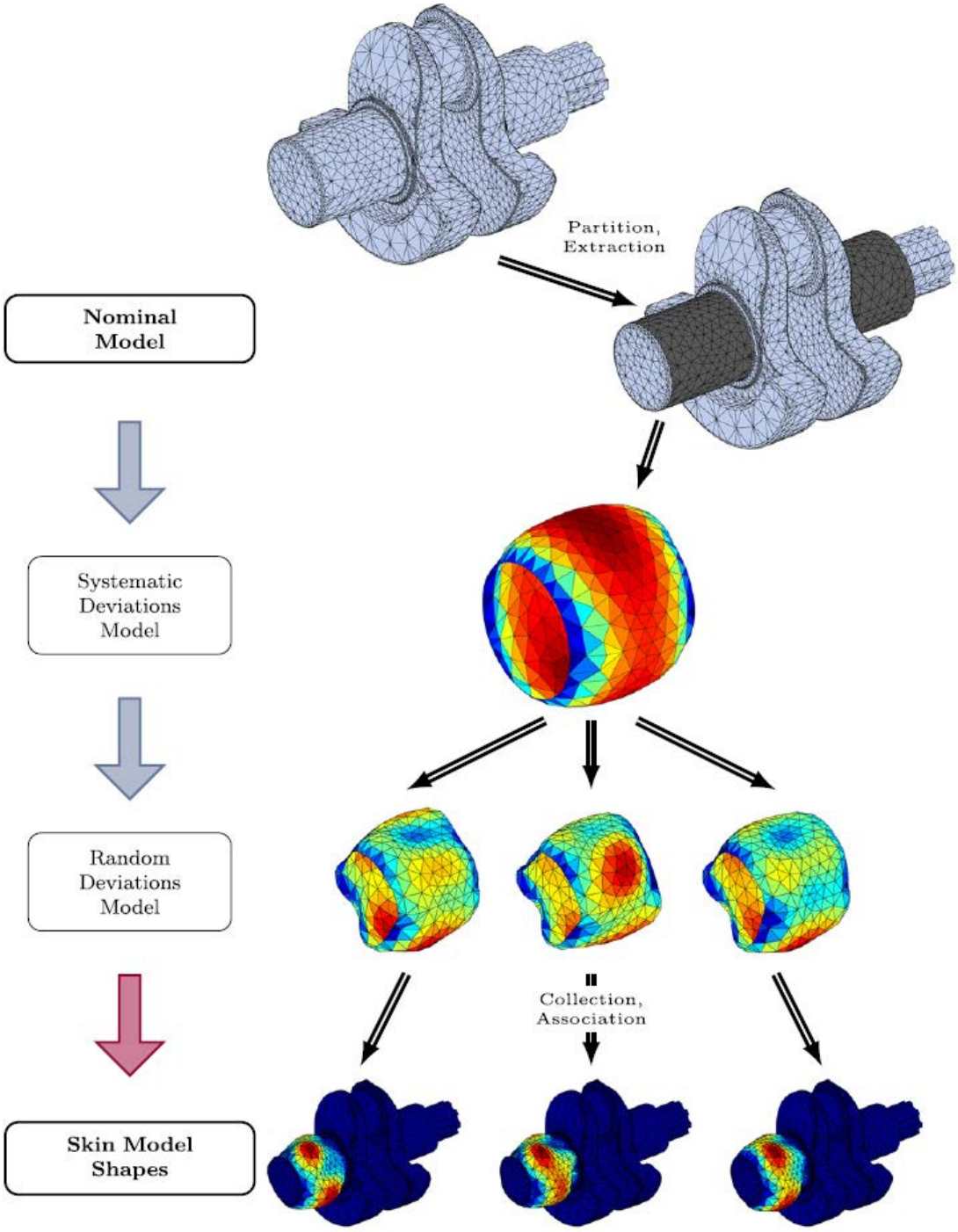



Figure 2-7: Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade de prédiction

### *3.d Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade d'observation*

A ce stade, nous faisons l'hypothèse de disposer d'une population "numérique" de pièces nominalement équivalentes obtenues par simulation numérique de procédés de fabrication ou par mesurage de pièces prototypes (classe d'éléments observés). Dans le cas de simulations numériques, nous supposons que les caractéristiques dimensionnelles ou géométriques de la

pièce ainsi que des propriétés liées au matériau et au procédé ont été variées durant les différentes simulations (plans d'expériences factoriels, plans en carré latin, …).

A partir de cette classe d'éléments observés, nous avons développé une analyse statistique des formes en suivant le schéma classique présenté précédemment. En faisant l'hypothèse de l'équivalence des points caractéristiques (même nombre de points et maillages similaires), la mise en correspondance de ces points est facilitée. Le recalage des formes peut se faire par des techniques simples comme l'ICP (Iterative Closest point) [BM 92] ou la technique CFR (Curvature-based Fine Registration) développée dans la thèse de Zhao Haibin [Zha 10].

Une fois les éléments observés mis en correspondance, nous avons appliqué le modèle KDE-PDM et l'analyse par composantes principales. Nous pouvons ainsi extraire la forme moyenne et les principaux modes de variation. Chaque élément observé peut ainsi s'écrire comme la somme de la forme moyenne et d'une combinaison linéaire pondérée de vecteurs propres de l'espace de formes (obtenus par la diagonalisation de la matrice de covariance). Les distributions statistiques sous-jacentes aux paramètres de forme résiduels sont déterminées par une estimation par noyau (KDE).

A partir de ce modèle statistique de formes, nous avons généré de nouveaux de Skin Model Shapes à partir d'un tirage aléatoire uniforme et de l'inverse de la fonction de répartition des paramètres de forme calculée précédemment (figure 2-8).

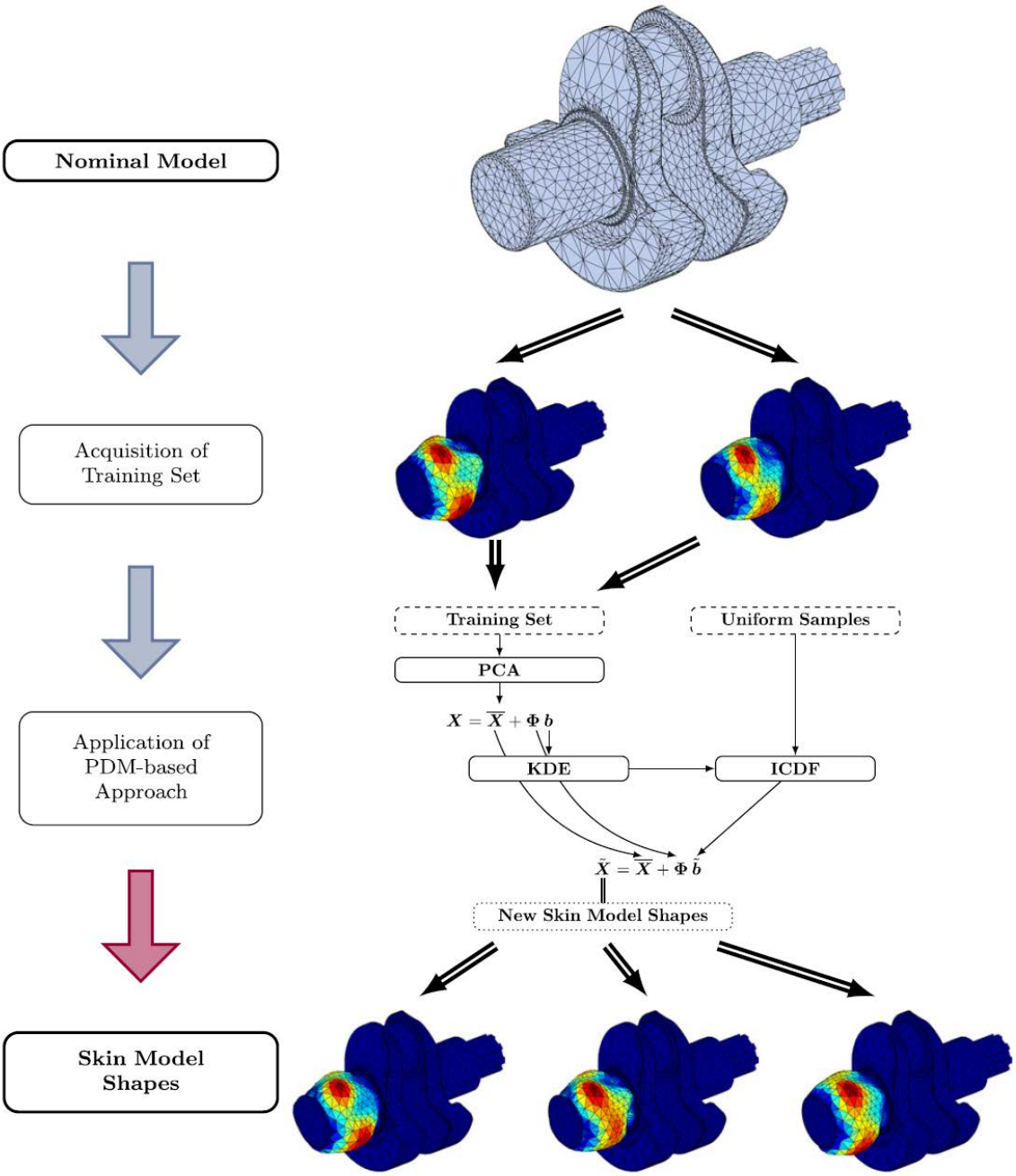
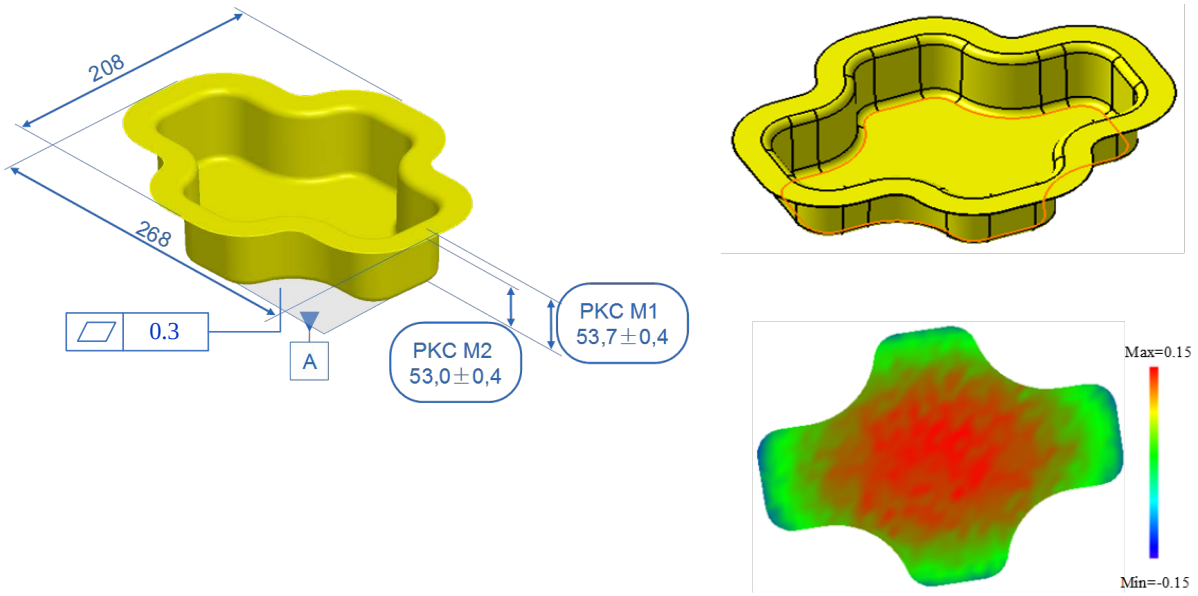



Figure 2-8: Processus de Simulation de Skin Model Shapes – Stade d'observation

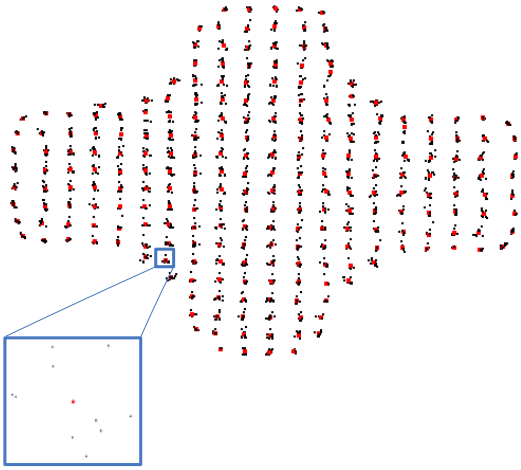
Nous avons également établi des relations entre les paramètres du modèle de prédiction et le modèle statistique de formes permettant ainsi de construire des bases de cas pour la prédiction et qui pourront être exploités pour des techniques de fouille de données (clustering, mesure de similarités, …).

Les approches de simulation de Skin Model Shapes ont été validées sur deux cas d'études. Dans une première étude, nous avons déployé le processus de simulation de Skin Model Shapes dans le cadre de l'emboutissage de tôles (figure 2-9). Cette étude a été réalisée en collaboration avec l'université d'Erlangen Nuremberg et a exploité les résultats de simulation numérique et de mesurage de tôles embouties [SM 09] [SWM+10]. Au stade de prédiction, les écarts systématiques associés au fond de la tôle emboutie, sur lequel porte une spécification de planéité, ont été associés à une surface quadrique de type ellipsoïde et les écarts aléatoires ont été générés par la méthode de Gibbs appliquée à une distribution Gaussienne. La forme obtenue est contrainte dans la zone de tolérance de planéité. Au stade de l'observation. Ce choix de modélisation a été confirmé par la distribution des écarts lors de l'analyse des résidus d'association de surfaces quadriques aux formes mesurées. En faisant varier les paramètres du procédé et l'épaisseur de la tôle, par la méthode hypercube latin, avec des hypothèses d'indépendance et de normalité, nous avons effectué une analyse statistique sur une population de dix pièces simulées. Ceci nous a permis de développer un modèle statistique de formes, de définir la forme moyenne et les modes principaux de variation et d'améliorer par la suite le modèle de prédiction (figure 2-10).

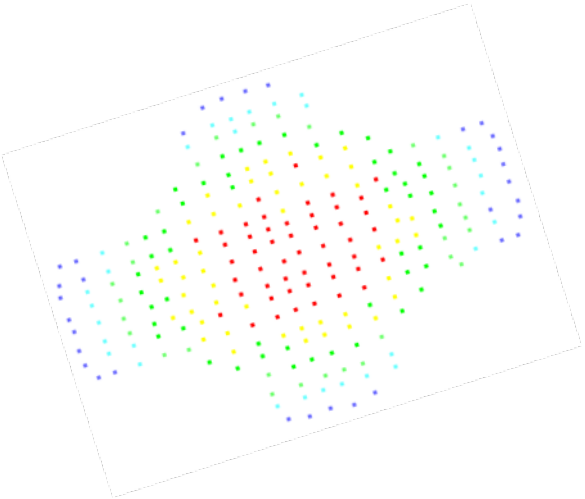


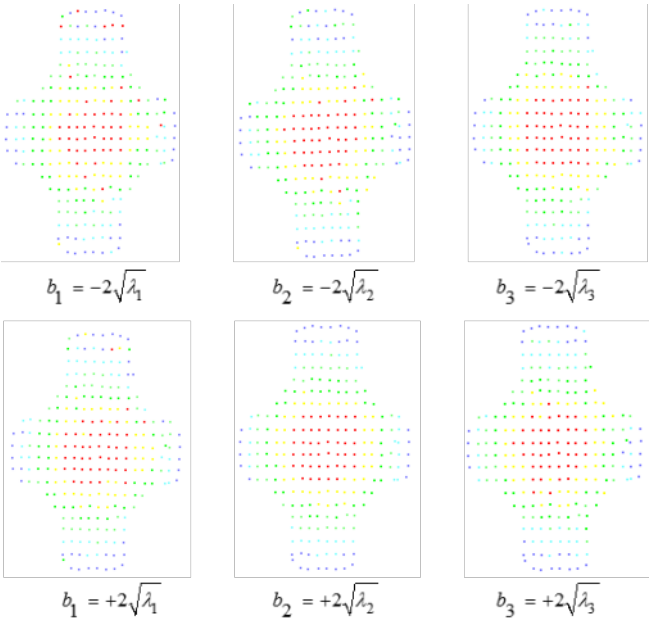

(a) Pièce étudiée (b) Surface avec écarts

Figure 2-9: Etude de cas – Stade de prédiction



(a) Alignement de pièces simulées par EF

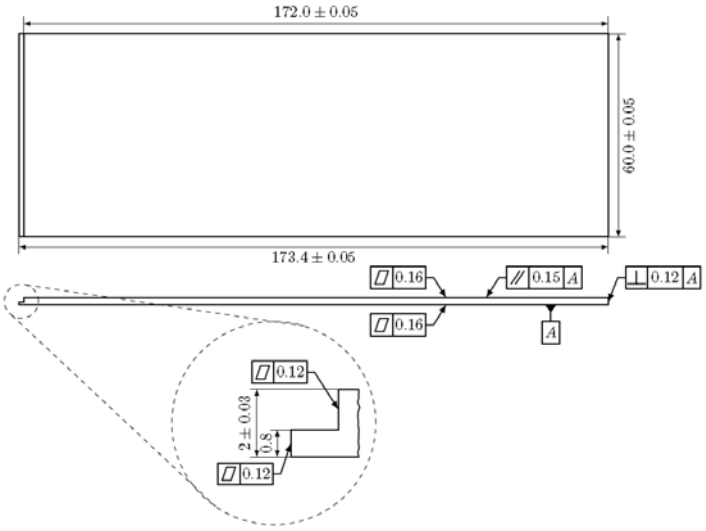




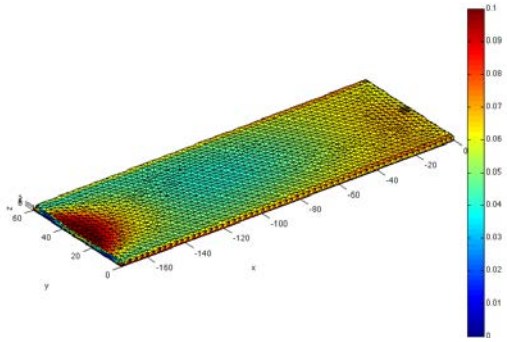

(b) Forme Moyenne

(c) Formes Principales

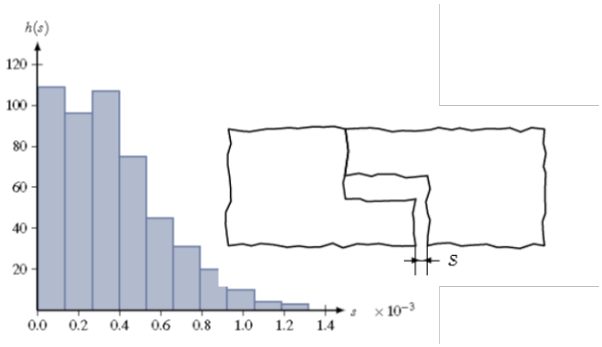
Figure 2-10 : Etude de cas – Stade d'observation




(a) cas d'étude



(b) Skin Model Shape (prédiction)




(c) Analyse du jeu (s)

Figure 2-11 : Analyse d'assemblage

Une autre étude, toujours en collaboration avec l'université d'Erlangen Nuremberg, a porté sur la simulation de Skin Model Shapes pour des pièces obtenues par moulage et l'étude du jeu lors de l'assemblage de deux pièces (figure 2-11). Les deux stades de simulation de Skin Model Shapes ont été développés et ont permis l'étude de la distribution du jeu ouvrant ainsi la voie vers l'analyse des tolérances et la modélisation réaliste du contact entre surfaces.

# V. Modélisation du contact et de la mobilité à base de Skin Model Shapes

## 1. Introduction

La modélisation des contacts et des jeux entre composants dans des ensembles mécaniques est une étape importante pour la prédiction de la qualité des assemblages par simulation. Ceci permet de s'assurer que les variabilités géométriques des composants ne nuisent pas au respect des exigences fonctionnelles (analyse de tolérances) et de définir les variabilités admissibles des composants pour que les exigences fonctionnelles soient respectées (synthèse de tolérances). La considération des défauts de forme des pièces mécaniques à travers les Skin Model Shapes est une nouvelle voie pour l'analyse des tolérances et le développement de nouveaux systèmes de tolérancement assisté par ordinateur (Computer-Aided Tolerancing). Nos travaux actuels et en cours de développement ont permis de proposer de nouveaux modèles de contacts géométriques à base de nuages de points et de recalage rigide. Il s'agit de minimiser des sommes au carré de distances pondérées entre nuages de points pour en déduire la transformation rigide optimale permettant d'éviter une interpénétration entre nuages de points. Des indicateurs de qualité de contact sont également développés. Les résultats obtenus ont permis de développer de nouveaux outils d'analyse des tolérances intégrant les défauts de forme. Les techniques mises en œuvre permettent également de traiter les mobilités entre pièces et de générer des trajectoires "non-idéales" pour l'étude du comportement cinématique "réaliste" de systèmes mécaniques complexes.

## 2. Cadre des travaux

La détection en temps réel des collisions et des contacts entre des objets volumiques ou des surfaces est un sujet très étudié en réalité virtuelle et en informatique graphique ainsi qu'en CAO/FAO. En général, la détection de collisions et de contacts se déroule en deux phases séquentielles [Hub 93] [KHI+07]. La phase de recherche de proximité (broad phase) permet de détecter les couples d'objets susceptibles d'entrer en collision et réduit ainsi le nombre d'interférences à tester. Les techniques à base de volumes englobants ou la partition de l'espace sont parmi les approches les plus utilisées dans cette phase. La phase de détection approximative (narrow phase) permet de déterminer les zones potentielles de collision ou, au contraire, les collisions impossibles.

Plusieurs algorithmes pour la détection de collisions ont été proposés. Les algorithmes de détection de collision en dynamique et en temps réel sont adaptés à la situation où des objets sont en mouvement alors que les algorithmes de détection d'interférences statiques s'intéressent à la détection de contact et d'interférences entre des objets dont la configuration relative est fixe. Ces algorithmes dépendent également de la représentation géométrique associée aux objets modélisés et ont considéré aussi bien les représentations continues que les représentations discrètes à base de maillages ou de voxels.

Les contraintes géométriques de contact et de non interférence entre les surfaces nominales sont généralement décrites par des ensembles d'égalités ou d'inégalités géométriques portant sur la position et l'orientation des surfaces ainsi que sur leur contour ou leur enveloppe convexe. Le positionnement relatif de pièces intégrant les défauts d'orientation et de position et la séquence de mise en position exploite des formulations géométriques équivalentes [LR 01]. Shi et al. [SLN+13] ont développé un nouvel algorithme pour l'évaluation de collisions et des jeux entre des solides polyédriques dans le cadre de l'assemblage virtuel. Cet algorithme intègre des approximations de facettisation et des enveloppes de limites de tolérances dimensionnelles des surfaces permettant ainsi de distinguer trois types de collisions (réelles, potentielles et fausses).

Que ce soit dans les domaines de la réalité virtuelle ou du tolérancement, les approches développées se sont souvent limitées aux variations géométriques des surfaces planes et cylindriques et il existe très peu de travaux intégrant les défauts de forme des surfaces.

Quelques travaux récents ont permis d'intégrer les défauts de forme dans la simulation géométrique des assemblages et en analyse des tolérances. Pierce et Rosen [PR 07a] ont développé une méthode pour simuler le contact dans des liaisons prismatiques. Les surfaces avec des défauts de forme ont été modélisées par des surfaces NURBS puis discrétisées le long des composantes de l'espace paramétrique. Le problème de contact a été modélisé comme un problème d'optimisation sous contraintes avec comme variables les six composantes de déplacement rigide et comme fonction objectif, à minimiser, la somme au carré des distances signées des points de discrétisation à la surface en vis-à-vis. L'inconvénient de cette approche est une double optimisation car le problème de calcul de distance d'un point à une surface NURBS est un problème non linéaire qui est résolu itérativement. Pour éviter une explosion combinatoire et un temps de calcul long, le problème d'optimisation sous contraintes a été transformé en problème d'optimisation sans contraintes

en introduisant des fonctions de pénalités et résolu par des algorithmes d'optimisation de type Hooke-Jeeves et BFGS [PR 07b].

Les travaux réalisés à l'université d'Erlangen Nuremberg [SWH+07] [SWM 09] ont permis de développer des algorithmes pour le positionnement relatif entre des surfaces maillées intégrant des défauts de forme. Plusieurs approches ont été développées comme le recalage rigide à base d'ICP [SWH+ 07] ou l'optimisation heuristique du volume entre les surfaces en vis-à-vis [SWM 09]. Une fonction de probabilité de détection de collisions par superposition de voxels a été également développée pour quantifier la qualité du contact [PWW08].

Samper et al. [SAF+ 09] [ASF 10] ont caractérisé le problème de détermination de contacts potentiels entre deux surfaces nominalement planes avec défauts de forme comme un problème d'identification de facette de contact à partir de l'enveloppe convexe de leur surface d'écarts ou de différences. Cette surface est obtenue par le report des écarts de forme sur l'une des deux surfaces et en considérant l'autre surface comme idéale. Lê et al. [LLB 14] ont également montré l'existence d'une dualité entre le domaine jeu et la surface convexe des différences. Une approche similaire développée par Lou et al. [LJB+ 13] exploite les opérateurs morphologiques, utilisés pour la caractérisation de la rugosité de surfaces planes, pour déterminer l'interface et les points communs entre deux surfaces en contact à travers l'application d'une fermeture morphologique (enveloppe fermant les creux tout en suivant les aspérités saillantes de la surface). Cette approche s'apparente à la technique des $\alpha$–shapes [EKS 83] qui est une généralisation des enveloppes convexes.

Les travaux de Morière et Linarès [MML+10] [Mor10] se sont intéressés à l'étude des assemblages composés de pièces avec défauts décrites par des surfaces maillées et des défauts polynomiaux d'ordre 2. La caractérisation du contact entre les pièces est basée sur la minimisation du volume contenu entre les pièces à assembler (espace jeu). Un formalisme de modélisation géométrique vectorielle GLT permet de décrire les pièces et les surfaces, et de traiter les contacts et les défauts de forme par des opérateurs de connexion et de perturbation.

Les travaux présentés précédemment ont montré que la considération des défauts de forme et des variabilités géométriques dans l'étude du contact et des jeux entre les pièces dans les assemblages bénéficie de cadres scientifiques et méthodologiques établis.

La représentation discrète des Skin Model Shapes fournit un cadre de résolution du problème qui généralise les approches présentées dans la littérature. En effet, dans une approche globale, l'enveloppe convexe des Skin Model Shapes réduit considérablement la

complexité du problème mais ne correspond pas à la nature géométrique de la tribologie du contact [LJB+13]. Les maillages triangulaires des Skin Model Shapes permettent une approximation du premier ordre de la surface et impliquent une modélisation des interférences à la base des intersections entre points, arêtes et facettes triangulaires. Cette approximation de premier ordre et la répartition spatiale des points du Skin Model Shapes influent considérablement sur la qualité du contact et l'évaluation des interférences. Pour éliminer l'influence de l'approximation du premier ordre, nous avons considéré, dans le cadre de l'étude du contact, que les Skin Model Shapes sont d'ordre zéro ou constitués uniquement de nuages de points.

Nous nous sommes ainsi intéressés à développer une approche à deux niveaux. Tout d'abord, nous avons considéré le problème de contact entre Skin Model Shapes comme un problème d'optimisation de positionnement relatif avec ou sans contraintes. Par la suite, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de la qualité du contact après optimisation du positionnement relatif à travers l'analyse des résultats de l'optimisation.

Ces travaux nous ont permis de développer une nouvelle approche pour intégrer les défauts de forme et le contact dans l'analyse des tolérances et une contribution au tolérancement d'ensembles mobiles (motion tolerancing) intégrant les défauts de forme (travaux de master de W. Zhang [Zha 13] et Q. Bai [Bai 14]). Ces travaux ont été menés en collaboration avec l'université d'Erlangen Nuremberg (Projet Franco-Bavarois CCUFB-BFHZ 2013) et l'université de Beihang (travaux de master de Z. Zhu).

## 3. Principaux résultats obtenus

L'objectif de cette partie est de présenter les contributions majeures de nos travaux sur la modélisation du contact et de la mobilité à base de Skin Model Shapes ainsi que leurs applications. Les résultats présentés dans cette partie ont été publiés dans les articles suivants :

***[A-4] Anwer, N., Schleich, B., Mathieu, L., Wartzack, S., From solid modelling to skin model shapes: Shifting paradigms in computer-aided tolerancing, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 63(1), 137-140, 2014***

***[A-5] Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., Wartzack, S., Contact and Mobility Simulation for Mechanical Assemblies based on Skin Model Shapes, ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 15(2), 021009:1-021009:7, 2015***

Nous avons formulé le problème géométrique du contact entre deux Skin Model Shapes comme un problème d'optimisation de positionnement relatif (figure 2-12). Un des deux Skin Model Shapes étant défini comme une référence (REF), il s'agit donc de trouver la transformation rigide appliquée à l'autre Skin Model Shape (POS) et qui minimise une fonction scalaire entre les nuages de points avec ou sans contraintes. Les variables d'optimisation sont les degrés de libertés exprimés par les translations et les rotations. A travers cette formulation, il est possible de tenir compte des différents types de contacts (flottant, glissant, fixe) pour modéliser les jeux, les contacts et les serrages [DB 02] [DMB+05].

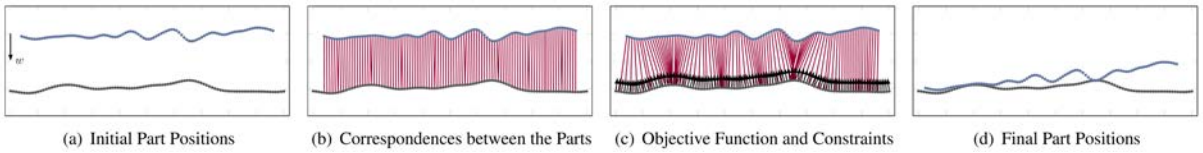



Figure 2-12 : Etapes de modélisation du contact entre Skin Model Shapes

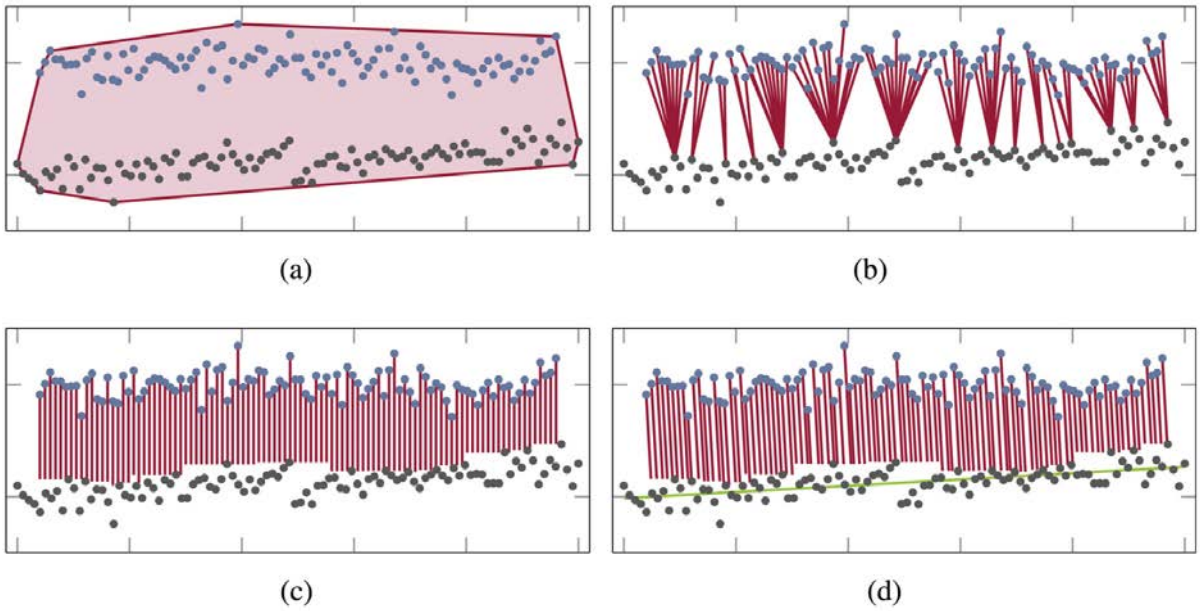



Figure 2-13 : Fonctions objectif (a : $f_{Hull}$ ; b : $f_{Euclid}$ ; c : $f_{W\text{-}Assembly}$ ; d : $f_{W\text{-}Normal}$)

Nous avons défini et testé différentes fonctions (figure 2-13) comme l'enveloppe convexe de l'union des nuages de points utilisée par Stoll et Wittmann [SWM 09] ($f_{Hull}$), la somme des carrés des distances des points de POS par rapport à leurs plus proches voisins de REF ($f_{Euclid}$), la somme pondérée des valeurs absolus des écarts des points de POS par rapport à leurs correspondants de REF ($f_{W\text{-}Assembly}$ et $f_{W\text{-}Normal}$), et la somme pondérée des carrés de ces écarts. Deux vecteurs poids ont été utilisés. Le premier vecteur correspond à la direction d'assemblage permettant ainsi d'intégrer la dimension physique de l'assemblage. Le deuxième vecteur caractérise la dispersion des points de REF et correspond à la direction principale de REF (obtenue à partir des vecteurs propres de la matrice de covariance) dans le cas du contact plan.

Les résultats obtenus montrent que le positionnement relatif des Skin Model Shapes peut aboutir à des situations d'interférences (en l'absence de contraintes) ou à des situations de non contact (en présence de contraintes sur le signe des écarts) (figure 2-14). La difficulté ici est d'évaluer le contact en présence de données discrètes sans reconstruction de surfaces sous-jacentes. Pour résoudre ce problème, nous avons défini et testé plusieurs indicateurs de qualité de contact et nous avons évalué leurs distributions statistiques.

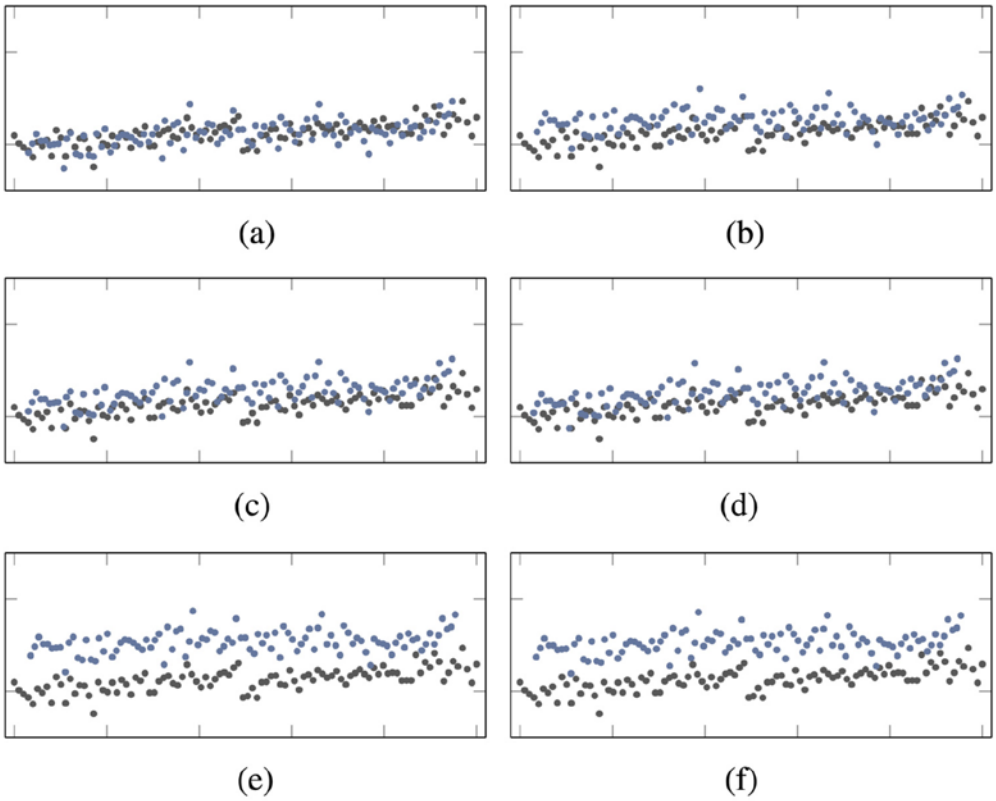



Figure 2-14 : Résultats d'optimisation (a : $f_{Hull}$ ; b : $f_{Euclid}$ ; c : $f_{W\text{-}Assembly}$ ; d : $f_{W\text{-}Normal}$; e : $f_{W\text{-}Assembly}$ (con.); f : $f_{W\text{-}Normal}$ (con.) )

La distance signée entre un point de POS et son correspondant sur REF donne une indication de la qualité de l'écart de contact mais dépend de la fonction objectif utilisée (figure 2-15). A partir de cet indicateur, il devient possible de visualiser les zones potentielles de contact et d'interférences tout en fixant un seuil de détection. Le calcul des paramètres de statistiques descriptives et l'estimation statistique par noyaux KDE de l'ensemble des distances signées permet une comparaison des fonctions objectif utilisées.

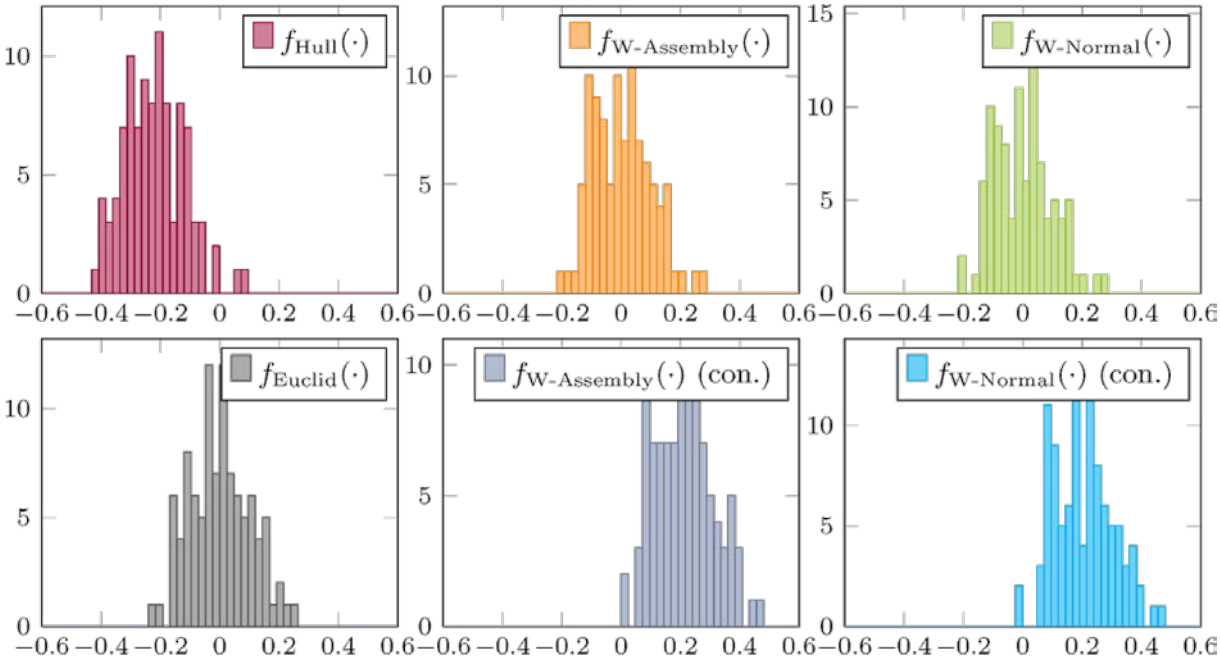



Figure 2-15 : Histogramme des distances signées des différentes fonctions objectif

Nous avons par la suite retenu un indicateur de qualité basé sur un opérateur de projection pour calculer la distance minimale entre un point et un nuage de points. De la même manière qu'une projection orthogonale d'un point sur une surface, le calcul de la projection d'un point sur un nuage de points peut s'effectuer par les approches à base de reconstruction d'une surface implicite MLS (Moving Least-Squares) [ZG 11] ou la méthode de la projection des moindres carrés LSP (Least-Squares Projection) [LPY+ 06].

Nous nous sommes inspirés de la méthode LSP pour déterminer les projections des points de POS sur REF après optimisation du positionnement relatif. Dans un premier temps, nous avons développé une méthode LSP à direction optimisée où la direction de projection est calculée par un ensemble de points de REF. Cette méthode, bien adaptée à des Skin Model Shapes non nominalement plans, permet de caractériser le contact Cylindre-Cylindre. Dans le cas de Skin Model Shapes nominalement plans, nous avons utilisé une méthode LSP à direction imposée (direction d'assemblage).

### *3.b Intégration des défauts de forme dans l'étude de la mobilité des pièces*

L'étape de modélisation et d'évaluation de contact entre Skin Model Shapes est à la base du processus que nous avons développé pour l'intégration des défauts de forme dans l'étude de la mobilité des pièces dans les mécanismes et les assemblages avec mobilité.

Le schéma suivant (figure 2-16) illustre les principales étapes de ce processus. Dans une première étape appelée pré-traitement, les Skin Model Shapes des pièces sont générés à partir des spécifications géométriques associées. Le processus d'assemblage est ensuite défini et permet d'intégrer la séquence de la mise en position à travers les contraintes géométriques de positionnement relatif et de la nature du contact. Pour pouvoir tenir compte de la mobilité et du mouvement des pièces, nous introduisons l'aspect dynamique comme une séquence de positionnements relatifs quasi-statiques. Une étape de post-traitement permet d'évaluer la qualité du contact et d'autres caractéristiques clé (Key Characteristics) dimensionnelles et géométriques entre les surfaces de l'assemblage et leur comparaison à des valeurs nominales [Tho 99].

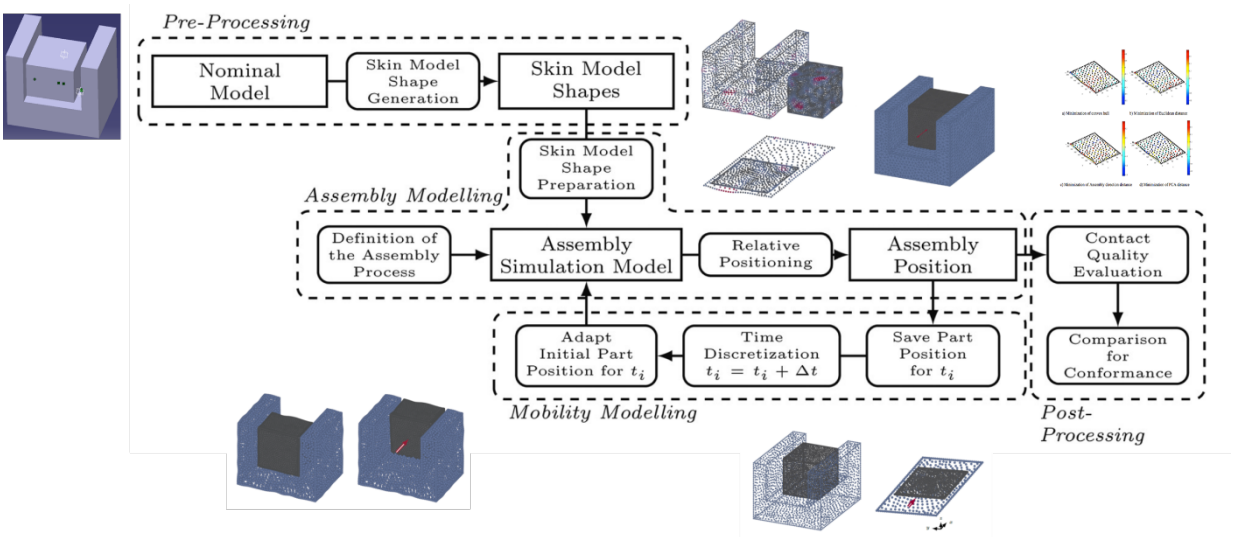



Figure 2-16 : Histogramme des distances signées des différentes fonctions objectif

### *3.c Tolérancement assisté par ordinateur à base de Skin Model Shapes*

L'étape de post-traitement décrite précédemment peut également servir à effectuer une analyse des tolérances. En effet, le processus global d'intégration des défauts de forme dans l'étude de la mobilité des pièces dans les mécanismes et les assemblages avec mobilité présente des similarités avec les étapes d'analyse des tolérances des systèmes CAT

(Computer-Aided Tolerancing) [PG 02] [SAS+ 07] [MLS 11] [CLR 12]. Nous nous sommes ainsi placés dans un contexte d'analyse de tolérances pour comparer notre approche à base de Skin Model Shapes (figure 2-17) avec un système CAT propriétaire (3DCS) [3DCS]. Les résultats de cette comparaison ont montré que l'approche à base de Skin Model Shapes permet de mieux caractériser les effets des défauts de forme et leurs contributions dans l'analyse des tolérances [SAZ+14].

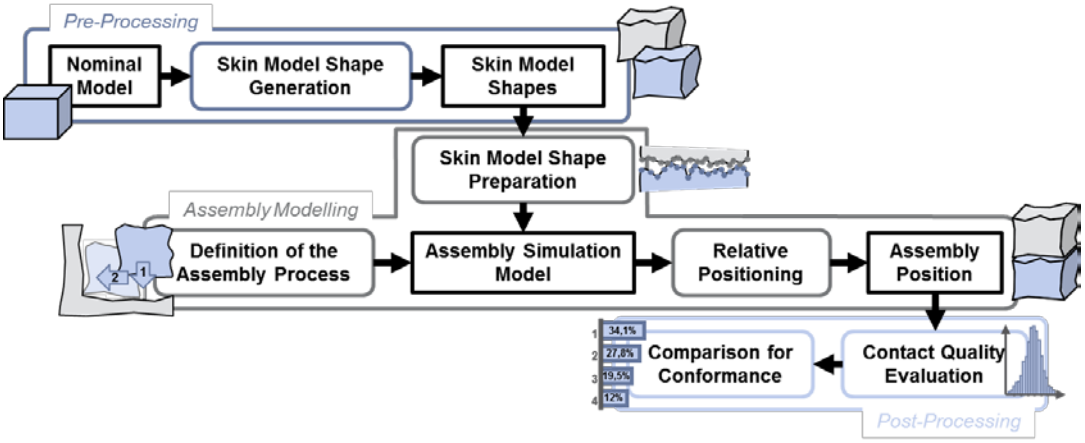



Figure 2-17 : Analyse de tolérances à base de Skin Model Shapes

## VI. Conclusions

Le Skin Model est un concept fondamental pour la spécification géométrique des produits. Son opérationnalisation à travers le Skin Model Shape et l'ingénierie des formes ouvre de nouvelles voies pour une plus large intégration dans le modèle de produit ainsi que dans son cycle de vie. A la lumière des théories de la modélisation solide, des variétés topologiques, de la géométrie différentielle et de l'analyse statistique des formes nous avons établi un nouveau cadre de modélisation et de représentation pour le Skin Model.

A la base d'une représentation discrète, nous avons introduit le concept de Skin Model Shape comme un changement de paradigme pour la recherche en tolérancement et nous avons montré sa pertinence et son potentiel pour se substituer à la représentation géométrique du nominal, de la spécification à la vérification. De plus, deux stades de simulation de Skin Model Shape, appelés stade de prédiction et stade d'observation, ont été introduits. Ces deux stades nous ont permis d'intégrer les défauts de forme et la variabilité géométrique dans la démarche de conception détaillée à travers le développement d'un processus de simulation de Skin Model Shape. Les différentes étapes de ce processus ont été explicitées et ont abouti au développement d'un démonstrateur informatique.

Nous avons également développé une modélisation géométrique du contact entre Skin Model Shapes ainsi que des indicateurs pour évaluer la qualité du contact. Ces travaux nous ont permis de définir un nouveau champ pour l'analyse des tolérances et l'étude de la mobilité des pièces en tenant compte des défauts de forme dans les ensembles mécaniques (motion tolerancing). Ceci permet également d'intégrer l'ensemble de ces travaux dans le cadre du développement de nouveaux systèmes de tolérancement assisté par ordinateur (CAT) à base de Skin Model Shapes.

Ces travaux nous ont permis également de poser les fondements d'une théorie de "la géométrie avec défauts" qui donne aux défauts et écarts de forme une place centrale en tolérancement. La modélisation géométrique discrète et les statistiques "au second ordre" nous ont permis de développer un cadre nouveau pour la représentation de la forme et de sa variabilité, à travers les écarts aléatoires et systématiques..

Bien que ces travaux se soient intéressés à des pièces et assemblages rigides, le potentiel du Skin Model Shape à intégrer la variabilité géométrique nous permet d'entrevoir des applications à des pièces et ensembles non rigides, aux formes complexes et à l'échelle de la micro-géométrie et des états de surface.

.

# Chapitre 3 - Fusion de données multi-capteurs et traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes

## I. Introduction

Les moyens de mesure modernes permettent d'acquérir et de caractériser les données spatiales des objets mesurés à savoir leur dimension, forme et position dans un espace tridimensionnel. Toutefois la représentation discrétisée et l'évaluation des caractéristiques nécessitent des outils de traitement numérique de la géométrie et sont entachées d'incertitudes de mesure dont la maîtrise est essentielle pour vérifier la conformité de produits manufacturés et le pilotage des systèmes de production.

Les moyens de mesure à base de systèmes optiques ont connu un développement considérable ces dernières années. Ils permettent d'acquérir de grands nuages de points sur des pièces de formes complexes dans un temps relativement court. Les caractéristiques métrologiques de ces systèmes, en nette évolution, bénéficient des améliorations considérables en termes d'exactitude de mesurage. Cependant, le mesurage de produits de petites et grandes dimensions, les problèmes d'environnement de mesure, la complexité des formes géométriques à acquérir et l'échelle géométrique considérée (nano, micro et macro) nécessitent la combinaison de différents systèmes de mesure. Le développement de systèmes multi-capteurs et la fusion de données de mesure massives, hétérogènes et bruitées à partir de plusieurs capteurs a engendré de nouvelles problématiques de recherche.

Le déploiement d'un système de mesure multi-capteurs consiste dans un premier temps à définir ses caractéristiques fonctionnelles et à gérer la configuration des capteurs (coopérative, complémentaire, concurrente). La fusion des données issues des différents capteurs est une étape critique pour laquelle les méthodes de traitements géométriques (débruitage, filtrage, recalage, reconstruction de la topologie, reconstruction de surfaces, …) doivent être robustes, rapides et certifiées dans un contexte multi-capteurs et multi-échelles.

Les travaux que je développe s'intéressent à la fusion de données multi-capteurs et au traitement numérique de la géométrie dans le cadre de la métrologie des formes. L'originalité des travaux consiste à développer des outils mathématiques et numériques pour le traitement des nuages de points en adaptant les théories de la géométrie différentielle discrète aux problématiques manufacturières.

Ces travaux ont été développés durant la période 2006-2015 et en collaboration avec P. Bourdet (LURPA), H. Nouira (Laboratoire nationale de métrologie et d'essais - LNE) et O. Gibaru (Arts et Métiers ParisTech).

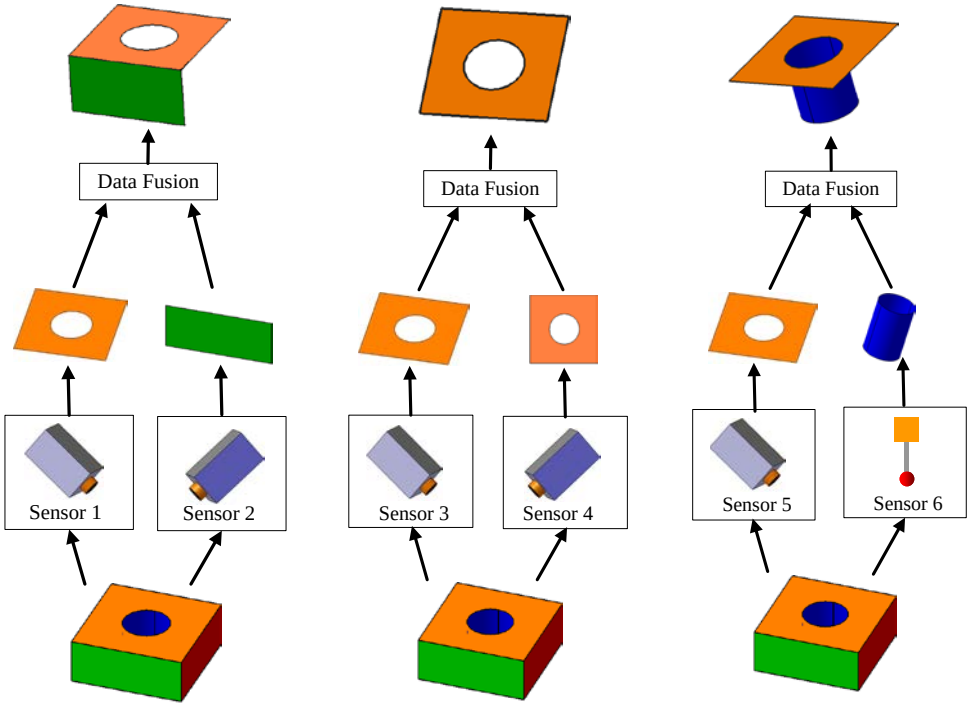
Une partie de ces travaux est présentée dans ce chapitre et couvre les sujets suivants :

- Fusion de données multi-capteurs ;
- Traitement géométrique des nuages de points :
    - Reconstruction et approximation par maillages
    - Courbures discrètes pour la métrologie des formes ;
    - Recalage à base de courbures discrètes ;
    - Partitionnement à base de courbures discrètes ;
- Techniques de reconstruction et d'association pour la métrologie des formes.

## II. Fusion de données multi-capteurs

### 1. Introduction

La combinaison de capteurs multiples ou de différents systèmes de mesures en métrologie dimensionnelle permet de réaliser l'acquisition multi-échelles de la géométrie d'une pièce, avec une meilleure résolution, tout en en réduisant les problèmes de visibilité et d'accessibilité des capteurs. Les acquisitions de nuages de points obtenues par des systèmes multi-capteurs permettent ainsi une numérisation holistique de la pièce mesurée et sont bien adaptées aux formes complexes.




(1) Complémentaire (2) Compétitive (3) Coopérative

Figure 3-1: Configurations de systèmes multi-capteurs [Zha 10]

La combinaison multi-capteurs est classée selon trois configurations [Dur88] [WJS+09] [Zha10]. Dans une configuration complémentaire, les mesures des différents capteurs sont indépendantes. Les numérisations collectées sont fusionnées et permettent d'obtenir une numérisation plus complète. Dans une configuration compétitive, les différents capteurs numérisent une zone commune de la surface. Cette redondance de l'acquisition et de la mesure a pour but d'améliorer la qualité du mesurage. Dans une configuration coopérative, les spécificités de chaque capteur sont exploitées. La combinaison des différents capteurs permet l'acquisition de surfaces non visibles ou inaccessibles par un seul capteur et de guider la

stratégie de numérisation d'un capteur en fonction des numérisations des autres capteurs. Ces différentes configurations sont largement exploitées par des systèmes de mesure multi-capteurs du commerce et dans les travaux de recherche en métrologie dimensionnelle et en rétro-conception [CCS+01] [HQ 07] [SDS 07] [ZKB+ 12] [LLF+14] [LW 15].

Les technologies de numérisation et les caractéristiques des différents capteurs ont un effet sur la quantité et la qualité des données acquises. En outre, les données acquises par les différents capteurs sont exprimées dans différents référentiels ou repères de mesure. La fusion de données multi-capteurs qui est le résultat de la combinaison de l'ensemble des données de numérisation est une étape critique et incontournable pour le développement de systèmes multi-capteurs.

En général, le processus de fusion de données multi-capteurs comporte les étapes suivantes :

(a) Pré-traitement : les données brutes de numérisation exhibent des caractéristiques qui les rendent difficilement exploitables pour les traitements. Les bruits et les erreurs de mesure doivent être filtrés et corrigés, les points aberrants supprimés et les nuages de points filtrés et lissés pour réduire leur complexité structurelle en vue d'applications numériques [Con 02] [GMU+05] [GP 07] [MR 09] [LJS11] [JW 12b] [JAS 13] [DLH 15]. La reconstruction de la topologie et la conversion de formats de données peuvent être également réalisées dans cette étape [WJS+09].

(b) Recalage : les données de numérisation sont définies dans différents repères et doivent être transformées et représentées dans un repère unique. Les techniques de recalage rigide sont les plus utilisées dans cette étape. Elles suivent en général deux phases. La première phase permet l'alignement grossier des données et exploite des marqueurs artificiels ou naturels des pièces. Cette phase permet l'initialisation de la phase suivante appelée recalage fin qui calcule la transformation rigide optimale pour aligner les données [BM92]. En général, le recalage est effectué entre deux nuages de points dont l'un sert de référence ou peut s'appuyer sur la représentation numérique de la pièce comme référence globale.

(c) Fusion : il s'agit d'identifier et de garder des données pertinentes et non redondantes pour enrichir l'ensemble final. Plusieurs techniques de fusion de données ont été développées pour la métrologie dimensionnelle [JOM 06] [LHL 08] [CPS 15]. Les méthodes par estimation, les méthodes par inférence et les méthodes floues ou par apprentissage sont les plus utilisées [WJS+09].

## 2. Modélisation de données pour l'intégration multi-capteurs

Différentes technologies d'acquisition de points sont considérées dans nos travaux : capteur à contact (palpeur à déclenchement par contact), capteur à triangulation (scanner laser-plan), capteur à lumière structurée (système projecteur-caméra), capteur de stéréovision et capteur chromatique confocal.

Dans le cadre des travaux de thèse de H. Zhao [Zha 10], nous avons développé un système de mesure multi-capteurs composé de trois différents capteurs : Kreon Laser range scanner (KZ25), Renishaw Touch probe (TP2) et STIL chromatic confocal imaging sensor (CL2). Ces trois capteurs sont montés sur une MMT et peuvent avoir les trois configurations décrites précédemment (figure 3-2).

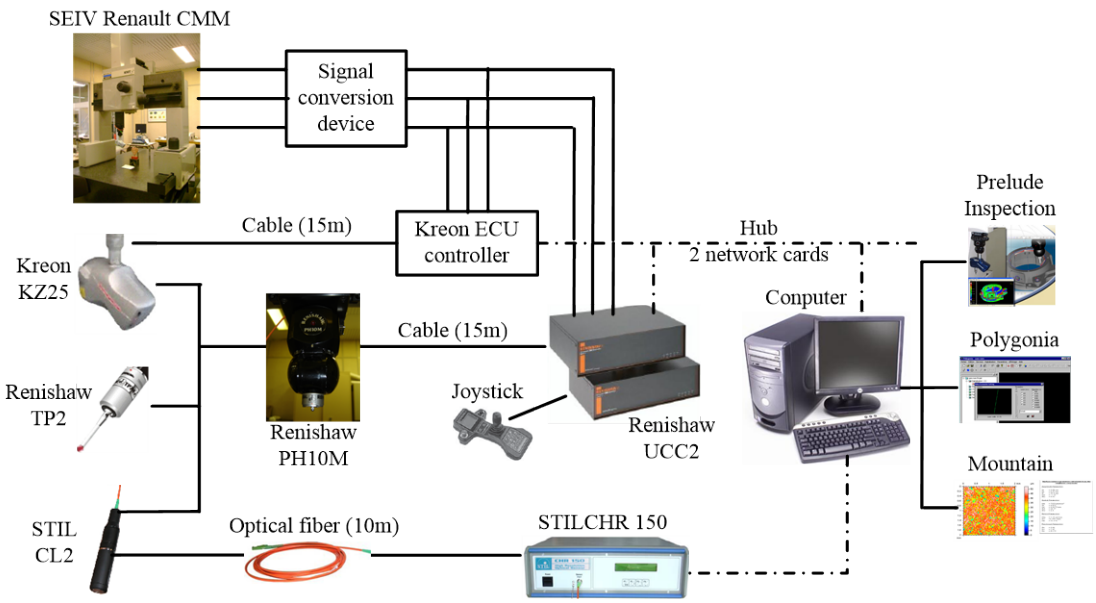



Figure 3-2: Système de mesure multi-capteurs [Zha 10]

Le système de mesure multi-capteurs est composé de deux systèmes principaux (figure 3-3) [ZAB 10]. Le système d'acquisition permet de collecter en deux étapes les données brutes de numérisation à partir des surfaces de la pièce mesurée. La première étape concerne le choix de configuration et la planification de la mesure et fait partie du sous-système stratégie de numérisation (Measurement Strategies System). La deuxième étape permet l'exécution de la mesure et l'acquisition des points et fait partie du sous-système exécution de la numérisation (Measurement Execution System).

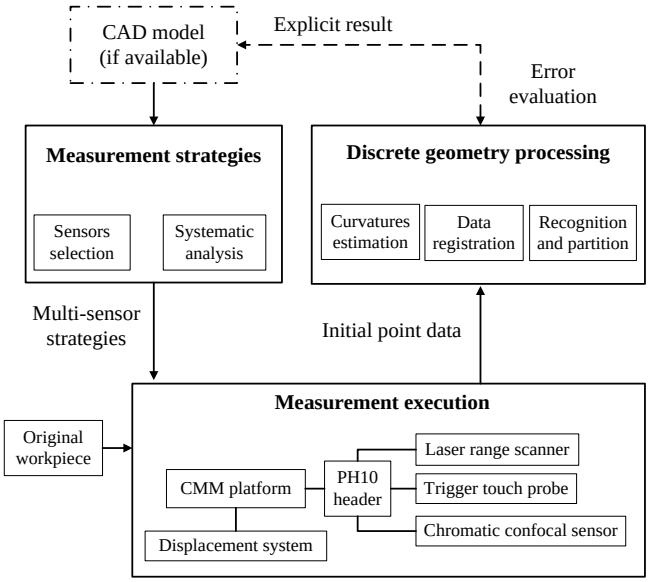



Figure 3-3: Architecture du système de mesure multi-capteurs [Zha 10]

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation fonctionnelle du processus d'inspection multi-capteurs et, de manière complémentaire, à la mise en place d'ontologies permettant la structuration des principaux concepts inhérents à ce processus (intégration par les données) [ZAB+ 08]. Une décomposition systémique à partir du modèle IDEF0 [IDEF 93] nous a permis d'identifier et de structurer les différents processus. Le premier niveau de la décomposition est présenté dans la figure 3-4.

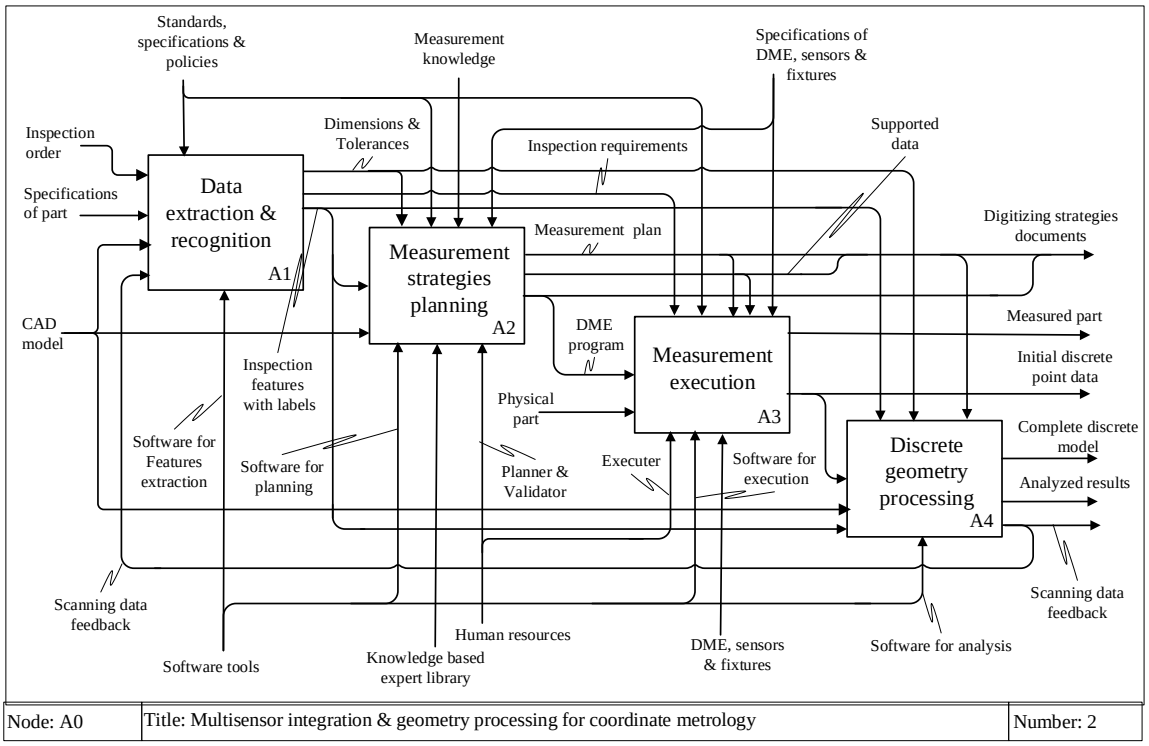



Figure 3-4: Diagramme A0 – Premier niveau de la structure hiérarchique [Zha 10]

Par la suite, nous avons développé les différents modèles de données pour l'intégration de systèmes multi-capteurs: modèle produit, modèle de planification de stratégies de numérisation, modèle d'exécution et modèle de traitement numérique de la géométrie acquise. Ces modèles de données ont été représentés à l'aide du formalisme graphique EXPRESS-G (figure 3-5) [ISO 10303-11] et une ontologie basée sur OWL [OWL] a été développée pour permettre le raisonnement sur le contenu des données (figure 3-6).

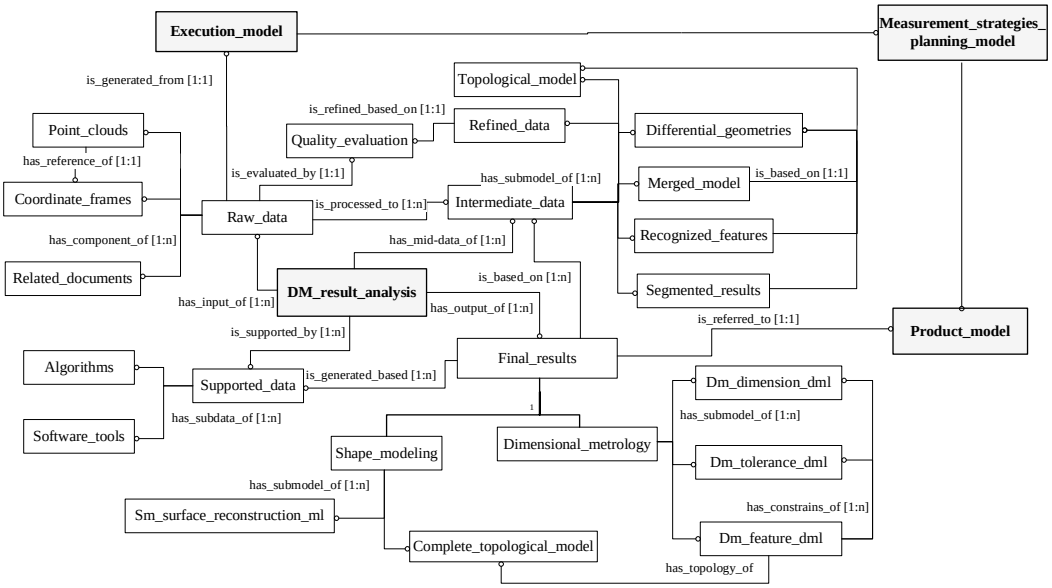



Figure 3-5: Schéma EXPRESS-G du modèle de données [Zha 10]

Figure 3-6: Description des classes dans l'éditeur Protégé-OWL [Zha 10]

## 3. Développement d'un système de mesure multi-caméras

La position et l'orientation (pose) du capteur dans un environnement de mesure sont des facteurs importants qui influent sur la qualité des données de mesure. Nous nous sommes ainsi intéressés dans le cadre de la thèse de M. Douilly [Dou 09] à proposer des solutions de pose d'un système multi-caméras, pour le perçage robotisé, assurant la visibilité des cibles placées sur l'effecteur et la pièce tout en respectant des contraintes d'exactitude et de répétabilité de pose de l'effecteur par rapport à la pièce. Les contraintes d'environnement, de visibilité des cibles, de vision des caméras et l'incertitude de mesure en tout point du volume de travail ont été considérées dans ces travaux.

La vérification géométrique des problèmes de non-interférence et de visibilité pièce sont une première étape de validation géométrique d'un système multi-capteurs. Dans le cadre d'un système de mesure multi-caméras en perçage robotisé, nous avons défini des contraintes géométriques liés à la géométrie de l'environnement de travail, de l'effecteur du robot, de la pièce aéronautique et des caméras (figure 3-7). Une modélisation géométrique du cône de visibilité des cibles a également été proposée [Dou 09].

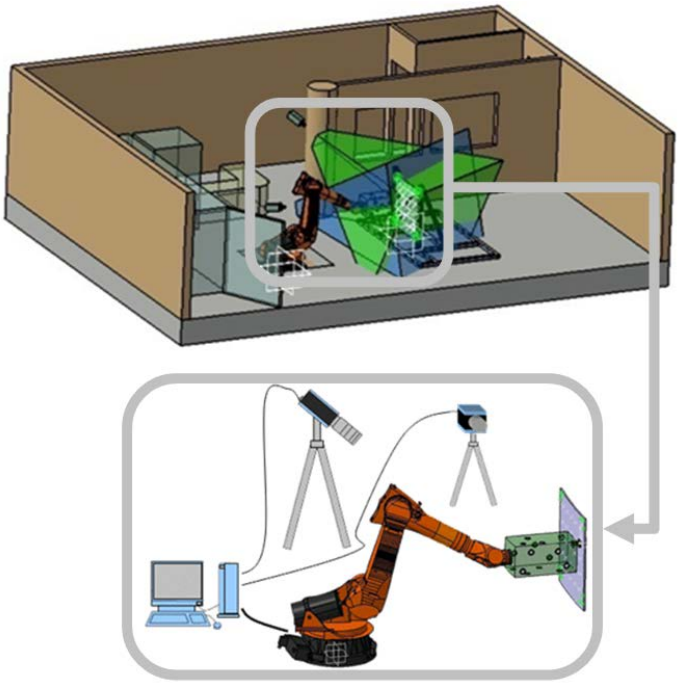


Figure 3-7: Système multi caméra dans un environnement robotisé [Dou 09]

Ces contraintes ont conduit à définir des critères pour présélectionner les poses des caméras assurant la visibilité des éléments ciblés et apporter ainsi un gain de temps considérable à la prise de décision. Cette présélection est établie par une analyse combinatoire basée sur des critères angulaires (angle entre les axes optiques des caméras) et le nombre minimum et maximum de caméras. La résolution s'effectue à l'aide d'un parcours de graphe de connexité où les sommets du graphe représentent les poses potentielles des caméras, et les arcs représentent la condition d'angle.

Une étude combinant des méthodes issues des domaines de la vision par ordinateur et de la métrologie dimensionnelle permet ensuite par propagation des incertitudes de prévoir les incertitudes du système multi-caméras [DAB+ 09]. Une méthode analytique de propagation des variances permet d'évaluer les incertitudes de mesure des coordonnées d'une cible mesurée par n caméras (figure 3-8). A partir de cette approche, une cartographie de l'incertitude de mesure dans l'espace de visibilité de l'ensemble des capteurs a été réalisée (figure 3-9). Cette méthode est rapide mais implique le calcul des dérivées partielles du modèle multi-caméras dont la complexité augmente avec le nombre de caméras.

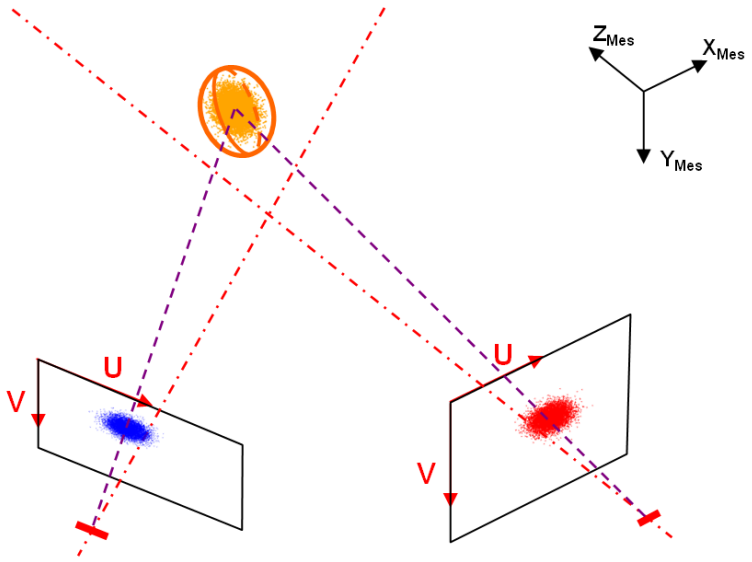



Figure 3-8: Propagation d'incertitudes – Cible vue par 2 caméras [Dou 09]

Des expérimentations ont été mises en œuvre afin de vérifier le modèle analytique proposé dans le cas de la propagation des incertitudes de mesure du centre d'une cible vue par n caméras. Des observations répétées d'une cible fixée en diverses positions du volume de mesure ont été réalisées. La comparaison entre les résultats analytiques et expérimentaux, sur plusieurs échantillons de données et pour diverses configurations de caméras, a permis de

valider la méthode analytique pour le calcul de l'incertitude du centre d'une cible dans un repère de mesure.

L'application de la méthode de Monte Carlo permet par la suite de caractériser les incertitudes de pose relative de deux objets ciblés. Une autre série d'expérimentation a consisté à valider la simulation par la méthode de Monte Carlo en observant de façon répétée deux objets ciblés positionnés dans le volume de mesure multi-caméras. La comparaison entre les résultats de simulation et expérimentaux, sur plusieurs échantillons de données et pour diverses configurations des caméras, a mis en évidence l'adéquation entre la simulation par la méthode de Monte Carlo et l'expérimentation.

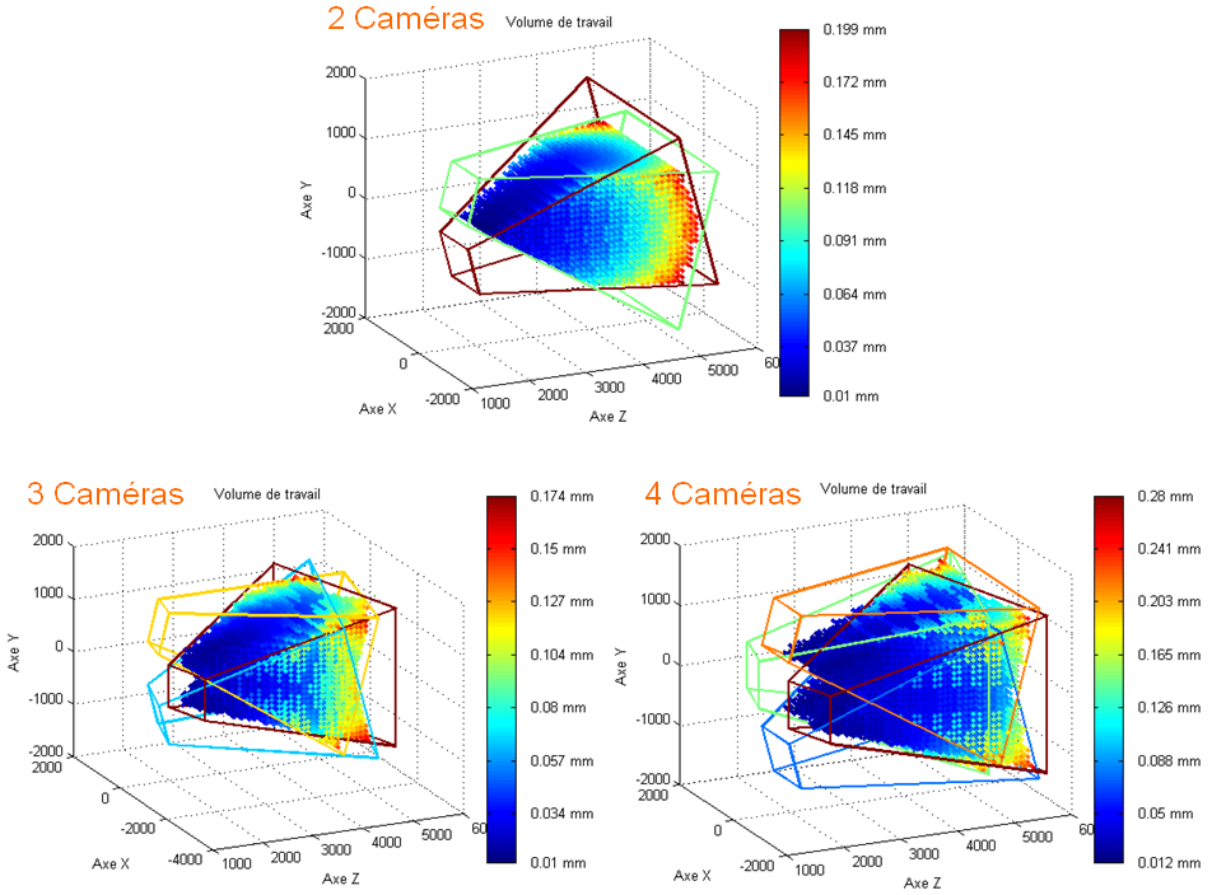



Figure 3-9: Cartographie des incertitudes dans le volume de mesure [Dou 09]

Ce travail a permis le développement d'un outil d'assistance à la pose de caméras dans un environnement robotisé en fonction de contraintes de visibilité d'éléments ciblés et les exactitudes de pose relative. Une extension de ces travaux à un système de mesure combinant un système projecteur-caméra et des multi-caméras est envisagée.

## III. Traitement géométrique des nuages de points

L'acquisition des données par capteurs génère des données brutes qui intègrent les caractéristiques du capteur, la forme de la pièce mesurée, l'échelle géométrique et l'interaction pièce/capteur. Pour exploiter efficacement ces données en métrologie dimensionnelle des formes, il est indispensable de réaliser des traitements numériques de la géométrie tels que la reconstruction, le recalage, la segmentation ou partitionnement, l'identification et la reconnaissance de formes caractéristiques et l'évaluation des écarts géométriques par rapport à des éléments de référence.

Les travaux que nous développons s'intéressent en particulier aux propriétés géométriques des nuages de points et au traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes. Il s'agit de développer un cadre mathématique à base de la géométrie discrète ou numérique pour traiter des problématiques importantes en métrologie des formes comme la reconstruction, le recalage, le partitionnement et l'association (fitting).

Dans cette partie, nous présentons les bases du traitement géométrique des nuages de points et les résultats fondamentaux que nous avons obtenus pour traiter deux problèmes importants en métrologie des formes : le recalage rigide et le partitionnement de nuages de points.

L'originalité de nos travaux est de considérer les courbures discrètes pour capturer les propriétés locales des nuages de points induites par les formes sous-jacentes. Ces propriétés différentielles sont par la suite exploitées pour améliorer les techniques algorithmiques de recalage rigide et le partitionnement de nuages de points à l'aide de nouveaux indicateurs de courbure.

### 1. Cadre des travaux

La nature discrète des données de mesure, représentée par des ensembles ou nuages de points, définit un cadre pour la représentation et la modélisation géométrique des formes sous-jacentes ainsi que pour leur traitement numérique. La donnée brute représentée par un point est une structure simple et de faible niveau sémantique alors qu'un nuage de points contient un ensemble d'informations pouvant représenter des formes complexes à différentes échelles géométriques.

Les nuages de points se caractérisent par leur complexité structurelle (nombre de points), les dimensions de la forme englobante, la répartition spatiale des points et les écarts par

rapport à des surfaces de référence. Il est également possible de qualifier ces nuages de points, en fonction des applications visées, à l'aide d'indicateurs de qualité (densité, complétude, bruit et exactitude) [HDD+ 92] [CBL 02] [Con 02].

L'Analyse en Composantes Principales [Jol 86] des données de nuages de points permet d'extraire des informations globales comme le centre de gravité, les directions principales d'inertie (valeurs propres de la matrice de covariance) et la répartition spatiale des points (calculée à partir des valeurs propres de la matrice de covariance) [Pau 03]. Cette analyse peut être également réalisée sur un ensemble de points extraits du nuage de points d'origine. Cependant, cette approche globale ne permet pas de calculer les caractéristiques locales des formes sous-jacentes qui contiennent la signature de la forme, du procédé de fabrication et de la mesure.

La géométrie différentielle s'intéresse aux propriétés locales des variétés et permet de définir un certain nombre d'outils "analytiques" pour étudier localement ces variétés [Car 76]. Les propriétés locales et intrinsèques sont définies dans un voisinage (éventuellement infinitésimal) des points de la variété. La géométrie différentielle discrète fait la synthèse entre la géométrie différentielle des variétés lisses (courbes et surfaces) et la géométrie discrète des polyèdres et des maillages triangulaires [Rom 13] [BSS+ 08]. Elle vise ainsi à développer des équivalents discrets aux notions géométriques de la normale et des courbures [MDS+ 03].

Dans le cas discret, le voisinage local d'un point est défini à partir des relations spatiales avec les autres points. Le diagramme de Voronoï est un outil de recherche de proximité permettant d'associer à chaque point d'un nuage de points son voisinage exclusif. Son dual, la triangulation de Delaunay permet de structurer un ensemble de points sous forme de maillage triangulaire qui interpole les points et approxime linéairement par morceaux la surface sous-jacente. Ces deux structures combinatoires s'avèrent très appropriées quant à la structuration de données des nuages de points et fournissent des garanties pour la reconstruction de surface.

Dans le cadre des travaux de thèse de N. El-Hayek [ElH 14] nous nous sommes intéressés aux techniques de reconstruction et d'approximation par maillage. A travers une étude bibliographique exhaustive des méthodes à base des structures combinatoires [ENA+ 14], nous avons testé et comparé les différents algorithmes pour la reconstruction du voisinage et de la topologie sous-jacente à des nuages de points. Cette reconstruction est une première approximation par maillage des nuages de points. Par la suite, dans le cadre des travaux de thèse de H. Zhao [Zha10], nous avons établi de nouvelles méthodes pour le calcul

de la normale et des courbures discrètes qui sont au cœur de nos travaux en traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes.

## 2. Reconstruction et approximation par maillage

Les techniques de maillages se basent principalement sur deux structures combinatoires : le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. Ces structures sont particulièrement utilisées pour des besoins de visualisation et de modélisation géométrique. L'algorithme optimal pour la triangulation de Delaunay est de l'ordre de O(N.logN), le pire étant de l'ordre de $O(N^2)$ (où N est la taille des données) [BY 98]. L'optimalité quasi linéaire n'est atteinte que pour des conditions d'échantillonnage uniformes [ABL03].

Edelsbrunner et Shah [ES97] ont prouvé qu'un sous-espace de la triangulation de Delaunay, appelé le Delaunay restreint, était une très bonne approximation de la surface recherchée avec des garanties géométriques et topologiques. Le problème de reconstruction de surface à partir des structures combinatoires de Voronoï et Delaunay cherche à reproduire le Delaunay restreint. Les techniques de reconstruction de surface par maillage se distinguent ainsi par la méthode utilisée et le processus de génération du Delaunay restreint.

### *2.a Algorithmes de reconstruction*

L'algorithme de sculpture développé par Boissonnat [Boi84] est l'un des premiers algorithmes pour la reconstruction de surface par maillage qui exploite une approche volumique. Il est basé sur la triangulation de Delaunay et cherche à éliminer des tétraèdres dont les sommets n'appartiennent pas au polytope convexe qui définit la surface de l'objet mesuré.

L'algorithme de reconstruction α-shapes a été développé par H. Edelsbrunner et E. Mucke [EM94]. Cet algorithme s'inspire des travaux de Boissonnat [Boi84]. Ici on ne cherche pas à mailler tout le volume occupé par le nuage de points P mais uniquement un certain volume contenant la frontière de P. La surface obtenue est une interpolation des points de P de manière à respecter l'appartenance à une sphère de rayon α (simplexes α-exposés). La méthode des α-shapes est une généralisation de l'enveloppe convexe, paramétrée par α. Cependant, seul un échantillonnage uniforme garantit une bonne reconstruction.

La technique du Crust ainsi que les améliorations apportées ont été développées par Amenta et al. [ABE97] [ABK98] [AB98] [ACD+00] [ACK01]. Ces travaux sont les premiers

à être accompagnés de garanties topologiques et géométriques pour la reconstruction. L'objectif primaire du Crust est de ne plus dépendre de paramètres globaux tels que α. Le Crust exploite le diagramme de Voronoï et les notions de pôles (sommets approximant l'axe médian). Il permet la reconstruction d'une surface manifold (pas d'éléments intérieurs au volume, pas d'auto-intersections). Cette surface reprend la connectivité entre les points de manière à reconstruire une surface linéaire par morceaux homéomorphe à la surface sous-jacente aux points. Le Power Crust [ACK01], amélioration du Crust, a été développé pour traiter des données légèrement bruitées, de l'ordre de la taille caractéristique locale (de l'échelle de l'échantillonnage).

A travers l'algorithme Cocone, Amenta et al [ACD+00] ont développé une nouvelle approche de simplification du Crust qui fournit une garantie d'homéomorphisme avec les surfaces $C^2$ des modèles CAO ainsi qu'une réduction de la complexité de l'algorithme de reconstruction dans le cas d'échantillonnages denses. Cet algorithme se base également sur le diagramme de Voronoï et effectue une estimation de la normale en chaque point. Les différentes versions du Cocone (TightCocone [DG03], RobustCocone [DG06], SuperCocone [DGH01] et dernièrement LocCocone [DDW11]) proposent des heuristiques de résolution des problèmes de reconstruction de surface en présence de sous-échantillonnages, bruits ou grands flots de données.

L'algorithme Eigen Crust a été développé par Kolluri et al. [KSO04] comme une amélioration du Power Crust [ACK01], du Tight Cocone [DG03] et du Robust Cocone [DG06]. L'Eigen Crust est très bien adapté à des données bruitées et à des nuages de points contenant des outliers ou des zones sous-échantillonnées.

L'algorithme d'interpolation des voisins naturels (Natural Neighbors Interpolation N.N.I) a été développé à l'INRIA par Boissonnat et Cazals [BC00]. Il a été implémenté dans Catia V5 en 2001. La particularité de cette technique de reconstruction de surface est qu'elle combine une méthode implicite inspirée par Hoppe et al. [HDD+92] et la triangulation de Delaunay. Boissonnat et Ghosh [BG09] ont proposé un nouvel algorithme basé sur les complexes de Delaunay tangentiels. Au lieu d'utiliser les coordonnées naturelles d'un point au sens des coordonnées de Sibson [Sib81] et de résoudre le problème selon un diagramme de Voronoï global, la méthode des complexes tangentiels utilise la technique de Boissonnat et Flötotto [BF04] pour associer un système de coordonnées d'une manière locale. La motivation majeure derrière les complexes de Delaunay tangentiels est de généraliser la reconstruction à des variétés de dimensions quelconques sans pour autant augmenter exponentiellement la complexité de calcul. D'un point de vue pratique, le problème en

dimensions élevées (d>3) est intéressant notamment dans les domaines de l'analyse d'informations et de l'apprentissage automatique.

Le Wrap (regroupement d'ensembles finis) est un algorithme développé par Edelsbrunner [Ede03] et amélioré par Ramos et Sadri [RS07]. Il est intégré dans le logiciel Geomagic. L'algorithme se base sur la triangulation de Delaunay mais diffère des autres algorithmes quant à la technique de reconstruction de surface. Une relation de flot (flow relation) entre les simplexes de Delaunay est définie. Par la suite, un arrangement de simplexes selon cette relation permet de les regrouper et d'identifier les groupes à éliminer (groupes formant des variétés instables) et les groupes à conserver (groupes formant des variétés stables). Les simplexes qui sont conservés sont des triangles reconstruisant la surface.

L'algorithme de convection géométrique proposé par R. Chaine [Cha03] se base sur un phénomène purement physique de convection inspiré par [ZOF01] et traduit en un algorithme géométrique qui dépend de la triangulation de Delaunay des points. Une surface englobant l'ensemble des points (l'enveloppe convexe) est considérée comme le point de départ de l'algorithme. L'enveloppe convexe est rétrécie suivant la direction du gradient d'une fonction de distance sur les points. L'algorithme s'arrête lorsque toutes les facettes de Delaunay restantes ont la propriété du graphe de Gabriel (le grand cercle de la sphère circonscrite à toute facette de Delaunay est maximal). L'algorithme de convection géométrique est dual à celui du Wrap dans le sens où la direction du flot est inversée [CG06] [ACA06]. Alors que le Wrap conserve les éléments de Delaunay qui ne suivent pas les flots qui se propagent à l'infini, l'algorithme de convection fait que l'enveloppe convexe des points se propage vers la surface sous-jacente.

### *2.b Comparaison des algorithmes de reconstruction*

Tous les algorithmes décrits précédemment tentent de générer les triangles de Delaunay restreint. Leur complexité dépend essentiellement du calcul de la triangulation de Delaunay. En vue de l'évaluation et de la comparaison des différents algorithmes, nous avons retenu quelques critères :

**Complexité.** La complexité d'un algorithme relève de la taille des données d'entrée, des opérations de l'algorithme lui-même, et de la taille des données de sortie. Elle se manifeste par deux grandeurs : le temps de calcul et la mémoire utilisés pendant l'exécution de l'algorithme.

**Garanties.** L'algorithme doit fournir en sortie un maillage surfacique qui soit conforme topologiquement et proche géométriquement de la surface sous-jacente. Le critère d'équivalence topologique est l'homéomorphisme du maillage à une surface. La proximité géométrique est telle que la distance entre le maillage et la surface sous-jacente soit petite. Pour cela, on utilise la distance de Hausdorff qui calcule la distance maximale séparant deux espaces topologiques (le maillage et la surface sous-jacente). Sous les termes de proximité géométrique, on cherche aussi une équivalence d'orientation du maillage reconstruit. La normale à chaque point du maillage doit être très proche de celle du point de la surface sous-jacente. Enfin, l'homogénéité des triangles est requise. Les triangles définissant le maillage sont, en général, de petite taille, à l'échelle de l'échantillonnage. Les triangles "grands" sont les triangles qui ne respectent pas la bonne connectivité entre les points et peuvent altérer la topologie de la surface sous-jacente.

**Robustesse et conditions d'utilisation.** La robustesse est la capacité d'un résultat à ne pas être modifié par une petite modification dans les données d'entrées. Pour la reconstruction de surface, on cherche à développer un algorithme qui soit le plus robuste possible aux données d'entrée (le nuage de points peut être bruité ou peut contenir des points aberrants). Les conditions d'utilisation intègrent les hypothèses associées aux différents algorithmes comme les conditions l'échantillonnage, la taille des données et des données supplémentaires fournies par des éléments externes (utilisateur, autres algorithmes et programmes). Pour les algorithmes étudiés, la reconstruction de surface n'est plus garantie lorsqu'un sous échantillonnage se manifeste.

Nous avons comparé les différents algorithmes à travers les résultats des états de l'art et des benchmarks de comparaisons des logiciels de reconstruction (pour le Cocone et ses variantes, des exécutables ont été fournis par T. Dey : http://www.cse.ohio-state.edu/~tamaldey/).

Nous avons testé différents jeux de données sur des points issus de modèles CAO (simulés) et des points issus de mesures. Le tableau suivant (table 3-1) montre les résultats de la comparaison de quelques algorithmes de reconstruction.

| | Complexity | Guarantees | Large datasets | Sampling | Input requirement |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sculpture** | $N^2.\log N$ | × | × | × | × |
| **α-shapes** | $N^2$ | × | × | × | Uniform sampling |
| **Cocone** | $N^2$ | ✓ | × | $\varepsilon \leq 0.05$ | Cocone Angle |
| **N.N.I** | $N^2$ | ✓ | ✓ | $\varepsilon \leq 0.25$ | Inside & outside spaces |
| **Wrap** | $N^2$ | ✓ | × | $\varepsilon \leq 0.01$ | × |
| **Convection** | $N^2$ (local) | × | ✓ | × | Normal direction |
| **Tangential complexes** | $N^2$ (local) | ✓ | ✓ | $\varepsilon \leq 0.09$ | Normals |
| **LocCocone** | $N^2$ (local) | ✓ | ✓ | $\varepsilon \leq 0.05$ | Cocone Angle |

Table 3-1: Comparaison de techniques de reconstruction de surface par maillage [ElH 14]

### *2.c Synthèse*

Malgré les importants développements théoriques et numériques, les algorithmes de reconstruction ne sont pas robustes aux bruits de mesure et sont limités pour une reconstruction propre autour des arêtes vives. Les garanties de reconstruction dépendent très fortement des conditions d'échantillonnage. Ces conditions sont rarement assurées lors de la mesure. La méthode N.N.I, à la base de Catia V5, dépend aussi très fortement des conditions d'échantillonnage. Mais avec les nouvelles améliorations implémentées dans Catia V6, les résultats sont meilleurs. Le Wrap de base [Ede03] est robuste par rapport à l'échantillonnage, mais il ne garantit pas la reconstruction d'une manière globale. Il a fallu attendre l'amélioration développée par Ramos et Sadri [RS07] pour voir l'algorithme du Wrap avec des garanties.

Malgré leur popularité à travers leur implémentation dans les logiciels Catia et Geomagic, la complexité de ces algorithmes n'est pas comparable à celle du LocCocone. Les deux premiers procèdent par une triangulation de Delaunay globale, alors que les algorithmes du Cocone procèdent par subdivision de l'espace. Un autre avantage supplémentaire que possèdent les algorithmes du SuperCocone et LocCocone est qu'ils sont parallélisables. Nous

avons par la suite adapté une version de Cocone qui a été implémentée par l'entreprise Lilloise Geomnia.

Nous avons également étudié les méthodes de reconstruction implicites qui se basent sur le calcul de fonctions implicites. La reconstruction se fait par l'extraction de l'iso-contour associé à un scalaire d'une fonction implicite. Ces dernières offrent une certaine robustesse de reconstruction par rapport à des données bruitées et contenant des points aberrants. Toutefois, celles-ci sont incapables de fournir des garanties de reconstruction.

## 3. Courbures discrètes pour la métrologie des formes.

La détermination des propriétés différentielles des nuages de points et des maillages est un champ très actif de recherches [Pet 02] [HP 04] [HPW 06] [BKP+ 10]. Deux approches majeures ont été développées : les méthodes par association (fitting) et les méthodes discrètes. Les méthodes par association nécessitent la reconstruction locale, au voisinage du point considéré, d'une surface lisse puis l'évaluation des paramètres différentiels au point de la surface [YL99] [Pet 02] [OF05]. Les méthodes discrètes exploitent les représentations à base de maillages pour définir un voisinage au point considéré et procèdent par discrétisation d'opérateurs continus ou par développement d'analogues discrets à ces opérateurs [HM01] [WKW+02].

### *3.a Calcul de la normale*

Le calcul de la normale en un point exploite les voisins naturels du point considéré. Dans le cas de maillages triangulaires de surfaces, les triangles incidents au point considéré définissent la première couronne de voisinage (one-ring vicinity). Le problème de calcul de la normale en un point consiste au calcul de la moyenne pondérée des normales des triangles incidents (figure 3-10). Ceci est déterminé par les formules suivantes :

$$\vec{n}(p) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \omega_i \cdot \vec{n}_i}{\left\| \sum_{i=1}^{N} \omega_i \cdot \vec{n}_i \right\|} \tag{3-1}$$

où $\vec{n}_i$ ($i = 1,...N$) est le vecteur normal unitaire du i-ème triangle incident $f_i$ avec

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{e}_{i1} \times \vec{e}_{i2} + \vec{e}_{i2} \times \vec{e}_{i3} + \vec{e}_{i3} \times \vec{e}_{i1}}{\left\| \vec{e}_{i1} \times \vec{e}_{i2} + \vec{e}_{i2} \times \vec{e}_{i3} + \vec{e}_{i3} \times \vec{e}_{i1} \right\|} \tag{3-2}$$

Les $\vec{e}_{ij}$ ( $j = 1, 2, 3$ ) représentent les vecteurs d'arêtes unitaires du triangle incident orienté.

$\omega_i$ ( $i = 1, ... N$ ) sont les poids affectés aux triangles $f_i$.

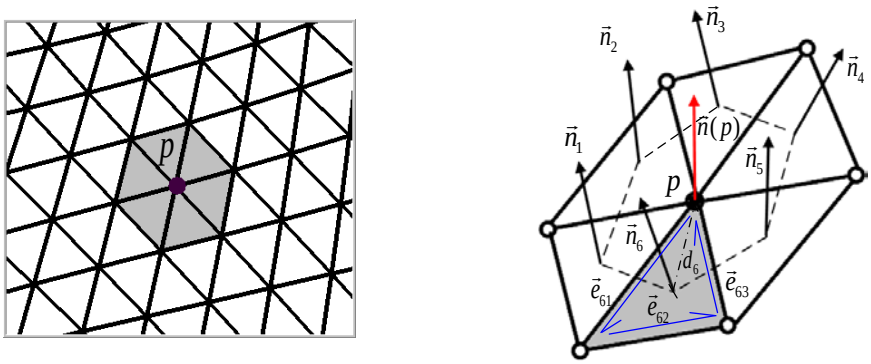



Figure 3-10: Paramètres pour le calcul de la normale [Zha 10]

Dans le cadre de la thèse de H. Zhao [Zha 10] et M. Zhang [Zha 11], nous nous sommes intéressés à déterminer une valeur appropriée de poids aux triangles de telle manière à traiter les différents cas de maillages triangulaires rencontrés dans les cas pratiques de reconstruction.

Nous avons ainsi proposé un nouveau poids à partir de la formule :

$$\omega_i = \frac{A_i / d_i^2}{\sum_{i=1}^{N} (A_i / d_i^2)} \tag{3-3}$$

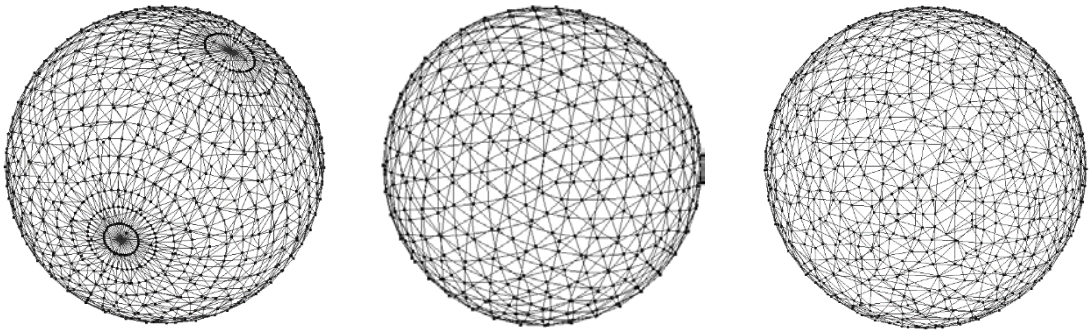
où $A_i$ correspond à l'aire du triangle incident $f_i$ et $d_i$ correspond à la distance entre le centre de gravité de $f_i$ et le point considéré.

Nous avons ainsi comparé notre méthode de calcul de la normale avec d'autres travaux de la littérature:

Gouraud [Gou 71] $\omega_i = 1$ (3-4)

Thürmer [TW 98] $$\omega_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \tag{3-5}$$

Shen [SLZ 05] $$\omega_i = \frac{d_i}{\sum_{i=1}^{N} d_i} \tag{3-6}$$



(a) Regular mesh (b) Uniform triangle mesh (c) Non-regular mesh

Figure 3-11: Tests de calcul de la normale sur différents maillages [Zha 11]

Les tests effectués ont porté sur une sphère unitaire avec différents échantillonnages et maillages [Zha 11] (figure 3-11). Nous avons évalué la dissimilarité (dissimilarity) entre la normale théorique et la normale calculée par les quatre différentes méthodes.

La méthode d'estimation de la normale que nous proposons présente une performance analogue (voire meilleure dans le cas de maillages non réguliers) que les méthodes décrites dans la littérature (table 3-2).

| **Case** | **Item** | **Gouraud** | **Thürmer** | **Shen** | **Zhao** |
|---|---|---|---|---|---|
| **(a)** | Mean | $7.7\times10^{-5}$ | $2.85\times10^{-4}$ | $2.2\times10^{-5}$ | $1.72\times10^{-4}$ |
| | StDev | $1.5\times10^{-4}$ | $3.76\times10^{-4}$ | $4.3\times10^{-5}$ | $2.81\times10^{-4}$ |
| **(b)** | Mean | $3.6\times10^{-5}$ | $3.8\times10^{-5}$ | $1.4\times10^{-5}$ | $3.7\times10^{-5}$ |
| | StDev | $4.3\times10^{-5}$ | $5.0\times10^{-5}$ | $1.8\times10^{-5}$ | $4.5\times10^{-5}$ |
| **(c)** | Mean | $5.93\times10^{-4}$ | $7.91\times10^{-4}$ | $6.19\times10^{-4}$ | $2.62\times10^{-4}$ |
| | StDev | $5.99\times10^{-3}$ | $1.04\times10^{-3}$ | $1.04\times10^{-2}$ | $3.92\times10^{-4}$ |

Table 3-1: Tableau de comparaison des statistiques de calcul de la normale [Zha 11]

Il serait également intéressant de compléter cette étude par une comparaison plus détaillée comme celle publiée récemment par Song et al. [SXG+ 15].

### *3.b Calcul des courbures discrètes*

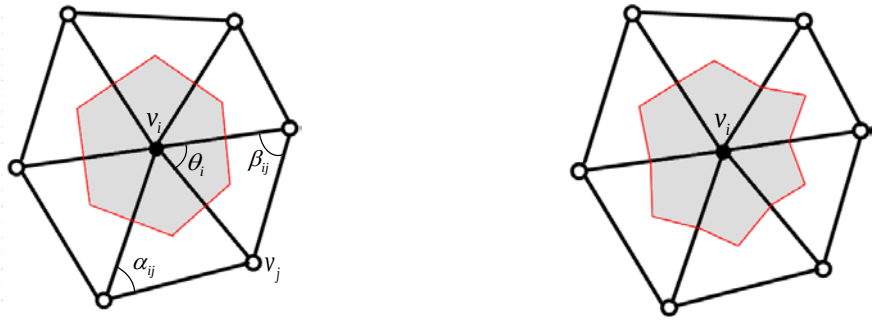
La majorité des méthodes de calcul de courbures discrètes s'appliquent aux maillages triangulaires. Cependant, ces maillages ne sont pas réguliers et exhibent des caractéristiques qui ont contribué au développement de plusieurs approches pour le calcul des courbures discrètes [CM03] [MDS+03] [Tau95b]. Meek et Walton [MW00] ont classé les méthodes de calcul de courbures discrètes en trois catégories. La première catégorie englobe les méthodes d'approximation par surfaces paramétriques. Il s'agit d'associer une surface paramétrique au

point considéré puis de calculer les dérivées premières et secondes par rapport aux paramètres de la surface. La deuxième catégorie regroupe les méthodes dites de discrétisation d'opérateurs. Il s'agit de déterminer un équivalent discret à des opérateurs de géométrie différentielle des surfaces lisses [MDS+03] [CLB+09]. La troisième catégorie concerne les méthodes à base de tenseur de courbure [CM03] [Tau95b] [Mor 08].

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes intéressés aux deux dernières catégories que nous présentons brièvement dans la partie suivante.

***Méthode de Meyer***

La méthode basée sur l'opérateur de Laplace-Beltrami proposée par Meyer et al. [MDS+03] est l'approche la plus reconnue parmi les méthodes de discrétisation d'opérateurs. Tout d'abord une région locale autour du point considéré doit être définie. Deux régions typiques sont présentées dans la figure 3-12. Meyer et al [MDS+03] ont prouvé que la région de Voronoï présente de meilleures performances que la région barycentrique.




(1) Voronoi-based cell (2) Barycenter-based cell

Figure 3-12: Régions locales autour d'un point [Zha 10]

Une fois la région locale définie, la méthode commence par le calcul des courbures Moyennes et Gaussiennes. Pour ce besoin, l'opérateur de Laplace-Beltrami est défini pour le cas discret à travers la formule suivante :

$$2H \cdot \vec{n}(p_i) = \lim_{A \to 0} \frac{\nabla A}{A} \tag{3-7}$$

Avec $A$ l'aire infinitésimale autour du point $p_i$, $\nabla$ est l'opérateur gradient et H est la courbure moyenne. L'opérateur $L$ qui transforme le point $p_i$ en un vecteur $2H \cdot \vec{n}(p_i)$, est connu comme l'opérateur de Laplace-Beltrami qui généralise l'opérateur Laplacien aux variétés [DHK+92]

$$L(p_i) = 2H \cdot \vec{n}(p_i) \tag{3-8}$$

L'approximation de la surface par triangulation permet d'induire une métrique locale ce qui permet de traduire l'opérateur de Laplace-Beltrami en simple opérateur Laplacien [DHK+92]. En utilisant le théorème de Gauss, l'intégrale du Laplacien sur une surface triangulée est calculée par la formule suivante [MDS+ 03] :

$$\iint_A L(p_i)\ dA = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_1(p_i)} (\cot\ \alpha_{ij} + \cot\ \beta_{ij})(p_i - p_j) \tag{3-9}$$

avec, $N_1(p_i)$ la première couronne de voisinage de $p_i$. Les autres paramétres géométriques sont définis dans la figure 3-12 (1).

En considérant l'aire de la région de Voronoï, l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit :

$$L(p_i) = \frac{1}{2A} \sum_{j \in N_1(p_i)} (\cot\ \alpha_{ij} + \cot\ \beta_{ij})(p_i - p_j) \tag{3-10}$$

On en déduit :

$$H(p_i) = \frac{1}{4A} \| \sum_{j \in N_1(p_i)} (\cot\ \alpha_{ij} + \cot\ \beta_{ij})(p_i - p_j) \| \tag{3-11}$$

Pour le calcul de la courbure Gaussienne, il suffit d'appliquer le théorème de Gauss-Bonnet :

$$\iint_A K\ dA = 2\pi - \sum_{j \in N_1(p_j)} \theta_j \tag{3-12}$$

La formulation discrète de la courbure Gaussienne au point $p_i$ devient alors :

$$K(p_i) = \frac{1}{A}(2\pi - \sum_{j \in N_1(p_j)} \theta_j) \tag{3-13}$$

Par la suite, les courbures principales sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} \kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \end{cases} \tag{3-14}$$

Dans le cas continu, $H^2 - K$ est toujours positif, il faudrait s'assurer ici que $H^2 - K \geq 0$ pour pouvoir calculer les courbures principales.

Cette méthode présente l'avantage d'exploiter les paramètres géométriques d'angles pour le calcul des courbures. Cependant elle ne permet pas de calculer les directions principales de courbures que permettent les méthodes à base de tenseur de courbure.

***Méthode de Cohen-Steiner et Morvan***

Dans le cas continu, le tenseur de courbure d'une surface $\Sigma$ est l'application $p \mapsto \kappa_N$ qui associe à chaque point $p$ de la surface la courbure normale $\kappa_N(\bar{u})$ dans la direction du vecteur unitaire $\bar{u}$ tangent à $\Sigma$ en $p$ [CM03] [Tau95b].

La courbure normale est calculée à partir de l'opérateur de forme (Shape Operator) $S_p(\vec{u})$ :

$$\kappa_n(\vec{u}) = S_p(\vec{u}) \cdot \vec{u} \tag{3-15}$$

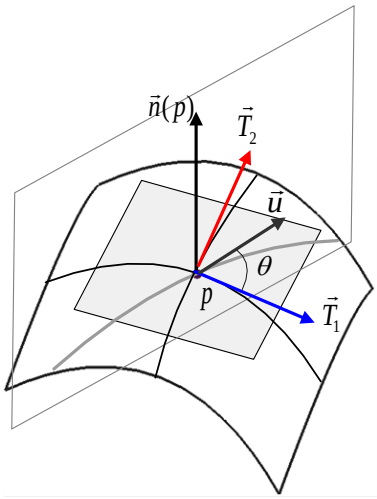



Figure 3-13: Normales et directions de courbures principales en un point $p$ [Zha 10]

La courbure normale est décrite par la formule suivante exprimée dans la base orthonormée $\{\vec{n}(p), \vec{T}_1, \vec{T}_2\}$ (figure 3-13) :

$$\kappa_n(\vec{u}) = \begin{bmatrix} n \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

Avec, $\vec{u} = n \cdot \vec{n}(p) + t_1 \cdot \vec{T}_1 + t_2 \cdot \vec{T}_2$ une direction arbitraire. Les directions tangentes à $\Sigma$ en $p$ correspondent à $n = 0$.

L'opérateur de forme, dans la base de ses vecteurs propres qui correspondent à la normale et aux directions principales de courbures est :

$$S_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

Dans le cas discret, Cohen-Steiner et Morvan [CM03] ont proposé de définir un opérateur de forme discret. Tout d'abord, ils ont défini un tenseur de courbure en un point le long d'une arête dans un voisinage du point considéré [ACD+03] [CM03]. Par la suite, et en considérant toutes les arêtes incidentes au point $p$, ils ont calculé l'opérateur de forme discret simplifié $\bar{\tilde{H}}_V(B)$ à partir de la formule suivante :

$$\bar{\tilde{H}}_V(B) = \frac{1}{A}\sum_{e \in E} \beta(e) \cdot length(e \cap B) \cdot (\vec{e} \times \vec{e}^T) \tag{3-18}$$

Avec $E$ l'ensemble de toutes les arêtes des maillages contenues dans le voisinage $B$, $A$ est l'aire de B, $\vec{e}$ est le vecteur unitaire de l'arête $e$, $length(e \cap B)$ est la longueur de l'arête dans la région $B$ et $\beta(e)$ est l'angle dihedral des deux triangles incidents à l'arête $e$ (figure 3-14).

Figure 3-14: Illustration de la méthode de Cohen-Steiner et Morvan [Zha 10]

La méthode de Cohen-Steiner et Morvan a des fondements mathématiques solides et des propriétés de convergence bien établies dans [CM03] [Mor08]. Cependant, la définition du voisinage de point considéré n'est pas bien établie. Ce qui a comme conséquences des recouvrements ou des non-recouvrements de zones pour le calcul du tenseur de courbure, ce qui fausse le résultat de calcul des courbures discrètes.

***Méthode de Zhao – Anwer - Bourdet***

Nous nous sommes intéressés dans le cadre de la thèse de H. Zhao [Zha 10] à remédier à ce problème en considérant d'une part la zone de Voronoï comme voisinage du point considéré et en affectant un poids $\lambda_e$ à chaque arête. Ce poids, normalisé, prend en considérations l'angle entre l'arête et le plan tangent et sa normalisation permet de garantir la même convergence que dans la méthode de Cohen-Steiner et Morvan. Nous avons ainsi introduit une nouvelle méthode appelée méthode de Zhao-Anwer-Bourdet [Zha 10] à travers la formulation suivante :

$$\bar{\tilde{H}}_V(B) = \frac{1}{A}\sum_{e\in E}\lambda_e \cdot \beta(e)\cdot length(e\cap B)\cdot(\vec{e}\times\vec{e}^T) \tag{3-19}$$

Où

$$\lambda_e = \frac{\arccos\dfrac{\vec{n}(p)\cdot\vec{n}(e)}{\|\vec{n}(p)\|\cdot\|\vec{n}(e)\|}}{\sum_{e\in E}(\arccos\dfrac{\vec{n}(p)\cdot\vec{n}(e)}{\|\vec{n}(p)\|\cdot\|\vec{n}(e)\|})} \tag{3-20}$$

et $\vec{n}(e) = \dfrac{\vec{n}_1+\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1+\vec{n}_2\|}$. Les différentes notations sont illustrées dans la figure 3-15.

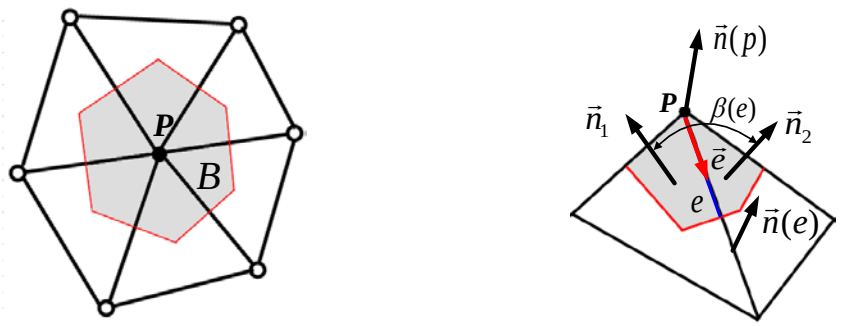



Figure 3-15: Illustration de la méthode de Zhao-Anwer-Bourdet [Zha 10]

Nous avons validé cette méthode en la comparant avec les méthodes de Meyer et de Cohen-Steiner et Morvan. Les tests réalisés ont porté sur le calcul de courbures de formes canoniques représentatives et dont les courbures principales sont connues (tableau 3-3).

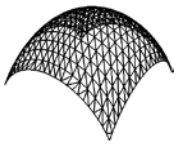
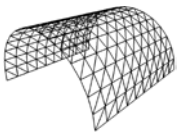
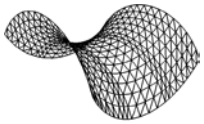
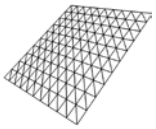
| Types | | Sphere | | Cylinder | | Symmetric saddle | | Plane | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Methods | | $\kappa_1$ | $\kappa_2$ | $\kappa_1$ | $\kappa_2$ | $\kappa_1$ | $\kappa_2$ | $\kappa_1$ | $\kappa_2$ |
| Theoretic | $\kappa_T$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 0.1 | -0.1 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{ave}$ | 0.10021 | 0.10004 | 0.10016 | 0.0 | 0.09994 | -0.09965 | 0.0 | 0.0 |
| Cohen | $\kappa_{\max}$ | 0.10128 | 0.10074 | 0.10178 | 0.0 | 0.10315 | -0.09933 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{\min}$ | 0.09936 | 0.09936 | 0.09933 | 0.0 | 0.09888 | -0.10539 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{ave}$ | 0.10057 | 0.09412 | 0.10029 | 0.0 | 0.09976 | -0.10021 | 0.0 | 0.0 |
| Meyer | $\kappa_{\max}$ | 0.10077 | 0.09716 | 0.10095 | 0.0 | 0.10245 | -0.10009 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{\min}$ | 0.09987 | 0.09248 | 0.09954 | 0.0 | 0.09900 | -0.10171 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{ave}$ | 0.09996 | 0.09977 | 0.10005 | 0.0 | 0.10001 | -0.09980 | 0.0 | 0.0 |
| Zhao | $\kappa_{\max}$ | 0.10057 | 0.10005 | 0.10011 | 0.0 | 0.10298 | -0.09946 | 0.0 | 0.0 |
| | $\kappa_{\min}$ | 0.09987 | 0.09944 | 0.09954 | 0.0 | 0.09903 | -0.10171 | 0.0 | 0.0 |
| | |  | |  | |  | |  | |
| | | $R=10$ | | $R=10$ | | $R=10$ | | | |

Table 3-3: Résultats des calculs des courbures discrètes [Zha 10]

avec $\kappa_{ave}$, $\kappa_{\max}$, $\kappa_{\min}$ les valeurs respectives de la moyenne des courbures, la valeur maximale et la valeur minimale des courbures calculées sur l'ensemble des points. $\kappa_T$ désigne la valeur théorique.

Afin de comparer les différentes méthodes, nous avons défini des fonctions de calcul d'erreurs par rapport aux valeurs théoriques (table 3-4) :

$$e_{ave} = \left| \frac{\kappa_{ave} - \kappa_T}{\kappa_T} \right| \tag{3-21}$$

$$e_{\max} = \left| \frac{\kappa_{\max} - \kappa_T}{\kappa_T} \right| \tag{3-22}$$

$$e_{\min} = \left| \frac{\kappa_{\min} - \kappa_T}{\kappa_T} \right| \tag{3-23}$$

| Types Methods | | Sphere | | Cylinder | | Symmetric saddle | | Plane | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\kappa_1$ (%) | $\kappa_2$ (%) | $\kappa_1$ (%) | $\kappa_2$ (%) | $\kappa_1$ (%) | $\kappa_2$ (%) | $\kappa_1$ (%) | $\kappa_2$ (%) |
| | $e_{ave}$ | 0.21 | 0.04 | 0.16 | 0.0 | 0.06 | 0.35 | 0.0 | 0.0 |
| Cohen | $e_{\max}$ | 1.28 | 0.26 | 1.78 | 0.0 | 3.15 | 0.76 | 0.0 | 0.0 |
| | $e_{\min}$ | 0.64 | 0.64 | 0.67 | 0.0 | 1.12 | 5.39 | 0.0 | 0.0 |
| | $e_{ave}$ | 0.57 | 5.88 | 0.29 | 0.0 | 0.24 | 0.21 | 0.0 | 0.0 |
| Meyer | $e_{\max}$ | 0.77 | 3.84 | 0.95 | 0.0 | 2.45 | 0.09 | 0.0 | 0.0 |
| | $e_{\min}$ | 0.13 | 7.52 | 0.45 | 0.0 | 1.00 | 1.71 | 0.0 | 0.0 |
| | $e_{ave}$ | 0.04 | 0.23 | 0.05 | 0.0 | 0.01 | 0.2 | 0.0 | 0.0 |
| Zhao | $e_{\max}$ | 0.43 | 0.05 | 0.11 | 0.0 | 2.98 | 0.54 | 0.0 | 0.0 |
| | $e_{\min}$ | 0.13 | 0.55 | 0.45 | 0.0 | 0.97 | 1.71 | 0.0 | 0.0 |

Table 3-4: Résultat du calcul des erreurs [Zha 10]

Il résulte de ces différents tests que la méthode proposée fournit de meilleurs résultats que les méthodes de Meyer et de Cohen-Steiner-Morvan [Zha 10].

La performance de notre méthode a également été évaluée comme le montre la figure 3-16. Les tests ont été effectués sur une plateforme MS Visual C++ 2005 sous Windows OS; 1.83GHz Core II CPU et 1.0G RAM [Zha 10].

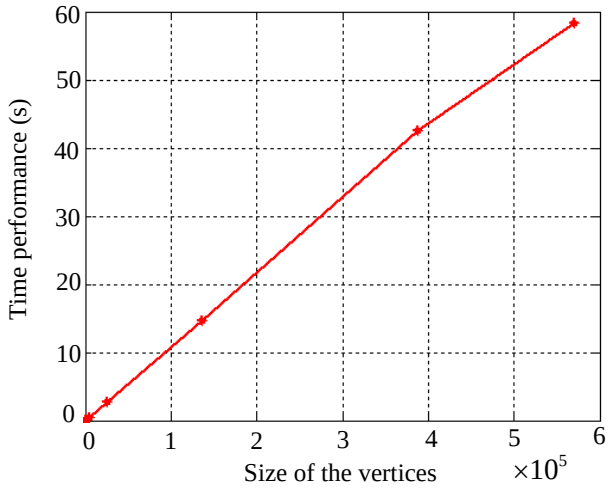



Figure 3-16 : Performance de la méthode

### *3.c Indicateurs de courbures*

Les courbures Gaussienne $K$ et Moyenne $H$ sont très utilisées comme indicateurs de courbure. En effet, leur signe permet une classification des surfaces comme le montre le tableau suivant issu des travaux de Besl et Jain [BJ86].

| | $K > 0$ | $K = 0$ | $K < 0$ |
|---|---|---|---|
| $H < 0$ | Peak (apogée) | Ridge (crête) | Saddle ridge (selle-crête) |
| $H = 0$ | —— | Flat (plane) | Minimal surface (surface minimale) |
| $H > 0$ | Pit (puit) | Valley (vallée) | Saddle valley (selle-vallée) |

Table 3-5: Type de surfaces selon le signe de la courbure Moyenne et Gaussienne [BJ86]

Cette classification ne permet pas une compréhension intuitive de la forme. Koenderink et Doorn [KD92] se sont intéressés à la perception de la forme ont proposé un nouvel ensemble d'indicateurs de forme. L'indicateur de forme $s$ (Shape Index) est une mesure de la forme, modulo sa taille. Il est défini dans l'intervalle [-1;1] et permet ainsi de définir une mesure continue et bornée. Il est défini par la formule suivante :

$$s = -\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right) \quad (\kappa_1 \geq \kappa_2) \tag{3-24}$$

$\kappa_1$ et $\kappa_2$ sont les courbures principales maximale et minimale au point considéré.

Cette définition ne permet pas de représenter les surfaces planes car les deux courbures principales sont nulles et Koenderink ne s'est pas intéressé à caractériser les formes planes. Nous avons ainsi étendu la définition de Koenderink aux surfaces planes par la formule suivante :

$$\begin{cases} s = -\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right) & (\kappa_1 \geq \kappa_2) \\ s = 2 \quad (\kappa_1 = \kappa_2 = 0) \end{cases} \tag{3-25}$$

Une carte de couleurs de Shape Index a également été introduite par Koenderink [KD92]. Un code couleur est associé à chaque intervalle de Shape Index. Nous avons également rajouté un code couleur noir pour caractériser le Shape Index de points planaires (figure 3-17).

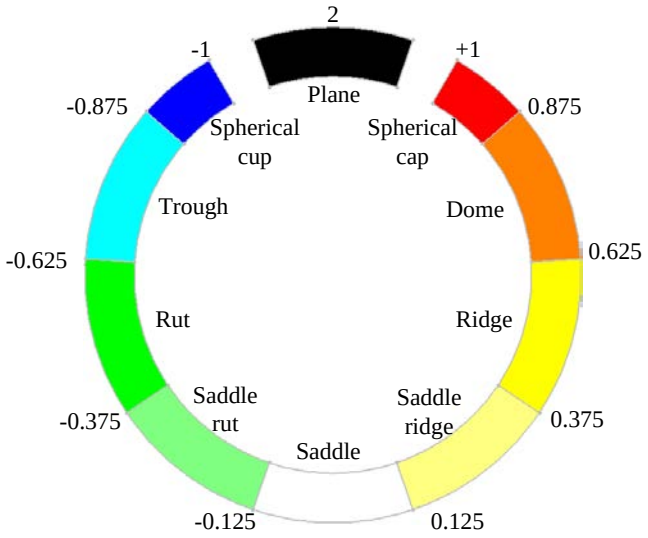



Figure 3-17: Type de surfaces en fonction de l'intervalle de l'indice de forme et leur carte de couleurs

Dans certain cas, il est plus intéressant de considérer une valeur associée à chaque intervalle d'indice de forme [Zha10]. Nous avons ainsi défini une étiquette (nombre entier) calculé à partir de la formule suivante :

$$T = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{\lceil 8s \rceil}{2} \right\rfloor & s \in [-1,1] \\ 5 & s = 2 \end{cases} \tag{3-26}$$

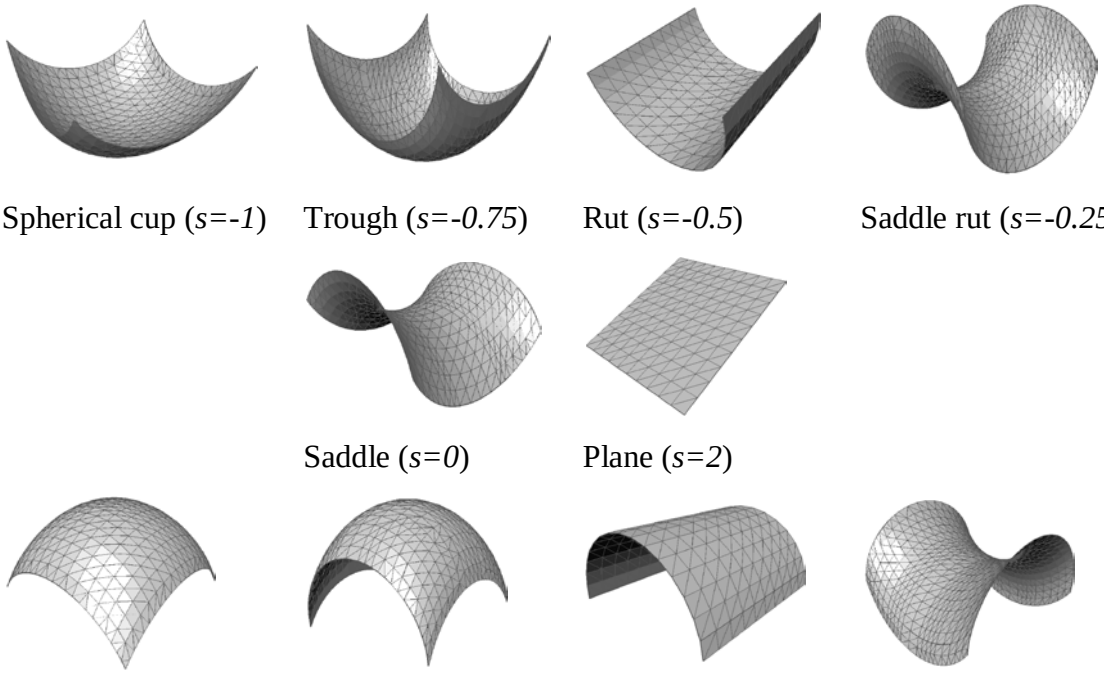
Avec $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de $x$ et $\lfloor x \rfloor$ la partie entière (inférieure) de $x$ .

Le tableau suivant résume cet étiquetage :

| Surface type | Shape index interval | Type label | Surface type | Shape index interval | Type label |
|---|---|---|---|---|---|
| Spherical cup | $s \in [-1, -\frac{7}{8}]$ | $T = -4$ | Spherical cap | $s \in (\frac{7}{8}, 1]$ | $T = 4$ |
| Through | $s \in (-\frac{7}{8}, -\frac{5}{8}]$ | $T = -3$ | Dome | $s \in (\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ | $T = 3$ |
| Rut | $s \in (-\frac{5}{8}, -\frac{3}{8}]$ | $T = -2$ | Ridge | $s \in (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ | $T = 2$ |
| Saddle rut | $s \in (-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}]$ | $T = -1$ | Saddle ridge | $s \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ | $T = 1$ |
| Saddle | $s \in (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$ | $T = 0$ | Plane | $s = 2$ | $T = 5$ |

Table 3-6: Type de surfaces, indice de forme et étiquette [Zha10]

Pour une meilleure compréhension des types de surface de la classification de Koenderink, des formes représentatives sont illustrées dans la figure 3-18.



Spherical cup (*s=-1*) Trough (*s=-0.75*) Rut (*s=-0.5*) Saddle rut (*s=-0.25*)

Saddle (*s=0*) Plane (*s=2*)

Spherical cap (*s=1*) Dome (*s=0.75*) Ridge (*s=0.5*) Saddle ridge (*s=0.25*)

Figure 3-18: Formes représentatives des types de surface

Un autre indice de courbure a été introduit par Koenderink pour caractériser de manière plus intuitive la courbure que les courbures Moyenne et Gaussienne. L'intensité de courbure (Curvedness) ou la courbure de Casorati est un paramètre caractéristique de la taille et mesure aussi l'intensité de la courbure. Il est défini par la formule suivante :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}} \tag{3-27}$$

Ces deux indicateurs sont à la base de nos travaux sur le recalage et le partitionnement de nuages de points à base des courbures discrètes.

## 4. Recalage à base de courbures discrètes

Dans cette partie, nous présentons les résultats des travaux relatifs au recalage rigide de deux nuages de points. Dans le cadre des travaux de thèse de H. Zhao [Zha10] et du postdoc de R. Sanders-Randoson (en collaboration avec le LNE dans le cadre du projet EMRP IND59 Microparts - Multi-sensor metrology for microparts in innovative industrial products), nous avons intégré les indicateurs de courbure dans les techniques de recalage rigide pour permettre de réaliser un recalage sans ajout de marqueurs sur la pièce ou dans des éléments d'environnement. Nous sommes partis du constat qu'une pièce numérisée contient des marqueurs naturels que les indicateurs de courbures permettent d'exhiber.

Les travaux présentés dans cette partie sont détaillés dans les articles :

***[A-6] Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., Curvature-based Registration and Segmentation for Multisensor Coordinate Metrology, Procedia CIRP, 10, 112-118, 2013***

***Rantoson, R., Nouira, H., Anwer, N., Mehdi-Souzani, C., Novel automated methods for coarse and fine registrations of point clouds in high precision metrology, International Journal of Advanced Manufacturing Technology (Accepté)***

### *4.a Positionnement des travaux*

Le processus de recalage de deux nuages de points est constitué de deux étapes principales [JH02] [KSL+09] (figure 3-19). Le recalage grossier (coarse registration) permet un alignement approximatif des nuages de points à la base de l'établissement de correspondances entre des points dans des zones de chevauchement (overlapping). Le recalage fin (fine registration) intervient par la suite et permet à travers la minimisation de la somme des carrés des distances entre les points mis en correspondance de déterminer la transformation rigide optimale entre les deux nuages de points. La qualité du recalage est ainsi tributaire de ces deux étapes et surtout de la qualité de la mise en correspondance dans l'étape du recalage grossier.

***Recalage grossier***

Le recalage grossier traite de la mise en correspondance entre les points des deux nuages de points considérés. Dans beaucoup d'applications et notamment en métrologie dimensionnelle, cette mise en correspondance s'effectue manuellement à travers

l'identification et la sélection de marqueurs. Ces marqueurs peuvent être d'origine naturelle (formes particulières sur la pièce ou sur l'outillage de mesure) ou d'origine artificielle (groupe de marqueurs ou cibles placés ou projetés sur la pièce).

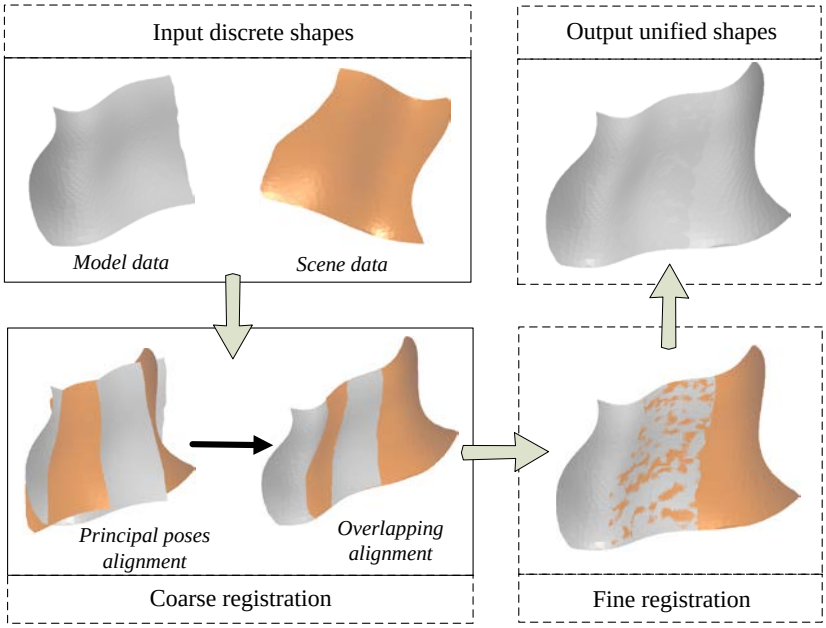



Figure 3-19: Processus de recalage [Zha 10]

Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés à la mise en correspondance semi-automatique ou automatique en essayant d'exploiter les caractéristiques géométriques ou de texture des nuages de points issus de numérisation. Dans certains cas, il est également possible d'effectuer une mise en correspondance à partir des paramètres de transformation rigide d'étalonnage extrinsèque ou de calibration de certains moyens d'acquisition.

La littérature scientifique dans le domaine du recalage grossier est très riche [DRL+15] et a été largement influencée par les travaux des communautés d'informatique graphique, de vision et de traitement d'image. Les méthodes basées sur l'extraction de caractéristiques (Feature Extraction - FE) sont parmi les plus développées. Parmi les caractéristiques, ou signatures locales étudiées pour la mise en correspondance, on peut citer les images de rotation ou spin-images [JH99], les cartes locales Splash [SM92], les harmonic shape images [ZH99], les signatures d'entités saillantes [LG05], les modèles à base de graphe [HH03], la couleur et la texture [KKW04] [JK99], les normales [ZGX05], les invariants intrinsèques [BDW+04], les approximations du second ordre [PHY+06] et les courbures [FL87] [HLL13].

D'autres techniques permettent un recalage grossier sans établir de correspondances à

priori basées sur des caractéristiques. Parmi ces techniques on peut citer l'analyse en composantes principales PCA [ZPM04] et ses améliorations [Liu09], la transformée de Hough (Hough Transform - HT) [SKB82][IK87], la méthode Ransac [CHC99] [MAM14], le maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Registration - MLR) [MS10], les algorithmes génétiques (Genetic Algorithms - GA) [BS96], le recuit simulé (Simulated Annealing - SA) [SMF+07] et les techniques de corrélation (Correlation) [SW11].

Les méthodes de partition de nuages de points ont été également exploitées [AFS06]. Ces méthodes utilisent la reconnaissance de primitives géométriques pour établir des correspondances. D'autres méthodes sont aussi à mentionner comme les méthodes des images Gaussiennes Généralisées (Extended Gaussian Images - EGI) [MPD06] qui sont très utilisées pour la reconnaissance de formes.

Le tableau suivant (table 3-7) permet de comparer les différentes approches selon plusieurs critères que nous avons définis et permet également d'identifier celles qui ont été utilisées en métrologie dimensionnelle. Il s'avère que malgré leur popularité, les méthodes basées sur l'extraction de caractéristiques sont sensibles aux bruits de mesure et nécessitent par conséquent une étape de débruitage ou de lissage. Les méthodes à base de PCA sont très rapides mais nécessitent un bon recouvrement initial. Les méthodes à base de la transformée de Ransac sont robustes et permettent de mettre en place des stratégies de recalage globale non exhaustives cependant le temps de calcul peut s'avérer très important.

| | PCA | HT | Ransac | EGI | Partition | FE | Correlation | GA | MLR | SA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Unknown correspondences | + ++ | +++ | ++ | | | | ++ | | ++ | + |
| Partial overlapping | | +++ | +++ | ++ | +++ | +++ | ++ | +++ | +++ | +++ |
| Different Densities | + | ++ | +++ | + | + | | | + | + | + |
| Robustness against noise | + | ++ | +++ | + | | | | | + | +++ |
| Accuracy | ++ | + | +++ | + | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | +++ |
| Sparsity of data | + | +++ | | | | | + | ++ | ++ | ++ |
| Computational time (less) | +++ | + | + | + | ++ | + | | | | |
| Applications in metrology | ++ | | | | ++ | + | + | | ++ | |

Table 3-7: Comparaison des techniques de recalage grossier

***Recalage fin***

L'algorithme ICP (Iterative Closest Point) [BM92] [CM91] est l'algorithme le plus populaire à la base des techniques de recalage fin. L'ICP est un algorithme itératif qui procède en quatre étapes :

1. Mise en correspondance des points ;
2. Calcul de la transformation rigide (R, t) optimale ;
3. Choix de la métrique d'erreur et calcul de l'erreur de recalage ;
4. Application d'un critère d'arrêt.

Plusieurs variantes de l'ICP ont été développées afin d'améliorer les performances de l'ICP original en termes de rapidité, de convergence et de robustesse. Ces variantes ont traité les différentes étapes de l'ICP et des analyses comparatives de celles-ci ont été présentées dans [TCL+13], [RL01] et [SMF+07].

La recherche des correspondances est une étape importante de l'ICP. Elle peut considérablement influencer les résultats de recalage fin. Plusieurs variantes de l'ICP se sont intéressées à optimiser cette recherche par des structures de données adéquates comme le k-D tree [GY03] et les techniques de Z-Buffer multiples [BS99]. Les techniques de mise en correspondance du recalage grossier ont été également exploitées [RL01] [RFL02]. Certaines approches ont cherché à réduire la complexité de l'ICP en effectuant une sélection ou un échantillonnage des points en correspondance [BM92]. Les paires de points sont pondérées ou rejetées à partir de distributions de distances [Zha 94], de contraintes géométriques [PG 95], de techniques statistiques robustes comme LMeds (Least Median of Squares) [MY95] [TFR 99] ou LTS (Least Trimmed Squares) [CSS+02].

La mise en correspondance s'appuie souvent sur le calcul d'une mesure ou de distance Euclidienne. Les distances les plus utilisées sont la distance point-point [BM92] [ZSN 03], la distance point-plan [CM91] [PS 03] et la distance de point projeté [BL95]. D'autres distances ont été investiguées récemment comme la distance de vecteur [MF07] et la distance d'Hausdorff [VSH 04]. De nouvelles mesures non Euclidiennes ont été également considérées. Elles se basent sur des caractéristiques comme la couleur [KKW04], les courbures principales [ZAB 13] et d'autres invariants calculés sur des ensembles de points [SLW 02].

Au niveau de la fonction objectif, le problème de minimisation est défini par la formule suivante :

$$f(R\ \ ,T\ \ ) = \min_{R\ \ ,T} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|R\ \ p_i + T\ \ - q_i\ \right\|^2 \qquad (3\text{-}28)$$

Avec $p_i$ et $q_i$ les points mis en correspondance et (R,T) les paramètres de la transformation rigide.

Initialement, la méthode Quaternion Unitaire (UQ) a été utilisée pour résoudre ce problème d'optimisation [BM92]. D'autres techniques comme la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD), le Quatenion Dual [EF95], Levenberg-Marquardt (LM) [Fit 03], et les réseaux de neurones [LYZ06] ont été évaluées et comparées. Au lieu de considérer la distance point à point, une autre formulation de la fonction objectif a considéré la distance point à plan [CM91] pour avoir une meilleure robustesse.

Le calcul de l'erreur de recalage s'appuie souvent sur la fonction d'erreur de la moyenne des sommes des carrés (MSE). D'autres fonctions d'erreur ont été développées et présentées dans [RL01]. Ces fonctions exploitent la moyenne des sommes des carrés [GMG+05], rajoutent des termes de pondération [LLH00], de texture [JK99] ou de courbure [Zha 10].

Les critères d'arrêt pour l'ICP sont les mêmes que pour beaucoup d'algorithmes itératifs à savoir le nombre maximum d'itérations ou une métrique d'erreur calculée entre deux itérations successives.

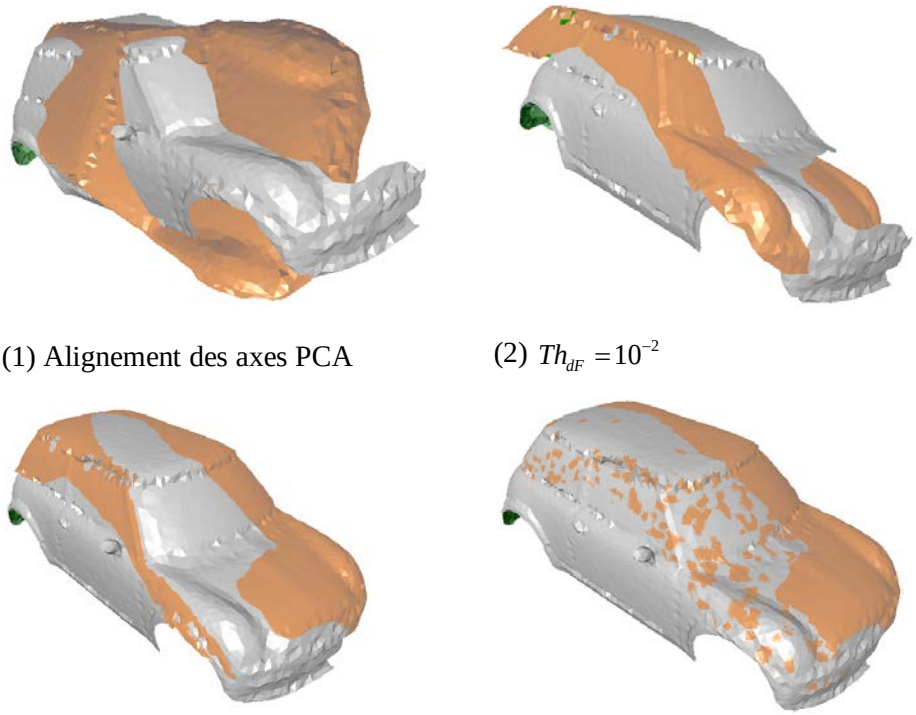
### *4.b Principaux résultats obtenus*

Les travaux initiaux que nous avons développés ont eu pour cadre la thèse de H. Zhao [Zha10]. Nous nous sommes intéressés à améliorer les techniques de recalage grossier en combinant la méthode PCA avec une méthode d'extraction de caractéristiques à base des indicateurs de courbure s et c. A notre connaissance, c'est la première exploitation de ce couple de paramètres de courbure pour les problèmes de recalage rigide.

A partir d'une étape d'alignement des axes principaux d'inertie de deux nuages de points, nous avons calculé les paramètres (s,c) de l'ensemble des points, puis nous avons défini une fonction de mise en correspondance et l'ensemble des points en correspondance par les formules suivantes :

$$d_f = \begin{cases} C_{p_i} - C_{q_i} \text{ if } T\ \ (p_i) = T\ \ (q_i) \\ \infty \quad\quad \text{ else } T\ \ (p_i) \neq T\ \ (q_i) \end{cases} \tag{3-29}$$

$$R_{pq} = \underset{q_i \in \psi(p_i)}{argmin}\, dist(p_i, q_i)\ where\ \Psi(p_i) = \ d_f < Th_{df} \tag{3-30}$$



(1) Alignement des axes PCA (2) $Th_{dF} = 10^{-2}$

(3) $Th_{dF} = 10^{-3}$ (4) $Th_{dF} = 10^{-5}$

Figure 3-20 : Résultats de recalage grossier à partir de différents seuils [Zha10]

La mise en correspondance est établie à partir d'un seuil $Th_{df}$ défini dans l'intervalle [$10^{-3}$ $10^{-7}$]. Cet intervalle a été calculé à partir de tests sur des nuages de points. A partir de cette mise en correspondance, nous calculons une transformation rigide optimale (formule 3-28) qui permet de corriger l'alignement initial des axes du PCA. La figure 3-20 montre des résultats de recalage grossier avec différentes valeurs de seuil.

Nous nous sommes intéressés par la suite au recalage fin et nous avons développé une nouvelle variante de l'ICP en intégrant les courbures principale des points. Cette méthode appelée CFR (Curvature-Based Fine Registration) présente l'avantage d'introduire une nouvelle distance appelée distance géométrique pour le calcul des correspondances (3-31).

$$dist(p_i, q_j) = d_g(p_i, q_j) = \lambda . d_e + (1 - \lambda) . k . d_c \quad (3\text{-}31)$$

Avec

$$d_e = \|p_i - q_j\| \quad (3\text{-}32)$$

$$d_c = \sqrt{(\rho_{1p} - \rho_{1q})^2 + (\rho_{2p} - \rho_{2q})^2} \quad (3\text{-}33)$$

et $\rho_1 = {}^1/_{\kappa_1}$, $\rho_2 = {}^1/_{\kappa_2}$ ($\kappa_1$ et $\kappa_2$ sont les courbures principales), $\lambda \in [0,1]$. Le coefficient k est une constante de normalisation et le paramètre $\lambda$ est un paramètre d'ajustement entre les effets de distance et de courbure.

Cette nouvelle distance permet d'accélérer la recherche des points et permet de développer une variante de l'ICP plus rapide et avec de faibles erreurs de recalage. Nous avons également défini des critères de rejets de points situés dans le nuage de points de référence (ce que ne permet pas l'ICP original). Ces critères correspondent à des valeurs seuil de de la distance géométrique et à l'élimination des points situés dans la frontière ou le bord pour lesquels les erreurs de l'estimation des paramètres de courbure sont non négligeables.

Les étapes de la méthode CFR sont décrites dans la figure 3-21. La méthode CFR a été validée sur des exemples de nuages de points de la littérature. Nous avons testé sa robustesse en faisant varier la densité de points, les zones de chevauchement (overlapping) ainsi que le paramètre d'ajustement $\lambda$. Les figures 3-22 et 3-23 et le tableau 3-8 illustrent quelques résultats.

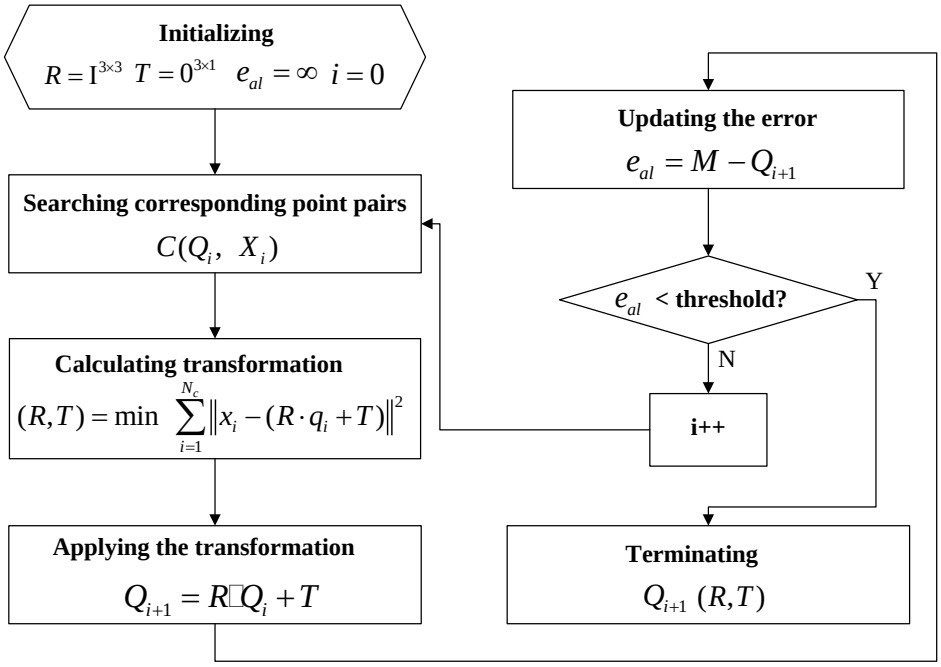
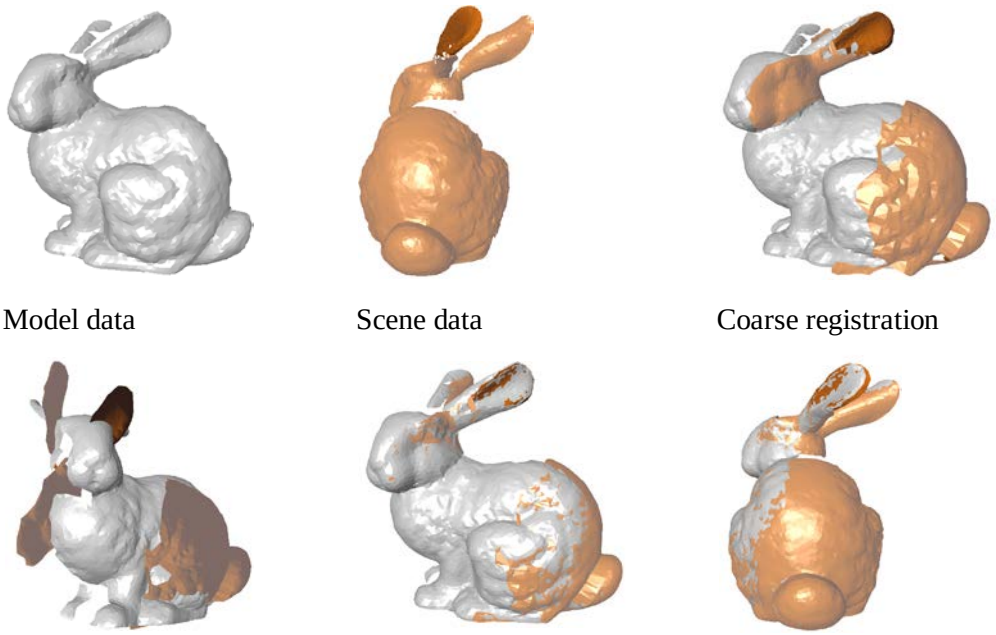


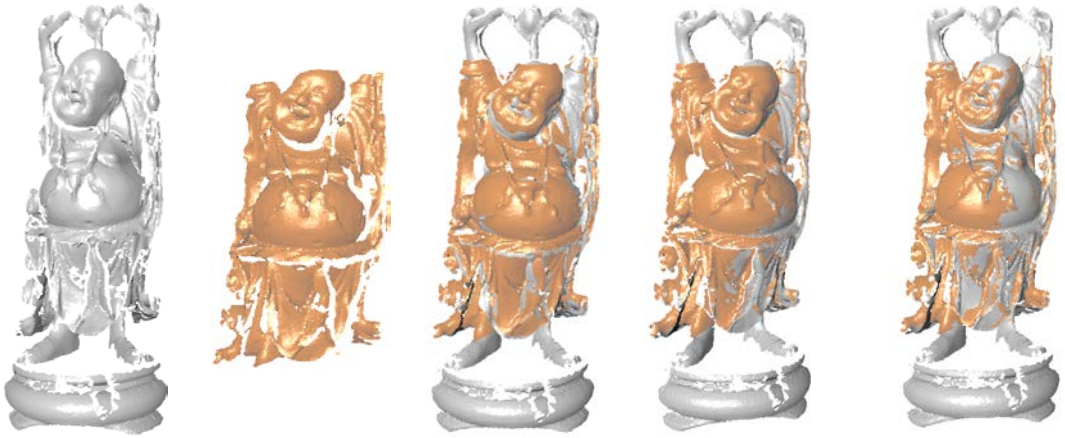

Figure 3-21 : Etapes de la Méthode CFR



Model data Scene data Coarse registration

Fine registration : ICP Fine registration : The CFR method

Figure 3-22 : Recalage de nuages de points (Stanford Bunny)

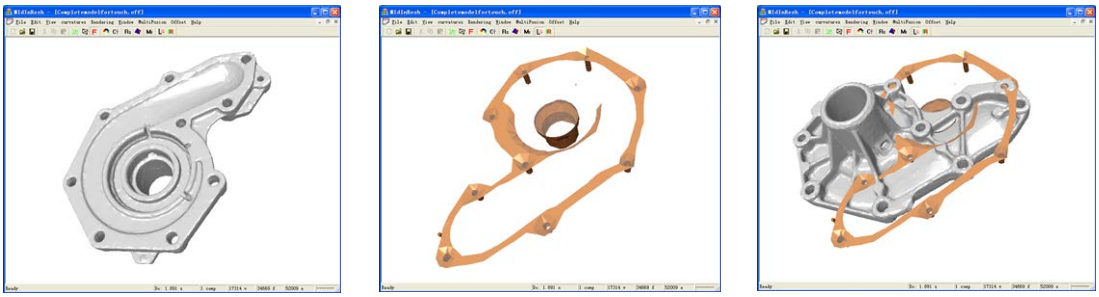


Model data Scene data Coarse registration Fine registration: ICP Fine registration: The CFR method

Figure 3-23 : Recalage de nuages de points (Future Buddha)

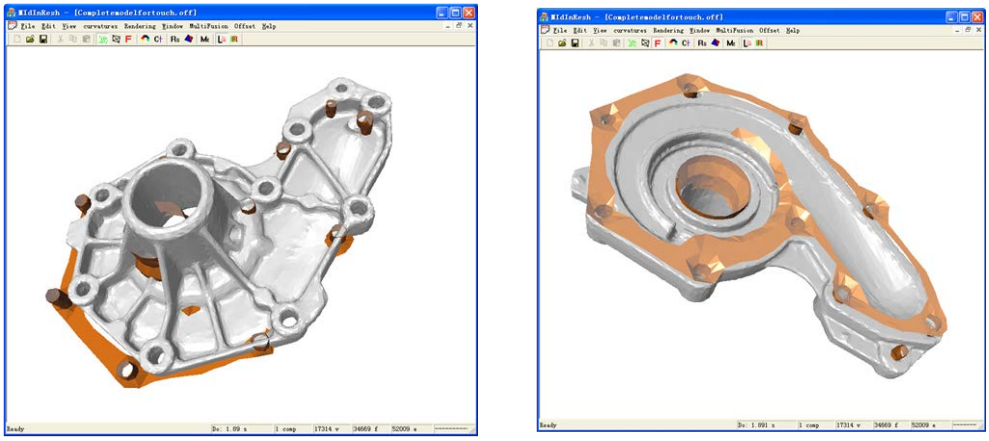
| Data | $N_S$ | $N_M$ | Original ICP | | | CFR | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $e_{al_icp}$ (mm) | $i_n$ | $t_{icp}$ (s) | $e_{al_cfr}$ (mm) | $i_n$ | $t_{cfr}$ (s) |
| Bunny | 3533 | 3156 | 0.108053 | 40 | 492.732 | 0.0018138 | 15 | 159.853 |
| Buddha | 10434 | 11831 | 0.015292 | 40 | 2911.78 | 0.0008479 | 13 | 1644.25 |

Table 3-8: Comparaisons entre la méthode CFR et l'ICP



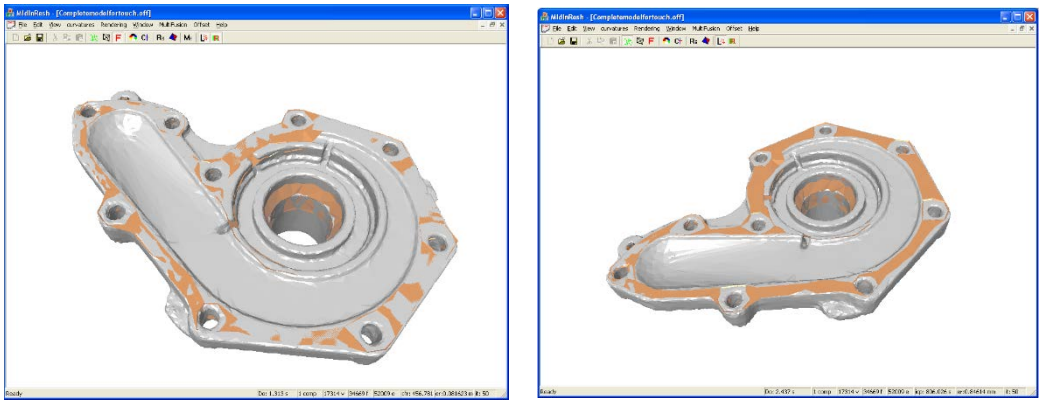
(1) Model data (2) Scene data (3) Their relative positions

Figure 3-24 : Données de numérisation du couvercle de pompe



(1) Principal poses alignment (2) Overlapping alignment

Figure 3-25 : Résultats du recalage grossier



(1) The CFR method (2) The initial ICP algorithm

Figure 3-26 : Résultats du recalage fin

Nous avons également appliqué la méthode CFR à un exemple industriel de couvercle de pompe numérisé sur la plateforme multi-capteurs présentée dans la partie II.2. Les figures 3-24 à 3-26 montrent les différents résultats de recalage dans le cas de données de mesure issues de deux différents capteurs. Le Model data correspond au nuage de points mesuré par laser scanning 17314 points). Le Scene data correspond à des points mesurés par palpeur à contact (1200 points). Le temps de traitement de la méthode CFR est 456.781s avec 30 itérations. L'erreur quadratique de recalage est 0.0816mm. L'ICP de base dure 806.026s avec 50 itérations et une erreur de recalage de 0.846mm.

Ces travaux ont servi de base pour le développement d'un démonstrateur (DSP-COMS) au LURPA. DSP-COMS est une plateforme développée en C/C++ dans un environnement OpenGL et utilisant la librairie géométrique CGAL. Nos travaux ont également été utilisés dans la cadre du projet EMRP IND59 Microparts - Multi-sensor metrology for microparts in innovative industrial products dont l'objectif est de développer des algorithmes pour le recalage rigide et non rigide.

De nouveaux travaux développés en collaboration avec le LNE nous ont permis d'étendre la courbure discrète, pour le recalage grossier, à la transformée de Hough et au Ransac. Nous avons ainsi introduit des contraintes pour la mise en correspondance à base de l'indice de forme et de l'intensité de courbure.

Une nouvelle fonction objectif a également été développée pour le recalage fin. Cette fonction combine la composante point-point et la composante point-plan :

$$(R,T) = \min_{R,T} \sum_{i=1}^{N_\Omega} w_i \left[ \alpha_i \left\| Rp_i + T - q_i{}^* \right\|^2 + \left( \beta_i \left( Rp_i + T - q_i \right)^T n_i \right)^2 \right] \qquad (3\text{-}34)$$

Avec $w_i$ des poids de correspondance définis par les critères de Huber [Hub14]ou Tuckey [MAM14], $q_i{}^*$ la projection de $q_i$ sur la surface locale Moving Least Square Surface (MLS) [OGG09] déterminée à partir des voisins de $q_i$ et $(\alpha_i, \beta_i = 1 - \alpha_i)$ sont des poids d'ajustement entre la composante point-point et la composante point-plan. Ces poids sont établis à partir de l'étiquette de l'indice de forme.

## 5. Partitionnement à base de courbures discrètes.

Dans cette partie, nous présentons les résultats des travaux relatifs au partitionnement appelé également segmentation ou partition de nuages de pointes et de maillages. Dans le cadre des travaux de thèse de H. Zhao [Zha10] et leurs prolongements pour la reconnaissance d'entités d'usinage à partir de simulations géométriques d'usinage (postdoc de S. Xu et M. Ghassany), nous nous sommes intéressés à développer de nouvelles techniques de partitionnement de maillages issus de numérisation ou de simulation numérique d'usinage en exploitant les indices de courbures (s,c) présentés précédemment.

Nous avons ainsi proposé un partitionnement par régions associées à des ensembles de points ayant la même étiquette d'indice de forme. L'intensité de courbure quant à elle a permis d'identifier les points de grande intensité de courbure qui représentent les points situés sur des arêtes ou présentant un grand changement de courbure. L'approche développée permet de tenir compte des erreurs de calcul des courbures discrètes et du bruit de mesure.

Le travail réalisé a permis le développement d'un démonstrateur intégré dans la plateforme DSP-COMS et a été testé sur des cas industriels. Nos travaux ont été prolongés par la suite pour la reconstruction de formes et la reconnaissance d'entités d'usinage STEP-NC à partir de données de simulation numérique d'usinage NC-SIMUL dans le cadre d'un projet de fonds unique interministériel FUI 14 ANGEL (Atelier Numérique coGnitif interoperablE et agiLe) et que nous continuons en collaboration avec l'université de Beihang à Pékin (S. Xu et L. Qiao).

### *5.a Positionnement des travaux*

Le partitionnement de nuages de points et de maillages est une problématique récurrente en traitement numérique de la géométrie dans plusieurs domaines comme l'imagerie médicale, la numérisation d'objets d'arts ou d'ouvrages de génie civil et en ingénierie mécanique au niveau de la rétro-conception.

Des états de l'art des méthodes de partitionnement de maillages ont été décrits dans [APP+07] [Sha 08] [CGF09] [TPT15]. Plusieurs classifications des méthodes et techniques de partitionnement ont été proposées. Dans les applications d'ingénierie mécanique [APP+07], deux grandes familles de méthodes sont exploitées. La première famille de méthodes cherche à identifier des contours et des discontinuités d'arêtes dans les nuages de points et les maillages [BV04] [SP08] [XLX+11] [KK05] [SPP+02]. La deuxième famille de

méthodes s'intéresse à agréger les points et les maillages en cluster pour définir des régions à propriétés géométriques homogènes. Par la suite, les arêtes et les contours sont obtenus par l'intersection de ces régions [KCL09] [WK05] [BJ88] [YLW06]. Des méthodes hybrides se sont également développées en exploitant les avantages de chaque famille de méthode [LDB05] [RB03].

Les méthodes à base de régions présentent plusieurs avantages. La décomposition par régions regroupant des points ayant des propriétés géométriques similaires permet une meilleure identification de formes en ingénierie mécanique. Gelfand et Guibas [GG04] ont développé un algorithme de partitionnement à base de classes d'invariance de mouvement rigide. Les propriétés différentielles (normale, courbure normale, courbure Gaussienne et courbure moyenne) sont très utilisées dans les méthodes à base de région car elles sont moins sensibles aux bruits que les méthodes à base de contours. En effet, l'estimation des paramètres différentiels pour des points d'arêtes ou situées aux frontières de l'objet est entachée de grande incertitude. Les indicateurs de courbure comme la courbure Gaussienne et Moyenne sont les meilleures caractéristiques de la forme intrinsèque sous-jacente et participent à la classification des formes. Cependant, l'échantillonnage, la densité, la répartition spatiale des points et les bruits de mesure ont un effet considérable sur ces caractéristiques. Malgré leurs inconvénients pour les données bruitées, les méthodes à base de contours sont à la base d'algorithmes présentant de meilleures performances de temps de calcul.

Les méthodes hybrides se sont bien développées ces dernières années. Plusieurs approches commencent par identifier et isoler des caractéristiques de bord comme les arêtes vives et les petits arrondis. Par la suite, les points non affectés sont regroupés en sous-régions par des approches dites de décomposition/fusion ou de croissance de régions comme les hiérarchies de tests sur des indicateurs [BV04], la combinaison des courbures et les algorithmes K-means de clustering [LDB05], la combinaison des propriétés différentielles et du clustering non paramétrique [YSY+05][YGZ+05][ZLX+08][LX08]. D'autres approches exploitent la croissance de régions et permettent l'identification des arêtes vives et des contours pendant ce processus [VS05] [MDK+06]. Dans le même registre, Di Angelo et Di Stefano [DD15] ont récemment développé un critère de similarité à base de paramètres de courbure et de logique floue pour une meilleure robustesse aux bruits de mesure.

### *5.b Principaux résultats obtenus*

Les travaux de partitionnement que nous avons développés dans le cadre de la thèse de H. Zhao [Zha10] s'inscrivent dans le cadre des méthodes hybrides de partitionnement combinant la croissance de régions et les indicateurs de courbures. A notre connaissance, ces travaux figurent parmi les premiers à considérer les indicateurs de courbures (s,c) pour le partitionnement (les travaux récents de Tsuchie et al. [THH14] exploitent les indicateurs de courbures en combinaison avec d'autres paramètres).

Les travaux que nous avons développés font l'hypothèse que les nuages ou les maillages sont relativement denses et peuvent-être bruités. Les formes mesurés ou celles issus de la CAO doivent représenter des objets mécaniques. En d'autre terme, notre approche n'est pas adaptée à des objets comme des œuvres d'arts ou des formes issus de la nature ou du vivant. Notre approche n'était pas initialement adaptée aux maillages de visualisation ou des maillages STL. Cependant à travers nos recherches sur la reconnaissance d'entités d'usinage STEP-NC à partir de la simulation géométrique d'usinage, nous avons adapté notre méthode aux triangulations de visualisation.

La méthode hybride de partitionnement développée comporte trois étapes principales (figure 3-27) : reconnaissance de type de surfaces (local surface type recognition), clustering de points (vertex clustering) et génération de régions (connected region generation).

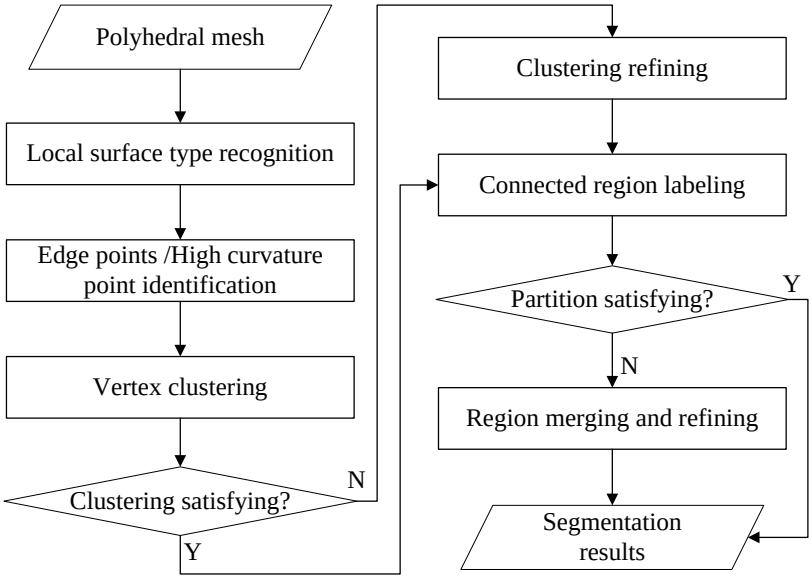



Figure 3-27 : Méthode hybride de partitionnement [Zha 10]

Les détails de cette méthode sont présentés dans l'article :

***[A-6] Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., Curvature-based Registration and Segmentation for Multisensor Coordinate Metrology, Procedia CIRP, 10, 112-118, 2013***

Nous n'allons par la suite présenter que les grandes lignes de cette méthode.

***Reconnaissance de type de surfaces***

Les différents type de surfaces sont présentés dans III.3.c Il est à rappeler que nous utilisons ici les indicateurs de courbures (s,c).

***Clustering de points***

Tout d'abord, nous commençons par identifier les arêtes vives, les arêtes lisses et les points à grande intensité de courbure en fixant une borne sur l'indicateur de courbure c (figures 3-28 et 3-29).

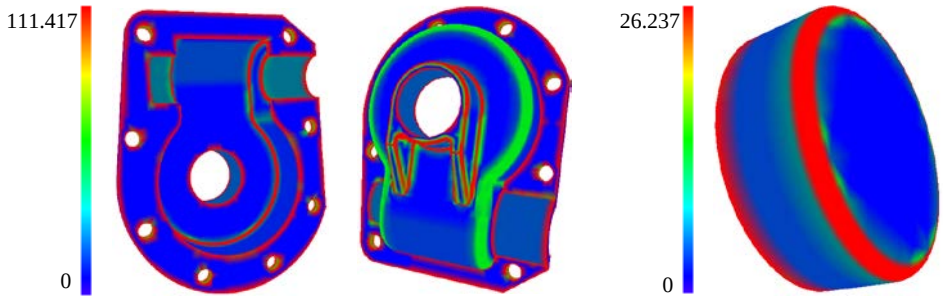
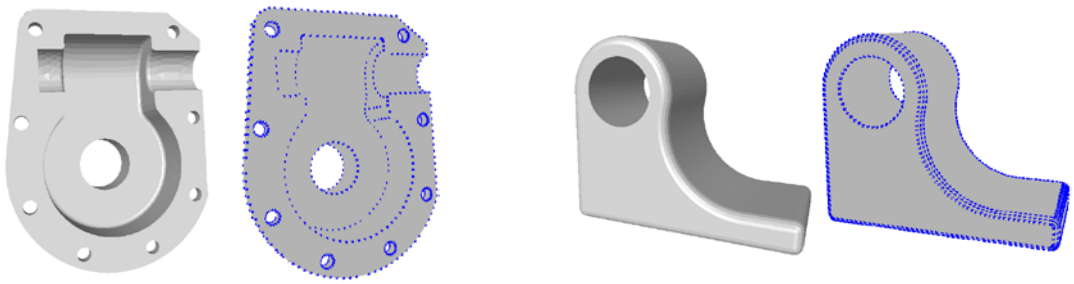



Figure 3-28 : Carte d'intensité de courbure [Zha 10]

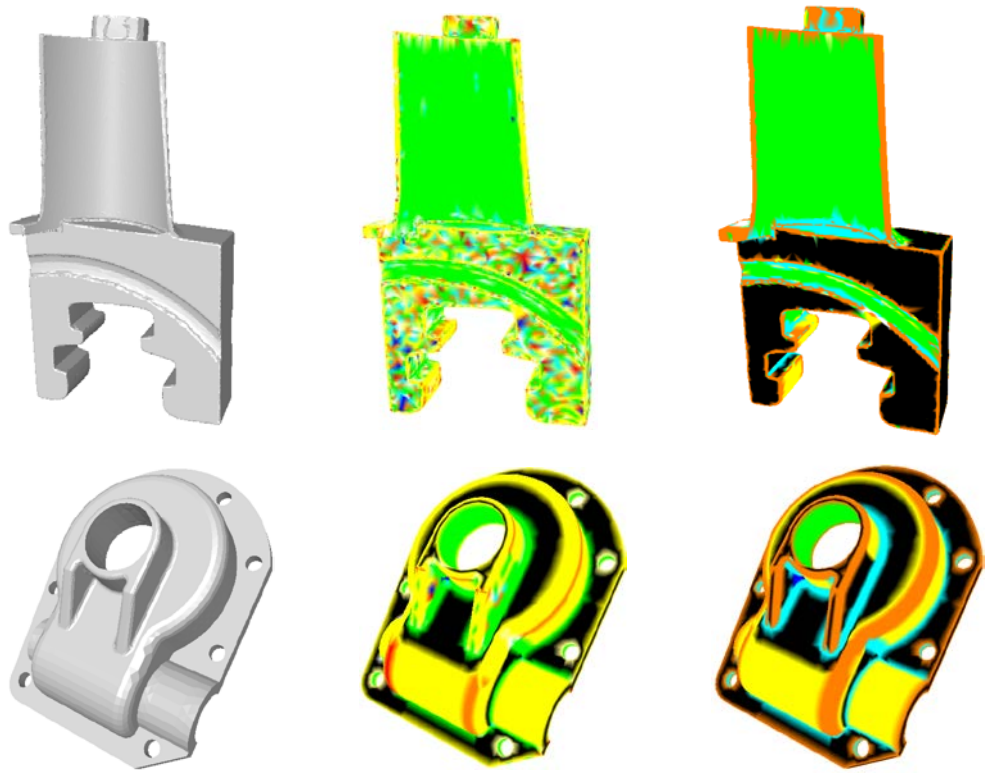


(1) Arêtes vives (2) Points à grande intensité de courbure

Figure 3-29 : Detection of the points in sharp edges and high curvature regions [Zha 10]

Par la suite, chaque point du maillage appartenant aux catégories décrites précédemment (III.3.c) est étiqueté en fonction de son indice de forme et une couleur lui est affectée (vertex clustering). Les erreurs de calcul de courbures et les bruits de mesure induisent de grandes

incertitudes sur cet étiquetage. Pour y remédier, nous avons développé une procédure d'affinage des points (vertex refining) à base de mesure de similarités et de possibilités. En fonction de l'étiquette de l'indice de forme de ses points voisins, un point a ainsi la possibilité de changer d'étiquette. Ce processus est répété jusqu'à ce que les points ne puissent plus changer d'étiquette (figure 3-30).



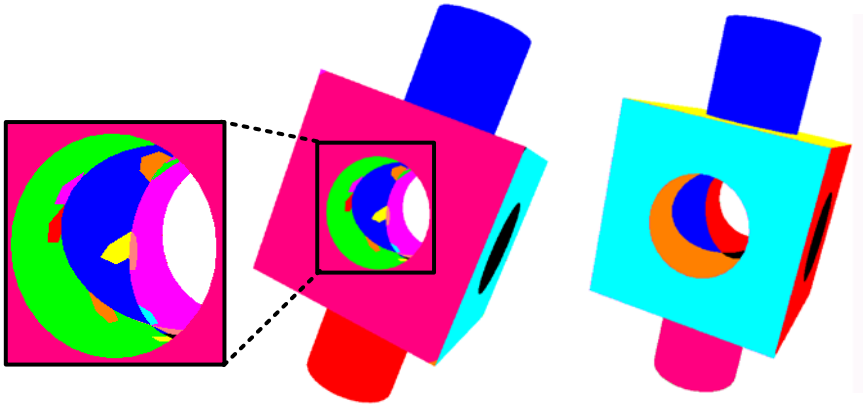
(1) Discrete shapes (2) Initial cluster results (3) Cluster refining results

Figure 3-30 : Exemples de vertex clustering et cluster refining [Zha 10]

***Génération de régions***

Dans cette étape, la création de régions est initialisée par le clustering des points. Il est à noter que les points identifiés par une grande valeur du paramètre c appartiennent aussi à des clusters. Par la suite, un étiquetage de points en région est initialisé. Il est basé sur les techniques algorithmiques d'étiquetage en composantes connexes [HCS+07]. Cet étiquetage exploite les valeurs de l'étiquette de d'indice de forme des points voisins. Ainsi un premier ensemble de régions est généré. Toutefois, plusieurs régions peuvent exister et des inclusions de régions sont observées (figure 3-31). Une méthode d'affinage et de fusion est appliquée aux différentes régions. Cette méthode itérative exploite des mesures de distances et de similarités entre régions que nous avons développées. La figure suivante illustre le processus

de génération de régions (figure 3-31).

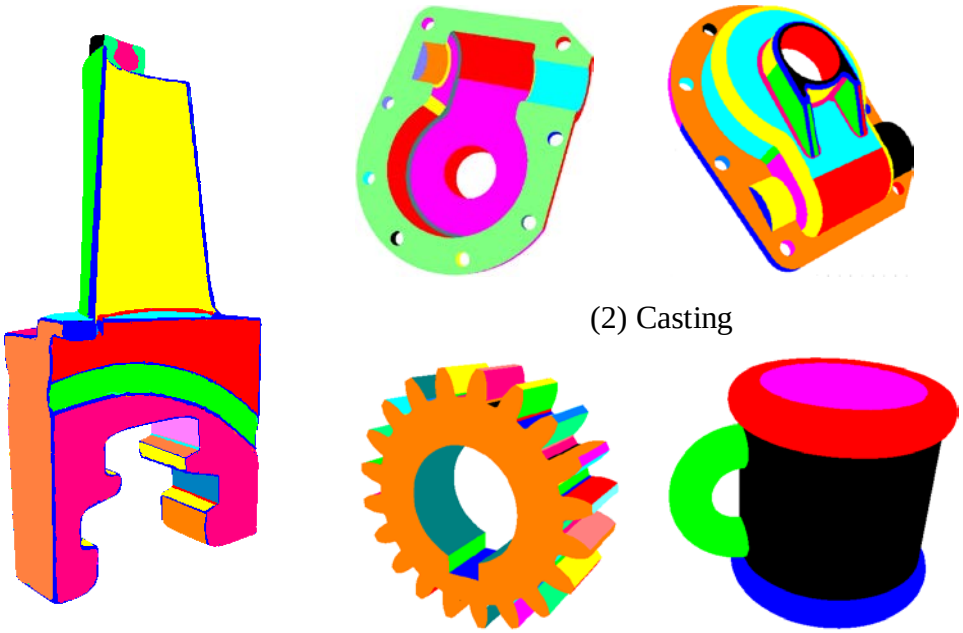


(1) Initial segmented regions (2) Refined regions after region merging

Figure 3-31 : Affinage et fusion de regions connectées [Zha 10]

***Quelques résultats de partitionnement***

Les exemples suivants (figure 3-32) montrent quelques résultats de partitionnement des nuages de points issus de discrétisation de modèles CAO ou de mesures.

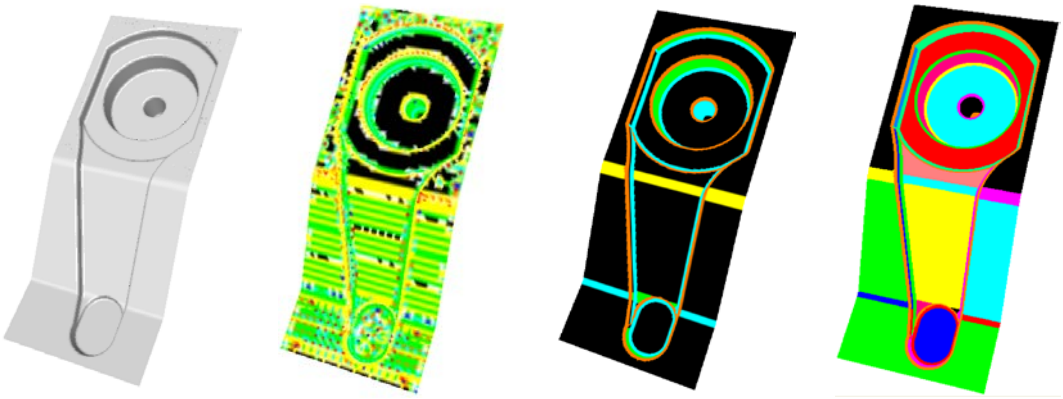


(2) Casting

(1) Blade (3) Gear (4) Cup

Figure 3-32 : Résultats de partitionnement [Zha 10]

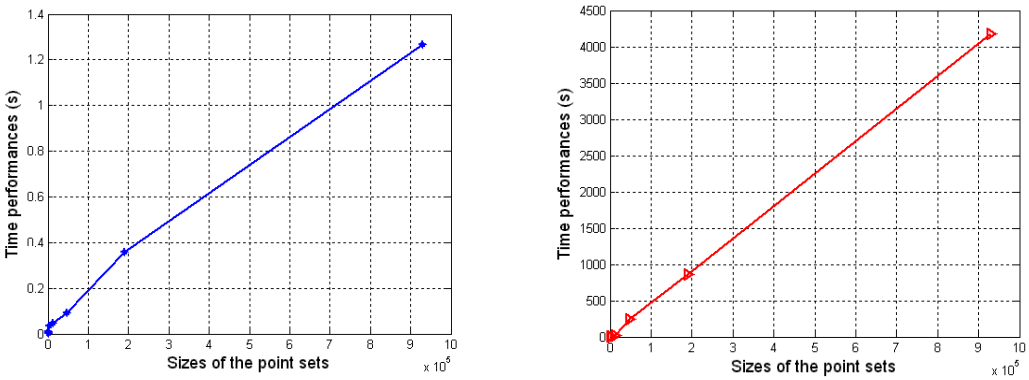
La robustesse de notre approche sur des données auxquelles nous avons ajouté un bruit Gaussien est illustrée dans le cas d'un outillage de forge (figure 3-33).



(1) Discrete shape (2) Initial clustering (3) Cluster refining (4) segmentation

Figure 3-33 : Partitionnement de nuage de point bruité [Zha 10]

La figure 3-34 donne quelques indications en termes de temps de calcul sur différents cas étudiés. Si le clustering de points est relativement rapide, la génération de régions n'est pas encore optimisée.




(1) Clustering time (2) Connected region labeling time

Figure 3-34 : Etude des performances de la méthode de partitionnement

Nous avons également appliqué notre méthode de partitionnement à un exemple industriel de couvercle de pompe numérisé sur la plateforme multi-capteurs présentée dans la partie II.2 (figure 3-35). Le modèle de pompe après recalage CFP (figure 3-36) contient 141943 points. Les résultats de partitionnement (figure 3-37) montrent les différentes régions obtenues en présence de surfaces brutes et de bruits de mesure.

Figure 3-35 : Couvercle de pompe

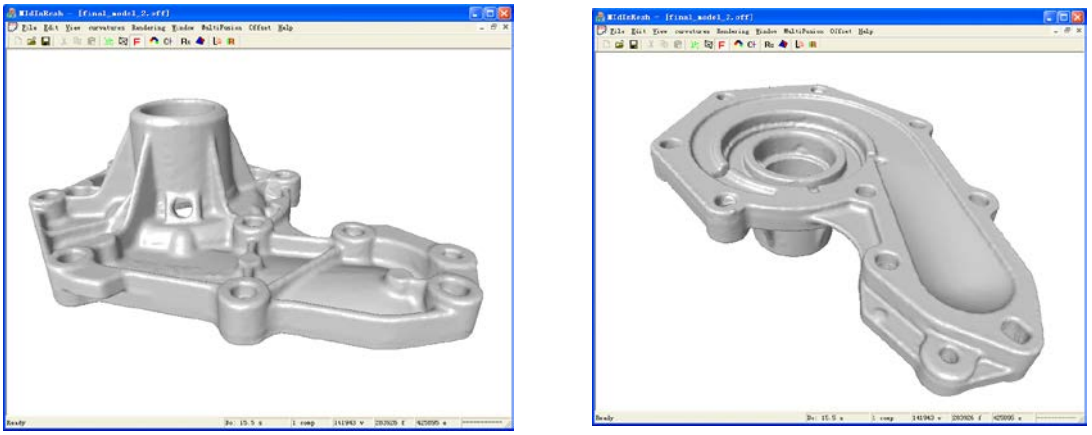


Figure 3-36 : Résultat final de recalage

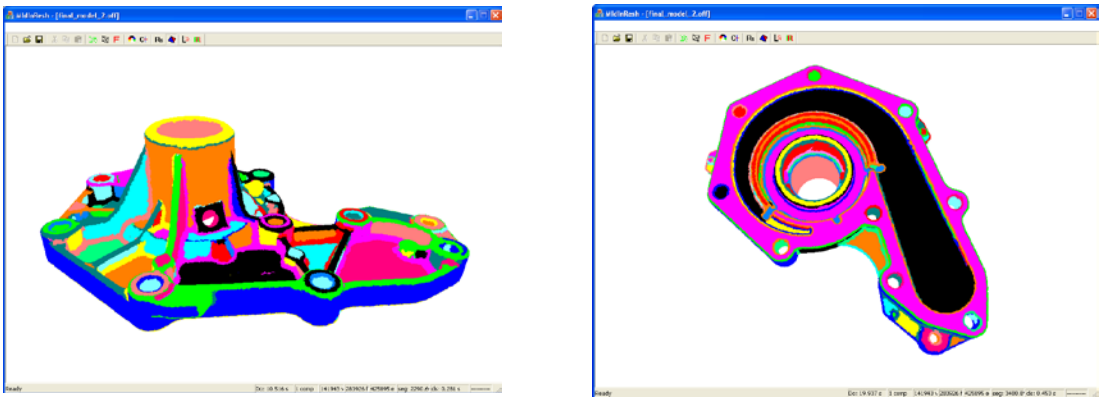


Figure 3-37 : Résultats de partitonnement

## IV. Techniques de reconstruction et d'association pour la métrologie des formes

La reconstruction de surfaces est un sujet d'actualité traité par plusieurs communautés scientifiques notamment en informatique graphique, en rétro-conception et en métrologie. La reconstruction permet de déterminer une approximation de la forme d'un objet à partir de nuages de points. Ce nuage de points est un échantillonnage de la forme réelle. De ce fait, le problème de reconstruction est d'une part un problème inverse et un problème mal posé car il peut exister plusieurs surfaces approximant l'objet. Les nuages de points numérisés présentent souvent des densités de points non uniformes, des trous de numérisation et des bruits de mesure. Le problème de reconstruction doit également garantir l'équivalence et préserver la topologie de l'objet réel [Cha 07].

Les travaux de recherche en reconstruction de surfaces sont très nombreux et plusieurs techniques ont été développées [BV 91] [Dey 06] [BLN+13] [BTS+14]. Les premières approches ont exploité les représentations NURBS ou B-Splines mais se sont montrées limitées pour traiter les formes complexes, les grand nombre de points et les données bruitées. Les méthodes à base de maillages (présentées précédemment) ont permis des garanties de reconstruction de topologie mais restent des approximations de premier ordre.

Dans le cadre de la métrologie dimensionnelle, cette reconstruction est souvent équivalente à l'opération d'association qui est décrite dans la norme ISO 17450-1:2011 [ISO 17450-1:2011]. En effet, l'association est l'opération utilisée pour associer un élément idéal (ou modèle) à un élément non idéal (le nuage de points) selon un critère d'association (tel que les moindres carrés) qui correspond à une optimisation avec ou sans contraintes.

Dans les cas classiques d'association en métrologie, l'élément non idéal est décrit par une formulation mathématique, que ce soit à travers un modèle explicite, implicite ou paramétrique. Les cas des formes complexes nécessitent parfois des modèles discrets (nuages de points théoriques ou maillages théoriques), ou des modèles numériques CAO de référence.

Cette distinction apportée par la métrologie s'inscrit bien dans l'esprit du concept de "surface fitting" développé par Hoppe [HDD+92]. En effet, Hoppe distingue deux classes de problèmes faisant référence à la problématique de "surface fitting". La première classe correspond à la reconstruction de surfaces, comme présentée dans les paragraphes précédents. Alors que la deuxième classe fait référence à la reconstruction de fonction. Il s'agit ici de trouver la "meilleure" fonction qui approxime une surface "connue".

## 1. Algorithmes d'association pour la métrologie des formes

Dans le cadre de la thèse de N. El Hayek [ElH 14], nous nous sommes intéressés à la caractérisation des défauts de forme de lentilles asphériques à partir de l'association du modèle théorique de la lentille à des nuages de points massifs (>$10^6$ points) mesurés sur des machines de très haute exactitude de mesure [NBK+14]. L'objectif de ces travaux est de développer un algorithme rapide permettant de traiter de grands flots de données et pouvant être exploité en métrologie en ligne. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du projet Européen EMRP-IND10:FORM "Optical and tactile metrology for absolute form characterization" dont le but est de développer des méthodes pour mesurer et caractériser des surfaces complexes à un niveau d'incertitude nanométrique. Une lentille asphérique AO775 fabriquée par Anteryon® a servi de support à nos travaux. Cette lentille a été mesurée au LNE à l'aide d'un profilomètre de haute exactitude et d'un capteur tactile (la mesure tactile contient 1500000 points). Une autre mesure sur le profilomètre du LNE à l'aide d'un capteur optique confocal a été effectuée (cette mesure contient 1000000 de points). Nous avons disposé également des différentes mesures effectuées par les partenaires du projet.

### *1.a Positionnement des travaux*

Le problème d'association est généralement posé comme un problème d'optimisation [GTP92] [YM96]. Dans sa forme la plus simple, il s'agit de déterminer les paramètres de transformation rigide (rotation et translation) et de forme ou intrinsèques (par exemple le diamètre d'un cylindre) qui minimisent une fonction des écarts ou des distances entre le nuage de points et le modèle. Cette fonction est liée à un critère de choix d'une métrique (norme L1, norme L2, norme L∞). Le problème d'association peut être également posé comme un problème d'identification de paramètres de modèle à partir d'un échantillon de points. Un modèle statistique à base de régression ou de maximum de vraisemblance et des hypothèses sur la répartition des résidus d'association permettent de bien poser le problème d'association [ALS 10].

Plusieurs techniques d'association ont été reportées dans la littérature [CB88] [GTP92]. Les techniques à base de distance Euclidienne (norme L2) ou critère des moindres carrés ont été les plus utilisés en métrologie [Ahn 04]. Même si les autres critères présentent des avantages comme la robustesse aux points aberrants (outliers) de la norme L1 ou la conformité aux normes GPS que permet la norme L∞, les problèmes d'optimisation sont fortement non linéaires et les fonctions objectif sont non continues [ZZH+13] [ZJS 11]. Ceci

rend la résolution numérique très difficile surtout en présence d'un grand nombre de points et plusieurs paramètres de modèle qui caractérisent les surfaces complexes.

Les algorithmes pour l'association utilisent une double optimisation. Une première optimisation permet de calculer les points projetés (footpoints) avant la minimisation de la fonction objectif. Deux méthodes peuvent être utilisées : la méthode séquentielle où la détermination des footpoints s'effectue avant le calcul des valeurs des variables d'optimisation, et la méthode globale où les footpoints et les variables d'optimisation sont calculés simultanément.

Parmi les algorithmes d'optimisation les plus utilisés en association nous pouvons citer l'ICP et ses variantes [BM92] [RL 01], le simplexe [NM 65] [Kan 95], la méthode de Gauss-Newton [For 90] [For 93], la méthode de Newton-Raphson [Lan 66], Levenberg-Marquardt (LM) [Mor 78] [Sha 98] et d'autres algorithmes non déterministes comme les algorithmes génétiques [LJC 04] [WS 07]ou les stratégies d'évolution CMA-ES. Ce dernier a été évalué dans le cadre du stage de master de M. Trainini [Tra 12] pour les surfaces quadriques.

Même si la norme L2 surestime le défaut de forme, l'erreur Peak-to-Valley (PV) est un indicateur encore très utilisé et accepté pour caractériser le défaut de forme [ZJS11]. Il est également important de souligner que la méthode de calcul des écarts ou des distances entre les points et le modèle peut introduire un biais dans les résultats d'association [ZZH+14].

Les travaux de recherche en association se sont beaucoup intéressés aux surfaces canoniques (plan, cylindre, sphère, cône, tore) ainsi qu'aux surfaces quadriques et aux surfaces B-Splines et NURBS. Cependant, très peu de travaux se sont intéressés aux surfaces asphériques. Chen et al. [CGM+09] proposent une méthode en 2D et reformulent le problème comme une association à un profil. D'autres travaux utilisent le même principe [Ace 98] ou effectuent une association à une section conique [Zha 97]. Sun et al. [SMH 10] ont traité le problème de l'association sur des données simulées en considérant une distance algébrique ou verticale. D'autres travaux sont à mentionner mais s'inscrivent plutôt dans le cadre de la reconstruction de surface asphérique à partir de surfaces NURBS [Par 04].

### *1.b Principaux résultats obtenus*

Nous nous sommes intéressés au problème d'association pour des surfaces asphériques et nous avons développé une méthode d'optimisation non-linéaire à la base de l'algorithme L-BFGS (Limited Memory-Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) [Noc 80] [LN 89][NW99]. Il

s'agit, à notre connaissance, de la première application de cet algorithme en métrologie dimensionnelle. Cet algorithme ne nécessite pas le calcul de la matrice Hessienne et permet une mise à jour de son approximation garantissant ainsi un faible espace mémoire et un coût minimal en opérations de calcul.

La nouvelle méthode développée a été validée sur des données simulées en s'appuyant sur la norme ISO 10360-6 :2009 [ISO10360-6 :2009] et puis appliquée à des données mesurées dans le cadre du projet IND10:FORM. Nous avons également comparé le L-BFGS avec l'algorithme LM recommandé par les laboratoires nationaux de métrologie et une variante de l'algorithme ICP (en fixant les paramètres de forme) avec comme modèle de référence un maillage théorique de la surface asphérique (maillage obtenu par la variante de Cocone (III.2.c)).

Les détails de cette méthode et les résultats des applications sont présentés dans les articles :

***[A-7] El-Hayek, N., Nouira, H., Anwer, N., Gibaru, O., Damak, M., Comparison of tactile and chromatic confocal measurements of aspherical lenses for form metrology International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 15(5), 821-829, 2014***

***[A-8] El-Hayek, N., Nouira, H., Anwer, N., Gibaru, O., Damak, M., A new method for aspherical surface fitting with large-volume datasets, Precision Engineering, 38(4), 935-947, 2014***

Par la suite, nous n'allons présenter que les grandes lignes de cette méthode.

Les surfaces asphériques (figure 3-38) sont formulées et définies dans la norme ISO 10110-Part 12 [ISO 10110-12 :2007]. Les surfaces axisymétriques ont été les plus étudiées et sont décrites par la formule suivante :

$$z = f(r) = -\left(\frac{cr^2}{1+\sqrt{1-(1+\kappa)c^2r^2}} + \sum_{j=2}^{m/2} a_{2j} r^{2j}\right). \tag{3-35}$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z$ sont les coordonnées Cartésiennes; $c$ est la courbure au sommet, $\kappa$ est la conicité et $\boldsymbol{a} = (a_4, a_6, \dots, a_m)$ est le vecteur des paramètres de déviation asphérique d'ordre $m$. Pour tout couple $(r, z) \in \mathbb{R}^2$, $F(r, z; c, \kappa, \boldsymbol{a})$ est dérivable deux fois.

Dans notre cas, nous traitons une surface asphérique (modèle AO775) d'ordre 10.

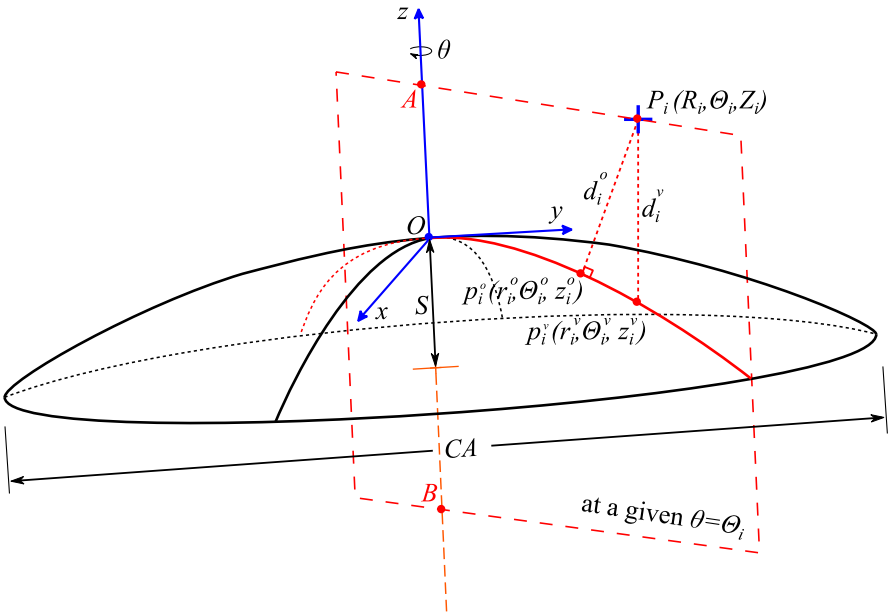



Figure 3-38 : Surface Asphérique

Il existe deux autres définitions mathématiques plus récentes pour les surfaces asphériques qui ont été proposées par Forbes [For 07a] [FB 08]. Elles sont basées sur des polynômes orthogonaux dont les coefficients, qui sont les paramètres asphériques, sont indépendants [For 07b] et chacun des coefficients contrôle une fréquence spatiale de la surface [For 12] permettant ainsi une meilleure interprétation optique et physique.

***Application à des données simulées***

Nous avons simulé le modèle asphérique en générant des points symétriquement distribués à partir de la formule 3-35. Ensuite, nous avons ajouté un bruit Gaussien et superposé des erreurs systématiques pour modéliser le bruit, la rugosité et les défauts de forme. Le bruit aléatoire additionné aux points théoriques est un bruit Gaussien avec $\mu = 0$ et $\sigma = 8$ nm. La valeur d'écart-type est en cohérence avec l'état de surface qui peut se manifester sur des pièces réelles. Les erreurs systématiques des erreurs de forme sont représentées par des harmoniques de Fourrier et sont superposées aux données précédentes dans la direction orthogonale à la surface en chaque point. Ces erreurs peuvent provenir des erreurs systématiques du mouvement de la machine de fabrication. L'erreur PV s'élève à quelques centaines de nanomètre ce qui correspond à des erreurs de forme sur des surfaces asphériques.

Nous avons développé des méthodes séquentielles d'optimisation (distance orthogonale et distance verticale (figure 3-38) pour lesquelles les algorithmes L-BFGS, LM et la variante de l'ICP ont été implémentés et comparés (figure 3-39).

Sur le jeu de données simulées, les trois méthodes retournent des valeurs de RMS et PV très similaires. La complexité des algorithmes en termes de temps de calcul et de mémoire utilisée (figure 3-40) montre la supériorité du L-BFGS. Nous avons ainsi établi que notre méthode est équivalente à la méthode à base de LMcmais plus rapide et nécessite une faible allocation mémoire (figure 3-40). Finalement, d'autres tests effectués nous ont permis d'évaluer les effets des paramètres intrinsèques de L-BFGS et ont montré que ces paramètres n'influençaient pas le temps de calcul ou la précision du résultat d'une manière significative. Nous avons ainsi démontré la capacité de cette nouvelle méthode à base de L-BFGS à traiter des données massives. Cette méthode a également été retenue pour l'inter-comparaison de mesures de lentilles asphériques dans le cadre du projet IND10:FORM.

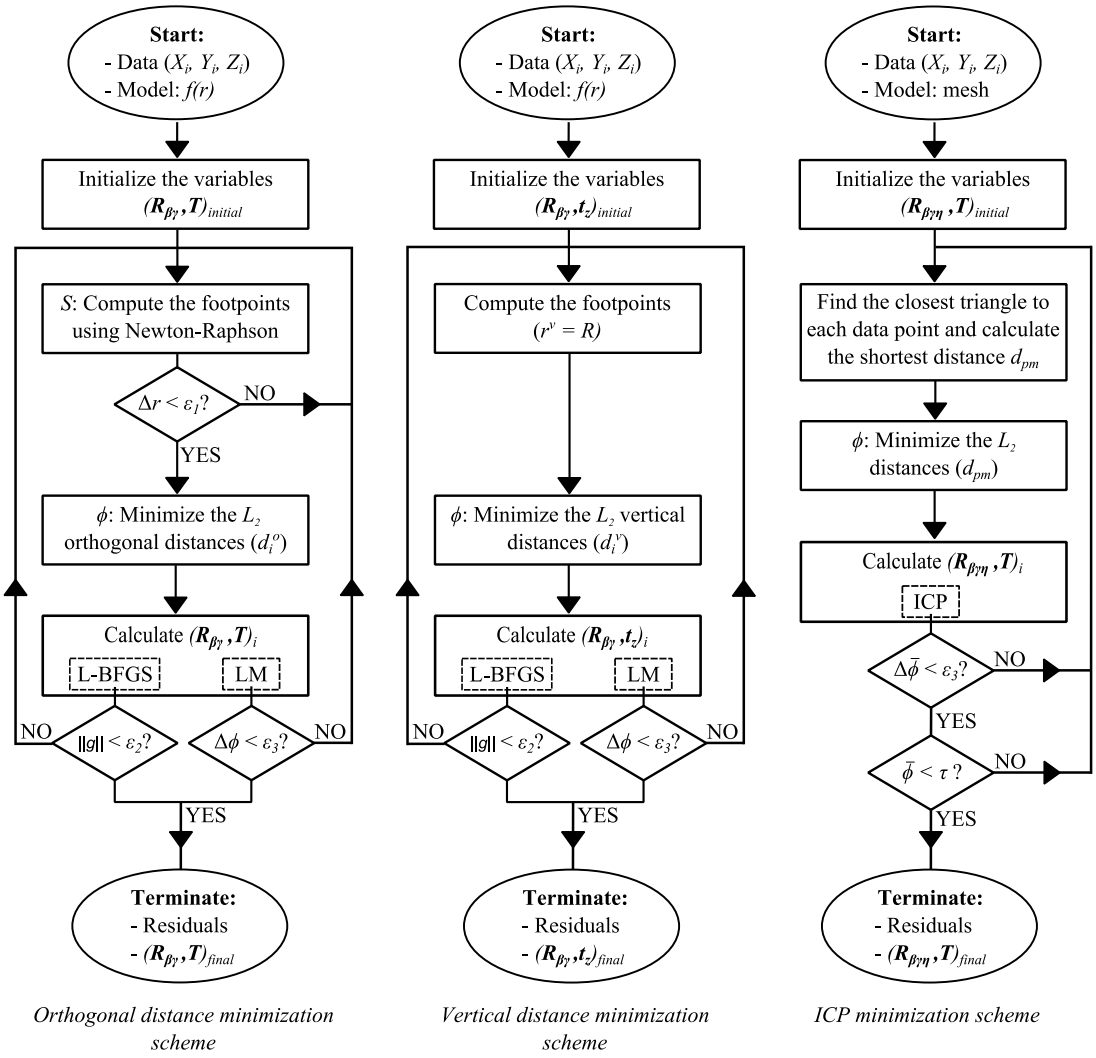



Figure 3-39 : Algorithmes L-BFGS, LM et Variante ICP

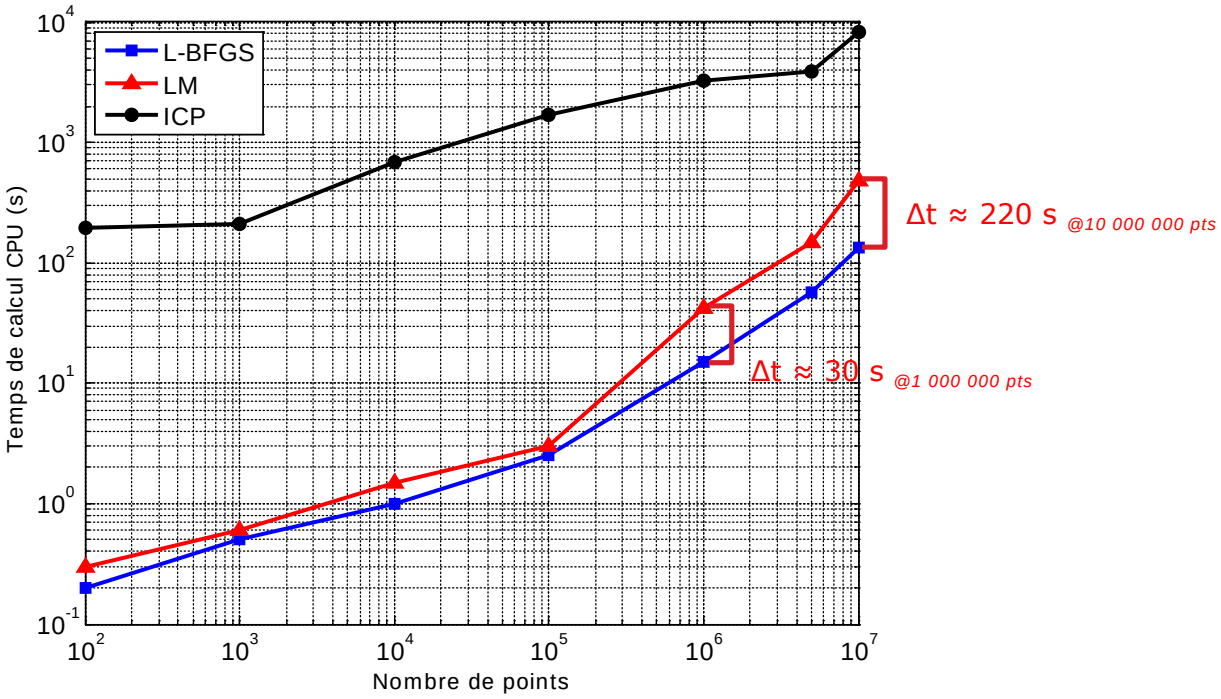
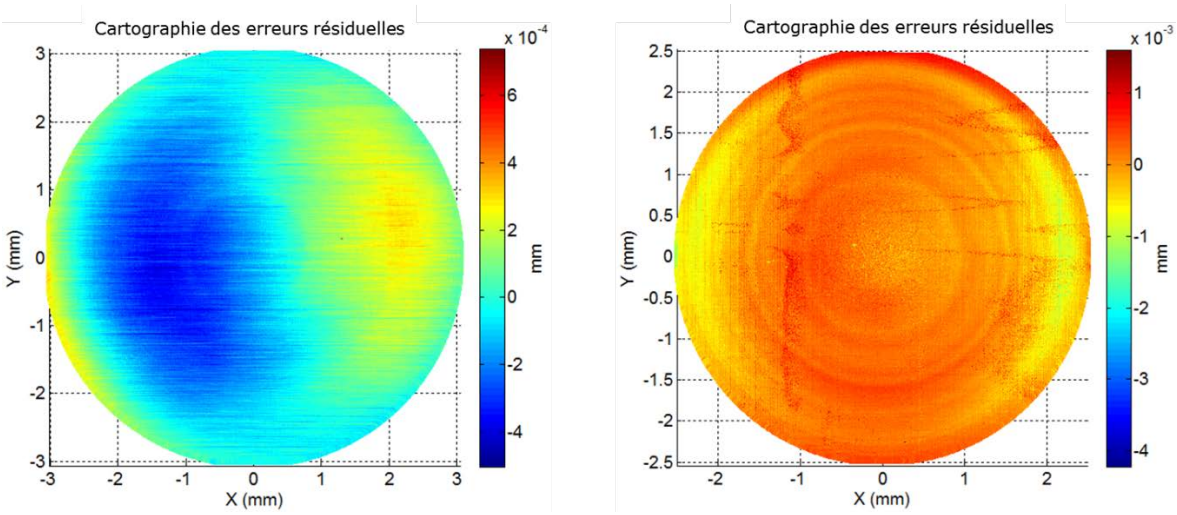



Figure 3-40 : Comparaison et performance des algorithmes (échelle log-log)

### *Application à des données mesurées*

Nous avons par la suite appliqué notre méthode L-BFGS pour la caractérisation de la lentille AO775 (figure 3-41). Les cartographies des écarts après association (mesure LNE : (a) tactile et (b) confocal) sont présentées dans la figure 3-42.

Figure 3-41 : lentille AO775




(a) TScan1 (b) OScan1

Figure 3-42 : Cartographies des erreurs résiduelles (lentille AO775)

L'application de notre méthode L-BFGS aux différentes mesures des partenaires du projet a permis d'évaluer et de comparer les valeurs de PV et de RMS (figure 3-43).

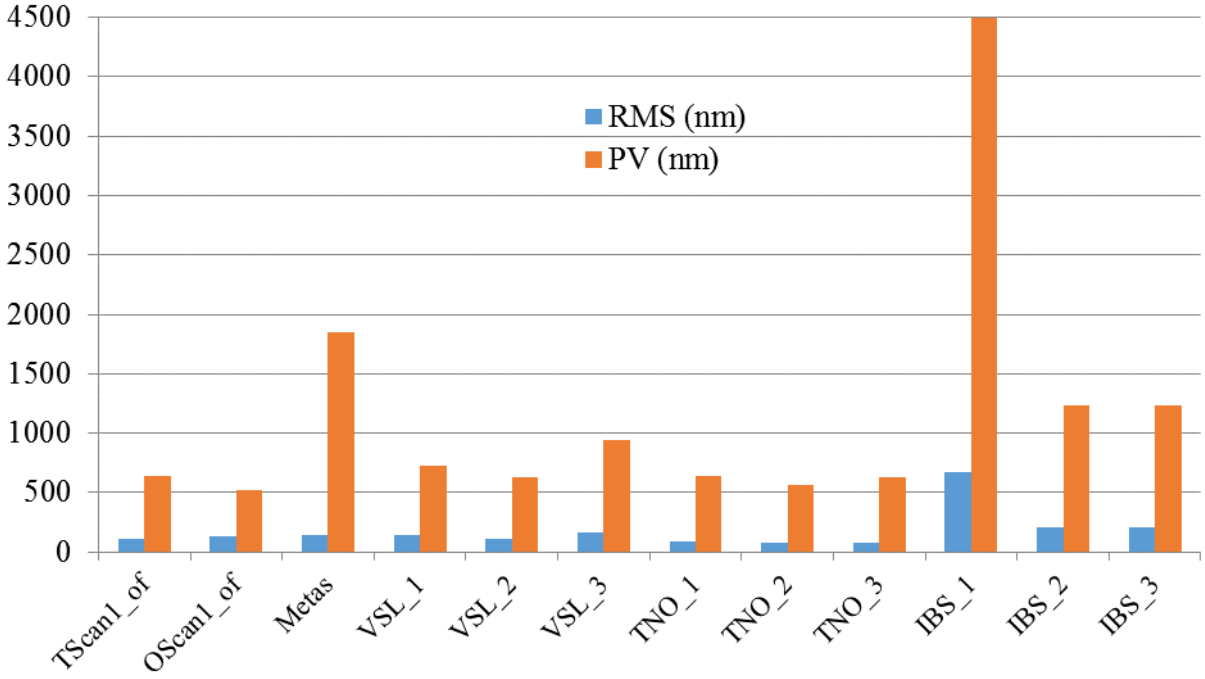



Figure 3-43 : Comparaison des résultats de mesure

## 2. Déformation de contours actifs de courbes B-Spline

### *2.a Positionnement des travaux*

Les méthodes de reconstruction par surfaces paramétriques sont très populaires en CAO et en reverse engineering. Deux familles de méthodes ont été développées : les méthodes d'interpolation où la surface reconstruite passe par tous les points et les méthodes par extrapolation dont l'objectif est de trouver la surface qui approxime le nuage de points. Même si les méthodes d'interpolation permettent d'aboutir à une meilleure précision de reconstruction, elles ne sont pas robustes aux bruits de numérisation et sont limitées pour traiter les grands nuages de points. Les méthodes par extrapolation permettent de créer des surfaces plus régulières et sont plus robustes aux bruits. Cependant, il n'est pas possible d'effectuer une reconstruction sans un partitionnement du nuage de points. Ceci a pour conséquence des reconstructions de carreaux de surfaces pour lesquels les conditions de raccord sont des contraintes fortes [KK 98] [Zho 04].

Les représentations paramétriques B-Spline et NURBS sont très populaires en CAO pour modéliser les formes complexes. Plusieurs travaux de recherche en reconstruction de carreau de surface ont exploité ces représentations paramétriques. Ma et Kruth [MK 95] ont développé une procédure de reconstruction qui est devenue un schéma classique : paramétrisation des points, détermination du nombre de points de contrôle, placement des nœuds, détermination des points de contrôle, et pondération des points de contrôle. L'identification des paramètres de la surface reconstruite est souvent posée comme un problème d'optimisation non-linéaire. Il s'agit de la minimisation de la somme des carrés des distances ou écarts entre les points et la surface reconstruite. Des méthodes séquentielles et globales ont été exploitées pour résoudre ce problème [SM 91] [LM 93] [MK 95] [MK 98].

D'autres méthodes de reconstruction ont été développées dans le domaine de de la vision par ordinateur et de l'informatique graphique. L'une des méthodes les plus connues est celle de la déformation de contour actif à base de modèles B-Spline. Cette technique introduite par Kass et al. [KWD 88] et améliorée par Pottmann et al. [PLH 02] consiste à déformer une surface, progressivement dans une direction pour approcher, à l'étape finale, les points. La définition d'une surface initiale est une étape très importante et la paramétrisation initiale ne peut être construite correctement que si la surface initiale est relativement proche des points. Même si plusieurs solutions pour la paramétrisation et l'initialisation ont été proposées [MK95] [KWL+12] [SKH 98] [Par 01], les temps de calcul et la robustesse au bruit restent les

limites de ces approches.

Dans le cadre de la thèse de N. El-Hayek [ElH14] nous avons développé une méthode appelée DBACD (Discrete B-Spline Active Contour Deformation) qui ne tient pas compte de l'initialisation et qui garantit une bonne reconstruction indépendamment de la forme de la surface et de l'initialisation associée et sous réserve de certaines conditions (fortes concavités, topologies de genre élevé, etc…). De plus, notre approche discrète permet d'éviter les calculs différentiels des projections de points (footpoints).

### *2.b Principaux résultats obtenus*

Nous avons développé une méthode d'approximation B-Spline discrète par déformation active de contour DBACD (Discrete B-Spline Active Contour Deformation). Cette méthode est bien adaptée à la reconstruction de surfaces dont on ne dispose pas de formulation analytique et en l'absence de modèle CAO. L'originalité de cette approche est la rapidité de convergence même en présence de données bruitées.

Une première étape d'initialisation consiste à définir une forme englobante à partir d'une courbe ou surface B-Spline périodique (degré, séquence nodale et points de contrôle) et sa discrétisation par subdivision. Dans un premier temps, nous nous sommes limités à des nuages de points dans un plan représentant des courbes fermées. L'initialisation de la B-Spline périodique se fait par répartition des points de contrôle sur un cercle (figure 3-42). Cette initialisation s'affranchit de toute connaissance de la courbe sous-jacente. Lors de la construction du polygone de contrôle, nous avons utilisé une approximation de la courbe B-Spline par subdivisions récursives du polygone de contrôle à l'aide de l'algorithme d'Oslo [CLR80] (equation 3-36).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{MC} \tag{3-36}$$

Avec $\mathbf{C}$ l'ensemble des points de contrôle et $\mathbf{Q}$ l'ensemble des points subdivisés. $\mathbf{M}$ est appelée matrice de subdivision globale.

Par la suite, une correspondance entre les points du nuage et les segments de la B-Spline est établie à la base de critères géométriques et topologiques et la construction s'effectue de manière itérative (figure 3-43).

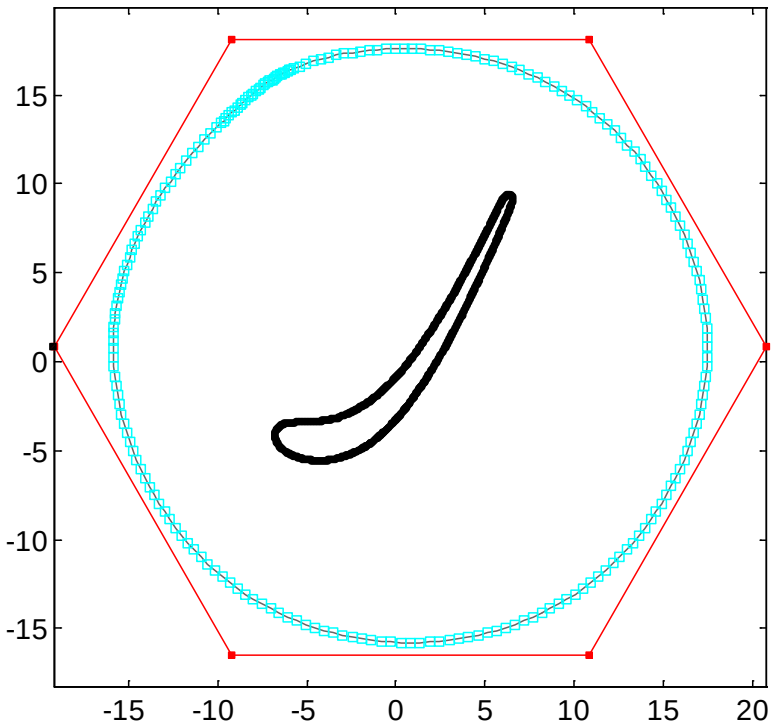



Figure 3-42 : Initialisation d'une B-Spline périodique autour des points

Une minimisation au sens des moindres carrés des distances entre les points du nuage et les segments de B-Spline est alors effectuée (équation 3-37).

$$\min_{t_1^{(k)},\dots,t_{n_c}^{(k)}} \sum_{i=1}^{n_d}\sum_{j=1}^{n_c}\left(\langle\left(q_i^{(k+1)}-q_i^{(k)}\right),\ \vec{\varepsilon}_i^{(k)}\rangle-\delta_i^{(k)}\right)^2 \tag{3-37}$$

Avec $q_i^{(k)}$ les points subdivisés, $\vec{\varepsilon}_i^{(k)}$ des vecteurs unitaires et $\delta_i^{(k)}$ les distances à l'itération $k$. Les scalaires $\left\{t_1^{(k)},\dots,\ t_{n_c}^{(k)}\right\}$ correspondent aux amplitudes des déplacements des points de contrôle à l'itération $k$ (dans les directions normales des points de contrôle).

En introduisant les points de contrôle $\mathbf{C}^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$ nous établissons la relation récursive décrite par l'équation 3-38.

$$\mathbf{C}^{(k+1)}=\mathbf{C}^{(k)}+\alpha^{(k)}\mathbf{t}^{(k)}\mathbf{I}_{n_c}\mathbf{N}^{(k)}, \tag{3-38}$$

avec $\mathbf{N}^{(k)}=\left(\vec{n}_1^{(k)},\cdots,\vec{n}_{n_c}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{I}_{n_c}=\mathrm{diag}\left(\underbrace{1,\cdots,1}_{n_c}\right)$

Le vecteur $\alpha^{(k)}$ permet de ralentir la déformation de la B-Spline. Il correspond au pas de la descente par gradient et se calcule par la formule $\alpha_j^{(k)}=t_j^{(k)}/\max\left(\mathbf{t}^{(k)}\right)$

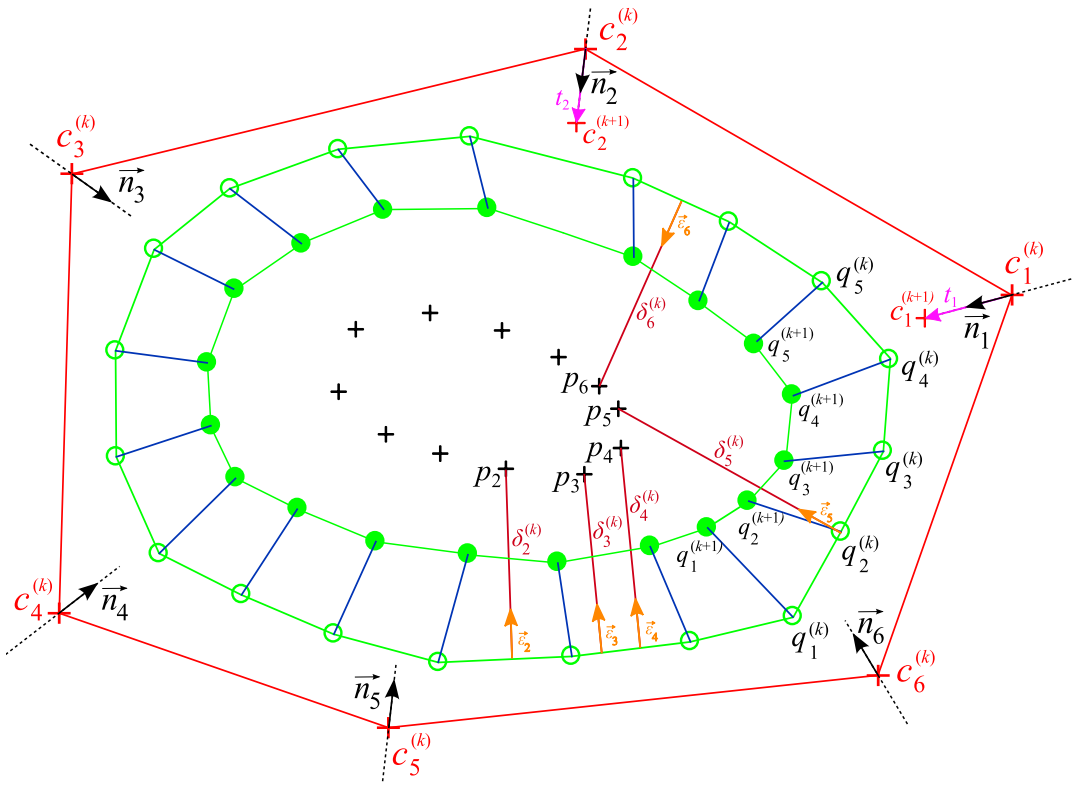



Figure 3-43 : Illustration de l'algorithme DBACD

La fonction objectif s'écrit sous forme matricielle (3-39) :

$$\min_{\mathbf{t}^{(k)}} \left\| \langle \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} \mathbf{I}_{n_c} \mathbf{N}^{(k)}, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} \rangle - \boldsymbol{\delta}^{(k)} \right\|_2^2$$

ou (3-39)

$$\min_{\mathbf{t}^{(k)}} \left\| \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)} \right\|_2^2$$

$$\text{avec } \mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} m_{1,1}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{1,2}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{1,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \\ m_{2,1}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{2,2}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{2,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_1^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \\ \vdots \\ m_{i,1}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{i,2}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{i,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \\ m_{i+1,1}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{i+1,2}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{i+1,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_i^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \\ \vdots \\ m_{n_S,1}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{n_S,2}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{n_S,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \\ m_{1,1}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_1^{(k)}\right) + m_{1,2}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_2^{(k)}\right) + \cdots + m_{1,n_C}\left(\vec{\varepsilon}_{n_S}^{(k)}.\vec{n}_{n_C}^{(k)}\right) \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{t}^{(k)} = \begin{bmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ \vdots \\ t_{n_c}^{(k)} \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_1^{(k)} \\ \vec{\varepsilon}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \vec{\varepsilon}_{n_d}^{(k)} \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \begin{bmatrix} \delta_1^{(k)} \\ \delta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \delta_{n_d}^{(k)} \end{bmatrix}$.

La solution du problème d'optimisation s'effectue par la résolution du système linéaire suivant (à l'étape k).

$$\left(\mathbf{A}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} = \left(\mathbf{A}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta}^{(k)}. \tag{3-40}$$

Nous avons par la suite amélioré la méthode DBACD par l'insertion locale de nœuds [FHK 02] [PT 97] permettant ainsi de contrôler la précision de l'approximation. Cette insertion correspond également à des contraintes sur la moyenne et la variance des écarts résiduels pour mieux contrôler la reconstruction. L'insertion locale de nœuds et par conséquent des points de contrôle se fait dans une boucle extérieure alors que la résolution itérative du problème se fait dans une boucle intérieure comme l'indique la description de l'algorithme DBACD figure (3-44).

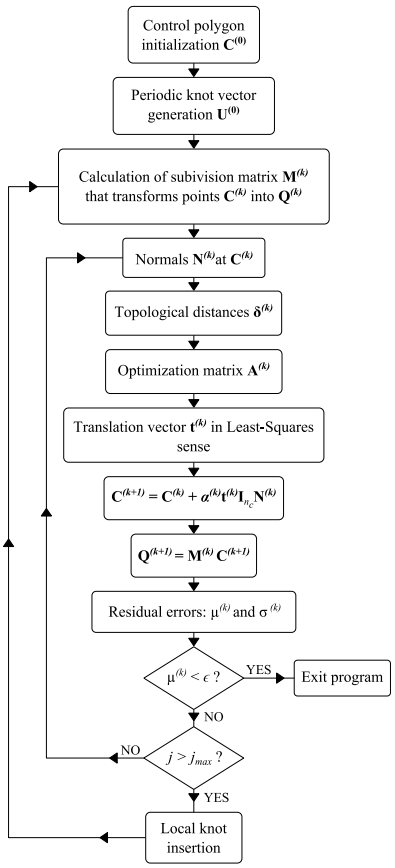



Figure 3-44 : Algorithme DBACD

Une insertion excessive peut créer des auto-intersections au niveau de la courbe B-Spline ce qui n'est pas souhaitable. Afin de remédier à ce problème, nous avons introduit un terme de tension de courbe ou fairing (3-41) dans la minimisation (3-42).

$$\int_0^1 \|\mathcal{C}''(u)\|^2 du = \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n_C} N_{j,\tau^{(k)}}^{d\,''}(u)\ c_j^{(k+1)} \right\|^2 du\,, \tag{3-41}$$

avec $\tau^{(k)}$ la sequence nodale à l'itération $k$.

$$\min_{\mathbf{t}^{(k)}} \left(1-\lambda^{(k)}\right)\left\|\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{t}^{(k)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)}\right\|_2^2 + \lambda^{(k)} h \sum_{s=0}^{S-1} \left\|\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(sh)\left(\mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{t}^{(k)}\mathbf{I}_{n_c}\mathbf{N}^{(k)}\right)\right\|_2^2 \tag{3-42}$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(sh)$ la matrice diagonale des coefficients de courbure $N_{j,\tau^{(k)}}^{d\,''}(sh)$ :

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(sh) = \mathrm{diag}\left(N_{1,\tau^{(k)}}^{d\,''}(sh), \cdots, N_{n_c,\tau^{(k)}}^{d\,''}(sh)\right). \tag{3-43}$$

$\lambda \in [0\ 1]$ est le paramètre de fairing, h est un pas d'échantillonnage.
La formule (3-42) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\min_{\mathbf{t}^{(k)}} \left\|\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{t}^{(k)} - \boldsymbol{\zeta}^{(k)}\right\|_2^2 \tag{3-44}$$

avec $\mathbf{B}^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(1-\lambda^{(k)}\right)\mathbf{A}^{(k)} \\ \lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathfrak{N}}_{\tau^{(k)}}(0) \\ \lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathfrak{N}}_{\tau^{(k)}}(h) \\ \vdots \\ \lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathfrak{N}}_{\tau^{(k)}}\left((S-1)h\right) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\zeta}^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(1-\lambda^{(k)}\right)\boldsymbol{\delta}^{(k)} \\ -\lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(0)\mathbf{C}^{(k)} \\ -\lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(h)\mathbf{C}^{(k)} \\ \vdots \\ -\lambda^{(k)} h\, \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}\left((S-1)h\right)\mathbf{C}^{(k)} \end{bmatrix}$

et $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_{\tau^{(k)}}(sh)$ la matrice définie par :
$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\tau^{(k)}}(sh)\mathbf{t}^{(k)}\mathbf{I}_{n_c}\mathbf{N}^{(k)} = \boldsymbol{\mathfrak{N}}_{\tau^{(k)}}(sh)\mathbf{t}^{(k)}$.

La solution du problème d'optimisation s'effectue par la résolution du système linéaire suivant (à l'étape k).

$$\left(\mathbf{B}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{t}^{(k)} = \left(\mathbf{B}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}^{(k)}. \tag{3-45}$$

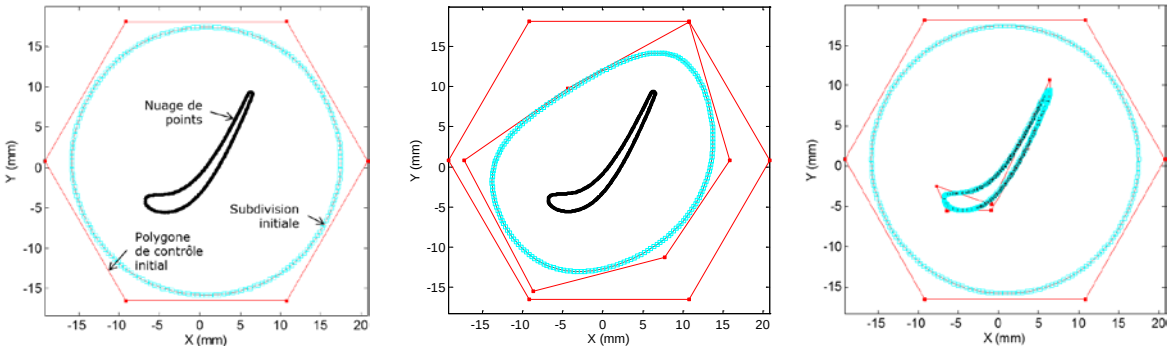
***Applications***

Nous avons appliqué notre algorithme DBACD à un cas industriel de reconstruction d'aubes de turbine (figure 3-45).

(a) (b)

Figure 3-45 : Cas d'étude : (a) données de mesure ; (b) aube de turbine

Les résultats effectués sur une section contenant 1200 points sont présentés dans la figure 3-46. L'initialisation est effectuée à partir de 6 points de contrôle et nous avons fixé l'erreur de reconstruction à 0.5 µm.

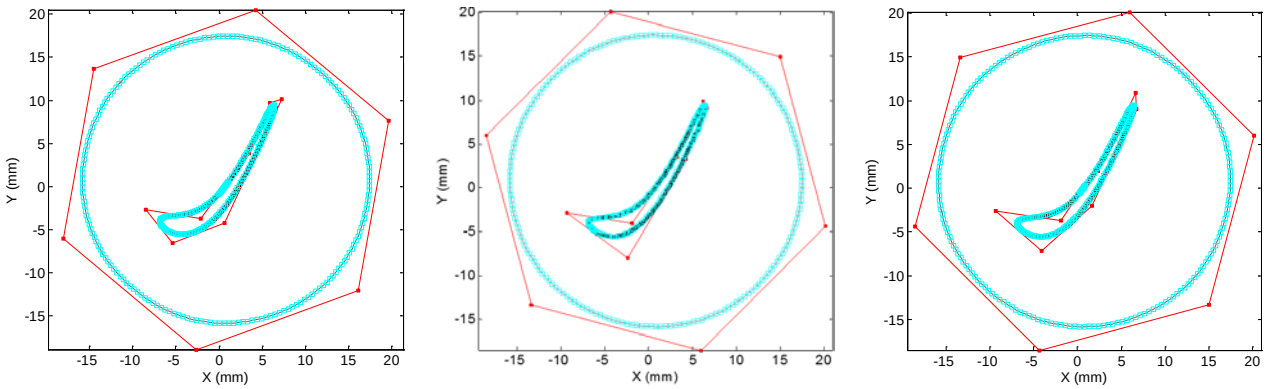



(a) : Initialisation (b) : 1ère itération (c) : Insertion de nœuds (8 points de contrôle)

Figure 3-46 : Illustration des étapes du DBACD

Le résultat final avec insertion de nœuds permet une bonne approximation sans converger vers une solution respectant l'erreur de reconstruction.

Nous avons également effectué des tests en modifiant l'orientation initiale du polygone de contrôle (figure 3-47). L'analyse des erreurs résiduelles est présentée dans le tableau 3-9. Nous remarquons que les résultats de reconstruction dépendent légèrement de l'angle initial. Toutefois la convergence, malgré l'insertion de nœuds, pour respecter l'erreur de reconstruction n'est pas garantie.




(a) : 20° (b) : 45° (c) : 70°

Figure 3-47 : Résultats du DBACD pour différentes orientations du polygone de contrôle d'initialisation

| Angle | 0 ° | 20 ° | 45 ° | 70 ° |
|---|---|---|---|---|
| $\mu$ (µm) | −0.793 | 0.121 | −0.739 | 0.164 |
| $\sigma$ (µm) | 25.144 | 12.655 | 19.416 | 11.424 |
| PV (µm) | 175.15 | 78.01 | 118.54 | 72.07 |

Table 3-9 : Erreurs résiduelles des orientations du polygone de contrôle d'initialisation

La considération du lissage permet d'améliorer les résultats (figure 3-48) et d'assurer la convergence mais le temps de calcul augmente de 10% à 15%.

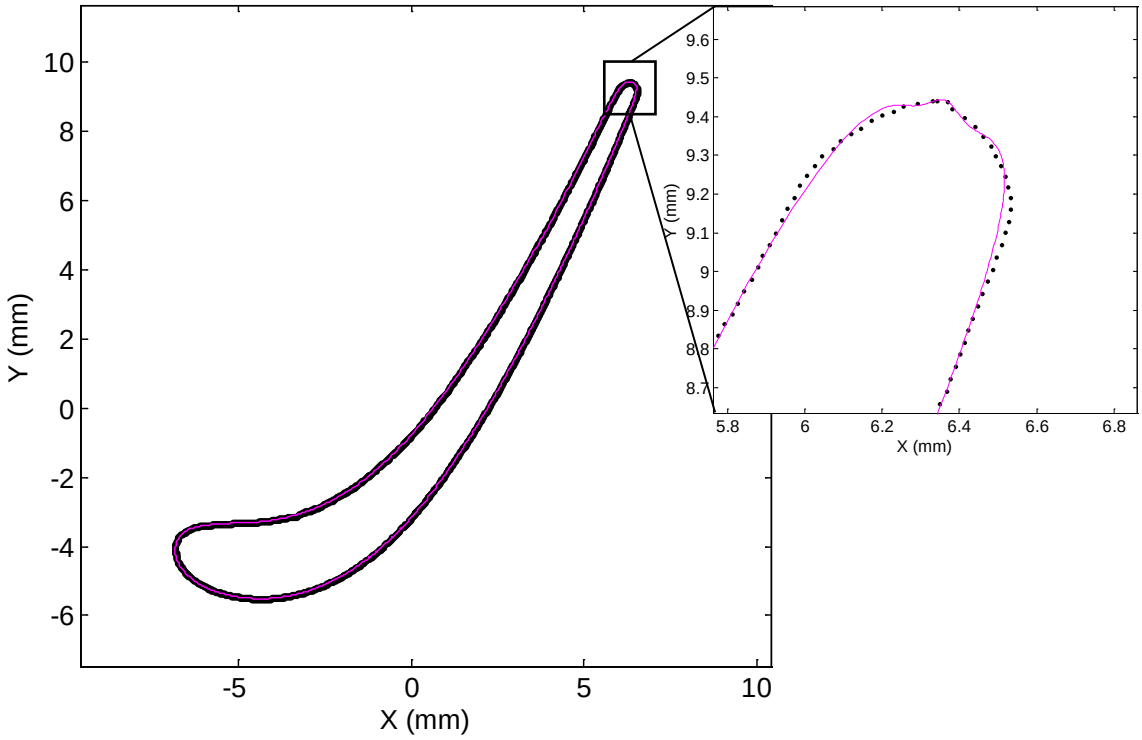



Figure 3-47 : Résultat de reconstruction avec un paramètre de fairing ( $\lambda$=0.8) et 17 points de contrôle

## V. Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'acquisition et le traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes.

Dans un contexte de système de mesure multi-capteurs, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'intégration et de fusion de données de nuages de points. Le déploiement d'un système de mesure multi-capteurs consiste dans un premier temps à définir ses caractéristiques fonctionnelles et à gérer la configuration des capteurs (coopérative, complémentaire, concurrente) permettant ainsi d'extraire une représentation discrète optimale de la pièce mesurée. La fusion des données issues des différents capteurs est une étape incontournable pour laquelle les méthodes de traitements géométriques (dé-bruitage, filtrage, recalage, reconstruction de la topologie, reconstruction de surfaces, …) doivent être robustes et certifiées.

La représentation à base de nuages de points et de maillages nous a permis d'exploiter les courbures discrètes et les indicateurs de courbure pour traiter les problèmes de partitionnement, de recalage et de reconstruction dans le cadre de la métrologie des formes.

Nous nous sommes également intéressés aux bases de la reconstruction à partir de nuages de points à travers les approches à base de maillages triangulaires. Ceci nous a permis de caractériser la topologie des nuages de points et d'établir un cadre théorique pour l'étude des propriétés différentielles et des opérateurs sur les nuages de points et le développement de méthodes numériques pour le calcul des normales et des courbures discrètes. De nouvelles méthodes de calcul de la normale et des courbures principales ont été développées. Ces méthodes ont été comparées à des travaux de référence et appliquées à des cas industriels pour établir leur performance.

Nous nous sommes surtout intéressés à exploiter deux indicateurs de courbure issus du domaine de la perception visuelle des formes : l'indice de forme et l'intensité de courbure. Ces deux indicateurs ont été à la base de nouvelles méthodes et de nouveaux algorithmes pour le recalage et le partitionnement de nuages points.

Le problème de recalage rigide a été abordé sous l'angle de ces indicateurs de courbure. Combinés à des méthodes classiques de recalage grossier (ACP, Transformation de Hough et Ransac) et de recalage fin (ICP, ICP Plan), les courbures permettent de meilleurs résultats en termes de temps de calcul et d'erreur de recalage, même en présence de faibles recouvrements entre les nuages de points. L'ensemble des travaux développés ont été validés sur des

exemples de la littérature et sur des cas industriels dans le cadre d'un projet européen en métrologie dimensionnelle.

Le traitement du problème de partitionnement a également bénéficié des données de courbures discrètes. La méthode hybride de partitionnement que nous avons développé exploite l'indice de forme, le clustering de points et la génération de régions par croissance. Les résultats obtenus ont démontré la robustesse de la méthode et son adaptation à traiter des données issues de numérisation par moyens optiques.

Enfin, nous nous sommes intéressés au problème de reconstruction et d'association de surfaces complexes pour l'évaluation des défauts de forme. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle méthode d'association exploitant l'algorithme L-BFGS (Limited memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) pour le cas des surfaces asphériques. Ce dernier permet de résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaires des moindres-carrés dans le cas de grands flots de données. Les performances de cet algorithme ont été établies et comparées avec des algorithmes de référence comme l'algorithme LM (Levenberg-Marquardt) dans le cadre de la mesure de lentilles asphériques.

Une nouvelle approche itérative de reconstruction par courbes B-Splines a été également développée. La méthode DBACD (Discrete B-Spline Active Contour Deformation) que nous avons proposé s'affranchit des problèmes de paramétrage et permet une reconstruction contrôlée. Des améliorations de cette méthode sont envisagées et les perspectives de généralisation aux surfaces ont été esquissées.

# Chapitre 4 - Bilans et perspectives

## I. Conclusions

Tout au long de ce mémoire, nous avons montré les apports de l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits manufacturés. Le concept de forme que nous avons placé à la base des activités de développement des produits a largement bénéficié des apports de la géométrie, des statistiques et des sciences du numérique et leur adéquation à modéliser et à simuler les pièces et les ensembles mécaniques.

Issu des travaux du LURPA de L. Mathieu et A. Ballu puis repris par les normes ISO GPS, le Skin Model est un concept fondamental pour appréhender la variabilité géométrique en ingénierie mécanique. Son opérationnalisation à travers le Skin Model Shape et l'ingénierie des formes ouvre de nouvelles voies pour une plus large intégration dans le modèle de produit ainsi que dans son cycle de vie. A la lumière des théories de la modélisation solide, des variétés topologiques, de la géométrie différentielle et de l'analyse statistique des formes nous avons établi un nouveau cadre de modélisation et de représentation pour le Skin Model.

A la base d'une représentation discrète, nous avons introduit le concept de Skin Model Shape comme un changement de paradigme pour la recherche en tolérancement et nous avons montré sa pertinence et son potentiel pour se substituer à la représentation géométrique du nominal, de la spécification à la vérification. De plus, deux stades de simulation de Skin Model Shape, appelés stade de prédiction et stade d'observation, ont été introduits. Ces deux stades nous ont permis d'intégrer les défauts de forme et la variabilité géométrique dans la démarche de conception détaillée à travers le développement d'un processus de simulation de Skin Model Shape. Les différentes étapes de ce processus ont été explicitées et ont abouti au développement d'un démonstrateur informatique.

Nous avons également développé une modélisation géométrique du contact entre Skin Model Shapes ainsi que des indicateurs pour évaluer la qualité du contact. Ces travaux nous ont permis de définir un nouveau champ pour l'analyse des tolérances et l'étude de la mobilité des pièces en tenant compte des défauts de forme dans les ensembles mécaniques (motion tolerancing). Ceci permet également d'intégrer l'ensemble de ces travaux dans le cadre du

développement de nouveaux systèmes de tolérancement assisté par ordinateur (CAT) à base de Skin Model Shapes.

Ces travaux nous ont permis également de poser les fondements d'une théorie de "la géométrie avec défauts" qui donne aux défauts et écarts de forme une place centrale en tolérancement. La modélisation géométrique discrète et les statistiques "au second ordre" nous ont permis de développer un cadre nouveau pour la représentation de la forme et de sa variabilité, à travers les écarts aléatoires et systématiques, en exploitant de nouvelles théories comme les courbures discrètes, l'opérateur de Laplace-Beltrami (LBO) et l'analyse statistique des formes à base du modèle de distribution de points (PDM) et de l'analyse en composantes principales (ACP).

Bien que ces travaux se soient intéressés à des pièces et assemblages rigides, le potentiel du Skin Model Shape à intégrer la variabilité géométrique nous permet d'entrevoir des applications à des pièces et ensembles non rigides, aux formes complexes et à l'échelle de la micro-géométrie et des états de surface.

Une autre partie de nos travaux s'est intéressée à l'acquisition et le traitement numérique de la géométrie pour la métrologie des formes. Dans un contexte de système de mesure multi-capteurs, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'intégration et de fusion de données de nuages de points.

La représentation à base de nuages de points et de maillages nous a permis d'exploiter les courbures discrètes et les indicateurs de courbure pour traiter les problèmes de partitionnement, de recalage et de reconstruction dans le cadre de la métrologie des formes.

Nous nous sommes également intéressés aux bases de la reconstruction à partir de nuages de points à travers les approches à base de maillages triangulaires. Ceci nous a permis de caractériser la topologie des nuages de points et d'établir un cadre théorique pour l'étude des propriétés différentielles et des opérateurs sur les nuages de points et le développement de méthodes numériques pour le calcul des normales et des courbures discrètes. De nouvelles méthodes de calcul de la normale et des courbures principales ont été développées. Ces méthodes ont été comparées à des travaux de référence et appliquées à des cas industriels pour établir leur performance.

Nous nous sommes surtout intéressés à exploiter deux indicateurs de courbure issus du domaine de la perception visuelle des formes : l'indice de forme et l'intensité de courbure. Ces deux indicateurs ont été à la base de nouvelles méthodes et de nouveaux algorithmes pour le recalage et le partitionnement de nuages points.

Le problème de recalage rigide a été abordé sous l'angle de ces indicateurs de courbure. Combinés à des méthodes classiques de recalage grossier (ACP, Transformation de Hough et Ransac) et de recalage fin (ICP, ICP Plan), les courbures permettent de meilleurs résultats en termes de temps de calcul et d'erreur de recalage, même en présence de faibles recouvrements entre les nuages de points. L'ensemble des travaux développés ont été validés sur des exemples de la littérature et sur des cas industriels dans le cadre d'un projet européen en métrologie dimensionnelle.

Le traitement du problème de partitionnement a également bénéficié des données de courbures discrètes. La méthode hybride de partitionnement que nous avons développé exploite l'indice de forme, le clustering de points et la génération de régions par croissance. Les résultats obtenus ont démontré la robustesse de la méthode et son adaptation à traiter des données issues de numérisation.

Enfin, nous nous sommes intéressés au problème de reconstruction et d'association de surfaces complexes pour l'évaluation des défauts de forme. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle méthode d'association exploitant l'algorithme L-BFGS (Limited memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Ce dernier permet de résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaires des moindres-carrés dans le cas de grands flots de données. Les performances de cet algorithme ont été établies et comparées avec des algorithmes de référence comme l'algorithme LM (Levenberg-Marquardt) dans le cadre de la mesure de lentilles asphériques.

Une nouvelle approche itérative de reconstruction par courbes B-Splines a été également développée. La méthode DBACD (Discrete B-Spline Active Contour Deformation) que nous avons proposé s'affranchit des problèmes de paramétrage et permet une reconstruction contrôlée. Des améliorations de cette méthode sont envisagées et les perspectives de généralisation aux surfaces ont été esquissées.

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire ont montré la pertinence de la géométrie discrète et algorithmique pour la représentation de la forme et l'analyse statistique à modéliser et traiter la variabilité géométrique dans le cadre du processus de développement de produit.

Nous avons ainsi posé les bases d'une ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits dans un contexte d'ubiquité géométrique et numérique qui reflète les nouveaux défis de l'industrie mécanique dans l'ère du numérique.

## II. Perspectives

Nous avons montré dans ce mémoire que l'objectif de nos travaux de recherche est de contribuer à un changement de paradigme pour le développement de produits manufacturés par l'intermédiaire de l'ingénierie des formes qui est à l'interface de la géométrie, des statistiques et de l'ingénierie mécanique.

Les perspectives de nos travaux actuellement en cours de développement sont multiples. Par la suite, nous présentons quelques thèmes et pistes pour les années à venir.

### 1. Fondements mathématiques de l'ingénierie des formes pour la spécification et la vérification géométriques des produits

Nous avons développé les Skin Model Shapes pour opérationnaliser le Skin Model et nous avons également démontré tout le potentiel d'intégration des données de simulation numérique et des données issues de la mesure à partir d'un élément de très bas niveau sémantique, le point. Les courbures discrètes ont permis de mieux caractériser localement les formes ouvrant ainsi la voie à de nouveaux outils pour la classification et la décomposition des formes qui sont aujourd'hui au cœur des réflexions du comité mathématique ISO/TC 213/AG 12. Les résultats obtenus en métrologie des formes nous encouragent à approfondir l'intégration des courbures pour la fusion des données multi-capteurs. Que ce soit pour le partitionnement, le recalage, la reconstruction et l'association, nos travaux doivent considérer les grands flots de données et des données brutes non filtrées et non structurées. Le lissage de points et de maillages par des opérateurs de courbures sont à envisager pour la suite de ces travaux ainsi que les représentations en espace d'échelle (scale-space) pour considérer les aspects mutli-échelles.

La considération des incertitudes de mesure dans les algorithmes de traitement numérique de la géométrie est un aspect que nous n'avons pas beaucoup abordé dans nos travaux de recherche. Nos travaux futurs intégreront plus les aspects liés aux incertitudes de mesure pour la caractérisation des formes complexes et des micro-pièces. Nous avons développé récemment en collaboration avec le LNE de nouveaux algorithmes de recalage "non-rigide" intégrant les "incertitudes de mesure des points" et des travaux en collaboration avec A. Piratelli-Filho (Université de Brasilia) sur les incertitudes de reconstruction de formes complexes par courbes B-Splines ont été initiés [PAA 12].

Une autre perspective de nos travaux concerne la représentation multi-dimensionnelle

des formes. Par l'augmentation des coordonnées, il est alors possible de représenter les phénomènes physiques et de les intégrer dans une représentation à base de points. Ainsi, la représentation de formes dans des dimensions supérieures peut profiter des développements récents en analyse statistique sur les variétés qui ont contribué à l'émergence de nouvelles disciplines scientifiques comme l'anatomie computationnelle.

La fusion de données multi-capteurs à différentes échelles géométriques et à différentes résolutions (incluant des capteurs Kinect ou de la tomographie) conduit à des nuages de points de nouvelles natures. Des ensembles de points sur-échantillonnant ou sous-échantillonnant le réel et présentant des bruits de mesure hétérogènes doivent être considérés. Nos travaux actuels sur la rétro-ingénierie des programmes CN, la reconnaissance d'entités d'usinage à partir des états intermédiaires de simulation d'usinage et la fouille de données de coupe permettent également de disposer de nuages de points qui encapsulent une bonne partie du savoir-faire des entreprises en usinage. Par conséquent, de nouvelles connaissances à base de nuages de points peuvent être capitalisées à partir des simulations et des procédés de réalisation et d'acquisition des formes. Sur ce thème, nous envisageons d'approfondir nos connaissances sur les méthodes et les outils de fouilles et d'analyse de données pour mieux appréhender les sujets complexes liés au "Shape Mining" et au "Shape Analytics".

De nouveaux opérateurs géométriques sur les nuages de points (décomposition, composition, reconstruction, échantillonnage) et entre les nuages de points (projection, recalage, union, intersection), leur robustesse et leurs qualification/certification sont envisagés dans le cadre de nos prochains travaux. Les opérations développées dans GeoSpelling seront alors enrichies par ces nouveaux opérateurs.

## 2. Spécification géométrique des assemblages

L'opérationnalisation de GeoSpelling et du Skin Model est un nouveau thème de recherche pour lequel l'apport des Skin Model Shapes a permis une réelle maturité. Cependant, très peu de travaux se sont intéressés à une conceptualisation des assemblages basée sur le Skin Model. Des travaux peu connus de Requicha [RW 91] sur les assemblages ont introduit des concepts intéressants comme : l'instance d'assemblage définie comme un élément d'un espace de configuration, l'assemblage nominal, l'assemblage variationnel, et l'assemblage réalisable défini par des conditions de non-interférence et d'existence de "chemin" d'assemblage. En nous inspirant de ces travaux et par l'approfondissement de nos travaux sur la modélisation du contact et de la mobilité à partir de Skin Model Shapes (en

collaboration avec l'université d'Erlangen Nuremberg), une extension à la modélisation "réaliste" et la simulation d'assemblages est d'actualité. Les travaux de Dantan et al. [DBM 03] [DMB+05] sur les quantificateurs sont également des pistes que nous allons considérer par la suite.

La formalisation des concepts de GeoSpelling doit être poussée et une extension aux ensembles mécaniques et assemblages est nécessaire. Ceci permettra la spécification d'exigences et de contraintes géométriques permettant du raisonnement géométrique et de la vérification de cohérence. Les spécifications d'assemblabilité de produit et de son fonctionnement seront basées sur de nouvelles opérations.

Les futurs travaux visent également le développement de modèles de données d'assemblage et la représentation des connaissances de processus d'assemblage. Les données géométriques et sémantiques du modèle produit seront couplées avec celles du processus d'assemblage avec un haut niveau d'intégration sémantique. L'approche proposée permettra également la définition d'un modèle de raisonnement hybride intégrant le produit et son processus d'assemblage à l'aide de la combinaison de logique de description et de règles. À cet effet, un modèle augmenté d'ontologies pour l'assemblage pourra être développé. Des résultats préliminaires développés en collaboration avec L. Qiao (université de Beihang) nous encouragent à poursuivre dans cette voie [ZQA 13] [HQA 14].

## 3. Skin Model Shapes pour la conception robuste et le tolérancement multi-physique

Une autre perspective de nos travaux concerne l'exploitation des Skin Model Shapes en stade de prédiction et d'observation pour intégrer les incertitudes et les variabilités lors de la conception robuste et optimale de systèmes complexes. La variabilité géométrique peut impacter considérablement les performances des systèmes. Celle-ci doit être bien caractérisée et propagée par les variables du système étudié. La variabilité géométrique est de nature stochastique et de grande dimensionnalité. Les Skin Model Shapes en stade d'observation nous ont permis de considérer la réduction de dimensionnalité à travers l'ACP et d'aboutir à des modèles réduits à faibles coûts de calcul.

Un autre aspect de nos travaux sur les Skin Model Shapes est de pouvoir intégrer les variations d'origine multi-physique de nature géométrique. Des travaux récents, développés en collaboration avec l'université de Beihang (L. Qiao), sur les pièces non rigides et leur assemblage [CQA 15] et la considération des phénomènes thermomécaniques [Riq 15] sont

de nouvelles pistes pour les Skin Model Shapes en tolérancement multi-physique.

## 4. Ingénierie des formes pour la fabrication additive

Les technologies de fabrication additive sont aujourd'hui arrivées en phase de maturité. Des avantages considérables pour le développement de produits à forte valeur ajoutée sont ainsi offerts par la fabrication additive : réalisation de formes complexes, allègement des pièces par remplacement de structures pleines par des structures alvéolaires, fabrication personnalisée et sur mesure, réalisation de pièces multi matériaux, simplification des assemblages par la réduction du nombre de pièces, et réalisation d'ensembles déjà assemblés.

Malgré le potentiel et les opportunités de la fabrication additive, la variabilité géométrique des formes obtenues et son effet sur les assemblages ne sont pas encore maîtrisés. Les origines de cette variabilité géométrique ne se limitent pas seulement aux matériaux et aux procédés utilisés. Le traitement numérique de la géométrie dans le processus de la chaîne numérique de la fabrication additive est devenu un facteur important pour la qualité des pièces fabriquées.

Les modèles numériques en fabrication additive reposent sur une représentation discrète (par triangulation) de la géométrie. Les formes sous-jacentes sont obtenues par la CAO et les spécifications géométriques (géométrie spécifiée) ou par l'optimisation de la topologie et de la forme (géométrie optimisée). Les phases amont du processus de retro-conception (acquisition, prétraitement, reconstruction) sont également des sources de modèles géométriques pour la fabrication additive. Le modèle géométrique triangulé est par la suite décomposé par couches (Slicing) dans des directions données ou/et optimisées (Slice direction) dont les contours vont servir de base pour la fabrication additive [GRS 10]. La qualité de l'approximation et de la reconstruction des formes, l'épaisseur et l'orientation des couches deviennent ainsi des éléments déterminants pour les autres phases de la fabrication additive. La maitrise de ces paramètres et la considération des caractéristiques de la technologie de fabrication additive et des matériaux utilisés permettent ainsi la prédiction des défauts géométriques des pièces et la compensation/correction géométrique des modèles de produit pour la fabrication additive [TJL 08] [HNX+14].

L'objectif de nos travaux futurs est de développer une nouvelle représentation géométrique (et numérique) pour l'étude des pièces mécaniques réalisées par fabrication additive. Nous nous intéresserons ainsi à une représentation géométrique discrète des pièces mécaniques et une formalisation des concepts géométriques en fabrication additive pour

enrichir les opérateurs de GeoSpelling et établir un parallèle entre ces opérateurs et les étapes du processus de la chaîne numérique de la fabrication additive.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'étude détaillée de la chaîne numérique en fabrication additive. L'analyse des travaux de recherche, des pratiques industrielles et des travaux de normalisation, nous permettra de cartographier les processus numériques à base géométrique. Un processus numérique générique sera alors élaboré. Les modèles de description des défauts et de la variabilité géométriques seront étendus pour considérer les effets d'origine géométriques en fabrication additive. Les stades de prédiction et d'observation seront étudiés finement pour intégrer la variabilité géométrique en fabrication additive.

Par la suite, nous établirons un parallèle entre les opérateurs de GeoSpelling et les étapes du processus de la chaîne numérique de la fabrication additive. De nouveaux paradigmes pour la spécification de produit en fabrication additive seront développés. Ces modèles doivent aller au-delà de la description nominale spécifiée en intégrant les propriétés des matériaux et des éléments de structure tout en permettant une meilleure interopérabilité entre le modèle de produit et les processus de conception et de fabrication.

# Bibliographie


[3DCS] 3DCS Variation Analyst, http://www.3dcs.com/3dcs-analyst.html

[AB98] Amenta, N., Bern, M., Surface reconstruction by Voronoi filtering. Proc. 14th Ann. Symp. On Comp. Geom., 39-48, 1998

[ABC+ 03] Alexa, M., Behr, J., Cohen-Or, D., Fleishman, S. Levin, D., Silva, C. T., Computing and Rendering Point Set Surfaces, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 9(1), 3–15, 2003

[ABE97] Amenta, N., Bern, M., Eppstein, D., The crust and β-skeleton: combinatorial curve reconstruction, Graphical Models and Image Processing, 60, 125-135, 1997

[ABK98] Amenta, N., Bern, M., Kamvysselis, M., A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm, Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH'98, 415-421, 1998

[ABL 03] Attali, D., Boissonnat, J.-D., Lieutier, A., Complexity of the Delaunay triangulation of points on surfaces the smooth case, Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry, 2003

[AC 99] Anwer, N., Chep, A., HERA: A knowledge modeling scheme for CAPP, Proceedings of the 2nd International Workshop on Intelligent Manufacturing Systems IMS'99, Leuven, Belgium, 1999

[ACA06] Allègre, R., Chaine, R., Akkouche, S., A flexible framework for surface reconstruction from large point sets, Comput. Graph., 31 (2), 190–204, 2007

[ACD+00] Amenta, N., Choi, S., Dey, T., Leekha, N., A Simple Algorithm for homeomorphic surface reconstruction, Proceedings of the sixteenth annual symposium on Computational geometry, 213-222, 2000

[ACD+03] Alliez, P., Cohen-Steiner, D., Devillers, O., Levy, B., Desbrun. M., Anisotropic polygonal remeshing, Transactions of ACM on Graphics, 22 (3), 485-493, 2003

[Ace 98] Aceves-Campos, H., Profile identification of aspheric lenses, Applied Optics, 37 (34), 8149-8150, 1998

[ACK01] Amenta, N., Choi, S., Kolluri R.-K., The Power Crust, union of balls and the medial axis transform, Computational Geometry: Theory and Applications, 19 (2-3), 127-153, 2001

[ACM 03] Anwer, N., Cid, G., Mathieu, L., XML based tolerance management for integrated design, Proceedings of the International CIRP Design Seminar, Grenoble, France, 2003

[ADM+ 15] Aubry, R., Dey, S., Mestreau, E.L., Karamete, B.K., Gayman, D., A robust conforming NURBS tessellation for industrial applications based on a mesh generation approach, Computer-Aided Design, Volume 63, 26-38, 2015

[AFM 15] Association Française de Mécanique, Concevoir et produire autrement, Livre blanc de la Recherche en Mécanique, EDP Sciences, 227-239, 2015

[AFS 06] Attene, M., Falcidieno, B., Spagnuolo, M., Hierarchical mesh segmentation based on fitting primitives. The Visual Computer, 22(3), 181-193, 2006

[AG 05] Alliez, P., Gotsman, C., Recent Advances in Compression of 3D Meshes,, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, Springer-Verlag, 3-26, 2005

[Ahn 04] Ahn, S. J., Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space, Lecture Notes in Computer Science, 151, Springer, Heidelberg, 2004

[All 09] Alliez, P., Variational Approaches to Digital Geometry Processing, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nice Sophia Antipolis, France, 2009

[ALS 10] Aranda, S., Linares, J. M., Sprauel, J. M., Best-fit Criterion within the Context of Likelihood Maximization Estimation, Measurement, 43, 538-548, 2010

[AM 09] Angulo, J., Meyer, F., Morphological exploration of shape spaces, Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing, Springer Berlin Heidelberg, 226-237, 2009

[AME 05] Anwer, N., Mathieu, L., Elmaraghy, W., Apport des ontologies de spécifications géométriques des produits pour la conception intégrée, Colloque CPI 2005, Casablanca, Maroc, 2005

[AMK 01] Anwer, N., Mawussi, K., Kassegne, K., Modélisation multivue pour la conception intégrée, Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique, 16 (4), 477-489, 2001

[Anw 00a] Anwer, N., Méthodologie d'analyse de raisonnement pour la génération automatique des gammes d'usinage en fraisage. Contribution à la caractérisation des entités par analyse des contraintes d'usinabilité, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2000

[Anw 00b] Anwer, N., Spécification et développement d'un outil de génération de macro-gammes en fraisage, Contrat de recherche LURPA/ENS Cachan - Dassault Systèmes, 2000

[APP+07] Agathos, A., Pratikakis, I., Perantonis, S., Sapidis, N., Azariadis, P., 3D mesh segmentation methodologies for cad applications, Computer-Aided Design and Applications, 4(6), 827–841, 2007

[ARM 03] Anwer, N., Raulin, T., Mathieu, L., Méthodologie pour la spécification géométrique des états intermédiaires des pièces fabriquées, Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique, 18(3), 321-336, 2003

[ARS 04] Adams, D. C., Rohlf, F. J., Slice, D. E., Geometric morphometrics: ten years of progress following the 'revolution', Italian Journal of Zoology, 71(1), 5-16, 2004

[AS 14] Andrews, J., Séquin, C.H., Type-constrained direct fitting of quadric surfaces. Computer-Aided Design and Applications, 2014, 11(1), 107-119, 2014

[ASF 10] Adragna, P. A., Samper, S., Favreliere, H., How Form Errors Impact on 2D Precision Assembly with Clearance?, Precision Assembly Technologies and Systems, IFIP Advances in Information and Communication Technology, 315, Springer Berlin Heidelberg, 50-59, 2010

[ASG 11] Ameta, G., Samper, S., Giordano, M., Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis: Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS, ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 11(2), 2011

[AT 07] Adler, R., Taylor, J., Random fields and geometry. Springer monographs in mathematics, Berlin, Heidelberg, Springer, 2007.

[Aya 15] Ayache, N., Des images médicales au patient numérique, Collège de France /Fayard, 2015

[Bai 14] Bai, X., SkinColl : Modélisation géométrique "réaliste" du contact entre surfaces, Mémoire de Master, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2014

[Bal 93] Ballu, A., Identification de modèles géométriques composés pour la spécification et la mesure par coordonnées des caractéristiques fonctionnelles des pièces mécaniques, thèse de doctorat, Université de Nancy 1, 1993

[BC00] Boissonnat J.-D., Cazals, F., Smooth surface reconstruction via Natural Neighbour interpolation of distance functions, Proc. 16th Ann. Symp. Comput. Geom., 223-232, 2000

[BDF+08] Biasotti, S., De Floriani, L., Falcidieno, B., Frosini, P., Giorgi, D., Landi, C., Papaleo, L., Spagnuolo, M., Describing shapes by geometrical-topological properties of real functions. ACM Computing Surveys (CSUR), 40(4), 12, 2008

[BDW+ 04] Bendels, G., Degener, P., Wahl, R., Körtgen, M., Klein, R., Image-based Registration of 3D range data using feature surface elements, Proceedings of 5th International Symposium on Virtual Reality, Archaeology and Cultural Heritage (VAST 2004), 115-124, 2004

[BF 04] Boissonnat, J.-D., Flötotto, J., A coordinate system associated with points scattered on a surface, Journal of ACM, 36, 161–174, 2004

[BG09] Boissonnat J.-D., Ghosh, A., Manifold reconstruction using tangential Delaunay complexes, Proc. of ACM symp. on Comput. Geom., 324-333, 2009

[Bih 99] Bihlmaier, B., Tolerance Analysis of Flexible Assemblies Using Finite Element and Spectral Analysis. Master thesis, Brigham Young University, 1999

[BJ 05] Barbic, J., James, D. L., Real-time subspace integration for St. Venant-Kirchhoff deformable models, ACM Transactions on Graphics 24, 3, 982–990, 2005

[BJ 88] Besl, J., Jain R., Segmentation through variable order of surface fitting, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 20(2), 167-192, 1988

[BJ86] Besl, P.J., Jain, R.C., Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 33(1), 33–80, 1986

[BKP+10] Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P., Lévy, B., Polygon mesh processing, CRC press, 2010

[BL 95] Blais, G., Levine, M., Registering multiview range data to create 3D computer object, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 17(8), 820-824, 1995

[Bla 03] Blanc, S., Approche algébrique pour le tolérancement fonctionnel, Mémoire de DEA, ENS Cachan, 2003

[BLA+07] Bernard, A., Laroche, F., Ammar-Khodja, S., Perry, N., Impact of New 3D Numerical Devices and Environments on Redesign and Valorisation, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 56(2), 695–706, 2007

[BLN+13] Berger, M., Levine, J. A., Nonato, L. G., Taubin, G., Silva, C. T., A Benchmark for Surface Reconstruction. ACM Transactions on Graphics, 32(2), 20:1–20:17, 2013

[BM 92] Besl, P., McKay, N., A Method for Registration of 3D Shapes, Trans. PAMI, 14(2), 239-256, 1992

[BM 93] Ballu, A., Mathieu, L., Analysis of dimensional and geometrical specifications: standards and models, CIRP Computer Aided Tolerancing, 3rd Seminar, Cachan, France, 157-170, 1993

[BM 95] Ballu, A., Mathieu, L., Univocal expression of functional and geometrical tolerances for design, manufacturing and inspection. CIRP Computer Aided Tolerancing, 4th Seminar, Tokyo, Japan, 31-46, 1995

[BM 97] Bricault, I., Monga, O., From volume medical images to quadratic surface patches. Computer Vision and Image Understanding, 67(1), 24–38, 1997

[BM92] Besl, P., McKay, N., A method for registration of 3D shapes, Transactions of IEEE on PAMI, 14 (2), 239-256, 1992

[BN 02] Belkin, M., and Niyogi, P., Laplacian Eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering. Advances in Neural Information Processing Systems, 14, 585– 591, Cambridge, MA, USA, The MIT Press, 2002.

[Boi84] Boissonnat, J.-D., Geometric structures for three-dimensional shape representation, ACM Trans. on Graph., 3(4), 266-286, 1984

[Boo 86] Bookstein, F. L., Size and shape spaces for landmark data in two dimensions, Statistical Science, 1(2), 181-242, 1986

[Boo 97] Bookstein, F. L., Morphometric tools for landmark data: geometry and biology. Cambridge University Press, 1997

[Bot 05] Botsch, M., High Quality Surface Generation and Efficient Multiresolution Editing Based on Triangle Meshes, PhD thesis, RWTH Aachen, 2005

[BS 08]Botsch, M., Sorkine, O., On linear variational surface deformation methods, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 14(1), 213–230, 2008

[BS 96] Brunnström, K., Stoddart, A., J., Genetic algorithms for free-form surface matching. Int. Conf. on Pattern Recognition, 689–693, 1996

[BS99] Benjemma, R., Schmitt, F., Fast global registration of 3D sampled surface using a multi-z-buffer technique, Journal of Imaging and Vision Computing, 17, 113-123, 1999

[BSS+ 08] Bobenko, A., Sullivan, J., Schröder, P., Ziegler, G., Discrete Differential Geometry, Oberwolfach Seminars 38, Birkhäuser, Basel, 2008

[BTS+14] Berger, M., Tagliasacchi, A., Seversky, L., Alliez, P., Levine, J., Sharf, A., Silva, C., State of the art in surface reconstruction from point clouds, Proceedings of the Eurographics 2014, Eurographics STARs, 161–185, Strasbourg, France, 2014

[Buc 21] Buckingham, E., Principles of Interchangeable Manufacturing; A Treatise on the Basic Principles Involved in Successful Interchangeable Manufacturing Practice, Covering Design,

Tolerances, Drawings, Manufacturing Equipment, Gaging and Inspection, First edition, New York, Industrial Press, 1921

[BV 04] Benko, P., Varady, T., Segmentation method for smooth point regions of conventional engineering objects, Computer-Aided Design, 36, 511-523, 2004

[BV 91] Bolle, R. M., Vemuri, B. C., On three-dimensional surface reconstruction methods. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(1), 1-13, 1991

[BY 98] Boissonnat, J.-D., Yvinec, M., Algorithmic geometry, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998

[BYW+13] Bo, C., Yang, Z., Wang, L., Chen, H., A Comparison of Tolerance Analysis Models for Assembly, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 68(1–4), 739–754, 2013

[CA 00] Chep, A., Anwer, N., IPPA: un système modulaire d'aide à la génération de gammes, Journal européen des systèmes automatisés, 34(2-3), 271-282, 2000

[Car 76] do Carmo, M. P., Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1976

[CB 88] Clement, A., Bourdet, P., A study of optimal-criteria identification based on the small displacement screw model, CIRP Annals-Manufacturing Technology, 37(1), 503-506, 1988

[CBL 02] Contri, A., Bourdet, P., Lartigue, C., Quality of 3D digitised points obtained with non-contact optical sensors, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 51(1), 443-446, 2002

[CCS+ 01] Carbone, V., Carocci, M., Savio, E., Sansoni, G., De Chiffre, L., Combination of a vision system and a coordinate measuring machine for the reverse engineering of freeform surfaces, J. Adv. Manuf. Technol. 17 (4), 263–271, 2001

[CET 98] Cootes, T. F., Edwards, G.J., Taylor, C. J., Active Appearance Model, Proc. European Conference on Computer Vision 1998, 2, 484-498 1998.

[CG06] Cazals,F., Giesen, J., Delaunay triangulation based surface reconstruction: ideas and algorithms, Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces, Springer, 231–276, 2006

[CGF09] Chen, X., Golovinskiy, A., Funkhouser, T., A benchmark for 3d mesh segmentation. ACM Transactions on Graphics, 28(3), 73, 2009

[CGM+09] Chen, Z., Guo, Z., Mi., Q., Yang. Z., Bai, R., Research of fitting algorithm for coefficients of rotational symmetry aspheric lens, Proceedings of SPIE, 7283, 2009

[Cha 07] Chang, W., Surface Reconstruction from Points, Technical Report CS2008-0922, Department of Computer Science and Engineering, University of California, San Diego, 2007

[Cha 14] Charpentier, F., Maîtrise du processus de modélisation géométrique et physique en conception mécanique, thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2014

[Cha03] Chaine, R., A geometric convection approach of 3-D reconstruction. Proc. of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symp. on Geom. Proces., Switzerland, 218-229, 2003

[CHC 99] Chen, C.-S., Hung, Y.-P., Cheng, J.-B., Ransac-based darces: A new approach to fast automatic registration of partially overlapping range images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21(11), 1229–1234, 1999

[Chevrolet 40] Chevrolet Draftsman's Handbook, 1940

[CHM 04] Camelio J.A., Hu, S.J., Marin, S.P., Compliant assembly variation analysis using component geometric covariance. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 126, 355–360, 2004

[Cid 02] Cid, G., Gestion des variations géométriques des produits : modélisation, échange et partage des données via le web, G. Cid, Mémoire de DEA, ENS Cachan, 2002

[CLB+09] Chuang, M., Luo, L., Brown, B.J., Rusinkiewicz, S., Kazhdan, M., Estimating the Laplace-Beltrami operator by restricting functions, Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry, 28 (5), 1475-1484, 2009

[CLP+12] Choi, H. K., Lee, S. J., Park, M. K., Lee, K. H., An improved spectral analysis method with additional attributes for 3D objects. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 59(5-8), 761-773, 2012

[CLR 12] Clozel, P., Lacour, D., Rance, P., A 3D Tolerances Analysis integrated to Digital Mock Up: MECAmaster for CATIA V5. Proceedings of the 12th CIRP International Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 2012

[CLR 80] Cohen, E., Lyche, T., Riesenfeld, R., Discrete B-Splines and Subdivision Techniques in Computer-Aided Geometric Design and Computer Graphics, Computer Graphics and Image Processing, 14(2), 87–111, 1980

[CLV 07] Chiabert, P., Lombardi, F., Vaccarino, F., Analysis of kinematic methods for invariants based classification in the ISO/TC213 framework., Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, 2007

[CM03] Cohen-Steiner, D., Morvan, J.-M., Restricted Delaunay Triangulation and Normal Cycle, Proceedings of 19th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, 312-321, 2003

[CM91] Chen, Y., Medioni, G., Object modeling by registration of multiple range images, Proceedings of IEEE conference on robotics and automation, 2724-2729, 1991

[CMP 10] Colosimo, B. M., Mammarella, F., Petro, S., Quality control of manufactured surfaces, Frontiers in Statistical Quality Control 9, 55-70, Physica-Verlag, 2010

[Con 02] Contri, A., Qualité géométrique de la mesure de surfaces complexes par moyens optiques, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2002

[CP 91] Chase, K. W., Parkinson, A. R., A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies, Research in Engineering design, 3(1), 23-37, 1991

[CP07] Colosimo, B.M., Pacella, On the use of principal component analysis to identify systematic patterns in roundness profiles. Qual Reliab Eng Int, 23, 707–725, 2007

[CPS 08] Colosimo, B.M., Pacella, M., Semeraro, Q., Statistical process control for geometric specifications: on the monitoring of roundness profiles. J Qual Technol, 40, 1–18, 2008

[CPS 15] Colosimo, B. M., Pacella, M., Senin, N., Multisensor data fusion via Gaussian process models for dimensional and geometric verification, Precision Engineering, 40, 199-213, 2015

[CQA 15] Cai, N., Qiao, L., Anwer, N., Unified variation modeling of sheet metal assembly considering rigid and compliant variations, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 229(3), 495–507, 2015

[CRS+13] Chandrasegaran, S. K., Ramani, K., Sriram, R. D., Horváth, I., Bernard, A., Harik, R. F., Gao, W., The Evolution, Challenges, and Future of Knowledge Representation in Product Design Systems, Computer-Aided Design 45(2), 204–228, 2013

[CRS+97] Clément, A., Rivière, A., Serré, P., Valade, C., The TTRS: 13 constraints for dimensioning and tolerancing, Proceedings of the 5th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 28–29, 1997

[CS97] Ceglarek, D., Shi, J., Tolerance analysis for sheet metal assembly using a beam-based model. ASME Design Engineering Division Publication, 94, 153–159, 1997

[CSS+02] Chetverikov, D., Svirko, D., Stepanov, D., Krsek, P., The trimmed iterative closest point algorithm, Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition, 545-548, 2002

[CT 01] Cootes, T. F., Taylor, C. J., Statistical Models of Appearance for Medical Image Analysis and Computer Vision, Proc. SPIE Medical Imaging 236-248, 2001,

[CT 99] Cootes, T. F., Taylor, C. J., A mixture model for representing shape variation. Image and Vision Computing, 17, 567-573, 1999

[CTC 95] Cootes, T. F., Taylor, C. J., Cooper, D.H., Active Shape Models - Their Training and Application, Computer Vision and Image Understanding, 61(1), 38-59, 1995

[CTC+92] Cootes, T. F., Taylor, C. J., Cooper, D.H., Graham, J., Training Models of Shape from Sets of Examples, D. Hogg and R. Boyle, editors, 3rd British Machine Vision Conference, 9–18, Springer-Verlag, 1992

[DAB+09] Douilly, M., Anwer, N., Bourdet, P., Chevassus, N., Le Vacon, P., Uncertainty evaluation for pose estimation by multiple camera measurement system, Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing VIII, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific Publishing, 78, 73-79, 2009

[DAM 03] Dantan, J.-Y. , Anwer, N., Mathieu, L., Integrated Tolerancing Process for conceptual design, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 52(1), 135-138, 2003

[Dan 14] Dantan, J. Y., Tolerancing, CIRP Encyclopedia of Production Engineering, Laperrière, L., Reinhart, G. (Eds.), Springer Berlin Heidelberg, 1230-1237, 2014

[DB 02] Dantan, J. Y., Ballu, A., Assembly specification by Gauge with Internal Mobilities (GIM)—A specification semantics deduced from tolerance synthesis, Journal of manufacturing systems, 21(3), 218-235, 2002

[DBM 03] Dantan, J. Y., Ballu, A., Martin, P., Mathematical formulation of tolerance synthesis taking into account the assembly process, Proceedings of the IEEE international symposium on assembly and task planning, 241-246, 2003

[DC 11] Del Castillo, E., Colosimo, B. M., Statistical shape analysis of experiments for manufacturing processes. Technometrics, 53(1), 1-15, 2011

[DD15] Di Angelo, L., Di Stefano, P., Geometric segmentation of 3D scanned surfaces, Computer-Aided Design, 62, 44-56, 2015

[DDW11] Dey, T.K., Dyer, R., Wang, L., Localized Cocone surface reconstruction, Comput. Graph., 35 (3), 483–491 , 2011

[Del 11] Del Castillo, E., Statistical Shape Analysis of Manufacturing Data. Geometric Tolerances: Impact on Product Design, Quality Inspection and Statistical Process Monitoring, B.M. Colosimo, N. Senin Eds., Springer London, 215-234, 2011

[Dey 06] Dey, T. K., Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2006

[DFY 03] Desta, M. T., Feng, H. Y. , Yang, D. O., Characterization of General Systematic form Errors for Circular Features, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 43, 1069-1078, 2003

[DG03] Dey, T.K., Goswami, S., Tight Cocone: A Water-tight Surface Reconstructor, Proc. Eighth ACM Symp. Solid Model. Appl., Seattle, US, 127–134, 2003

[DG06] Dey, T.K., Goswami, S., Provable surface reconstruction from noisy samples, Comput. Geom. 35 (1-2), 124–141, 2006

[DGH01] Dey, T.K., Giesen, J., Hudson, J., Delaunay based shape reconstruction from large data, Proc. IEEE Symp. in Paral. and Large Data Visual. and Graph., 19-27, 2001

[DGR+05] Dey, T.K., Giesen, J., Ramos, E., Sadri, B., Critical points of the distance to an epsilon-sampling of a surface and flow-complex-based surface reconstruction, Proc. of the 21st Ann. Symp. on Comput. Geom., 218-227, 2005

[DGT+97] Dowling, M.M., Griffin, P.M., Tsui, K.L., Zhou, C., Statistical issues in geometric feature inspection using coordinate measuring machines, Technometrics 39(1), 3–17, 1997

[DHK+92] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., Minimal Surfaces (I). Springer-Verlag, 1992.

[DLH 15] Du, S., Liu, C., Huang, D., A shearlet-based separation method of 3D engineering surface using high definition metrology, Precision Engineering, 40, 55-73, 2015

[DM 98] Dryden, I. L., Mardia, K. V., Statistical Shape Analysis, John Wiley & Sons, London, 1998

[DMB 03] Dantan, J.Y., Mathieu, L., Ballu, A., Geometrical product requirement: Uncertainty and expression. Proceedings of the 8th CIRP international seminar on computer-aided tolerancing, 199–208, 2003

[DMB+05] Dantan, J. Y., Mathieu, L., Ballu, A., Martin, P., Tolerance synthesis: quantifier notion and virtual boundary, Computer-Aided Design, 37(2), 231-240, 2005

[DMS+ 15] Davoodi, M., Mohades, A., Sheikhi, F., Khanteimouri, P., Data imprecision under λ-geometry model, Information Sciences, 295, 126-144, 2015

[DO 11] Devadoss, S. L., O'Rourke, J., Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011

[Dou 09] Douilly, M., Contribution à l'amélioration de la qualité géométrique de positionnement d'un robot anthropomorphe dans le cas d'assemblage de structures aéronautiques, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2009

[DP 13] Dickinson, S. J., Pizlo, Z., Shape perception in human and computer vision, Springer, 2013

[DRL+15] Diez, Y., Roure, F., Llado, X., Salvi, J., A Qualitative Review on 3D Coarse Registration Methods, ACM Computing Surveys (CSUR), 47(3), No. 45, 2015.

[DRW 12] Dey, T. K., Ranjan, P., Wang, Y., Eigen deformation of 3D models. The Visual Computer, 28(6-8), 585-595, 2012

[Dur 88] Durrant-Whyte, H. F., Sensor models and multisensor integration. The International Journal of Robotics Research, 7(6), 97-113, 1988

[Dur 94] Durfee, W.F., The first systematic attempt at interchangeability in firearms, Cassier's magazine, 5, New-York, 469-477, 1894

[Ede03] Edelsbrunner, H., Surface Reconstruction by Wrapping Finite Sets in Space, Discrete Comput. Geom., 25, 379–404, 2003

[EF 95] Lorusso, A., Eggert, D. W., & Fisher, R. B., Proceedings of the 1995 British conference on Machine vision, 237-246, 1995

[EKS 83] Edelsbrunner, H., Kirkpatrick, D., Seidel, R., On the shape of a set of points in the plane. Information Theory, IEEE Transactions on, 29(4), 551-559, 1983

[EL 02]Edalat, A., Lieutier, A., Foundation of a computable solid modelling, Theoretical Computer Science, 284(2), 319-345, 2002

[ElH 14] El-Hayek, N., Contribution à la reconstruction de surfaces complexes à partir d'un grand flot de données non organisées pour la métrologie 3D, Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2014

[EM94] Edelsbrunner, H., Mucke, E., Three dimensional alpha shapes, ACM Trans. on Graph. ,13, 43-72, 1994

[ENA+ 14] N. El-Hayek, H. Nouira, N. Anwer, M. Damak, O. Gibaru, Reconstruction of freeform surfaces for metrology, J. Phys. Conf. Ser., 483 (1), 2014.

[ES 97] Edelsbrunner, H., Shah, N., Triangulating topological spaces. Internat. J. Comput. Geom. Appl., 7, 365-378, 1997

[FB 08] Forbes, G.W., Brophy, C.P., Asphere, O Asphere, how shall we describe thee?, Proceedings of SPIE, 7100, 710002:1–71002:15, 2008

[FGP11] Franciosa, P., Gerbino, S., Patalano, S., Simulation of variational compliant assemblies with shape errors based on morphing mesh approach. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 53(1-4), 47-61, 2011

[FH 10] Flöry, S., Hofer, M., Surface fitting and registration of point clouds using approximations of the unsigned distance function, Computer Aided Geometric Design, 27(1),60 – 77, 2010

[FHK 02] Farin, G., Hoschek, J., Kim, M.S., Handbook of Computer Aided Geometric Design, Elsevier, 2002.

[FHP 83] Faugeras, O., Hebert, M., Pauchon, E., Segmentation of range data into planar and quadric patches. Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 8–13, 1983

[Fit 03] Fitzgibbon, A. W., Robust registration of 2D and 3D point sets. Image and Vision Computing, 21(13), 1145-1153, 2003

[FJF 13] Frechette, S.P., Jones, A.T., Fischer, B.R., Strategy for Testing Conformance to Geometric Dimensioning & Tolerancing Standards, Procedia CIRP, 10, 211–215, 2013

[FL 87] Ferrie, F.P., Levine, M.D., Integrating information from multiple views, Proceedings of the IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision, 117–122, 1987

[FLW 93] Ferrie, F. P., Lagarde, J., Whaite, P., Darboux frames, snakes, and super-quadrics: Geometry from the bottom up. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 15(8), 771-784, 1993

[For 07a] Forbes, G.W., Shape specification for axially symmetric optical surfaces., Opt. Express., 15 (8), 5218–5226, 2007

[For 07b] Forbes, G.W., Effective Characterization of the Nominal Shape of Aspheric Optics, SPIE Newsroom, Optical Design and Engineering, 2010

[For 12] Forbes, G.W., Characterizing the shape of freeform optics., Opt. Express., 20 (3), 2483–2499, 2012

[For 90] Forbes A.B, Least squares best fit geometry elements, Algorithms for approximation II, Mason J.C, Cox M.G (Eds.), Chapman and Hall, London, UK, 311–319, 1990

[For 93] Forbes, A. B., Generalised regression problems in metrology, Numerical Algorithms, 5(10), 523-533, 1993

[FS 09] Forslund, K., Söderberg, R., The Effects of Geometrical Variation on Perceived Quality – A Close Look at the Concept of Visual Robustness. 11th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009

[GB 08] Gain J., Bechmann D., A survey of spatial deformation from a user-centered perspective, ACM Transactions on Graphics (TOG) 27 (4), 107–143, 2008

[Ges 11] Van Gestel, N., Determining measurement uncertainties of feature measurements on CMMs, PhD Thesis, KU Leuven, 2011

[GG 04] Gelfand, N., Guibas L.J., Shape segmentation using local slippage analysis, Proc. eurographics symposium on geometry processing, 219–228, 2004

[GG 84] Geman, S., Geman, D., Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12, 609-628, 1984

[Gla 45] Gladman, C., Drawing Office Practice in Relation to Interchangeable Components, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 152(1), 388-418, 1945

[GM 98] Grenander, U., Miller, M. I., Computational anatomy: An emerging discipline, Quarterly of applied mathematics, 56(4), 617-694, 1998

[GMG+05] Gelfand, N., Mitra, N. J., Guibas, L. J., Pottmann, H., Robust global registration, Symposium on geometry processing (SGP'05), Aire-la-Ville, Switzerland, 2005

[GMU+05] Goto, T., Miyakura, J., Umeda, K., Kadowaki. S., Yanagi, K., A robust spline filter on the basis of L2-norm, Precis. Eng., 29, 157–161, 2005

[Gou 71] Gouraud, H., Continuous shading of curved surfaces, IEEE Transactions on Computers, 20(6), 623–629, 1971

[GP 07] Gross, M., Pfister, H., Point Based Graphics, Morgan Kaufmann, 2007

[Gra 25] Gramenz, K, Die Din passungen und ihre Anwendungen, Dinbuch 4, 1925

[GRS 10] Gibson, I., Rosen, D. R., and Stucker, B., Additive Manufacturing Technologies, Springer, New York, US, 2010

[GRS 96] Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J., Markov Chain Monte Carlo in Practice, Chapman and Hall, London, 1996

[GS 14] Graening, L., Sendhoff, B., Shape mining: A holistic data mining approach for engineering design, Advanced Engineering Informatics, 28(2), 166-185, 2014

[GSS 89] Guibas, L., Salesin, D., Stol, J., Epsilon geometry: Building robust algorithms for imprecise computations. Proc. of the 5th ACM Annual Symposium on Computational Geometry, 208-217, 1989

[GTP 92] Goch, G., Tschudi, U., Pettavel, J., A universal Algorithm for the alignment of Sculptured Surfaces, CIRP Annals-Manufacturing Technology, 41(1), 597-600, 1992

[GX 13] Gallier, J., Xu, D., A guide to the classification theorem for compact surfaces (Vol. 9). Springer Science & Business Media, 2013

[GY03] Greenspan, M., Yurick, M., Approximate k-d tree search for efficient ICP, Proceedings of IEEE 4th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, 442-448, 2003

[GZL12] Gao L., Zhang G. X., Lai Y. K., Lp shape deformation, Sci China Inf Sci, 55, 983–993, 2012

[HC 02a] Hong, Y.S., Chang, T.C., A Comprehensive Review of Tolerancing Research, International Journal of Production Research, 40(11), 2425–2459, 2002

[HC 02b] Huang, W., Ceglarek, D., Mode-based Decomposition of Part Form Error by Discrete-Cosine-Transform with Implementation to Assembly and Stamping System with Compliant Parts, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 51(1), 21–26, 2002

[HCS+07] He, L., Chao, Y., Suzuki, K., Wu, K., Fast connected-component labeling, Pattern Recognition, 42(9), 1977-1987, 2007

[HDD+ 92] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J., Stuetzle, W., Surface reconstruction from unorganized points, Computer Graphics, 26(2), 71-78, 1992

[Hen 06] Henzold, G., Geometrical dimensioning and tolerancing for design, manufacturing and inspection: a handbook for geometrical product specification using ISO and ASME standards. Butterworth-Heinemann, 2006.

[Her 94] Hervé, J.-M., The mathematical group structure of the set of displacements, Mech. Mach.Theory, 29(1), 73–81, 1994

[Her 99] Hervé, J.-M., The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design, Mech. Mach. Theory, 34(5), 719–730, 1999

[HH03] Huber, D., Hebert, M., Fully automatic registration of multiple 3D data sets. Image and Vision Computing 21(7), 637–650, 2003

[HLC+14] Huang, W., Liu, J., Chalivendra, V., Ceglarek, D., Kong, Z., Zhou, Y., Statistical modal analysis for variation characterization and application in manufacturing quality control, IIE Transactions, 46(5), 497-511, 2014

[HLL 13] He, B., Lin, Z., Li, Y.F., An automatic registration algorithm for the scattered point clouds based on the curvature feature, Optics & Laser Technology, 46, 53-60, 2013

[HM 95] Horaud,R., Monga,O., Vision par ordinateur: outils fondamentaux, Traité des nouvelles technologies, Série informatique, Editions Hermès, 1995

[HM01] Huang, J., Menq, C., Automatic data segmentation for geometric feature extraction from unorganized 3-D coordinates points, IEEE Transaction on Robotics and Automation. 17(3), 268–279, 2001

[HNX+14] Huang, Q., Nouri, H., Xu, K., Chen, Y., Sosina, S., and Dasgupta, T., Statistical predictive modeling and compensation of geometric deviations of three-dimensional printed products, Journal of Manufacturing Science and Engineering, 136(6), 10, 2014

[Hot 33a] Hotelling, H., Analysis of a complex of statistical variables into principal components. J. Educ. Psychol., 24, 417–441, 1933

[Hot 33b] Hotelling, H., Analysis of a complex of statistical variables into principal components. J. Educ. Psychol., 24, 498–520, 1933

[HP 04] Hildebrandt, K., Polthier, K., Anisotropic Filtering of Non-Linear Surface Features, Symposium of Eurographics on Computer Graphics Forum, 23 (3), 391-400, 2004

[HPW 06] Hildebrandt, K., Polthier, K., Wardetzky, M., On the Convergence of Metric and Geometric Properties of Polyhedral Surfaces, Geometriae Dedicata, Aire-la-Ville, Switzerland, 89-112, 2006

[HQ 07] Huang, Y., Qian, X., A dynamic sensing-and-modeling approach to three-dimensional point-and-area-sensor integration, J. Manuf. Sci. Eng. 129 (3), 623–635, 2007

[HQA 14] Huang, Z., Qiao, L., Anwer, N., Mo, Y., Ontology Model for Assembly Process Planning Knowledge, Proceedings of the 21st International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, 2014

[HSB+ 99] Henke, R. P., Summerhays, K. D., Baldwin, J. M., Cassou, R. M., Brown, C. W., Methods for Evaluation of Systematic Geometric Deviations in Machined Parts and Their Relationships to Process Variables, Precision Engineering, 23, 273-292, 1999

[HSS 14] Hoffmann, C., Shapiro, V., Srinivasan, V., Geometric interoperability via queries, Computer-Aided Design, 46, 148-159, 2014

[Hub 14] Huber, P. J., Robust Statistics, International Encyclopedia of Statistical Science, Springer, 1248-1251, 2014

[Hub 93] Hubbard, P. M., Interactive Collision Detection, Proceedings of the IEEE Symposium on Research Frontiers in Virtual Reality, 24-32, 1993

[Hum 09] Humienny, Z., State of art in standardization in GPS area, CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology, 2(1), 1-7, 2009

[HW 92] Hu, S.J., Wu S.M., Identifying sources of variation in automobile body assembly using principal component analysis. Transactions of NAMRI/SME, 20, 311–316, 1992

[IDEF 93] IDEF, Integration definition for function modeling (IDEF0) draft. Federal information processing standards publication FIPSPUB 183. Springfield, VA, US, US Department of Commerce, December 1993

[IJL+05] Iyer, N., Jayanti, S., Lou, K., Kalyanaraman, Y., Ramani, K.,Three-dimensional shape searching: state-of-the-art review and future trends, Computer-Aided Design, 37(5), 509-530, 2005

[IK 87] Illingworth, J., Kittler, J., The adaptive Hough transform. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 9(5), 689 – 698, 1987.

[ISO 10110-12:2007] ISO 10110-12, Optics and Photonics - Preparation of drawings for optical elements and systems, Part 12: Aspheric surfaces, 2007

[ISO 10303-11] International Organization for Standardization. ISO 10303-11: 1994. Industrial automation systems and integration–product data representation and exchange–part 11: description methods: The EXPRESS language reference manual.

[ISO 1101:2012] ISO 1101:2012, Spécification géométrique des produits (GPS) — Tolérancement géométrique — Tolérancement de forme, orientation, position et battement

[ISO 14638:2015] ISO 14638:2015, Spécification géométrique des produits (GPS) — Modèle de matrice

[ISO 17450-1:2011] ISO 17450-1:2011, Spécification géométrique des produits (GPS) — Concepts généraux — Partie 1: Modèle pour la spécification et la vérification géométriques

[ISO 17450-2:2012] ISO 17450-2:2012, Spécification géométrique des produits (GPS) — Concepts généraux — Partie 2: Principes de base, spécifications, opérateurs, incertitudes et ambiguïtés

[ISO 22432:2011] ISO 22432 :2011, Spécification géométrique des produits (GPS) — Éléments utilisés en spécification et vérification

[ISO 4287:1997] ISO 4287, 1997, Spécification géométrique des produits (GPS) — État de surface: Méthode du profil — Termes, définitions et paramètres d'état de surface

[ISO/IEC Guide 98-3:2008] ISO/IEC Guide 98-3:2008 Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)

[ISO/TR 14638:1995] ISO/TR 14638:1995, Spécification géométrique des produits (GPS) — Schéma directeur

[ISO10360-6:2009] ISO 10360-6, Geometrical Product Specifications (GPS) - Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM), Part 6: Estimation of errors in computing Gaussian associated features, 2009

[JAS 13] Jiang, X., Abdul-Rahman, H.S., Scott. P.J., Multi-scale freeform surface texture filtering using a mesh relaxation scheme, Measurement Science and Technology, 24(11), 2013

[JH 99] Johnson, A. E., M. Hebert, M., Using Spin-Images for Efficient Multiple Model Recognition in Cluttered 3-D Scenes. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21(5), 433–449, 1999

[JH02] Jost, T., Hugli, H., A multi-resolution scheme ICP algorithm for fast shape registration, Proceedings of the first International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission, 540-543, 2002

[JK 99] Johnson, A., Kang, S., Registration and Integration of Textured 3-D Data, Image and vision computing, 17(2), 135-147, 1999

[Jol 86] Jolliffe, I., Principal Component Analysis, Springer Verlag, 1986

[JOM 06] Jamshidi, J., Owen, G.W., Mileham, A.R., A new data fusion method for scanned models. J Comput Inf Sci Eng, 6, 340–348, 2006

[JW 12a] Jiang, X., Whitehouse, D. J., Precision metrology, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 370(1973), 4154-4160, 2012

[JW 12b] Jiang, X., Whitehouse, D. J., Technological shifts in surface metrology, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 61(2), 815-836, 2012

[KA 05] Kurokawa, S., Ariura, Y., Evaluation of Shot Peened Surfaces Using Characterization Technique of Three-Dimensional Surface Topography, Journal of Physics: Conference Series, 13, 9-12, 2005

[Kan 95] Kanada, T., Evaluation of spherical form errors: computation of sphericity by means of minimum zone method and some examinations with using simulated data, Precision Engineering, 17, 281–289, 1995

[KCL 09] Kim, H.-S., Choi, H.-K., Lee K.-H., Feature detection of triangle meshes based on tensor voting theory, Computer-Aided Design, 41, 47-58, 2009

[KD92] Koenderink, J.J., van Doorn, R.J., Surface shape and curvature scales, Journal of Imaging and Vision Computing, 10 (8), 557-565, 1992

[Ken 77] Kendall, D. G., The diffusion of shape, Advances in Applied Probability, 9, 428-430, 1977

[Ken 84] Kendall, D. G., Shape Manifolds, Procrustean Metrics, and Complex Projective Spaces, Bulletin of the London Mathematical Society, 16, 81–121, 1984

[Ket99] Kettner, L., Using generic programming for designing a data structure for polyhedral surfaces. Comput. Geom., 13(1, 65–90, 1999

[KHI+07] Kockara, S., Halic, T., Igbal, K., Bayrak, C., Rowe, R., Collision detection: a survey. Proceedings of the IEEE International conference on Systems Man and Cybernetics, 4046–4051, 2007

[KK 05] Kim, S.-K., Kim, C.-H., Finding ridges and valleys in a discrete surface using a modified MLS approximation, Computer-Aided Design, 37, 1533-1542, 2005

[KK 98] Kruth, J.-P., Kerstens, A., Reverse engineering modelling of free-form surfaces from point clouds subject to boundary conditions., Journal of Materials Processing Technology, 76(1-3), 120-127, 1998

[KKK+93] Krause, F., Kimura, F., Kjellberg, T., Lu, S.C.-Y., Product Modelling, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 42(2), 695–706

[KKW 04] Kim, S., Kim, K., Woo, W., Projection-based registration using color and texture information for virtual environment generation, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 3331, 434-443, 2004

[Kle 93] Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen ('A comparative review of recent researches in geometry'), Mathematische Annalen, 43(1), 63–100, 1893

[Koe 90] Koenderink J. J., Solid Shape, MIT Press, Cambridge, MA, 1990

[KSL+09] Kim, T.-W., Seo Y.-H., Lee S.-C., Yang Z., Chang M., Simultaneous registration of multiple views with markers, Computer-Aided Design, 41(4) , 231–239, 2009

[KSO 04] Kolluri, R., Shewchuk, J.R., O'Brien, J. F., Spectral Surface Reconstruction from Noisy Point Clouds, Symposium on Geometry Processing, 11–21, 2004

[KWD 88] Kass, M., Witkin, A., Demetri, T., Snakes : Active Contour Models, International journal of computer vision, 1(4), 321-331, 1988

[KWL+12] Kineri, Y., Wang, M., Lin, H., Maekawa, T. , B-Spline Surface Fitting by Iterative Geometric Interpolation/Approximation Algorithms, Computer-Aided Design, 44(7), 697–708, 2012

[Lan 66] Lancaster, P., Error analysis for the Newton-Raphson method, Numer. Math, 9, 55–68 , 1966

[LDB 05] Lavoué, G., Dupont F., Baskurt, A., A new CAD mesh segmentation method, based on curvature tensor analysis, Computer-Aided Design, 37, 975-987, 2005

[Lea 13] Leach R., Characterisation of areal surface texture, Springer, 2013

[Les 07] Lesne, A., The discrete versus continuous controversy in physics. Mathematical Structures in Computer Science, 17(02), 185-223,2007

[Lev 06] Levy, B., Laplace-beltrami eigenfunctions, Towards an algorithm that understands geometry. In IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications, 2006

[Lev 08] Levy, B., Numerical Geometry, Habilitation à Diriger des Recherches, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2008

[Ley 01] Leyton, M., A generative theory of shape, Lecture Notes in Computer Science, 2145, Springer, 2001

[LG05] Li, X., Guskov, I., Multi-scale features for approximate alignment of point-based surfaces, Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing, 2005

[LH97] Liu, C. S., Hu, J. S., Variation Simulation for Deformable Sheet Metal Assemblies Using Finite Element Methods, ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 119, 368-374, 1997

[LHL 08] Liggins, M., Hall, D., Llinas, J., Handbook of multisensor data fusion: theory and practice, second ed., Taylor & Francis, 2008

[LJB+13] Lou, S., Jiang, X., Bills, P. J., Scott, P. J., Defining true tribological contact through application of the morphological method to surface topography, Tribol. Lett., 50, 185-193, 2013

[LJC 04] Liu, C. H., Jywe, W. Y., Chen, C. K., Quality Assessment on a Conical Taper Part Based on the Minimum Zone Definition using Genetic Algorithms, Int. J. Mach. Tools Manuf., 44 (2-3), 183-190, 2004

[LJS 11] Lou, S., Jiang, X., Scott, P.J., (2011) A Fast Algorithm to Morphological Filters. Proceedings of the 13th International Conference on Metrology and Properties of Engineering Surfaces, 284–288, 2011

[LK 93] Li, C.C., Kiureghian, A.D., Optimal discretization of random fields. J Eng Mech, 119(6), 1136–54, 1993

[LLA+13] Lindau, B., Lindkvist, L., Andersson, A., & Söderberg, R., Statistical shape modeling in virtual assembly using PCA-technique. Journal of Manufacturing Systems, 32(3), 456-463, 2013

[LLB 14] Lê, H. N., Ledoux, Y., Ballu, A., Experimental and theoretical investigations of mechanical joints with form defects. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 14(4), 2014

[LLF+ 14] Li, F., Longstaff, A. P., Fletcher, S., Myers, A., Rapid and accurate reverse engineering of geometry based on a multi-sensor system. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 74(1-4), 369-382, 2014

[LLH 00] Luck, J., Little, C., Hoff, W., Registration of range data using a hybrid simulated annealing and iterative closest point algorithm, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 3739–3744, 2000

[LM 93] Laurentgengoux, P., Mekhilef, M., Optimization of a NURBS representation. Computer-Aided Design, 25(11), 699-710, 1993

[LN 89] Liu, D., Nocedal, J., On the limited memory BFGS method for large scale optimization, Mathematical programming, 45 (1-3), 503-528, 1989

[Lon 98] Loncaric, S., A Survey of Shape Analysis Techniques, Pattern Recognition, 31(8), 983-1001, 1998

[LPY+ 06] Liu, Y.-S., Paul, J.-C., Yong, J.-H., Yu, P.-Q., Zhang, H.,Sun, J.-G., Ramani, K., 2006, Automatic least-squares projection of points onto point clouds with applications in reverse engineering, Computer-Aided Design, 38(12), 1251 – 1263, 2006

[LR 01] Li, B., Roy, U., Relative positioning of toleranced polyhedral parts in an assembly, IIE Transactions, 33(4), 323-336, 2001

[LR 09] Liu, Y.S., Ramani, K., Robust principal axes determination for point-based shapes using least median of squares, Computer Aided Design, 41, 293–305, 2009

[LSB+99] Lu S.C.-Y., Shpitalni, M., Bar-Or, R., Gadh, R., Virtual and Augmented Reality Technologies for Product Realization, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 48(2):471–495, 1999

[LW 15] Lu, K., Wang, W., A multi-sensor approach for rapid and precise digitization of free-form surface in reverse engineering. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1-12, 2015

[LWL+14] Lindau, B., Wärmefjord, K., Lindkvist, L., & Söderberg, R., Method for Handling Model Growth in Nonrigid Variation Simulation of Sheet Metal Assemblies. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 14(3), 2014

[LX 08] Liu, Y., Xiong, Y., Automatic segmentation of unorganized noisy point clouds based on the Gaussian map, Computer-Aided Design, 40(5), 576–594, 2008

[LYZ 06] Liu, H., Yan, J., Zhang, D., Three-dimensional surface registration: A neural network strategy, Neurocomputing, 70(1–3), 597-602, 2006

[MAA 04] Mawussi, K., Anselmetti, B., Anwer, N., Tolerance specification data model for design and manufacturing, Proceedings of the 5th International conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, IDMME 2004, Bath, UK, 2004

[MAM 14] Mellado, N., Aiger, D., Mitra, N. J., Super 4PCS Fast Global Point cloud Registration via Smart Indexing, Computer Graphics Forum, 33(5), 205-215

[Mat 07] Mathieu, L., Contribution à la maîtrise des variations géométriques des produits le long de leur cycle de vie, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Grenoble1, 2007

[MB 05] Mathieu, L., Ballu, A., A Model for a Coherent and Complete Tolerancing Process, Proceedings of the 9th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Tempe, Arizona, USA, 1-10, 2005

[MB 07] Mathieu, L., Ballu, A., A model for a coherent and complete tolerancing process, Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, Springer Netherlands, 35-44, 2007

[MCR 10] Matuszyk, T.I., Cardew-Hall, M.J., Rolfe, B.F., The kernel density estimate/point distribution model (KDE-PDM) for statistical shape modeling of automotive stampings and assemblies. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 26, 370–80, 2010

[MDA 01] Montagnat J., Delingette H., Ayache N., A review of deformable surfaces: Topology, geometry and deformation. Image and Vision Computing 19(14), 1023–1040, 2001

[MDK+06] Mizoguchi, T., Date, H., Kanai, S., Kishinami, T., Segmentation of scanner mesh into analytic surfaces based on robust curvature estimation and region growing Lecture Notes in Computer Science, Springer, 4077, 644–54, 2006

[MDS+03]Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P., Barr, A.H., Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In Visualization and Mathematics III, Hege H.-C. and Polthier K., Eds. Springer- Verlag, Heidelberg, 35–57, 2003

[Mer 98] Merkley, K.G., Tolerance Analysis of Compliant Assemblies, Ph.D. thesis, Brigham Young University, 1998

[MF 07] Munim, H., Farag, A., Farma A., A new variational approach for 3D shape registration, Proceedings of the 4th IEEE. International Symposium on Biomedical Imaging, 1324-1327, 2007

[MK 95] Ma, W., Kruth, J.-P., Parameterization of randomly measured points for least square fitting of B-spline curves and surfaces, Computer Aided Design, 9(27), 663–675, 1995

[MK 98] Ma, W., Kruth, J.-P., NURBS curve and surface fitting for reverse engineering. International Advanced Manufacturing Technology, 14(12), 918–927, 1998

[MKY01] Mokhtarian, F., Khalili, N., Yuen, P., Multi-scale free-form 3D object recognition using 3D models, Journal of Image and Vision Computing, 19 (5), 271-281, 2001

[MLP+ 10] McLouglin, T., Laramee, R.S., Peikert, R., Post, F.H., Chen, M., Over Two Decades of Integration-Based Geometric Flow Visualization. Computer Graphics Forum 29(6), 1807–1829, 2010

[MLS 11] Mazur, M., Leary, M., Subic, A., 2011. Computer Aided Tolerancing (CAT) platform for the design of assemblies under external and internal forces. Computer-Aided Design, 43(6), 707–719, 2011

[MML+ 10] Morière, S., Mailhé, J., Linares, J.-M., Sprauel, J.-M., Assembly Method Comparison Including form Defect, Product Lifecycle Management: Geometric Variations (eds M. Giordano, L. Mathieu and F. Villeneuve), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2010

[Mon 14] Monostori, L., Cyber-physical production systems: Roots, expectations and R&D challenges, Procedia CIRP, 17, 9-13, 2014

[Mor 08] Morvan, J.-M., Generalized Curvatures, Springer, 2008

[Mor 10] Morière, S., Contribution à l'Etude des Assemblages avec Prise en Compte des Défauts de Forme : Modélisation et Expérimentation, Thèse de Doctorat, Université de la Méditérranée, 2010

[Mor 78] Moré, J., The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory, Numerical analysis, Springer, 105-116, 1978.

[MPD 06] Makadia, A., Patterson, A., Daniilidis, K., Fully automatic registration of 3D point clouds. Proceedings of IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'06), 2597–2604, 2006

[MR 09] Muralikrishnan, B., Raja, J., Computational surface and roundness metrology, Springer, 2009

[MS 10] Myronenko, A., Song, X., Point set registration: Coherent point drift. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 32(12), 2262-2275, 2010

[MW00] Meek, D., Walton, D., On surface normal and Gaussian curvature estimations given data sampled from a smooth surface, Computer-Aided Geometric Design, 17(6), 521-543, 2000

[MY95] Masuda, T., Yokoya, N., A robust method for registration and segmentation of multiple range images, Computer Vision and Image Understanding, 61(3), 295-307, 1995

[NBK+14] Nouira, H., Bergmans, R.H., Küng, A., Piree, H., Henselmans, R., Spaan, H.A.M., Ultra-high precision CMMs and their associated tactile or/and optical scanning probes, Int. J. Metrol. Qual. Eng., 5 (2), 204, 2014

[Nie 13] Nielsen, H.S., Recent developments in International Organization for Standardization geometrical product specification standards and strategic plans for future work, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 227(5), 643-649, 2013

[NM 65] Nelder, J. A., Mead, R., A simplex method for function minimization", Computer Journal, 7, 308 – 313, 1965

[Noc 80] Nocedal, J., 1980. Updating quasi-Newton matrices with limited storage, Mathematics of computation, 35 (151), 773-782, 1980

[NOC+12] Nee, A.Y.C., Ong, S.K., Chryssolouris, G., Mourtzis, D., Augmented Reality Applications in Design and Manufacturing. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 61(2), 657–679, 2012

[NP 85] Nackman, L. R., Pizer, S., Three-dimensional shape description using the symmetric axis transform. I: Theory, IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., 7(2), 187–202, 1985

[NW99] Nocedal, J., Wright, S., Numerical Optimization, Springer, 1999

[NY 13] Ni, W., Yao, Z., Cylindricity modeling and tolerance analysis for cylindrical components. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 64(5-8), 867-874, 2013

[OF05] OuYang, D., Feng, H., On the normal vector estimation for point cloud data from smooth surface, Computer-Aided Design, 37(10), 1071-1079, 2005

[OGG 09] Öztireli, A. C., Guennebaud, G., Gross, M., Feature Preserving Point Set Surfaces based on Non-Linear Kernel Regression. Computer Graphics Forum, 28(2), 493-501, 2009

[OJ 05] Ostrovsky-Berman, Y., Joskowicz, L., Tolerance envelopes of planar mechanical parts with parametric tolerances, Computer-Aided Design, 531-534, 2005

[OWL] OWL web ontology language overview http://www.w3.org/TR/owlfeatures/

[PAA 12] Piratelli-Filho, A., Anwer, N., Arencibia, R.V., Measurement and uncertainty determination during inspection of free form profiles, Revista Tecnologia, 33(2), 2012

[Par 01] Park, H., Choosing nodes and knots in closed B-spline curve interpolation to point data, Computer-Aided Design, 33 (13), 967–974, 2001

[Par 04] Park, H., A solution for NURBS modelling in aspheric lens manufacture, Intl. J. of Adv.Manuf. Tech., 23 (1-2), 1-10, 2004

[Par 40] Parker, S., Notes on Design and Inspection of Mass Production Engineering Work. Sheffield, UK: Gauge Design Drawing Office, Naval Ordnance Gauge Factory, Sheffield, 1940.

[Pau 03] Pauly, M., Point Primitives for Interactive Modeling and Processing of 3D Geometry. PhD thesis, Department of Computer Science, ETH Zurich, 2003

[Pav 78] Pavlidis, T., A Review of Algorithms for Shape Analysis, Computer Graphics and Image Processing, 7(2), 243-258, 1978

[Pea 01] Pearson, K., On lines and planes of closest fit to systems of points in space. Phil. Mag., 7-12, 559–572, 1901

[Pen 06] Pennec, X., Statistical Computing on Manifolds for Computational Anatomy, Habilitation à diriger des recherches, Université Nice Sophia-Antipolis, 2006

[Pet 02] Petitjean, S., A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. ACM Computing Surveys (CSUR), 34(2), 211-262, 2002

[PG 02] Prisco, U., Giorleo, G., Overview of current CAT systems. Integrated Computer-Aided Engineering, 9, 373–387, 2002

[PG 95] Pajdla, T., Gool, L. V., Matching of 3-D Curves using Semi-differential Invariants. Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision, 390–395, 1995

[PHY+06] Pottmann, H., Huang, Q., Yang, Y.L., Hu, S. M., Geometry and convergence analysis of algorithms for registration of 3-D shapes, International Journal of Computer Vision, 67(3), 277-296, 2006

[PIE 07a] Pierce, R., Rosen, D., Simulation of Mating Between Nonanalytic Surfaces Using a Mathematical Programing Formulation. ASME. J. Comput. Inf. Sci. Eng., 7(4), 314-321, 2007

[PIE 07b]Pierce, R., Rosen, D., A Method for Integrating Form Errors Into Geometric Tolerance Analysis. ASME. J. Mech. Des., 130(1), 2007

[Piz 10] Pizlo, Z., 3D shape: its unique place in visual perception, MIT Press, 2010

[PJS 06] Popa, T., Julius, D., Sheffer, A., Material-aware mesh deformations. IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications SMI, 2006

[PLH 02] Pottmann, H., Leopoldseder, S., Hofer, M., Approximation with active B-spline curves and surfaces, Proceedings of the 10th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 8–25 , 2002

[PM15] Polini, W., Moroni,G., Manufacturing signature for tolerance analysis. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 15(1), 2015

[Pol 12] Polini, W., Taxonomy of Models for Tolerance Analysis in Assembling, International Journal of Production Research, 50(7), 2014–2029, 2012

[PS 03] Park, S., Subbarao, M., An accurate and fast point-to-plane registration technique, Journal of Pattern Recognition Letters, 24, 2967-2976, 2003

[PT 97] Piegl, L., Tiller, W., The NURBS Book, Monographs in Visual Communication, Springer, 1997

[PWW 08] Penzkofer, F., Wittmann, S., Winter, M., Visual analysis methods for non-ideal assemblies. Proceedings of the 10th International Design Conference DESIGN 2008, Dubrovnik, Croatia, 2008

[QRP+12] Quintana, V., Rivest, L., Pellerinn R., Kheddouci, F., Re-engineering the Engineering Change Management Process for a Drawing-less Environment, Computers in Industry, 63(1), 79–90, 2012

[QS 06] Qi, J., Shapiro, V., ε-Topological formulation of tolerant solid modeling. Computer-Aided Design, 38(4), 367-377, 2006

[QSJ+14] Qi, Q., Scott, P. J., Jiang, X., Lu, W., Design and implementation of an integrated surface texture information system for design, manufacture and measurement. Computer-Aided Design, 57, 41-53, 2014

[QSS 06] Qi,J., Shapiro, V., Stewart,N.F., Single-set and class-of-sets semantics for geometric models, Computer-Aided Design, 38(10), 1088-1098, 2006

[Raf 13] Raffin, R., Free Form Deformations or Deformations Non-Constrained by Geometries or Topologies, Deformation Models, Springer Netherlands, 49-74, 2013

[RAM+14] Rique Garaizar, O., Anwer, N., Mathieu, L., Qiao, L., Exploring the proceedings of Computer Aided Tolerancing CIRP Seminars and Conferences: A scientometric analysis, Proceedings of the 13th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Hangzhou, China, 2014

[Ran 46] Ranieri, C., Il problema delle tolleranze nel funzionamento e nella costruzione di complessi meccanici da realizzare in grandi serie. Unica opera completa ad uso delle ditte costruttrici, dei disegnatori, Milano Hoepli, 1946

[Rau 02] Raulin, T., Formalisation d'une méthodologie de spécification géométrique des états intermédiaires des pièces fabriquées, Mémoire de DEA, ENS Cachan, 2002

[RB 03] Razdan, A., Bae, M.S., A hybrid approach to feature segmentation of triangle meshes, Computer-Aided Design, 35, 783-789, 2003

[Req 80] Requicha, A.A.G., Representations for rigid solids: theory, methods and systems, ACM Computing Surveys, 12(4), 437–464, 1980

[Req 83] Requicha, A.A.G., Toward a theory of geometric tolerancing, The International Journal of Robotics Research, 2(4), 45-60, 1983

[RFL 02] Rodrigues, M., Fisher, R., Liu,Y., Special issue on registration and fusion of range images, Computer Vision and Image Understanding, 87 (1–3), 1–7, 2002

[RGP 99] Romdhani, S., Gong, S., Psarrou, A., A multi-view non-linear active shape model using kernel PCA, British Machine Vision Conference - British Machine Vision Association, 483–492, 1999

[Riq 15] Rique Garaizar, O., Study of Skin Model Deformation due to Thermal Effects, master thesis, midterm report, Beihang University, 2015

[RL 01] Rusinkiewicz, S., Levoy, M., Efficient variants of the ICP algorithm, Proceedings of the IEEE International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling, 145-152, 2001

[Rob 10] Robbiano, F., Descriptions of 3D objects based on concepts, content, and context, PhD Thesis, Universita degli Studi di Genova, 2010

[Rom 13] Romon, P., Introduction à la géométrie différentielle discrète, Ellipses, 2013

[Ros 77] Rosch, E., Human categorization, Studies in cross-cultural psychology, 1, 1-49, 1977

[RS07] Ramos, E., Sadri, B., Geometric and topological guarantees for the Wrap reconstruction algorithm, Proc. of the 18th Ann. ACM-SIAM Symp. on Discr. Algo., 2007

[RV 83] Requicha, A.A.G., Voelcker,H., Solid Modeling: Current Status and Research Directions, IEEE Computer Graphics and Applications, 3(7), 25-37, 1983

[RW 91] Requicha, A.A.G., Whalen, T.W., Representations for Assemblies, Computer-aided mechanical assembly planning, Kluwer Academic Press, 15-39, 1991

[RWP 05] Reuter, M., Wolter, F.E., Peinecke, N., Laplace-spectra as fingerprints for shape matching. In Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling, ACM Press, NY, USA, 101–106, 2005

[RWP 06] Reuter, M., Wolter, F.E., Peinecke, N., Laplace–Beltrami spectra as shape-DNA of surfaces and solids. Comput.-Aided Des. 38(4), 342–366, 2006

[RZL+14] Roy, U., Zhu, B., Li, Y., Zhang, H., Yaman, O., Mining Big Data in Manufacturing: Requirement Analysis, Tools and Techniques, ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Montreal, Quebec, 2014

[SA 07] Sorkine, O., Alexa, M., As-rigid-as-possible surface modeling. Proceedings of Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing, 109–116, 2007.

[SAF+09] Samper, S., Adragna, P. A., Favreliere, H., Pillet, M., Modeling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 9(4), 2009

[Sam 08] Samper, S., Monographie sur le tolérancement modal, http://arxiv.org/abs/0910.0833, 2008

[SAS+ 07] Shah, J. J., Ameta, G., Shen, Z., Davidson, J., Navigating the Tolerance Analysis Maze. Computer-Aided Design and Applications, 4(5), 705–718, 2007

[SAS+05] Shen, Z., Ameta, G., Shah, J. J., Davidson, J. K., A comparative study of tolerance analysis methods, ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 5(3), 247-256, 2005

[SAY 11] Serré, P., Anwer, N., Yang, J.-X., On the use of conformal geometric algebra in geometric constraint solving, Guide to Geometric Algebra in Practice, Springer, 217-232, 2011

[SB 90] Solina, F., Bajcsy, R., Recovery of parametric models from range images: the case of superquadrics with global deformations. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(2),131–146, 1990

[Sch 12] Schleich, B., Generation of non-ideal geometry in order to robustly simulate random shapes within tolerance zones using random fields, Diplormabeit Thesis, Friedrich-Alexander-University Erlangen Nuremberg, 2012

[SCL+04] Sorkine, O., Cohen-Or, D., Lipman, Y., Alexa, M., Rössl, C., Seidel, H. P., Laplacian surface editing, Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing, 175-184, 2004

[SDS 07] Savio, E., De Chiffre, L., Schmitt, R., Metrology of freeform shaped parts, CIRP Annals-Manufacturing Technology, 56(2), 810-835, 2007

[Ser 86] Serra, J., Introduction to mathematical morphology, Computer vision, graphics, and image processing, 35(3), 283-305, 1986

[SF 07] Samper, S., Formosa, F., Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 7(1), 44 -51, 2007

[SFS03] Savadjiev, P. Ferrie, F.P., Siddiqi, K., Surface recovery from 3d point data using a combined parametric and geometric flow approach. Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[Sha 02] Shapiro,V., Solid Modeling, In Handbook of Computer Aided Geometric Design, edited by Gerald Farin, Josef Hoschek, Myung-Soo Kim, North-Holland, Amsterdam, 473-518, 2002

[Sha 08] Shamir, A., A survey on mesh segmentation techniques, Computer Graphics Forum, 27(6), 1539-1556, 2008

[Sha 98] Shakarji, C. M., Least-squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system. Journal of Research-National Institute of Standards and Technology, 103, 633-641, 1998

[Sib81] Sibson, R., A brief description of natural neighbour interpolation, Interpreting multivariate data, 21, 21-36, 1981

[SJ 14] Scott, P.J., Jiang, X., Freeform surface characterisation: theory and practice, Journal of Physics: Conference Series, 483 (1), 012005, 2014

[SKB 82] Stockman, G., Kopstein, S., Benett, S., Matching images to models for registration and object detection via clustering, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 4(3), 229 – 241, 1982.

[SKH 98] Speer, T., Kuppe, M., Hoschek, J., Global reparametrization for curve approximation, Computer Aided Geometric Design, 15 (9), 869–877, 1998

[SLN+13] Shi, J., Liu, J., Ning, R., Hou, W., A collisions evaluation method in virtual environment for collaborative assembly. Journal of Network and Computer Applications, 36(6), 1523-1530, 2013

[SLW 02] Sharp G. G., Lee S. W., Wehe D., Icp registration using invariant features. Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 24(1), 90–102, 2002

[SLZ 05] Shen, H. C., Li, J. H., Zhou, L. S., Estimation of Triangular Mesh Vertex Normal Vector and Discrete Curvature, Computer Engineering and Application, 6, 12-15, 2005

[SM 09] Stockinger, A., Meerkamm, H., Concept for the Integration of Manufacturing Simulations into Tolerance Analysis, 11th CIRP International Conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009

[SM 91] Sarkar, B., Menq, C.H., Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data, Computer Aided Geometric Design, 8(4), 267-290, 1991

[SM 92] Stein, F., Medioni, G., Structural indexing: efficient 3D object recognition, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14 (2), 125–145, 1992

[SMF+07] Salvi, J., Matabosch, C., Fofi, D., Forest, J., A review of recent range image registration methods with accuracy evaluation. Image and Vision Computing, 25(5), 578-596, 2007

[SMH 10] Sun, W., McBride, J.-W., Hill, M., A new approach to characterizing aspheric surfaces, Precision Engineering, 34(1), 171-179, 2010

[SP 08] Sunil, B., Pande, S., Automatic recognition of features from freeform surface CAD models, Computer-Aided Design, 40, 502–517, 2008

[SPP+02] Sun, Y., Page, D. L., Paik, J. K., Koschan, A., Abidi, M. A., Triangle mesh-based edge detection and its application to surface segmentation and adaptive surface smoothing, Proceedings of International Conference on Image Processing, 825-828, 2002

[Sri 01] Srinivasan,V., An Integrated View of Geometrical Product Specification and Verification, Proceedings of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Cachan, France, 2001

[Sri 04] Srinivasan, V., Theory of Dimensioning: An Introduction to Parameterizing Geometric Models, Marcel-Dekker, New York, 2004

[Sri 05] Srinivasan, V., Mathematical Theory of Dimensioning and Parameterizing Product Geometry, International Journal of Product Lifecycle Management, 1(1), 70-85, 2005

[Sri 07] Srinivasan, V., Computational Metrology for the Design and Manufacture of Product Geometry: A Classification and Synthesis, ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 7(1), 3–9, 2007

[Sri 99] Srinivasan, V., A geometrical product specification language based on a classification of symmetry groups, Computer Aided Design, 31(11), 659–668, 1999

[SRR 14] Sarigecili, M.I., Roy, U., Rachuri, S., Interpreting the Semantics of GD&T Specifications of a Product for Tolerance Analysis, Computer-Aided Design, 47, 72–84, 2014

[SSM 98] Scholkopf, B., Smola, A.J., Muller,K.-R., Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. Neural Computation, 10(5), 1299–1319, 1998

[SW 11] Shaw, L., Weckenmann, A., Automatic registration method for hybrid optical coordinate measuring technology. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 60(1), 539-542, 2011

[SW 97] Srinivasan, R. S., Wood, K. L., A form tolerancing theory using fractals and wavelets, Journal of Mechanical Design, 119(2), 185-193, 1997

[SWH+ 07] Stoll, T., Wittmann, S., Helwig, S., and Paetzold, K., Registration of measured and simulated nonideal geometry using optimization methods. Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, 2007

[SWM 09] Stoll, T.,Wittmann, S., andMeerkamm,H., Tolerance analysis with detailed part modeling including shape deviations, Proceedings of the 11th CIRP International Conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009

[SWM+10] Stockinger, A., Wittmann, S., Martinek, M., Wartzack, S., Meerkamm, H., Virtual Assembly Analysis: Standard Tolerance Analysis Compared to Manufacturing Simulation and

Relative Positioning, Proceedings of the 11th International Design Conference DESIGN 2010, Dubrovnik, Croatia, 1421-1430, 2010

[SXG+ 15] Song, T., Xi, F., Guo, S., Ming, Z., Lin, Y., A comparison study of algorithms for surface normal determination based on point cloud data, Precision Engineering, 39, 47-55, 2015

[Tau 95a] Taubin, G., A signal processing approach to fair surface design. In SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques, ACM Press, New York, NY, USA, 351–358, 1995

[Tau95b] Taubin, G., Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation, Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 902-907, 1995

[Tay 05] Taylor, W., Improvements in gauges for screws, British Patent no. 6900, 1905

[TCL+13] Tam, G. K., Cheng, Z. Q., Lai, Y. K., Langbein, F. C., Liu, Y., Marshall, D., Martin, R. Sun, X. -F., Rosin, P. L., Registration of 3D point clouds and meshes: a survey from rigid to nonrigid, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 19(7), 1199-1217, 2013

[TFR 99] Trucco, E., Fusiello, A., Roberto V., Robust motion and correspondence of noisy 3-D point sets with missing data, Pattern Recognition Letters, 20, 889–898, 1999

[THH14] Tsuchie, S., Hosino, T., Higashi, M., High-quality vertex clustering for surface mesh segmentation using Student- mixture model, Computer-Aided Design, 46, 69-78, 2014

[Tho 17] Thompson, D.W., On growth and form, Cambridge University Press, Cambridge, 1917

[Tho 99] Thornton, A. C., A mathematical framework for the key characteristic process, Research in Engineering Design, 11(3), 145–157, 1999

[TJL 08] Tong, K., Joshi, S., Lehtihet, A., Error compensation for fused deposition modeling (fdm) machine by correcting slice files, Rapid Prototyping Journal, 14(1), 4–14, 2008

[TPT15] Theologou, P., Pratikakis, I., Theoharis, T., A comprehensive overview of methodologies and performance evaluation frameworks in 3D mesh segmentation, Computer Vision and Image Understanding, doi:10.1016/j.cviu.2014.12.008, 2015

[Tra 12] Trainini, M., Optimisation évolutionnaire CMA-ES pour la reconstruction de surfaces quadriques, Mémoire de master M2, École Normale Supérieure de Cachan, 2012

[TSL 00] Tenenbaum, J. B., de Silva, V., Langford, J. C, A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. Science, 290(5500), 2319–2323, 2000

[TW 98] Thürmer, G., Wüthrich, C.A., Computing vertex normals from polygonal facets. Journal of Graphic Tools, 3(1), 43–46, 1998

[Val 08] Vallet, B., Bases de fonctions sur les variétés, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008

[VDI/VDE 2601] VDI/VDE 2601, Requirements on the surface structure to cover function capability of surfaces manufactured by cutting; list of parameters, VDI/VDE, 1991

[VL 08] Vallet, B., Lévy, B., Spectral geometry processing with manifold harmonics, Computer Graphics Forum 27(2), 251-260, 2008

[VM 10] Villeneuve, F., Mathieu, L. (Eds.), Geometric tolerancing of products, Wiley – ISTE, 2010

[VS 05] Vieira, M., Shimada, K., Surface mesh segmentation and smooth surface extraction through region growing, Comput Aided Geometric Design, 22(8), 771–792, 2005

[VSH 04] Vergeest, J., Song, Y., Hartge, D., Freeform object positioning by 3D shape matching without artificial feature points, The 12th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision'2004 (WSCG 2004), 483-490, 2004

[Wek 14] Weckenmann, A., Form Error, CIRP Encyclopedia of Production Engineering, Ed. Laperrière L., Reinhart G., 535-539, Springer Berlin Heidelberg, 2014

[WH 13] Weckenmann, A., Hartmann, W., Function-oriented method for the definition and verification of microstructured surfaces, Precision Engineering, 37(3), 684-693, 2013

[Whi 12] Whitehouse, D., General Metrology in Manufacture, Keynote, Proccedings of the 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 2012

[WJS+ 09] Weckenmann, A., Jiang, X., Sommer, K.D., Neuschaefer-Rube, U., Seewig, J., Shaw, L., Estler, T., Multisensor data fusion in dimensional metrology, CIRP Annals – Manufacturing Technology, 58 (2) 701–721, 2009

[WK 05] Wu, J., Kobbelt L., Structure recovery via hybrid variational surface approximation, Eurographics 2005, 277-284, 2005

[WKW+02] Woo, H., Kang, E., Wang, S., Lee, K.H., A new segmentation method for point cloud data, International Journal of Machine Tools and Manufacture, 42(2), 167-178, 2002

[WLD+08] Wang, K., Lavoué, G., Denis, F., Baskurt, A., A comprehensive survey on three-dimensional mesh watermarking, IEEE Transactions on Multimedia, 10(8), 1513-1527, 2008

[FKM+05] Funkhouser, T., Kazhdan, M., Min, P., Shilane, P., Shape-Based Retrieval and Analysis of 3d Models, Communications of the ACM, 48(6), 58-64, 2005

[WMK+ 07]Wardetzky, M., Mathur, S., Kalberer, F., Grinspun, E., Discrete Laplace operators: No free lunch, Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2007

[WR 44] Wertheimer, M., Riezler, K., Gestalt theory, Social Research, 11(1), 78-99, 1944

[WS 07] Wen, X., Song, A., An Immune Evolutionary Algorithm for Sphericity Error Evaluation, Int. J. Mach. Tools Manuf. 44 (10), 1077-1084, 2007

[XDW08] Xia, H., Ding, Y., Wang, J., Gaussian process method for form error assessment using coordinate measurements, IIE Transactions, 40(10), 931-946, 2008

[XLX+11] Xiao, D., Lin H., Xian C., Gao S., CAD mesh segmentation by clustering, Computers & Graphics, 35, 685-691, 2011

[XN 09] Xu, X., Nee, A. Y. C., Advanced design and manufacturing based on STEP, Springer, 2009

[Xu 04] Xu, G., Discrete Laplace-Beltrami operators and their convergence, Computer Aided Geometric Design, 21(8), 767–784, 2004

[XXJ+10] Xu, Y., Xu, Z., Jiang, X., Scott, P.J., Developing a Knowledge-Based System for Complex Geometrical Product Specification (GPS) Data Manipulation, Knowledge Based Systems, 24(1), 10–22, 2010

[XZ09] Xu W.-W., Zhou K., Gradient domain mesh deformation – a survey. Journal of Computer Science and Technology 24, 6–18, 2009

[YGZ+05] Yamauchi, H., Gumhold, S., Zayer, R., Seidel, H.-P., Mesh segmentation driven by Gaussian curvature, Vis. Comput., 21(8–10), 659–668, 2005

[YJ 00] Yang, T., Jackman, J., Form error estimation using spatial statistics, Journal of Manufacturing Science and Engineering, 122, 262-272, 2000

[YJ 02] Yang, T., Jackman, J, A Shannon sampling approach to form error estimation. Proc IME B J Eng Manuf 216(2), 225–233, 2002

[YL99] Yang, M., Lee, E., Segmentation of measured point data using a parametric quadric surface approximation, Computer-Aided Design, 31 (7), 449-457, 1999

[YLW 06] Yan, D.-M., Liu, Y., Wang, W., Quadric surface extraction by variational shape approximation, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 4077, 73-86, 2006

[YLZ 13] Yang, J. X., Liu, Z. T., Zhao, B., A Comparison Study of Mathematical Models for Tolerance Analysis, Advanced Materials Research, 765, 759-762, 2013

[YM 95] Yang, Z., Menq, C., Uncertainty Analysis for Coordinate Estimation Using Discrete Measurement Data, Proceedings of Manufacturing Science and Engineering. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 12-17, 1995

[YM 96] Yau, H.-T., Menq, C.-H., A unified least-squares approach to the evaluation of geometric errors using discrete measurement data, International Journal of Machine Tools and Manufacture, 36(11), 1269-1290, 1996

[YSY+05] Yamauchi, H., Seunqyong, L., Yunjin, L., Ohtake, Y., Belyaev, A., Seidel, H.-P., Feature sensitive mesh segmentation with mean shift. In: Proceedings of the international conference on shape modeling and applications (SMI 2005), 238-245, 2005

[ZAB 10] Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., A PLM-Based Multi-Sensor Integration Measurement System for Geometry Processing, Product Lifecycle Management: Geometric Variations, John Wiley & Sons, 469-484, 2010

[ZAB 13] Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., Curvature-based Registration and Segmentation for Multisensor Coordinate Metrology, Procedia CIRP, 10, 112-118, 2013

[ZAB+ 08] Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., Wang, J., Multi-sensor Integration for Coordinate Metrology, 7th International conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, IDMME-VC 2008, Beijing, China, 2008

[ZG 11] Zhang, Y., Ge, L., Improved moving least squares algorithm for directed projecting onto point clouds. Measurement, 44(10), 2008 – 2019, 2011

[ZGX 05] Zhuang, X., Gu, L., Xu, J., Medical image alignment by normal vector information, Computational Intelligence and Security, Springer Berlin Heidelberg, 890-895, 2005

[ZH 99] Zhang, D., Hebert, M., Harmonic maps and their applications in surface matching, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2, 524–530, 1999

[Zha 10] Zhao, H., Multisensor Integration and Discrete Geometry Processing for Coordinate Metrology. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2010

[Zha 11] Zhang, M., Discrete shape modeling for geometrical product specifications: contributions and applications to skin model simulation. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2011

[Zha 13] Zhang, W., Skin model based simulation of contact and mobility for assemblies, Mémoire de Master, Université Paris 6, 2013

[Zha 94] Zhang, Z., Iterative point matching for registration of freeform curves and surfaces, International Journal of Computer Vision, 13, 119–152, 1994

[Zha 97] Zhang, Z., A tutorial with application to conic fitting, Image and vision computing, 15 (1), 59-76, 1997

[Zho 04] Zhongwei, Y., Reverse engineering of a NURBS surface from digitized points subject to boundary conditions, Computers and Graphics, 28(2), 207-212, 2004

[ZJS 11] Zhang, X., Jiang, X., Scott, P., A Minimax Fitting Algorithm for Ultra-Precision Aspheric Surfaces, Journal of Physics: Conference Series, 311(1), 012031, 2011

[ZKB+ 12] Zhao, H., Kruth, J. P., Boeckmans, B., Van Gestel, N., Bleys, P., Automated dimensional inspection planning using the combination of laser scanner and tactile probe, Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 45(5), 1057-1066, 2012

[ZL 04] Zhang D., Lu, G., Review of Shape Representation and Description Techniques, Pattern Récognition, 37(1), 1-19, 2004

[ZLX+08] Zhang, X., Li, G., Xiong, Y., He, F., 3D mesh segmentation using mean-shifted curvature, Lecture Notes in Computer Science, 4975, 465–474, 2008

[ZOF01] Zhao, H.-K., Osher, S., Fedkiw, R., Fast surface reconstruction using the level set method, Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods, 194-202, 2001

[ZPM 04] Zhang, Z., Pan, C., Ma, S., An automatic method of coarse registration between multi-source satellite images, Proceedings of IEEE Conference on Intelligent Sensors, Sensors Network and Information, 205-099, 2004.

[ZQA 13] Zhu, Y., Qiao, L., Anwer, N., Geometrical simulation framework of assembly process based on ontology, Computer Integrated manufacturing Systems, 19(5), 972-980, 2013

[ZSN 03] Zinsser, T., Schmidt, J., Niemann, H., A refined ICP algorithm for robust 3-D correspondence estimation, Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, Barcelona, Spain, 2003

[ZZH+13] Zhang, X., Zhang, H., He, X., Xu, M., Jiang, X., Chebyshev fitting of complex surfaces for precision metrology, Measurement, 46 (9), 3720–3724, 2013

[ZZH+14] Zhang, X., Zhang, H., He, X., Xu, M., Bias in parameter estimation of form errors, Surface Topography: Metrology and Properties, 2(3), 035006, 2014

[ZZW+05] Zhang, X., Zhang, C., Wang, B., Feng, S.C., Unified functional tolerancing approach for precision cylindrical components. International Journal of Production Research, 43, 25-47, 2005

# Annexe – Articles fournis


[A-1]. Anwer, N., Ballu, A., Mathieu, L., The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 62(1), 143-146, 2013

[A-2]. Zhang, M., Anwer, N., Stockinger, A., Mathieu, L., Wartzack, S., Discrete shape modeling for skin model representation, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part B, Journal of Engineering Manufacture, 227 (5), 672-680, 2013

[A-3]. Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., Wartzack, S., Skin Model Shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical engineering, Computer-Aided Design, 50, 1-15, 2014

[A-4]. Anwer, N., Schleich, B., Mathieu, L., Wartzack, S., From solid modelling to skin model shapes: Shifting paradigms in computer-aided tolerancing, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 63(1), 137-140, 2014

[A-5]. Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., Wartzack, S., Contact and Mobility Simulation for Mechanical Assemblies based on Skin Model Shapes, ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 15(2), 021009:1-021009:7, 2015

[A-6]. Zhao, H., Anwer, N., Bourdet, P., Curvature-based Registration and Segmentation for Multisensor Coordinate Metrology, Procedia CIRP, Volume 10, pp. 112-118, doi:10.1016/j.procir.2013.08.020, 2013

[A-7]. El-Hayek, N., Nouira, H., Anwer, N., Gibaru, O., Damak, M., Comparison of tactile and chromatic confocal measurements of aspherical lenses for form metrology International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 15(5), 821-829, 2014

[A-8]. El-Hayek, N., Nouira, H., Anwer, N., Gibaru, O., Damak, M., A new method for aspherical surface fitting with large-volume datasets, Precision Engineering, 38(4), 935-947, 2014

CIRP Annals - Manufacturing Technology 62 (2013) 143–146

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

CIRP Annals - Manufacturing Technology

journal homepage: http://ees.elsevier.com/cirp/default.asp

# The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design

Nabil Anwer [a,*], Alex Ballu [b], Luc Mathieu (1)[a]

[a] LURPA, Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, ENS Cachan, Cachan, France
[b] Univ. Bordeaux, I2M, UMR 5295, F-33400 Talence, France

ARTICLE INFO

*Keywords:*
Product development
Geometric modelling
Skin model

ABSTRACT

The modelling of product shapes and dimensions is now largely supported by geometric modelling tools. However, the underlying geometrical variations cannot be addressed efficiently when covering the overall product life cycle. The fundamental concept of skin model has been developed as an alternative to the nominal model and covers geometric deviations that are expected, predicted or already observed in real manufacturing processes.

This paper investigates the fundamentals of the skin model at a conceptual, geometric and computational level. Representation and simulation issues for product design are presented. Finally, applications and perspectives are highlighted.

© 2013 CIRP.

## 1. Introduction

Nowadays, the use of Information Technology (IT) for design and manufacturing has increased mainly among aerospace and automotive industries, owing in a large part to the availability of advanced Computer-Aided Design (CAD), Computer-Aided Engineering (CAE), Computer-Aided Manufacturing (CAM) systems and enhanced computing facilities [1,2]. Virtual prototyping and virtual usage before real production is increasing through digital manufacturing enhanced by virtual reality (VR) technologies [3]. The widespread availability of sensors, networks, computers and the fastest growing sector of reverse engineering and virtual/augmented reality is revolutionizing product development [4,5]. Geometric modelling, at the heart of the product development cycle, becomes ubiquitous and offers essential and different tools for the digital product development process.

Although the product form or shape have been extensively investigated considering the nominal geometry, initially specified with ideal shape and nominal dimensions, inevitable limitations can be observed, especially when dealing with accurate solid models of physical products. Despite substantial research efforts in geometric modelling, finite-element methods, geometric tolerancing and computational metrology, the efficient consideration of real-life situations of product geometric variations remains an open problem. Computer Aided Tolerancing (CAT) systems provide simulation tools for modelling the effects of tolerances on digital assembly simulation. Integration of manufacturing simulations and physical modelling into tolerance analysis [6] lead to more accurate methods but still lack of form deviations considerations.

The key point in overcoming the problems mentioned above is the consideration of new paradigms for geometric product modelling that supersede the actual CAD or nominal model.

The skin model has been developed to enrich the nominal idealized geometry considering physical shapes. The concept stemmed from the theoretical foundations of Geometrical Product Specification (GPS) [7] and the two acknowledged axioms of manufacturing imprecision and measurement uncertainty [8].

The representation of the skin model has been investigated only recently. A discrete shape approach proposed by Zhang et al. [9,10] paved the way for skin model representation and simulation. Their approach enabled to model form, orientation and position deviations employing second order shapes and different methods for obtaining randomly deviated geometry. Multiple views and different instances of skin models are also developed within the context of Statistical Shape Analysis. The concept of mean skin model is introduced as well as a new parameterization of skin model shapes. In the continuity of this work, Schleich et al. [11] proposed a comprehensive framework for skin model simulation. The skin model considers geometric deviations that are expected, predicted or already observed in real manufacturing processes. The process of skin model simulation is split into two phases. In the early design stages geometric deviations are not yet observed but should be incorporated. Therefore, predictive assumptions on systematic and random deviations should be made. This stage is defined as the "Prediction Stage". During later design stages, manufacturing process simulations and prototypes of the part may be available. Thus, a skin model should take the given virtual or physical observations into consideration and simulate possible outcomes based on existing samples. This stage is called the "Observation Stage".

This paper investigates the fundamentals of the skin model at a conceptual and at a representation level. Paradigms for skin model through shape modelling and Requicha's seminal work, which shaped the CAD domain, are presented in Section 2. Skin model representation and novel concepts for Statistical Shape Analysis are discussed in Section 3. An illustrative example is provided in Section 4. Finally, conclusions and perspectives are highlighted.

* Corresponding author.
*E-mail address:* anwer@lurpa.ens-cachan.fr (N. Anwer).

0007-8506/$ – see front matter © 2013 CIRP.
http://dx.doi.org/10.1016/j.cirp.2013.03.078

## 2. Mathematical conceptualization of the skin model

### 2.1. Skin model in the context of shape modelling

Alongside with the development of CAD systems, the physical shape of manufactured product is regarded from different perspectives such as design, manufacturing and simulation. A formal definition of shape can be borrowed from Kendall's definition [12]: "Shape is all the geometrical information that remains when location, scale, and rotational effects are filtered out from an object."

It is also interesting to point out Requicha's works on the fundamentals of shape modelling for CAD systems and tolerancing. Requicha [13] introduces three levels of abstraction. The first level clarifies the universe to be modelled (the physical universe); the second level is used to analyse the problem from a mathematical point of view (the mathematical model); the third allows to understand the various issues of discretizing the elements of the mathematical universe (the representation or computational model).

In the same seminal paper, Requicha presents the properties of a solid model (mathematical level). These properties are: rigidity, homogeneous three dimensionality, finiteness, closure, finite describability, and boundary determinism. The related models are geometrical models with perfect boundary surfaces, and they are used daily in CAD systems to represent parts and assemblies (hereinafter referred to as nominal models).

Nominal model allows ensuring complex mechanical modelling and simulation and is ubiquitous throughout the product lifecycle. Nevertheless, a conceptual gap still exists between the nominal model and the physical workpiece (physical level) because geometrical deviations are not well considered. In [14], Requicha presents a theory of tolerancing, but he does not link the model of the part used to define the specification with shape modelling. The model of the part proposed in this paper, which includes geometrical deviations, is called skin model.

The premise of skin model has been presented several years ago by Ballu and Mathieu [15] using the concept of real surface of the part. At that time, the 'physical surface' of the part (physical level) and its model (mathematical level) were not clearly distinguished. Ballu and Mathieu proposed in 1995 to ISO TC 213 (Technical Committee 213: Dimensional and geometrical product specifications and verification) to introduce several concepts for GPS (Geometrical Product Specification), among which the concept of skin model. The skin model (or non-ideal surface model) has been defined in ISO 17450-1 [7] as "a model of the physical interface of the workpiece with its environment". From that time, the skin model is distinguished from the physical surface. With regard to Requicha's solid model properties, the key difference is that the describability of the skin model is infinite.

### 2.2. Infinite describability

A CAD model is defined by a finite number of parameters: point's coordinates, angles, lengths, control points of NURBS surfaces, etc. As expressed by Requicha, the CAD model has the property of finite describability. On the contrary, the skin model is defined by an infinite number of parameters.

Why do we need infinite description? To be able to consider all kinds of geometrical variations, the description has to be infinite. Otherwise, it is impossible to completely capture all these variations, and it is not possible to define accurately the shape by one or several mathematical equations. The skin model includes geometric defects such as orientation and position deviations, dimensional and texture defects that cannot be completely described.

How to represent the skin model? Infinite describability implies that the skin model cannot be represented in computers or by any other media. There is no corresponding representation model as described by Requicha. The skin model is purely conceptual and one can only imagine it. Obviously, finite models can be used to represent particular skin models, to produce a shape, to simulate assemblies or to represent them in a computer system. In Fig. 1, skin model is represented only for an illustrative purpose.

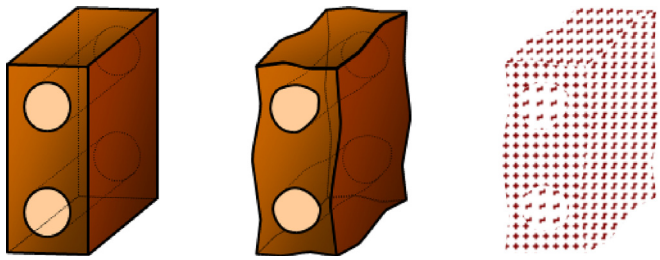


**Fig. 1.** Illustration of nominal model, continuous and discrete skin model.

Is it really important to have an infinite describability? We are not used to consider infinite models in mechanical engineering. Nevertheless, it is the only way to consider all the possible variations. The infinite describability of the skin model is not a problem from a theoretical point of view, as it is only a conceptualization of the workpiece, which is important to completely understand the concepts of geometrical tolerancing and the influence of geometrical defects on assemblies.

### 2.3. Continuous vs. discrete model

In general, the skin model is imagined as a continuous surface, but shape defects are considered at different scales of observation: macro, micro, and nano scales. At an atomic scale, a discrete model could be more realistic, and even from metrology point of view, there is a discrimination threshold inducing discretization of the measurement [16]. Nevertheless, the problem whether the model is continuous or discrete is overcome when the model is sufficiently precise to take into account all kinds of geometrical variations. When dealing with the skin model as a discrete model, the describability is finite, leading to a huge number of parameters. Thereby, the representation in a computer is unreasonable. Nevertheless, for quantitative analysis, and in particular for computational representations, a discrete model is easier to manipulate. For qualitative analysis of the skin model, in order to express geometrical specifications, or to define a verification operator in metrology, a continuous model is much easier to use and comprehend.

### 2.4. Mathematical classification

From a topological point of view [17], the skin model is imagined as any surface, closed (connected and without boundary) and orientable (without self-intersection). Such a surface is homeomorphic either to a sphere or a finite connected sum of tori. The number of tori (zero for a sphere) is the genus of the surface and corresponds to the number of through holes of the part. At this stage, the genus of the surface is the only way to distinguish different skin models. Indeed, the faces of the skin model are not bounded because the edges are not rough; they are rounded with fuzzy boundary and cannot be precisely defined.

Curvatures are also useful to describe and classify surfaces [18]. Curvature is a shape invariant parameter and has been classically used as a shape descriptor (both continuous and discrete mathematical models). There are many curvature-based descriptors, such as the principal curvatures, Gaussian curvature, and mean curvature [19].

### 2.5. Synthesis

Above all, the skin model is not unique; it is a closed, orientable surface with an infinite describability. It permits to consider all kind of geometrical defects of workpieces. This is the only model

allowing the definition without ambiguities of the geometrical specifications of a part.

The more complex the model is, the more accurate the representation becomes. The use of simplified models can be the source of serious, even disastrous, misunderstanding in mechanical design and the overall product development process.

## 3. Skin model representation

To be integrated in computer systems, the skin model must be simplified to obtain a finite description. Thus, the model is representable (representation level), in the same way as a solid model, but with a larger number of description parameters. The tremendous volume of data to compute for representation and simulation of skin model was a barrier to its development, but now, powerful computers are available and algorithms for discrete geometry have been improved.

With this goal, we developed a novel approach that starts from a nominal CAD model and leads to computational shapes (Fig. 2). First, an initial specified shape is sampled as a point-set intended to be representative of the external surface. This step is called Tessellation. A shape global description approach based on Principal Component Analysis (PCA) [20] and a shape local description approach based on Augmented Darboux Frame (ADF) [21] are then developed. The proposed Local–Global approach enables the simulation of both random and systematic deviations when considering geometrical requirements, tolerance specifications and manufacturing knowledge. This step is called Deviations Simulation. To enrich the skin model when considering the deviations from the nominal CAD model, we need to assess the geometrical deviations and the visualization techniques at different scales. This step is called Deviations Visualization. In addition to discrete shape modelling for skin model representation and simulation, the concept of the mean skin model and its robust statistics are introduced. This step is called Statistical Shape Analysis.

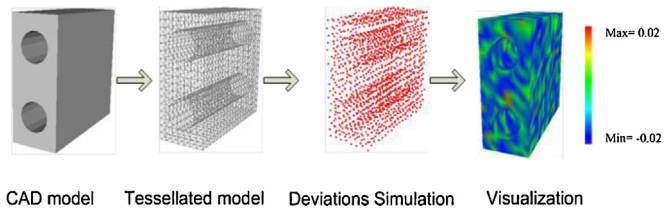



**Fig. 2.** Skin model creation process.

### 3.1. Tessellation

As discussed above, the skin model is created from nominal CAD model. In order to obtain a discrete surface model, a tessellation process to convert CAD models into polyhedral ones is considered. Many CAD built-in tessellation algorithms create a boundary representation that covers the surface of the solid model with triangles, and this mesh data structure is a common way of describing the geometry and the topology of objects in computer graphics. Generally the mesh data structure is a polygon mesh. A polygon mesh consists of vertices connected to form the faces that in turn form an object.

### 3.2. Deviations Simulation

In previous works, we have shown that geometric deviations can be decomposed into systematic and random deviations of shapes [10,11]. The model of systematic deviations was devoted to the identification of second order shapes (quadrics) or any combination of quadric shapes since it has been reported that approximately 85% of manufactured objects can be modelled with quadric surfaces [22]. The model of random deviations was designed to embed the random structure of engineered surfaces at different resolutions. Two main approaches are investigated: Markov Chain Monte-Carlo (MCMC) [9] and Gaussian Random Fields (GRF) [11]. The first approach provided random sampling guarantees while enabling better repeatability than classical Monte-Carlo techniques. The second approach showed more consistency when handling both correlated and uncorrelated spatial distributions but is limited to Gaussian assumptions. Another limitation of the two approaches is that random deviation of a given point is computed in the direction of the vertex normal. To overcome the actual limitations, we proposed to develop a Local–Global approach [10].

The main idea behind such approach is twofold. First, the skin model can be studied locally as a second-order shape defined using the augmented Darboux frame (this frame contains the normal and the curvature elements). Therefore, simulated deviations are investigated not only on the normal direction but also on the tangent plane and taking into consideration curvatures. The originality of this approach is to provide a comprehensive framework for local intrinsic shape (form deviations) simulation using the normal and the curvatures.

Second, the pose (location and orientation) of the surfaces derived from the skin model is represented by a centroid and three principal axes using Principal Component Analysis (PCA). Hence, principal axes and centroid are mapped to situation elements of the studied shape to embed nominal geometry and CAD data. Therefore, simulated deviations on position and orientation are investigated through centroid and principal axes deviations.

### 3.3. Visualization

Many techniques have been proposed to show deviations effects and uncertainties in data visualizations such as vector fields and particle systems [23,24]. The deviations to a CAD or nominal model can be visualized on a skin model. Those deviations are much smaller than feature size and it remains difficult to visualize them within a multi-scale geometry by human eyes directly.

Therefore, helping the user to observe and analyse the differences between the nominal model and the simulated skin model is an important task. The mesh or facet representation is well used for scientific visualization, but cannot solve this problem directly. In [10] we proposed to improve the mesh visualization by adding a colour scale technique to reflect the computed deviations through the computation of deviations based on vertex normal directions.

### 3.4. Statistical Shape Analysis

Statistical analysis of shape variations or Statistical Shape Analysis (SSA) is commonly used for variability considerations in scientific domains [25]. These technics permit to describe a set of quite similar shapes by a mean shape and variations.

Statistical Shape Analysis is used here to (i) give an efficient parameterization of the variability of different skin models, (ii) provide a compact representation of shapes where each skin model is expressed as a combination of the mean skin model and the variation of the skin model around the mean along main modes, and (iii) enable to predict new skin models.

To establish a statistical shape model in the context of the skin model, four steps are developed [10]:

1. Acquiring a training set from predicted or observed shapes, the predicted shapes are the result of a priori knowledge, available data, and manufacturing simulations with parameter variations while observed shapes are the result of measurements of actual workpieces;
2. Determining the correspondence of the shapes;
3. Aligning the training set through registration operations;
4. Analysing the principal components and establishing the statistical shape model.

In a previous work [11], we compared four different statistical shape models and showed that improving the well-known Point Distribution Model (PDM) with kernel Density Estimates (KDE) result in a more precise description of the underlying main modes of variation and therefore in a better understanding and generation of random skin models based on samples (predicted or observed).

This approach was experimented on a set of FEA-based manufacturing simulations and actual measured workpieces in order to better evaluate the theoretical and algorithmic framework. The originality and novelty of this approach is, in our knowledge, the main application of Statistical Shape Analysis theories and techniques in the fields of product engineering.

## 4. Application

The case study is based on a sheet metal part manufactured in a one-stage sheet metal forming process [10]. For the sake of simplification, the simulation of the skin model of a bottom plane with flatness specification is considered here. The tessellation of the bottom plane is performed using CATIA V5 CAD software.

Based on the tessellated CAD model and the geometrical specification of flatness, different skin models are generated using the methods discussed in section 3. In this case, we created skin models of the bottom plane with flatness equals to 0.3 mm considering ellipsoid systematic deviations and Gaussian random noise using MCMC method. To visualize the deviations clearly, the limits are reflected by red and blue colours (Fig. 3).

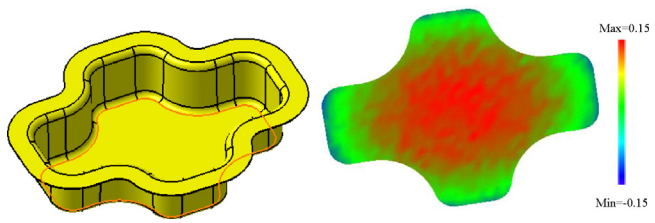



**Fig. 3.** Skin model visualization of the bottom plane [10].

On the other hand, based on the information from FEA simulation data and measurement data, the skin model is improved considering both systematic and random manufacturing and measurement errors.

The manufacturing process is simulated using stochastic FE techniques. The selected variables (blank thickness, drawing depth, punch radius, die radius and flange width) are computed using Latin Hypercube Sampling under the assumption of the independence of the variables and normal distributions [26]. The manufactured cross-shaped parts were measured using a fringe projection system.

To calculate the mean skin model considering the manufacturing process, a training set is designed with 10 models [10]. The relationships among these 10 samples are established by PDM and landmark techniques and all the samples are aligned using a curvature-based fine registration algorithm [19].

After aligning the samples, the mean model of the training set can be obtained. Based on PCA techniques, the deviations between the mean model and each sample are calculated and the influence of each component can be deduced. This process enabled to parameterize the skin model, which combines information from design assumptions, manufacturing and inspection domains.

## 5. Conclusion

In this paper we presented the fundamentals of skin model conceptualization and representation. After examining Requicha's seminal work in CAD domain, we discussed the main paradigms for skin model conceptualization. A new method for building 3D skin models is also presented in details. The skin model extends the actual nominal model and opens up a wide range of potential applications. Among them, the analysis and the visualization of 3D shape deviations for both observed and predicted parts, the computation of deviations accumulations for assembly and multi-station manufacturing processes, and finally Geometrical Product Specification and virtual metrology applications. Future developments will concern both the fundamental issues of skin model and specific geometric deviations simulation integrating more physical properties.

## References

[1] Krause F, Kimura F, Kjellberg T, Lu SC-Y (1993) Product Modelling. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 42(2):695–706.
[2] Stark R, Hayka H, Langenberg D (2009) New Potentials for Virtual Product Creation by Using Grid Technology. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 58(1):143–146.
[3] Lu SC-Y, Shpitalni M, Bar-Or R, Gadh R (1999) Virtual and Augmented Reality Technologies for Product Realization. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 48(2):471–495.
[4] Bernard A, Laroche F, Ammar-Khodja S, Perry N (2007) Impact of New 3D Numerical Devices and Environments on Redesign and Valorisation. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 56(2):695–706.
[5] Nee AYC, Ong SK, Chryssolouris G, Mourtzis D (2012) Augmented Reality Applications in Design and Manufacturing. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 61(2):657–679.
[6] Stockinger A, Meerkamm H (2009) Concept for the Integration of Manufacturing Simulations into Tolerance Analysis. *11th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, Annecy, France.
[7] ISO 17450-1: 2005, Geometrical Product Specifications (GPS) – General Concepts – Part 1: Model for Geometrical Specification and Verification.
[8] Srinivasan V (2007) Computational Metrology for the Design and Manufacture of Product Geometry: A Classification and Synthesis. *Journal of Computing and Information Science in Engineering* 7(1):3–9.
[9] Zhang M, Anwer N, Mathieu L (2011) A Discrete Geometry Framework for Geometric Product Specification. *21st CIRP Design Conference*, Daejeon, South Korea.
[10] Zhang M, Anwer N, Stockinger A, Mathieu L, Wartzack S (2012) Discrete Shape Modeling for Skin Model Representation. *12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, Huddersfield, UK.
[11] Schleich B, Anwer N, Mathieu L, Walter M, Wartzack S (2012) A Comprehensive Framework for Skin Model Simulation. *Proceedings of the ASME 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Nantes, France.
[12] Kendall DG (1977) The Diffusion of Shape. *Advances in Applied Probability* 9:428–430.
[13] Requicha AAG (1980) Representation for Rigid Solids: Theory, Methods and Systems. *Computing Surveys* 12(4):437–464.
[14] Requicha AAG (1983) Toward a Theory of Geometric Tolerancing. *The International Journal of Robotics Research* 24:45–60.
[15] Ballu A, Mathieu L (1993) Analysis of Dimensional and Geometrical Specifications: Standards and Models. *Proc. 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, Cachan, France.
[16] JCGM 200:2088, International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Term (VIM).
[17] Bourbaki (1966) *Elements of Mathematics: General Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA.
[18] Do Carmo MP (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
[19] Zhao H, Anwer N, Bourdet P (2012) Curvature-Based Registration and Segmentation for Multisensor Coordinate Metrology. *12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, Huddersfield, UK.
[20] Pearson K (1901) On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. *Philosophical Magazine* 6(2):559–572.
[21] Ferrie FP, Lagarde J, Whaite P (1993) Darboux Frames, Snakes, and Superquadrics: Geometry from the Bottom Up. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 15(8):771–783.
[22] Hakala D, Hillyard R, Malraison P, Nource B (1981) Natural Quadrics in Mechanical Design. *SIGGRAPH'81 (Seminar on Solid Modelling)*, Dallas, US.
[23] Forslund K, Söderberg R (2009) The Effects of Geometrical Variation on Perceived Quality – A Close Look at the Concept of Visual Robustness. *11th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, Annecy, France.
[24] McLouglin T, Laramee RS, Peikert R, Post FH, Chen M (2010) Over Two Decades of Integration-Based Geometric Flow Visualization. *Computer Graphics Forum* 29(6):1807–1829.
[25] Dryden IL, Mardia KV (1998) *Statistical Shape Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, NY.
[26] Stockinger A, Wittmann S, Martinek M, Wartzack S, Meerkamm H (2010) Virtual Assembly Analysis: Standard Tolerance Analysis Compared to Manufacturing Simulation and Relative Positioning. *Proc. 11th International Design Conference Design*, Dubrovnik, Croatia.

Special Issue Article

Institution of MECHANICAL ENGINEERS

Journal of ENGINEERING MANUFACTURE

Proc IMechE Part B:
J Engineering Manufacture
227(5) 672–680
© IMechE 2013
Reprints and permissions:
sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav
DOI: 10.1177/0954405412466987
pib.sagepub.com
SAGE

# Discrete shape modeling for skin model representation

**Min Zhang[1,2], Nabil Anwer[1], Andreas Stockinger[3], Luc Mathieu[1] and Sandro Wartzack[3]**

**Abstract**

Nowadays, the management of product geometrical variations during the whole product development process is an important issue for companies' competitiveness. During the design phase, geometric functional requirements and tolerances are derived from the design intent. Furthermore, the manufacturing and measurement stages are two main geometric variations generators according to the two well-known axioms of manufacturing imprecision and measurement uncertainty. GeoSpelling as the basis of the geometrical product specification standard enables a comprehensive modeling framework and an unambiguous language to describe geometric variations covering the overall product lifecycle thanks to a set of concepts and operations based on the fundamental concept of the "Skin Model." In contrast, only few research studies have focused on the skin model representation and simulation. The skin model as a discrete shape model is the main focus of this work. We investigate here discrete shape and variability modeling fundamentals, Markov Chain Monte Carlo simulation techniques and statistical shape analysis methods to represent, simulate, and analyze skin models. By means of a case study based on a cross-shaped sheet metal part, the results of the skin model simulations are shown here, and the performances of the simulations are described.

**Keywords**

Geometrical product specification, discrete shape modeling, skin model, Monte Carlo simulation, discrete differential geometry

Date received: 17 July 2012; accepted: 10 October 2012

## Introduction

In modern production engineering, new complex products with controlled tolerances are being increasingly adopted to improve companies' market position. Geometric variations are inevitably generated during the manufacturing stage due to the accuracy of manufacturing technologies.[1] Geometric variations are also generated during the measurement stage considering measurement uncertainty.[2]

Within the context of product lifecycle management (PLM), information communication and sharing requires to manage the geometric variations along the whole product lifecycle. The geometric variations should be considered early in the tolerancing process in the design stage.[3] Many computer-aided tolerancing (CAT) tools can help designers for functional tolerance specification, but they are limited to control the geometric variations when covering the whole product lifecycle. Different modeling frameworks have been proposed to build coherent and complete tolerancing process along the whole product lifecycle.

Hillyard and Braid[4] developed the concept of variational geometry that is a dimension-driven, constraint-based technique. Another early example of previous work of tolerance-modeling technique is the solids offset approach proposed by Requicha,[5] in which the tolerance zones of workpieces are obtained by "offsetting" the nominal boundaries. Bourdet[6] developed the concept of the small displacement torsor (SDT) to solve the general problem of the fit of a geometric surface model

[1]Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée (LURPA), Génie Mécanique, ENS de Cachan, France.
[2]Department of Precision Metrology, College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing, China.
[3]Chair of Engineering Design (KTmfk), Department of Mechanical Engineering, University Erlangen-Nuremberg, Erlangen, Germany.

**Corresponding author:**
Min Zhang, Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée (LURPA), ENS de Cachan, 61, Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France.
Email: amei.zhangmin@gmail.com

to a set of points using rigid body movements. Based on the solids offset approach, Jayaraman and Srinivasan proposed virtual boundary requirement (VBRs) and conditional tolerance (CTs) approach.[7,8] Etesami[9] formalizes the solids offset model and proposed using tolerance specification language (TSL) to describe tolerance constraints. Shah et al.[10] proposed a dimension and geometric model, which is based on the relative degrees of freedom of geometric entities: feature axes, edges, faces, and features-of-size. Roy et al.[11] presented a mathematical scheme for interpreting dimensional and geometric tolerances for polyhedral parts in a solid modeler.

Among them, GeoSpelling proposed by Ballu and Mathieu,[12] as the basis of the geometrical product specification (GPS) standard, enables a comprehensive modeling framework and an unambiguous language to describe geometric variations covering the overall product lifecycle thanks to a set of concepts and operations based on the fundamental concept of the "Skin Model." Different from the nominal model that is deemed as an ideal representation, the skin model is a shape model to represent non-perfect shapes.[13] To the best knowledge of the authors of this article, the operationalization of GeoSpelling has not been successfully completed and few research studies have focused on the skin model representation and simulation.

In ISO 17450-1,[13] a skin model is a shape model. Early researches in tolerance-based modeling lead to the development of attribute-based systems.[14] These efforts could be roughly classified either as point-based (e.g. point cloud), surface/shell-based, or volume-based.[15] A shape representation scheme can be defined as a mapping from a computer structure to a well-defined mathematical model that defines the notion of the physical object in terms of computable mathematical properties and is independent of any particular representation scheme.[16] Johnson[17] proposed a tolerance representation approach, which integrates dimensioning and tolerancing modelers with the geometric modelers. This B Rep–based model is applicable only for location and size tolerances, and it is limited to geometric entities such as planar faces, cylindrical faces, conical faces, and spherical faces. Requicha[18] proposed a constructive solid geometry (CSG) -based tolerancing representation model, which is named as PADL-I and PADL-II modeler. The limitation of this CSG-based approach is that all of non-primitive faces derived from the same primitive face receive the same variations. Gossard et al.[19] proposed a similar feature-based design system, which combines B-Rep solid model and GSG-representational scheme. This approach can be employed on a polyhedral solid model, but it is limited to the conventional tolerance representation.

Considering dense point data can be acquired by scanning techniques and discrete shapes are commonly used in production engineering, this research work focuses on discrete skin representation and simulation. It would also be efficient for the operationalization of GeoSpelling based on discrete skin model representation. Based on discrete skin model, discrete geometry processing techniques will enhance GeoSpelling-computing capabilities and enable its operationalization.[20]

In order to enrich the skin model when considering the deviations from the nominal or computer-aided design (CAD) model, the authors have assessed the geometric deviations at many different scales. Kurfess and Banks[21] modeled the manufacturing error using a sequence of models based on statistical hypothesis testing of the fitted residuals. Yang and Jackman[22] evaluated form error using statistical method without independently analyzing the statistical properties of the associated residuals. Samper and Formosa[23] proposed a way to define form error parameters based on the eigenshapes of natural vibrations of surfaces. The originality of this method is that the set of form parameters can be computed for any kind of shape.

In this article, the authors investigate Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation techniques and statistical shape analysis (SSA) methods to represent, simulate, and analyze skin models. A global-modeling approach based on principal component analysis (PCA) and a local modeling approach based on augmented Darboux frame is considered here. The local–global modeling approach enables the simulation of both random and systematic deviations when considering geometric constraint requirements, tolerance specifications, and manufacturing. In addition to discrete shape modeling for skin model representation and simulation, the concept of the mean skin model and its robust statistics are also introduced in this work.

The remainder of this article is organized as follows: first, the Monte Carlo simulation techniques and local/global modeling approaches for discrete skin model simulation will be introduced; second, the SSA for discrete skin models will be addressed; and finally, a case study to apply the proposed methods will be presented.

## Skin model simulation

Skin model is a representation of real shapes. The geometric characteristics of real shapes should be fully considered for skin model shaping. In Caskey et al.,[24] the geometric deviations of the real surface to the nominal one are caused by two kinds of deviations: random deviations and systematic deviations. In this article, both are simulated to construct a complete skin model. Considering a designed shape is specified with geometric tolerances, the simulated skin models are located within the specified tolerance zones, which can be defined as constraints of skin model generation methods.[25] In this research, the deviations caused by random errors follow Gaussian (normal) distribution, which has been proven to be reasonable for mechanical applications,[26] while systematic deviations are reproducible inaccuracies that follow recognizable signatures, which can be calculated or simulated from target shapes.

### *Random deviation simulation based on MCMC*

Random simulation techniques can be classified into physical and computational methods. The computational

random simulation numbers are obtained by computational algorithms, which produce long sequences of apparently random results. Actually, the computational random numbers are pseudorandom, and they are determined by the initial value of the algorithm. Based on the hypothesis that the random deviations follow Gaussian distribution, three statistical methods have been developed for random deviation simulation: one-dimensional (1D) Gaussian, multi-Gaussian, and Gibbs methods.[25] The results of the Gaussian methods are influenced by the selection of the initial seed value. However, Gibbs methods are initial seed-independent. In this section, the Gibbs method is discussed in detail.

Gibbs method defined here is used to simulate the multi-Gaussian distribution of random numbers using the MCMC methods. The MCMC method generates a sequence of samples from the joint probability distribution of two or more random variables by iterative process. These methods are based on constructing a Markov chain that has the desired distribution and only depends on current state instead of the entire past data. Hence, Gibbs method provides reliable Gaussian distribution results.

In Gibbs sampling, a vector of parameters of interest $\boldsymbol{\Psi}$ is required, and also a nuisance parameter $\Lambda$ with observed data B, from which a converging distribution can be obtained. Suppose $(\boldsymbol{\Psi}_1(0), \boldsymbol{\Psi}_2(0), \ldots, \boldsymbol{\Psi}_d(0))$ is an initial starting random value in $R^d$. Note that the conditional density function of $\boldsymbol{\Psi}_j|\boldsymbol{\Psi}_{-j}$ is $f(\boldsymbol{\Psi}_j|\boldsymbol{\Psi}_{-j})$, from which the Gibbs sampler selects candidate points. The initialization of the process is at $t = 0$ and the initial vector value is then $\boldsymbol{\Psi}(0)$. When $t$ is increasing ($t = 1, 2, \ldots, T$), then $\boldsymbol{\Psi}(t)$ follows the density function $f(\boldsymbol{\Psi}_j|\boldsymbol{\Psi}_{-j})$ and generates new point to replace the old one, and an iterative calculation is performed until it converges to the target value. The corresponding pseudo-code is described as follows

(a) For $t = 1, 2, \ldots, T$, let $\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\Psi}_1(t-1)$.
(b) Let $j$ be a variable between $[1, d]$. For $j = 1, 2, \ldots, d$, using $f(\boldsymbol{\Psi}_j|\boldsymbol{\psi}_{-j})$ to get candidate point $\boldsymbol{\Psi}_j^*(t)$, and then value $\boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\Psi}_j^*(t)$ is updated. During the sampling process, the variations of each vector are as follows.

Sample $\boldsymbol{\psi}_1(t)$ is from $f(\boldsymbol{\psi}_1|\boldsymbol{\psi}_2(t-1), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(t-1), \Lambda(t-1), \mathrm{B})$;
Sample $\psi_2(t)$ is from $f(\boldsymbol{\psi}_2|\boldsymbol{\psi}_1(t), \boldsymbol{\psi}_3(t-1), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(t-1), \Lambda(t-1), \mathrm{B})$;
Thus, sample $\boldsymbol{\psi}_d(t)$ is from $f(\boldsymbol{\psi}_d|\boldsymbol{\psi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\psi}_{d-1}(t), \Lambda(t-1), \mathrm{B})$;
And then, sample $\Lambda(t)$ is from $f(\Lambda|\boldsymbol{\psi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(t), \mathrm{B})$.

(c) Let $\boldsymbol{\Psi}(t) - = (\boldsymbol{\Psi}_1^*(t), \ldots, \boldsymbol{\Psi}_d^*(t))$, and increase $t$. The vectors $\boldsymbol{\psi}(0), \boldsymbol{\psi}(1), \ldots, \boldsymbol{\psi}(t)$ represent the realization of a Markov chain, where the transition probability from $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ to $\boldsymbol{\psi}$ is defined by equation (1).

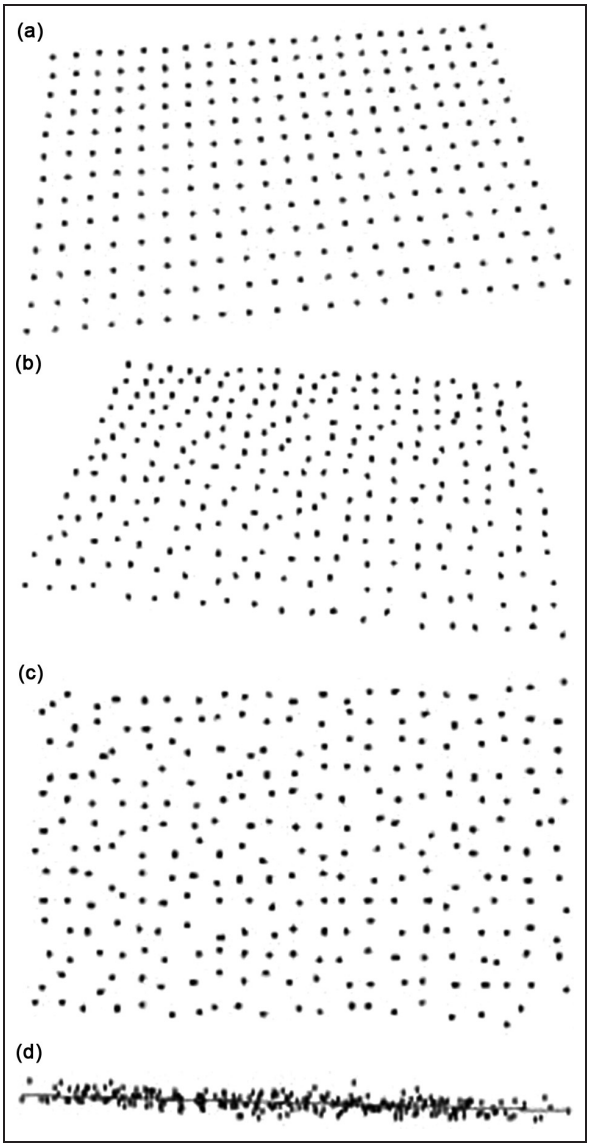



**Figure 1.** Skin model simulation by Gibbs method: (a) nominal model; (b) skin model view 1; (c) skin model view 2; and (d) skin model view 3.

$$F(\boldsymbol{\psi}(\cdot), \boldsymbol{\psi}) = f(\boldsymbol{\psi}_1|\boldsymbol{\psi}_2(\cdot), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(\cdot), \Lambda(\cdot), \mathrm{B}) \cdot f(\boldsymbol{\psi}_2|\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_3(\cdot), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(\cdot), \Lambda(\cdot), \mathrm{B}) \ldots \cdot f(\boldsymbol{\psi}_d|\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{d-1}, \Lambda(\cdot), \mathrm{B}) \quad (1)$$

The joint distribution of $(\boldsymbol{\psi}_1(i), \ldots, \boldsymbol{\psi}_d(i), \Lambda(i))$ converges to $f(\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_d, \Lambda|\mathrm{B})$ when $i \to \infty$.

In this case, there are 273 points as input point set, and the stationary objective function follows a Gaussian distribution. Based on Gibbs method, 1000 times interactive process is adopted, and the sampling random variables from Gaussian random numbers simulated the skin model as Figure 1.

## Global approach

The skin model should satisfy tolerance specifications associated to the relevant nominal model. It means that

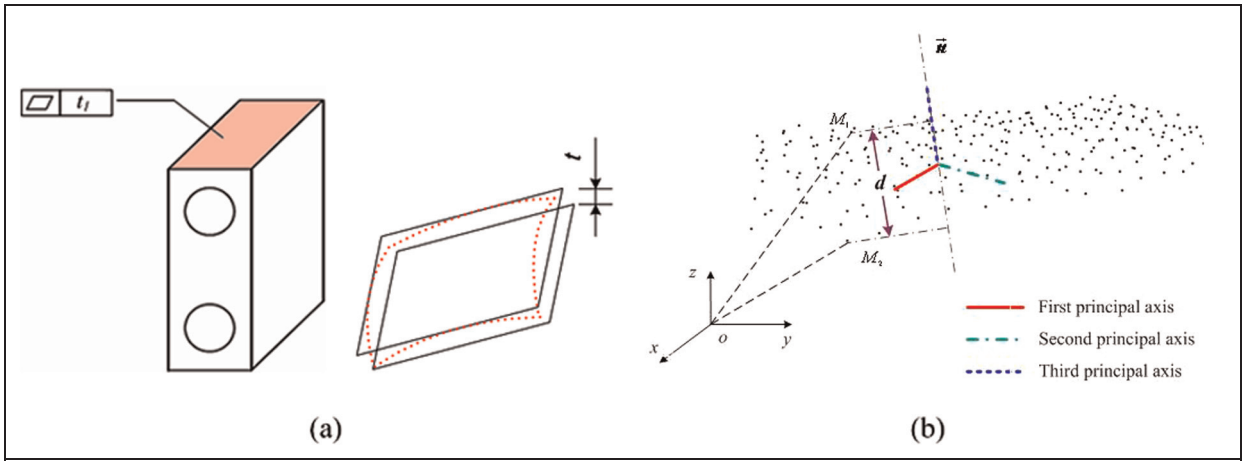



**Figure 2.** Skin model simulation with flatness specification: (a) the case with flatness tolerance and (b) flatness constraint.

the simulated skin model should be within the corresponding tolerance zone. Here, three types of geometric tolerances are considered: form tolerance, orientation tolerance, and position tolerance. After creating the random point set to simulate the skin model, the authors also intend to add geometric dimensioning and tolerancing constraints on it to satisfy the specification requirements. In order to simulate the skin model within a given tolerance zone, the direction of the tolerance zone should be determined first. For this purpose, a global model approach based on PCA is developed here.

The PCA is a mathematical method used to convert a set of correlated variables into a set of values of uncorrelated variables called principal components.[27] It is usually used to evaluate the main element or structure of a set of data. Based on the covariance matrix, the PCA method proceeds in such a way that the first principal component has the highest variance (i.e. accounts for all the variability in a data set), and each succeeding component in turn has the highest possible variance within the constraint.

Consider a discrete shape $P_N$ represented by an arbitrary set of points $P_i = [x_i, y_i, z_i]^T$. The PCA method computes the principal axes of the discrete shape using the following three steps:

(a) The origin of the principal coordinate system is determined as the centroid of $P_N$ that is calculated by

$$O_{PCA} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \quad (p_i \in P_N) \tag{2}$$

(b) The covariance matrix is defined by the following equation

$$\boldsymbol{M}_{\text{cov}} = \sum_{i=1}^{N} (p_i - O_{PCA})(p_i - O_{PCA})^T \quad (p_i \in P_N) \tag{3}$$

(c) The eigenvalues and eigenvectors can be calculated. The first principal axis is the eigenvector corresponding to the largest eigenvalue. The two other principal axes are obtained from the remaining eigenvectors.

In the following, a case study with flatness specification (form tolerance) is discussed to illustrate the method for skin model simulation considering the tolerance constraints.

In Figure 2(b), the point set is a skin model of a plane that follows the Gaussian distribution. Using PCA method, the principal axis in three-dimensional space is evaluated. The direction of the third principal axis $\vec{n}$ is deemed as the tolerance zone direction. The skin model can be generated within the tolerance zone according to the tolerance zone direction. The constraints of orientation and/or position tolerances can be treated in a similar way.

## Local approach

The "Global approach" section discussed the skin model simulation considering random deviations from a global perspective. Different from random errors that are statistical fluctuations, systematic deviations are reproducible. They usually follow recognizable signatures that can be calculated or simulated. In skin model shaping, it is thus reasonable to define some basic shape models (e.g. second-order shapes) to simulate those systematic errors.[28]

The augmented Darboux frame described the orientation, principal curvatures, and directions at a point on a surface[29] can be used as a local representation for a surface at each sample point. Let $p$ be a sampled point. The origin of a local frame is defined at $p$. One of its axes is aligned with the surface normal at $p$. The other two axes are aligned with the principal curvature directions at $p$ for which the normal curvature takes on maximum and minimum values, $k_{\max}$ and $k_{\min}$. The five previous parameters when grouped as a system are often referred to as the augmented Darboux frame at $p$. The discrete surface can be studied locally as a Monge

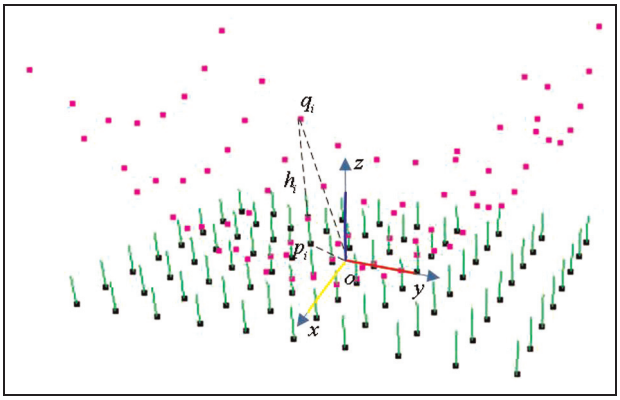



**Figure 3.** Paraboloid morphing method for planar shape.

patch, a height function $z$ of two spatial variables $x$ and $y$ defined using the augmented Darboux frame at $p$. The local shapes for Monge patches are usually approximated as quadric shapes.

Kurokawa and Ariura[28] mathematically proved that an arbitrary second-order surface can be transformed into a fundamental form of the second order by the combination of rotation, translation, and scaling transformations. Based on this argument and augmented Darboux frames, the authors propose to model here the systematic deviations as one or a combination of some basic second-order surfaces or quadric shapes.

### *Systematic deviations simulation*

The authors propose here the use of second order–form deviations to simulate the systematic deviations, since the second order–form deviations can reflect the principle curvature and the anisotropy of complex shapes better than the first-order and higher-order deviations.[28]

For a plane, the common possible shapes considering the systematic deviations include: paraboloid, cone, sphere, cylinder, and ellipsoid. The morphing operation is a combination of a pure morphing, translation, and rotation of these basic shapes.

As an example, a paraboloid surface is simulated from the discrete model of a plane. The principle of our method can be explained by Figure 3, in which $S_p$ denotes the paraboloid point set and $I_p$ denotes the initial planar point set. The PCA algorithm is used to evaluate the principal axis to obtain the local coordinate system. Suppose $p_i$ is a random point of $I_p$ and $q_i$ is its corresponding point of $S_p$.

The distance between these two points in $p_i$s vertex normal direction is reflected using $h_i$.

## SSA

The SSA is commonly used for variability considerations in computer graphics, image processing, and bioinformatics domains.[30] The basic idea of this method is to establish a training set. The pattern of product geometric variation and the spatial relationships of structures are in a given class of shapes. Statistical analysis is used to give an efficient parameterization of this variability and to provide a compact representation of shapes.

To establish a statistical shape model, the following four steps are needed:[31]

(a) Acquiring a training set from observation shapes;
(b) Determining the correspondence of the observation shapes;
(c) Aligning the training set through registration operations;
(d) Analyzing the principal components and establishing the statistical shape models.

Suppose that a collection of $n$ discrete shapes (skin models) noted as $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ is available. Where $X_i$ is a $d$ dimension vector, and $d$ is equal to the number of points composed the skin model. Since the skin model is calculated in the vector space, one may compute directly the empirical mean model using the method presented in Durrleman et al.,[31] as in equation (4)

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \tag{4}$$

The covariance of this collection of skin models can be calculated by the following equation

$$\sum\nolimits_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}\right)\left(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^T \tag{5}$$

The covariance matrix $\sum_X$ is a $d \times d$ dimension matrix. The eigenvalue $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ and eigenvector $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ of the covariance matrix $\sum_X$ can be calculated. The principal components can be reflected by the eigenvector of covariance matrix $\sum_X$. Let $W = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]$, the equation $\sum_X W = W\boldsymbol{\Lambda}_X$ can be calculated. The diagonal matrix $\boldsymbol{\Lambda}_X$ can be described as follows

$$\Lambda_X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{d-1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

The eigenvalues reflect the variance of the principal components. When the principal component has a bigger eigenvalue, it reserves more information of an initial sample. In our method, the principal components with bigger eigenvalues are selected to simulate the initial sample vector. The first $t$ $(t < d)$ maximal eigenvalue fulfills the following equation

$$\sum_{k=0}^{t} \lambda_k \Big/ \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

Let $W_X = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{t-1}]$, then each vector of the sample data can be described by the following equation

$$\boldsymbol{X} \approx \overline{\boldsymbol{X}} + W_x \boldsymbol{b}_x \tag{8}$$

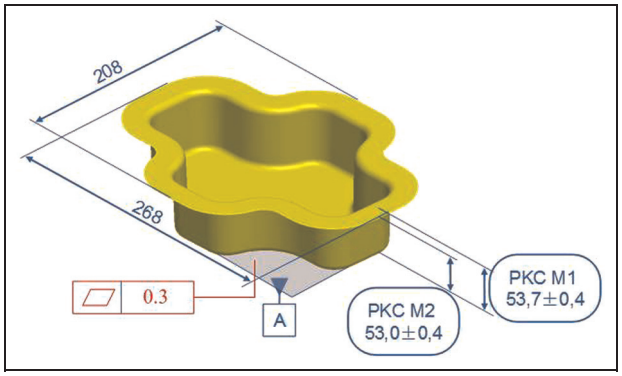



**Figure 4.** The cross-shaped part.

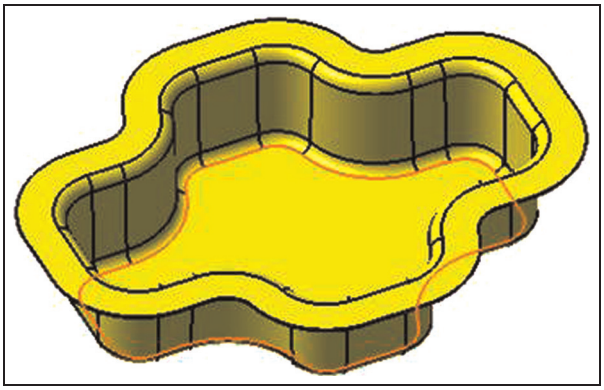


**Figure 5.** Segmentation of the computer-aided design model.

where $\overline{X}$ is the mean. The $t$-dimensional vector $\boldsymbol{b}_x$ is the shape coefficient that controls the models of variation.

The main function of statistical shape model is to determine the mean model among numerous sampling shape models and to predict new shape model belonging to the same shape family. Since $\overline{X}$ and $W_x$ are invariants in a training set, the various shape models are obtained and determined by $\boldsymbol{b}_x$. Under Gaussian distribution assumptions, it can be calculated using equation (9)

$$\boldsymbol{b}_x = \pm 3\sqrt{\lambda_i}\ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ t-1) \tag{9}$$

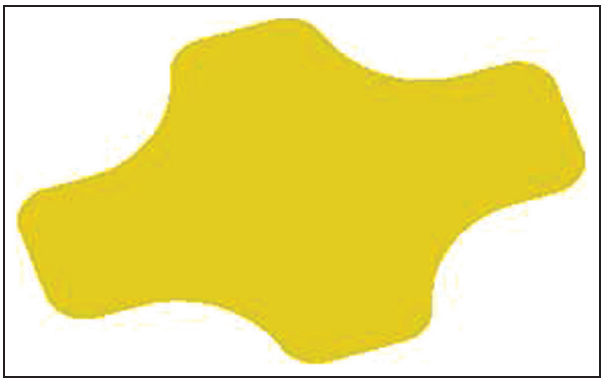


**Figure 6.** Bottom plane extraction.

## Case study

The case study is based on a sheet metal part manufactured in a one-stage sheet metal forming process. The manufacturing process is simulated using stochastic finite element (FE) techniques. The tooling is modeled as rigid parts and a process macro is used to define the processes, such as stamping velocity, blank holder force, and friction. An initial model of the stamping process is served as a basis for the variation of process parameters. The selected variables (e.g. blank thickness, drawing depth, punch radius, die radius, and flange width) are computed using Latin hypercube sampling under the assumption of the independence of the variables and normal distributions.[32] The manufactured cross-shaped parts was measured using ATOS-Ifringe projection system. Figure 4 shows the CAD model of the cross-shaped part and its geometric specifications.

### *Skin model simulation*

In this case, the simulation method of the skin model of a bottom plane with flatness specification constraints is considered. Based on the CAD model (Figure 5), the bottom plane can be extracted using CATIA V5 generative shape design (GSD) utilities as illustrated in Figure 6.

In order to discretize the bottom plane, a tessellation operation is implemented using CATIA V5 software.

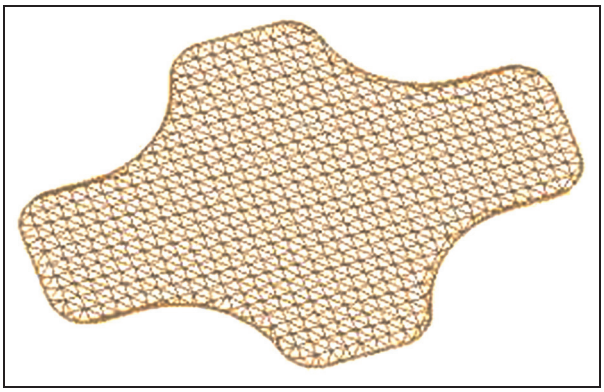


**Figure 7.** Tessellation of the bottom plane.

Figure 7 illustrates the tessellation result composed of 2392 points and 4550 facets.

Based on the tessellated CAD model and the geometric specification of flatness, different skin models can be generated using the methods discussed in the "Skin model simulation" section. In this case, we create skin models of the bottom plane by Gibbs method with flatness equals to 0.3 mm.

However, based on the information from measurement and simulation data, the skin model can be improved considering both systematic and random errors. The analysis of this measurement point set is illustrated in Figure 8.

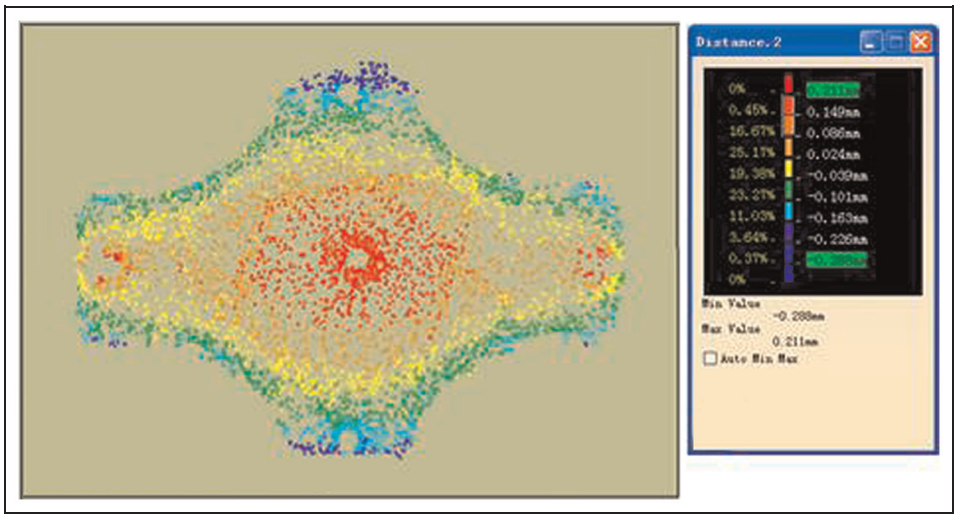



**Figure 8.** Analysis of measured point data of cross-shaped part.

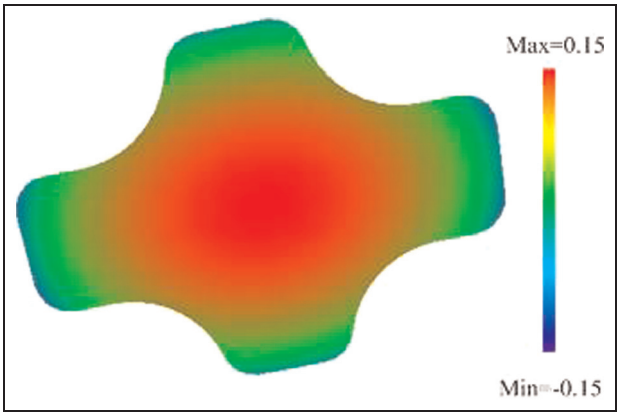



**Figure 9.** Visualization of systematic deviations.

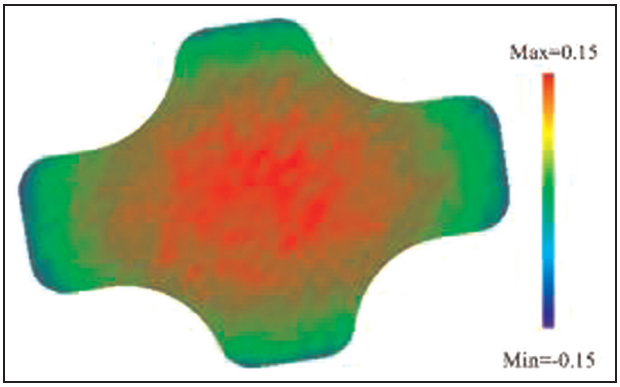



**Figure 10.** Color scale of skin model with both systematic and random errors.

Based on the nominal discrete bottom plane model (Figure 7), the skin model with ellipsoid systematic deviations is simulated (see Figure 9). To visualize the deviations clearly, the limited deviations are reflected by red and blue colors.

Random errors are added to the skin model with ellipsoid systematic errors. The Gibbs method is adopted to simulate the random errors. The skin model with both systematic errors (ellipsoid) and random errors (Gaussian distribution) is created. The representation of the skin model is refined using a color-scale technique (see Figure 10). It shows that the form deviations consider both the ellipsoid shape variety and Gaussian random noises.

## *Statistical shape modeling*

To calculate the mean model considered in the manufacturing process, a training set is designed with 10 models obtained using FE analysis (FEA) method.[32] The relationships among these 10 samples are established by landmark techniques. In our case, each landmark corresponds to a unique grid marked as $(i, j)$. The mean point $p$ is served as a center of a corresponding grid (see Figure 11).

Based on the dimensional scale and the coordinate reference system of the FEA technique, all the samples are aligned using the registration algorithm. Figure 12 shows the positions of all the samples reflected by a different color.

After aligning the samples, the mean model can be calculated using equation (4). Using the same process, the mean model of the training set can be obtained. These samples are simulated by the approach proposed in the "Skin model simulation" section.

Based on the PCA technique, the deviation between the mean model and each sample can be calculated using equation (5). The influence of each component can be deduced. According to the different kinds of mean models, the new skin models can be predicted based on equation (9) (Figure 13). This process is able to enrich the property of skin model, which can combine information from different design means, even manufacturing and inspection domains.

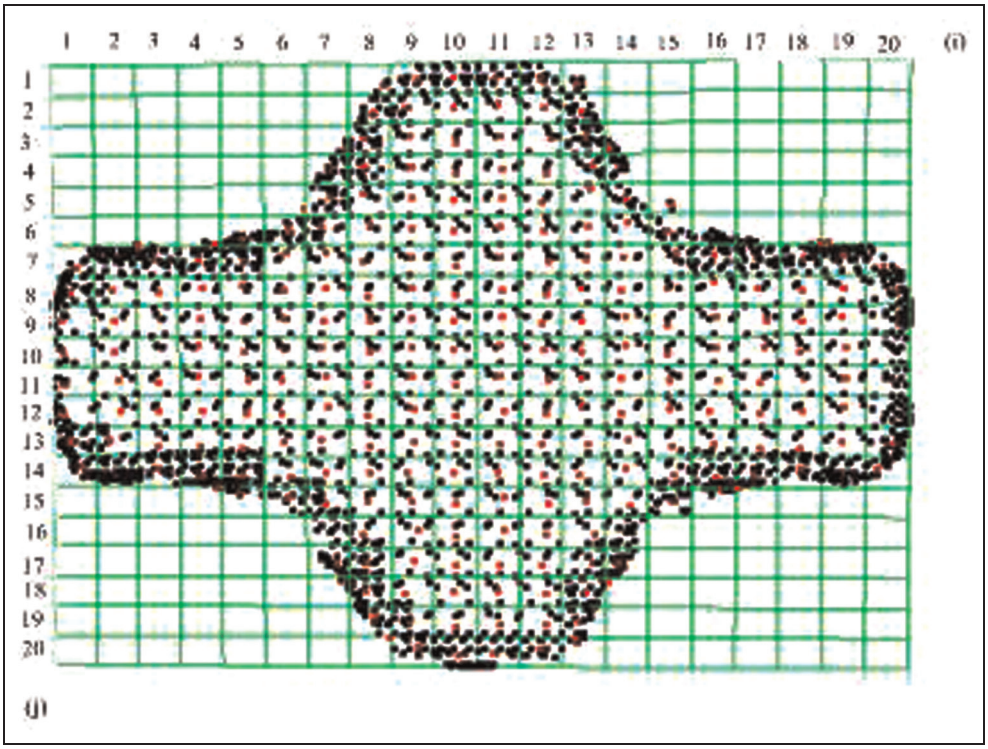



**Figure 11.** Landmarks arrangement.

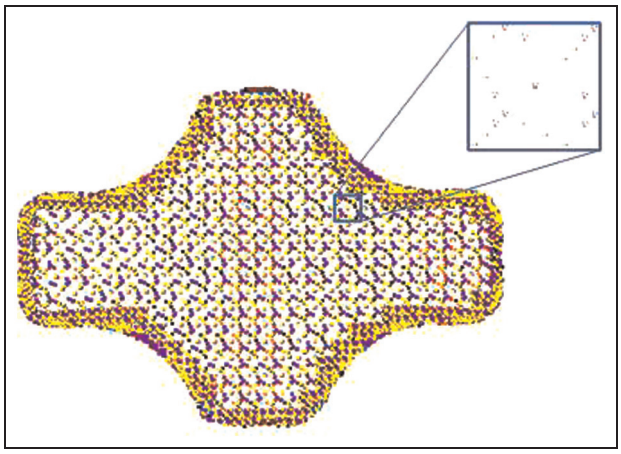


**Figure 12.** Alignment of the training set.

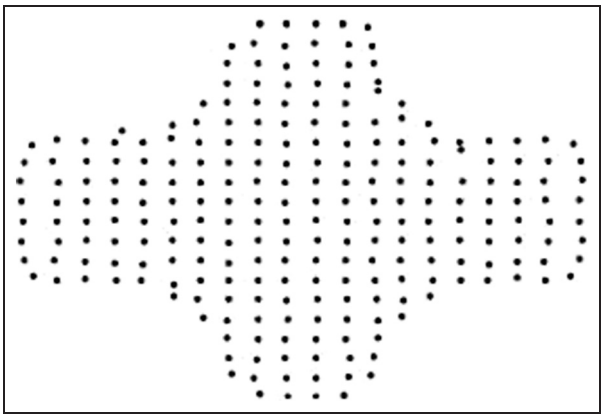


**Figure 13.** Predicted skin model with $\boldsymbol{b}_1 = -2\sqrt{\lambda_1}$.

## Conclusion

Skin model simulation is one of the most critical issues in GPS and GeoSpelling domain. This article proposed to develop methods to shape the skin models with random and systematic deviations. Based on the hypothesis that the random deviations follow the normal distribution, the MCMC method is developed to generate the skin models with discrete representations. A new skin model simulation method combined both a global-modeling approach based on PCA, and a local-modeling approach based on augmented Darboux frame is considered. The local–global modeling approach enables the simulation of both random and systematic deviations when considering geometric constraint requirements, tolerance specifications, and manufacturing. In addition to discrete shape modeling for skin model representation and simulation, the concept of the mean skin model and its robust statistics are also introduced in this work. A new method based on statistic shape models is developed for skin model simulation and analysis. The contribution of this study to the industry is that it can enrich skin models with different influencing factors (such as temperatures, materials, stress, etc.).

Using a case study based on a cross-shaped sheet metal part, the results of the skin model simulations and statistical analysis are shown, and the performances

of the simulations are discussed. The obtained results show the performance of this new approach.

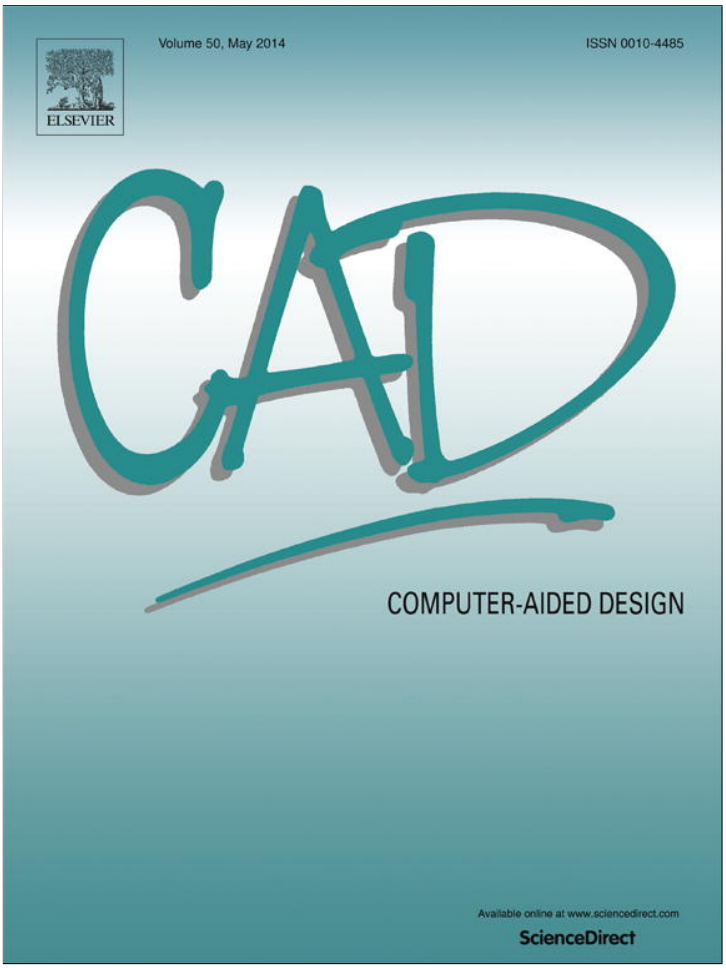
## Funding

The authors would like to thank China Scholarship Council (CSC) for its research funding.

## References

1. Srinivasan V. Mathematical theory of dimensioning and parameterising product geometry. *Int J Prod Lifecycle Manag* 2005; 1(1): 70–85.
2. Hans-Jürgen VM. Evaluation of uncertainty in measurements—problems and tools. *Opt Laser Eng* 2002; 38(3–4): 185–206.
3. Dantan JY, Anwer N and Mathieu L. Integrated tolerancing process for conceptual design. *CIRP Ann Manuf Techn* 2003; 52(1): 135–138.
4. Hillyard RC and Braid IC. Analysis of dimensions and tolerances in computer-aided mechanical design. *Comput Aided Design* 1978; 10(3): 161–166.
5. Requicha AAG. *Representation of tolerances in solid modeling: issues and alternative approaches*. New York: Plenum Publishing Corporation Press, 1984, pp.3–22.
6. Bourdet P. *Contribution a la Mesure Tridimensionnelle: Modele d'ideentification des surfaces, Metrologie fonctionnelle des pieces mecanniques, correction geometrique des machines a mesurer tridimentionnelles*. These d'Etat, Nancy, France, 1987.
7. Jayaraman R and Srinivasan V. Geometric tolerancing I: virtual boundary requirement. *IBM J Res Dev* 1989; 33(2): 90–104.
8. Srinivasan V and Jayaraman R. Geometric tolerancing II: conditional tolerance. *IBM J Res Dev* 1989; 33(2): 105–122.
9. Etesami FA. Mathematical model for geometric tolerances. *J Mech Design* 1993; 115(2): 81–86.
10. Shah JJ, Yan Y and Zhang BC. Dimension and tolerance modeling and transformations in feature based design and manufacturing. *J Intell Manuf* 1998; 9(5): 475–488.
11. Roy U, Sudarsan R, Sriram RD, et al. Information models for Design Tolerancing: From Conceptual to the Detail Design, ASME, DETC99 Conference, Las Vegas, Nevada, September, 1999.
12. Ballu A and Mathieu L. Univocal expression of functional and geometrical tolerances for design, manufacturing and inspection. In: *Proceedings of the 4th CIRP seminar on computer aided tolerancing, 4th CIRP Seminar*, Tokyo, Japan, April 5–6, 1995; London: Chapman & Hall, 1996, pp.31–46.
13. ISO 17450-1. Geometrical product specifications (GPS)—general concepts—part 1: model for geometrical specification and verification, 2005.
14. Xu XL. *Study on the theories and methods of functional tolerancing based on new GPS*. PhD Thesis, Zhejiang University, China, 2008.
15. Naylor B. Computational representations of geometry, *SIGGRAPH'96 Course Notes*, 1996.
16. Shapird V. Solid modeling. Technical Report, University of Wisconsin—Madison, Madison, WI, 2001.
17. Johnson RH. *Dimensioning and Tolerancing, Final Report, R84-GM-02-2, CAM-I*. Arlington, TX, 1985; Computer Aided Manufacturing-International, 1985.
18. Requicha AAG and Chan S. Representation of geometric features, tolerances and attributes in solid modelers based on constructive solid geometry. *IEEE J Robot Autom* 1986; 2(3): 156–165.
19. Gossard DC, Zuffante RP and Sakurai H. Representing dimensions, tolerances and features in MCAE systems. *IEEE Comput Graph* 1988; 22(1): 51–59.
20. Zhang M, Anwer N and Mathieu L. A unified geometrical product specification and verification model interpreted by discrete geometry. In: *Proceedings of the IDMME virtual concept international conference*, Bordeaux, France, October 20–22 2010.
21. Kurfess TR and Banks DL. Statistical verification of part geometry. *Comput Aided Design* 1995; 27(5): 353–361.
22. Yang TH and Jackman J. Form error estimation using spatial statistics. *J Manuf Sci E: T ASME* 2000; 122: 262–272.
23. Samper S and Formosa F. Form defects tolerancing by natural modes analysis. *J Comput Inf Sci Eng* 2007; 7: 44–51.
24. Caskey G, Hari Y, Hocken R, et al. Sampling techniques for coordinate measuring machines. In: *Design and manufacturing systems conference*, January 9–11, 1990; Austin, TX, 1991, pp.779–786.
25. Zhang M, Anwer N, Mathieu L, et al. A discrete geometry framework for geometrical product specifications. In: *Proceedings of the 21st CIRP design conference*, Kaist, Korea, March 27–29, 2011, pp.142–148.
26. Wang P and Du ZM. Simplified engineering mold of normal distribution function. *Mech Res Appl* 2007; 20(2): 31–36.
27. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philos Mag* 1901; 6(2): 559–572.
28. Kurokawa S and Ariura Y. Evaluation of shot penned surfaces using characterization technique of three-dimensional surface topography. *J Phys Conf Ser* 2005; 13: 9–12.
29. Ferrie FP, Lagarde J and Whaite P. Darboux frames, snakes, and super-quadrics: geometry from the bottom up. *IEEE T Pattern Anal* 1993; 15(8): 771–783.
30. Cootes TF and Taylor CJ. Statistical models of appearance for medical image analysis and computer vision. In: *Proceedings of the SPIE medical imaging*, San Diego, CA, February 17–22, 2001; In image Processing, pp.236–248.
31. Durrleman S, Pennec X, Trouvé A, et al. Statistical models on sets of curves and surfaces based on currents. *Med Image Anal* 2009; 13(5): 793–808.
32. Stockinger A, Wittmann S, Martinek M, et al. Virtual assembly analysis: standard tolerance analysis compared to manufacturing simulation and relative positioning. In: *Proceedings of the 11th international design conference DESIGN*, Dubrovnik, Croatia, May 17–20, 2010, pp.1421–1430.

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.




This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

http://www.elsevier.com/authorsrights

Author's personal copy

Computer-Aided Design 50 (2014) 1–15

Contents lists available at ScienceDirect

Computer-Aided Design

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cad

# Skin Model Shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical engineering☆

Benjamin Schleich [a,*], Nabil Anwer [b], Luc Mathieu [b], Sandro Wartzack [a]

[a] Chair of Engineering Design KTmfk, Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nürnberg, Germany

[b] Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisee LURPA, Ecole Normale Superieure de Cachan, France

## HIGHLIGHTS

- We explain the core concept and fundamentals of Skin Model Shapes.
- Skin Model Shapes are Skin Model representatives from a simulation perspective.
- Approaches for the Skin Model Shape generation in discrete geometry are highlighted.
- Overview over applications for Skin Model Shapes in mechanical engineering is given.

## ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 17 April 2013
Accepted 6 January 2014

*Keywords:*
Geometric variations management
Computer aided tolerancing
Geometric product specification
Skin Model
Shape modelling
Shape representation

## ABSTRACT

Geometric deviations are inevitably observable on manufactured workpieces and have huge influences on the quality and function of mechanical products. Therefore, many activities in geometric variations management have to be performed to ensure the product function despite the presence of these deviations. Dimensional and Geometrical Product Specification and Verification (GPS) are standards for the description of workpieces. Their lately revision grounds on GeoSpelling, which is a univocal language for geometric product specification and verification and aims at providing a common understanding of geometric specifications in design, manufacturing, and inspection. The Skin Model concept is a basic concept within GeoSpelling and is an abstract model of the physical interface between a workpiece and its environment. In contrast to this understanding, established models for computer-aided modelling and engineering simulations make severe assumptions about the workpiece surface. Therefore, this paper deals with operationalizing the Skin Model concept in discrete geometry for the use in geometric variations management. For this purpose, Skin Model Shapes, which are particular Skin Model representatives from a simulation perspective, are generated. In this regard, a Skin Model Shape is a specific outcome of the conceptual Skin Model and comprises deviations from manufacturing and assembly. The process for generating Skin Model Shapes is split into a prediction and an observation stage with respect to the available information and knowledge about expected geometric deviations. Moreover, applications for these Skin Model Shapes in the context of mechanical engineering are given.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

The need for geometric variations management is an important issue in design, manufacturing, and all other phases of the product life cycle [1]. The main reason is, that even though modern manufacturing processes achieve steadily increasing accuracy, geometric deviations are observable on every manufactured part. Two main axioms cover these geometric deviations, namely the axiom of manufacturing imprecision and the axiom of measurement uncertainty [2,3]. Geometric deviations have huge influences on the functional behaviour as well as the customers' quality perception of the product. Thus, for quality-aware companies it is eminent to control and to manage these geometric deviations along the product life-cycle. In this context, geometric dimensioning and tolerancing (GD&T) during product development is the first step in geometric variations management. It aims at ensuring an adequate product quality level considering tolerance-related manufacturing and inspection costs by setting limits for manufacturing-caused geometric imperfections. In this regard, the basic tolerancing tasks in design are tolerance specification, tolerance allocation, and tolerance analysis [4].

☆ This paper has been recommended for acceptance by Nickolas S. Sapidis.

* Corresponding author. Tel.: +49 0 9131 85 23220.
*E-mail address:* schleich@mfk.fau.de (B. Schleich).

0010-4485/$ – see front matter © 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.cad.2014.01.001

Author's personal copy



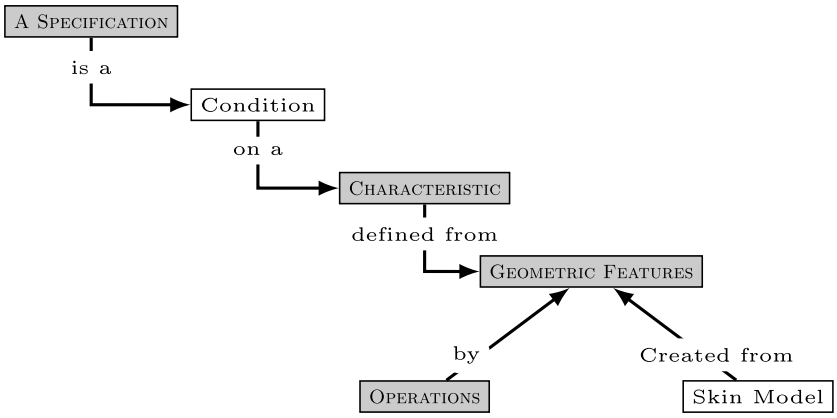



**Fig. 1.** Definition of a specification following [22].

Nowadays, computer aided tools support the product developer in these activities for geometric product specification and tolerancing. In the context of Computer-Aided Tolerancing (CAT), various models for the representation of dimensions and geometric tolerances have been developed, such as vectorial tolerancing [5], the model of technologically and topologically related surfaces (TTRS) [6], the Direct Linearization Method (DLM) [7], Tolerance-Maps [8], or the Deviation Domain [9] based on the Small Displacement Torsor (SDT) [10]. In the past, these models have mainly been used for assembly-oriented tolerance analysis, i.e., analysing the effects of part tolerances on assembly gaps and clearances, rather than for functional tolerancing [11]. However, there is a growing interest in considering working conditions and operating windows in CAT [12–14]. Though, many of these computer models for tolerance simulation and analysis disregard environmental impacts and different sources of deviations. Furthermore, most of these models make severe simplifications about observable geometric deviations since they are reduced to rotational and translational feature defects [15–17]. Therefore, geometric *tolerances* are modelled instead of geometric *deviations* in a strict sense. This leads to results with large ranges of uncertainty and a discrepancy between the virtual models and the observed reality [16]. Additionally, many of the applied models for CAT are not conform with the standards for geometric dimensioning and tolerancing (GD&T) such as the ISO or the ASME standards [15,13,17–19]. A fact that impedes the use of these systems in product development. Furthermore, the tolerancing tasks in design as well as all other activities of geometric variations management should be incorporated in a complete and coherent tolerancing process [20,21]. As a response to these needs, Ballu and Mathieu [22–24] proposed GeoSpelling as a univocal language, which is common to design, manufacturing, and inspection and allows the communication of geometric information and requirements along the product life cycle. This language has been adopted by the ISO [2] in the standards for the geometric product specification and verification (GPS) recently. A basic concept within GeoSpelling and the ISO standards is the Skin Model concept, which is an infinite model of the physical interface between the workpiece and its environment [16].

These highlighted shortcomings of most models for computer-aided tolerancing motivate the translation of the Skin Model concept into a discrete geometry framework [25]. The idea behind this framework is to create part representatives with geometric deviations depicted as Skin Model Shapes. By employing computer aided engineering methods for assembly and use, the effects of geometric deviations on assemblability as well as the product's functional behaviour can be analysed. The aim of this paper is providing the foundations behind this discrete geometry framework for CAT and highlighting possible applications. Furthermore, a comprehensive framework for the generation of Skin Model Shapes is proposed. It is structured as follows. In Section 2, GeoSpelling and the Skin Model concept are highlighted. Thereafter, the choice of a discrete geometry representation scheme for the Skin Model operationalization is motivated and furthermore established shape and deviation modelling approaches are reviewed. Following that, the Skin Model Shape simulation process based thereon is explained. Then, applications for Skin Model Shapes in engineering design, manufacturing, and inspection are given. Finally, a conclusion and an outlook are given.

## 2. Skin Model: theoretical review and model conceptualization

Many tasks in tolerancing, manufacturing, and inspection have to be performed to control geometric variations and their consequences on product quality. Thus, a coherent and univocal language for geometric specifications is required, which ensures a coherent and complete tolerancing process [20]. GeoSpelling, as proposed by Mathieu and Ballu [26] and adopted by the standards for geometrical product specification [2], is a response to these needs. It is based on few basic concepts [24] and offers a clear definition of a geometric specification as illustrated in Fig. 1: "A specification is a condition on a characteristic" [27]. This characteristic is defined from one or between several geometric features.

Various operations such as partition, extraction, filtration, association, collection and construction are required to obtain certain ideal or non-ideal geometric features. These operations are described and defined in GeoSpelling [24] and can be applied to the nominal model as well as to the Skin Model [2,28,23]. The *Skin Model concept* comprises the deviations brought in by manufacturing and assembly processes [2,24] and is defined as a "model of the physical interface between the workpiece and its environment" [2,29]. However, there exist different viewpoints on the Skin Model. On the one hand, coming from the workpiece itself, the Skin Model is a model of the physical workpiece surface. Therefore, there is a clear distinction between the workpiece surface in the physical world and its model in the abstract world. On the other hand, coming from the engineering design perspective, the Skin Model is a model of the physical workpiece surface in contrast to the nominal model which is a "simple" model of the intended workpiece not taking into account inevitable geometric deviations. From a technical view, the Skin Model is an infinite model and does not allow identification or simulation since the theoretic workpiece surface comprises an infinite number of points [16]. Therefore, the infinite description is required to be able to consider all kinds of geometric deviations from a macro to a nano scale and to capture these different variations. It is not possible to clearly define geometric specifications and to enable an unambiguous product development process at a conceptual level without the infinite description. However, a finite description has to be available

Author's personal copy



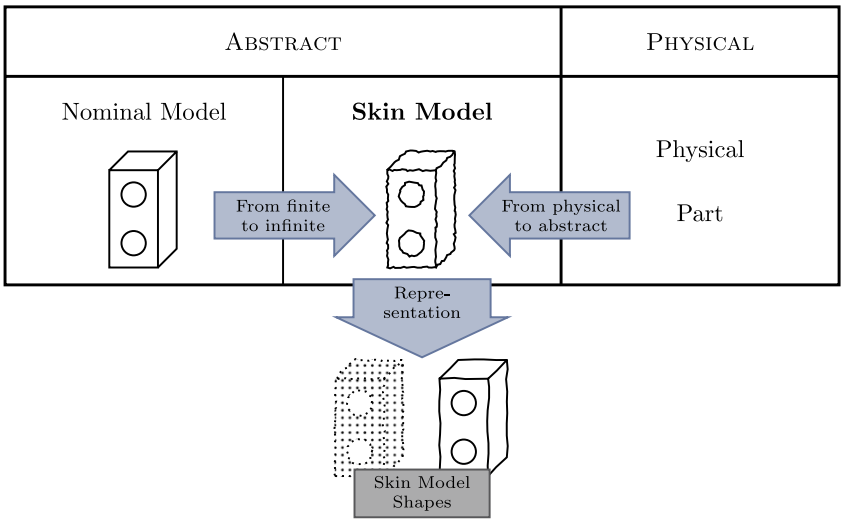



**Fig. 2.** Difference between the nominal model, the Skin Model, and the physical part.

in order to compute and to process the Skin Model [30]. This leads to the idea of Skin Model Shapes, which are particular finite Skin Model representatives comprising a finite number of geometry parameters or points. Thus, a Skin Model Shape is a specific finite Skin Model outcome and comprises deviations from manufacturing and assembly. Due to the random nature of geometric deviations, there may exist an infinite number of possible Skin Model Shapes. If these Skin Model Shapes are sufficiently precise, then all relevant kinds of geometric variations can be captured. Fig. 2 shows the Skin Model Concept from these different perspectives as well as a discrete and a NURBS-based Skin Model Shape.

At a conceptual level, Skin Model Shapes are not related to a specific geometry representation scheme, such as discrete or parametric. Furthermore, they allow the consideration of geometric deviations at different scales from macro to nano. Therefore, the concept of Skin Model Shapes allows a holistic and persistent geometric deviations management process, in contrast to other models, such as the Geometric Deviation Model, which only considers rotational and translational feature defects from manufacturing and assembly and does not take into account other kinds of geometric deviations and deformations arising during usage [31].

In synthesis, the Skin Model is a conceptual tool useful for all persons involved in engineering design, manufacturing, and inspection to imagine the allowable deviations of a part's shape with respect to geometric specifications. However, since the Skin Model itself is an infinite model, an operationalization is required to obtain a finite model ready for simulation [30]. Therefore, particular Skin Model Shapes are generated, which represent the Skin Model. The geometry representation and shape modelling as well as the procedure for obtaining these Skin Model Shapes is explained in the following sections.

## 3. Skin Model Shape modelling

### 3.1. Geometry representation schemes

Modern computer aided simulation tools in engineering applications are highly based on the representation of physical objects and solid modelling [32]. Common representation schemes for three-dimensional models are wire frames, surface models, volume models, and cell models [33]. Discrete Geometry representation schemes such as point clouds and surface meshes can be understood as surface models. They are straightforward and seem adequate for the representation of deviated workpiece representatives. Therefore, a point-based representation is often used for modelling geometric deviations [34,3,35,36]. A point cloud can be defined as a set of vertices in a three-dimensional coordinate system, which are usually defined by $X$, $Y$ and $Z$ coordinates. Typically, a point cloud is intended to represent the surface of a solid object [28].

The representation of the object's surface by a point cloud offers advantages but also implies some limitations. The point cloud concept is quite simple and involves little conversion problems when using different software tools. Furthermore, point cloud formats are commonly created by 3D scanners in manufacturing and metrology/quality inspection applications. However, point clouds only approximate the surface of the object, but the level of approximation can be adjusted by the point density. A surface mesh of the object can be created from a point cloud via triangulation. This offers possibilities to approximate the surface of the object for visualization and further processing. Moreover, other surface models can be processed from the point cloud through surface reconstruction methods.

### 3.2. Shape and deviation modelling

The Skin Model is a surface model, which comprises the geometric deviations of manufactured parts. These geometric imperfections of surfaces can be roughly classified into lay, waviness, and roughness [2]. These classes of geometric deviations differ in terms of the relationship between distance and depth of the imperfections [2]. However, this classification is not disjunct.

The described geometric deviations can furthermore be distinguished between systematic and random deviations [37,38]. This classification is based on the experience, that in many manufacturing processes, similar geometric deviations can be observed on every part whereas some geometric deviations can be observed only on a few workpieces. The systematic deviations are deterministic, predictable, and reproducible [28] and may be depending on the manufacturing process, such as products of clamping errors or the machine dynamical behaviour. In contrast to that, random deviations arise from fluctuations of the production process such as tool wear, varying material properties or fluctuations in environmental parameters (temperature, humidity, etc., ...).

Due to these different characteristics, systematic and random geometric deviations should be modelled employing different methods even if they can be classified as the same kind of geometric deviation (e.g. lay or waviness). Therefore, various mathematical approaches for generating and reproducing observable

Author's personal copy



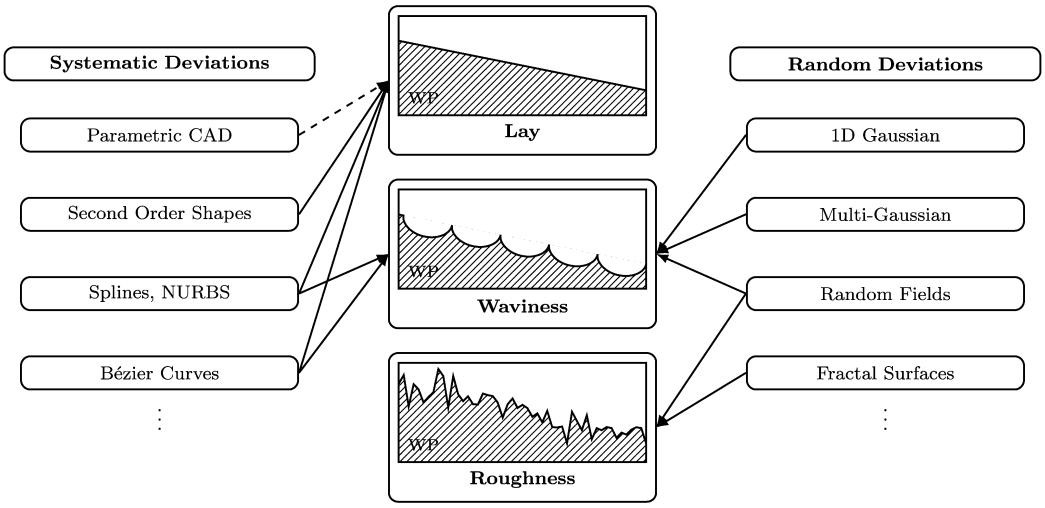



**Fig. 3.** Overview over methods for the modelling of geometric imperfections.

geometric deviations have been proposed, such as employing basic functionalities of parametric computer aided design (CAD) systems [39], using Bézier curves, Splines and NURBS [40], generating systematic deviations by second order shapes [3,34] or modal shapes [41], employing sampling methods such as the Gibbs sampling [3,34], or applying random fields [35,36,42,43]. Furthermore, the concept of fractals is often considered for describing the roughness of surfaces [44–46]. However, surface roughness plays a minor role in most tolerancing considerations. An overview over these methods for modelling geometric imperfections can be seen from Fig. 3.

These approaches for shape and deviation modelling can be applied to a single part feature or to a group of part features. However, these part features can be extracted from the nominal model by the GeoSpelling partition operation or other segmentation techniques [47–49]. Furthermore, after the approaches for deviation modelling have been applied to all relevant part features, Skin Model Shapes can be obtained by collecting these features. By employing this procedure to several workpieces, also whole assembly groups can be modelled.

In this regard, the scalability is an important property of Skin Model Shapes. Different shape and deviation modelling approaches can be applied to the whole Skin Model Shape or just to local features. In this manner, various kinds of geometric deviations can be captured.

However, depending on the shape or deviation modelling approach, points on the edges have to be smoothed in order to limit their deviations when collecting the independently modelled features. For this purpose, for example Laplacian Smoothing can be employed [50].

### 3.3. Visualization of geometric deviations

Skin Model Shapes are Skin Model representatives which comprise various kinds of geometric deviations. However, in order to extract valuable information from these Skin Model Shapes in engineering design, visualization techniques have to be employed, which illustrate geometric deviations and make them visible.

Coming from a point-based geometry representation, a straightforward idea for the visualization of geometric deviations of Skin Model Shapes is to determine the distances between the points of the nominal model and the Skin Model Shape. These distances have then to be converted to a RGB colour scale. Furthermore, the point distances may be weighted according to their spatial direction, for example in the direction of the vertex normal. For this purpose, the point distances between the nominal model and the Skin Model Shape are only computed in the local vertex normal direction. These local vertex normals can also be used to determine a deviation volume, which is composed by the vertex normals of the nominal model and those of the Skin Model Shape. Indeed, this approach should not be confused with other volume visualization methods, which are e.g. based on a voxelization [51].

The aforementioned visualization approaches build on a point-based representation of Skin Model Shapes. However, mesh-based representations are common in many engineering applications. In order to visualize geometric deviations employing such representations, a suitable approach is the computation of the distances between the centre of gravity of the mesh elements (triangles or polygons) of the nominal model and the Skin Model Shape. These centre of gravity distances are then also converted to a RGB colour scale and the mesh elements are filled according to these colours.

Fig. 4 shows an identical Skin Model Shape of a crank shaft where the geometric deviations are visualized by a vertex normal technique, by a deviation volume approach and a mesh-based visualization.

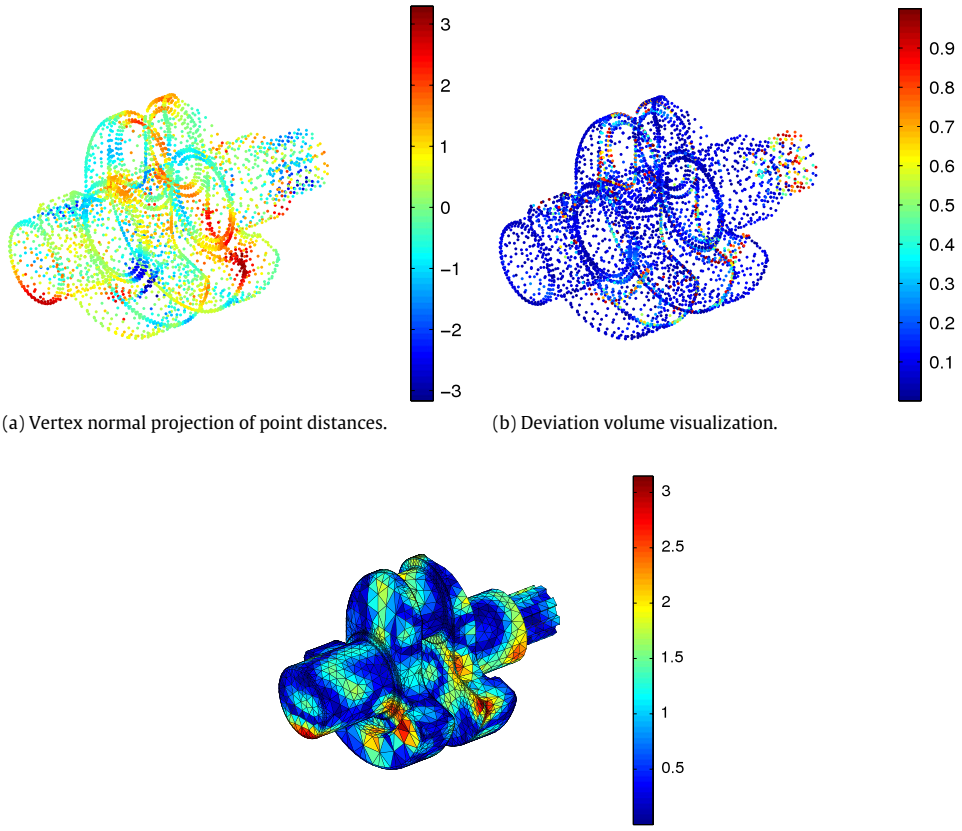
## 4. Skin Model Shape simulation

As mentioned above, the operationalization of the Skin Model concept into a discrete geometry framework is highly based on the generation of realistic representatives of the workpieces showing observable geometric deviations. These generated Skin Model Shapes can then be used in various engineering simulations, such as assembly analysis or tolerance simulations for predicting the later product behaviour. For this purpose, the Skin Model Shape simulation approaches should incorporate all available information about the actual shape and dimensions as well as the expectable geometric deviations of the workpiece. Hence, it seems appropriate to split the process of Skin Model Shape simulation in two phases regarding the current status in product development and to develop a Skin Model Shape simulation approach for each of these two stages:

- In early engineering design stages, geometric deviations of the relevant part are not yet observed. Therefore, assumptions on systematic and random deviations should be incorporated for predicting Skin Model Shapes. This stage may be referred to as the "*Prediction Stage*".

Author's personal copy






(a) Vertex normal projection of point distances.

(b) Deviation volume visualization.

(c) Mesh-based visualization.

**Fig. 4.** Visualization techniques for Skin Model Shapes.

- During later design stages, manufacturing process simulations and even prototypes of the part may be available. Thus, these observations should be taken into consideration and possible outcomes of the production process based on few samples should be simulated. This stage may be referred to as the "*Observation Stage*" accordingly.

The required input information for both the Skin Model Shape simulation approach during the prediction and the observation stage can be seen from Fig. 5.

### 4.1. Skin Model Shape simulation during the prediction stage

In general, the generation of Skin Model Shapes in early design stages builds up on the nominal model (e.g. provided by CAD systems). The geometric data are then enhanced with information about the systematic deviations, which are likely to occur through a certain production process. Following that, random deviations are added to the model. The highlighted shape modelling techniques from Section 3.2 are employed for both systematic and random deviations.

In this regard, similarities and differences between the Skin Model Shape simulation approach during the Prediction Stage and the generation of reference data sets for acceptance and reverification tests of coordinate measurement machine software as standardized in the ISO and ASME standards [52,53] can be observed. These standards propose the generation of reference data sets based on the nominal range of a feature, to which form deviations are added by deforming the nominal feature range by Fourier series with random parameters. Thereafter, nominal points within the nominal feature range are sampled, which are projected onto the deformed feature. Finally, the resulting form deviations are scaled according to reference values and Gaussian white noise is added to the sample points in order to consider scanning errors. As can be seen, similarly to the Skin Model Shape simulation approach during the Prediction Stage, geometric deviations are added to the nominal model even if this is performed by continuous Fourier series methods and not employing shape modelling approaches for discrete geometry representations. However, no differentiation is made between systematic deviations and random deviations, since only random deviations are considered for the acceptance and reverification tests. Furthermore, the measurement uncertainties due to scanning errors are respected by Gaussian white noise, which are not considered in the Skin Model Shape simulation.

The Skin Model Shape simulation approach for the prediction stage is illustrated in Fig. 6.

#### 4.1.1. Modelling systematic deviations

Among the highlighted approaches for modelling systematic deviations in Section 3.2, quadric shapes (also depicted as quadrics or second order shapes) seems adequate. This is because most observable systematic deviations can be explained by a combination of quadric surfaces [3]. Second-order algebraic surfaces are described by the general equation:

$$0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d. \quad (1)$$

The systematic deviations expressed by these second order shapes can be included in the Skin Model Shapes for example in the direction of the vertex normal.

The procedure of describing systematic deviations by second order shapes can be summarized as follows:

- Choose a second order shape or an interference of second order shapes that represent the expected systematic deviation best.

Author's personal copy



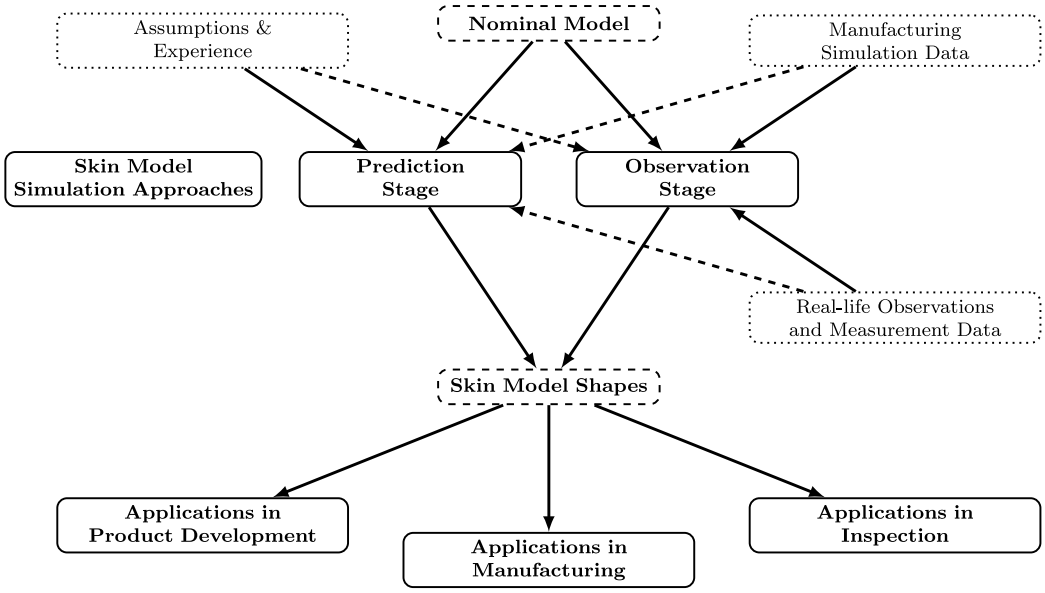



**Fig. 5.** Comprehensive framework for Skin Model Shape simulation.

- The systematic deviation $h_{P_i}$ needs to be computed for every point $i$ of the Skin Model and added to it, so that the new point coordinates result to:

$$\hat{\boldsymbol{P}}_i = \boldsymbol{P}_i + h_{P_i}\boldsymbol{n}_i \tag{2}$$

  where $\boldsymbol{P}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ are the initial coordinates of the point $i$ (nominal model) and $\boldsymbol{n}_i = [a_i \ b_i \ c_i]^T$ is the chosen deviation direction for point $i$ (e.g. the vertex normal).
- The point coordinates $\hat{\boldsymbol{P}}_i = [\hat{x}_i \ \hat{y}_i \ \hat{z}_i]^T$ now describe the nominal model with systematic geometric deviations.

However, in early product development stages, the manufacturing process may not even be known or decided. In this case, no sufficient assumptions about the expected systematic deviations can be made. Therefore, the step of modelling systematic deviations has to be passed in the procedure of Skin Model Shape simulation. Then the Skin Model Shapes consist only of random deviations, which can be generated by the following approaches.

#### 4.1.2. Modelling random deviations

Different approaches for modelling random deviations can be found in the literature such as the 1D-Gaussian method [34], the Multi-Gaussian method [34] and random fields [42]. Following the 1D-Gaussian method, each point is deviated along the estimated vertex normal direction, where the amounts of deviation are given by independently distributed Gaussian random variables. In contrast to that, the Multi-Gaussian Method deviates each point following a spatial random vector in three-dimensional space, which is generated by a trivariate Gaussian distribution. However, a main drawback of both methods is, that they model geometric deviations independently for points, that are close to each other. This may result in unrealistic shapes, since it is expected, that the deviations of adjacent points are less volatile than for points, that lie afar from each other. The random field method is an approach to sampling spatially correlated random variables and hence overcomes this shortcoming.

Apparently, the random field theory offers possibilities to describe the random deviations within a Skin Model Shape generation and simulation process. Therefore, this section highlights the procedure of random deviation generation by random fields for the Skin Model Shape simulation.

Over the past decades, Random Field Theory has become more and more popular in many research areas [54,55,42], because it offers a framework for the expression and representation of spatial random processes. Random fields are also used in structural mechanics to model environmental loads and random deviations in geometry [42]. Adler [54] defines a random field as follows. Given a parameter space $T$, a stochastic (or random) process $f$ over $T$ is a collection of random variables

$$\{f(t) : t \in T\}.$$

If $T$ is a set of dimension $N$, and the random variables $f(t)$ are all vector valued of dimension $d$, then the vector valued random field $f$ is called a $(N, d)$ random field.

Thus, a random field is a generalization of a stochastic process in this spirit, that the input variables are not unidimensional (e.g. "time") but multidimensional (e.g. coordinates). It can be described by its finite-dimensional distributions and is called isotropic if the covariance function is a function of the Euclidean distance only.

In many applications, a discretization, i.e. a transformation of a continuous to a discrete model, of the random field has to be performed. Hence, the continuous function of the random field $f(t)$ needs to be approximated by a vector $\boldsymbol{f}(t)$. Various discretization methods for random fields can be found such as the series expansion method which exactly represents the random field as a series involving random variables and deterministic spatial functions [56]. The approximation is then obtained as a truncation of the series. The series expansion method is an efficient method for the discretization of a random field, since only a comparative small number of random variables is required. However, solving the arising eigenvalue problem can be problematic and is not possible analytically for all autocorrelation functions. Indeed, there are approaches to convert the underlying eigenvalue problem in a matrix eigenvalue problem, where the eigenvalues and eigenvectors of the autocorrelation matrix $\boldsymbol{\rho}$ are determined and the largest eigenvalues are used for the approximation of the random field [57,43]:

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{\mu}(t)$ is the mean vector of the random field, $\boldsymbol{\sigma}(t)$ is the matrix of standard deviations, $\boldsymbol{\zeta}$ is a vector of random variables and $\boldsymbol{A}$ is the so-called transformation-matrix:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{D}$ is a diagonal matrix with the $M$ largest eigenvalues of the autocorrelation matrix on the principal diagonal, $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$, and $\boldsymbol{V}$ is a matrix with corresponding eigenvectors.

Author's personal copy



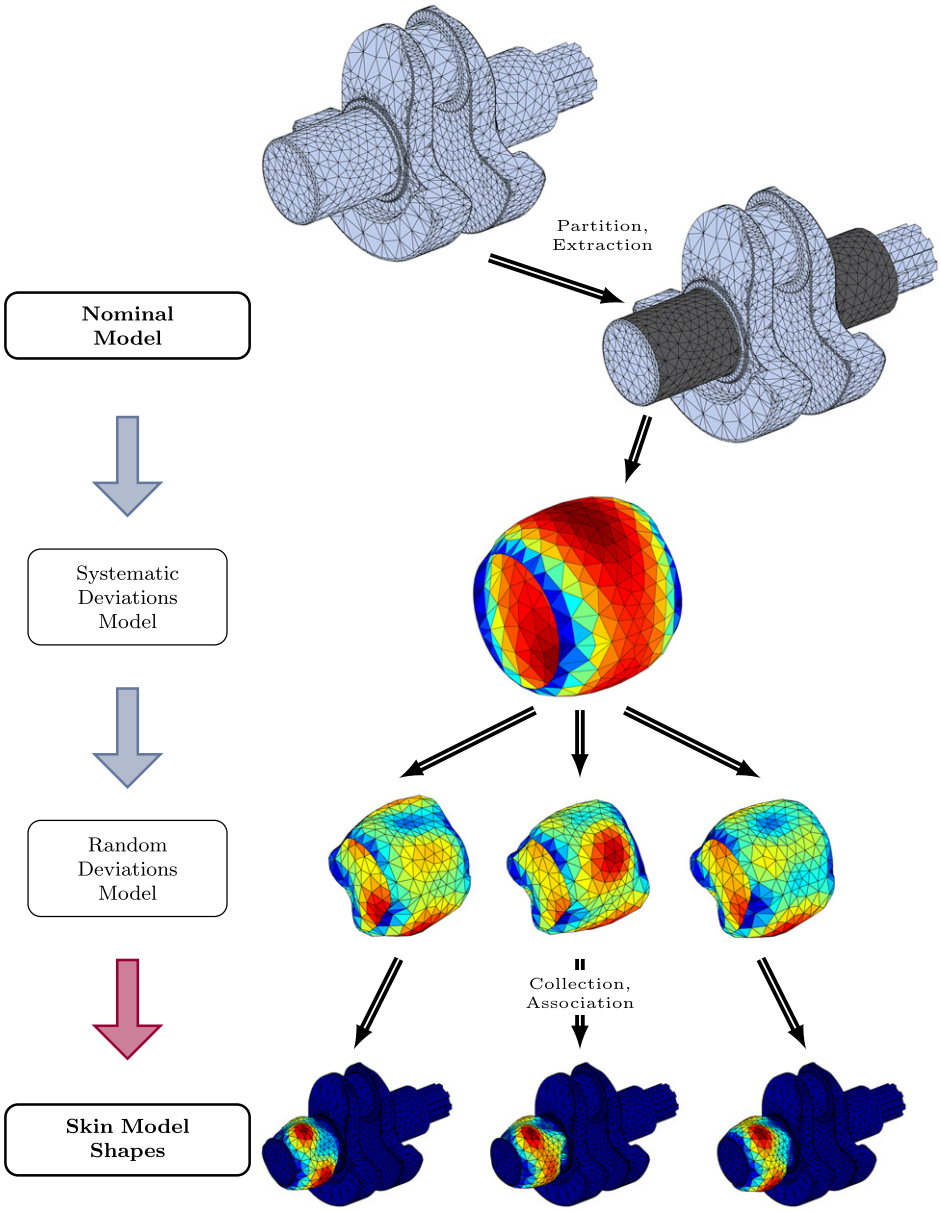



**Fig. 6.** The Skin Model Shape simulation process in the prediction stage.

Since the Skin Model Shapes consist of a discrete number of points, it is obvious that a random field can be used to deviate these points in any direction. Different methods may be used to perform this, but a straightforward idea is to deviate each point in the direction of the local vertex normal. Then, for each point in the Skin Model Shape, one random value per sample has to be generated. Using the series expansion representation of the random field, the procedure is as follows:

- Calculate a correlation matrix $\boldsymbol{\rho}$ using an assumed correlation function $\rho(\cdot)$ and correlation length $l_\rho$, which is a parameter that varies the impact one random variable has on the neighbouring random variables.
- Determine $\boldsymbol{D}$, a diagonal matrix with the $M$ largest eigenvalues $\lambda_j$ of $\boldsymbol{\rho}$ on the principal diagonal, and $\boldsymbol{V}$ a matrix containing the corresponding eigenvectors. Compute the transformation matrix $\boldsymbol{A}$ as:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

- Compute the vertex normal vector $\boldsymbol{n}_i$ for every point $i$ of the Skin Model.
- The vector of random values $\boldsymbol{\chi}$ is then given by:

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\xi}, \tag{6}$$

  where $\boldsymbol{\mu}$ is the mean vector of the random field, which is usually a vector containing only zeros, since the mean deviation is zero for every point, and $\boldsymbol{\sigma}$ is the matrix of standard deviations. $\boldsymbol{\xi}$ is a vector of independent random variables with zero mean and unit variance. If we assume a Gaussian random field, then the elements of $\boldsymbol{\xi}$ are Gaussian distributed.
- Add the random deviation to the model with systematic deviations:

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_i = \hat{\boldsymbol{P}}_i + \chi_i\,\boldsymbol{n}_i, \tag{7}$$

  where $\chi_i$ is the $i$th element of $\boldsymbol{\chi}$.
- The point coordinates $\tilde{\boldsymbol{P}}_i = [\tilde{x}_i\ \tilde{y}_i\ \tilde{z}_i]^T$ describe the nominal model with systematic and random geometric deviations.

Author's personal copy



### 4.2. Skin Model Shape simulation during the observation phase

The main idea behind the Skin Model Shape simulation during the observation stage is extracting and generating Skin Model Shapes based on a limited training set of observations gathered from manufacturing process simulations or measurements. These observations comprise systematic and random geometric deviations, which are likely to occur through a certain manufacturing process. For this purpose, methods of Statistical Shape Analysis (SSA) known from computer vision and image interpretation are applied, which are based on adoptions of the Point Distribution Model (PDM) [58] such as the Kernel Density Estimate/Point Distribution Model (KDE/PDM) [59]. Generating new Skin Model Shapes by employing these approaches is based on the procedure of the Statistical Shape Analysis and comprises the following steps [60]:

1. Acquire a training set of observations from manufacturing process simulations or measurement data.
2. Determine the correspondence between the training set if necessary [61–63].
3. Align the training set and correct differences in terms of rotation, scale and location if necessary. For this purpose, e.g. Procrustes Analysis, Generalized Procrustes Analysis and Tangent Space Projection are suitable methods [60].
4. Establish a Statistical Shape Model as for example the point distribution model or an extension of the PDM such as the Kernel Density Estimate/Point Distribution Model [59].
5. Generate Skin Model Shapes based on the employed statistical shape model.

The last step in this procedure may be highlighted in detail in the following for the case of the point distribution model.

The basic idea behind the PDM is to express each shape $\boldsymbol{X}_i$ in the training set as a combination of the mean shape $\overline{\boldsymbol{X}}$, which can be computed easily by:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \tag{8}$$

and the variation of the shape around the mean shape along the main modes of variation:

$$\boldsymbol{X}_i \approx \overline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{b}_i. \tag{9}$$

The main modes of variation $\boldsymbol{\Phi}$ are identified by applying a Principal Component Analysis (PCA) or a non-linear extension of the PCA such as the Kernel PCA (KPCA) or approaches employing autoassociative neural networks to the training set. The scores $\boldsymbol{b}$ can then be found as random variables, which distributions can be estimated by a multivariate Gaussian or using the kernel density estimation (KDE) [61,59]. Skin Model Shapes can then be generated by sampling new scores $\tilde{\boldsymbol{b}}$ from these score distributions via the inverse transform sampling. For this purpose, uniformly distributed random values in the interval [0; 1] are generated and set into the inverse cumulative distribution functions (ICDFs) of the estimated score distributions. The Skin Model Shapes themselves can be obtained by transforming these random score values $\tilde{\boldsymbol{b}}$ by employing Eq. (9):

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \overline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{10}$$

The general procedure of Skin Model Shape generation during the observation stage following this approach is illustrated in Fig. 7.

It should be mentioned, that this procedure also reflects systematic and random geometric deviations of shapes, since the systematic deviations are implicitly included in the mean shape $\overline{\boldsymbol{X}}$ and the random deviations are expressed by the main modes of variation $\boldsymbol{\Phi}$. Furthermore, the representation of the training set in

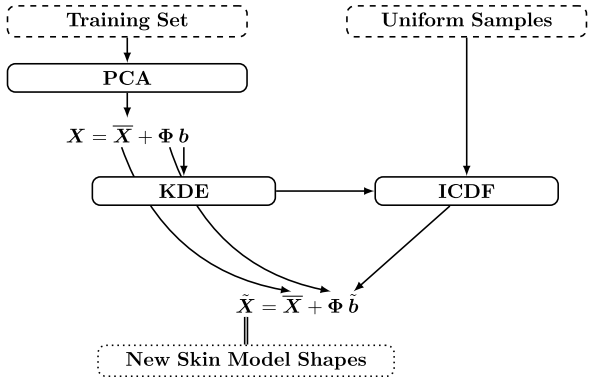



**Fig. 7.** Skin Model Shape generation in the observation phase [64].

Eq. (9) is related to the series expansion representation of random fields.

The overall procedure for the Skin Model Shape simulation during the observation stage is illustrated in Fig. 8.

#### 4.2.1. Parameter estimation for the prediction phase

Information about the random and systematic deviations within the training set can also be extracted to help creating future Skin Model Shapes in early design stages, where assumptions about the correlation structure and the systematic deviations have to be made.

*Systematic deviations.* The systematic deviations can be approximated by a quadratic descriptive model as:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon, \tag{11}$$

which is regressed to the mean shape $\overline{\boldsymbol{X}}$. This quadratic model represents an interference of second order shapes. The resulting coefficients $\beta_{\langle\cdot\rangle}$ can then be used to model the systematic deviation of a new workpiece, which is fabricated using a similar manufacturing process.

*Random deviations.* With respect to random deviations, several parameters have to be identified, such as the correlation length $l_\rho$, the mean $\mu$ and the standard deviation $\sigma$ of the random field. A straightforward approach to identify the global mean $\hat{\mu}$ and variance $\hat{\sigma}^2$ of a Gaussian random field is:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi_i, \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} \left(\chi_i - \hat{\mu}\right)^2, \tag{13}$$

where $\chi_i$ is the $i$th random variable expressing the deviation of the $i$th point in the point cloud. For the estimation of the correlation length $l_\rho$, first of all, the correlation matrix $\boldsymbol{\rho}$ needs to be computed from the samples. The entries $\rho(i,j), i \neq j$ are the correlation coefficients of the random variables $\chi_i$ and $\chi_j$, the entries on the principal diagonal $\rho(i,j), i = j$ are 1. Since the correlation matrix is symmetric, there are $k = \sum_{i=1}^{N} i - N = \frac{N\cdot(N+1)}{2} - N$ correlation coefficients to compute. An approach to estimate the global correlation length as defined by [42] is:

$$l_\rho = \frac{\int_0^\infty \zeta \cdot |\rho(\zeta)| \mathrm{d}\zeta}{\int_0^\infty |\rho(\zeta)| \mathrm{d}\zeta} \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} \zeta_i \cdot |\rho_{s,t}(\zeta_i)|}{\sum_{i=1}^{k} |\rho_{s,t}(\zeta_i)|}. \tag{14}$$

Author's personal copy



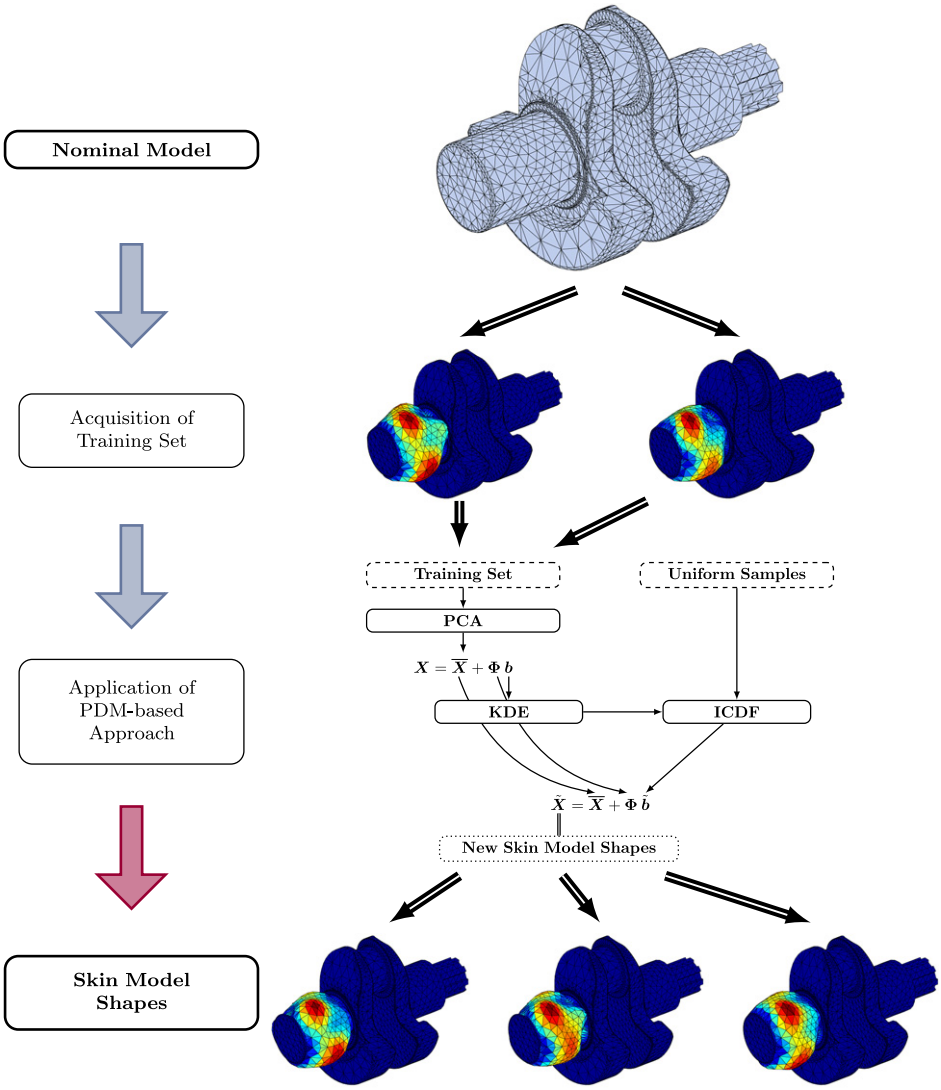



**Fig. 8.** Skin Model Shape Simulation process during the observation stage.

*4.2.2. Required sample shapes in the training set*

The accuracy of the Skin Model Shape simulation approach during the observation phase depends quite obviously on the used training set. However, few research deals with the question of finding an "optimal" training set (size), for which the trade-off between accuracy and costs for the training set acquisition is solved best.

However, as mentioned earlier, in most cases the training set consists either of measurement data or manufacturing process simulation data. In the first case, it would be very helpful to know at least when the adding of new training set samples is no longer expected to increase the accuracy of the approach since every new training set sample requires expensive measuring. In the latter case, the training set size is usually determined by an experimental design which size depends on the factors of the manufacturing process. Even so, the size of the used training set may be increased if it is assumed that the available training samples lead to insufficient results.

However, when performing the PCA as part of the Skin Model Shape simulation process in the observation stage, the sum of all eigenvalues of the covariance matrix is a measure for the variability comprised in the training set. For every new training shape, the growth of variability can therefore be computed. If the growth of variability is expected to be low for every new training shape, then the training set seems to be adequate and no further training shape has to be added.

*4.3. Comparison of the Skin Model Shape simulation approaches*

The highlighted approaches for the generation of non-ideal geometry for Skin Model Shapes in both the prediction and the observation stage enable the designer to generate plausible Skin Model Shapes based on assumptions, manufacturing process simulations or measurement data. However, the methods differ in terms of applicability and required previous knowledge. Therefore, methodical similarities and differences between the approaches are shown.

For the analysis of methodical similarities and differences of the introduced approaches, firstly the basic equations for both methods, (7) and (10), are given:

- The equation for the Skin Model Shape simulation approach during the prediction phase is (7):

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_i = \underbrace{\boldsymbol{P}_i + h_{P_i}\, \boldsymbol{n}_i}_{\hat{\boldsymbol{P}}_i \approx \overline{\boldsymbol{P}}_i} + \chi_i\, \boldsymbol{n}_i. \tag{15}$$

It can be seen, that this approach adds random geometric deviations to the nominal point coordinates $\boldsymbol{P}_i$ with systematic deviations ($h_{P_i}\, \boldsymbol{n}_i$). These systematic deviations are expected ones which apply to every workpiece. Therefore, the nominal model with systematic deviations can be referred to as mean point coordinates $\overline{\boldsymbol{P}}_i$.

Author's personal copy



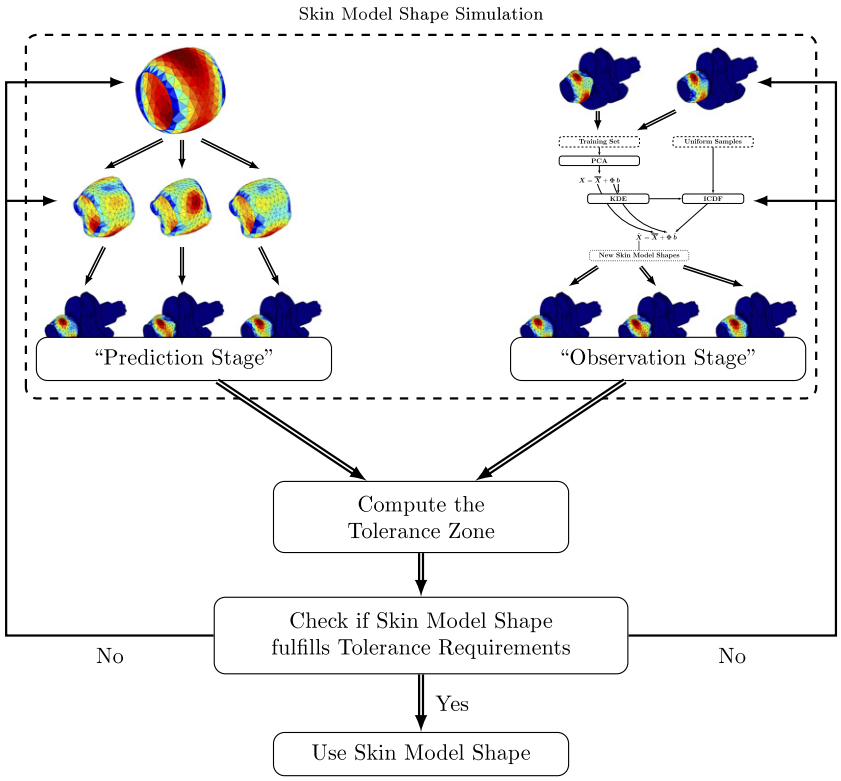



**Fig. 9.** Assessment of Skin Model Shapes with regard to tolerance specifications.

- For the Skin Model Shape simulation approach during the observation phase, the basic equation is (9):

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_i = \overline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{b}_i. \tag{16}$$

  This method also adds random geometric deviations to a mean model based on given observations. Hence, the mean model of the prediction approach $\overline{P}$ should reproduce the mean model gathered from observations $\overline{\boldsymbol{X}}$.

However, the modus operandi differs in both approaches. During the prediction phase, assumptions about the expected systematic and random deviations have to be made. Furthermore, parameter values for the geometric deviations have to be chosen. Though it is possible to estimate these deviations from earlier observations of similar parts and workpieces, these estimates may be uncertain and hence it is not always easy to make realistic assumptions about the later deviations. Thus, this approach requires good knowledge of the underlying mathematical methods, the workpiece itself and the manufacturing processes. Furthermore, the quality of the results is mainly influenced by the designers' skills.

In contrast to that, the procedure of the observation phase approach is straightforward. Based on the observations gathered from manufacturing process simulations or measurement data, the Skin Model Shapes can be generated without further assumptions or parameter settings. Therefore, no deeper expertise or knowledge of the mathematical background of this approach is necessary. Therefore, this approach may be referred to as more robust, since the obtained results do not depend on the user or the designer and their knowledge. However, the quality of the results highly depends on the training set. If the training set is gathered from a poor manufacturing process simulation or from bad measurement data, then this approach also may lead to implausible results.

Both approaches for the Skin Model Shape simulation can be applied to uniformly or non-uniformly distributed shape discretizations. Even the results of the Skin Model Shape simulation approach in the "Observation Stage" do not depend on the mesh density and are not adulterated by an inhomogeneous point distribution. Furthermore, the obtainable Skin Model Shapes do not depend on the grid size of the nominal model or the training shapes. Therefore, different restrictions from engineering design, manufacturing, and inspection on the point distribution and the grid size can be considered. For example, in virtual metrology, the obtainable results for different dimension and form deviation measurements depend on the point sampling strategy and measurement point distribution. These aspects can be considered in the "Prediction Stage" by employing adequate tessellation techniques on the nominal model and in the "Observation Stage" by following these restrictions when acquiring the training set. Therefore, both Skin Model Shape simulation approaches allow a coherent tolerancing process, which covers also the restrictions from metrology.

### 4.4. Constraining Skin Model Shapes

Many potential applications for Skin Model Shapes require the generated shapes fulfilling certain specifications. In order to assure, that the simulated Skin Model Shapes fulfil these requirements, a virtual assessment has to be performed. For this purpose, each simulated Skin Model Shape is checked for conformance with the specifications, and rejected, if the specifications are not met. In this case, a new Skin Model Shape has to be generated. This can be performed by adjusting the parameters for the systematic deviations or by sampling new values for the random geometric deviations in the Prediction Stage, whereas new samples have to be draw from the score distributions or new observations have to be added to the training set in the Observation Stage. The assessment process for tolerance specifications is illustrated in Fig. 9 and highlighted in the following. This comprises the computation of tolerance zones, which limit the allowable zone for toleranced features and help to determine process capabilities or to compute the tolerance propagation. However, also restrictions on the grid size, on the point

Author's personal copy



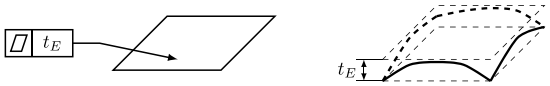



**Fig. 10.** Flatness tolerance zone for a plane feature.

distribution or on further properties of the Skin Model Shapes can be considered. Beside this, the approaches for the Skin Model Shape assessment can also be used in the Observation Stage to qualify all shapes in the training set whether they are obtained by measurement data or manufacturing process simulations and to avoid poor input data for the Skin Model Shape generation.

Although tolerances and tolerance zones for various tolerance specifications can be obtained from Skin Model Shapes, for the sake of comprehension, only the determination of the flatness tolerance zone for a plane feature and the position tolerance zone between two plane features is illustrated in the following. However, in an analogous manner, tolerance zones for various tolerance specifications with or without datum feature can be determined based on Skin Model Shapes.

*4.4.1. Flatness tolerance zone of a plane feature*

The flatness tolerance limits the deviation of surface planes or centre planes as well as the straightness of lines on even planes [2]. All points of a toleranced plane feature are to lie between two parallel planes with the distance $t_E$. This can be seen from Fig. 10. The orientation of the parallel bounding planes has to be chosen such that their distance is at a minimum. In order to compute the flatness tolerance zone for a plane feature with random deviations, the convex hull of the plane is computed [65]. Following that, the distance between the farthest point and the patch are computed for every patch of the convex hull. Finally, the patch of the convex hull with the minimum distance leads to the tolerance zone and the corresponding distance can be interpreted as the flatness tolerance [65]. This is illustrated in Fig. 11. In contrast to other approaches for the flatness tolerance zone computation, which employ associated plane features, the proposed method detects the parallel planes with the minimum flatness tolerance and is therefore conform with tolerancing standards.

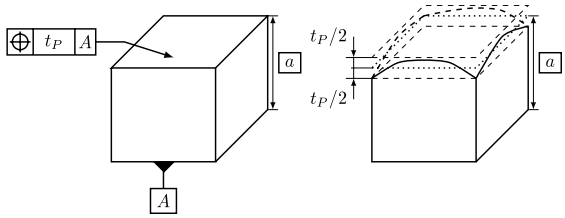



**Fig. 12.** Position tolerance zone for a plane feature.

*4.4.2. Position tolerance zone for a plane feature*

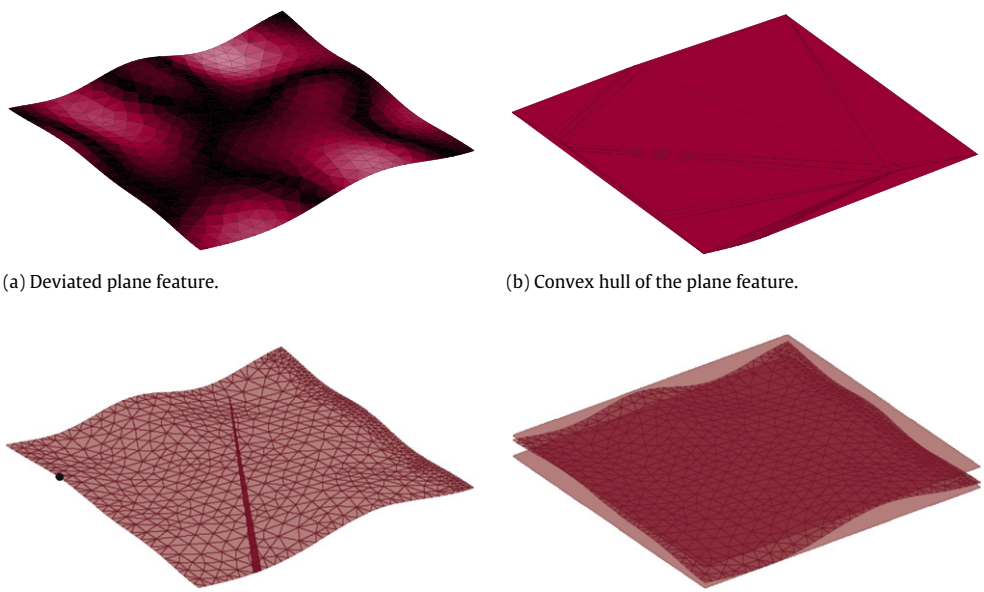
The position tolerance zone for a plane feature is limited by two parallel planes, which are symmetrical around the theoretically exact position, which is in turn defined by datum features. This is illustrated in Fig. 12. For the computation of the position tolerance zone between two plane features, the theoretically exact position of the toleranced plane feature is determined by a translation of the associated datum plane by the theoretical measure. The associated datum plane is obtained by the Principal Component Analysis. The position tolerance zone is then limited by two planes, which are symmetric around the translated associated datum plane. Their distance is determined by calculating the maximum point distance for each point of the Skin Model Shape feature and the symmetric plane. This is shown in Fig. 13.

## 5. Skin Model Shapes in mechanical engineering: applications and perspectives

The Skin Model is a basic concept within GeoSpelling, which serves as a univocal language for all activities in geometric variations management such as engineering design, manufacturing, and inspection. Therefore, potential applications of Skin Model Shapes in each of these three domains in the field of mechanical engineering are discussed in this section.

*5.1. Applications in engineering design and computer-aided tolerancing*

In order to ensure the product function during use, limits for geometric deviations of workpieces and assembly groups have to



(a) Deviated plane feature.

(b) Convex hull of the plane feature.

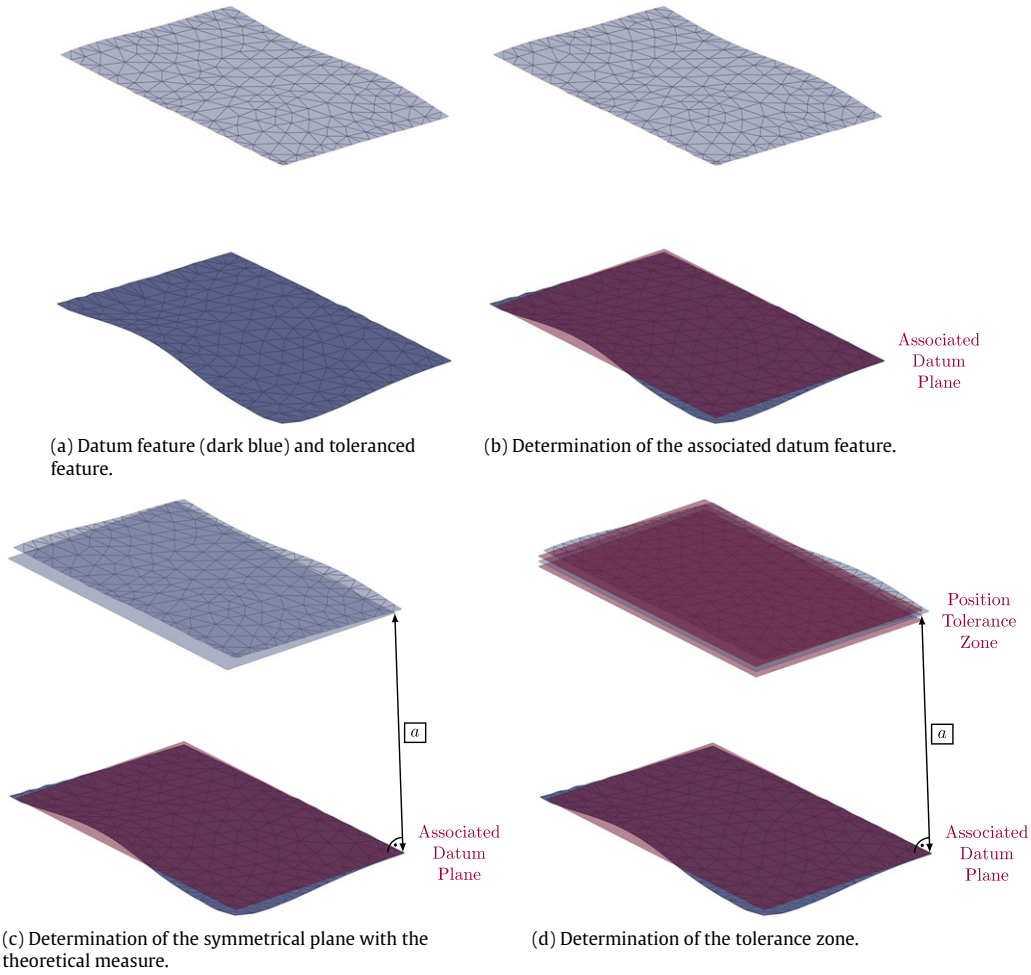
(c) Convex hull patch with minimum point distance.

(d) Flatness tolerance zone.

**Fig. 11.** Flatness tolerance computation for a plane feature.

Author's personal copy






(a) Datum feature (dark blue) and toleranced feature.

(b) Determination of the associated datum feature.

(c) Determination of the symmetrical plane with the theoretical measure.

(d) Determination of the tolerance zone.

**Fig. 13.** Position tolerance zone computation for two plane features.

be specified during product development. However, this task is not trivial and requires a lot of knowledge and experience. In this regard, the operationalization of the Skin Model concept in discrete geometry supports the product developer by visualizing geometric deviations and their effects. For instance, the application of virtual and augmented reality systems in design reviews can be enhanced by considering geometric workpiece deviations [66].

Furthermore, Skin Model Shapes can be used in tolerance simulations. In this regard, simulation models as for example for the relative positioning of non-ideal geometries have been developed [67,68,41]. With the use of these models, Skin Model Shapes can be virtually assembled and the effects of geometric deviations on assembly gaps and clearances can be determined. Furthermore, models for analysing the effects of geometric deviations on the product behaviour during usage can be employed [35].

The assembly between a cube and a block as shown in Fig. 14 serves as an illustrative example. Fig. 14 (d) shows the results of an assembly simulation of two Skin Model Shapes for this example, where the colours indicate the geometric deviations following the mesh-based visualization. For the tolerance simulation, Skin Model Shapes with random deviations have been generated, where the parameters were set to $\rho = 50.0$, $\mu = 0.0$, and $\sigma = 0.1$. The tolerance zones for these shapes have been calculated with the methods described in the previous section. Thereafter, an assembly simulation based on an approach presented by Samper [41] has been performed. Finally, the resulting gap $s$ between the cube and the block is measured. Fig. 15 shows a parallel coordinates plot of the results. It can be seen, that there exists a relation between the gap and the flatness tolerances of both the cube and the block. By adjusting the tolerance requirements of the cube and the block, the effects of the geometric part deviations on the gap $s$ can be regulated. This can also be seen from Fig. 15, where the dimensional tolerances are set to $d_1 = 140 \pm 0.1$; $d_2 = 170 \pm 0.1$, the flatness tolerances to $f_1^1 = f_2^1 = f_1^2 = f_2^2 = f_1^b = f_2^b = 0.3$, and the perpendicularity tolerances to $p_1 = p_2 = 0.5$, which leads to gaps from 29.13 to 29.83.

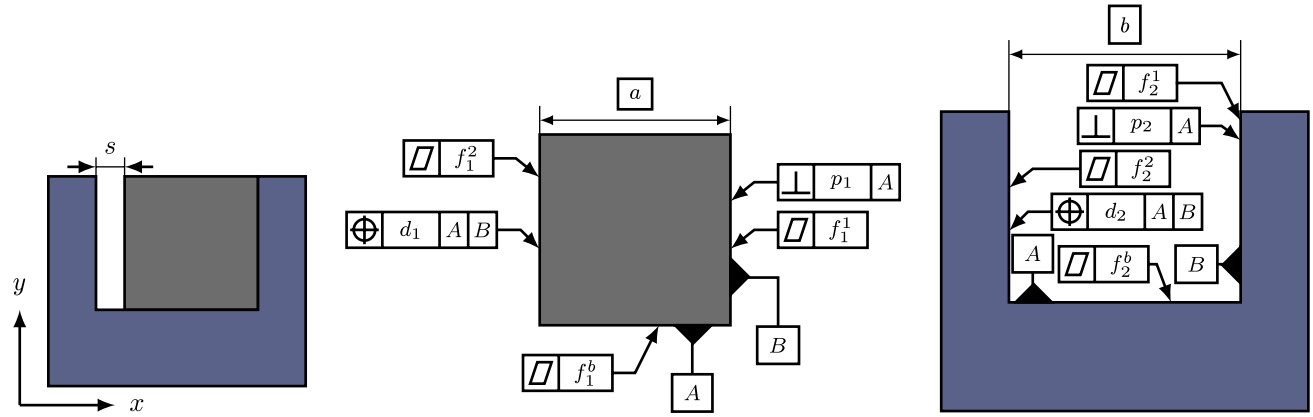
By extending this procedure for systems in motion, also the kinematic behaviour of Skin Model Shapes can be studied, which is part of ongoing research.

### 5.2. Applications in manufacturing and assembly

The number of rejected parts, i.e. parts out of specification, is of high interest in the context of manufacturing process development. In this regard, e.g. the process capability index $c_{pk}$ is a valuable measure for the extent of a process meeting its specification [69]. The determination of the process capability index based on manufacturing process simulations or measurement data can be performed by Skin Model Shapes generated during the observation stage. For this purpose, the Skin Model Shapes can be analysed with respect to specified tolerance requirements as explained in Section 4.4. Based on the gathered results, manufacturing engineers can gain valuable information about critical process parameters and the process capability. Furthermore, based on the

Author's personal copy

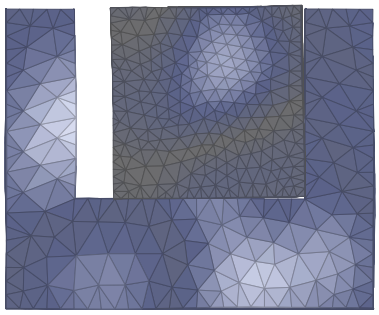





(a) Sketch of the assembly.

(b) Sketch of the cube.

(c) Sketch of the block.



(d) Results of an assembly simulation of Skin Model Shapes.

**Fig. 14.** Case study for the use of Skin Model Shapes in computer-aided tolerancing.

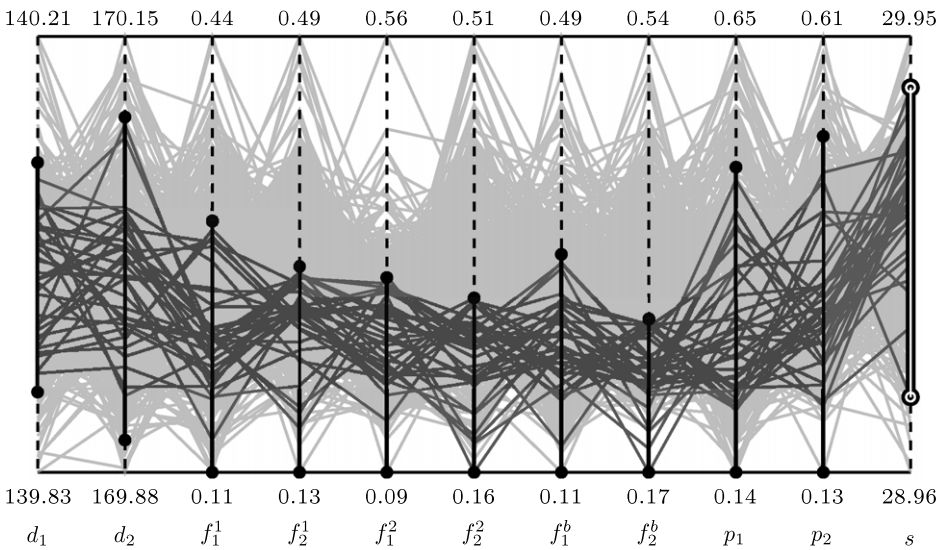



**Fig. 15.** Parallel coordinates plot of the results.

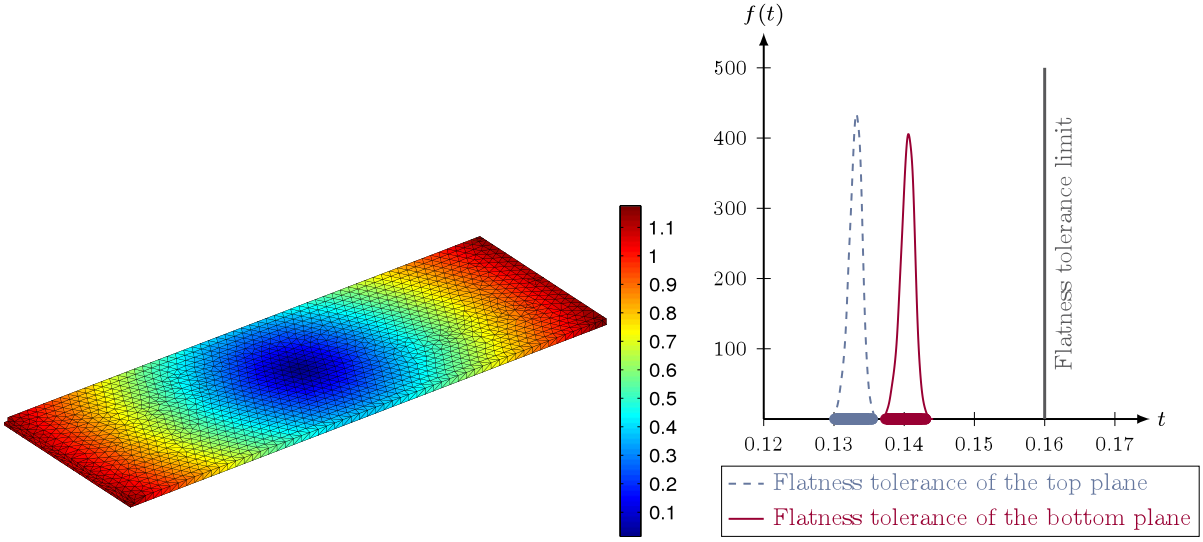
information about the impact of manufacturing process parameters on geometric deviations, the manufacturing process can be optimized and manufacturing costs can be saved. For illustration purpose, Fig. 16 shows the systematic deviations of an injection moulding part due to shrinkage and warpage [64]. Furthermore, the estimated distributions of the flatness tolerance of the top plane (blue, dashed) and the bottom plane (red, solid) are illustrated [36]. It can be seen, that the process is capable with respect to the tolerance specifications. By employing a sensitivity analysis, the effects of manufacturing process parameters on the geometric deviations can also be determined, which helps to identify critical process parameters, which are to be controlled during manufacturing, and to optimize manufacturing processes [64].

### 5.3. Applications in inspection

Tight tolerance requirements lead to increasing costs not only because of cost-intensive manufacturing but also due to additional inspection routines. The optimization of measuring processes is therefore yet another action for costs reductions. In this regard, the operationalization of the Skin Model concept can be used

Author's personal copy






(a) Systematic deviations of an injection moulding part.

(b) Flatness tolerance of the top and the bottom plane feature.

**Fig. 16.** Skin Model Shapes from a manufacturing process simulation [64,36].

to identify critical workpiece features, for which the inspection should be intensified, as well as features, which are not as relevant for the product function and quality. For this purpose, the Skin Model Shapes created during the observation stage can be used to identify workpieces features with a high variability by analysing the statistics of observed geometric deviations. For example, based on the results of the manufacturing process simulation illustrated in Fig. 16, it can be seen, that the centre of the part shows only little deviation compared to the nominal workpiece, whereas the corners and edges are more prone to geometric deviations induced by shrinkage and warpage. This information helps to optimize inspection plans and to reduce measuring expenditure.

Moreover, the results gained from measurements can be returned to design in order to adjust the parameters for the Skin Model Shape generation in the Prediction Stage and to verify tolerance analysis and other computer aided engineering methods. Furthermore, based on the Skin Model concept, a straightforward comparison for conformance is anchored in the standards for geometric specification and verification, which simplifies the persistent process for GPS.

## 6. Conclusion and outlook

The need for a univocal language for geometrical product specification considering all steps of the product life-cycle such as design, manufacturing, and inspection is inevitable and has led to the development of GeoSpelling and its consideration in international standards for GPS. The Skin Model concept is a key idea behind this language. Beside this, most models for computer aided tolerancing proposed by researchers and used in industry do not fully conform with the GPS standards. Moreover, most of them make severe assumptions on observable geometric deviations and can therefore hardly handle all kinds of 3D tolerances.

These lacks inspired the idea and the development of a discrete geometry framework for GPS, that is capable of considering geometric deviations at different stages of the product life cycle and is versatile regarding current and future tolerancing standards. Proposed approaches and research works so far build on a point cloud-based geometry representation scheme for implementing this framework employing various mathematical concepts for generating deviated representations of workpieces which are denoted to as Skin Model Shapes. The process of generating these Skin Model Shapes can be divided in a prediction stage and an observation stage with respect to the available information about expected geometric deviations in product development. The proposed approach for the prediction stage is based on predictive assumptions about geometric deviations and therefore the obtained Skin Model Shapes depend on the accuracy of these assumptions. In contrast to that, the results of the observation stage approach are highly depending on the training set. The generated Skin Model Shapes and their adequate visualization can then be used in various applications such as tolerancing, manufacturing, and inspection.

However, despite the highlighted potentials, the research interest in this field is slowly growing [70]. Main future challenges are the development of assembly simulation techniques as well as of simulation tools enabling functional tolerancing for various applications based on the proposed discrete geometry framework. Furthermore, an important question, which is not limited to any shape modelling or tolerance representation concept, is the validation of the proposed approaches and the comparison of obtained results with real cases. Nevertheless, the current state of affairs in this research field and the works so far seem very promising and may serve as an impulse for abundant discussions in research and industry.

## References

[1] Anwer N, Cid G, Mathieu L. XML based tolerance management for integrated design. In: International CIRP design seminar, CDROM. 2003. p. 12.
[2] ISO. Geometrical product specifications (GPS) – general concepts – part 1: model for geometric specification and verification. ISO 17450-1. 2011.
[3] Zhang M, Anwer N, Mathieu L, Zhao H. A discrete geometry framework for geometrical product specifications. In: Proceedings of the 21st CIRP design conference. 2011.
[4] Armillotta A, Semeraro Q. Geometric tolerances—impact on product design, quality inspection and statistical process monitoring. Geometric tolerance specification, London, Dordrecht, Heidelberg, New York: Springer; 2011.
[5] Wirtz A. Vectorial tolerancing: a basic element for quality control. In: Proceedings of the 3rd CIRP seminar on computer-aided tolerancing 1991. 1991.
[6] Desrochers A, Clement A. A dimensioning and tolerancing assistance model for CAD/CAM systems. Int J Adv Manuf Technol 1994;9:352–61.
[7] Chase KW, Magleby SP, Gao J. Advanced tolerancing techniques. Tolerance analysis of 2-D and 3-D mechanical assemblies with small kinematic adjustments, John Wiley; 1997.
[8] Davidson JK, Shah JJ. Using tolerance-maps to represent material condition on both a feature and a datum. In: The 8th international CIRP seminar on computer aided tolerancing. 2003. p. 92–101.

Author's personal copy




[9] Giordano M, Samper S, Petit J. Tolerance analysis and synthesis by means of deviation domains, axi-symmetric cases. In: Davidson JK, editor. Models for computer aided tolerancing in design and manufacturing. Netherlands: Springer; 2007. p. 85–94.
[10] Bourdet P, Mathieu L, Lartigue C, Ballu A. The concept of the small displacement torsor in metrology. In: Ciarlini P, Cox MG, Pavese F, Richter D, editors. Advanced mathematical tools in metrology II. World Scientific Publishing Company; 1996. p. 110–22.
[11] Voelcker HB. The current state of affairs in dimensional tolerancing: 1997. Integr Manuf Syst 1998;9(4):205–17.
[12] Walter M, Wartzack S. Analysis of the effects of manufacturing-caused deviations and varying operation parameters on operation-depending deviations of systems in motion. In: Proceedings of the 12th CIRP conference on computer aided tolerancing. 2012.
[13] Armillotta A, Semeraro Q. Critical operating conditions for assemblies with parameter-dependent dimensions. In: Proceedings of the 12th CIRP conference on computer aided tolerancing. 2012.
[14] Anselmetti B, Chavanne R, Yang J-X, Anwer N. Quick GPS: a new cat system for single-part tolerancing. Comput Aided Des 2010;42(9):768–80.
[15] Hong YS, Chang T-C. A comprehensive review of tolerancing research. Int J Prod Res 2002;40:2425–59.
[16] Charpentier F, Ballu A, Pailhes J. A scientific point of view of a simple industrial tolerancing process. In: Proceedings of the 12th CIRP conference on computer aided design. 2012.
[17] Ameta G, Serge S, Giordano M. Comparison of spatial math models for tolerance analysis: tolerance-maps, deviation domain, and TTRS. J Comput Inf Sci Eng 2011;11(2).
[18] ISO. Geometrical product specifications (GPS) – geometrical tolerancing – tolerances of form, orientation, location and run-out. ISO 1101. 2012.
[19] ASME. Dimensioning and tolerancing. ASME Y14.5. 2009.
[20] Mathieu L, Ballu A. A model for a coherent and complete tolerancing process. In: Davidson JK, editor. Models for computer aided tolerancing in design and manufacturing. Netherlands: Springer; 2007. p. 35–44.
[21] Dantan J-Y, Anwer N, Mathieu L. Integrated tolerancing process for conceptual design. CIRP Ann Manuf Technol 2003;52(1):135–8.
[22] Dantan J-Y, Ballu A, Mathieu L. Geometrical product specifications—model for product life cycle. Comput Aided Des 2008;40:493–501.
[23] Ballu A, Mathieu L. Univocal expression of functional and geometrical tolerances for design. In: Proceedings of 4th CIRP seminar on computer aided tolerancing. 1995.
[24] Ballu A, Dantan J-Y, Mathieu L. Geometric tolerancing of products. Language of tolerancing: geospelling, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc; 2010.
[25] Zhang M, Anwer N, Mathieu L. Discrete geometry for product specification and verification. In: Proceedings of IDMME—virtual concept 2010. 2010.
[26] Mathieu L, Ballu A. Geospelling: a common language for specification and verification to express method uncertainty. In: The 8th international CIRP seminar on computer aided tolerancing 2003. 2003.
[27] Ballu A, Mathieu L, Dantan J-Y. Global view of geometrical specifications. In: Proceedings of the 7th CIRP seminar on computer-aided tolerancing. 2001.
[28] Zhang M. Discrete shape modeling for geometrical product specifications: contributions and applications to Skin Model simulation. Ph.D. Thesis. Ecole Normale Superieure de Cachan; 2011.
[29] Durakbasa MN, Afjehi-Sadat A, Nomak A. Dimensional and geometrical measurements and interpretation of measuring results on the basis of the skin-model. Meas Sci Rev 2001;1(1):89–92.
[30] Anwer N, Ballu A, Mathieu L. The Skin Model, a comprehensive geometric model for engineering design. CIRP Ann Manuf Technol 2013;62(1):143–6.
[31] Nguyen DS, Vignat F, Brissaud D. Geometrical deviation model of product throughout its life cycle. Int J Manuf Res 2011;6(3):236–55.
[32] Shapiro V. Solid modeling. Tech. rep. University of Wisconsin. 2001.
[33] Vajna S, Weber C, Bley H, Zeman K. CAx für ingenieure. Berlin Heidelberg: Springer; 2009.
[34] Zhang M, Anwer N, Stockinger A, Mathieu L, Wartzack S. Discrete shape modeling for Skin Model representation. Proc Inst Mech Eng B 2013;227(5): 672–80.
[35] Schleich B, Wartzack S. How to determine the influence of geometric deviations on elastic deformations and the structural performance? Proc Inst Mech Eng B 2013;227(5):754–64.
[36] Schleich B, Walter M, Wartzack S, Anwer N, Mathieu L. A comprehensive framework for Skin Model simulation. In: Proceedings of the ASME 2012 11th Biennial conference on engineering systems design and analysis. 2012.
[37] Henke R, Summerhays K, Baldwin J, Cassou R, Brown C. Methods for evaluation of systematic geometric deviations in machined parts and their relationships to process variables. Precis Eng 1999;23(4):273–92.
[38] Desta MT, Feng H-Y, OuYang D. Characterization of general systematic form errors for circular features. Int J Mach Tool Manuf 2003;43(11):1069–78.
[39] Weber C, Britten W, Thome O. Conversion of geometrical tolerances into vectorial tolerance representations—a major step towards computer aided tolerancing. In: Proceedings of the fifth international design conference. 1998.
[40] Stoll T, Wittmann S, Meerkamm H. Tolerance analysis with detailed part modeling. In: Giordano M, Mathieu L, Villeneuve F, editors. Product life-cycle management: geometric variations. ISTE Ltd. and John Wiley & Sons Inc.; 2010.
[41] Samper S, Adragna P-A, Favreliere H, Pillet M. Modeling of 2d and 3d assemblies taking into account form errors of plane surfaces. J Comput Inf Sci Eng 2009;9(4).
[42] Bucher C. Computational analysis of randomness in structural mechanics. London, UK: Taylor & Francis Group; 2009.
[43] Choi S-K, Grandhi RV, Canfield RA. Reliability-based structural design. London: Springer-Verlag; 2007.
[44] Sahoo P, Barman T, Davim JP. Fractal analysis in machining. Berlin, Heidelberg: Springer; 2011.
[45] Costa MA. Fractal description of rough surfaces for haptic display. Ph.D. Thesis. Department of mechanical engineering of stanford university; 2000.
[46] Li Q. Measurement of surface roughness from fractal theory. In: 2010 international conference on computer, mechatronics, control and electronic engineering, CMCE. Vol. 2. 2010. p. 180–2.
[47] Zhao H, Anwer N, Bourdet P. Curvature-based registration and segmentation for multisensor coordinate metrology. In: Proceedings of the 12th CIRP conference on computer aided tolerancing. 2012.
[48] Liu Y, Xiong Y. Automatic segmentation of unorganized noisy point clouds based on the Gaussian map. Comput Aided Des 2008;40(5):576–94.
[49] Lavoué G, Dupont F, Baskurt A. A new CAD mesh segmentation method, based on curvature tensor analysis. Comput Aided Des 2005;37(10):975–87.
[50] Othake Y, Belyaev A, Bogaevski I. Mesh regularization and adaptive smoothing. Comput Aided Des 2001;33(11):789–800.
[51] Wittmann S, Stoll T, Paetzold K. Volume visualization of geometric deviations. In: Proceedings of the 16th international conference on engineering design (ICED07). 2007.
[52] ISO. Geometrical product specifications (GPS) – acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) – part 6: estimation of errors in computing Gaussian associated features. ISO 10360-6:2001. 2001.
[53] ASME. Methods for performance evaluation of coordinate measuring system software. ASME B89.4.10. 2000.
[54] Adler R, Taylor J. Random fields and geometry. Springer monographs in mathematics, Berlin, Heidelberg: Springer; 2007.
[55] Ma X, Zabaras N. Kernel principal component analysis for stochastic input model generation. J Comput Phys 2011;230(19):7311–31.
[56] Sudret B, Kiureghian AD. Stochastic finite element methods and reliability. Tech. Rep. UCB/SEMM-2000/08, Department of civil & environmental engineering, University of California, Berkeley. 2000.
[57] Li C-C, Kiureghian AD. Optimal discretization of random fields. J Eng Mech 1993;119(6):1136–54.
[58] Cootes TF, Taylor CJ, Cooper DH, Graham J. Active shape models—their training and application. Comput Vis Image Underst 1995;61:38–59.
[59] Matuszyk TI, Cardew-Hall MJ, Rolfe BF. The kernel density estimate/point distribution model (KDE-PDM) for statistical shape modeling of automotive stampings and assemblies. Robot Comput-Integr Manuf 2010;26:370–80.
[60] Stegmann MB, Gomez DD. A brief introduction to statistical shape analysis. In: Informatics and mathematical modelling. Lecture notes, DTU: Technical University of Denmark; 2002.
[61] Cootes TF, Taylor CJ, Pt MM. Statistical models of appearance for computer vision. Available online. 2004.
[62] Dryden IL, Mardia KV. Statistical shape analysis. John Wiley & Sons, Ltd; 1999.
[63] Niu J, Li Z, Salvendy G. Mathematical methods for shape analysis and form comparison in 3d anthropometry: a literature review. In: Duffy V, editor. Digital human modeling. Lecture notes in computer science, vol. 4561, Berlin, Heidelberg: Springer; 2007. p. 161–70.
[64] Schleich B, Wartzack S. Generation of deviated geometry based on manufacturing process simulations. In: Weimarer Stochastik- und Optimierungstage WOST 9.0, Weimar, Germany; 2012. http://www.dynardo.de/bibliothek/wost-bibliothek/wost-9.html.
[65] Roy U. Computational methodologies for evaluating form and positional tolerances in a computer integrated manufacturing system. Int J Adv Manuf Technol 1995;10:110–7.
[66] Stoll T, Stockinger A, Wartzack S. Geometric manipulation method for evaluation of aesthetic quality in early design phases. In: Proceedings of the 18th international conference on engineering design, ICED11. 2011.
[67] Stockinger A, Wittmann S, Martinek M, Meerkamm H, Wartzack S. Virtual assembly analysis: standard tolerance analysis compared to manufacturing simulation and relative positioning. In: Proceedings of the 11th international design conference DESIGN 2010. 2010. p. 1421–30.
[68] Wittmann S, Winter M, Paetzold K. Assembly simulation for toleranced parts: an adapted path planning approach. In: Proceedings of the 17th international conference on engineering design, ICED09. 2009. p. 359–70.
[69] ISO. Statistical methods—process performance and capability statistics for measured quality characteristics. ISO 21747:2006. 2006.
[70] Schleich B, Wartzack S. The implications of the Skin Model concept for computer aided tolerancing. In: Abramovici M, Stark R, editors. Smart product engineering. Lecture notes in production engineering, Berlin, Heidelberg: Springer; 2013. p. 573–82.

CIRP Annals - Manufacturing Technology 63 (2014) 137–140

Contents lists available at ScienceDirect

CIRP Annals - Manufacturing Technology

journal homepage: http://ees.elsevier.com/cirp/default.asp

# From solid modelling to skin model shapes: Shifting paradigms in computer-aided tolerancing

Nabil Anwer [a,*], Benjamin Schleich [b], Luc Mathieu (1)[a], Sandro Wartzack [b]

[a] Ecole Normale Supérieure de Cachan, University Research Laboratory in Automated Production, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France
[b] Chair of Engineering Design, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Martensstrasse 9, 91058 Erlangen, Germany

ARTICLE INFO

*Keyword:*
Product development
Tolerancing
Skin Model

ABSTRACT

Product design requires the consideration of geometric models and representations that reflect shape deviations and support tolerance management issues. Computer-Aided Tolerancing (CAT) systems have been developed as simulation tools for modelling the effects of tolerances on digital product simulation. However, geometric variations cannot be addressed efficiently with regard to form deviations. This paper investigates the concepts of Skin Model Shapes, which provide a finite describability and the digital representation of the Skin Model concept, and their unified discrete geometry representation. New contributions to tolerance representation and analysis are presented. Applications and perspectives for CAT systems are highlighted as well.

© 2014 CIRP.

## 1. Introduction

Product modelling and solid modelling have been active research topics since the early 80s. Product modelling has emerged as a comprehensive concept for managing geometric data and semantic information during the product lifecycle [1,2]. The advent of solid modelling has contributed significantly to the use of Computer-Aided Design (CAD), Computer-Aided Engineering (CAE), and Computer-Aided Manufacturing (CAM) systems to support the digital product development process.

Even though solid models enable 3D product models to replace traditional 2D engineering drawings as the product's master representation and primary product definition data, engineering drawings are still used to convey semantic and ambiguous geometric and non-geometric information. New researches on Model-based Definition (MBD) use 3D models supplemented with tolerancing annotations by integrating drawing information directly onto a 3D product model to define product geometry and product specifications for interoperability of Product and Manufacturing Information (PMI) [3,4].

Tolerancing has become a major concern for product's functioning, the manufacturing process, and assembly. It has been a permanent and serious issue in the long history of CIRP [5]. Early researches on tolerancing mostly focus on unidirectional or bidirectional dimension chain and its tolerance allocation. Farmer and Gladman [6] analyzed how computer-based tolerancing has to adapt to the functional requirements. Fainguelernt, Weil and Bourdet depicted the role of Computer-Aided Tolerancing (CAT) systems for Process Planning [7]. Wirtz, Gächter and Wipf proposed the Vectorial Tolerancing Quality Control Loop (VT-QCL) and its computerized structure to manage geometric variations for CAD-CAM with an integrated measuring system [8].

With the continuous improvement of manufacturing processes, the geometric variations of the part and the assembly clearance between the parts have become important factors that affect product performance. Although these variations are addressed through established theories of geometric tolerancing and Geometrical Product Specifications (GPS) ISO standards, the representation of geometric deviations within CAD solid models still relies on symbolic languages and non-geometric data. Moreover, 3D product modelling and representation is mainly influenced by the consideration of idealized nominal geometry.

The Skin Model concept which stemmed from the theoretical foundations of Geometrical Product Specification and Verification has been developed to enrich the nominal geometry considering realistic physical shapes [9]. However, the digital representation of the Skin Model has been investigated only recently [10]. In a previous work [11], we investigated the fundamentals of the Skin Model, through shape and solid modelling, at a conceptual level as a new comprehensive geometric product model that supersedes the nominal solid model.

This paper investigates the concept of Skin Model Shapes that has been developed to address digital representation of "non-ideal" parts and extended to mechanical assemblies. The evolution of researches on tolerancing and the development of CAT systems are presented in Section 2. Skin Model Shapes for Computer-Aided Tolerancing are discussed in Section 3. An illustrative example of tolerance analysis based on Skin Model Shapes is provided in Section 4. Finally, conclusions and perspectives are drawn.

## 2. The evolution of research on Computer-Aided Tolerancing

Nowadays, the efficient execution of product development, manufacturing, and inspection activities relies inevitably on the

* Corresponding author.
*E-mail address:* anwer@lurpa.ens-cachan.fr (N. Anwer).

http://dx.doi.org/10.1016/j.cirp.2014.03.103
0007-8506/© 2014 CIRP.

extensive use of computer-aided tools for the modelling and analysis of parts, assemblies, and products as well as the simulation of manufacturing and inspection processes. However, geometric part deviations are rarely completely considered by most of these tools, even though they strongly affect the function, quality and cost of mechanical products.

In order to enable the consideration of geometric deviations already during the design of physical artefacts, CAT tools have been developed. These tools are to support the various tasks in geometric variations management, such as tolerance specification, tolerance synthesis, and tolerance analysis. In this context, particularly computer-aided tolerance analysis has gained much research attention during the last decades, since the prediction of the effects of geometric deviations on the product quality without building physical prototypes is a key issue in the design and manufacturing of high quality products at moderate costs. The available tools for computer aided tolerance analysis ground on mathematical models for the representation and analysis of geometric deviations, where it can be found, that a wide variety of models for the expression and representation of geometric deviations, geometric tolerances, and geometric requirements have been developed during the last decades.

### 2.1. Survey of research on tolerancing

The modelling of geometric deviations as a basis for the evaluation of their effects on the product quality is a key issue in tolerancing research. Many models have been presented including 1D or 2D tolerance stack-ups, homogeneous matrix transforms, Vectorial Tolerancing, the concept of Technologically and Topologically Related Surfaces (TTRS), the Small Displacement Torsor (SDT), the Direct Linearization Method, Deviation Domains, Tolerance Maps (T-Map), specification hull techniques, and modal decomposition, where a comprehensive overview can be found in [12,13]. Furthermore, the applicability of many deviation representation schemes for the tolerance analysis of mechanical assemblies has been extensively discussed, where it can be found, that main drawbacks of these representation schemes are the lack of form deviation considerations and the missing conformance with tolerancing standards [13–15].

The first shortcoming is illustrated in Fig. 1, where it can be seen, that most representation schemes for geometric deviations disregard form deviations. As a consequence, part feature deviations are simplified to rotational and translational imperfections, which has tremendous effects on the part representation as well as on tolerance analysis results at the assembly level. Furthermore, tolerance analysis models hardly allow a coherent and complete geometric variations management process, because they either imply uncertainties or do not allow the consideration of manufacturing and metrology aspects.

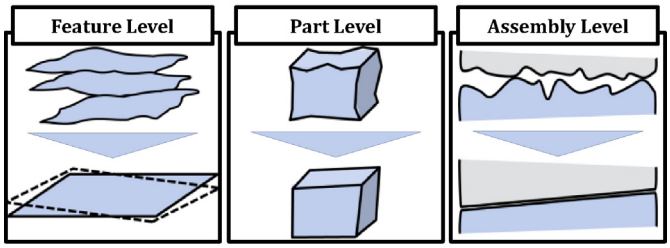



**Fig. 1.** Simplifications of most deviation representations for CAT.

### 2.2. Computer-aided tolerancing systems

Requicha's seminal work on solid modelling and tolerancing [16,17] sketched a formal description of product modelling considering geometric deviations. The variation of the position and orientation of the parts within an assembly is described through the concept of nominal assembly, while variational assembly covers part's variability and tolerances.

Early researches in tolerance-based solid modelling lead to the development of tolerance representation techniques directly integrated into the data structure of CAD systems. Those systems benefit from object-oriented environment in which specifications of each part, such as tolerances, functional requirements, the cost function or machining process, have been treated as classes with their attributes [18]. Other tolerance representation techniques, which are not directly integrated in solid modellers, have been developed to ensure a better integration of tolerancing data and related knowledge with CAD and Product Lifecycle Management (PLM) systems [19], at different design stages [20], with more expressiveness [21], improving the visualization of the simulation results [22], and supporting the semantic interoperability in assembly design [23]. At present, mainstream CAD softwares allow adding annotations on the three-dimensional model of a part. However, the tolerance specification is only attached to the ideal surface as additional information and cannot reflect the geometric deviations of the part. The FT&A workbench of CATIA® (by Dassault Systemes) provides semantics analysis functions to check the consistency between the tolerance specification and associated geometric features. The DimXpert module of SolidWorks® (by Dassault Systemes) can automatically generate the tolerance specification for individual parts, taking into account under-constrained and over-constrained situations. The other tolerance analysis software such as 3DCS® (by Dimensional Systems), eMTolMate® (by TecnoMatix/UGS/SiemensPLM), MECAmaster (by MECAmaster SARL), CETOL 6σ® (by Sigmetrix), and VisVSA® (by UGS/SiemensPLM) can calculate assembly deviations by variations of geometric parameters or Monte Carlo simulation, but cannot effectively optimize the tolerance intervals of multiple assembly dimension chains [24].

### 2.3. Discussion

Today, tolerance information is created as a part of the design process with support by CAD. The efficient use of commercial CAT systems depends on the expertise of the user in building a valid model that conforms to standards, ensures functional requirements, and leads to accurate and reliable results.

CAT systems are evolving along with the advancing technologies of digital product development processes, therefore ensuring a better integration with PLM systems and incorporating more semantics. Although conformance to ISO and ASME standards can be partly achieved by these systems, many issues are still to be investigated in depth, such as 3D tolerance zones, form tolerances, material condition modifiers, datum precedence, and closed form solutions through Monte Carlo simulations [25]. Moreover, in our knowledge, there is no agreed benchmark set for the evaluation and the comparison of existing CAT systems.

## 3. Skin model shapes for computer-aided tolerancing

### 3.1. The concept of Skin Model Shapes

As a response to the need for a coherent and complete language to be used in the geometric variations management process, GeoSpelling has been developed and adopted in the standards for the geometric product specification and verification (ISO 17450-1:2005 [26]). It defines a geometric specification as a condition on a characteristic, which is defined on one or multiple geometric features. These ideal or non-ideal features are obtained by various GeoSpelling operations, such as partition and extraction, from the Skin Model, which is a model of the physical interface between a workpiece and its environment comprising geometric deviations introduced by manufacturing and assembly. The idea behind the Skin Model is the clear differentiation between the part surface in the real world and its model in the abstract world. However, since an infinite description is required in order to consider all geometric deviations from a macro to a micro scale, there exists no possibility for the identification and the simulation of the Skin Model. In contrast to

that, the representation of the Skin Model and its processing using computer-aided tools requires the translation of the Skin Model to a finite model, which is the motivation behind the concept of Skin Model Shapes. These Skin Model Shapes are finite representations of the Skin Model, where each Skin Model Shape is a specific outcome of the Skin Model and can be seen as a finite workpiece representative. This virtual representation of the Skin Model concept has been investigated recently and approaches for the generation and assessment of Skin Model Shapes have paved the way for the use of this concept in Computer-Aided Tolerancing [27–29].

### 3.2. Skin Model Shape generation and assessment

The concept of Skin Model Shapes is not linked to a specific computer-aided geometry representation scheme, such as parametric or discrete. However, discrete representation schemes, such as point clouds and surface meshes, have been proposed for the operationalization of the Skin Model Shape concept. This is because they enable a straightforward connection between all different actors in geometric variations management, since point clouds and surface meshes can be generated from the nominal model during design by tessellation techniques, and are obtained as a result of tactile or optical measurement systems during manufacturing and inspection.

As a consequence, a discrete geometry framework for the Skin Model Shape simulation has been developed [27]. It focuses on the generation of Skin Model Shapes comprising systematic and random geometric deviations and has been extended in order to allow the generation of Skin Model Shapes in early (Prediction Stage) as well as later design stages (Observation Stage) [28]. In this regard, various approaches for the discrete geometry modelling of systematic and random geometric deviations in the Prediction Stage have been assessed. Furthermore, approaches for the generation of Skin Model Shapes based on results of manufacturing process simulations and measurements in the Observation Stage have been investigated (see Fig. 2). In the Prediction Stage, the generation of Skin Model Shapes builds up on the nominal model obtained from CAD systems. It is then enhanced by systematic deviations, which are modelled by second order shapes. Subsequently, random geometric deviations are introduced by random fields or the Multi-Gaussian method. The process of Skin Model Shape generation during the Observation Stage is based on real or virtual observations gathered from measurements on part prototypes or results of manufacturing process simulations. Methods from Statistical Shape Analysis are then used to multiply the limited number of observations. Since Skin Model Shapes are part representatives, which conform to tolerance specifications, a check for these specifications has finally to be performed in both approaches. This check comprises the computation of geometric tolerances by algorithms as for example used in dimensional metrology.

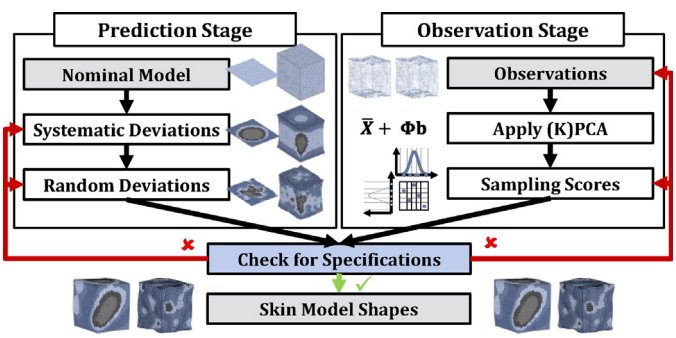



**Fig. 2.** Skin Model Shapes in prediction and observation stages.

### 3.3. The use of Skin Model Shapes in Computer-Aided Tolerancing

The representation and generation of Skin Model Shapes enable the visualization of geometric part deviations and therefore support the identification of required geometric specifications during design. Furthermore, Skin Model Shapes can be used as part representatives in tolerance analysis. In this regard, a wide variety of algorithms known from registration, computer graphics, and computational geometry, such as the Iterative Closest Point and Ray Tracing algorithms, are applicable for the assembly simulation of Skin Model Shapes. Based on these algorithms, first approaches for the path planning and relative positioning have been developed, which enable the assembly simulation of deviated workpieces considering form deviations. The application of these computational geometry algorithms for the assembly simulation of Skin Model Shapes requires the reconsideration of classical approaches for the computer-aided geometric variations management based on the formulation of stack-up and tolerance chains. This is because the algorithms and simulation tools allow an integrated simulation of the physical product origination considering manufacturing, assembly, and inspection processes. As a response to these developments, a framework for the Skin Model Shape based CAT has been developed [29], which aims at integrating the presented approaches in the computer-aided geometric variations management process.

### 3.4. Discussion and future work

The concept of Skin Model Shapes offers great potential for a coherent and complete computer-aided geometric variations management process, which respects aspects of design, manufacturing, and inspection. The proposed approaches for the generation of Skin Model Shapes as well as for their processing in assembly simulations enable the consideration of form deviations in Computer-Aided Tolerancing. However, these approaches still lack of a unified parameterization of form deviations and the respective key characteristics. In spite of the presented approaches for the generation and processing of Skin Model Shapes, the implementation of adequate algorithms for the use of the Skin Model Shape concept in CAT systems remains a future research challenge.

## 4. Case study

The case study for the tolerance analysis based on Skin Model Shapes is an assembly comprising two flat plates and a cube as illustrated in Fig. 3 according to [30]. The key characteristics (KCs) are the seven distances and the tilt angles $\alpha$ and $\beta$ between the top and the bottom plate, which are evaluated from the point pairs AC-A′C′ ($\alpha$) and AE-A′E′ ($\beta$).

The analysis starts with the generation and assessment of Skin Model Shapes, which is performed for the cube by a Gaussian random field approach ($\mu = 0.00$ mm, $\sigma = 0.01$ mm, correlation

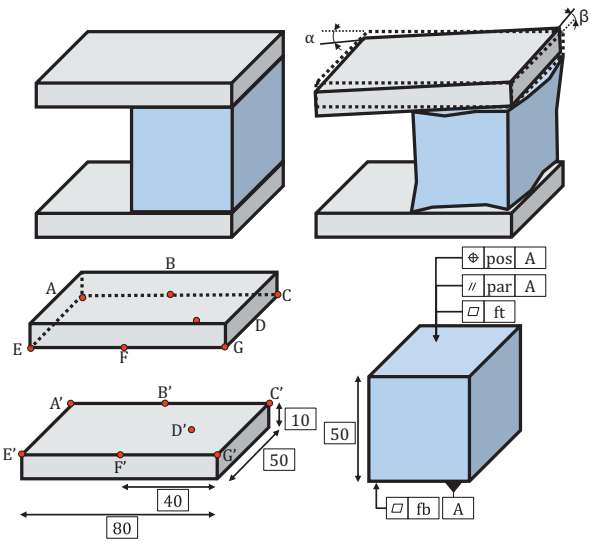



**Fig. 3.** A case study for tolerance analysis based on Skin Model Shapes.

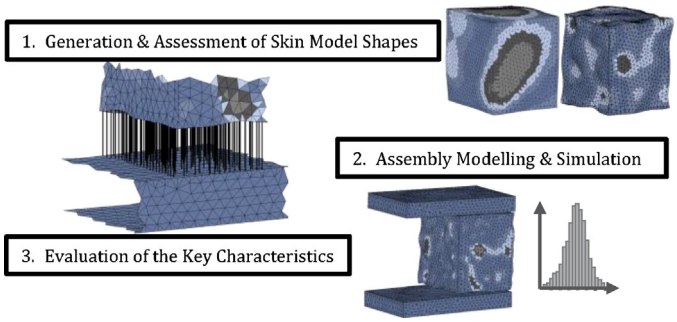



**Fig. 4.** Tolerance analysis based on Skin Model Shapes.

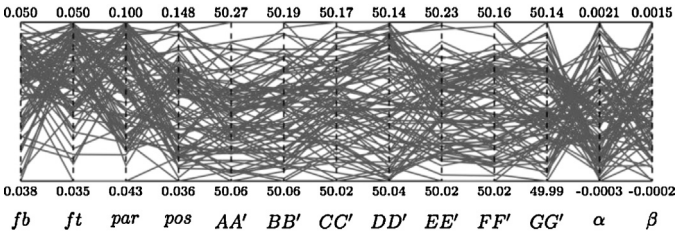



**Fig. 5.** Results of the case study – Parallel Coordinates Plot.

**Table 1**
Results of the case study.

| AA′ | BB′ | CC′ | DD′ | EE′ | FF′ | GG′ | $\alpha$ [mrad] | $\beta$ [mrad] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.21 | 0.13 | 0.15 | 0.10 | 0.21 | 0.14 | 0.15 | 2.4 | 1.7 |
| 0.046 | 0.032 | 0.035 | 0.030 | 0.048 | 0.033 | 0.035 | 0.6 | 0.4 |
| 0.4 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.2 | 2.5 | 2 |

Black: Range of the KCs; Blue: standard deviations of the KCs; Red: theoretical values of the KCs without consideration of form deviations.

length: $\rho$ = 5.00 mm, pos = 0.2 mm, par = 0.1 mm, ft = fb = 0.05 mm) in the accompanying example.

Furthermore, random translations and rotations of the top plane are added in order to simulate position and orientation deviations. Thereafter, the Skin Model Shapes are assembled employing an adapted approach for the relative positioning. It is based on a ray tracing algorithm for the distance evaluation between the parts employing their surface mesh representation and the computation of the contact triangle by convex hull techniques. Finally, the KCs are evaluated. The procedure can be seen from Fig. 4.

The KC results of the example for 1000 Skin Model Shapes are given in Table 1 and a parallel coordinates plot of the tolerance specifications of the cube and the KCs is shown in Fig. 5. In comparison to the results presented in [30], where various computer-aided tolerance analysis tools have been compared, it can be found, that the consideration of form deviations results in a more realistic image regarding the key characteristics. In contrast to that, the models employed in current CAT tools overestimate the effects of form deviations, since they do not allow their realistic consideration.

## 5. Conclusion

In this paper, the concept of Skin Model Shapes is developed as a novel paradigm for geometric variations and solid modelling in the context of Computer-Aided Tolerancing. It enables a new approach for tolerance analysis considering form deviations at part and assembly level and serves as a contribution for developing new efficient CAT systems. The Skin Model Shapes as a new shape deviation paradigm for product engineering is also benefiting from the evolution of research in tolerancing and the emerging computational geometry applications in industry. Future developments will concern both contact and mobility modelling for the comprehensive assembly simulation and the virtual usage.

## Acknowledgements

This research was supported by the French-Bavarian exchange programme BFHZ/CCUFB (FK15_13).

## References

[1] Krause F, Kimura F, Kjellberg T, Lu SC-Y (1993) Product Modelling. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 42(2):695–706.
[2] Chandrasegaran SK, Ramani K, Sriram RD, Horváth I, Bernard A, Harik RF, Gao W (2013) The Evolution, Challenges, and Future of Knowledge Representation in Product Design Systems. *Computer-Aided Design* 45(2):204–228.
[3] Quintana V, Rivest L, Pellerin R, Kheddouci F (2012) Re-engineering the Engineering Change Management Process for a Drawing-less Environment. *Computers in Industry* 63(1):79–90.
[4] Frechette SP, Jones AT, Fischer BR (2013) Strategy for Testing Conformance to Geometric Dimensioning & Tolerancing Standards. *Procedia CIRP* 10:211–215.
[5] Weill R, Clément A, Hocken R, Farmer LE, Gladman CA, Wirtz A, Bourdet P, Freckleton JE, Kunzmann H, Ham I, Trumpold H, Matthias E (1988) Tolerancing for Function. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 37(2):603–610.
[6] Farmer LE, Gladman CA (1986) Tolerance Technology — Computer-Based Analysis. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 35(1):7–10.
[7] Fainguelernt D, Weill R, Bourdet P (1986) Computer Aided Tolerancing and Dimensioning in Process Planning. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 35(1):381–386.
[8] Wirtz A, Gächter C, Wipf D (1993) From Unambiguously Defined Geometry to the Perfect Quality Control Loop. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 42(1):615–618.
[9] Ballu A, Mathieu L (1995) Univocal Expression of Functional and Geometrical Tolerances for Design, Manufacturing and Inspection. *Proc. 4th CIRP Seminar Computer Aided Tolerancing*, Tokyo, Japan.
[10] Zhang M, Anwer N, Mathieu L, Zhao H (2011) A Discrete Geometry Framework for Product Specification. *21st CIRP Design Conference*, Daejeon, South Korea.
[11] Anwer N, Ballu A, Mathieu L (2013) The Skin Model, a Comprehensive Geometric Model for Engineering Design. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 62(1):143–146.
[12] Hong YS, Chang TC (2002) A Comprehensive Review of Tolerancing Research. *International Journal of Production Research* 40(11):2425–2459.
[13] Ameta G, Samper S, Giordano M (2011) Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis: Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS. *Journal of Computing and Information Science in Engineering* 11(2).
[14] Polini W (2012) Taxonomy of Models for Tolerance Analysis in Assembling. *International Journal of Production Research* 50(7):2014–2029.
[15] Bo C, Yang Z, Wang L, Chen H (2013) A Comparison of Tolerance Analysis Models for Assembly. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 68(1–4):739–754.
[16] Requicha AAG (1980) Representation for Rigid Solids: Theory, Methods and Systems. *Computing Surveys* 12(4):437–464.
[17] Requicha AAG (1983) Toward a Theory of Geometric Tolerancing. *International Journal of Robotics Research* 2(4):45–60.
[18] Roy U, Li B (1999) Representation and Interpretation of Geometric Tolerances for Polyhedral Objects II: Size, Orientation and Position Tolerances. *Computer-Aided Design* 31(4):273–285.
[19] Belkadi F, Bosch-Mauchand M, Kibamba Y, Le Duigou J, Eynard B (2012) Functional architecture and specifications for Tolerancing Data and Knowledge Management. *Proc. 9th International Conference on Product Lifecycle Management*, Montreal, Canada.
[20] Dantan JY, Anwer N, Mathieu L (2003) Integrated Tolerancing Process for Conceptual Design. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 52(1):135–138.
[21] Xu Y, Xu Z, Jiang X, Scott P (2010) Developing a Knowledge-Based System for Complex Geometrical Product Specification (GPS) Data Manipulation. *Knowledge Based Systems* 24(1):10–22.
[22] Söderberg R, Wickman C, Lindkvist L (2008) Improving Decision Making by Simulating and Visualizing Geometrical Variation in Non-rigid Assemblies. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 57(1):175–178.
[23] Sarigecili MI, Roy U, Rachuri S (2014) Interpreting the Semantics of GD&T Specifications of a Product for Tolerance Analysis. *Computer-Aided Design* 47:72–84.
[24] Prisco U, Giorleo G (2002) Overview of Current CAT Systems. *Integrated Computer-Aided Engineering* 9:373–387.
[25] Shah JJ, Ameta G, Shen Z, Davidson J (2007) Navigating the Tolerance Analysis Maze. *Computer-Aided Design & Applications* 4(5):705–718.
[26] ISO 17450-1:2005, Geometrical Product Specifications (GPS) – General Concepts – Part 1: Model for Geometrical Specification and Verification.
[27] Zhang M, Anwer N, Stockinger A, Mathieu L, Wartzack S (2013) Discrete Shape Modeling for Skin Model Representation. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part B. Journal of Engineering Manufacture* 227(5):672–680.
[28] Schleich B, Walter M, Wartzack S, Anwer N, Mathieu L (2012) A Comprehensive Framework for Skin Model Simulation. *Proc. ASME 11th Bien. Conf. on Engineering Systems Design and Analysis*, Nantes, France.
[29] Schleich B, Wartzack S (2013) The Implications of the Skin Model Concept for Computer Aided Tolerancing. in Abramovici M, Stark R, (Eds.) *Smart Product Engineering*, Springer, Berlin/Heidelberg: 573–582.
[30] Anselmetti B, Mathieu L (2001) Evaluation des performances des logiciels d'aide au tolérancement. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique* 16(4):415–431.

**Benjamin Schleich**
Chair of Engineering Design,
Department of Mechanical Engineering,
FAU Erlangen-Nürnberg,
Erlangen 91058, Germany
e-mail: schleich@mfk.fau.de

**Nabil Anwer**
Automated Production Research Laboratory,
Department of Mechanical Engineering,
ENS Cachan,
Cachan 94230, France

**Luc Mathieu**
Automated Production Research Laboratory,
Department of Mechanical Engineering,
ENS Cachan,
Cachan 94230, France

**Sandro Wartzack**
Chair of Engineering Design,
Department of Mechanical Engineering,
FAU Erlangen-Nürnberg,
Erlangen 91058, Germany

# Contact and Mobility Simulation for Mechanical Assemblies Based on Skin Model Shapes

*Assembly modeling as one of the most important steps in the product development activity relies more and more on the extensive use of computer-aided design (CAD) systems. The modeling of geometric interfaces between the components of the assembly is of central importance in the simulation of mechanical assemblies. Over the past decades, many researchers have devoted their efforts to establish theories and systems covering assembly modeling. Although the product form or shape has been extensively investigated considering the nominal CAD geometry, inevitable limitations can be reported. Computer aided tolerancing (CAT) systems provide simulation tools for modeling the effects of tolerances on the assembly but still lack of form deviation considerations. The skin model concept which stemmed from the theoretical foundations of geometrical product specification and verification (GPS) has been developed to enrich the nominal geometry considering realistic physical shapes. However, the digital representation of the skin model has been investigated only recently. This paper presents a novel approach for a skin model based simulation of contact and mobility for assemblies. Three important issues are addressed: the geometric modeling of the contact, the contact quality evaluation, and the motion analysis. The main contribution to CAT can be found in the analysis of the effects of geometric form deviations on the assembly and motion behavior of solid mechanics, which comprises models for the assembly simulation, for the contact quality evaluation, and for the motion analysis. A case study is presented to illustrate the proposed approaches.* [DOI: 10.1115/1.4029051]

## 1 Introduction

Assembly modeling as one of the most important steps in the product development process relies more and more on the extensive use of CAD systems. Digital mock-ups enable virtual assembly and testing without building physical artifacts while reducing time and costs in product development and increasing product quality. The modeling of geometric interfaces between the components of the assembly is of central importance in the simulation of mechanical assemblies.

Over the past decades, many researchers have devoted their efforts to establish theories and systems covering assembly modeling. Although the product form or shape has been extensively investigated considering the nominal CAD geometry, inevitable limitations can be reported. CAT systems provide simulation tools for modeling the effects of tolerances on the assembly and product function. Integration of manufacturing simulations and physical modeling into tolerance analysis lead to more accurate methods but still lack of form deviation considerations. The skin model concept which stemmed from the theoretical foundations of GPS has been developed to enrich the nominal geometry considering realistic physical shapes. The skin model considers geometric deviations that are expected, predicted or already observed in real manufacturing and assembly processes. However, the digital representation of the skin model has been investigated only recently.

This paper presents a novel approach for a skin model based simulation of contact and mobility for assemblies. Three important issues are addressed: the geometric modeling of the contact, the contact quality evaluation, and the motion analysis. It is structured as follows. In Sec. 2, GeoSpelling as a coherent and complete language for geometric product specification and verification, the skin model, and the concept of skin model shapes are briefly introduced. Thereafter, existing approaches for the assembly simulation of nonideal workpiece representatives are reviewed. Following this, a framework for the assembly and mobility simulation of skin model shapes is proposed. This framework is then applied to a case study of a slider mechanism. Finally, a conclusion is given.

## 2 GeoSpelling, the Skin Model, and the Concept of Skin Model Shapes

The industrial need for a coherent and complete language for geometric product specification and verification has led to the development of GeoSpelling and its adoption in the standards for GPS (ISO 17450-1:2011) [1–4]. In GeoSpelling, a geometric specification is defined as a condition on a characteristic defined on geometric features, which are created from the skin model employing different operations. In this regard, the skin model is a model of the physical interface between the workpiece and its environment and, in contrast to the nominal model, comprises deviations brought in by manufacturing and assembly processes. Since an infinite description is required in order to consider all kinds of geometric deviations, there is no possibility for identification and simulation of the skin model. Therefore, the concept of skin model shapes has been developed, which provides a finite descriptiveness of the skin model employing either discrete or parametric geometry representation schemes [5–7]. In this contribution, a focus is set on the discrete geometry representation by point clouds, since it is easy to handle and can serve as a connection between design, manufacturing, and inspection. This is because point clouds can be generated by tessellation employing CAD systems during design, result from manufacturing process simulation software tools, and are commonly obtained from tactile or optical measurement systems during inspection. The difference

Contributed by the Computers and Information Division of ASME for publication in the Journal of Computing and Information Science in Engineering. Manuscript received September 29, 2014; final manuscript received October 25, 2014; published online April 8, 2015. Editor: Bahram Ravani.


Copyright © 2015 by ASME

Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms

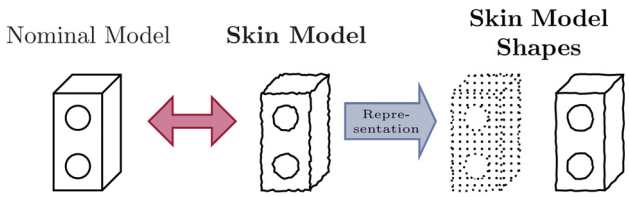



**Fig. 1 The difference between the nominal model, the skin model, and the concept of skin model shapes**

between the nominal model, the skin model, and the concept of skin model shapes can be seen from Fig. 1.

## 3 Assembly Simulation in CAT

Assembly modeling and simulation has been the topic of many relevant research works in the field of CAT during the last decades. Whereas simple models for the 2D assembly stack-up have been the focus of early research works [8], the representation and simulation of 3D assembly problems considering geometric part deviations in CAT tools remains an unsolved problem, since established CAT tools disregard form deviations and are thus not fully conform to international GPS standards [9]. Though, many research works in this field have been presented, which differ in their model assumptions and with regard to their applicability. For example, Li and Roy [10] propose a relative positioning scheme, which is used to determine the positions of variant polyhedral parts in 3D assemblies. Furthermore, a numerical procedure for the assembly simulation among variational features has been proposed in Refs. [11] and [12]. Both approaches can be used to model and simulate assemblies with variant parts, but lack of form deviation considerations.

In contrast to that, Samper et al. [13] take into account form deviations of planar features in the computation of assemblies. The approach is based on the modal description of form defects and part of a modal tolerancing approach, which also comprises the modal parametrization of form defects [14]. Thus, the simulation results depend on the approximation of form deviations by eigenmodes. This limitation is overcome in the approaches by Stoll et al. [15,16], which are based on surface registration techniques. They adopt the iterative closest point (ICP) algorithm [17] and integrate collision detection approaches [18] for the contact evaluation. However, these approaches can only handle discrete geometry representation schemes, which offer a closed surface representation, such as surface meshes, but are not capable of simulating the assembly behavior of variant parts based on their point cloud representation. Since point clouds are commonly obtained by assembly and measurement applications, their consideration in CAT tools is highly desirable to enable the connection between design, manufacturing, and inspection, which is the motivation for the presented assembly and mobility simulation approach. It grounds on constrained registration approaches [19–21] and aims at considering assembly directions and assembly constraints in the assembly simulation employing point clouds.

## 4 Assembly and Mobility Simulation of Skin Model Shapes

The proposed framework for the assembly and mobility simulation of skin model shapes can be divided into four stages, namely, a preprocessing stage, an assembly modeling step, the mobility modeling, and postprocessing activities (see Fig. 2), where the assembly and mobility modeling can be regarded as the processing of skin model shapes.

During the preprocessing stage, skin model shapes are generated employing either mathematical approaches for the modeling of geometric deviations in early design stages (prediction stage), or by applying methods based on the statistical shape analysis in later stages (observation stage) [5–7,22,23]. These skin model shapes are then prepared for the assembly modeling. In this regard, GeoSpelling operations, such as partition, extraction, and association are applied to obtain the toleranced and datum part features, which are relevant for the assembly. In parallel to this, the assembly process and the assembly sequence have to be defined. Both the assembly process definition and the skin model shapes preparation lead to the assembly simulation model, which is then solved employing an approach for the relative positioning. As a result, the relative assembly positions are obtained. The mobility modeling is realized as a repetition of single assembly steps, where a time discretization is performed, i.e., the initial part position for every time step $t_i + \Delta t$ is adapted based on the previous time step $t_i$. Finally, the postprocessing activities comprise the contact quality evaluation based on the assembly positions, which serves as a criterion for the result interpretation, and the comparison for conformance with assembly requirements. Based thereon, critical workpiece deviations can be identified and geometric part specifications can be derived. The assembly modeling and the mobility modeling are highlighted in Secs. 4.1–4.3.

**4.1 Model for the Assembly Simulation.** The main idea behind the relative positioning of two skin model shapes as proposed here is based on the registration of their point clouds, where the point cloud of the first part $\boldsymbol{X}$ ($N$ points) stays unaffected and the point cloud of the second part $\boldsymbol{Y}$ ($M$ points) is moved relatively to the first part. The adjusted position of $\boldsymbol{Y}$ is obtained by minimizing an objective function $f(\cdot)$, which is a function of both point clouds and the rigid body transformation of the second part $\alpha(\boldsymbol{Y})$

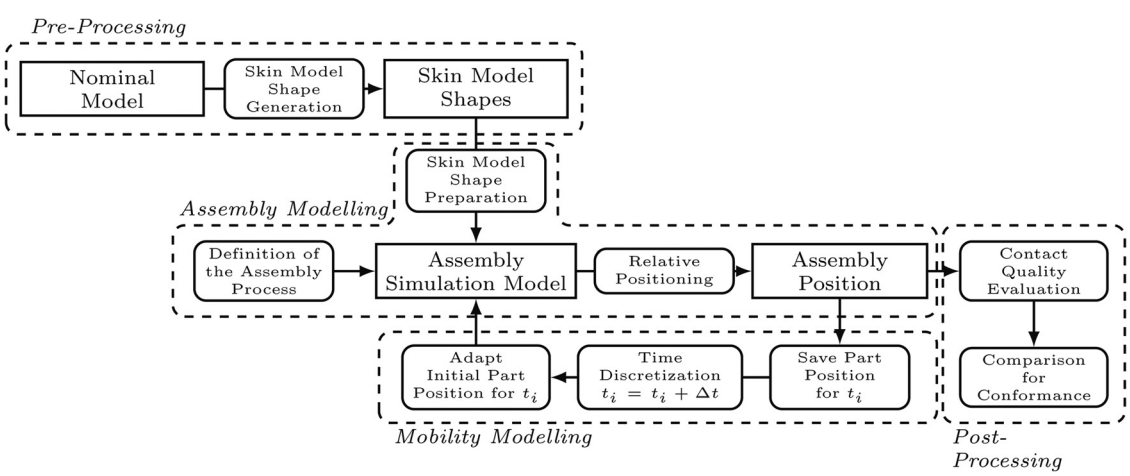



**Fig. 2 Simulation framework**



Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms

$$\min f(\alpha(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \tag{1}$$

In order to express the rigid body transformation $\alpha$, we linearize it as $\alpha(\boldsymbol{Y}) \approx \boldsymbol{m}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{Y})$ according to Pottmann et al. [24], where

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Y} \tag{2}$$

Since this represents an affine transformation, which is not necessarily a rigid body transformation, the resulting velocity vector field is projected to the corresponding helical motion after the optimization (see Ref. [24] for further detail). With $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, this leads to a minimization problem of dimension six

$$\min_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \tag{3}$$

For the purpose of considering assembly processes with invariant and constrained degrees of freedom, constraints for certain components of $\boldsymbol{t}$ and $\boldsymbol{r}$ are added. The framework for the relative positioning, which is based on Ref. [15], can be seen from Fig. 3.

In the following, several objective functions for the assembly simulation are presented and discussed, which are illustrated for two nonideal planes in Fig. 4.

- Convex hull volume: The idea behind this objective function is to minimize the volume between the features of both parts. For this purpose, the volume of their joint convex hull is computed and minimized. In this regard, the objective functions yields to

$$f_{\text{Hull}}(\cdot) = \text{CV}(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{m}(\boldsymbol{Y})) \tag{4}$$

where CV $(\cdot)$ returns the convex hull volume.

- Euclidean distance: Similarly to the ICP algorithm, the sum of the squared Euclidean point-to-point distances serves as the objective function. However, in the proposed approach, these point-to-point distances are not computed for all point combinations between $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{Y}$, but for every point of the moving part $\boldsymbol{Y}$, the corresponding point in the fixed part $\boldsymbol{X}$ is determined. For this purpose, the nearest neighbor for every point of the moving part $\boldsymbol{y}_i$ based on the Euclidean distance is computed

$$\boldsymbol{x}_{y_i} = \arg\min_j \left\| \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{x}_j \right\| \tag{5}$$

Based thereon, the sum of Euclidean distances between all points of $\boldsymbol{Y}$ and their correspondences in $\boldsymbol{X}$ is minimized, i.e., the objective function yields to

$$f_{\text{Euclid}}(\cdot) = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{d}_{\text{E}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}\right)^2 \tag{6}$$

where $\boldsymbol{d}_{\text{E}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}\right)$ returns the Euclidean distance between the adjusted point $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i)$ and its nearest neighbor $\boldsymbol{x}_{y_i}$, i.e., $d_{\text{E}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}\right) = \left\| \boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i) - \boldsymbol{x}_{y_i} \right\|$.

- Weighted unsigned distance: Since assembly processes are usually performed along a certain predominant direction, this direction is used to determine the weighted unsigned distance between the point in $\boldsymbol{Y}$ and their correspondences

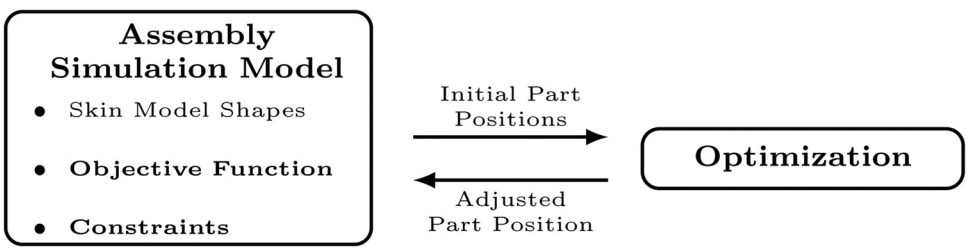



**Fig. 3 The relative positioning framework following [15]**

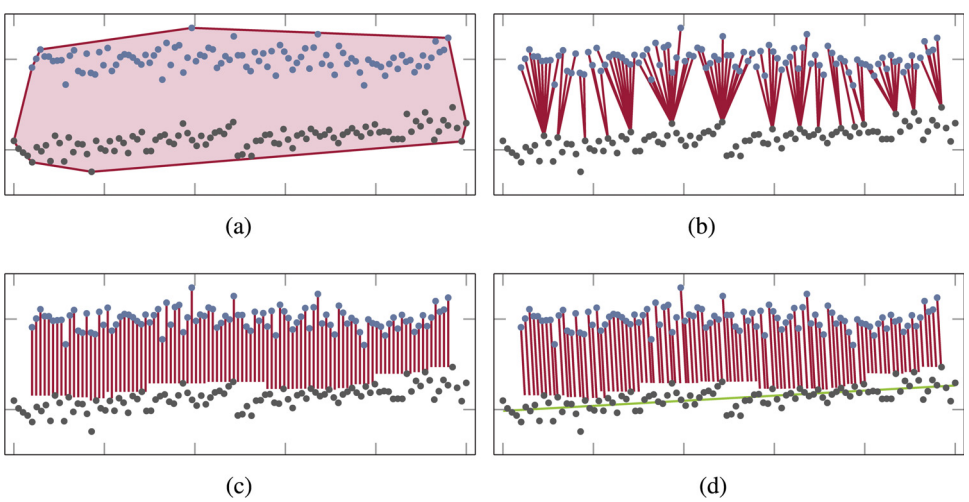



**Fig. 4 The objective functions for the minimization (*a*) $f_{\text{Hull}}(\cdot)$, (*b*) $f_{\text{Euclid}}(\cdot)$, (*c*) $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$, (*d*) $f_{\text{W-Normal}}(\cdot)$**



Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms

$$f_{\mathrm{W}}(\cdot) = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{d}_{\mathrm{W}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right) \tag{7}$$

where $\boldsymbol{d}_{\mathrm{W}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right)$ returns the weighted distance between the adjusted point $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i)$ and $\boldsymbol{x}_{y_i}$: $d_{\mathrm{W}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right) = |(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i) - \boldsymbol{x}_{y_i}) \cdot \boldsymbol{w}'|$. In order to define the weight-vector $\boldsymbol{w} = [w_1 w_2 w_3]^{\mathrm{T}}$, two approaches are proposed.

- Assembly direction: The weights are defined following the assembly direction, which is the main direction for the assembly step in the global coordinate system. For example, if the feature assembly is performed in $z$-direction, the weights yield to $\boldsymbol{w} = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$. We denote the objective function using this weighted unsigned distance $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$.
- Fixed part normal: The weights correspond to the surface normal of the mating plane of the fixed part. The normal vector of the mating plane is evaluated applying the principal component analysis on the fixed mating plane, where the normal can be found as the third principal component. The objective function is denoted by $f_{\text{W-Normal}}(\cdot)$.

• Weighted signed distance: In contrast to the weighted unsigned distance, the weighted signed distance can be seen as an indicator whether or not the parts collide. However, since a minimization of the signed distance would lead to a highly negative value of the objective function, its absolute value is used

$$f_{\mathrm{WS}}(\cdot) = \sum_{i=1}^{M} \left|\boldsymbol{d}_{\mathrm{WS}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right)\right| \tag{8}$$

Similarly to the weighted unsigned distance, $\boldsymbol{d}_{\mathrm{WS}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right)$ returns the weighted signed distance between the adjusted point $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i)$ and $\boldsymbol{x}_{y_i}$ : $(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i) - \boldsymbol{x}_{y_i}) \cdot \boldsymbol{w}'$. In order to define the weight-vector $\boldsymbol{w} = [w_1 w_2 w_3]^{\mathrm{T}}$, we use the approaches explained in the previous item.

Furthermore, the weighted signed distance function can be added as a constraint for the minimization of the weighted unsigned distance functions [20]. In this regard, the minimization problem (3) yields to

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{r}} f_{\mathrm{W}}(\cdot) \\ &\text{subject to } \boldsymbol{d}_{\mathrm{WS}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, -\boldsymbol{w}\right) \leq 0 \quad \forall_{\boldsymbol{y}_i \in \boldsymbol{Y}} \end{aligned} \tag{9}$$

In this context, the same weight-vector $\boldsymbol{w}$ is used for the objective function and the constraints.

Figure 5 shows the results of the relative positioning for two simple point clouds and different objective functions with and without constraints. It can be seen, that the adding of constraints based on signed weighted distances (Figs. 5(*e*) and 5(*f*)) leads to less intersecting part positions, whereas the minimization of the convex hull volume (Fig. 5(*a*)) results in a "tight" assembly. This issue is addressed in Sec. 4.2.

**4.2 Contact Quality Evaluation.** Since the point cloud representation of skin model shapes does not provide a closed workpiece surface, it is not possible to precisely determine and simulate the contact between parts in an assembly. Thus, for comparing different approaches and objective functions for the relative positioning, a contact quality evaluation has to be performed. For this purpose, the signed weighted assembly distance $\boldsymbol{d}_{\mathrm{WS}}\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_i), \boldsymbol{x}_{y_i}, \boldsymbol{w}\right)$ can be used, since it enables a straightforward interpretation: Any negative value of the signed weighted assembly direction distance is a hint of interpenetration, whereas large values indicate a floating position. In order to evaluate the contact quality of the resulting assembly, the distribution of the point-to-point weighted signed distance is analyzed.

Figure 6 shows the histograms of the assembly weighted signed distance $\boldsymbol{d}_{\mathrm{WS}}$ for the different objective functions. These distances are obtained by determining the assembly weighted signed distance as defined in Eq. (8) using the assembly direction as

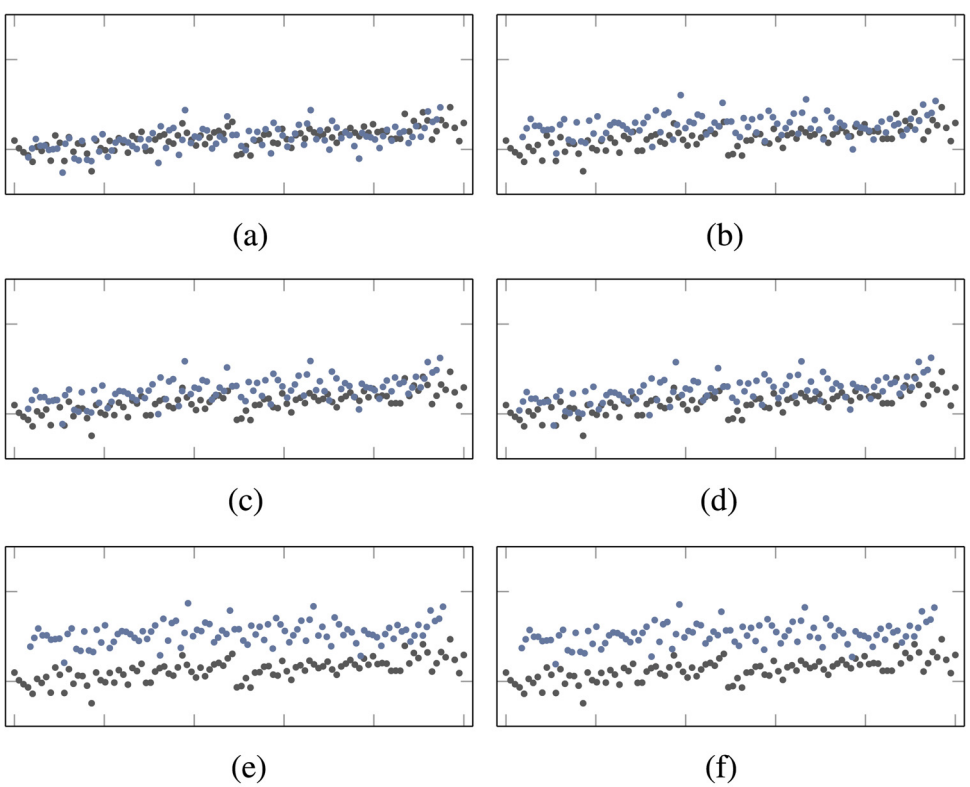



**Fig. 5 Results of the assembly simulation for two exemplary point clouds (*a*) $f_{\text{Hull}}(\cdot)$, (*b*) $f_{\text{Euclid}}(\cdot)$, (*c*) $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$, (*d*) $f_{\text{W-Normal}}(\cdot)$, (*e*) $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$ (con.), and (*f*) $f_{\text{W-Normal}}(\cdot)$ (con.)**



Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms

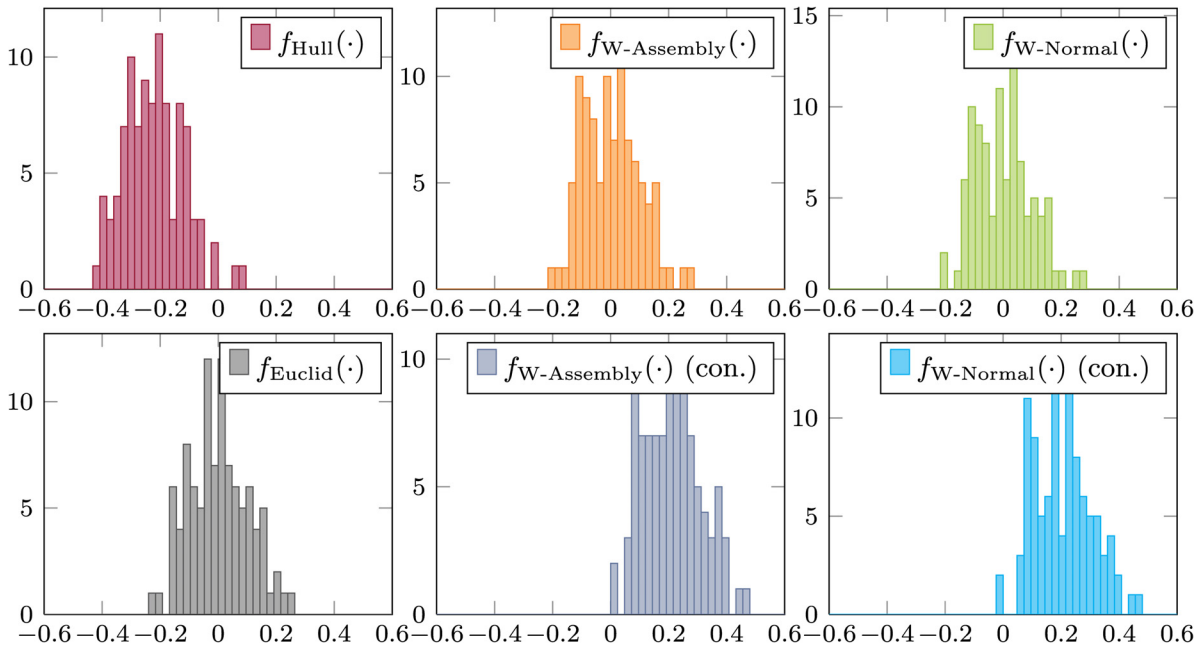



**Fig. 6 Histogram of the signed weighted distance for different objective functions**

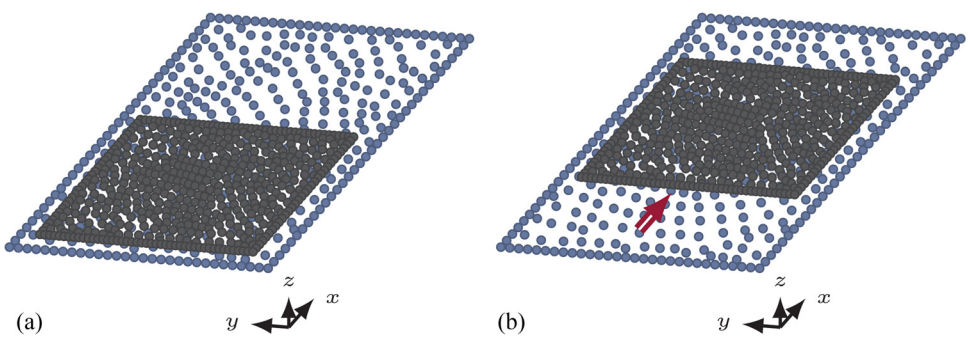



**Fig. 7 Adaption of the initial part position for discrete time steps (*a*) initial position in *x*-direction for $t_0$ and (*b*) initial position in *x*-direction for $t_i$**

weighting vector $\boldsymbol{w}$ after the assembly simulation for the point clouds from Fig. 5. It can be seen that the convex hull volume minimization leads by trend to an interpenetration of the assembly parts (comparably large amount of negative distances), whereas the constrained weighted distance functions tend to a floating contact (comparably large amount of positive distances). Therefore, the adding of constraints, particularly by using the signed assembly direction weighted distance, leads to more realistic results for rigid part assemblies.

**4.3 Simulation of Mobility.** The mobility simulation is treated as a sequence of assembly simulations for different initial part positions. Thereby, the motion behavior of moving mechanism can be simulated considering geometric part deviations. In order to perform this, the motion time is discretized to a finite number of time steps $t_i$, where the distance between these time steps $\Delta t$ depends on the discretization level. For each of these time steps, the initial position of the moving part is set according to the nominal pre-assembly position for the corresponding time step, which can be seen from Fig. 7, where the initial part position is altered in $x$-direction according to the current time step $t_i$. Based on the adapted part position, the assembly simulation is performed. Finally, the resulting part position is used to obtain the trajectory of the moving part in the postprocessing stage.

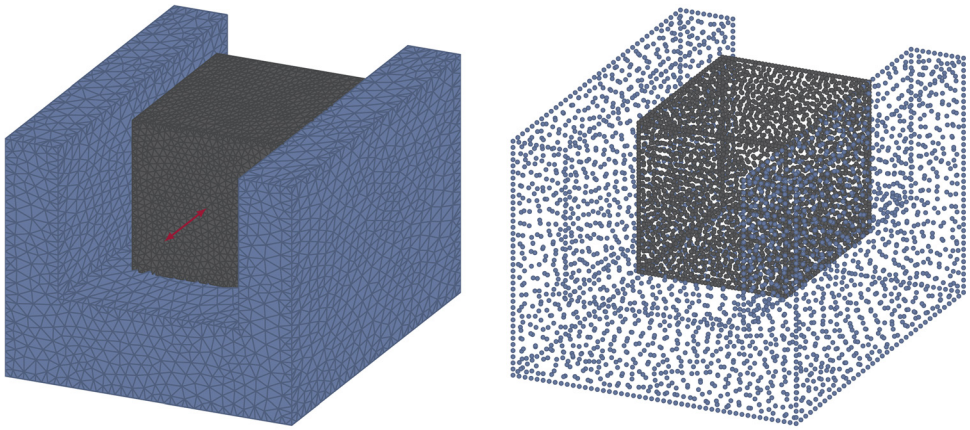
## 5 Application and Results

The approaches for the assembly and mobility simulation are applied to a case study of a slider mechanism as illustrated in Fig. 8. The gray block is translated along the $x$-direction guided by the blue clip. In this regard, the key characteristic is the deflection of the block's trajectory in $x$-, $y$-, and $z$-direction compared to the trajectory of the nominal parts.

**5.1 Preprocessing and Assembly Modeling.** The simulation of assembly and mobility for the slider mechanism starts with the generation of skin model shapes for both parts. For this purpose, a random field approach is selected, which is based on the deviation of each part's points along their vertex normals according to spatially correlated random variables [5,6]. Thus, spatially correlated Gaussian random values are generated and all points $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{Y}$ of the tessellated nominal model are deviated in the direction of their local normals by these values. For this purpose, we chose an isotropic, zero-mean Gaussian random field ($\mu = 0.0$) with a correlation length of $l_\rho = 25.0\,\mu$m and a homogeneous standard deviation of $\sigma = 1.0\,\mu$m, which results in flatness deviations from 2.5 to 6.5 $\mu$m. Figure 9(*a*) illustrates resulting skin model shapes for both the block and the clip, where the colors

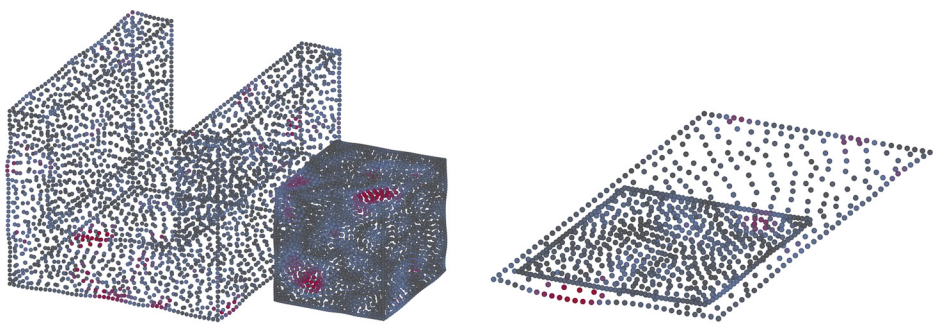


Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms



(a) (b)

**Fig. 8 Slider mechanism (*a*) mesh representation and (*b*) point cloud representation**



(a) (b)

**Fig. 9 Partitioning of the skin model shapes for the assembly modeling (*a*) skin model shapes of the block and the clip and (*b*) Partitioning of the skin model shapes**

indicate the geometric deviations with respect to the nominal model.

The skin model shapes are then prepared for the assembly modeling by the application of GeoSpelling operations, i.e., the relevant workpiece features are extracted, which leads to two planes represented by point clouds, as can be seen from Fig. 9(*b*). Furthermore, the assembly process is defined, as a straight plane-to-plane assembly in $z$-direction. For the resulting assembly simulation model, the relative positioning is performed employing different objective functions, as previously highlighted.

**5.2 Mobility Modeling.** For the simulation of the kinematic behavior, the motion space of the block in $x$-direction is discretized in 11 steps. For each of these steps, the initial pre-assembly position is adapted and the relative positioning is performed. As a result, the assembly position for each of the motion steps is obtained. Based thereon, the trajectory of the block is determined. Figure 10(*a*) shows the trajectories of ten skin model shapes for the translation employing the constrained assembly direction weighted distance as the objective function ($f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$). It can be seen, that the geometric deviations influence the motion of the block in two manners: First, the form deviations of both planes lead to a translation of the block in $z$-direction ($t_z$) compared to the nominal trajectory (straight horizontal line), and second, they lead to rotations of the block around the $x$- and $y$-axis ($r_x$, $r_y$) because of tipping. By specifying geometric form tolerances, these effects can be reduced. Thus, the presented approach can support tolerancing decisions during the design of mechanism.

**5.3 Discussion.** The presented approach for the assembly and mobility simulation of skin model shapes represented by point clouds enables the prediction of the effects of geometric deviations on the assembly positions and the kinematic behavior. It focuses on a geometric consideration of rigid part assemblies and employs numerical optimization approaches for the contact estimation. Several objective functions for the optimization have been presented, where it can be found, that the constrained assembly direction weighted distance leads to promising results. Furthermore, the required computation time is admissible compared to the other functions as can be seen from Table 1. However, an unsolved issue of the approach is the neglect of physical phenomena, such as friction, gravity, and part compliance. Despite this, by adjusting the parameters of the objective functions, such as the weight-vector $\boldsymbol{w}$, this lack can be partly compensated.

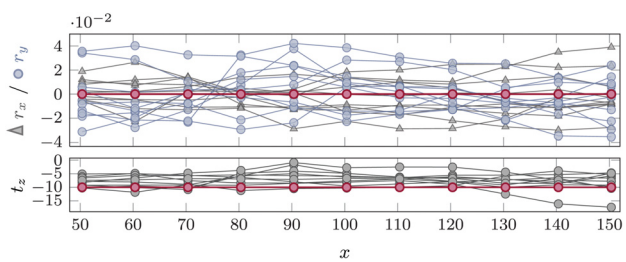



**Fig. 10 Trajectories of skin model shapes of the slider mechanism**



Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms

**Table 1 Mean computing time for the relative positioning ($M = 532$)**

| $f_{\text{Hull}}(\cdot)$ | $f_{\text{Euclid}}(\cdot)$ | $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$ | $f_{\text{W-Assembly}}(\cdot)$ (con.) |
|---|---|---|---|
| 11.6349 s | 4.2990 s | 20.0446 s | 2.8481 s |

## 6 Conclusion and Outlook

In this paper, a framework for the simulation of the assembly and kinematic behavior of nonideal workpieces represented by point clouds is proposed. This approach for the assembly and mobility simulation of skin model shapes is capable of predicting the effects of geometric part deviations on the functional requirements in tolerance analysis. It can be found, that the results of the optimization-based simulation of assembly positions, which is depicted as relative positioning, highly depend on the employed objective function. The main benefit of this framework can be seen in enabling a coherent and complete tolerancing process based on GeoSpelling as an univocal language for the geometric product specification and verification. However, future research efforts will focus on the generalization of this framework to more complex assembly processes, the consideration of the assembly sequence in order to simulate multistep assemblies, and on regarding physical phenomena, such as friction and gravity. Moreover, the validation of the proposed approaches with measurement results will be conducted.

## Nomenclature

CAD = computer-aided design
CAT = computer-aided tolerancing
GPS = geometrical product specification and verification

## References


[1] Ballu, A., Mathieu, L., and Dantan, J.-Y., 2003, "Global View of Geometrical Specifications," *Geometric Product Specification and Verification: Integration of Functionality*, P. Bourdet and L. Mathieu, eds., Springer, Dordrecht, Netherlands, pp. 13–24.

[2] Mathieu, L., and Ballu, A., 2007, "A Model for a Coherent and Complete Tolerancing Process," *Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing*, J. Davidson, ed., Springer, Dordrecht, Netherlands, pp. 35–44.

[3] Dantan, J.-Y., Ballu, A., and Mathieu, L., 2008, "Geometrical Product Specifications—Model for Product Life Cycle," Comput.-Aided Des., **40**(4), pp. 493–501.

[4] Anwer, N., Ballu, A., and Mathieu, L., 2013, "The Skin Model, a Comprehensive Geometric Model for Engineering Design," CIRP Ann.-Manuf. Technol., **62**(1), pp. 143–146.

[5] Schleich, B., Walter, M., Wartzack, S., Anwer, N., and Mathieu, L., 2012, "A Comprehensive Framework for Skin Model Simulation," ASME, Nantes, ed., ASME Paper No. ESDA2012-82204.

[6] Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., and Wartzack, S., 2014, "Skin Model Shapes: A New Paradigm Shift for Geometric Variations Modelling in Mechanical Engineering," Comput.-Aided Des., **50**, pp. 1–15.

[7] Anwer, N., Schleich, B., Mathieu, L., and Wartzack, S., 2014, "From Solid Modelling to Skin Model Shapes: Shifting Paradigms in Computer-Aided Tolerancing," CIRP Ann.-Manuf. Technol., **63**(1), pp. 137–140.

[8] Chase, K., and Parkinson, A., 1991, "A Survey of Research in the Application of Tolerance Analysis to the Design of Mechanical Assemblies," Res. Eng. Des., **3**(1), pp. 23–37.

[9] Hong, Y., and Chang, T., 2002, "A Comprehensive Review of Tolerancing Research," Int. J. Prod. Res., **40**(11), pp. 2425–2459.

[10] Li, B., and Roy, U., 2001, "Relative Positioning of Toleranced Polyhedral Parts in an Assembly," IIE Trans., **33**(4), pp. 323–336.

[11] Franciosa, P., Gerbino, S., and Patalano, S., 2010, "Modeling and Simulation of Assembly Constraints in Tolerance Analysis of Rigid Part Assemblies," *Product Lifecycle Management: Geometric Variations*, ISTE, Wiley, London, pp. 209–229.

[12] Franciosa, P., Gerbino, S., and Patalano, S., 2010, "Variational Modeling and Assembly Constraints in Tolerance Analysis of Rigid Part Assemblies: Planar and Cylindrical Features," Int. J. Adv. Manuf. Technol., **49**(49), pp. 239–251.

[13] Samper, S., Adragna, P.-A., Favreliere, H., and Pillet, M., 2009, "Modeling of 2d and 3d Assemblies Taking Into Account Form Errors of Plane Surfaces," ASME J. Comput. Inf. Sci. Eng., **9**(4), p. 041005.

[14] Formosa, F., and Samper, S., 2007, "Modal Expression of Form Defects," *Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing*, J. Davidson, ed., Springer, Dordrecht, Netherlands, pp. 13–22.

[15] Stoll, T., Wittmann, S., Helwig, S., and Paetzold, K., 2007, "Registration of Measured and Simulated Non-Ideal Geometry Using Optimization Methods," Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, A. Weckenmann, ed., Paper No. BV1.

[16] Stoll, T., Wittmann, S., and Meerkamm, H., 2009, "Tolerance Analysis With Detailed Part Modeling Including Shape Deviations," Proceedings of the 11th CIRP International Conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy, M. Giordano, F. Villeneuve, and L. Mathieu, eds, Paper No. C5-1.

[17] Besl, P., and McKay, N. D., 1992, "A Method for Registration of 3-d Shapes," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., **14**(2), pp. 239–256.

[18] Kockara, S., Halic, T., Iqbal, K., Bayrak, C., and Rowe, R., 2007, "Collision Detection: A Survey," IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Montreal, pp. 4046–4051.

[19] Huang, Q.-X., Flöry, S., Gelfand, N., Hofer, M., and Pottmann, H., 2006, "Reassembling Fractured Objects by Geometric Matching," ACM Trans. Graphics, **25**(3), pp. 569–578.

[20] Flöry, S., 2009, "Fitting Curves and Surfaces to Point Clouds in the Presence of Obstacles," Comput. Aided Geom. Des., **26**(2), pp. 192–202.

[21] Flöry, S., and Hofer, M., 2010, "Surface Fitting and Registration of Point Clouds Using Approximations of the Unsigned Distance Function," Comput. Aided Geom. Des., **27**(1), pp. 60–77.

[22] Zhang, M., Anwer, N., Mathieu, L., and Zhao, H. B., 2011, "A Discrete Geometry Framework for Geometrical Product Specifications," Proceedings of the 21st CIRP Design Conference, Kaist, M. K. Thompson, ed., Paper No. 20.

[23] Zhang, M., Anwer, N., Stockinger, A., Mathieu, L., and Wartzack, S., 2013, "Discrete Shape Modeling for Skin Model Representation," Proc. Inst. Mech. Eng., Part B, **227**(5), pp. 672–680.

[24] Pottmann, H., Leopoldseder, S., and Hofer, M., 2004, "Registration Without Icp," Comput. Vision Image Understanding, **95**(1), pp. 54–71.




**Downloaded From: http://computingengineering.asmedigitalcollection.asme.org/ on 04/10/2015 Terms of Use: http://asme.org/terms**

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Procedia CIRP 10 (2013) 112 – 118

www.elsevier.com/locate/procedia

12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing

# Curvature-based registration and segmentation for multisensor coordinate metrology

Haibin Zhao[a], Nabil Anwer[b]*, Pierre Bourdet[b]

[a]*Department of Mechanical Engineering, KU Leuven, Belgium*
[b]*LURPA-ENS Cachan, 61, Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France*

**Abstract**

With the rapid development of multiple sensors for shape acquisition and inspection, point-based discrete shape modeling is being widely used in many engineering applications, e.g. reverse engineering, quality control, etc. Geometry processing, which aims at recovering information about topology, geometry and shape from the measured data is one of the critical issues to achieve multiple sensors integration in coordinate metrology. This paper presents a novel approach for discrete geometry processing in multisensor coordinate metrology. Two important issues are addressed here: registration and segmentation. We propose here a new modified Iterative Closest Point (ICP) algorithm to improve the registration performances by using the curvature information. Shape recognition and segmentation are the most critical issues of discrete geometry processing. The local surface types and the characteristic points are first recognized based on two surface descriptors: shape index and curvedness. A clustering method is developed to classify the vertices according to their surface types, and a connected region generation approach is developed for final segmentation. Finally, an industrial case study is presented to illustrate the entire approach, and to demonstrate the validity of the proposed methods for engineering applications.

© 2013 The Authors. Published by Elsevier B.V. Open access under CC BY-NC-ND license.
Selection and peer-review under responsibility of Professor Xiangqian (Jane) Jiang

*Keywords:* multisensor; coordinate metrology; registration; segmentation; discrete curvatures

## 1. Introduction

With the rigorous and tightening requirements on measurement accuracy of complex shapes, multiple sensors are increasingly being employed in coordinate metrology. Multisensor integration and fusion process data of various sensors for holistic shape acquisition, while improving reliability and reducing measurement uncertainty [1]. With multisensor integration, shapes can be acquired by the most suitable combination of sensors. In general, the different sensors acquire the measurement information in different formats (image intensity, surface descriptors, volume data, etc.) at different resolutions and details. As a result, the following problems are arisen: How to fuse multisensor data for complete shape representation and how to derive the most interesting information from the acquired discrete shapes. Geometry processing, which aims at recovering information about topology, geometry and shape from the measured data is one of the critical issues to achieve multiple sensors integration in coordinate metrology. This paper presents a novel approach for discrete geometry processing in multisensor coordinate metrology. Two important issues are addressed here: shape registration and segmentation.

Registration is one of the most important and decisive steps of multisensor integration [1]. The point data acquired by multiple views/sensors are usually represented in their own coordinate systems. Registration is used to transform the respective data into a common coordinate system and to obtain the complete model. The common used methods for data registration include marker based approaches [2], and ICP (Iterative

* Corresponding author. Tel.: +33-(0)147402413; fax: +33-(0)147402220.
E-mail address: anwer@lurpa.ens-cachan.fr.

2212-8271 © 2013 The Authors. Published by Elsevier B.V. Open access under CC BY-NC-ND license.
Selection and peer-review under responsibility of Professor Xiangqian (Jane) Jiang
doi:10.1016/j.procir.2013.08.020

Closest Point) based algorithms [3]. Considerable ICP variants have been proposed in the literature, such as trimmed ICP [4], lookup matrix based ICP [5], etc.

Shape recognition and segmentation are the most critical parts of discrete geometry processing [6-8]. The developed segmentation methods can be classified into three categories: edge-based, region-based and hybrid-based. The edge-based methods [6] first detect the edges (or boundaries) of discrete models and the regions are then partitioned accordingly. Region-based methods [9], on the other hand, attempt to generate regions (points with similar properties) first. The boundaries are then computed from the regions. Edge-based methods are sensitive to the noise while region-based methods are a very time consuming problems [8]. The hybrid approaches [7, 10] combining the edge-based and region-based information have been emphasized in recent years to overcome the limitations of the two above approaches.

According to the author's knowledge, despite there have already been a large amount of works on registration and segmentation, key issues considering real shapes, noise and multiple resolutions have not been successfully solved yet. For registration, to improve convergence speed, invariant feature based ICP algorithms [11] have been developed. However, there is not a thorough investigation of registration from the perspective of invariant features based on curvatures. For segmentation, the problem to decompose the real noisy data has not been solved yet. Therefore, this paper proposes curvature based methods which focus on the registration and segmentation problems in engineering applications.

The main contributions of this paper are twofold. First, we propose a new way to improve the ICP registration performance by using curvature information. The Euclidean distance and the curvature distance are combined together as a new measure of closest points. Our second contribution is to develop a new method to segment triangular mesh models for engineering applications. The proposed method is implemented to segment both tessellated CAD models and the measured data.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 2 describes the curvature-based registration method. Section 3 presents the segmentation method in details. In section 4, a real industrial case is studied to test the performances of the proposed methods and finally section 5 is the conclusion of this work.

## 2. Data registration

Registration transforms the multiple data acquired from different sensors/views into a common coordinate system. In this section, we propose a new registration method based on ICP algorithm. This method solves the registration problem of partial overlapping shapes with unknown correspondences. The proposed method is based on curvature information. Therefore, we first develop the methods needed to estimate discrete curvatures.

### *2.1. Discrete curvature estimation*

The raw data acquired directly from sensors are usually noisy, incomplete, redundant, etc. They should be preprocessed first to before discrete curvature estimation. Moreover, they also need to be approximated by proper watertight polyhedral surfaces in order to build the topology structures of shapes.

Due to the linear smoothness of the input mesh, the discrete curvature estimation is subject to various definitions [12, 13]. We have implemented here the work of Cohen-Steiner and Morvan [12] based on the Normal Cycle. For each vertex, the curvature tensor is calculated and the principal curvature values and directions are computed as the eigenvalues and the eigenvectors of the curvature tensor.

This estimation method is efficient and robust to provide reasonable results for noisy data. Moreover, The Cohen-Steiner and Morvan method can estimate the principal curvatures and the principal directions directly. These attributes are the basis of the computation of the shape index and the curvedness (see section 3.1) which are two important surface descriptors in our segmentation method.

### *2.2. Data registration*

The ICP algorithm [3] and its variants are the most popular methods for data registration. However, they usually require that the data be already aligned roughly in an initialization stage (coarse registration). In our case, we first search the corresponding features within the input point data, and then calculate the transformation between the detected features. Finally, we align the input data together. Because of the limited extent of the paper, the detailed coarse registration is omitted. More details can be found in [14].

After coarse registration, the general process of the ICP algorithm contains three procedures: (1) corresponding point pairs searching; (2) transformation matrix calculation and (3) alignment error computation and comparison. We propose a new modified ICP algorithm to improve the registration performances by using the curvature information. The new method also follows the three basic procedures as the classical ICP algorithm. The main contribution of the proposed method is that it defines a new distance called geometry distance to measure the closest point in corresponding

point pair searching. In this section, we denote the proposed method as CFR (Curvature-based Fine Registration). In registration process, the movable point data is denoted as scene data while the point data that is viewed as the reference is denoted as model data.

Considering an arbitrary point in the scene data $p_i$, and another arbitrary point $q_j$ in the model data, The geometry distance is defined as:

$$d_g(p_i,q_j)=\lambda\cdot d_e(p_i,q_j)+(1-\lambda)\cdot d_c(p_i,q_j) \qquad (1)$$

Where, $d_e(p_i,q_j)=\| p_i-q_j \|$ is the Euclidean distance between $p_i$ and $q_j$. $d_c(p_i,q_j)$ is the curvature ratio distance between the two points, which has the following definition:

$$d_c(p_i,q_j)=\sqrt{(\frac{1}{\kappa_1(p_i)}-\frac{1}{\kappa_1(q_j)})^2+(\frac{1}{\kappa_2(p_i)}-\frac{1}{\kappa_2(q_j)})^2} \qquad (2)$$

$\kappa_1(p_i)$ and $\kappa_2(p_i)$ ( $\kappa_1(q_j)$ and $\kappa_2(q_j)$ ) are the maximum and minimum principal curvatures of $p_i$ ( $q_j$ ) respectively.

The curvature ratio distance and the Euclidean distance have the same length dimension. That's the reason why we use curvature ratio distance as the way to integrate the curvature information in geometry distance definition.

$\lambda\in[0,1]$ is the weight to balance the contributions of $d_e(p_i,q_j)$ and $d_c(p_i,q_j)$. The registration performance depends on the values of $\lambda$ (see more details in [14]). Experimentally, if $\lambda$ is set between [0.1, 0.8], the CFR method usually provides satisfying performances.

In the corresponding point pairs searching stage, we apply the geometry distance instead of Euclidean distance to measure the closest point. For each scene point, the CFR searches its closest point in the model data. Because of the partial overlapping of the two input point data, the mismatched point pairs should be identified and rejected. In our method, we reject the point pairs which either has the larger geometry distances or the boundary point pairs. After rejection process, the reliable matched point pairs are used to calculate the geometric transformation between the two point data.

Figure 1 gives an example of the registration results. The two input data (figure1. (a) (b)) contain 11831 and 10434 points respectively. The alignment error of the CFR method is 0.000848mm, taking 1644.25s with 13 iteration times (figure1. (d)) while the ICP algorithm takes 2911.78s with 40 iteration times and an alignment error of 0.01529mm (figure1. (c)).

(a) (b) input data (c) ICP method (d) CFR method

Fig. 1: Registration results and comparison

## 3. Discrete shape recognition and segmentation

We assume here that the initial discrete shapes are in the form of dense sets of points and can be broken down into various components, which meet along sharp or smooth edges. We also assume that the segmented components can be represented by lower order bivariate polynomials with degree no higher than three [9], which covers many engineering applications. With the above assumptions, our proposed method can always provide robust and accurate segmentation results. The method can be decomposed into three main phases: discrete shape recognition, vertex clustering and connected region generation.

### *3.1. Discrete curvature estimation*

The main indicators for surface type recognition in this paper are shape index and curvedness [15]. Shape index and curvedness are two shape indicators that specify the second order geometry of a shape. Shape index is a quantitative measure of the local surface type of a point on a surface. Mathematically, it is defined as a single value within [-1, 1] as in the following formula:

$$s=-\frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}) \qquad (3)$$

Curvedness, as a complementary parameter to the shape index, specifies the amount or intensity of the surface curvatures.

$$c=\frac{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}{2} \qquad (4)$$

Where, $\kappa_1$ and $\kappa_2$ represent the maximum principal curvature and the minimum principal curvature respectively.

### 3.2. Surface type recognition

Koenderink and Doorn [15] defined nine basic surface types (figure 2) in a continuous way only using shape index. This definition is more convenient than the classical one based on Gaussian and Mean curvature. However, planar shapes are not defined based on the values of the shape index (here, we affect the planar shape a shape index equal to 2). The curvedness only vanishes on the ideal planar shape. Hence, a point can be identified as a planar point in practice if its curvedness value $c(p)$ is less than a given threshold $c_{th}$ .

$$c(p) < c_{th} \tag{5}$$

A set of color series is also assigned to represent the different surface types for visualization purpose [15]. A unique integer called surface type label is assigned to each of the ten surface types for convenience of the querying and processing [14]. The detailed specification of the ten defined surface types is highlighted in table 1.

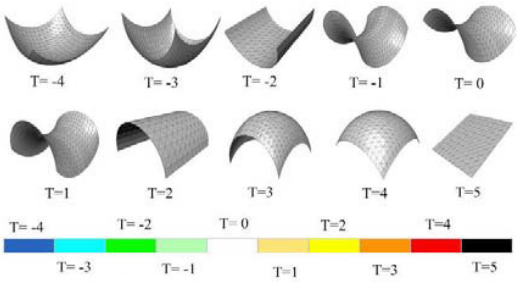



Fig. 2: 10 surface types defined by shape index and curvedness [14, 15]

Table 1: The specifications of the ten predefined surface types [14, 15]

| Surface type label | Surface type | Shape index interval |
|---|---|---|
| T=-4 | Spherical cup | $s \in [-1.0, -0.875]$ |
| T=-3 | Through | $s \in (-0.875, -0.625]$ |
| T=-2 | Rut | $s \in (-0.625, -0.375]$ |
| T=-1 | Saddle rut | $s \in (-0.375, -0.125]$ |
| T=0 | Saddle | $s \in (-0.125, 0.125]$ |
| T=1 | Saddle ridge | $s \in (0.125, 0.375]$ |
| T=2 | Ridge | $s \in (0.375, 0.625]$ |
| T=3 | Dome | $s \in (0.625, 0.875]$ |
| T=4 | Spherical cap | $s \in (0.875, 1.0]$ |
| T=5 | Plane | $s = 2$ |

### 3.3. Vertex clustering

The vertices are first clustered into different categories. The vertices belonging to the same category have the similar characteristics. In our method, the vertices are first classified into ten categories according to their surface types.

Due to measurement errors and computational errors (e.g. meshing error, curvature estimation error, etc.), the initial clustering results are far from being perfect. Therefore, we developed a cluster refining algorithm to improve the clustering performance.

The cluster refining algorithm is based on an iterative process. Given a vertex, we firstly record all the surface types in its one-ring neighborhood. Then, we calculate the refining possibility of every surface type that the given vertex should be refined to. Finally, the surface type of the given vertex is refined into the category whose surface type has the maximum refining possibility. The iteration terminates when the surface type of each vertex doesn't change or user-defined convergence condition occurs.

Given a vertex $v_i$ , its surface type is labeled as $T(v_i)$ , the set of the vertices in its neighbor region is denoted as $N(v_i)$ . For an arbitrary vertex $v_j$ in $N(v_i)$ , its surface type label is denoted as $T(v_j)$ .

- *Cluster distance between non-planar categories*

Here, we consider both $T(v_i)$ and $T(v_j)$ as non-planar shapes. The cluster distance between two vertices $v_i$ and $v_j$ is then defined as:

$$d_c(v_i, v_j) = |T(v_i) - T(v_j)| \cdot \xi \tag{6}$$

Where, $\xi$ is a coefficient that defines the unit distance between two neighbor categories.

- *Cluster distance between planar and non-planar categories*

Considering the singularity of planar shapes, a planar vertex has the same possibility to be refined into any other non-planar categories. Therefore, the cluster distance is defined as:

$$d_c(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & T(v_i) = T(v_j) = 5 \\ 1/9 & T(v_i) = 5, T(v_j) \neq 5 \end{cases} \tag{7}$$

The cluster distance measures the similarity of local surface types between two vertices. Based on the cluster distance, the possibility to refine the vertex $v_i$ into the category $T(v_j)$ is defined as follows:

$$P_{v_i}[v_j] = \frac{[1-d_c(v_i,v_j)]\cdot n_j}{\sum_{N(v_i)}([1-d_c(v_i,v_j)]\cdot n_j)} \quad (8)$$

Where, $n_j$ denotes the number of the vertices whose surface type label is same as $T(v_j)$ in $N(v_i)$.

The possibility $P_{v_i}[v_j]$ gives a quantitative measure of the possibility and reliability to refine the vertex $v_i$ into the category $T(v_j)$. Finally, the vertex $v_i$ will be refined into the category whose surface type has the maximum refining possibility. After several iterations, the vertex clustering algorithm can provide reasonable results.

### 3.4. Connected region generation

Once the vertices are classified into different categories (vertices in the same category have the same surface type), we aim at recovering the connected regions and generate the final segmentation result. Two basic steps are considered here. Connected region growing which is performed to generate the initial segmentation result and region refining which aims to reduce the over-segmented regions and to improve the segmentation result.

#### 3.4.1. Connected region growing

The connected region growing method is based on the connected component labeling technique which is widely used in image processing [16]. When a vacant vertex that hasn't been assigned with a region label is encountered, the vertex will be marked with a region label according to its neighbor condition. With this associated region label, the encountered vertex will either be integrated into an existing region or create a new region. The operation will terminate when there is no blank vertex at all within the given discrete model. The detailed growing mechanism is discussed below.

$v_i$ is the encountered vacant vertex, its one-ring neighborhood is denoted as $N(v_i)$, The surface type label of $v_i$ is denoted as $T(v_i)$. Let, $\Gamma(v_i)$ represent the set of the vertices with surface type as $T(v_i)$ in $N(v_i)$; $\Lambda(v_i)$ denote the set of vertices whose surface type is different from $T(v_i)$ in $N(v_i)$.

When a vacant vertex is encountered, three neighbor conditions may occur, as shown in figure 3. The gray vertices represent the vertices in $\Lambda(v_i)$.

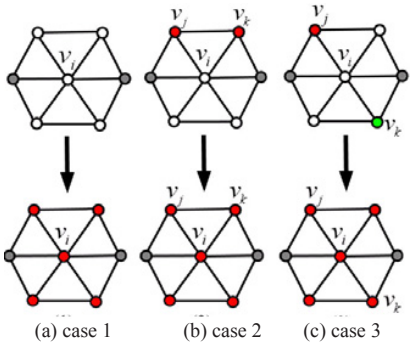



Fig. 3: Neighbor conditions for vacant vertex region labeling

- Case 1 (figure 3 a):

All the vertices in $\Gamma(v_i)$ haven't been labeled yet. . In this case, a new region is created and a new region label $\ell(v_i)$ is associated with this region. The vertex $v_i$ and all the vertices in $\Gamma(v_i)$ are also associated with the new region label $\ell(v_i)$.

- Case2 (figure 3 b):

Some of the vertices in $\Gamma(v_i)$ have already been labeled with same region label (e.g. $\ell(v_j)$). In this case, the vertex $v_i$ and all other vacant vertices in $\Gamma(v_i)$ are associated with this region label $\ell(v_j)$.

- Case 3 (figure 3 c):

Some of the vertices in $\Gamma(v_i)$ have already been labelled, but with different region labels. In this case, if we denote the set of the different region labels as $\gamma$ and $\ell(v_j)$ is the minimum value of $\gamma$, the vertex $v_i$ and all the vacant vertex in $\Gamma(v_i)$ are labelled with $\ell(v_j)$. Moreover, the vertices whose region labels are in $\gamma$ will be searched in the whole discrete model and relabelled as $\ell(v_j)$. This operation aims to reduce the over-segmented regions during the region growing procedures.

#### 3.4.2. Region refining

The performance of the connected region growing depends on the vertex clustering results. The region refining is necessary to reduce the over-segmentation when the result of the connected region growing is not satisfying. Given a pair of adjacent regions $< R_i, R_j >$, we define a region distance to measure their similarity by the following formula:

$$D(R_i, R_j) = d_{ij} \cdot p_{ij} \cdot n_{ij} \quad (9)$$

Where, $d_{ij}$ is a coefficient to measure the surface type similarity between the corresponding regions. $p_{ij}$ is a coefficient considering the boundaries' contribution for the region merging. The coefficient $n_{ij}$ aims at eliminating the region compared to relative smaller

regions. The definitions of the three coefficients are more detailed in [14].

The region refining is performed as an iterative process. A priority queue of adjacent region pairs is generated according to their region distances. The adjacent regions pair with the maximum region distance are picked and merged into one region. The priority queue is then updated accordingly. Both the surface type and region label of the region with larger areas are assigned to the new generated region. The algorithm terminates when the number of the final regions or $D(R_i, R_j)$ reaches a predefined value.

## 4. Industrial case study

The algorithms mentioned in the previous sections have been implemented on a low-end PC platform (1.83 GHz CPU and 1G RAM) and considerable cases have been tested. The implementation is embedded in Microsoft Visual C++ supported by the CGAL libraries [17]. The visualization results are based on OpenGL libraries.

### *4.1. Data acquisition*

A multisensor measurement system integrating three different sensors (Kreon Zephyr KZ25 laser scanner , a Renishaw TP2 probe and a STIL CHR150-CL2 chromatic confocal sensor) is used here (see Figure 4(a)). An automotive water pump cover is selected as a study case (Figure 4(b)).

The pump cover has machined and rough surfaces. It should be an interesting case to test the performances of the proposed approaches for registration and segmentation. The workpiece is fully digitized using the multisensor platform. The data are acquired by laser scanning and touch probing in both complementary and competitive multisensor configurations. The global shape of the pump cover is captured by the laser scanner. The holes and the bottom plane are measured by the touch probe. Finally, 15 groups of scanned point data and 2 groups of probed point data are acquired.

### *4.2. Registration*

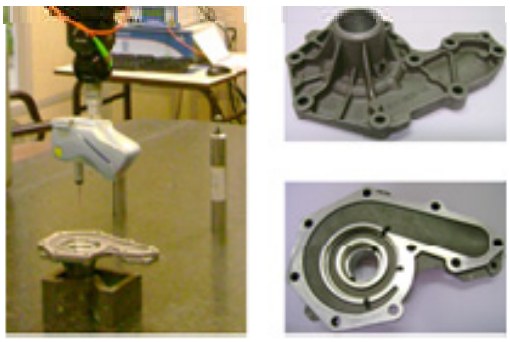
With the obtained 17 groups of point data, the registration process is performed based on an accumulative piecewise registration. Three examples of registration are shown in figure 5. The first example shows the registration of the point data acquired from different views (case 1)of the laser scanner (figure 5 (a)). The second example shows the registration of point data acquired from different poses (case 2) of the workpiece (figure 5 (b)). The last example shows the registration result when the two point data are acquired from different sensors (case 3) (figure 5 (c)). The alignment errors and time performance are shown in table 2. After registration, the complete model of the pump cover is generated. After filtering and denoising, the final complete model is shown in figure 6. It contains 141943 vertices.

### *4.3. Segmentation*

Once the complete model is generated, the principal curvatures are estimated. The shape index and curvedness of the pump cover can then be computed for recognition and segmentation purpose. The final segmentation result of the pump is shown in figure 7 which proves that the result is satisfying for engineering applications.

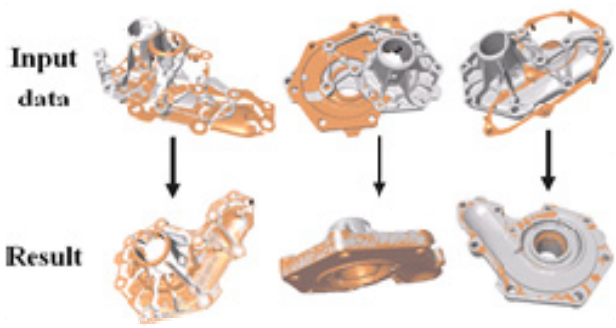
Table 2: Performances of studied cases in figure 5

| case | Size of model data | Size of scene data | Align. error (mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 30868 | 33550 | 0.0319 |
| 2 | 32838 | 21127 | 0.0408 |
| 3 | 17314 | 1200 | 0.0846 |



(a) the multisensor platform (b) the pump cover

Fig. 4: system setup for data acquisition




(a) different views (b) different setups (c) different sensors

Fig. 5: Registration results of the pump cover

Fig. 6: The complete model of the pump cover

Fig. 7: Segmentation results of the pump cover

## 5. Conclusion

This paper presents new curvature-based registration and segmentation methods for coordinate metrology. In registration, we defined a new distance, named geometry distance, which combines the Euclidean distance and the curvature. A comparative analysis proves that the proposed method can provide better registration performances. In segmentation, the proposed method comprises three procedures: boundary identification, vertex clustering and connected region generation. The surface type definition based on shape index and curvedness provides a convenient way for shape recognition. The vertex clustering and connected region growing procedures reduce the noise influence. Finally, an industrial case study is presented to illustrate the entire approach, and to demonstrate the validity of the proposed methods for engineering applications.

## References

[1] Weckenmann A., Jiang X., Sommer K., Neuschaefer-Rube U., Seewig J., Shaw L., Estler T. Multisensor data fusion in dimensional metrology. CIRP Annals- Manufacturing Technology 58, 2 (2009), 701–721.

[2] Kim T.-W., Seo Y.-H., Lee S.-C., Yang Z., Chang M.: Simultaneous registration of multiple views with markers.Computer-Aided Design 41, 4 (2009), 231–239.

[3] Besl P. J., Mckay N. D. A method for registration of 3-d shapes. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 14, 2 (Feb. 1992), 239–256.

[4] Chetverikov D., Svirko D., Stepanov D. The trimmed iterative closest point algorithm. Proc. of IEEE on ICPR'02 3 (2002), 545–548.

[5] Almhdie A., Léger C., Deriche M., Lédée R. 3d registration using a new implementation of the icp algorithm based on a comprehensive lookup matrix: Application to medical imaging. Pattern Recognition letters 28, 12 (2007), 1523–1533

[6] Demarsin K., Vandersatraeten D., Volodine T., Roose D. Detection of closed sharp edges in point clouds using normal estimation and graph theory. Computer-Aided Design 39 (2007), 276–283.

[7] Liu Y., Xiong Y. Automatic segmentation of unorganized noisy point clouds based on the gaussian map. Computer- Aided Design 40 (2008), 576–594.

[8] Varady T., Martin R. R., Cox J. Reverse engineering of geometric models- an introduction. Computer-Aided Design 29, 4 (1997), 255–268.

[9] Besl P. J., Jain R. C. Segmentation through variable order surface fitting. Trans. of IEEE on Pattern Analysis and Machine Intelligence 10, 2 (1988), 167–192

[10] Lavoue G., Dupont F., Baskurt A. A new cad mesh segmentation method, based on curvature tensor analysis. Computer-Aided Design 37, 10 (2005), 975–987.

[11] Sharp G. G., Lee S. W., Wehe D. Icp registration using invariant features. Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 24, 1 (2002), 90–102.

[12] Cohen-Steiner D., Morvan J.-M. Restricted Delaunay triangulation and normal cycle. In 19th Annual ACMSymposium on Computational Geometry'03 (2003), pp. 312–321.

[13] Taubin G. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. IEEE Proc. on Computer Vision and Pattern Recognition (1995), 902–907

[14] Zhao H. Multisensor integration and discrete geometry processing for coodinate metrology. Ph.D Thesis, Ecole Normale Superieure de Cachan, France (2010).

[15] Koenderink J. J., Doorn A. J. Surface shape and curvature scales. Imaging and Vision Computing 10, 8 (1992), 557–565

[16] He L., Chao Y., Suzuki K., Wu K. Fast connected-component labeling. Pattern Recognition 42, 9 (2009), 1977–1987

[17] CGAL User and Reference Manual. CGAL Editorial Board, 3.9 edition. http //www.cgal.org/.

DOI: 10.1007/s12541-014-0405-y

# Comparison of Tactile and Chromatic Confocal Measurements of Aspherical Lenses for Form Metrology

**El-Hayek Nadim[1,4,#], Nouira Hichem[1], Anwer Nabil[2], Damak Mohamed[3,4], and Gibaru Olivier[4]**

1 Laboratoire Commun de Métrologie (LNE-CNAM), Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), 1 Rue Gaston Boissier, 75015 Paris, France
2 Ecole Normale Supérieure de Cachan, University Research Laboratory in Automated Production, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France
3 GEOMNIA: 3D Metrology Engineering and Software Solutions, 165 Avenue de Bretagne, EuraTechnologies 59000 Lille, France
4 Arts et Métiers ParisTech, Laboratory of Information Sciences and Systems (LSIS), 8 Boulevard Louis XIV, 59046 Lille, France
# Corresponding Author / E-mail: nadimhayek@gmail.com, TEL: +33-6-42-58-25-45, FAX: +33-1-40-43-37-37

KEYWORDS: Aspherical surface, Chromatic confocal probe, Form metrology, L-BFGS method, Profilometer, Tactile probe

*Both contact and non-contact probes are often used in dimensional metrology applications, especially for roughness, form and surface profile measurements. To perform such kind of measurements with a nanometer level of accuracy, LNE (French National Metrology Institute (NMI)) has developed a high precision profilometer traceable to the SI meter definition. The architecture of the machine contains a short and stable metrology frame dissociated from the supporting frame. It perfectly respects Abbe principle. The metrology loop incorporates three Renishaw laser interferometers and is equipped either with a chromatic confocal probe or a tactile probe to achieve measurements at the nanometric level of uncertainty. The machine allows the in-situ calibration of the probes by means of a differential laser interferometer considered as a reference. In this paper, both the architecture and the operation of the LNE's high precision profilometer are detailed. A brief comparison of the behavior of the chromatic confocal and tactile probes is presented. Optical and tactile scans of an aspherical surface are performed and the large number of data are processed using the L-BFGS (Limited memory-Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) algorithm. Fitting results are compared with respect to the evaluated residual errors which reflect the form defects of the surface.*

Manuscript received: November 14, 2013 / Revised: March 4, 2014 / Accepted: March 5, 2014

## 1. Introduction

Europe has a leading role in high-end optical products,[1] ultra-precise manufacturing and inspection systems.[2-5] The core sectors being in photonics, lighting, biomedical technologies and optical systems, European shares of the global photonics market range from 25% to 45%.[6] Discussions at the "4th High Level Expert Meeting of the Competence Centre for Ultra Precise Surface Manufacturing" on asphere metrology strongly emphasized the urgent needs of industry for more accurate form measurement and improved asphere standards traceable to the SI[7] Measuring optical surfaces with a nanometric accuracy remains a real challenge in industry. Thus, in 2011, LNE has launched a three-year project entitled "optical and tactile metrology for absolute form characterization" as part of the European Metrology Research Programme[8] (EMRP) with different NMI partners such as PTB, VSL, METAS, SMD, MKEH, IBSPE, TNO, CMI, EJPD, FhG, TU-IL and Xpress, with an aim to improve the measurement of high quality optical surfaces such as aspherical lenses. Current techniques and processes allow for manufacturing aspherical surfaces with machining correction at the nanometer level.[8] However, the accuracy accessible by absolute and traceable form metrology is limiting the manufacturing of modern optical elements, and has to be improved at the nanometer level of accuracy. In the field of ultra-precision 3D metrology, various small-volume coordinate measuring machines (CMMs) have been developed.[9] These machines typically feature 3D measuring ranges less than 100×100×100 mm$^3$, and usually apply the same set of fundamental principles. The main principle consists in achieving high positioning and measuring accuracy with perfect respect to Abbe principle.[10] The instruments can be stylus-based[11] or optical based.[11,12] The traceability of these measuring apparatus are performed using laser interferometers which are traceable to the SI meter definition through a frequency calibration by comparison with an $I_2$-stabilized primary He-Ne laser source.

In this context, the LNE has developed its own new high precision profilometer in collaboration with Digital-Surf Company. The architecture of the profilometer perfectly respects the Abbe principle.

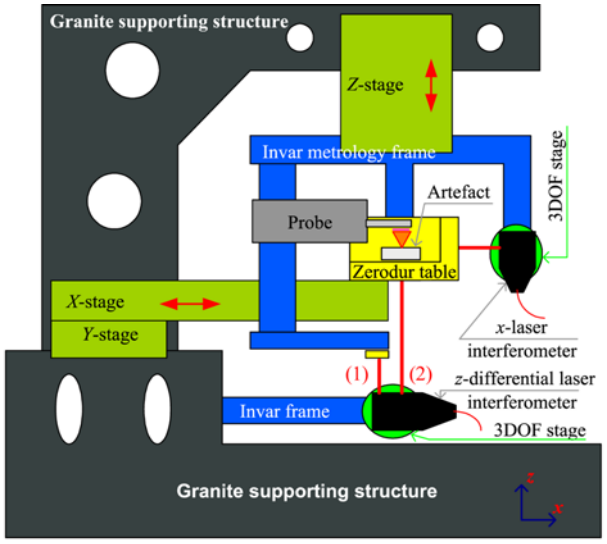
© KSPE and Springer 2014

The metrology loop is minimized as short as possible. The design of the profilometer allows both tactile and chromatic confocal probing. It is equipped with the MountainsMap® surface imaging and metrology software, which is useful for flat and step-height standards. However, this software is not adapted for freeform surfaces and does not include any fitting tools. For this purpose, different non-linear Least-Squares optimization techniques can be considered such as, Gauss-Newton methods, gradient descent methods, a mix of them (Levenberg-Marquardt[13]) or quasi-Newton methods. The quasi-Newton method called L-BFGS is proposed here for the form metrology of aspherical surfaces.[14,15]

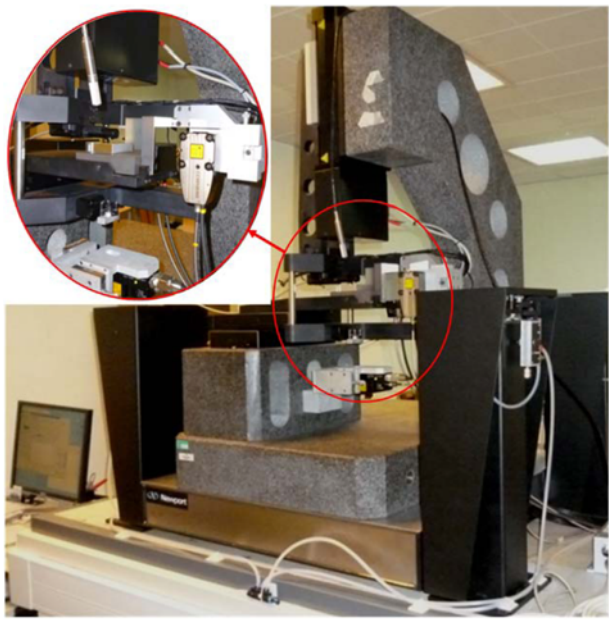
This paper provides details about the architecture of the LNE high precision profilometer on which tactile and optical measurements have been performed. Since the probes represent fundamental elements of the metrology loop, their residual errors are briefly compared and discussed. The measurements are performed over a specific aspherical lens model defined by a conic and a polynomial. The orthogonal Least-Squares fitting of the data to the mathematical model is achieved by applying the L-BFGS optimization method and the residual errors representing the form deviations of the asphere are then compared. The experimental test results reveal that the tactile measurement is more accurate than the optical measurement.

## 2. The LNE High Precision Profilometer

The LNE's apparatus is a high precision profilometer capable of performing nanometric measurements. Three high precision guiding axes equipped with encoders insure three independent translational degrees of freedom, in x-, y- and z- directions (Fig. 1). A Zerodur table on which the measured object is posed travels along x- and y- directions and its movement is controlled by two independent Renishaw laser interferometers to a nanometric level of accuracy. The working range in the xy-plane is 50×50 mm². The fixture of the Zerodur table on the top side of the x-mechanical guiding system is carried-out via three ball with a diameter less than 10 mm, to insure an isostatic links. The probe and its supporting structure are mounted on the vertical guiding system in the z-direction along which the measurement is done (Figs. 1 and 2). The working range of the mechanical guiding system in z-direction is about 100 mm but then the practical working range strongly depends on the travel range of the probe used. A third Renishaw differential laser interferometer controls the movement in z with a nanometric level of accuracy and its use allows shortening the metrology loop. The metrology frame involves parts and components made of Invar which makes it less sensitive to thermal expansion and other environmental fluctuations. The thermal expansion coefficient of Invar is about 1 $\mu$m/m/°C. The thermal behavior of the metrology frame made of Invar with the dimensions of 200×200×200 mm$^3$ is estimated by varying the surrounding temperature by 0.1°C. It generates a temperature change in the Invar structure of less than 0.01°C, especially when the variation of the environment temperature vary smoothly. For this case, the thermal expansion of the metrology frame is estimated to 2 nm which can be considered small. For Zerodur, the thermal expansion coefficient is about 0.05 $\mu$m/m/°C and the dimensions of the table are 200×200×50 mm$^3$. For the same temperature variation, the thermal expansion of the table is even smaller and is estimated to 0.5 nm.




(a)



(b)

Fig. 1 The LNE's high precision profilometer. (a) architecture of the apparatus. (b) Picture of the apparatus

The mechanical guiding systems, the probe and the metrology frame are all supported by a structure made of massive granite. Any vertical expansion or deformation of the supporting frame does not influence the metrology frame since the vertical motion is controlled by the differential laser interferometer. The vertical thermal expansion of the granite structure induces an identical variation of the first and second laser beams of the differential interferometer and is therefore directly compensated. In a differential laser interferometer, only the variations of the distance between the external reference mirror and the external moving mirror are taken into account.

The high precision profilometer applies the dissociated metrology frame principle which means that the metrology frame is dissociated from the supporting frame. The metrology frame is fixed on the

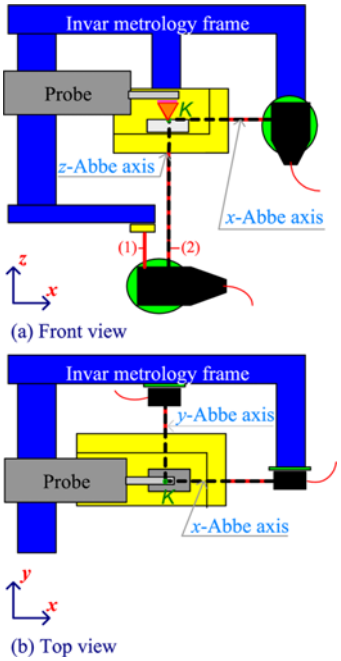



Fig. 2 Schematic of the metrology frame and illustration of all x-, y- and z- Abbe axes

supporting frame using isostatic links (flexible blades) to avoid any transmission of eventual mechanical strain induced by the supporting frame. As a consequence, the metrology frame supports its own mass and only performs the function of measurement.[16,17]

The machine respects the Abbe principle in all directions[11]: the measuring probe's axis and the differential laser interferometer's beam are collinear during the measurement operation. However, during in-situ calibration, the Zerodur table remains fixed. This means that the reference mirror facing beam (1) in Fig. 2 becomes the moving reflector and the underside of the Zerodur table becomes the reference reflector. The touching element of the contact probe in the case of tactile measurement, or the focus point of the optical single point probe in the case of an optical measurement, are coplanar with the x- and y-laser interferometer beams. Since the x- and y- laser interferometers and the probe are all on the same metrology frame, any displacement of the frame induces a displacement of all these elements. The machine is configured to hold both tactile and optical single point scanning probes that can be calibrated in-situ. The Zerodur table is controlled by the three laser interferometers as mentioned above and shown in Fig. 1, so the reflecting elements and the interferometers should be well aligned. Each interferometer beam must be perpendicular to its target reflecting mirror and collinear with the respective direction of motion within the acceptable angle of 25 arc-seconds. A four quadrant photodiode fixed on the moving table is used for the alignment of each laser beam with the direction of motion. The laser beam must theoretically remain focused at the center of the photodiode over the entire travel range. The misalignment is measured and the average value found on this machine for x- and y- motions is about 50 $\mu$rad per 50 mm range. The alignment error is estimated to $6.2510^{-8}$ mm and considered negligible. Since the x-, y- and z- motions are independent, the mirrors facing the laser interferometer beams should be orthogonal among themselves. The evaluation of orthogonality is performed using the LNE's coordinate

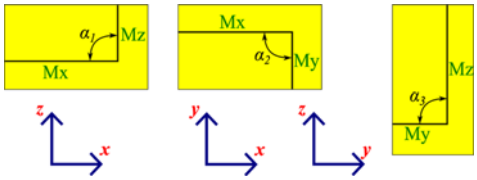



Fig. 3 The moveable Zerodur table angles check by CMM5

measuring machine ("CMM5") which is accurate to 0.5 $\mu$m over a working volume range of 0.5 $m^3$. To guarantee such a volumetric uncertainty, the translation errors (two straightness and one positioning) for each mechanical guiding system, and the rotational errors (pitch, yaw and roll) are calibrated using a ball-bar (alternatively hole-bar) system. Many other instruments can be used for the calibration of CMM such as step gauges, gauge blocks, ball plates, the Zeiss CMM check artefact, hole plates, ball-ended bars, laser interferometers, tracking interferometers and tracer interferometers. The perpendicularity between each two axes is calibrated twice: first, using the ball-bar and then using an angle gauge block. For the perpendicularities between the x-, y- and z-axes, the uncertainty is estimated to 0.8". More details about the calibration of CMM5 are widely presented in.[18-21]

The perpendicularities between the different sides of the Zerodur table are measured by the CMM5 machine (Fig. 3). At least 10 points are measured on each side and the Least-Squares plane is fitted. The angles between normal directions to each of the planes are $\alpha_1$, $\alpha_2$ and $\alpha_3$ and are equal to 90°00'10"±0.8", 89°59'34"±0.8" and 89°59'18.1" ±0.8", respectively. These misalignments are tolerated since they are identified and compensated in the software.

The motion errors of the guiding elements induce inclination of the Zerodur table and must also be corrected in the software. These errors are characterized using the long-term extremely stable and accurate probe, Leica Nivel20 (0.001 mm/m). For the 50 mm working range of the apparatus, the motion induced inclination errors are below 1 nm.

The high precision profilometer is placed in the LNE's cleanroom where environmental conditions are optimal. The temperature is controlled to 20±0.3°C and humidity to 50±5%RH. The variation in temperature is very slow and smooth in the bandwidth ±0.3 which leads to a very low temperature variation in the parts of the machine.

The Newport anti-vibration system as shown in Fig. 1(b) attenuates all low-frequency vibrations generated by the surrounding environment. Furthermore, all the above system is mounted on a concrete anti low-frequency vibration massif that isolates it from the room floor.

The uncertainty budget established for the measurement according to the GUM,[22] takes into consideration all of the aforementioned error sources such as: the error motions of the mechanical guide systems, the Abbe and cosine errors, the dynamics of the machine, the geometry of the Zerodur table, thermal drift and the tactile probe and laser interferometer errors. For the case of a flat artifact, uncertainty budget for a tactile measurement is established considering all sources of error. It results in an expanded uncertainty of $15+10^{-6}$ L (nm), using a coverage factor $k$ of 2. This uncertainty is mainly affected by the performance and the behavior of the probe. The stated value is only valid for a flat artifact measured by tactile probing. When using chromatic confocal probing on aspherical artifacts, the uncertainty budget should be re-evaluated.

## 3. Measurement Probes and Reference Interferometers

Classically, the measurement of aspherical surfaces is done using tactile probing also referred to as stylus profilometry.[24] The probe's behavior highly contributes to the overall uncertainty of the measurement since it is involved in the metrology loop. The optical and tactile probes used are characterized and their uncertainty is estimated under similar environment conditions. Laser interferometers have also been previously calibrated.

### 3.1 Laser interferometers

Interferometry is the measure of interference between two signals. Within a laser interferometer, a laser source emits a beam towards an optical separator that divides it into two sub-beams. The first sub-beam travels towards a fixed reference reflector, the second one towards the reflector under displacement, in this case the Zerodur table's reflector. The beams are finally reflected back and they undergo interference. If no displacement takes place both signals are equal. On the contrary, if a displacement was measured, the second beam returns with a phase shift. The relationship between displacement and this phase change is given by the modified "Edlen" formula.[24] The stability of the used Renishaw laser interferometers is less than 2 nm.

### 3.2 Chromatic confocal probe

Chromatic confocal probes are introduced in ISO25178-602:2010 [25] and used in many measurement applications, but most importantly, for surface profiling.[26] They rely on a white light source LED whose spectral components are focused at different distances along the optical axis. The wavelength that is best focused on the surface being measured is the only wavelength that will be reflected back into the system. A mechanical filter adjusted for this principle guarantees this operation so the reflected light is collected and analyzed with a spectrometer. The working distance of the optical probe used is 350 $\mu$m. Therefore, the in-situ calibration is performed over this travel range and repeated 60 times. A first in-situ calibration test is performed step-by-step over the travel range of 350 $\mu$m by comparing the information given by the chromatic confocal probe to the information given by the differential laser interferometer. The conversion of the recorded confocal data to distance is achieved by a linear fit to cover the entire travel range. The obtained residual errors are within 800 nm (Fig. 4). This value is considered to be too large because the measurement precision is requested to be within few tens of nanometers. Based on this result and the works of Leach and Nouira et al,[11,27,28] the behavior of the chromatic confocal probe seems to be complex and sensitive to many parameters, particularly, gap variations (residual errors and linearity), material, roughness, form, reflectivity and inclination of the workpiece, power of the light source, acquisition frequency and scanning speed.

It was concluded that it is complicated to develop a model that could consider the numerous error sources. Piecewise linear models are adopted here. They better reduce large residual errors over the entire travel range than polynomial models. Nevertheless, piecewise models does not take into account the effect of the angle deviation between the probe and the artifact, the form and reflectivity of the artifact, and all the other error sources related to the used aspherical artifact.

The in-situ calibration of the chromatic confocal probe is performed

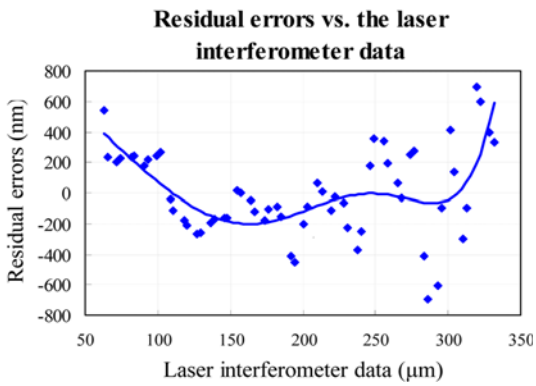



Fig. 4 Residual errors of confocal measurement versus laser interferometer data before applying any correction model

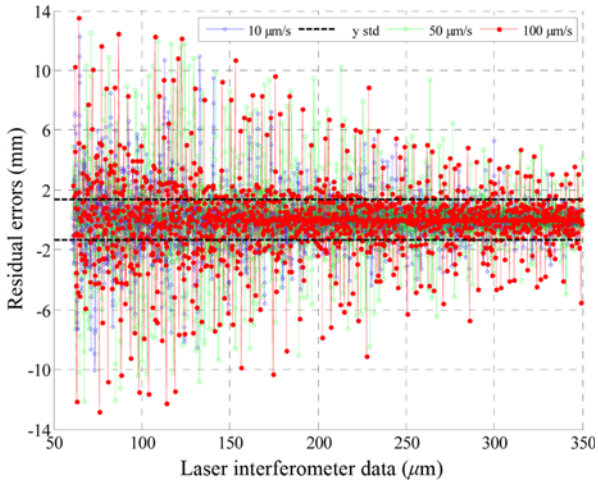



Fig. 5 In-situ calibration of the chromatic confocal probe over the entire working range of 350 $\mu$m. Evolution of the residual errors versus the displacement measured by the z-differential laser interferometer for three values of speed: 10, 50 and 100 $\mu$m/s (blue, green, red). Modeling of the data with a piecewise linear model of 2048 models giving a standard deviation of residual errors below 2 nm (black)

in dynamic operation mode. The conversion of the recorded confocal digital data to distance is achieved by applying a piecewise linear model with 2048 linear models. The residual errors that represent the difference between the confocal data and the laser interferometer data, with all corrections and compensations applied to the interferometric measurement, are obtained and illustrated in Fig. 5. The residual errors are about ±14 nm at the beginning of the working range and decrease to ±4 nm at the end of the working range, independently of the scanning speed ranging from 10 to 100 $\mu$m/s.

The standard deviation of the residual errors is calculated and is equal to about ±2 nm (Fig. 5). Additionally, the obtained residuals present a Gaussian distribution (Fig. 6), which means, according to the Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM), that the standard uncertainty of the chromatic confocal probe can be estimated by dividing the bandwidth by the coverage factor of 3 for a confidence level of ~99%. This makes the standard uncertainty be equal to about ±0.6 nm when calibrated on a flat sample. However, the proposed correction strategy of the confocal data is sensitive to inclination. Additionally, the

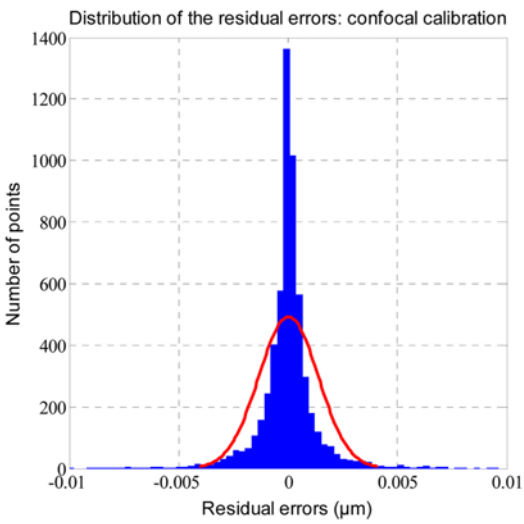



Fig. 6 Distribution of the residual errors of the chromatic confocal probe's calibration

connection point between each two successive partial models can be erroneous and change from one type of artifact to the other, thus generating errors that can dramatically impact the mentioned value of 0.6 nm.

### 3.3 Tactile probe

The tactile probe's tip is a diamond stylus located on one end of a beam which pivots around its center point. On the other end, two coils measure the magnetic field induced by the pivoting amplitude. The primary and secondary coils are connected in an AC bridge circuit such that when the armature between them is centrally positioned no output is generated and the beam is in neutral position. Otherwise, when the beam is displaced, the magnetic field infers amplitude of displacement and the relative phase of the signal determines the direction. The probe is a stylus with a tip angle of 90°, a tip radius of 2 $\mu$m and a static measuring force of 0.7 mN. It can be used in three different measurement ranges, a small range going from 0 to 100 $\mu$m, a medium range going from 0 to 500 $\mu$m and a large range going up to 1000 $\mu$m. The range selection depends on the depth to be measured on the surface. The probe is calibrated in-situ with a scanning speed of 10 $\mu$m/s for the smallest working range [0 100] $\mu$m. A 9$^{th}$-order polynomial model is used to approximate the data and compensate for the bias errors. Fig. 7 shows that the residual errors fluctuate between ±20 nm. The standard deviation that results is about ±6 nm. Here again, the residual errors present a Gaussian distribution (Fig. 8) so the standard uncertainty can be calculated and is equal to ±2 nm.

## 4. Optical and Tactile Scanning of an Aspherical Surface

Due to their unmatched performance and to the advanced techniques that exist today for high precision manufacturing of complex optical components, aspherical and freeform optics have become a growing market. In metrological applications for example, aspherical lenses represent the ideal choice for light collimators in laser diodes. There are numerous manufacturing processes for aspherical lenses,[29] but

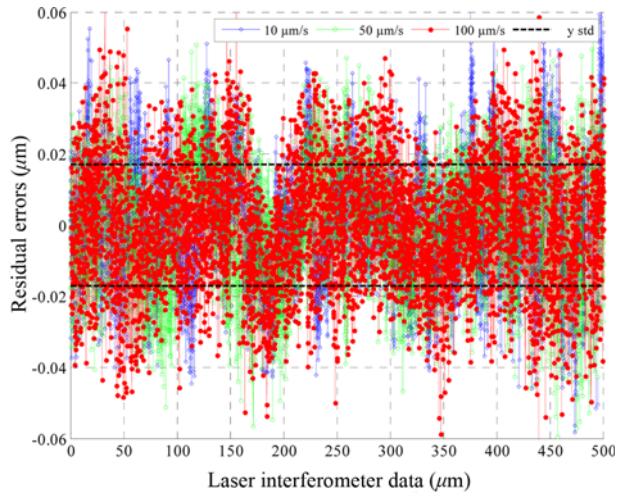



Fig. 7 In-situ calibration of the tactile probe over its smallest working range of 100 $\mu$m at a fixed scanning speed of 10 $\mu$m/s; Evolution of the residual errors versus the displacement measured by the z-differential laser interferometer (blue) and the 9$^{th}$ order polynomial approximation of the data which gives a standard deviation for residual errors (y-std) less than 6 nm (red)

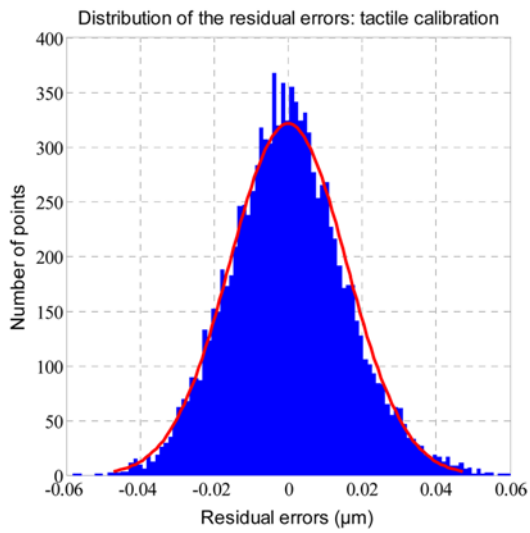



Fig. 8 Distribution of the residual errors of the tactile probe's calibration

collimators can be somehow complicated to manufacture as stated by Allen et al.[5] In the present paper, a glass replication technology is used for the manufacturing of the tested aspherical lens.[24] This technology offers the most cost effective solution for astigmatism, spherical aberration, coma and spherochromatism corrections. An asphere surface is classically defined by the model in Eq. (1).

Other definitions, such as the Forbes aspheres,[30] exist and have been shown to be interesting. However, in this work, the measured asphere inherits the model of Eq.1 and is an axis-symmetric combination of a conic and a polynomial.

$$Z = f(c,\kappa,\alpha;r) = \frac{cr^2}{1+\sqrt{1-(1+\kappa)c^2r^2}} + \sum_{j=1}^{5}\alpha_{2j}r^{2j} \quad (1)$$

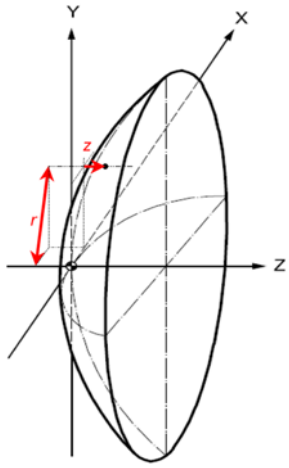



Fig. 9 Aspherical surface schematic and the coordinate variables

where, r and Z are the coordinates of the aspherical surface. Real constants c, and are the curvature at the central point, the conic constant and the aspherical deformation constants, respectively. The surface has known model parameters and less than /20 Peak-to-Valley deviation surface errors at 633 nm wavelength, which is still a commonly adopted specification for surface quality (ISO10110-5,[31] Fig. 9).

The measurements of the asphere take place in the LNE's cleanroom. About 500,000 points are recorded in the form of 3.5×3.5 mm² XY-grids and the table's motion is constantly controlled by the laser interferometers (Fig. 2). The optical probe's total measurement time is about half of the tactile probe's total measurement time (7.5 hours) since no contact needs to be established for the optical measurement.

## 5. Fitting Aspherical Data for Comparison

Form errors are calculated and surface form is characterized in this section. Fitting is the process of aligning together two geometrical entities by optimizing transformation parameters. For aspherical fitting, the L-BFGS algorithm is proposed.[15]

The L-BFGS method is an iterative quasi-Newton method used to solve unconstrained non linear optimization problems. This method is particularly interesting for problems with many variables and large data. The main advantage of this method is that it does not have to solve any linear equations and that the inverse Hessian matrix does not need to be exactly calculated, but only approximated. L-BFGS updates the inverse of the Hessian matrix by using information from the last m iterations, and each time, the new approximation replaces the oldest one in the queue. In a recent study, L-BFGS has been shown to be faster than traditional optimization methods for the fitting of B-Spline curves. Zheng et al.[32] propose a simultaneous optimization of location parameters and control points which runs faster than other methods based on a sequential. For an objective function f with gradient g and hessian H, having x as the vector of variables, the algorithm goes as follows:

a) Initialization:

Make an initial guess for the solution, $x_0$, and the Hessian $H_0$ and choose a number m of iterations for the Hessian update. Then set two real values $\beta'$ and $\beta$ such that $0 < \beta' < ½$ and $\beta' < \beta < 1$.

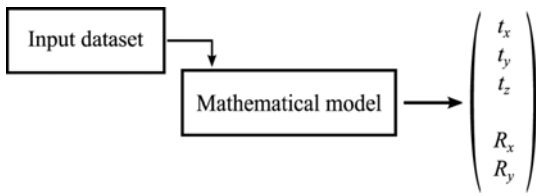



Fig. 10 L-BFGS fitting scheme (5 transformation parameters)

b) Iterations:

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k \tag{2}$$

where, $d_k = -H_k g_k$ is the line search direction and $\alpha_k$ is the step length in that direction which satisfies the Wolfe conditions:

$$\begin{aligned} f(x_k+\alpha_k d_k) &\le f(x_k)+\beta'\alpha_k g_k^T d_k \\ g^T(x_k+\alpha_k d_k)d_k &\ge \beta d_k^T d_k \end{aligned} \tag{3}$$

c) Updating:

The Hessian update is written as follows:

$$H_{k+1} = H_k + \Delta h(X, G, H_k) \tag{4}$$

Where Δh depends on the change $X = \alpha_k d_k$ and the change G in the gradient.

For every Hessian update, L-BFGS stores the X and G vectors. All the way through the iterations of step b, H is updated as in Eq. (5). The parameter m defines a storage limit in L-BFGS, so that after m iterations, the oldest change h, is replaced by the newest. Since large volumes of data and many variables are dealt with in this paper limited storage is required.

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 + \Delta h(X_0, G_0, H_0) \\ H_2 &= H_0 + \Delta h(X_0, G_0, H_0) + \Delta h(X_1, G_1, H_1) \\ &\dots \\ H_m &= H_0 + \Delta h(X_0, G_0, H_0) + \Delta h(X_1, G_1, H_1) + \dots + \Delta h(X_{m-1}, G_{m-1}, H_{m-1}) \end{aligned} \tag{5}$$

The fitting of aspherical surfaces is the process of aligning data points to their mathematical model. It requires optimizing for five out of six transformation parameters (Fig. 10): three translations in x-, y- and z- directions and two rotations about the x- and y- axes. Rotation about the z-axis is redundant because the asphere is axis-symmetric about z. The objective function to minimize is given by Eq. (6).

$$\min_{\theta,\gamma,t_x,t_y,t_z} \sum_{i=0}^{N} (\mathbf{p}_i - \mathbf{R}_{\theta,\gamma}\mathbf{P}_i + \mathbf{T})^2 \tag{6}$$

N being the number of points in the dataset; $\mathbf{R}_{\theta,\gamma}$ is the combined rotation matrix due to angles about x and about y.

This objective function is the minimization of the sum of squared distances between the data and the model. The works of Ahn[33] on the fitting of parametric curves and surfaces and some parallel works done by the authors on the fitting of aspherical surfaces have shown that orthogonal distance minimization is more accurate than vertical distance minimization.

It has been also proven in parallel work done by El-Hayek et al. that this algorithm is as robust as the classical Levenberg-Marquardt

algorithm. Nevertheless, it offers the possibility to perform simultaneous calculations of the footpoints (projections of data points onto the model) and the transformation parameters. As compared to the Iterative Closest Point (ICP)[34] algorithm used in registration/alignment applications but which can also be modified to be used in fitting applications, L-BFGS is more robust to the point-set's initial alignment with respect to the model. ICP fails if the initial position of the dataset is far from the optimal position. Furthermore, ICP uses discrete data, model points or a mesh of these, and that makes it the least complex among all algorithms. However, it requires that the number of points (or triangles in case of a mesh) be equivalent because each point must have an associated counterpart. In addition, the discrete model should be dense enough to match the sought level of precision.

## 6. Results and Analysis

The results of the L-BFGS fitting of the aspheric lens on both the tactile and the optical measured datasets are detailed and compared here. The residual errors of each of the fitting processes translate the form defects. It is shown that these form defects are directly affected by the measurement uncertainty of each of the measurement probes and by some additional error sources (the machine's guiding elements, the table motion, the geometry of the measured surface, its reflectivity, etc…).

Experiments have shown that an optimal value of the storage limitation parameter m falls in the range of 7 to 20 iterations. 11 iterations are considered here. Similar initial positions of the dataset with respect to the model and identical initial guesses are verified. For an equal number of points in both datasets, the results of the L-BFGS fit are reported in Table 1 and the residual errors distributions and error maps are plotted on both Figs. 11 and 12. Table 1 shows that the evaluation of form defects with the tactile measurement returns more accurate results than the ones obtained from the optical measurement. The Root Mean Square (RMS) residual is 44 nm in the case of the tactile measurement and 177 nm RMS in the case of the optical measurement.

Fig. 11 illustrates the distribution of the residual errors of the optical dataset fitting. The residuals do not follow a normal distribution for the mean value and standard deviation they have. The signed mean is equal to -0.25 nm and the standard deviation is about 177 nm (negative skewness equal to -0.27).

Fig. 12 points out the distribution of the residual errors of the tactile dataset fitting. The distribution is again not a normal distribution with the mean and standard deviation given. In this case, the signed mean is equal to 0.0378 nm and the standard deviation is about 44 nm (positive skewness value of 0.52). Since the chromatic confocal probe is in-situ calibrated on a single point on the aspherical lens, the geometry of the asphere, its inclination, its reflectivity and its roughness influence the uncertainty of the measurement. This clearly explains the observed difference in the output residual errors between the two measurements. In fact, the piecewise linear models ignore all these error sources.

## 7. Conclusion

The comparison of optical and tactile measurements of an asphere using the LNE high precision profilometer is done based on form characterization and residual errors analysis. The design and the metrology performance of the developed apparatus are detailed and analyzed. Tactile and chromatic confocal probing reveal nanometric residual errors when calibrated on a flat standard. However, when used on aspherical artefacts, their behaviors are affected by other sources of error and the measurements are consequently biased. With disregard to the approximation of measurement residual errors and the strategies used to do so, tactile probing is more accurate than confocal probing.

Table 1 Surface form characterization based on L-BFGS fitting with orthogonal distance minimization; (meas.: measurement, PV: Peak-to-Valley)

| | Absolute Mean (nm) | RMS (nm) | PV (nm) |
|---|---|---|---|
| Optical meas. | 142 | 177 | 1058 |
| Tactile meas. | 33 | 44 | 818 |

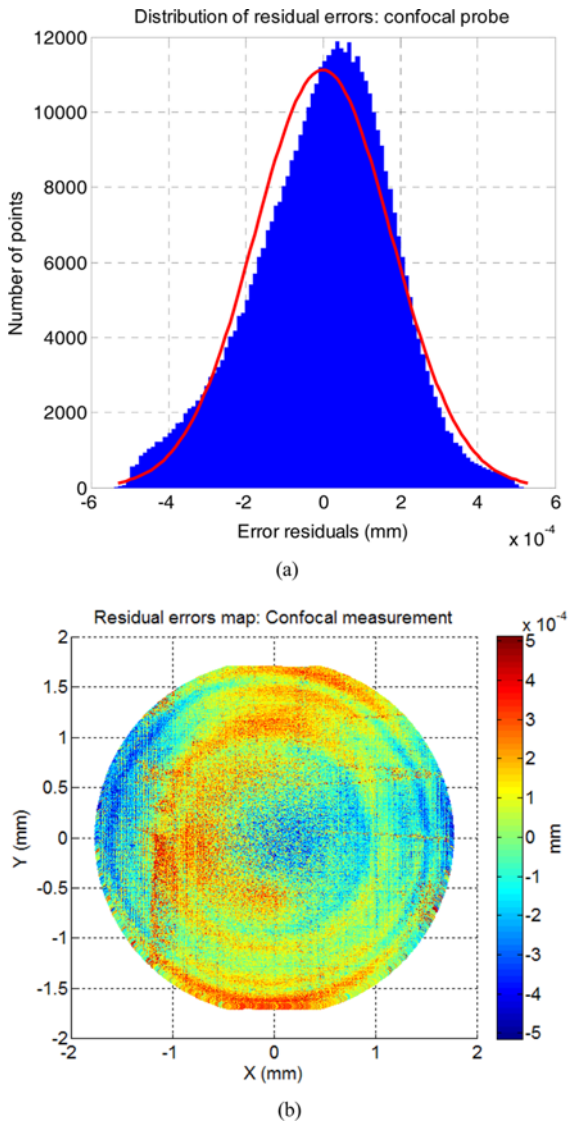



Fig. 11 Optical measurement residual errors for a clear aperture of r = 1.75 mm. (a) Histogram distribution of the residual errors (blue) and theoretical normal distribution fit (red) around the average and for a span from -3$\sigma$ to 3$\sigma$; (b) residual errors map

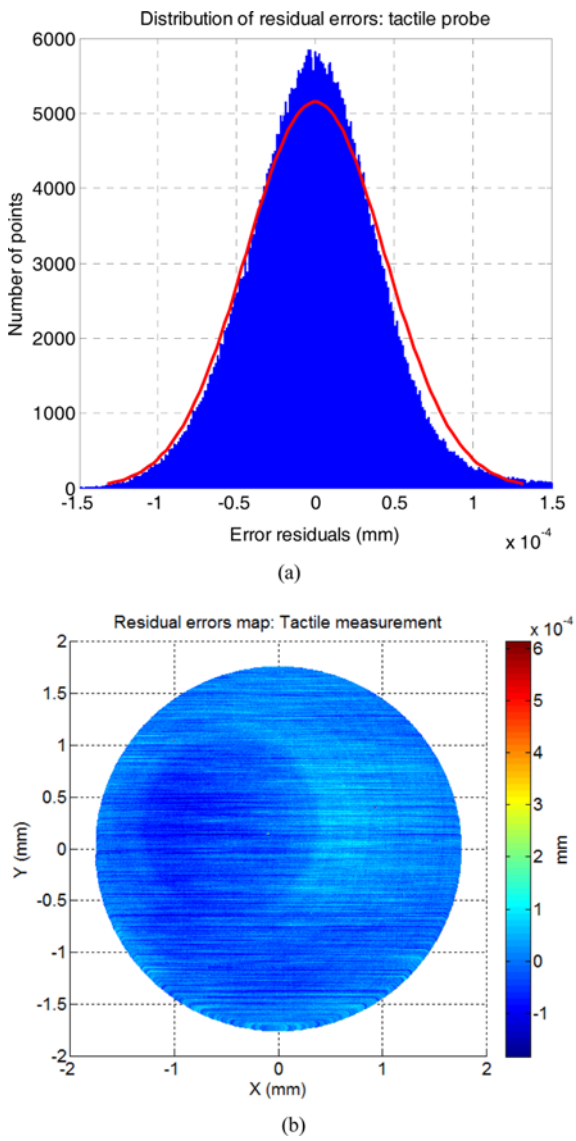



Fig. 12 Tactile measurement residual errors for a clear aperture of r = 1.75 mm. (a) Histogram distribution of the residual errors (blue) and theoretical normal distribution fit (red) around the average and for a span from -3$\sigma$ to 3$\sigma$; (b) residual errors map

As a future work, authors would like to investigate more about the measurement data approximation.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work is part of EMRP Joint Research Project-IND10 "Optical and tactile metrology for absolute form characterization" project. The EMRP is jointly funded by the EMRP participating countries within EURAMET and the European Union.

## REFERENCES

1. Beckstette, K. F., "Trends in Asphere and Freeform Optics," Proc. of Optonet Workshop, 2008.
2. Dumas, P R., Fleig, J., Forbes, G. W., Golini, D., Kordonski, W. I., and et al., "Flexible Polishing and Metrology Solutions for Free-Form Optics," http://aspe.net/publications/Winter_2004/PAPERS/3METRO/1372.PDF (Accessed 16 APR 2014)
3. Wanders, G., "Advanced Techniques in Freeform Manufacturing," Proc. of Optonet Workshop, 2006.
4. Karow, H. H., "Fabrication Methods for Precision Optics," Wiley, Chap. 5, pp. 334-578, 1993.
5. Yi, A. Y., Huang, C., Klocke, F., Brecher, C., Pongs, G., and et al., "Development of a Compression Molding Process for Three-Dimensional Tailored Free-Form Glass Optics," Applied Optics, Vol. 45, No. 25, pp. 6511-6518, 2006.
6. Photonics 21, "Lighting the Way Ahead," 2010.
7. European Association of National Metrology Institutes, "EMRP Call 2010-Industry & Environment," http://www.euramet.org/index.php?id=emrp_call_2010#c10140.html (Accessed 16 APR 2014)
8. Lee, W. B., Cheung, C. F., Chiu, W. M., and Leung, T. P., "An Investigation Of Residual Form Error Compensation in the Ultra-Precision Machining of Aspheric Surfaces," Journal of Materials Processing Technology, Vol. 99, No. 1, pp. 129-134, 2000.
9. Nouira, H., Bergmans, R., Küng, A., Piree, H., Henselmans, R., and Spaan, H.A.M., "Ultra-High Precision CMMs as well as Tactile and Optical Single Scanning Probes Evaluation in Dimensional Metrology," Proc. of CAFMET, 2014.
10. Abbé, E., "Meßapparate Für Physiker," Zeitschrift Für Instrumentenkunde, Vol. 10, No. pp. 446-447, 1890.
11. Leach, R., "Optical Measurement of Surface Topography," Springer, pp. 71-106, 2011.
12. Whitehouse, D. J., "Surfaces and Their Measurement," Taylor & Francis, 2002.
13. Moré, J. J., "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," Numerical Analysis, pp.105-116, 1978.
14. Liu, D. C. and Nocedal, J., "On the Limited Memory BFGS Method for Large Scale Optimization," Mathematical Programming, Vol. 45, No. 1-3, pp. 503-528, 1989.
15. Nocedal, J., "Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage," Mathematics of Computation, Vol. 35, No. 151, pp. 773-782, 1980.
16. Vissiere, A., Nouira, H., Damak, M., Gibaru, O., and David, J., "A Newly Conceived Cylinder Measuring Machine and Methods that Eliminate the Spindle Errors," Measurement Science and Technology, Vol. 23, No. 9, Paper No. 094015, 2012.
17. Vissiere, A., Nouira, H., Damak, M., Gibaru, O., and David, J., "Concept and Architecture of a New Apparatus for Cylindrical Form Measurement with a Nanometric Level of Accuracy," Measurement Science and Technology, Vol. 23, No. 9, Paper No. 094014, 2012.
18. Zelený, V. and Stejskal, V., "The Most Recent Ways of CMM Calibration," http://home.mit.bme.hu/~kollar/IMEKO-procfiles-for-

web/congresses/WC-16th-Wien-2000/Papers/Topic%2008/Zeleny.PDF (Accessed 25 MAR 2014)

19. Thalmann, R., "A New High Precision Length Measuring Machine," Proc. of 8th International Congress of Metrology, 1997.

20. Flack, D., "Good Practice Guide No. 42-CMM Verification," National Physical Laboratory, No. 2, 2011.

21. ISO 10360-6, "Geometrical Product Specifications (GPS) - Acceptance and Reverification Tests for Coordinate Measuring Machines (CMM) - Part 6: Estimation of Errors in Computing Gaussian associated Features," 2001.

22. JCGM, "Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement," 2008.

23. Lee, C. O., Park, K., Park, B. C., and Lee, Y. W., "An Algorithm for Stylus Instruments to Measure Aspheric Surfaces," Measurement Science and Technology, Vol. 16, No. 5, pp. 1215, 2005.

24. Stone, J., Phillips, S. D., and Mandolfo, G. A., "Corrections for Wavelength Variations in Precision Interferometric Displacement Measurements," Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Vol. 101, pp. 671-674, 1996.

25. BS EN ISO 25178-602, "Geometrical Product Specifications (GPS). Surface Texture. Areal Nominal Characteristics of Non-Contact (Confocal Chromatic Probe) Instruments," 2010.

26. Vaissiere, D., "Métrologie tridimensionnelle des états de surface par microscopie confocale à champ étendu," Ph.D. Thesis, Sciences et Technologeis Industrielles, University of Strasbourg, France, 2003.

27. Nouira, H., El-Hayek, N., Yuan, X., Anwer, N., and Salgado, J., "Metrological Characterization of Optical Confocal Sensors Measurements," Proc. of 14th International Conference on Metrology and Properties of Engineering Surfaces, 2013.

28. Nouira, H., El-Hayek, N., Yuan, X., and Anwer, N., "Characterization of the Main Error Sources of Chromatic Confocal Probes for Dimensional Measurement," Measurement Science and Technology, Vol. 25, No. 4, Paper No. 044011, 2014.

29. Fang, F., Zhang, X., Weckenmann, A., Zhang, G., and Evans, C., "Manufacturing and Measurement of Freeform Optics," CIRP Annals-Manufacturing Technology, Vol. 62, No. 2, pp. 823-846, 2013.

30. Forbes, G. W., "Shape Specification for Axially Symmetric Optical Surfaces," Optics Express, Vol. 15, No. 8, pp. 5218-5226, 2007.

31. ISO/DIS 10110-5, "Optics and Photonics - Preparation of Drawings for Optical Elements and Systems - Part 5: Surface Form Tolerances," 2007.

32. Zheng, W., Bo, P., Liu, Y., and Wang, W., "Fast B-Spline Curve Fitting by L-BFGS," Computer Aided Geometric Design, Vol. 29, No. 7, pp. 448-462, 2012.

33. Ahn, S. J., "Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space," Document ID : LNCS 3151, Springer, 2004.

34. Pomerleau, F., Colas, F., Siegwart, R., and Magnenat, S., "Comparing ICP Variants on Real-World Data Sets," Autonomous Robots, Vol. 34, No. 3, pp. 133-148, 2013.

Precision Engineering 38 (2014) 935–947

Contents lists available at ScienceDirect

Precision Engineering

journal homepage: www.elsevier.com/locate/precision

# A new method for aspherical surface fitting with large-volume datasets

N. El-Hayek[a,b,*], H. Nouira[a], N. Anwer[c], O. Gibaru[b], M. Damak[b,d]

[a] Laboratoire Commun de Métrologie (LCM), Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), 1 Rue Gaston Boissier, 75015 Paris, France
[b] Arts et Métiers de Lille (ENSAM), Laboratory of Information Sciences and Systems (LSIS), 8 Boulevard Louis XIV, 59046 Lille, France
[c] ENS de Cachan, The University Research Laboratory in Automated Production, 61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France
[d] GEOMNIA, 3D Metrology Engineering and Software Solutions, 165 Avenue de Bretagne, EuraTechnologies, 59000 Lille, France

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 20 February 2014
Received in revised form 29 April 2014
Accepted 11 June 2014
Available online 19 June 2014

*Keywords:*
Aspherical surface fitting
Form metrology
Large data
Limited memory BFGS

ABSTRACT

In the framework of form characterization of aspherical surfaces, European National Metrology Institutes (NMIs) have been developing ultra-high precision machines having the ability to measure aspherical lenses with an uncertainty of few tens of nanometers. The fitting of the acquired aspherical datasets onto their corresponding theoretical model should be achieved at the same level of precision. In this article, three fitting algorithms are investigated: the Limited memory-Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS), the Levenberg–Marquardt (LM) and one variant of the Iterative Closest Point (ICP). They are assessed based on their capacities to converge relatively fast to achieve a nanometric level of accuracy, to manage a large volume of data and to be robust to the position of the data with respect to the model. Nevertheless, the algorithms are first evaluated on simulated datasets and their performances are studied. The comparison of these algorithms is extended on measured datasets of an aspherical lens. The results validate the newly used method for the fitting of aspherical surfaces and reveal that it is well adapted, faster and less complex than the LM or ICP methods.

© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

Due to their superior performance, aspherical and other freeform optics have replaced spherical components in almost all optical systems that exist today. This trend of extensive use of complex optical elements is found in a wide range of applications, such as, digital cameras, medical laser systems, ophthalmologic and endoscopic systems, multi-media projectors, car head-up displays, astronomical telescopes and optical microscopes. However, a key issue of these optical elements is their surface quality, especially form which is crucial for the optical performance and functionality. Therefore, it is a must to track form deviations all the way from the design phase up to the operational phase and evaluate form defects owing to manufacturing. With the advance of technology and ultra-precise manufacturing capabilities [1,2], design specifications have become more and more challenging, reaching a nanometric scale of precision. While current techniques allow for manufacturing arbitrary optical surfaces and provide correction at the nanometer scale, high precision measurement of optical surfaces as well as data processing is still a challenge in industry.

In this regard, a three-year project has been launched by the European Metrology Research Program (EMRP) and encompasses a multitude of European National Metrology Institutes (NMIs), industrial partners and academic partners [3]. It aims at developing methods for high-precision measurement of aspherical optics and characterizing their surface form. A recent and exhaustive research on the processing and manufacturing of aspherical and freeform optics is found in [1]. The LNE's high-precision profilometer, the Zeiss F25, the μCMM, the NANOMEFOS and the ISARA400 measuring machines achieve ultra-high-precision positioning and measurement on aspherical artifacts as described in [4]. These machines respect the Abbe principle, apply the dissociated metrology structure principle and incorporate high-precision mechanical guiding systems. Motions are performed under the control of sub-nanometric-resolution laser interferometers which are traceable to the SI meter definition and positioned and aligned such that they satisfy the Abbe principle. The thermal expansion of

* Corresponding author at: Laboratoire Commun de Métrologie (LCM), Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), 1 Rue Gaston Boissier, 75015 Paris, France. Tel.: +33 642582545.
*E-mail addresses:* nadimhayek@gmail.com (N. El-Hayek), hichem.nouira@lne.fr (H. Nouira).

http://dx.doi.org/10.1016/j.precisioneng.2014.06.004
0141-6359/© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

the selected materials is negligible firstly because the surrounding temperature is generally controlled within a range of $20 \pm 0.2\,^{\circ}$C and secondly because all the major parts of the machines are made of Invar and Zerodur having a very low thermal expansion coefficient. The performance of these machines depends on both the performance of the scanning probe and the stability of the metrology loop.

Once the measurements are performed and the data are recorded, the aspherical form should be evaluated by fitting the appropriate model to the measured data with a nanometric accuracy. Many fitting techniques exist in literature, but very few discuss the fitting of aspheres. Chen et al. [5] propose an aspherical lens characterization by means of a 2D profile fitting. The dataset used is a profile measured using stylus profilometry and the reference model is the corresponding asphere profile. The fitting is done using the Levenberg–Marquardt (LM) algorithm for its quick convergence in regard to ultra-precise examination [6]. Similar works have been published and also deal with aspherical profile identification and conic sections fitting [7,8]. Sun et al. [9] perform fitting of aspherical curves and surfaces on simulated data with vertical distance minimization using a Gauss-Newton algorithm. In fact, they assume that the model and the data are both defined in the same reference frame. Other works involve approximating aspheres with NURBS surfaces in order to generate CAD models for manufacturing purposes [10].

A different, yet classical, approach involves the Iterative Closest Point (ICP) algorithm which is a registration algorithm that finds a spatial transformation to align different point-sets [11]. It is designed for discrete data, making it a reference algorithm with negligible storage. It can be used for fitting applications when the reference element is a point-set model or a mesh model. The algorithm relies on a point matching operation between the dataset and the reference model and tries to minimize the distance separating the matched points. This operation is computationally expensive with the classical ICP and that is why efficient variants of the algorithm were developed [12]. ICP is very sensitive to initial alignment between the dataset and the model, and tends to converge to a local minimum because the optimization is of non-convex nature [13].

The Limited memory-Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS), introduced by Jorge Nocedal, is a quasi-Newton method for solving unconstrained non-linear problems [14]. Recent works involving this algorithm have published promising results. Zheng et al. [15] show that, unlike classical methods, the L-BFGS algorithm is robust and fast pertaining to the fitting of geometric B-Spline curves to points sampled from freeform shapes.

Until this date, no particular work has given interest to the fitting of large datasets, except in the case of registration methods based on ICP which is an algorithm that uses discrete elements [16]. This paper provides a comparison of L-BFGS, LM and one particular variant of the ICP algorithm. The methods are all based on the same sequential algorithmic structure. They iteratively compute, in a nested loop, the footpoint of each data point and then minimize the sum of the squared distances between the data and the reference model. A footpoint is the projection of a data point onto the reference model and can either be an orthogonal projection or a vertical projection. The algorithms, and especially the newly used L-BFGS, are evaluated in conformance with ISO 10360-Part 6 [17]. This standard describes the procedure for the evaluation of software that performs a characterization of the residual errors and form deviations of measured data for canonical features. The algorithms should therefore be tested on simulated datasets ($D_m$) to which systematic and random errors are added. Finally, the algorithms are compared on measured datasets of an aspherical lens using the LNE's high precision profilometer when it is equipped with a tactile probe. The obtained results are reported and discussed.

## 2. Preliminaries

The form evaluation of aspheres can be done by performing the association of the aspherical model to the measured data. This process, defined in ISO 17450-Part 1 [18], is the operation of fitting an ideal feature (the model) to a non-ideal feature (the data points) according to a criterion (such as Least-Squares). It is usually done by optimizing for transformation parameters and model parameters, but, in this paper, only transformation parameters are calculated since the model parameters are known. Three fitting algorithms are compared based on their capacities to converge quickly, to manage a large volume of data and to be robust to the initial position of the dataset with respect to the model. The process goes by iteratively optimizing for five transformation parameters, the rotation about $z$ being redundant here. Reference models such as a point-set model or a mesh model can be used when the problem needs to be expressed in discrete form. In these two cases, the very well-known ICP algorithm is used and distances are calculated on a point-to-point basis and on a point-to-triangle basis, respectively. Otherwise, the reference model is a mathematical equation and distances are calculated on a point projection basis. The evoked fitting algorithms follow the same structure and sequentially compute for footpoints and transformation parameters (**R**: rotation matrix, **T**: translation vector). After being evaluated on simulated datasets, the algorithms are tested on measured surfaces with large volumes of data. Aspherical surface fitting onto simulated small-sized datasets can be achieved by applying a Gauss-Newton optimization with vertical distance minimization [9]. However, the usage of vertical distance is limited to cases where both entities to fit are defined in the same reference frame. Nonetheless, orthogonal distance calculation guarantees the freedom to have the measured dataset and the model in different coordinate systems [19].

### 2.1. The aspherical model

The mathematical formulation of aspherical surfaces is detailed and standardized in ISO 10110-Part 12 [20]. In our case, the aspherical form to be tested $F(r, z; c, k, \boldsymbol{a})$ is an axis-symmetric surface defined in implicit form such as in Eq. (1)

$$F(r, z; c, k, \boldsymbol{a}) = z - f(r) = 0, \tag{1}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $z$ are the Cartesian coordinates with a change of variables applied on $x$ and $y$; $c$ is the curvature at the apex, $\kappa$ is the conic constant, $\boldsymbol{a} = (a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10})$ is the vector of the 10th-order aspherical deviation parameters. For a given $r$, the height in $z$ is independent of the angle $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, and $f(r)$ can be written as in Eq. (2):

$$f(r) = -\left( \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+\kappa)c^2r^2}} + \sum_{j=1}^{5} a_{2j} r^{2j} \right). \tag{2}$$

For any $(r, z) \in \mathbb{R}^2$, $F(r, z; c, k, \boldsymbol{a})$ is twice differentiable. The aspherical model considered here is not exactly expressed as in ISO 10110-Part 12 [20] due to the presence of the $a_2$ term. In this ISO standard, $a_2$ is mingled with the curvature parameter $c$. The coordinate system is defined such that the origin coincides with the apex of the asphere and the $z$-axis is always oriented upwards. The parameters of the asphere are then defined accordingly. For the considered model, the curvature at the apex is positive and equal to $c = 10^{-20}\,\text{mm}^{-1}$, the conic constant $\kappa = -1$ (Fig. 1) and the asphere parameters are $\alpha_2 = 0.0223$, $\alpha_4 = 7.293 \times 10^{-6}$, $\alpha_6 = 4.52 \times 10^{-9}$, $\alpha_8 = -1.061 \times 10^{-11}$, $\alpha_{10} = 9.887 \times 10^{-15}$. The asphere has a sag $S = 3.217$ mm of and a clear aperture $CA = 11.74$ mm. This lens was manufactured by a Single Point Diamond Turning (SPDT) process

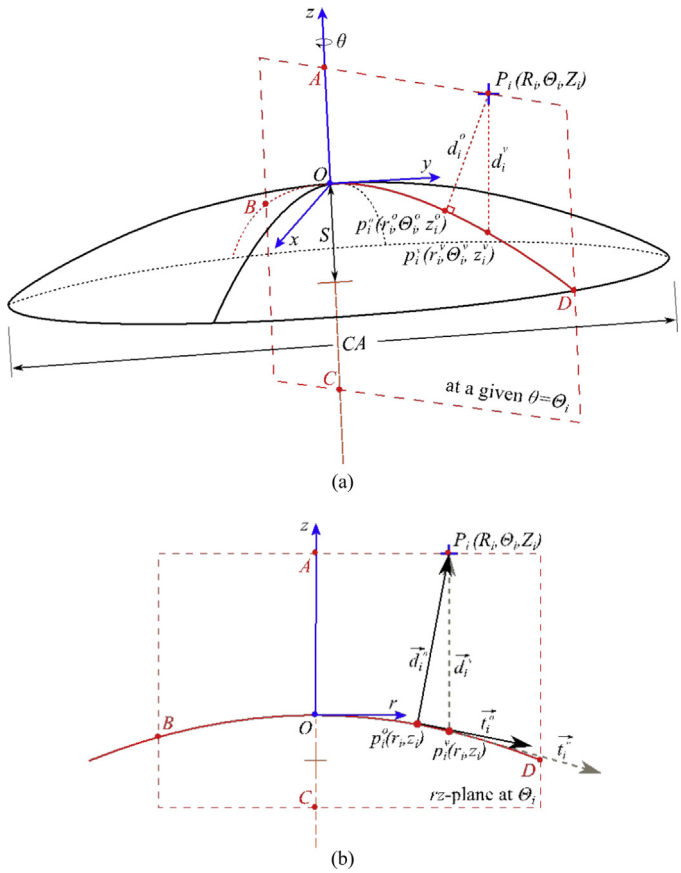



**Fig. 1.** The orthogonal/vertical distance vector from a data point $P_i$ to its footpoint $p_i^o/p_i^v$ on an asphere is contained in the *rz*-plane at an angle $\Theta_i$ passing through the axis of symmetry (all red points are coplanar). (a) a 3D view of the asphere and the data point projection in the given *rz*-plane (red); (b) a planar view of the distance projection where $\vec{d}_i^o$ and $\vec{d}_i^v$ are the distance vectors and $\vec{t}_i^o$ and $\vec{t}_i^v$ denote the tangent vectors.

[21] and finished with a high precision polishing process and glass coating.

### 2.2. Optimization algorithms

The Newton–Raphson method [22] is used in many optimization problems that are not highly non-linear or complex. It is therefore used here for the computation of footpoints which are required for the orthogonal distance minimization problem. At every iteration, the method which has a simple algorithmic structure aims at finding an approximation of the roots of a real-valued function $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. The goodness of the approximation depends on the stop criterion and on the quality of the initial guess (relative position of the data and the model should be close to the optimal solution) [22,23]. If the initial guess is close enough and the derivative of $S$ exists everywhere, the algorithm guarantees convergence to the roots of $S$. For the problem of aspheres which have low curvatures, the vertical projection point $p_i^v$ is taken as an initial guess and is actually close to the orthogonal projection point $p_i^o$. Then, the Newton–Raphson method iterates until $p_i^o$ is accurately approximated (stop criterion: $x_{i+1} - x_i \le \varepsilon_1 = 10^{-16}$).

As for the minimization of the non-linear squared distances problem, $d_i^o$ for orthogonal and $d_i^v$ for vertical, it is dealt with using other optimization algorithms such as L-BFGS, LM and ICP. LM [6,24] is a well-known optimization algorithm that is based on an interpolation between a Gauss-Newton approach and the gradient descent (Eq. (3)). It has been evaluated and approved by the National Institute of Standards and Technology (NIST) for metrology applications that require fitting simple curves and surfaces in 3D [25]. This algorithm converges reasonably quickly and accurately for a wide range of initial guesses that are close to the optimal solution [6]

$$x_{j+1} = x_j - (H(x_j) + \lambda_j \cdot diag[H(x_j)])^{-1} \cdot \nabla f_{ob}(x_j), \tag{3}$$

where $x_j$ is the solution vector at iteration $j$, $H_j$ is the Hessian matrix at iteration $j$, $diag[H(x_j)]$ is the diagonal elements of the Hessian and $\nabla f_{ob}$ is the gradient of the objective function. $\lambda$ is the parameter that can be assimilated to the step coefficient of the gradient descent. $\lambda$ changes at each iteration such as when it is large, the gradient descent predominates the optimization process and when it is small, Gauss-Newton predominates. Shakarji defines a procedure for choosing an initial value for $\lambda$ and then updating it at each iteration [25]. In an application to freeform surfaces, Jiang et al. [13] propose another way of determining the value of $\lambda$ based on the smallest singular value of the Hessian matrix.

In [13] a method to fit freeform surfaces to small numbers of data in two steps is described. A coarse fitting is firstly performed by using a structured region signature procedure and secondly, a LM optimization is applied for fine fitting in which a Jacobian matrix $J$ needs to be calculated. The LM algorithm further necessitates the computation of the Hessian matrix $H = J^T J$ by linear approximation and its inverse at each iteration. Although matrix inversion is taken care of by some efficient pseudo-inverse techniques such as SVD or QR decomposition, it is still the major issue of this kind of algorithms. The complexity of matrix inversion is $O(n^3)$ with $n$ being the number of variables in the system. For a large $n$, the cost of inverting $H$ is considerable.

For a very large number of variables or unconstrained non-linear problems, iterative quasi-Newton methods such as the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) method can be more convenient [26]. Like any minimization algorithm, BFGS preferably requires a twice-differentiable objective function $f_{obj}$ whose gradient must be zero at optimality. The method approximates the inverse Hessian of the function by cumulating information from previous iterations, therefore, a sequence of matrices is constructed throughout. This sequence occupies a very large memory space which eventually comes to saturation when all the matrices are stored [15,27]. Subsequently, Nocedal describes an improved method called L-BFGS which keeps updating the Hessian matrix using a limited amount of storage [14]. At every iteration, the Hessian is approximated using information from the last $m$ iterations with each time, the new approximation replacing the oldest one in the queue. L-BFGS is an enhanced BFGS optimization algorithm for reducing memory usage when storage is critical and is suitable for applications involving large volumes of data and variables. Furthermore, Zheng et al. [15] propose a L-BFGS algorithm to perform B-Spline curve fitting and show that, unlike traditional methods, L-BFGS can perform optimization of control points and footpoints simultaneously. Additionally, neither formulating nor solving linear equations is needed, making the algorithm very efficient and faster than other methods such as the one in [28]. Zheng et al. [15] have also studied the complexity of the algorithm and showed that it is linear in the number of data.

The L-BFGS algorithm goes as in Eq. (4). Consider the problem in which the objective function $f_{obj}$ has gradient $g$ and Hessian $H$ and returns a scalar value, $\phi(x) = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f_{obj} = \min_x(\phi(x)). \tag{4}$$

#### 2.2.1. Initialization

The initialization consists of 4 main settings: (1) make an initial guess $x_0$, (2) choose $m$ for the number of iterations to be considered for the inverse Hessian update (preferably $m > 5$), (3) set two real

numbers $\beta'$ and $\beta$ such that $0 < \beta' < \frac{1}{2}$ and $\beta' < \beta < 1$ and (4) choose a symmetric, positive definite starting inverse Hessian matrix $H_0^{-1}$.

#### 2.2.2. Iterations

Perform a *line search* routine to compute the quasi-Newton direction. By being positive definite, the Hessian ensures that the optimization direction $d_j$ is a descent direction (Eq. (5))

$$d_j = -H_{j-1}^{-1}\Delta f(x_{j-1}) = -H_{j-1}^{-1}g(x_{j-1}). \tag{5}$$

Determine the *step size* $\alpha$ (for example by backtracking line search). $\alpha_j$ should satisfy the Wolfe conditions (Eq. (6)) at each iteration. $\beta'$ and $\beta$ are parameters to control the accuracy of the line search routine. $\beta'$ defines a tolerance on the function $f_{obj}$ and $\beta$ a tolerance on its gradient $g$

$$\begin{aligned} &f_{obj}(x_j + \alpha_j \cdot d_j) \le f_{obj}(x_j) + \beta'\alpha_j \cdot g(x_j)^T \cdot d_j. \\ &g(x_j + \alpha_j \cdot d_j)^T d_j \ge \beta g(x_j)^T \cdot d_j. \end{aligned} \tag{6}$$

The Wolfe conditions along with exact *line search* routine require a large number of function and gradient evaluations. Nevertheless, inexact search allows to determine a step length $\alpha$ at minimal cost while adequately reducing the $f_{obj}$ and making a reasonable progress in minimization. Then the update rule for the solution $x$ is indicated in Eq. (7)

$$x_{j+1} = x_j = \alpha_j d_j. \tag{7}$$

#### 2.2.3. Update $H_j^{-1}$

The inverse Hessian at step $j+1$ is the inverse Hessian at step $j$ plus a certain variation $\triangle h$ which is expressed in function of the change in the variables $\triangle x_j$, and the change in the gradient $\triangle g_j$ (Eq. (8)). Due to the iterative process, an inverse Hessian matrix at an iteration $m$ can be written in function of $H_0^{-1}$ and the vectors $\triangle x_j$ and $\triangle g_j$ of all iterations up to $m$ only. The update becomes as follows:

$$\begin{aligned} H_m^{-1} &= H_0^{-1} + \Delta h(\Delta x_0, \Delta g_0, H_0^{-1}) + \Delta h(\Delta x_1, \Delta g_1, H_1^{-1}) + \cdots \\ &\quad + \Delta h(\Delta x_{m-1}, \Delta g_{m-1}, H_{m-1}^{-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

The complexity of the update for L-BFGS is of the order of $O(nm)$ as compared to its predecessor BFGS which complexity is $O(n^2)$.

## 3. Evaluation and comparison of fitting algorithms

The newly used L-BFGS as well as the LM fitting algorithms and ICP, are evaluated in by referring to the standards defined in ISO 10360-Part 6 [17] and the works provided by Lin et al. [29]. Different tests are done on simulated datasets which are derived from the theoretical model equation of the asphere and modified by means of the addition of Gaussian noise and form deviations.

The fitting process, illustrated in Fig. 2, is the process in which the model parameters ($c$, $\kappa$ and $\boldsymbol{a}$) are fixed and the only variables to optimize are the transformation parameters often called motion parameters. Since the aspherical model is axis-symmetric, the rotation about $z$ is a redundant degree of freedom, thus, only five motion parameters out of six are required to determine the best fit of the dataset with respect to the model: a rotation matrix $\boldsymbol{R_\beta}$ about the $x$-axis, a rotation matrix $\boldsymbol{R_\gamma}$ about the $y$-axis and three translations $t_x$, $t_y$ and $t_z$ in $x$-, $y$- and $z$- directions, respectively.

The objective function $f_{obj}$ to minimize is the sum of the squared distances between the data points $\boldsymbol{P_i}(X_i, Y_i, Z_i)$ and their respective footpoints $\boldsymbol{p_i}(x_i, y_i, z_i)$ on the model. Eq. (9) is an expression of this functional in which $\boldsymbol{T} = (t_x, t_y, t_z)$ denotes the translation vector and $\beta$ and $\gamma$ are the rotation angles about $x$ and $y$, respectively:

$$f_{obj} = (\beta, \gamma, \boldsymbol{T}) = \min_{\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z} \sum_{i=1}^{N} \left\| \boldsymbol{p_i} - (\boldsymbol{R_{\beta,\gamma}}.\boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{T}) \right\|^2, \tag{9}$$

$N$ being the number of points in the dataset and $\boldsymbol{R_{\beta,\gamma}} = \boldsymbol{R_\beta}\,\boldsymbol{R_\gamma}$ the combined rotation matrix about $x$ and $y$.

L-BFGS, LM and ICP optimization algorithms are compared based on whether they return the same residual errors (RMS and PV) and corresponding motion parameters as the simulated ones. Orthogonal distance-based fitting and vertical distance-based fitting are also studied.

### 3.1. Implementation of the L-BFGS and LM algorithms

L-BFGS and LM algorithms are implemented in sequential computation of footpoints and transformation parameters. Vertical footpoints are the direct projection of each corresponding data point. However, orthogonal footpoints need to be calculated in a nested minimization loop within the main transformation parameters minimization loop using the Newton–Raphson method (Fig. 1). The asphere is an axis-symmetric surface that only depends on the variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Finding the 3D orthogonal projection of a data point can be seen as a 2D problem. In fact, the $rz$-plane that contains the data point to which a projection point must be found, is oriented by an angle $\theta_i$, and definitely contains the projection point as well as the axis of symmetry (Fig. 1). Usually, the projection of a point $\boldsymbol{P_i}$ on a surface requires the optimization of two parameters, here $r_i$ and $\theta_i$. But, since the model of the asphere (Eq. (1)) is independent of the $\theta$-coordinate, $\theta_i$ is directly determined from the corresponding data point provided that it is expressed in its cylindrical coordinates.

Each Cartesian data point $\boldsymbol{P_i^{Car}}(X_i, Y_i, Z_i)$ is written in cylindrical coordinates $\boldsymbol{P_i^{Cyl}}(R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \Theta_i = \tan^{-1}(Y_i/X_i), Z_i)$. Then, as shown in Fig. 1b, the footpoint $\boldsymbol{p_i^v}$ (vertical) or $\boldsymbol{p_i^o}$ (orthogonal) is computed in the selected $rz$-plane at $\theta_i = \Theta_i$.

For the vertical distance projection problem, the $r$-coordinate of the vertical footpoint $\boldsymbol{p}_i^v$ (Fig. 1) is taken to be that of the data point, $r_i^v = R_i$. The $z$-coordinate $z_i^v = f(r_i^v)$ is calculated following Eq. (2).

For the orthogonal distance projection problem, the $r$-coordinate of the footpoint is initially taken to be that of the data point, $r_{i\,ini}^o = R_i$. Then, the Newton–Raphson method iteratively optimizes $r_i^o$, and $z_i^o = f(r_i^o)$ is calculated following Eq. (2). The asphere profile is of simple geometry, therefore, the Newton–Raphson method converges to a global minimum inevitably. Indeed, finding the orthogonal footpoint by Newton–Raphson's method requires setting the dot product $S_i = \vec{d}_i \cdot \vec{t}_i$ to zero. $\vec{d}_i$ is the distance vector from $\boldsymbol{P_i^{Cyl}}$ to $\boldsymbol{p_i}(r_i, z_i)$ in the corresponding $\theta_i$-oriented $rz$-plane (Fig. 1). $\vec{t}_i$ is the tangent vector at $\boldsymbol{p}_i$ and is expressed as in Eq. (10), by differentiating the implicit function $F$ (Eq. (1)) of the surface at $\boldsymbol{p}_i$. The initial distance vector input to Eq. (11) is the vertical distance vector $\vec{d}_i^v = (r_i^v - R_i, z_i^v - Z_i)$

$$\vec{t}_i = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial F(r,z)}{\partial z}\right|_{r=r_i, z=f(r_i)} \\ \left.\dfrac{-\partial F(r,z)}{\partial r}\right|_{r=r_i, z=f(r_i)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

The function $S_i$ is iteratively solved until the dot product between $\vec{d}_i$ and $\vec{t}_i$ falls below a certain predefined threshold $\varepsilon_1 = 10^{-16}$.

$$S_i = (r_i - R_i)\frac{\partial F(r_i, z_i)}{\partial z} + (z_i - Z_i)\frac{\partial F(r_i, z_i)}{\partial r} = 0,$$

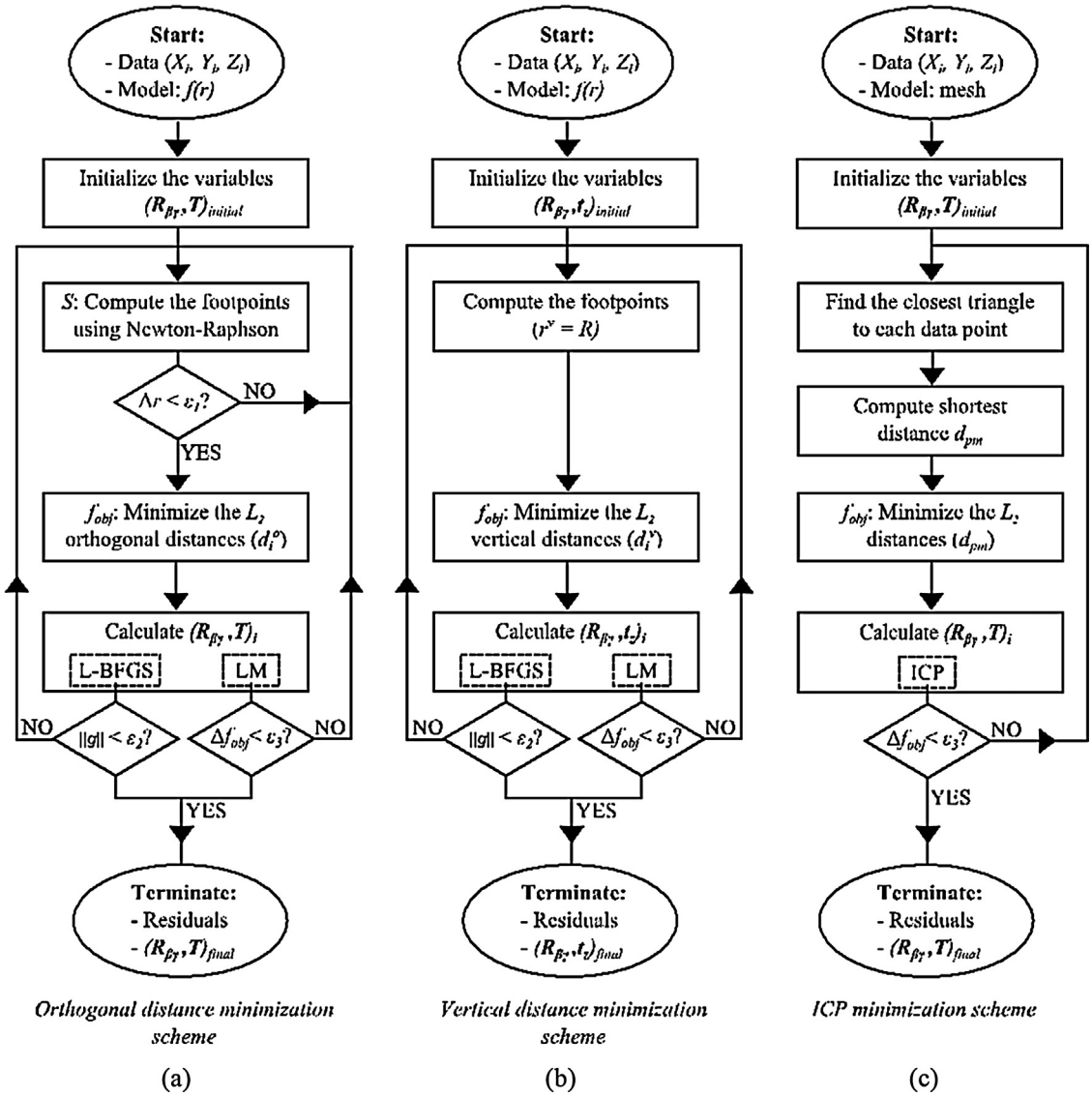



**Fig. 2.** Sequential algorithm for the fitting problem. $L_2$: least-squares norm; $\boldsymbol{R}_{\beta,\gamma}$: combined rotation matrix and $\boldsymbol{T}$: translation vector; $f_{obj}$: change in the objective function value; $||g||$: norm of the gradient of $f_{obj}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$: the algorithms stop criteria.

with

$$z_i = f(r_i) = -\left(\frac{cr_i^2}{1+\sqrt{1-(1+k)c^2r_i^2}} + \sum_{j=1}^{5} a_{2j} r_i^{2j}\right). \tag{11}$$

The orthogonal footpoint calculated in cylindrical coordinates is then transformed back to 3D Cartesian coordinates, i.e. $\boldsymbol{p_i^o} = (r_i^o \cdot \cos\Theta_i, r_i^o \cdot \sin\Theta_i, f(r_i^o))$.

With the coordinates of each footpoint, vertical $\boldsymbol{p_i^v}(x_i^v, y_i^v, z_i^v)$ or orthogonal $\boldsymbol{p_i^o}(x_i^o, y_i^o, z_i^o)$, obtained from the inner loop, it becomes possible to plug in the distances and solve for the transformation parameters. The outer loop is executed repeatedly until convergence conditions are met. The norm of the gradient is minimized with L-BFGS with a stop criterion $\varepsilon_2 = 10^{-16}$. A stop criterion $\varepsilon_3 = 10^{-15}$ is set to be the objective function's tolerance for LM and ICP since it can be assimilated to a distance tolerance in both cases (Fig. 2b and c). $\varepsilon_3$ measures the relative error desired in the sum of squared distances.

### 3.2. Implementation of the variant of the ICP algorithm

The ICP is a registration algorithm which finds a spatial transformation to align two point-sets and follows the procedure illustrated in Fig. 2c. It is the mostly used algorithm in point-set registration because it is designed for discrete data, making it a relatively fast algorithm with very low storage. ICP is based on two main operations, point identification and point matching which are usually computationally expensive. An iterative loop identifies pairs of points and matches them across both entities. The matching phase results in a transformation matrix that brings one point-set to the other with residual error. If this error is larger than the threshold value, point identification and matching restarts until the two point-sets are closely aligned. In order to have fine precision on the results, it is preferable that the size of both sets be equal.

The variant of ICP that is proposed here is designed to be used in fitting applications where one of the point-sets is a theoretical mesh model. All points are involved in the point-matching phase so that accuracy is preserved. A mesh model offers the advantage of obtaining a more accurate distance calculation than a point model does. The mesh is a regular triangular mesh built from axis-symmetric theoretical points simulated on the asphere's surface and reconstructed using a Delaunay triangulation technique [30]. To guarantee accurate residual errors, equivalent to those found by L-BFGS and LM, the chord error $C_{err}$ between the mesh triangles and the theoretical surface is taken to be very small: $C_{err} \leq 2$ nm.

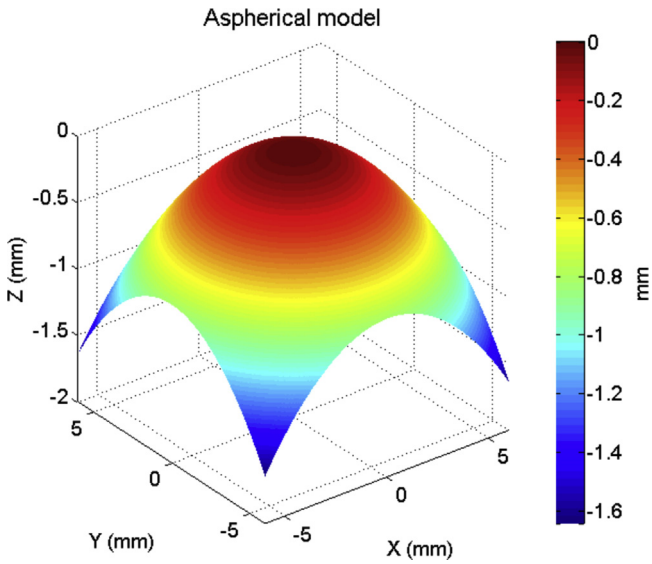



**Fig. 3.** Simulated asphere model.

The value of $C_{err}$ is determined according to the precision sought for aspherical lens characterization and is assured by increasing or decreasing the sampling density.

With the proposed discrete approach, the objective function to minimize is the sum of the squared distances $d_{pm}$ (Eq. (12)). $d_{pm}$ is the shortest distance separating a data point $p$ from its footpoint situated on the closest triangle in the mesh, i.e. $d_{pm} = \min(d_{pv}, d_{pe}, d_{pt})$ and $d_{pv}$, $d_{pe}$ and $d_{pt}$ are the point-to-vertex, point-to-edge and point-to triangle distances respectively. The variables disregard the angle about $z$, since the points are axis-symmetric

$$f_{obj}(\beta, \gamma, \boldsymbol{T})_{ICP} = \min_{\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z} \sum_{i=1}^{N} \left\| d_{pm_i} \right\|^2. \tag{12}$$

### 3.3. Applications to simulated datasets

The aspherical model is simulated based on Eq. (2) by generating symmetrically distributed points around the asphere's axis over a rectangular grid (Fig. 3). The model parameters $c$, $k$, $a_2$, $a_4$, $a_6$, $a_8$, $a_{10}$ are equal to the values given in Section 2.1. To evaluate the robustness and correctness of the developed fitting algorithms in conformance with ISO 10360: Part 6 [17], two simulations are performed: one with added random errors to characterize surface roughness and another with combined random and systematic errors to characterize both surface roughness and form errors owing to the manufacturing processes. The simulations do not take into account measurement errors (noise and probing random errors) but these will not be disregarded. The specification of form errors and surface roughness is that they act in the orthogonal direction to the aspheres' surface.

#### 3.3.1. Random errors

The first test involves generating Gaussian noise with controlled mean and standard deviation ($\mu = 0$, $\sigma = 8$ nm). This value is coherent with areal surface roughness that can manifest on real datasets due to manufacturing defects such as tool wear, tool mark and other asynchronous motion errors [31]. A Matlab function ("*randn*") is used to generate the noise (Fig. 4) which is added to the theoretical data of Fig. 3 in the orthogonal direction at each data point.

The execution of this function returns actual standard deviations that slightly differ from the imposed value. The aim of this simulation is to study the robustness of the algorithms when confronted to repeated random datasets of equal magnitude. L-BFGS, LM and one variant of ICP are then used to fit the noisy data and their robustness is qualified. The RMS of the residual errors and their PV are both evaluated and compared to the simulated ones since they transcribe the form specifications of aspheres [32]. The machine used for the tests is an Intel core i7/×64 platform with 8 Gb of RAM and a 2.0 GHz processor.

The obtained residual PV values, reported in Table 1, are quasi identical for all three algorithms and are sufficiently close to the simulated PV values to about some hundredths of nanometers. The RMS values are also coherent, and this remains unchanged for the repeated test.

#### 3.3.2. Combined random and systematic errors

The test involves superposing systematic errors onto the previous random errors. Systematic errors $F_h$ are referred to as form deviations and are generated using Fourier harmonics according to Eq. (13) and ISO10360-Part 6 standard for simple shapes. Fig. 5 shows the combined systematic and random errors which can in reality be due to the manufacturing process errors and especially the synchronous (systematic) motion errors of the mechanical

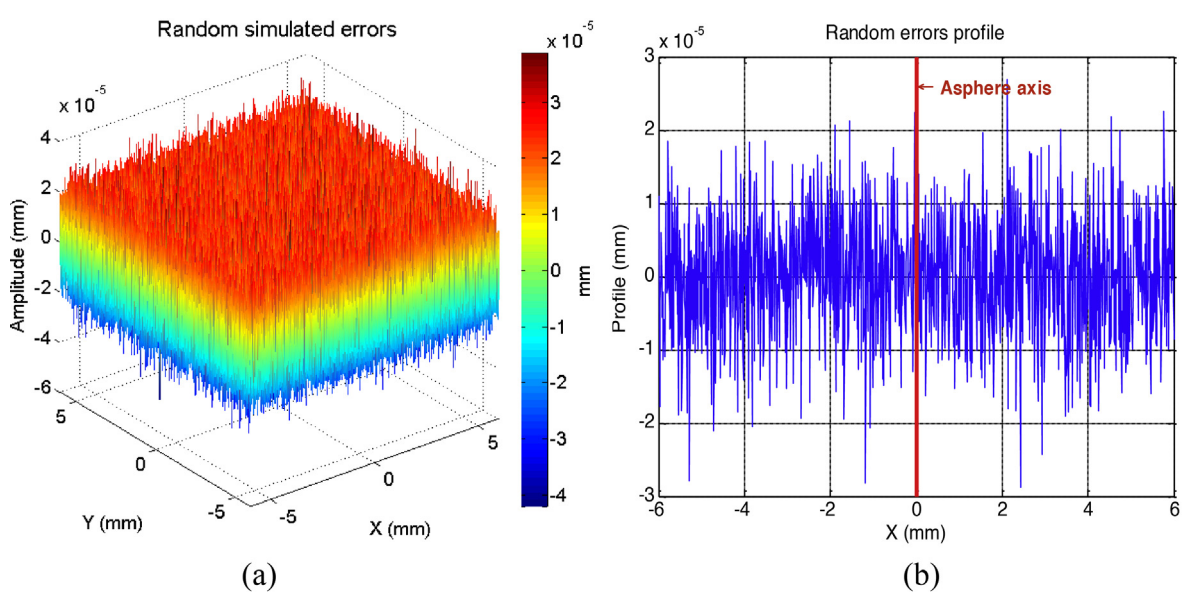



**Fig. 4.** Simulated Gaussian noise ($\mu = 0$, $\sigma = 8.0$ nm). (a) 3D plot and (b) 2D distribution at the middle section in the $xz$-plane.

**Table 1**
Fitting of 5 random error datasets with Gaussian noise of 0 mean and 8.0 standard deviation; 1,500,000 points are used.

| Gen. err. (nm) | | L-BFGS (nm) | | | LM (nm) | | | ICP (nm) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RMS | PV | RMS | PV | $\Delta^{PV}$ (%) | RMS | PV | $\Delta^{PV}$ (%) | RMS | PV | $\Delta^{PV}$ (%) |
| 8.003 | 77.325 | 8.003 | 77.334 | 0.017 | 8.003 | 77.329 | 0.005 | 8.004 | 77.374 | 0.063 |
| 8.001 | 79.875 | 8.001 | 79.881 | 0.008 | 8.001 | 79.880 | 0.006 | 8.003 | 79.945 | 0.088 |
| 7.996 | 81.992 | 7.996 | 81.938 | −0.066 | 7.996 | 81.942 | −0.061 | 7.998 | 82.041 | 0.060 |
| 8.002 | 83.252 | 8.002 | 83.299 | 0.056 | 8.002 | 83.301 | 0.059 | 8.003 | 83.387 | 0.162 |
| 8.008 | 88.871 | 8.008 | 88.888 | 0.019 | 8.008 | 88.889 | 0.020 | 8.009 | 88.379 | −0.554 |

Gen. err., generated errors.

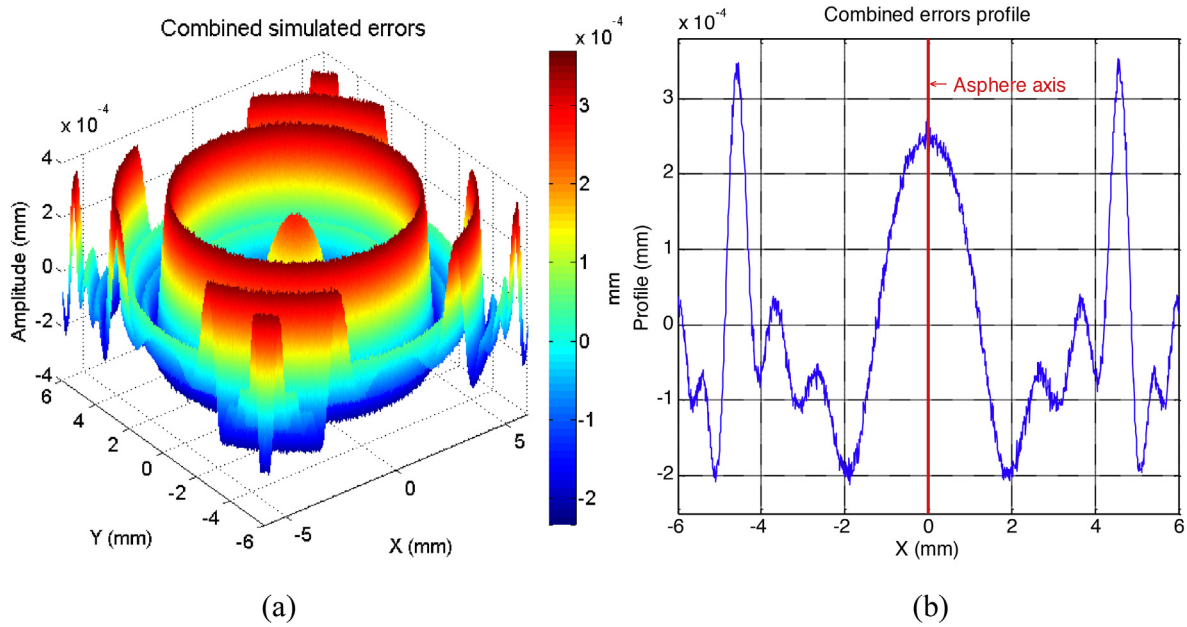



**Fig. 5.** Combined errors: simulated form deviations with added random noise ($\sigma$ = 8.0 nm). (a) 3D plot; (b) profile view at the middle section in the *xz*-plane.

guiding systems [31,33]. The generated PV value of the Fourier harmonics (≈609 nm) corresponds to a realistic form error on aspherical lenses

$$F_h(\tau) = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(2\pi k w_0 Z) + B_k \cos(2\pi k w_0 Z), \tag{13}$$

where $k$ is the index of the harmonic cosine wave, $w_0$ is the fundamental frequency, $A_k$ and $B_k$ are the user-specified partial amplitudes of the $k$th harmonic and $Z$ is the $z$-coordinate to which the form defects are applied.

The systematic errors are taken as axis-symmetric (Fig. 5) because the major manufacturing process of aspheres is a turning process that combines a rotation of the substrate and a functional motion of the tool [34]. They occur in the orthogonal direction to the surface and that is why an orthogonal distance fitting is applied.

All three fitting methods return the same RMS and PV value as the simulated ones (Table 2). The RMS and PV values remain quasi-unchanged whichever the number of points in the dataset is as long as it is not too small (<1000 points). The points are selected from the data file following the order of the recorded data and by picking 1 point every $x$ points, where $x$ is an integer number representing a ratio by which the number of points will be reduced by.

Table 3 reports the estimated motion parameters for two different initial positions of the simulated datasets. The first imposed initial position ($IP_1$) is generated with an offset of 1 mm in all three directions with respect to the model while keeping rotations at zero and $IP_2$ is generated with rotations by 30° about $x$- and $y$-directions with respect to the model while keeping translations to zero. The results of the motion parameters estimation show that both L-BFGS and LM are accurate for both imposed initial alignments as they return accurately enough good estimates. ICP fails

**Table 2**
Fitting using least-squares orthogonal distance minimization for the combined systematic and random errors dataset. *N* is the number of points.

| *N* | Gen. err. (nm) | | L-BFGS (nm) | | LM (nm) | | ICP (nm) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | RMS | PV | RMS | PV | RMS | PV | RMS | PV |
| 100 | | | 137.437 | 642.155 | 137.436 | 642.142 | 138.621 | 642.875 |
| 1000 | | | 136.490 | 616.270 | 136.490 | 616.204 | 137.246 | 616.894 |
| 10,000 | | | 136.480 | 609.031 | 136.456 | 609.022 | 137.250 | 609.623 |
| 100,000 | 136.482 | 609.593 | 136.455 | 609.321 | 136.455 | 609.347 | 137.231 | 609.945 |
| 1,000,000 | | | 136.455 | 609.403 | 136.455 | 609.403 | 137.232 | 609.810 |
| 5,000,000 | | | 136.455 | 609.372 | 136.455 | 609.390 | 137.232 | 609.786 |
| 10,000,000 | | | 136.455 | 609.364 | 136.455 | 609.375 | 137.232 | 609.771 |

Gen. err., generated errors.

**Table 3**
Fitting using orthogonal distance minimization for the simulated combined errors dataset with two theoretical initial alignments.

| | | Gen. alignment | L-BFGS | LM | ICP |
|---|---|---|---|---|---|
| $IP_1$ | $\beta$ | 0° | 0.00000094° | 0.0000056° | 0.0000046° |
| | $\gamma$ | 0° | 0.000033° | 0.000097° | 0.000029° |
| | $t_x$ | 1 mm | −1.0000124 mm | −1.0000368 mm | 0.0000346 mm |
| | $t_y$ | 1 mm | −1.0000004 mm | −0.9999979 mm | 0.0000369 mm |
| | $t_z$ | 1 mm | −0.9999852 mm | −0.9999866 mm | −0.541437 mm |
| $IP_2$ | $\beta$ | 30° | −30.000034° | −30.000082° | |
| | $\gamma$ | 30° | −30.000066° | −30.000106° | |
| | $t_x$ | 0 mm | −0.0000141 mm | −0.0000277 mm | × |
| | $t_y$ | 0 mm | 0.0000033 mm | 0.0000226 mm | |
| | $t_z$ | 0 mm | 0.0000150 mm | 0.0000150 mm | |

Gen. alignment, generated alignment.

**Table 4**
Comparison of vertical and orthogonal distance minimization for different dataset sizes and for combined simulated errors: reporting RMS values. *N* is the number of points.

| *N* | Gen. RMS err. (nm) | Orthogonal (nm) | | Vertical (nm) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | L-BFGS | LM | L-BFGS | LM |
| 1000 | | 136.490 | 136.490 | 139.991 | 139.964 |
| 10,000 | | 136.480 | 136.456 | 139.832 | 139.832 |
| 100,000 | 136.482 | 136.455 | 136.455 | 139.865 | 139.865 |
| 1,000,000 | | 136.455 | 136.455 | 139.868 | 139.868 |
| 10,000,000 | | 136.455 | 136.455 | 139.862 | 139.862 |

Gen. RMS err., generated RMS error.

to return estimations for the case of $IP_2$ as the algorithm diverges when the angle is more than 15°.

### 3.3.3. Vertical versus orthogonal distance minimization

The evaluation of the effect of fitting data based on vertical and orthogonal distance minimization is achieved here by using the previously simulated datasets and the results are compared.

Table 4 shows a comparison between vertical and orthogonal Least Squares distance minimizations using the L-BFGS algorithm (LM giving the similar results) with the added combined errors. Note that for the vertical distance case, the input datasets are perfectly aligned in *x* and *y* directions with respect to the model. The results show that orthogonal distance minimization is more accurate than vertical distance minimization and that this remains true irrespective of the number of points in the input dataset. This is clearly due to the fact that errors were added to the data in the orthogonal direction. It is to note that vertical distance minimization fitting time is extremely fast (<3 s for $10^6$ points).

Another simulation has been performed to reproduce optical probing noise which can occur during a measurement process. Such errors occur in the vertical direction since measurement is done along this direction. For the current case, vertical distance minimization is more appropriate. Nevertheless, the error made by choosing to perform orthogonal distance minimization is less than <1% for the PV and RMS values. Since this error is negligible as compared to form and roughness errors which predominate, choosing orthogonal distance minimization is not very detrimental.

### 3.3.4. Algorithmic complexity

The L-BFGS, LM and ICP algorithmic complexities are analyzed based on two criteria, the units of memory used and the computational time expressed as Central Processing Unit time (CPU time). Fig. 6 shows that the time complexities of L-BFGS and LM are linear in the number of points for the case of added random errors. However, it can be observed based on the given implementations of L-BFGS, LM and ICP, that ICP is slow as compared to L-BFGS and LM and that LM is about twice slower than L-BFGS ($t_{\text{L-BFGS}\approx 50\%\times t_{\text{LM}}}$) especially when the number of points exceeds $10^5$ points.

Regarding memory storage, all algorithms use less than 1Gb in general. L-BFGS stores the least memory space among all because of its limited memory feature (less than 0.2 Gb). As the number of variables grow, the Jacobian of the function to minimize in the case of LM grows very large and its inversion costs more. ICP needs to store a massive triangular mesh of the model. The time complexity of the algorithms is compared for the case of combined errors too (Fig. 7) and confirms that the time complexity of the L-BFGS and LM algorithms is linear in the number of data points.

Some additional tests are performed on the simulated combined errors dataset in order to analyze the sensitivity of the time complexity and residual errors to the L-BFGS parameters, such as, the limited number of iterations *m* and the coefficients $\beta'$ and $\beta$. One parameter is changed at a time while the others remain fixed. The evolution of the variables and the objective function over the iterations are also discussed. This analysis is only performed on L-BFGS

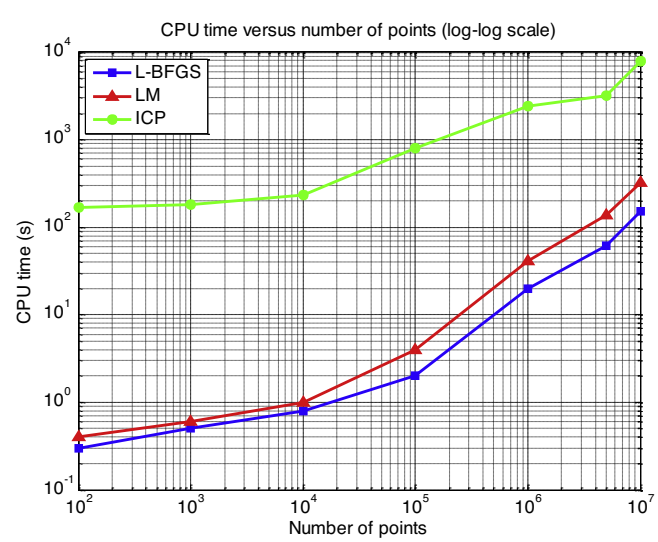



**Fig. 6.** Time performances in seconds of the algorithms versus the number of points for a simulated dataset with added Gaussian noise of 0 mean and 8.0 standard deviation.

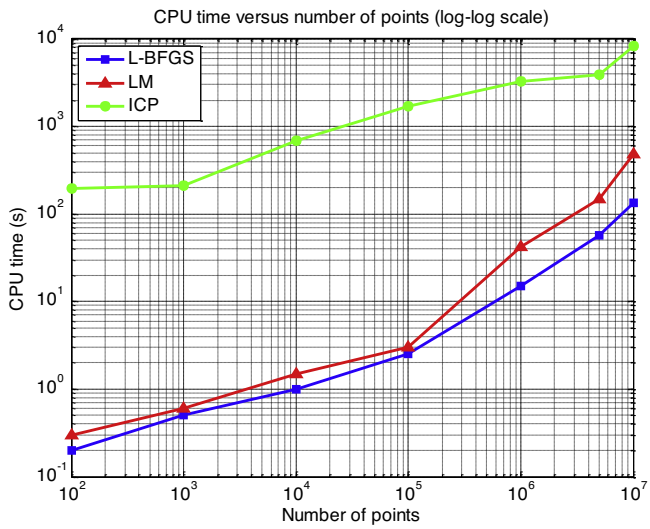



**Fig. 7.** Time performances in seconds of the algorithms versus the number of points for a simulated dataset with added random and systematic errors.3.3.5 Sensitivity of L-BFGS intrinsic parameters.

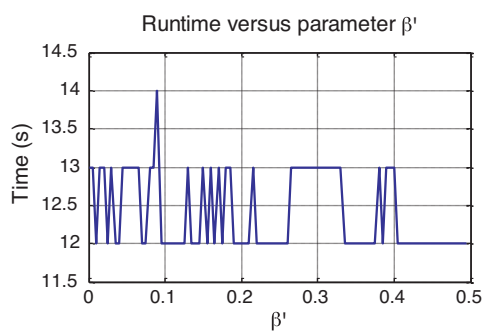



**Fig. 8.** The influence of $\beta'$ on the computational time performance of the algorithm for the simulated combined errors dataset.

parameters because a similar analysis has been done for LM parameters [25].

The time performance of the L-BFGS algorithm for the dataset with the added combined errors versus the parameter $\beta'$ over its entire range of possible values is shown in Fig. 8. The time complexity of L-BFGS is not affected by the value of $\beta'$ as only a fluctuation of 2 s is observed. Fig. 9 shows the influence of this parameter on the residual errors of the fit and reveals that they are independent of $\beta'$. In both cases, $m$ and $\beta$ are fixed to default values of 11 and 0.9, respectively. From these plots, it can be concluded that $\beta'$ has no major impact on either of the algorithm's complexity or the residual errors.

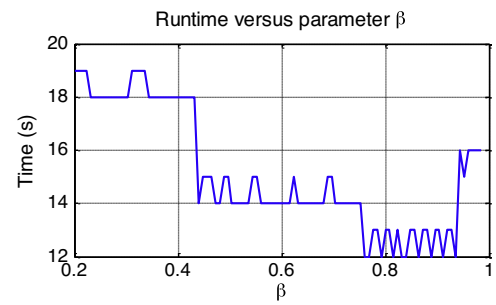



**Fig. 10.** The influence of $\beta$ on the computational time performance of the algorithm for the simulated combined errors dataset.

Figs. 10 and 11 illustrate the influence of the parameter $\beta$ on the time complexity and residual errors while $m$ and $\beta'$ are fixed to 11 and 0.0001, respectively. Here again, the residual errors are unaffected by the choice of $\beta$, nonetheless, convergence time is clearly influenced and can vary by up to 58%.

Fig. 12 illustrates the effect of changing the number of iterations $m$ to be taken into account for the limited memory criterion. The graph reveals that a value of $m > 5$ should be generally considered. Below this value, computational time becomes significant and the advantage of using a limited memory is depreciated. It is to note that the value of $m$ does not affect residual errors.

Based on the above, the intrinsic L-BFGS parameters have a very low impact on residual errors. Nonetheless, computational time is sensitive to all three parameters.

For one specific set of parameter values, the evolution of the objective function value and the transformation parameters are illustrated in order to show how they vary along the iterations and provide an idea about convergence rate. Fig. 13 is a plot of the evolution of the objective function's value over the iterations of the fitting algorithm. Starting from around the 4th iteration, the objective function value stabilizes with a soft decrease whilst the motion parameters still delicately adjust until a minimum is found and convergence conditions are met around the 17th iteration.

The sum of squared distances evolution depicts the rate of convergence of the L-BFGS algorithm and confirms that it is relatively fast.

## 4. Application to a measured aspherical lens

After the validation of the algorithms on simulated datasets, the aim is to tackle real measured data with the three proposed algorithms in order to compare them and show the efficiency of L-BFGS.

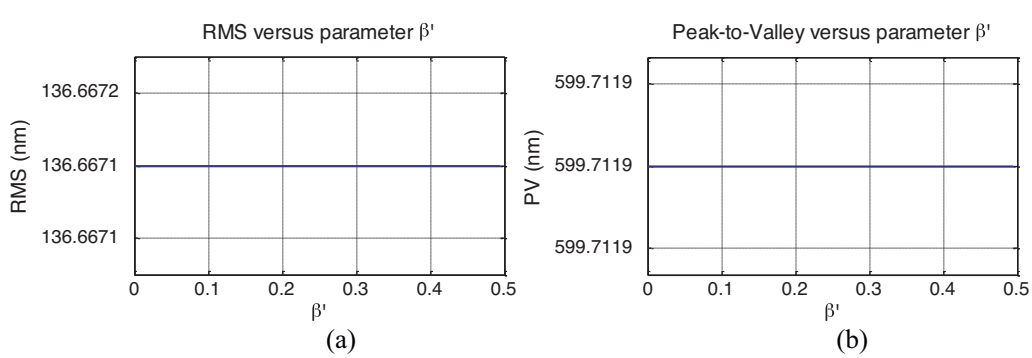



**Fig. 9.** The influence of $\beta'$ on the residuals for the simulated combined errors dataset. (a) RMS residuals; (b) PV residuals.

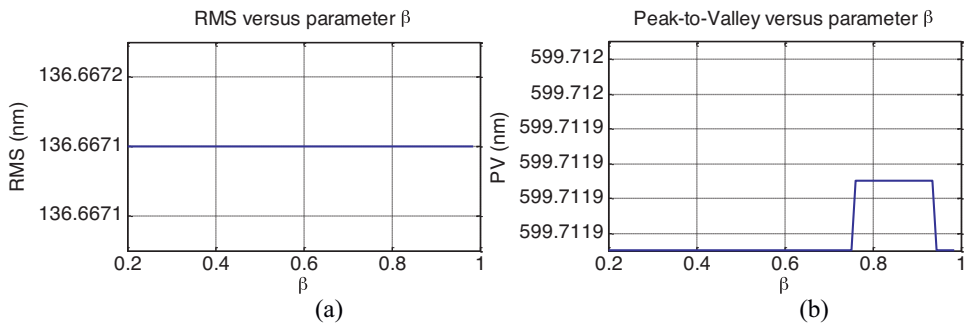



**Fig. 11.** The influence of $\beta$ on the residuals for the simulated combined errors dataset. (a) RMS residuals; (b) PV residuals.

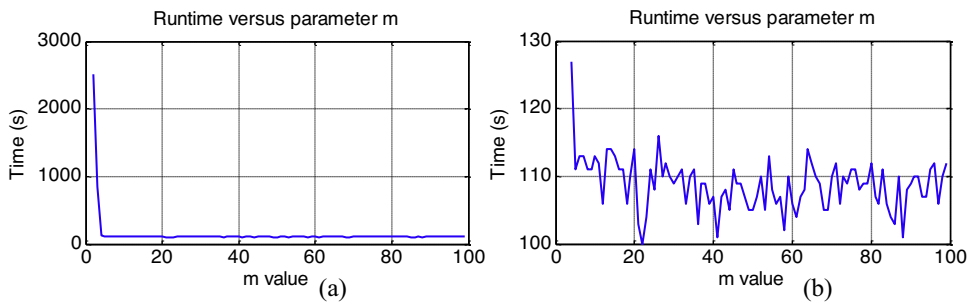



**Fig. 12.** The influence of $m$ on the time performance. (a) $m > 1$; (b) $m > 3$.

### 4.1. LNE's high precision profilometer description and measurement

LNE's high precision profilometer is a measurement machine (Fig. 14) capable of performing independent motions in all $x$, $y$ and $z$ directions using three independent high-precision mechanical guiding systems. While $x$ and $y$ motions are controlled by sub-nanometer resolution laser interferometers, the $z$ motion is controlled by a differential laser interferometer that allows to shorten the metrology loop and maintain a sub nanometric accuracy. The supporting structure is made of massive granite and carries the guiding elements. The metrology frame is made of Invar for minimal sensitivity to environmental influence [35,36]. The machine was configured to hold both optical and tactile single scanning probes. On this measuring machine and other systems involving some optical measurement techniques, the new paradigm leans toward the generation of large volumes of data of more than $10^5$ points.

The asphere is posed on the Zerodur table (Fig. 14) and is only measured by a tactile single point scanning probe which has been previously calibrated in situ.

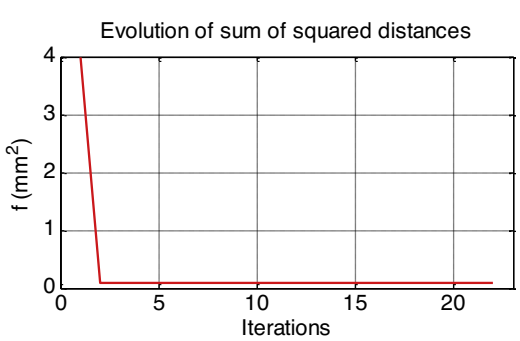



**Fig. 13.** The evolution of the objective function's value over the iterations.

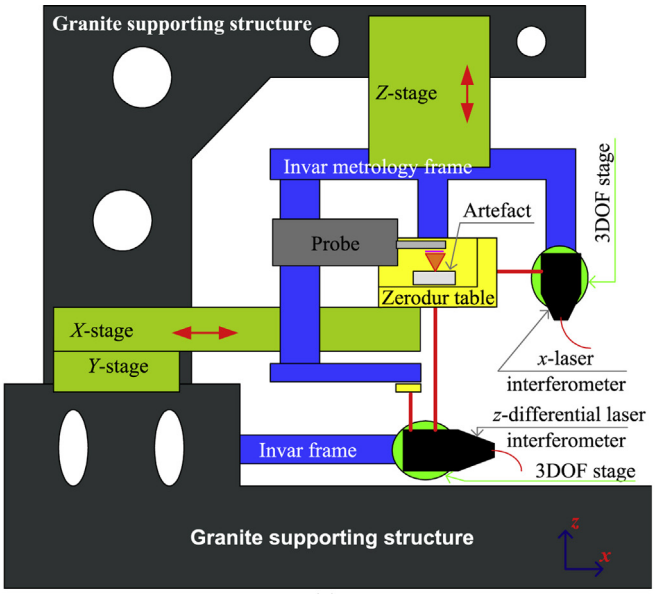
On this machine, it is not possible to exactly align the asphere's axis of symmetry with the $z$-axis of the measurement (Fig. 15), however, an approximation of the apex position can be done by estimating the cusp of the surface. For this matter, the surface is scanned once in the $x$-direction and once in the $y$-direction and a peak is computed. This peak represents an approximation of the cusp around which a symmetrical measurement is performed in $x$- and $y$-directions.

The measurement process is automatic and the data are recorded and reported in Cartesian ($X$, $Y$, $Z$) coordinates. The surface is firstly scanned over an area of 6 mm × 6 mm, giving a grid of 1225 × 1225 points denoted as Scan1. A portion of that scan is extracted to be non-centered and a fitting is performed again and this scan is denoted as Scan2. Scan2 is about 3.5 mm × 3.5 mm in area and is constituted of a grid of about 1385 × 343 points

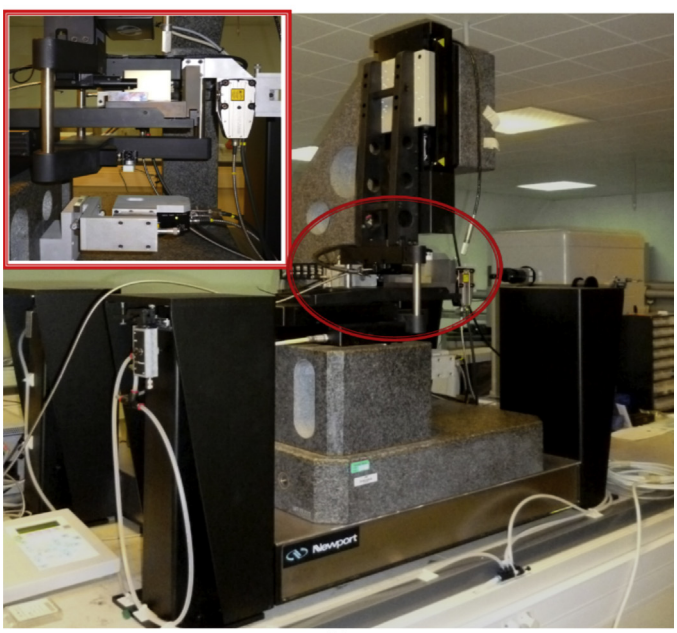
### 4.2. Comparison of the fitting algorithms

On the LNE high precision profilometer, the alignment of the measurement coordinate system with the model coordinate system is manually achieved. Therefore, vertical distance minimization is not valid since it inhibits horizontal translations ($t_x$ and $t_y$), and by that, generates additional errors in the fitting process. From another perspective, the vertical synchronous motion errors of the mechanical high precision guiding elements of the profilometer are compensated by the vertical laser interferometer. The asynchronous motion errors are supposed negligible compared to form errors which act in the orthogonal direction, hence, it is wiser to apply orthogonal distance fitting in this case. The results of the L-BFGS, LM based on Least-Squares orthogonal distance minimization are compared to ICP for the two experimental datasets, Scan1 and Scan2. Table 5 for Scan1 and Table 6 for Scan2 report the residual errors for different sizes of the datasets.

The residual errors are identical for all three algorithms. The larger scan, Scan1, returns a RMS value of about 217.2 nm and the smaller scan, Scan2, returns a RMS of about 44.1 nm. Fig. 16 illustrates the computational time in CPU seconds for the fitting of the




(a)



(b)

**Fig. 14.** Design (a) and photography (b) of the high precision profilometer.

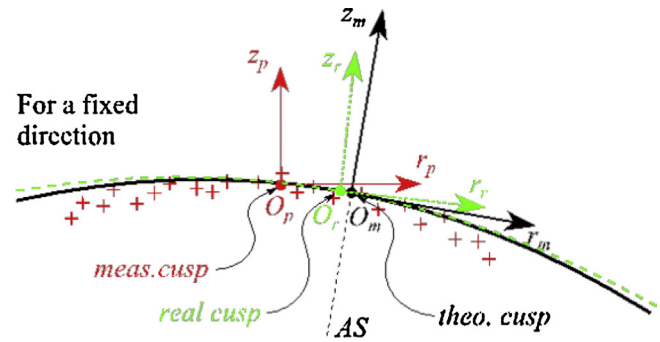



**Fig. 15.** Illustration of the problem with the alignment of the measurement coordinate system. Indices $m$, $p$ and $r$ stand for model, measured point-set and real surface, respectively; *AS* stands for theoretical axis of symmetry.

measured points of Scan1 for different dataset sizes. It shows a linear complexity for L-BFGS with respect to the number of points.

Fig. 17 plots the evolution of the sum of squared distances ($f_{obj}$) over the iterations of the L-BFGS and LM algorithms for the case of Scan1. The algorithms are remarkably comparable with respect to the objective function's evolution. A rapid decay can be observed along the first 3 iterations for L-BFGS and 7 iterations for LM. A more or less stable solution starts at iterations 60 and 55 for L-BFGS and LM, respectively. The error maps of the residual errors resulting from the fitting of each of the datasets are plotted in Fig. 18 using L-BFGS, and show that the residual errors distribution depend on the measured zone. The plots are shown only for the clear apertures of 1.75 mm and 3 mm, respectively.

## 5. Discussion

The L-BFGS, LM and the presented variant of ICP algorithms are validated for the fitting of aspherical surfaces by means of tests performed on simulated datasets. The simulations include systematic and random errors represented by Gaussian noise and Fourier harmonics. The fitting results return accurate estimates of the motion parameters, except for ICP, as well as the same RMS and PV value as the simulated ones whether in the case of added random errors or combined random and systematic errors. The tests have shown that, unlike ICP, both LM or L-BFGS are robust to initial position of the point-set with respect to the model. The results remain unchanged for a large span of dataset sizes ranging from about 1000 points up to 10,000,000. From this observation, it can be deduced that different point sampling strategies do not have a remarkable impact on the accuracy of the results. Since the proposed sampling strategy is not a filtration but some sort of a technique to pick

**Table 5**
Fitting using orthogonal distance minimization for the first scan. *N* denotes the number of points.

| | L-BFGS | | LM | | ICP | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | RMS (nm) | PV (μm) | RMS (nm) | PV (μm) | RMS (nm) | PV (μm) |
| $N = 75{,}000$ | 217.18 | 2.1725 | 217.18 | 2.1727 | 217.29 | 2.1982 |
| $N = 200{,}000$ | 217.18 | 2.1725 | 217.18 | 2.1726 | 217.29 | 2.1992 |
| $N = 500{,}000$ | 217.18 | 2.1728 | 217.18 | 2.1728 | 217.29 | 2.1979 |
| $N = 1{,}500{,}000$ | 217.18 | 2.1726 | 217.18 | 2.1732 | 217.29 | 2.1983 |

**Table 6**
Fitting using orthogonal distance minimization for the second scan. *N* denotes the number of points.

| | L-BFGS | | LM | | ICP | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | RMS (nm) | PV (μm) | RMS (nm) | PV (μm) | RMS (nm) | PV (μm) |
| $N = 75{,}000$ | 44.18 | 0.8186 | 44.18 | 0.8183 | 44.21 | 0.8173 |
| $N = 160{,}000$ | 44.18 | 0.8187 | 44.18 | 0.8184 | 44.21 | 0.8171 |
| $N = 500{,}000$ | 44.18 | 0.8186 | 44.18 | 0.8185 | 44.21 | 0.8175 |

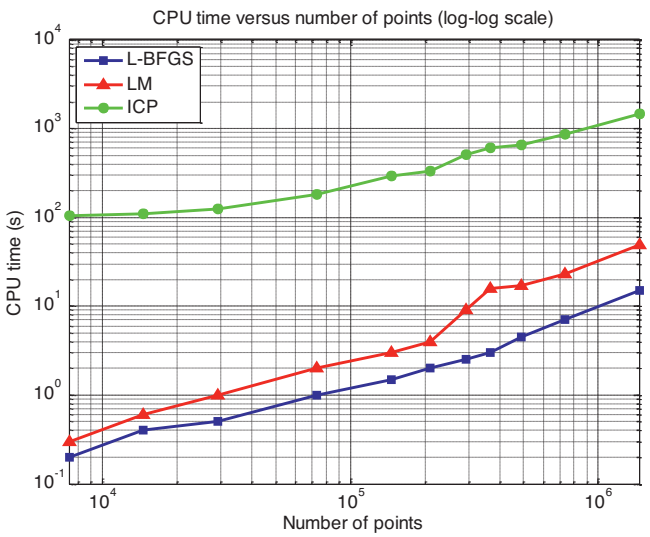



**Fig. 16.** Computational time of the algorithms versus dataset size.

points from all around the scanned surface, it is auspicious for the processing of large volumes of data.

The Least-Squares vertical distance minimization and orthogonal distance minimization are compared on the simulated datasets and show that orthogonal distance minimization is more accurate and appropriate than vertical distance minimization. In any case, the only condition for the correct use of vertical distance minimization is to have both the dataset and the model perfectly aligned in $x$ and $y$ directions, which is impossible in practice unless ultra-high precision measuring machines are used. In this case, vertical distance minimization can be used to perform the fitting extremely fast (<3 s for $10^6$ points), however, to the expense of losing in residual errors accuracy (up to 1%). The algorithmic complexities of L-BFGS and LM are further assessed and show that L-BFGS is almost 3–4 times faster than LM when the number of points becomes considerable (>$10^6$ points). Moreover, ICP is much slower than any of L-BFGS or LM. The analysis of the L-BFGS algorithm parameters shows that their value does not considerably affect residual errors. However, a very small value of $m$ (<6), amplifies computational time.

Then, the comparison of the three algorithms on real datasets with respect to residual errors is performed. For a given number of points, the residual values returned by L-BFGS, LM and ICP are very similar. This remains true for a large span of dataset sizes and provided that a relatively good initial alignment is taken into consideration. All three optimization algorithms present very low memory storage and their time complexities are linear in the number of points. L-BFGS and LM enable the processing of very large amounts of data of more than 100,000 points within few seconds. For instance, for Scan1 containing 1,500,000 points, the running

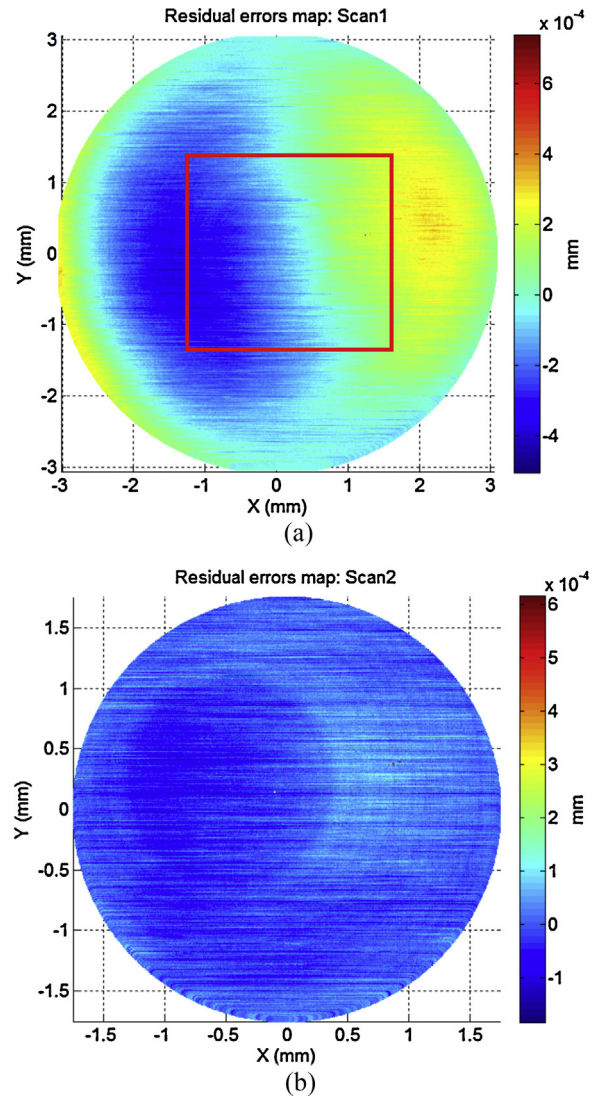



**Fig. 18.** 3D residual errors map characterizing form defects. (a) Scan1, (b) Scan2.

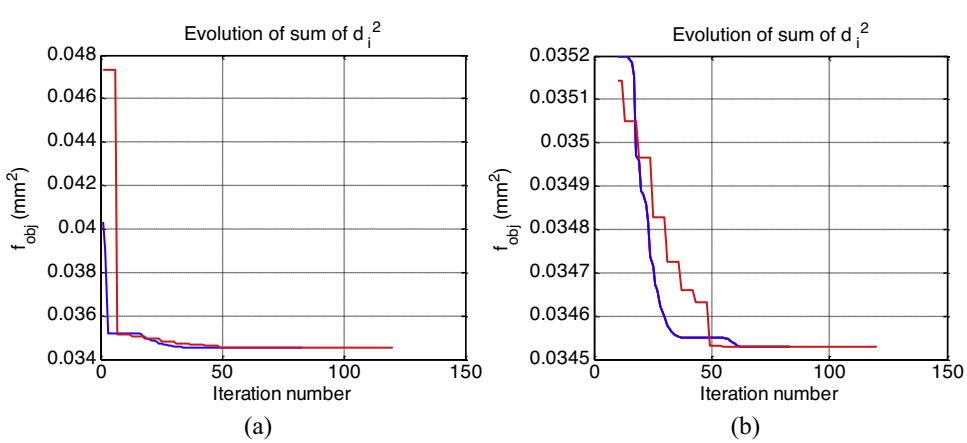



**Fig. 17.** Evolution of the objective function value through the iterations for the case of Scan1 (L-BFGS: blue, LM: red). (a) All iterations; (b) Starting from iteration 10.

time of both L-BFGS and LM is in the range between 30 s and 100 s. Memory was only of a few tens of Megabytes. Since the complexity of both algorithms is linear in the number of points, and the memory storage is negligible, a simple extrapolation suggests that about 10,000,000 points can be eventually processed within 6 to 7 minutes on real datasets.

## 6. Conclusion

This paper deals with the fitting of aspherical surfaces in the aim of characterizing their form errors. The L-BFGS method is proposed and compared to the classically used LM and ICP algorithms on both simulated and measured data. Two cases are proposed for the simulations: a simulation with random errors and another with combined random and systematic errors. The three algorithms return similar results regarding the simulated PV and RMS values. ICP fails to converge accurately for relatively far initial alignments of the data with respect to the model. The impact of the number of points is investigated and does not influence the obtained results. Nonetheless, L-BFGS shows linear time complexity with respect to the number of points and runs faster than LM and largely faster than ICP.

As for the comparison on measured data, two datasets are measured with the LNE's high precision profilometer using a tactile probe. 500,000 and 1,500,000 points are recorded respectively and the above algorithms are applied for the fitting of the data. Again, the RMS and PV values are independent of the size of the dataset and are similar across all algorithms.

As a future work, authors would like to investigate the performance of the L-BFGS algorithm for the fitting of quadric and freeform surfaces. Then, another aspect to be explored would be the fitting using the MinMax criterion. Finally, it was shown that vertical distance minimization is sometimes more suitable than orthogonal distance minimization, hence, a more clever way of considering this issue shall be studied in later publications.

## Acknowledgements

This work is part of EMRP Joint Research Project-IND10 "Optical and tactile metrology for absolute form characterization" project. The EMRP is jointly funded by the EMRP participating countries within EURAMET and the European Union.

## References

[1] Fang F, Zhang X, Weckenmann A, Zhang G, Evans C. Manufacturing and measurement of freeform optics. CIRP Ann Manuf Technol 2013;62(2).
[2] Yi A, Huang C, Klocke F, Brecher C, Pongs G, Winterschladen M, et al. Development of a compression molding process for three-dimensional tailored free-form glass optics. Appl Opt 2006;45:6511–8.
[3] "EURAMET" [Online]. Available: http://www.emrponline.eu/ [accessed 01.14].
[4] Nouira H, Bergmans R, Küng A, Piree H, Henselmans R, Spaan H. Ultra-high precision CMMs as well as tactile and optical single scanning probes evaluation in dimensional metrology. In: CAFMET. 2014.
[5] Chen Z-L, Guo Z-D, Mi Q, Yang Z-Q, Bai R-B. Research of fitting algorithm for coefficients of rotational symmetry aspheric lens. In: 4th international symposium on advanced optical manufacturing and testing technologies: optical test and measurement technology and equipment. 2009.
[6] Moré J. The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory. In: Numerical analysis. Springer; 1978. p. 105–16.
[7] Aceves-Campos H. Profile identification of aspheric lenses. Appl Opt 1998;37:8149–50.
[8] Zhang Z. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting. Im Vis Comp 1997;15:59–76.
[9] Sun W, McBride J-W, Hill M. A new approach to characterizing aspheric surfaces. Precis Eng 2010;34:171–9.
[10] Park H. A solution for NURBS modelling in aspheric lens manufacture. Int J Adv Manuf Technol 2004;23:1–10.
[11] Besl P, McKay N. Method for registration of 3-D shapes. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell 1992;14:239–56.
[12] Rusinkiewicz S, Levoy M. Efficient variants of the ICP algorithm. 3D Dig Im Mod 2001:145–52.
[13] Jiang X, Zhang XSP. Template matching of freeform surfaces based on orthogonal distance fitting for precision metrology. Meas Sci Technol 2010;21:045101.
[14] Nocedal J. Updating quasi-Newton matrices with limited storage. Math Comp 1980;35:773–82.
[15] Zheng W, Bo P, Liu Y, Wang W. Fast B-spline curve fitting by L-BFGS. Comp Aided Geom Des 2012;29:448–62.
[16] Pomerlau F, Colas F, Siegwart R, Magnenat S. Comparing ICP variants on real-world data sets. Auton Robots 2013;34:133–48.
[17] I. 10360-6. Geometrical Product Specifications (GPS) – Acceptance and re-verification tests for coordinate measuring machines (CMM) – Part 6: Estimation of errors in computing Gaussian associated features; 2002.
[18] I. 17450-1. Geometrical Product Specifications (GPS) – General concepts – Part 1: Model for geometrical specification and verification; 2012.
[19] Ahn SJ. Least squares orthogonal distance fitting of curves and surfaces in space. Berlin Heidelberg: Springer; 2004.
[20] I. 10110-12. Optics and photonics – Preparation of drawings for optical elements and systems – Part 12: Aspheric surfaces; 2007.
[21] Kim H-S, Kim E-J, Song B-S. Diamond turning of large off-axis aspheric mirrors using a fast tool servo with on-machine measurement. J Mater Process Technol 2004;146(3):349–55.
[22] Lancaster P. Error analysis for the Newton-Raphson method. Numeri Math 1966;9:55–68.
[23] Süli E, Mayers D. An introduction to numerical analysis. Cambridge University Press; 2003.
[24] Transtrum M, Sethna J. Improvements to the Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization; 2013 arXiv:1201.5885.
[25] Shakarji C. Least-squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system. J Res Natl Inst Stan Technol 1998;103:633–41.
[26] Nocedal J, Wright S. Numerical optimization. New York: Springer; 1999.
[27] Liu D, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large-scale optimization. Math Prog 1989:503–28.
[28] Speer T, Kuppe M, Hoschek J. Global reparametrization for curve approximation. Computer Aided Geometric Design 1998;15:869–77.
[29] Lin Y, Damodharan K, Shakarji C. Standardised reference data sets generation for coordinate measuring machine software assessment. Int J Adv Manuf Technol 2001:819–30.
[30] El-Hayek N, Nouira H, Anwer N, Damak M, Gibaru O. Reconstruction of freeform surfaces for metrology. In: Met. & Props. 2013.
[31] Marsh E. Precision spindle metrology. DEStech Publishing; 2010.
[32] Zhang X, Jiang X, Scott P. A minimax fitting algorithm for ultra-precision aspheric surfaces. J Phys 2011;311:12–31.
[33] Henselman R. Non-contact measurement machine for freeform optics. Eindhoven; 2009, ISBN 978-90-386-1607-0.
[34] Davis E, Roblee J. Comparison of freeform manufacturing techniques in the production of monolithic lens arrays. SPIE 2009;7426.
[35] El-Hayek N, Nouira H, Anwer N, Gibaru O, Damak M. Comparison of tactile and chromatic confocal measurements of aspherical lenses for form metrology. Int J Precis Eng Manuf 2014;15:1–9.
[36] Nouira H, Salgado J, El-Hayek N, Ducourtieux S, Delvallée A, Anwer N. Setup of a high-precision profilometer and comparison of tactile and optical. Meas Sci Technol 2014;25.